



MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Inwiefern kann Descartes mathesis universalis als Basis der modernen Algebra
gesehen werden?

verfasst von | submitted by

Peter Bazil BA

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Arts (MA)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt |
Degree programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 066 944

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student record
sheet:

Interdisziplinäres Masterstudium
Wissenschaftsphilosophie und Wissenschaftsgeschichte

Betreut von | Supervisor:

Ass.-Prof. Dr. Olivier Ribordy MA

Inhalt

Abstract	4
1. Einleitung	5
1.1. Zum Œuvre Descartes in Bezug auf diese Arbeit	7
1.2. Zur Entwicklung einiger Begriffe bei Descartes	10
1.3. Reflexion als Fundament der Gewissheit	13
1.4. Descartes Methode und ihre Beziehung zum Formalismus	19
2. Descartes universelle Methode in den Wissenschaften	21
2.1. Der Stand der Algebra vor Descartes	24
2.1.1. Die cossische Notation der deutschen Rechenmeister	26
2.1.2. Die Einführung der modernen Notation durch François Viète	28
2.2. Descartes Suche nach einer Methode gesicherter Erkenntnis vor 1629	29
2.2.1. Descartes <i>Regulae</i> zur Ausrichtung der Geisteskraft	32
2.2.2. Gewissheit aus Intuition und Deduktion	35
2.2.3. Descartes Methode: Von der <i>mathesis universalis</i> zur <i>methode universalis</i>	36
2.2.4. Die Technik der Algebra als Modell für die Methode	39
2.2.5. Methodische Disziplin zur Unterstützung der Geisteskraft	43
2.2.6. Induktion als hinreichende Ordnung um Unbekanntes zu erkennen	45
2.2.7. Descartes Bedingungen für richtigen Deduzieren	48
2.2.8. Die Selbstverstärkung in der Schaffung von Wissen	50
2.2.9. Die Einheit der Kraft der Erkenntnis der Mannigfaltigkeiten	56
2.2.10. Die algebraische Repräsentation vollständig eingesehener Fragen	61
2.2.11. Geometrische Berechnungen in Regel XVIII	67
2.2.12. Von der cossischen Notation zu abhängigen Bewegungen	70
2.2.13. Von den <i>Regulae</i> zum <i>Discours</i>	71
2.2.14. Der Umstieg auf Viètes Notation	74
2.2.15. Erste Ansätze zur Zusammenführung von Arithmetik und Geometrie	77
2.3. Descartes prosaische Beschreibung physikalischer Phänomene	79
2.3.1. Die relevanten Nebenbedingungen physikalischer Phänomene	81
2.3.2. Descartes und Pierre Fermat	88
2.4. <i>Entwurf der Methode</i> und die Entwicklung der Algebra in der <i>Geometrie</i>	91
2.4.1. Reflexivität im <i>Discours</i>	93
2.4.2. Evidenz durch Kritik und Experimente	99
2.4.3. Der Nachweis der Allgemeinheit der Methode in der <i>Geometrie</i>	102
2.4.4. Descartes Zugang zur Viètes Notation über Beaugrand	104
2.4.5. Die Algebraisierung der klassischen Geometrie	106

2.4.6.	Geometrische Kurven in algebraischer Beschreibung.....	110
2.4.7.	Faktorisierung und allgemeinen Lösung	114
2.4.8.	Rückführung auf das Einfachste.....	115
2.4.9.	Die Universalität der Algebra.....	116
2.5.	Descartes <i>Prinzipien</i> in Bezug auf die Algebra.....	119
2.5.1.	Über die Prinzipien der menschlichen Erkenntnis.....	122
2.5.2.	Die Beziehung von Quantität und Zahl	124
3.	Ausblick auf die Entstehung des Formalismus auf Basis der Algebra.....	127
3.1.	Ignorabimus Streit und Cantors Grundlegung.....	129
3.2.	Russells Paradoxien und Gödels Unvollständigkeit.....	132
3.3.	Universalität einer wissenschaftlichen Methode oder anything goes?.....	134
4.	Zusammenfassung.....	136
5.	Weiterführende Überlegungen	140
	Literaturverzeichnis.....	145
	Primäre Texte	145
	Sekundärliteratur	145

Abstract

Der junge Descartes begann sein Forscherleben damit, Regeln zu verfassen, welche der dem Denken immanenten Geisteskraft eine methodische Ausrichtung geben. Die Form dieser Ausrichtung folgte dem Modell der Algebra, welche als *mathesis universalis* die Schaffung neuen Wissens auf einer universalen Ebene beschreibt. Dazu ist die Algebra aber erst methodisch von Unklarheiten zu bereinigen. Die Regeln sollten also mittels dieser Regeln bereinigt werden. Über ein Jahrzehnt arbeitete er an diesem Regelwerk, welches jedoch unvollendet blieb. Die Methode des geordneten Denkens selbst wurde aber zur Konstanten in seinem Werk, welches ihn sowohl zu seiner fundierten Ontologie (siehe S.60) als auch seiner Wissenschaft führte. Die Universalität dieser Methode zeigte Descartes an unterschiedlichsten, zu seiner Zeit ungelösten Fragestellungen, wie z.B. jener nach der Natur des Lichtes (siehe S.84). Die Lösung eines seit der Antike ungelösten Problems der Geometrie mittels der arithmetischen Algebra (siehe S.26) führte zur Analysis, welche nach Descartes auf die Komplexen Zahlen erweitert zum Formalismus führte: Die Mathematik wurde zur Grundlage des technischen Fortschritts. Die Welt schien mit den Regeln der Mathematik vollständig beschreibbar zu sein (siehe S.130).

Diese Arbeit zeigt, dass Descartes sich gegen die Mathematisierung der Wissenschaften gewehrt und eine jederzeitige Gewissheit auf jeder Stufe der Erkenntnis gefordert hat (siehe S.91). Auch wenn seine Methode als Regelwerk zur modernen Mathematik geführt hat, lehnte er Vorgangsweisen ab, die zwar regelkonform aber dem menschlichen Geist uneinsehbar sind. Die seiner Methode immanente Suche nach Gewissheit verbietet alles Zweifelhafte. Meinungen und Wahrscheinliches sind genau so wenig ein Fundament für Wissen, wie in rhetorischen Regeln versteckte Anweisungen (siehe S. 51). Der klassische Descartes baute seine Welterkenntnis über diesem Fundament auf und lehnte allein in ihrer sprachlichen begründete Aussagen, seien es Syllogismen oder algebraische Gleichungen, für die Schaffung neuen Wissens ab (siehe S.79).

Gewissheit erlangt man aus der intuitiven Erkenntnis nicht weiter reduzierbarer Gegebenheiten und der schrittweisen, aber kontinuierlichen Deduktion auf bisher Unbekanntes, welches aber bereits im intuitiv erfassten enthalten ist (siehe S.36). Gleichungen sind Schreibweisen in denen bekannte Größen mit Unbekannten verglichen werden. Der geordnete Vergleich erlaubt die Lösung sofern genügend Relationen erkannt worden sind und diese in nachvollziehbarer Rückabwicklung der Ordnung die Unbekannten zu Bekanntem machen (siehe S.32). Dieser Prozess des Erkennens von Relationen fordert die Kompetenzen des Verstandes,

die aber prinzipiell allen Menschen gegeben sind. Durch Übung erfahren diese Kompetenzen eine Selbstverstärkung, wie Descartes es für sich bei der Algebra erfahren hat (siehe S.51). Die methodische Reinigung der Algebra war wohl auch ein Lernprozess für Descartes. Gewissheit ist persönlich. Für Descartes ist diese dann gegeben, wenn das zu Erkennende als klare und deutliche Idee eingesehen wird. Eine derartige Idee ist auch notwendigerweise wahr, da sie aus anderen Gewissheiten deduziert wurde (siehe S.54).

Descartes Ablehnung diverser mathematisch begründeter Erklärungen war oft falsch und die Mathematisierung der Wissenschaften hat zu neuem Wissen geführt. Trotzdem war seine Ablehnung einer rein regelbasierten Wissenschaft nicht falsch, wie Kurt Gödel schließlich in seinem Unvollständigkeitssatz nachgewiesen hat (siehe S.132f). Gewissheit verlangt auch ein über die Regel hinausgehendes Grundverständnis. Descartes suchte dieses Grundverständnis nicht nur in den zu erschließenden Zusammenhängen in der menschlichen Vorstellung, sondern auch ganz praktisch im Erleben. Bereits in der Formulierung seiner Regeln verlangt er nach Experimenten (siehe S.45).

1. Einleitung

Der damals knapp dreiundzwanzigjährige René Descartes begann bereits 1619 mit der Beschreibung einer universellen Methode zur Schaffung neuen Wissens. Diese Methode schälte er am Modell der *mathesis universalis* aus der damaligen Algebra heraus, wobei auch dieser Prozess des Herausschälens selbst methodisch erfolgte. Damit wurde in diesem Prozess diese Methode reflexiv auf ihre eigene Formung angewandt. Aufbauend auf den diesem Prozess zugrunde liegenden Überlegungen entwickelte er bis 1628 eine *methode universalis* als universaler Methode für alle Disziplinen der Wissenschaft. So soll neues gesichertes Wissen über die Welt erlangt werden können. Descartes hielt seine Überlegungen zur Entwicklung dieser universellen Methode in Tagebuchnotizen fest, welche posthum als *Regeln zur Ausrichtung der Geisteskraft und private Gedanken* (im folgenden *Regulae*) publiziert wurden. Für Descartes ist diese Methode das Fundament für die Schaffung neuen Wissens. Die Methode stellt Relationen zwischen Gegebenheiten in der Welt mittels Vergleichen her und drückt diese physikalisch erfassbaren Eigenschaften in algebraischen Gleichungen aus. Nach 1628 brach er die Ausarbeitung dieser Überlegungen ab. Für seine künftigen Arbeiten wechselte er einerseits von der bis dahin von ihm verwendeten cossischen Notation der Algebra zu jener, welche François Viète bereits eine Generation vorher für algebraische Formulierungen entwickelt hatte. Andererseits arbeitete er daran, diese Methode in einer allgemeinen sprachlichen Form auf physikalische Probleme anzuwenden. Am Beispiel des Lichts und dessen Rezeption in der

menschlichen Wahrnehmung versuchte er methodisch zu erklären, wie die Welt funktionieren könne. Die Verurteilung Galilei Galileis 1633 veranlasste ihn dazu, dieses Werk für die Zeit seines Lebens für die Publikation zu sperren. Stattdessen veröffentlichte Descartes 1637 seine in nunmehr vier Maximen zusammengefasste Methode als Entwurf und zeigte in drei angehängten Essays, wie diese Methode angewandt werden müsse. Ein Essay, *La Géométrie* (im folgenden *Geometrie*), schaffte dabei die Verknüpfung klassischer Geometrie mit Algebra und legte so einen Grundstein für die moderne Mathematik als universelles Mittel zur Beschreibung der Welt. Descartes Methode sucht, ausgehend vom intuitiv erfassbaren Einfachsten, durch Deduktion aus den sicher erkannten Verhältnissen in einer nachvollziehbaren Ordnung zu einer Erklärung des Kompliziertesten zu gelangen. Bisher Unbekanntes wird so klar und deutlich und damit sicher erkannt zu neuem Wissen. Diese von ihm im Laufe seines Lebens aus immer neuen Perspektiven beschriebene Methode und die ihr von Descartes beigemessene Universalität steht im Zentrum meiner Arbeit.

In der Regel IV der *Regulae*, stellt Descartes die Algebra vor, welche als *mathesis universalis* bzw., wegen der von ihm postulierten Einheit der Wissenschaft in gereinigter Form als *methode universalis*, einen Grundstein für den regelbasierten Formalismus legte, welcher im 19. Jahrhundert mit der Analysis die Basis zur Darstellung naturwissenschaftlicher Probleme in der Moderne durch die Mathematik schuf. Der Mathematik wurde die Mächtigkeit zugeschrieben, jedes Problem zu lösen, sofern man dieses in all seinen Bedingungen adäquat formulierte. Dieser Anspruch deckt sich mit jenen Regeln der vollständigen, geordneten Rückführung auf intuitiv einsehbare Gewissheiten wie sie von Descartes in den *Regulae* formuliert wurden.

In dieser Arbeit argumentiere ich, dass Descartes auf reflexive Weise aus einer zunächst unklaren und undeutlichen Algebra seine wissenschaftliche Methode formte, mit welcher, auf dem Fundament von Gewissheit, neues Wissen in strukturierter Form geschaffen wird. Die Methode formalisiert damit den Erkenntnisprozess. Dieser Prozess selbst ist in seinem methodischen Ansatz reflektiv fundiert. Mittels Reflexivität wird die in der Wissenschaft anzuwendende Methode rekursiv aus sich selbst, quasi als Meta-Methode, abgeleitet. Diese Meta-Methode kann so als Metasprache zur Objektsprache der operativen Methode selbst verstanden werden. Eine Unterscheidung zwischen Metasprache und Objektsprache gab es zur Zeit Descartes nicht. Bertrand Russell zeigte 1902 am Beispiel der Mengenlehre, dass Reflexivität in formalen Systemen zu Widersprüchlichkeiten führen kann (cf. Gabriel 59, Brief XXXVI/I Russell an Frege vom 16.6.1902). Tatsächlich bewies Kurt Gödel, dass kein formales

System seine eigene vollständige Widerspruchsfreiheit aus seinen eigenen Regeln und Axiomen allein erklären kann (cf. Linnebo, 70). Die von Descartes ursprünglich vorgeschlagene Reinigung des Formalismus dieser universellen Methode mit den Mitteln dieses Formalismus selbst kann diesen nicht vollständig fundieren. Descartes reflektive Anwendung seiner universellen Methode führt durch die Arbeit. Ich zeige, wie sich bei Descartes die Suche nach Gewissheit in der Anwendung seiner Methode änderte und wie der Formalismus diese Entwicklung auf andere Art wiederholte.

1.1. Zum Œuvre Descartes in Bezug auf diese Arbeit

In dieser Arbeit beziehe ich mich auf die wesentlichen erkenntnistheoretischen Werke Descartes, welche die Entwicklung seiner persönlichen Erkenntnis zum Schaffen von Wissen widerspiegeln. Dabei folge ich der Chronologie seines Schaffens. Dieses ist aber kein linearer Prozess der Erkenntnis, sondern immer wieder von Brüchen seiner persönlichen Erkenntnis gekennzeichnet. Als Primärquellen verwende ich die im Meiner Verlag erschienenen deutschen Übersetzungen seiner Werke und zitiere mit Bezug auf Charles Adam und Paul Tannery, welche das Gesamtwerk Descartes 1906 in elf Bänden als *Œuvres de Descartes*, in den jeweiligen Originalsprachen Französisch bzw. Latein zusammenstellten (cf. Wohlers 2011, LXXIX) mit „AT Band NR., Seite, Zeile“. Dazu stelle ich meine Abkürzung des Werkes und die Seite bzw. Stelle der bei Meiner herausgegeben deutschen Übersetzung.

Die von Descartes verwendeten Begriffe spiegeln seinen wissenschaftlichen Entwicklungsprozess. Bei allen Umbrüchen zeigt sich dabei eine Konstante in der Forderung nach einer universellen Methode, welche frei von Meinung und Zufall auf nachvollziehbare Weise zunächst nach dem zu Erkennenden fragt und aus dieser methodisch geordneten Fragestellung die Antwort generiert. Die Methode ergibt sich durch Rückführung komplexer Gegebenheiten auf intuitiv erfassbare Elemente einfacher Natur und der Relation dieser Intuitionen zu einem Ganzen. Die Elemente können so in Bezug auf ihre Zahl und Größe durch Zeichen repräsentiert und mittels dieser Zeichen mathematisch beschrieben werden. Diesen mathematischen Zugang beschreibt Descartes in den zwischen 1619 und 1628 entstandenen *Regulae* (zitiert mit „(AT X, Seite, Zeile; *Regulae*, Seite bei Meiner, Stellenangabe in deutscher Übersetzung)“).

Der erste Ertrag dieser Methode bestehe darin, daß sie im Vorwege sichtbar werden lasse, ob die Proposition möglich sei oder nicht, weil sie sie mit einer Erkenntnis (*connaissance*) und einer Gewißheit (*certitude*) prüfe und absichere (*assurer*), die der der Regeln der Arithmetik entspreche. (Wohlers 2011a, XXXVI)

Für Descartes basiert Erkenntnis auf der Intuition unwiderlegbarer Erfahrungen des Verstandes und der „Ent-Deckung“ durch Deduktion von in diesen Erfahrungen enthaltenen Gegebenheiten. Für ihn stellen nur Intuition und Deduktion sicher, dass Erkanntes nicht auf Täuschung oder Meinung beruht (cf. AT X, 368,9-13; Regulae, 17, 8,8-11).

Unter Intuition verstehe ich nicht das Vertrauen in die unbeständigen Sinne oder das trügerische Urteil einer schlecht zusammensetzenden Anschauung, sondern einen so einfachen und deutlichen Begriff des reinen und aufmerksamen Geistes, daß über das, was wir einsehen, schlichtweg kein Zweifel mehr übrigbleibt. Oder, was dasselbe ist: einen zweifelsfreien Begriff des reinen und aufmerksamen Geistes, der allein im Licht der Vernunft seine Wurzel hat und deshalb sogar gewisser ist als die Deduktion selbst, weil er einfacher ist als sie, die ihrerseits freilich vom Menschen auch nicht verkehrt durchgeführt werden kann, worauf wir oben bereits hingewiesen haben. (AT X, 368,14-22; Regulae, 17/19, 8,12-20)

Das streng methodische Vorgehen darf bei Descartes aber niemals den Bezug zum zu Erkennenden verlieren. Methodische Strenge, wie sie in den Regeln der Arithmetik gegeben ist, dient dieser Vergewisserung in instrumentaler Weise aber nicht als Selbstzweck. Die Form der Repräsentation selbst, welche von ihren eigenen Regeln und Grenzen bestimmt ist, ist kein Surrogat für Gewissheit. Am Beispiel des Lichts zeigt Descartes in der erst posthum publizierten, aber schon 1633 zur Zeit der Verurteilung Galileis weitestgehend fertigen *Die Welt. Abhandlung über das Licht. Der Mensch.* (im Folgenden mit *Le Monde* bezeichnet, zitiert mit „(AT XI, Seite, Zeile; Le Monde, Seite bei Meiner)“), wie seine Methode in allgemein sprachlicher Form neues Wissen über die Gegebenheiten der Welt schaffen kann. Ab 1629 ist Descartes Schaffen durch seinen Schriftwechsel mit Marin Mersenne dokumentiert, einer Drehscheibe des mathematischen und wissenschaftlichen Austauschs in Paris. In diesem umfangreichen Schriftwechsel (er füllt die Bände I bis IV bei Adam und Tannery) positioniert sich Descartes unter anderem gegen eine rein mathematisch formulierte Repräsentation der Welt. Ich zitiere im Folgenden aus dem Schriftwechsel unter Angabe des Briefdatums und mit „(AT I-IV, Seite; Mersenne, Seite bei Meiner)“.

Statt seiner in *Le Monde* angestellten Überlegungen zu Erklärungen physikalischer Erscheinungen in der Welt veröffentlicht er 1637 seinen Entwurf einer wissenschaftlichen Methode gemeinsam mit drei Essays, in welchen diese Methode auf unterschiedlichste Bereiche angewandt wird. Der *Discours de la Méthode*, im Folgenden *Entwurf der Methode* besteht aus vier Schriften. Die erste Schrift präsentiert seine auf vier Maximen kondensierten Regeln im (im Folgenden *Discours*, zitiert mit „(AT VI, Seite, Zeile; Discours, Seite bei Meiner)“). Danach stellt er in *Die Dioptrik* seine zum Wesen des Lichts gemachten Überlegungen vor (im Folgenden *Dioptrik*, zitiert mit „(AT VI, Seite, Zeile; Dioptrik, Seite bei Meiner)“). Im Essay *Die Meteore* wendet er seine Methode auf die Erklärung atmosphärischer

Erscheinungen, wie des Regenbogens an (im Folgenden *Meteore*). Die letzte Schrift *La Géométrie* (zitiert mit „(AT VI, Seite, Zeile; Geometrie, Seite bei Meiner)“) begründet die moderne Mathematik, indem Descartes geometrische Probleme mit Hilfe der arithmetischen Algebra in Anwendung seiner Methode löst und so die Universalität dieser Vorgangsweise, eben durch die Integration von Arithmetik und Geometrie, dokumentiert.

Für Descartes war methodisches Vorgehen der einzig gangbare Weg Erkenntnis zu fundieren und gegen Zufälligkeiten und Meinungen abzusichern. Gleichzeitig mit seiner Arbeit an *Le Monde* begann er mit den Arbeiten zu seinem ontologischen Hauptwerk, *Die Meditationen über die erste Philosophie* (im Folgenden *Mediationen*, zitiert mit „(AT VII, Seite, Zeile; Meditationen, Seite bei Meiner)“), welche bereits 1637 fertig waren (cf. Wohlers, 2009, XIII) und 1641 mit einer Widmung an die theologische Fakultät der Sorbonne publiziert wurden. In diesem Werk legt er die Basis für seine Auffassung von Erkenntnis als einer unzweifelhaften Vorstellung von Ideen, welche sich aus unwiderlegbaren Intuitionen der Realität speist. Die so erfasste Realität gibt Gewissheit, dass die in einer Vorstellung beschreibbare Realität existiert. Descartes ist die Differenz zwischen der Beschreibung der Realität und der Realität selbst bewusst. Er lehnt ein rein syntaktisches Vorgehen, welches sich in rein algorithmischen Repräsentationen erschöpfen kann, ab. Erkenntnis muss immer auf reale Existenz rückgebunden sein. Aufbauend auf den *Meditationen* entwickelt sich der Briefwechsel mit Elisabeth von der Pfalz. Ich zitiere daraus mit Verweis auf „(AT III bzw. IV, Seite, Zeile; Pfalz, Seite bei Meiner)“. Descartes widmet 1644 eines seiner letztes, zu seinen Lebzeiten erschienenen Werke, *Die Prinzipien der Philosophie* (im Folgenden *Prinzipien*, zitiert mit „(AT VIII/1, Seite; Teil Nr., § Nr., Prinzipien, Seite bei Meiner)“) Elisabeth von der Pfalz. In den *Prinzipien* betont Descartes, dass Erkenntnis in der Erkennenden entsteht, wenn ihr ihre Vorstellungen selbst klar und deutlich sind. Nur dadurch kann jene Gewissheit über neues Wissen entstehen, von dem aus Schritte zur Erkenntnis von bisher Unbekanntem gesetzt werden können. Für den Übersetzer der *Prinzipien* vom Lateinischen ins Französische, seinen persönlichen Freund Claude Picot, verfasste Descartes eine als Vorwort gedachte Zusammenführung seiner 1645 erreichten philosophischen Position. In diesem *Brief an Picot* betont er die Bedeutung von Klarheit und Notwendigkeit, damit der menschlichen Erkenntnisapparat Kausalitäten erfassen kann. Auf diesen Brief beziehe ich mich mit „(AT VIII/2, Seite, Zeile; Nr., Seite bei Meiner)“.

Im Eingang zu dieser Arbeit präsentiere ich nun die Entwicklung der Begriffe von „Idee“ und „Erkenntnis“ bei Descartes. Dabei soll deutlich werden, dass die „Repräsentation“ von

Gegebenheiten in Begriffen erfolgt, und für Descartes die Abstraktion dieser Abbildung selbst zu einem methodischen Werkzeug wurde. Die Abstraktion darf nicht an abstrakte Regeln, wie scholastischer (AT X 389,11-18; *Regulae*, 53, 23,30-33) oder algebraischer Formen gebunden sein, sondern muß allgemein verständlich, immer auf das zu Erkennende rückgebunden bleiben (z.B. AT V, 141,14-142,4; Mersenne, 575f, Brief vom 4.4.1648). Dabei muss Erkenntnis auf allen Stufen dem Anspruch von „Klarheit und Deutlichkeit“ entsprechen.

1.2. Zur Entwicklung einiger Begriffe bei Descartes

In den *Regulae* beginnt Descartes sich mit den Funktionen und Kompetenzen der menschlichen Wahrnehmung auseinanderzusetzen. Die Kraft der Erkenntnis ist dabei eng mit Ideen verknüpft:

im eigentlichen Sinne Geisteskraft nennt man [die Kraft der Erkenntnis] aber dann, wenn sie entweder in der Phantasie neue Ideen bildet, oder sich auf bereits vorliegende stützt. (AT X 416, 10-13; *Regulae*, 99, 44,4-6).

Während in den *Regulae* noch keine Differenzierung zwischen den körperlichen und geistigen Sphären ausformuliert ist, bestimmte er im Juli 1641 die „Idee“ als Bezeichnung für im Geiste erfasste Gegebenheiten und unterscheidet sie so von aus körperlichen Wahrnehmungen konstruierten Abbildern der Anschauung.

Denn ich nenne mit dem Namen *Idee* nicht einfach die Bilder, die in der Phantasie aufgezeichnet sind; ich nenne sie umgekehrt überhaupt nicht bei diesem Namen, insofern sie in der körperlichen Phantasie sind, sondern ich nenne mit dem Namen *Idee* allgemein alles, was in unserem Geist ist, wenn wir ein Ding auffassen, in welcher Art und Weise wir es auch auffassen mögen. (AT III, 392,23-393,2; Mersenne, 471f)

In diesem Brief setzt er diese Unterscheidung zwischen Anschauung und Idee am Begriff von „Gott“ als Beispiel für die sprachliche Ausdrucksmöglichkeit fort.

Aber in welcher Art und Weise man [Gott] auch auffassen mag, man hat eine Idee von ihm, da wir, wenn wir verstehen, was wir sagen, durch unsere Worte nichts ausdrücken können, ohne daß es dadurch gewiß ist, daß wir in uns die Idee des Dinges haben, das durch unsere Worte bezeichnet wird. (AT III, 393,13-19; Mersenne, 476)

Für Descartes können Ideen – wie jene Gottes – angeboren sein. Sie können aber auch aus Erfahrungen erworben oder durch Geisteskraft selbst erzeugt werden. Diese Unterscheidung unterschiedlicher Hervorbringungsweisen von Ideen ist für ihn wesentlich, um jeden Zirkelschluss von der Definition einer Gegebenheit auf die erzeugte Idee selbst zu vermeiden. Im Brief vom 16. Juni 1641 schreibt er Mersenne:

Aber weil derjenige, der danach fragt, was ich unter dem Wort *Idee* verstehe, weitere Einwände zu versprechen scheint und weil die Weise, in der er beginnt, mich erwarten läßt, daß die Einwände, die von ihm noch kommen werden, die besten und stärksten sein werden, die sich erheben lassen, können Sie ihn, falls er zufällig meine Antwort darauf abwarten sollte, bevor er

andere schicken wollte, die Substanz wissen lassen. Diese Substanz besteht darin, daß ich unter dem Wort *Idee* alles verstehe, was in unserem Denken sein kann, und daß ich dabei drei Arten unterschieden habe: Einige nämlich sind *erworbene*, wie die Idee, die man gemeinhin von der Sonne hat; andere sind *gemachte* oder *erzeugte*, in welche Kategorie man jene setzen kann, die die Astronomen durch ihre Überlegung von der Sonne zustande bringen; und wieder andere sind angeborene, wie die Idee Gottes, des Geistes, des Körpers, des Dreiecks und allgemein alle, die irgendwelche wahren, unveränderlichen und ewigen Wesen darstellen. Wenn ich nun aber aus einer gemachten Idee das schlösse, was ich explizit in sie gesetzt habe, als ich sie erzeugte, so wäre das eine offenkundige *petito principii*; aber wenn ich aus einer angeborenen Idee etwas entnehme, was zwar implizit in ihr enthalten war, ich aber vorher in ihr nicht bemerkte – wie aus der Idee des Dreiecks, daß seine drei Winkel gleich zwei rechten sind, oder aus der Idee Gottes, daß er existiert usw. –, dann ist das so weit entfernt davon, eine *petitio principii* zu sein, daß es vielmehr, auch nach Aristoteles, die vollkommenste Beweisart von allen ist, nämlich jene, in der die wahre Definition der Sache als Mittelsatz genommen wird. (AT III, 382,7-383,20 Mersenne, 465f)

Das Ergebnis einer Idee, welche sich bewahrheitet hat, ist Erkenntnis. Ohne Evidenz verbleibt sie eine Meinung, Vermutung oder Möglichkeit. Ausgehend von den angeborenen Ideen gewinnt der Mensch aus erworbenen und vermittelt bewahrheiteter erzeugter Ideen im Laufe seines Lebens neue Erkenntnisse. Jede Erkenntnis ist damit höchst persönlich. Die Bewahrheitung der ihr zugrunde liegenden Idee ist dabei zwar oft nur eine hinreichende Bewährung aber jedenfalls notwendig, um von einer reinen Meinung oder Vermutung unterschieden zu werden. In seinen in den *Regulae* enthaltenen *Privaten Gedanken* schreibt Descartes:

Die Erkenntnis des Menschen von natürlichen Dingen ist nur über die Abbilder derjenigen möglich, die in den Sinn fallen. Deshalb meinen wir auch, derjenige philosophiere wahrheitsgemäßer, der die fraglichen Dinge besser den sinnlich Erkannten angleichen kann. (AT X, 218,21-219,2; *Regulae*, 199)

Sowohl die Evidenz der Bewahrheitung als auch die Repräsentation sind notwendige Bedingungen, um Erkenntnis und damit neues Wissen zu schaffen (cf. AT X, 362, 1-4; *Regulae*, 7). Wie sich diese Erkenntnis methodisch sicher aus Induktion, Deduktion und einer geordneten Suche nach Zusammenhängen beschreiben läßt ist Gegenstand der *Regulae* in ihrer Gesamtheit. Dabei ist Evidenz der erzeugten Erkenntnis die Basis jeder Gewissheit. Für wahr Gehaltenes ist nicht notwendigerweise wahr. Erkenntnis beginnt mit der kritischen Überprüfung aller bisher für wahr gehaltenen Annahmen. Descartes macht nach den *Regulae* den Zweifel zur Basis seiner Methode der Erkenntnis.

Da ich aber allein der Erforschung der Wahrheit nachzugehen wünschte, dachte ich, es wäre angemessen, wenn ich das genaue Gegenteil täte und alles als absolut falsch zurückwies, in dem ich mir auch nur den geringsten Zweifel vorstellen konnte, um zu sehen, ob danach von meinen Überzeugungen überhaupt etwas übrig bliebe, das völlig unbezweifelbar wäre. (AT VI 31,14-25; *Discours*, 29)

Descartes ist sich bewusst, dass die Forderung nach radikalem Zweifel mit Spitzfindigkeit gegen jede behauptete Erkenntnis angewandt werden kann. Die Spannung zwischen berechtigter und spitzfindiger Kritik zieht sich durch seine Korrespondenz mit Mersenne. Am 20. April 1637 schreibt er im Zusammenhang mit der bevorstehenden Publikation des *Discours* zu seiner Beweisführung der Existenz Gottes:

Das habe ich vor allem deshalb ganz mit Absicht und Bedacht ausgelassen, weil ich in der Umgangssprache geschrieben habe, aus Angst, daß schwache Geister sonst dazu kämen, in erster Linie begierig die Zweifel und Bedenken in sich aufzunehmen, die ich hätte vorlegen müssen, aber die Gründe, durch die ich versucht hätte, sie ihnen wieder zu rauben, nicht in derselben Weise hätten begreifen können und ich sie so in eine Klemme gebracht hätte, vielleicht ohne sie wieder herauszuziehen. (AT I, 349,43-49; Mersenne, 125)

Mit Sprache drücken wir unsere Ideen aus und beziehen die verwendeten Begriffe auf die zu erkennenden Gegebenheiten. Die Sprache ist eine abstrakte Form der Repräsentation dieses zu Erkennenden. Wesentlich ist, dass die Repräsentation eindeutig an diese zu erkennende Realität gebunden ist. Jede relevante Änderung der Realität muss zu einer Änderung der Repräsentation führen (cf. AT X 413, 9-20; *Regulae*, 95, 42,3-14). In den *Regulae* nimmt Descartes die Algebra zum Modell einer solchen in ihren mathematischen Prinzipien immer wahren symbolischen Repräsentation (cf. AT X 373, 9-24; *Regulae*, 27, 12,2-12). Genauso wie die Laute eines Wortes oder Begriffs keine direkte Ähnlichkeit mit dem Bezeichneten selbst haben, genauso abstrakt sind die algebraischen Symbole. Veränderungen, zum Beispiel durch Bewegung oder Verformung, eines zu Erkennenden können numerisch in Beziehung zu anderen Gegebenen am Modell der Algebra symbolisch abgebildet werden. Diese modellhafte Qualität der Algebra ist für Descartes der entscheidende Schritt zu einer gelungenen Repräsentation. Diese stellt in der Realität Gegebenes und zu Erkennendes in klare und deutliche, also eindeutig fassbare Beziehungen zueinander.

In den *Meditationen* bestimmt Descartes sich selbst als denkende Substanz als erste unzweifelhafte, klare und deutliche Erkenntnis (cf. AT VII, 28,20-23; *Meditationen*, 32). Klarheit und Deutlichkeit, wie sie im Modell algebraischen Operationen nach mathematischen Regeln gegeben sind, sind notwendige Voraussetzungen für Erkenntnis. Er stellt fest:

Demnach scheint es mir möglich, als allgemeine Regel aufzustellen, daß alles das wahr ist, das ich äußerst klar und deutlich erfasse. (AT VII, 35,13; *Meditationen*, 39f).

Eine Repräsentation hat die Veränderungen im Gegebenen und zu Erkennenden klar und deutlich, also eindeutig widerzuspiegeln. Verschiedenheit in der Welt benötigt Verschiedenheit in der Repräsentation.

Weil ich ja weiß, daß alles, was ich klar und deutlich einsehe, genau so von Gott erzeugt worden sein kann, wie ich es einsehe, ist es ausreichend, daß ich ein Ding ohne ein anderes klar und

deutlich einsehe, um sicher zu sein, daß das eine vom anderen verschieden ist, weil es zumindest von Gott getrennt gesetzt werden kann. (AT VII, 78,2-8; Meditationen, 85)

Die für Erkenntnis notwendige Gewissheit folgt aus der klar und deutlich eingesehenen Bewahrheitung einer Idee. Diese Evidenz erfolgt durch abstrakte Repräsentationen, welche sich am Modell der Algebra orientieren.

1.3. Reflexion als Fundament der Gewissheit

Während das Wesen seiner Methode bei Descartes Zeit seines Lebens unverändert blieb, hat er ihre Anwendung entsprechend seinen Erfahrungen deutlich verändert. Dabei hat sich im Laufe seines Lebens das Verhältnis von (i) der Überlegung der methodischen Bestimmung der Methode durch die Methode selbst zu einer (ii) integralen Funktion der Reflexion in der Anwendung der Methode entwickelt. Die Spannung zwischen Meta- und Objektsprache hat sich so von der Konstruktion der Methode auf ihre Anwendung verschoben. Reflexivität als Suche nach einer klaren und deutlichen Gewissheit war für Descartes das Fundament seiner Forschung: in der Entwicklung der Methode, in der Entwicklung wissenschaftlicher Techniken genauso wie in der Untersuchung relevanter Phänomene. In seiner Einleitung zur deutschen Übersetzung der 1644 von Descartes in Latein publizierten *Prinzipien der Philosophie* (im folgenden *Prinzipien*) schreibt Christian Wohlers:

Das Denken René Descartes' ist gleichsam in sich selbst gespiegelt, und dementsprechend ist die Physik nur eine dieser Spiegelungen. Descartes betreibt nicht einfach Physik als (mehr oder weniger) empirische Forschung, sondern er versucht, im Prozeß des empirischen Forschens diesen Prozeß selbst zu begreifen und zu bestimmen. (Wohlers 2005, XV)

Descartes stellt „die Frage nach dem Fundament allen Wissens [...] und der Methode, dieses Wissens habhaft zu werden“ (Wohlers 2005, XV). Ich leite meine Beschreibung dieser Suche Descartes nach der einen, universellen Methode in den Wissenschaften ein mit

- (i) den 1641 erschienen *Die Meditationen über die erste Philosophie* (im folgenden *Meditationen*) und der darin formulierten „reale[n] Unterscheidung der menschlichen Seele vom Körper“ (AT VII 6,14-15; Meditationen, 8) und
- (ii) dem in seinen *Prinzipien* formulierten „ego cogito, ergo sum“ (AT VIII/1 7; 1.§7, Prinzipien, 14),

um zu zeigen, dass sich Reflexivität durch sein gesamtes Œuvre zieht. „Cogito“ als „ich denke“ wird erst durch das reflexive Bewusstwerden dieses eigenen Denkens zur Basis für „ergo sum“. Solange „ich denke“ ohne, dass ich mir dieses Aktes bewusst wäre, verbliebe die Aussage in der Objektsprache (cf. AT VII, 27,12-17; Meditationen, 30). Erst durch die Reflexion aus der Metaebene des Bewusstseins kann der Schluss gezogen werden, dass

tatsächlich etwas gedacht wird. Diese Reflexion erfolgt durch einen Denkakt. Tätigkeiten außerhalb eines derartigen Denkaktes, z.B. "ich gehe" sind daher nicht fundamental: sie könnten auch nur geträumt oder anders vorgestellt sein. Im Austausch mit Marin Mersenne, seiner Pariser Drehscheibe zu anderen Philosophen, Mathematikern und Physikern dieser Zeit, beschreibt Descartes seine Auffassung der reflexiven Beziehung zwischen dem Selbst, dem Denkakt und dem Bewusstsein in einem Brief vom 31.12.1640:

Was das betrifft, was ich sodann bringe, daß »nichts in mir, d. h. in meinem Geist, sein kann, dessen ich mir nicht bewußt bin«, so habe ich es in den *Meditationen* nachgewiesen, und es folgt daraus, daß die Seele sich vom Körper unterscheidet und ihr Wesen darin besteht, zu denken. (AT III 273,11-15; Mersenne, 433)

Für Descartes bedingt der Denkakt ein Bewusstsein, welchem deutlich klar ist, dass es denkt. Die Aussage "ich denke" wird damit synonym zur Aussage "ich bin mir jederzeit bewusst, dass ich denke". Damit wird aus der Objektebene des Denkens an sich eine Aussage auf einer Metaebene über das denkende Bewusstsein des Denkens. Im Juli 1641 schreibt Descartes an Mersenne:

Was die Seele betrifft, so ist das ein noch klarerer Sachverhalt. Denn da sie, wie ich bewiesen habe, nur etwas ist, das denkt, ist es unmöglich, daß wir jemals an irgend etwas denken können, ohne daß wir gleichzeitig die Idee von unserer Seele haben als etwas, das fähig ist, alles zu denken, was wir denken. (AT III 394,14-18; Mersenne, 473)

Sich seiner selbst bewusst zu sein, wird damit das Fundament, um sich über die im eigenen Verstand liegenden Möglichkeiten der Erkenntnis klar zu werden. Denken und Selbstbewusstsein stehen so in einer unauflösbaren ständigen reflexiven Beziehung.

Im Akte des Selbstbewußtseins versichern wir uns nicht nur unserer Existenz als solcher, sondern wir werden in ihm auch eine bestimmte Beschaffenheit unseres Ich gewahr. (Cassirer, 59)

Die den Denkakten entspringende Permanenz des Bewusstseins führt Descartes noch weiter, zur Idee der denkenden Seele als Wesen eines jeden Selbst und schließlich zur klaren und deutlichen Idee eines "unbegreiflichen" Gottes wie er im Juli 1641 an Mersenne schreibt (cf. AT III, 393,25; Mersenne, 472). „Gott“ als höchster, objektivster Begriff einer in der Metasprache allumfassenden Idee bleibt subjektiv in der Objektsprache unbegreiflich. Liegt die Ursache dieser Idee in ihrer Definition oder einer ihr zugrunde liegenden Existenz Gottes? Descartes sieht in der Existenz einer allen Menschen angeborenen Idee Gottes die Notwendigkeit ihrer Existenz als erster Ursache.

Ebenso, wie nämlich der objektive Gehalt dieser Idee [Gottes] irgendeine Ursache haben muß, nämlich das Wissen dieses oder eines anderen Technikers, von dem er sie übernommen hat, kann die Idee Gottes, die in uns ist, allein Gott selbst zur Ursache haben. (AT VII 14,31-15,2; Meditationen, 15)

In den *Meditationen* bestimmt er das Wesen der im Begriff „Gott“ enthaltenen Idee als Urgrund vollständiger Wahrheit:

Unter dem Namen *Gott* verstehe ich eine bestimmte unendliche, unabhängige, höchster Einsicht fähige, allmächtige Substanz, von der sowohl ich selbst, als auch alles andere, was es auch sei, geschaffen ist, falls irgendetwas anderes vorhanden sein sollte. [...] Denn da [die Idee Gottes] ganz klar und deutlich ist und mehr objektive Realität als irgendeine andere enthält, gibt es keine, die aus sich selbst heraus wahrer ist, und die auf einen geringeren Verdacht der Falschheit trifft. (AT VII 45,11-46,11; *Meditationen*, 50)

In seiner an Descartes gerichteten, wohlwollenden Kritik ob dessen Deduktion der Existenz Gottes aus der Definition des Begriffs selbst, nimmt der Scholastiker Johannes Caterus 1640 Bezug (cf. Wohlers 2009b, XXIX). Er weist auf diese Vermengung von Objekt und Bestimmung des Objekts hin:

Selbst wenn man zugibt, daß das höchstvollkommene Seiende allein schon in seinem Namen die Existenz herbeiführt, folgt gleichwohl noch nicht, daß eben diese Existenz in der dinglichen Natur aktuell etwas ist, sondern lediglich, daß mit dem Begriff eines höchsten Seienden der Begriff der Existenz untrennbar verbunden ist. (AT VII 99,13-17; *Meditationen*, 109)

In seiner Erwiderung auf diesen Einwand stellt Descartes die Bestimmung dessen, was eine „Idee“ ist und was diese Idee verursacht hat in den Mittelpunkt (AT VII 8,16-28; *Meditationen*, 111). Ein Plan mag als Idee nur in Gedanken existieren. Er ist aber nichtsdestotrotz notwendigerweise existent als Voraussetzung für seine Umsetzung. Die Umsetzung bedarf der Idee und die Idee bedarf einer Ursache, welche diese Umsetzung bereits enthält.

Wenn jemand die Idee einer Maschine hat, in der jeder nur erdenkliche Gehalt tatsächlich enthalten ist, leitet er daraus zu Recht ab, daß diese Idee von irgendeiner Ursache ausgegangen ist, in der der gesamte erdenkliche Gehalt tatsächlich existierte, wenn er auch vielleicht in ihr nur objektiv ist. Da wir in uns eine Idee Gottes haben, in der jede denkbare Vollkommenheit enthalten ist, kann mit derselben Begründung daraus ganz evident geschlossen werden, daß diese Idee von einer Ursache abhängt, in der diese gesamte Vollkommenheit ebenfalls vorhanden ist, nämlich im tatsächlich existierenden Gott. (AT VII 105,1-15; *Meditationen*, 104f)

Zur Unvorstellbarkeit des unbegreiflichen Gottes zieht sich Descartes schließlich auf die Kompetenzen seines Verstandes zurück und verweist auf das von ihm gelegte Fundament, welches auf der Erkenntnis der eigenen Existenz als denkender Substanz aufbaut.

Es folgt ja auch daraus, daß ich eine unendliche Anzahl von Teilungen in einer endlichen Quantität genausowenig verstehen kann, keineswegs, daß es irgendeine letzte gibt, so daß sie nicht weiter geteilt werden könne; sondern es folgt nur, daß mein Verstand, der endlich ist, das Unendliche nicht fassen kann. Und so habe ich es vorgezogen, die Existenz meiner selbst als Fundament für meinen Gedankengang zu verwenden. (AT VII 106,27-107,3; *Meditationen*, 116)

Dieses Fundament des Selbst liegt im Bewusstsein seines Denkens. Es beweist ihm unzweifelhaft seine Existenz als denkender Substanz, als Seele. Für Descartes ist die Seele sich

zu jeder Zeit ihrer selbst bewusst und kann sich selbst in der reflexiven Metasprache des Denkens interpretieren. Der Sinn von „cogito ergo sum“ als Beweis der eigenen Existenz und als Fundament zur Deduktion weiteren wahren Wissens ergibt sich aus der Vermengung der Metaebene des Denkens über das Denken und der Objektebene des Denkens. Diese Vermengung führt zu jener in sich nicht nachweisbaren Widerspruchsfreiheit, welche die Grenzen des Formalismus verschleiert.

Das Wissen über die Welt ist eine Repräsentation, welche methodisch den Bezug der betrachteten Phänomene darstellt. Figur und Zahl sind dabei jene Hilfsmittel, welche bei Descartes in der Entwicklung seiner universellen Methode im Fokus stehen. Die erste Intuition seiner Methode liegt im Bewusstsein des eigenen Denkens. Dieses sich seiner Selbst bewusst Sein steht am Beginn jeder Erkenntnis. Die Unabhängigkeit des eigenen Denkens als bewusster Denktakt ist aber auch Ziel der Methode:

Das erste Ziel der Cartesischen „Methode“ besteht darin, den menschlichen Geist von dieser Abhängigkeit zu befreien. Er soll sich selbst erkennen; nicht in dem reflektierten Licht, das ihm von den Gegenständen zurückgeworfen wird, sondern in dem Licht, das von ihm selbst, als der eigentlichen und ursprünglichen Lichtquelle ausgeht. (Cassirer, 41)

Das Denken der *res cogitans* ist von allen Tätigkeiten des Körpers, also der *res extensa*, wie Laufen oder Sitzen grundverschieden. Dabei setzt die gemischte Natur des Menschen Seele und Körper in Beziehung. Descartes setzt in jedem Denktakt das Bewusstsein dieses Aktes voraus. Jede denkende Handlung ist mit dem Bewusstsein dieser denkenden Handlung verknüpft. „Ich denke“ ist daher immer gleich zu setzen mit „Ich denke und bin mir daher bewusst, dass ich denke“. Denken ist immer auch ein Bedenken des eigenen Denkens und wird so zu einem Metadenken über das Objekt des Gedachten in Bezug auf das Selbst. Diese Vermengung von Metaebene und Objektebene zeigt Descartes bei der Entwicklung der Algebra, welche ihm 1619 als Modell der universalen Methode zur Hervorbringung neuen Wissens dient. Reflexion gehört zum Wesen seiner Methode. Nur durch permanente Reflexion auf das Erdachte werden diese Gedanken zu einer klaren und deutlichen Idee, aus welcher neues Wissen intuitiv erkannt werden kann. Für Descartes ist die klare und deutliche Erkenntnis ein Kernbegriff. In seinen *Prinzipien* hat der „klassische Descartes“ (cf. Gäbe 56) diese beiden Begriffe bestimmt:

Klar nenne ich jene, die dem aufmerksamen Geist gegenwärtig und zugänglich ist: Ebenso wie wir das von uns klar gesehen nennen, das, während es dem betrachtenden Auge gegenwärtig ist, es hinreichend kräftig und offenkundig erregt. Deutlich hingegen nenne ich jene, die, weil sie klar ist, von allen anderen so unterschieden und umrissen ist, daß sie schlichtweg nichts anderes als das, was klar ist, in sich enthält. (AT VIII/1 27; 1. §45, Prinzipien, 51)

Die Erkenntnis eines Gegenstandes ist dann deutlich, wenn es keinerlei Unklarheiten bezüglich dieses Gegenstandes gibt. Damit gilt: „eine Erkenntnis ist nur dann klar und deutlich, wenn sie mir zu sagen imstande ist, was der erkannte Gegenstand sei.“ (Gäbe, 58). Dem gegenüber hatte der „junge Descartes“ (cf. Gäbe, 56) nur ein klares, aber undeutliches Bild des Gegenstandes der Algebra.

Die Abstraktionen des reinen Verstandes für sich genommen sind insofern undeutlich, weil sie als Abstrakta ihre Verknüpfung im Gegenstande nicht erkennen lassen. Deutlichkeit ihrer notwendigen Verknüpfung miteinander liefert erst die imaginäre Darstellung dieser Abstrakta. Als imaginäre Darstellungen sind sie aber allgemeine Bilder, mögliche Repräsentanten anderer Gegenstände. Ihre Struktur läßt folglich nicht das Wesen des Gegenstandes erkennen, sondern ist für den Verstand bloß Bild, also Gegenstand der Ein»bild«ungskraft, und steht als solches unter der Bedingung des betrachteten Gegenstandes. (Gäbe, 78)

In der Forschung scheint man sich weitgehend einig, dass der junge Descartes vor 1628 an der Lösung einzelner Probleme arbeitete und dabei jene Erfahrungen sammelte, welche ihn schließlich zu seinen Prinzipien der Philosophie führten, welche er ab 1637 in seinen Publikationen präsentierte (e.g. Gaukroger, 3; Brissey, 13).

Rather, Schuster claims the early aim of Descartes' science (and thus the rhetoric of his method) was narrow because all of his actual investigations were narrow during this period. The question, then, is whether Descartes' aim was indeed narrow before 1628. Schuster's and Gaukroger's extensive studies of Descartes' early science have correctly shown that his interests were discrete. (Brissey, 13)

Die Struktur seiner Methode, welche neues Wissen nur aus (i) Gewissheit gebenden Intuitionen und (ii) darauf aufbauenden Deduktionen als möglich erkennt, wobei (iii) die Analyse des Problems dieses auf grundlegende, abstrakte Intuitionen zurückführt und (iv) erst von diesen wiederaufbauend die Lösung synthetisiert, hat er aber während seines gesamten Schaffens beibehalten und angewandt. (cf. Garber, 34).

Descartes basierte seine Suche nach Erkenntnis auf der ihm verfügbaren, tradierten Scholastik, welche er aber kritisch hinterfragte. Elemente, welche sich in seiner kritischen Reflexion bewährten, übernahm er. Dabei war für ihn die Schaffung neuen Wissens essentiell. Praktiken, welche sich in seiner Sicht quasi solipsistisch nur in ihrer eigenen Bestätigung auf bereits Bekanntes fokussierten, um dieses zu erklären, lehnte er von Anfang an grundsätzlich ab. Dies trifft insbesondere seine Betrachtung von Syllogismen.

Der junge Descartes übernimmt gewisse Strukturmerkmale des Syllogismus in seine Methodologie, verweist die Syllogistik selbst aber zugleich aus der Sapientia Universalis in die Rhetorik. (Gäbe, 68)

Die *Prinzipien* wurden 1647 in einer französischen Übersetzung publiziert. Die Übersetzung erfolgte durch Claude Picot, den besten „persönlichen Freund“ Descartes. In

einem Brief vom 17.2.1645 umreißt Descartes seine Vorstellung für ein Vorwort zu dieser Übersetzung. In diesem *Brief an Picot* fasst Descartes seine Prinzipien der Philosophie und der Methode neues Wissen zu schaffen, so wie er es im Laufe seines Lebens erfahren hatte, zusammen (cf. Wohlers 2011b, 193). Er schreibt:

Ich hätte in diesem Vorwort als erstes gerne erklärt, was Philosophie ist. Dafür hätte ich mit den gewöhnlichsten Dingen begonnen, wie daß das Wort *Philosophie* das Studium der Weisheit bezeichnet, wobei man unter Weisheit nicht bloß die Klugheit in irgendwelchen Angelegenheiten versteht, sondern eine vollkommene Erkenntnis aller Dinge, die der Mensch wissen kann, sowohl in bezug auf die Führung seines Lebens als auch in bezug auf die Erhaltung seiner Gesundheit sowie der Erfindung aller Techniken; daß es für eine solche Erkenntnis nötig ist, sie aus ersten Ursachen zu deduzieren. (AT VIII/2 2,5-14; Picot, 139)

Zum damaligen Zeitpunkt war Wissenschaft kein eigenständiger Wissensbereich. Naturphilosophische Erweiterungen von der sublunaren Sphäre auf die himmlischen waren nur hypothetisch diskutabel und unterschieden von mathematisch logischen Argumenten oder theologischen Postulaten. Die Frage nach Inhalt und Zusammenspiel der verschiedenen Wissensdomänen war offen.

At that time, neither philosophy nor science as we now know them could properly be said to exist as distinct domains of knowledge. (Garber, 10):

Die Suche nach den grundlegenden ersten Ursachen steht für Descartes im Zentrum des Philosophierens. Diese ultimative alles verursachenden Prinzipien haben dabei die zwei Bedingungen von (i) Klarheit und (ii) einer allgemeiner Notwendigkeit zu erfüllen, wie er im *Brief an Picot* schreibt:

erstens, daß sie so klar und evident sind, daß der menschliche Geist nicht an ihrer Wahrheit zweifeln kann, wenn er es sich auferlegt, sie mit Aufmerksamkeit zu betrachten; und zweitens, daß von ihnen die Erkenntnis anderer Dinge abhängen muß, so daß diese Prinzipien ohne die anderen Dinge erkannt werden können, jedoch nicht umgekehrt diese anderen Dinge ohne sie; (AT VIII/2 2,20-26; Picot, 141)

Für ihn ist der „wichtigste Teil“ des Menschen seine Seele oder Geist, mit dem nach Weisheit und Erkenntnis der Wahrheit als höchstem Gut gestrebt wird. Dieser Geist der natürlichen Vernunft unterscheidet für Descartes die Menschen von allen anderen Geschöpfen und läßt sie intuitiv diese erste Ursachen erkennen.

Dieses höchste Gut, wenn man es durch die natürliche Vernunft ohne das Licht des Glaubens betrachtet, ist nun nichts anderes als die Erkenntnis der Wahrheit durch die ersten Ursachen, (AT VIII/2 4,20-24; Picot, 143)

Das im Denken liegende Bewusstsein des eigenen Denkens lenkt die Suche des Menschen nach Ursachen. Die Kenntnis von Ursachen und Wirkungen baut auf dieser Reflexion des Bedenkens des Denkens auf und schafft so Wissen aus elementaren Gewissheiten.

1.4. Descartes Methode und ihre Beziehung zum Formalismus

Im folgenden Hauptteil dieser Arbeit gebe ich meine Interpretation von Descartes Entwicklung seiner Methode zur zuverlässigen Schaffung von Wissen. Im 1. Kapitel stelle ich den Stand der Algebra vor, wie er als Basis für Descartes Überlegungen für die Entwicklung einer allgemeinen Methode verfügbar war. Danach zeige ich im 2. Kapitel die Entwicklung seiner *mathesis universalis* zum Modell einer *methode universalis* und deren Bezug einerseits zu den kognitiven Kompetenzen der Menschen und andererseits zur damaligen Praxis der symbolischen Darstellung, welche noch streng dem geometrischen Beweisprinzip verhaftet war. Daran anschließend präsentiere ich im 3. Kapitel Descartes Ablehnung rhetorischer Stilistik, mittels welcher physikalische Probleme auf rein abstrakte sprachliche oder algebraische Formen reduziert werden. Diese Abstraktion steht im Gegensatz zu seiner Forderung durch methodische Reflexion auf jeder Stufe der Erkenntnis intuitiv Gewissheit zu erlangen. Erkenntnis ist eben nicht an eine besondere sprachliche Form gebunden, sondern muss immer intuitiv erfassbar und damit prosaisch beschreibbar bleiben. Das 4. Kapitel stellt den reflexiven Charakter seiner Methode der Suche nach Gewissheit in den Vordergrund und führt über Descartes Erkenntnis der Äquivalenz von symbolischer und geometrischer Darstellung zur Integration von Algebra und analytischer Geometrie. Das letzte 5. Kapitel zu Descartes Werk hebt diese Reflexivität in seinen *Prinzipien* hervor.

Im Ausblick auf den Formalismus fasse ich die mir mit Bezug zum Hauptteil wesentlichen Punkte in der Entstehung des Formalismus auf Basis der Algebra zusammen. Der Erfolg des Formalismus nährte im 19. Jahrhundert die Hoffnung, jedwede Problemstellung aus der Kenntnis aller Umstände in mathematischer Form, also entsprechend der Methode der wie von Descartes vorgeschlagenen *mathesis universalis*, erklären zu können. Statt eines „Ignorabimus“ erschienen alle Fragen mit den abstrakten Mitteln der Mathematik lösbar (Detlefsen, 280). Dies nahm man auch für die offenen Probleme der Mathematik an, z.B. der formalen Begründung des einfachen Zählens. Mit Georg Cantors Mengenlehre vermutete man den Weg zu einer widerspruchsfreien Erklärung aller mathematischen Probleme durch die Mathematik gefunden zu haben (Detlefsen, 301). Bertrand Russell zeigte jedoch in seinem Brief vom 22.6.1902 an Gottlob Frege mit der Frage nach der „Menge aller Mengen, welche sich selbst nicht beinhalten“ (Gabriel, 59), dass eine derartige Widerspruchsfreiheit ohne Trennung von Meta- und Objektebenen, – bzw. wie Frege es im Briefwechsel mit Russell ausdrückte, ohne Unterscheidung von „Begriff“ und „Gegenstand“ – nicht gewährleistet ist (cf. Besler, 92). Die begriffliche Bestimmung der Eigenschaften der Elemente einer Menge ist von den Gegenständen zu unterscheiden, welche die Elemente der Menge selbst sind. Die begriffliche

Bestimmung erfolgt semantisch auf einer Metaebene und ist von der syntaktischen Zusammenstellung der Gegenstände als Funktion auf der Objektebene innerhalb bzw. außerhalb der Menge zu unterscheiden. Russell schreibt an Frege:

Sie behaupten [...] es könnte auch die Funktion das unbestimmte Element bilden. Dies habe ich früher auch geglaubt, jedoch jetzt scheint mir diese Aussicht zweifelhaft, wegen des folgenden Widerspruchs: Sei w das Prädikat, ein Prädikat zu sein welches von sich selbst nicht prädicirt werden kann. Kann w von sich selbst prädicieren? Aus jeder Antwort folgt das Gegentheil. Deshalb muss man schliessen dass w kein Prädikat ist. Ebenso giebt es keine Klasse (Ganzes) derjenigen Klassen die als Ganze sich selber nicht angehören. Daraus schliesse ich dass unter gewissen Umständen eine definierbare Menge kein Ganzes bildet. (Gabriel 59, Brief XXXVI/I Russell an Frege vom 16.6.1902)

Egal ob Russels Menge sich selbst enthält oder nicht, in jedem Fall widersprechen sich Meta- und Objektebene. Die Metaebene definiert jene Eigenschaften, welche die Elemente der Menge auszeichnen. Auf der Objektebene der Menge müsste dieser Anspruch von allen so ausgezeichneten Elementen erfüllt werden. Dies kann bei Russels Menge niemals vollständig und widerspruchsfrei erfolgen. Die Syntax der Regeln der Objektebene benötigen aus der Metaebene einen gewissen semantischen Gehalt. Bleiben sie völlig abstrakt können sie ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht nachweisen. Kurt Gödel wies 1930 nach, dass kein einzelnes formales System die vollständige Widerspruchsfreiheit der Mathematik gewährleisten kann. Dies gilt auch für das formale System der Mathematik selbst, die ihre eigene Widerspruchsfreiheit daher nicht sicherstellen kann (Linnebo, 70f). Auch Descartes Idee einer perfekten Methode bedarf externer Konventionen. Mit seiner Forderung nach Gewissheit durch Reflexion auf allen Stufen der Erkenntnis, zeigte Descartes implizit, aber konsequent die Grenzen der rein abstrakt funktionierenden Methode auf.

2. Descartes universelle Methode in den Wissenschaften

Wissen entsteht (i) in der menschlichen Vorstellung als einer Verstandeskompetenz durch Repräsentation der Beziehungen des sinnlich wahrgenommenen Seienden (ii) einerseits vermittelt der innerhalb des Seienden festgestellten gegebenen Verhältnisse und (iii) andererseits gemäß den Möglichkeiten des menschlichen Verstandes sich diese Verhältnisse vorzustellen. Um dieses Zusammenspiel aus rationaler Begründung von Zusammenhängen und deren empirischer Bestätigung nachvollziehbar zu machen, verlangt Descartes nach einer Methode. Dieses streng methodische Vorgehen ist eine Konstante in seinem gesamten Werk. Dabei verschiebt sich sein Fokus in der Erlangung klarer und deutlicher Erkenntnis vom mathematischen Formalismus einer idealisierten Algebra in seinem Frühwerk hin zur permanenten Vergewisserung des erreichten Wissens in der eigenen Vorstellung (cf. Gäbe, 56; Gaukroger, 3f). Die Methode selbst ist dabei für die Erlangung jeder Form von Wissen gültig und schafft so in ihrer alle Disziplinen übergreifenden Allgemeinheit „Wissenschaft“.

Descartes hat seine lebenslange Arbeit der Suche nach einer sicheren Methode zur Erlangung von Wissen in diesem komplexen Gefüge von Verhältnissen zwischen den aufzuklärenden Realitäten der Welt und deren Zugänglichkeiten zu den Kompetenzen des menschlichen Verstandes gewidmet. Für Descartes muß Wissen auf einem gesicherten Fundament aufbauen, welches selbst durch eine gesicherte Methode gewonnen werden muss. Diese sichere Methode entwickelt Wissen in einer (i) nachvollziehbaren Form geordneter kleiner Schritte (cf. AT X, 389, 23,26-24,11; Regulae, 51) über einem (iii) intuitiv klaren und deutlichem Fundament (cf. AT VII, 18,4-18,14; Meditationen, 19f). Dabei werden Problemstellungen zunächst analysiert und aus den analytisch erfassten Relationen dann Antworten synthetisiert. Die Methode muss so verpackt werden, dass sie den Möglichkeiten des Verstands entspricht. Die Basis der zu setzenden Schritte sind offensichtlichste, einfache und klar evidente Wahrheiten, welche intuitiv erfasst sind. Die Erkenntnis der Welt ergibt sich dann aus dem Setzen logischer Schritte, welche deduktiv zur Entwicklung von Wissen aus diesen zugrunde liegenden Intuitionen führen. Sofern diese deduktive Bewegung nach allgemeingültigen Regeln erfolgt, welche die Nachvollziehbarkeit der Schritte und die Vollständigkeit der Erfassung aller relevanten Gegebenheiten gewährleisten, ist dieses methodisch erlangte Wissen für Descartes notwendigerweise wahr.

Bereits 1619, im Alter von knapp dreiundzwanzig Jahren, sieht Descartes in der Algebra als *mathesis universalis* die geeignete Form, um den geordneten Prozess von

- (i) Analyse der Beziehungen zwischen kleinsten, klar und deutlich erfassbaren und damit intuitiv gesicherten Gegebenheiten und
- (ii) der Synthese dieser geordneten Beziehungen zu klaren und deutlich erfassbaren Lösungen

als einziger, universeller Methode zur Erlangung von Wissen zu entwickeln (AT X 377,19-378,11; *Regulae*, 33, 2-27). Allerdings ist die tradierte Algebra davor methodisch von sinnloser Rhetorik zu befreien. Da für Descartes die Algebra die einzige geeignete Form der wissenschaftlichen Methode ist, bedeutet „methodisch“ reflexiv mit der Methode der Algebra. Reflexiv bezieht sich auf das Objekt, in dem Fall die Algebra und auf das Subjekt, den Verstand und seine Erfahrungen. Descartes erweitert seine Kenntnisse der Algebra durch Reflexion. Diese Veränderung betrifft daher auch seine Anwendung der Methode.

Diesen Teil beginne ich im 1. Kapitel mit einer Übersicht über den damaligen Stand der Algebra. Deren Formalismus diente ihm im Begriff der *mathesis universalis* als Modell für die von ihm gesuchte universelle Methode der Wissenschaft. Diese Suche behandle ich im 2. Kapitel. Nach seinen Studien ging Descartes in die Niederlande und nach Deutschland, wo er die cossische Notation der deutschen Rechenmeister kennenlernte (cf. Wohlers 2011a, 328). In den nach 1628 nicht mehr weiter geführten *Regulae*, entwickelt Descartes über zehn Jahre seine universelle Methode der Wissenschaften, um aus Intuition durch kleine, wohlgeordnete und schrittweise Deduktionen nachvollziehbare Erkenntnisse zu bisher Unbekanntem zu gewinnen. Diese beiden Denkvorgänge der Intuition und der Deduktion werden von Descartes als die einzig geeigneten beschrieben, um neues Wissen zu finden (cf. AT X, 368, 8,8-8,11; *Regulae*,17). Damals waren Geometrie und Algebra noch getrennte Disziplinen. Dieses Kapitel endet mit der Kritik an seiner Verwendung der cossischen Algebra, welche von Descartes ab 1629 zugunsten des symbolisch wesentlich strengeren viète'schen Formalismus aufgegeben wird. Dabei ist es unwahrscheinlich, dass Descartes Werke von Viète selbst gelesen hatte.

Danach zeige ich im 3. Kapitel, wie Descartes seine Methode zur Erklärung der physikalischen Phänomene der Welt einsetzte und sich dabei bewusst arithmetischer Formulierungen enthielt. Er verlangte Gewissheit, welche immer metaphysisch fundiert sein muss und nicht durch sprachliche Figuren – seien es Syllogismen oder algebraische Formeln – überbrückt oder ersetzt werden können. Nach der Aufgabe seines Versuchs die *Regulae* universell zur Schaffung von Wissen auszuformulieren, war der nun folgende Lebensabschnitt gekennzeichnet von Descartes (i) Auseinandersetzung mit den damals modernen Mathematikern (cf. Wohlers 2020, XII) und (ii) seinem Versuch, mit seiner Methode neues

Wissen zu physikalischen Phänomenen zu finden, dabei aber gleichzeitig jeden Konflikt mit der Kirche zu vermeiden (cf. AT I 270, 23-26; Mersenne, 104, Brief vom 28.11.1633). Für ihn ist jedem Menschen die Idee Gottes angeboren (AT VII 45,9-18; Meditationen, 49f). Dessen Unendlichkeit ist aber nicht durch den endlichen Verstand fassbar. Seine Offenbarung spricht den Willen als geistige Fakultät des Menschen an. Demgegenüber ist Wissenschaft auf den Verstand bezogen und so von der Offenbarung getrennt. Bis 1637 verzichtete Descartes auf Publikationen, steht aber mit und über Marin Mersenne in Paris in laufendem, oft kontroversiellem Austausch mit anderen Philosophen, Mathematikern und Physikern dieser Zeit und deren Konzepten. Er setzt sich insbesondere mit Pierre Fermat auseinander, mit dessen Mathematik er von Mersenne immer wieder konfrontiert wurde. Im Brief vom 28.4.1638 berichtet Mersenne von Fermats Wunsch, „das Urteil der Herren Roberval und Pascal“ über dessen Methode zu hören, „durch die wir das Maximum und das Minimum und die Tangenten der Kurven untersucht haben“ um den Schwerpunkt eines parabolischen Konoids zu bestimmen (AT II 120,3-5; Mersenne, 164). Diese Tangenten wurden von Fermat mit dem viète'schen Formalismus algebraisch beschrieben. Descartes antwortet darauf am 27.5.1638, wobei er deutlich macht, dass für ihn die Methode aber nicht eine besondere Notation in der Anwendung im Vordergrund steht:

5. Der Schwerpunkt des parabolischen Konoids von Herrn Fermat läßt sich durch dieselbe Verfahrensweise sehr leicht finden, durch die Archimedes den der Parabel gefunden hat. Aber es ist deswegen nicht auch nur im geringsten nötig, sich seiner Methode zu bedienen, und bräuchte es nicht Zeit, um die Berechnung anzustellen, und hätten Sie mir in Ihren letzten Briefen nicht genügend andere Aufgaben zugeteilt, würde ich sie Ihnen schicken. Aber ich unterlasse das, weil es leicht ist, und werde Ihnen nur sagen, daß ich bislang überhaupt noch nicht gesehen habe, daß er irgendein Beispiel für seine Methode gegeben hätte, das man nicht ohne sie leicht finden könnte. (AT II 139,20-30; Mersenne, 168f)

Die vier Schriften des *Entwurf der Methode* mit dem *Discours* und den darin enthaltenen Essays, insbesondere *Geometrie* stehen im Mittelpunkt des 4. Kapitels. Im *Discours* fasst Descartes die Regeln der wissenschaftlichen Methode in vier Prinzipien zusammen. Vor April 1632 lernte er über Mersenne die strenge, aber einfache Symbolik Viètes kennen. Daraus entwickelte er eigenständig mittels seiner Methode jene algebraische Problemlösungskapazität, welche zur *Geometrie* führte. Die *Geometrie* ist das einzige Werk Descartes, indem er mathematische Kenntnisse als solche für ein breiteres Publikum publizierte. Dabei war sich Descartes bewusst, dass algebraische Kenntnisse zum Verständnis notwendig sind und damit die Größe seiner Leserschaft beschränkt ist (cf. AT VI, 368, Vorbemerkung zu *Geometrie*, 312). Es geht ihm aber nicht um die Geometrie selbst, sondern darum, mit seiner Methode zu zeigen, wie der seit der Antike gegebene Stillstand geometrischen Wissens überwunden werden kann.

Er erweiterte die Reichweite mathematischer Beweisverfahren von der Lösung geometrischer Probleme der Ebene auf beliebig viele, nur algebraisch und damit formal fassbare Dimensionen. Durch konsequente Anwendung seiner Methode konnte er den viète'schen Formalismus weiterentwickeln und aus der genauen Analyse komplexer, voneinander abhängiger Bewegungen diese Integration vollbringen. Die Analysis kann so beliebig komplexe Aufgaben lösen. Die algebraische Formulierung komplexer Bewegungen erlaubt die vollständige Repräsentation raum-zeitlicher Veränderungen der *res extensa* in Form algebraischer Gleichungen.

Das 5. Kapitel zu Descartes Methode diskutiert die in seinen *Prinzipien* zusammengefassten Kompetenzen und Beschränkungen des Menschen, um Wissen zu erwerben und Gewissheit zu erlangen. Die weiteren in den *Prinzipien* folgenden Erklärungen physikalischer Phänomene waren aber im Wesentlichen schon zur Zeit der Publikation durch die formal exakteren Beschreibungen der zeitgenössischen Mathematiker wie Fermat, der bald nach Descartes auf Francis Bacon aufbauenden Empiristen wie John Locke and Isaak Newton, oder der experimentellen Forschung Galileo Galileis überholt.

2.1. Der Stand der Algebra vor Descartes

Bis zu Descartes Integration von analytischer Geometrie und algebraischer Analysis in der 1637 erschienen *Geometrie* war die Mathematik in die beiden Disziplinen von Geometrie und Arithmetik geteilt. Begrifflich führt Descartes diese Trennung auch noch in *Geometrie* fort, betont aber:

Ich scheue mich nicht, diese Ausdrücke der Arithmetik in die Geometrie einzuführen, um meine Gedanken verständlicher zu machen. (AT VI 370,12-14; Geometrie, 316)

Seit der Antike wurde nur der Geometrie die Kapazität zugerechnet, Aussagen durch Konstruktion auch beweisen zu können. Die Algebra war ein erst in Entwicklung stehender Teil der Arithmetik. Der Weg zur Integration von Arithmetik und Geometrie ist der Weg der Entwicklung der Algebra. Diese wurde schließlich zur methodischen Basis aller Naturwissenschaften. Der algebraische Formalismus ist eine Basis für die Einheit von Wissenschaft und ihren interdisziplinären Anwendungen. Vor Descartes waren die Methoden der Suche nach Erkenntnis den Untersuchungsgegenständen in Form einer der jeweiligen Disziplin entsprechenden Technik angepasst (cf. Arndt, 15). Für mathematische Probleme war dabei seit Euklid die geometrische Methode das anerkannte Untersuchungsverfahren, um die Wahrheit geometrischer Aussagen zu beweisen (cf. Arndt, 20). In der Spätantike verwendet Clemens von Alexandrien die Analyse und die Synthese als Beweisverfahren, wobei die

Notwendigkeit eines Beweises für solche Problemstellungen bedungen wird deren Lösung nicht offensichtlich ist. Der gelungene Beweis macht die Wahrheit einer vorgeschlagenen Lösung augenscheinlich.

Als ein Beweis wird dabei ein Verfahren verstanden, das den Wahrheitserweis für Aussagen liefert, die dem Verstand und der Wahrnehmung nicht unmittelbar einsichtig sind. (Arndt, 21)

Ebenfalls aus der Spätantike stammt Pappus Sammlung geometrischer Probleme, welche im 16. Jahrhundert von Federico Commandino ins Lateinische übersetzt wurden und „die mittelalterlichen Termini *resolutio* und *compositio* auf den analytischen Beweisgang der Geometer an[.]wendet“ (Arndt, 22). Die von Pappus verwendeten Begriffe von Analyse und Synthese als gegenläufige Prozesse von deduktiver Auflösung des Problems in seine Elemente und konstruktiver Beweisführung aus diesen Elementen waren Descartes in seiner Bearbeitung des 7. Problems dieser Sammlung bekannt (Wohlers 2013, XXVII). In seinen Erwiderungen zu den *Meditationen* schreibt Descartes:

Die alten Geometriker haben in ihren Schriften gewöhnlich allein die Synthesis verwendet. Wie ich die Lage beurteile, haben sie das aber nicht deshalb getan, weil ihnen die Analysis völlig unbekannt gewesen wäre, sondern weil sie sie für so wertvoll hielten, daß sie sie für sich selbst als eine Art Geheimlehre aufbewahrten. Ich selbst dagegen bin in meinen Meditationen allein der Analysis gefolgt, die der wahre und beste Weg zum Lehren ist. (AT VII, 256,17-22; Meditationen, 165)

Dabei ist die kontinuierliche Bewegung der Deduktion für Descartes weiterhin Voraussetzung, um Wahres von Falschem in der analytischen Problemaufbereitung zu unterscheiden.

während ich bekenne, [...] nur nach einer solchen Analyse gefragt zu haben, durch die die Gewißheit wahrer Begründungen und die Fehler der falschen erkannt werden (AT VII, 446,4-12; Meditationen, 425)

Zur gleichen Zeit wie Commandino stellte Jacob Zabarella (i) die Bedeutung einer spezifischen Ordnung, dem *ordo*, für die Gliederung aller Teile einer wissenschaftlichen Disziplin, (ii) ein dieser Ordnung entsprechendes methodisches Vorgehen, dem *methodus*, sowie (iii) ein daraus resultierendes wechselseitiges Abhängigkeitsverhältnis zwischen *ordo* und *methodus* fest, welche sich im Beweisverfahren, dem *compositio* und im Schließen, der *resolutio* ergänzen und durchdringen:

Zum einen setzt die Anwendung einer Methode die vorgängige Gliederung und Anordnung der im Beweisverfahren verwendeten Stücke voraus, andererseits aber bedarf die Herstellung des *ordo* der Feststellung deduktiver Abhängigkeiten, wie sie nur durch einen „processus illativus“ gewonnen werden kann. (Arndt, 27)

Eine Aussage, deren Wahrheitswert unbekannt ist, wird dabei geordnet in Aussagen zerlegt deren Wahrheitswerte bekannt sind. Wenn es gelingt, zu beweisen, dass diese durch Analyse gewonnenen Aussagen notwendigerweise richtig sind und sie somit als Prinzipien gelten, kann der bisher unbekannte Wahrheitswert der analysierten Aussage aus diesen Prinzipien synthetisch konstruiert werden. Dieser, dem geometrischen Beweisverfahren entsprechende Prozess, kann so für die Idee der Einheit der Wissenschaften verallgemeinert und den partikularen Einzelwissenschaften fruchtbar gemacht werden (cf. Cassirer, 54).

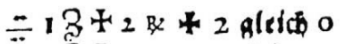
In dieser Bezogenheit von Analyse und Synthese ist aber die Forderung der Einheit der wissenschaftlichen Methode angelegt, auf deren Erfüllung die kartesische Methodenlehre ausgerichtet ist. (Arndt, 28)

Mathematische Beweise waren vor Descartes ausschließlich in geometrischer Form akzeptiert. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal auf dem ebenen Papier lieferten kontinuierlich nachmessbare Größen. Dies gilt auch für die arithmetisch nicht als numerische Brüche angebbaren irrationalen Zahlen. Die Geometrie war dabei auf die Ebene Euklids beschränkt. Diese Beschränkung auf die flache Geometrie der Ebene ließ geometrische Probleme des Raumes und höheren Grades seit der Antike unbewiesen und damit ungelöst offen. Eine Sammlung solcher ungelöster Probleme wurde durch Pappus überliefert (Alten et al., 63). Descartes waren deren Übersetzung durch Commandino und die Problemstellungen, wie oben gezeigt, bekannt. Er stellte davon das 7. Problem, für dessen Lösung es nur eine Vermutung gab, in den Mittelpunkt seiner Überlegungen.

2.1.1. Die cossische Notation der deutschen Rechenmeister

Unabhängig von der Geometrie entwickelte sich seit dem Mittelalter die Algebra als Teil der Arithmetik. Dabei werden Symbole zu Platzhaltern für Unbekannte, nach denen in Form von Vergleichen mit bekannten Größen gefragt wurde. Diese Frage nach dem Unbekannten, „cos’e“ wurde namensgebend für eine Notation, welche sich Ende des 16. Jahrhunderts bei den Rechenmeistern im deutschsprachigen Raum durchgesetzt hatte (cf. Manders, 189). Die cossische Notation verwendete dabei für die Unbekannten und deren Potenzen bzw. Grade jeweils eigene Symbole.

By tradition, the terms *Radix*, *Zens*, *Cubus* were used for the first through third powers, each indicated by a specific symbol. (Manders, 189)

Diese cossische Algebra wurde am Beginn des 17. Jahrhunderts von Peter Roth, Christopher Clavius und Johann Faulhaber entwickelt. Die quadratische Gleichung „ $-x^2 + 2x + 2 = 0$ “ wurde von Faulhaber so aufgeschrieben  (Manders, 193f):

Roth formulierte unter anderem bereits eine weiche Form des Fundamentalsatzes der Algebra:

an equation (in one unknown) has at most as many roots as its degree; some equations have this many roots (Manders, 190)

Der Fundamentalsatz der Algebra beschreibt die allgemeine Lösbarkeit von Gleichungen über der Ebene der Komplexen Zahlen, welche eine Verallgemeinerung des Zahlenstrahls darstellt. Auf einer Geraden lassen sich von einem beliebig auf dieser Gerade als Ursprung angenommen Punkt die ganzen Zahlen als diskrete Punkte mit dem konstantem Abstand einer willkürlich bestimmten Einheit markieren. Die Richtung von diesem Ursprung wird, sofern notwendig, durch + oder – festgelegt. Die Zahl der Einheiten repräsentiert den jeweiligen ganzzahligen Punkt auf der Geraden. Verhältnisse von Mengen lassen sich als Brüche in Form Rationaler Zahlen zwischen den ganzen Zahlen eintragen. Auch wenn diese Brüche aus unbegrenzt vielen, beliebigen ganzen Zahlen gebildet werden, füllen sie diesen Zwischenraum niemals vollständig aus. Dazu benötigt man die „inkommensurablen“, nach heutigem Sprachgebrauch irrationalen Zahlen, welche aus der Geometrie seit der Antike bekannt aber eben arithmetisch nicht endgültig bestimmbar sind; die bekanntesten dieser „Zahlen“ sind π , $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$. Die irrationalen Zahlen besetzen mit den rationalen Zahlen nun gemeinsam als reelle Zahlen alle Positionen auf dieser Geraden und bilden in eine Richtung vom Ursprung weg den lückenlosen Zahlenstrahl. Der Zahlenstrahl erlaubt eine lückenlose Darstellung aller reellen Zahlen als kontinuierliche Längen. In *Geometrie* zeigt Descartes, wie Längen als Darstellung von Größen aneinander gereiht auf dem Zahlenstrahl sowohl die rationalen als auch die „nicht kommensurablen“, i.e. irrationalen Zahlen abbilden. Die Relevanz der Länge zeigte er bereits im Einleitungssatz:

Alle Probleme der Geometrie lassen sich leicht auf solche Ausdrücke zurückführen, daß es hinterher nur noch nötig ist, die Länge bestimmter Geraden zu erkennen, um sie zu konstruieren. (AT VI 369,4-7; *Geometrie*, 315)

Auch wenn es zur Zeit Descartes den Begriff des Zahlenstrahls noch nicht gegeben hat, war die Verwendung der Längen auf einem „strebenden“ oder „kommenden Strahl“ wesentlich für die Konstruktion der anaklastischen Linie, welche er am Ende der *Geometrie* zeigt (cf. AT VI 430,17-25; *Geometrie*, 365).

Eineinhalb Jahrhunderte nach Descartes wurde mit der Einführung der Imaginären Zahlen als zweiter Achse zu den Reellen Zahlen die Ebene der Komplexen Zahlen aufgespannt und die Lösung beliebiger Differentialgleichungen auf Basis eines strengen aber nicht mehr anschaulichen Formalismus ermöglicht.

Die Aussage, dass jede algebraische Gleichung n -ten Grades im Bereich der komplexen Zahlen stets genau n nicht notwendig voneinander verschiedene Lösungen hat, wird allgemein als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet. ... Der Sachverhalt kann jedoch auch als Faktorisierungseigenschaft für das entsprechende Polynom formuliert werden und lautet dann: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten kann in ein Produkt von reellen Faktoren ersten und zweiten Grades zerlegt werden, bzw. äquivalent dazu: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten kann als ein Produkt von n linearen Faktoren mit komplexen Koeffizienten dargestellt werden. (Alten et al, 303).

In seinem Studium hatte Descartes die cossische Notation auf Basis der Schriften von Clavius kennengelernt und ab 1618 in Breda und danach in Ulm, möglicherweise bis 1622 in Kontakt mit Faulhaber, an von Roth formulierten algebraischen Problemen gearbeitet. Diese Probleme betrafen Polynome bis zum 7. Grad (cf. Manders, 185; Wohlers 2011a, 246). Die von Roth veröffentlichten Lösungen waren aber um Größenordnungen falsch. Diese falschen Ergebnisse sind nicht systematisch nachvollziehbar, sondern resultieren aus unterschiedlichsten algebraischen Fehlern. Der Versuch mittels cossischer Notation Polynome zu faktorisieren hatte zu diesen Fehlern geführt (Manders, 194ff). Descartes benutzt in den *Regulae* die cossische Notation (Wohlers 2011a, VIII f), erkannte aber auch deren Schwächen.

2.1.2. Die Einführung der modernen Notation durch François Viète

Der Begründer der modernen Algebra ist François Viète, welcher gegen Ende des 16. Jahrhunderts eine strenge Notation publizierte, mit Buchstaben als Symbole für bekannte und unbekannte Größen und mit Zahlen für Grade, i.e. Potenzen. Viètes „Hauptverdienst [liegt] in der konsequenten Verwendung von Symbolen und Bezeichnungen“ (Alten et al, 284).

Diese Notation war zunächst nicht allgemein bekannt und wurde nur im kleinen Kreis seiner Schüler rezensiert. Viètes Notation erlaubt es Polynome unterschiedlicher Grade in übersichtlicher Form zu faktorisieren und so schrittweise den Grad des Polynoms auf zugrundeliegende Polynome niedrigeren Grades, bis schließlich zu einer Zahl lösbarer Binome, zu verteilen. Damit kann die Algebra für die Analysis allgemeiner Polynome verwendet werden (cf. Manders, 187f). Die in dieser Notation mögliche Faktorisierung von Polynomen hat Viète selbst aber nur einmal in einer Schrift von 1615 andeutungsweise in Ansatz¹ gebracht (cf. Manders, 199f). Erst Descartes hat dieses Verfahren in *Geometrie* vorgestellt. Wie Descartes von Viètes Notation erfahren hat, ist unklar. Jedenfalls arbeitete er an der Faktorisierung der Polynome als Anwendung seiner universellen Methode nach 1629.

¹ Manders schreibt: “The only traces of a multiplicative conception of equations I know of in Viète’s published work are found in the final section XIV of his ‘De Aequationum recognitione et’” (Manders, 199)

Descartes adopted a multiplicative conception as central, and developed the techniques for the needs of a subtle classification theory of constructional complexity of geometrical problems that went beyond what even Viète's students could do with algebraic methods. (Manders, 200).

Damit konnte er, allgemein und jenseits der Beschränkungen durch Konstruktionsverfahren in der euklidischen Ebene, die Äquivalenz der algebraischen Ausdrücke mit deren geometrischer Konstruktion zeigen und so die Integration der analytischen Geometrie mit der algebraischen Analysis ermöglichen.

Noch bis gegen Ende des 16. Jahrhunderts bestand „Algebra“ in einer Sammlung von Regeln zum Auflösen von Gleichungen. Nun, mit einer ausgebildeten Symbolik, wird algebraisches Denken in Sätzen und mit algebraisch geführten Beweisen zu einem sich nach eigenen Problemstellungen entwickelnden Wissenszweig. Und bei Descartes wird man sehen, dass und wie die Geometrie sozusagen algebraisiert wird. (Alten et al., 284).

Für Descartes liefert die Algebra das Modell für eine nachvollziehbare Methode, um komplexe Probleme in klar und deutlich einsehbare Fragestellungen rückzuführen. Die Algebra ist aber auch ein Wissensgebiet an sich, welches methodisch zu erschließen ist. Dieses reflexive Wechselspiel in Descartes Werk um und mit der Algebra wird im nächsten Kapitel beschrieben.

2.2. Descartes Suche nach einer Methode gesicherter Erkenntnis vor 1629

Mit der Formulierung von 21 Regeln (von ursprünglich 36 projektierten) beschreibt Descartes eine Methode zur Erlangung gesicherten neuen Wissens über die Welt. Er wendet sich dabei explizit gegen (i) aristotelische Syllogismen, welche nur Bekanntes erklären und daher für die Schule geeignet sind, aber eben nicht für die Wissenschaften, welche neues Wissen schaffen sollen und gegen (ii) die „Rechenmeister“, welche erstaunliche Ergebnisse produzieren, aber nicht erklären, wie sie dazu kommen. In seinem *Brief an Picot* beschreibt Descartes vier Stufen des Prozesses, um Erkenntnis zu gewinnen.

Die erste Stufe enthält nur Grundbegriffe, die aus sich selbst heraus so klar sind, daß man sie ohne Meditation erlangen kann. Die zweite beinhaltet all das, was uns die Erfahrung der Sinne erkennen läßt. Die dritte dasjenige, was uns die Unterhaltung mit anderen Menschen lehrt. Dem könnte man als vierte die Lektüre hinzufügen, und zwar nicht die aller Bücher überhaupt, sondern insbesondere derjenigen, die von Leuten geschrieben wurden, die uns eine geeignete Ausbildung geben können. (AT VIII/2 4,34-42; Picot, 145)

Der Rationalismus beginnt mit klarer und deutlicher Erkenntnis von Grundbegriffen, deren Objekte empirisch erfasst werden. Damit steht die Empirie dem Rationalismus nicht entgegen, sondern ist im Gegenteil von fundamentaler Bedeutung, um rationale Aussagen durch Evidenz zu bestätigen oder zu widerlegen. Die empirischen Beobachtungen zeitigen Verhältnisse, welche der kritischen Überprüfung gegebener Erklärungen anderer, seien diese verbal oder tradiert, dienen. Nur diese Rückführung auf einfachste Begriffe und kritischer Vergewisserung erkannter Wahrheiten schafft Wissen. Laut Descartes hat sich die Geschichte der Philosophie

dabei stets zwischen den Polen einer resignativen Ungewissheit und einer voreiligen Gewissheit bewegt und so zwar viele mögliche Erklärungen für die Phänomene der Welt gegeben, ohne dabei aber methodisch Gewissheit zu erlangen. Dennis Des Chene schreibt über Descartes Naturphilosophie:

Accidents outside substances would deceive the senses, and could not fulfil their ordained role of signifying substance to the senses; separated from matter, they would have no boundaries, and would acquire a boundlessness akin to that of spiritual substances; they would no longer be singulars, but would resemble the Platonic ideas that Aristotle rejects; and finally, since it is less repugnant to suppose a subject without accidents than to suppose an accident without a subject, there could be, literally, a man without qualities, even those that 'certainly, as if by inevitable birth, issue forth from [his] nature' (Des Chene, 38)

Descartes lehnt sowohl die aristotelische als auch die platonische Bestimmung von Wissenschaft ab. In seiner Auseinandersetzung mit beiden schreibt er, Platon hat

offen zugegeben [...], daß er immer noch nichts Gewisses gefunden und sich damit zufriedengegeben hat, die Dinge aufzuschreiben, die ihm als wahrscheinlich erschienen. Aristoteles hingegen besaß weniger Offenheit und obwohl er zwanzig Jahre lang Platos Schüler gewesen ist und er sich allein seiner Prinzipien bediente, veränderte er die Weise völlig, diese Prinzipien nutzbar zu machen und stellte sie als wahr und gesichert hin, obgleich es keinen Hinweis darauf gibt, daß er selbst sie jemals dafür gehalten hat. (AT VIII/2 6,1-11; Picot, 145/147)

Für Descartes sind beide Seiten im Irrtum, da sie ihre Urteile aus den Sinnen heraus fällen, ohne gemäß den von ihm postulierten methodischen Vorgehen (welche im *Discours* zu vier Maximen zusammengefasst werden) von den im Verstand evidenten Wahrheiten auszugehen oder bereit zu sein, tradiertes Verhalten als nur vorläufig bewährt zu akzeptieren, um es auf Basis neuer Evidenzen auch kritisch zu hinterfragen.

Indessen wüßte ich nicht, daß man [den Irrtum beider Seiten] insgesamt behoben hat, indem man gezeigt hätte, daß die Gewißheit nicht in den Sinnen, sondern allein im Verstand ist, wenn er über evidente Wahrnehmungen verfügt, solange man nur die auf den ersten vier Stufen der Weisheit erlangten Erkenntnisse hat, die Dinge nicht bezweifeln darf, die in bezug auf die Führung des Lebens als wahr erscheinen, daß man sie aber eben auch nicht für so gewiß halten darf, daß man seine Ansicht nicht ändern könnte, sofern man durch die Evidenz irgendeines vernünftigen Grundes dazu verpflichtet ist. (AT VIII/2 7,6-15; Picot 147/149)

Der Pluralismus von Erklärungsmöglichkeiten ist für Descartes ein Beweis der Falschheit der scholastischen Methode. Es kann nur eine Wahrheit geben und bei disputierten Gegenpositionen müssen alle Erklärungen bis auf die eine wahre notwendigerweise falsch sein.

Denn es gibt in den Wissenschaften kaum eine Frage, über die geistreiche Männer nicht häufig uneinig gewesen wären. Jedesmal aber, wenn die Urteile zweier Menschen über denselben Sachverhalt in entgegengesetzte Richtungen gehen, täuscht sich ganz gewiß zumindest einer der beiden. (AT X 363, 6-11; Regulae, 9, 4,10-14)

In den *Regulae*, an welchen Descartes zwischen 1619 und 1628 gearbeitet hat, und die ihn unvollständig und unveröffentlicht sein Leben lang begleitet haben, zeigt Descartes sein

Konzept einer Einheit aller Wissenschaften auf Basis des methodischen Erwerbs von Wissen. Dieser methodische Erwerb beruht auf einer geordneten, nachvollziehbaren Verknüpfung fundierten, intuitiv erfassten Wissens durch Deduktion. Dabei sind die *Regulae* von Brüchen begleitet, woraus Jean-Paul Weber bereits 1964² schloss, dass sie als Stückwerk über längere Zeit entstanden sind und unterschiedlichen Abschnitten zugeordnet werden können (Kraus, 161, Fußnote 8).

Descartes' *Regulae*, on the developmental interpretation, does not contain a single homogeneous project, but three separate ones, distinguished in Rules IV and VIII. (Brissey, 13)

Die *Regulae* lassen sich in drei Blöcke gliedern (i) dem vermutlich bis November 1619 entstandenen Teil, welcher innerhalb der Regel IV die *mathesis universalis* beschreibt; (ii) danach jene Regeln, welche die Einheit der Wissenschaft fordern und um 1626 jenen Teil der Regel VIII welcher die Anaklastische Linie in der Optik als ein Disziplinen übergreifendes Thema bringt; und (iii) zwischen 1626 und 1628 den zweiten Teil der Regel VII, welcher am Beispiel eines Schmieds zeigt, dass das Wissen im Verstand sitzt, sowie die anderen Regeln ab Regel XII, welche Abstraktion und Abbildung von Phänomenen im Verstand und mit der Algebra betreffen (cf. Brissey, 29).

In Regel IV bestimmt Descartes die Einheit der Wissenschaft aus einer universellen Methode (AT X 372, 10,8-9; *Regulae*, 23). Auf Basis der *mathesis universalis* als Methode, welche numerisch beschreibbare Beziehungen ordnet, analysiert und im Nachvollzug synthetisch überprüfbare Ergebnisse bringt, entwickelt Descartes sein *methode universalis*, welche für sämtliche Wissensbereiche anwendbar sein soll. Ausgehend von absolut gegebenen Größen und der stufenweise Analyse von Relationen zu davon abhängigen zunächst unbekannten, relativen Größen, können Gleichungen erstellt werden mittels derer das Gesamtbild eines Problems algebraisch erschlossen wird und die unbekannten Größen ermittelt werden. Die algebraische Vorgangsweise dient als Modell für die Abbildung der Phänomene der Welt. Mittels dieser Abbildung werden Phänomene in Verhältnisse gesetzt, ihre Größen vergleichbar und damit berechenbar. Dadurch erweitert sich das Wissen über die Welt. Descartes erklärt die aus der *mathesis universalis* abgeleitete *methode universalis* zum Maßstab und Modell für wissenschaftliches Vorgehen (cf. Kraus, 171). Die *mathesis* wird dabei zur „Verpackung“, welche im Wege der modellhaften Repräsentation den methodischen Wissenserwerb den menschlichen Kompetenzen der Erkenntnis anpasst. Diese philosophische Wendung vollzieht sich innerhalb der Regel IV und zieht sich durch sein gesamtes Werk,

² Weber, Jean-Paul, *La constitution du texte des Regulae* (Paris, 1964)

welches physische Gegebenheiten mittels dieser Methode dem menschlichen Geist darstellbar zu machen versucht.

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels folge ich den Regeln entsprechend ihrer Reihenfolge mit einem Schwerpunkt auf Regel IV, in welcher Descartes von der *mathesis universalis* zur universellen Methode kommt. Aus seiner Erkenntnis dieser *mathesis* folgert Descartes, nunmehr in der Lage zu sein sich mit den Problemen anderer Wissenschaften auseinanderzusetzen. Ein weiterer Schwerpunkt liegt in der symbolischen Repräsentation gegebener und unbekannter Größen durch die Algebra und der von Descartes erkannten Problematik der cossischen Notation.

2.2.1. Descartes *Regulae* zur Ausrichtung der Geisteskraft

Die von Descartes mit einem Tagebuch Eintrag am 1.1.1619 begonnenen *Regulae* wurden von ihm über die folgenden zehn Jahre entwickelt, wobei das ursprüngliche Konzept unvollständig blieb und nach 1628 von Descartes eingestellt wurde. Aufgrund des Tagebuch Charakters und der nach Descartes Tod erfolgten unterschiedlichen Abschriften und Interpretationen sind Zuordnungen der Texte nicht sicher. Ich beziehe mich auf die von Christian Wohlers editierte, deutsche Übersetzung der lateinischen Texte (Wohlers 2015). Sowohl am Beginn als auch am Ende der Arbeit Descartes an diesem Regelwerk stehen Kontakte mit Isaac Beeckman, einem Mathematiker, mit dem er sich in Breda in den Niederlanden angefreundet hatte (cf. Wohlers 2015, XXI, Fußnote 8). Diesem widmet Descartes zu Neujahr 1619 eine Abhandlung über Musik und in einem Brief von 26.3.1619 schreibt er ihm über Fortschritte bei der Lösung kubischer Gleichungen (Manders, 185) und einer „gänzlich neuen Wissenschaft“ (Krämer, 30). Nach fast einer Dekade berichtet Beeckman von einem Besuch Descartes am 8.10.1628, in welchem Descartes seine Algebra präsentierte, welche diesem zu einem „vollständigen Wissen“ der Geometrie geführt hätte (cf. Wohlers 2015, XXIX). Dies wäre dann die Erfüllung dessen, was Descartes an Beeckman bereits am 26.3.1619 geschrieben hatte. Damals galten nur Gerade, Kreis und Kegelschnitte als konstruierbare Kurven. Andere durch Überlagerung von Bewegungen entstehende Kurven galten als nicht konstruierbar und damit als nicht geeignet einen geometrischen Beweis zu liefern. Descartes sah in der Überlagerung von Bewegungen, sofern diese Bewegungen voneinander abhängig waren, sehr wohl die Möglichkeit einer geometrischen Konstruktion. Für diese erdachte er spezielle Zirkel. Den „nur anschaulichen Fragen“ der Arithmetik stellt er in der Geometrie jene Linien gegenüber. Diese sind „anschaulich“, konstruierbar und damit auch lösbar. (cf. Wohlers 2015, XXX f). Jede weitere sich überlagernde Bewegung erhöht den Grad

des geometrischen Problems. Mit der Konstruierbarkeit wird auch die Lösbarkeit unabhängig vom Grad des Problems. Der Grad entspricht der Potenz in der algebraischen Symbolik. Nicht konstruierbar bleiben Linien, welche sich aus voneinander unabhängigen Bewegungsüberlagerungen ergeben.

Gegenstand der projizierten 36 Regeln sollte die Konstruktion der Wirklichkeit in der menschlichen Vorstellung sein. Die Spannung zwischen der Tätigkeit des Denkens und dem Sein einer aus einer Idee entstandenen Vorstellung wird von Descartes in einem Brief an Mersenne vom 21. April 1641 so aufgelöst:

Es geschieht in dem einen Sinn, wenn ich die Vorstellungen in die Definition der cogitatio oder des Denkens einschlieÙe, und in einem anderen, wenn ich sie ausschlieÙe, nämlich: Die Formen bzw. körperlichen Species, die im Gehirn vorhanden sein müssen, damit etwas vorgestellt wird, sind keine Gedanken; aber die Operation des vorstellenden bzw. sich jenen Species zuwendenden Geistes ist Denken. (AT III 361,9-15; Mersenne, 459)

Descartes beschreibt auf methodische Art das Zusammenspiel der Kompetenzen des menschlichen Denkens (cf. Brissey, 12). Tatsächlich wurden nur 18 Regeln von Descartes ausformuliert und für 3 weitere liegen Überschriften vor. Diese Regeln sollen dazu dienen, „zuverlässige und wahre Urteile zustandezubringen“ (AT X 359, 5-7; Regulae, 3, 1,4-6), welche durch die „Geisteskräfte“ (AT X 362, 2-4; Regulae, 7, 3,12-14) erkannt werden können. Jede Erkenntnis ist eine persönliche: die Erkennende darf sich nicht auf Vermutungen oder Aussagen anderer verlassen, sondern erlangt ihr Wissen ausschließlich selbst „klar und evident intuitiv“ und durch „sicheres deduzieren“ (AT X 366, 11-14; Regulae, 15, 6,19-23). Es ist der eine Verstand der Einzelnen, welche die Mannigfaltigkeiten der Welt erkennen kann. Die im Verstand liegende Einheit des Denkens ist auch die Basis für die Einheit der Wissenschaft (cf. Cassirer, 42). Der Weg der Deduktion aus einer Gewissheit gebenden Intuition heraus hat einer Methode zu folgen, welche einerseits die sichere Deduktion nachvollziehbar macht und andererseits die vollständige Erfassung aller relevanten Schritte gewährleistet.

All knowledge, for Descartes, is interconnected, grounded ultimately in a small number of intuitively knowable propositions from which all else follows deductively. (Garber, 48)

Die Form geometrischer Beweisverfahren ist dabei ein Muster, welches als *mathesis* zur Erfassung von nach Zahl geordneten Phänomenen von Descartes zur universellen Methode verallgemeinert wird. Sie zeigt, wie aufgrund einsehbarer Relationen analog zu einem Mechanismus über alle physikalisch erfahrbaren Gegebenheiten Wissen erlangt werden kann. Die Erfassung der Mannigfaltigkeiten der Welt erfolgt im menschlichen Verstand mit Hilfe von dessen Kompetenzen. Diese sind unabhängig von den Mannigfaltigkeiten. Die methodische Erfassung lässt sich mit dem Modell der *mathesis universalis* abbilden. Die Einheit des

menschlichen Verstandes wird in der einheitlichen Methode der Wissenschaft und der Abbildung der Wirklichkeit durch dieses Modell imitiert.

Die Imitation ist deshalb erlaubt und geboten, weil es für die *menschliche* Erkenntnis allein auf die Einsicht in notwendige Verknüpfungen ankommt, die Notwendigkeit der Verknüpfungen diejenige Gegenstandsstruktur ist, die dem *menschlichen* Verstand angemessen ist; der menschliche Verstand ist bei aller Verschiedenheit seiner Gegenstände stets ein und derselbe. (Gäbe, 62)

Einsicht verlangt, dass die Repräsentation einer rationalen Erkenntnis derart ist, dass diese Erkenntnis nicht ablehnbar ist und damit willentlich angenommen wird. Die Repräsentation, seien es Worte, Zeichnungen oder Symbole muß die Erkenntnis klar und deutlich machen. Im *Discours* erklärt Descartes wie Einsicht damit auch den Willen zur Erkenntnis inkludiert:

Diejenigen, die die stärksten Gedankengänge haben und ihre Gedanken am besten verarbeiten, um sie klar und einsichtig werden zu lassen, können immer am besten von dem überzeugen, was sie vorbringen, selbst wenn sie nur Niederbretonisch sprechen und niemals Rhetorik gelernt haben. (AT VI, 7, 13-21; *Discours*, 7)

Die Gegebenheiten der Welt lassen sich symbolisch abbilden, wobei Descartes sich der Algebra gemäß der deutschen cossischen Notation bediente. Die Relationen werden dabei mit unterschiedlichen geometrischen Symbolen beschrieben. Diese Symbole sollen die Geisteskraft hinsichtlich der Aufrechterhaltung einer Ordnung in Bezug auf Vorstellungen und Gedächtnis unterstützen.

Jeder seiner Regeln stellt Descartes ein Ziel voran, dessen Erreichung über die in der Regel beschriebene Vorgangsweise ermöglicht wird. Dabei hält er bereits in der Regel I seine fundamentale Sicht von Wissenschaft fest:

Zweck der Studien muß die Ausrichtung der Geisteskraft darauf sein, über alles, was es gibt, zuverlässige und wahre Urteile zustandezubringen. (AT X 359, 5-7; *Regulae*, 3, 1,4-6)

Wissenschaft wird als einheitliches Vorgehen zur gesicherten Erlangung neuen Wissens bestimmt, wobei der „gesunde Menschenverstand“ jeder Einzelnen die Basis für die Erkenntnis der wahren Natur der Welt ist. Den *Discours* beginnt Descartes mit der Feststellung:

Der gesunde Menschenverstand ist die am besten verteilte Sache auf der Welt. Denn jeder denkt, so gut mit ihm ausgestattet zu sein, daß selbst diejenigen, die mit kaum einer anderen Sache zufrieden sind, sich gewöhnlich nicht mehr davon wünschen, als sie bereits besitzen. (AT VI 1,17-21; *Discours*, 3)

Die Welt ist ein Universum und so sind auch die verschiedenen Sachgebiete miteinander verbunden. Die Erkenntnis dieser Verbundenheit ermöglicht große Fortschritte durch kleine, aber gesicherte Schritte, welche damit auch Disziplinen übergreifend wirken.

Konsequenterweise fordert Regel II die Konzentration auf eine den Kompetenzen des Verstandes adäquate Vorgangsweise:

Man soll sich nur solchen Objekten zuwenden, zu deren sicherer und unbezweifelbarer Erkenntnis unsere Geisteskräfte offenbar ausreichen. (AT X 362, 2-4; Regulae, 7, 3,12-14)

In dieser Regel wendet sich Descartes explizit gegen den Fokus auf komplizierte Sachverhalte, welche schwer beurteilbar, auf Meinungen verwiesen sind und so die Verwirrung in sich tragen. Stattdessen fordert er den Verzicht auf Meinungen. Nur Erkenntnisse, welche nicht anzweifelbar sind, können ausgesagt werden. Einzig intuitiv erkannte Gegebenheiten sind geeignet, um zu weiterem Wissen zu gelangen. Kontroversen ergeben sich dann, wenn abseits solcher Intuitionen vermittels Meinungen über oft bloß Wahrscheinliches und manchmal Falsches disputiert wird. Intuitiv erfassbar und daraus anschaulich deduzierbar sind jedenfalls die Gegenstände der mathematischen Disziplinen.

Von den durch andere erkannten Disziplinen stehen, wie wir kurz zuvor gesagt haben, allein Arithmetik und Geometrie rein ohne jede Unzulänglichkeit der Falschheit und der Ungewißheit da. (AT X 364, 22-25; Regulae, 11, 5,16-19)

Damit legt Descartes die Form wissenschaftlichen Arbeitens analog zu mathematischer Arbeit fest. Während Erfahrungen auch irreleitend sein können, liegen in der klar und deutlich erfassten Intuition und der darauf aufbauenden Deduktion die Quellen des Wissens. Diese sind nicht abhängig von den Ansichten anderer, sondern ergeben sich durch Anwendung der gegebenen kognitiven Kompetenzen jeder Einzelnen. Dies wird der Regel III vorangestellt:

Bei den vorgelegten Objekten ist weder danach zu fragen, wie andere sie eingeschätzt haben, noch was wir selbst vermuten, sondern danach, was wir klar und evident intuitiv erkennen oder sicher deduzieren können; nur so nämlich erlangt man Wissen. (AT X 366, 11-14; Regulae, 15, 6,19-23)

2.2.2. Gewissheit aus Intuition und Deduktion

Die Intuition ist eine augenblicklich klare Erkenntnis. Für Descartes sind zum Beispiel „ $2+2=4$ “ oder „ $1+3=4$ “ intuitiv sichere Erkenntnisse. Dass „ $2+2$ “ gleich „ $1+3$ “ ist, ergibt sich erst aus einer Denkbewegung, welche sich daran erinnert, dass beide Additionen die gleiche „ 4 “ ergeben haben. Aus den beiden ursprünglichen Intuitionen wird die neue Erkenntnis der Gleichheit der beiden Terme notwendigerweise mit Hilfe des Gedächtnisses deduziert (AT X 370, 4-9; Regulae, 21, 9,20-26). Während die Intuition instantan geschieht, ist die Deduktion eine Bewegung, welche über Zeit erfolgt und das Gedächtnis fordert, um diese Bewegung nachvollziehbar zu halten. Diese Bewegung erfolgt schrittweise, aber kontinuierlich, wobei jeder einzelne Schritt als Glied einer Kette vorgestellt werden kann. Erst nach dem vollständigen Durchlaufen der Kette wird vermittels des Gedächtnisses Wissen geschaffen.

Wir unterscheiden hier demnach die Intuition des Geistes von der sicheren Deduktion zum einen dadurch, daß in letzterer eine Bewegung bzw. eine bestimmte Abfolge begriffen wird, in ersterer hingegen nicht, und zum anderen dadurch, daß für die Deduktion, anders als bei der Intuition, keine gegenwärtig vorliegende Evidenz nötig ist, sondern sie ihre Gewißheit vielmehr gewissermaßen dem Gedächtnis entnimmt. (AT X 370, 4-9; Regulae, 21, 9,11-18)

Für Descartes ist ein Syllogismus eine so kurze Kette, dass er wie eine Intuition augenblicklich klar ist und so kein neues Wissen bringen kann. Erstens:

Der Formalismus gibt kein Mittel an die Hand, sich der Identität des Mittelbegriffs in Ober- und Untersatz zu vergewissern. Einen solchen Mangel kann nur die Aufmerksamkeit auf die mit den Begriffen gemeinten Sachen ausgleichen. [...] Zweitens: Die Materie des Syllogismus wird bereits als gültig vorausgesetzt, dann aber lehrt der Schlußsatz nichts Neues. (Gäbe, 74)

Neben der Geisteskraft, welche analytisch die Notwendigkeit der Schritte der Deduktion erkennt und dem Gedächtnis, welches die ordentliche Abfolge dieser Schritte festhält, steht unabhängig der Wille, welcher bestimmt, was gewusst werden soll und der jenseits von Wissenschaft die göttliche Offenbarung akzeptiert (AT X 370, 19-22; Regulae, 21, 9,35-38). Das Gedächtnis ist für Descartes ein Wesensmerkmal des Menschen, welches von den physischen Faltungen des Hirns, wie sie auch bei Tieren zu finden sind, unterschieden werden muß. Am 6. August 1640 kündigt er in einem Brief an Mersenne seinen später ausformulierten Dualismus aus körperlichen und geistigen Substanzen an:

Außerdem urteile ich, daß es außer dem körperlichen Gedächtnis, dessen Eindrücke durch diese Falten im Gehirn erklärt werden können, in unserem Verstand noch eine Art von Gedächtnis gibt, das ganz geistig ist und sich bei Tieren überhaupt nicht findet. Es ist vor allem dieses, dessen wir uns bedienen. (AT III 143,8-13; Mersenne, 381)

Der Verstand bedarf (i) der Geisteskraft, um Zusammenhänge zu entdecken, (ii) des Gedächtnisses, um gedankliche Vorstellungen aus bisherigen Erfahrungen evident zu halten und (iii) des Willens, um sich für die Befassung mit der einen oder anderen Problemstellung zu entscheiden. Das Gedächtnis wird von Descartes dabei auch als körperliche Kompetenz beschrieben, welche Tieren ebenfalls zukommt und welche von ihm mit der Anschauung gleich gesetzt wird (cf. AT X 416, 15-23; Regulae, 101, 44,19-21). Das laut Descartes nur dem Menschen zukommende geistige Gedächtnis dient demgegenüber der Bewahrung von Ideen und Gedanken (cf. AT VI, 55,20-24; Discours, 48). Mittels der Kompetenzen von Geisteskraft, Gedächtnis und Willen wird Wissen geschaffen, sofern methodisch sichergestellt ist, dass Irrtümer und Abwege vermieden werden. Der erste Schritt liegt daher im Willen zur Anwendung einer Methode.

2.2.3. Descartes Methode: Von der *mathesis universalis* zur *methode universalis*

Als Ziel der Regel IV formulierte Descartes:

Zum Untersuchen der Wahrheit der Dinge ist eine Methode notwendig. (AT X 372, 10,8-9; *Regulae*, 23)

Für Descartes schafft unsystematisches Vorgehen zwar die Möglichkeit von Zufallsfunden. Solchen Zufälligkeiten kommt aber keine Erklärungskraft zu. Allein methodisches Vorgehen auf Basis von Gewissheiten und notwendigen Folgerungen stellt diese sicher.

Gleichwohl ist es viel besser, niemals auch nur daran zu denken, nach der Wahrheit irgendeines Dinges zu fragen, als dies ohne Methode zu tun. (AT X 372, 2-3; *Regulae*, 23, 10,23-25)

Diese Methode ist nun nichts anderes als die ununterbrochene, kontinuierliche Bewegung des Geistes, welche auf Intuitionen aufbaut und durch diese Deduktionen neues Wissen als Gewissheit schafft.

Unter einer Methode verstehe ich sichere und einfache Regeln, die jeden, der sie genau befolgt, niemals Falsches als wahr voraussetzen lassen, und ihn, weil er die Anstrengung des Geistes nicht unnütz aufwendet, sondern sein Wissen stets schrittweise vergrößert, zur wahren Erkenntnis alles dessen gelangen lassen, wozu er fähig sein wird. (AT X 371,25-372, 4; 11,11-16; *Regulae*, 23/25)

In dieser Regel IV zeigt Descartes, wie seine Methode auf Basis der *mathesis universalis* ein dem menschlichen Erkenntnisvermögen entsprechendes Erkennen durch (i) Ordnung in Bezug auf ein Ganzes und (ii) Größe in Bezug auf eine Einheit ermöglicht. Die Regel selbst spricht in ihrem ersten Teil – wie auch sonst überall in den *Regulae*, – von der *methode universalis* um in Ihrem zweiten Teil die *mathesis universalis* als Modell für eine nach klaren Regeln zuverlässig funktionierende Methode zu präsentieren. Die aus der Algebra zu entwickelnde *mathesis universalis* übernimmt die strengen, aber einfachen algebraischen Regeln, welche zuverlässig über Umformungen Gleiches als gleich bewahren. Algebraische Umformungen erfolgen schrittweise. Durch zweckmäßige Wahl der Umformungen kann so bisher Verdecktes entdeckt und Erkenntnisse schrittweise gewonnen werden. Die Beziehung zwischen diesen beiden Teilen der Regel und deren Beziehung zu den übrigen Regeln wird kontrovers diskutiert. Konsens besteht dahingehend, dass die *mathesis universalis* den ältesten Teil der *Regulae* bildet. Der enge Bezug zu Ordnung kann dabei zur Aufnahme in die Regeln zu einem späteren Zeitpunkt geführt haben.

But it seems to me that this marriage between *mathesis* and method did not work, and Descartes abandoned the idea very quickly. There is not a single example of the method that Descartes suggests in Rule 14, and there is no reason to think that Descartes had any more than a vague and impressionistic idea of the *mathesis* as method. (Garber, 39)

Aufbauend auf unterschiedlichen Analysen dieser in der Regel IV gegebenen, aber von Descartes nie erklärten Heterogenität schreibt Pamela Kraus:

Universal mathematics is a purely mathematical science, a science of "*ordo et mensura*." The identification of mathematical objects with the substance of the world, with "extension having figure," demands attention to many extra-mathematical considerations. It especially requires an account of the cognitive faculties and how they are related to the world: the constitution of mind must be such that it can and needs to make this identification. (Kraus, 171)

Die Besonderheit der *mathesis universalis* liegt in der mathematischen Erfassung von Ordnung und Größe. Die Ordnung ergibt sich dabei aus der diskreten Anzahl der relevanten Einheiten, welche ein Ganzes bilden. Das Maß gibt die durch eine Messung bestimmbare Größe über einem Kontinuum an.

Descartes unterscheidet Ordnungs- und Maßverhältnisse. Das Ordnungsverhältnis betrifft speziell, im Hinblick auf die Universalmathematik, die numerische Quantität (*multitudo*), das Maß Verhältnis dagegen die meßbare Größe (*magnitudo*). Als meßbare Größe (*magnitudo*) wird von Descartes alles bezeichnet, was ein mehr oder weniger zuläßt (*quod recipit majus et minus*). Als numerische Quantitäten sind die ganzen Vielfachen der Einheit zu verstehen, wie sie durch die Folge der natürlichen Zahlen symbolisch angebbar sind. (Arndt, 34)

Eine Menge von Dingen kann der Zahl nach angegeben werden. Diese Quantität ist immer ganzzahlig. Demgegenüber sind Größen einzelner Dinge über einem Kontinuum messbar. Die Quantität ist diskret, die messbare Größe aber kontinuierlich angebbar. Die Kontinuität verlangt, dass jede in einem Messintervall mögliche Größe angegeben werden kann. Die inkommensurablen irrationalen Zahlen stellen diese Kontinuität sicher, indem sie jene Lücken am Zahlenstrahl besetzen, welche von den aus der Relation ganzer Zahl gebildeten rationalen Zahlen nicht abgedeckt werden können. Daher war die allein auf ganze Zahlen und deren Verhältnissen aufbauende Arithmetik nicht in der Lage Messbarkeit zu gewährleisten. Nur mittels Figuren als geometrischer Konstruktionen z.B. eines (i) Kreises konnte π oder (ii) der Diagonale eines Quadrats die $\sqrt{2}$ als nicht kommensurable Zahlen im Verhältnis zur Einheit des Radius bzw. der Seitenlänge dargestellt werden. Die Zahl der unterschiedlichen Qualitäten, welche hinsichtlich ihrer Ausprägung zu bemessen sind, bestimmen die Dimensionen, wobei neben den räumlichen auch andere, wie Farben oder Töne nach Intensitäten angegeben werden können.

In der Regel IV vollzieht Descartes seinen „philosophical turn“ indem er jene Methode, mittels derer neues wahres Wissen erlangt wird, aus dem Modell der *mathesis universalis* ableitet. Diese ermöglicht eine dem menschlichen Erkenntnisvermögen entsprechende Repräsentation der Wirklichkeit (cf. Kraus, 171). Dem menschlichen Erkenntnisvermögen müssen Problemstellungen so vorgestellt werden, dass sie erfassbar sind. Dazu sind diese entsprechend zu „verpacken“. Die Technik dieser „Verpackung“ dazu findet er in der Algebra als wahrer *mathesis*:

Gegenwärtig spielt eine Gattung der Arithmetik eine große Rolle, die man Algebra nennt, und die in bezug auf Zahlen das leisten soll, was die Alten in bezug auf die Figuren taten. Diese beiden sind nun nichts anderes als spontane Früchte, die ihre Wurzeln in den angeborenen Prinzipien dieser Methode haben, und es wundert mich angesichts der einfachsten Objekte dieser Techniken nicht, daß sich diese Früchte bislang besser entwickelt haben als die der übrigen Wissenschaften, bei denen größere Hindernisse die Früchte gewöhnlich verdorren lassen – obwohl sie zweifellos auch dort zu vollkommener Reife kommen könnten, wenn man ihnen nur die beste Pflege angedeihen ließe. (AT X 373, 11-27; Regulae, 27, 12,2-12)

Die Figuren der Alten konnten als geometrische Konstruktionen messbare Größen über jedem Kontinuum des Messintervalls mit Längen und Relationen anschaulich darstellen. Die Algebra abstrahiert die Ausprägungen diverser Größen von deren ganzzahligen Relationen (i.e. den rationalen Zahlen) und bietet damit eine Möglichkeit, die Beschränkungen der damaligen Arithmetik zu lösen. Die Algebra übernimmt die Rechenregeln der Arithmetik und stellt sie auf eine symbolisch erweiterte Basis. Die Mechanik dieser Rechenregeln ist eine Technik, welche die Algebra zu einem Modell macht, methodisch Erkenntnisse aus deduktiv fassbaren Relationen und grundlegenden Intuitionen zu schaffen.

2.2.4. Die Technik der Algebra als Modell für die Methode

Die Algebra ist das Modell für diese eine Methode, auf deren Basis Wissen geschaffen wird. Ihr Formalismus schafft eine einfache, die Realität nach Ordnung und Maß widerspiegelnde, für den menschlichen Erkenntnisapparat zugängliche Methode

Denn jene Technik, die sie mit einem Fremdwort Algebra nennen, ist offenbar genau das. Sie müßte nur so von den vielerlei Zahlen und unerklärbaren Figuren befreit werden, mit denen sie überladen ist, daß ihr nicht länger die Transparenz und höchste Leichtigkeit fehlt, die, wie wir voraussetzen, in der wahren Mathesis vorhanden ist. (AT X 377, 2-9; Regulae, 33, 15,1-6).

Die Beziehung zwischen *mathesis universalis* und *methode universalis* wird von Descartes nicht weiter ausgeführt (cf. Arndt, 50). Die beiden Teile der Regel IV sind textlich klar getrennt, wobei jeder Teil unabhängig vom anderen lesbar ist und in jedem Teil Einzelheiten wiederholt werden. Ob es eine und wenn ja welche Beziehung zwischen den beiden Teilen besteht, ist Gegenstand zahlreicher Interpretationen (cf. Kraus, 164). Kraus verweist darauf, dass im zweiten Teil dieser Regel die Algebra als überladen und intransparent dargestellt wird, mit der Notwendigkeit ihrer methodischen Bereinigung, während im ersten Teil die Algebra als fruchtbringend bezeichnet wird. Sie schließt daraus, dass Descartes zunächst den zweiten Teil mit der *mathesis universalis* verfasst hat. Erst nachdem er selbst mit der algebraischen Technik vertraut war – also nach seiner Zeit bei den deutschen „Rechenmeistern“ – verfasste er den ersten Teil mit der Erweiterung als Methode für alle Domänen des Wissbaren als *Methode universalis* (cf. Kraus, 166). Die in der cossischen Algebra gegebene Symbolik bedarf einiger Gewöhnung aber die in der algebraischen Syntax gegebene Verbindlichkeit erlaubt es, sich eine

effektive Geläufigkeit einzuüben. Descartes Algebra wäre dann nicht – wie von ihm im zweiten Teil der Regel IV gefordert, welcher die *mathesis universalis* verwendet, – methodisch gereinigt worden, sondern er selbst hätte in der Praxis des Umgangs mit algebraischen Aufgaben deren Technik erlernt. Die dazu notwendige Reflexivität im eigenen Denken und Bedenken ist für Descartes eine der Kernkompetenzen der Geisteskraft gemeinsam mit dem Gedächtnis, durch welche Erkennen und Lernen zum Erreichen neuer intuitiver Gewissheiten möglich wird.

Das Modell der Algebra kann theoretisch auf alle Domänen der Wissenschaft angewandt werden, sofern man die jeweiligen Problemstellungen vollständig und richtig analysieren und die in den jeweiligen Domänen behandelten Relationen in Bezug auf Ordnung und Maß bestimmen kann. Die Universalität dieses mechanistischen Ansatzes ist daher nur durch diese Bestimmbarkeiten begrenzt. Für Descartes beginnt die Philosophie mit der Ausarbeitung einer alle Domänen übergreifenden universellen Methode (cf. Kraus, 158) und Wissenschaft mit dem methodischen Schaffen von Wissen analog zu und aufbauend auf dem Modell der Algebra.

Alles, in dem irgendeine Ordnung oder irgendein Maß einer Prüfung unterzogen wird, gehört zur Mathesis; und es kommt nicht darauf an, ob man nun bei Zahlen, Figuren, Gestirnen, Tönen oder irgendeinem anderen Objekt nach einem solchen Maß fragt. (AT X 378, 1-5; Regulae, 33, 15,24-28)

Alle Probleme der Algebra sind auch grundlegende Teilprobleme aller anderen Wissenschaften. Die Lösung dieser Teilprobleme durch die Algebra ist damit Voraussetzung für die Erkenntnis von Wahrheiten in allen anderen Wissenschaften.

Wie sehr aber diese Wissenschaft die anderen, unter ihr stehenden an Nutzen und Leichtigkeit übertrifft, kann man daran sehen, daß sie sich nicht nur auf alles erstreckt, worauf sich die anderen erstrecken, sondern darüber hinaus auch auf vieles andere. (AT X 378, 10-15; Regulae, 35, 15,39-44)

Descartes “philosophical turn” liegt auch in seiner Berücksichtigung der menschlichen Erkenntnisvermögen und der adäquaten „Verpackung“ von Problemstellungen. Wissenschaft entsteht angepasst an dieses Vermögen über alle Domänen methodisch aus (1) unzweifelbar Wahrem – den Intuitionen und (2) analytisch in kleinen Schritten, welche Relationen nach und nach offenlegen – durch Deduktionen. Aus einfachsten Elementen lässt sich so größter Nutzen ziehen, wenn diese Elemente synthetisch richtig in Zusammenhang gebracht werden. Alles andere ist nur wahrscheinlich, bildet Meinungen oder ein “wahrhaben-Wollen” ab.

Die anderen Operationen des Geistes hingegen, die die Dialektik zur Unterstützung dieser beiden ersten beisteuern zu können behauptet, sind hier unnütz oder müssen sogar zu den Hindernissen gezählt werden, weil man zu dem reinen Licht der Vernunft nichts hinzutun kann, was es nicht in irgendeiner Weise trüben würde. (AT X 372,21-373,2; Regulae, 25, 11,21-26)

Die Algebra erlaubt die Darstellung von Relationen, aus welchen auf die zugrunde liegenden Größen geschlossen werden kann. Damit werden Deduktion und Intuition zu den beiden Operationen des Geistes, welche methodisch Erkenntnis aus der Anwendung der algebraischen Technik schaffen. Diese Technik gibt die Möglichkeit sich selbst Einsicht zu verschaffen und mit eigener Vernunft Probleme zu lösen. Entgegen der Verwendung der eigenen Vernunft wäre es, wenn man sich kritiklos auf die Meinungen anderer verlässt oder planlos nach zufälligen Lösungen sucht. Derartige andere Operationen des Geistes sind für Descartes der Verwendung der eigenen Vernunft abträglich.

Der menschliche Verstand und seine Kompetenzen stehen im Mittelpunkt der Methode, welche universell Wissen schafft. Der algebraische Formalismus ist hier ein Modell, um aus einfachsten, intuitiv erfassten Elementen und deren Beziehungen nach einfachen Regeln in einem geordneten Prozess in zahlreichen kleinen Schritten bisher Unbekanntes zu Bekanntem zu machen. Dabei verwahrt sich Descartes gegen jede Vereinnahmung scholastisch bestimmter mathematischer Wissenschaften in seiner *mathesis* (cf. Arndt, 41).

Wer aber meine Absicht aufmerksam beachtet, erfaßt leicht, daß ich hier an nichts weniger als an die gewöhnliche Mathematik denke, sondern eine bestimmte andere Disziplin darlege, für die Figuren und Zahlen eher Verpackung als Bestandteile sind. Diese Disziplin soll nämlich die ersten Bestandteile der menschlichen Vernunft enthalten und sich auf Wahrheiten ausdehnen lassen, die aus jedem beliebigen Gegenstand entwickelt werden können. (AT X 374,1-9; *Regulae*, 27, 12,21-26)

Descartes verwendet für „Verpackung“ den Ausdruck „integumentum“, welcher die Hülle bezeichnet. Die Verpackung ist damit die Grenzfläche, an der das zu Erkennende der Erkennenden begegnet. In seinen späteren Werken hat der klassische Descartes diese Begegnung zwischen *res cogitans* und *res extensa* spezifiziert. In den *Regulae* legt Descartes großen Wert darauf, dass diese Begegnung durch methodisches Vorgehen sicherstellt, dass Erkenntnis im Verstand fassbar bleibt. Die algebraische Technik gewährleistet dies als kontinuierliche Bewegung durch zahlreiche kleine Einzelschritte. Er wendet sich gegen die Rechenmeister, welche verblüffende rechnerische Ergebnisse präsentieren aber nicht zeigen, wie sie dahin gelangen. Descartes sieht in deren Zahlenspielerereien, mit welchen sie um Schüler und Aufträge werben, sinnlose Zurschaustellungen und Zufallsergebnisse, da sie ohne Beweis verbleiben (cf. AT X 375, 13-18; *Regulae*, 29/31; Wohlers 2011a, 236). Die Algebra wird dabei mit ihren „figurierten Zahlen“ als Schauspiel missbraucht. Erst wenn sie für Descartes klar und deutlich ist, kann sie ihm bei der Schaffung von Wissen dienen.

[Es gibt] nichts Komplizierteres, als die neuen Schwierigkeiten, die in den figurierten Zahlen enthalten sind, in einem solchen Beweisverfahren zu enträtseln. (AT X 375, 20-22; *Regulae*, 29, 13,31-34)

Die Regel IV beendet Descartes mit der Feststellung, die *mathesis universalis* ausreichend entwickelt zu haben um zum letzten Glied in dieser Kette, der auf alle Disziplinen oder Domänen anwendbaren universellen Methode gelangt zu sein.

Ich habe diese Mathesis universalis deswegen so weit ausgearbeitet, wie ich es konnte, so daß ich der Ansicht bin, ab jetzt auch etwas höhere Wissenschaften abhandeln zu können, ohne voreilig zu sein. (AT X 379, 1-7; Regulae, 35, 16,11-14)

Die Universalität seiner Methode liegt in der geordneten Rückführung komplexer Gegebenheiten auf einfachste intuitiv fassbare. Die *mathesis universalis* nimmt die Algebra zum Modell für ein derartiges Vorgehen. Als Modell ist die Algebra selbst keine universelle Abbildung der Wissenschaft. Das Modell soll die eigene Vernunft anleiten. Descartes hat die *mathesis universalis* mit seiner eigenen Vernunft so weit ausgearbeitet, wie es ihm möglich war. Damit ist sie für ihn universell zur Erlangung von Wissen geeignet. Diese Ausarbeitung der *mathesis universalis* ergab sich – Kraus folgend – im Wesentlichen im praktischen Einüben der algebraischen Technik, welche als Modell die Geisteskraft im Erarbeiten komplexer Problemstellungen aus einfachsten intuitiv fassbaren Elementen und der geordneten Deduktion aller relevanten Zusammenhänge unterstützt. Das Einüben von Praktiken ist ein reflexiver Prozess, der sich sowohl auf die steigende Qualifikation des Übenden als auch die Technik selbst bezieht. Descartes hat für sich über die Jahre Gewissheit in der Anwendung der Algebra erlangt. Etliche Jahre später schreibt Descartes zum Lernerfolg aus dem wiederholten Studium seiner *Prinzipien*:

Wenn man dann das Buch ein drittes Mal wieder zur Hand nimmt, so wage ich zu glauben, daß sich die Lösung des weitaus größten Teils der zuvor markierten Schwierigkeiten finden wird, und daß, wenn dabei wiederum einige ungelöst zurückbleiben, man deren Lösung bei erneutem Lesen finden wird. (AT VIII/2 12,12-17; Picot, 157)

Gewissheit verschafft man sich methodisch durch kleine Schritte, welche zu bereits als gewiss Erkanntem hinzukommen. Die im Gedächtnis behaltenen Vorstellungen werden so immer wieder neu reflektiert und schaffen so neue Gewissheiten. Die dem Lernen immanente Wiederholung ist nicht eine Wiederholung desselben, sondern jeweils auf einer um kleine Schritte modifizierten Ebene. Lernen ist ein Prozess der Reflexion, welcher gleichzeitig das zu Lernende um kleine Schritte erweitert. Persönliche Erkenntnis erweitert so das verfügbare Wissen in einem Prozess der Selbstverstärkung, wie Descartes es am Beispiel des Aufbaus einer Schmiede zeigt (cf. AT X 397,4-14; Regulae, 65/67, 29,23-37). Diese Selbstverstärkung diskutiere ich unten in Kapitel 2.8.

Im nächsten Kapitel fasse ich alle weiteren Regeln in Bezug auf deren Unterstützung durch methodische Disziplin und konkrete Symboliken zusammen und zeige, wie Reflexivität nicht

nur in Descartes eigener Lernkurve, sondern auch in der Entwicklung seiner Methode wesentlich ist. Gleichzeitig zeigt diese Suche nach einer Verbindung der an sich heterogenen Teile von *mathesis* und *methode* in Regel IV den Weg zur Hinführung auf die Einheit der Wissenschaft mittels mathematischer Fundierung. Die Anwendung der Algebra auf die Geometrie ist der entscheidende Schritt zur Verallgemeinerung der *methode universalis* in der mathematischen Formulierung wissenschaftlicher Probleme. Durch die Zusammenführung von Arithmetik und Geometrie mittels der Algebra werden Verhältnisse von Ausprägungen im Kalkül beschreibbar und damit als messbare Größen rechenbar.

Diese Verschränkung bot um so mehr Anlaß zur Konfundierung beider Bereiche in der kommentierenden Literatur, als in der analytischen Geometrie Descartes' und der in ihr vorliegenden algebraischen Kalkülisierung des Beweisganges geometrischer Sätze beide Problembereiche gegenwärtig sind. (Arndt, 29)

Die Algebra der *mathesis universalis* wird so zum Schlüssel für Descartes streng methodische Wissenschaft.

2.2.5. Methodische Disziplin zur Unterstützung der Geisteskraft

Einerseits vertiefen die folgenden Regeln V bis XIII die bisherigen Regeln in Form von Anleitungen und der Forderung nach deren disziplinierten Einhaltung. Andererseits geben sie uns Descartes Sicht der Geisteskraft und verknüpfen die kognitiven Fähigkeiten des Menschen zur Erkenntnis mit dem methodischem Vorgehen. Sie vollenden damit seinen von Kraus postulierten „philosophical turn“. Zunächst verlangt Descartes strikte Disziplin in der Analyse der Problemstellungen und warnt vor voreiligen Schlüssen aus vermeintlichen Abkürzungen. Regel V verlangt ein geordnetes und nachvollziehbares Vorgehen, um im Verstand erfasste Verhältnisse Schritt für Schritt auf zugrunde zu legende Intuitionen zurückzuführen. Z.B. kann ein dreieckiges Objekt auf seine einfachsten Elemente zurückgeführt werden. Es wird in seine

geradlinigen Grenzen des Dreieckes und seine Ausdehnung, zerlegt, wobei der Verstand den Begriff der geraden Linie für sich zurückbehält, abgesondert von dem Gedanken, daß sie im vorliegenden Falle Grenze eines Dreieckes ist, und den bloßen Begriff einer Ausdehnung, abgesondert von dem Gedanken, daß diese Ausdehnung dreieckige Form besitzt. Vor diesen Abstraktionen wurde der Begriff des Dreiecks bereits von der speziellen Materie abgesondert, in der es auftrat, so daß nur noch die » einfachen Naturen«: Gerade, Ausdehnung (und die Zahl drei, die sich wiederum aus drei Einheiten zusammensetzen läßt), also die einfachen Naturen: Gerade überhaupt, Ausdehnung überhaupt und Eines überhaupt übrigbleiben. (Gäbe, 75)

Das Ziel jeder Deduktion ist die Rückführung komplexer Gegebenheiten auf diese einfache Naturen, welche durch den sie bezeichnenden Begriff intuitiv fassbar sind. Derartige einfache Naturen lassen sich nicht auf andere, grundlegendere Begriffe rückführen. „Gerade“ als grundlegende Form, „Ausdehnung“ als messbare Größe und „Eines“ als grundlegende Einheit

beschreiben so als einfache Naturen den Begriff des „Dreiecks“. Die deduktive Bewegung, welche vom Oberbegriff ausgehend zu diesen einfachen Naturen führt, hat in einer schrittweisen Ordnung zu erfolgen. Die Ordnung, nach der diese grundlegenden Intuitionen analysiert wurden, muß nachvollziehbar erhalten werden, um aus diesen Intuitionen heraus die Lösung in umgekehrter Abfolge zu synthetisieren.

Die gesamte Methode besteht in der Ordnung und Gliederung dessen, worauf die Schärfe des Geistes zu richten ist, um eine Wahrheit heraus[zu]finden. Diese Methode befolgen wir dann exakt, wenn wir verwickelte und dunkle Propositionen stufenweise auf einfachere zurückführen und danach versuchen, von der Intuition der allereinfachsten über dieselben Stufen zur Erkenntnis aller anderen aufzusteigen. (AT X 379, 15-21; Regulae, 37, 16,19-25)

Wenn alle grundlegenden Intuitionen erreicht sind, kann im Wege einer konsequenten Rückabwicklung zur Lösung des Problems geschritten werden. Erst diese intuitiv erfassten Elemente der Welt stellen den Bezug zwischen Lösung und Problemstellung sicher und erlauben, im Wege des kontinuierlichen, deduzierenden Denkens bisher Unbekanntes zu entdecken.

Das Gesetz des kontinuierlichen Fortgangs des Denkens ist nach Descartes der eigentliche und einzige Ariadnefaden, der uns durch das Labyrinth des Wissens hindurchführen kann. (Cassirer, 47)

Ohne Bezug zu intuitiv klar und deutlich Erkanntem bleiben elaborierte Aussagen nur Pseudolösungen, wie die Vorhersagen der Astrologen, die Funktionen nicht durchgeplanter und daher vom Zufall bestimmte mechanischer Vorrichtungen oder die scholastischen Erkenntnisse nur disputierende Philosophen:

So machen es alle Astrologen: Sie geben sich der Hoffnung hin, die Wirkungen der Himmelsregionen angeben zu können, ohne ihre Natur erkannt und sogar ohne ihre Bewegungen vollkommen beobachtet zu haben. Ebenso auch die meisten, die Mechanik ohne Physik studieren und aufs Geratewohl neue Geräte zur Erzeugung von Bewegung herstellen. Und nicht weniger auch jene Philosophen, die Experimente unterlassen und meinen, die Wahrheit werde aus ihrem eigenen Gehirn entspringen wie Minerva aus dem Jupiters. (AT X 380, 9-16; Regulae, 37, 17,3-11)

Analog zur ununterbrochenen Bewegung der Deduktion fordert Descartes eine ununterbrochene Vergewisserung bisher erfasster Verhältnisse. Die aus abstrakten Begriffen deduzierten Vorstellungen müssen anschaulich bleiben. Diese Vorstellungen sind die intuitiv fassbaren Ideen, z.B. der Geraden, Ausdehnung und Einheit, auf welche sich ein Dreieck rückführen lässt. Experimente veranschaulichen diese Vorstellungen, da sie postulierte Erklärungen in der Realität testen. Gute Experimente machen rationale Erklärungen von deduktiv erfassten Beziehungen zum Gegenstand sinnlicher Anschauung. Sie schaffen so die geforderte Klarheit und Deutlichkeit für die Vergewisserung, ob erreichte Ergebnisse mit den

gegebenen Erklärungen übereinstimmen. Der Rationalist Descartes verlangt immer wieder nach empirischen Erfahrungen. Zum Beispiel schreibt er am 25. Februar 1630 an Mersenne:

Ich möchte auch gern wissen, ob Sie nicht in Erfahrung gebracht haben, ob ein mit einer Schleuder geworfener Stein oder eine Musketenkugel oder der Pfeil einer Armbrust in der Mitte ihrer Bewegung schneller gehen und mehr Kraft haben als kurz nach dem Beginn und ob sie größere Wirkung erzielen. Denn das ist allgemeiner Glaube, mit dem sich meine Gründe freilich nicht in Übereinstimmung bringen lassen, und ich finde, daß Dinge, die gestoßen werden und sich nicht von selbst bewegen, am Beginn mehr Kraft haben müssen als unmittelbar danach. (AT I, 113, 23-29; Mersenne, 41)

In Regel VI zeigt Descartes, wie die Anwendung der Algebra als Instrument des Vergleichens in Form von Gleichungen zu Wissen führt.

Um die allereinfachsten Dinge von den verwickelten zu unterscheiden und geordnet zu verfolgen, müssen wir bei jeder Serie von Dingen, in der wir einige Wahrheiten direkt aus anderen deduziert haben, beobachten, was das Allereinfachste ist, und wie weit – mehr oder weniger oder gleich – alles Übrige von ihm entfernt ist. (AT X 381,2-6; Regulae, 39, 17,17-22)

2.2.6. Induktion als hinreichende Ordnung um Unbekanntes zu erkennen

Die Abfolge der Schritte, durch welche man von einer komplexen Problemstellung ausgehend mittels Findigkeit und Scharfblick auf intuitiv erfassbare Elemente geführt wird, ist selbst Gegenstand einer komplexen Ordnung. Scharfblick und Findigkeit sind für Descartes zwei Vermögen der Geisteskraft, welche er in Regeln IX und X bestimmt (cf. AT X 400,16-23; Regulae, 73, 32,10-16). Nur die disziplinierte Abarbeitung aller Schritte erlaubt das Beschreiten des vollständigen und richtigen Rückweges, um zur wahren Lösung zu gelangen.

Eine wahre Lösung liegt dann vor, wenn bisher Unbekanntes aus seinen Relationen zu Bekanntem klar und deutlich erkannt wird. Damit wird bisher Unbekanntes zu Bekanntem. Das Dreieck ist durch drei Geraden und der zwischen den Schnittpunkten dieser Geraden liegenden Ausdehnung vollständig beschrieben. Die von den Geraden eingeschlossenen Winkel und die Längen der Seiten des Dreiecks zwischen den Schnittpunkten der Geraden ergeben sich daraus. Dabei ist ein Dreieck eindeutig bestimmt, wenn entweder die Länge einer Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind, zwei Längen und ein Winkel, oder alle drei Längen. In jedem der drei Fälle können alle unbekannten Größen sofort aus den gegebenen Größen abgeleitet werden. Durch die Deduktion werden sie zu bekannten Größen. Dem Wesen nach sind daher die Elemente, egal ob bekannt oder unbekannt, gleich und der Unterschied liegt nur darin, ob sie bereits erkannt sind.

Die Relationen zwischen den Elementen sind unterschiedlich. Manche Elemente lassen sich gemeinsam als Teilproblem beschreiben, andere sind Schritt für Schritt aufzulösen. Auch die Teilprobleme sind in sich auf einer tieferen Stufe Schritt für Schritt zu lösen, wobei

insgesamt komplexe, teilweise mehrstufige aber auch seriell gegliederte Analysen der Relationen entstehen. Die Problemlösung beginnt auf der jeweils tiefsten Stufe der Teilprobleme. Die Ordnung ergibt sich dabei automatisch aus den deduzierten Relationen.

Wir können deshalb immer sofort, wenn irgendeine Schwierigkeit auftritt, feststellen, ob es angebracht sein wird, vorher einige andere Dinge durchzugehen, und zwar welche ebenso wie in welcher Ordnung. (AT X 382, 12-16; Regulae, 39, 17,30-18,2)

Zur Problemlösung sind alle Elemente in Beziehung zu setzen, wobei absolute Elemente von Descartes als unabhängige Ursachen und relative Elemente als abhängige Wirkungen benannt werden. Die „Absoluten“ sind bei Descartes die grundlegenden, intuitiv erkannten Elemente auf einfachster Stufe, von denen jede Deduktion ausgeht:

Genau dieses Erste nenne ich auch das Einfachste und Leichteste, das sich verwenden läßt, um Fragen zu lösen. (AT X 381,23-382,2; Regulae, 39, 18,12-13)

Das „Relative“ sind die vom „Absoluten“ abhängigen, zu bestimmenden Elemente, welche durch die Strukturen der Relationen gemäß den gefundenen, komplexen Mustern erschlossen werden.

Ein Relatives ist umso weiter von dem Absoluten entfernt, je mehr derartige, einander untergeordnete Bezogenheiten es enthält. Diese Regel weist uns an, alle diese Bezogenheiten voneinander zu unterscheiden und ihre wechselseitige Verflechtung und natürliche Ordnung so einzuhalten, daß wir vom Letzten bis zu dem, das in höchstmöglichen Grade absolut ist, gelangen können, indem wir durch alle anderen hindurchgehen. (AT X 382,9-16; Regulae, 41, 18,18-25)

Das zu bestimmende, abhängige Element ist über algebraische Formen, also durch ein Gleichungssystem, welches die Relationen der Elemente zueinander in Beziehung setzt, aus den zugrundeliegenden „Absoluten“ zu bestimmen. Dabei wird aber jedes „Relative“ für andere Elemente ein „Absolutes“, sobald das Teilproblem gelöst ist, in welchem das „Relative“ beschrieben wird. Die Zuordnung von „absolut“ und „relativ“ ist selbst relativ. Ausgehend von der Suche nach dem in höchstem Grade absolut Gegebenen als allgemeinsten Basis beginnt die schrittweise Lösung des Problems durch Lösung der Teilprobleme. Über die erkannten Relationen können die Elemente verglichen werden. Diese Vergleiche werden als Gleichungen formuliert.

Unter dem Meßbaren ist die Ausdehnung etwas Absolutes, unter den Ausdehnungen aber die Länge usw. Außerdem haben wir mit Absicht ebenso die Ursache und das Gleiche zum Absoluten gezählt – nämlich damit wir besser einsehen, daß wir hier die Serie der zu erkennenden Dinge und nicht die Natur jedes einzelnen Dinges betrachten –, obwohl ihre Natur wirklich relativ ist. Denn bei den Philosophen sind Ursache und Wirkung zwar korrelativ; hier aber fragen wir danach, wie die Wirkung beschaffen ist, und dabei ist es nötig, zuerst die Ursache zu erkennen und nicht umgekehrt. Gleiche Dinge korrespondieren einander wechselseitig; welche Dinge aber ungleich sind, erkennen wir nur durch einen Vergleich mit gleichen Dingen und nicht umgekehrt usw. (AT X 382,26-383,10; Regulae, 41, 18,38-19,11)

Diese in höchstem Grade absolut Gegebenen sind die mittels Scharfsinn der Geisteskraft erkannten Intuitionen, die Ausgangspunkte für die Deduktionen der davon abhängigen relativen Elemente sind. Die Relationen werden in Form von Gleichungen verfasst. Relative werden dadurch bestimmt und so als dann absolut gesetzt für die Bestimmung weiterer von diesen abhängigen Elementen. Das Einfachste ist jenes in höchstem Grade absolut Gegebene, von welchem die Deduktionen ausgehen und welche die Struktur des Gleichungssystems bestimmen. Diese intuitiv fassbaren einfachen Naturen sind zunächst möglichst vollständig zu sammeln. Nur deren Vollständigkeit gewährleistet ein Gesamtbild, aus welchen auf die Unbekannten in einer Zahl von Schlüssen gefolgert werden kann. Diese in der Zahl von Schlüssen gegebene Ordnung ist Teil der methodischen Lösung der Problemstellung (cf. AT X 383, 18-23; *Regulae*, 43, 19,20-24).

Descartes demonstriert dies am Beispiel der laufenden Verdoppelungen der Zahl 3, welche zur Serie 3, 6, 12, 24, 48, ... führen. Die Reihe kann problemlos fortgesetzt oder auch für jede andere Zahl gebildet werden. Um das Bildungsgesetz zu erkennen, reicht ein Blick auf die vollständige Serie. Sind aber nur zwei Elemente bekannt, z.B. 3 und 12 muss deren Position an der 1. und 3. Stelle angegeben werden, um das dazwischen an der 2. Stelle liegende Glied zu finden: das Verhältnis von $12:3 = 4$ ist auf die beiden Intervalle als $2\sqrt{4}$ aufzuteilen. Kennt man die Außenglieder 3 und 48, ist deren Verhältnis von $48:3 = 16$ als $3\sqrt[3]{16}$ dreimal zu halbieren, um die vollständige Serie mit den drei dazwischen liegenden Gliedern zu erhalten.

So ist die Zahlenfolge 3, 6, 12, 24, 48 usw. durch die Eigenschaft bestimmbar, daß in dieser Folge mit dem Anfangsglied 3 der Nachfolger jeder Zahl deren Zweifaches ist. Der Gewinn besteht hier in der Ableitbarkeit beliebig vieler Zahlenpaare, die in dem selben Verhältnis einer geometrischen Progression stehen, durch die Angabe einer allgemeinen Formel: $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)}$; $a_{(n+1)} = 3 \cdot 2^n$ (Arndt, 36f)

In den *Regulae* zeigt Descartes, dass Bestimmung und Angabe der Ordnung zu setzender Schritte wesentlich sind, um eine allgemeine Lösung zeigen zu können. Die von Arndt gegeben algebraische Beschreibung dieser Potenzreihe liegt in den *Regulae* noch nicht vor. Die Ordnung ergibt sich aus der Bestimmung der Zahl der zu setzenden Schritte, um von einem bekannten Element zum nächsten bekannten zu kommen und der Angabe einer laufenden Verdoppelung. Dieses Bildungsgesetz kann universell angewandt werden, völlig unabhängig von der zu verdoppelnden Größe.

Und vorausgesetzt, man hat das Verhältnis zwischen zwei beliebigen Größen herausgefunden, lassen sich unzählige angeben, die untereinander genau dieses Verhältnis haben. (AT X 385,7-9; *Regulae* 45, 20,23-25)

Um die zwischen den bekannten Größen liegenden Glieder zu bestimmen, ist die Zahl dieser Unbekannten wesentlich. Dabei zeigt sich, dass die Bestimmung von drei Unbekannten auf das Verfahren zur Bestimmung von zwei Unbekannten rückgeführt werden kann. Potenzen können nach Gattungen gelöst werden (cf. AT X, 386,7-14; Regulae, 47, 21,14-20). Die Behandlung geometrischer Progressionen, in Form von ihren Grad bestimmenden Potenzen steht im Mittelpunkt der algebraischen Darstellung. Die Kenntnis der Ordnung und die disziplinierte Einhaltung derselben sind wesentlich, um vom Einfachsten zum wahren Bild des Ganzen und aller seiner bisherigen Unbekannten zu kommen. Dabei ist die in diesem Beispiel gezeigte Suche nach dem Grad einer Potenz ein Mittel, um die Universalität der Algebra zu zeigen. Descartes beschließt die Regel VI mit dieser Beobachtung:

Aber das Gesagte wird genügen, sowohl damit der Leser bemerkt, was ich damit sagen will, daß eine Proposition direkt oder indirekt deduziert wird, als auch damit er sich vor Augen hält, daß jemand, der aufmerksam nachdenkt und findig untersucht, gerade auch in anderen Disziplinen vieles aus allereinfachsten und zuerst erkannten Dingen auffinden kann. (AT X 387,1-8; Regulae, 49, 22,1-5)

Die Algebra ist das Modell, welches zeigt wie vermittels einer Ordnung gesetzter oder zu setzender Schritte Erkenntnis möglich wird.

2.2.7. Descartes Bedingungen für richtigen Deduzierens

In Regel VII sucht Descartes eine pragmatische Lösung für die Grenzen des Gedächtnisses und der Forderung nach Vollständigkeit der einer Problemstellung zugrunde liegenden Intuitionen und den daraus folgenden Deduktionen. Es geht um die Aufzählung oder Induktion der für die Problemlösung notwendigen Schritte. Deren Einzelheiten sind – analog zum Bild der Kette – „in einer kontinuierlichen und nirgends unterbrochenen Bewegung des Denkens durchzugehen und [...] in einer hinreichenden und geordneten Aufzählung zusammenzustellen“ (AT X 387,10-14; Regulae, 49, 22,6-10). Er formuliert drei Vorschriften zur Deduktion:

- (i) Sie muss als kontinuierliche Bewegung und
- (ii) ohne Auslassungen erfolgen.
- (iii) Alle relevanten Einzelheiten sind „hinreichend“ aufzuzählen.

Diese Aufzählung unterstützt einerseits das Gedächtnis und erlaubt andererseits das Zusammenfassen von einzelnen Dingen zu Gruppen, für welche eine erkannte Relation oder Regel gemeinsam gilt. Descartes bezeichnet diese hinreichende Aufzählung als Induktion (cf. AT X 388,25-389,11; Regulae, 51/53, 23,16-30), welche den Schluss vom Einzelnen auf alle Mitglieder einer Gruppe verallgemeinert. Was dabei „hinreichend“ bedeutet ergibt sich für Descartes aus den Umständen. Diese inkludieren das Vorwissen und erhalten damit eine

reflexive Qualität, wie er am Beispiel der rationalen Seele und am Beispiel der Flächen von in einem Kreis eingeschriebenen Vielecken zeigt.

Wenn ich aber auf demselben Weg zeigen wollte, daß die rationale Seele nicht körperlich ist, wird keine vollständige Aufzählung nötig sein, sondern dafür wird es ausreichen, alle Körper insgesamt so in bestimmte Gruppen zusammenzufassen, um zu beweisen, daß die rationale Seele zu keiner von ihnen gehören kann. Wenn ich schließlich durch eine Aufzählung zeigen wollte, daß die Fläche des Kreises größer ist als alle Flächen der anderen Figuren gleichen Umfangs, ist es nicht nötig, alle Figuren durchzugehen, sondern es wird ausreichen, dies in bezug auf einige im besonderen zu beweisen, um dasselbe durch Induktion auch für alle anderen zu schließen. (AT X 390, 13-25; Regulae, 55, 24,33-25,2)

Die Bestimmung dessen, was „hinreichend“ ist bleibt dabei der eigenen Beurteilung unterworfen. Descartes erklärt, die *mathesis universalis* so weit ausgearbeitet zu haben um sie als universelle Methode anzuwenden (cf, AT X 379, 1-7; Regulae, 35, 16,11-14). Dabei hat er induktiv aus abzählbar vielen Beobachtungen seiner eigenen algebraischen Erfahrungen auf eine universelle Gegebenheit geschlossen. Den „Zielkorridor“ legt er selbst fest, indem er bestimmt, was eine hinreichende Bestimmung ist. Den Beweis für die Induktion, dass die Kreisfläche das Maximum über der Zahl der Ecken einer Figur gegebenen Umfangs ist, läßt sich heute über den Grenzwert der Zahl der Ecken von Vielecken, welche in der Figur des Kreises gegen unendlich gehen, führen. Unendlich ist dabei keine arithmetische fassbare Zahl. Zu Descartes Zeit konnte das Problem geometrisch durch Ein- oder Umschreiben des Kreises durch Vielecke veranschaulicht werden. Auch wenn ein Kreis kein Vieleck ist, so lassen sich beide als geschlossenen geometrische Figuren mit Umfang und Fläche, also als Dinge der *res extensa* zusammenfassen. Die reale Unterscheidung der rationalen Seele vom Körper (AT VII, 71, 11-12; Meditationen, 79) stößt aber bei dieser Induktion auf Schwierigkeiten. Erst aus der Konstruktion dessen, was körperlich ist können Gruppen der Körper ausgebildet werden, welche notwendigerweise keine rationale Seele beinhalten können, da die Konstruktion selbst eine geistige Leistung ist.

Mir ist bekannt, daß ich existiere; ich frage, was ich bin, jenes Ich, das mir bekannt ist. Ganz sicher hängt die Kenntnis des genau so verstandenen Ichs nicht von dem ab, von dem mir noch unbekannt ist, ob es existiert und demnach hängt sie von nichts ab, das ich in der Anschauung ausbilde. Dieses Wort *ausbilden* aber erinnert mich an meinen Irrtum: denn tatsächlich würde ich bloß etwas konstruieren, wenn ich mir vorstellte, was ich sei. Denn sich etwas vorzustellen ist nichts anderes als sich in die Gestalt, bzw. in das Bild eines körperlichen Dinges zu vertiefen. (AT VII, 27,30-28,5; Meditationen, 31)

Die geistige Leistung bedingt dabei das eigene Sein. Dieses eigene Sein als denkendes Ding beschreibt Descartes wie folgt:

Nun – ein denkendes, einsehendes, behauptendes, bestreitendes, wollendes, nicht wollendes, und auch etwas sich vorstellendes und sinnlich wahrnehmendes Ding. (AT VII, 28,21-22; Meditationen, 32)

In den *Meditationen* behandelt Descartes explizit die Unterschiedlichkeit der beiden von ihm postulierten geistigen und körperlichen Substanzen. In den *Regulae* ist diese Differenzierung zwar immer wieder angedeutet aber nicht formuliert, Für die Induktion ist wesentlich, dass die hinreichende Aufzählung in einer geordneten Form erfolgt. Diese Ordnung selbst schafft eine Struktur, welche die Problemlösung offensichtlich machen kann und so das Gedächtnis unterstützt.

Außerdem besteht bei vielen der leichteren Kunstfertigkeiten des Menschen die gesamte Methode, sie herauszufinden, darin, eine solche Ordnung anzulegen. [...] Denn meistens muß man zugleich auf sie zurückgreifen, und alle drei [Vorschriften zur Deduktion] tragen gleichermaßen zur Vervollkommenung der Methode bei. (AT X 391,14-392,4; *Regulae*, 57, 25,17-34)

Die Festlegung der Ordnung ist frei wählbar aber in ihrer Sinnhaftigkeit wieder von den Umständen abhängig. Mit der Reflexivität des Einübens und Lernens nützlicher Ordnungen wird selbst das Lösen von Anagrammen ein Kinderspiel (cf. AT X 391, 25; *Regulae*, 57, 25,29). Sofern die für ein Anagramm durchzuführenden Permutationen der Buchstaben innerhalb eines Wortes in einer bestimmten Ordnung durchgeführt werden, wird doppeltes Durchlaufen verhindert und zielgerichtet, also nicht zufällig, nach den richtigen Umsetzungen gesucht.

2.2.8. Die Selbstverstärkung in der Schaffung von Wissen

Regel VIII verbindet (i) den bisherigen methodischen Ansatz für Wissenschaft als einer einheitlichen, geordneten Vorgangsweise mittels von Intuitionen ausgehenden, hinreichend aufgezählten Deduktionen mit (ii) den Erkenntnisvermögen des Verstandes, um die Grenzen des Wissens auszuloten. Während Regel II fordert, sich nur mit solchen Problemen zu beschäftigen, welche mit der eigenen Geisteskraft lösbar sind stellt diese Regel die Erkenntnis der eigenen Begrenzung als wesentlich vor, um diese Begrenzungen des eigenen Wissens aus einer gewissen Position heraus zu verschieben. Erst wenn Klarheit geschaffen wurde, können Fragen der nächsten Stufe sinnvoll und jenseits von Vermutungen und Meinungen angegangen werden. Ohne Gewissheit aber landet der Erkenntnisprozess auf einer „Stopp-Stufe“, von der aus kein neues Wissen geschaffen werden kann. Die Erkenntnis, so eine Stufe erreicht zu haben, verhindert die Schaffung von Scheinwissen.

Denn jeder, der bei der Lösung irgendeiner Schwierigkeit die ersten Regeln exakt befolgt hat, dann aber von dieser Regel aufgefordert wird, irgendwo stehenzubleiben, wird sicher erkennen, daß er das fragliche Wissen durch überhaupt keine Maßnahme herausfinden kann, und zwar nicht aus Verschulden der Geisteskraft, sondern weil die Natur der Schwierigkeit selbst es verhindert oder die menschliche Verfassung (*conditio humana*). Diese Erkenntnis ist genauso Wissen wie diejenige, die die Natur des Dinges selbst darstellt, und jemand, der seine Neugierde weiter ausdehnen würde, hat offenbar keinen gesunden Geist. (AT X 393,10-23; *Regulae*, 59, 26,31-27,9)

Die in der Schwierigkeit der Natur liegende mögliche Verhinderung verlangt nach einer gezielten Auseinandersetzung mit dieser Natur. Auch wenn die Algebra das Modell für die universelle Methode der Wissenschaft ist, so ist sie doch nur Modell. Um das Problem zu Erkennen und danach anhand des Modells geordnet und in kleinen Schritten zu lösen, muss die in der Natur, also der Physik liegende Problematik verstanden werden. Als Beispiel gibt Descartes die Bestimmung der anaklastischen Linie bei der Fokussierung von Licht in Linsen. Ein Mathematiker ohne physikalische Kenntnisse kann zwar die geometrischen Details erfassen. Aber diese reichen nicht zur Bestimmung der Linie, da diese auch vom Material der Linse abhängt, welches physikalisch zu bestimmen ist. Erst wenn die geometrischen mit den physikalischen Intuitionen kombiniert werden, kann die Bestimmung erfolgen. Die adäquate Formulierung des spezifischen Problems liegt im sukzessiven Absteigen der zu stellenden Fragen nach den, dem Problem zugrunde liegenden allgemeinen Gewissheiten. Danach werden die Antworten aus allgemeinen Intuitionen heraus in immer speziellerer Form deduziert. In umgekehrter Ordnung ergibt sich schließlich die spezielle Lösung. Descartes zeigt, wie die Fragen nach der anaklastischen Linie, welche die Kontur der Linse festlegt, immer mehr verallgemeinernd von der Frage nach der Linie, über Fragen nach Brechungswinkeln, Lichtbrechung und dem Wesen von Licht schließlich auf die Frage nach „natürlichen Mächten“ zurückgeführt werden kann. Diese allgemeinste Frage ist dann mit einer Intuition zu beantworten. (cf. AT X 395,4-16; Regulae, 61/63, 28,4-17).

That is, Q1 is reduced to Q2 if we must answer Q2 before we can answer Q1. Descartes thinks that this process leads us from more specific questions to more general, more basic, more fundamental questions, from the shape of a specific lens, to the law of refraction, to the nature of light and the nature of a natural power. Descartes thinks that when we follow out this reductive series, we will ultimately reach an intuition. (Garber, 37)

Ob so eine zugrunde liegende, allgemeinste Intuition erreicht ist, muß der Verstand unter Zuhilfenahme seiner unterstützenden Kompetenzen von Anschauung, Gedächtnis und Einbildungskraft unter Reflexion auf die bisherigen Erfahrungen entscheiden. Die zugrunde liegende Idee muss dem Verstand klar und deutlich sein.

Denn auch wenn viele bislang vergeblich nach dieser Linie gefragt haben, sehe ich gleichwohl nichts, was jemanden, der unsere Methode vollkommen verwendet, von ihrer evidenten Erkenntnis abhalten könnte. (AT X 395,13-16; Regulae, 63, 28,14-17)

Sobald der Verstand eine klare und deutliche Idee hat, z.B. für Descartes jene einer „natürlichen Macht“, ist jene Gewissheit gegeben, welche es erlaubt die darüber stehende, speziellere Frage (in dem Fall nach der Natur des Lichts) mit den vom Verstand geforderten und vorliegenden Intuitionen zu adressieren. Aus der vollständigen Rückabwicklung der

hinreichend aufgezählten, geordneten Fragen, kann schließlich jene nach der genauen Form der anaklastischen Linie beantwortet werden.

If knowledge is structured in this way, then Descartes thinks we should be able to solve any problem in an orderly and methodical way, tracing step by step through the layers, back toward the intuition, and deducing down from there to the question that interests us. (Garber, 38)

Die Reflexion auf die eigenen Grenzen fordern zum Lernen und Üben auf. Wenn man der Argumentation von Kraus folgt, hat Descartes daran gearbeitet seine algebraischen Kenntnisse so weit zu entwickeln, dass ihm die Algebra klar und deutlich wurde. Statt der methodischen Reinigung der Algebra, wie er sie im *mathesis* Teil der Regel IV gefordert hatte, ist ihm diese auf reflexive Weise durch laufende Anwendung so klar geworden, dass er weitergehen konnte um sie auf alle anderen Wissensbereiche als universelle Methode der Repräsentation anzuwenden. Die Algebra ist ein Werkzeug, um die Methode zu formen. An dieser Stelle der *Regulae* kommt es wieder zu einem Umbruch betreffend den Gebrauch von Werkzeugen:

Aber geben wir das beste Beispiel von allen. Wenn es sich jemand zur Aufgabe (*quaestio*) macht, alle Wahrheiten einer Prüfung zu unterziehen, zu deren Erkenntnis die menschliche Vernunft ausreicht – was, wie mir scheint, alle diejenigen einmal im Leben tun müssen, die sich ernsthaft um einen unverdorbenen Geist bemühen –, dann wird er durch die angegebenen Regeln sicherlich herausfinden, daß nichts früher erkannt werden kann als der Verstand, weil die Erkenntnis alles übrigen von ihm abhängt und nicht umgekehrt. (AT X 395, 17-24; *Regulae*, 63, 28,18-26)

Die Erkenntnis des eigenen Seins als „denkendes Ding“ (AT VII, 28,20; *Meditationen*, 32) und damit des eigenen Verstandes ist die erste und grundlegendste Intuition. Der Verstand ist das erste Werkzeug der Erkenntnis, welchem mit der Fantasie und den Sinnen der Wahrnehmung zwei weitere Werkzeuge zur Unterstützung zur Verfügung stehen. Es gilt,

diese drei Modi des Erkennens zu unterscheiden und einer Prüfung zu unterziehen. [Man] wird dann sehen, daß es Wahrheit oder Falschheit eigentlich nur einzig und allein im Verstand geben kann, obwohl sie ihren Ursprung oft in der Phantasie und den Sinnen haben. (AT X 395,26-397,1; *Regulae*, 63, 28,35-40)

Die von Descartes formulierte Methode steht jedem Menschen gleichermaßen offen. Bei gewissenhafter Anwendung gemäß den beschriebenen Prinzipien der Intuition, Deduktion und Induktion können alle Menschen gleichermaßen Erkenntnis gewinnen (cf. AT X 396, 15-21; *Regulae*, 65, 29,6-12).

Die Intuition ist von den Sinnen durch ihre Sicherheit und Beständigkeit und von der Einbildung durch ihre Wahrhaftigkeit unterschieden. (Pasini, 168)

Dabei ist die Methode auch ein Werkzeug zur Formung der Methode. Descartes zeigt, dass das Wissen aber nicht in den Werkzeugen steckt, sondern im Verstand der Menschen. Der ist

aber auch Werkzeug und verbindet so auf reflektive Weise die Metaebene des ultimativen Werkzeugs mit der Objektebene des selbst lernenden Werkzeugs.

Diese Methode ahmt diejenigen mechanischen Techniken nach, die nicht der Hilfe anderer bedürfen, sondern sich selbst die Mittel zur Verfügung stellen, wie ihre Werkzeuge herzustellen sind. Denn wenn jemand eine solche Technik ausüben wollte, z. B. die Schmiedetechnik, ihm aber sämtliche Werkzeuge weggenommen wären, dann wäre er wohl am Anfang gezwungen, einen harten Stein oder irgendeine Masse Roheisen als Amboß, und einen Steinblock anstelle eines Hammers zu verwenden, Zangen aus Hölzern zu machen, und je nach Erfordernis anderes dergleichen zusammenzusuchen. Wenn er sich schließlich mit all dem ausgerüstet hätte, würde er nicht sofort versuchen, für andere Leute Schwerter oder Helme zu schmieden oder irgendetwas anderes, was man aus Eisen herstellt, sondern er würde zuerst Hämmer, Amboß, Zangen und das übrige herstellen, das er selbst benötigt. (AT X 397,4-14; Regulae, 65/67, 29,23-37)

Die Methode verlangt, erst dann weiterzugehen, wenn der Verstand die Aussage klar und deutlich erkannt hat. Solange sich der Verstand eine Idee noch nicht klar und deutlich vorstellen kann, darf er noch kein Urteil fällen.

Denn solange ich den Willen beim Fällen der Urteile so im Zaum halte, daß er sich nur auf das erstreckt, was ihm vom Verstand klar und deutlich dargestellt wird, ist es unmöglich, daß ich mich irre. (AT VII, 62,13-17; Meditationen, 68)

Dazu müssen jeweilige Vorbedingungen erfüllt sein, um im Verstand die Wahrheit von Aussagen klar und deutlich zu erkennen, welche sich aus der von grundlegenden Intuitionen ausgehenden Denkbewegung der Deduktion gemäß der hinreichenden Aufzählung ergeben haben. Analog zum Schmied, welcher sich als Vorbedingung seiner Produktion erst jene Werkzeuge schaffen muss, welche für das Schmieden seiner Produkte notwendig sind, muss auch die Wissenschaftlerin die Effektivität ihre Methode methodisch sicherstellen. Einerseits liegt das Wissen um Werkzeuge im Verstand des Schmieds oder der Wissenschaftlerin. Andererseits sitzen diese im Verstand existierenden Gedanken nicht losgelöst in einem Elfenbeinturm, sondern erhalten ihren Bezug zur Welt durch permanente Reflexion auf den erreichten Nutzen der Werkzeuge. Nur wenn dieser klar und deutlich gegeben ist, kann der nächste Schritt gesetzt werden. Bis dahin hat sie an der Art ihres Vorgehens und der Form ihrer Experimente, also ihrer Methode, methodisch zu arbeiten. Das Experiment ist für Descartes eine Notwendigkeit um Erfahrungen, welche von Umständen beeinflusst oft trügerisch sind, methodisch zu überprüfen.

Das gesamte Vertrauen, das ich den Sinnen entgegengebracht hatte, ist später jedoch durch viele Experimente nach und nach erschüttert worden. (AT VII, 76,21-23; Meditationen, 83)

Experimente erlauben ein unter kontrollierten Umständen erfolgreiches Sammeln von Erfahrungen. Diese Erfahrungen erlauben die Verbesserung der angewandten Methode. Sie

dienen damit der methodischen Verbesserung der eingesetzten Techniken. Das Beispiel des Schmieds zeigt,

daß wir nicht sofort versuchen dürfen, mit [Hilfe der Methode] Streitfragen der Philosophen zu schlichten oder verwickelte Knoten der Mathematiker aufzubinden, sondern sie zuerst dafür verwenden müssen, um mit größtem Eifer alles andere auszukundschaften, was zur Prüfung der Wahrheit viel notwendiger ist, insbesondere da es keinen Grund gibt, weshalb es uns als schwieriger erscheinen sollte, dies herauszufinden, als irgendwelche der Fragen, die gewöhnlich in der Geometrie, der Physik oder anderen Disziplinen gestellt werden. (AT X 397,18-26; *Regulae*, 67, 30,1-10)

In der Entwicklung der Regeln zeigt sich mit dem „besten Beispiel“ und dem Schmied ein Schritt auf eine höhere Ebene in der Schaffung von Wissen. Neben dem eigenen Lernen durch Üben entwickelt sich auch die angewandte Wissenschaft weiter.

Descartes, on the developmental reading, introduced a shift in his thought, one away from using raw tools, the early rules of the method (the assumed veracity of intuition and deduction), to forging more useful tools, a new method crafted by the early rules. (Brissey, 22)

Die Umsetzung jeder Methode erfordert eine bestimmte Technik, welche als Idee im Geist des Technikers entstanden ist (AT VII, 14,30-33; *Meditationen*, 15). Jede nützliche Technik entwickelt sich aus einfachen Ursprüngen über ihre Praxis. In der *Geometrie* zeigt Descartes, wie aus der methodischen Einbringung von Erfahrungen der Arithmetik die Technik der Geometrie auf ein komplett neues Niveau gehoben werden kann. Im *Brief an Picot* fasst er zusammen:

Denn man sieht bei allen Techniken, daß sie sich auch dann, wenn sie zu Beginn roh und unvollkommen sind, nach und nach durch den Gebrauch vervollkommen. (AT VIII/2 18,24-26; Picot, 167)

Diese jeder wissenschaftlichen Arbeit inhärente Reflexion liegt in der Polarität der Erkenntnis zwischen der Erkennenden und dem Erkannten. Die Methode der Erkenntnis hat beide zu berücksichtigen.

Damit wir das aber bei der gestellten Frage in Erfahrung bringen können, teilen wir zuerst alles, was zu ihr gehört, in zwei Glieder: denn es muß entweder auf uns, die wir der Erkenntnis fähig sind, bezogen werden, oder auf die Dinge selbst, die erkannt werden können. Mit diesen beiden setzen wir uns getrennt auseinander. (AT X 398,17-25; *Regulae*, 69, 30,36-31,2)

Die Erkenntnis entsteht im Verstand der Erkennenden. Damit im Verstand Wissen entsteht bedient sich dieser der Vermögen von Anschauung, Sinn und Gedächtnis als Vermittler im Prozess des Erkennens. Dabei sind diese notwendigerweise vermittelten Vermögen sowohl unterstützend als auch hemmend (cf. AT X 398,26-399,4; *Regulae*, 69, 31,3-9). Bei stringenter Anwendung der Methode steht aber Erkenntnis jeder, die erkennen will, offen.

Wir werden in diesem gesamten Traktat versuchen, alle dem Menschen zur Erkenntnis der Wahrheit offenstehenden Wege so sorgfältig zu verfolgen und so leicht darzustellen, daß jeder – und sei seine Geisteskraft auch noch so mittelmäßig –, der diese gesamte Methode einmal vollkommen gelernt hat, sieht, daß ihm überhaupt kein Weg verschlossen ist, der anderen Leuten offensteht. (AT X 399,22-400,2; Regulae, 71, 31,24-30)

Die Erkenntnis hat sich auf das Elementarste zu fokussieren. Dabei vergleicht Descartes die Intuition des Verstandes mit dem Erkennen mittels der Augen, welche sich auf bestimmte Objekte fokussieren und von diesen im Fokus stehenden und so erkannten Dingen ausgehend ein Gesamtbild erfassen.

Eben aus diesem Vergleich geht hervor, daß sie die gegenwärtige Evidenz und das tatsächliche Beschauen der einzelnen Wahrheiten voraussetzt. Doch die Erkenntnis besteht aus geordneten Folgen solcher Wahrheiten, deren Verbindung über die augenblickliche, bei jedem Schritt verfügbare Wahrnehmung hinausgeht. Diese Verbindung ist hingegen im Prozeß der Deduktion gewährleistet, während dessen der ganze Gedankengang auch im Gedächtnis eingespeichert wird und deshalb schrittweise überprüft werden kann. (Pasini, 164)

Diese Fokussierung ist auch Voraussetzung für den Scharfblick (lateinischer Ausdruck *perspicacitas*), mit dem der Verstand aus den einfachsten Dingen die komplexesten Zusammenhänge erkennen kann.

Ebenso werden jene Leute scharfblickend, die das Denken niemals an einer Vielfalt von Objekten gleichzeitig zerstreuen, sondern das ganze Denken immer damit beschäftigen, gerade die einfachsten und leichtesten Dinge zu betrachten. (AT X 401, 3-10; Regulae, 73, 32,23-27)

Nur so kann verhindert werden, das zweifelhaftes, bloß wahrscheinliches, oder Meinungen in den Erkenntnisprozess einfließen. Regeln IX und X fordern, dazu die beiden Vermögen der Geisteskraft auszubilden, zu üben und zu trainieren,

nämlich den Scharfblick, einzelne Dinge deutlich intuitiv zu erkennen, und die Findigkeit, die einen aus den anderen fachgerecht zu deduzieren (AT X 400,22-23; Regulae, 73, 32,14-16)

Die Findigkeit (lateinischer Ausdruck *sagacitas*) wird ausgebildet, wenn man lernt, was andere Menschen bisher hervorgebracht haben. Aber dies dient nicht dazu

die Begründungen anderer anzuhören, sondern diese Begründungen durch eigene Aktivität herauszufinden (AT X 403,13-15; Regulae, 77, 34,20-23)

Dabei sind geordnete Prozesse bestens geeignet, um methodisch erfasst und hinterfragt werden zu können (cf. AT X 404, 5-13; Regulae, 79, 35,7-13). Descartes lehnt dialektische Vorschriften als oftmals rein formal und sophistisch ab, wobei sich die „Wahrheit oft diesen Fesseln entzieht“ (AT X 406,4-5; Regulae 81, 36,19). Die Form der Methode ist wichtig, nicht aber ihre rhetorische Präsentation. (cf. AT X 405,21-406,5; Regulae, 81, 36,1-12).

In Regel XI werden Intuition und Deduktion in Zusammenhang gebracht als “eine bestimmte Bewegung des Denkens, in der das Einzelne aufmerksam intuitiv erkannt und

zugleich der Übergang zu etwas anderem erfolgt” (AT X 408,15-17; Regulae, 85, 38,12-15). Durch das Erkennen von Ordnung kann dabei die “Trägheit der Geisteskraft abgeholfen und ihr Fassungsvermögen sogar vergrößert” (AT X 409, 8-10; Regulae, 87, 23,1-3) werden. Es geht um die Ausbildung des Fassungsvermögens der Geisteskraft um die Denkbewegung vollständig zu erhalten.

Die Kraft der Bewegung des Denkens soll die Intuition fortlaufend die ganze Schlußfolgerung begreifen können, wie sie jeden Schritt selbst begreift. Wie Descartes in der elften Regel erklärt, ist Deduktion sowohl diese gesamte Bewegung, und als solche der Intuition entgegengesetzt, als auch ihr Ergebnis. D.h. die unwiderlegbare Verbindung von terminus a quo und ad quem, die schließlich auch Gegenstand der Intuition sein kann. (Pasini, 165)

2.2.9. Die Einheit der Kraft der Erkenntnis der Mannigfaltigkeiten

Regel XII beschreibt die Geisteskraft als Kraft der Erkenntnis und ihren abstrakten Bezug zur Welt. Die Geisteskraft verfügt über vier Vermögen, bestehend aus (i) dem reinen Verstand und seinen drei Hilfsvermögen von (ii) Anschauung, (iii) Gedächtnis und (iv) den Sinnen, welche im Prozess des Begreifens vom äußeren Sinn über den Gemeinsinn angesprochen werden (cf. AT X 416,5-13; Regulae, 99, 43,37-44,6). Das Zusammenspiel von Verstand, Einbildungskraft, Sinnen und Gedächtnis erlaubt objektive Bedingungen zur Erlangung zuverlässiger Erkenntnis. Dabei kommt der Fantasie nun besondere Bedeutung zu, um sich Neues vorstellen zu können.

But after Rule 12, it is also ‘more properly’ used to designate one specific cognitive function: the ability to form new figures in the fantasy (*phantasia*) or to deal with those already made (Rabouin 2021, 64)

Durch diesen Erkenntnisprozess kann der Verstand das “Fragliche mit dem bereits Erkannten” (AT X 410,20-21; Regulae, 91, 40,3) vergleichen. Der äußere Sinn nimmt dabei rein passiv eine Prägung auf, welche er dem Gemeinsinn überträgt. Dieser ist aber nicht nur passiv, sondern bildet aus der Fantasie, den Sinnen oder dem Gedächtnis Anschauungen³ aus, welche im Verstand die von den äußeren Sinnen erfasste Welt repräsentieren. Die Geisteskraft schafft im Verstand aus diesen Anschauungen Erkenntnisse, welche wiederum unsere Anschauungen prägen, wie das Siegel das Wachs (cf. AT X 414, 16-24; Regulae, 97, 42,28-43,4). In diesem Prozess bleibt die Einheit des Verstandes gewahrt, um über unsere Vorstellungen zu urteilen. Diese Vorstellungen abstrahieren mit den Mitteln des Verstandes

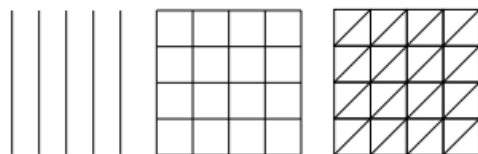
³ In den Regulae, ist Descartes “*imaginatio*” mit “Anschauung” übersetzt: z.B. lateinischer Text S.96: “... in phantasia vel imaginatione ..” mit deutscher Übersetzung S.97 “., in der Phantasie oder der Anschauung..”. Für “*phantasmate*” steht “Vorstellung”: z.B. lateinischer Text S.110, “., prout illam habet vel in se ipso vel in phantasmate, neque paeterea judicet imaginationem ...” und deutsche Übersetzung S. 111: “... , wie er es entweder in sich selbst oder in der Vorstellung hat, und er weder darüber hinaus urteilt, daß die Anschauung..”

dabei sehr unterschiedliche Phänomene, welche losgelöst vom durch die äußeren Sinne empirisch Gegebenen wahrgenommen werden.

Es wäre eine oberflächliche Betrachtung, wenn wir darum, weil es eine Welt der Farben und Töne gibt, und weil beide einander unvergleichlich gegenüberstehen, auch die Erkenntnis von Farben und Tönen als je eine besondere, eigenartige und einzigartige dächten. Die optischen und akustischen Phänomene sind als solche voneinander radikal verschieden; aber hieraus folgt nicht, daß diese Differenz auch im System der Wissenschaften ihren Ausdruck finden, daß es innerhalb des Ganzen der Physik eine gesonderte Optik und Akustik geben müsse. Die Wissenschaft erkennt vielmehr diese Differenz als bloß zufällige. Denn sie begnügt sich nicht mit den Maßstäben, die von der empirischen Organisation des Menschen hergenommen sind. Sie fordert statt dessen eine andere, universelle Norm: eine Norm, die der allgemeinen Natur des Denkens entspricht. (Cassirer, 51)

Die Anschauungen können die Welt in unserer Vorstellung repräsentieren, sofern sie die Unterschiedlichkeiten und Gleichheiten der realen Phänomene richtig abbilden. Beispielhaft zeigt Descartes wie drei Farben durch drei Figuren abstrahiert dargestellt werden können.

Was könnte also schon so Nachteiliges folgen, wenn wir es vermeiden, unnötig irgendein neues Seiendes gelten zu lassen und aufs Geratewohl zu konstruieren, und statt dessen zwar nichts von dem bestreiten, was anderen Leuten über die Farbe zu denken angebracht erschien, sondern nur von allem anderen abstrahieren, außer davon, daß sie die Natur der Gestalt hat und wir die Verschiedenheit zwischen Weiß, Blau, Rot usw. gleichsam so begreifen wie die zwischen diesen oder ähnlichen Gestalten usw.?



Dasselbe läßt sich über alles andere sagen. Denn gewiß reicht die unendliche Menge der Gestalten aus, um alle Unterschiede der sinnlichen Dinge auszudrücken. (AT X 413,1-19; Regulae, 95, 42,3-14)

Danach beschreibt Descartes die Selbstbezüglichkeit des Gemeinsinns, welcher sowohl passiv von den äußeren Sinnen beeinflusst ist und deren Empfindungen an Fantasie und Gedächtnis weitergibt als auch aktiv auf die Fantasie und Anschauung einwirkt und die Bewegungen des Körpers mitverursacht. Die Fantasie „ist ein wahrer Teil des Körpers“ (AT X 414,20; Regulae, 97, 42,32), welche aus den Vorstellungen gespeist wird. Demgegenüber bilden sich Anschauungen durch die sinnliche Wahrnehmung „als eine bestimmte Anwendung des erkennenden Vermögens auf den ihr unmittelbar vorliegenden und demnach existierenden Körper.“ (AT VII 72,1-3; Meditationen, 79).

Die bewegende Kraft bzw. die Nerven selbst haben ihren Ursprung im Gehirn. Dort befindet sich die Phantasie, die sie auf verschiedene Weisen bewegt, wie der äußere Sinn den Gemeinsinn, bzw. wie der untere Teil die ganze Feder bewegt. Dieses Beispiel zeigt auch, wie die Phantasie Ursache vieler verschiedener Bewegungen in den Nerven sein kann, obwohl sie deren Bilder nicht in sich niedergeschrieben hat, sondern bestimmte andere, aus denen diese Bewegungen folgen

können: Denn auch die ganze Feder bewegt sich nicht wie ihr unterer Teil. (AT X 414,25-415,7; Regulae, 97, 43,4-13)

Die Geisteskraft, welche den Gemeinsinn, äußere Sinne, Fantasie, Anschauung, Gedächtnis, und schließlich den Verstand zur Erkenntnis bringen ist für Descartes eine einzige, rein spirituelle, die sich aber zwischen diesen Vermögen bewegt und dabei „einmal Wachs, einmal Siegel“ in der Weitergabe ist. Fantasie und Anschauung sind dabei bei Descartes wie oben ausgeführt, die körperlichen Schnittstellen zur Geisteskraft und ihrer Vermögen. Die Bewegungen des Körpers verursachen sinnliche Wahrnehmungen, welche über den Gemeinsinn erfasst werden. Gemeinsam mit memorierten Vorstellungen wirken sie im Verstand und auf den Körper zurück. Fantasie und Anschauung sind dabei die Membranen dieser unauflösbaren Wechselwirkungen.

Die körperlichen Vermögen und die geistige Kraft beeinflussen sich wechselseitig und diese letzte „ahmt einmal das Siegel, einmal das Wachs nach“, wie das auch immer erklärt werden mag. (Pasini, 166)

Dieses Zusammenspiel von Gemeinsinn und äußeren Sinnen bedingt eine Anschaulichkeit, damit der Verstand Gewißheit erlangen kann. Rabouin schreibt zu Descartes Darstellung dieses Prozesses:

His description emphasizes the role of motion in the transmission of information from one faculty to the other. What is ‘transmitted’ during the process of sensation is the result of this motion, that is to say some spatial *modification* (Rabouin 2021, 68)

Der Übertragungsprozess ist zwar abstrakt von den wahrgenommenen Phänomenen aber körperlich, indem die Magnituden der jeweiligen Ausprägungen weiter gegeben werden. Farben oder Töne können durch zueinander in Beziehung stehende Figuren symbolisch dargestellt werden. Dabei hat der Verstand mit seinen unterstützenden Vermögen die Einheit der Kodierung bei Ver- und Entschlüsselung zu wahren. Je anschaulicher diese Darstellung ist, desto besser werden Verstand und Gedächtnis entlastet, während die Einbildung die richtige Interpretation sicherzustellen hat (cf. Pasini, 173f). Das funktionale Wechselspiel unterschiedlichster Kompetenzen, welches zum geistigen Begreifen führt beginnt auch mit einem körperlichen Begreifen.

Bei all dem ist diese erkennende Kraft zuweilen passiv, zuweilen tätig. Sie ahmt mal das Siegel, mal das Wachs nach: was hier freilich nur als Analogie aufzufassen ist, denn bei körperlichen Dingen findet sich überhaupt nichts, was ihr ähnlich wäre. Es ist deshalb auch ein und dieselbe Kraft, die wir *Sehen*, *Berühren* usw. nennen, wenn sie sich mit der Anschauung dem Gemeinsinn zuwendet; oder *Sich-Erinnern*, wenn der Anschauung allein, sofern diese mit verschiedenen Gestalten versehen ist; oder *Anschauen* bzw. *Begreifen*, wenn der Anschauung, um neue Gestalten zu konstruieren; oder *Einsehen*, wenn sie schließlich alleine tätig ist. (AT X 415,23-416,4; Regulae, 99, 43,28-34)

Die verschiedenen für diesen Prozess verwendeten Begriffe sind funktional zu verstehen und erinnern mit den Begriffen des „Begreifen“ oder des anschaulichen „vor Augen führen“ an diese permanente, die reale Trennung von Geist und Körper überbrückende Wechselwirkung, welche trotz ihrer funktionalen Komplexität in der Einheit des Verstandes erhalten bleibt. Die Kombinationsmöglichkeiten dieser verschiedenen Funktionen ein und derselben Kraft

nennt man [...] deshalb auch entweder reiner Verstand, oder Anschauung, oder Gedächtnis, oder Sinn; im eigentlichen Sinne Geisteskraft nennt man sie aber dann, wenn sie entweder in der Phantasie neue Ideen bildet oder sich auf bereits vorliegende stützt. (AT X 416,5-13; Regulae, 99, 43,37-44,6)

Damit diese rein geistige Kraft von körperlichen Hemmnissen frei bleibt, “müssen Sinne fern, und die Anschauung, sofern es möglich ist von jedem deutlichen Eindruck freigehalten werden” (AT X 417, 20-23; Regulae, 101, 44,23-26). Ihre Aufgabe ist die Erfassung der einfachen Dinge, aus welchen alle anderen zusammengesetzt sind. Beispielsweise bestimmen Ausdehnung, Gestalt oder Bewegung jeden beliebigen Körper als einfachste Dinge (cf. AT X 419,19; Regulae, 105, 46,24). Der Verstand kann diese einfachen Naturen erkennen oder darüber urteilen, ob sie einfach oder zusammengesetzt sind (cf. AT X 420, 25-421,2; Regulae, 107, 47,17-25). Zusammengesetztes kann von Natur aus so sein oder wird in unserer Anschauung so konstruiert. Für einen Gelbsüchtigen scheint ein Gelbschleier vor die Welt gelegt zu sein. In der Realität hat die Welt aber keinen Gelbschleier und dieser in seiner Anschauung gemachten Konstruktion kommt keine Allgemeinheit zu (cf. AT X 423, 20-30; Regulae, 113, 49,18-31). Ist die Zusammensetzung von Natur aus gegeben, gilt es sicherzustellen, dass man diese tatsächlich deduktiv erkannt hat und nicht, dass man sie aus einer Überzeugung oder Vermutung heraus festlegt (cf. AT X 424,27-425,6; Regulae, 115, 50,19-24). Nur aus den deutlich und klaren erkannten einfachen Elementen, den Intuitionen, und mittels geordneter, einfacher Schritte ist Wissen zu deduzieren.

Alles menschliche Wissen besteht allein darin deutlich zu sehen, wie diese einfachsten Naturen bei der Zusammensetzung der anderen Dinge mitwirken (AT X 427,3-6; Regulae, 117, 52,3-52,5)

Am Beispiel der Untersuchung des Magnetismus stellt Descartes dar, wie durch die Beachtung aller bisher gesammelten experimentellen Wahrheiten dieses Phänomen auf einfache zugrundeliegende Naturen rückgeführt werden könnte, anstatt sich direkt mit dem komplexen, von den menschlichen Sinnen nicht fassbaren Phänomen des Magnetismus auseinanderzusetzen (cf. AT X 427,10-26; Regulae, 119, 52,12-23). In seinen *Prinzipien* wird er 15 Jahre später dieses physikalische Phänomen als ein Leitmotiv verwenden (cf. AT VIII/1, 284-287 4.§145, Prinzipien, 543-549). Descartes wendet seine Methode auf ein komplexes und als solches für unsere äußeren Sinne nicht fassbares Problem an. Er beginnt damit, den

Magneten an seiner anschaulich fassbaren Besonderheit, der Ausgerichtetheit seiner „Splitter“ als Eisen zu beschreiben. Schließlich fasst er die Eigenschaften des Magneten in 34 Punkten zusammen (cf. AT VIII/1, 279 4.§139, Prinzipien, 535). Aus diesen Beobachtungen deduziert Descartes Erkenntnisse für die Erde als Stabmagnet und die Wirkungsweise von Magneten an sich. Ansätze für eine richtige Deduktion finden sich in der Art der Zusammenhänge dieser einfachen und selbstverständlichen Naturen: Kausalitäten, Ähnlichkeiten oder Beziehungen zwischen einem Ganzen und seinen Teilen gehören dazu (cf. AT X 428, 17-20; Regulae, 121, 53,6-8).

Zusammenfassend läßt sich die laut Descartes sicher zu wahrer Erkenntnis führende Methode auf die Kompetenzen der Geisteskraft zurückführen:

- (i) Der systematische Zweifel steht am Beginn jedes Erkenntnisprozesses und beginnt damit alles radikal in Zweifel zu ziehen, was einem nicht unmittelbar und evident wahr ist (cf. AT VII 21,17-22,2; Meditationen, 23).
- (ii) Der Verstand kann durch analytisches Denken klare und deutliche Ideen formen, welche Grundlage von Erkenntnis sind (cf. AT VIII/1, 38; 1.§75, Prinzipien, 87/89),
- (iii) Die Vernunft jeder Einzelnen erlaubt ihre individuelle Erkenntnis. Der gesunde Menschenverstand ist das offenbar „am besten verteilte Sache auf der Welt“ (cf. AT VI 1,17-18; Discours, 3)
- (iv) Die permanente Reflexion auf das erreichte Ausmaß von Deutlichkeit und Klarheit bildet die methodische Schleife, durch welche die Haftung zwischen Problemstellung und ausgearbeiteter Lösung sichergestellt wird. Die Bestimmung des „Zielkorridors“ für die Klarheit und Deutlichkeit obliegt dabei der Erkennenden, wie Descartes es in Bezug zur *mathesis universalis* für sich selbst festgestellt hat (AT X 379, 1-7; Regulae, 35, 16,11-14).

Über die der Methode inhärente Lernkurve und der verlangten Reflexion folgt ein iteratives Einüben und Beurteilen anhand der Methode selbst. Mittels der Methode wird der Zielkorridor der zu erreichenden Deutlichkeit und Klarheit bestimmt, dessen Erreichen „Wissen“ verkörpert.

Nach der Vorstellung seiner Methode und ihrem Bezug zu den menschlichen Kapazitäten zum Wissenserwerb, folgen nun 12 Regeln (davon 9 ausgearbeitet), welche der Beantwortung vollständig eingesehener Fragestellungen dienen und dazu algebraische Formen verwenden. Eine angekündigte dritte Staffel mit 12 Regeln zur Behandlung von nicht vollständig eingesehenen Fragen ist nicht mehr entstanden (cf. AT X 428,23-429,13; Regulae, 121, 53,17-33). Vollständig eingesehene Fragen zeichnen sich durch folgende drei Punkte aus:

- (i) Durch welches Merkmal das, wonach gefragt wird, erkannt werden kann, wenn es vorkommt;
- (ii) Was genau dasjenige ist, aus dem wir es deduzieren müssen;
- (iii) Wie nachgewiesen werden muß, daß sie so voneinander abhängen, daß das in keiner Weise geändert werden kann, solange das andere unverändert bleibt.

Weil solche Fragen zu einem Gutteil abstrakt sind und fast nur in der Arithmetik und der Geometrie vorkommen, scheinen sie den Ahnungslosen wenig nützlich zu sein; ich erinnere jedoch daran, daß diejenigen, die sich den letzten Teil dieser Methode, in dem wir all das abhandeln, vollkommen zu eigen machen wollen, sich länger damit befassen müssen, diese Technik zu erlernen und auszuüben. (AT X 439,15-430,5; *Regulae*, 123, 53,32-54,13; Gliederung in (i), (ii), (iii) von mir)

Mit dieser Konkretisierung erfolgt die Überleitung zur algebraischen Technik in der Suche nach Antworten auf offene, aber klare Fragestellungen. Der methodische Teil der bisherigen Regeln wird später im *Entwurf der Methode* und schließlich im ersten Teil der *Prinzipien* aus anderen Perspektiven beleuchtet. Nach dem algebraischen Modell der *Regulae* fordert Descartes im *Entwurf der Methode* die reflexive Urteilsfähigkeit der eigenen Vernunft. Der methodische Zweifel bekommt dazu mehr Raum, um die Anwendbarkeit seiner Methode in verschiedensten Bereichen zu zeigen. Die *Prinzipien* beschreiben die Welt als von Ursache und Wirkung aus körperlichen und damit raum-zeitlichen Veränderungen geprägten Mechanismus.

2.2.10. Die algebraische Repräsentation vollständig eingesehener Fragen

Eine vollständig eingesehene Frage ist der Spiegel einer vollständig analysierten Problemstellung. Deren Zusammensetzung ist auf ihre einfachsten, intuitiv erfassten Elemente zurückgeführt. Genauso ist auch jede Frage auf die in ihr enthaltenen einfachsten Fragen hin zu analysieren. Dabei wird das Problem von seinem Gegenstand abstrahiert. Regel XIII hat zum Ziel:

Wenn wir eine Frage vollkommen einsehen wollen, müssen wir sie von jedem überflüssigen Begriff abstrahieren, sie auf die einfachste Frage zurückführen und in einer Aufzählung in möglichst kleine Teile teilen. (AT X 430, 7-10; *Regulae*, 127, 54,14-17)

Dabei ist die methodisch-mathematische Beantwortung von Fragen aber nicht auf zahlenmäßige Probleme beschränkt, sondern gilt allgemein für die Suche nach Antworten.

Descartes' Aufteilung der Problemlösung in die klare Fixierung der Problemstellung, die Rückführung der *quaestio* auf ihre Bestimmungsstücke und die Herleitung der zu beweisenden Aussage aus diesen ist ihrer Darstellung in den „*Regulae*“ nach nicht eingeschränkt auf die Bestimmung der Verhältnisse (*proportiones*) zwischen numerischen Quantitäten oder meßbaren Größen. Sie gilt ganz allgemein. (Arndt, 39)

Während die Intuition eines einfachen Dinges und die Deduktion eines zusammengesetzten immer wahr ist, ist bei Fragen immer etwas dabei, das unentschieden zwischen wahr und falsch einer Antwort harrt. Die Methode zu ihrer Beantwortung muss sicher

sein, um so vom Bekannten zur Erkenntnis der Wahrheit des bisher Unbekannten zu führen. Dabei hat die Schärfe des Geistes, dass Unbekannte durch das Bekannte – sei es aus einer ursprünglichen Intuition oder im Zuge der Deduktion durch bekannt gewordenes – hinreichend einzugrenzen. Der Unterschied zwischen dem Bekannten und dem Unbekannten liegt nicht im Wesen der fraglichen Parameter oder Dinge, sondern ausschließlich in der gegebenen Kenntnis oder Unkenntnis. Daher können sie auch gleich behandelt werden. Die algebraische Repräsentation macht keinen Unterschied, ob einzelne Längen oder Winkel eines Dreiecks bekannt oder unbekannt sind. Sie setzt deren Relationen zueinander ins Verhältnis und kann so aus den Bekannten die Unbekannten erschließen. Auslassungen und Überbestimmungen führen zu Täuschungen (cf. AT X 434,25-435,10; Regulae, 131, 57,27-58,7). Die Form der Fragestellung orientiert sich dabei am von Descartes abgelehnten Syllogismus:

Jedoch unterscheiden wir nicht wie sie zwei Außenbegriffe und einen Mittelbegriff, sondern betrachten die ganze Angelegenheit so: Erstens muß in jedem Problem etwas unbekannt sein, sonst würde man es nämlich vergeblich stellen. (Analogon zu dem einen Extrembegriff des Syllogismus) Zweitens muß ebendies auf irgendeine Weise bezeichnet sein, sonst wären wir nicht darauf festgelegt, ebendies als etwas beliebiges anderes aufzufinden. (Analogon zum Mittelbegriff des Syllogismus) Drittens kann es nur durch etwas anderes, das bekannt ist, so bezeichnet werden. (Analogon zum anderen Extremum) (Gäbe, 69)

Durch Vergleichen gelangt man zu den zu bestimmenden Verhältnissen. Der Vergleich hat sich dabei an einem „Medium“ zu orientieren, auf den alle Teile des Problems bezogen werden. Der anspruchsvollste Teil der Problemlösung ist die Festlegung dieses „gemeinsame Nenners“ unter den Teilen des Problems. (cf. Gäbe, 70)

Alles schlußfolgernde Denken ist *Vergleichen* dessen, was gegeben ist. Notwendige Verbindungen werden durch *Vergleichen* und sukzessive Vergleichsverfahren erkannt. (Gäbe, 71)

Das in Frage stehende Problem ist mittels Symbolen hinsichtlich seiner Einheiten, Dimensionen und Größen zu repräsentieren. Regel XIV verlangt eine figürliche, der Geisteskraft zugängliche Darstellung (cf. AT X 438, 9-11; Regulae, 137, 60,15-17).

Der Vorgang des „Messens“ beinhaltet bei Descartes die Aufteilung eines Ganzen in gleichgroße Teile, deren Größe durch die Wahl einer Einheit bestimmt ist. (Arndt, 35)

Magnetismus können wir, mangels eines entsprechenden Sinnes, nicht direkt erfassen, sondern nur über uns zugängliche Intuitionen. Die sichere Erkenntnis des Gefragten entsteht aus dem Vergleich mit den erfassten Eigenschaften des Gegebenen. Dieser Vergleich ist einfach bei gleicher Natur der beiden und erlaubt eine Abstraktion auf Größen bestimmter Eigenschaften der Dinge. Jeder Vergleich zeigt zunächst ein mehr oder weniger dessen, was verglichen wird. Die zu vergleichenden Elemente müssen einer gemeinsamen Idee folgen und

können so in Einheiten angegeben werden. Damit werden sie zählbar und messbar. Diese Abstraktion bezieht sich auf Einheit und Ausdehnung, welche ihrerseits als Maßeinheit über einem Kontinuum gegeben ist.

Wir erkennen alle diese bereits bekannten Seienden, wie Ausdehnung, Gestalt, Bewegung und dergleichen – die aufzuzählen nicht hierher gehört – in den verschiedenen Gegenständen durch dieselbe Idee. Wir schauen die Gestalt einer Krone nicht anders an, wenn sie silbern als wenn sie golden ist. Die gemeinsame Idee übertragen wir von dem einen Gegenstand auf den anderen allein durch einen einfachen Vergleich, durch den wir behaupten, daß das Fragliche einem bestimmten Gegebenen in dieser oder jener Beziehung ähnlich oder identisch oder gleich ist, so daß wir bei jeder Schlußfolgerung die Wahrheit nur durch Vergleich genau erkennen. (AT X 439,11-19; Regulae, 139, 61,9-19)

Mit Bezug auf Regel XII und der Möglichkeit der Abstraktion lassen sich beliebige Phänomene hinsichtlich ihrer unterschiedlichen Ausprägungen über Einheiten darstellen. Damit werden diese Phänomene anschaulich. Mit diesen Bildern kann sich der Verstand Gewissheit verschaffen.

The passage then [Regel XIV] states that the reduction to proportions is the only way to make natural variations accessible to *exact* knowledge: [...] The remaining part of the book was therefore supposed to be dedicated to the art of reducing complex proportions to simple relations (if possible equalities), by means of figuration: (Rabouin 2021, 70f)

Durch eine figürliche Darstellung werden die Gedankengänge im Verstand geleitet und das Einbildungsvermögen wird von diesen Darstellungen inspiriert.

Der allgemeine Grundsatz dieser Anwendung, wenn also eine Relation vom bekannten zum noch Unbekannten gesucht wird, ist in der XIV. Regel ausgedrückt, und er gilt besonders dann, wenn Größenverhältnisse untersucht werden, nämlich in der Mathematik (Pasini, 167)

Sofern das Gefragte und das Gegebene unterschiedliche Naturen haben, ist das ihnen Gemeinsame zu finden. Die zu messende Eigenschaft wird vom Ding abstrahiert und seine Größe in der Anschauung bestimmt. Vollkommen bestimmte Fragen können auf den Vergleich von Eigenschaften reduziert werden (cf. AT X 441,21-28; Regulae, 143, 62,33-63,1). Die Algebra ist das Modell für die methodische Repräsentation abstrahierter Vergleiche. Ihr Einsatz vertieft die Methodik in einem reflexiven Sinn. Wie am Beispiel des Schmieds gezeigt (cf. AT X 397,4-14; Regulae, 65/67, 29,23-37) sind erst die Werkzeuge zu schaffen, welche zu verbesserten Werkzeugen führen. Der Aufschwung physikalischen Wissens und algebraischer Fertigkeiten seit Descartes zeigt, wie diese gegenseitige Befruchtung interdisziplinären Suchens wirkt.

Diese Regeln haben einen solchen Nutzen, um sich die höhere Weisheit zu eigen zu machen, daß ich mich nicht scheue, zu sagen, daß dieser Teil unserer Methode nicht umwillen mathematischer Probleme erfunden worden ist, sondern vielmehr diese mathematischen Probleme fast nur erlernt werden müssen, um diese Methode weiter auszuarbeiten. (AT X 442,2-11; Regulae, 143, 63,11-17)

Am intuitiv Einsichtigsten ist die Ausdehnung, die selbst eine Eigenschaft von Körpern ist, und welche als Größe von der Anschauung dem Verstand gegeben wird. Dabei unterliegt auch diese Intuition einer Variabilität in Bezug auf das Ausgedehnte. Wachs ist ausgedehnt. Aber es ändert diese Ausdehnung in Abhängigkeit der Temperatur in einer Art, dass seine Bestimmung durch seine Ausdehnung komplex wird (cf. AT VII 31,8-12; Meditationen, 35).

Deshalb ist es gewiß, daß alle Unterschiede der Verhältnisse, die in irgendwelchen anderen Gegenständen existieren, auch zwischen zwei oder mehreren Ausdehnungen aufgefunden werden können; und demnach reicht es für unser Vorhaben aus, wenn wir in der Ausdehnung all das betrachten, was dazu beitragen kann, die Unterschiede der Verhältnisse auseinanderzusetzen. (AT X 447, 11-19; Regulae, 153, 67,14-19)

Ausdehnungen gibt es bei (i) den zu erfassenden, beliebig vielen, messbaren Dimensionen (cf. AT X 448,23-449,25; Regulae, 155, 68,13-69,5), (ii) den auf Gleichheit der gemeinsamen Naturen beruhenden Einheiten (cf. AT X 449,26-450,9; Regulae, 157, 69,6-16) und (iii) der Gestalt, welche als Idee eines Dinges in der Anschauung entsteht (cf. AT X 450,10-451,4; Regulae, 157/159, 69,17-28). Diese figürliche Gestalt kann diskrete Dinge nach deren Ordnung oder Größen nach deren Maß darstellen.

Außerdem muß man wissen, daß zwar nicht gerade geringe Aktivität dazu gehört, die Ordnung auszudenken, wie durchgängig in dieser Methode zu sehen ist, die fast nichts anderes lehrt. (AT X 451,9-11; Regulae, 159, 70,4-6)

Die Ordnung liegt jeder Nachvollziehbarkeit der kontinuierlichen Bewegung der Deduktion und ihrer Rückabwicklung zur Lösung zugrunde. Sie ist aber auch bestimmend für die zweckmäßige Wahl von Einheiten, welche die Darstellung von Größen vereinfacht. Der figürlichen Darstellung, welche über die äußeren Sinne unser Denken unterstützt, widmet sich Regel XV (AT X 453,1-454,8; Regulae, 161, 71,6-72,3). Figürliche Symbole können Größen und Mengen repräsentieren. Descartes verwendet dabei (i) Strecken, um einzelne Größen durch deren Länge in der gewählten Einheit zu repräsentieren, (ii) Rechtecke für aus zwei Einheiten multiplizierten Größen, wobei die Fläche dieses Produkt abbildet, und (iii) Punkte für die reine Zählung von Mengen. Durch die Abstraktion können beliebig viele Dimensionen hinsichtlich ihrer Ausdehnung dargestellt werden.

Denn anfänglich zeichnen wir die Einheit auf drei Weisen, nämlich durch ein $\square$, wenn wir sie berücksichtigen, insofern sie lang und breit ist, oder durch eine Linie —, wenn wir sie nur betrachten, insofern sie lang ist, oder schließlich durch einen Punkt ·, wenn wir nichts anderes betrachten als daß aus ihr eine Menge zusammengesetzt wird. (AT X 453,7-13; Regulae, 161, 71,11-16)

Sofern nun eine Einheit dargestellt wird, kann diese als Menge mit einem Punkt oder als 1x1 Quadrat als Einheitsgröße erfolgen.

Many commentators did not focus much on this ambivalence of spatial representations in the *Regulae*. One reason seems to be that the operations presented later in rule 18 rely on a representation involving only continuous magnitudes (and not points). (Rabouin 2021, 74)

Die Symbole sind dabei so bestimmt, dass sie anzeigen, ob die Größen rational über den gewählten Einheiten darstellbar sind oder als „inkommensurable“ (nach heutigem Sprachgebrauch irrationale Größen) verbleiben. Dieses in definierten Symbolen bestimmte Schema ist grundlegend für die methodische Repräsentation von den durch ihre Ausdehnung bestimmten Gegebenheiten der Welt.

In den folgenden Regeln XVI und XVII zeigt Descartes die Möglichkeit einer algebraischen Umsetzung dieses Schemas, um in der letzten ausgearbeiteten Regel XVIII auf die geometrische Analyse zu kommen.

In Rule XIV Descartes famously introduces the foundation of his geometrical calculus (presented in Rule XVIII) by stating that “in all reasoning it is only by means of comparison that we attain an exact knowledge of the truth” and that “the business of human reason consists almost entirely in preparing this operation.” This establishes the central role of proportion in the treatment of any “question” and the main goal of the method (Rabouin 2010, 441)

Trotz der methodischen Universalität, welche die Algebra selbst zum Modell hat, bleiben Algebra und Geometrie in diesen letzten ausgearbeiteten Regeln getrennt nebeneinander stehen.

Das Zusammenspiel von Anschauung und Gedächtnis wird unterstützt, wenn die symbolischen Figuren durch kurze Namen ersetzt und als solche leicht aufgeschrieben und erkannt werden. Die algebraische Notation von Größen und deren Proportionalität über den gewählten Einheiten wird in Regel XVI ausgeführt (AT X 454,10-459,4; *Regulae*, 163-171, 72,3-75,24), welche annimmt, dass die Anschauung nicht mehr als zwei quantifizierbare Merkmale gleichzeitig überblicken kann und so für komplexere Probleme des Gedächtnisses und dessen einfacher, schriftlicher Unterstützung bedarf. Diese Unterstützung erfolgt mittels eines algebraisch vereinfachten Symbolismus. Dieser verwendet (i) lateinische Kleinbuchstaben für bekannte Größen, (ii) lateinische Großbuchstaben für unbekannte Größen und (iii) arabische Ziffern für Anzahlen. (iv) Potenzen werden als Zahl der Relationen eines Elements zu einer Einheit (z.B. einer Fläche als zweifache Relation zur gemeinsamen Einheit von Länge und Breite) angegeben. Während die cossische Notation jeder Potenz einen eigenen Namen und ein Zeichen zuweist, definiert Descartes die Potenzen numerisch: die einfache Relation als Wurzel, über der dann die weiteren Relationen beliebige Potenzen bilden konnten.

[...] Descartes called the “number of relations”, which is usually interpreted as connected with the use of an exponential notation. (Rabouin 2010, 436)

Dadurch können Proportionen allgemein beschrieben werden. Am Beispiel der Bestimmung der Länge einer Hypotenuse als Wurzel zeigte er dies.

Wenn zum Beispiel nach der Basis eines rechtwinkligen Dreiecks gefragt wird, dessen Seiten als 9 und 12 gegeben sind, wird der Rechenmeister sagen, sie sei $\sqrt{225}$ oder 15; wir hingegen werden für 9 und 12 a und b setzen und herausfinden, daß die Basis $\sqrt{a^2 + b^2}$ ist. So werden die beiden Bestandteile a^2 und b^2 unterschieden bleiben, die in der Zahl verworren sind. (AT X 456,4-10; Regulae, 167, 73,17-23)

Diese Darstellung hält die Methode zur Errichtung der Lösung evident und lässt sich allgemein nachvollziehen. Die Form der Rechenvorschrift gibt ihre vollständige Ordnung unmittelbar und transparent preis.

Descartes behauptet nicht, daß die algebraische Formel für den pythagoreischen Lehrsatz zum Bestand einer „mathesis universalis“ gehört, sondern benutzt sie nur als ein Beispiel für die kalkülmäßige Herleitung gesuchter numerischer Quantitäten aus vorgegebenen Größen. (Arndt, 37)

Bei der Darstellung der Potenzen zeigt Descartes, dass er sich von der cossischen Notation seiner nun von ihm als Rechenmeister bezeichneten Lehrer gelöst hat, indem er deren nicht reduzierbare Symbole auf die Zahl der Relationen zur Einheit zurückführt und so von einer geometrischen Bedeutung als Fläche oder Würfel abstrahiert.⁴

Diese Verhältnisse versuchen die anderen in der gewöhnlichen Algebra durch mehrere quantifizierbare Merkmale und Figuren auszudrücken, von denen sie die erste *Wurzel*, die zweite $\square$, die dritte *Kubus*, die vierte *Biquadrat* usw. nennen. Ich gestehe, mich selbst durch diese Namen lange Zeit getäuscht zu haben. (AT X 456,11-16; Regulae, 167, 73,26-31)

Diese Entwicklung macht er deutlich, indem er (i) die Zahl der Relationen als Potenz angibt und (ii) aufzeigt, dass nur die Wahl der Einheit das rechnerische Ergebnis, in diesem Fall jenes der Länge der Hypotenuse, bestimmt. Durch die Abstraktion auf eine algebraische Form kann die Struktur der Verhältnisse allgemein und nachvollziehbar angegeben werden.

Zum Beispiel: Wir haben gesehen, daß $\sqrt{a^2 + b^2}$ die Basis des rechtwinkligen Dreiecks aus den Seiten a und b ist. Setzen für a^2 81 und für b^2 144 ein, die miteinander addiert 225 ergeben. Die Wurzel aus 225, bzw. die mittlere Proportionale zwischen der Einheit und 225, ist 15. Hieraus erkennen wir, daß die Basis 15 mit den Seiten 9 und 12 kommensurabel ist; wir erkennen es nicht allgemein daraus, daß die es die Basis eines $\square$ ligen $\triangle$ ist, dessen eine Seite sich zur anderen wie 3 zu 4 verhält. Wir, die wir nach einer evidenten und deutlichen Erkenntnis der Dinge fragen, unterscheiden all dies; nicht aber die Rechenmeister, die zufrieden sind, wenn sie die fragliche Summe haben, auch wenn sie nicht bemerken, wie diese Summe von den Gegebenen abhängt, obgleich darin eigentlich das Wissen besteht. (AT X 457,23-458,8 74,29-75,4; Regulae, 169)

⁴ Die Bestimmung der Potenzen nach der Zahl der Relationen zur Einheit findet sich schon bei Clavius (cf. Rabouin 2010, 456)

Das methodische, reflexive Lernen Descartes kommt in dieser Regel als Weiterentwicklung der cossischen Notation zum Ausdruck. Aus der auf den speziellen Ausweis von Potenzen formulierten Algebra entwickelt er eine Methode, um damit allgemein umzugehen. Die nächste Regel XVII zeigt nun, das Unbekannte nicht nur direkt aus dem Gegebenen deduziert, sondern auch aus dem Kontext der wechselseitigen Abhängigkeiten (analog zu Regel XI) bestimmt werden kann (cf. AT X 459,5-461,10; *Regulae*, 173/175, 75,25-77,14). Jede Unbekannte ist durch die Gegebenen und der Zahl an Relationen, welcher der Zahl der Unbekannten entspricht, vollständig bestimmt. Daher kann jede Unbekannte in den Gleichungen als bekannt gesetzt werden. Unbekannt zu sein ist keine Eigenschaft des Fraglichen. Die Dinge sind in ihrem Sein mit ihren Eigenschaften durch gegenseitige Abhängigkeiten determiniert. Die Aufgabe der Wissenschaft ist es, diese Gegebenheiten aufzudecken und als Wissen verfügbar zu machen. Die algebraische Repräsentation dient der Veranschaulichung dieser in ihren Relationen determinierten Gegebenheiten. Sofern alle relevanten Relationen vollständig eingesehen sind, können diese Relationen als Vergleiche in Form von Gleichungen dargestellt werden.

In den folgenden fünf Regeln hingegen werden wir jetzt auseinandersetzen, wie diese Schwierigkeiten so durchgearbeitet werden müssen, daß alle unbekannten Größen, so viele es auch in einer Proposition geben wird, einander untergeordnet sein werden, damit genauso, wie die erste sich zur Einheit verhält, die dritte sich zur zweiten und die vierte zur dritten verhält, und folgerichtig weiter, bis sie, wenn sie entsprechend viele sind, eine Summe bilden, die einer bestimmten erkannten Größe gleich ist – und das alles durch eine so sichere Methode, daß wir auf diese Weise mit Sicherheit behaupten können, daß sie durch keine Maßnahme auf einfachere Merkmale hätte zurückgeführt werden können. (AT X 459,1-25; *Regulae*, 173, 76,6-14)

Von den fünf angekündigten Regeln wurde nur noch eine ausgeführt, welche zeigt, wie die figürliche Darstellung der Algebra zu Rechenoperationen auf geometrischer Basis verwendet werden kann.

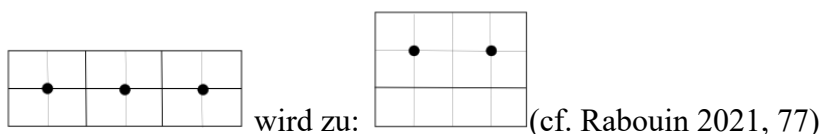
2.2.11. Geometrische Berechnungen in Regel XVIII

Die in Regel XV vorgestellten figürlichen, also geometrischen Symbole für die Größen unterschiedlichster Merkmale sind auch fundamental für die vier Grundrechnungsarten (cf. AT X 461,12-15; *Regulae*, 177, 79,15-20). Figürlich werden die zueinander über Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division in Beziehung stehenden Größen als Längen dargestellt. Die Länge einer Größe repräsentiert die Ausprägung der Größe über der zugrunde gelegten Messeinheit. Bei Addition und Subtraktion werden die Längen in gleicher Ausrichtung entweder aneinander gereiht oder gegenläufig gesetzt. Sind zwei Größen zu addieren, sind ihrer beider Längen zusammenzufügen. Die Subtraktion liefert das Ergebnis durch Verkürzung der einen Länge um die andere.

Bei der Multiplikation erfolgt die Ausrichtung orthogonal, um eine Fläche aufzuspannen. Die Division ist grundverschieden, da sie von der Fläche ausgeht, welche auf Längen zu verteilen ist. Eine Multiplikation liefert ein Rechteck mit den Seitenlängen der beiden Ausgangsgrößen und die Division ist umkehrt die Verteilung einer als Rechteck gegebenen Größe auf die eine gegebene Länge. Dabei ist bei Multiplikation und bei Division eine geordnete Abstufung zu beachten. Ausgehend von der Einheit ist bei der Multiplikation mit den Gegebenen zu beginnen, um auf der letzten Stufe das Produkt zu erhalten. Potenzen sind als spezielle Multiplikationen aufzufassen. Das Rechteck der normalen Multiplikation wird zunächst zum Quadrat. Die Größe dieses Quadrats kann aber wieder als Länge aufgefasst werden und damit sind beliebig viele Multiplikationen möglich an deren höchster Stufe das letzte Produkt steht. Umgekehrt ist es bei den Divisionen und der Suche nach einer Wurzel als besondere Form der Division, welche nach richtiger Division auf letzter Stufe beim Teiler endet. Der Punkt als Symbol findet sich in Regel XVIII nicht mehr.

Bei einer Multiplikation begreifen wir auch die gegebenen Größen unter der Hinsicht von Linien; aber wir schauen sie an, als ob sie ein $\square$ bilden. Denn wenn wir $\overline{a}$ mit $\overline{b}$ multiplizieren, legen wir die eine Linie im rechten Winkel in dieser Weise $\overline{a} \perp \overline{b}$ an die andere an, und es entsteht ein Rechteck $\overline{ab}$. Wenn wir $\overline{ab}$ wiederum mit $\overline{c}$ multiplizieren wollen, ist es nötig, ab als Linie zu begreifen, nämlich $\overline{ab}$ so daß sich $\overline{c} \perp \overline{ab}$ für abc ergibt. Schließlich schauen wir bei einer Division, in der der Teiler gegeben ist, die zu teilende Größe als Rechteck an, dessen eine Seite der Teiler und die andere der Quotient ist: Wenn wir zum Beispiel das Rechteck $\overline{ab}$ durch $\overline{a}$ teilen müssen, ziehen wir von seiner Höhe $\overline{a}$ ab, und es verbleibt $\overline{b}$ als Quotient. (AT X 465,5-466,8; Regulae, 181/183, 79,31-80,9)

Nimmt man die Einheit als eine Länge an, sind alle Rechnungen als Rechtecke mit einer Breite von 1 darstellbar. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 wird so zur Basis jeder Operation. Dieses Schema hat eine operationale Rolle für die Grundrechnungsarten. Kommensurable Größen können dabei durch Erweiterungen über die Suche nach gemeinsamen Vielfachen als Division dargestellt werden. Rabouin zeigt, wie die Division „3:2“ durch Vierteln der 3 Einheitsquadrate und Verteilung der 4 Teile des 3. auf die beiden ersten, geometrisch lösbar bleibt:



Offen bleibt die Darstellung bei irrationalen Zahlen, wie bei den Wurzeln aus 2 oder 3. Sowohl bei einer Annäherung als auch bei einer Darstellung ohne zugrunde gelegte Einheitsquadrate verliert die Darstellung ihren Anspruch auf Exaktheit.

Another way is put forth at the beginning of rule 15, when Descartes states that if a product is incommensurable, it should be represented by a rectangle which is not composed of unit-squares. (Rabouin 2021, 79)

Descartes schlägt für die allgemeinen Lösung der Division die Überführung flächengleicher Rechtecke mittels einer Linie (gemäß Satz von Gnomon mittels der Diagonalen⁵) vor, welche sodann lösbar sind (AT X 468,7-17; *Regulae* 185, 81,15-23). Allerdings ist die Lösung für x^2 auf diese Art, d.h. mit den in den *Regulae* verwendeten Symbolen von Punkt, Linie oder Rechteck nicht möglich. Für die Konstruktion eines flächengleichen Quadrates zu einem Rechteck ist ein Halbkreis notwendig (Rabouin 2021, 82, Figure 4.7.). Fast zehn Jahre später verwendet Descartes in der *Geometrie* einen Halbkreis, um zu zeigen, wie man geometrisch eine Wurzel ziehen kann (AT VI 370,14-371,3; *Geometrie*, 316). Die von Descartes in den *Regulae* verwendete Methode der Darstellung diskreter Mengen und stetiger Größen ist so an eine Grenze gestoßen. Die indirekte Lösung von Divisionen bedarf des Kreises, welcher aber nicht für diskrete Darstellungen verwendbar ist (cf. Rabouin 2021, 83f).

Die nur in Überschriften existierenden Regeln XIX bis XXI verlangen, dass für die vollständige Bestimmung jeder Unbekannten eine unabhängige Gleichung vorliegt, andere Gleichungen entsprechend rückführbar und alle Gleichungen umformbar sind (cf. AT X 468,20-469,9; *Regulae* 185/187, 81,27-40).

In meiner Analyse der *Regulae* bin ich den Regeln gemäß ihrer Ordnung gefolgt. In den *Regulae* entwirft Descartes eine Methode, welche unter Zugrundelegung der jedem Menschen gegebenen Kritikfähigkeit, einen Weg zur Erkenntnis durch elementarste Feststellungen und daraus durch anschaulichen Vergleich deduzierbares neues Wissen ermöglicht. Bedingung dafür ist, dass die Syntax dieser Methode streng eingehalten wird. Teil dieser Syntax ist das reflexive Innehalten, bis die in der Anschauung entstehende Idee klar und deutlich erkannt wird.

⁵ Der Satz von Gnomon erläutert, wie in einer Raute entlang seiner Diagonale zwei flächengleiche Rauten konstruiert werden. Die Seiten der beiden flächengleichen Rauten sind parallel zu den Seiten der ursprünglichen und teilen sich als Eckpunkt einen beliebigen Punkt auf der Diagonale. Die beiden flächengleichen Rauten erstrecken sich von diesem Punkt auf der Diagonale zu den jeweils gegenüber liegenden Eckpunkten der ursprünglichen Raute, welche nicht von der Diagonalen verbunden sind. Ein Rechteck ist die orthogonale Form einer Raute. Ein flächengleiches Rechteck kann auf dieselbe Art gefunden werden. Der Diagonale entspricht eine in einem Winkel von 45° angelegte Gerade. Durch Verlängerung der Seiten des Rechtecks bis zum Schnittpunkt mit der Geraden und den deren Parallelen wird ein neues Rechteck gebildet. In diesem findet sich das flächengleiche Rechteck analog zur Raute.

Descartes hat diese Methode am Modell der Algebra entwickelt. Die Algebra wurde ihm ursprünglich von den Rechenmeistern vermittelt und von ihm im Laufe der Jahre gemäß seiner Methode immer besser verstanden. Seine ursprüngliche Forderung nach methodischer Reinigung der Algebra, um so zu einem klaren und deutlichen Modell für seine Methode der Erkenntnis zu gelangen, erfüllte er durch sein kritisches, reflexives Innehalten. Das Werkzeug der Algebra verbesserte so die Algebra als Werkzeug.

Am Modell der Algebra stellt Descartes dar, wie aus einer streng methodischen Abfolge kleiner aber intuitiv klarer Schritte komplexe Problemstellungen dem Verstand zugänglich werden. Die Darstellung wird dabei zur „Verpackung“, welche diese Zugänglichkeit gewährleisten soll. Am Ende seiner Ausarbeitung wird evident, dass die von ihm verwendete cossische Notation der Algebra problematisch ist. Descartes ersetzt z.B. die cossische Schreibweise für Potenzen durch eine numerische Aufzählung. Der Übergang von der komplexen und nicht immer stringenten Symbolik der cossischen Notation zur Verwendung einer Notation, welche jener streng definierten Viètes entspricht, steht am Beginn seiner schließlich erfolgreichen Integration von geometrischer Analysis und der Algebra, welche als allgemeiner Formalismus die komplexesten Phänomene der Welt abbildbar und Descartes Idee einer deterministisch-mechanistisch erklärbaren Welt greifbar machte.

2.2.12. Von der cossischen Notation zu abhängigen Bewegungen

Die *mathesis universalis* als Modell einer klaren und deutlichen Algebra ist für Descartes das Vorbild für die Bestimmung einer universellen wissenschaftlichen Methode. Diese geht vom fundamental intuitiv erfassbaren Einfachsten aus. Schrittweise führt sie durch ein geordnetes Vergleichen über die Verhältnisse dieses Erfassten zum Gefragten und erlaubt so die Erkenntnis des Gesamtbildes aus der sukzessiven Lösung von Gleichungen. Wesentlich ist eine nachvollziehbare, vollständige Ordnung aller in Form von Gleichungen gesetzten Schritte.

Vor Descartes waren die Untersuchungsmethoden den jeweiligen Disziplinen angepasst und nicht einheitlich methodologisch bestimmt. Auch in der Mathematik wurden die Aussagen in den Disziplinen der Arithmetik und der Geometrie unterschiedlich behandelt. In der Mathematik galt eine Aussage nur dann als bewiesen, wenn sie geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruiert wurde. Bis 1637 erweiterte Descartes diese klassische Beweisform, welche die Geometrie als führende mathematische Wissenschaft betrachtete, indem er diese um „spezielle Zirkel“ zur Konstruktion von Kegelschnitten sowie anderer Kurven, welche aus der Kombination voneinander abhängiger Bewegungen entstehen, erweiterte (cf. AT VI, 391,1-392,14; Geometrie, 332f). Die aus diesen Abhängigkeiten resultierende geometrische

Bestimmung wurde in diesen Zirkeln durch besondere Anordnungen verschiebbarer Lineale abgebildet. Die geometrische Repräsentation folgt der sprachlich bestimmten Abhängigkeit. Damit unterscheiden sich diese geometrischen Linien grundsätzlich von denjenigen, welche aus der Überlagerung voneinander unabhängige Bewegungen entstehen, wie z.B. bei einer Helix, welche sich aus einer Kreisbewegung unter gleichzeitiger von dieser Kreisbewegung unabhängiger Längsverschiebung ergibt. In einem Brief an Mersenne vom 13.11.1629 schreibt er:

Denn obwohl man unendlich viele Punkte finden kann, durch die die Helix und die Quadratrix hindurchgehen, kann man dennoch durch keine der beiden einen der Punkte geometrisch finden, die für die verlangten Wirkungen notwendig sind. Und man kann sie nur insgesamt zeichnen durch die Überlagerung zweier Bewegungen, die überhaupt nicht voneinander abhängen, oder aber die Helix vermittle eines Fadens; denn wenn man einen Faden schräg um einen Zylinder herumdreht, beschreibt er genau diese Linie. (AT I 71,3-12; Mersenne, 9)

Eine Helix entsteht, wenn eine Linie aufgespult wird und dabei diese Linie je Umdrehung der Spule um ein bestimmtes Maß verschoben wird. Dieses Maß ist die willkürlich festlegbare Steigung der Helix: sie ist vollkommen unabhängig von der Drehung um die Spule. Demgegenüber bewegen sich die Lineale in den speziellen Zirkeln notwendigerweise mit der Bewegung mit: deren Verschiebung ist nicht willkürlich bestimmbar, sondern ergibt sich in Abhängigkeit von einer Grundbewegung des Zirkels.

2.2.13. Von den *Regulae* zum *Discours*

Zwischen den *Regulae*, (entstanden zwischen 1619 und 1628) und dem *Entwurf der Methode* (1637 veröffentlicht) stieg Descartes von der cossischen Notation der Algebra auf jene Viètes um, mit der er dann die geometrische Analysis mit der Algebra integrieren konnte. Seit dem *Entwurf der Methode* sind Beweise auch algebraisch möglich, und zwar für alle möglichen Kurven, unabhängig von der Beschränkung auf Zirkel und Lineal oder eine euklidische Geometrie, sofern diese Kurven aus voneinander abhängigen Bewegungen gebildet werden. Die Zahl der zu berücksichtigenden Bewegungen gibt den Grad der Kurve, welcher der algebraischen höchsten Potenz des beschreibenden Polynoms entspricht. Die Algebra hat mit dieser Vereinheitlichung die Geometrie als in der Mathematik führend abgelöst und schließlich den naturwissenschaftlichen Boom der Moderne ausgelöst. Descartes überwand dafür die von ihm bereits in den *Regulae* erkannten Beschränkungen der cossischen Notation.

A crucial limitation of cossic algebra is the lack of notation for higher powers of multiple simultaneous unknowns (rather than a single one). Descartes' geometric and algebraic analysis required overcoming this limitation. (Manders, 189)

Innerhalb der *Regulae* zeigen sich aber Variationen in der Anwendung der Methode. Dies widerspricht zunächst der von Descartes geforderten stringenten Einhaltung der Formvorschriften. Ein Beispiel dafür ist die Darstellung der Unbekannten mittels Großbuchstaben, welche rasch aufgegeben wird.

For example, Rule XVIII does not satisfy the prescription presented in Rule XVI to represent indeterminate quantity by lower case and unknown by uppercase, and uses indifferently a and A to designate the same quantity. (Rabouin 2010, 436)

Inwieweit Descartes unterschiedliche cossische Symbole verwendet hat, ist nicht mehr ermittelbar, da die erhaltenen Abschriften der *Regulae* variieren und das Original nicht mehr existiert⁶ (cf. Rabouin 2010, 436f). Jedenfalls hat er aber zwei signifikant unterschiedliche symbolische Darstellungen für die Einheit in seiner Arbeit präsentiert. Diese kann entweder als Punkt oder als Quadrat dargestellt werden.

Für Descartes ist jedes Merkmal durch seine Ausdehnung gekennzeichnet, welche sich als Größe in der Anschauung wieder findet und welche über eine Länge repräsentiert wird. (cf. AT X 441,6-13; *Regulae*, 141, 62,20-27). Die einem Merkmal zugrunde gelegte Einheit kann durch ein Quadrat der Seitenlänge 1 symbolisiert werden. Er erlaubt aber auch die Darstellung der Einheit durch einen ausdehnungslosen Punkt zum reinen Abzählen der Menge dieser Merkmale.

But the fact that Descartes also allows us to represent the unit by a geometrical point is astonishing. (Rabouin 2010, 438)

Da das Schema nicht nur operativ als Basis für die Durchführung der Grundrechnungsarten dient, sondern auch grundlegend in seiner Bestimmung von Dimensionen, Einheiten und Größen ist, ist die Frage wie von einem Punkt, welcher keine Ausdehnung hat, ein quantifizierbares Merkmal ableitbar ist, offen.

[T]he use of the schematism is here not operative, but foundational, that is, there is nothing like a geometrical calculus in our text, and Descartes does not explain how to construct the different magnitudes through determinate operations. This is not merely an argument from silence since there seems to be, at first sight, no possibility of grounding a geometric algebra if the unit is represented as a point and the root as a line. (Rabouin 2010, 438)

Ein Punkt hat keine Ausdehnung. Der durch den dimensionslosen Punkt als Symbol erfolgten Nullsetzung der Einheit steht die in Form des 1x1-Quadrates gesetzte Basiseinheit

⁶ Zur Quellenlage erklärt Rabouin:

The original manuscript is now lost and all existing editions were made from copies. The first one was a translation in Dutch in 1684, followed by a Latin edition published in *Renati Descartes Opuscula posthuma* [Opuscula, 1701] (Rabouin 2010, 429)

gegenüber. Die Multiplikation mit einem Punkt entspricht einer Multiplikation mit null und führt zu nichts. Nur die Multiplikation mit der Einheit gibt ein Ergebnis. Mit der Möglichkeit der im Punkt impliziten Nullsetzung macht Descartes seine Methode komplizierter als notwendig. Dies widerspricht seinem das intuitiv Einfache suchenden Ansatz.

Notwithstanding the fact that Descartes states here that the unit should have “as many dimensions as the extreme terms which are to be compared” [...] he seems to repeat here again the “unfortunate” error [...]: a unit can be conceived either *as a geometrical point* or as a line segment or as a square. (Rabouin 2010, 443)

In Regel XIV rechtfertigt Descartes den Unterschied zwischen der Verwendung einer diskreten Zahl zur Bestimmung einer Menge von Einheiten und einer kontinuierlich angebbaren Größe für Ausdehnungen. Allerdings kann man Rechenoperationen nur mit der auf Ausdehnung beruhenden Symbolik mit Längen und Rechtecken ausführen. Dabei sind Rechteck und Länge im Wege von Multiplikation und Division ineinander überführbar.

Descartes used a certain schematism to figurate the quantities involved in a question (XIV–XV), but when it came to computations proper, he went back to the representation of multiplication as forming rectangles (XVIII). This was, in fact, also the case in the Specimen when he solved the quadratic equation and represented $3x$ as a rectangle with sides x and 3 . (Rabouin 2010, 444)

Neben dem Maß ist die Bestimmung einer Ordnung, welche die Denkbewegung der Deduktion abbildet und in den Gesamtzusammenhang der Problemlösung stellt, wesentlicher Bestandteil der Methode: die Sicherstellung aller notwendigen Schritte und deren hinreichende Aufzählung sind Wesen des algebraischen Prozesses (cf. Gil, 121; Sepper, 241). Die Darstellung der Einheit als Punkt ist ein Spiegel dieser Abbildung von Ordnung.

This kind of practice fits very well into the idea that an important part of mathematics deals with the consideration of *order* and that these computations can be performed with the help of schematic spatial representations using *points, lines, and figures* (the basic figure here being not the rectangle or the square, but the triangle). Moreover, in the *De solidorum elementis*, “order” is contrasted with “measure”, in accordance with what was written in the *Regulae*. (Rabouin 2010, 448)

Die Darstellung von Rechnungen kann aber nur mit solchen figürlichen Symbolen erfolgen, denen Ausdehnung zukommt. Ein Punkt ist dafür ungeeignet.

What I have called the “operative” use seems to appear only in Rule XVIII, in which Descartes tries to represent the basic operations between magnitudes in general. This coincides, however, with the sudden disappearance of points. How are we to understand this? (Rabouin 2010, 450)

Eine Möglichkeit ist, dass Descartes hier die Grenzen der bisherigen Darstellungsform erkannt hat. Er beendet an dieser Stelle die weiteren Ausformulierungen der *Regulae*. Diese bleiben ein unveröffentlichtes Fragment. In der aus 1701 stammenden *Opuscula*, der zweitältesten erhaltenen Abschrift, sind die Punkte auch in der Regel XVIII erhalten. (cf.

Rabouin 2010, 451). Allerdings nicht allein, sondern zusätzlich zu den Rechtecken. Die Darstellung mit aus Einheitsquadraten aufgebauten Rechtecken ist nur bei kommensurablen Größen möglich. Rechtecke für inkommensurable Größen können nicht auf die Einheitsquadrate rückgeführt werden. Bei solchen Darstellungen könnte der Punkt als Repräsentation der Einheit verwendet worden sein und so nur eine besondere Klasse von Operationen bezeichnen. Damit hätte Descartes Klarheit und nicht Verwirrung geschaffen – ganz so, wie seine Methode es verlangt.

Descartes is fully aware of the fact that the representation through dots and that through continuous magnitudes are not isomorphic. He divides the representation through rectangles into two cases according to whether or not we can divide the rectangle into unit cells. In the case of two incommensurable magnitudes, it is not possible to find a unit square into which their “rectangle” can be decomposed (since, by definition, there is no common measure into which they can both be decomposed). The representation by dots is therefore seen as a *subclass* of the more general one through rectangles (and not an equivalent one [...].) (Rabouin 2010, 451)

Die Frage wie diskrete Mengen, welche das Wesen der Arithmetik bilden mit Größen kontinuierlicher Ausdehnungen, welche in der Geometrie behandelt werden, zusammengeführt werden können ist entscheidend für die Integration von Algebra und Analysis. Längen auf dem Zahlenstrahl repräsentieren nun nicht nur abzählbare Mengen und deren Relationen, sondern auch alle beliebigen Messgrößen. Descartes Vorschläge zur symbolischen Behandlung von Einheiten, welche entweder diskret darstellbar sind oder im vollständigen Kontinuum des Zahlenstrahls auch inkommensurable Werte annehmen können, weisen auf diese Problematik im Vorfeld der Integration von Arithmetik und Geometrie.

An Beginn und am Ende der Arbeit an den *Regulae* stand ein Austausch mit seinem Freund Isaac Beeckman. Am 8. Oktober 1628 besuchte Descartes ihn in Dordrecht, um ihm den damaligen Stand seiner „perfektionierten Algebra“ zu präsentieren.

As proof, he gave Beeckman a specimen of a “general algebra”. He also promised to send a treatise on algebra, by which he claimed one could bring geometry to perfection and, more than that, all human knowledge. [... O]ne is struck by its very poor and apparently confused mathematical content. (Rabouin 2010, 429)

2.2.14. Der Umstieg auf Viètes Notation

Der Anspruch von Perfektion steht aus heutiger Sicht in großem Widerspruch zu dieser Arbeit, welche in einer Abschrift Beeckmans erhalten ist. Da diese Schrift in cossischer Notation gefasst ist, Descartes aber selbst bereits Kritik an dieser geübt hat, stellt sich die Frage nach seiner Kenntnis der damals in Gebrauch kommenden Viètes. Allerdings sind die *Regulae* nur als Abschriften erhalten und zeigen unterschiedliche cossischen Notationen (cf. Rabouin

2010, 436f). Die Abschrift von Beeckman enthält die in Regel XVIII gestellte Forderung nach einer auf Längen und Rechtecke reduzierten, symbolischen Darstellung.

However, another surprising element of our text is that it still uses cossic notation. The point is not that Descartes uses this notation in and of itself, but that he does so when introducing what is supposed to be the results of his great advances in mathematics during the nine preceding years — a very intriguing situation if he was in possession of his new notation at that time. (Rabouin 2010, 436)

Das einzige Beispiel, welches Beeckman als Anwendung dieser „perfekten Algebra“ – Descartes neuer Methode – gibt, ist die seit dem Mittelalter bekannte geometrische Lösung der quadratischen Gleichung „ $x^2 = 6x + 7$ “.

But what example does he choose? The resolution of a quadratic equation through a simple manipulation of squares, that is to say one of the most elementary techniques in algebra, known since Al-Khwarizmi! [...] *This* is the (only) “sample” of Descartes’ technique given in 1628! And it is presented as the result of nine years of mathematical studies in which “he has made as much progress as was possible for a human mind”! (Rabouin 2010, 439f)

Descartes löst diese Gleichung auf geometrische Weise, indem er von einem Quadrat mit der Seitenlänge x ausgeht, welches flächengleich zur rechten Seite der Gleichung sein muß. Durch die damals schon lange bekannte Aufteilung des Quadrats in ein Rechtecke, welche die Aussagen der rechten Seite repräsentieren, löst er die Aufgabe geometrisch.

In algebra Descartes was intent on a methodical use of geometrical figures to solve problems. He proceeds by specifying the correlations between the algebraic elements and the geometrical figure as precisely and systematically as possible. (Sepper, 233)

Die von Descartes aufgezeigten Möglichkeiten der Darstellung unterschiedlicher Dimensionen, wie z.B. Farben durch bestimmte Figuren, bringen nichts Neues (cf. Rabouin 2010, 441). Nicht einmal die in den *Regulae* gegebene Kritik an der cossischen Darstellung von Potenzen und deren Ersatz durch abzählbare Relationen zur Einheit finden sich in Beeckmans Abschrift.

[W]hy did he not even mention what is supposed to be the real content of his techniques (the exponential notation, the classification of curves, the algebraic analysis of geometrical problems)? (Rabouin 2010, 441)

Rabouin geht davon aus, dass Descartes und Beeckman offen auf der Höhe ihres Wissens konferiert haben und die Abschrift Descartes Auffassung der Algebra richtig wiedergibt (cf. Rabouin 2010, 440ff). Man kann dabei aber keineswegs von einer linearen Entwicklung dieser Auffassung ausgehen. Descartes erachtete die Methode der *mathesis universalis* als fundamentales Modell für die Erschließung aller Wissensgebiete. Den Fragen dieser Wissensgebiete wollte er sich erst widmen, nachdem er diese Methode für sich vollständig entwickelt hatte und mit ihr vertraut war. Gemäß seiner Methode hat er die ihm damals zur

Verfügung stehenden Techniken aufgenommen und geprüft. Dies gilt auch für seine Verwendung der cossischen Notation, welche in den *Regulae* zur Anwendung kam. Descartes Lernprozess war einer der Reflexion unter Bedachtnahme auf die von ihm geforderten methodologischen Prinzipien.

My aim here is to draw attention to the fact that there is no reason to merge what seem to be different projects (the “entirely new science” of 1619, the *alia disciplina* and the *mathesis universalis* of the *Regulae*, the “general algebra” of 1628) into a single grandiose view culminating in *La Géométrie*. (Rabouin 2010, 435)

Die Plausibilität einer linearen Entwicklung von der *mathesis universalis* zur Geometrischen Analysis entsteht aus unserer Perspektive im Rückblick auf das Werk Descartes. Tatsächlich hat die Suche nach Gewissheit und Bestätigung Descartes selbst zu immer neuen Ansätzen veranlasst. Das Innehalten und gegebenenfalls ändern einer Richtung sind Teil dieses Werkes. Sind die *Regulae* noch stark von der Algebra als Modell für eine Ausdrucksform geprägt, gibt die *Geometrie* eine der vernünftigen Betrachtung unterworfenen Anwendung seiner Methode.

Keine vier Monate nach dem Treffen in Dordrecht präsentierte Descartes seinem Freund algebraische Lösungen auf einem weit fortgeschrittenen Niveau, welche von Descartes selbst als herausragende Entdeckungen bezeichnet wurden (laut einer mit 1.2.1629 datierten Schrift Beeckmans):

[T]he “construction” of the third and fourth degree equation by the intersection of a parabola and a circle — a technique much more sophisticated than anything that could be expected from the “sample” presented in 1628. (Rabouin 2010, 430)

Algebra und die analytische Geometrie der Kurven sind aber weiterhin getrennte Techniken. Descartes Lösung von Gleichungen des 3. und 4. Grades als Schnittmenge von Parabel und Kreis erfolgt geometrisch ohne algebraische Gleichungen.

The study of curves (in fact, only conic sections) is presented in 1628 *separately* and *independent* of the “general algebra” in the context of works in optics. Moreover, Descartes does not use algebra in his geometrical analysis of these curves, as transcribed by Beeckman. (Rabouin 2010, 434)

Diese geometrische Konstruktion von zwei proportionalen Wurzeln basierte vermutlich auf der Arbeit von Claude Mydorge, einem Mathematiker aus dem Kreis um Mersenne (cf. Wohlers 2020, 824)

Descartes sent to Beeckman the *geometrical construction* of two proportional means at the beginning of 1629 with a *purely geometrical* demonstration found by a ‘French mathematician’ (presumably Mydorge). (Rabouin 2021, 85f)

Sein geometrischer Beweis der Lösung wurde unter Verwendung der cossischen Notation und Tradition konstruiert, wobei Descartes die algebraische Setzung des Gefragten zur geometrischen Konstruktion der Kegelschnitte verallgemeinerte.

By then identifying these coefficients with that of a general equation of degree 4, one obtains the different magnitudes involved in Descartes' construction. The method of "indeterminate coefficients" was known and used by cossist algebraists, but in an arithmetical context. By using it in a geometrical context in which curves are represented and manipulated through their equations, Descartes would have made his first step in what would be the core of *La Géométrie's* new technique (Rabouin 2010, 456)

Diese Verallgemeinerung einer bewährten Technik steht neben der von Descartes geübten Kritik an der cossischen Darstellung von Potenzen. Er stellt diese wie in den *Regulae* vorgestellt dar, indem er sie als zahlenmäßige Relationen zur Einheit angibt.

In Descartes' description, the coefficients of the general equation of fourth degree are described not by letters but by expressions such as "the number of squares," "the number of roots," and "the absolute number," [...]. (Rabouin 2010, 456)

Diese Schritte zeigen den Beginn einer Entwicklung, welche zur Integration von Algebra und geometrischer Analysis in *Geometrie* führt. Der symbolische Pluralismus der Cossisten erlaubte noch keine vollständige Repräsentation von analytischer Geometrie in der Algebra und daher führt Descartes beide Bereiche noch getrennt aus, nimmt aber die von ihm gesammelten Erfahrungen mit, welcher er methodisch in sein wissenschaftliches Arbeiten einfließen lässt und so zur Zusammenführung von Algebra und Analysis fortschreitet.

2.2.15. Erste Ansätze zur Zusammenführung von Arithmetik und Geometrie

Fortschritt ist Erkenntnisgewinn. Er beruht auf dem Erkennen intuitiv wahrer Gegebenheiten und dem schrittweisen, aber ununterbrochenen Schließen aus dazu gegebenen Relationen. Je mehr unterschiedliche Gegebenheiten bekannt sind, desto mehr Erkenntnis wird aus der Verschränkung auch unterschiedlicher Wissensgebiete durch Reflexion auf Erkanntes möglich. An Mersenne schreibt Descartes am 10.5.1632:

Sie haben mir ein anderes Mal mitgeteilt, daß Sie Leute kennen, denen es so sehr gefällt, für den Fortschritt der Wissenschaften zu arbeiten, daß sie sogar alle Arten von Experimenten auf eigene Kosten anstellen wollen. Wenn jemand dieses Charakters es unternehmen wollte, nach der Methode Francis Bacons eine Geschichte der Himmelserscheinungen zu schreiben und er uns, ohne irgendwelche Gründe oder Hypothesen vorzubringen, den Himmel exakt so beschreibe, wie er jetzt erscheint, welche Lage jeder einzelne Fixstern im Hinblick auf den ihm benachbarten hat, welcher Unterschied entweder an Größe oder an Farbe oder an Helligkeit [zwischen ihnen besteht] oder ob sie mehr oder weniger funkeln usw. [...] dann wäre das ein Werk, das für die Öffentlichkeit nützlicher wäre, als es zunächst scheint, und das mich von vieler Mühe entlasten würde. Aber ich erwarte nicht, daß man das in Angriff nimmt, genausowenig wie ich das zu finden erwarte, was ich gegenwärtig bezüglich der Gestirne suche. (AT II 251,12-37; Mersenne, 94f)

Die verschränkte Komplexität der Realität wird durch eine unserem Verstand zugängliche Darstellung erkannt. Je einfacher diese Darstellung ist, desto leichter ist die gegebene Komplexität auf zugrundeliegende intuitiv erfassbare, hinreichende Gegebenheiten rückführbar. Während die Darstellung von Größen in den *Regulae* noch durch Längen und Rechtecke symbolisiert werden, werden die der strengen Viète'schen Notation folgenden Darstellungen im *Entwurf der Methode* nur noch Längen verwenden.

Als solche Darstellungsmöglichkeiten numerischer Größen durch geometrische Gebilde betrachtet Descartes in den *Regulae* Gerade und Flächen, im „Discours de la Methode“ dagegen nur noch die Gerade. (Arndt, 35)

Descartes hat die Beschränkungen der cossischen Symboliken erkannt. Die durch diese gegebenen Grenzen hat er entsprechend seiner Methode in kleinen Schritten erweitert. Die Zerlegung jeder Problematik in kleinste verständliche Schritte erlaubt es dem Verstand sichere Wahrheiten zu erkennen. Diese „Verpackung“ des zu untersuchenden Problems an der Schnittstelle zur Erkenntnis bedarf keiner besonderen rhetorischen Form, sondern kann auch in normaler Sprache formuliert werden. Wichtig ist, dass die Erkenntnis aus einer intuitiven Gewissheit erwächst, welche ihrerseits das Ergebnis rationaler Reflexion auf Ableitungen von bisherigen Gewissheiten ist. Eine erkannte Klarheit oder Deutlichkeit darf nicht durch besondere Formen von Sprache verdeckt werden, sondern muss immer auf Gewissheit rückführbar bleiben. Einerseits erarbeitete sich Descartes diese Gewißheit in der Anwendung der Algebra gemäß seiner Methode. Obwohl Descartes sich intensiv und insbesondere in seiner Korrespondenz mit Mersenne mit der Mathematik beschäftigte, verzichtete er in seinen publizierten Werken, in denen er komplizierte physikalische Phänomene rein beschreibend auf aus seiner Sicht intuitiv Erkanntes zurückführte, auf deren Verwendung. Die spezielle Form des mathematischen Ausdrucks hätte eine Quantifizierung der untersuchten physikalischen Phänomene erlaubt.

But Descartes nowhere attempts to quantify this, to give a mathematical expression to the pressure, to say anything about the speed the fluid must have to result in the phenomena that we observe, to say anything about the paths of the planets. (Gaukroger et al., 114)

In diesem Kapitel habe ich gezeigt, dass Descartes Forschung nicht linear erfolgte, sondern ein komplexes, oft fraktales Muster zeigt. Die von ihm selbst verordneten „Stopp-Stufen“ waren Phasen des Suchens nach Gewissheiten, neu sortiert und geordnet in der Genesis seiner Notizen, welche nach seinem Tod von seinen Nachlassverwaltern in den *Regulae* zusammengestellt wurden. Auf diesen „Stopp-Stufen“ erarbeitete sich Descartes seine Gewissheiten: in der Beschreibung seiner Methode, in der Algebra, in der Geometrie und in der Rückführung physikalischer Fragen wie z.B. der des Lichtes in der Optik. Immer wieder reflektiert Descartes

auf an ihn von Mersenne herangetragene Vorschläge der algebraischen Beschreibung physikalischer Phänomene durch Mathematiker, spricht diesen aber über seine prosaischen Erklärungen hinausgehenden Mehrwert ab.

Mit „prosaisch“ bezeichne ich den Verzicht auf besondere Formen des Ausdrucks, welche von der nüchternen Darstellung des Präsentierten ablenken. Die Darstellung erfolgt damit in einer Form, welcher auch der Alltagssprache zugänglich ist und damit von jeder dieser Sprache mächtigen Person erfasst werden kann. Im nächsten Kapitel beschreibe ich diesen bewussten Verzicht auf die Präzision des regelbasierten rein algebraischen Ausdrucks, gegenüber einer auf jeder Stufe der Erkenntnis geforderten intuitiven Gewissheit in seinen prosaischen Erklärungen.

2.3. Descartes prosaische Beschreibung physikalischer Phänomene

Vor 1628 hatte er in seinen, in den *Regulae* publizierten „Cogitationes privatae“ folgende Überlegung zur Akzeptanz von Kritik durch andere festgehalten:

Von Freunden kritisiert zu werden ist ebenso nützlich wie es ehrenvoll ist, von Gegnern gelobt zu werden. Von Fremden erwünschen wir uns Lob, von Freunden die Wahrheit (AT X 217,1-3; *Regulae*, 195)

Im seit 1629 dokumentierten laufenden Austausch mit Mersenne bearbeitete Descartes regelmäßig algebraische Aufgabenstellungen. Er erlaubte es Mersenne auch, seine Einsichten zu veröffentlichen, sofern diese Veröffentlichungen nicht auf ihn bezogen werden können. Zu seiner Praxis des Publizierens stellt Gaukroger fest: „And even though he allowed Mersenne to publish this work, Descartes himself did not,“ (Gaukroger et al., 120)

Descartes verlangte Wissen auf Gewissheiten aufzubauen. Diese Gewissheiten müssen auf den intuitiv erfassten, zugrunde liegenden allgemeinsten Wahrheiten aufbauen. Der Weg von Reduktion und Konstruktion ist methodisch vorgegeben und völlig unabhängig von sprachlichen Formen. Rhetorik verdeckt die zugrunde liegenden einfachen Wahrheiten. Eine reine Mathematisierung, welche ohne Bezug auf Metaphysik argumentiert, wie sie z.B. von Galilei betrieben wurde lehnte er ab. Am 22.Juni 1637 schrieb er an Mersenne:

Ich bitte Sie, mir zu vergeben, wenn ich überhaupt nicht auf Ihre Frage bezüglich der Verzögerung antworte, die die Bewegung schwerer Körper durch die Luft empfängt, in der sie sich bewegen. Denn das hängt von so vielen anderen Dingen ab, daß ich in einem Brief dazu keine richtige Berechnung anstellen kann. Ich kann nur sagen, daß weder Galilei noch irgend jemand anderer diesbezüglich irgend etwas bestimmen kann, das klar und beweiskräftig ist, wenn er nicht zuerst weiß, was Gewicht ist, und er keine wahren Prinzipien der Physik hat. (AT I 392, 4-13. Mersenne, 135)

Die mathematische Beschreibung vernachlässigt die Nebenbedingungen und schafft nicht Wissen, sondern eine Scheingenauigkeit, welche eine solche Form der Rhetorik darstellt. Dabei sind – wie er in Regel XIV schrieb –, mathematische Formulierungen Mittel, um methodisch zu höherer Weisheit zu gelangen. (cf. AT X 442,4-11; *Regulae*, 143, 63,12-18)

What Descartes seeks is a physics grounded in a true comprehension of nature as it really is, and a true knowledge of the causes underlying phenomena. On his view, Galileo's mathematical physics of motion is a mathematical fantasy, grounded in arbitrary assumptions, '*un roman de la nature*', no less fanciful for being expressed in mathematical language. What Descartes wanted was a genuine physico-mathematics, as much physics as it is mathematics: a mathematical science of motion that involves knowledge of the real cause of the effects. It is only when we know the real causes of gravity that we will have a true science of the motion of heavy bodies. (Gaukroger et al., 124)

Besonders schwerwiegend ist, dass die jeder Quantifizierung zugrunde liegenden Annahmen empirisch erkannt werden müssen. Dabei ist die hinreichende exakte Erfassung aller Bedingungen für Descartes problematisch und die mathematisch beschriebenen Lösungen schaffen so eine Scheingenauigkeit, welche die wahre Natur des Problems überdeckt. Die quantitative Problemlösung verlangt eine qualitativ hinreichende Bestimmung der Annahmen durch entsprechende Experimente. An Mersenne schreibt er am 11.3.1640 in Bezug auf die Bewegung von Musketen Kugeln und der Relevanz der diese Bewegung beeinflussenden unterschiedlichen Außenbedingungen.

Indessen ist es Sache eines Experiments, zu bestimmen, ob dieser Unterschied wahrnehmbar ist, und ich zweifle sehr an allen, die ich nicht selbst angestellt habe. Seien Sie versichert, daß ich keines als gewiß aufgeschrieben habe, dessen ich mir nicht ganz sicher war (AT III 38,19-23; Mersenne, 344)

Ohne hinreichende Gewissheit der Annahmen kann kein Wissen geschaffen werden. Statt dessen produzieren diese unsicheren Annahmen nicht belastbare Scheingenauigkeiten. Ihre syntaktischen, sprachlichen Formen funktionieren wie Masken, welche ihre fundamentale Unsicherheit verdecken.

The difficulty is, it seems, an empirical difficulty, Descartes' inability to do the experiments or make the observations necessary to establish the true law of falling bodies (Gaukroger et al., 126)

Descartes wollte sein Werk auf dem Fundament gesicherten Wissens aufbauen. Jeder Schritt hatte auf der reflektiv erkannten Wahrheit des bisher Erarbeiteten aufzubauen. Wenn diese Sicherheit nicht gegeben ist, kann auch kein weiterer Schritt gesetzt werden. Der Erkenntnisprozess ist auf einer zumindest vorläufigen „Stopp-Stufe“ gelandet.

Vermutlich waren die *Meditationen* inhaltlich in einer Rohfassung bereits 1629 fertig (cf. Wohlers 2015, XXII). Ab 1629 war Descartes im intensiven Briefwechsel mit Marin Mersenne, welcher als Mathematiker und neben eigenen Experimenten einen wissenschaftlichen

Austausch mit Galileo Galilei und anderen Wissenschaftlern pflegte. Für Descartes, welcher sich in die Niederlande zurückgezogen hatte, um ungestört seinen Studien nachgehen zu können, nahm der Mathematiker Mersenne die Rolle eines im Zentrum des universitären Lebens in Paris lebenden Diskussionspartners und Lektors ein. Am 8.10.1629 kündigt Descartes ein Werk zur Erklärung der Farben des Regenbogens an. Allerdings beschränkte er einen möglichen diesbezüglichen Austausch mit allen anderen mit Mersenne kommunizierenden Wissenschaftlern:

Außerdem bitte ich Sie, mit niemandem auf der Welt darüber zu sprechen, denn ich habe mich entschlossen, das als ein Muster meiner Philosophie der Öffentlichkeit vorzubringen und mich hinter dem Gemälde zu verbergen, um zu hören, was man darüber sagen wird. (AT I 23,23-26; Mersenne, 4)

Am 13.12.1629 schreibt Descartes an Mersenne, dass er seine allgemeine Methode in einem neuen Werk darlegen wird:

Ich habe mich auch entschlossen, anstatt nur ein Phänomen allein, alle Phänomene der Natur zu erklären, das heißt die gesamte Physik; und meine Absicht befriedigt mich mehr als alle meine bisherigen, denn ich denke, einen Weg gefunden zu haben, alle meine Gedanken so darzulegen, daß sie einige zufriedenstellen und die anderen keinen Anlaß haben werden, ihnen zu widersprechen. (AT I 70,10-16; Mersenne, 10)

Im nächsten Kapitel zeige ich Descartes Bemühen, sicherzustellen, dass die von ihm geforderte hinreichende Ordnung durch Berücksichtigung aller relevanten Umstände zu keinem Scheinwissen führt. In seiner Auseinandersetzung mit den mathematischen Aussagen Fermats wirft er diesem vor, genau diese Vergewisserung zugunsten einer mathematischen Ausdrucksform zu vernachlässigen.

2.3.1. Die relevanten Nebenbedingungen physikalischer Phänomene

Allerdings machte er auch klar, dass die Grenzen der Wissenschaft in der Unmöglichkeit liegen, alle relevanten Umstände zu bestimmen und daher komplexe physikalische Phänomene in Abhängigkeit von diesen unbestimmbaren Bedingungen zu quantifizieren. Statt dessen sucht er diese zu beschreiben. Zur Bestimmung des Luftwiderstandes bei einem Pendel schreibt er im gleichen Brief:

Was nun jene Hemmung durch die Luft betrifft, nach deren genauem Wert Sie fragen, so halte ich es für unmöglich, darauf zu antworten, da dies nicht in den Bereich der Wissenschaft fällt. Denn ob es warm ist, ob es kalt ist, ob trocken, ob feucht, klar, bedeckt, all das kann die Hemmung durch die Luft verändern, und unzählige andere Umstände auch. (AT I 73,22-28; Mersenne, 11)

Descartes ersucht Mersenne um Berichte zu optischen Erfahrungen, z.B. zur Reflexion bei den Flammen von Kerzen und um möglichst genaue Beschreibung (i) dieser Phänomene und (ii) der Umgebungsbedingungen. So glaubt er die relevanten Umstände der Phänomene

hinreichend erklären zu können. Entsprechend seinem Anspruch, die gesamte physikalisch erfassbare Welt zu beschreiben, und seiner Betrachtung von Wissenschaft als Einheit, ersucht er auch um die Mitteilung von Erfahrungen und Erkenntnissen in anderen Bereichen, wie der Akustik und Astronomie (cf. AT I, 102,19-104,7; Mersenne, 33) oder zu Bewegungsverläufen und der Ausbreitung von Tönen (cf. AT I, 112,28-113,17; Mersenne, 40). Descartes kommentiert die von Mersenne gegebenen Informationen und Beobachtungen von Experimenten unter Bezugnahme auf die Wahrnehmungsvermögen. Er setzt sich das Ziel, sein Werk Anfang 1633 an Mersenne schicken zu können. Am 15.4.1630 beschreibt er seinen reflexiven Arbeitsstil der kleinen, aber kontinuierlichen Schritte in der Suche nach Gewissheit um die „Stopp-Stufen“ zu überwinden:

Ich arbeite sehr langsam daran, weil ich viel größeres Vergnügen darin finde, mich selbst zu unterrichten als das Wenige zu Papier zu bringen, das ich weiß. (AT I 135,51-54; Mersenne, 55) [...] Wenn Sie es seltsam finden, daß ich einige andere Abhandlungen nicht fortgesetzt habe, die ich noch in Paris begonnen hatte, so werde ich Ihnen den Grund sagen: Es ist so, daß ich, während ich daran arbeitete, ein wenig mehr Erkenntnis erwarb, die ich noch nicht hatte, als ich begann, und die, als ich mich ihr anpassen wollte, mich zwang, ein neues Projekt zu beginnen, das ein wenig größer war als das erste. (AT I 137,26-138,4; Mersenne, 56)

Für Descartes bedarf Wissenschaft einer Methode. Diese Methode schafft Stabilität und Zuverlässigkeit, wie es einem Fundament zukommt. Der von Descartes vorgeschlagene radikale Zweifel (cf. AT VII, 22,3-22,22; Meditationen, 23f) an allem, was nur glaubhaft aber nicht als absolut gewiss erkannt wurde, basiert auf einem derartigen methodischen Fundamentalismus. Dieser verlangt, erst dann einen weiteren Schritt der Erkenntnis zu akzeptieren, wenn dieser klar und deutlich aus dem bisher gesicherten Wissen gewonnen wurde. Nur gesichertes Wissen schafft die zum Weiterbau notwendige Tragfähigkeit. Im gleichen Brief bemerkt er:

Aber es gibt Leute, die denken, über einen Sachverhalt vollkommen Bescheid zu wissen, sobald sie auch nur das geringste Licht sehen. (AT I 138,22-24; Mersenne, 56)

Er kleidet seine Beschreibung der Funktionsweise der Welt in die Fabel einer möglichen Welt, ohne zu verlangen, dass seine Erklärungen für die tatsächliche Welt an sich verbindlich sind (Wohlers 2015, XXXV). In der Form der Fabel behauptet Descartes nicht, dass die Welt an sich so ist, wie er sie beschreibt. Diese Beschreibung stellt aber eine Möglichkeit dar, wie die Welt funktionieren könnte. Dass sich die in der Welt beobachtbaren Phänomene mit der Erzählung der Fabel decken, ist dabei aber ein klares Indiz dafür, dass die Welt tatsächlich so ist, wie sie von Descartes als Erzählung präsentiert wird. Seine Darstellungen sind rein prosaisch in Französisch umso auch ein interessiertes Publikum jenseits der scholastisch

etablierten Gelehrten anzusprechen. Selbst bei der Bestimmung von Proportionen verzichtet er auf algebraische Formen. Im selben Brief stellt er fest:

Was die [mathematischen] Probleme betrifft, so werde ich Ihnen eine Million davon schicken, um sie anderen vorzulegen, wenn Sie es wünschen; aber ich bin der Mathematik so müde und nehme sie jetzt so wenig wichtig, daß ich mir nicht mehr die Mühe machen könnte, sie selbst zu lösen. (AT I 139,5-15; Mersenne, 57)

Die Fokussierung auf nur mathematisch fundierte Erkenntnis lehnt Descartes ab. Alle Wahrheiten, welche Gegenstand einer Erkenntnis sein können, sind für ihn metaphysisch in Gott als erster Ursache begründet.

Menschen, die überhaupt keine höheren Gedanken haben als diese, können leicht zu Atheisten werden, und weil sie zwar die mathematischen Wahrheiten vollkommen begreifen, aber nicht die der Existenz Gottes, ist es kein Wunder, wenn sie nicht glauben, daß sie von ihr abhängen. (AT I 150,8-18; Mersenne, 65)

Auch wenn Descartes Galileis Meinung zur Bewegung der Erde teilte, so lehnte er dessen physikalische Erklärungen, welche frei jeder Metaphysik sind, ab. In Bezug auf die relativen Fallgeschwindigkeiten von gleich schweren Kugeln aus Holz und Blei stellt er Ende 1632 fest:

Was das betrifft, was Sie mir über die Berechnung mitteilen, die Galilei über die Geschwindigkeit anstellt, mit der sich sinkende Körper bewegen, so entspricht das überhaupt nicht meiner Philosophie (AT I 258,10-13; Mersenne, 100)

Am 22.7.1633 informiert er Mersenne, dass seine Abhandlung zu den Phänomenen der Welt inhaltlich fertig sei (cf. AT I 268,13-21; Mersenne, 103). Aber aufgrund des mittlerweile erfolgten Verbots von Galileis *System der Welt* und dessen Verurteilung durch die Inquisition untersagte er eine Veröffentlichung dieser Arbeiten zu seinen Lebzeiten. In einem mit 28.11.1633 datierten Brief an Mersenne hält Descartes fest, dass einerseits die Bewegung der Erde integraler Bestandteil seiner Philosophie sei, er aber keinen Konflikt mit der Kirche wolle (cf. AT I 270,31-38; Mersenne, 104). Ihm ist klar, dass die Inquisition die fiktionale Form seiner möglichen Welt gerade wegen deren Übereinstimmung mit den Befunden zur tatsächlichen Welt nicht als reine Fiktion akzeptieren würde (Wohlers 2015, XXXVI). Diese Arbeit wurde erst nach seinem Tod in *Le Monde* in redigierter Form publiziert. Das Original selbst ist verschollen, sodass die Veränderungen durch die Herausgeber schwer einschätzbar sind. Allerdings:

Es ist ein Kuriosum, daß dieser aller Wahrscheinlichkeit nach von Descartes 1633 liegengelassene, aber eben erst 1664 bzw. 1677 im französischen Original veröffentlichte Text in modernerer Orthographie daherkommt als der *Discours de la Méthode* von 1637 (Wohlers 2015, IX)

Teile dieses inhaltlich fertigen Textes wurden von Descartes auch in der zum *Entwurf der Methode* führenden Neukonzeption verwendet. Descartes reflektierte auf die Verurteilung Galileis in seinen publizistischen Vorhaben, indem er die Methode des Erkenntnisgewinns, wie er sie in den *Regulae* bestimmt hat, wieder in den Vordergrund stellt und dies beispielhaft anwendet. Die *Dioptrik* ist so eine Anwendung seiner Methode, an welcher er jedenfalls schon seit November 1630 arbeitete (Wohlers 2015, XXVIII) und welche inhaltlich an das Thema des Lichts anschließt. Um zu erklären wie das Licht durch das Auge und durch optische Linsen erfasst wird, beginnt Descartes mit seiner Erklärung der Natur des Lichts (cf. AT VI, 83,11-15; *Dioptrik*, 72). Am 25.11.1630 schreibt er an Mersenne, dass die *Dioptrik* eine Erörterung der Farben und des Lichtes bringen wird, gewissermaßen als Kurzfassung der als Fabel projektierten *Le Monde* (cf. AT I 179,14-19; Mersenne 73f). Inwieweit die *Dioptrik* ursprünglich für *Le Monde* mitkonzipiert war, lässt sich nicht genau bestimmen. Jedenfalls sind Descartes Schaffen und die Abfolge seiner Publikationen asynchron.

Darüber hinaus ist es zunächst verwunderlich, daß sich im 1633 liegengelassenen Text von *Le Monde* Verweise auf die 1637 erschienene *Dioptrique* finden. (Wohlers 2015, XIV)

Nachdem Descartes seine Fabel einer möglichen Welt vorgestellt hat, zeigt er im Kapitel „Über die Gesetze der Natur in dieser neuen Welt“ wie sich diese von Gott ausgehend notwendigerweise auf alle Welten gleichermaßen beziehen müssen. Dabei ist die Natur die *res extensa*, welche den gegebenen Raum vollständig ohne Vakuum füllt. Die den Raum füllenden Dinge berühren sich an ihren Oberflächen und wirken durch diese direkten oder indirekten Berührungen aufeinander. Die Wirkung dieser Berührungen ist eine Veränderung von Ausdehnungen und erfolgt nach Regeln.

Die Regeln, denen gemäß sich diese Veränderungen vollziehen, nenne ich die Gesetze der Natur. (AT XI, 37,13-14; *Le Monde*, 53)

Die Einfachheit der Regel und ihrer Formulierung sind für Descartes zentral. Ein Ding kann von einem Zeitpunkt zum anderen seine eigene Ausdehnung ändern, wie das Wachs bei Änderung der Temperatur (cf. AT VII 31,8-12; Meditationen, 35) und es kann seine Lage im Raum ändern. Sowohl die Veränderung der Lage des Dinges an sich als auch Veränderung der Oberfläche eines Dinges durch Änderung seiner Ausdehnung ergeben sich aus einer Bewegung. Für Descartes ist der Raum durch Materie gefüllt und so ist jedes Ding an seiner Oberfläche durch andere Dinge begrenzt (cf. AT XI, 18,6-11; *Le Monde*, 25). So führt jede Bewegung eines Dinges zur Bewegung benachbarter Dinge. Damit ist Bewegung sowohl Ursache als auch Wirkung, vermittelt durch Abfolgen von direkten oder indirekten Berührungen. Bewegung an sich ist fundamental aber trotzdem für Descartes von den Philosophen bisher schlecht erklärt:

Es gibt niemanden, der nicht glaubt, daß in der alten Welt dieselbe Regel bezüglich der Dicke, der Gestalt, der Ruhe und tausend anderen ähnlichen Dingen befolgt wird. Aber die Philosophen haben von ihr die Bewegung ausgenommen, die doch dasjenige ist, was ich mir am ausdrücklichsten darin enthalten wünsche. (AT XI, 38,22-27; Le Monde, 55) [...] Und tatsächlich sind diese Worte: Bewegung ist der Akt eines Seienden der Möglichkeit nach, insofern es der Möglichkeit nach ist nicht schon deshalb klarer, weil sie deutsch sind. (AT XI, 39,10-13; Le Monde, 55)

Die von Descartes gesuchte Einfachheit verlangt dies auch von der Formulierung von Erkenntnissen als „Verpackung“. Für ihn sind Klarheit und Deutlichkeit die Grundlage für Gewissheit. Nur diese beiden Qualitäten beweisen die Wahrheit der formulierten Erkenntnis. Formulierungen, welche rhetorische Figuren vorschieben, sich solipsistisch in Regeln begründen, oder sich sonst einer abgehobenen Sprache bedienen, widersprechen dieser Anforderung. Eine rein algorithmische, also rein regelhafte, Begründung ohne Berücksichtigung der konkreten, realen Umstände (wie beim Brief an Mersenne Ende 1632 mit der Beschreibung der für die „Berechnung“ eines Musketen Schusses notwendigen Informationen, cf. AT I, 113, 23-29; Mersenne, 41) mag zwar die Regelhaftigkeit der Berechnung bestätigen, verliert aber jede Gewissheit in Bezug auf die zu beschreibende Realität. Eine derartige Berechnung wird zum Selbstzweck einer Mathematik, losgelöst von ihrer Aufgabe die Realität widerzuspiegeln. Den modernen Mathematikern und den traditionellen Scholastikern stellt er die praktisch agierenden Geometriker gegenüber, welche schon immer nach verständlichen und umsetzbaren Lösungen gesucht haben und dabei Bewegung auf Einfaches rückführten.

Geometriker, die sich von allen Menschen am meisten bemühen, die Dinge, die sie betrachten, sehr deutlich aufzufassen, sie als einfacher und verständlicher beurteilt haben als ihre Oberflächen und ihre Linien – was daran in Erscheinung tritt, daß sie die Linie durch die Bewegung eines Punktes und die Oberfläche durch die einer Linie erklärt haben. (AT XI, 39,17-22; Le Monde, 57)

Descartes setzt Bewegung in Opposition zu Ruhe. Beides sind für ihn Qualitäten, die der ausgedehnten Materie zukommen (cf. AT XI, 40,8-14; Le Monde, 57). Er setzt sich damit in Widerspruch zur philosophischen Annahme, dass Ruhe jene besondere Ausprägung von Bewegung sei, nach welcher Alles strebt und welche sich dabei aber selbst auslöscht. Er bestimmt zwei Regeln, welche vom natürlichen Zustand der Ruhe ausgehen und Bewegung als Übertragung beschreiben:

Die erste ist: Jedes einzelne Teil der Materie im besonderen bleibt immer in demselben Zustand, solange nicht das Auftreffen der anderen es zwingt, ihn zu verändern. (AT XI, 38,9-11; Le Monde, 55)

Ich setze als zweite Regel voraus: Wenn ein Körper einen anderen stößt, kann er ihm nur dann Bewegung verleihen, wenn er dabei gleichzeitig ebensoviel von der seinigen verliert, und er kann ihm nur welche nehmen, wenn sich die seinige um ebensoviel steigert. (AT XI, 41,1-7; Le Monde, 59)

Für Descartes sind diese beiden Regeln universell gültig, auch wenn sie nicht immer beobachtbar sind. Luft und Feuer mögen nicht als Körper sichtbar sein. Aber ein die Bewegung fester Körper widerstehender Einfluss der als Luftwiderstand existiert und auch Feuer bewegt Körper (cf. AT XI, 42,16-28; Le Monde, 61).

Die durch eine Bewegung des einen Objektes ausgelöste Bewegung des anderen Objektes ist mathematisch beschreibbar als Veränderung seiner Lage im Raum. Diese zu bestimmten Zeitpunkten auf Höhe, Breite und Tiefe bezogenen Längen sind geometrisch beschreibbar. Descartes formuliert drei Regeln, welche jede Veränderung der *res extensa* als Folge von Bewegung aus Ursache und Wirkung erklären.

- (i) Jedes einzelne Teil der Materie im besonderen bleibt immer in demselben Zustand, solange nicht das Auftreffen der anderen es zwingt, ihn zu verändern. (AT XI, 38,9-11; Le Monde, 55)
- (ii) Wenn ein Körper einen anderen stößt, kann er ihm nur dann Bewegung verleihen, wenn er dabei gleichzeitig ebensoviel von der seinigen verliert, und er kann ihm nur welche nehmen, wenn sich die seinige um ebensoviel steigert. (AT XI 41,1-5; Le Monde, 59)
- (iii) Wenn sich ein Körper bewegt, auch wenn seine Bewegung sich meistens in gekrümmter Linie vollzieht und er niemals irgendeine vollziehen kann, die nicht in irgendeiner Weise kreisförmig ist, wie weiter oben gesagt worden ist, strebt gleichwohl jedes einzelne seiner Teile im besonderen, seine Bewegung in gerader Linie fortzusetzen. Und so unterscheidet sich ihre Aktion, das heißt ihre Neigung, sich zu bewegen, von ihrer Bewegung. (AT XI 43,26-44,7; Le Monde, 63)

Die kausalen Regeln von Beharrung und Weitergabe sind zwar nicht offenkundig, aber manifestieren sich in ihren Wirkungen mannigfaltig. Sie sind aber nicht hinreichend um als Vorwegnahme der allgemeinen Impulserhaltung, wie sie von Newton algebraisch formuliert wurde, gesehen zu werden (cf. Garber, 138). Für Descartes folgen Beharrung und Weitergabe aus seiner Metaphysik von *res extensa* und *res cogitans* und der Unveränderlichkeit Gottes als Schöpfer (Garber, 150f).

Aber obwohl alles, was unsere Sinne jemals in der wahren Welt erfahren haben, offenkundig im Gegensatz zu dem zu stehen schien, was in diesen beiden Regeln [(i) und (ii)] enthalten ist, scheint mir der Grund, der sie mir gelehrt hat, so stark zu sein, daß ich nicht umhin konnte, mich verpflichtet zu glauben, sie in der neuen Welt vorauszusetzen, die ich Ihnen beschreibe. Denn welches festere und massivere Fundament könnte man finden, um eine Wahrheit einzurichten, auch wenn man sie nach Wunsch wählen wollte, als die Festigkeit selbst und die Unveränderlichkeit zu nehmen, die in Gott liegt? Nun ist es so, daß diese beiden Regeln offenkundig allein daraus folgen, daß Gott unveränderlich ist und er, da er immer auf dieselbe Weise handelt, immer dieselbe Wirkung produziert. (AT XI 43,1-14; Le Monde, 61)

Sämtliche die *res extensa* betreffende Entwicklungen können so auf Gott als Wirkursache bezogen werden.

The conservation law for Descartes is not a law that God imposes on the world to further some end; it is intended to be a consequence of the constraints that God's nature imposes on God as an efficient cause of motion in the material world. (Garber, 164)

Beharrung und Weitergabe führen zur intuitiven mathematischen Bestimmbarkeit von aufeinander wirkenden Größen. Damit wird eine Beherrschbarkeit der verursachten Größe durch entsprechende technische Führung möglich. Kann die verursachende Größe gezielt hergestellt werden, ergibt sich notwendigerweise als Wirkung die verursachte in der berechneten Ausprägung. Diese intuitive Erkenntnis ist notwendigerweise allgemein, und muss daher in jeder Welt gelten.

Aber ich werde mich damit begnügen, Sie davon in Kenntnis zu setzen, daß ich außer den drei von mir erklärten Gesetzen nur noch solche voraussetzen will, die unfehlbar aus jenen ewigen Wahrheiten folgen, auf die die Mathematiker gewöhnlich ihre gewissesten und evidentesten Beweise zu stützen: Jene Wahrheiten, sage ich, denen gemäß Gott, wie er selbst uns gelehrt hat, alle Dinge nach Zahl, Gewicht und Maß disponiert hatte und deren Erkenntnis für unsere Seelen so natürlich ist, daß wir weder umhin könnten, sie als unfehlbar zu beurteilen, wenn wir sie deutlich auffassen, noch zweifeln, daß, wenn Gott mehrere Welten erschaffen hatte, diese Wahrheiten in allen diesen genauso wirklich waren wie in dieser hier. (AT XI 47,11-23; Le Monde, 67)

In seiner Abhandlung über die Phänomene in dieser und ihrer Erklärung in jeder möglichen Welt, machte Descartes das Licht zum Leitmotiv. Dieses lieferte aus den ihm zugänglichen Erscheinungen des Lichtes und dessen Wahrnehmung eine physikalisch mögliche Hypothese. Dabei verzichtet Descartes auf mathematische Beschreibungen und erklärt seine Welt rein prosaisch. Das einzige für ein breiteres Publikum publizierte Werk Descartes, welche algebraische Formen enthält, ist *Geometrie*. Auch wenn er in der Vorbemerkung zur *Geometrie* festhält, dass zum Verständnis dieser Schrift geometrische Kenntnisse notwendig sind, ist sie dennoch in Französisch verfasst (cf. AT VI, 368, Vorbemerkung zu Geometrie, 312). Die *Geometrie* ist damit aber nicht die große Ausnahme in Descartes Œuvre. Er entwickelt seine Integration von analytischer Algebra und Analysis parallel zu seiner Erklärung des Lichtes und seiner Wahrnehmung als einer weitere Anwendung seiner Methode. Die algebraischen Formen sind das zu Erklärende, welches im Formalismus seiner an der *mathesis universalis* orientierten Methode entwickelt wird. In *Geometrie* legt er einen Grundstein für die moderne Mathematik als regelbasiertes, formales System, welches abstrakt und losgelöst von jeder sachlichen Einbettung der zu beantwortenden Frage in der Lage ist, methodisch aus den bekannten, fundamental und intuitiv erfassten Gegebenen und deren Relationen in Form von Gleichungen bisher unbekannte Größen zu ermitteln. Wohlers schreibt:

Zudem geht es Descartes in der *Géométrie* gerade um die Anwendung dieser Methode; zumindest wäre dies daraus zu folgern, daß er die *Dioptrique* und die *Météores* inhaltlich, die *Géométrie* dagegen methodisch beschreibt, [...] und es ist einigermaßen beruhigend zu wissen, daß Descartes in seiner *Géométrie* ein allgemeines methodisches Anliegen verfolgt hat und nicht etwa das spezielle inhaltliche Ziel, das absonderliche Pappos-Problem zu lösen (Wohlers 2013, LX).

Für Descartes war das methodische Vorgehen, wie es die Algebra in ihrer analytischen Rückführung auf evidente, einfache Wahrheiten ermöglicht zentral. Jede Verabsolutierung besonderer, Regel basierter Formen des Ausdrucks lehnte er als rhetorisch ab.

2.3.2. Descartes und Pierre Fermat

Während der zu Descartes zeitgenössische Pierre Fermat seine Arbeit strikt an der algebraischen Ausformulierung der analytischen Geometrie orientierte, sah Descartes in dieser Reduktion auf eine Ausdrucksform, nämlich die mathematisch-algebraische, eine Beschränkung. Für ihn ist *Geometrie* ein Anwendungsbeispiel seines methodischen Vorgehens. Er will zeigen, dass seine Methode nicht auf eine bestimmte sprachliche Form, wie jener der Algebra beschränkt ist, sondern auch im normalen Sprachgebrauch angewandt Wissen schafft. Damit steht er in Gegensatz zu Pierre Fermat, welcher physikalische Probleme in algebraischer Form beschreibt. In seinen Briefen an Mersenne stellt Descartes immer wieder fest, dass seiner Meinung nach Fermats streng algebraische Vorgangsweise zu keinem neuen Wissen führe, welches seine prosaisch abgeleiteten Erkenntnisse übersteige. An Mersenne schreibt er am 29.6.1638:

Was Herrn Fermat betrifft, so bestätigt mir seine Vorgehensweise gänzlich die Meinung, die ich von Beginn an hatte, daß er und die in Paris miteinander konspiriert hatten, um zu versuchen, meine Schriften so weit zu diskreditieren, wie sie könnten. Vielleicht weil sie Angst hatten, daß, wenn meine *Geometrie* Zulauf hätte, das wenige, was sie über die Analyse von Viète wissen, links liegen gelassen würde. [...] Ich wundere mich darüber, daß sie es immer noch wagen, mir gegenüber zu prahlen, denn ich wüßte nicht, es jemals unterlassen zu haben, ihnen direkt auf irgend etwas zu antworten, was sie mir eingewandt oder vorgelegt haben. Umgekehrt aber haben sie mir niemals auf irgend etwas geantwortet, sondern haben nur das Thema gewechselt und von Dingen gesprochen, die nicht zur Sache gehören. (AT II 193,1-17; Mersenne, 190f)

Descartes sah die Algebra als Modell für die Methode um neues Wissen zu erlangen. Jeder Erkenntnisgewinn hat klar und deutlich verstanden zu werden um als Basis für weiteres neues Wissen dienen zu können. Syntaktische Festlegung, wie z.B. durch die Regeln der Algebra, dürfen die auf jeder Stufe des Erkenntnisprozesses geforderte Klarheit der Problemstellung an sich nicht verdecken. Die im Verstand erkannte Gewißheit ergibt sich durch die konsequente Anwendung seiner Methode der Deduktionen aus erkannten Gewissheiten und nicht aus der reinen Anwendung von Vorschriften. Gewissheiten sind dann erkannt, wenn sie durch die Funktionen des Verstandes, insbesondere dessen Fähigkeit zu reflektieren und der Einbildungskraft, klar und deutlich geworden sind. Nur solche klaren und deutlichen Gewissheiten sind eine tragfähige Basis für weitere Erkenntnisse.

Nun können aber Schlußfolgerungen, die man aus einem nicht evidenten Prinzip deduziert, niemals evident sein, selbst wenn sie in evidenter Weise aus ihm deduziert wurden (AT VIII/2 8,13-15; Picot, 151)

Diese Klarheit und Deutlichkeit werden im Verstand durch Reflexion auf das bisher Wahrgenommene und Erfahrene im Zusammenhang mit der Einbildungskraft evident. Mit Hilfe der Einbildungskraft werden die intuitiv erfassten einfachen Naturen in Beziehung gesetzt. Diese einfachen Naturen jeder Intuition müssen gedanklich mit ihrem Gegenstand verbunden werden. Die Funktion der Einbildungskraft liegt in der Führung der Gedanken, welche die auf den Gegenstand bezogenen Intuitionen und deren abstrakte Repräsentationen im Verstand mit dem Gegenstand selbst verbunden hält. Mathematische Formulierungen und geometrische Beweisverfahren sind kein Ersatz für diese auf jeder Stufe des Erkenntnisprozesses aufrecht zu erhaltende Gewissheit. Die Geometrie ist ein Werkzeug und kein Selbstzweck.

Die Einbildungskraft lehrt den Verstand also, wie und ob seine abgesonderten Abstraktionen einfacher Naturen *im Objekt* notwendig verbunden sind und verhindert die Gefahr des Sophismus, ihnen einen eigenen Gegenstand zu geben, sie verhindert das Vorurteil einer platonistischen Auffassung von der Geometrie. (Gäbe, 76)

Descartes Beschreibungen setzen Phänomene zueinander in Beziehung auf Basis von zugrunde zu legenden Einheiten. Diese Beziehungen schaffen Kausalitäten, welche das Denken erkennt. Dieses Denken ist von seiner in den *Regulae* beschriebenen Methode bestimmt und folgt diesen erkannten Kausalitäten.

Denken bedeutet aber, die Logik anzuwenden, und insofern die Logik durchgängig gilt, gilt auch das Kausalitätsprinzip als weltliches (reales) Pendant der Logik durchgängig; das Kausalitätsprinzip ist durchgängig gültig, weil es keine Erkenntnis ohne Logik geben kann. (Wohlers 2005, XXXIII)

Für Descartes war die Verwendung der Methode im sprachlichen Ausdruck von besonderer Bedeutung. Was er anhand der *mathesis universalis* erkannt hatte, verwendete er als *methode universalis* für die Beschreibung physikalischer Phänomene. Dabei versuchte er dieses Vorgehen an besonders vielfältigen und schwer vorstellbaren physikalischen Phänomenen zu beschreiben. Im *Entwurf der Methode* veröffentlichte er neben der methodischen Schrift (dem *Discours*) mit der *Dioptrik* seine Beschreibung des Lichtes und mit den *Meteoren* Erklärungen zu atmosphärischen Phänomenen. Im *Discours* beschreibt er unter anderem den Blutkreislauf (cf. AT VI 50,19-52,1; *Discours*, 45). So wie die Erklärungen des Lichts durch *Le Monde* führen, stellt Descartes in den 1644 publizierten *Prinzipien* den Magnetismus als physikalisches Leitmotiv vor, welchen er rein prosaisch und unter Verzicht auf die Mathematik zu erklären versucht. Dies gilt auch für seine Darstellung der Himmelsmechanik:

Tatsächlich scheint Descartes die Vorstellung, die äußere Welt lasse sich mit den Mitteln der Geometrie darstellen, für so selbstverständlich zu halten, daß er es gar nicht mehr für nötig erachtet, seine Vorstellungen durch geometrische Konstruktionen zu untermauern.

Himmelsmechanik: Das haben andere für ihn erledigt, und Descartes nimmt darauf Bezug, ohne auch nur eine einzige eigene Berechnung oder Konstruktion anzustellen. (Wohlers 2005, XXVII f)

Anhand der von Descartes zur Beschreibung gewählten Phänomene der Welt zeigt er, wie seine Methode aus intuitiven Feststellungen, schrittweise erweiternd, nicht Augenscheinliches erklärbar macht. Descartes' Fokus bei der Erklärung physikalischer Phänomene lag auf der methodischen Verwendung von sprachlichen Ausdrücken und deren schrittweiser Deduktion aus gesicherten Erkenntnissen aber nicht in der formalisierten algebraischen Beschreibung durch mathematische Ausdrücke. Zu seiner eigenen Arbeit zur Algebra schreibt er mit Bezug auf einen Kritiker seiner Erklärung des Sehens am 25.01.1638 an Mersenne:

Er ist ein zu kluger Kopf, um sich nicht auf die Seite der Wahrheit zu stellen. Es würde mir keinerlei Schwierigkeit bereiten, ihm meine alte Algebra zu schicken, wäre das nicht eine Schrift, die es mir nicht zu verdienen scheint, angesehen zu werden (AT I 516,22-27; Mersenne, 143)

Diese „nicht ansehnswerte“ Schrift über die Algebra ist scheinbar jene, welche Descartes gegenüber Beeckman 1628 als „Perfektion der Geometrie“ bezeichnete. Heute verschollen, war sie vermutlich Teil der von Descartes bis 1628 zusammengestellten *Regulae* (cf. Wohlers 2011a, XXVIII).

Im Briefwechsel mit Mersenne sucht Descartes die Meinung und Kritik anderer Philosophen, Physiker und Mathematiker zu seinen Überlegungen und Erklärungen. Öfters fordert er die Veröffentlichung dieser Kritiken, damit die Kritiker in der Öffentlichkeit zu ihren Aussagen Position beziehen müssen. Dabei ist er so sehr von der fundamentalen Richtigkeit seiner eigenen Erklärungen überzeugt, dass er es für Verschwendung seiner Zeit hält auf diese für ihn falschen, aus seiner Sicht nur rhetorischen Einwände einzugehen. Am 18.1.1638 schreibt er an Mersenne:

Ich habe kein so großes Verlangen danach, mir den Beweis von Herrn Fermat gegen das anzusehen, was ich über Brechung geschrieben habe, als daß ich Sie bitten wollte, ihn mir mit der Post zu schicken. (AT I 480,16-20; Mersenne, 139)

Dabei lässt ihn seine Ablehnung angeblich nur rhetorischer Muster auch über das Muster seiner eigenen Methode stolpern. Die hinreichende Ordnung, welche notwendiger Teil seiner Methode ist, lässt sich in rein prosaischer Form nicht erreichen. Descartes vergleicht die Wirkung von Reflexion und Lichtbrechung am Übergang zweier Medien mit Geschützkuugeln. Diese können von einer Wasseroberfläche reflektiert werden, wenn der Einfallswinkel extrem flach ist (cf. AT VI 99,20-28; Dioptrik, 86). Für ihn ist Licht eine extrem feine Materie, welche von der Lichtquelle mit Druck und Geschwindigkeit auf und in die beleuchteten Körper gepresst wird (cf. AT VI 86,21-35; Dioptrik, 75f). Descartes Ablehnung der Kritik Fermats an

der *Dioptrik* ist falsch und tatsächlich wird die Brechung von Licht durch das Fermat'sche Prinzip⁷ richtig repräsentiert.

Der *Entwurf der Methode* wurde von Descartes im März 1636 an Mersenne angekündigt. Damit sollte auch die *Geometrie* für ein breiteres Publikum zugänglich sein:

Und damit Sie wissen, was drucken zu lassen ich Lust habe: Es werden vier Abhandlungen ganz auf Französisch sein unter dem Obertitel: *Das Projekt einer Universalwissenschaft, die unsere Natur auf die höchste Stufe ihrer Vollkommenheit erheben kann. Mit der Dioptrik, den Meteoren und der Geometrie, worin die interessantesten Stoffe, die der Autor hat auswählen können, um einen Nachweis für die von ihm vorgelegte Universalwissenschaft zu liefern, so erklärt sind, daß selbst diejenigen, die überhaupt nicht studiert haben, sie verstehen können.* In diesem *Projekt* lege ich einen Teil meiner Methode offen und versuche die Existenz Gottes und der vom Körper getrennten Seele zu beweisen und füge dem mehrere andere Dinge hinzu, die, wie ich glaube, dem Leser nicht unangenehm sein werden. (AT I 338,31-49; Mersenne, 119)

Descartes möchte mit dem *Entwurf der Methode* explizit ein Publikum jenseits der universitären Eliten ansprechen, wie er am Ende des *Discours* erklärt.

In diesem Kapitel habe ich gezeigt, dass für Descartes die Schaffung neuen Wissens einerseits (i) Offenheit in Wahrnehmung, Erfassung und Beschreibung der Problemstellung bedingen, andererseits aber (ii) methodische Strenge einzuhalten ist. Für den ersten Punkt ist die Kenntnis aller relevanten Umstände im Sinne seiner hinreichenden Ordnung notwendig und eine reine Formalisierung als Beschränkung der Offenheit abzulehnen. Bei letzterem sind Gewissheit und das Vermeiden von Scheingenauigkeiten relevant. Das Urteil des Verstandes, Gewissheit erlangt zu haben, bedingt Reflexion. Mit dem *Entwurf der Methode* behandle ich im nächsten Kapitel die Bedeutung der Reflexion in der Methode und darauf aufbauend ihre Anwendung in der Formalisierung der Geometrie durch die Algebra. Durch diese methodische Entwicklung konnte die Wissenschaft schließlich die seit der Antike gegebene „Stopp-Stufe“ mathematischer Beweismöglichkeiten verlassen.

2.4. *Entwurf der Methode* und die Entwicklung der Algebra in der *Geometrie*

Descartes als Entwurf (i.e., „discours“) formulierte Darstellung seiner Methode folgen drei Essays, die deren Anwendung zeigen. Im *Discours* wird zunächst die dem menschlichen Erkenntnisvermögen adäquate Methode beschrieben. Die *Dioptrik* wendet die Methode auf das Licht, dessen Wahrnehmung und Brechung an. *Meteore* widmet sich Phänomenen, welche sich in und durch die Atmosphäre ergeben. *Geometrie* zeigt das analytische Vorgehen und die daraus

⁷ Das Fermat'sche Prinzip besagt, dass der optische Weg den Licht nimmt, immer so gestaltet ist, dass sich seine Laufzeit bei kleinen Variationen des Weges kaum ändert. Damit die Laufzeit in etwa konstant bleibt, muss die Ableitung der Strecke nach der Zeit in etwa null sein und die Strecke daher einen Extremwert annehmen: sie ist entweder ein Minimum oder Maximum.

folgende geordnete Synthese als Anwendung der Algebra auf geometrische Probleme. Die Benennung des gesamten Werkes als “Entwurf der Methode” hatte bereits Befremden ausgelöst. Mersenne schreibt diesbezüglich an Descartes am 15.2.1637:

Was hingegen die erste Abhandlung über die Methode, in den Wissenschaften vernünftig vorzugehen, betrifft, so will der Herr Kanzler sie nicht in das Privileg mit einbeziehen, wenn er sie nicht zu Gesicht bekommt, weil sie in einem Discours besteht. (AT I 661,32-36; Mersenne, 122)

Zur Wahl dieses Titels antwortet ihm Descartes am 20.04.1637 wie folgt:

Aber ich konnte nicht recht verstehen, was Sie bezüglich des Titels einwenden; denn ich sage nicht Abhandlung über die Methode, sondern Entwurf der Methode, was dasselbe ist wie Vorwort oder Ankündigung bezüglich der Methode, um zu zeigen, daß ich nicht die Absicht habe, sie zu lehren, sondern nur, darüber zu sprechen. Denn wie man an dem sehen kann, was ich darüber sage, besteht sie mehr in Praxis als in Theorie, und ich nenne die folgenden Abhandlungen Essays dieser Methode, weil ich behaupte, daß die Dinge, die sie enthalten, ohne die Methode nicht gefunden werden konnten und man durch sie erkennen kann, was die Methode wert ist. So habe ich auch in die erste Erörterung etwas über Metaphysik, Physik und Medizin hineingebracht, um zu zeigen, daß sie sich auf alle Arten von Stoffen erstreckt. (AT I 349,13-26; Mersenne, 124f)

Gemeinsam bilden die vier Schriften den 1637 veröffentlichten *Entwurf der Methode*. Diesem folgte 1641 die Publikation der *Meditationen*, in welche Descartes seine Methode anwandte und so zu seiner dualistischen Ontologie mit der realen Unterscheidung des Geistes vom Körper kam (AT VII 71,11-12; *Meditationen*, 79). In einem Brief an Mersenne vom 28.1.1641 hält er diesen Zusammenhang fest.

Ich glaube also, daß es, wenn ich meine *Metaphysik* drucken lasse, gut sein wird, diesen Anfang zu bringen, damit man sieht, daß das, was ich in meinem *Entwurf der Methode* geschrieben habe, genau dasselbe ist, was ich darin ausführlicher erkläre. (AT III 297,1-7; Mersenne, 443)

In der inhaltlichen Ausweitung seiner Methode auf reale Phänomene verzichtet er auf die algebraische Ausformulierung. Stattdessen zeigt Descartes, wie diese „mathematische Verpackung“ als universelle Vorgangsweise Verwendung finden kann. Dazu bestimmt er in der *Dioptrik* das Phänomen der optischen Wahrnehmung als spezielle Problematik. Anhand der Elaboration dieser Problematik zeigt er, wie seine Methode umgesetzt werden kann. Das Licht dient als Objekt um zu präsentieren, wie sich geometrische Dinge wie Winkel und Ausdehnung von Farben und Helligkeit nachvollziehbar analysieren lassen und um zu intuitive fassbaren Größen zu kommen (AT VI 81,1; *Dioptrik*, 71). In erzählerischer Form zeigt Descartes in der *Dioptrik*, wie aus der Analyse der Beziehungen von den erkannten Größen sukzessive das Unbekannte erschlossen werden kann. Während Descartes Korrespondenz mit Mersenne bereits 1630 neben der Darlegung seiner Physik auch die Essays zu *Meteore* und *Dioptrik* vorstellt, kommt er erst in einem Brief vom 3.5.1632 auf die *Geometrie* zu sprechen in welcher er das aus der Antike tradierte geometrische Problem des Pappus mit Hilfe der Algebra löst.

Ich wüßte gerne, ob Sie ihm die Frage des Pappus vorgelegt haben werden, die ich Ihnen geschickt hatte. Denn ich werde Ihnen sagen, daß ich fünf oder sechs Wochen aufgewendet habe, ihre Lösung zu finden, und wenn irgend jemand anders sie findet, werde ich nicht glauben, daß er unwissend in Algebra ist. (AT I 244,3-8; Mersenne, 90)

Die seiner Methode inhärente Reflexivität macht sie als abstrakten Formalismus für alle Fragestellungen anwendbar. Durch Reflexion mittels der der Geisteskraft zur Verfügung stehenden Erfahrungen kann der Verstand urteilen, ob er etwas klar und deutlich erkannt und so Gewissheit erlangt hat. Sie ist daher evident notwendig um von einer „Stopp-Stufe“ den nächsten Schritt zu neuem Wissen setzen zu können. Für diese Gewissheit ist das eigene Lernen und Üben Voraussetzung, um dann zu Neuem zu gelangen. So wie Descartes zuerst für sich die Algebra von den Schnörkeln der Unklarheit befreit hat, hat er sie danach zur Führungsrolle in der Mathematik gebracht. Im Folgenden zeige ich, wie diese Reflexivität in allen Teilen des *Entwurfs der Methode* gewahrt ist.

2.4.1. Reflexivität im *Discours*

Descartes hat den *Discours* in sechs Teilen verfasst. Im *Brief an Picot* fasst er den Inhalt zu zwei Blöcken zusammen als „die Hauptregeln der Logik sowie einer unvollkommenen Moral [...], der man vorläufig folgen könne, solange man keine bessere weiß“ (AT VIII/2 15,12-15; Picot, 163).

Zunächst stellt Descartes seine Methode als aus seiner persönlichen Erfahrung entsprungen vor, gemäß der der gesunde Menschenverstand jedem Menschen gleich zukommt, dessen Anwendung aber unterschiedlich ist und so zu Konflikten führt. Die Mathematik ist für ihn das Muster um in einheitlicher Anwendung, also einer Methode folgend, das Wahre vom Falschem zu unterscheiden.

Vor allem gefiel mir die Mathematik wegen der Gewißheit und Evidenz ihrer Begründungen, aber von ihrer wahren Anwendung bemerkte ich noch nichts. Ich dachte, sie diene nur den mechanischen Techniken, und war deshalb erstaunt, daß man auf ihren Fundamenten, die doch so fest und zuverlässig waren, nichts Höheres aufgebaut hatte. (AT VI 7,24-9; *Discours*, 7f)

Das Fundament sicherer Erkenntnis liegt für den gesunden Menschenverstand im methodischen Vorgehen und nicht in der Übernahme tradierter Meinungen.

Was die anderen Wissenschaften betrifft, so urteilte ich, daß, da sie ihre Prinzipien der Philosophie entnehmen, auf so wenig festen Fundamenten nichts hatte aufgebaut werden können, das zuverlässig war. (AT VI 8,30-33; *Discours*, 8)

Im zweiten Kapitel stellt er die Hauptregeln seiner Methode vor, welche anstelle von Syllogismen, welche nur Bekanntes erklären oder Nichtwissen verschleiern, einer die Anschauung überfordernden Geometrie oder einer opaken Algebra in vier Maximen das

Auslangen findet, um behutsam in der Erkenntnis der eigenen Unzulänglichkeiten schrittweise im eigenen Verstand ein tragfähiges Fundament des wahren Wissens zu schaffen.

Was sodann die Analysis der Alten und die Algebra der Modernen betrifft, so ist, abgesehen davon, daß beide sich nur auf sehr abstrakte Materien erstrecken, die keinerlei Anwendung zu haben scheinen, die erste immer so sehr an die Betrachtung von Figuren geknüpft, daß sie den Verstand nicht üben kann, ohne die Anschauung sehr zu ermüden; und die zweite hat man in einem solchen Ausmaß an gewisse Regeln und Symbole gebunden, daß sie dadurch zu einer verworrenen und dunklen Technik wurde, die den Geist behindert, nicht aber zu einer Wissenschaft, die ihn fördert. (AT VI 17,25-35; Discours, 16)

Statt von den einzelnen Wissensgebieten abhängiger Vorgangsweisen sieht Descartes die sicherste Methode der Anwendung des gesunden Menschenverstands für neues Wissen in der Reduktion auf intuitiv fassbare Regeln. Deren Einhaltung verspricht – wie es der Klarheit und Deutlichkeit jeder Intuition innewohnt – sicheres Wissen.

Dies war die Ursache, weshalb ich dachte, es müsse eine andere Methode gesucht werden, die die Vorteile dieser drei [Logik, geometrische Analyse, Algebra] einbezieht, aber frei von ihren Mängeln wäre. Und so wie die Menge der Gesetze oft nur Entschuldigungen für die Laster liefert, so daß ein Staat sehr viel besser geregelt ist, wenn er nur wenige hat, sie aber ganz streng befolgt werden, ebenso glaubte ich, anstelle der großen Anzahl von Vorschriften, aus denen sich die Logik zusammensetzt, mit den folgenden vier genug zu haben, vorausgesetzt, ich würde den festen und unwiderruflichen Entschluß fassen, sie nicht ein einziges Mal zu übertreten. (AT VI 17,35-18,15; Discours, 16f)

Im Unterschied zu den tradierten Techniken fordert Descartes Methode Gewissheit auf jeder Stufe des Erkenntnisprozesses. Im *Discours* reduziert er die methodischen Regeln der *Regulae* und die Anforderungen von Logik, Geometrie und Algebra auf vier Maximen (cf. AT VI 18,16-19,5; Discours, 17; Gäbe, 66):

- (i) Nur klar und deutlich Erkanntes darf als wahr akzeptiert werden. Man darf nichts für wahr halten, was nicht klar und deutlich ist und was bezweifelt werden kann. Alles, was nur glaubhaft, aber nicht gewiss ist, ist in Zweifel zu ziehen. Nur die eigene Vernunft kann einem die Sicherheit geben etwas klar und deutlich erkannt zu haben.
- (ii) Problemstellungen müssen analytisch vollständig und nachvollziehbar auf einfachstes, klar und deutlich Erfassbares zurückgeführt werden. Diese sind die einfachen Naturen, welche notwendigerweise war sind.
- (iii) Durch schrittweises Einsetzen des neu Erfassten ist im Rückweg von den einfachsten, klar und deutlich Erfassten die Problemstellung synthetisch zu lösen. Die Zusammensetzung des komplexen Gegebenen der Welt ist vom Verstand unter Führung der Einbildungskraft zu bewerkstelligen. Die Ordnung der Erfassung grundlegender Intuitionen gemäß (ii) ist notwendige Bedingung für diese Synthese.

- (iv) Die Lösung ist anhand der festgehaltenen Ordnung hinsichtlich ihrer Vollständigkeit zu verifizieren. Erst diese Verifikation bestätigt die gefundene Problemlösung als neu geschaffenes Wissen.

Wie schon in der Regel IV und Regel VIII beschrieben, sind die Werkzeuge für diese Vorgangsweise durch diese Vorgangsweise selbst methodisch zu entwickeln. Descartes hat die Werkzeuge zur Entwicklung seiner Methode aus der Mathematik, als der von ihm als sicherster erkannten Wissenschaft, herausgeschält.

Zog ich in Betracht, daß von all jenen, die bislang in den Wissenschaften nach Wahrheit geforscht haben, allein die Mathematiker einige Beweise, d.h. einige gewisse und evidente Begründungen hatten finden können, zweifelte ich nicht im Geringsten, daß genau mit diesen von ihnen geprüften Dingen begonnen werden mußte. (AT VI 19,19-24; Discours, 17f)

Während Descartes bis 1629 den Formalismus der cossischen Symbole der von ihm abgelehnten Rechenmeister benutzte, verwendete er für die *Geometrie* die moderne, von Viète vorgeschlagene Schreibweise der Algebra. Wie schon in der Regel IV festgehalten, ist die traditionelle Algebra mit den Mitteln der *mathesis universalis* von ihren Schnörkeln zu befreien. Diese Befreiung ist Descartes durch Beseitigung seiner eigenen Unklarheiten in Bezug auf die Algebra gelungen. Seine Methode ist universell und nicht auf einzelne Disziplinen hin ausgerichtet. Daher befruchten sich die Disziplinen als eine Wissenschaft in einer übergreifenden Weise. Im *Discours* schreibt er zur Befreiung von Geometrie und Algebra von den ihnen inne sitzenden Mängeln:

Durch dieses Mittel entnahm ich der geometrischen Analyse und der Algebra das Beste und korrigierte alle Mängel der einen durch die andere. (AT VI 20,22-24; Discours, 18)

Das gegenseitige Herausschälen des Besten beider Disziplinen war ein explizit reflexiver Prozess, in welchem im Weg der Bestimmung der Methode diese mathematisch geformt und schließlich zur Integration von geometrischer Analyse und Algebra als einer allgemeinen mathematischen Lösung möglich wurde. Der dem bewussten Erkennen zukommende Lernprozess spiegelt den schrittweisen Erkenntnisgewinn aus der ununterbrochenen Denkbewegung der Deduktion.

So kann zum Beispiel ein in Arithmetik unterrichtetes Kind, wenn es eine Addition entsprechend ihrer Regeln vorgenommen hat, sicher sein, in bezug auf die von ihm geprüfte Summe alles gefunden zu haben, das der menschliche Geist finden kann; denn schließlich enthält die Methode, die lehrt, der wahren Ordnung zu folgen und alle Umstände dessen, was man sucht, genau aufzuzählen, alles, was den Regeln der Arithmetik Gewißheit verleiht. Was mich aber an dieser Methode am meisten zufriedenstellte, war, daß ich durch sie sicher war, in allem meine Vernunft zu gebrauchen, wenn nicht vollkommen, so doch zumindest so gut, wie es in meiner Macht stand; abgesehen davon, daß ich, wenn ich sie praktizierte, empfand, daß mein Geist sich nach und nach daran gewöhnte, seine Objekte schärfer und deutlicher zu verstehen. Da ich die Methode überhaupt nicht an irgendeine besondere Materie gebunden hatte, versprach ich mir außerdem,

sie ebenso nutzbringend, wie ich sie auf die Schwierigkeiten der Algebra angewandt hatte, sie auch auf die anderer Wissenschaften anzuwenden. (AT VI 21,10-28; Discours, 19)

Im dritten Teil des *Discours* (cf. AT VII 22,16-29; Discours, 21) gibt Descartes Empfehlungen, wie in einer imperfekten Welt bei Unsicherheit vorgegangen werden soll. Während in der Erkenntnistheorie der radikale Zweifel am Beginn steht, ist im praktischen Leben von dem auszugehen, was sich bisher lokal bewährt hat. Es ist besser von einer lokal akzeptierten Position in einer Richtung weiterzugehen und nicht mit dem Schicksal zu hadern, sondern so gut es geht mit den Umständen umzugehen. Diese Lektion hat Descartes in der konfliktären Umwelt des 17. Jahrhunderts erfahren, wie aus seinem pragmatischen Rückzug von *Le Monde* geschlossen werden kann und wie er selbst seinem damaligen Sitz in Leyden mit dem ungestörten Aufenthalt dort begründet. Er resümiert:

Ich dachte [...], ich könnte nichts Besseres tun, als[...] mein ganzes Leben darauf zu verwenden, meine Vernunft zu fördern, und entsprechend der Methode, die ich mir vorgeschrieben hatte, in der Erkenntnis der Wahrheit soweit voranzukommen, wie ich konnte. (AT VI 27,5-11; Discours, 24f)

Im vierten Teil des *Discours* (cf. AT VI 35,7-36,4; Discours, 32) zeigt Descartes, wie er die Existenz Gottes und der menschlichen Seele aus der Idee einer „Idee“ beweist. Er beginnt mit dem Fundament seiner eigenen Existenz:

Ich bemerkte, daß diese Wahrheit: Ich denke, also bin ich, so fest und gesichert war, daß auch die verrücktesten Voraussetzungen der Skeptiker nicht fähig waren, sie zu erschüttern, und deshalb urteilte ich, sie ohne Bedenken als erstes Prinzip der von mir gesuchten Philosophie annehmen zu können. (AT VI 32,18-23; Discours, 29f)

Dieses laut Descartes sich seiner selbst notwendigerweise bewusste denkende Wesen ist an eine Seele gebunden und diese muss einer in ihrer Vollkommenheit größeren Ursache entspringen. Die Idee der größten Vollkommenheit ist Gott. Eine Eigenschaft von Vollkommenheit muss ihre Existenz sein, ohne die sie Nichts wäre:

Kehrte ich dagegen dazu zurück, die Idee zu prüfen, die ich von einem vollkommenen Sein hatte, fand ich, daß die Existenz in ihm in derselben Weise – oder sogar noch evidenter – enthalten war wie es in der Idee eines Dreiecks enthalten ist, daß seine drei Winkel zwei rechten Winkeln entsprechen; (AT VI 36,20-25; Discours, 33)

Da diese vollkommene Idee weder erfahrbar noch konstruiert ist, muss sie als angeborene Idee von Anbeginn in der Seele vorhanden sein und als solche eine Fundierung haben (cf. Brief vom 16.Juni 1641, AT 383,8-20; Mersenne, 466)

Denn die Vernunft diktiert uns nicht, daß es das, was wir so sehen oder vorstellen, tatsächlich gibt; aber sie diktiert uns sehr wohl, daß alle unsere Ideen oder Grundbegriffe irgendein Fundament von Wahrheit haben müssen: denn es wäre nicht möglich, daß Gott, der ganz vollkommen und ganz tatsächlich ist, sie uns ohne ein solches Fundament eingegeben hätte. (AT VI 39,35-41; Discours, 35f)

Eine perfekte Idee kann ihrem Anspruch auf Perfektion nur dann gerecht werden, wenn sie existiert. Etwas das nicht ist, kann nicht perfekt sein. Und aus dieser im Begriff der Perfektion immanenten notwendigen Existenz, schließt Descartes, Gott existiert. In einem Brief vom Juli 1641 schreibt Descartes an Mersenne:

Ich habe den Nachweis der Existenz Gottes aus der Idee herausgezogen, die ich in mir von einem höchst vollkommenen Seienden finde, die der gewöhnliche Grundbegriff ist, den man davon hat. (AT III 395,34-37; Mersenne, 474)

Mit dem Bewusstwerden dieser Idee eines höchsten Seienden wie es das „ich in mir“ ausdrückt, vermischt Descartes die sprachlichen Ebenen, welche die Idee Gottes ausdrücken. Für Descartes ist die in mir als angeboren bestimmte Idee Gottes von mir in mir selbst zu finden. Das Auffinden einer Idee ist ein Denktakt. Für Descartes ist jeder Denktakt auch ein Akt des bewussten Bedenkens des eigenen Denkens, wie ich oben in 1.3. festgestellt habe. Es ist nicht die Idee an sich, sondern erst das Bewusstsein dieser Idee, welche die Existenz der Idee begründet.

Der fünfte Teil des *Discours* stellt die Welt der Körper vor und zeigt mit der Körpermechanik, Blutkreislauf und die Herzbewegung wie erst aus der richtigen Lage einzelner Dinge ein mechanisch funktionierendes organisches Ganzes entsteht (cf. AT VI, 46,27-48,5; *Discours*, 41f). Zum einen zeigt er wie eine räumliche Anordnung einer Funktionsweise dient, um den Blutkreislauf als transportierende Bewegung aufrechtzuerhalten. Aus diesem in der räumlichen Anordnung der Körperorgane realisierten „Bauplan“ lässt sich die Mechanik des Körpers als Maschine verstehen, die – den Gesetzen der Natur folgend – mathematisch beschrieben werden kann.

Damit außerdem diejenigen, die die Kraft der Beweise der Mathematik nicht erkennen und nicht daran gewöhnt sind, wahre Gründe von wahrscheinlichen zu unterscheiden, es nicht wagen, dies zu leugnen, ohne es zu prüfen, will ich sie davon in Kenntnis setzen, daß die Bewegung, die ich gerade erklärt habe, genauso notwendig allein aus der Anordnung der Organe folgt, die man mit dem Auge am Herzen sehen, und der Wärme, die man dort mit den Fingern empfinden, und außerdem der Natur des Bluts, das man aus Erfahrung erkennen kann, wie die Bewegung einer Uhr aus der Kraft, der Lage und der Gestalt ihrer Gegengewichte und Räder. (AT VI 50,9-19; *Discours*, 44)

Es besteht jedoch ein großer Unterschied zwischen den Organen des Körpers und der Vernunft bzw. Seele. Dabei ist ein Körper einem Automaten vergleichbar, wie er am 30.7.1640 an Mersenne schreibt.

Ich habe in meiner Welt ganz genau deduziert, daß sich in den Körpern der Tiere alle Organe finden, die für einen Automaten erforderlich sind, um alle jene unserer Tätigkeiten nachzuahmen, die wir mit den Tieren gemeinsam haben. (AT III 121,20-24; Mersenne, 367)

Während die Vernunft für alle Problematiken als „Entscheidungsorgan“ in allgemeinster Form einsetzbar ist, kommt jedem Körperorgan eine bestimmte Funktion zu, die auch von ihrer Lage abhängt. Organe haben spezifische Funktionen, welche dem Organismus dienen und diese Funktionen gemäß ihrer Anbindung an den Organismus erfüllen. Demgegenüber funktioniert die Vernunft analog zu einer heutigen Software in Computern losgelöst von einer konkreten räumlichen Lage der Software selbst. Die Schnittstellen zwischen Software und Computer entsprechen der „Verpackung“, welche die Wechselwirkung zwischen beiden ermöglichen. Der Computer funktioniert als Universalmaschine. Auch der Körper ist universell verwendbar und von sich aus über seine Sinnes- und Körperorgane aktiv. Descartes bezeichnet die Vernunft bzw. Seele als „Universalinstrument“, welches analog zur Software mit dem Körper interagiert.

Denn anders als die Vernunft, die ein Universalinstrument ist, das bei allen Arten von Begebenheiten benutzt werden kann, benötigen diese Organe eine ganz bestimmte Anordnung für jede besondere Tätigkeit, [...]. (AT VI 57,9-12; Discours, 50)

Die den Gesetzen der Natur folgenden Mechaniken der *res extensa* können dabei in ihrer Berechenbarkeit zuverlässiger sein als die von der menschlichen Vernunft geleiteten Tätigkeiten.

So sieht man ja auch, daß eine Uhr, die nur aus Rädern und Triebfedern zusammengesetzt ist, die Stunden zählen und die Zeit genauer messen kann als wir mit all unserer Klugheit. (AT VI 59,5-7; Discours, 51)

Die *mathesis universalis* mit ihrer auf Maß und Ordnung beruhenden Fundierung wird so zur Methode, auch das Lebendige zu beschreiben. Dabei ist die Seele aber nicht von den Mechanismen der *res extensa* abhängig, sondern bedient sich nur der Sinne, um die Welt wahrzunehmen und darüber innerhalb der Einheit der Wissenschaft nachzudenken (cf. Cassirer, 54).

Im letzten Teil des *Discours* (cf. AT VI 60,23-61,2; Discours, 53) legt Descartes seine Gründe dar, den *Entwurf der Methode* zu publizieren, obwohl er sich keinen Diskussionen aussetzen will und Sorge vor falschen Interpretationen hat. Wissenschaftlicher Fortschritt trägt zur Verbesserung von Lebensqualität bei. Für Descartes ist wissenschaftlicher Fortschritt nur auf Basis einer Methode möglich. Daher sieht er es für notwendig an diese Methode zu publizieren, und so zu besserer Lebensqualität beizutragen.

Das ist nicht nur zu wünschen für die Erfindung einer unendlichen Anzahl von Kunstfertigkeiten, die bewerkstelligen würden, daß man ohne jede Mühe die Früchte der Erde und alle Annehmlichkeiten genießen könnte, die sich auf ihr finden, sondern in erster Linie auch für die Erhaltung der Gesundheit, die ohne Zweifel das erste Gut und das Fundament aller anderen Güter in diesem Leben ist. (AT VI 61,42-48, 54f)

Die unerschöpfliche Zahl von Dingen erfordert es, den wissenschaftlichen Fortschritt auf eine effektive Art zu suchen, um innerhalb der vorhandenen Zeit möglichst viele Antworten zu finden. Durch Veröffentlichung der Methode könnte es zu einer Vergeudung von Zeit kommen, da Descartes sich dann mit Kritiken auseinandersetzen müsste, die ihm Zeit kosten.

Ich hätte aber ohne Zweifel etliche Gelegenheiten, sie zu vergeuden, wenn ich die Fundamente meiner Physik veröffentlichte: Denn obwohl diese Fundamente fast alle so evident sind, daß man sie nur einzusehen braucht, um sie zu glauben, und es keines gibt, von dem ich nicht denke, Beweise liefern zu können, sehe ich dennoch voraus, daß ich, weil sie sich unmöglich mit allen verschiedenen Meinungen anderer Menschen vereinbaren lassen, zu oft durch die Einwände abgelenkt wäre, die sie hervorrufen würden. (AT VI 68,4-12; Discours, 59)

Descartes gibt zu, dass mehr Menschen zu mehr Wissen beitragen können und dass auch seine Arbeit kritisiert werden kann. Allerdings lässt seine Perspektive wenig Raum für derartige Einwände, da er in sich selbst den strengsten Kritiker sieht.

2.4.2. Evidenz durch Kritik und Experimente

Seine Reflexion auf seine eigene Arbeit ist für ihn Kritik genug.

Ich habe deshalb so gut wie niemals einen Kritiker meiner Meinungen getroffen, der mir nicht weniger unerbittlich oder weniger unparteiisch erschienen war als ich selbst. (AT VI 69,3-6; Discours, 60)

Die Angst, sinnlose Antworten geben zu müssen ist groß und vor seinen Nachlassverwaltern warnt er schon jetzt:

Bei dieser Gelegenheit ist es mir ein Anliegen, unsere Enkel zu bitten, niemals zu glauben, daß etwas von mir stammt, nur weil man es behauptet, sondern nur, wenn ich es selbst verbreitet habe. (AT VI 69,29-32; Discours, 61)

Descartes Methode der Reduktion komplexer Problemstellungen durch sukzessives Hinterfragen bis zum Erreichen intuitiver, allgemeiner Gewissheiten und der Konstruktion der Lösung des Problems aus der Rückabwicklung dieser Fragen ist eine Erzählung, welche losgelöst von speziellen sprachlichen Werkzeugen allein in ihrer Form begründet ist. Die Bestätigung der speziellen Antwort gibt die Erfahrung z.B. mittels Experimenten. (cf. Garber, 117f). Deren Ergebnisse müssen sich aus den deduktiv gewonnenen Hypothesen erklären lassen. In den *Meteoren* und der *Dioptrik* erklärt er das Wesen optischer Erscheinungen aus der von ihm formulierten Hypothese der feinen, durchdringenden Substanz des Lichtes und den beobachteten Brechungswinkeln. Gemachte Erfahrungen können so die gemäß seiner Methode gewonnenen Hypothesen anschaulich abbilden. Experimente erlauben „Bilder“ zu schaffen, welche das deduktiv aus Intuitionen gewonnene Wissen wie ein Werkzeug anschaulich machen.

While experiment comes in, it is just an auxiliary to the intuition and deduction. Reason would seem to reign, with experiment in the subordinate position of a trusted advisor, at best. (Garber, 120)

Auch wenn Descartes sich selbst als erfahrensten Forscher auf der Suche nach neuen Wahrheiten sieht, weiß er aber, dass ihm Zeit und Mittel fehlen, diese mit Experimenten zu belegen. Experimente müssen so aufgebaut sein, dass sie allgemein gültige Antworten liefern und nicht nur die Meinung des Experimentators bestätigen.

Was die Experimente betrifft, die dazu beitragen, so kann freilich ein einzelner Mensch sie nicht alle allein anstellen. (AT VI 72,20-21; Discours, 53)

Der Aufwand an Zeit, um auf Einwände oder schlechte Experimente zu reagieren wurde von Descartes so hoch eingeschätzt, dass er die Publikation seiner Methode ursprünglich vermeiden wollte:

Alle diese Betrachtungen zusammengenommen waren die Ursache, weshalb ich vor drei Jahren die Abhandlung, die ich in den Händen hatte, gar nicht verbreiten wollte, und sogar den Entschluß hatte, zu meinen Lebenszeiten keine mehr zu veröffentlichen, die so allgemein war und durch die man die Fundamente meiner Physik verstehen könnte. Seitdem aber hat es wiederum zwei andere Gründe gegeben, die mich verpflichtet haben, hier einige Skizzen anzufügen, und vor der Öffentlichkeit Rechenschaft über meine Tätigkeiten und meine Pläne abzulegen (AT VI 74,3-12; Discours, 64)

Diese Gründe sind zum einen Descartes Angst, dass früher in Teilen bekannt Gewordenes als unfertig, oder zurück genommen seiner Reputation schadet und zum anderen, „weil ich die unendliche Anzahl von Experimenten, die ich benötige, unmöglich ohne die Hilfe anderer anstellen kann“ (AT VI 75,3-6; Discours, 65). Daher ist es wichtig, die Suche nach Wissen auf eine breite Basis zu stellen und die Methode zu veröffentlichen. Zu guter Letzt kommt er mit Bezug auf die in der *Dioptrik* und den *Meteoren* beobachteten Wirkungen auf das Prinzip der Kausalität und seine Abbildung zu sprechen.

Auch darf man sich nicht vorstellen, daß ich dabei den Fehler begehe, den die Logiker einen Zirkelschluß nennen; denn da die Erfahrung den größten Teil dieser Wirkungen sehr gewiß macht, dienen die Ursachen, aus denen ich sie deduziere, nicht so sehr dazu, sie zu beweisen als sie zu erklären; vielmehr sind es ganz im Gegenteil die Ursachen, die durch die Wirkungen bewiesen werden. (AT VI 76,15-21; Discours, 66)

Auch wenn die Ursache die Voraussetzung jeder Wirkung ist, so ist sie doch oft die Unbekannte, auf welche aus der Wirkung als Bekannte geschlossen wird. Im Verstand wird die spezifische Problemstellung auf die einfachsten Grundbegriffe hin abstrahiert. Die Darstellung dieser abstrakten Beziehung erfolgt mittels der Einbildungskraft, welche diese Beziehung in eine den Sinnen zugängliche übersetzt. Die Einbildungskraft führt dabei den Verstand in der Synthese der erkannten einfachen Naturen in Bezug zur Problemstellung (cf. Gäbe, 76)

Der erste Schritt bei der Untersuchung eines die empirische Welt betreffenden Problems besteht darin, von dem besonderen Gegenstande dieses Problems zu *abstrahieren* (Regel 13). Dies ist die methodische Funktion des Verstandes. Der zweite Schritt besteht darin, das Problem auf die reale Ausdehnung der Körper zu *übertragen*. Dies ist die methodische Funktion der Einbildungskraft (Regel 14). Nun dieses Verfahren ist die Imitation – auf ihren allgemeinsten Begriff gebracht. (Gäbe, 62)

Das Mittel der Abbildung dieser Beziehung ist dabei die mathematische Aufschreibung der mit der Wechselwirkung korrespondierenden Veränderung analog zu räumlichen Größen im Zuge kausal verbundener Bewegungen. Räumliche Größen können mit Zahlen in Bezug zueinander (bzw. anderen festgelegten Konstanten, wie. z.B. einer Geraden) festgelegt werden. Auf diese Weise können alle möglichen Phänomene als mechanische Entwicklung dargestellt werden. Zum Beispiel war die Entwicklung von Verbrennungsmotoren im 19. Jahrhundert von der Darstellung von Temperatur-Druckverläufen in Diagrammen geprägt.

Im einen Fall wird das außermechanische Problem von seinem besonderen Gegenstand abstrahiert und auf die mechanischen Wechselwirkungen von Körpern übertragen. Begründung der *Regulae* für die Wahl der Mechanik als Imitationsmittel: weil die mechanischen Bewegungen der Körper am leichtesten in die Sinne fallen und die untersuchten Verhältnisse am evidentesten darstellen. (Gäbe, 63)

Analog zur Algebra ist auch in den prosaischen Beschreibungen der physikalischen Phänomene die formale Setzung aller Größen – seien sie bekannt oder unbekannt – hinsichtlich ihrer Relationen gegeben. Die Möglichkeiten der formalen Beschreibung von Relationen über beliebige Grade gemäß seiner Methode präsentiert er in *Geometrie*.

Dabei ist aber die mathematische Darstellung nur eine bestimmte Form der Beschreibung. Sie läßt sich auf gezeigten Wirkungen in Bezug auf die Lage eines Objektes angeben, erklärt damit aber noch nicht das Wesen der zwischen Ursache und Wirkung stehenden Beziehung:

Ich wüßte nämlich zum Beispiel niemanden, der nicht in den Erdkörpern Schwere vorausgesetzt hätte; aber obgleich die Erfahrung uns sehr klar zeigt, daß die sogenannten schweren Körper zum Mittelpunkt der Erde herabsinken, haben wir damit doch noch keineswegs die Natur dessen erkannt, was man Schwere nennt, d. h. die Natur der Ursache oder des Prinzips, das sie auf diese Weise herabsinken läßt – das nämlich müssen wir von anderswoher lernen. (AT VIII/2 8,5-12; Picot, 149)

Die methodische Suche nach der Natur der Kausalitäten und nicht die mathematische Beschreibung stand im Fokus von Descartes Forschung. Erst wenn auf einer neuen Stufe der Erkenntnis Gewissheit erreicht wurde, war er bereit die nächste Stufe anzugehen. Die Reflexion auf das Verstandene und dessen metaphysische Fundierung sind die Bausteine seiner Methode neuer Erkenntnisse.

2.4.3. Der Nachweis der Allgemeinheit der Methode in der *Geometrie*

In diesem Essay zeigt Descartes, wie seine Methode auf die Geometrie als führende mathematische Disziplin angewandt werden kann, um Neues zu erkennen. Im *Brief an Picot* schreibt er:

Durch die *Geometrie* schließlich bemühte ich mich, zu beweisen, daß ich mehrere Dinge gefunden hatte, die zuvor unbekannt gewesen sind. (AT VIII/2 15,26-28; Picot, 163)

Er verwendet gemäß seiner Sicht einer Einheit der Wissenschaft seine algebraischen Kenntnisse, um die seit der Antike tradierte Stagnation des geometrischen Wissens zu überwinden und ihre seit damals formulierten, aber ungelösten Probleme zu bearbeiten. Mit arithmetischen Regeln überwindet Descartes die Beschränkungen der Ebene als geometrischer Beweisform, welche an die Anschauung der Zeichnung und nicht die gedankliche Vorstellung gebunden ist.

[Es ist] der Mangel an Einheit, den Descartes der bisherigen Behandlung der Geometrie zur Last legt. Dieser Mangel hat nach ihm seinen letzten Grund darin, daß die Geometrie sich ganz eng an die Anschauung der Figuren hält und in ihr das wesentliche Mittel sieht, um ihre grundlegenden Eigenschaften und die Beziehungen, die die einzelnen Figuren miteinander verknüpfen, zu erkennen. Dadurch droht sie, zu einem Spiel der Einbildungskraft, statt zu einer Übung des Verstandes, zu werden. (Cassirer, 48)

In den *Regulae*, Regel XII beschreibt Descartes wie reale Gegebenheiten im Wege der sinnlichen Wahrnehmung und der Anschauung mittels Gedächtnis und Verstand in einer von diesen realen Gegebenheiten abstrahierten Form im Gemeinsinn erfasst werden. Der von der Einbildungskraft geführte Verstand erkennt dabei die in der Anschauung gegebenen Verhältnisse zwischen den Dingen und kann diese in mathematische Beziehungen setzen.

In the course of [rule 12] we learn that memory might be reduced to imagination and that sensation is the act of the intellect applying itself along with imagination to the common sense. What becomes clear, in the event, is that the figures and images presented to our minds come either actively through sense, through imaginative production, or through remembering, and that the mathematics of proportion can be comprehended autonomously by the cooperation of imagination with intellect. (Sepper, 239f)

In Regel XIV zeigt Descartes, wie die Anschauung auf diese Art und Weise zur Problemlösung beiträgt (cf. Sepper, 240). Sie integriert bisher Unbekanntes, welches durch Deduktionen erkannt wurde, in das Gegebene. Descartes leitet Regel XIV wie folgt ein:

Damit wir aber auch die Anschauung als Hilfsmittel verwenden können, ist darauf hinzuweisen, daß nicht immer deswegen schon eine neue Gattung des Seienden herausgefunden wird, wenn etwas Unbekanntes aus etwas vorher bereits Erkanntem deduziert wird, sondern wir nur die gesamte Erkenntnis auf es ausdehnen, damit wir erfassen, daß das fragliche Ding in dieser oder jener Weise an der Natur dessen teilhat, was in der Proposition gegeben ist (AT X 438,12-18; *Regulae* 137, 60,18-25).

Die Erweiterung des Wissens um die in der Geometrie steckenden analytischen Möglichkeiten durch die Algebra erfolgt schrittweise und führt in der *Geometrie* in drei Büchern von (i) den klassischen Beweisverfahren mit Zirkel und Lineal in der Ebene über (ii) die algebraische Bestimmung von Kegelschnitten als Kurven 2. Grades und deren geometrische Konstruktion durch spezielle Zirkel (iii) hin zu Polynomen beliebigen Grades. Diese führen zur allgemeinen Lösung eines von Pappus im 4. Jahrhundert formulierten geometrischen Problems (cf. Wohlers 2013, LIII). Pappus suchte für eine Anzahl von $2n$ (oder $2n+1$) gegebenen Linien die Menge aller Orte deren Abstand zu diesen Linien in einem vorgegebenen Verhältnis stehen. Er hatte für 4 Linien die Lösung als Kegelschnitte vermutet aber nicht konkretisieren können. Kegelschnitte haben einen Kegel als Basis, welcher durch unterschiedlich zu seiner Achse geneigte Ebenen geschnitten oder berührt wird. Geometrisch können so, mit den Spezialfällen von Punkt im Schnitt an der Spitze, und der Gerade als tangentielle Berührung, mit Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel die Kegelschnitte als Linien bestimmt werden (AT VI 165,12-166,12; Dioptrik, 141; AT VI 176,3-4; Dioptrik, 149). Die durch Geraden bestimmte Ebenen haben mit dem Kegel selbst eine Gemeinsamkeit, welche den Mittelbegriff eines klassischen Syllogismus ersetzt.

Die zuletzt angeführte Reflexion zeigt, daß es mit der soeben von mir essentiell genannten Verbindung zwischen Descartesscher Methodologie und Syllogistik seine besondere Bewandnis hat: Kreis und Parabel werden durch den Kegel verbunden, zwei Kurven, nicht zwei Sätze – wie im Syllogismus – durch eine geometrische Figur, ein Mittel-Ding, das beide als Schnitte verschieden geneigter Ebenen in sich birgt, und nicht als Mittelbegriff. (Gäbe 66f)

Descartes beweist, dass für 3 oder 4 Linien die Lösung eine quadratische Gleichung mit 2 Unbekannten ist und sich der Grad der Gleichung um jeweils zwei zusätzliche Linien erhöht. Er zeigt auch, dass die geometrische Lösung des Problems für drei bis fünf Linien klassisch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, jene für sechs bis neun Linien durch Kegelschnitte, welche aus einer Überlagerung zweier voneinander abhängiger Bewegungen entstehen. Je weiterem Paket von vier Linien entstehen neue Klassen krummer Linien, für welche sich eine weitere Krümmung ergibt. Die Zahl dieser Klassen ist nicht begrenzt. Die krummen Linien erhalten je weiteres Paket von bis zu vier Linien eine weitere Krümmung durch Überlagerung. Descartes zeigt, wie diese Kurven konstruiert werden (cf. Krämer, 22).

Descartes schließt die Betrachtung mit den Worten: „& ainsi à l’infini“. Dieser Schlußsatz zeigt, worauf es Descartes ankommt: Nicht geht es um die Lösung eines partikularen Problems, sondern um den Nachweis der Lösbarkeit überhaupt durch Angabe allgemeiner Lösungsformen, wie sie durch Typen algebraischer Gleichungen und durch Klassen geometrischer Konstruktionsmittel gegeben sind. (Krämer, 22)

Den durch die Linienpakete entsprechenden Klassen entsprechen Kurven mit einer der Zahl der Klasse entsprechenden Anzahl von Krümmungen. Diese Kurvenformen entsprechen

unterschiedlich algebraische Gleichungen. Die Entsprechung von Gleichungstyp und geometrischer Klasse erlaubt die Bestimmung der geometrischen Kurve durch die Gleichung. Descartes Erkenntnis, dass es eine Entsprechung von geometrischer Konstruktion von Kurven und der algebraischen Bestimmung von Polynomen gibt, führt schließlich zur Integration von analytischer Geometrie und Algebra.

Algebraische Ausdrücke dienen Descartes nicht einfach dazu, gewisse Probleme geometrischer Konstruktionen zu *lösen*, vielmehr dazu, deren allgemeine Lösbarkeit mit algebraischen Mitteln zu *demonstrieren*. (Krämer, 20).

Diese Verallgemeinerung folgt aus Descartes Sicht der Einheit von Wissenschaft, welche erlaubt, ein Problem unabhängig von dessen Inhalt nach den abstrakten Regeln seiner Methode zu lösen, dabei aber auf jeder Stufe der Erkenntnis anschaulich zu bleiben. Dieser in der Methode liegende Formalismus führt in der Mathematik zum Kalkül als abstrakter Rechenvorschrift (cf. Krämer, 24).

2.4.4. Descartes Zugang zur Viètes Notation über Beaugrand

Mersenne stellte Descartes vor April 1632 ein Buch über Analysis zur Verfügung, welches mit großer Sicherheit von Jean de Beaugrand 1631 verfasst wurde (Wohlers 2020, 833). Dieser war ein Schüler von Viète. (cf. Wohlers 2020, 628). Der Autor dieser Analysis hat sich Viètes Ausspruch “Kein Problem bleibt ungelöst” zu eigen gemacht und erntet dafür Descartes Kritik in einen mit 3.5.1632 datierten Brief.

Ich danke Ihnen für das Buch über Analysis, das Sie mir geschickt haben. Aber, unter uns, ich sehe weder, daß es von großem Nutzen wäre, noch daß irgend jemand, indem er es liest, die Verfahrensweise lernen könnte, ich sage nicht: jedwedes Problem zu lösen, sondern überhaupt irgendein Problem zu lösen, so leicht es auch sein mag. Es ist nicht so, daß ich nicht gerne glauben will, daß seine Autoren sehr sachkundig sind, aber ich bin kein ausreichend kluger Kopf, um zu beurteilen, was in diesem Buch steht, genausowenig wie das, was Sie mir über das Problem des Pappus mitteilen denn man muß über Kegelschnitte und körperliche Orte hinausgehen, um es für die gesamte Anzahl der gegebenen Linien zu lösen, wie es ein Mensch, der damit prahlt, jedwedes Problem zu lösen, lösen muß und wie ich es glaube gelöst zu haben. (AT I 245,7-17; Mersenne, 91)

Trotz dieser Ablehnung hat sich Descartes eine Notation angeeignet, welche jener Viètes entspricht. Der Verweis auf dieses Buch über Analysis ist dabei das einzige Indiz, für einen direkten Bezug zu Viètes Algebra. Im Dezember 1637 schreibt er an Mersenne, dass seine Algebra nichts von der Viètes wiederholt, sondern gänzlich neues bringt.

Weit entfernt davon, daß die Dinge, die ich geschrieben habe, leicht aus Viète herausgezogen werden könnten, ist es umgekehrt so, daß ich versucht habe, dort nur solche Dinge zu bringen, von denen ich glaubte, daß weder er noch irgend jemand anderes sie gewußt hatte – und das ist die Ursache, weshalb meine Abhandlung schwer zu verstehen ist. (AT I 478,30-35; Mersenne, 138)

Trotzdem wurde ihm in der Rezeption vorgeworfen, dass die *Geometrie* auf Viètes Schriften aufbaue. Beaugrand prüfte für die Kurie die *Dioptrik*. Am 31.3.1638 schreibt Descartes einen sehr langen Brief zur Rezeption des *Entwurf der Methode* an Mersenne, in welchem er sich wiederholt auf Beaugrand bezieht (Wohlers 2020, 657).

Was die Anschuldigung des Geostatikers betrifft, daß ich in bezug auf die Gleichungen nichts bringe, was nicht Viète gelehrter gebracht hat, so bestreite ich den Obersatz, denn, wie ich glaube, Ihnen irgendwann bereits angemerkt zu haben, ich beginne mit dem, womit Viète geendet hat. Und was betrifft, was er sagt, es sei nicht entschuldbar, daß ich Viète nicht gelesen habe, so hätte er damit recht, wenn ich deshalb irgend etwas nicht gewußt hätte, was sich bei Viète findet. Aber ich glaube nun mal nicht, daß er mich durch jene schöne *Analysis*, die er irgendwann einmal hat drucken lassen, etwas lehrt. (AT II 82,5-14; Mersenne, 151)

Umgekehrt liefert Descartes zu Beaugrands *Geostatik* in einem Brief an Mersenne vom 29.6.1638 ein vernichtendes Urteil:

So kann ich als Schlußfolgerung sagen, daß alles, was dieses Buch über *Geostatik* enthält, so frech, so lächerlich und so erbärmlich ist, daß es mich erstaunt, daß irgendwelche ehrbaren Leute sich überhaupt herab gelassen haben sich die Mühe zu machen, es zu lesen. (AT II 189,7-11; Mersenne, 187)

Am 11.10.1638 ersucht er Mersenne, ihm keine weiteren Stellungnahmen Beaugrands zu seinem Werk zu schicken, da er „mit seinen Hirngespinnsten nichts anfangen“ (AT II 369,5; Mersenne, 248) kann. Am 20.03.1639 schließlich schreibt er Mersenne, weder Viètes Buch gesehen noch Beaugrand getroffen zu haben. Für Descartes liegt der Wert der Algebra nicht darin – analog zu den Syllogismen – bereits Bekanntes zu erklären, sondern mit der Methode, welcher die Algebra als Modell dient, neues Wissen zu schaffen.

Ich habe überhaupt keine Bekanntschaft mit dem Geometriker, über den Sie mir schreiben, und es erstaunt mich, daß er sagt, wir hätten gemeinsam in Paris Viète studiert, denn ich erinnere mich nicht, von diesem Buch auch nur den Umschlag gesehen zu haben, solange ich in Frankreich war. (AT II 524,8-13; Mersenne, 293)

Seine Meinung ändert sich auch nicht, als ihm 1646, also Jahre später, ein Nachdruck von Viètes Werk angeboten wird. Am 2.11.1646 schreibt er Mersenne:

Ich danke Ihnen für das, das Sie für mich bestimmt haben; und weit entfernt davon, daß ich mehr davon verlange, werde ich sogar sehr gut darauf verzichten können, wenn es Ihnen gefällt, jemand anderen zu verpflichten, indem Sie ihm das geben, das Sie mir anbieten. Denn ich glaube nicht, daß es in Viète irgend etwas gibt, das ich lernen müßte, und ich bin nicht interessiert daran, Bücher zu besitzen, um eine Bibliothek damit auszustatten. (AT IV 554,12-19; Mersenne, 554f)

Schließlich hält er am 25.01.1648 fest, dass er „sehr leicht darauf verzichten werde, denn ich glaube nicht, daß es in ihm irgend etwas gibt, was ich lernen müsse. Außerdem studiere ich schon lange keine Mathematik mehr.“ (AT IV 595,8-10; Mersenne, 561). Descartes wollte auf Basis der von ihm postulierten Einheit der Wissenschaft neue Erkenntnisse erlangen. Die

Algebra liefert dafür das Modell, welches universell angewandt werden kann, um sicheres neues Wissen zu erlangen. Zur Lösung der antiken geometrischen Probleme benutzte er die von ihm weiterentwickelte Algebra, welche für ihn aber nicht als mathematische Spielerei verbleiben soll.

Die Welt der geometrischen Formen wurde auf die Welt der Zahlen reduziert und durch diese vollständig abgebildet. Gelingt es, eine analoge „Abbildung“ auch für die physische Materie zu gewinnen, so ist damit das Problem gelöst. Dieses Ziel wird erreicht, indem Descartes die Materie der räumlichen Ausdehnung gleichsetzt. (Cassirer, 52)

Vor Descartes war die Geometrie bestimmt von der Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Die Konstruktionen werden in der Zeichenebene durch Geraden und darauf liegender Punkte veranschaulicht. Die Punkte ergeben sich als Schnittpunkte der Geraden oder mit von bestimmten Punkten mittels Zirkel abgeschlagener Längen. Für seine *Geometrie* fixierte Descartes die Bezeichnungen der zwischen den Punkten auf den Geraden gegebenen Längen in einer allgemeinen Form unter Zugrundelegung einer Einheit:

Damit man sich stets an die Namen dieser Linien erinnert, muß man nach Maßgabe dessen, wie man Namen festlegt oder verändert, ein gesondertes Verzeichnis aufstellen, indem man zum Beispiel schreibt: $AB = 1$, d. h.: AB ist gleich 1. $GH = a$, $BD = b$, usw. (AT VI 372,3-9; *Geometrie*, 317)

Descartes erzielte seine Fortschritte zur allgemeinen Lösung des Pappus Problems, indem er Polynome höheren Grades algebraisch durch Faktorisierung auf solche niedrigeren Grades zurückführen konnte. Die Basis dafür liegt in der Verwendung der modernen Notation der Algebra, welche in der *Geometrie* – im Unterschied zum Versuch Roths (cf. Manders, 206f) – erfolgreich umgesetzt werden konnte. Die Anwendung der Faktorisierung als Technik ist das Verdienst Descartes in der Zusammenführung von Algebra und analytischer Geometrie in der *Geometrie*.

It introduced setting equations equal to zero as default; and stated the rule of signs more cautiously, allowing that there might be fewer than the indicated number of roots. Descartes extended factoring techniques from polynomials with integral coefficients to ones with integral polynomial coefficients (viz., polynomials in the known quantities of a geometrical problem). He also went flexibly back and forth between different levels of algebraic generality, as when he analyzed factoring for general quartics first and then substituted (still nonnumerical) coefficients arising from specific geometrical problems. [...] The *Géométrie* put the multiplicative conception of polynomials center stage (Manders, 198)

2.4.5. Die Algebraisierung der klassischen Geometrie

Descartes Methode der von ihm intuitiv als gewiss erkannten Gegebenheiten ausgehenden, hinreichend geordneten Deduktionen erfolgt durch Vergleiche, welche die Beziehungen aller

relevanten Teile des Problems abbilden. Die Struktur dieser Vergleiche abstrahiert von den konkreten Gegebenheiten und erlaubt die allgemeine Lösung des Problems.

Der soeben in Form einer Imitation (Abstraktion von dem spezifischen Objekt des Problems und Übertragung auf mathematisch mechanische Strukturen) vollzogene Schritt von irgendeiner empirischen Wissenschaft zur Mechanik wiederholt sich nun in der Geometrie noch einmal: Ein geometrisches Problem ist stets die Aufgabe, aus gewissen geometrischen Größen, die genau gegeben sind, andere Größen zu finden, nach denen gefragt wird. Die Geometrie hat es mit Figuren zu tun. Das geometrische Problem wird also [...] von *seinem* speziellen Gegenstande, den besonderen Figuren, die es untersucht, abstrahiert und erscheint nun nur noch als die Aufgabe, die Gleichheit der gesuchten Größen mit einer bestimmten Kombination der gegebenen Größen zu erkennen, es erscheint als ein algebraisches Grundproblem. (Gäbe, 63)

Im ersten Buch der *Geometrie* beginnt Descartes, mit der geometrischen Darstellung der Grundrechnungsarten. Während in den *Regulae* die Multiplikation jeweils zu einem Rechteck geführt hat, welches für weitere Multiplikationen selbst als Linie interpretiert wurde, und daher auch beliebig häufige Multiplikationen nur zur Bildung von Rechtecken (und nicht höher dimensionaler Körper) führten, erfolgen Multiplikationen und Divisionen in der *Geometrie* ausschließlich durch die geometrische Konstruktion von Strecken und Kreisen (cf. AT VI 370,15-371,3). Dabei sind das Quadrat und die Wurzel nur besondere Formen von Multiplikation und Division. Für die indirekten Lösungen, welche in Regel XVIII noch unvollständig waren, ist nun der Kreis dabei.

Oder ist [...] die Quadratwurzel aus GH zu ziehen, dann füge ich in Fortführung der Geraden die Einheit FG hinzu, teile FH am Punkt K in zwei gleiche Teile und ziehe um den Mittelpunkt K den Kreis FIH. Errichte ich dann am Punkt G in rechtem Winkel auf FH eine Gerade bis nach I, ist GI die gesuchte Wurzel. (AT VI 370,24-371,1; Geometrie, 317)

Die Strecken werden mit eindeutigen Symbolen benannt und zueinander in Relation gesetzt. Dadurch können bisher unbekannte Größen in ihrer Beziehung zu bekannten ausgedrückt werden. Dies stellt bereits der erste Satz der *Geometrie* klar.

Probleme der Geometrie lassen sich leicht auf solche Ausdrücke zurückführen, daß es hinterher nur noch nötig ist, die Länge bestimmter Geraden zu erkennen, um sie zu konstruieren. (AT VI 369,4-7; Geometrie, 315)

Den so über Längen in Beziehung gestellten Symbolen kommt außer der aus der Beziehung abgeleiteten Relation keine sonstige Bedeutung mehr zu. Potenzen sind einfach Relationen und verlieren alle sonstigen Bedeutungen wie „Fläche“ oder „Volumen“. Das Symbol wird zu einem Platzhalter innerhalb einer rein formalen Beziehungsvorschrift, dem Kalkül, welche ihrerseits als Länge aufgefasst und mit einem Symbol benannt werden kann (cf. Krämer, 26). Die Sprache, in welcher diese geometrischen Längen als Symbole dargestellt und nach Regeln verknüpft werden, ist die der Algebra. Ihre Symbole werden losgelöst von jedem konkreten semantischen Gehalt als reine Platzhalter nach der Syntax der Mathematik verknüpft.

Die einzelnen Längen sind zwischen zwei Punkten auf Geraden liegende Strecken, welche als Symbol mit kleinen Buchstaben benannt werden und diese Strecken repräsentieren.

Dabei ist zu beachten, daß ich unter a^2 oder b^3 und dergleichen gewöhnlich nur ganz einfache Linien verstehe, obwohl ich sie Quadrate, Würfel usw. nenne, um die in der Algebra gebräuchlichen Namen zu benutzen. (AT VI 371,16-20; Geometrie, 317)

Die Verhältnisse dieser Längen werden in Gleichungen bestimmt, wobei für jede unbekannte Länge eine Gleichung aus den Beziehungen zu finden ist, welche unabhängig von den schon gefundenen Gleichungen sein muß. Diese Beziehungen können aus geometrischen Verhältnissen abgeleitet und die Gleichungen so umgeformt werden, dass ihre Beziehungen erhalten bleiben. Geometrisch sind alle Längen Teil des Zahlenstrahls, welcher aus heutiger Sicht die Menge aller Reellen Zahlen, also in Descartes Sprachgebrauch der kommensurablen und der nicht-kommensurablen Zahlen, abbildet. Ausgehend von der geometrischen Darstellung gibt es dabei Gleichungen, die unlösbar sind, da sie Wurzeln aus negativen Zahlen erbringen. In geometrischen Darstellungen in der Ebene zeigt sich dies daran, dass sich Kurven, wie Kreis und Gerade nicht mehr schneiden und es eben keinen Schnittpunkt als Lösung gibt (cf. AT VI 376,11-16; Geometrie, 321f).

Erst durch die Erweiterung auf die Menge aller Komplexen Zahlen in der von Gauß definierten komplexen Ebene (cf. Alten, 322) werden auch diese entsprechend dem Fundamentalsatz der Algebra lösbar (siehe oben S.25f und S.121). Die aus der Antike tradierten geometrischen Probleme liegen aber nicht bei solchen Wurzeln aus negativen Zahlen, sondern in der unzureichenden Veranschaulichung des Problems, welcher das klare methodische Vorgehen fehlt. Das 7. Problem von Pappus galt als seit der Antike ungelöstes aber viel beschriebenes Problem und ist dafür ein Beispiel.

Denn dann hätten sie sich nicht die Mühe gemacht, darüber so dicke Bücher zu schreiben, in denen allein die Ordnung ihrer Propositionen uns erkennen läßt, daß sie gar nicht über die wahre Methode verfügten, sie alle zu finden, sondern daß sie nur diejenigen zusammengestellt haben, auf die sie getroffen sind. (AT VI 376,24-29; Geometrie, 321)

Für Descartes liegt der Mangel in der sprachlichen Beschreibung geometrischer Problemstellungen, welche sich nur in der Ebene oder im Raum veranschaulichen lassen und so bei mehr als drei Dimension stehen bleiben müssen. Erst durch die Verwendung der Algebra, losgelöst von einer den Dimensionen zugerechneten Bedeutung wird diese sprachliche Klarheit möglich.

Ich bitte Sie, beiläufig zu beachten, daß das Bedenken der Alten, in der Geometrie Gebrauch von Ausdrücken der Arithmetik zu machen, nur davon hatte herrühren können, daß sie ihre Beziehung nicht klar genug sahen, und große Dunkelheit und Verwicklung in der Weise verursachte, wie sie sie erklärten. (AT VI 378,23-28; Geometrie, 323)

Dieses sprachlich ungeordnete Vorgehen führte im Pappus Problem zu Vermutungen, aber nicht zu Lösungen.

Die Aufgabe, die Euklid zu lösen begonnen hatte und von Apollonius fortgesetzt, die aber von niemand fertiggestellt wurde, war also folgende. Es seien drei, vier oder eine größere Anzahl Geraden durch ihre Position gegeben. Man postuliert nun erstens einen Punkt, von dem aus man ebenso viele andere Geraden ziehen kann, und zwar eine auf je eine der gegebenen Linien, wobei die zu ziehenden und die gegebenen Linien gegebene Winkel bilden. Wenn es nur drei Linien gibt, soll das zwischen zwei der so von demselben Punkt aus gezogenen Linien enthaltene Rechteck in einem gegebenen Verhältnis zu dem Quadrat der dritten Linie stehen. Wenn es vier Linien gibt, mit dem Rechteck der beiden anderen. Wenn es fünf Linien gibt, soll das aus drei Linien zusammengesetzte Parallelepiped in einem gegebenen Verhältnis stehen zu dem aus den beiden übrig bleibenden anderen und einer anderen gegebenen Linie. [...] Und so läßt sich die Aufgabe auf jede andere Anzahl von Linien ausdeh[n]en. (AT VI 379,14-380,10; Geometrie, 323f)

Aus der Formulierung der Aufgabenstellung konnte Descartes diese zu einem allgemeinen Problem erweitern, welches auch über eine unbegrenzte Zahl von Linien allgemein lösbar ist. Descartes verwendet in der *Geometrie* seine Methode als Formalismus, um die Anwendbarkeit des Formalismus der Algebra auf dieses Problem zu prüfen.

Dies gab mir die Gelegenheit, den Versuch zu machen, ob man durch die von mir benutzte Methode es genauso weit bringen könne wie sie (AT VI 380,22-24; Geometrie, 324)

Der von Descartes gefundene Weg erkennt die Äquivalenz jener Lösung, welche sich aus den abstrakten, rein formalen, algebraischen Gleichungen ergibt mit jener des geometrischen Beweises. Er stellt die durch die Bedingung gegebenen Beziehungen zwischen dem Spiegelpunkt und den durch je 2 Punkte bestimmten Geraden algebraisch dar, indem er jedem Abschnitt auf den Geraden, welcher zwischen Schnittpunkten mit anderen Geraden liegt eine eindeutige Bezeichnung mittels Kleinbuchstaben zuweist und diese Strecken entsprechend ihren geometrisch anschaulichen Verhältnissen zueinander in Beziehung setzt. Mit der Anzahl der Geraden steigt die Zahl der gegebenen Verhältnisse. Das Problem lässt sich entsprechend dieser Anzahl der Geraden und der aus den Verhältnissen resultierenden Gleichungen nach Gattungen sortieren. Durch diese Gattungen können Kurven nach ihrer Form unterschieden und die Punkte der Kurve im Verhältnis zu einer als Bezugsbasis angenommenen Gerade bestimmt werden. Diese Bestimmung erfolgt algebraisch:

Ich könnte hier mehrere andere Mittel anführen, um Kurven zu zeichnen und zu verstehen, die in Graden bis ins Unendliche immer komplexer wären. Aber um zusammengekommen alle in der Natur vorhandenen zu begreifen und der Reihe nach gewisse Gattungen von ihnen zu unterscheiden, wüßte ich nichts besseres, als zu sagen, daß alle Punkte der Linien, die man geometrisch nennen kann, d. h. die irgendwie ein präzises und exaktes Maß haben, notwendig irgendeine Beziehung zu allen Punkten einer Geraden haben. Diese Beziehung kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden, und zwar alle Punkte durch dieselbe. (AT VI, 392,15-392,25; Geometrie, 333)

Die Übersetzung einer geometrischen Konstruktion in algebraische Gleichungen erlaubt die allgemeine Lösung des Problems. Diese Entsprechung ist Wesen der Integration von analytische Geometrie und Algebra und gilt allgemein.

Die Lösbarkeit des Pappus-Problems wird also demonstriert durch den Zusammenhang, den Descartes herstellt zwischen der algebraischen Klassifizierbarkeit nach dem Grad der Gleichungen und der geometrischen Klassifizierbarkeit nach der Komplexität der konstruktiven Mittel, mit denen die entsprechenden geometrischen Örter gezeichnet werden können. (Krämer, 23)

Die Idee eines Kalküls als semantisch abstrakter Rechenvorschrift geht auf die Konzeption der Algebra durch Viète zurück. Deren Übertragung auf die Geometrie ist das Verdienst von Descartes (cf. Krämer, 23f). Er zeigt, wie die in den geometrischen Gegebenheiten liegenden Bedingungen als algebraisches Kalkül in Gleichungen formalisiert werden können. Damit ist das algebraische Kalkül aber nicht nur Werkzeug, um das geometrische Problem zu lösen, sondern erschafft in dieser algebraischen Beschreibung das geometrische Objekt. Die algebraische Formel eines Kreises ist nicht nur äquivalent zur geometrischen Linie dieses Kreises. Sie definiert jeden Punkt des Kreises eindeutig und ist so die Bedingung der Existenz des Kreises (cf. Krämer, 28).

2.4.6. Geometrische Kurven in algebraischer Beschreibung

Im zweiten Buch der *Geometrie* stellt Descartes die „Natur der Kurven“ (AT VI 388,3; *Geometrie*, 330) vor. Diese ergeben sich aus kontinuierlichen Bewegungen, wobei es sein kann, dass eine Bewegung eine weitere Bewegung verursacht. Solche aufeinander aufbauenden Bewegungen sind voneinander abhängig und können durch Gleichungen beschrieben werden. Descartes bezeichnet als geometrische Kurven jene, welche „irgendwie ein präzises und exaktes Maß“ (siehe obiges Zitat, AT VI 392,23; *Geometrie*, 333) haben, wobei die Zahl, der diese Kurven konstruierenden Geraden dem Grad der Kurve und ihrer algebraischen Gleichungen entspricht. Das geometrische Kalkül der geometrischen Kurven ist ein algebraisches und es generiert die Linie als abstraktes, aber berechenbares und durch Maschinen herstellbares Ding. Als Maschine in diesem Sinne bestimmt Descartes auch Zirkel und Lineal. Descartes erweitert diese Liste um Konstruktionen (AT VI 391,1 Abb.6; *Geometrie*, 332), in welchen sich Lineale in Abhängigkeit von einer Hauptbewegung zueinander verschieben und dabei Linien entstehen, welche allein dieser Hauptbewegung gemäß der Konstruktion der Maschine folgen.

Aber ich sehe nicht, was verhindern könnte, daß man die Beschreibung dieser ersten Linie nach dem Kreis genauso faßlich und ebenso deutlich versteht wie die des Kreises oder zumindest die der Kegelschnitte; noch verstehe ich, was verhindern könnte, daß man die zweite, die dritte und alle anderen, die man beschreiben kann, genauso gut versteht wie die erste; noch folglich, weshalb

man sie nicht in genau derselben Weise in die Geometrie aufnehmen sollte, um ihren Spekulationen zu dienen. (AT VI 392,7-14; Geometrie, 332).

Er zeigt, dass die algebraische Bestimmung einer geometrischen Kurve diese tatsächlich als abstraktes, theoretisches Ding begründet. Im Gegensatz zu diesen Kurven bezeichnet Descartes nur jene Kurven als „mechanisch“ welche durch die Überlagerung voneinander unabhängiger Bewegungen geschaffen werden (cf. Krämer 31f). Dabei setzt er bei Überlegungen an, welche er bereits in jenem Brief an Beeckman am 26.3.1619 angesprochen hat, in welchen er seine „gänzlich neue Wissenschaft“ ankündigte. Diese soll die Probleme der Geometrie im Gegensatz zur mechanistischen Lehre des Lullus lösen (cf. Krämer, 30). Statt der von Lullus vorgeschlagenen Permutationen unabhängig zueinander in Beziehung gebrachter Elemente verlangt Descartes die Deduktion aus erkannten gegebenen Abhängigkeiten in einem Zug (cf. Cassirer, 46f). Demgegenüber entstehen mechanische Kurven in der Realität durch kinematische Überlagerungen unabhängiger Bewegungen, wie sie der Konstruktion einer Quadratrix oder Spiralis zugrunde liegen.

Was aber die alten Geometriker daran gehindert hat, komplexere Linien als Kegelschnitte aufzunehmen, war vielleicht, daß die ersten von ihnen betrachteten aus Zufall die Spiralis, die Quadratrix und ähnliche waren. Denn diese Linien gehören wirklich nur in die Mechanik und zählen deshalb nicht zu jenen, von denen ich denke, daß sie hier aufgenommen werden sollten, weil man sie sich als durch zwei getrennte Bewegungen beschrieben vorstellt, die keinerlei Beziehung zueinander haben, die man exakt bemessen könnte. (AT VI 390,6-14; Geometrie, 331).

Descartes sieht den entscheidenden Unterschied zwischen „geometrischen“ und „mechanischen“ Kurven in der Abhängigkeit der die Kurve schaffenden Bewegungen. Auch wenn jede Überlagerung zu einer komplexeren Kurve führt, ist diese Unterscheidung hinsichtlich der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit sich überlagernder Bewegungen entscheidend für die Konstruierbarkeit. Dieser Mangel an Unterscheidung bei den antiken Mathematikern erstaunt ihn.

Aber ich bin erstaunt darüber, daß sie darüber hinaus nicht auch verschiedene Grade zwischen diesen komplexeren Linien unterschieden haben und ich kann nicht begreifen, weshalb sie sie mechanisch genannt haben anstatt geometrisch. (AT VI 388,9-13; Geometrie, 330)

In diesem zweiten Buch der *Geometrie* zeigt Descartes, wie das Pappus Problem durch algebraische Bestimmung der geometrischen Bedingungen als Gleichungen formuliert und gelöst werden kann. Dazu setzt er die Punkte, welche die gesuchte Kurve bilden in Beziehung zu einer Geraden und schafft so ein Bezugssystem, durch welches Punkte in der Ebene durch genau zwei Größen bestimmt sind.

Aber um zusammengekommen alle in der Natur vorhandenen zu begreifen und der Reihe nach gewisse Gattungen von ihnen zu unterscheiden, wüßte ich nichts besseres, als zu sagen, daß alle Punkte der Linien, die man geometrisch nennen kann, d. h. die irgendwie ein präzises und exaktes

Maß haben, notwendig irgendeine Beziehung zu allen Punkten einer Geraden haben. Diese Beziehung kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden, und zwar alle Punkte durch dieselbe. (AT VI 392,18-26; Geometrie, 333)

Die sich so aus den Punkten ergebenden Kurven ordnet er den verschiedenen Gattungen zu, welche allgemein die Form der Kurve mit den algebraischen Dimensionen verbindet.

Steigt nun diese Gleichung nur bis zum Rechteck zweier unbestimmter Quantitäten oder bis zum Quadrat nur einer Quantität, gehört die Kurve zu der ersten und einfachsten Gattung, in der nur der Kreis, die Parabel, die Hyperbel und die Ellipse enthalten sind. Steigt die Gleichung bis zur dritten oder vierten Dimension zweier unbekannter oder bis zu einer Dimension zweier unbestimmter Quantitäten – denn es sind zwei unbestimmte Quantitäten nötig, um hier die Beziehung des einen Punktes zu einem anderen zu erklären –, gehört sie zur zweiten. Und steigt die Gleichung bis zur fünften oder sechsten Dimension, gehört sie zur dritten Gattung; und ebenso mit den anderen bis ins Unendliche. (AT VI 392,26-393,6; Geometrie, 333f)

Sind die zwei Größen der Abstände zum Ursprung des Bezugssystems unbekannt, nennt Descartes sie „x“ und „y“ und sucht Gleichungen, welche diese Unbekannten aus bekannten Strecken und deren Verhältnissen deduzieren lassen. Am Beispiel der Konstruktion einer Hyperbel aus zwei sich gegeneinander verschiebenden Geraden zeigt Descartes, wie aus den geometrischen Bedingungen die Strecken als Größen zueinander ins Verhältnis gebracht werden.

Weil nun CB und BA zwei unbestimmte und unbekannte Quantitäten sind, nenne ich die eine y und die andere x . Um aber die Beziehung der beiden zu finden, betrachte ich außerdem auch die bekannten Quantitäten, die die Beschreibung dieser Kurve bestimmen: Etwa GA , die ich a nenne; KL , die ich b nenne; und NL , parallel zu GA , die ich c nenne. Dann sage ich: wie sich NL zu LK verhält, oder c zu b , so verhält sich auch CB oder y zu BK . Folglich ist $BK = \frac{b}{c}y$; und $BL = \frac{b}{c}y - b$; und $AL = x + \frac{b}{c}y - b$. Außerdem verhält sich CB zu LB oder y zu $\frac{b}{c}y - b$ wie a oder GA zu LA oder $x + \frac{b}{c}y - b$. (AT VI 393,34-41; Geometrie, 334f).

Aus diesen Verhältnissen lässt sich die quadratische Gleichung ableiten, welche die Hyperbel (wie auch alle andere Kegelschnitte) als Kurve der 1. Gattung ausweist. Ersetzt man eine der konstruktiven Geraden durch eine Kurve 1. Gattung entsteht eine Kurve 2. Gattung.

Ersetzt man bei dem Instrument, das dazu benutzt wird, die Kurve zu beschreiben, die Gerade [...], entweder durch diese Hyperbel oder durch irgendeine andere Kurve der ersten Gattung, beschreibt die Überschneidung dieser Linie mit dem Lineal [...] statt der Hyperbel [...] eine andere Kurve, die zur zweiten Gattung gehört. [...] Ersetzt man diese Linie mit einer Kurve zweiter Gattung, beschreibt man durch sie eine Linie dritter Gattung. Ist es eine Kurve dritter Gattung, beschreibt man eine Kurve vierter Gattung; und so bis ins Unendliche, was durch die Berechnung sehr leicht zu erkennen ist. (AT VI 394,25-20; Geometrie, 335)

Die allgemeine Lösung des Pappus Problems ergibt sich aus einer Entsprechung dieser Gleichungsgattungen durch Linienpakete: den ersten vier Linien entspricht die 1. Gattung, also eine Lösung durch Kegelschnitte. Mit einem weiteren Paket von maximal vier Linien ist die

Gleichung eine der 2. Gattung. Diese Entsprechung gilt allgemein über beliebig viele Linienpakete.

Nun kann die Position der gegebenen Geraden auf vielerlei Arten variieren und folglich nicht nur die bekannten Quantitäten, sondern auch die Zeichen + und – der Gleichung auf alle vorstellbare Weisen verändern. Deshalb ist es evident, daß alle Kurven der ersten Gattung für diese Aufgabe nützlich sein können, wenn sie bezogen auf vier Geraden gestellt ist; und alle Kurven der zweiten Gattung nützlich sein können, wenn sie bezogen auf acht Linien gestellt ist; und alle der dritten Gattung, wenn sie bezogen auf zwölf gestellt ist; und ebenso bei den anderen. Demnach gibt es keine Kurve, die Gegenstand einer Berechnung ist und in die Geometrie aufgenommen werden kann, die nicht für irgendeine Anzahl von Linien nützlich wäre. (AT VI 397,8-16; Geometrie, 337)

Für das von 4 Geraden gebildete Pappus Problem, welches in die 1. Gattung fällt, löst er die gegebenen Verhältnisse zu einer quadratischen Gleichung auf, welche allgemein für alle Kegelschnitte gilt. An Mersenne schreibt er am 31.3.1638:

Nun, allein die Gleichung auf Seite 326, nämlich

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2},$$

beinhaltet, wenn ich die + und – Zeichen wechsele oder manche Ausdrücke als = 0 voraussetze, alle Gleichungen, die sich auf irgendeinen ebenen oder körperlichen Ort beziehen. (AT II 84,12-20; Mersenne, 152; „Seite 326“ bezieht sich auf Darstellung in AT VI unmittelbar vor 400,1)

Die einzelnen Terme dieser Gleichung bestimmen die Form des Kegelschnitts. Descartes hatte mit seiner Methode bewiesen, was seit Pappus nur vermutet wurde: Die Lösung des Problems für 4 Linien liegt auf einem Kegelschnitt.

Wenn nämlich der Ausdruck $\frac{p}{m}x^2$ null ist, ist dieser Kegelschnitt eine Parabel. Wenn der Ausdruck mit dem Zeichen + versehen ist, ist er eine Hyperbel. Und wenn er schließlich mit dem Zeichen – versehen ist, ist er eine Ellipse. Außer wenn die Quantität $a^2m = pz^2$ und der Winkel [auf die Achse] ein rechter ist: in diesem Fall erhält man einen Kreis statt einer Ellipse. (AT VI 400,30-36; Geometrie, 340)

Die von den Gleichungen gebildeten Linien bestimmen die Orte, an welchem sich ihre Punkte im Raum im Verhältnis zueinander bzw. zu gegebenen Achsen befinden.

Allein dadurch nun, daß man die Beziehung aller Punkte einer Kurve zu allen Punkten einer Geraden in der von mir erklärten Weise weiß, kann man auch ihre Beziehung zu allen anderen Punkten und gegebenen Linien leicht finden. (AT VI 412,25-29; Geometrie, 349)

Die wesentlichen Eigenschaften von Kurven lassen sich mit den Winkeln beschreiben, in denen sie gegebene Geraden schneiden. Mittels Tangenten bzw. darauf normal stehenden Geraden lassen sich alle Kurven auf das allgemeinen Pappus Problem rückführen. Dieses aber hat Descartes algebraisch für beliebige Grade gelöst. Jedes beliebige geometrische Problem kann über algebraische Gleichungen dargestellt werden.

Was schließlich alle anderen Eigenschaften betrifft, die man Kurven zusprechen kann, so hängen sie nur von der Größe der Winkel ab, die sie mit bestimmten anderen Linien bilden. Kann man aber Geraden ziehen, die sie in rechtem Winkel an Punkten schneiden, an denen jene Geraden auf sie treffen, mit denen sie die Winkel bilden, die man bemessen will, oder die – was ich hier für dasselbe halte –, ihre Tangenten schneiden: dann ist die Größe dieser Winkel nicht schwieriger zu finden, als wenn sie zwischen zwei Geraden enthalten wären. (AT VI 413,11-19; Geometrie, 350)

Eine Anwendung dieser Möglichkeiten zeigt Descartes mit der Beschreibung von Kurven, welche für optische Linsen verwendet werden können (cf. AT VI 424,9-16; Geometrie, 359). In der *Dioptrik* stellt Descartes dar, wie mittels Hyperbeln und Geraden Linsen gefertigt werden können, welche Licht fokussieren oder streuen können. Durch die algebraische Beschreibung der Kurvenform der Linsen können so optische Zielsetzungen erreicht werden (cf. AT VI, 176,3-183,24; Dioptrik, 149-156).

2.4.7. Faktorisierung und allgemeinen Lösung

Das dritte Buch der *Geometrie* erweitert nun die Probleme der Ebene auf körperliche oder noch höhere Dimensionen. Einleitend fordert Descartes, die Aufnahme aller geometrisch konstruierbaren Kurven in die Geometrie. Dabei muß für die Problemlösung immer die jeweils einfachste, i.e. geringste Gattung verwendet werden (AT VI 442,4-17; Geometrie, 374). Davon ausgehend stellt er das Konzept der Faktorisierung von Polynomen höherer Dimensionen vor, indem er (i) die Polynome so als Gleichungen formuliert, dass die Summe ihrer Terme insgesamt Null ergibt, und (ii) festhält, dass der Grad des Polynoms die Zahl der Lösungen für diesen Ausdruck bestimmt.

Jede Gleichung kann so viele Lösungen (racine = Wurzel), d. h. Werte der unbekannten Quantität haben, wie die unbekannte Quantität Dimensionen hat. Setzt man zum Beispiel $x = 2$ voraus, oder $x - 2 = 0$, und $x = 3$ oder $x - 3 = 0$, und multipliziert man diese beiden Gleichungen $x - 2 = 0$ und $x - 3 = 0$, erhält man $x^2 - 5x + 6 = 0$ oder $x^2 = 5x - 6$, eine Gleichung, in der x sowohl den Wert 2 als auch den Wert 3 annehmen kann. (AT VI 444,19-445,1; Geometrie, 375)

Durch Faktorisierung wird der Grad des Polynoms reduziert. Dabei betrachtet man das Polynom als Produkt von Polynomen geringeren Grades, welche auch auf null zu setzen sind. So sind höher gradige Polynome im besten Fall das Produkt von Binomen. In einem Binom entspricht der Wert einer Unbekannten dem einer Bekannten. Daher ist deren Differenz Null (AT VI 455,12-28; Geometrie, 385). Sofern eine Gleichung, welche durch ein höhergradiges Polynom ausgedrückt wird, durch Faktorisierung auf Binome rückgeführt werden kann sind die Lösungen der Gleichung unmittelbar durch die Binome ablesbar. Lässt sich das Polynom vollständig auf Binome rückführen, liegt ein Problem der Ebene vor.

Findet man aber kein Binom, das die gesamte Summe der vorgelegten Gleichung so teilen könnte, ist es gewiß, daß das von dieser Gleichung abhängende Problem körperlich ist. (AT VI 456,26-29; Geometrie, 386)

Binome stellen die einfachste Form von Polynomen dar. Sie sind intuitiv verständlich und ihre Aussage ist klar und deutlich. Der Wert der Unbekannten Größe entspricht jenem einer bekannten Größe. Die Faktorisierung ist daher eine Methode der Rückführung auf das intuitiv erfassbare Einfachste.

2.4.8. Rückführung auf das Einfachste

Ziel der von Descartes gezeigten algebraischen Umformungen der Gleichungen ist, sie als Produkt möglichst niedrig gradiger Polynome abzubilden, wobei dieses Produkt äquivalent zur Gleichung ist. So wird die Zahl der Lösungen und die Dimension des Problems aus dem höchsten Grad bestimmt, den eines der dieses Produkt bildenden Polynome besitzt. In der *Geometrie* zeigt Descartes, wie seine Methode der Rückführung auf das Einfachste, in abstrakter und allgemeiner Form in der Algebra funktioniert. Die so entwickelte Faktorisierung erlaubt die Lösung von Gleichungen, die nicht in einer Ebene abbildbar sind. Er erweitert damit die mathematischen Beweise aus deren an die ebene Zeichnung gebundene Geometrie durch die algebraische äquivalente Darstellung auf beliebig vielen Dimensionen. Innerhalb der 1. Gattung bzw. bis zum 4. Grad hat er bereits bewiesen, dass diese algebraische Lösung mittels Kegelschnitten erreicht wird.

Nun, wenn man sicher ist, daß das gestellte Problem körperlich ist, kann man, ob nun die Gleichung, durch die man es sucht, bis zum vierten Grad oder nur bis zum Würfel steigt, ihre Lösung immer durch irgendeinen der drei Kegelschnitte finden, oder sogar auch nur durch irgendeinen wenn auch noch so kleinen Teil davon, indem man ansonsten nur Geraden und Kreise benutzt. Ich werde mich hier jedoch damit begnügen, eine allgemeine Regel zu geben, um sie alle durch eine Parabel zu finden, weil sie in gewisser Weise der einfachste Kegelschnitt ist. (AT VI 464,17-27; Geometrie, 392)

Die in Regel VI angegebene Reihe von 3, 6, 12, 24 (cf. AT X 386,15-22; *Regulae*, 47, 21,20-28) sucht bei Angabe der beiden Randwerte die beiden mittleren Proportionalen, i.e. die $\sqrt[3]{(24/3)}$. Mittels Kegelschnitten lassen sich solche Kubikwurzeln als die „zwei mittleren Proportionalen“ (AT VI 471,15; Geometrie, 399) finden. In der Folge zeigt Descartes, wie Probleme höherer Gattungen mittels komplexer Linien und deren algebraischer Darstellung gelöst werden können.

Hingegen kann die Krümmung der Kegelschnitte, weil sie immer von zwei verschiedenen Dingen abhängt, auch dazu benutzt werden, zwei unterschiedliche Punkte zu bestimmen. Aus demselben Grund ist es aber auch unmöglich, irgendeines der Probleme durch einen der Kegelschnitte zu konstruieren, die einen Grad komplexer sind als die körperlichen und die entweder die Ermittlung vier mittlerer Proportionaler, oder die Teilung eines Winkels in fünf gleiche Teile voraussetzen. (AT VI 476,4-7; Geometrie, 402f)

Analog zur Suche nach den zwei mittleren Proportionalen durch Dreiteilung eines Winkels, können höhere Wurzeln durch Teilung in entsprechend mehr, dem Grad der Wurzel entsprechende gleiche Winkelsegmente dargestellt werden.

Die *Geometrie* verbindet Descartes Ambitionen von 1619 zur Schaffung einer „gänzlich neuen Wissenschaft“ mit seinen bis 1637 gesammelten Erfahrungen im Umgang mit der Algebra. Dabei wandte er seine universelle Methode, welche er aus Algebra und Geometrie entwickelt hatte, auf die Algebra an, Diese bildete ursprünglich die Vorlage der *mathesis universalis*. So formuliert die Algebra ihre eigene Methode auf abstrakte Weise, um Wissenschaft in allgemeinsten Form zu ermöglichen.

In der Verbindung der geometrischen Analyse, zu der bei Descartes nur die aus dieser verallgemeinerte Theorie der „Methode“ vorliegt, mit der Algebra, in der sich, soweit sie auf die algebraische Lösung geometrisch darstellbarer Probleme beschränkt bleibt, die kartesischen Festlegungen für eine „mathesis universalis“ am ehesten verwirklicht finden, glaubt Descartes die Möglichkeit einer allgemeinsten mathematischen Disziplin zu erkennen. (Arndt, 43)

Die durch die algebraischen Formulierungen festgelegten geometrischen Kurven sind nun nicht mehr die physisch aufgezeichneten Annäherungen an die ihnen zugrunde liegenden Ideen, sondern existieren exakt gemäß diesen Formulierungen. Die Losgelöstheit von der konstruktiven Zeichnung und von deren Beschränkung durch den uns zugänglichen Raum erweitert die Möglichkeiten der Schaffung von Kurven, welche streng Regel konform bestimmt sind. Diese Konformität ist strenger als die jeder zeichnerischen Darstellung und führt zur Ablöse des geometrischen Beweises durch den rein rechnerischen.

Die algebraische Berechenbarkeit wird zum Kriterium für die geometrische Konstruierbarkeit von Kurven, für die Akzeptabilität einer geometrischen Problemlösung. Damit wird die Konstruierbarkeit [...] von Descartes zurückgeführt auf die algebraische Berechenbarkeit (Krämer, 33f)

Am Modell der Algebra hat Descartes zunächst seine *mathesis universalis* formuliert und daraus dann seine *methode universalis* entwickelt. Nun liefert die Algebra die Möglichkeit alle in ihrer Ausdehnung bestimmbar Phänomene in einem strengen Kalkül beschreibbar zu machen. Ausdehnung ist das essentielle Merkmal aller in der physischen Welt gegebenen Phänomene. Damit kann die Algebra universal in der physischen Welt angewandt werden.

2.4.9. Die Universalität der Algebra

Die Algebra ist ausschließlich regelbasiert. Den verwendeten Zeichen kommt keine semantische Bedeutung zu. Dadurch ist die Algebra in Bezug auf konkrete physikalische Disziplinen ungebunden und kann allgemein verwendet werden. Diese Freiheit von

semantischer Bedeutung und ihre reine, mechanistische Regelmäßigkeit lassen sie zu Basis und Trägerplattform des wissenschaftlichen Fortschritts werden.

Die Algebra aber, die im Hintergrunde der kartesischen Auffassung einer „mathesis universalis“ stand, und die Descartes in seiner „analytischen Geometrie“ zum sprachlichen Mittel des Beweisganges geometrischer Aussagen machte, stützte sich — zumindest in der Auffassung jener Zeit — nicht auf Definitionen und Axiome, sondern, ebenso wie die Arithmetik, auf Operationsregeln, die den regelgerechten Gebrauch der mathematischen Kunstsprache festlegen. (Arndt, 66)

Die „Imitation“ der geometrischen Konstruktion durch algebraische Gleichungen und die dadurch möglich gewordene Bestimmung der Komplexität nach Gattungen, sowie die von Descartes entwickelte Faktorisierung für Gleichungen höheren Grades waren wesentlich, um das seit der Antike ungelöste Pappus Problem, sowie dessen Verallgemeinerung auf beliebig viele Geraden zu lösen. Ende Dezember 1637 schreibt Descartes an Mersenne:

Durch die *Dioptrique* und die *Meteore* habe ich nur versucht, davon zu überzeugen, daß meine Methode besser ist als die gewöhnliche, durch meine *Geometrie* aber habe ich es, behaupte ich, bewiesen. Denn in ihr löse ich gleich am Anfang eine Frage, [deren Antwort] nach dem Zeugnis des Pappus durch keinen der Alten gefunden werden konnte; (AT I 478,7-15; Mersenne, 137)

Die *methodische* Festlegung der Methode selbst erfolgt als abstrakter Formalismus durch Reflexion auf die bisher erreichte Lösungskompetenz. Als Nachweis der Effektivität der cartesischen Methode, schlug Mersenne vor, dass Descartes nach seiner Methode Probleme lösen sollte, welche von den Mathematikern Pascal und Roberval ihrerseits als ungelöst bezeichnet wurden. Descartes hielt aber fest, dass diese ungelösten Probleme entweder Unmögliches enthielten oder extrem hohen Aufwand verursachten und dies daher kein sinnvoller Test seiner Methode darstelle. Am 31.3.1638 schreibt Descartes:

Was aber die Fragen der Geometrie betrifft, die sie nicht lösen können und die sie mir, wie sie Ihnen versprechen, vorlegen wollen, weil sie glauben, sie könnten durch meine Methode nicht gelöst werden, so finde ich, daß dies eine für mich unvorteilhafte Entscheidung ist. (AT II 90,17-21; Mersenne, 157)

Mit Brief vom 27.5.1638 sagt Descartes die Lösung dieser Aufgaben ab. Auch gegenüber Fermats Beurteilung der *Geometrie* zeigt er sich in diesem Brief reserviert, um seinerseits Fermat vorzuwerfen, dass dessen Methode glückliche Zufallsergebnisse liefert (AT II 148,20-28; Mersenne, 175f). Diesen Vorwurf der mangelnden Methode wiederholt er später (AT II 174,5-12; Mersenne, 175; AT II 178,5-8; Mersenne, 179f, 181).

Und was das betrifft, daß er sagt, daß ich einen so langen Weg beschreite und in meiner *Geometrie* einen so mühevollen Weg genommen habe, um die Tangenten zu finden, so sehe ich sehr wohl, daß er ihn nicht verstanden hat, denn er ist viel kürzer als der seinige. (AT II 140,3-9; Mersenne, 169)

Descartes sieht sich in einem methodischen Wettstreit mit den Mathematikern seiner Epoche. In der algebraischen Auflösung der methodisch gefundenen Gleichungen mit den algebraischen Rechenmethoden sieht er eine der Rhetorik vergleichbare Technik. Zu Schriften Fermats, welche ihm vorgelegt wurden, schreibt er am 27.7.1638 an Mersenne:

Denn was diejenige [Schrift] betrifft, in der er seine Methode ad maximas erklärt, so spricht sie mir ausreichend den Sieg zu, da er die Methode ganz anders gebraucht als das erste Mal, um sie an die Ermittlung der Tangente anzupassen, die ich ihm vorgelegt hatte. Und gewiß ist die Methode in dieser letzten Wendung, gemäß der er sie auffaßt, sehr gut, weil sie auf die hinausläuft, von der ich ihm weiter oben mitgeteilt habe, daß er sie auffassen müsse. (AT II 278,10-278,17; Mersenne, 218)

Die Auseinandersetzung mit Fermat und anderen Mathematikern kristallisiert sich an der Frage der Methode (z.B. cf. AT II, 273,18-24; Mersenne, 219; AT II 390,15-25; Mersenne, 245; AT II 438,19-25; Mersenne, 262). Für Descartes ist Reflexion wesentlicher Teil der Methode. Durch Reflexion auf das bisher analysierte erkennt man, ob aus intuitiven Erkenntnissen neue Gewissheiten deduziert wurden. Erst auf Basis dieser neuen Gewissheit kann eine „Stopp-Stufe“ verlassen und weiter gegangen werden. Diese Gewissheit ist auf jeder Stufe zu erlangen und daher hat jede Teillösung auch anschaulich zu sein. Was dabei diese Gewissheit genau ist, bleibt aber methodisch undeutlich. Während Fermat, Pascal und Roberval auf die präzise Sprache der Algebra setzen, sieht Descartes in dieser Fixierung nur ein rhetorisches Mittel. Er vertraut darauf, dass seine prosaischen Beschreibungen die Anschaulichkeit seiner Erklärungen in jedem Schritt hinreichend gewährleisten. Seine Methode sucht nach Wahrheiten. Dabei baut sie auf der mit seiner Methode begründeten Metaphysik mit *res extensa* und *res cogitans* auf. Das Sein der Dinge der Welt beweist er aus der Existenz Gottes (cf. AT VII 71,13-72,3, Meditation,79). Die Gegebenheiten der Dinge der Welt lassen sich hinsichtlich ihrer Ausdehnung geometrisch und damit algebraisch beschreiben. Dabei sind die Gegebenheiten der Welt für Descartes aber nicht auf deren mathematische Formalisierung reduzierbar: Die intuitive Gewissheit ist jederzeit zu gewährleisten. Die Algebra ist nur eine besondere sprachliche Form. Sie kann das Verlassen der „Stopp-Stufe“ allein aus ihrer Syntax heraus nicht rechtfertigen. Die mit Galilei beginnende metaphysische Befreiung der Physik, welche sich in der Mathematisierung der Physik fortsetzt, steht dazu im Widerspruch (cf. Wohlers 2013, XLVII). Für Descartes ist die Metaphysik die Basis der vom Verstand betriebenen Wissenschaft, aus der heraus im Wege der Philosophie die einzelnen Disziplinen der Wissenschaften Früchte tragen. Die Theologie hat dabei im Gebäude der Wissenschaft keine Rolle: die Akzeptanz der Offenbarung ist nicht Verstandes- sondern Willenssache.

So ist also die gesamte Philosophie wie ein Baum, dessen Wurzeln die Metaphysik sind, dessen Stamm die Physik ist, und dessen aus diesem Stamm herauswachsende Äste alle anderen

Wissenschaften sind, die sich auf drei hauptsächlich zurückführen lassen, nämlich Medizin, Mechanik und Moral. (AT VIII/2 14,23-28; Picot, 161)

Die Mathematik ist dabei eine alles durchdringende Sprache, in der Beziehungen beschrieben werden können. Ihre Anwendung hat dem Zweck zu folgen, wobei die notwendige anschauliche Gewissheit auf jeder Stufe der Erkenntnis nicht durch blindes Vertrauen in die Regeln der Mathematik ersetzt werden darf.

Wissen kann nur aus Gewissheiten und daraus notwendig ableitbaren Relationen geschaffen werden, sofern dies von den Kompetenzen des Verstandes aufgenommen werden kann. In den *Regulae* des jungen Descartes erscheint noch jedes Problem methodisch lösbar, sofern der menschliche Geist sich mittels hinreichender Ordnung Gewissheit verschaffen kann und diesen fundamentalen Weg nie verlässt. Viètes Wahlspruch „Kein Problem bleibt ungelöst“ wird von Descartes in seiner Konfrontation mit Beaugrand beim *Diskurs* hinterfragt (siehe oben, S.98; cf. AT I 245,7-17; Mersenne, 91). So zwingend mathematische Regeln sind, so sehr lenken sie von der Suche nach Gewissheit auf jeder Stufe der Erkenntnis ab und verleiten zum Überspringen von „Stopp-Stufen“, deren Erkenntnis aber gegebene Grenzen der eigenen Geisteskraft aufzeigt. Was dabei Gewissheit ist, muss der erkennende Verstand beurteilen. In seinem letzten großen Werk, den *Prinzipien*, bestimmt Descartes, was Gewissheit ist, scheint jedoch den Anspruch aufzugeben, dass mit methodischer Disziplin alles gewusst werden kann. Eingeleitet werden auch die *Prinzipien* mit einem methodischen Teil, welcher diesmal die Perspektive des Verstehens, also der klar und deutlich erkannten Gewißheit, einnimmt. Im letzten Kapitel zu Descartes zeige ich den Bezug dieses Teils zur Algebra.

2.5. Descartes *Prinzipien* in Bezug auf die Algebra

Im 1. Teil, §45 seiner *Prinzipien* definiert Descartes, was für ihn klar und deutlich bedeutet. „Klar“ ist das, was „dem aufmerksamen Geist gegenwärtig und zugänglich ist“. „Deutlich“ ist dabei aber nur das, was keinerlei Unklarheiten enthält. Damit muss auch das Wesen des Dinges klar sein (AT VIII/1 27; 1.§45, *Prinzipien*, 51; Gäbe 58).

Der Verstand und die Mathematik sind Werkzeuge, um zu Wissen zu gelangen. Die Mathematik beschreibt das Wesen der Dinge hinsichtlich deren Verhaltens in Bezug zu Ausdehnung, Bewegung und Form und der Verstand lernt zu beurteilen, wann und wie er aus den durch die Anschauung gegebenen Abbildern der Welt Gewissheit erlangt. Erfahrung und Experimente sind für Descartes notwendig, um die hinreichende Ordnung, die seine Methode verlangt, zu erhalten. Ohne diese Empirie fehlen jene Daten, aus welchen Unbekanntes zweifelsfrei abgeleitet werden kann. Dabei ist die Empirie unauflösbar auf die Fehlbarkeit der

äußeren Sinne verwiesen. Die theoretische mathematische Beschreibung bleibt so immer unvollständig und kann ihre eigene hinreichende Ordnung nicht nachweisen. So ähnlich dürfte die Erfahrung Descartes gewesen sein, als er die *Prinzipien* verfasste.

Descartes, I shall claim, moves from the position that we can have genuine certain knowledge of the corpuscular substructure, to the rather different view that our conjectures about corpuscular substructures are at best devices that enable us to predict future experience, and in that way prolong our lives (Garber, 113)

In den *Meteoren* beschreibt Descartes eine Reihe von atmosphärischen Erscheinungen. Ein Kapitel widmet er dem Phänomen des Regenbogens, dessen Farben er methodisch in Tabellen und Zeichnungen hinsichtlich der Brechung des von ihm als besonders feine Materie der *res extensa* angenommenen Lichtes am Weg in das Auge des Betrachters beschreibt.

Der Regenbogen ist ein so bemerkenswertes Wunderwerk der Natur und seine Ursache ist zu allen Zeiten von klugen Köpfen so sorgsam untersucht und so wenig erkannt worden, daß ich keine geeignetere Materie wählen könnte als ihn, um zu zeigen, wie man durch die von mir benutzte Methode zu Erkenntnissen kommen kann, die diejenigen noch nicht hatten, deren Schriften wir besitzen. (AT VI 325,3-9; Geometrie, 277)

So wie Descartes das Licht als Leitmotiv in *Le Monde* und der damit im Zusammenhang stehende *Dioptrik* nutzte, stellte er in den *Prinzipien* als Leitmotiv den Magnetismus vor (Wohlers 2005, XXI f), den er – wie schon das Licht – als Phänomen der *res extensa* auffasst und mittels seiner methodisch abgeleiteten Hypothesen erklärt. In seinen, der Elisabeth von der Pfalz gewidmeten *Prinzipien* stellt Descartes die Möglichkeit menschlicher Erkenntnis an den Beginn seiner Physik. Elisabeth von der Pfalz nahm Kontakt zu Descartes auf, nachdem sie seine *Meditationen* studiert hatte. So entstand auch ein informativer Briefwechsel, in welchem die Fragen von Methode und Metaphysik diskutiert wurden (Ebbersmayer, 10). Ein Kernproblem des cartesischen Dualismus liegt in der Frage wie die *res cogitans* und die *res extensa* aufeinander einwirken können. Descartes schreibt am 21.5.1643 an Elisabeth von der Pfalz:

Erstens stelle ich fest, daß es in uns bestimmte ursprüngliche Begriffe gibt, die wie Originale sind und nach deren Muster wir alle unsere weiteren Erkenntnisse bilden. Es gibt nur sehr wenige Begriffe dieser Art; denn neben den allgemeinsten Begriffen von Sein, Zahl, Dauer usw., die zu allem passen, was wir uns vorstellen können, haben wir für den Körper im besonderen nur den Begriff der Ausdehnung, aus dem diejenigen der Gestalt und der Bewegung folgen; und für die Seele allein haben wir nur den Begriff des Denkens, in dem die Wahrnehmungen des Verstandes sowie die Neigungen des Willens enthalten sind; schließlich für die Seele und den Körper zusammen haben wir nur den Begriff ihrer Vereinigung, wovon derjenige der Kraft abhängt, welche die Seele hat, den Körper zu bewegen, und welche der Körper hat, auf die Seele zu wirken, indem er ihre Gefühle und Leidenschaften verursacht. (AT III 665,9-23; Pfalz, 9)

Von der Pfalz hinterfragt die Vereinigung dieser Beziehung von Geist und Körper, welche für die cartesische Metaphysik und jede Form der daraus abgeleiteten Erkenntnis grundlegend ist (cf. AT III 683-685; Pfalz, 15/17/19). Descartes antwortet darauf am 28.6.1643:

Die metaphysischen Gedanken aber, welche den reinen Verstand schulen, dienen dazu, uns mit dem Begriff der Seele vertraut zu machen; und das Studium der Mathematik, das hauptsächlich die Einbildungskraft durch die Betrachtung der Gestalten und der Bewegungen schult, gewöhnt uns daran, recht deutliche Begriffe des Körpers zu bilden; und schließlich lernt man die Vereinigung der Seele mit dem Körper zu begreifen nur durch das Leben und alltägliche Gespräche sowie durch den Verzicht auf die Meditation und auf das Studium jener Sachen, welche die Einbildungskraft schulen. (AT III 692,9-18; Pfalz, 23)

Die wechselseitigen Prägungen analog zu „Wachs und Siegel“, zwischen den unterschiedlichen geistigen Kompetenzen und deren körperlichen Weiterleitungen werden zu einer reflexiven Praxis des beständigen Tuns. Die Beantwortung, wie sich die Kausalitäten der materiellen Welt zu den Möglichkeiten des Geistes verhalten, und wie aus einem Wollen eine körperliche Bewegung wird, hatte Descartes – wie schon in *Le Monde* (AT XI 180,1-2; *Le Monde*, 283) – vertagt. Diese Abhandlung war als 6. Teil der *Prinzipien* projektiert (cf. Wohlers 2005, XVIII). Sie ist aber nicht mehr entstanden. Die Frage der Vereinigung von Körper und Seele wird dafür in den ersten 5 Briefen des Briefwechsels mit Elisabeth von der Pfalz behandelt (Ribordy, X).

die Frage nämlich, ob und in welcher Weise der menschliche Geist oder der Geist eines Engels die Kraft besitzen, Körper zu bewegen, beachte ich jetzt nicht, sondern bewahre sie für die Abhandlung *Über den Menschen* auf. (AT VIII/1 65; 2.§40, Prinzipien, 145)

In seinem *Brief an Picot* wiederholt Descartes die Wichtigkeit einer metaphysischen Grundlegung seiner Philosophie. Sein Bewusstsein liegt im Verstand und dieser nimmt kraft seiner äußeren Sinne und dank der Existenz Gottes die Welt wahr. Jede Wahrnehmung als Basis für Erkenntnis ist dem Sein geschuldet.

Dieses Buch habe ich in vier Teile geteilt, von denen der erste die Prinzipien der Erkenntnis enthält, also das, was man die Erste Philosophie oder auch die Metaphysik nennen kann. (AT VIII/2 16,12-14; Picot, 163)

Die Zeit nach der Publikation der *Meditationen* war geprägt vom akademischen Disput um die Vereinbarkeit der traditionellen, christlich-scholastischen Wissenschaft mit der cartesischen. Die Universität von Utrecht war die erste, welche die cartesische Sicht lehrte, aber auch die erste die diese wieder verbot (Ebbersmeyer, 17). In einem Brief vom 1.8.1644 schreibt Elisabeth von der Pfalz über ihren Wunsch ihre eigenen Verstandeskkräfte auszubilden. Dieser Wunsch wird aber durch einen Mangel an cartesischer Gelehrsamkeit in den Universitäten behindert:

Diesem Willen verdanke ich die Einsicht in Ihre Werke, die nur denjenigen dunkel sind, die sie mit den Prinzipien des Aristoteles prüfen, oder mit äußerst wenig Sorgfalt, wie zum Beispiel die Vernünftigsten unserer Doktoren in diesem Lande mir gestanden haben, daß sie Ihre Werke nicht studieren, weil sie zu alt sind, um mit einer neuen Methode anzufangen, insofern sie die Kraft des Körpers und des Geistes in der alten Methode verbrauchen. (AT IV 132,2-10; Pfalz, 59)

Der 1. Teil der *Prinzipien* reflektiert auf die Frage, wie Menschen erkennen und beantworte diese mit seiner Methode. Die danach folgenden 3 Teile zu Ontologie und Mechanik, Astronomie und Kosmologie sowie der Erde (Wohlers 2005, XVIII) behandeln physikalische Probleme, deren Erklärungen heute weitgehend obsolet sind. Einzig seine Wirbeltheorie kann als Beginn von Überlegungen zur Entstehung von Sternen und Planeten im Universum betrachtet werden (cf. Wohlers 2005, LXVI). Im Übrigen konnten seine prosaischen Vorschläge zur Beschreibung physikalischer Phänomene schon seinerzeit nicht mehr mit den mathematisch korrekten Formulierungen durch Galilei und dann insbesondere Newton mithalten. Ich werde daher nur auf die methodisch relevanten Aspekte eingehen, welche Descartes im Wesentlichen im ersten Kapitel „Über die Prinzipien der menschlichen Erkenntnis“ ausführte sowie auf seine Beschreibung der Beziehung von Ausdehnung und Zahl als Repräsentation zur Beschreibung physikalischer Phänomene. Schon im Widmungsschreiben der *Prinzipien* an Elisabeth von der Pfalz hält Descartes das Spannungsverhältnis zwischen der abstrakten Mathematik und seiner Ontologie fest:

[Die bisher publizierten] Abhandlungen scheinen nämlich den meisten anderen Menschen – auch den geistreichsten und gelehrtesten – äußerst dunkel zu sein, und gewöhnlich widerfährt es fast allen, daß sie, wenn sie in der Metaphysik bewandert sind, vor der Geometrie zurückschrecken, wenn sie sich aber in der Geometrie auskennen, das, was ich über die Erste Philosophie geschrieben habe, nicht verstehen. (AT VIII/1, 4, Prinzipien, 7)

2.5.1. Über die Prinzipien der menschlichen Erkenntnis

Die Quelle wahrer Erkenntnis liegt im radikalen Zweifel. Nur das, was einem selbst deutlich und klar, also gewiss ist, darf akzeptiert und zur Basis weiterer analytisch begründeter Deduktionen werden. Diese Pflicht zum Zweifel besteht auch gegenüber den von Mathematikern vorgelegten Beweisen. Viele Irrtümer ergeben sich durch ein unbedachtes sich Verlassen auf als sicher angenommene Mutmaßungen.

Wir werden auch alles übrige bezweifeln, was wir vordem für äußerst gewiß gehalten haben, die Beweise der Mathematiker nicht weniger als jene Prinzipien, von denen wir angenommen haben, sie seien aus sich selbst heraus verständlich. (AT VIII/1 6; 1.§5, Prinzipien, 13)

Im bewussten Bedenken liegt das Wesen des Menschen. Das dazu notwendige Denken ist „alles, was auf bewusste Weise in uns geschieht“ und umfasst „Einsicht, Wollen, Vorstellen“ und sogar „Empfinden“ (AT VIII/1 9; 1.§9, Prinzipien, 17). Diese Rückführung auf intuitive

Erkenntnis erlaubt den Aufbau wahren Wissens auf einem sicheren Fundament im Gegensatz zu den verdunkelnden Bestimmungen der Logiker.

Wiederholt schon habe ich die Philosophen darauf aufmerksam gemacht, sie nicht gut daran tun, wenn sie versuchen, die allereinfachsten Sachverhalte, die doch zuvor selbstverständlich waren, mit Hilfe der Definitionen der Logiker zu erläutern; auf diese Weise nämlich haben sie sie verdunkelt. Wenn ich nun jenen Satz, *ich denke, daher bin ich*, den ersten und sichersten genannt habe, auf den jeder regelgeleitet Philosophierende stößt, dann habe ich damit nicht bestreiten wollen, daß es zuvor nötig ist, zu wissen, *was Denken ist, was Existenz, was Gewißheit*, und ebenso daß es nicht möglich ist, *daß das, das denkt, nicht existieren sollte* und dergleichen Dinge mehr, sondern ich habe nur sagen wollen, daß ich es nicht für zweckmäßig erachtet habe, sie hier aufzuführen, weil sie die allereinfachsten Grundbegriffe sind und für sich genommen die Kenntnis der realen Existenz keines einzigen Dinges herbeiführen. (AT VIII/1 10-11; 1.§10, Prinzipien, 17/19)

Ein „Sein“ folgt nicht aus einer rhetorischen Bestimmung, sondern aus einer aus Intuition abgeleiteten sicheren Erkenntnis. In der Sprache kann Mögliches und Unmögliches in verständlicher Form beschrieben und bestimmt werden. Die Befolgung sprachlicher Regeln macht aber das Unmögliche nicht möglich. Nur das methodische Vorgehen auf Basis intuitiver Einsichten in der geordneten deduktiven Bewegung schafft dies. Die Bindung der Erkenntnis an diese Gewissheiten verlangt die Erfassung der Realitäten der *res extensa* durch den menschlichen Geist. Eine rein rhetorische Ausdrucksform der *res cogitans*, sei es in der rein formalen Algebra als Sprache der Mathematiker oder in den verdunkelnden Syllogismen als Sprache der Scholastiker, schafft das nicht. Der sprachliche Ausdruck muss repräsentieren, was ist, um dieses Sein zu erklären. Für Descartes erlaubt nur die geordnete Rückführung auf die grundlegendsten Prinzipien die Formulierung von Hypothesen, welche die spezifischen Phänomene der Welt erklären.

Ebenso werden diejenigen, die sich vor Augen halten, wie viel über den Magneten, das Feuer und den Aufbau der gesamten Welt hier aus einigen wenigen Prinzipien hergeleitet worden ist, selbst wenn sie meinten, daß diese Prinzipien nur zufällig und ohne Grund von mir angenommen worden sind, vielleicht dennoch anerkennen, daß es kaum hätte geschehen können, daß so vieles sich mit anderem in Übereinstimmung befände, wenn diese Prinzipien falsch wären. (AT VIII/1, 328; 4.§205, Prinzipien, 631)

Während der junge Descartes die absolute Gewissheit grundlegend für echtes und damit nutzbares Wissen angesehen hat, relativiert der klassische Descartes (cf. Gäbe, 56) diesen Anspruch in den Prinzipien. Beobachtbare Wirkungen können verschiedene, nicht direkt beobachtbare Ursachen haben, analog zu den unterschiedlichen Uhrwerken von Uhren, welche doch alle die gleiche Zeit zeigen (AT VIII/1 326/327; 4.§204, Prinzipien, 629). Die geforderte Gewissheit der Intuition ist durch das nicht einsehbare Wesen der Dinge eingeschränkt.

But Descartes is clear that whatever its virtues, hypothetical argument does not yield certainty, and in endorsing it in the Principia, he is clearly changing his view in a very significant way. (Garber, 127)

Der Nutzen einer Erklärung liegt nicht in der Gewissheit, sondern in ihrer Bewährung in der Vorhersage künftiger Wirkungen (cf. Garber, 128).

2.5.2. Die Beziehung von Quantität und Zahl

Erkenntnis ist das Ergebnis eines Abgleichs von im Verstand vorhandenen intuitiven Ideen, daraus abgeleiteter Grundbegriffe und aus diesen geformten Beweisen. Dabei ist für Descartes die Idee Gottes, welche er in den *Mediationen* abgeleitet hat, ultimates Fundament jeder Erkenntnis der Welt.

So hat er zum Beispiel Ideen von Zahlen und geometrischen, bzw. mathematischen Figuren in sich, und inmitten all dieser allgemeinen Grundbegriffe den, daß, wenn Gleiches dem Gleichen hinzugefügt wird, die Ganzen gleich sind, und dergleichen mehr, aus dem leicht bewiesen werden kann, daß die drei Winkel des Dreiecks gleich zwei Rechten sind, usw. (AT VIII/1 9; 1.§13, Prinzipien, 21)

Dabei ist unendlich ein Attribut, das nur Gott zukommt, während alle die *res extensa* betreffenden Dinge von Descartes nur als unbestimmt gesehen werden (AT VIII/1 14/15; 1.§26, Prinzipien, 35). Der unendliche Ratschluss Gottes kann vom menschlichen Verstand nicht erfasst werden. Daher kann auch nicht auf den Zweck der Schöpfung geschlossen werden. Diese läßt sich aber an ihren Wirkursachen im Rahmen der menschlichen Wahrnehmung erfassen (AT VIII/1 19/20 1.§28, Prinzipien, 37). Auf diese Kausalität darf das menschliche Erkenntnisvermögen vertrauen, wenn es einen Gegenstand klar und deutlich erfasst.

Zu Recht nämlich würde Gott ein Betrüger genannt werden, wenn er uns das Erkenntnisvermögen als Fähigkeit verliehen hätte, das Verkehrte oder Falsche für das Wahre zu halten. Auf diese Weise hebt sich jener radikale Zweifel auf, der sich aus der Überlegung ergeben hatte: daß wir nicht wüßten, ob unsere Natur vielleicht so beschaffen sei, daß wir uns sogar in dem täuschen, das uns das Evidenteste zu sein scheint – so daß sich auch alle anderen zuvor durchlaufenen Ursachen des Zweifels von diesem Prinzip her leicht aufheben. Denn sogar die höheren Wahrheiten der Mathematik können keinen Argwohn mehr hervorrufen, weil sie ganz zuverlässig sind. (AT VIII/1 16 1.§30, Prinzipien, 39)

Die so als gewiss erkannte Mathematik liefert die Methode, um die durch die Erfassung ihrer Eigenschaften bestimmbaren Dinge oder deren Zustände darzustellen und zu erkennen.

Alles, was unserer Erfassung unterworfen ist, betrachten wir entweder gleichsam als Ding, als Zustand eines Dinges, oder als eine jener ewigen Wahrheiten, die außerhalb unseres Denkens keine Existenz besitzen. (AT VIII/1 23 1.§48, Prinzipien, 53)

Für das menschliche Erkenntnisvermögen sind Dauer, Ordnung und Zahl von Dingen oder ihren Zuständen deutlich einsehbar, wobei diese als Zustand, Wesensmerkmal oder Eigenschaft eines Dinges erfasst werden (AT VIII/1 27; 1.§57, Prinzipien, 61). Diese einsehbaren

Gegebenheiten lassen sich zahlenmäßig im Verstand repräsentieren. Zahlen an sich sind aber rein abstrakte Symbole, um Dinge gedanklich zu ordnen – so wie es den Universalien von Gattung, Art, Unterschied, Wesenseigenschaft, und Akzidenz auch zukommt:

Ebenso ist die Zahl, insofern sie nicht an irgendwelchen geschaffenen Dingen, sondern nur für sich selbst, d. h. als Gattung betrachtet wird, lediglich ein gedanklicher Zugriff – wie alles andere auch, das wir als Universalie bezeichnen. (AT VIII/1 27; 1.§58, Prinzipien, 63)

Mittels dieser gedanklichen Zugriffe können wir unterschiedlichster Mannigfaltigkeiten einzelnen Ideen zuordnen, ohne auf das Wesen der Dinge zu achten: zwei Steine oder zwei Vögel stehen für die Idee der Zweiheit und drei Linien für das Dreieck, welches in Wesenseigenschaften wie „rechtwinkelig“ oder „schiefwinkelig“ mit jeweils spezifischen Attributen geordnet werden (AT VIII/1 27; 1.§59, Prinzipien, 63/65). Aus Unterschiedlichkeiten oder Gleichheiten lassen sich so neue Erkenntnisse deduzieren. Dabei ist das Denken aber seinen eigenen Vorurteilen und Vorbedingungen verhaftet, welche die Freiheit der Vernunft einschränken. Eine derartige Beschränkung liegt darin, dass Denken sich immer einer Sprache und deren Vokabular bedienen muß, um sich auszudrücken. Diese semantische Gebundenheit des Denkens verleitet dazu, der Rhetorik und nicht der Methode zu folgen (AT VIII/1 37; 1.§74, Prinzipien, 85/87).

Am Ende des zweiten Teils der *Prinzipien*, welcher die *res extensa* betreffende physikalische Grundsätze behandelt, führt Descartes diese auf jene „der Geometrie oder der reinen Erkenntnis (Mathesis abstracta)“ zurück, „weil sich auf diese Weise alle Naturphänomene erklären und sie durch sichere Beweise bestätigt werden können“ (AT VIII/1 31; 1.§64, Prinzipien, 173). Der Begriff der „Mathesis abstracta“ entspricht der Algebra, welche streng methodisch, aber abstrakt die Relationen zwischen Dingen geordnet beschreiben läßt und so durch die Erkenntnis von in Quantitäten gegebenen Gleichheiten neue Lösungen findet.

Denn völlig frei bekenne ich, daß ich keine andere Materie der körperlichen Dinge zugestehe, als jene in jeder Weise teilbare, formbare und bewegliche, die die Geometer Quantität nennen und die sie als Gegenstand ihren Beweisen zugrunde legen; und ich vermag nichts anderes in ihr zu erblicken außer jene Teilungen, Gestalten und Bewegungen; und ich gestehe in bezug auf sie nichts als wahr zu, das nicht aus jenen allgemeinen Grundbegriffen, deren Wahrheit wir nicht bezweifeln können, so evident hergeleitet ist, daß es als mathematischer Beweis gelten könnte. (AT VIII/1 79; 2.§64, Prinzipien, 175)

Am Ende der *Prinzipien*, bevor er sich im letzten Paragraphen dem ultimativen Urteil der Kirche unterwirft, bekräftigt Descartes die Gewissheit seiner Metaphysik und die Beweiskraft der Mathematik.

Außerdem gibt es einiges, auch bei den natürlichen Dingen, das wir für absolut und mehr als bloß moralisch gewiß halten, nämlich dasjenige, was sich auf das metaphysische Fundament stützt,

daß Gott von höchster Güte und geringstem Trug ist und daß daher das Vermögen, das er uns gegeben hat, um das Wahre vom Falschen zu unterscheiden, sofern wir uns seiner recht bedienen, nicht irren kann, und daß das, was wir mit seiner Hilfe deutlich erfaßt haben, kein Irrtum ist. Von dieser Art sind die Beweise der Mathematik (AT VIII/1 328; 4.§206, Prinzipien, 633)

Wissen schafft, wer sich aus einer fundamentalen Gewissheit Schritt für Schritt zu neuen Gewissheiten vorarbeitet. Die permanente Reflexion auf die erreichte, eigene Gewissheit ist integraler Bestandteil von Descartes Methode, um Wissen zu erlangen. Dabei bleibt Wissen auf die erfahrbaren Gegebenheiten beschränkt. So leitet Descartes die Erkenntnis der Existenz eines größten, hinter allem Erfahrbaren stehenden Prinzips rational ab (cf. AT VIII/I 10f; 1.§16, Prinzipien, 25). Damit ist die Existenz eines unbegreiflichen Gottes als jenseits der Erfahrung stehend für ihn gewiss. Erst mit der Erkenntnis der Existenz Gottes wird die erfahrbare Welt eine reale Gewissheit, welche durch Wissenschaft erkannt wird (cf. AT VII 65,16-66,2 Mediationen, 71). Wissenschaft ist für Descartes eine eigenständige Domäne, welche aber willentlich der Offenbarung Gottes, dem als einzigem der Begriff des Unendlichen zugeschrieben werden kann, zu unterwerfen ist (cf. AT VIII/I 80f; 3.§2, Prinzipien, 177/179).

3. Ausblick auf die Entstehung des Formalismus auf Basis der Algebra

In diesem Teil zeige ich, wie die Algebra, welche von Descartes in der *Geometrie* mit der analytischen Geometrie integriert wurde, die Führungsrolle in der Erkenntnistheorie erlangte. Rein abstrakt, aber mit scheinbar unbeschränkter Problemlösungskompetenz löste sie sich dabei von der für Descartes als grundlegend angesehenen Intuition. Der formalistische Rahmen zeigt fünf Wesensmerkmale (Detlefsen, 236f):

- (i) Der mit zählbaren Mengen arbeitenden algebraischen Arithmetik kommt Priorität gegenüber der mit messbaren Größen arbeitenden Geometrie zu.
- (ii) Die geometrische Konstruktion als Ursache ist nicht mehr der einzige Beweis für die durch diese Konstruktion verursachte Wirkung.
- (iii) Die syntaktische Abstraktion ersetzt die Intuition als Basis für gesichertes Wissen.
- (iv) Die Operationen erfolgen nach Regeln ohne Bezug auf eine semantische Bedeutung der verwendeten Symbole.
- (v) Die Regeln sind unter Beachtung ihrer Nützlichkeit und ihrer Widerspruchsfreiheit frei wählbar.

Die Entwicklung der Mathematik als Formalismus wurde ab dem 17. Jahrhundert durch neue Techniken getrieben. Diese konnten auf der von Descartes aufbauen, während die euklidische Geometrie in ihrer Anschaulichkeit beschränkt blieb. Die Mathematik wurde zur Sprache, um Symbole nach Regeln zu verknüpfen und so in eine kontinuierlich fortschreibbare Beziehung zu setzen.

Die auf Aristoteles zurück gehende Unterscheidung zwischen (i) arithmetisch diskreten zählbaren Mengen und (ii) geometrisch kontinuierlichen messbaren Längen war noch in den *Regulae* bei Descartes relevant. Die irrationalen Zahlen waren nur geometrisch darstellbar und konnten erst durch die algebraische Integration in der Arithmetik symbolisch dargestellt werden. Dieser nützliche Symbolismus wurde dann mit der imaginären Zahl $i = (\sqrt{-1})$ fortgesetzt. Die arithmetischen Operationen konnten damit vom Zahlenstrahl der Reellen Zahlen auf die Gauß Ebene der Komplexen Zahlen erweitert werden. Die Anschaulichkeit dessen, was konstruktiv geschieht geht dabei verloren. Die von Descartes geforderte Gewissheit auf jeder Stufe der Erkenntnis wird auf die sichere Anwendung der Rechenregeln reduziert. In seiner Regel III bestimmte Descartes die Intuition als

einen zweifelsfreien Begriff des reinen und aufmerksamen Geistes, der allein im Licht der Vernunft seine Wurzel hat und deshalb sogar gewisser ist als die Deduktion selbst, weil er

einfacher ist als sie, die ihrerseits freilich vom Menschen auch nicht verkehrt durchgeführt werden kann, worauf wir oben bereits hingewiesen haben. (AT X 368, 18-23; Regulae, 19, 8,14,18)

Während Descartes den Begriff der Intuition rational über die gedankliche Reflexion des klar und deutlich Erfassten bestimmte, sah ihn John Locke 1689 empirisch bestimmt. Durch die Abstraktion von Vorstellungen von Gegenständen auf Symbole kann deren logische Ordnung mittels algebraischer Gleichungen hinsichtlich Schlüssigkeit und Gültigkeit bestimmt werden, wie 1786 von Johann Heinrich Lambert festgestellt wurde. (Detlefsen, 251).

Immanuel Kant besetzte in seiner „Kritik der reinen Vernunft“ 1781 eine Mittelposition mit seiner Differenzierung zwischen reiner und empirischer Anschauung.

Auf welche Art und durch welche Mittel sich auch immer eine Erkenntnis auf Gegenstände beziehen mag, so ist doch diejenige, wodurch sie sich auf dieselbe unmittelbar bezieht, und worauf alles Denken als Mittel abzweckt, die Anschauung. [...] Die Wirkungen eines Gegenstandes auf die Vorstellungsfähigkeit, so fern wir von demselben affiziert werden, ist Empfindung. Diejenige Anschauung, welche sich auf den Gegenstand der Empfindung bezieht, heißt empirische Anschauung. [...] Ich nenne alle Vorstellungen rein (im transzendentalen Verstande) in denen nichts, was zur Empfindung gehört, angetroffen wird. Demnach wird die reine Form sinnlicher Anschauung überhaupt im Gemüte a priori angetroffen werden, worinnen alles Mannigfaltige der Erscheinungen in gewissen Verhältnissen geschaut wird. Diese reine Form der Sinnlichkeit wird auch selber reine Anschauung heißen (Kant, A19– 20, B33–35)

Die reine Form der Anschauung in Raum und Zeit ist dabei die Bedingung der Möglichkeit jeder empirischen Wahrnehmung. Der Formalismus agiert unabhängig von Intuition und Anschauung rein auf den syntaktischen sprachlichen Ausdruck bezogen. Dessen ungeachtet, schließt der Formalismus Intuition und Anschauung nicht aus. Er benutzt die mathematischen Regeln zur Beschreibung der in Raum und Zeit gegebenen Dinge als invariantes Element der Form (Detlefsen, 253). Die Verallgemeinerung durch die algebraische Symbolik erlaubt es, losgelöst von konkreten Situationen, Relationen darzustellen. Die Ausarbeitung einer Methode als allgemeinster Verallgemeinerung war, wie ich im ersten Teil gezeigt habe, Descartes Leitmotiv (cf. Detlefsen, 254). Die Invarianz dieser symbolisch abstrahierten Elemente erlaubt die regelkonforme arithmetische Behandlung von Elementen, denen jede Anschaulichkeit fehlt, wie z.B. des Unendlichen oder der $(\sqrt{-1})$. Dadurch können Denkmodelle jenseits der anschaulichen Geometrie geschaffen werden. Wie Descartes algebraische Gleichungen die Existenz der ihnen entsprechenden Kurven begründen, so begründen die Symbole für „ ∞ “ oder „ i “ invariante mathematische ideale Objekte welche nach invarianten Regeln operabel, aber nicht vorstellbar sind (Detlefsen, 260). Durch den Verzicht auf eine Perspektive, wie sie jeder Anschauung zugrunde liegt, schafft die formalistische Invarianz Objektivität. Der Formalismus schafft eine instrumentelle Konzeption der Sprache für das Denken, welche über den intersubjektiven Ansatz hinaus geht. Dazu können Regeln frei bestimmt werden und die

Symbole losgelöst von jeder semantischen Bedeutung nach diesen Regeln behandeln. Niemand der mit ∞ operiert, muss sich das Unendliche vorstellen. Man muß nur diszipliniert die Regeln einhalten und damit der von Descartes geforderten methodischen Disziplin folgen (Detlefsen, 263). Die von Descartes geforderte reflexive Gewissheit auf jeder Stufe der Erkenntnis ist damit aber nicht mehr anschaulich möglich. Die Intuition tritt während der algebraischen Operationen in den Hintergrund. Um 1840 formulierte George Peacock in Cambridge die formalen Bedingungen einer universell anwendbaren Algebra. Deren Symbole sind während der Operationen durch syntaktische Manipulationen einfache Platzhalter. Im Zuge dieser regelkonformen Operationen bleiben äquivalente Formen erhalten, völlig unabhängig von den verwendeten Symbolen. Erst am Ende der Rechnung kommt es zu einer Interpretation der Lösung. Die Algebra definiert dazu Regeln für die Bedingungen der Operationen und erlaubt so die Interpretation der Lösung. Da die Algebra aus der Arithmetik entwickelt wurde, hat sie die Regeln der Arithmetik zu übernehmen und durch neue Regeln zu ergänzen, welche den Bedingungen von Widerspruchsfreiheit zu den bestehenden Regeln und der Nützlichkeit entsprechen müssen. (Detlefsen, 274f). Mit diesen Bedingungen hat Peacock als Mathematiker Regeln der Mathematik formuliert. Die implizite Zirkularität der Verwendung mathematischen Wissens zur Lösung mathematischer Probleme bei Peacock spiegelt die Reflexivität Descartes, wie er sie mit der Befreiung der Algebra von ihren Schnörkeln durch die Methode der Algebra oder der gegenseitigen Klärung von Geometrie und Algebra beschreibt. Der Erfolg der Methode induziert aber die Berechtigung dieses Vorgehens (Linnebo, 15).

In den nächsten Kapitel zeige ich, wie die so in der Arithmetik fundierte Algebra alle Probleme als formal lösbar erscheinen ließ. Im darauf folgenden Kapitel stelle ich dar, wie die Grenzen des Formalismus evident wurden. Am Schluss hinterfrage ich mit Paul Feyerabend die Möglichkeit der von Descartes postulierten Universalität einer Methode.

3.1. Ignorabimus Streit und Cantors Grundlegung

Die von Peacock formulierte Konzeption einer symbolischer Algebra, deren Regeln unter den Bedingungen von (i) Erhalt der arithmetischen Regeln, (ii) Widerspruchsfreiheit untereinander, und (iii) im Übrigen nach Nützlichkeit frei wählbar waren, wurde zur allgemeinen Basis des Formalismus, welchem über das Prinzip des Erhalts von Äquivalenz zur Repräsentation aller sonstiger Verhältnisse die Mächtigkeit zugetraut wurde, alle Problemstellungen bei vollständiger Gegebenheit aller relevanten Relationen lösen zu können. Diese Ausgangsbedingung deckt sich mit Descartes Forderung nach einer „hinreichenden und geordneten Aufzählung“, wie er sie in Regel VII bestimmt hat. Die Vorstellung, dass mittels

Algebra alle Probleme lösbar werden, war nicht unumstritten. Das Ende des 19. Jahrhunderts war in Deutschland vom Ignorabimus Streit geprägt, in dem die Ansicht, dass es permanente, unüberwindliche Schranken eines beweisbaren Wissens gibt mit jener der immer möglichen algebraischen Lösbarkeit kollidierten. Der Berliner Physiologe Emil du Bois-Reymond, argumentierte in den 1870ern, dass es unmöglich sei, alle Wahrheiten der Mechanik zu ergründen und sein Bruder übertrug diese Ansicht auf die Mathematik (Detlefsen, 280). David Hilbert hielt 1901 in Abwandlung von Viètes Motto “Kein Problem bleibt ungelöst” fest, dass es keinen Ignorabimus gibt (Detlefsen, 280f; Linnebo, 170). Ob sich dies nur auf die Mathematik beschränkt oder auf alle Domänen blieb dabei unspezifiziert. Ein Axiom der Lösbarkeit findet sich grundlegend im Fundamentalsatz der Algebra, welcher sagt, dass jedes Polynom mittels Komplexer Zahlen und den die Reellen Zahlen erweiternden Regeln in der Gauß Ebene lösbar ist (cf. Alten, 355). Es zeigte sich aber, dass nicht alle Regeln der Arithmetik von den Reellen auf die Komplexen Zahlen oder alle für zwei Dimensionen geltende Regeln auf höhere Dimension übertragen werden können (Detlefsen, 286). Die Frage war, (i) welche Regeln fundamental zu übernehmen waren, (ii) wie diese allgemein formuliert werden können und (iii) wie die Widerspruchsfreiheit und Konsistenz eines Systems gesichert werden konnten. Hilbert schlug dazu die Annahme von Axiomen vor, welche (i) Grundbegriffen eine Bedeutung geben, (ii) alle mit diesen Begriffen möglichen Operationen vollständig vorgeben, und (iii) ohne Vorverständnis existieren (Detlefsen, 296). Damit kommt den Axiomen eine über die reine Syntax hinausgehende Bedeutung zu. Wenn alle Axiome eines formalen Systems widerspruchsfrei sind, dann existieren die so definierten Begriffe. In einem langen Briefwechsel zwischen Hilbert und Gottlob Frege wurden die Implikation und die Zulässigkeit der Übertragung arithmetischer auf geometrische Axiome diskutiert. Frege nahm dabei eine rein syntaktische Position ein.

Frege's Bedenken gegen Hilberts Umgang mit den Termini „Axiom“, „Definition“, „Erklärung“ u.a. veranlassen ihn schließlich zu einer ausführlichen brieflichen Anfrage vom 27.12.1899 (XV/3) bei Hilbert, die eine längere Auseinandersetzung einleitet. XV/3 moniert Hilberts nicht präzisen Gebrauch des Terminus „Erklärung“ und nimmt Anstoß an Hilberts Redeweise, daß Axiome Begriffe *definieren*. Frege spricht sich dafür aus, Definitionen als „Festsetzungen“ klar von Axiomen zu unterscheiden, die er entgegen Hilberts Intentionen weiterhin als Behauptungen versteht. Gegen das Unternehmen eines Widerspruchsfreiheitsbeweises für das Hilbertsche Axiomensystem wendet er ein, daß die Widerspruchsfreiheit schlicht aus der Wahrheit der Axiome folge. (Gabriel, 1)

Auch wenn Frege die Argumente Hilberts für dessen Axiomatik wegen deren semantischen Gehalt nicht akzeptierte, schien es, dass die von Hilbert vorgeschlagenen Kriterien für eine in sich vollständige Widerspruchsfreiheit formaler Systeme beweisbar seien und es jedenfalls in der Mathematik keinen Ignorabimus gebe. Der Nachweis der vollständigen

Widerspruchsfreiheit der Mathematik war zwar noch offen, stand aber an zweiter Stelle der von Hilbert am Mathematikerkongress 1900 als offene mathematische Probleme beschriebenen Fragen.

Die von Georg Cantor entwickelte Mengenlehre, zeigte, dass die Menge aller Reellen Zahlen am Zahlenstrahl vollständig abbildbar ist und so jede beliebige Menge von Reellen Zahlen eine obere und untere Schranke hat, und damit die für die Analysis von Funktionen notwendige Vollständigkeit gegeben ist. Cantors Mengenlehre war daher eine Vorbedingung für Hilberts Axiomatik (cf. Alten, 521f). Mit der Erweiterung der Zahlenmengen von den Natürlichen über die Rationalem und die Irrationalen auf die Reellen Zahlen am Zahlenstrahl, sowie deren Erweiterung auf die komplexen Zahlen in der Gauß Ebene, schuf Cantor den formalen Rahmen, um jede geometrische Konfiguration arithmetisch zu klären. Gleichzeitig machte er das Symbol „ ∞ “ operabel, indem er die Mächtigkeiten von Mengen im gegenseitigen Verhältnis bzw. als Mengen von Mengen und damit die Kardinalität verschiedener unendlicher Mengen bestimmte (cf. Linnebo, 60). Mit Cantors Mengenlehre konnte das algebraische Prinzip des Erhalts gleicher Formen über Korrelationen erklärt werden. Die Zahl der Dinge, welche hinsichtlich der Eigenschaften F und G korrelieren entspricht einer ganzzahligen Kardinalität (Linnebo, 29). Aus dieser arithmetischen Gleichzähligkeit können neue Begriffe, z.B. für Klassen unendlicher Mengen, in Form von Äquivalenzklassen gebildet werden.

Aufbauend auf der Mengenlehre zeigte Frege, wie sich die für Descartes intuitiv einsichtige Wahrheit von „ $2 + 2 = 4$ “ notwendigerweise und allgemein aus Regeln als wahr beweisen läßt. Für Frege sind mathematische Symbole rein platonistische Abstraktionen, welche nach den Regeln der Logik ohne Anschauung ihrer Objekte manipuliert werden können. Daher ist die Mathematik als größte vorstellbare Domäne für alle Wissenschaften relevant (Linnebo, 21). Die Exaktheit des Ausdrucks ist maßgeblich und diese ergibt sich aus der Axiomatik, für welche Frege Quantoren zur Präzisierung einführte. (Linnebo, 24). Er zeigte, dass arithmetisches Zählen eine Abfolge der um jeweils 1 erhöhten Menge des Vorgängerelements darstellt. Die Kardinalität ist damit die Menge der von Null ausgehenden Erhöhungsmengen. (Linnebo, 34). Die Allgemeinheit dieses Ansatzes zeigt, dass „ $2 + 2 = 4$ “ nicht bloß „richtig“, wie es aus der Erfahrung der Anschauung geschlossen werden kann, sondern tatsächlich „wahr“ ist, wie es sich aus der rein formalen, allgemeinen Vorschrift mit Mengen ergibt (Linnebo, 19). Freges Ansatz konzeptualisierte die Zahlen in Form eines Theorems.

3.2. Russells Paradoxien und Gödels Unvollständigkeit

Während in Deutschland Frege, Cantor und Hilbert die sprachliche Struktur der abstrakten Mathematik diskutierten, fand Bertrand Russell im Gebäude der Mengenlehre ein Paradoxon, über welches er Frege mit Brief vom 22.6.1902 informierte (Gabriel, 59) und über welches ein umfangreicher Schriftwechsel zwischen Russell und Frege zur Suche nach einer Auflösung dieses Problems entstand (Besler, 88). Wenn es eine Menge aller Mengen gibt, welche sich selbst nicht beinhalten, dann muss diese Menge selbst Element ihrer selbst sein um tatsächlich alle Mengen, die sich nicht selbst beinhalten zu umfassen. Wenn sie aber sich selbst beinhaltet, verstößt sie gegen die Regel, nach der sie zu bilden ist. Russell zeigte diese Antimonie auf: wenn $x \in y$ dann gilt $\exists F (y = \{u \mid F u\} \wedge F x)$: x ist Element der Menge y , wenn y die Menge aller Elemente mit der Eigenschaft F ist und x auch diese Eigenschaft hat. Wenn r die Menge aller Mengen ist, die sich nicht selbst beinhalten, was für eine Menge ist dann r ? Wenn r die Bedingung erfüllt, muss sie sich selbst enthalten und erfüllt damit die Bedingung nicht. Wenn r sich nicht selbst beinhaltet, erfüllt sie die Bedingung, und muß sich daher selbst enthalten. In jedem Fall ist die Annahme widersprüchlich. Diese Widersprüchlichkeit ist unauflösbar. Freges rein syntaktischer Ansatz ist damit anschaulich gescheitert (Linnebo, 37). Die reine Beachtung von abgeleiteten Spielregeln ist nicht ausreichend und eine minimale Semantik ist notwendig, um die der Selbstbezüglichkeit der Regel entspringende Problematik zu adressieren. Russell schlug als neue Regel vor, zwischen der Menge und ihren Elementen zu unterscheiden (Linnebo, 61). Aufbauend auf Cantors Zugang zum Unendlichen und der Ordnung unendlicher Mengen nach Mächtigkeit sowie seiner minimal semantischen Axiomatik intensivierte Hilbert seine Suche nach einem Beweis der Möglichkeit vollständiger Widerspruchsfreiheit mit einer Neuauflage seines Programms in den 1920igern (Detlefsen, 299). Mittels der finiten Ordnung infiniter Mengen sucht Hilbert nach einer Methode, um zunächst die Widerspruchsfreiheit der Mathematik aus den grundlegenden Axiomen der Arithmetik für den finiten Bereich zu beweisen. Dann sollten diese Regeln analog zu Grenzwertbestimmungen auf den infiniten Bereich verallgemeinert werden (Hilbert, 161).

Der Versuch, die vollständige Widerspruchsfreiheit der Mathematik aus ihren Axiomen heraus zu beweisen, führte Kurt Gödel 1930 im Gegenteil zum Unvollständigkeitsgesetz.

What Gödel suggests is that there is something either in the concepts represented by a set of axioms, or in our grasp of these concepts, that is not captured by the axioms themselves. (Detlefsen, 306)

Das Unvollständigkeitsgesetz zeigt, dass kein formales System hinreichend mächtig ist um alle mathematischen Aussagen widerspruchsfrei zu beweisen (Linnebo, 70). Die 1931

erfolgte Erweiterung Gödels zeigt, dass generell kein formales System seine eigene vollständige Konsistenz beweisen kann. Finite Mathematik kann weder ihre eigene vollständige Widerspruchsfreiheit noch darüber hinaus den des infiniten Teils beweisen. (Linnebo, 71). Erst wenn klar ist, dass „1“ eine andere Bedeutung hat als „0“, wird auch klar, dass „ $0=1$ “ ein Widerspruch ist. Diese Klarheit hat eine semantische Grundlage, welche außerhalb der reinen Syntax liegt (Linnebo, 44). Für Gödel ist den Axiomen etwas inhärent, dass in unserer Begrifflichkeit diese Definitionen überschreitet und aus Reflexion zu Wissen führen. Die freie Bildung von Regeln ausschließlich aufgrund der Prinzipien von Peacock ist durch diese inhärente Semantik der Symbole idealer Mathematik begrenzt (Detlefsen, 305f).

Die Algebra als Teil der Mathematik ermöglicht hochpräzise Repräsentationen (siehe S.9 oben) physischer Gegebenheiten. Die pragmatische Verwendung nichtanschaulicher Elemente, wie sie mit „ ∞ “ oder „ $i = (\sqrt{-1})$ “ gegeben sind, ermöglicht die Weiterrechnung in Bereichen, welche an sich nicht intuitiv fassbar sind. Die Regeln, nach denen die Operationen in diesem unanschaulichen Raum vorgenommen werden, sind aber nicht frei wählbar, sondern tragen Bedeutungen weiter, welche den Symbolen ursprünglich zugeschrieben wurden. So ist i^4 notwendigerweise gleich 1, weil den Symbolen für „ $\sqrt{}$ “, „1“ und „-“ bestimmte, aus der Arithmetik übernommene Bedeutungen zukommen. Diese den Symbolen zugrunde liegenden semantischen Konventionen bestimmen die Syntax, nach der die Symbole verwendet werden. Und sie bestimmen auch, wie die erreichten Lösungen zu interpretieren sind und auf die physikalische Realität angewandt werden. Die von Gödel im Unvollständigkeitsgesetzes bestimmte Selbstbezüglichkeit und die inhärente Reflexion sind nicht auf einer universellen Ebene auflösbar.

Descartes verlangte diese Reflexion auf jeder erreichten Stufe und lehnte rein mathematische Beschreibungen ab, da sie seiner Meinung nach keinen Mehrwert für die anschauliche Gewissheit erbringen (siehe Teil I, 3.2 oben). Diese von ihm postulierte Notwendigkeit der permanenten Reflexion auf allen „Stopp-Stufen“ ist durch die Erfolge der Analysis widerlegt. Die Regeln der Algebra und der Mathematik haben ihre Wirksamkeit auch in unanschaulichen Bereichen, wie im Bereich der Imaginären Zahlen bewiesen. Kurt Gödels Unvollständigkeitssatz hat aber bestätigt, dass diese syntaktische Wirksamkeit auf einer semantischen Basis aufbauen muß, welche aus einer Metaebene gewonnen werden muß. Das von Konventionen bestimmte intersubjektive Verständnis bezieht sich auch auf das Verständnis dieses Verständnisses. Unterschiedliche Konventionen schaffen unterschiedliche Zugänge zur Frage, was für einen selbst Wissen bedeutet. Die von Descartes geforderte methodische,

regelmäßige Reflexion auf Gewissheiten im eigenen Denken ist eine gute Methode, um im Pluralismus der möglichen Zugänge den besten zu suchen. Ob dies dann auch notwendigerweise die wahre Methode sein muss, diskutiere ich im letzten Kapitel mit Bezug auf Paul Feyerabends „*anything goes*“.

3.3. Universalität einer wissenschaftlichen Methode oder *anything goes*?

In seinem 1975 erschienen Essay *Against Method* argumentiert Feyerabend für die völlige Freiheit der Wissenschaft und gegen methodische Vorschriften. Diese dienen nur dazu, bekanntes fortzuschreiben und sind damit, analog zu den von Descartes verurteilten scholastischen Syllogismen, nicht geeignet neues Wissen zu schaffen, sondern nur bereits Bekanntes zu erklären.

Indeed, one of the most striking features of recent discussions in the history and philosophy of science is the realization that events and developments, such as the invention of atomism in antiquity, the Copernican Revolution, the rise of modern atomism (kinetic theory; dispersion theory; stereochemistry; quantum theory), the gradual emergence of the wave theory of light, occurred only because some thinkers either decided not to be bound by certain “obvious” methodological rules, or because they unwillingly broke them. (Feyerabend 1993, 20)

Wissenschaft ist ein rationaler Prozess, der sich im Rahmen der jeweils gültigen Konventionen abspielt. Die Konventionen unterliegen dabei über größere Zeiträume hinweg großen Veränderungen. (Feyerabend 1993, 183). Die Bestimmung der Konventionen erfolgt innerhalb der Gesellschaft, die vorgibt, welcher Disziplin tatsächlich Anerkennung als Wissenschaft gezollt wird (Feyerabend 1973, 113). Anerkennung folgt dabei nicht durch Anwendung einer universellen wissenschaftlichen Methode (Feyerabend 1993, 185). In den 1973 publizierten *Thesis for Anarchism* fordert Feyerabend volle methodische Freiheit für die Wissenschaft:

[T]he only *universal* rule that can safely be in agreement with the moves the scientist must make to advance [which] is *anything goes*. (Feyerabend 1973, 116)

Diese kreative Freiheit zur Schaffung neuen Wissens vergleicht er mit dem Dadaismus zur Hinterfragung der kommerzialisierten Regeln der Moderne. Dabei verlangt er nicht nur die Freiheit vor jeder methodischen Vorgabe, sondern auch die Freiheit von dieser Vorgabe. Der Dadaismus bezweifelt das Etablierte und führt es auf Einfaches zurück. Damit nimmt er auf paradoxe Weise aber implizit Descartes *Regulae* wieder auf.

What attracted me to [Dadaism] was the style its inventors used when not engaged in Dadaistic activities. It was clear, luminous, simple without being banal, precise without being narrow; it was a style adapted to the expression of thought as well as of emotion. I connected this style with the Dadaistic exercises themselves. (Feyerabend 1993, 196).

“True Dada is Anti-Dada” gilt für Feyerabend auch in der Wissenschaft (Feyerabend 1973, 114f). Die Menge aller möglichen Methoden umfasst auch die Menge aller Möglichkeiten ihrer eigenen Verneinung. Damit formuliert Feyerabend eine Vermengung von Meta- und Objektaussage. Deren Widersprüchlichkeit ist hier eine kreative Größe und im Gegensatz zu den Paradoxa des Formalismus von Feyerabend gewünscht, um so als “counterinduction” Gegenpositionen einzunehmen und aus diesen heraus Positionen zu hinterfragen (Feyerabend 1993, 24). Jede Erkenntnis hängt von den Umständen ab, in denen sie gewonnen wird und hat so einen perspektivischen, vorläufigen Charakter, welcher typischerweise von der Methode bestimmt wird (Feyerabend 1993, 172). Feyerabend schlägt vor, dass die einzige universelle wissenschaftliche Methode „anything goes“ ist, und damit formal das Gegenteil von Descartes disziplinierter, hinreichend vollständig und geordneter Methode.

Andererseits ist sie aber auch die perfekte Anwendung des Suchens nach intuitiver Gewissheit aus der jeweiligen eigenen Perspektive, losgelöst von in Konventionen enthaltenen Meinungen und Dogmen anderer. Diese Konventionen sind, wie bei Descartes, die Einladung zu deren Prüfung im Prozess des radikalen Zweifels.

4. Zusammenfassung

In dieser Arbeit habe ich gezeigt, wie Descartes, aufbauend auf (i) dem intuitiv erfassbaren Einfachem, (ii) in kontinuierlich zu setzenden kleinen, aber sicheren Schritten erweiternd zur Erkenntnis des komplexen Gegebenen kommt und dabei (iii) mittels Reflexion auf die eigene klare und deutliche Erkenntnis, (iv) jene Methode formulierte, welche auf Basis des Humanismus eine Grundlage der Wissenschaften in der Moderne wurde. Descartes stellt die menschliche Kraft der Erkenntnis in den Mittelpunkt seiner Methode, welche als „Verpackung“ jene Schnittstelle ist, an der die Gegebenheiten und Zusammenhänge der materiellen Welt dem geistigen Verstand auf sicherer Basis zugänglich gemacht werden. Diese „Verpackung“ ist dabei Mittel, um jedem Menschen die Erkenntnis von ihr bisher Unbekanntem mit Gewissheit zu ermöglichen.

Der „junge Descartes“ (cf. Gäbe, 68) hatte dieser Methode zugetraut, alles dem Menschen mögliche Wissen auch für jede erfahrbar zu machen: Sofern die am Modell der Algebra formulierte methodische Strenge eingehalten wird, schafft diese Methode Wissen. Der einen, universellen Wissenschaft steht diese eine Methode zur Verfügung. Diese Methode ist somit in allen wissenschaftlichen Disziplinen anzuwenden. Über die methodischen Gemeinsamkeiten schaffen die Erkenntnisse einer Disziplin Wertbeiträge in anderen Disziplinen. Interdisziplinäre Forschung hat so in der Methode den gemeinsamen Nenner. Sie ermöglicht holistisch und unter Beachtung auch außerhalb der spezifischen Disziplin liegenden Nebenbedingungen Problemlösungen zu finden. In der *Geometrie* demonstrierte Descartes dies, indem er mit der arithmetischen Technik der Algebra den seit der Antike herrschenden Stillstand in der Geometrie als führender aber eben getrennter mathematischer Disziplin überwindet. Gleichzeitig lehnte er aber die reine Mathematisierung der Wissenschaften ab: einerseits führt die rein Regel basierte, syntaktische Strenge in der Durchführung der Operationen zum Verlust der seiner Meinung nach durchgängig zu gewährleistenden anschaulichen und damit semantischen, metaphysischen Gewissheit, andererseits sind die empirisch schwer angebbaren Anfangsbedingungen seiner Meinung nach nicht belastbar und die Berechnungen komplexer physikalischer Probleme schaffen so nur ein zufälliges Scheinwissen. Der „klassische Descartes“ (cf. Gäbe, 56) erkennt die Schwierigkeit der Erlangung vollständiger Deutlichkeit. Diese aber ist die Basis für die notwendige Gewissheit, welche ihrerseits Bedingung ist, um die nächsten Schritte in der Suche nach Lösungen zu fundieren. Etwas im Ding oder Problem wird immer unklar bleiben und Wissenschaft ist ein unendlicher Prozess, welcher Erfahrung und Experiment fordert, um sich dem wahren Wissen methodisch anzunähern. Die Reichweite der

Methode bleibt jedenfalls von der Exaktheit der Bestimmung der Anfangsbedingungen beschränkt, welche ihrerseits methodisch beizubringen ist.

Die Integration von Algebra und analytischer Geometrie in der *Geometrie* reduzierte die symbolische Darstellung der Relationen zueinander in Beziehung stehender relevanter Merkmale, auf die einfache Form von quantifizierbaren Längen. Diese sind am Zahlenstrahl mittels der Reellen Zahlen vollständig abbildbar. Seine in frühen Jahren formulierte Sicht, dass die strenge Befolgung seiner Methode die Erkenntnis aller in der Welt gegebenen Zusammenhänge ermöglicht, schien bis an den Beginn des 20. Jahrhunderts mit der Entwicklung des Formalismus bestätigt zu werden. Analysis und Algebra konnten auf Basis der unanschaulichen Erweiterung der Zahlengerade zur Ebene der Komplexen Zahlen die Phänomene der Welt auf formaler Basis darstellen, damit weitgehend erklären, und dem Menschen nutzbar machen. Das streng syntaktische Vorgehen versprach, alle Fragen innerhalb dieses mathematisch logischen Formalismus zu erklären. Dabei war der Formalismus selbst methodisch zu entwickeln – so wie Descartes seine Algebra in kleinen, nichtlinearen Schritten für sich entwickelt hatte. Dieser reflexive Charakter liegt einerseits im Wesen des Prozesses menschlicher Erkenntnis. Nur im bewussten Wahrnehmen liegt Erkenntnis. Andererseits ist die Reflexion auch Spiegel einer Differenz zwischen Metasprache und Objektsprache. Dabei ist der Formalismus eine aus Axiomen und Regeln bestehende Ausdrucksform, welche sich selbst nicht vollständig widerspruchsfrei erklären kann. Russells Paradoxon hat diese Problematik aufgezeigt und Gödel in seinem Unvollständigkeitssatz nachgewiesen. Jede ultimative, vollständige und widerspruchsfreie Festlegung der Syntax und ihrer Axiome bedarf externer Vorgaben, z.B. einer Konvention, wie sie jedem sprachlichen, interpersonalem Verstehen zugrunde liegt.

Auch Descartes Methode beruht auf derartigen Konventionen, welche unter anderem bestimmen, was Wissenschaft ist. Für ihn ist alles, was seinem Gewissheit fordernden „methodischen Fundamentalismus“ (siehe Teil I, Kapitel 3.1.) nicht entspricht, unwissenschaftlich. Die Bestimmung dessen, was Wissen ist, ist, wie Feyerabend in seinen *Thesis for Anarchism* gezeigt hat, von gesellschaftlicher Anerkennung abhängig. Der gesunde Menschenverstand befähigt jeden Menschen zu urteilen, sofern der Mensch sich bewusst ihr evidente Gewissheiten sucht. Descartes Methode ist auch eine demokratische Ermächtigung jeder Einzelnen zur Befassung mit den komplexen und vielschichtigen Problemen der heutigen Welt. Das Wissen um den konventionellen Charakter der Bestimmung von Wissen an sich ist selbst Wissen. Am Ende von Regel VIII schreibt Descartes:

[Jeder Mensch] wird schließlich beweisen, daß das fragliche Ding alles Auffassungsvermögen der menschlichen Geisteskraft übersteigt, und daher nicht meinen, deshalb ahnungsloser zu sein: Denn dies erkannt zu haben, ist kein geringeres Wissen als irgendetwas anderes. (AT X 400, 7-11; Regulae, 71 31,38-32,5)

Descartes hatte mit seiner Forderung nach Reflexion auf die eigene Erkenntnis recht, auch wenn die in seinem Formalismus begründete wissenschaftliche Methode nicht alles erklären oder seine mechanistisch-deterministische Auffassung bestätigen kann. Andererseits hat das Modell seiner *mathesis universalis* für eine einheitliche wissenschaftliche Methode zur Entdeckung völlig neuer Wissensgebiete, und damit neuen Wissens, geführt. Sie ist jene „Verpackung“, welche wie eine Hülle das zu Erkennende mit der Erkennenden verbindet.

Sein Ideal der „Mathesis universalis“, von der alle Einzelformen des Wissens mehr die Hülle als die Teile sein sollten, hat sich fort und fort bewährt und mit immer reicheren Inhalt erfüllt. (Cassirer, 68)

Die von Descartes geforderte intuitive Gewissheit erfordert Reflexion auf das im eigenen Verstand Erfasste. Damit ist die permanente Vermischung von Meta- und Objektebene eine zirkuläre Notwendigkeit, um in kleinen Schritten Klarheit und Deutlichkeit zu gewinnen und diese auf jeder Stufe der eigenen Erkenntnis als Gewissheit zu bewahren. Die Früchte dieser methodischen Reflexion sind neues Wissen, welches tradierte Positionen ablöst. Descartes beschreibt dreierlei Früchte, welche der Gesellschaft zugutekommen.

Die erste ist die Befriedigung, darin etliche Wahrheiten zu finden, die bislang unbekannt gewesen sind; [...] [Die zweite Frucht folgt daraus, dass man sich] nach und nach angewöhnen wird, besser über alle auftretenden Dinge zu urteilen (AT VIII/2 18,1-9; Picot, 165). [...] [Die dritte Frucht ergibt sich,] weil die Wahrheiten, die diese Prinzipien enthalten, sehr klar und sehr gewiß sind, sie alle Gegenstände dem Streit entziehen und so die Geister zur Milde und Eintracht geneigt machen (AT VIII/2 18,9-12; Picot, 167)

Gegenüber der cartesischen Methode, mit ihrer permanenten reflexiven Rückbindung auf Gewissheit auf jeder Stufe der Erkenntnis, operiert der Formalismus rein abstrakt mittels einer während der Dauer der Operation unanschaulichen Symbolik. Gewissheit ergibt sich aus der Einhaltung der angewandten Syntax. Die Bildung dieser Syntax erfolgt auf einer Metaebene, welche ihrerseits aber eine gewisse semantische Bedeutung haben muss, damit die Operationen auf der Anwendungsebene widerspruchsfrei geregelt werden können.

Ich habe diese Arbeit mit der Annahme begonnen, dass Descartes die *mathesis universalis* zum formalen Modell richtigen wissenschaftlichen Arbeitens machen wollte, indem er zunächst diese Form mit ihren eigenen Mitteln klar und deutlich ausformte. Mir schien, Descartes suchte nach einer vollständigen widerspruchsfreien Begründung seiner Methode am Modell der *mathesis universalis*, welche mit den Mitteln der *mathesis universalis* ausgeformt wurde. Tatsächlich hat Descartes gefordert, dass auf jeder Stufe der Erkenntnis Klarheit und

Deutlichkeit erreicht werden, bevor weitere Schritte zur Erlangung neuen Wissens gesetzt werden. Gegen eine abstrakte, rein formale Methode, welche losgelöst von dieser Gewissheit im reinen Vertrauen auf die zugrunde liegenden Regeln weitergeht hat er sich verwehrt. Für ihn war auf jeder Stufe des Erkenntnisprozesses diese Vergewisserung der Bedeutung von Erkanntem wesentlich. Bis diese Gewissheit erreicht war hat man auf dieser Stufe wie auf einer „Stopp-Stufe“ zu verweilen. Für ihn lag seine mathematische Leistung darin, zu zeigen, wie seine universelle reflexive Methode in der Lage ist, neue Perspektiven einzunehmen und so Lösungen zu Problemen zu schaffen, welche davor außer Reichweite schienen. Mittels kleiner Schritte, Scharfblick und Findigkeit analysierte er eine seit der Antike ungelöste geometrische Problemstellung und zeigte, wie im Wechselspiel von Gedächtnis unterstützender Schreibweise und Vorstellungskraft im Verstand Klarheit und Deutlichkeit über Zusammenhänge geschaffen werden kann. Auf algebraische Weise konnte er so die Geometrie erweitern (siehe oben 2.4.5.). Diese mit der *mathesis universalis* begonnene Algebraisierung wird damit Beispiel für die Universalität seiner die Disziplinen übergreifend vorgeschlagenen Methode. Den algebraischen Formalismus, wie er von den Mathematikern seiner Zeit – Fermat, Pascal oder Roberval – angewandt wurde (und wie er mit der Verwendung der Komplexen Zahlen maßgeblich für die weitere Entwicklung der Mathematik und Technik im 19. Jahrhundert wurde), lehnte Descartes ab. In der rein formalen Abstraktion der Probleme und dem sich Verlassen auf die syntaktischen Rechenregeln, welche von semantischer Anschaulichkeit gelöst angewandt werden, sah er den Verlust der Möglichkeit reflexiver Vergewisserung. Meine ursprüngliche Annahme ist falsch. Descartes *mathesis universalis* hat zwar mit der Integration von Arithmetik und Geometrie einen Grundstein der modernen Algebra gelegt. Sie war aber nur Modell für eine Methode der nachvollziehbaren kleinen Schritte in der Suche nach Erkenntnis. Eher scheint mir, dass Descartes Gödels Unvollständigkeitssatz vorweggenommen hätte, als dass sein Verlangen nach methodischem Vorgehen diese Methode losgelöst von den untersuchten Phänomenen absolut gesetzt hätte.

Die Relation jeder methodischen Untersuchung zum Untersuchungsgegenstand selbst hat auf jeder Stufe von Erkenntnis klar und deutlich zu bleiben. So gesehen war der Rationalist Descartes auch ein Empiriker. Erst aus der experimentellen Verifikation von Erdachtem konnte sich jene Klarheit und Deutlichkeit zeigen, welche von ihm auf jeder Stufe des Prozesses zur Schaffung von Wissen gefordert wurde (cf. AT VII, 76,21-23; Meditationen, 83). Die Bedeutung von Experimenten im Werk Descartes und deren Relevanz für seinen Rationalismus am Schnittpunkt von Erkenntnis (also *res cogitans*) und Materie (also *res extensa*) verdient gesonderte Betrachtung. Wie sind die Rollen von Ursache und Wirkung zwischen dem von

Descartes als materiell postulierten „Informationsprozess“ der Sinne und der Verarbeitung dieser Informationen im Verstand verteilt? Die Schnittstelle als „Verpackung“ zwischen *res extensa* und *res cogitans* ist in beiden Richtungen aktiv und erlaubt eine gegenseitige Wechselwirkung. Mit Experimenten unter kontrollierten Bedingungen sollen Ursache und Wirkung gezielt geklärt werden. Seine Forderung nach strukturierten Experimenten ist auch Ausdruck dieser von ihm erkannten wechselwirkenden Rollen von Ursache und Wirkung.

Descartes Kritik an den Mathematikern hinsichtlich derer abstrakter Verwendung von metaphysisch unbestimmten Algorithmen war zwar falsch, aber nicht unbegründet. Das blinde Vertrauen in die Regelkonformität verstärkt bestehende Vorstellungen und behindert neue Erkenntnisse, ohne dabei die eigene vollständige Widerspruchsfreiheit gewährleisten zu können. Schließlich war Descartes mit seiner Forderung nach einer universellen Methode selbst auch ein das seinerzeitige, dogmatisch über Einzeldisziplinen aufgebaute wissenschaftliche Establishment herausfordernder „Anarchist“ (Feyerabend 1973, 116): nicht in dem Sinne, dass Wissenschaft keinen Prinzipien zu folgen hat, sondern im Sinne einer vernünftigen und nachvollziehbaren Ordnung der Synthese von klar und deutlich erkannten grundlegenden einfachen Dingen jenseits eines dogmatisch begründeten, unkritischen Vertrauens in tradierte Aussagen.

Ich habe die Frage gestellt, ob Descartes *mathesis universalis* als Basis der modernen Algebra gesehen werden kann. Die Gewissheit der *mathesis universalis* diene Descartes als Modell für seine methodische Suche nach Wissen (siehe oben 2.2.4). Dieses Modell entwickelte er weiter, um es schließlich auf ein scheinbar unlösbares Problem der Geometrie anzuwenden, dieses zu lösen und damit zu zeigen, wie die Algebra angewandt werden kann (siehe oben 2.4.5). Auch wenn sich die Relationen von einfach erfassbaren Gegebenheiten in Zahlen algebraisch darstellen lassen (siehe oben 2.5.2.), hat es Descartes abgelehnt sich allein auf die Abstraktion der in algebraischen Formen liegenden Repräsentationen zu verlassen. Er forderte Gewissheit auf jeder Stufe der Erkenntnis (siehe oben 2.3). Das Modell der *mathesis universalis* diene der Entwicklung der algebraischen Technik. Die algebraische Technik an sich wurde von Descartes allerdings nicht als hinreichend für die Schaffung von Wissen gesehen ein rein syntaktisch bestimmtes Überspringen von „Stopp-Stufen“ war für Descartes unzulässig.

5. Weiterführende Überlegungen

Ich habe in dieser Arbeit dargestellt, wie Descartes die Suche nach Wissen als wissenschaftliche Methode des Verstehens entwickelt hat, dabei aber auf jeder Stufe der Erkenntnis Gewissheit als Bedingung für den nächsten Schritt formuliert. Diese Gewissheit ist

auch von Erfahrung begleitet und Descartes wünscht sich, wie ich in 2.4.2. gezeigt habe, den Bericht über experimentale Ergebnisse. Diese Komplementarität von Empirie scheint zunächst widersprüchlich zu Descartes Einordnung als Rationalist. Ich fasse hier 12 Aspekte dieser Arbeit zusammen, um einen Ausblick auf weiterführende Überlegungen zu dieser scheinbaren Widersprüchlichkeit zu geben. Dabei verzichte ich darauf, jene Stellen zu zitieren, welche hier summarisch dargestellt werden und die im Rahmen der Arbeit oben ausgeführt sind.

- Wissen basiert auf Gewissheit

Descartes formulierte seine philosophische Position anhand einer methodischen Konstanten, welcher er sein gesamtes Leben treu blieb: Wissen muss unzweifelhaft wahr sein und findet sich im gedanklichen Konzept von Ideen. Die Fähigkeit zur Findung von Ideen ist jedem Menschen im gesunden Menschenverstand gegeben.

- Gewissheit hat man persönlich

Mit dem gesunden Menschenverstand ist jeder Mensch für sich fähig Wissen zu erwerben. Dieser Erwerb basiert auf dem Ausschluss alles dessen, was für die Einzelne nicht gewiß ist: Meinungen, Doktrinen oder Wahrscheinlichkeiten sind persönlich auf die Gewissheit der in ihnen liegenden Elemente zu prüfen.

- Intuitionen und Deduktionen sind gewiss

Diese Zerlegung von Gegebenheiten in Intuitionen als unmittelbar einleuchtende, nicht weiter reduzierbare und instantan klare und deutliche Erkenntnis ist die Basis jener Gewissheit, welche als Fundament dient, um alle weiteren aus diesen intuitiven Gewissheiten möglichen Relationen zu deduzieren. Die mit dem Verstand mögliche Analyse des Gegebenen auf seine zugrundeliegenden Intuitionen in einer deduktiven Bewegung erfolgt in einer nachvollziehbaren Ordnung, welche hinreicht, um das Gegebene schließlich vollständig erkennen zu können.

- Wissenschaft ist als Einheit syntaktisch festgelegt

Dieses formale Prinzip einer geordneten Bewegung ist losgelöst vom Gegenstand des zu erwerbenden Wissens und gilt daher für jede Art von Wissen. Die Schaffung neuen Wissens basiert auf dieser methodisch bestimmten Form und bildet in ihrer Universalität die Basis für die Einheit von Wissenschaft.

- Mathematik als Modell der Methode

Descartes sah seine Anforderung nach Gewissheit in den mathematischen Wissenschaften erfüllt und erkannte, dass die damals aufkommende Algebra ein Modell für diese Methode sein kann. Dazu mussten aber die in der Algebra gegebenen Unklarheiten eliminiert werden: die Schaffung von klar und deutlich erkennbarem Wissen, erfolgt an einem Modell, welches von Descartes zunächst selbst klar und deutlich ausgearbeitet wird.

- Erfahrung als Reflektion gibt Sicherheit über die Wahrhaftigkeit der eigenen Ideen

Diesen reflexiven Ansatz erfüllt Descartes, indem er selbst mit der Algebra umzugehen lernt. Wissen schafft als Werkzeug zum Wissen neues Wissen. Diese in seiner Methode verankerte Form basiert auf syntaktischen Regeln und ist unabhängig vom konkreten semantischen Gegenstand. Sie gilt für den Aufbau der Schmiede durch den Schmied genauso wie für das Denken an sich. „Hinreichend“ als Bestimmung der notwendigen Ordnung für induktives Erkennen basiert auf Erfahrung.

- Formalismus als reine Abstraktion

Der Formalismus hat aufbauend auf den syntaktischen Möglichkeiten der um ideale Symbole ergänzten Mathematik schließlich die Ablehnung des Ignoramus postuliert: Alles könne gewusst und methodisch mit einem formalen System widerspruchsfreier Regeln erkannt werden. Kurt Gödel hat gezeigt, dass diese vollständige Widerspruchsfreiheit innerhalb eines formalen Systems nicht nachweisbar ist. Dazu bedarf es einer semantischen Ergänzung, welche außerhalb dieses Systems zu erbringen ist.

- Korrekte Repräsentation ist notwendigerweise hinreichend

Für den jungen Descartes war die Algebra zunächst ein Modell, um zu zeigen, wie sich Relationen zwischen unterschiedlichsten Gegebenheiten darstellen lassen. Diese Relationen können in Gleichungen formuliert werden, sofern die Gegebenheiten auf ihre Einfachsten, intuitiv erfassbaren Elemente, wie Ausdehnung, Gestalt und Bewegung zurückgeführt werden. Diese Rückführung erfolgt im Verstand und bedient sich dabei des Verstands und seiner unterstützenden Kompetenzen von Anschauung, Gedächtnis und Einbildungskraft. Die bisherigen Erfahrungen des Verstandes sind reflexiv eingebunden, um die Hinreichung einer erreichten Gewissheit zu beurteilen. Die algebraische Repräsentation muss das Gegebene in allen relevanten Dimensionen darstellen.

- Erfahrung ist vielschichtig und komplex

Descartes entwickelt seine philosophische Position nicht linear. Über die erste Dekade des Dreißigjährigen Kriegs befasste er sich mit der Algebra an sich als Modell seiner Methode.

In der folgenden Dekade wandte er seine Methode auf unterschiedliche aber jedenfalls komplexe Problemstellungen an. In diese Periode fällt Galileis Verurteilung. Descartes passte sich publizistisch an und veröffentlichte seine Methode mit drei Anwendungen, welche die reflexive Urteilsfähigkeit der eigenen Vernunft ins Zentrum stellen. Eine Anwendung bezieht sich auf ein seit der Antike unverändert ungelöstes geometrisches Problem, welches er durch die von ihm entwickelte Technik der algebraischen Faktorisierung löste und so die Zusammenführung von Algebra und analytischer Geometrie als Basis für die moderne Mathematik begründete. Für Descartes waren rhetorische Formen Ablenkung in der Suche nach Gewißheit. Algebra als rein syntaktische Abstraktion ist für Descartes als besondere sprachliche Form mit einer rein rhetorischen Form vergleichbar. Er zeigte, wie seine Methode per se neues Wissen schafft aber nicht, dass Algebra allein eine hinreichende Repräsentation der physikalischen Wirklichkeit sein kann.

- Hinreichende Gewissheit ist Bedingung für weitere Deduktionen

Die von Fermat u.a. Mathematikern betriebene Algebraisierung der Physik lehnt er ab: Wissen beruht auf Gewissheit. Diese ist bei jedem Schritt sicher zu stellen. Ein blindes „sich auf die algebraischen Regeln verlassen“ steht dazu im Widerspruch. Seine letzte Dekade steht im Zeichen der Ausformulierung seiner grundsätzlichen Gewissheiten und der in Ursache und Wirkung begründeten physikalischen Welt des körperlich Ausgedehnten und des unteilbar denkenden Geistigen. Teil der Methode ist die Notwendigkeit von Gewissheit, bevor weitere Deduktionen erfolgen. Ohne diese jederzeitige Gewissheit kann es für Descartes kein weiteres Wissen geben. Descartes ist so, trotz seiner Erfolge mit der Algebraisierung der Mathematik und damit der Physik, kein Formalist. Eher liegt m.E. in seiner Skepsis gegenüber ein rein syntaktischem Vorgehen eine Vorwegnahme von Gödels Unvollständigkeitssatz.

- Experimente schaffen Erfahrung

Descartes will die Welt mit auf Vernunft aufbauenden Konzepten beschreiben und erkennen. Die notwendige Gewissheit bezüglich solcher im Verstand formulierten Ideen kann durch empirische Beobachtung erlangt werden. Ein Experiment mit kontrollierbaren Bedingungen kann hinreichende Gewissheit als Bestätigung oder Widerlegung schaffen. Die Rolle empirischer Experimente für Descartes und der Kontakt mit anderen Forschern, welche solche Experimente leisteten, bleibt in dieser Masterarbeit offen und soll in einer eigenen Arbeit behandelt werden. Die Komplementarität empirischer Experimente für den Rationalisten Descartes ergibt sich dabei aus folgenden Überlegungen:

- (i) Wissen ist notwendigerweise frei von Vorurteilen und Meinungen und zweifelsfrei wahr.
- (ii) Das erste Wissen ist, dass jeder Zweifler als solcher existiert.
- (iii) Diese Existenz hat einen ersten Grund in der Vollkommenheit Gottes als Schöpfer.
- (iv) Vollkommenheit schließt aus, dass Gott den Zweifler täuschen möchte.
- (v) Daher kann sich der Zweifler auf die Wahrnehmung seiner Wahrnehmung der Welt an sich verlassen.
- (vi) Sinnes Wahrnehmungen können täuschen: (1) sie sind an sich unvollständig, (2) die Möglichkeit von Fehlern in der Übertragung zum Verstand und (3) die Beschränktheit des Verstandes an sich sind Fehlerquellen.
- (vii) Durch Experimente kann der Zweifler den Zustand der Welt auf kontrollierte Weise mit seinen vernünftigen Konzepten vergleichen und so diesen Konzepten eine kontrollierte Bestätigung oder Korrektur zukommen lassen.

Tatsächlich hat Descartes in seinem Schriftverkehr, u.a. mit Mersenne, immer wieder nach Ergebnissen von Experimenten gefragt, bzw. Messgenauigkeiten und die Möglichkeit der Kontrolle von Bedingungen für die richtige Erfassung des zu Erklärenden thematisiert. M.E. liegt in der Frage nach der Rolle von Experimenten für die Wissenschaft bei Descartes eine interessante Möglichkeit zur Weiterführung dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

Primäre Texte

Adam, Charles and Paul Tannery, Hg. (1897-1913): *Œuvres de Descartes*, 11 Bände, Paris, Cerf, heruntergeladen von <https://gallica.bnf.fr>.

René Descartes (1619/1628): *Regeln zur Ausrichtung der Geisteskraft und private Gedanken/Regulae ad directionem ingenii und Cogitationes privatae*, Lat.-Dt., übersetzt und hrsg. von Ch. Wohlers, Hamburg, Meiner (PhB 613), 2011. [AT X; Regulae]

René Descartes (1633/1664/1677), *Die Welt. Abhandlung über das Licht. Der Mensch*, Franz.-Dt., übersetzt und hrsg. von Ch. Wohlers, Hamburg, Meiner (PhB 682), 2015. [AT XI; Le Monde]

René Descartes (1637): *Discours de la Méthode*, Franz.-Dt., übersetzt und hrsg. von Ch. Wohlers, Hamburg, Meiner (PhB 643), 2013. [AT VI; Discours; Dioptrik, Meteore; Geometrie]

René Descartes (1641): *Die Meditationen über die erste Philosophie und Einwände einiger Gelehrter gegen die vorangegangenen Meditationen mitsamt den Antworten des Autoren*, übersetzt und hrsg. von Ch. Wohlers, Hamburg, Meiner (PhB 598), 2009. [AT VII; Meditationen]

René Descartes (1644): *Die Prinzipien der Philosophie*, Lat.-Dt., übersetzt und hrsg. von Ch. Wohlers, Hamburg, Meiner (PhB 566), 2005. [AT VIII/1, Prinzipien]

René Descartes (1645): *Brief an Picot*, Franz.-Dt., übersetzt und hrsg. von Ch. Wohlers, Hamburg, Meiner (PhB 624), 2011. [AT VIII/2; Picot]

René Descartes, Marin Mersenne (1632-1648): *Der Briefwechsel mit Marin Mersenne*, übersetzt, mit einer Einleitung, Anm. und Registern versehen von Ch. Wohlers, Meiner (PhB 715), 2020. [AT I – AT IV; Mersenne]

René Descartes, Elisabeth von der Pfalz (1643-1649): *Der Briefwechsel zwischen Elisabeth von der Pfalz und Rene Descartes*, übersetzt, eingeleitet und hrsg. von Olivier Ribordy, Isabelle Wienand und Benno Wirz, unter Mitarbeit von Angela Schiffhauer, Meiner (PhB 69), 2015. [AT III, AT IV; Pfalz]

Sekundärliteratur

Alten, H.-W., Djafari Naini A., B. Eick, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wesemüller-Kock, H. Wußing (2014²): *4000 Jahre Algebra Geschichte – Kulturen – Menschen*, Berlin-Heidelberg, Springer.

Arndt, Hans W. (1971): *Methodo scientifica pertractatum: Mos geometricus und Kalkülbegriff in der philosophischen Theorienbildung des 17. und 18. Jahrhunderts*, Berlin-Boston, De Gruyter.

Besler, Gabriela (2016): "Philosophical and Mathematical Correspondence between Gottlob Frege and Bertrand Russell in the years 1902—1904. Some Uninvestigated Topics" in *Folia Philosophica* 35, 85-100, heruntergeladen von <https://www.ceeol.com/search/article-detail?id=513844> am 19.08.2023.

Brissey, Patrick (2014): „Rule VIII of Descartes‘ Regulae ad directionem ingenii“, *Journal of early modern Studies*, vol. 3, issue 2, Fall 2014, 9-31.

- Cassirer, Ernst, „Die Idee der Einheit der Wissenschaft in der Philosophie Descartes“, in: E. Cassirer, *Descartes. Lehre-Persönlichkeit-Wirkung*, hrsg. von R.A. Bast, Hamburg, Meiner, 1995, S. 39-68.
- Detlefsen, Michael (2005): “Formalism” in: Stewart Shapiro: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford. Oxford Scholarship Online, 236-317.
- Des Chene, Dennis, “Descartes and the natural philosophy of the Coimbra commentaries” in in: St. Gaukroger, J. Schuster and J. Sutton (ed.), *Descartes' Natural Philosophy*, London/New York, Routledge, 29-45.
- Ebbersmayer, Sabrina (Hg.) (2015): *Der Briefwechsel zwischen Elisabeth von der Pfalz und Rene Descartes*, Paderborn, Fink, 7-26 und 185-198.
- Feyerabend, Paul (1973): “Thesis on Anarchism” in: Matteo Motterlini (Editor), *For and Against Method: Including Lakatos's Lectures on Scientific Method and the Lakatos Feyerabend Correspondence*, 113-118, on <https://press.uchicago.edu/ucp/books/book/chicago/F/bo3629717.html>.
- Feyerabend, Paul (1993): *Against Method, Outline of an Anarchistic Theory of Knowledge* (3rd edition), theanarchistlibrary.org, downloaded from <https://theanarchistlibrary.org/library/paul-feyerabend-against-method>, downloaded on 18.07.2022.
- Gäbe, Lüder (1972): *„Descartes' Selbstkritik: Untersuchungen zur Philosophie des jungen Descartes*, Hamburg, Meiner, 1972, 174 S. (Auswahl).
- Gabriel, Gottfried, Friedrich Kambartel, Christian Thiel (1980): *Gottlob Freges Briefwechsel mit D.Hilbert, E.Husserl, B.Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe*, Hamburg, Meiner.
- Garber, Daniel (2001): *Descartes embodied : reading Cartesian philosophy through Cartesian science*, Cambridge - New York, Cambridge University Press.
- Gaukroger, Stephen, John Sutton, John Schuster (Hg.) (2000): *Descartes' Natural Philosophy*, London-New York, Routledge.
- Gil, T., „Descartes' Regulae als Problemlösungsmethodologie“, in: G. Abel, H.-J. Engfer, C. Hubig (hrsg.), *Neuzeitliches Denken. Festschrift für Hans Poser zum 65. Geburtstag*, Berlin/New York, de Gruyter 2002, S. 117-123.
- Hilbert, David (1925): „Über das Unendliche“ in *Mathematische Annalen*-95, 161-190.
- Kant, Immanuel (1998): *Kritik der reinen Vernunft*, Hamburg, Felix Meiner.
- Krämer, Sybille (1989): “Über das Verhältnis von *Algebra* und Geometrie in Descartes' “Geometrie” in *Philosophia Naturalis* 26 (1) S. 19-40.
- Kraus, Pamela A. (1983): „From Universal Mathematics to Universal Method: Descartes's Turn in Rule IV of the Regulae“, *Journal of the History of Philosophy* 21 (1983), 59-74.
- Linnebo, Øystein. *Philosophy of Mathematics*, Princeton: Princeton University Press, 2017, <https://doi-org.uaccess.univie.ac.at/10.1515/9781400885244>.
- Manders, Kenneth, (2006): “Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes” in *Historia Mathematica* 33, 184–209.
- Pasini, R. (1992): „Mathesis und Phantasie. Die Rolle der Einbildungskraft im Umfeld der Descartschen Regulae“, *Studia leibnitiana* 24, 2 (1992), 160-176.
- Ribordy, Olivier, Isabelle Wienand, Benno Wirz, Angela Schiffhauer (2015): *Rene Descartes: Der Briefwechsel zwischen Elisabeth von der Pfalz, IX-XLI und 443-543*, Hamburg, Meiner.

- Rabouin, David (2021): „Ingenium, Phantasia and Mathematics in Descartes’s *Regulae ad directionem ingenii*“, in: R. Garrot, A. Marr (ed.), *Descartes and the Ingenium. The Embodied Soul in Cartesianism*, Leiden/Boston, Brill, 64-89.
- Rabouin, David (2010): “What Descartes knew of mathematics in 1628“, *Historia Mathematica* 37, 2010, 428–45.
- Sepper, Dennis L. (2000): „Figuring things out. Figurate problem-solving in the early Descartes“, in: St. Gaukroger, J. Schuster and J. Sutton (ed.), *Descartes’ Natural Philosophy*, London/New York, Routledge, 228-248.
- Wohlers, Christian (Hg.) (2005): *René Descartes, Die Prinzipien der Philosophie*, VII-LXXII und 635–711, Hamburg, Meiner.
- Wohlers, Christian (Hg.) (2009): *Descartes; Meditationen: mit sämtlichen Einwändungen und Erwiderungen*, VII-XXXI und 101-130, Hamburg, Meiner.
- Wohlers, Christian (Hg.) (2011a): *Descartes, Regeln zur Ausrichtung der Geisteskraft und private Gedanken/Regulae ad directionem ingenii und Cogitationes privatae*, VII-LXXXVII und 189-271, Hamburg, Meiner.
- Wohlers, Christian (Hg.) (2011b): *Descartes; Discours de la Méthode, im anhang: Brief an Picot, Adrien Baillet: Olympica*, 193-197, Hamburg, Meiner.
- Wohlers, Christian (Hg.) (2013): *Descartes; Discours de la Méthode*, IX-LXXXVI und 413-473, Hamburg, Meiner.
- Wohlers, Christian (Hg.) (2015): *René Descartes, Die Welt. Abhandlung über das Licht. Der Mensch* VII-XXXVIII und 329-432, Hamburg, Meiner.
- Wohlers, Christian (Hg.) (2020): *René Descartes, Der Briefwechsel mit Marin Mersenne*, IX-XIV und 581-885, Hamburg, Meiner.