

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Auf Fehlvorstellungen in der Analysis mit Gegenbeispielen
reagieren - eine empirische Untersuchung mit (angehenden)
Mathematiklehrpersonen

verfasst von | submitted by
Eva Stubenvoll BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UT 196 070 057 UA

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Lehramtsstudium Master Unterrichtsfach
Musikerziehung Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger
Privatdoz.

Abstract

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit der Verwendung und Relevanz von Gegenbeispielen im Mathematik-, genauer im Analysisunterricht. Die Arbeit basiert auf einem theoretischen Teil, in welchem die Begriffe Grundvorstellungen, Aspekte, Gegenbeispiele und Fehlvorstellungen genauer beleuchtet werden. Danach wird die im Zuge dieser Arbeit durchgeführte Studie erläutert. Dazu werden die Interviews von elf (angehenden) Mathematiklehrpersonen zu der Erkennung von Fehlvorstellungen und der Angabe von passenden Gegenbeispielen analysiert. Mithilfe eines Kriterienkataloges werden die Gegenbeispiele auf ihre Qualität für die Verwendung im Unterricht untersucht und so wird zuzüglich weiterer Beispiele aus der Fachliteratur ein Katalog an relevanten Beispielen zusammengestellt, der Lehrenden für den Unterricht dienen soll. Zum Schluss werden die relevantesten aus den Ergebnissen hervorgegangen Themen diskutiert und mit Literatur aus dem Bereich der Mathematikfachdidaktik in Verbindung gebracht. Aus der Untersuchung wird ersichtlich, dass das Verwenden von Gegenbeispielen sehr wohl unter Mathematiklehrkräften verbreitet ist. Die Interviews zeigen aber auch, dass vor allem die Themen Stetigkeit und Folgen für Lehrkräfte Hürden darstellen und dass Fehlvorstellungen in diesen Bereichen nicht so leicht erkannt werden. Auch Spannungsfelder wie das zwischen Genauigkeit und Anschauung oder Anwendung und Kalkülorientierung treten in der Forschung zutage und werden basierend auf dem theoretischen Hintergrund diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Analysis im schulischen Kontext - Verankerung des Themas in Lehrplan und Grundkompetenzen	1
1.2	Forschungsfrage und Leitfragen der Arbeit	2
1.3	Forschungsstand	3
2	Theoretischer Rahmen: Grundvorstellungen, Fehlvorstellungen und Gegenbeispiele	7
2.1	Aspekte und Grundvorstellungen	7
2.2	Aspekte und Grundvorstellungen in der Analysis	9
2.2.1	Aspekte und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff . .	9
2.2.2	Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff	10
2.2.3	Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff . .	11
2.2.4	Aspekte und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff . .	12
2.2.5	Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff . . .	14
2.3	Fehlvorstellungen	15
2.3.1	Fehlvorstellungen in der Mathematik	15
2.4	Das Gegenbeispiel im Mathematikunterricht	17
2.4.1	Beweisen im Mathematikunterricht	17
2.4.2	Beweismethode „Gegenbeispiel“ im schulischen Kontext . .	17
2.4.3	Kriterien eines guten Gegenbeispiels	19
3	Empirische Untersuchung - wie Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen reagieren	21
3.1	Beschreibung der Arbeitsweise und Interviewrahmenbedingungen	21
3.2	Ergebnisse aus den Kurzfragebögen	23
3.3	Interviewleitfäden und zusammengefasstes Ergebnis	27
3.4	Personenbezogene Auswertung	30
3.4.1	Unterschiede und Gemeinsamkeiten	30
3.4.2	Analyse der Selbsteinschätzungen aus den Kurzfragebögen	31
4	Auswertung der Interviews	37
4.1	Auswertung der einzelnen Fehlvorstellungen	37
4.1.1	Fehlvorstellung 1	37

4.1.2	Fehlvorstellung 2	40
4.1.3	Fehlvorstellung 3	42
4.1.4	Fehlvorstellung 4	44
4.1.5	Fehlvorstellung 5	45
4.1.6	Fehlvorstellung 6	46
4.1.7	Fehlvorstellung 7	47
4.1.8	Fehlvorstellung 8	48
4.1.9	Fehlvorstellung 9	50
4.1.10	Fehlvorstellung 10	52
4.2	Auswertung der richtigen Aussagen	55
5	Katalog an Gegenbeispielen und Untersuchung anhand der Kriterien	61
5.1	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 1	62
5.2	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 2	63
5.3	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 3	65
5.4	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 4	66
5.5	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 5	67
5.6	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 6	68
5.7	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 7	69
5.8	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 8	70
5.9	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 9	73
5.10	Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 10	74
6	Erkenntnisse aus der Untersuchung und Diskussion der Ergebnisse	79
6.1	Folgen in der Schule	79
6.2	Stetigkeit in der Schule	83
6.3	Monotonie bei Funktionen	89
6.4	Untersuchen von Funktionen	90
6.4.1	Notwendige und hinreichende Bedingungen	90
6.4.2	Spannungsfeld zwischen Kalkülorientierung und Anwendungen	92
6.5	Die Tangente als Schmiegegerade	94
6.6	Genauigkeit vs. Anschauung in der Analysis	95
6.7	Fachliche Kompetenz von Lehrkräften	96
7	Schlussfazit und Ausblick	99
7.1	Zusammengefasste Ergebnisse der Interviews	100
7.2	Ausblick	103
8	Anhang	113

1 Einleitung

Für viele Lehrkräfte sind Fehlvorstellungen Teil des Unterrichts. Oftmals kommen Inhalte nicht gleich so an, wie sie sollen und das kann zu Irritationen führen. Fehlvorstellungen bieten im Unterricht jedoch Potential für Reflexionen und Erkenntnisgewinne und ermöglichen die Chance auf echtes Verstehen der Inhalte. Ein Themengebiet in der Schulmathematik, in dem Fehlvorstellungen recht häufig auftreten, ist die Analysis. Die Komplexität der Inhalte erschwert oft das einfache Erklären und führt zu Problemen. Ein Mittel, Fehlvorstellungen rasch zu beheben und somit das Potential dieser Situationen im Unterricht gewinnbringend einzuarbeiten, ist, den Schüler:innen passende Gegenbeispiele vorzulegen. Diese können, wenn sie richtig gewählt sind, schnell Klarheit schaffen.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Relevanz solcher Gegenbeispiele im Hinblick auf den Mathematikunterricht zu untersuchen. Dabei werden zunächst gewisse Begriffe aus der Mathematikdidaktik definiert und erläutert. Außerdem wird über die Bedeutung von Grundvorstellungen und Aspekten aufgeklärt. Danach folgt ein theoretischer Diskurs zu Fehlvorstellungen und Gegenbeispielen. Im nächsten Schritt wird anhand der im Zuge dieser Arbeit durchgeführten empirischen Untersuchung festgestellt, ob sowohl angehende als auch bereits unterrichtende Mathematiklehrpersonen solche Gegenbeispiele spontan parat haben. Im Unterricht ist es von Vorteil, auf Fehlvorstellungen passend reagieren zu können und die nächsten Lernschritte darauf aufzubauen, anstatt auf die nächste Unterrichtsstunde aufzuschieben zu müssen. Die gefundenen Gegenbeispiele werden anschließend anhand spezieller Kriterien untersucht und analysiert.

1.1 Analysis im schulischen Kontext - Verankerung des Themas in Lehrplan und Grundkompetenzen

Um auf die Relevanz des Themas aufmerksam zu machen, werden wir nun den Lehrplan und die Matura-Grundkompetenzen für die AHS-Oberstufe beleuchten. Die Analysis teilt sich im Oberstufen-Lehrplan der AHS auf alle vier Schulstufen (5. – 8. Klasse) auf. Beginnend mit den Funktionen in der 5. Klasse (lineare Funktionen, quadratische Funktionen, nichtlineare Funktionen, abschnittswei-

1 Einleitung

se definierte Funktionen), wird dann in der 6. Klasse im 1. Semester auf weitere, allgemeinere reelle Funktionen erweitert. Hier werden Potenz-, Polynom-, Exponential-, Logarithmus- und Winkelfunktionen auf ihre Eigenschaften untersucht (Monotonie, Extremstellen). Weiters schließen hier auch die Folgen und Reihen an. Man soll auch diese auf ihre Eigenschaften wie Monotonie, Beschränktheit und einen möglichen Grenzwert untersuchen können. Für konvergente Reihen sollen Summen berechnet werden, also auch die Begriffe Konvergenz und Divergenz sollten bis zu diesem Zeitpunkt klar sein. In der 7. Klasse geht es weiter mit der Differentialrechnung (Differenzieren, Ableitungsregeln, Funktionen untersuchen, Sekanten- und Tangentensteigung, ...). Die Inhalte werden im 2. Semester der 7. Klasse erweitert, hier treten auch die Themen Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen auf. In der 8. Klasse wird dann die Integralrechnung eingeführt und bearbeitet (vgl. RIS 2024).

Wenn wir den Lehrplan mit den Grundkompetenzen für die Matura vergleichen, erkennen wir schnell eine Kluft. Die Grundkompetenzen im Bereich Analysis sind auf das Minimale reduziert und verlangen nur die wichtigsten Fähigkeiten. Der Grenzwertbegriff tritt nur als intuitive Interpretationsmöglichkeit beim Differentialquotienten auf. Folgen und Reihen werden in den Grundkompetenzen gar nicht abgefragt. Es würde einen also nicht wundern, wenn durch diese Vereinfachung einige Themen im Unterricht zu kurz kämen und diese sowohl für Lehrpersonen als auch in weiterer Folge für die Schüler:innen Hürden darstellen. In dieser Arbeit soll unter anderem herausgefunden werden, in welchen Inhalten der Schulanalysis Lehrpersonen sicher sind und bei welchen Themen es Aufholbedarf gibt. Es liegt die Vermutung nahe, dass Gebiete, die in den Grundkompetenzen für die Matura nicht abgefragt werden, im Unterricht vernachlässigt werden. Dem soll zusätzlich zu den nun folgenden Leitfragen der Arbeit auf den Grund gegangen werden.

1.2 Forschungsfrage und Leitfragen der Arbeit

Die zentrale Forschungsfrage der Arbeit ist: Inwiefern können (angehende) Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen in der Analysis spontan mit passenden Gegenbeispielen reagieren? Diese Forschungsfrage beinhaltet einige Leitfragen, die wir nun im Detail beleuchten werden.

Inwiefern können Lehrpersonen Fehlvorstellungen im Unterricht überhaupt erkennen? Im ersten Schritt soll also überprüft werden, ob Personen mit Mathematikstudium generell entscheiden können, ob es sich bei diversen Schüler:innen-Aussagen um eine Fehlvorstellung oder eine richtige Aussage handelt.

Welche Gegenbeispiele haben (angehende) Lehrpersonen, wenn sie mit Fehlvorstellungen im Berührung kommen, parat? Wir werden also untersuchen, ob die

Lehrpersonen Gegenbeispiele kennen. Und wenn ja, wie vielfältig sind sie in dieser Hinsicht? Auf die hoffentlich richtig erkannten Fehlvorstellungen sollen nun also Gegenbeispiele folgen.

Wie aussagekräftig und geeignet sind die Beispiele für den Unterricht? Anschließend ist also noch zentral, welche Gegenbeispiele gewählt werden und wieso. Anhand von Kriterien soll analysiert werden, wie passend die Gegenbeispiele für den Mathematikunterricht sind.

Uns interessiert weiters: Welche Themen aus der Analysis sind dabei einfach, beziehungsweise schwierig? Wie wirken sich gewisse Faktoren (Schultyp, Dienstjahre, ...) auf die Vielfalt der Antworten aus? Welche Gemeinsamkeiten und/oder Unterschiede sind dabei erkennbar? Welche geeigneten Gegenbeispiele und Erklärungen sind für den Unterricht passend? Am Ende der Arbeit steht zusätzlich zur Auswertung und Analyse der gewonnenen Erkenntnisse das Ziel in Aussicht, einen Katalog an Gegenbeispielen mit Erklärungen zu verfassen, der angehende und bereits unterrichtende Lehrkräfte im Unterricht der Analysis unterstützen soll.

1.3 Forschungsstand

Die Forschung zum Thema dieser Masterarbeit beschränkt sich fast ausschließlich auf das Gebiet der Fehlvorstellungen. Es gibt einige Studien und auch Diplom- bzw. Masterarbeiten, die sich mit Schüler:innen-Fehlvorstellungen beschäftigen und diese auch empirisch, beispielsweise durch Interviews von Schüler:innen, erheben. Dies beschränkt sich nicht ausschließlich auf die Analysis. Eine kleine Auswahl davon lautet wie folgt. Beliebt sind Themen wie die Bruchrechnung (siehe Diplomarbeit von C. Eggharter, 2013 und Masterarbeit von V. Koppensteiner, 2020), Potenzen und Wurzeln (Diplomarbeit von B. Löffler, 2015) oder auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Masterarbeit von K. Wittmann, 2020). Die Arbeiten beschäftigen sich meist damit, welche Strategien es zur Bewältigung dieser Hürden im Unterricht gibt und wie man ihnen entgegenwirken kann. So werden beispielsweise Strategien zur Vermeidung von Fehlvorstellungen zum Thema Pythagoras (bei M. Raimer, 2022) behandelt. 2014 untersuchte C. Gahler im Zuge ihrer Diplomarbeit Fehlvorstellungen zum Thema Vektoren und dazu auch die Handlungsfähigkeit der Lehrpersonen. Das kommt dem Thema dieser Arbeit schon etwas näher, da auch bei uns die Fähigkeiten der Lehrer:innen eine zentrale Rolle spielen werden.

Gegenbeispiele in der Analysis sind jedenfalls kein neues Thema. Dazu gibt es in der Hochschulanalysis vor allem im internationalen Raum bereits Literatur, wie etwa *Counterexamples in probability and real analysis* von Wise/Hall (1993),

1 Einleitung

Counterexamples in Analysis von Gelbaum/Olmsted (1964) und *CounterExamples. From Elementary Calculus to the Beginnings of Analysis* von Bourchtein/Bourchtein (2015). Diese Werke gehen zwar etwas über die hier benötigten Beispiele hinaus, sind aber ein wichtiger Verweis, um Sachverhalte nachzulesen und werfen einen interessanten Blick auf die Definition des Gegenbeispiels. Im deutschsprachigen Raum bildet Appell (2009) mit *Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen* eine breite Basis für das Thema, indem er einige wichtige Gegenbeispiele der Analysis detailliert bearbeitet und auch auf die Relevanz des Gegenbeispiels aufmerksam macht. Die Verbindung jedoch, zu erproben, ob Lehrpersonen spontan solche Gegenbeispiele kennen und nennen können, ist noch wenig erforscht. Die Studien beschäftigen sich meist mit der Seite der Schüler:innen und wo die Fehlvorstellungen am ehesten auftreten oder eben rein mit der Auflistung von Gegenbeispielen, ohne Lehrkräfte miteinzubeziehen. Diese Arbeit soll jedoch einen Schritt weiter gehen, um zu zeigen, wie man auf diese existierenden Fehlvorstellungen rasch reagieren kann, um sie gegebenenfalls abzufedern. Im Grunde genommen soll also eine Brücke zwischen der Theorie und der praktischen Anwendung in der Schule entstehen.

Als Grundlage für fachliche Inhalte der Analysis dienen die Werke *Elementare Analysis* von Büchter/Henn (2010), *Analysis 1* von Forster/Lindemann (2023) und *Mathematik für das Bachelorstudium I* von Plaue/Scherfner (2009). Zur Abdeckung der didaktischen Inhalte sind vor allem *Didaktik der Analysis* von Greefrath et al. (2016), *Analysis verständlich unterrichten* von Danckwerts/Vogel (2006), *Didaktik der Analysis* von Blum/Törner (1983) und *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II* von Tietze/Klika/Wolpers (1997) als relevante Quellen zu nennen. Eine wichtige Basis für die Beschäftigung mit Grundvorstellungen bildet *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte* von R. vom Hofe (1995). Zur weiteren Erarbeitung der didaktischen Hintergründe werden *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen* von Brunner (2014) und *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge* von Nitsch (2015) verwendet. Diverse Artikel aus mathematischen Zeitungen und Journalen komplettieren die Basisliteratur dieser Arbeit, wie etwa *Developing a Simulation to Foster Prospective Mathematics Teachers' Diagnostic Competencies: The Effects of Scaffolding* von Schons et al. (2023), *Stille Begriffe sind tief* von Oldenburg/Weygandt (2015) und *Inwieweit kann universitäres mathematisches Fachwissen helfen, auf Schüler(Fehl)vorstellungen zu reagieren?* von Eberl et al. (2021). Dabei wurde vor allem versucht, auf aktuelle Artikel und Quellen zurückzugreifen, die die unterschiedlichen Themen am Zahn der Zeit bearbeiten.

Diese Masterarbeit stützt sich auf einen Artikel von C. Ableitinger (2023, preprint, eingereicht und angenommen) – *Auf Fehlvorstellungen in der Analysis spon-*

tan reagieren können – mit passenden Gegenbeispielen – der als Grundlage für die Idee der Arbeit dient und den Kern des Themas anspricht.

Unter Einbezug einiger Schulbücher aus sowohl Ober- als auch Unterstufe (*Lösungswege, Mathematik verstehen, Das ist Mathematik*) soll auch der Praxisbezug dieser Arbeit nicht verloren gehen. So soll eine möglichst sinnvolle Verbindung zwischen Theorie und Anwendung im Unterricht entstehen.

2 Theoretischer Rahmen: Grundvorstellungen, Fehlvorstellungen und Gegenbeispiele

2.1 Aspekte und Grundvorstellungen

Aspekte und Grundvorstellungen zu verschiedenen Themen sind in der Mathematikdidaktik von großer Relevanz und helfen den Lernenden dabei, bestimmte Begriffe mit Bedeutung zu versehen. Als Aspekt in der Mathematik versteht man einen „Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.“ (Greefrath et al. 2016, S. 17) Daraus können wir zwei wichtige Punkte herauslesen. Erstens ist ein Aspekt fachlicher Natur, das bedeutet er beschränkt sich auf die wissenschaftlich genaue Analyse eines Begriffs und nicht auf eine fachdidaktische Hilfestellung. Und zweitens handelt es sich bei einem Aspekt nur um einen Teil einer Definition. Ein Aspekt zeigt also immer nur eine Sichtweise, beziehungsweise einen bestimmten Blickwinkel eines Begriffs auf. Mehrere Aspekte miteinander definieren dann einen Begriff.

Grundvorstellungen sind dafür da, einem mathematischen Begriff Sinn zu geben und ihm eine Bedeutung zuzuschreiben. Im Gegensatz zu den Aspekten sind sie fachdidaktischer Art und sollen, wie es der Begriff schon sagt, dabei helfen, gewisse Vorstellungen zu entwickeln (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 17). Der Begriff der Grundvorstellung oder Anschauung geht weit in die Mathematik-Historie zurück und entwickelt sich über viele Jahre durch die Bearbeitung namhafter Mathematiker und Psychologen weiter. Vom Hofe fasst in seinem Buch *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte* die verschiedenen didaktischen Ansätze zusammen und vereint dann wie folgt zur Grundvorstellungsidee, die Folgendes bedient: die Sinnkonstituierung (Anknüpfung an bekannte Sachzusammenhänge), den Aufbau von Repräsentationen und Verinnerlichungen, und die Anwendung auf reale Sachprobleme (Erkennen der Strukturen) (vgl. vom Hofe 1995, S. 97 f.).

Grundvorstellungen helfen Lernenden dabei, bekannte Sachverhalte aus der realen Welt mit mathematischen Situationen zu verbinden und umgekehrt. Sie sollen

2 Theoretischer Rahmen: Grundvorstellungen, Fehlvorstellungen und Gegenbeispiele

zur Förderung von heuristischen Prozessen beitragen, um ein stures, rezeptives Auswendiglernen von Wissen zu vermeiden (vgl. Nitsch 2015, S. 19 ff.). Kurz gesagt sollen sie dazu dienen „Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität“ (vom Hofe 1995, S. 98) herzustellen. Die Ausbildung von Grundvorstellungen ist im Hinblick auf den schulischen Bereich gerade für die Bearbeitung komplexerer und fachlich höherer Inhalte relevant und nicht nur im elementaren Bereich wichtig (vgl. vom Hofe 1995, S. 101 f.).

Man unterscheidet grundsätzlich zwischen normativen und deskriptiven und zwischen primären und sekundären Grundvorstellungen. Erstere haben einen theoretischen Hintergrund und entsprechen einer „didaktischen Kategorie“ (vom Hofe 1995, S. 123). Sie bilden sozusagen die Ziel-Grundvorstellungen, die Schüler:innen ausbilden sollen. Währenddessen beschreiben die deskriptiven Grundvorstellungen die tatsächlichen Vorstellungen der Schüler:innen, die diese bereits erworben haben oder die durch Vorwissen entstanden sind (vgl. vom Hofe 1995, S. 128). In diesem Sinne kann bei der normativen Ebene auch von universellen und bei der deskriptiven Ebene auch von individuellen Grundvorstellungen gesprochen werden (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 18 f.).

Weiters wird in primäre und sekundäre Grundvorstellungen unterschieden. Primäre Grundvorstellungen werden ausgebildet, wenn ein mathematischer Begriff an konkreten Handlungen erlernt wird. So kann zum Beispiel im elementaren Bereich das Zählen anhand realer Gegenstände erworben werden. Sekundäre Grundvorstellungen entstehen dann auf Basis der primären. Sie „verbinden einen mathematischen Begriff mit bestehenden Vorstellungen und Darstellungen weiterer mathematischer Begriffe“. (Greefrath et al. 2016, S. 19) Um komplexere Inhalte, wie in der Analysis, zu lernen, sind also sekundäre Grundvorstellungen notwendig.

Grundvorstellungen und Aspekte stehen in Wechselwirkung zueinander. Eine Grundvorstellung kann sich beispielsweise mehrerer Aspekte bedienen. Aspekte wiederum können die Basis für mehrere Grundvorstellungen bilden. Als didaktisches Hilfsmittel sind sie in allen Bereichen der Mathematik zu finden und tragen dazu bei, abstrakten Begriffen inhaltlich mehr Bedeutung zu verleihen (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 16 ff.).

Lehrpersonen können Grundvorstellungen bei einem zielorientierten Unterricht helfen. Trotzdem sind Grundvorstellungen individuell auszubilden und können somit angepasst an die Schüler:innen sein. Sie können dazu dienen, Fehlvorstellungen von Beginn an zu vermeiden oder, wenn sie doch auftreten, zu diagnostizieren (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 20 f.).

2.2 Aspekte und Grundvorstellungen in der Analysis

Das folgende Kapitel beschreibt die einzelnen Grundvorstellungen und Aspekte der zentralen Begriffe in der Analysis. Diese werden erläutert und zueinander in Beziehung gesetzt.

2.2.1 Aspekte und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

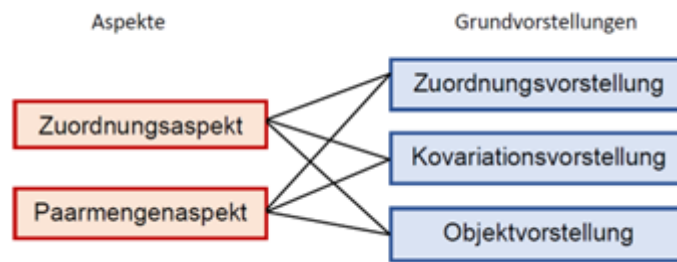


Abb. 2.1 Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

Aspekte des Funktionsbegriffs

Als Aspekte für den Funktionsbegriff werden in der Literatur zwei genannt. Der Zuordnungs- und der Paarmengenaspekt. Während sich der eine Aspekt dem Thema der Zuordnungsfunktion widmet, der gerade für das Erlernen injektiver, surjektiver und bijektiver Funktionen von Nutzen sein kann, beinhaltet der andere Aspekt die Vorstellung von Funktionen als Paarmenge. Das kartesische Produkt zweier Mengen, beispielsweise $A \times B$ bildet dabei die Basis jeder Funktion (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 47).

Grundvorstellungen des Funktionsbegriffs

Die Grundvorstellungen für Funktionen sind die Zuordnungsvorstellung, die Kovariationsvorstellung und die Objektvorstellung. Die Zuordnungsvorstellung geht Hand in Hand mit dem Zuordnungsaspekt und beschreibt, dass immer jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Zielmenge zugeordnet wird. Die Kovariationsvorstellung spricht die Veränderung bei Funktionen an. Eine Funktion hält fest, wie sich die abhängige Variable y verändert, wenn auch die Variable x verändert wird. Die dritte Grundvorstellung beschreibt die Funktion als Ganzes. Die Objektvorstellung kann also hilfreich sein, wenn mit der ganzen Funktion (entweder als Term oder als Graph) gearbeitet wird, zum Beispiel beim Operieren

mit dem Funktionsterm oder Modellieren von Sachverhalten (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 47 ff.).

2.2.2 Aspekte und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff

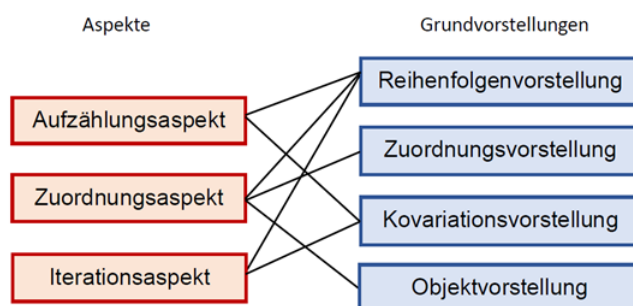


Abb. 2.2 Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff

Aspekte des Folgenbegriffs

Zu den Aspekten des Folgenbegriffs zählen der Aufzählungs-, der Zuordnungs- und der Iterations-, beziehungsweise Rekursionsaspekt. Der Aufzählungsaspekt beschreibt die Folge als Aufzählung oder Auflistung von Objekten oder Zahlen. Als außermathematische Verknüpfung können hier beispielsweise die Ordnung von Spielkarten oder Gegenständen nach Wertigkeit oder Größe dienen. Auch das Notenlesen in der Musik entspricht einer Aufzählung und folgt dem Prinzip: eines nach dem anderen. Der Zuordnungsaspekt sieht eine Folge als Funktion und beschreibt die Zuordnung jedes Funktionswertes zu einer natürlichen Zahl. Etwas komplexer erscheint der Iterations- oder Rekursionsaspekt. Dieser betrachtet jedes Folgenglied als abhängig vom vorherigen Glied und tritt im fächerübergreifenden Kontext zum Beispiel in der Finanzmathematik, etwa bei der Berechnung von Zinseszinsen oder bei der Tilgung eines Darlehens auf (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 88 ff.).

Grundvorstellungen des Folgenbegriffs

Aufbauend auf dem Aufzählungsaspekt gibt es die Reihenfolgenvorstellung. Sie beschreibt eine Folge als Aneinanderreihung von Zahlen oder Objekten. Die Zuordnungsvorstellung bedient sich des Zuordnungsaspekts und besagt, dass eine Folge jeder natürlichen Zahl ihr Folgenglied zuordnet. Als dritte Grundvorstel-

lung gibt es die Kovariationsvorstellung, die sich auf den Rekursionsaspekt bezieht. Hier wird die Änderung von einem Folgenglied zum nächsten beschrieben. Als vierte Grundvorstellung kommt auch hier, ähnlich wie bei den Funktionen, die Objektvorstellung hinzu. Sie betrachtet wieder die Folge als Ganzes und hilft bei Aufgaben, wo mit dem Folgenterm oder auch Graphen als Ganzes operiert wird (vgl. Greefrath et al 2016, S. 94 ff.).

2.2.3 Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Auch für den Grenzwertbegriff sind die Aspekte und Grundvorstellungen wichtig, um eine Anschauung des Grenzwerts zu ermöglichen. Gerade dieses Thema scheint in der Schulmathematik öfters für Hürden zu sorgen.

Aspekte des Grenzwertbegriffs

Als Aspekte des Grenzwertbegriffs werden der dynamische und der statische Aspekt genannt. Der dynamische Aspekt beschreibt den Grenzwert als unendlichen Prozess, der immer weiter geht. Dies kann beispielsweise durch sich immer halbierende Strecken oder Flächen veranschaulicht werden und bildet die Basis für dieses Verständnis. Dieser Aspekt ist für eine intuitive Vorstellung des Grenzwertbegriffs wichtig. Der statische Aspekt ist sozusagen eine Umkehrung dessen und fixiert einen Wert (Grenzwert), von dem aus ein Folgenglied gesucht wird, ab welchem alle anderen Folgenglieder in einer fixen Umgebung um diesen festen Wert liegen. Er ist also grundlegend für die $\epsilon - n_0$ -Definition für konvergente Folgen und deren Grenzwerte (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 103 f.).

Definition 2.2.1. (konvergente Folge): „Eine Folge (x_n) reeller oder komplexer Zahlen heißt konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$, wenn es für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt: $|x_n - a| < \epsilon$.“ (Plaue/Scherfner 2009, S. 166)

Rein mit dem dynamischen Aspekt, der umgangssprachlich das immer Weitergehen der Werte beschreibt, kann der Grenzwert für viele Schüler:innen gedanklich nicht erfasst werden und es können Zweifel bezüglich der Existenz des Grenzwertes aufkommen. Somit ist vor allem die Ausbildung des statischen Aspekts im Unterricht wichtig (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 104).

Grundvorstellungen des Grenzwertbegriffs

Die Annäherungsvorstellung stellt das Annähern von Folgengliedern an einen festen Wert dar. Dies fördert vor allem die intuitive Grenzwertvorstellung.

Die Umgebungsvorstellung besagt, dass bei jeder noch so kleinen Umgebung um einen Grenzwert, alle Folgenglieder ab einem bestimmten Folgenglied in dieser Umgebung liegen und baut somit auf dem statischen Grenzwertaspekt auf. Auch für den Grenzwert gibt es eine Objektvorstellung, die Grenzwerte als feste mathematische Objekte sieht. Am Beispiel der Folgen wäre das ein Wert, der durch eine gewisse Zahlenfolge konstruiert wird, wie etwa der Folgengrenzwert $e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 104 ff.).

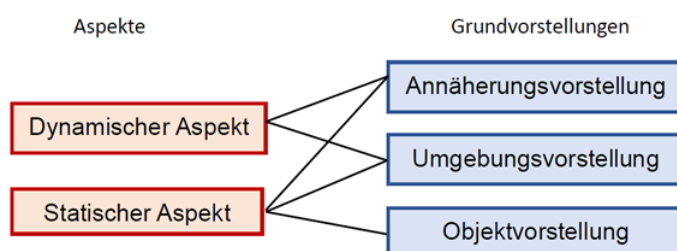


Abb. 2.3 Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

2.2.4 Aspekte und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

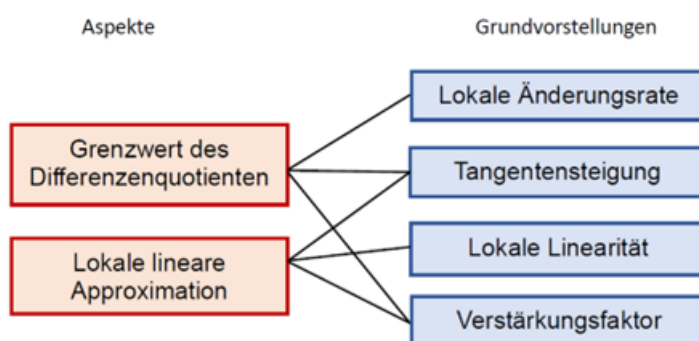


Abb. 2.4 Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

Aspekte des Ableitungsbegriffs

Dem Ableitungsbegriff liegen zwei Aspekte zu Grunde. Einerseits der des Grenzwerts als Differenzenquotienten und andererseits der der lokalen linearen Approximation. Es gibt vier Grundvorstellungen für den Ableitungsbegriff, die mit diesen beiden Aspekten wie folgt verwoben sind.

Grundvorstellungen des Ableitungsbegriffs

Die Grundvorstellung zur lokalen Änderungsrate wird sukzessive im Mathematikunterricht aufgebaut. Von der absoluten und relativen Änderung ausgehend soll sie den Grenzwert über die lokale Änderungsrate veranschaulichen. Da der Begriff der Änderung bei Schüler:innen immer wieder zu Missverständnissen und Fehlvorstellungen führt, sollte diese Grundvorstellung umfassend bearbeitet werden. Wichtige Konzepte sind hier die Vorstellung der Momentangeschwindigkeit, die Vorstellung der Steigung einer Funktion an einem Punkt und die Vorstellung, dass „die Änderung der Abhängigen y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist.“ (Greefrath et al. 2016, S. 148)

Des Weiteren ist die Grundvorstellung zur Tangentensteigung wichtig, die die Ableitung als Steigung der Tangente an einen Funktionsgraphen definiert. Diese Grundvorstellung birgt trotz der Relevanz zur Vorstellung des Ableitungsbegriffs gewisse Problematiken. Schüler:innen kennen die Tangente vom Kreis als eine Gerade, die den Kreis in nur einem einzigen Punkt berührt. Dass dies bei Funktionen aber durchaus anders sein kann, werden wir später in der Arbeit noch thematisieren. Trotzdem wird der Begriff der Tangente sehr häufig verwendet und bietet leider ein großes Fehlerpotenzial. Bei Danckwerts und Vogel wird der Aspekt der lokalen Linearisierung mithilfe der Schmiegegerade gezeigt. Man stellt sich die Tangente als Gerade vor, die sich nur lokal an den Graphen anschmiegt und somit ist auch das Problem des Tangentenbegriffs vom Kreis aus dem Weg geräumt. Mit der Tangente als bestapproximierende Gerade wird die Vorstellung der Ableitung als Tangentensteigung klarer und verhilft zu einer vollständigen Erfassung des Ableitungsbegriffs (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 68 ff.).

Zusammenhängend damit ist auch die Grundvorstellung der lokalen Linearität. Sie kann vor allem durch den intuitiven Zugang des Hineinzoomens erzeugt werden, denn jedes Kurvenstück wird mit einem stark vergrößerten Blick fast geradlinig. So kann die Funktion für kleine Änderungen quasi als linear angenommen werden.

Eine vierte Grundvorstellung ist die der Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen. Auch diese Vorstellung steht in Zusammenhang mit der lokalen Linearisierung und legt dar, wie stark sich die Änderung einer Größe auf die

andere abhängige Größe auswirkt. Nahe Extrempunkten gibt es hier nur kleine Änderungen, ist der Ableitungswert größer, so gibt es eine starke Änderung der Funktionswerte. Für kleine Änderungen gilt für den Zusammenhang von dx und dy : $dy \approx m \cdot dx$. Diese Grundvorstellung wird im Mathematikunterricht oftmals nicht so sehr ausgebildet, da sie eher in Anwendungen, beispielsweise beim Messen wichtig wird. Das zeigt sich an Schwierigkeiten von Schüler:innen bei entsprechenden Aufgaben (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 151 ff.).

2.2.5 Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff

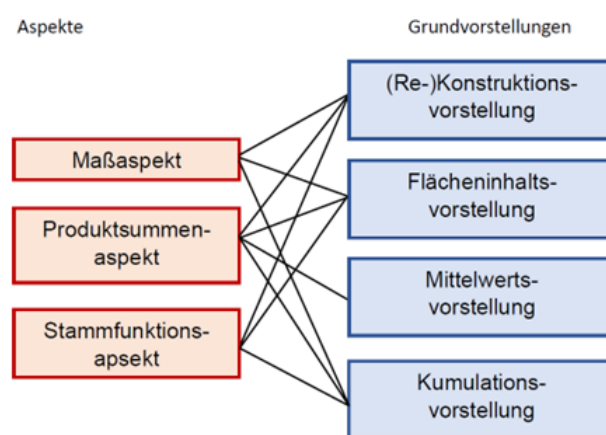


Abb. 2.5 Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Integralbegriff

Aspekte des Integralbegriffs

Zu guter Letzt kommen wir zu den Aspekten des Integralbegriffs. Der Produktsummenaspekt beschreibt das Integral als Summe von Produkten. Hier können sowohl Ober-, Unter- als auch Zwischensummen betrachtet werden. Der Stammfunktionsaspekt beschreibt den Zusammenhang zwischen der Integral- und der Differenzialrechnung als entgegengesetzte Rechenoperationen. Der Maßaspekt wird deutlich, wenn das Integrieren zur Flächen-, Längen- oder Volumenmessung angewandt wird. Auch diesen Aspekt beherbergt die Integralrechnung. In der Schule ist das nicht irrelevant, wenn man beispielsweise an Aufgaben mit Rotationskörpern denkt. Besonders interessant ist hier, dass Maße nicht negativ sind (vgl. Greefrath et al, 2016, S. 238 ff.). Diese Problematik wird später noch genauer thematisiert.

Grundvorstellungen des Integralbegriffs

Die Grundvorstellungen zur Integralrechnung teilen sich in die Flächeninhaltsvorstellung, die Rekonstruktionsvorstellung, die Mittelwertsvorstellung und die Kumulationsvorstellung auf. Die allseits bekannte Flächeninhaltsvorstellung ist wohl bei der Integralrechnung in vielen Mathematikstunden zentral. Sie sieht das Integral als Mittel zur möglichst genauen Bestimmung der Fläche unter einer Kurve. Wichtig ist hier die Thematisierung des orientierten Flächeninhaltes (vgl. Bender 1990, S. 114 f.) oder der Flächenbilanz, was auf die Unterscheidung hinausläuft, ob der Graph unter oder oberhalb der x -Achse verläuft. Die Rekonstruktionsvorstellung hilft dabei, Integrieren als Rekonstruktion zu deuten. Beispielsweise wird aus einer bestehenden Funktion eine Stammfunktion rekonstruiert. Die Mittelwertsvorstellung zeigt die Berechnung des Mittelwertes mithilfe eines Integrals und soll als Anschauung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung dienen. Dies kann beispielsweise bei der Berechnung einer mittleren Durchflussrate angewandt werden. Indem der Wert des Integrals durch dessen Länge dividiert wird, erhält man einen mittleren Funktionswert. Zuletzt gibt es noch die Kumulationsvorstellung. Sie beschreibt das Integrieren als laufenden Prozess des Aufsummierens und unterstützt bei der Vorstellung des Integrals als Grenzwert der Produktsumme (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 244).

2.3 Fehlvorstellungen

2.3.1 Fehlvorstellungen in der Mathematik

Fehlvorstellungen sind Lernschwierigkeiten und im Fach Mathematik recht häufig. Sie entstehen, wenn „Begriffe und Symbole, mit denen im Mathematikunterricht umgegangen wird, vom Schüler mit einer völlig anderen Deutung gefüllt werden, als es im Sinne der Sache adäquat wäre.“ (vom Hofe 1995, S. 10)

Sie kommen entweder durch die fälschliche Verbindung mit bereits bestehenden Alltagsvorstellungen, die nicht im Unterricht behandelt wurden oder im speziellen Fall des Faches Mathematik, durch bereits vorhandenes Vorwissen der Schüler:innen auf (vgl. Nitsch 2015, S. 10). Auch ein Widerspruch von primären und sekundären Vorstellungen kann der Ursprung von Fehlvorstellungen sein. Als Beispiel kann hier ein Sachverhalt aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung dienen. Die Wahrscheinlichkeit, einen 6er zu würfeln, ist auch, wenn man vorher schon öfters hintereinander einen 6er gewürfelt hat, wieder gleich groß. Intuitiv würde man aber eventuell meinen, die Wahrscheinlichkeit, dass wieder ein 6er käme, sei nun kleiner. So widersprechen sich die beiden Vorstellungen und es kann bei Schüler:innen zu Fehlvorstellungen kommen (vgl. Nitsch 2015, S. 28). Es können

also auch Grundvorstellungen – trotz dessen sie sorgfältig eingeführt werden – zu Fehlvorstellungen führen, da es immer sein kann, dass die Grundvorstellungen mit den tatsächlichen Vorstellungen der Schüler:innen kollidieren (vgl. vom Hofe 1995, S. 103). Es kann auch passieren, dass eine Vorstellung nicht zwingend falsch ist, sondern nur in einen falschen Bereich eingeordnet wird. Hier könne dann von einer inadäquaten Sinngebung gesprochen werden, die sozusagen falsch zugeordnet wurde und eigentlich zu einem anderen Thema gehört (vgl. Nitsch 2015, S. 23).

Fehlvorstellungen von Schüler:innen im Mathematik-Unterricht zu diagnostizieren, ist eine der Kompetenzen, die Lehrpersonen haben sollten. Gerade diese Fähigkeit ist aber schwierig zu erlernen. Eine Diagnose von Fehlvorstellungen setzt sowohl inhaltliches als auch didaktisches Fachwissen voraus. Einerseits muss der inhaltliche Fehler erkannt, andererseits muss ein Muster festgestellt werden, wie Schüler:innen falsch denken können beziehungsweise welche Systeme sie anwenden (vgl. Schons et al. 2023, S. 61 f.).

Doch wie kann man den Fehlvorstellungen nun entgegenwirken? Greefrath et al. (2016) weisen in *Didaktik der Analysis* darauf hin, dass eine gute Ausbildung der Grundvorstellungen unerlässlich sei, um Fehlvorstellungen einerseits zu diagnostizieren und sie zu erkennen und andererseits, um sie aus dem Weg zu schaffen. Denn wenn die Grundvorstellungen richtig ausgeprägt sind, sollten Fehlvorstellung weniger häufig auftreten. Auch bei Renate Nitsch (2015) wird beschrieben, dass die Ausprägung von Vorstellungen im Allgemeinen erst ein Verinnerlichen ermöglicht, das nicht an das im Mathematikunterricht leider oft verwendete Auswendiglernen anknüpft. Natürlich können auch ohne das Verstehen der Anwendungen mathematische Erfolgserlebnisse passieren, indem einfach Regeln immer gleich angewandt werden. Dies führt aber dazu, dass Schüler:innen für Aufgaben, die über das Gefragte hinausgehen, möglicherweise keine Lösungsansätze parat hätten. Symbole, Begriffe und Regeln haben dann also keine wirkliche Bedeutung, was die mathematischen Fähigkeiten und die Vielfältigkeit der Anwendungen massiv einschränkt (vgl. vom Hofe 1995, S. 10).

Schons et al. (2023) beschreiben das sogenannte *Scaffolding*, ein Kompetenzsystem, das dabei helfen soll, beispielsweise Fehlvorstellungen schneller zu diagnostizieren. Abgeleitet vom englischen Begriff erinnert es an eine Art Gerüstbau, wo Schritt für Schritt gearbeitet und erkannt werden soll, welche Kompetenzen bereits gefestigt wurden, und welche Kompetenzen noch nicht erreicht sind. Dadurch sollen die Fehlvorstellungen schneller diagnostiziert werden (vgl. Schons et al. 2023, S. 60).

In allen Fällen wird also darauf hingewiesen, dass klare Lernziele und Kompeten-

zen dabei helfen können, Fehlvorstellungen einerseits vorzubeugen und andererseits (im Falle, sie sind bereits eingetreten) dahinterzukommen, wo die Schwierigkeiten liegen. Die Grundvorstellungen können für den Bereich der Analysis dafür herangezogen werden. Wenn diese ausgeprägt sind, sollten Fehlvorstellungen weniger häufig auftreten.

2.4 Das Gegenbeispiel im Mathematikunterricht

2.4.1 Beweisen im Mathematikunterricht

Dass das Beweisen in der Mathematik von großer Bedeutung ist, ist unumstritten. Auch im schulischen Bereich sollte dies Anklang finden, denn um Regeln, Rechenmethoden oder Sätze zu verdeutlichen und ganzheitlich zu verstehen, ist das Beweisen im Mathematikunterricht wichtig. Es soll dazu dienen, dem sturen Auswendiglernen entgegenzuwirken. Dabei ist es egal, ob intuitive Ansätze verwendet werden oder etwas formal begründet wird (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 10). In der aktuellen Fassung des Lehrplans findet das Argumentieren, Begründen und Beweisen von einfachen Sachverhalten bereits in der Unterstufe Platz (vgl. RIS, 2024). Auch in der Oberstufe ist dieser Punkt verankert. Der Kompetenzbereich des kritisch-argumentativen Arbeitens umfasst das Argumentieren, Begründen und Beweisen von Behauptungen oder Vermutungen (vgl. RIS, 2024). Das Beweisen ist nicht nur eine Kompetenz, die Schüler:innen im Unterricht erlernen sollten, sondern auch für Lehrkräfte selbst von Relevanz. Wenn im Unterricht Fehlvorstellungen auftreten und nach plausiblen Erklärungen gesucht wird, um den Sachverhalt klarzustellen, ist es von Vorteil, wenn man als Lehrperson kurze Beweise im Unterricht parat hat. Natürlich gibt es Beweisarten, die sich für die Schule nicht eignen, und manche, die sehr wohl in Frage kommen und ab einem jungen Alter verwendet werden können.

2.4.2 Beweismethode „Gegenbeispiel“ im schulischen Kontext

Die Rede ist hier vom Beweis mittels Gegenbeispiel. Gerade in der Analysis ist es enorm wichtig, mit vielen Beispielen und Gegenbeispielen zu arbeiten, da so der Kern der Sache oftmals viel klarer wird (vgl. Appell 2009, S. vii). Gegenbeispiele sind also aus mathematikdidaktischer Hinsicht enorm wichtig und können, vor allem in Bezug auf Fehlvorstellungen, Klarheit im Unterricht schaffen.

Wir wenden uns kurz der Frage zu, was ein Gegenbeispiel im Gegensatz zu einem Beispiel überhaupt ist. Grundsätzlich wird von einem Gegenbeispiel gesprochen, wenn es einen Widerspruch zu einer Aussage hervorruft, also eine falsche Aussage

widerlegt (vgl. Bouchtein/Bouchtein 2015, S. xiii). Bereits bei Wise/Hall 1993 finden wir eine solche Erklärung: „In this book a counterexample is any example or result that is counter to commonly held beliefs or intuition.“ (Wise/Hall 1993, S. vii) Hier wird aber noch nicht auf den Unterschied zum illustrativen Beispiel eingegangen.

„Generally speaking, examples in mathematics are two types, illustrative examples and counterexamples, that is, examples to show why something makes sense and examples to show why something does not make sense.“ (Gelbaum/Olmsted 1964, S.v)

Mit diesem Zitat werden die zwei Arten von Beispielen in der Mathematik kurz und bündig beschrieben. Beispiele zeigen, dass etwas stimmt, unterstreichen also in gewisser Weise eine Aussage und Gegenbeispiele auf der anderen Seite widerlegen eine Aussage und zeigen, warum sie keinen Sinn macht. Auch Appell (2009) beschreibt dies ganz ähnlich, indem er auf Beispiele hinweist, die ein bereits bewiesenes Ergebnis illustrieren und andererseits auf Gegenbeispiele aufmerksam macht, die falsche Vermutungen widerlegen. Beide Arten von Beispielen können also die Existenz eines Objektes in gewisser Weise belegen. Appell weist auch darauf hin, dass die Unterscheidung der zwei Arten eigentlich künstlich sei, „da sie ja in Wirklichkeit dasselbe sind“ aber trotzdem andere Ziele verfolgen (Appell 2009, S. ix). Um hier noch einmal die Relevanz der Gegenbeispiele in der Mathematikdidaktik darzustellen, kann ein Sprichwort vor Augen gehalten werden: Ein Bild sagt mehr als tausend Worte! Denn auch Schüler:innen können oft mehr mit einem Gegenbeispiel, als mit einem langen und unnötig komplizierten Beweis anfangen.

Um eine Aussage zu widerlegen, reicht also ein einziges Gegenbeispiel. Um aufzuzeigen, wie dies schon in jungen Jahren geübt werden kann, betrachten wir eine Aufgabe im Schulbuch *Das ist Mathematik 1*. Hier müssen Schüler:innen beispielsweise folgende Aussage beweisen/widerlegen: „Das Addieren zweier ungerader natürlicher Zahlen gibt wieder eine ungerade natürliche Zahl“. Mit einem simplen Gegenbeispiel, wie $5 + 5 = 10$, kann die Aussage – in dem Fall wäre es sogar eine Fehlvorstellung – widerlegt werden (vgl. Aue et al. 2023, S. 41).

Die Methode des Gegenbeispiels eignet sich nicht nur für einfache Problemstellungen, sondern auch, um kompliziertere Sachverhalte zu widerlegen. Denn durch das Finden nur eines Gegenbeispiels ist die Ungültigkeit der Aussage bestätigt (vgl. Brunner 2014, S. 59). Mit Gegenbeispielen kann man sich also das Führen eines komplizierten Beweises ersparen. Um die (Un-)Gültigkeit einer Aussage zu bestätigen, muss man einfach ein (Gegen-)Beispiel finden. Auch das Finden keines Gegenbeispiels bestätigt eine Aussage in ihrer Gültigkeit (vgl. Plaue/Scherfner 2009, S. 25 f.). Somit wird der psychologische Prozess, der bei einer Beweisphase

prinzipiell durchlaufen wird, befriedigt, was auch schon in kleinem Rahmen in der Schule eine wichtige Rolle spielt. Die Schüler:innen sollen Klarheit erlangen (vgl. Brunner 2014, S. 73).

Trotzdem ist das Verstehen, dass nur ein einziges, simples Gegenbeispiel eine ganze Behauptung widerlegen kann, gar nicht so einfach und muss erlernt werden (vgl. Brunner 2014, S.85). Schüler:innen sollen möglichst früh erfahren, dass man so wirklich die Allgemeingültigkeit von Aussagen widerlegen kann und, dass ein einziges Gegenbeispiel dafür reicht. Je früher dies verstanden wird, desto einfacher und klarer wird es später im Unterricht (vgl. Brunner 2014, S. 88).

2.4.3 Kriterien eines guten Gegenbeispiels

Damit ein Gegenbeispiel im Unterricht auch wirksam ist und Fehlvorstellungen aufklärt, sollte es verschiedene wichtige Kriterien erfüllen, die wie folgt beschrieben werden können.

K1: Das Gegenbeispiel soll die Fehlvorstellung widerlegen.

K2: Das Gegenbeispiel soll den entscheidenden Inhalt der Fehlvorstellung widerlegen, also „den Kern der fehlerhaften Vorstellung treffen“. (Ableitinger 2023, S. 3)

K3: Das Gegenbeispiel soll sofort überzeugend und wirksam sein und es sollen keine langen Überlegungen notwendig sein, um es zu verstehen.

K4: Das Gegenbeispiel soll auch aufklären, warum es sich um eine Fehlvorstellung handelt (und nicht nur, dass es sich um eine Fehlvorstellung handelt).

K5: Das Gegenbeispiel soll rasch zu erfassen sein und sich keiner noch nicht geläufigen Methoden oder Begrifflichkeiten bedienen.

K6: Das Gegenbeispiel soll auch visuell oder grafisch anschaulich sein.

K7: Das Gegenbeispiel soll kurz und einfach zu verinnerlichen sein.

K8: Das Gegenbeispiel soll nicht zu sehr von prototypischen Beispielen aus dem Unterricht abweichen, damit es gut überzeugen kann.

K9: Das Gegenbeispiel soll auch für andere Fehlvorstellungen verwendbar sein. (vgl. Ableitinger 2023, S. 3)

Die Berücksichtigung dieser Kriterien bei der Suche nach Gegenbeispielen soll dazu führen, dass Lehrende auf ein Repertoire brauchbarer, für den Unterricht nützlicher Gegenbeispiele zurückgreifen können. Je mehr Kriterien das Beispiel erfüllt, desto geeigneter ist es für die Verwendung in der Schule. Die aus den Interviews hervorgegangenen Gegenbeispiele sollen in Kapitel 5 anhand der obig genannten Kriterien untersucht werden.

3 Empirische Untersuchung - wie Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen reagieren

Um zu erforschen, wie Lehrpersonen spontan auf Fehlvorstellungen mit Gegenbeispielen reagieren können, wurde im Zuge dieser Arbeit eine Untersuchung durchgeführt. Dabei wurden insgesamt elf Mathematiklehrer:innen oder angehende Mathematiklehrer:innen interviewt.

3.1 Beschreibung der Arbeitsweise und Interviewrahmenbedingungen

Instrumente

Die Befragungen wurden mittels Interviewleitfaden durchgeführt. Dabei teilte sich der gesamte Bogen in einen Kurzfragebogen, in dem persönliche Daten, die relevant für die Studie sind, abgefragt wurden. Außerdem wurde via Likert-Skala eine Selbsteinschätzung zum Thema durchgeführt, die im folgenden Kapitel 3.2 ausgewertet wird. Der zweite Teil bestand aus Interviewleitfäden mit jeweils acht fachlichen Aufgaben. Es gab zwei unterschiedliche Leitfäden, pro Proband:in wurde ein Leitfaden vorgelegt. In jedem Leitfaden waren jeweils acht hypothetische Aussagen von Schüler:innen zu finden. Davon waren drei Aussagen richtig und fünf Aussagen falsch – also mögliche Fehlvorstellungen. Die Proband:innen sollten zuerst bei jeder Aussage entscheiden, ob es sich um eine falsche oder um eine richtige Behauptung handelt. Im zweiten Schritt sollten sie erläutern, ob sie, falls es sich um eine Fehlvorstellung handelt, spontan ein Gegenbeispiel parat hätten, das den Sachverhalt widerlegt und somit erklärt.

Probe-Interview

Vor dem Start der Befragungen wurde ein Probe-Interview mit einer potenziellen Zielperson (die danach nicht mehr an der Befragung teilgenommen hat) durch-

3 Empirische Untersuchung - wie Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen reagieren

geführt. Sowohl der Kurzfragebogen als auch die Interview-Leitfäden wurden danach noch detaillierter ausgeführt. So stieg die Anzahl der Aussagen von sechs auf acht, da laut Testperson mehr Aussagen möglich wären und es auch zeitlich nicht den Rahmen sprengen würde. Außerdem würde dies zu mehr Daten der gesamten Erhebung führen. Zusätzlich wurden die Angaben zur Selbsteinschätzung im Kurzfragebogen hinzugefügt, um ein besseres Gesamtbild der Proband:innen und ihrer Angaben zur Schulanalyse zu bekommen.

Zielgruppe

Das Hauptmerkmal der Zielgruppe ist das Mathematik-Lehramtsstudium. Das bedeutet, dass auch Student:innen für die Interviews herangezogen wurden, um mögliche Unterschiede zwischen bereits Unterrichtenden und noch Studierenden sehen zu können. Das Hauptaugenmerk liegt also darauf, dass jene Personen berechtigt sind oder berechtigt sein werden, in der Oberstufe Mathematik zu unterrichten. Von den elf Proband:innen waren sieben bereits Unterrichtende und vier noch Studierende. Das örtliche Gebiet der Forschung beschränkte sich auf Wien und Niederösterreich. Das Alter und die Anzahl der Dienstjahre der Proband:innen wurden in diesem Fall nicht eingeschränkt.

Vorgangsweise der Befragungen

Den elf Personen wurden Fragebögen vorgelegt. Die Interviews wurden hauptsächlich einzeln und bis auf eine digitale Ausnahme in Präsenz durchgeführt. Die Interviews setzten sich aus einem allgemeinen Teil mit einer kurzen mündlichen Einführung der Interviewenden und einem Kurzfragebogen (siehe Kurzfragebogen im Anhang) zusammen. Nach dem Ausfüllen des Kurzfragebogens hatte die Person in etwa fünf Minuten Zeit, um den eigentlichen Interviewleitfaden durchzulesen. (Obwohl in dieser Forschung von einer spontanen Reaktionsfähigkeit ausgegangen wird, sollte damit bezweckt werden, dass der Stress-Level nicht allzu hoch ist, damit die interviewten Personen auch in Ruhe antworten können. Die Interview-Situation sollte eine reale Unterrichts- und keine Prüfungssituation für die Proband:innen simulieren. Mit dieser Methode sollte also die Situation im Unterricht nachempfunden werden, denn ein paar Minuten Nachdenkzeit kann man auch da, beispielsweise durch einen Arbeitsauftrag, leicht schaffen. Trotzdem wurden die interviewten Personen im Vorhinein nur soweit aufgeklärt, dass sie zwar wussten, worum es geht, sich aber nicht explizit vorbereiten konnten.) Der eigentliche Teil des Interviews via Interviewleitfaden wurde als Tonspur aufgezeichnet und transkribiert (siehe Transkripte im Anhang). Um eine breite Anzahl an Beispielen abzudecken, wurden zwei unterschiedliche Leitfäden angefertigt. Den elf

Personen wurden die Leitfäden zufällig vorgelegt. Leitfaden 1 wurde von fünf Personen und Leitfaden 2 von sechs Personen bearbeitet.

Der aufgenommene Teil der Interviews hatte eine Zeitspanne von etwa fünf bis 40 Minuten, also eine sehr variierende Dauer. Im Vorhinein wurde von allen Proband:innen via schriftlicher Einverständniserklärung eine Unterschrift eingeholt, um die datenschutzrechtlichen Grundlagen abzusichern. Die Interviews wurden also im Nachhinein transkribiert und werden im folgenden Teil analysiert, ausgewertet und mit der Fachliteratur in Verbindung gebracht.

3.2 Ergebnisse aus den Kurzfragebögen

Die Kurzfragebögen sollten dazu dienen, persönliche Daten einzuholen, die nicht mit der Identität der Person in Verbindung gebracht werden können, jedoch für die Forschung interessant sind. Als persönliche Daten wurde nach der Altersgruppe, dem Geschlecht, dem Ausbildungs-Standort und dem momentan höchsten Abschluss gefragt. Danach folgten ein paar schulbezogene Fragen, für all jene, die bereits unterrichten. Hier wurde etwa nach der Anzahl der Dienstjahre, dem momentanen wöchentlichen Unterrichtsmaß in Mathematik, dem Schultyp, dem Schulstandort und den bereits unterrichteten Schulstufen gefragt.

Als dritter und letzter Teil des Kurzfragebogens wurden einige Aussagen zur Selbsteinschätzung gestellt. Hier ging es beispielsweise um die Häufigkeit des Auftretens von Fehlvorstellungen im Unterricht, die eigene Sicherheit im Gebiet der Analysis in der Schule und die Verwendung von Gegenbeispielen im Unterricht. Für die Studierenden unter den Proband:innen wich dieser Teil etwas ab und wurde auf die Berührungspunkte mit Gegenbeispielen und Fehlvorstellungen im Studium bezogen. Im Folgenden werden die Ergebnisse aus diesem Kurzfragebogen umrissen. Anschließend sollen sie individuell mit den Ergebnissen der Interview-Leitfäden in Verbindung gebracht werden.

Altersklasse	Dienstjahre	Schultyp	Schulstandort
30 - 40	7	AHS	Wien
> 50	10	AHS	Wien
< 30	1	AHS	Wien
> 50	30	AHS	Wien
< 30	2	MS	NÖ
> 50	28	AHS	Wien
30 - 40	10	AHS	NÖ

Tabelle 3.1 Eigenschaften der bereits unterrichtenden Proband:innen

3 Empirische Untersuchung - wie Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen reagieren

Die Auswertungen der Likert-Skalen haben im Schnitt folgende Ergebnisse geliefert, die im nachstehenden Teil zu lesen sind. Für die Auswertung wurde ein Mittelwert berechnet, der die Prozente der Zustimmung darstellt. 100% bedeuten also, dass die Aussage vollkommen zutrifft und 0% bedeuten, dass die Aussage gar nicht zutrifft. So wurde jedem Kästchen auf der Skala ein Prozentwert zugeordnet (0%, 25%, 50%, 75% und 100%) und daraus der Durchschnitt berechnet. Da dieser Wert aber aufgrund der geringen Anzahl an Befragten nicht immer repräsentativ genug ist, um eine Aussage zu treffen, werden unter anderem auch die absoluten Häufigkeiten angegeben, wie oft welcher Wert angekreuzt wurde. Die Gesamtanzahl der bereits unterrichtenden Personen ist $n = 7$, die der noch studierenden Proband:innen ist $n = 4$. Aufsteigend von links nach rechts sind die Kästchen in den Tabellen 3.2 und 3.3. wie folgt zu lesen: sehr zutreffend, eher zutreffend, neutral, wenig zutreffend, gar nicht zutreffend.

Aussage	absolute Häufigkeiten					Ø in %
Ich stoße in meinem Unterricht häufig auf Fehlvorstellungen von Schüler:innen.	1	2	1	3	0	54%
Ich glaube, dass ich gut spontan auf Äußerungen von Schüler:innen reagieren kann.	0	7	0	0	0	75%
In meinem Unterricht nutze ich häufig Gegenbeispiele, um etwas zu erklären.	1	3	3	0	0	68%
Ich fühle mich beim Unterrichten des Fachgebiets Analysis sicher.	2	3	1	1	0	71%

Tabelle 3.2 Auswertung Likert-Skala bereits unterrichtender Proband:innen

Wie bereits erwähnt, muss vorab gesagt werden, dass aufgrund der niedrigen Anzahl an Befragten nicht bei allen Aussagen ein sinnvoller Schluss für die Allgemeinheit zu ziehen ist. Trotzdem sind die Werte in Hinblick auf die nachfolgende Forschung interessant. Die Lehrpersonen stoßen zu etwa 50% auf Fehlvorstellungen im Unterricht. Es hält sich also ungefähr die Waage. Bei einigen Lehrpersonen kommt es häufig vor, andere geben an, auf wenig oder gar keine Fehlvorstellungen zu stoßen. Hier liegt die Vermutung nahe, dass die Fehlvorstellungen aber trotzdem auftreten und die Lehrpersonen diese einfach nicht wahrnehmen. Die 54% resultieren also aus unterschiedlich gestreuten Werten, wie der Tabelle 3.2 zu entnehmen ist.

Dass die Befragten spontan auf Äußerungen im Unterricht reagieren können, stieß auf 75% Zustimmung, was prinzipiell einen vielversprechenden Eindruck für die

3.2 Ergebnisse aus den Kurzfragebögen

nachstehenden Interviews vermittelt. Ein Blick in die Tabelle lässt erkennen, dass dieser Wert sich daraus ergibt, dass alle Befragten „eher zutreffend“ angekreuzt haben. Hier gibt es also eine einheitliche Meinung, was diese Aussage betrifft. Einerseits ist es schön, dass die Lehrpersonen sich diesbezüglich eher sicher sind, andererseits hat auch niemand „sehr zutreffend“ angekreuzt.

Dass sie Gegenbeispiele im Unterricht verwenden, wurde mit etwas mehr als zwei Dritteln bejaht. Eine Person nutzt Gegenbeispiele wirklich häufig, die anderen öfter bis manchmal. Es war niemand dabei, der angegeben hat, gar keine Gegenbeispiele im Unterricht zu verwenden. Auch das ist erfreulich und lässt auf gute Ergebnisse der Untersuchung hoffen. Zu guter Letzt beträgt der Durchschnitt bei der Aussage, ob man sich im Fachgebiet Analysis sicher fühlt, in etwa 70%. Hier gab es eine breitere Streuung der Aussagen, was die Einschätzung doch wieder sehr individuell und somit für den Bezug zum jeweiligen Interview relevanter macht, als allgemeine Aussagen über den Durchschnitt zu treffen. Trotzdem ist der Wert eher auf der zutreffenden Seite.

In Bezug auf den Schultyp kann festgestellt werden, dass jene, die in einer AHS unterrichten und zusätzlich schon mehr als 5 Dienstjahre absolviert haben, sich im Gebiet der Analysis - zumindest laut Selbsteinschätzung - um einiges sicherer fühlen, als jene die beispielsweise in einer Mittelschule unterrichten oder erst wenige Dienstjahre haben. Auch die breite Streuung der bereits unterrichteten Schulstufen wirkt sich in den meisten Fällen auf die Souveränität im Unterricht aus. Im Hinblick auf den Schulstandort kann hier kein Unterschied festgestellt werden. Mit steigendem Dienstalter steigt vermeintlich auch die Sicherheit in komplexen Gebieten, wie der Analysis.

3 Empirische Untersuchung - wie Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen reagieren

Für die Student:innen sahen die Ergebnisse wie folgt aus:

Aussage	absolute Häufigkeiten					Ø in %
Ich fühle mich auf den Mathematikunterricht gut vorbereitet.	0	3	1	0	0	69%
Ich fühle mich auf den Mathematikunterricht im Fachgebiet der Analysis gut vorbereitet.	0	1	2	1	0	50%
Das Thema „Fehlvorstellungen von Schüler:innen“ ist mir im Laufe des Studiums untergekommen.	1	0	1	2	0	50%
Während des Studiums wurde oft mit Gegenbeispielen als didaktisches Hilfsmittel gearbeitet.	0	2	0	2	0	50%

Tabelle 3.3 Auswertung Likert-Skala noch nicht unterrichtender Proband:innen

Bis auf die erste Aussage, die zumindest eher im zutreffenden Bereich bei allen Proband:innen liegt, kann man die anderen Sätze nicht sinnvoll auswerten. Die Ergebnisse waren hier sehr unterschiedlich. Diese Umstände führen dazu, dass im Mittel dann meistens 50 % herauskamen. Es gibt Student:innen, denen Gegenbeispiele und Fehlvorstellungen im Studium sehr wohl deutlich begegnet sind. Anderen wiederum sind solche Themen scheinbar nie untergekommen, was zu bezweifeln ist, da Gegenbeispiele ja in vielen Teilen des Mathematik-Studiums eine große Rolle spielen. Viel eher könnte man behaupten, dass sich viele Studierende der großen Relevanz von Gegenbeispielen nicht bewusst sind. Daraufhin wird eventuell angegeben, dass man damit nicht in Berührung gekommen sei, da es ihnen einfach nicht bewusst war, dass dies doch ein sehr relevantes Mittel, vor allem im Hinblick auf den späteren Unterricht, und sicher auch in den Vorlesungen vorgekommen ist.

Trotzdem wird das Programm der Universität zum Teil individuell gestaltet und jede:r Studierende bekommt somit unterschiedliche Schwerpunkte angeboten. Auch daraus könnte resultieren, dass manchen Studierenden diese Themen bekannter vorkommen als anderen. Wir sehen jedenfalls eine Streuung der angekreuzten Werte, was eine Interpretation des Durchschnittswertes nicht weiter notwendig macht. Auch hier stellt sich also insgesamt heraus, dass es sinnvoller ist, die jeweiligen Einschätzungen auf das zugehörige Interview zu beziehen und herauszufinden, ob die Einschätzung mit der tatsächlichen Fähigkeit zusammenstimmt.

3.3 Interviewleitfäden und zusammengefasstes Ergebnis

Folgende Fehlvorstellungen aus den Bereichen Monotonie, Stetigkeit, Folgengrenzwerte, Extremstellen, Wendestellen, Tangentenproblem und Integralrechnung wurden, aufgeteilt auf die zwei Interviewleitfäden, abgefragt (Tabelle 3.4). Die Fehlvorstellungen wurden, um die Auswertung im Text zu vereinfachen, durchnummeriert.

Interviewleitfaden 1 Interviewleitfaden 2

F1	„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$ für eine Stelle $p \in D$, dann kann die Funktion f nicht mehr streng monoton sein.“
F2	„Unstetige Funktionen haben (mindestens) eine Sprungstelle.“
F3	„Stetige Funktionen lassen sich durchzeichnen, ohne mit dem Stift abzusetzen.“
F4	„Jede konvergente Folge a_n kommt ihrem Grenzwert a beliebig nahe, ohne ihn je zu erreichen.“
F5	„Jede konvergente Folge a_n kommt ihrem Grenzwert a immer näher.“
F6	„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$ und $f''(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine Sattelstelle der Funktion f .“
F7	„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine lokale Extremstelle der Funktion f .“
F8	„Eine Tangente an einen Funktionsgraphen hat mit dem Graphen genau einen Punkt gemeinsam, nämlich den Berührungspunkt.“
F9	„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f''(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine Wendestelle der Funktion f .“
F10	„Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ gibt den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse im Intervall $[a, b]$ an.“

Tabelle 3.4 Fehlvorstellungen in den Interview-Leitfäden

Um die Entscheidungsfähigkeit der Proband:innen abzufragen, wurden folgende

3 Empirische Untersuchung - wie Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen reagieren

richtige Aussagen aus der Schulanalysis in die Interview-Leitfäden gemischt (Tabelle 3.5). So wurde getestet, ob die Lehrpersonen überhaupt erkennen können, welche Aussagen richtig, und welche falsch sind.

R1	„Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist, dann ist die Funktion f im Intervall (a, b) streng monoton steigend.“
R2	„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$ und $f''(p) > 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine lokale Minimumstelle.“
R3	„Eine Tangente an einen Funktionsgraphen kann mit dem Graphen einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben.“
R4	„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f''(p) = 0$ und $f'''(p) \neq 0$, so handelt es sich bei der Stelle p sicher um eine Wendestelle der Funktion f .“
R5	„Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren einer Funktion immer erhalten. D.h. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.“
R6	„Das bestimmte Integral einer Funktion kann auch einen negativen Wert annehmen.“

Tabelle 3.5 Richtige Aussagen in den Interview-Leitfäden

Wie die Proband:innen beim Bewerten des Wahrheitsgehaltes der einzelnen Aussagen in der empirischen Untersuchung abgeschnitten haben, zeigen die beiden untenstehenden Tabellen 3.7 und 3.8. Zuerst wird die Legende zur Interpretation der Farben in Tabelle 3.6 präsentiert. Richtig (grün) bedeutet in diesem Fall, dass eine Fehlvorstellung auch als solche identifiziert werden konnte und eine richtige Aussage auch als solche gesehen wurde. Falsch (rot) bedeutet in dem Sinne, dass eine falsche Entscheidung vorliegt. Also dass eine Fehlvorstellung als richtig eingestuft wurde, oder umgekehrt, dass eine richtige Aussage als Fehlvorstellung gesehen wurde. Da einige Proband:innen keine fixe Entscheidung treffen konnten, wurde in den Interviews nach einer Tendenz gefragt. Es entstanden also noch die Entscheidungskategorien *Entscheidung unsicher*, *Tendenz richtig*; *Entscheidung unsicher*, *Tendenz falsch* und *Entscheidung unsicher, keine Tendenz*, wenn die befragte Person wirklich keine Tendenz zu der Aussage festmachen konnte.

Die Aussagen wurden in den Interviews zwar in zufälliger Reihenfolge angegeben, um die Situation aufzulockern und kein Muster erkennbar zu machen. In den Tabellen 3.7 und 3.8 werden sie aber, getrennt nach den beiden Interviewleitfäden in einem Ranking angezeigt. Zuerst kommen die richtigen Aussagen, sortiert von

3.3 Interviewleitfäden und zusammengefasstes Ergebnis

Aussage wurde richtig identifiziert	Aussage wurde falsch identifiziert	Entscheidung unsicher, Tendenz richtig	Entscheidung unsicher, Tendenz falsch	Entscheidung unsicher, keine Tendenz

Tabelle 3.6 Legende Auswertung der Interviewleitfäden

R1					
R4					
R2					
F8					
F2					
F10					
F4					
F6					

Tabelle 3.7 Auswertung Interviewleitfaden 1

der besten zur schlechtesten, und danach die Fehlvorstellungen, wieder sortiert von der, die am besten identifiziert wurde zu der, die am schlechtesten identifiziert wurde.

Am besten abgeschnitten haben also die Fehlvorstellungen F7, F8, F1 und F2 mit entweder lauter richtigen Entscheidungen oder nur einer unsicheren Aussage. Bei den richtigen Aussagen konnten R1, R2, R4 und R5 am eindeutigsten identifiziert werden. Generell schnitten die richtigen Aussagen insgesamt besser ab als die Fehlvorstellungen. Es kann also daraus der Schluss gezogen werden, dass richtige Aussagen meist auch als solche bestätigt werden können. Dies kann aber durchaus an den hier konkret verwendeten Aufgaben liegen. In beiden Tabellen ist aber ein Muster erkennbar, es waren jeweils zwei Fehlvorstellungen dabei, die der Mehrheit der Befragten schwer gefallen sind. Dies bestätigt eine gute Verteilung der Aufgaben auf die Interviewleitfäden und zeigt, dass beide Leitfäden ungefähr vom gleichen Schwierigkeitsgrad waren.

R5						
R6						
R3						
F7						
F1						
F9						
F3						
F5						

Tabelle 3.8 Auswertung Interviewleitfaden 2

3.4 Personenbezogene Auswertung

Wir wollen nun die Aussagen der Likert-Skalen zur Selbsteinschätzung auf den Kurzfragebögen anhand der einzelnen Personen analysieren und untersuchen, wie diese mit den Aussagen in den Interviews zusammenpassen. Außerdem sollen in diesem Kapitel Unterschiede und Gemeinsamkeiten, die sich eventuell in den Interviews gezeigt haben, dargestellt werden.

3.4.1 Unterschiede und Gemeinsamkeiten

Am Beginn einer solchen empirischen Studie kommen oft unbewusst Vermutungen auf, dass eine der beiden Gruppen (bereits im Beruf stehende und angehende Lehrer:innen) besser oder schlechter in gewissen Dingen reagieren könnten. Es hat sich aber herausgestellt, dass gar nicht so viele Unterschiede bemerkbar sind.

Zuerst stellen wir uns die Frage, ob es einen Unterschied beim Feststellen des Wahrheitsgehalts der Aussagen gibt. Zusammenfassend kann nämlich aufgrund der unterschiedlichen Leistungen - es hat sehr wohl bei den Unterrichtenden als auch bei den Studierenden Interviewpersonen gegeben, die mehr oder weniger gewusst haben – kein Unterschied festgemacht werden. Tatsächlich lässt sich aber feststellen, dass bei Themen wie der Stetigkeit oder den Folgen die Studierenden sogar fachlich etwas mehr Ahnung hatten. Man spürt also, dass die Beschäftigung mit solchen Inhalten hier noch weniger weit entfernt und daher präsenter ist. Hingegen waren einige der befragten Lehrpersonen bei Aussagen zur Differentialrechnung, vor allem zur Kurvendiskussion, relativ sicher und vor allem schnell in der Entscheidung. Diese Themengebiete dürften sich also, vermutlich aufgrund

der großen Präsenz im Lehrplan, mit den Dienstjahren festigen und stark verankert sein. Dies bestätigt sich auch durch andere Studien, wie etwa durch die COACTIV-Studie, die 2003 und 2004 im Zuge der PISA getesteten Klassen mit den Lehrkräften durchgeführt wurde. Hier konnte nicht festgestellt werden, dass Lehrer:innen mit mehr Berufserfahrung auch mehr fachliches Wissen haben. Es ist eher so, dass sich die gewohnten Inhalte festigen, neue oder seltene Themen, jedoch nicht so gut verankert sind (vgl. Krauss et al. 2008, S. 244).

Ein weiterer Unterschied zeigt sich innerhalb der Proband:innen, die bereits unterrichten. Hier fällt stark auf, dass die Dauer der Interviews von Proband:innen, die schon längere Zeit in der Schule sind, also zehn Jahre oder mehr, kürzer war, als jene derer, die noch nicht so lange unterrichten. Es zeigt wieder, mit steigendem Dienstalter festigen sich gewisse Themen und die Antworten kommen daher oft schnell. Dafür ist eventuell weniger Bereitschaft vorhanden, länger über Aussagen nachzudenken und es wird eher rasch entschieden. Diese Nachdenklichkeit merkt man bei Personen mit jüngerem Dienstalter eher. Die Interviews dauern länger, einzelne Aussagen werden oft einige Minuten lang überdacht und bereits gemachte Aussagen werden sogar manchmal revidiert. Dies könnte eventuell auch als Unsicherheit gedeutet werden und hat somit natürlich eine gute und eine weniger gute Seite.

Die bereits unterrichteten Schulstufen spielen hier sicher auch eine Rolle. Viele der Lehrpersonen, die so rasch entscheiden können, haben bereits alle (oder fast alle) Schulstufen unterrichtet und es ist somit eine gewisse Routine bemerkbar.

Insgesamt lassen sich also minimale Unterschiede erkennen. Keine Auswirkungen scheint der Schulstandort zu haben, denn hier gaben eben Personen mit ähnlichem Dienstalter auch ähnliche Antworten. Hier könnte durchaus noch einmal nachgefragt werden, dafür müsste aber das örtliche Feld der Studie erweitert und die Anzahl der Befragten erhöht werden.

3.4.2 Analyse der Selbsteinschätzungen aus den Kurzfragebögen

Um ein Bild davon zu bekommen, wie gut sich die einzelnen Proband:innen im Vorhinein eingeschätzt haben, werden wir uns nun einzelnen Aussagen aus den Likert-Skalen der Kurzfragebögen widmen und diese mit den tatsächlichen Leistungen im Interview vergleichen. Die meisten Proband:innen konnten rund sechs der acht Aussagen in den Interviews richtig einordnen. (Dies meint nur die Entscheidung, ob es sich um eine richtige Aussage oder eine Fehlvorstellung handelt und nicht die korrekte Angabe eines Gegenbeispiels.) Es gibt einzelne Ausreißer, einmal mit drei aus acht Aussagen und zweimal mit sieben von insgesamt acht

3 Empirische Untersuchung - wie Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen reagieren

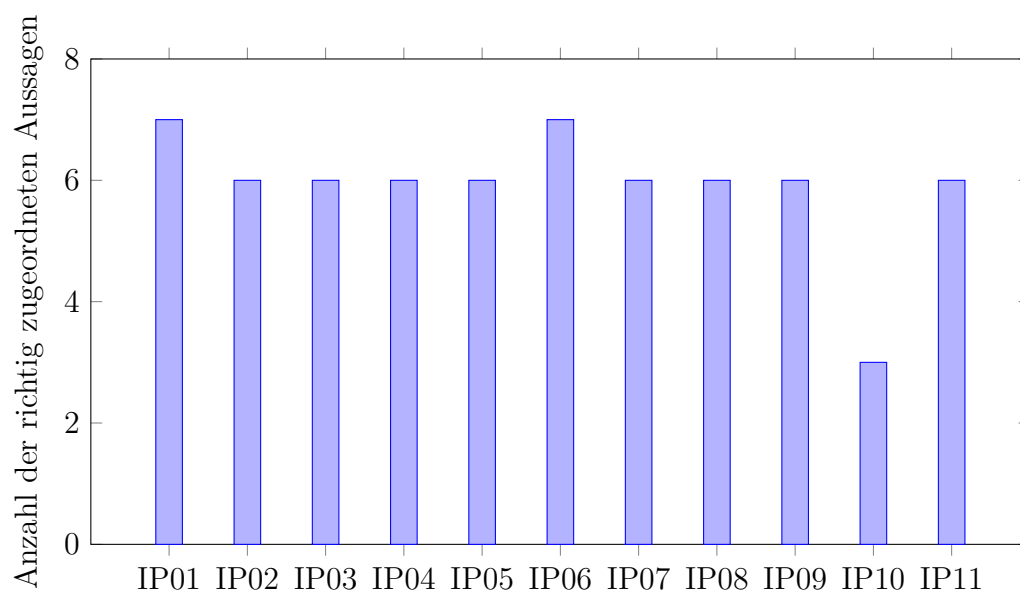


Abb. 3.1 Richtig beantwortete Aussagen

Aussagen (siehe Diagramm Abbildung 3.1). Der Durchschnitt der richtig eingeordneten Aussagen von allen Proband:innen liegt also bei genau $5,9 \approx 6$ richtig erkannten Aussagen. Teilweise passt dies mit der Selbsteinschätzung auch gut zusammen. Die Likert-Einschätzung bestand, wie bereits erwähnt, aus fünf Stufen: gar nicht zutreffend, wenig zutreffend, neutral, eher zutreffend, sehr zutreffend.

Bereits unterrichtende Proband:innen

Bei den bereits unterrichtenden Proband:innen betrachten wir zuerst folgende allgemeine Aussage zur Selbsteinschätzung:

Ich glaube, dass ich gut spontan auf Äußerungen von Schüler:innen reagieren kann.

Diese Aussage haben alle bereits unterrichtenden Proband:innen mit der zweithöchsten Stufe angekreuzt, also eher zutreffend. Die Lehrenden sind sich also recht sicher, im Unterricht spontan reagieren zu können. Niemand hat sehr zutreffend angekreuzt. Wenn man es mit den Ergebnissen vergleicht, stimmt das im Großen und Ganzen überein. Der Mittelwert der richtig beantworteten Fragen liegt bei ca. sechs Aussagen, also würde das mit der Einschätzung betreffend dieser Aussage übereinstimmen. Bei dem Ausreißer mit drei beantworteten Aussagen muss beachtet werden, dass diese Einschätzung bei dieser Aussage nicht nur auf das

Stoffgebiet der Analysis beschränkt ist, sondern die generelle Reaktion auf Fragen im Unterricht gemeint ist. Es kann also durchaus sein, dass die Einschätzung dieser Interviewperson IP10 mit ihrem Meinungsbild in anderen Themengebieten zusammenpasst. Da diese Interviewperson auch in der Mittelschule unterrichtet, wird es so sein, dass die Themenschwerpunkte im Moment einfach andere sind, und es nur die fachliche Kompetenz ist, die hier fehlt. Wenn der Stoff der Oberstufe länger nicht behandelt wird, ist klar, dass das Wissen in den Hintergrund rückt. Trotzdem sind alle, die ein Lehramtsstudium in Mathematik abgeschlossen haben, befähigt, in der Oberstufe zu unterrichten und da werden gewisse Inhalte wieder benötigt.

Ich fühle mich beim Unterrichten des Fachgebiets Analysis sicher.

Spannender hingegen ist folgende Aussage: Ich fühle mich beim Unterrichten des Fachgebiets Analysis sicher. Wir thematisieren gleich wieder Interviewperson 10. Diese Person hat angegeben, dass diese Aussage für sie weniger zutreffend ist. Sie vermutete also, dass sie hier bei den Antworten nicht so sicher sein würde und hat sich selbst auch so eingeschätzt. Außerdem wurde diese Unsicherheit bezüglich der Themengebiete mehrmals während des Interviews erwähnt (vgl. Anhang, Interview IP03). Drei Personen haben eher zutreffend angekreuzt, was mit jeweils sechs oder sieben richtigen Aufgaben gut zusammenpasst. Eine Interviewperson hat angegeben, der Aussage neutral gegenüberzustehen, hat aber ebenfalls sechs Aufgaben richtig erledigt und sich somit etwas schlechter eingeschätzt, als sie wirklich ist. Zweimal wurde dann noch das Kästchen für *sehr zutreffend* angekreuzt, wobei auch hier beide Personen sechs von acht Aufgaben richtig hatten. Also auch, wenn man sich in dem Gebiet sicher ist, gibt es immer wieder Themen, die anscheinend doch nicht so gebräuchlich und daher nicht spontan abrufbar sind. Natürlich muss beachtet werden, dass der Begriff des „sich sicher föhlens“ von jedem anders aufgefasst werden kann. Wenn eine Lehrperson immer gut vorbereitet ist und viel Zeit in die Stundenplanung investiert, dann föhlt sie sich schnell sicher. Trotzdem gilt das ja nur für die Inhalte, die eben gerade im Unterricht präsent sind. Die Einschätzung zur Sicherheit im Themengebiet ist also gar nicht so einfach und war scheinbar für einige nicht ganz eindeutig zu entscheiden.

In meinem Unterricht nutze ich häufig Gegenbeispiele, um etwas zu erklären.

Vergleichen wir nun noch, wie gut die Proband:innen ihren Umgang mit Gegenbeispielen im Unterricht eingeschätzt haben. Die Aussage „*In meinem Unterricht nutze ich häufig Gegenbeispiele, um etwas zu erklären.*“ stieß auch hier auf sehr

3 Empirische Untersuchung - wie Mathematiklehrpersonen auf Fehlvorstellungen reagieren

unterschiedliche Antworten. Zwei Proband:innen kreuzten an, dass die Aussage sehr zutreffend ist (IP03 und IP09), drei Proband:innen gaben an, die Aussage sei eher zutreffend (IP01, IP08 und IP11), eine Person (IP04) stand der Aussage neutral gegenüber und eine weitere Person (IP10) kreuzte weniger zutreffend an. Hier gibt es also eine breite Streuung.

IP03 hat sich hier gut eingeschätzt. Zu den von ihr falsch vermuteten Aussagen wusste sie auch immer Gegenbeispiele. Selbst bei einer Aussage, wo Unsicherheit herrschte (F3), war die Idee eines Gegenbeispiels vorhanden. IP09 konnte bei zwei Fehlvorstellungen ein Gegenbeispiel liefern, bei einer davon konnte sie kein Gegenbeispiel nennen.

IP01 und IP08 konnten meistens ein Gegenbeispiel nennen, aber nicht bei allen Aussagen, die als Fehlvorstellungen vermutet wurden. IP11 hingegen konnte für alle ihrer vermuteten Fehlvorstellungen ein Gegenbeispiel liefern, hier also dementsprechend gut reagieren. (An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass zum Beispiel im Fall von IP01 und IP08 ein Zusammenhang besteht – beide hatten den Interviewleitfaden 1, in dem Fehlvorstellung F2 vorkam. Diese wurde von allen als falsch erkannt, jedoch gab es nur einen einzigen Ansatz für ein Gegenbeispiel. Sie schnitt also insgesamt nicht so gut ab.)

IP04 konnte nur ein Gegenbeispiel nennen. Bei manchen Aussagen, die sie zwar als Fehlvorstellungen identifizieren konnte, wusste die Person aber keines. Die Einschätzung, nicht so häufig Gegenbeispiele im Unterricht zu verwenden, passt also auch hier zum Interview gut dazu. IP10 gab ebenfalls an, weniger häufig Gegenbeispiele zu verwenden, was sich auch in ihrem Interview widerspiegelt.

Insgesamt kann hier also gesagt werden, dass die Proband:innen überwiegend eine recht gute Selbsteinschätzung abgegeben haben. Die Einschätzungen lagen oft im mittleren Bereich und bei einigen ist deutlich bemerkbar, dass sie es auch selbst wissen, wenn ihnen ein Fachgebiet nicht so präsent ist, beziehungsweise, worin ihre Schwächen liegen.

Noch studierende Proband:innen

Um auch die Selbsteinschätzung der Studierenden zu untersuchen, werden wir folgende Aussage aus dem Kurzfragebogen unter die Lupe nehmen.

Ich fühle mich auf den Mathematikunterricht im Fachgebiet der Analysis gut vorbereitet.

Diese Aussage ergab eine erschreckend niedrige Zahl an Zustimmung. Zwei der vier Studierenden haben die Mitte (also neutral gegenüber der Aussage) angegeben. Ein:e Proband:in hat weniger zutreffend gewählt. Und nur eine Person hat

angegeben, dass die Aussage eher zutrifft. Insgesamt gibt das eine Zustimmung der Aussage von 50%, was eben der neutralen Gegenüberstellung der Aussage entspricht. Dennoch ist spannend, dass die Studierenden in den Interviews keine schlechteren Leistungen gezeigt haben und mit den bereits unterrichtenden Lehrpersonen mithalten konnten.

Alle vier Proband:innen haben, wie man der Grafik oben entnehmen kann, mindestens sechs Aussagen richtig erkannt und eine Person sogar sieben. Das heißt, auch, wenn sich einige im Gebiet der Analysis im Hinblick auf die Schule nicht sicher fühlten, so ist dennoch viel Wissen vorhanden. Einige der Studierenden konnten auch gute Gegenbeispiele finden und waren sich ihrer Entscheidungen teilweise sehr sicher. Es ist also spannend, dass hier so eine Kluft zwischen der Selbsteinschätzung der Studierenden und ihren tatsächlichen Fähigkeiten herrscht. Wie vorhin in Kapitel 3.2 schon erwähnt, waren sich einige der noch studierenden Proband:innen auch nicht sicher, jemals mit Gegenbeispielen oder Fehlvorstellungen im Studium in Berührung gekommen zu sein. Trotzdem wurden die Aufgaben größtenteils gemeistert. Auch hier bestätigt sich also die Vermutung, dass viele die Verwendung der Gegenbeispiele oder andere Methoden und Themenbereiche nicht bewusst im Studium wahrnehmen, beziehungsweise deren Relevanz nicht erkennen. Erfreulich ist, dass trotz der eher niedrigen Selbsteinschätzung, ein recht passables Ergebnis zu sehen ist.

4 Auswertung der Interviews

4.1 Auswertung der einzelnen Fehlvorstellungen

4.1.1 Fehlvorstellung 1

„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$ für eine Stelle $p \in D$, dann kann die Funktion f nicht mehr streng monoton sein.“

Diese Aussage aus dem ILF2 wurde von allen Interviewten als falsch erkannt. Bei manchen wurde zwar zuerst richtig angekreuzt, nach längerem Nachdenken aber revidiert und schließlich doch als falsch identifiziert. Interessant sind hier die Gegenbeispiele. Viermal wurde als Gegenbeispiel konkret die Funktion f mit $f(x) = x^3$ genannt oder aufgezeichnet, die die Aussage widerlegt (vgl. IP02, Z. 69; IP03, Z. 109; IP07, Z. 45–47; IP11, Z. 45). Die Funktion hat an der Stelle $p = 0$ die Ableitung $f'(p) = 0$ und trotzdem ist sie durchgehend streng monoton steigend, da das Kriterium für strenge Monotonie erfüllt ist: $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}, p_1 < p_2 : f(p_1) < f(p_2)$. Bei der Funktion f mit $f(x) = x^3$ handelt es sich um eine Funktion, die viele Kriterien für ein gutes Gegenbeispiel erfüllt (mehr dazu siehe Kapitel 5).

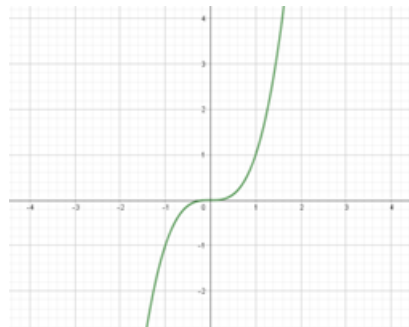


Abb. 4.1 Funktion f mit $f(x) = x^3$ als Gegenbeispiel für F1

IP02 erwähnt zusätzlich die Funktion f mit $f(x) = x^5$ als Gegenbeispiel und alle weiteren Polynomfunktionen dieser Form mit ungerader Potenz. Obwohl eine leichte Unsicherheit herrscht, ob diese Funktionen alle sicher monoton steigend sind, so entscheidet sich die interviewte Person dazu, dass man diese Beispiele alle

4 Auswertung der Interviews

als Gegenbeispiele angeben kann (vgl. IP02, Z. 77-82, Z. 92), was auch korrekt ist.

Eine Person nannte als Gegenbeispiel eine beliebige Funktion mit einer Wendestelle, konnte aber keinen expliziten Funktionsterm nennen (vgl. IP10, Z. 108-130). Das ist für diese Fehlvorstellung als Gegenbeispiel aber nicht ausreichend, da für eine Wendestelle p nicht zwingend $f'(p) = 0$ gelten muss und in der Aussage explizit eine solche Funktion genannt wird. Die Funktion f mit $f(x) = x^3$ funktioniert als Gegenbeispiel. Sie besitzt zwar eine Wendestelle, jedoch ist die Wendestelle hier auch gleichzeitig eine Sattelstelle, das heißt die Steigung an der besagten Stelle p ist $f'(p) = 0$. Eine Funktion mit einer Wendestelle (die nicht gleichzeitig eine Sattelstelle ist) würde zwar das Kriterium für Monotonie eventuell erfüllen können, jedoch nicht als Gegenbeispiel für F1 funktionieren.

Zu guter Letzt wurden noch Beispiele erwähnt, wo nicht die ganze Funktion auf $\mathbb{R}$ monoton ist, sondern nur abschnittsweise monotone Stücke definiert werden können. Bei IP04 wurde angenommen, dass eine Polynomfunktion mit mehreren Monotonie- und Krümmungswechseln, also beispielsweise eine Polynomfunktion dritten Grades, ein Gegenbeispiel sein könnte. Die Funktion besitzt Stellen mit Tangentensteigung 0, und ist trotzdem, zumindest abschnittsweise streng monoton steigend, beziehungsweise fallend. IP04 beschreibt:

„Das ist eine falsche Aussage, weil auch wieder eine Polynomfunktion, da habe ich Extremstellen, da ist $f'(p) = 0$ und trotzdem habe ich zur Extremstelle hin und von der Extremstelle weg jeweils streng monotonen Verhalten, je nachdem, ob es ein Hoch- oder Tiefpunkt ist.“ (IP04, Z. 53-56)

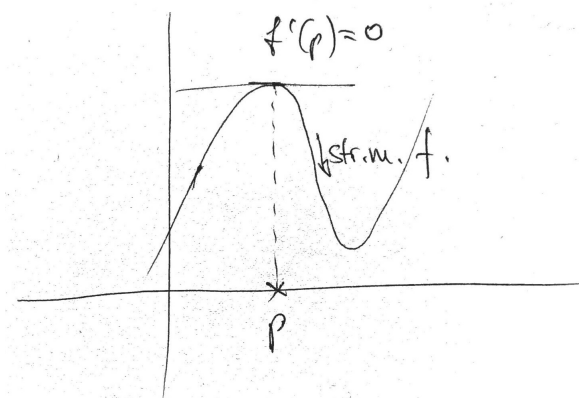


Abb. 4.2 Funktion dritten Grades mit monotonen Intervallabschnitten

4.1 Auswertung der einzelnen Fehlvorstellungen

Diese Funktion in Abbildung 4.2 kann für F1 aber nicht als Gegenbeispiel angegeben werden, da sie als Ganzes nicht streng monoton ist, sondern nur abschnittsweise. Für die Fehlvorstellung F1 ist wichtig, dass die Funktion f auf ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton ist.

Ein weiteres Beispiel, das in eine ähnliche Richtung wie jenes in Abbildung 4.2 geht, ist eine Parabel, siehe Abbildung 4.3, also hier eine Polynomfunktion zweiten Grades, beispielsweise f mit $f(x) = x^2$ oder $f(x) = (-x)^2$ (vgl. IP11, Z. 46-48; IP03, Z. 88-91). Diese Funktion hat am Scheitelpunkt den Punkt p mit $f'(p) = 0$ und kann ebenso abschnittsweise definiert werden. Als Ganzes ist die Funktion jedoch nicht streng monoton. Hier wurden also aufgrund des Missverständnisses der Fehlvorstellung auch falsche Gegenbeispiele angegeben.

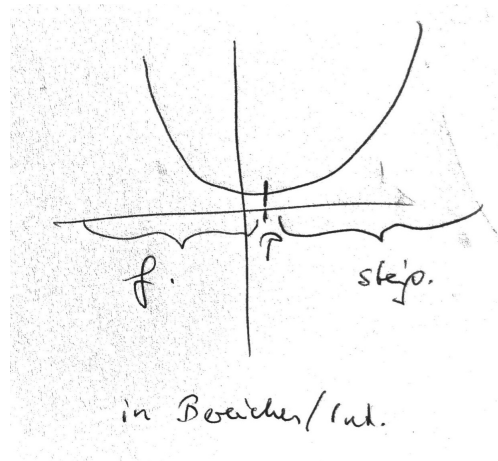


Abb. 4.3 Parabel mit monotonen Intervallabschnitten

IP11 argumentiert in diesem Fall: „Nachdem wie man es auch differenziert, kann auch eine quadratische Funktion trotzdem noch streng monoton sein, denn es kann ja Intervalle geben.“ (IP11, Z. 46-48) Und IP03 thematisiert neben den abschnittsweise definierten Intervallen auch noch die Wichtigkeit der Klammersetzung, also ob es sich um offene oder geschlossene Intervalle handelt (vgl. IP03, Z. 92-99). Trotzdem sind diese Beispiele für F1 keine passenden Gegenbeispiele, da es ja um die ganzheitliche strenge Monotonie der Funktion geht.

Da bei IP03 schon Skizzen vorhanden waren, wurde nachgefragt, ob es auch eine Funktion gibt, die das Kriterium der strengen Monotonie im Ganzen erfüllt. Es kam dann der Verweis auf die Funktion f mit $f(x) = x^3$, die im Gesamten streng monoton ist und trotzdem eine Stelle p mit $f'(p) = 0$ besitzt (vgl. IP03, Z. 99 - 105). Hier ist also einfach eine Unsicherheit darüber zu vermuten, was denn genau gemeint ist. Auch bei IP11 wird beides vorgeschlagen - ein Gegenbeispiel, wenn

die Funktion im Ganzen streng monoton sein soll und eines, wenn sie in Intervalle geteilt werden darf (vgl. IP11, Z. 44-48).

4.1.2 Fehlvorstellung 2

„Unstetige Funktionen haben (mindestens) eine Sprungstelle.“

Diese Aussage wurde von vier aus fünf Personen als eindeutig falsch eingeordnet. Eine Person tendierte zwar auch zu falsch, war sich aber nicht ganz sicher. Insgesamt handelt es sich hier um eine Aufgabe, die sicher etwas mehr Kopfzerbrechen verursacht hat und viele offene Fragen bei Lehrpersonen aufwirft. Denn auch hier waren sich zwar einige sicher, die Aussage sei falsch, jedoch war die Suche nach einem passenden Gegenbeispiel nicht so einfach. Generell hat sich herauskristallisiert, dass der Großteil der Interviewten die klassischen Sprungfunktionen als Beispiele für unstetige Funktionen verwenden würden. Folgende Beispiele wurden dazu aufgezeichnet, siehe Abbildung 4.4. Da hier aber Funktionen ohne Sprungstelle gefunden werden sollen, sind diese keine Gegenbeispiele.

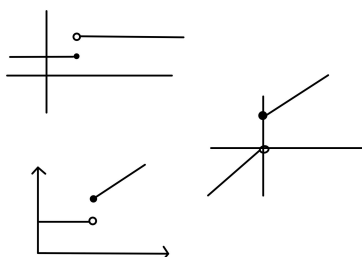


Abb. 4.4 Funktionen mit Sprüngen an den Unstetigkeitsstellen - sogenannte Sprungfunktionen

Neben den Sprungfunktionen wurden von zwei Personen als unstetige Funktionen auch noch Funktionen mit Polstellen genannt. Hier wurden rational gebrochene Funktionen erwähnt, zum Beispiel die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ (siehe Abbildung 4.5). Es stand generell die Frage im Raum, ob solche Funktionen überhaupt stetig sind, oder nicht.

IP01 erklärt:

„Also zum Beispiel die Funktion $\frac{1}{x}$ ist an der Stelle 0 nicht definiert und die ist insgesamt nicht stetig. Ja, und hat aus meiner Sicht keine Sprungstelle, sondern eine nicht definierte Stelle. Das ist aber für mich was anderes, wie eine Sprungstelle.“ (IP01, Z. 17-20)

Auf die Frage nach dem Definitionsbereich der Funktion, erwiderte IP01 mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Antwort.

4.1 Auswertung der einzelnen Fehlvorstellungen

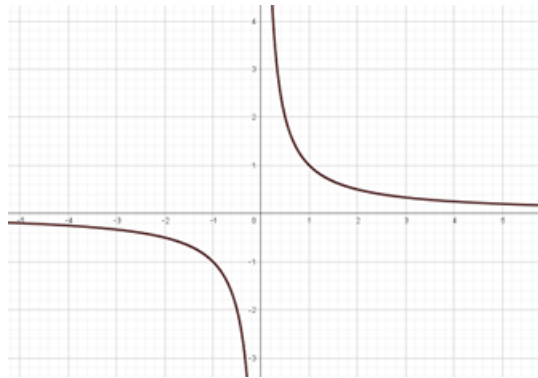


Abb. 4.5 Funktion f mit $f = \frac{1}{x}$

„I: Und würdest du sagen, ist diese Funktion stetig oder nicht stetig auf ihrem Definitionsbereich? IP01: Also, auf ihrem Definitionsbereich ... naja, auf ihrem Definitionsbereich ist sie schon stetig. Naja, sie teilt sich halt in zwei Hälften auf, also eigentlich nicht.“ (IP01, Z. 23-26)

Der größtmögliche Definitionsbereich, etwa für f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ als $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wurde richtig erkannt, somit ist f stetig, was auch richtig identifiziert wurde. Trotzdem herrschte hier Unsicherheit bei den Proband:innen. Die zweite Frage, die aus diesem Beispiel aufkeimt, beschäftigt sich mit dem Unterschied zwischen Sprung- und Polstellen. Hier wurde beispielsweise festgestellt:

„Als Gegenbeispiel hätte ich gebrochen rationale Funktionen. Und mit meinem Wissen, dass eine Sprungstelle nicht dasselbe ist, wie eine Polstelle. Also das wechselt natürlich auch von ganz oben nach ganz unten, aber man nennt das halt nicht Sprungstelle.“ (IP08, Z. 10-13)

Da gebrochen rationale Funktionen aber trotzdem stetig sind, eignen sie sich hier nicht als Gegenbeispiele, um die Fehlvorstellung F1 zu widerlegen. Als dritte Unstetigkeitsstelle neben Sprungstellen und Polstellen wurden auch Funktionen mit Definitionslücken als Beispiele genannt (vgl. IP08, Z. 18-23). Ebenso wie bei den gebrochen rationalen Funktionen sind diese aber auch stetig, da die Funktion, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist, als stetig gilt. Lediglich eine Person konnte ein Idee zu einem Gegenbeispiel liefern. Zwar konnte kein richtiger Funktionsterm aufgestellt werden, jedoch konnte IP06 eindeutig erklären:

„[...] also wenn ich mir jetzt dieses Argument für unstetige Funktionen hernehme, dann ist es nicht gültig, weil wir haben da gelernt, dass

Bleistiftstetigkeit . . . entspricht nicht der genauen Definition von mathematischer Stetigkeit. Und ich weiß nicht mehr genau, wie die Funktion war, aber ich glaube es war so $\sin(\frac{x^2}{2})$ oder so. Und das sind diese oszillierenden Funktionen.“ (IP06, Z. 14-18)

Auf die Frage, ob diese Funktion bzw. wild oszillierende Funktionen im Allgemeinen stetig seien, konnte IP06 erwidern, dass die Funktionen nicht stetig seien, obwohl sie keine Sprungstelle besitzen. Somit funktioniere die Aussage bei dieser Funktion nicht, und es wäre kein vollends gültiger Merksatz (vgl. IP06, Z. 20-25).

Obwohl also der Funktionsterm nicht richtig ist, da die angegebene Funktion f mit $\sin(\frac{x^2}{2})$ sehr wohl stetig ist, ist die Idee von IP06 als Gegenbeispiel ein richtiger Ansatz. Funktionen mit wilden Oszillationen können unstetig sein und trotzdem haben sie keine Sprungstelle. Mehr dazu wird in Kapitel 6.2 erläutert.

4.1.3 Fehlvorstellung 3

„Stetige Funktionen lassen sich durchzeichnen, ohne mit dem Stift abzusetzen.“

Die Fehlvorstellung F3 konnte lediglich von einer der sechs befragten Personen als sicher falsch identifiziert werden. Drei der Befragten betonten, die Aussage sei richtig. Zwei Personen sind sich der Entscheidung nicht ganz sicher, und merkten an, sie müssten den Inhalt irgendwo nachlesen.

Ein Gegenbeispiel finden wir bei IP07. Hier wird das Beispiel f mit $f(x) = x^{(-1)}$ genannt und wie folgt argumentiert:

„Das ist in der Regel eigentlich falsch. In der Schule lernt man das, oder ist das zwar die Regel aber zum Beispiel bei $x^{(-1)}$, die hat zwar eine Sprungstelle drinnen, wo man eben den Stift absetzen muss, aber auf dem Definitionsbereich, wo eben die Funktion definiert ist, ist sie stetig. Eben die Problemstelle wäre eben die 0. Ja, 1 durch 0 ergibt keinen Sinn, somit kann ich da sowieso nie stetig sein. Aber auf dem Definitionsbereich ist sie stetig und man muss sich ja auch immer den Definitionsbereich anschauen.“ (IP07, Z. 24-30)

IP07 zeichnet dazu einen Graphen der Funktion f mit $f(x) = -x^{-1}$ auf, siehe Abbildung 4.6. Also einen anderen als das genannte Beispiel. Vermutlich wurde hier im Stress der Interviewsituation ein falscher Graph aufgezeichnet. Beide Funktionen sind hier aber richtige Gegenbeispiele, da sie stetig sind und trotzdem der Stift abgesetzt werden muss.

Auch IP11 spricht rationale Funktionen an und ist sich nicht sicher, ob diese ein Gegenbeispiel sein könnten, betont aber, sie müsse nachlesen, ob diese Funktionen

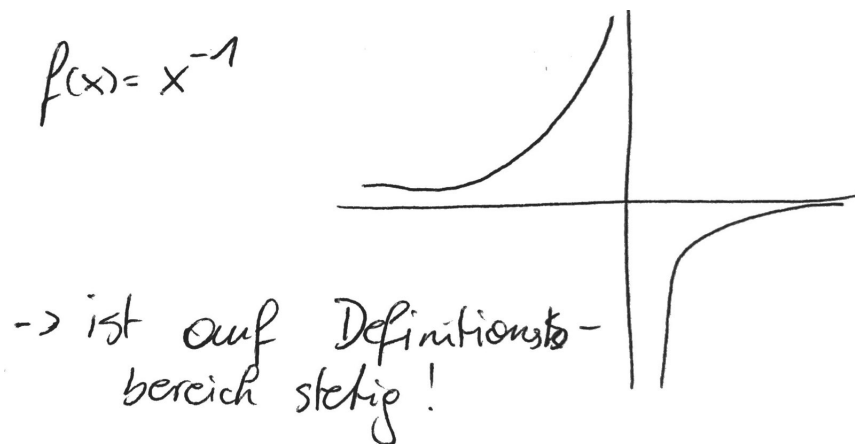


Abb. 4.6 Funktion f mit $f = \frac{1}{x}$

wirklich stetig und somit ein Gegenbeispiel dafür seien (vgl. IP11, Z. 18–32). Ebenfalls bei IP03 sind rationale Funktionen ein Thema, folgendes wird erläutert:

„Ich habe mir jetzt eine (Funktion) mit einer Polstelle aufgezeichnet, [...] beispielsweise ein $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Funktion hat ja an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle, also wäre da nicht definiert. Dann hätte ich da, wenn ich sie zeichnen würde, zwei Hyperbel-Äste und müsste den Stift absetzen. Damit ist die natürlich nicht stetig an der Stelle $x = 0$. Damit würde ich sagen, sobald ich den Stift absetze, weil ich zum Beispiel eine Polstelle hab, oder eine weitere Variante wäre ja irgendeine Sprungstelle. Da fällt mir ein $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, also die Vorzeichenfunktion, die schaut ja so aus, dass ich da für alle Werte kleiner als 0 den Funktionswert -1 habe, für alle Werte größer als 0 den Funktionswert $+1$ und für 0 den Wert 0, und da muss ich dann natürlicherweise absetzen.“ (IP03, Z. 41–50)

IP03 betont noch, dass die Funktionen dann unstetig seien, da ja beide eine unstetige Stelle bei $x_0 = 0$ hätten, überlegt jedoch noch weiter (vgl. IP03, Z. 51–57).

„Wenn ich jetzt sage, okay, die Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann könnte ich ja sagen auf der betrachteten Definitionsmenge ist die Funktion schon stetig, aber trotzdem muss ich den Stift absetzen, um beide Äste zu zeichnen. Also das war das, wo ich mir jetzt ein bisschen unsicher bin. Also wenn man das jetzt so wie eben beschrieben

4 Auswertung der Interviews

betrachtet, müsste ich eigentlich falsch dann ankreuzen. [...]“ (IP03, Z. 55-59)

Häufig fallen Aussagen, wie:

- „Aber prinzipiell kann man das schon so sagen, als nichtmathematische Erklärung, dass es eben durchzuzeichnen ist. [...] ich verwende diese Erklärung auch, um den Schülern ein bisschen anschaulicher zu erklären, was damit gemeint ist.“ (IP11, Z. 20-22, Z. 32-33)
- „[...] stetig ist, wenn ich es durchzeichnen kann.“ (IP10, Z. 40)
- „[...] weil das ist schon was, was ich selber auch immer so umgangssprachlich verwende im Unterricht, dass man eben stetige Funktionen durchzeichnen kann, ohne mit einem Stift abzusetzen.“ (IP03, Z. 36 – 39)
- „[...] es ist nicht die formelle Definition, aber es ist das wie man es irgendwie Schüler:innen näherbringen kann, wenn ich es richtig im Kopf habe.“ (IP02, Z. 53-54)
- „Na, ich glaube, das ist eine Eigenschaft, dass stetige Funktionen sich mit einem Stift durchzeichnen lassen. [...] Aber es ist auch das, was ich immer wieder den Schülern sag, und Schülerinnen, weil man sich das vorstellen kann.“ (IP04, Z. 30-36)

Also gerade im Hinblick auf Stetigkeit in der Schule scheint dieses Thema eine große Hürde darzustellen und einige Lehrkräfte sind sich nicht sicher, ob man Stetigkeit mit durchzeichnenbaren Funktionen definieren kann oder nicht. Die Bleistiftstetigkeit wird scheinbar, aufgrund der guten Anschaulichkeit, oft im Mathematik-Unterricht weitergegeben. Dass eine Funktion aber auch stetig sein kann, ohne mit dem Stift durchzuzeichnen, zeigen schon die hier gefundenen Gegenbeispiele. Mehr dazu wird später in Kapitel 6.2 behandelt.

4.1.4 Fehlvorstellung 4

„Jede konvergente Folge a_n kommt ihrem Grenzwert a beliebig nahe, ohne ihn je zu erreichen.“

Diese Fehlvorstellung konnten zwei Personen als falsch identifizieren, zwei Personen haben sie als richtig eingestuft und eine Person tendierte dazu, sie sei richtig. Insgesamt also ein durchwachsenes Ergebnis.

Es wurde überlegt, was denn überhaupt divergente und konvergente Folgen sind. Auch die Definition und der Begriff des Grenzwerts wurden genannt und überlegt,

4.1 Auswertung der einzelnen Fehlvorstellungen

wie diese mit der Fehlvorstellung F4 in Verbindung gebracht werden sollten.

„Also konvergente Folge, heißt ja, dass es gegen irgendeinen Grenzwert konvergiert.“ (IP05, Z. 110-111), schilderte IP05. Auch der Hinweis auf die $\epsilon - n_0$ -Definition wurde gegeben (vgl. IP01, Z. 69-73).

Ebenfalls der Begriff der Schranke wurde in diesem Zusammenhang genannt. Eine interviewte Lehrperson wies darauf hin, dass es eine Schranke sein müsste, da ein Grenzwert nicht erreicht werden kann. Das würde nämlich gegen die Grenzwert-Definition sprechen (vgl. IP08, Z. 39-45). Auch IP09 sieht ein Problem mit der Definition des Limes, da sich an diesen nur angenähert werden und er nicht erreicht werden soll (vgl. IP09, Z. 225-227). Diese Annahmen führten dann zu einer Bewertung der Aussage als richtig, da der Grenzwert nicht erreicht werden könne. Zwei Personen konnten ein Gegenbeispiel nennen. So meinte beispielsweise IP06 nachdem sie die Aussage als falsch eingestuft hat: „[...] Weil die konstante Folge, da entspricht der Grenzwert ja genau dem Wert der konstanten Folge, das heißt, sie erreicht den Grenzwert.“ (IP06, Z. 54-56) Auch IP01 kam nach einigen Überlegungen zu diesem Schluss:

„[...] es ist ja auch eine Folge 1, 1, 1, 1, ... also das ist ja eine, wie heißt die Folge? Oder was ist mit den Alternierenden? Nein, die sind nicht konvergent, die alternierenden sind logischerweise nicht konvergent. Und dann gibt's noch diese, die wo alles gleich ist. [...] ist die konvergent? Ja, weil da sind ja auch unglaublich viele Folgenglieder in den Grenzen der Epsilon-Umgebung. [...] Eine konstante Folge ... Ja, aber ist eine konstante Folge konvergent? Also wenn eine konstante Folge konvergent ist, dann erreicht die Folge den Grenzwert. Unter der Voraussetzung [...], also wenn eine konstante Folge konvergent ist, aber das müsste ich jetzt irgendwo in einem Theoriebuch nachblättern.“ (IP01, Z. 113-124)

IP01 revidierte danach die Entscheidung und bewertete die Aussage als falsch, da sie abgeglichen mit der Definition einer konvergenten Folge, ein passendes Gegenbeispiel gefunden hat, jedoch mit dem Zusatz, den Sachverhalt nochmals zu prüfen, bevor sie diesen einem/einer Schüler:in weitergeben würde (vgl. IP01, Z. 130-136).

4.1.5 Fehlvorstellung 5

„Jede konvergente Folge a_n kommt ihrem Grenzwert a immer näher.“

Diese Fehlvorstellung konnte von fünf aus sechs interviewten Personen nicht als

falsch identifiziert werden. Eine der Personen war sich unsicher, tendierte jedoch auch dazu, die Aussage sei richtig. Bei drei der Interviews wurde festgestellt, dass diese Aussage richtig sein müsse und keine weiteren Erklärungen abgegeben (vgl. IP04, Z. 68-69; IP10, Z. 149-150; IP11, Z. 61). Bei IP11 kam zusätzlich der Hinweis, es nochmal nachlesen zu müssen, da es in der Schule anscheinend schon lange nicht gebraucht wurde (vgl. IP11, Z. 61-62).

Auch bei den anderen drei Interviews konnte zwar kein Gegenbeispiel gefunden werden, jedoch wurden schon konkrete Beispiele genannt, anhand deren überlegt wurde. IP07 nennt beispielsweise die sogenannte Vorzeichenmaschine $a_n = (-1)^n$, fügt jedoch gleich hinzu, dass diese Folge „[...] divergiert, somit konvergiert sie nicht.“ (IP07, Z. 73) Auch IP02 überlegt, ob springende Folgen ein Gegenbeispiel sein könnten. Kommt aber zum Schluss, dass diese gegen zwei Grenzwerte konvergieren können, somit aber immer noch nicht die Fehlvorstellung 5 widerlegen können (vgl. IP02, Z. 128-133).

Die Definition der konvergenten Folge mittels des Epsilon-Kriteriums ist aber sehr wohl ein Begriff. IP03 schildert: „Da hätte ich ans $\delta - \epsilon$ -Kriterium gedacht, was ich natürlich den Schülerinnen nicht erkläre.“ (IP03, Z. 140-141) Zwar ist das $\delta - \epsilon$ -Kriterium die Definition für stetige Funktionen, es ist aber anzunehmen, dass IP03 hier an die $\epsilon - n_0$ -Definition für konvergente Folgen gedacht hat, und fälschlicherweise die andere Definition erwähnt hat. Dies ist eventuell der Interviewsituation und dem doch sehr spontanen Handeln zuzuschreiben. Auch IP02 überlegt anhand dieser Definition, kommt jedoch damit zu keinem Schluss (vgl. IP02, Z. 113-115).

4.1.6 Fehlvorstellung 6

„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$ und $f''(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine Sattelstelle der Funktion f .“

Die Fehlvorstellung F6 wurde von drei der fünf befragten Personen als richtig eingestuft. Eine Person konnte erläutern, dass es sich um eine falsche Aussage handelt und ein Gegenbeispiel nennen. Eine weitere Person war sich in der Entscheidung nicht sicher.

Diese Aufgabe wurde in zwei der fünf Fälle als eindeutig richtig wahrgenommen, ohne irgendein Beispiel aufzuzeichnen und zu analysieren. Obwohl auch IP09 dieser Meinung war, so kamen doch einige Gedanken bezüglich hinreichender und notwendiger Bedingungen auf. Die interviewte Person überlegt aber, ob die dritte Ableitung nur für die Wendestelle gebraucht werden würde (vgl. IP09, Z. 21-23). IP09 zeichnet auch das Bild der Funktion f mit $f(x) = x^3$ auf und überlegt anhand dieser Funktion, sieht jedoch, dass die Aussage für diese Funktion stimmt und bleibt somit der Meinung, F6 müsse richtig sein. In einem anderen Interview

wurde Folgendes überlegt:

„Ich habe mir jetzt im ersten Moment gedacht, dass es stimmen müsste, weil, ja, wenn die erste Ableitung null ist, dann ist es ja irgendwie entweder ein Maximum oder ein Minimum. Zweite Ableitung ist ja eigentlich ein Wendepunkt und dann hat man ja diese Sattelstelle, wo es ruht. Kann aber sein, dass die dritte Ableitung das noch irgendwie beeinflusst, das habe ich mir jetzt nicht näher überlegt.“ (IP05, Z. 4-8)

Trotzdem wurde hier darauf geschlossen, dass es wahrscheinlich stimmen müsste, aber die Person eben nicht ganz sicher ist.

Ein Gegenbeispiel, das für diese Fehlvorstellung angeboten wurde, finden wir bei IP06. Hier wird erläutert: „Da habe ich falsch, und als Gegenbeispiel eine Funktion $f(x) = x^4$. Weil wenn ich da halt null einsetze, dann würde null rauskommen, weil es keine Sattelstelle ist, sondern es ist ein Maximum.“ (IP06, Z. 7-10) Klargestellt werden muss aber, dass die Skizze zu dem Gegenbeispiel falsch ist. IP06 behauptet, dass die Funktion f mit $f(x) = x^4$ an der Stelle 0 ein Maximum hat (vermutlich aufgrund der falschen Skizze). Diese Funktion hat aber an der besagten Stelle ein Minimum. Nichtsdestotrotz wurde hier also einfach durch Einsetzen gezeigt, dass es sehr wohl Ausnahmen für diese Situation gibt. Die Skizze der interviewten Person ist in Abbildung 4.7 zu sehen.

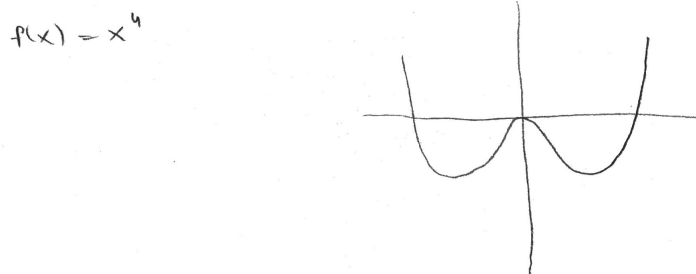


Abb. 4.7 Funktion vierten Grades als Gegenbeispiel mit fehlerhaftem Graphen

4.1.7 Fehlvorstellung 7

„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine lokale Extremstelle der Funktion f .“

4 Auswertung der Interviews

Diese Fehlvorstellung konnte von fünf aus den gesamten sechs Personen als eindeutige Fehlvorstellung erkannt werden. Eine Person war sich anfangs nicht ganz sicher, tendierte aber später, nach einigen Überlegungen auch dazu, dass es falsch sein müsste. Auch einige Gegenbeispiele konnten genannt werden. So wird beispielsweise in drei Interviews konkret die Funktion f mit $f(x) = x^3$ als Gegenbeispiel angegeben, da diese Funktion an der Stelle $p = 0$ keine Extrem-, sondern eine Sattel- oder Terrassenstelle besitzt (vgl. IP07, Z. 5-8; IP02, Z. 7-13; IP03, Z. 14).

IP03 erläutert dazu Folgendes:

„Also, da bin ich mir eigentlich ziemlich sicher, die Aussage ist falsch. Weil ich muss mir ja immer noch die weiteren Ableitungen anschauen, theoretisch könnte es ja sein, dass die zweite Ableitung auch gleich null ist und dann hätte ich einen Sattelpunkt. Ja, und ein Sattelpunkt ist ja an sich keine lokale Extremstelle.“ (IP03, Z. 8-11)

Als Gegenbeispiel nennt die Person die Funktion f mit $f(x) = x^3 + c$, da auch alle entlang der y -Achse verschobenen Funktionen als Gegenbeispiele passend sind. Auch IP10 erklärt nach anfänglicher Unsicherheit, dass es sich nicht immer um eine Extremstelle handeln muss, da es auch noch eine Sattel- oder Wendestelle sein könnte (vgl. IP10, Z. 168-173).

Bei zwei anderen Interviews wurde festgelegt, dass alle Funktionen f mit $f = x^n$, wobei n ungerade sein muss, als Gegenbeispiele funktionieren können (vgl. IP04, Z. 13; IP11, Z. 10). Die Funktion f mit $f(x) = x^3$ ist hier also eingeschlossen. IP11 führt als zusätzliches Kriterium auch die Änderung der Monotonie an: „Also ich habe falsch angekreuzt, weil [...] die erste Ableitung muss 0 sein, das ist korrekt, aber es muss sich ja auch die Monotonie ändern, weil sonst hätte ich eine Terrassenstelle. Und als Gegenbeispiel würde ich eben genau diese Terrassenstelle anführen.“ (IP11, Z. 5-8)

4.1.8 Fehlvorstellung 8

„Eine Tangente an einen Funktionsgraphen hat mit dem Graphen genau einen Punkt gemeinsam, nämlich den Berührungspunkt.“

Die Aussage F8 konnte von allen Beteiligten als Fehlvorstellung identifiziert werden. Trotzdem die Tangente aus geometrischer Sicht (zum Beispiel beim Kreis) eine Gerade ist, die einen Punkt mit einem anderen geometrischen Objekt gemeinsam hat, ist diese Aussage im Bezug auf Funktionen falsch. Einige Gegenbeispiele, meist graphisch gezeigt, kamen in den Interviews vor. Oft wurde eine Polynomfunktion dritten oder vierten Grades aufgezeichnet, so beispielsweise bei IP08, siehe Abbildung 4.8.

4.1 Auswertung der einzelnen Fehlvorstellungen

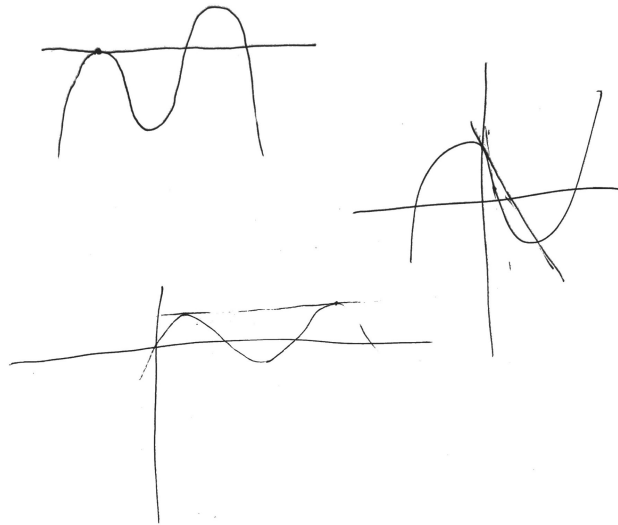


Abb. 4.8 Skizzen von IP08: Polynomfunktionen dritten oder vierten Grades als Gegenbeispiele für F8

Bei IP09 wurde der Begriff des Berührungspunktes in Frage gestellt und überlegt, dass die Tangente – obwohl es hier dasselbe meint wie beim Kreis, nämlich das Annähern in einem Punkt – trotzdem mehrere Schnittpunkte mit dem Graphen haben kann. Die Tangente ist eine Gerade, die somit keinen Anfangs- und Endpunkt hat und manche Funktionsgraphen öfters schneiden kann (vgl. IP09, Z. 115-149).

Hier wurden mehrere Skizzen angefertigt. Dass die Aussage bei manchen Funktionen stimmt, sieht man an zwei von vier aufgezeichneten Beispielen (Abbildung 4.9).

Der Graph links oben in Abbildung 4.9 beschreibt eine Funktion zweiten Grades, also eine Parabel. Hier gibt es Tangenten, die die Funktion nur in genau einem Punkt berühren. Auch bei der gebrochen rationalen Funktion rechts unten ist es so. Die anderen beiden Funktionsgraphen zeigen Gegenbeispiele.

IP06 beschreibt ebenso Polynomfunktion dritten Grades als Gegenbeispiel und fertigt eine Skizze an, ganz ähnlich wie die Funktion rechts oben in Abbildung 4.9.

Auch bei IP01 wurde eine Polynomfunktion als Beispiel angegeben und dazu erläutert:

„Beispiel 4, würde ich sagen, ist falsch, weil die Tangente berührt zwar den Funktionsgraphen in genau einem Punkt aber theoretisch kann die ja den Funktionsgraphen woanders schon noch schneiden.“

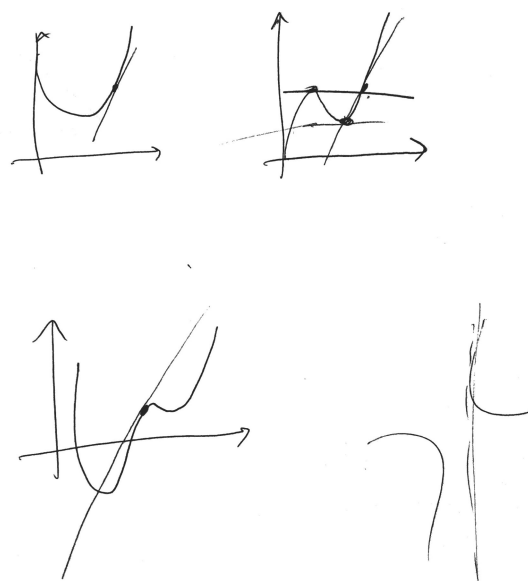


Abb. 4.9 Skizzen von IP09 als Überlegungen für F8

Das heißt es könnte ja einen zweiten Punkt gemeinsam geben. [...] Zum Beispiel habe ich da eine Funktion dritten Grades aufgezeichnet, mit einem Hochpunkt und einem Tiefpunkt und dann würde ich eine Tangente im Hochpunkt legen. Eine Tangente im Hochpunkt, die hat die Steigung null und die kann ja den Graphen da nochmal schneiden.“ (IP01, Z. 41-49)

Zwei weitere Gegenbeispiele finden sich bei IP05. Hier wird folgendes angegeben: „Die vierte Aussage stimmt fast immer, aber nicht immer. Also es gibt das Gegenbeispiel, meiner Meinung nach, der konstanten Funktion, wo sie ja dann nicht nur einen gemeinsamen Berührungspunkt hat, sondern eben die ganze Funktion ist ja quasi der gemeinsame Berührungspunkt.“ (IP05, Z. 67-70) Als zweites Gegenbeispiel wird außerdem noch die lineare Funktion genannt, bei der es sich ähnlich verhält, wie bei der konstanten Funktion (da die konstante Funktion ja ein Spezialfall der linearen Funktion ist) (vgl. IP05, Z. 74-77).

4.1.9 Fehlvorstellung 9

„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f''(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine Wendestelle der Funktion f .“

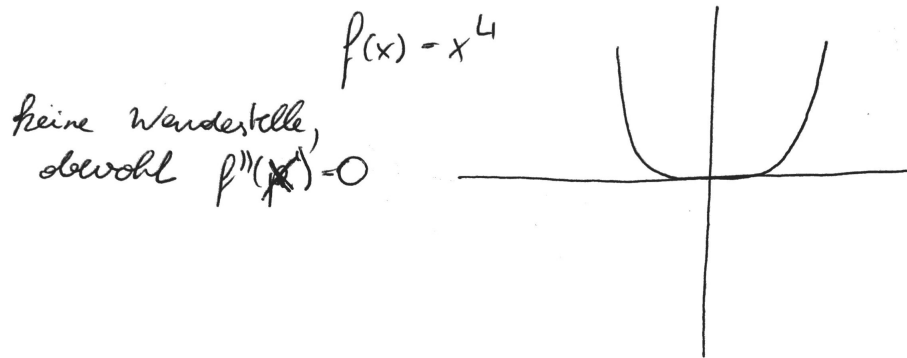


Abb. 4.10 Funktion f mit $f(x) = x^4$ als Gegenbeispiel für F9

Diese Fehlvorstellung konnte von fünf der sechs befragten Proband:innen als falsch erkannt werden. Eine Person erkannte die Aussage als falsch, konnte jedoch kein Gegenbeispiel nennen.

Ein Gegenbeispiel finden wir bei IP07, siehe Abbildung 4.10. Hier wird erläutert: „Das habe ich auch als falsch angekreuzt, weil eben als Gegenbeispiel x^4 . Die schaut ja grundsätzlich wie eine x^2 -Funktion aus, nur ist halt der Unterschied, dass jetzt die zweite Ableitung bei der x^4 auch null sein kann, aber keine Wendestelle eben da ist. [...] Ja, ein Tiefpunkt einfach.“ (IP07, Z. 57-62)

Diese Funktion wurde von vier Interviewpersonen als Gegenbeispiel für F9 aufgezeigt (vgl. IP07, IP02, IP03, IP11). IP02 gibt zusätzliche Beispiele an:

„Das ist auch dieser Klassiker auf den Schüler:innen ganz gerne reinfallen. Aber dem ist nicht so, das ist halt irgendwie ein bisschen so, wir sagen ihnen, [...] wenn die zweite Ableitung 0 ist, dann hat es halt eine Wendestelle. Aber da muss man sich einfach nur eine von den x^4 , also eine x^n , wobei n gleich gerade ist oder x^{2n} -Funktionen, dann ist es besser abgedeckt, vorstellen. Diese x^{2n} -Funktionen, die haben alle, also alle, die größer als x^2 sind, so, die haben alle eine zweite Ableitung, die 0 ist, aber wenn man sich hier den Funktionsgraphen anschaut, hat man hier ein großes U und wir haben ein Minimum, oder halt ein Maximum, wenn der konstante Faktor negativ ist. Und insofern ist das dann falsch.“ (IP02, Z. 96-105)

Das bedeutet, alle Funktionen der Form f mit $f(x) = x^{2n}$, wobei $n > 1$ sein muss, können als Gegenbeispiele genannt werden. IP02 kontrolliert dies nach, indem die Person die Funktionsterme ableitet und die Stelle $x = 0$ einsetzt. Diese Gegenbeispiele finden wir ebenso bei IP11, die auch alle diese Funktionen nennt

(vgl. IP11, Z. 58).

IP03 ergänzt die Erklärung dieses Themas noch mit folgenden Worten:

„[...] habe ich mit falsch angekreuzt, weil natürlich in der Schulmathematik ist meistens bis zum Grad drei oder vier, und dann kommt es eher selten vor, dass dann die dritte Ableitung wieder 0 wäre. Aber wenn ich jetzt habe $f(x) = x^4$ beispielweise, wäre dann die dritte Ableitung an der Stelle 0 ja wieder 0, wenn ich das richtig im Kopf habe und ich habe aber keine Wendestelle, weil wenn ich mir da die Parabel anschau, die schmiegt sich da so hübsch an an die x -Achse und ich habe einen Tiefpunkt. [...] Also das ist, man muss dann halt immer, wenn eine nächste Ableitung null ist, immer weiterschauen, so lange, bis ich halt eben eine Ableitung hätte, die ungleich 0 ist oder bis ich eben ... ja ... nicht mehr die Möglichkeit habe abzuleiten, dann ist es sowieso zu Ende.“ (IP03, Z. 123-134)

4.1.10 Fehlvorstellung 10

„Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ gibt den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse im Intervall $[a, b]$ an.“

Fehlvorstellung 10 konnte von vier aus fünf Personen als falsch identifiziert werden. Diese vier Personen konnten auch jeweils eines oder sogar mehrere Gegenbeispiele nennen.

IP08 beispielsweise schildert: „[...] die letzte Aufgabe mit dem Integral ist falsch. Das gibt nur den Flächeninhalt wieder, wenn die Funktion in dem Intervall stets positiv ist.“ (IP08, Z. 56-57) Auf die Frage hin, ob ein Gegenbeispiel genannt werden könne, zeichnet die Person zwei Funktionen (siehe Abbildung 4.11) auf und meint dazu:

„Also wenn da das Intervall $[a, b]$ ist, wenn das noch dazu symmetrisch wäre, dann würde überhaupt 0 rauskommen und ansonsten liefert halt das Integral über andere Nullstellen drüber nur den Durchschnittswert. Beziehungsweise, wenn es jetzt ganz unterhalb wäre, dann müsste man halt nur, ja, das Vorzeichen ändern, um den Flächeninhalt zu bekommen [...].“ (IP08, Z. 60-64)

Auch IP01 gibt ein grafisches Gegenbeispiel an und erläutert, dass das bestimmte Integral nicht den Flächeninhalt angebe. Es gebe lediglich den Wert des Integrals an, der in jenen Intervallen, in denen sich die Funktion unter der x -Achse befindet,

4.1 Auswertung der einzelnen Fehlvorstellungen

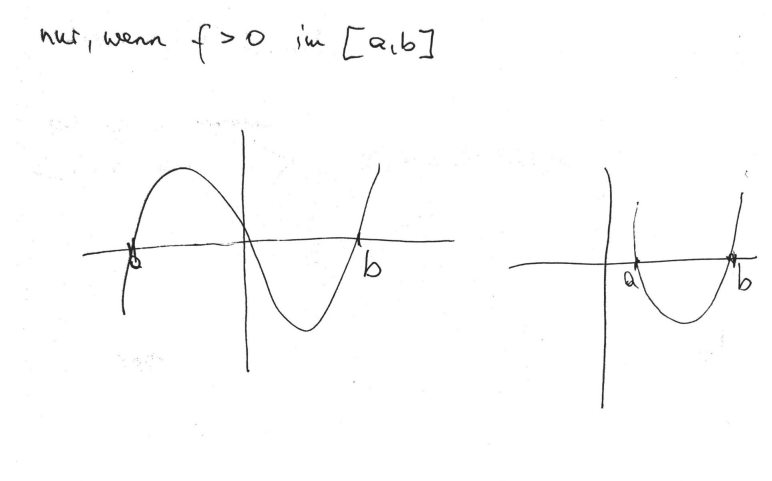


Abb. 4.11 Gegenbeispiele für F10 von IP08

negativ sei. In diesem Fall müsse man abschnittsweise den Betrag der negativen Teile nehmen, um den Flächeninhalt zu bekommen (vgl. IP01, Z. 89-94).

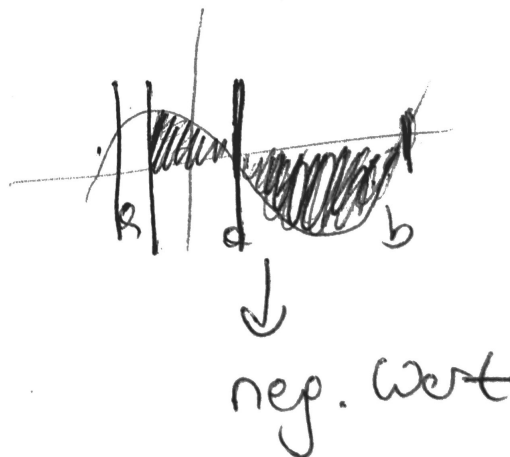


Abb. 4.12 Skizze von IP01 - Integral eines bestimmten Intervalls

Zusätzlich überlegt IP01, dass es auch wichtig ist, wo die Grenzen des Intervalls a und b sind. Je nachdem, wo sich diese befinden, beeinflusst das den Wert des Integrals, wie in Abbildung 4.12 zu sehen ist (vgl. IP01, Z. 102-105).

Auch IP05 hat die ähnliche Überlegung, dass das bestimmte Integral den Flächeninhalt „unter“ der Funktion berechnet, fügt jedoch hinzu: „[...] aber es ist halt dann

4 Auswertung der Interviews

zu beachten [...], ob das dann auf der positiven oder auf der negativen Seite ist von der x -Achse. Dass man sich dann nicht quasi wieder das weg ... subtrahiert, sozusagen.“ (IP05, Z.136 – 139) IP05 zeichnet im Folgenden eine Funktion dritten Grades auf (sehr ähnlich wie in Abbildung 4.12 bei IP01) und erklärt außerdem, dass man, wenn man den Flächeninhalt haben möchte, das Intervall aufsplitten müsse, ansonsten käme nicht der richtige Flächeninhalt heraus (vgl. IP05, Z. 143–146).

Bei IP09 herrschte zuerst Unsicherheit bezüglich des Sachverhaltes, da zuerst nur ein Beispiel gefunden werden konnte, wo die Aussage zutrifft, wie in Abbildung 4.13 zu sehen ist.

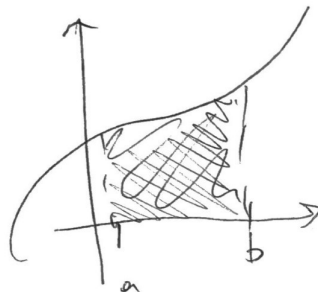


Abb. 4.13 Skizze von IP09 zu F10

Wenn das Intervall nämlich so gewählt wird, dass alle Funktionswerte positiv sind, dann würde die Aussage stimmen, wie wir schon bei IP08 gehört haben. Dieser Zusatz fehlt jedoch in F10. IP09 überlegt somit weiter und kommt nach einigen Überlegungen darauf, dass die Angelegenheit nicht ganz so simpel ist und es auch Intervalle gibt, wo die Fläche unter der x -Achse liegt. Zusammenfassend schildert die Person:

„[...] weil ich finde, von der Idee her ist es jetzt nicht falsch zu sagen, dass das was ich rechne, ich auch grafisch darstellen kann und eigentlich immer die Fläche darstellt zwischen eben der Funktion und der Achse. Nur, dass ich dahingehend eher überlegen muss, wie rechne ich eben. Also wenn, müsste ich es halt unterteilen irgendwie oder eben sagen, okay, dann ist es ... dann muss ich auch irgendwie berücksichtigen, dass es auch negative und positive Flächen sind. Das heißt ich müsste dann sowohl grafisch, als auch rechnerisch auf die andere Art irgendwie Rücksicht nehmen.“ (IP09, Z. 347–354)

Folgendes Gegenbeispiel hat IP09 dazu aufgezeichnet (Abbildung 4.14): Es handelt sich um eine abschnittsweise definierte Funktion die in etwa durch die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ x - 2 & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases} \text{ beschrieben werden kann.}$$

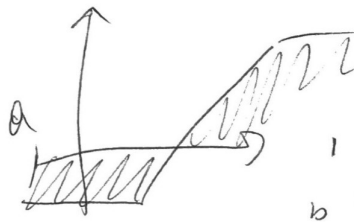


Abb. 4.14 Abschnittsweise definierte Funktion als Gegenbeispiel für F10

4.2 Auswertung der richtigen Aussagen

Da die richtigen Aussagen zum Großteil auch als solche erkannt wurden und somit weniger spannende Interview-Zitate bearbeitet werden können, wird dieser Teil in einem Kapitel zusammengefasst und nicht unterteilt. Es kamen trotzdem einige Aussagen vor, die für die weitere Diskussion der Ergebnisse interessant sind.

R1: „Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist, dann ist die Funktion f im Intervall (a, b) streng monoton steigend.“

Die Aussage R1 konnte von allen Beteiligten als richtig identifiziert werden. Ebenfalls wurden fast keine weiteren Erklärungen dazu abgegeben. Lediglich eine Person überlegte, auf Basis der Definition strenger Monotonie, ob hier nicht angegeben sein müsse, dass wenn $b > a$, auch $f(b) > f(a)$ gilt (vgl. IP09, Z. 92-98). Das heißt, hier wurde nicht angezweifelt, ob das Ergebnis der Ableitung größer null sein müsse, sondern ob der Aussage nicht noch etwas fehle. Nach einigen Überlegungen kam aber auch diese interviewte Person zu dem Schluss, dass es so reicht und es sich bei R1 um eine richtige Aussage handelt (vgl. IP09, Z. 109-112).

R2: „Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$ und $f''(p) > 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine lokale Minimumstelle.“

4 Auswertung der Interviews

Auch dieser Satz konnte von allen Befragten richtig eingeordnet werden. So wurde beispielsweise erläutert: „Die erste Ableitung ist null und die zweite (Ableitung) ist größer null an der Stelle p , dann ist das eine lokale Minimumstelle, also ein Tiefpunkt.“ (IP01, Z. 84-86) Auch IP06 gibt Auskunft, dass die Aussage richtig sein muss, da es sich hier um die notwendige und hinreichende Bedingung für eine lokale Minimumstelle handle (vgl. IP06, Z. 60-62). Mit einem anschaulichen Ansatz geht eine weitere interviewte Person heran, indem sie erläutert, dass es sich hierbei um ein Minimum handelt, da wenn die zweite Ableitung größer null ist, ein sogenannter Smiley im Funktionsgraphen zu sehen ist und dies deute auf eine Linkskrümmung beziehungsweise ein Minimum hin (vgl. IP05, Z. 131-136). Eine interessante Überlegung finden wir bei IP09, da diese Person in Betracht zieht, ob es einen Unterschied macht, ob hier von einer globalen oder lokalen Minimumstelle gesprochen wird. Nach einigen Überlegungen kommt auch diese Person zu dem Schluss, dass diese Aussage so passt und somit richtig ist (vgl. IP09, Z. 243-281).

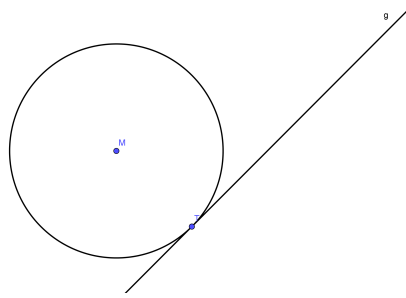
R3: „Eine Tangente an einen Funktionsgraphen kann mit dem Graphen einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben.“

Die richtige Aussage R3, die sich unter die Fehlvorstellungen geschummelt hat, ist eine der interessantesten. Hier wurden oftmals gleich Erklärungen oder sogar Beispiele angegeben, woran man sehen kann, dass der Satz stimmt. Spannend ist außerdem der Umgang mit dem Begriff der Tangente, der doch hin und wieder für Irreführungen sorgt.

Bevor wir uns den Aussagen der Interviews widmen, wollen wir den Begriff der Tangente im Zusammenhang mit dem Kreis und in der Analysis im Bezug auf Funktionen definieren.

Definition 4.2.1. (Tangente an einen Kreis): Eine Tangente g ist eine Gerade, die mit dem Kreis k genau einen Punkt T gemeinsam hat. $g \cap k = T$. (vgl. Henn/Filler 2015, S. 220 f.)

Definition 4.2.2. (Tangente an einen Graphen/Schmiegegerade): Eine Tangente an einen Funktionsgraphen ist eine Gerade, „die sich der Kurve lokal um den Berührungspunkt anschmiegt [...] Die Steigung der Kurve in einem Punkt wird definiert durch die Steigung der Tangente in diesem Punkt.“ (Danckwerts/Vogel 2006, S. 46)

**Abb. 4.15** Tangente an einen Kreis

Nun können wir uns den Aussagen der Proband:innen widmen. So beschreibt beispielsweise IP07:

„Ich habe jetzt einmal ja angekreuzt, weil eben halt die Tangente an sich im geometrischen Sinne, also hat mit dem Kreis zum Beispiel nur einen einzigen Schnittpunkt, aber wenn ich mir jetzt eine x^3 -Funktion hernehme, zum Beispiel, kann ja die Tangente, wenn man sie lang genug zeichnet auch den Funktionsgraphen an mehreren Stellen schneiden aber wird ja trotzdem als Tangente bezeichnet. Also würde ich eigentlich zu dem ja sagen. Obwohl natürlich der Begriff der Tangente ein bisschen ... ja, nicht angebracht ist.“ (IP07, Z. 34-40)

Hier wird also schon ein wichtiger Aspekt angeschnitten, nämlich die geometrische Definition der Tangente als Gerade, die mit einer Kurve nur einen Punkt gemeinsam hat. Ebenfalls wird thematisiert, dass der Begriff Tangente dafür also nicht angebracht ist, da es hier mit der geometrischen Definition nicht übereinstimmt. Zusätzlich wird auch ein Beispiel angegeben, an dem man sieht, dass die Aussage stimmt: die Funktion f mit $f(x) = x^3$. Passender wäre hier sogar eine Funktion mit mehreren Monotoniewechseln, damit das Schneiden an mehreren Punkten deutlich sichtbar wird.

Dass der Begriff der Tangente irreführend sein kann, kommt auch in anderen Interviews zum Tragen. IP10 zum Beispiel argumentiert, dass diese Aussage, obwohl hier die Meinung durchkommt, dass eine Gerade an einen Funktionsgraphen durchaus mehrere Punkte mit dem Graphen gemeinsam haben kann, falsch sein müsse (vgl. IP10, Z. 46-56). Da die Gerade mehrere Berührungspunkte hat, könne sie nicht mehr Tangente genannt werden, da das der Definition widerspräche. IP10 betont auch: „Vielleicht ist das auch bei mir, weil ich jetzt gerade mit dem Kreis in der Unterstufe so viel mache.“ (IP10, Z. 69-70) Also auch das Stoffgebiet, das beim Unterrichten gerade präsent ist, wirkt sich hier auf die Antworten aus. Auch IP11 erinnert an die Definition der Tangente in der Analysis. „[...] auch wenn die Tangente prinzipiell so definiert ist, dass es einen Berührungspunkt gibt, aber eine

4 Auswertung der Interviews

Funktion ist ja unendlich lang und da kann es natürlich dann zu einem weiteren Schnittpunkt kommen.“ (IP11, Z. 37-40)

Neben der Funktion f mit $f(x) = x^3$ werden auch die Funktionen f mit $f(x) = \sin(x)$ und f mit $f(x) = \cos(x)$ angegeben, um zu zeigen, dass die Aussage stimmt. Wird bei diesen Funktionen eine Tangente an die Hoch- oder Tiefpunkte gelegt, so berührt sie unendlich oft den Graphen der Funktion (vgl. IP02, Z. 66-71; IP03, Z. 75-79), wie in Abbildung 4.16 zu erkennen ist.

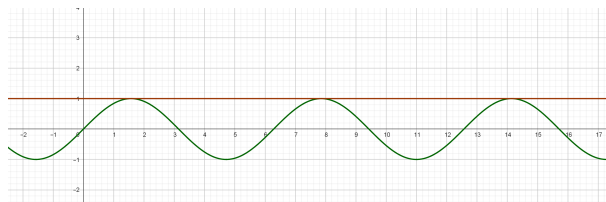


Abb. 4.16 Sinusfunktion zur Erläuterung von R3

R4: „Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f''(p) = 0$ und $f'''(p) \neq 0$, so handelt es sich bei der Stelle p sicher um eine Wendestelle der Funktion f .“

Diese Aussage konnte mit einer hundertprozentigen Erfolgsquote verifiziert werden. Zwei Personen gaben an, dass es sich bei den zwei Bedingungen um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Wendestellen handle (vgl. IP06, Z. 49-51; IP09, Z. 181-183). IP09 hat auch vorerst Bedenken aufgrund des Wortes *sicher* in der Angabe, kann jedoch darauf schließen, dass die Aussage richtig ist (vgl. IP09, Z. 186-188).

In einer Situation kam die Frage auf, ob die Aussage auch dann noch stimmt, wenn zusätzlich zu den anderen beiden Bedingungen die erste Ableitung null ist, da es sich ja dann um eine Sattelstelle handle (vgl. IP05, Z. 84-86). Da Sattelstellen aber immer auch Wendestellen sind, muss das hier nicht auch noch überprüft werden.

R5: „Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren einer Funktion immer erhalten. D.h. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.“

Die Aussage R5 wurde in den meisten Fällen schnell als richtige Aussage erkannt und beispielsweise als „Regel“ für das Differenzieren bezeichnet (vgl. IP10, Z.149). Eine interviewte Person war sich etwas unsicher und hat deshalb die Aussage anhand zweier Beispiele überprüft. Da es für beide Male gestimmt hat, kam die Interviewperson zu dem Schluss, dass es wohl für alle Fälle stimmen müsse und

fügte noch hinzu, sie würde so etwas noch einmal in der Formelsammlung nachschauen müssen (vgl. IP04, Z.72-79).

Eine interessante Situation hat sich bei IP07 zugetragen. Hier wurde zuerst Folgendes erläutert:

„Also so wie sie da steht mit dem Produkt stimmt es ja auch, dass eben wenn das jetzt erhalten bleibt beim Ableiten, dass die Konstante auch dableibt. Aber wenn die Funktion selbst eine Konstante ist, fällt die beim Ableiten weg, also ist dann 0. Und somit kann ich dieser Aussage eigentlich ... muss ich dieser widersprechen [...]“ (IP07, Z. 80-84)

Im Laufe des weiteren Gesprächs hat sich aber herauskristallisiert, dass eine konstante Funktion hier in diesem Fall wahrscheinlich ausgenommen sein müsse, da sie dann nicht mehr von einer Variablen x abhängt, und somit nicht mehr dieser Form entspräche (vgl. IP07, Z. 106-109).

Und genau so ist es auch, denn die Regel vom konstanten Faktor bezieht sich auf Funktionen der Art $c \cdot f(x)$, wobei c eine Konstante ist und $f(x)$ eine von x abhängige Funktion. Wird die Konstante c als eigenständige konstante Funktion aufgefasst, so folgt aus der Produktregel genau dasselbe Ergebnis, nämlich dass die Konstante bestehen bleibt. Besteht die Funktion nur aus einer Konstanten, dann fällt diese weg und die Ableitung ist 0.

R6: „Das bestimmte Integral einer Funktion kann auch einen negativen Wert annehmen.“

Aussage R6 konnte von den meisten Befragten mithilfe einer einfachen Erläuterung aufgeklärt werden.

So wird beispielsweise erklärt: „Ja, wenn es unterhalb der x -Achse ist, sprich im Negativen der y -Achse, das wäre meiner Meinung nach richtig.“ (IP11, Z.14-15) Auch IP07 gibt an, dass dies so sein kann, wenn „zu viel Fläche unter der x -Achse ist.“ (IP07, Z. 16-17) Unsicherheiten konnten durch einige Überlegungen aus dem Weg geräumt werden. So überlegte beispielsweise IP02, da noch aus der eigenen Schulzeit hängen geblieben ist, dass das Integral immer positiv sein muss. Es spräche aber aus rein mathematischer Sicht nichts dagegen, dass auch ein negativer Wert entstehen kann (vgl. IP02, Z. 21-45). Trotzdem ist immer die geometrische Anschauung der Fläche dabei, die das Integral anzeigt und es wird erklärt, dass man dabei das Integral in die negativen und positiven Abschnitte aufteilen muss, um den Wert der Fläche herauszubekommen (vgl. IP02, Z. 22-26). Auch IP03 schildert dies:

4 Auswertung der Interviews

„Der einzige Knackpunkt, der da halt immer ist, wenn man quasi den Flächeninhalt unter einer Kurve bestimmen will, was ja bei den meisten Aufgabenstellungen der Fall ist, dann muss man halt immer das dahingehend abändern, dass man den Betrag vom Integral nimmt, um einen positiven Wert zu erhalten, weil ein Flächeninhalt per Definition immer positiv ist. Das ist das einzige Problem. Während, wenn ich irgendwelche physikalischen Anwendungen habe, [...] wo man sehr wohl auch einen negativen Wert haben kann.“ (IP03, Z. 24–32)

5 Katalog an Gegenbeispielen und Untersuchung anhand der Kriterien

In diesem Kapitel werden nun alle aus den Interviewleitfäden hervorgegangenen Gegenbeispiele zusammengefasst und anhand der Kriterien für ein gutes Gegenbeispiel (siehe Kapitel 2.4.3) analysiert. Somit soll abgewogen werden, welche Gegenbeispiele besonders für den Unterricht geeignet sind. Außerdem werden die Gegenbeispiele, sollten aus den Leitfäden nicht genug ersichtlich sein, ergänzt und mit Beispielen aus der Literatur zu einem praktischen Katalog an Gegenbeispielen für Lehrende zusammengefasst. Zur Erinnerung folgt hier noch einmal die Auflistung der Kriterien für ein gutes Gegenbeispiel:

K1: Das Gegenbeispiel soll die Fehlvorstellung widerlegen.

K2: Das Gegenbeispiel soll den entscheidenden Inhalt der Fehlvorstellung widerlegen, also „den Kern der fehlerhaften Vorstellung treffen“. (Ableitinger 2023, S. 3)

K3: Das Gegenbeispiel soll sofort überzeugend und wirksam sein und es sollen keine langen Überlegungen notwendig sein, um es zu verstehen.

K4: Das Gegenbeispiel soll auch aufklären, warum es sich um eine Fehlvorstellung handelt (und nicht nur, dass es sich um eine Fehlvorstellung handelt).

K5: Das Gegenbeispiel soll rasch zu erfassen sein und sich keiner noch nicht geläufigen Methoden oder Begrifflichkeiten bedienen.

K6: Das Gegenbeispiel soll auch visuell oder grafisch anschaulich sein.

K7: Das Gegenbeispiel soll kurz und einfach zu verinnerlichen sein.

K8: Das Gegenbeispiel soll nicht zu sehr von prototypischen Beispielen aus dem Unterricht abweichen, damit es gut überzeugen kann.

K9: Das Gegenbeispiel soll auch für andere Fehlvorstellungen verwendbar sein. (vgl. Ableitinger 2023, S. 3)

5.1 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 1

„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$ für eine Stelle $p \in D$, dann kann die Funktion f nicht mehr streng monoton sein.“

Gegenbeispiel 1/1: f mit $f(x) = x^3$

Dieses Gegenbeispiel lieferten mehrere Interviewpersonen (vgl. Kapitel 4.1.1) für die Fehlvorstellung 1. Für die Funktion f mit $f(x) = x^3$ gilt an der Stelle $p = 0$, dass $f'(0) = 0$ ist. Trotzdem ist diese Funktion streng monoton steigend, da sie das Kriterium für strenge Monotonie (Definition siehe Kapitel 4.1.1) erfüllt. Diese Funktion widerlegt also F1 und ist somit ein Gegenbeispiel dafür. Das Kriterium K1 ist auf jeden Fall erfüllt. Dieses Gegenbeispiel deckt aber auch einige andere Kriterien ab. Es trifft den Kern der Fehlvorstellung (K2), überzeugt relativ rasch, ohne dass viel überlegt werden muss (K3), ist visuell repräsentierbar (K6), recht einfach (K7) und auch nicht zu ungewöhnlich (K8), da diese Funktion Schüler:innen des Öfteren im Mathematikunterricht unterkommen wird. Das Gegenbeispiel zeigt aber auch eine sehr praktische Eigenschaft auf, nämlich Kriterium K9, es ist vielseitig verwendbar. Wir werden auch noch anderen Fehlvorstellungen begegnen, für die Gegenbeispiel 1/1 einsetzbar ist. Gegenbeispiel 1/1 besitzt also viele Eigenschaften, die ein gutes Gegenbeispiel ausmachen und es ist erfreulich, dass die meisten Proband:innen es in petto haben.

Gegenbeispiel 1/2: f mit $f(x) = x^5$ und alle Funktionen der Form f mit $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_u$ und $n \geq 3$

Eine Person nannte als Gegenbeispiel f mit $f(x) = x^5$ und alle weiteren Funktionen der Form f mit $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_u$ und $n \geq 3$. Diese Funktionen sind ebenfalls Gegenbeispiele und erfüllen daher K1. Rein vom Visuellen her (siehe Abbildung 5.1) ist es aber hier mit freiem Auge, je höher die Potenz der Funktion, schon schwieriger zu sehen, dass es auch wirklich ein Gegenbeispiel ist. IP02 meinte dazu, dass sie sich nicht ganz sicher sei, ob diese Beispiele auch streng monoton sind. Und genau das ist der Punkt, der das Gegenbeispiel für Schüler:innen nicht ganz so geeignet macht, wie Gegenbeispiel 1/1. An der Grafik sieht man, dass es fast so aussieht, als gäbe es mehrere Stellen mit dem Wert $y = 0$ und wenn dies so wäre, könne die Funktion nicht mehr streng monoton sein. Tatsächlich ist es aber so, dass sich die Funktionswerte an diesen Stellen $x \neq 0$ (zumindest um einen noch so kleinen Wert) von 0 unterscheiden. Rechnerisch wäre das leicht zu erkennen, denn egal, wie nah die Zahl, die man für x einsetzt, auch noch bei 0

5.2 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 2

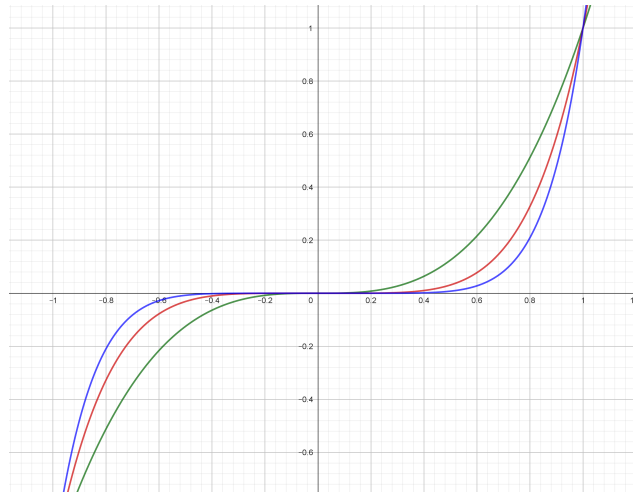


Abb. 5.1 Funktionen f_i mit $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^5$ und $f_3(x) = x^7$ als Gegenbeispiele

sein mag, es wird immer ein Funktionswert ungleich 0 herauskommen.

Genau diese Überlegung sagt uns aber, dass das Kriterium K3 hier nicht zur Gänze erfüllt ist, da es für Schüler:innen eventuell einer längeren Überlegung bedarf. Auch die Kriterien K6 und K7 leiden darunter. Alle Funktionen, die höherer Ordnung als sieben sind, werden in der Schule auch kaum behandelt und würden somit zusätzlich das Kriterium K8 ausschließen, da die Funktionen dadurch zu ungewöhnlich werden. Außerdem verlaufen diese Polynomfunktionen mit steigender Potenz auch immer näher an der x -Achse, wodurch sie ohnehin immer unanschaulicher als Gegenbeispiele werden.

Alle anderen genannten Gegenbeispiele erfüllen K1 nicht, sind somit keine Gegenbeispiele und werden also in diesem Kapitel nicht weiter behandelt.

5.2 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 2

„Unstetige Funktionen haben (mindestens) eine Sprungstelle.“

Auch hier wurden wieder einige Funktionen genannt, die schon bei K1 scheitern und somit nicht als Gegenbeispiele funktionieren. In keinem einzigen Interview konnte ein Gegenbeispiel genannt werden, das K1 erfüllt. Eine interviewte Person wusste zwar, dass es oszillierende Funktionen gibt, die an einer Stelle unstetig sein können und eben keine Sprungstelle haben (und somit die Aussage F2 widerlegen), jedoch konnte die Person keinen richtigen Funktionsterm angeben, den man Schüler:innen weitergeben kann (siehe Kapitel 4.1.2).

Gegenbeispiel 2/1: f mit $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

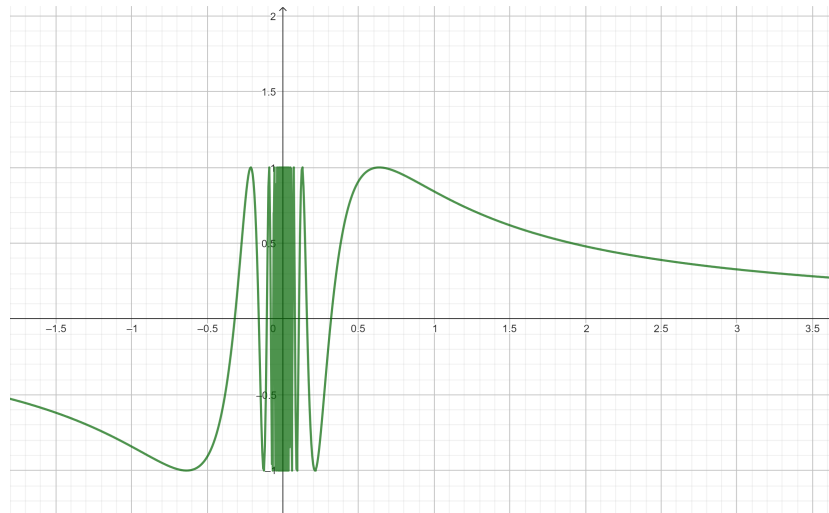


Abb. 5.2 Gegenbeispiel für F2

Diese Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich unstetig, da an der Stelle $p = 0$ eine Unstetigkeitsstelle vorliegt, wie unter anderem bei Appell 2009 (S. 11 f.) erläutert wird. Sie zeigt also, dass eine Funktion auch unstetig sein kann, wenn sie keine Sprungstelle besitzt (vgl. Appell 2009, S. 12). (Auf die genaue Definition einer Sprungstelle wird später in Kapitel 6.2 Bezug genommen.) Somit erfüllt sie K1 und ist als Gegenbeispiel für F2 geeignet. Diese Funktion besitzt außerdem folgende Kriterien: Sie trifft in gewissem Maße den Kern der Aussage (K2), ist optisch repräsentierbar durch den Graphen (K6) und sie ist außerdem öfters einsetzbar (K9). Natürlich muss gesagt werden, dass dieses Gegenbeispiel auch einige Kriterien nicht erfüllt. Denn es ist sicher ein eher ungewöhnliches und schwierigeres Beispiel für den Unterricht in der Schule, womit es K7 und K8 nicht abdeckt. Auch K3 und K5 werden der Funktion nicht ganz gerecht. Das Beispiel ist durch die Außergewöhnlichkeit sicher nicht für alle Schüler:innen gleich so einfach zu erfassen und der Bereich rund um die 0 mit den schnellen Oszillationen bedarf einer längeren Erklärung. Trotzdem bringt das Beispiel eine gewisse Anschauung mit und kann sehr wohl im Unterricht verwendet werden.

Auch in Schulbüchern ist es zu finden, beispielsweise in *Mathematik Verstehen* 7, wo es eben als Gegenbeispiel für die Bleistiftstetigkeit angegeben wird (vgl. Malle et al. 2019, S. 160). Helfen kann dabei auch die Benutzung von Technologie. Ein Heranzoomen in GeoGebra zeigt bis zu einem gewissen Grad die starken

Schwingungen der Funktion hin zur Stelle $p = 0$. Kleine Änderungen in den x -Werten führen zu großen Änderungen bei den Funktionswerten $f(x)$. Ab einem sehr kleinen Wert ist in GeoGebra nur mehr eine Fläche sichtbar, da die Funktion so schnell oszilliert und schon alleine dies kann bei Schüler:innen ansatzweise helfen zu verstehen, dass hier einerseits keine Sprungstelle zu sehen ist und andererseits auch die Bleistiftstetigkeit nicht wirklich zutrifft. Dazu mehr im nächsten Abschnitt.

5.3 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 3

„Stetige Funktionen lassen sich durchzeichnen, ohne mit dem Stift abzusetzen.“

Recht ähnlich waren die Ergebnisse für Fehlvorstellung 3. Da die Bleistiftstetigkeit in der Schule immer noch häufig verwendet wird, war auch hier die Suche nach einem Gegenbeispiel schwierig, obwohl in den Interviews doch oft die Idee da war, dass es schon ein Gegenbeispiel geben muss. Hervorgegangen aus den Leitfäden ist folgendes Gegenbeispiel:

Gegenbeispiel 3/1: f mit $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

Diese Funktion ist stetig auf ihrem Definitionsbereich und lässt sich wegen der Polstelle bei $p = 0$ nicht mit dem Stift durchzeichnen. Erfüllt sind somit klarerweise K1 und damit noch weitere Kriterien, wie K2, K3, K5, K6, K7 und K8. Das Gegenbeispiel ist schlicht und einfach zu merken, und es ist Schüler:innen zumindest nicht fremd, zumal rational gebrochene Funktionen Teil des Lehrplans sind. Es lässt sich grafisch einfach darstellen und gibt vor allem dadurch eine gute Erklärung ab, warum diese Eigenschaft nicht auf alle Funktionen zutreffen kann. Auf diese Weise ließen sich auch noch viele weitere Gegenbeispiele dieser Art finden. Durch den rationalen Funktionsterm gibt es Stellen, die vom Definitionsbereich ausgenommen und somit für die Stetigkeit nicht weiter interessant sind, da wir uns hier nur den Definitionsbereich anschauen.

Gegenbeispiel 3/2: f mit $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Diese Funktion funktioniert ebenfalls als Gegenbeispiel für F3. Sie ist zwar stetig, wie etwa bei Appell 2009 nachzulesen ist, (vgl. Appell 2009, S. 13) besitzt aber in der Umgebung der Stelle $p = 0$ trotzdem unendlich viele lokale Extremstellen und ist daher nicht durchzeichenbar, da niemand diese unendlich vielen Schwin-

gungen mit einem Bleistift in endlicher Zeit festhalten könnte (vgl. Ableitinger 2023, S. 6).

Natürlich hat dieses Gegenbeispiel auch Schwächen, da beispielsweise K8 und K3 nicht erfüllt werden. Die Funktion ist doch sehr außergewöhnlich, zeigt aber trotzdem wieder gut, worum es in dieser Fehlvorstellung geht. Außerdem öffnet sie den Blick darauf, dass gerade bei der Stetigkeit der Funktionen doch immer ein genauer Blick notwendig und das Thema nicht als trivial hinzunehmen ist. Schüler:innen würden vielleicht im Hinblick auf Gegenbeispiel 2/1 von vorhin glauben, dass auch diese Funktion unstetig sei, was aber nicht stimmt.

5.4 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 4

„Jede konvergente Folge a_n kommt ihrem Grenzwert a beliebig nahe, ohne ihn je zu erreichen.“

Für Fehlvorstellung 4 wurde in den Interviews von zwei Personen folgendes Gegenbeispiel genannt.

Gegenbeispiel 4/1: Die konstante Folge bzw. konkret die Folge $(a_n) = 1$

Das ist ein korrektes Gegenbeispiel für die Fehlvorstellung F4. Auch andere konstante Folgen wären hier richtig. Konstante Folgen sind konvergent und erreichen ihren Grenzwert unendlich oft, womit F4 sowieso widerlegt ist und auch später bei F5 der Widerspruch erkennbar ist. Kriterium K1 ist also auf jeden Fall erfüllt. Das Gegenbeispiel ist außerdem auch optisch repräsentierbar (K6), es ist schlicht und einfach (K7) und vielfältig verwendbar (K9).

Schwierig wird es hier bei den Kriterien K3 und K8. Die konstante Folge ist nun kein sehr prototypisches Beispiel, da sich Schüler:innen unter einer Folge eher einen dynamischen Prozess vorstellen werden, wie beispielsweise $(a_n) = \frac{1}{n}$. Es kann also sein, dass das Gegenbeispiel 4/1 zu ungewöhnlich ist und daher nicht direkt überzeugt. Vorher muss überhaupt erst akzeptiert werden, dass die konstante Folge konvergent ist, was einiger Überlegungen (vor allem für Schüler:innen) bedarf und somit dem optimalen direkten Effekt eines Gegenbeispiels im Weg steht.

Gegenbeispiel 4/2: $(a_n) = (3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$

Diese Folge ist konvergent und erreicht ihren Grenzwert 0 unendlich oft. Sie kann daher als Gegenbeispiel verwendet werden. Vom Prinzip her funktioniert es hier ähnlich, wie bei der konstanten Folge, da die Folge ja ab dem vierten Folgenglied

eine konstante Folge ist. Trotzdem kann es sein, dass K8 hier besser vergewertet wird. Da die Folge absteigend ist und eher dem prototypischen Verlauf einer konvergenten Folge ähnelt, kann es sein, dass sie schneller überzeugt, als eine rein konstante Folge.

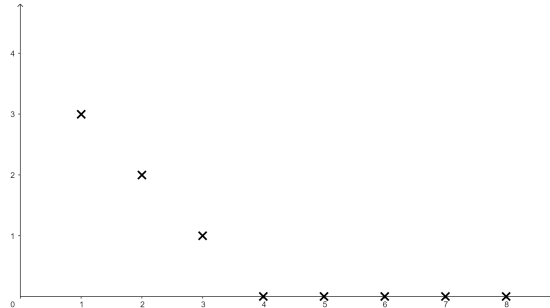


Abb. 5.3 Gegenbeispiel 4/2

Folgen dieser Art können beliebig erzeugt werden und so gibt es natürlich viele Beispiele, ähnlich wie Gegenbeispiel 4/1 oder 4/2, die alle Fehlvorstellung 4 widerlegen können.

Gegenbeispiel 4/3: $(a_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_u \\ 0 & n \in \mathbb{N}_g \end{cases}$

Auch diese Folge kann als Gegenbeispiel verwendet werden und ist sogar noch prototypischer für den Verlauf einer konvergenten Folge (K8). Auch K3 ist hier schneller erfüllt, denn dass die Folge konvergent ist, ist zu erkennen. Schließlich kennen die Schüler:innen die Folge $(a_n) = \frac{1}{n}$, die ganz ähnlich ist. Trotzdem ist schnell ersichtlich, dass die Folge ihren Grenzwert 0 in jedem zweiten Schritt und somit wieder unendlich oft erreicht.

5.5 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 5

„Jede konvergente Folge a_n kommt ihrem Grenzwert a immer näher.“

Leider ergab die Studie hierzu keine Ergebnisse, denn niemand der Befragten konnte ein Gegenbeispiel für F5 nennen. Wie für F4 funktioniert auch hier beispielsweise die konstante Folge (siehe Gegenbeispiel 4/1, Kapitel 5.4), wobei es auch noch ein anderes Gegenbeispiel gibt:

Gegenbeispiel 5/1: $(a_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_u \\ \frac{1}{n+2} & n \in \mathbb{N}_g \end{cases}$

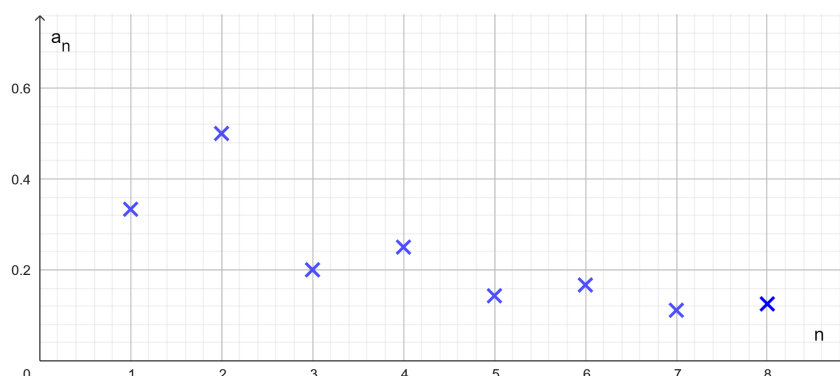


Abb. 5.4 Gegenbeispiel 5/1 zu F5

Diese Folge entfernt sich sogar von ihrem Grenzwert 0 (vgl. Ableitinger 2023, S. 4), weshalb die Aussage, dass eine konvergente Folge ihrem Grenzwert immer näher käme, nicht stimmen kann. Sie ist daher ein eindeutiges Gegenbeispiel für die Fehlvorstellung F5. Durch die visuelle Repräsentierung (K6) kann sie unmittelbar überzeugen (K3). Und auch wenn nicht auf den ersten Blick klar ist, was hier passiert, so kann eine einfache Berechnung, indem man die ersten paar Folgenglieder berechnet, (K5) schon helfen. Die Werte schwanken hin und her und nähern sich somit dem Grenzwert nicht immer an. Das Beispiel ist natürlich nicht ganz so einfach zu merken, vor allem für Schüler:innen. Es kann aber trotzdem durch die starke Aussagekraft zur Widerlegung der Aussage gut überzeugen und Schüler:innen eventuell schneller Einsicht gewähren, als das Beispiel der konstanten Folge.

5.6 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 6

„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$ und $f''(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine Sattelstelle der Funktion f .“

Gegenbeispiel 6/1: f mit $f(x) = x^4$

Hierbei handelt es sich um das einzige Gegenbeispiel, das zu F6 gefunden wurde. Generell wurde diese Fehlvorstellung bei mehr als der Hälfte der Befragten nicht als solche erkannt. Es scheint, dass es sich also um eine weit verbreitete

Fehlvorstellung handelt. Die Funktion f mit $f(x) = x^4$ ergibt an der Stelle $p = 0$ sowohl für die erste als auch für die zweite Ableitung 0, denn $f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$ und $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$. Trotzdem hat die Funktion an der Stelle $p = 0$ keine Sattelstelle, sondern eine lokale Minimumstelle (K1). Vor allem grafisch ist dies sehr schnell sichtbar (K6). Das Gegenbeispiel erfüllt auch die Kriterien K2, K3, K5, K7 und K9. Es ist einfach und leicht zu merken, den Schüler:innen ist es sicher nicht unbekannt und es trifft schnell den Kern der Aussage. Um sich zu vergewissern, warum die Fehlvorstellung falsch ist, reicht es, die Stelle in den Funktionsterm einzusetzen und zu sehen, dass dem nicht so ist. Auch K4 ist also halbwegs abgedeckt. Die zwei Bedingungen $f'(p) = 0$ und $f''(p) = 0$ fixieren demnach noch keine Sattelstelle, da die Stelle $p = 0$ nicht unbedingt eine Wendestelle ist. Um dies zu überprüfen, kann man zum Beispiel die hinreichende Bedingung für Wendestellen hinzuziehen und schauen, ob $f'''(p) = 0$ ist. Wenn dem so ist, handelt es sich um keine Wendestelle und somit auch um keinen Sattelpunkt. Wie wir leicht erkennen können, ist das bei f mit $f(x) = x^4$ an der Stelle $p = 0$ so, denn $f'''(0) = 24 \cdot 0 = 0$.

Die Interviewperson, die das Gegenbeispiel genannt hat, hat dazu einen falschen Graphen aufgezeichnet (siehe Abbildung 4.7). Zwar den Graphen einer Polynomfunktion vierten Grades, jedoch nicht den zu f mit $f(x) = x^4$. Das zeigt hier gut die Schwierigkeit des Gegenbeispiels mit dem Kriterium K8. Der Graph von f mit $f(x) = x^4$ ist zwar nicht sehr exotisch, jedoch stellt man sich eine typische Funktion vierten Grades anders vor, und zwar meist mit zwei Krümmungswechseln. Durch dieses Kriterium wird das Gegenbeispiel also etwas in der Qualität gemindert.

5.7 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 7

„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine lokale Extremstelle der Funktion f .“

Gegenbeispiel 7/1: f mit $f(x) = x^3$

Sowie auch schon für F3, ist f mit $f(x) = x^3$ ein passendes Gegenbeispiel für F7, was wiederum die Vielfältigkeit dieser Funktion bestätigt (K9). Denn obwohl für diese Funktion $f'(0) = 0$ gilt, so liegt hier trotzdem keine lokale Extremstelle vor, sondern eine Sattelstelle. Fälschlicherweise wird hier manchmal gedacht, dass in dieser Situation an der besagten Stelle nur eine lokale Extremstelle sein kann. Dass dem aber nicht so ist, haben die Proband:innen der Befragung alle erkannt. Auch einige Gegenbeispiele wurden dazu genannt, wie eben Gegenbeispiel 7/1. Es erfüllt auch hier wieder einige Kriterien, beispielsweise K2, da es mit der Stelle

5 Katalog an Gegenbeispielen und Untersuchung anhand der Kriterien

$p = 0$ genau den Kern der Fehlvorstellung trifft. Außerdem ist es schnell erfassbar (K3), es bedient sich geläufiger Methoden (K5), ist anschaulich als Graph darstellbar (K6), einfach zu merken und (K7) und nicht zu ungewöhnlich (K8).

Gegenbeispiel 7/2: f mit $f(x) = x^3 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Eine interviewte Person schrieb dieses Gegenbeispiel auf, das auf derselben Erklärung wie oben basiert. Eine beliebige additive Konstante c im Funktionsterm verschiebt die Funktion lediglich nach oben oder unten und fällt beim Ableiten des Funktionsterms weg. Somit können alle Funktionsterme dieser Art als Gegenbeispiel fungieren. Prinzipiell belaufen sich die Kriterien auf die gleichen wie oben. Erfüllt sind K9, K3, K5, und K8, jedoch könnte die visuelle Repräsentierung (K6) darunter leiden, dass der Funktionsterm ein bisschen komplizierter ist. Schüler:innen müssten eventuell vorher nachdenken oder Punkte ausrechnen, bevor sie den Term schnell skizzieren können. (Obwohl das Wissen über die Auswirkung von Parametern im Funktionsterm Teil des Schulstoffes ist.)

Gegenbeispiel 7/3: alle Funktionen der Art f mit $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}_u$ und $n \geq 3$

Ganz ähnlich verhält sich dieser Sachverhalt bei allen Polynomfunktionen ungerader Ordnung. Das bedeutet f mit $f(x) = x^3$, f mit $f(x) = x^5$, f mit $f(x) = x^7$, ... Alle diese Funktionen haben an der Stelle $p = 0$ eine Sattelstelle und widerlegen somit F7. Je höher hier aber die Potenz, desto mehr wird Kriterium K8 verletzt. Eine Funktion 9. Ordnung wird kaum im Unterricht verwendet und es zeigt auch nichts anderes als Gegenbeispiel 7/1. Es ist hier also sicherlich Gegenbeispiel 7/1 die bessere Wahl. Jedoch ist von Vorteil, zeigen zu können, dass es auch weitere Funktionen gibt, die ein Gegenbeispiel für F7 darstellen.

5.8 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 8

„Eine Tangente an einen Funktionsgraphen hat mit dem Graphen genau einen Punkt gemeinsam, nämlich den Berührungspunkt.“

Hierbei handelt es sich um eine Fehlvorstellung, die meist grafisch aufgedeckt wurde, indem eine Funktion auf- und eine Tangente eingezeichnet wurde. Anhand dessen konnte man dann erkennen, dass es mehr als nur einen Berührungspunkt gibt und die Aussage widerlegt ist. Einige dieser Skizzen findet man in Kapitel 4.8. Viele dieser Funktionen waren Polynomfunktionen dritten oder vierten Grades. Meistens wurde gar kein konkreter Funktionsterm angegeben. Gemeinsam

mit der richtigen Aussage R3 in den Fragebögen, konnten aber doch einige Terme gesammelt werden. (Hier wurde derselbe Inhalt, nur eben mit einer richtigen Aussage, thematisiert und viele der Proband:innen haben sogar Beispiele angegeben, wo es funktioniert, die also Gegenbeispiele für F8 sind.)

Gegenbeispiel 8/1:

Polynomfunktionen dritten Grades, zum Beispiel f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2$

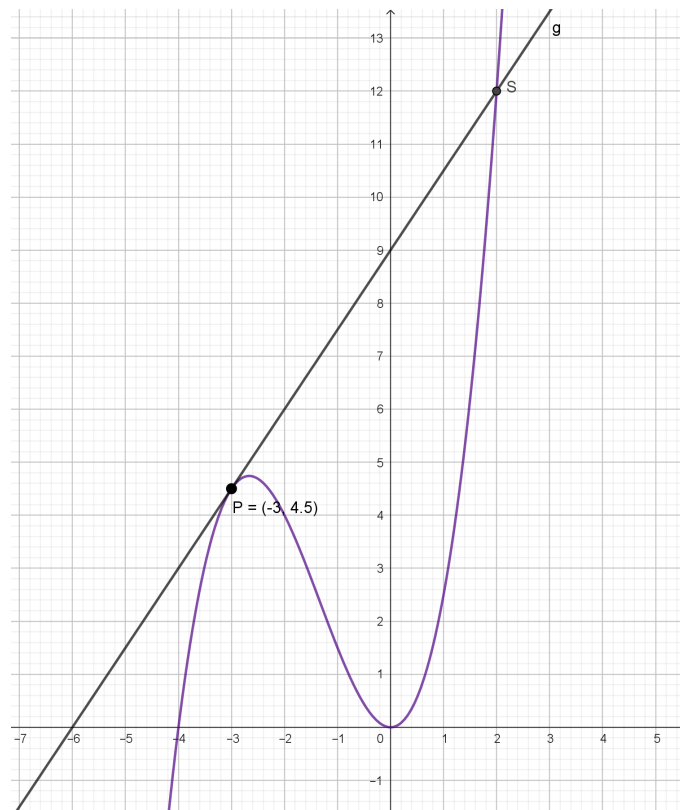


Abb. 5.5 Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2$ als Gegenbeispiel für F8

Es gibt hier so einige Gegenbeispiele, die wunderbar funktionieren, um die Fehlvorstellung zu widerlegen, Gegenbeispiel 8/1 ist eines davon. Die Grafik ist in Abbildung 5.5 zu sehen. Die Tangente im Punkt $P = (-3 | 4,5)$ schneidet den Graphen noch ein zweites mal im Schnittpunkt S und somit gibt es mehr als einen gemeinsamen Punkt. Hierbei ist also der Aspekt der visuellen Darstellbarkeit (K6) enorm wichtig. Ein gutes Gegenbeispiel wird auf jeden Fall dieses Kriterium brauchen, um unmittelbar zu wirken. Was hier am konkreten Beispiel

5 Katalog an Gegenbeispielen und Untersuchung anhand der Kriterien

nicht der Fall ist, ist, dass es leicht zu merken ist (K7). Da es aber unzählige Beispiele gibt, mit denen F8 widerlegt werden kann, ist der konkrete Funktionsterm eventuell gar nicht so wichtig. Denn auch wenn der Funktionsterm nicht genau derselbe ist, wird es funktionieren.

Gegenbeispiel 8/2: lineare Funktionen, zum Beispiel f mit $f(x) = x$

Ein Beispiel, das hingegen sehr einfach zu merken ist und somit K7 auf jeden Fall erfüllt, ist f mit $f(x) = x$. Die Funktion verläuft geradlinig. Würde man hier also eine Tangente in einen Punkt legen, so entspräche diese genau der Funktion. Das Gegenbeispiel wurde in einem der Interviews mit der Argumentation erwähnt, dass die Tangente ja dann alle Punkte mit der Funktion gleich hat. Das stimmt zwar, jedoch muss bedacht werden, dass dies vielleicht kein so überzeugendes Beispiel für Schüler:innen ist. Es verletzt also K3 und K8. Es ist nämlich eher ungewöhnlich, bei linearen Funktionen eine Tangente anzulegen, da ja auch die Funktion schon die Steigung verrät. Trotzdem ist Gegenbeispiel 8/2 sehr anschaulich und schlicht (K6, K7).

Gegenbeispiel 8/3: konstante Funktionen, zum Beispiel f mit $f(x) = 1$

Ein weiteres aus den Interviews hervorgegangenes Gegenbeispiel für F8 ist die Funktion f mit $f(x) = 1$ beziehungsweise jegliche andere konstante Funktion. Hier ist es ähnlich, wie bei Gegenbeispiel 8/2. Es widerlegt zwar die Fehlvorstellung und bringt einige Kriterien mit, jedoch könnte es an der schnellen Überzeugung hapern, da es ja ausschließlich Berührungspunkte gibt.

Gegenbeispiel 8/4: f mit $f(x) = \sin(x)$ oder f mit $f(x) = \cos(x)$

Ein recht überzeugendes Beispiel lieferten die Proband:innen mit der Sinus-, beziehungsweise Cosinusfunktion. Legt man hier eine Tangente an die Hoch- oder Tiefpunkte, also am Beispiel der Sinusfunktion an die Stellen $p_1 = \frac{\pi}{2}$ und $p_2 = \frac{3\pi}{2}$, so bekommt man eine waagrechte Tangente, die nun in jedem Hoch- und Tiefpunkt die Funktion berühren wird. Es gibt daher unendlich viele Berührungspunkte zwischen Tangente und Funktion.

Dieses Beispiel erfüllt auf jeden Fall K1 und K2. Hier gibt es, je nachdem, wo die Tangente angelegt wird, sowohl Schnitt- als auch Berührungspunkte. Das Gegenbeispiel besteht also mit der schnellen Überzeugung (K3). Es ist gut grafisch repräsentierbar, einfach zu merken und den Schüler:innen bestimmt nicht unbe-

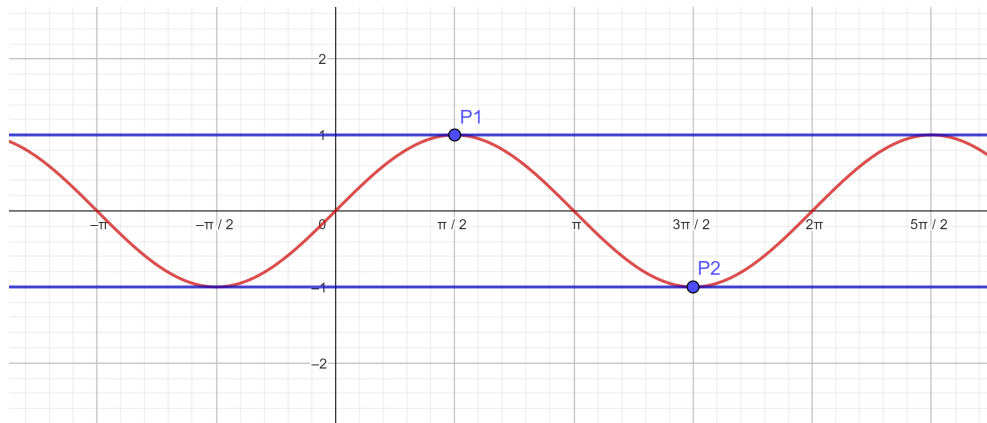


Abb. 5.6 Sinusfunktion mit Tangenten als Gegenbeispiel für F8

kannt, beziehungsweise zu ungewöhnlich. Auch K6, K7 und K8 sind demzufolge auf jeden Fall erfüllt.

Damit K4 bei all diesen Gegenbeispielen erfüllt wäre, müssten die Beispiele Einsicht ermöglichen, warum die Fehlvorstellung falsch war. Was hier überhaupt zur Fehlvorstellung führt, ist vielleicht der visuelle Gedanke, dass die Tangente (wie beim Kreis) die Funktion nur in einem Punkt berührt. Oft werden zur Demonstration der Steigung nur recht kurze Tangenten eingezeichnet (wo dann eventuelle weitere Schnittpunkte nicht zu sehen sind). Es könnte daher die Fehlvorstellung entstehen, dass Tangenten irgendwo ein Ende haben, was aber nicht stimmt, da sie Geraden sind und deshalb keinen Anfangs- und keinen Endpunkt besitzen. Bei allen diesen Gegenbeispielen, vor allem Gegenbeispiel 8/1 und 8/4, kann man aber an der grafischen Lösung auf jeden Fall sehen, worin die Fehlvorstellung gelegen hat.

5.9 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 9

„Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f''(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine Wendestelle der Funktion f .“

Gegenbeispiel 9/1: f mit $f(x) = x^4$

Diese Funktion wurde in einigen Interviews als Gegenbeispiel genannt. Die Funktion f mit $f(x) = x^4$ erfüllt $f''(0) = 0$ und trotzdem ist an der Stelle $p = 0$ keine Wende-, sondern eine Minimumstelle. Die Funktion widerlegt also die Fehlvorstellung (K1) und eignet sich somit als Gegenbeispiel. Sie ist auch für Schüler:innen

5 Katalog an Gegenbeispielen und Untersuchung anhand der Kriterien

nicht ungewöhnlich (K8) und ist vor allem auch grafisch sehr gut lösbar, wenn man den Graphen der Funktion skizziert (K6). Was hier ebenfalls von Vorteil ist, ist, dass diese Funktion auch für F6 verwendet werden kann und somit ein vielfältiges Gegenbeispiel darstellt, das öfter als einmal verwendet werden kann (K9).

Gegenbeispiel 9/2: f mit $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_g$ und $n \geq 4$

Wie schon des Öfteren, ist es auch hier so, dass alle weiteren Polynomfunktionen mit gerader Potenz ≥ 4 als Gegenbeispiele für F9 verwendet werden können. Auch hier werden Kriterien wie K2, K3, K6 und K7 auf jeden Fall erfüllt. Denn dass es sich bei der Stelle $p = 0$ um keine Wendestelle handelt, sieht man grafisch auf jeden Fall, auch bei den Funktionen höherer Ordnung.

Ähnlich wie bei den vorherigen Beispielen ist es aber so, dass die Funktionen dann natürlich entfernter von den prototypischen Beispielen, die Schüler:innen kennen, sind. K8 würde hier also bei Funktionen höherer Ordnung eventuell verletzt werden. Trotzdem ist es wieder von Vorteil, dass es somit eine Fülle an Funktionen gibt, die diese Fehlvorstellung widerlegen.

5.10 Gegenbeispiele für Fehlvorstellung 10

„Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ gibt den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse im Intervall $[a, b]$ an.“

Ähnlich wie bei der Fehlvorstellung F8 wurden auch hier die Aufgaben in den Interviews meist grafisch gelöst und keine konkreten Funktionsterme aufgestellt (Skizzen siehe Kapitel 4.10). Trotzdem gibt es genug Gegenbeispiele, die diese Funktion widerlegen. Bei der Aussage R6, die auch in den Interviewleitfäden war und sozusagen das richtige Pendant zu F10 darstellt, wurde von einer interviewten Person zusammenfassend gesagt, dass alle Funktionen, die negative Funktionswerte haben, diese Fehlvorstellung widerlegen können. Wichtig hier ist wieder das Kriterium der visuellen Repräsentation des Beispiels. Es folgen einige Beispiele:

Gegenbeispiel 10/1: f mit $f(x) = x$

$$\int_{-3}^3 f(x)dx = \int_{-3}^3 xdx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-3}^3 = \left(\frac{3^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} \right) = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0 \quad (5.1)$$

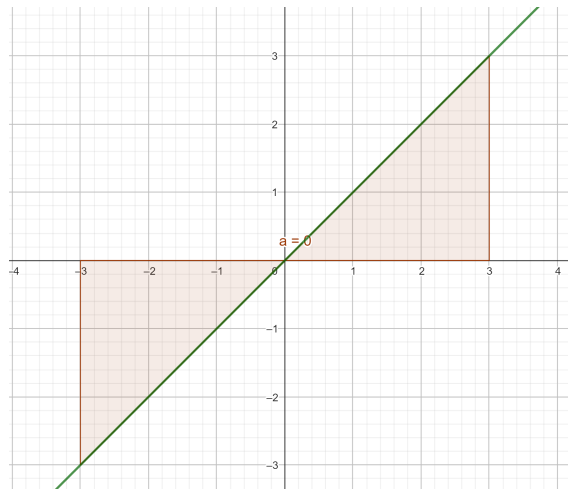


Abb. 5.7 Gegenbeispiel für F10: $\int_{-3}^3 x dx$

Diese Funktion hat also, obwohl die Skizze die Fläche unter der Funktion anzeigt, ein Integral von 0. Der negative und positive Teil des Integrals sind gleich groß, weswegen sich die Werte genau aufheben. Da der Wert 0 auf keinen Fall den eingezeichneten Flächen in der Grafik entspricht, widerlegt diese Funktion die Aussage F10 (K1). Das Gegenbeispiel trifft auch schnell den Kern der Aussage, da hier sogar ganz deutlich wird, dass es nicht dasselbe sein kann (K2). Ebenfalls ist das Gegenbeispiel 10/1 schlicht und prägnant und lässt sich sehr gut visuell darstellen (K6 und K7). Da es auch schon bei F8 verwendet wurde, kann man sehen, dass es bei manchen Aussagen ebenfalls zu gebrauchen ist (K9). K3 ist insofern erfüllt, da man keine lange Rechnung braucht, um das Problem der Fehlvorstellung zu sehen. Wenn wie oben das Integral einfach ausgerechnet wird, muss klar sein, dass der Wert des Integrals einfach nicht genau dem Flächeninhalt zwischen der x -Achse und dem Graphen entspricht. Das sind Methoden, die Schüler:innen jedenfalls geläufig sind und die sie selbst gut anwenden können (K5).

Gegenbeispiel 10/2: f mit $f(x) = x^2 - 4x$

5 Katalog an Gegenbeispielen und Untersuchung anhand der Kriterien

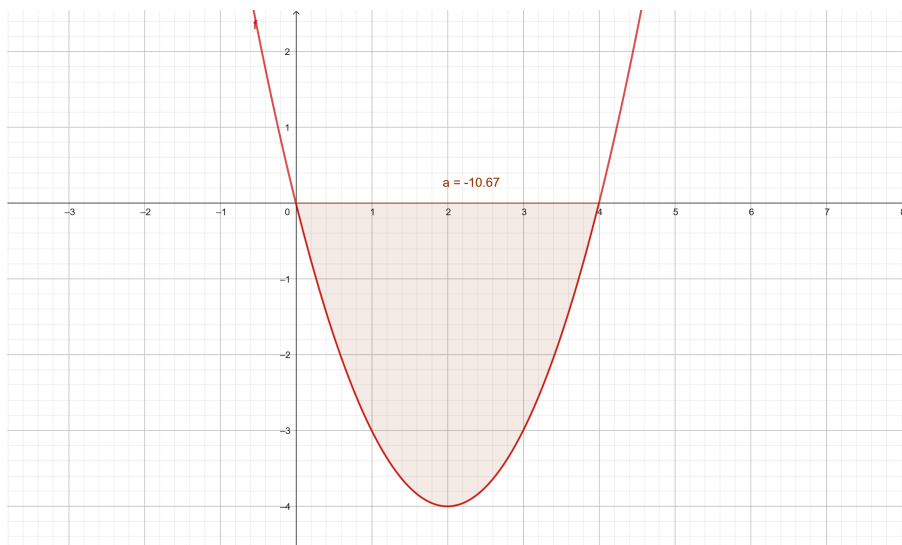


Abb. 5.8 Gegenbeispiel für F10: f mit $f(x) = x^2 - 4x$

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 (x^2 - 4x) dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} \right|_0^4 = \quad (5.2)$$

$$\left(\frac{4^3}{3} - \frac{4 \cdot (4)^2}{2} \right) - 0 = \frac{64}{3} - \frac{64}{2} = \frac{128}{6} - \frac{192}{6} = -\frac{64}{6} = -\frac{32}{3} \approx -10,67 \quad (5.3)$$

An diesem Gegenbeispiel sieht man einen Fall, wo sich die Flächen nicht gegenseitig aufheben, sondern wo das Integral nur im negativen Bereich liegt. Jetzt ist zwar die Fläche gleich groß wie der Wert des Integrals, trotzdem ist der Wert des Integrals negativ und der Flächeninhalt positiv, und daher nicht derselbe. Auch solche Funktionen sind also gut geeignet, um zu zeigen, dass Flächeninhalt und Integral nicht immer gleich sind. Parabeln sind den Schüler:innen zum Zeitpunkt der Integralrechnung schon oft begegnet (K8), das Intervall lässt sich einfach berechnen (K3) und der Graph der Funktion leicht skizzieren (K6).

Gegenbeispiel 10/3: f mit $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ x - 2 & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$

In Abbildung 5.9 sieht man eine abschnittsweise definierte Funktion, wie etwa in 4.1.10 dargestellt. Wenn das Intervall nun so wie in diesem Beispiel gewählt wird,

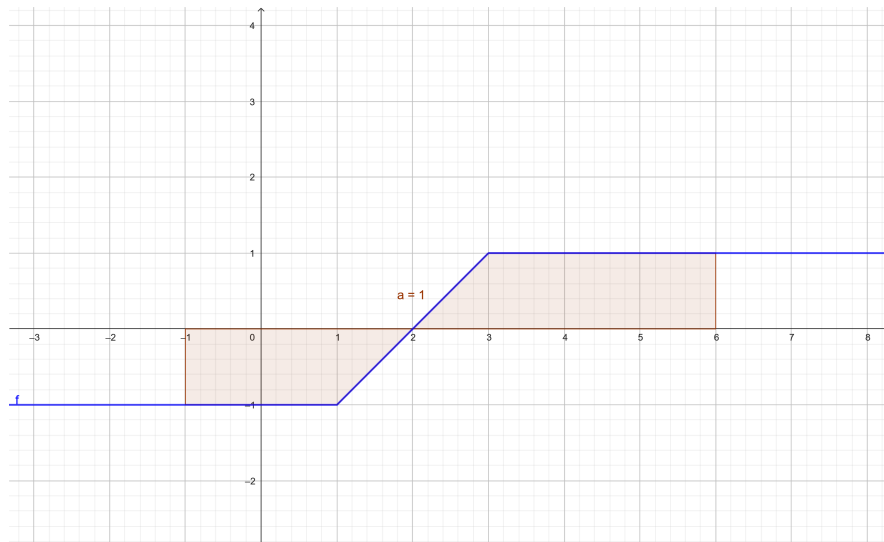


Abb. 5.9 Integral einer stückweise definierten Funktion als Gegenbeispiel für F10

sieht man, dass die positive Fläche kleiner ist als die negative Fläche. Bei der Berechnung wird hier also ein positiver Wert herauskommen, denn der negative Teil der Funktion hat einen Wert von $-2,5$ und der positive Teil hat einen Wert von $3,5$. Gesamt ergibt sich als Wert des Integrals: $3,5 - 2,5 = 1$

Würde man aber nur den Flächeninhalt der von der x -Achse und der Funktion eingeschlossenen Figur berechnen, würde $A = 6$ herauskommen, wie man durch Nachzählen der Kästchen leicht erkennen kann. Stückweise definierte Funktionen sind Schüler:innen durchaus geläufig, zumal sie oft in Textaufgaben zu Modellierungsaufgaben vorkommen können (Wachstum, Zufluss, Abbau von Medikamenten, Wasser, Kulturen, ...), womit K8 erfüllt ist. Auch hier geht es bei der Wahl des Gegenbeispiels nicht darum, den genauen Funktionsterm aufschreiben zu können. Eine grafische Anschauung kann hier ausreichend sein (K6).

6 Erkenntnisse aus der Untersuchung und Diskussion der Ergebnisse

6.1 Folgen in der Schule

Das Thema Folgen und Reihen tritt in der Schule immer mehr in den Hintergrund. Dass dies mehrere Gründe hat, wird im Folgenden erläutert. So wurde bereits in den 80er Jahren erwähnt, dass die Schwierigkeiten etwa an unzureichenden Fertigkeiten im Rechnen, dem Unverständnis von für die Definitionen notwendigen Quantoren, Hürden im Begriffslernen oder an der vorrangigen dynamischen Grundvorstellung der Folgen lägen (vgl. Tietze/Klika/Wolpers 1997, S. 252 f.). Zusätzlich ist das Thema der Folgen anfälliger für Fehlvorstellungen als andere Inhalte der Analysis und es „[...] tritt ein Unterrichts-Mißerfolg deutlicher zutage [...]“ (Bender 1991, S. 239). Heute kommt noch ein weiterer ausschlaggebender Grund hinzu. Zwar wäre es Teil des Lehrplanes, Folgen im Gegenstand Mathematik zu unterrichten, jedoch wird das Thema im Grundkompetenzenkatalog für die schriftliche Reifeprüfung nicht mehr abgefragt. Lediglich für die Schulstufen BAfEP/BASOP/BRP (P) lautet eine Grundkompetenz: „Bei anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen mithilfe arithmetischer und geometrischer Folgen modellieren, diese Aufgabenstellungen lösen; Sachverhalte interpretieren und die Wahl der Folge begründen.“ (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2017, S. 2) Es ist anzunehmen, dass Folgen in der AHS deshalb von immer weniger Lehrenden unterrichtet werden. Das hat sich zumindest in der Untersuchung dieser Arbeit zu Teilen widerspiegelt (vgl. Kapitel 4). Die beiden Fehlvorstellungen zu den Folgen und ihrem Grenzwert (F4 und F5) schnitten unter anderen am schlechtesten ab. Das bedeutet, es wurden fast keine Gegenbeispiele gefunden und in den meisten Fällen konnten sie gar nicht erst als Fehlvorstellung identifiziert werden. Es ist also nicht verwunderlich, dass diese Fehlvorstellungen auch bei einigen Schüler:innen auftreten würden.

Im Grunde genommen können Folgen als „natürliches Instrument zur Beschrei-

bung iterativer Prozesse“ gesehen werden (Danckwerts/Vogel 2006, S. 17). So braucht man sie beispielsweise bei Modellierungsaufgaben zur Beschreibung der Veränderung des Medikamentenspiegels im menschlichen Körper oder Ähnliches. Eine Einführung der Folgen in einem konkreten Kontext kann in didaktischer Hinsicht von Vorteil sein (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 18). Ein weiteres Beispiel, das sich zur Einführung von Folgen als diskrete Modellierung rekursiver Prozesse eignet, wäre die Entwicklung des Koffeingehalts im Körper (vgl. Steinbauer/Kramer/Süss-Stepancik 2022, S. 45 f.). Solche Sachverhalte sind in Schulaufgaben jedenfalls immer wieder präsent. Lange Zeit war es Tradition, die Folgen ausführlich für eine gute Basis zum weiteren Verständnis des Ableitungs- und Integralbegriffs einzuführen (vgl. Blum/Törner 1983, S. 67). Mittlerweile gibt es Ansätze dafür, dass eine Beschäftigung mit Differential- und Integralrechnung auch ohne dieser intensiven Beschäftigung mit Folgen möglich ist. Denn auch ein vereinfachter Grenzwertbegriff reiche, um das Verständnis von Ableitung und Integral zu vermitteln (vgl. Blum/Kirsch 1979, S. 42 ff.). Dies erhöht den Stellenwert der Folgen in der Schulmathematik nicht unbedingt. Deshalb sei es umso notwendiger, auf tatsächliche Anwendungsbereiche, wo der Begriff auf natürliche Weise gebraucht wird, zurückzugreifen (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 17 f.). Die Behandlung der Folgen als Ausgangslage für das weitere Verstehen von Differential- und Integralrechnung ist also nicht unbedingt notwendig. Viel eher ist es wichtig, Folgen einen Sinn und einen Kontext zu geben und etwa Konvergenzphänomene damit zu beschreiben (vgl. Blum/Kirsch 1979, S. 8). Das Arbeiten mit Folgen kann nämlich für einen ganzheitlichen Konvergenz-Begriff hilfreich sein und in diesem Zusammenhang Verständnis schaffen (vgl. Blum/Törner 1983, S. 67 f.). Gerade die Thematisierung des Grenzwerts einer Folge war Thema in der Untersuchung dieser Arbeit und ist daher für uns interessant.

Die Entwicklung eines intuitiven Grenzwertbegriffs kann schon recht früh begonnen und durch einfache Aufgaben nähergebracht werden. Hier können vor allem anschauliche Experimente durchgeführt werden, wie zu überlegen, wie oft man einen Streifen Papier in der Hälfte durchschneiden kann oder wie oft man ein Blatt Papier in der Hälfte falten kann (vgl. Steinbauer/Kramer/Süss-Stepancik 2022, S. 47 f.).

Leider birgt der intuitive Grenzwertbegriff aber dennoch Paradoxien, die nur mit der Intuition nicht mehr zu erfassen sind. Bei solchen Beispielen kann es zu Fehlvorstellungen kommen. Ein Beispiel hier können die Grenzwerte bei Treppenstufen sein, siehe dazu Abbildung 6.1 (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 111). Obwohl es hier den Anschein macht, als würde sich die Treppenlinie der Länge der Hypotenuse immer mehr annähern, so bleibt die Länge der Treppenstufen immer gleich. Die Länge der Treppenstufen ist – unabhängig von der Aufteilung

– gleich der Summe der beiden Katheten. Es kann also leicht eine Annäherung der Treppenstufen an die Hypotenuse als Grenzwert vermutet werden, trotzdem ist dem nicht so.

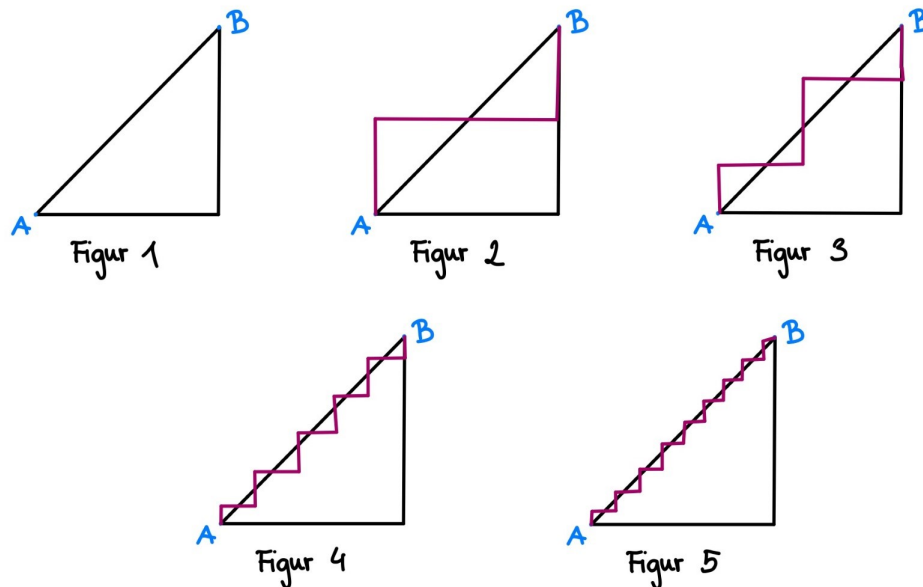


Abb. 6.1 Annäherung der Hypotenuse durch Treppenstufen

Außerdem erschwert ein rein intuitiver Grenzwertbegriff eine genaue Verbalisierung der Definition und kann eben zu Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit Folgen führen (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 25). Dies spiegelte sich in der Befragung der Lehrkräfte wider. Die Fehlvorstellungen zum Folgengrenzwert sorgten aufgrund der Formulierungen für Widersprüche mit der vermeintlichen Grenzwertdefinition vieler Lehrenden.

Die Aussage F4 (vgl. Kapitel 3) sorgte mit dem Beisatz „ohne ihn je zu erreichen“ noch für zusätzliche Gedanken seitens der Lehrkräfte, ob diese Aussage nicht falsch sein müsse. Denn aufgrund dessen konnte dann in zwei Fällen ein Gegenbeispiel, nämlich die konstante Folge, gefunden werden. Dass jede konvergente Folge a_n ihrem Grenzwert a immer näher käme, hielten einige für die Definition des Grenzwerts, beziehungsweise für eine Aussage, die die Grenzwertdefinition unterstützt. Auch an der genauen Beschreibung einer konvergenten Folge, scheiterten einige. Zwar kam einige Male ein Verweis auf das $\epsilon - n_0$ -Kriterium, das scheinbar noch bekannt ist, jedoch konnten wenige erklären, worum es sich dabei genau handelt und was man sich darunter vorstellen kann. Natürlich kamen in den Gesprächen auch einige Hinweise darauf, dass der Inhalt einfach für die Schule nicht mehr so relevant sei und die betreffenden Lehrpersonen sich erst in

das Thema wieder einlesen müssen. Das ist verständlich und bis zu einem gewissen Grad auch legitim. Trotzdem sollten manche Themen als Lehrperson einfach beherrscht werden und es ist interessant, dass genau dieses Thema solche Schwierigkeiten bereitet.

Oftmals gibt es hier in den Formulierungen schon einige Aspekte, die zu Fehlvorstellungen führen können, wie in den Fehlvorstellungen dieser Arbeit (F4 und F5) zu sehen ist. Beispielsweise die Fehlvorstellung, dass die Folge dem Grenzwert immer näherkäme oder dass die Folge den Grenzwert nie erreichen könne, sind Aussagen, die einfach widerlegt werden können, trotzdem aber von Lehrkräften angenommen und dadurch weitertransportiert werden. Wie man in Kapitel 4 lesen kann, bestätigen es auch die Interviews, da diese Aussagen teilweise als Definition eines Grenzwerts wahrgenommen werden. Doch wie kann man eine Grenzwertdefinition von Folgen nun korrekt mündlich formulieren? Für Verbalisierung der Konvergenz für Folgen muss zuerst die Folgendefinition herangezogen werden, denn schließlich sollte man von dieser ausgehen.

Definition 6.1.1. (Konvergenz von Folgen): „Eine Folge (x_n) reeller Zahlen heißt konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn es für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt: $|x_n - a| < \epsilon$.“ (Plaue/Scherfner 2009, S. 166)

Da aber kaum eine Lehrkraft so eine Definition unterrichten wird und das, im Hinblick auf Verständlichkeit und Einfachheit, auch nicht sinnvoll ist, kann versucht werden, die Definition wie folgt zu verbalisieren. Als korrekte verbale Erklärung der Definition einer konvergenten Folge kann beispielsweise gesagt werden, dass die Folgenglieder dem Grenzwert *schließlich beliebig nahe kommen* (vgl. Plaue/Scherfner 2009, S. 167). Die Formulierung *beliebig nahe* ist zwar für Schüler:innen anfangs sicher schwierig zu verstehen, der Ausdruck kann allerdings erklärt werden, indem man beispielsweise eine Folge mit Grenzwert als Anschauung zeichnet und dann verschieden große ϵ -Umgebungen um den Grenzwert verbildlicht. *Beliebig nahe* bedeutet also einfach, dass die Breite des ϵ -Streifens beliebig sein kann, also so klein werden kann, wie man möchte. Und das Wort *schließlich* sagt hier aus, dass es ab einem gewissen Wert so ist, dass die Folgenglieder nicht mehr aus diesem Streifen heraustreten.

Auch diese Formulierung ist zulässig: Die Folge a_n konvergiert gegen ihren Grenzwert a wenn in jeder ϵ -Umgebung von a alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n liegen. Hier haben wir wiederum den Aspekt, dass es ab einem gewissen Folgenglied sein soll und dass es für jede ϵ -Umgebung geht.

Bender (1991) empfiehlt: Die Folge a_n konvergiert gegen ihren Grenzwert a , „falls in jeder noch so kleinen Umgebung von a ein Hauptstück der Folge liegt.“ (Bender

1991, S. 239) oder weiter „falls das Wesentliche der Folge in jeder noch so kleinen Umgebung von a liegt.“ (Bender 1991, S. 239) Problematisch sei nämlich der Begriff des *Hauptstücks*, da dieser zu ungenau sei. Eher empfehlenswert sei der Begriff des Wesentlichen, da so definiert wird, dass ihm nur „endlich viele Glieder fehlen“. (Bender 1991, S. 239) Hier kommt abermals der wichtige Aspekt zutage, dass es erst ab einem gewissen Wert so sein muss und uns die Folgenglieder davor nicht interessieren.

Eben nicht zulässig sind die Formulierungen, wie sie in den beiden Fehlvorstellungen F4 und F5 zu lesen sind (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 26).

Eine Idee im Unterricht könnte so aussehen: Man vergleicht gute und weniger gute Formulierungen des Folgengrenzwertes und veranschaulicht dann die korrekten Verbalisierungen durch Beispiele konvergenter Folgen. Anhand von Grafiken überlegt man, ob das für alle konvergenten Folgen zutrifft.

Und obwohl das Argument, der Stoff sei für die Matura nicht mehr relevant, natürlich auf viele Schüler:innen zutrifft, so kann es doch sein, dass die Themengebiete beispielsweise für die mündliche Matura oder ein etwaiges Studium danach nützlich sind. Außerdem ist grundsätzlich davon abzugehen, im Unterricht falsche Formulierungen weiterzugeben. Folgen gehören zum Lehrplan, waren schon Teil der Maturakompetenzen und können demnach auch immer wieder ein Teil davon werden.

6.2 Stetigkeit in der Schule

Ein weiteres Thema, welches sich bei der empirischen Befragung als schwierig im Unterricht erwiesen hat, ist das Thema Stetigkeit bei Funktionen. Ähnlich wie bei den Folgen ist es auch hier so, dass es sich um einen heiklen Themenbereich handelt, der Misserfolge im Unterricht schnell sichtbar werden lässt (vgl. Bender 1991, S. 239).

Auch die Stetigkeit wird im aktuellen Grundkompetenzen-Katalog für die schriftliche Reifeprüfung in der AHS nicht angegeben, weshalb dieses Thema im Unterricht oft stiefmütterlich behandelt wird. Zudem sind die meisten Funktionen, die in der Schule bearbeitet werden, ohnehin stetig, weshalb es oft gar nicht weiter notwendig ist, sich damit zu beschäftigen (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 141). Zusätzlich ist die Stetigkeit eine Eigenschaft, die eigentlich nur für innermathematische Betrachtungen wichtig und somit in der Schulanalyse kaum relevant ist. Auch in außermathematischen Kontexten ist das Thema nicht präsent (vgl. Blum/Törner 1983, S. 82).

Man muss jedoch beachten, dass Stetigkeit eine notwendige Eigenschaft ist, damit eine Funktion überhaupt differenzierbar sein kann. Ohnedem wäre also die Beschäftigung mit dem Differenzieren belanglos (vgl. Büchter/Henn 2010, S. 173).

Außerdem soll trotzdem, auch wenn die Differentialrechnung ohne ein umfassendes Verständnis – aus oben genanntem Grund – möglich ist, die Stetigkeit nicht ganz außen vorgelassen werden (vgl. Tietze/Klika/Wolpers 1997, S. 256). Denn wenn beispielsweise abschnittsweise definierte Funktionen im Unterricht behandelt werden, die sehr wohl Teil einiger Modellierungsaufgaben sind, dann ist die Frage nach der Stetigkeit gar nicht unwichtig (vgl. Oldenburg/Weygandt 2015, S. 48). Im Grundkompetenzkatalog für die BHS ist als Punkt 4.1 angeführt: „Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen auf der Basis eines intuitiven Begriffsverständnisses interpretieren und damit argumentieren.“ (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2019a, S. 4) Und um diese Grundkompetenz zu erhalten, ist auf jeden Fall eine intensivere Beschäftigung mit dem Grenzwert und der Stetigkeit notwendig. Zusätzlich wird spezifisch für die HTL nach der Interpretation von Unstetigkeitsstellen gefragt (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2019b, S. 2).

Wir wenden uns nun also drei zentralen Fragen, aufbauend auf Kapitel 4, zu: Was ist Stetigkeit und wie ist eine stetige Funktion überhaupt definiert? Was hat es mit der sogenannten Bleistiftstetigkeit auf sich? Müssen alle unstetigen Funktionen Sprungstellen haben, beziehungsweise was ist überhaupt eine Sprungstelle? In den Interviews wurde in jedem Interviewleitfaden eine Aussage zur Stetigkeit eingearbeitet. Bei diesen stießen einige der Proband:innen selbst auf die gerade eben erwähnten Fragen.

Ähnlich wie beim Folgen- und Grenzwertbegriff ist es auch hier nicht wirklich sinnvoll, mit den fachlichen mathematischen Definitionen in der Schule zu arbeiten und diese den Schüler:innen einfach vorzulegen. Die Schwierigkeit des Lesens der mathematischen Sprache und des Verstehens und Veranschaulichens dieser Definitionen stellt eine Hürde im Mathematikunterricht dar (vgl. Tietze/Klika/Wolpers 1997, S. 252).

Wir definieren stetige Funktionen wie folgt:

Definition 6.2.1. (Stetigkeit einer Funktion): „Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ definiert ist. Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $a \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. f heißt stetig in D , falls f an jeder Stelle von D stetig ist.“ (vgl. Forster/Lindemann 2023, S. 153)

Schon alleine der Umstand, dass eine Funktion nur eine einzige Unstetigkeitsstelle zu besitzen braucht, um demnach als unstetig zu gelten, ist in den Interviews nicht allseits klar gewesen. Dies ist jedoch nichts, was man Schüler:innen nicht erklären könnte. Dieser Teil der Definition sollte also kein Problem darstellen. Viel

eher schwierig ist die Vorstellung der Existenz der Grenzwerte. Diese wird jedoch sogar in Schulbüchern vorausgesetzt und beispielsweise in *Lösungswege 7* oder *Mathematik verstehen 7* in der Definition verwendet (vgl. Freiler et al. 2016, S. 170, vgl. Malle et al. 2019, S. 159). Schüler:innen können unter Umständen auch die Grenzwerte im Unterricht berechnen und sehen, ob sie mit den tatsächlichen Funktionswerten übereinstimmen. Trotzdem wird es schwierig sein, so ein ganzheitlich entwickeltes Bild zum Stetigkeitsbegriff auszubilden. Und vor allem die grafische Darstellung dieser Vorstellung ist nicht leicht möglich. Um sich dieser *Durchgängigkeit* besser bewusst zu werden, ist es sinnvoll auf die $\epsilon - \delta$ -Definition zurückzugreifen, da diese auch grafisch zu veranschaulichen ist.

Definition 6.2.2. ($\epsilon - \delta$ -Definition der Stetigkeit): „Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.“ (vgl. Arend 2017, S. 34)

Wie oben bereits erwähnt, ist es natürlich nicht sinnvoll, Schüler:innen diese Definition einfach zu präsentieren, denn darunter wird sich kaum jemand etwas vorstellen können. Dass selbst Mathematik-Student:innen teilweise Schwierigkeiten beim Verständnis dieser Definition haben, wurde bereits erhoben (vgl. Arend 2017, S. 422 ff.). Es wäre also nicht verwunderlich, wenn auch Schüler:innen mit solchen Konstrukten von Quantoren nicht viel anfangen können. Man kann aber für schulische Zwecke auf folgende vereinfachte Erklärung, basierend auf der $\epsilon - \delta$ -Definition, zurückgreifen. Hier wird mitunter durch die naive Aussage, dass kleine Änderungen von x auch kleinen Änderungen von $f(x)$ entsprächen, argumentiert (vgl. Blum/Törner 1983, S. 83). Mit der nachstehenden Grafik (Abbildung 6.2) kann die Definition gut veranschaulicht werden.

Es wird ersichtlich, dass für ein beliebiges $\epsilon > 0$ um den Funktionswert $f(x_0)$ eine Zone entsteht (gelb markierte Rechtecke), die die Funktion nicht betreten darf, damit sie auch tatsächlich stetig ist. Genauer: Für jedes noch so kleine $\epsilon > 0$ muss es sozusagen einen Sicherheitsabstand δ rund um das Argument x_0 geben, der vorgibt, wo die Funktion verlaufen muss (vgl. Blum/Törner 1983, S. 84). So eine Veranschaulichung kann Schüler:innen eventuell helfen, diese Stetigkeits-Definition zumindest in Ansätzen zu verstehen. Und gerade für Gegenbeispiele mit wilden Oszillationen kann diese Argumentation aufschlussreich sein. Es gibt dabei nämlich keine Sprungstelle oder Ähnliches, wo man gleich erkennen kann, dass die Funktion unstetig ist. Doch mit dieser Veranschaulichung kann man sich gut vorstellen, dass die Funktion dann sehr rasch die gelben Bereiche betreten wird und die Definition somit nicht mehr erfüllt ist.

Bei Greefrath et al. (2016) werden insgesamt drei Grundvorstellungen zum Stetigkeitsbegriff beschrieben. Eine davon ist die *Vorhersagbarkeit*, die folgendes voraus-

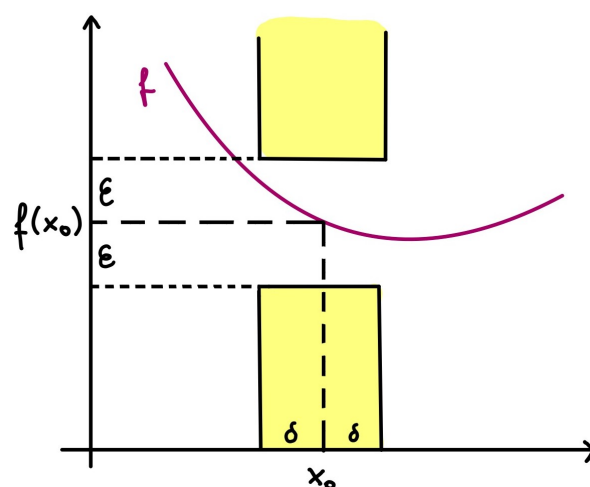


Abb. 6.2 Grafische Darstellung der $\epsilon - \delta$ -Definition

setzt: „Kleine Änderungen der unabhängigen Werte haben nur kleine Änderungen der abhängigen (Funktions-)Werte zur Folge.“ (Greefrath et al. 2016, S. 141) Genau das ist es, was der $\epsilon - \delta$ -Definition zu Grunde liegt und heruntergebrochen auch verständlich für Schüler:innen gemacht werden kann. Es wird außerdem noch darauf hingewiesen, dass Schüler:innen dafür ein genaues Verständnis haben müssen, was *klein* in diesem Sinne bedeutet. Und das stimmt natürlich, denn die Vorstellung des *unendlich oder beliebig Kleinen* kann für den Schulunterricht immer eine Hürde darstellen. Das gilt allerdings für die gesamte Bearbeitung der Differentialrechnung.

Kommen wir nach der Klärung der Definition also zur vermeintlich häufigsten Fehlvorstellung im Zusammenhang mit der Stetigkeit. Viele Schüler:innen hörten in ihrer Schulzeit folgenden Satz: *Eine Funktion ist dann stetig, wenn man sie mit dem Bleistift durchzeichnen kann.* Diese falsche Definition wird oft in der Schule vermittelt (vgl. Büchter/Henn 2010, S. 181). Es ist nicht verwunderlich, viele Menschen würden dem Glauben schenken, zumal auch in Büchern solche Sätze zu lesen sind, wie: „Der Funktionsgraph soll in einem Zug gezeichnet werden können.“ (Plaue/Scherfner 2009, S. 181) Hierbei handelt es sich natürlich um eine sehr anschauliche Beschreibung von stetigen Funktionen. Schüler:innen können sich eine solche Eigenschaft leicht merken und gut vorstellen, was auch der Grund sein wird, warum sie oft so leichtfertig verwendet wird. (Auch die Interviews der Studie haben dies gezeigt, wie in Abschnitt 4.1.3 nachzulesen ist.) Die sogenannte Bleistiftstetigkeit wird laut Greefrath et al. 2016 auch als eine der drei Grundvorstellungen der Stetigkeit genannt.

„Darstellbarkeit: Der Funktionsgraph lässt sich in einem Zug ohne Absetzen zeichnen.“ (Greefrath et al. 2016, S. 141) Und wieder kann nur darauf hingewiesen werden, dass sich die Schüler:innen bewusst sein müssen, in welche Richtung diese Aussage stimmt. Denn bei vielen Funktionen trifft diese Aussage auch zu, jedoch nicht bei allen.

Diese falsche Aussage hat also sehr wohl Grenzen, worauf in der Literatur hingewiesen wird (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 141). Es ist in diesem Fall notwendig, immer kritisch zu hinterfragen, ob es nicht auch Ausnahmen gibt. (vgl. Büchter/Henn 2010, S. 185). Denn es gibt sehr wohl Gegenbeispiele für die in dieser Arbeit vorgekommene Fehlvorstellung F2, wie in Kapitel 5.2 beschrieben. Es gilt also, dass Funktionen, die *durchzeichenbar* sind, sicher stetig sind. Umgekehrt ist dem aber nicht so, was gerade im schulischen Bereich schon klar kommuniziert werden sollte. Die dazu notwendigen Gegenbeispiele mit ihren Vor- und Nachteilen für den Unterricht finden sich in Kapitel 5.2. Problematisch ist hier sicher auch, dass in manchen Schulbüchern Bleistiftstetigkeit sozusagen als Merksatz verwendet wird (vgl. Freiler et al. 2016). Da man sich als Lehrperson ja oft auf das Buch stützt, kann es leicht passieren, dass solche Inhalte dann in den Unterricht geraten. In anderen Büchern wiederum, wie *Mathematik verstehen*, wird dieses Problem thematisiert. Hier wird als Gegenbeispiel für die Bleistiftstetigkeit eine wild oszillierende Funktion angegeben (vgl. Malle et al. 2019).

In einigen Interviews und auch in einer Fehlvorstellung fiel der Begriff der *Sprungstelle*. Wir werden uns nun genauer anschauen, was es damit auf sich hat. Die „Sprungfreiheit“ ist auch eine der drei Grundvorstellungen der Stetigkeit nach Greefrath et al. (2016) und beschreibt, dass der Graph einer stetigen Funktion keine Sprünge besitzen darf (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 141). Eine Sprungstelle wird hier einfach als Unstetigkeitsstelle beschrieben, aber nicht erklärt, was das ist. Und obwohl auch ergänzt wird, dass es Funktionen gibt, die keine prototypische Sprungstelle in diesem Sinne haben und trotzdem unstetig sind (wie beispielsweise die Funktion f mit $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$), so kann hier schnell die Fehlvorstellung entstehen, dass jede unstetige Funktion eine Sprungstelle haben muss. Es muss also darauf geachtet werden, dass diese Grundvorstellung mit Vorsicht behandelt wird. Eine Sprungstelle ist kein Muss für eine unstetige Funktion.

Unstetigkeitsstellen, wie bei den oben beschriebenen Funktionen mit wilden Oszillationen, sogenannte Oszillationsstellen, werden in der Regel nicht als Sprungstellen bezeichnet, da ja nicht wirklich erfasst werden kann, ob und wohin die Funktion „springen“ würde (vgl. Oldenburg/Weygandt 2015, S. 49). Das bedeutet weiterhin, dass man diese Funktionen als sprunfrei einordnen könnte, womit sie nach der Grundvorstellung der Sprungfreiheit stetig wären, was sie aber nicht sind. Das beleuchtet klar die Problematik und Gefahr dieser Grundvorstellung

und zeigt, dass sie mit Vorsicht zu genießen ist.

Und obwohl der Begriff der Sprungstelle oft verwendet wird, findet sich kaum eine handfeste Definition des Begriffes. Aus der Intuition heraus würde man meinen, eine Sprungstelle liegt dort, wo die Funktion plötzlich nach oben oder nach unten springt, sich also der Funktionswert bei einer Stelle stark ändert. Man könnte die Sprungstelle wie folgt definieren:

Definition 6.2.3. Definition (Sprungstelle): „Eine Funktion f besitzt in x_0 eine Sprungstelle, falls die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $L := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_0 - h)$, $R := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_0 + h)$ existieren und verschieden sind.“
(Oldenburg/Weygandt 2015, S. 49)

Wenn Schüler:innen im Unterricht auch Grenzwerte berechnen können, ist so eine Definition nichts, was man nicht ansprechen kann. Sie wissen bereits, wie in einigen Schulbüchern zu lesen ist, dass die rechts- und linksseitigen Grenzwerte den Funktionswerten entsprechen müssen, damit eine Funktion an einer Stelle stetig ist.

Ob oder wie viel Zeit man diesem Thema im Unterricht schenkt, sei dahingestellt und schließlich jeder Lehrkraft selbst überlassen. Jedoch sollte man als Lehrperson gewappnet sein, wenn solche Fragen aufkommen. Und dass dies bei Lehrpersonen durchaus relevant ist, zeigen sogar die im Zuge der Arbeit durchgeführten Interviews. Denn in den Interviews wurde zum Thema Sprungstellen beispielsweise mehrfach überlegt, ob etwa auch bei der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ bei der Stelle $p = 0$ eine Sprungstelle vorliegt, oder ob es sich hier um eine Polstelle oder eine andere Unstetigkeitsstelle beziehungsweise überhaupt um eine Unstetigkeitsstelle handelt. Klar ist, dass Polstellen keine Unstetigkeitsstellen sind, da die Stellen ja vom Definitionsbereich ausgeschlossen sind, wie auch in Schulbüchern nachzulesen ist (vgl. Malle et al. 2019, S. 159). Trotzdem ist es interessant, dass solche Stellen auch als Sprungstellen fehlinterpretiert werden, obwohl es eigentlich keine sind. Dieses Thema zeigt, wie viel Bedarf es hier an einfachen und schulgerechten Erklärungen gibt.

Es kann also zusammenfassend gesagt werden, dass eine Funktion mit einer Sprungstelle auf jeden Fall unstetig sein muss. Umgekehrt muss aber nicht jede unstetige Funktion eine Sprungstelle haben, um unstetig zu sein. Es gibt auch andere Arten von Unstetigkeitsstellen, wie beispielsweise Oszillationsstellen. Auch wenn diese in der Schule meist als *exotisch* betrachtet werden (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 141), so kann auch im Unterricht darauf hingewiesen werden, dass es diese anderen Stellen gibt. Für die Erklärung der Stetigkeit ist es oft gar nicht von

Nachteil, sich auf Definitionen stützen zu können und diese auch (zum Teil) in den Unterricht zu integrieren, in den Schulbüchern sind sie immerhin auch zu finden. Und gerade wenn Fragen seitens der Schüler:innen kommen, ist es notwendig, Auskunft geben zu können.

6.3 Monotonie bei Funktionen

Weniger Probleme gab es beim Thema Monotonie von Funktionen, aber auch hier gab es teilweise Schwierigkeiten in den Interviewleitfäden. In den Leitfäden waren eine Fehlvorstellung (F1) und eine richtige Aussage (R1) zu diesem Thema vertreten.

Bei der Fehlvorstellung F1 wurde zwar teilweise richtig erkannt, worum es geht und dann auch ein Gegenbeispiel gefunden, jedoch gab es teilweise auch Schwierigkeiten beim Verstehen, wann eine Funktion streng monoton ist. Hier war manchmal nicht klar, ob auch von einer streng monotonen Funktion gesprochen werden kann, wenn die strenge Monotonie nur abschnittsweise zutrifft. Dass dem nicht so ist, kann ganz einfach mit der Definition abgeklärt werden.

Definition 6.3.1. (streng monoton wachsend/fallend): „Eine Funktion f sei im Intervall I definiert. Dann heißt f streng monoton wachsend (steigend) in I , wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_2 > x_1$ auch $f(x_2) > f(x_1)$ gilt. Analog ist streng monoton fallend definiert.“ (Büchter/Henn 2010, S. 254)

In Kapitel 4.1.1 wurden einige Funktionen angegeben (vgl. etwa die Abbildungen 4.2 oder 4.3), die der obenstehenden Definition nicht entsprechen. Obwohl die Lehrpersonen wussten, dass diese Funktionen dann nur abschnittsweise streng monoton steigend oder fallend sind, so war es für sie unklar, ob man dann im Gesamten nicht doch von einer streng monotonen Funktion sprechen kann. Wenn eine Funktion aber fallende und steigende Abschnitte hat, wie es beispielsweise bei einer Parabel der Fall ist, kann sie gar nicht mehr streng monoton sein.

Monotonie kann ebenso durch die in den Leitfäden abgefragte richtige Aussage R1 beschrieben werden. Wenn die Steigung aller Funktionswerte einer Funktion, also deren erste Ableitung an der jeweiligen Stelle, immer > 0 ist, so ist die Funktion streng monoton steigend (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 136). Auch das widerspricht sich klarerweise mit den unzutreffenden Beispielen aus Kapitel 4.1.1. Denn hier gab es Stellen p mit $f'(p) = 0$ und somit entspricht dies nicht mehr der Definition.

6.4 Untersuchen von Funktionen

6.4.1 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Bei den Fehlvorstellungen zu Bedingungen, die an bestimmten Stellen von Funktionen erfüllt sein müssen, hat es vor allem bei einer gewissen Fehlvorstellung (F6) Schwierigkeiten gegeben. Wir werden also kurz die wichtigsten Bedingungen zusammenfassen und im Anschluss überlegen, wie dies auch in der Schule umgesetzt werden kann.

Vorab muss geklärt werden, was denn nun der Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen ist. Ableitend von der Bedeutung der Wörter ist eine notwendige Bedingung etwas, das notwendig ist, um einen Zustand zu erfüllen. Also eine Bedingung, die, wenn der Zustand eintritt, erfüllt sein muss. Aus Zustand A folgt die notwendige Bedingung B. Im Gegenzug dazu sorgt eine hinreichende Bedingung für die Richtigkeit der Aussage. Wenn die hinreichende Bedingung eintritt, dann ist der Zustand jedenfalls wahr. Aus der hinreichenden Bedingung B folgt sicher Zustand A (van Riel/Vosgerau 2018, S. 44).

Die einfachsten Bedingungen für Extremstellen sind noch recht bekannt, denn beispielsweise Fehlvorstellung F7 wurde von allen Beteiligten als Fehlvorstellung erkannt. Es gilt nämlich:

Satz 6.4.1. (*notwendige Bedingung für Extrema*): Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar und die Zahl $p \in I$ sei eine Extremstelle der Funktion. Dann gilt $f'(p) = 0$.

(vgl. Büchter/Henn 2010, S. 259)

Ein Beweis des Satzes findet sich beispielsweise ebenda bei Büchter/Henn (2010) auf S. 259. So einen in der Schule durchzuführen wäre aber nicht weiter sinnvoll, da sich der obige Satz ohnehin durch die Anschauung ergibt (vgl. Tieze/Klika/Wolpers 1997, S. 272). Obwohl an dieser Stelle angemerkt werden muss, dass uns, wie wir bereits aus dem Kaptiel 6.2 wissen, auch Anschauungen oft täuschen können.

In F7 („Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine lokale Extremstelle der Funktion f .“) wurde genau das Gegenteil abgefragt. Da diese Bedingung aber notwendig und nicht hinreichend ist, funktioniert diese Aussage in diese Richtung nicht, da nicht alle Stellen mit $f'(p) = 0$ Extremstellen sein müssen, es können auch Sattelstellen sein.

Hinreichend wären hier erst folgende Kriterien:

Satz 6.4.2. *(hinreichende Bedingung für Extrema - Vorzeichenwechsel): „Es sei f in einer Umgebung von a differenzierbar und es gelte $f'(a) = 0$. Wenn in dieser Umgebung $f'(x) > 0$ für $x < a$ und $f'(x) < 0$ für $x > a$ gilt (Vorzeichenwechsel der Ableitung von plus nach minus), dann ist a eine isolierte Maximumstelle von f . Die analoge Aussage [...] identifiziert eine isolierte Minimumstelle.“*

(Büchter/Henn 2010, S. 260)

Da bei diesem Kriterium nicht nur eine Stelle untersucht werden muss, sondern eine rechts und eine links der gegebenen Stelle, ist es in der Durchführung etwas aufwendiger als andere Kriterien. Dies kann auch im Unterricht mühsam sein und für unnötige Verwirrungen sorgen (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 139). Trotzdem funktioniert es und für manche Schüler:innen ist es sicher von Vorteil, da man die Bedingung mit dem Vorzeichenwechsel auch grafisch gut nachvollziehen kann. Sie bedient daher einen wichtigen Aspekt im Lernen. Wer lieber den Fokus auf eine Bedingung legen möchte, die nur der Untersuchung einer Stelle bedarf, verwendet zusätzlich folgendes Kriterium.

Satz 6.4.3. *(hinreichende Bedingung für Extrema - zweite Ableitung): „Es sei f in einer Umgebung von a zweimal differenzierbar. Weiter seien $f'(a) = 0$ und $f''(a) \neq 0$. Dann ist a eine isolierte Extremstelle. Genauer ist a eine isolierte Maximumstelle, falls $f''(a) < 0$, und eine isolierte Minimumstelle, falls $f''(a) > 0$.“*

(Büchter/Henn 2010, S.2 61)

Die Beweise dazu finden sich ebenda bei Büchter/Henn (2010) auf den Seiten 260 und 261. Genau auf die hinreichende Bedingung mit der zweiten Ableitung zielte die richtige Aussage R2 aus den Leitfäden ab. Diese wurde aber durchwegs auch als richtig identifiziert, ist also erfreulicherweise verbreitet und Lehrpersonen sehr wohl bekannt. Obwohl Lehrkräfte oft viel wissen, so ist es anscheinend nicht einfach, einen genauen Überblick über alle Bedingungen zu haben. Genau dies sollten sich Lehrpersonen daher selbst vor Augen führen. Wichtig ist, dass sowohl Lehrer:innen und dann schlussendlich auch Schüler:innen genau wissen, welche Kriterien eine sichere Aussage liefern und welche Schlüsse sie aus den jeweiligen Kriterien ziehen können.

Auch für Wendestellen gibt es solche Bedingungen, die in den Interviewleitfäden eingearbeitet wurden und jenen der Extrema ähnlich sind. Denn Wendestellen sind definiert durch die Änderung des Monotonieverhaltens der Ableitung der Funktion (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 142).

Satz 6.4.4. *f sei im Intervall I zweimal differenzierbar, und $p \in I$ sei eine Wendestelle. Dann gilt $f''(p) = 0$.*

(vgl. Büchter/Henn 2010, S. 268)

Genau diese Bedingung sollte mit F9 („Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f''(p) = 0$, so handelt es sich bei der Stelle p um eine Wendestelle der Funktion f .“) thematisiert werden. Da es sich um eine notwendige Bedingung handelt, tritt das Ereignis $f''(p) = 0$ nur dann ein, wenn es sich bei p um eine Wendestelle handelt und nicht umgekehrt. Demnach müssen Funktionen, die eine Stelle p mit der Eigenschaft $f''(p) = 0$ besitzen, an dieser Stelle nicht zwingend eine Wendestelle aufzeigen. Um dies abzusichern werden die hinreichenden Bedingungen benötigt.

Satz 6.4.5. *(hinreichende Bedingung für Wendestellen – Vorzeichenwechsel): Ist $f''(p) = 0$ und wechselt f'' bei p das Vorzeichen, so besitzt die Funktion f an der Stelle p eine Wendestelle.*

(vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 143)

Satz 6.4.6. *(hinreichende Bedingung für Wendestellen – dritte Ableitung): Ist $f''(p) = 0$ und $f'''(p) \neq 0$, so hat f an der Stelle p eine Wendestelle.*

(vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 143)

Dieser Satz entspricht wiederum genau der richtigen Aussage R4 aus den Interviewleitfäden, die schlussendlich auch von allen Proband:innen als richtig erkannt werden konnte. Hier herrscht anscheinend also Sicherheit, auch wenn nicht immer klar ist, um welches Kriterium es sich explizit handelt.

6.4.2 Spannungsfeld zwischen Kalkülorientierung und Anwendungen

Ein grundlegendes Problem beim Unterrichten von Analysis, das sich vor allem bei der Untersuchung von Funktionen auf bestimmte Eigenschaften widerspiegelt, ist das Spannungsfeld zwischen dem kalkülorientierten Rechnen und dem Anwenden von Mathematik im Kontext. Im Hinblick auf die drei Grunderfahrungen nach Winter (1996) – (G1) Anwendungen, (G2) Analysis als Theorie, (G3) heuristisches Arbeiten – wird demnach die zweite Grunderfahrung meist in den Vordergrund gestellt. Wichtig sei deshalb, die Analysis als Prozess zu vermitteln

und auf den reinen Aspekt als Kalkül zu verzichten (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 11 f.).

Genau hier begegnen uns auch wieder die Grundvorstellungen für mathematische Begriffe in der Analysis (vgl. Kapitel 2.2). Denn sie sind dazu da, Begriffen eine Bedeutung zu geben und spielen daher eine zentrale Rolle in diesem Spannungsfeld. Genau dieses Spannungsfeld gilt es im Unterricht gut auszubalancieren (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 13 f.). Definitionen und klare Begrifflichkeiten sind beim mathematischen Arbeiten, und gerade in der Schule, wichtig, um Struktur zu behalten und Übersicht zu wahren. Aber auch Ideen und Bilder hinter den leeren Begriffen müssen ausgebildet werden, um der Mathematik näher zu kommen (vgl. Oldenburg/Weygandt 2015, S. 50). Sätze und Kriterien werden oft schematisch angewandt, ohne überhaupt deren Bedeutung zu kennen und wieso sie funktionieren. Auch dies spiegelt die Orientierung am Kalkül wider und birgt die Gefahr, dass Schüler:innen keinen Bezug mehr zu der Mathematik hinter den Formeln haben (vgl. Blum/Törner 1983, S. 139 f.).

Hierbei handelt es sich natürlich um ein Problem in der Mathematikdidaktik allgemein. Nun ist aber, um den Bezug zum Thema dieser Arbeit herzustellen, gerade bei der sogenannten Kurvendiskussion die zweite Winter'sche Grunderfahrung besonders ausgeprägt. Aus mathematischer Sicht wird kritisiert, was denn diese Berechnungen in der Schule überhaupt verloren hätten, da sie auch stupide von einem CAS-System übernommen werden könnten und kaum Bezug zu Anwendungen spürbar wäre (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 132). (Wir sehen selbst, dass die Benutzung von Technologie immer mehr Platz in diesem Themengebiet einnimmt.) Andererseits ist es seitens der Schüler:innen (und auch mancher Lehrer:innen) ein dankbares Thema, da es klare Aufgaben und Sicherheit gibt, was zu machen ist. Doch es bleibt trotzdem „das Gefühl mangelnder Tiefe und unzureichender Sinnstiftung.“ (Danckwerts/Vogel 2006, S. 134)

Nach einer klaren Übersicht, welche Kriterien es für spezielle Stellen in den Definitionsbereichen von Funktionen gibt (vgl. Kapitel 6.4.1), ist es also wichtig, die Grundvorstellungen für einen gelungenen Unterricht (vgl. Kapitel 2.2) nicht aus den Augen zu verlieren. Denn im Grunde genommen drehen sich alle diese Kriterien um den zentralen Begriff der Änderung. Bei Danckwerts/Vogel (2006) werden im Kapitel 5 einige Anwendungsbeispiele gebracht, wie die sogenannte Kurvendiskussion auch mit echten Kontextbeispielen versehen (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 147 ff.) und so ein wenig geöffnet werden kann. Auch wenn diese Beispiele natürlich nicht die einfachsten sind, so ist es trotzdem wichtig, Aufgaben mit Anwendungshintergrund in den Unterricht einfließen zu lassen, damit diese Erfahrung für die Schüler:innen nicht ganz außen vorbleibt und sich die beliebte Frage

im Mathematikunterricht *Wofür brauche ich das später einmal?* immer mehr erübrigt. Vor allem Optimierungs- und Extremwertaufgaben (die in dieser Arbeit nicht explizit behandelt werden) eignen sich dafür. Bei Blum/Törner (1983) wird vorgeschlagen, sich auch immer wieder ohne Differentialrechnung mit den Eigenschaften von Funktionen zu beschäftigen und nicht alles über die Ableitung herauszufinden. So bleibe der Bezug zu elementarerer Rechenmethoden erhalten und es wird mehr Weitblick erlangt (vgl. Blum/Törner 1983, S. 140). Dies ist, auch wenn das Buch nun schon einige Jahre alt ist, sicher eine gute Methode, um nicht immer in dieselben Muster zu verfallen. Beispielsweise bei quadratischen Funktionen ist die Berechnung von Extremstellen auch mittels Berechnung des Scheitelpunktes, also ohne Ableiten, möglich.

6.5 Die Tangente als Schmiegegerade

Das Thema der Tangente an einen Funktionsgraphen wurde jetzt schon ein paar Mal in der Arbeit erwähnt. Aufgrund seiner Relevanz werden wir aber nun noch einen Blick aus der fachdidaktischen Perspektive darauf richten. Die dazu passenden Definitionen der Tangente im geometrischen Sinne (Definition 4.2.1) und der Tangente an einen Funktionsgraphen (Definition 4.2.2) finden sich in Abschnitt 4.2 bei der Auswertung der richtigen Aussagen. Und obwohl die Aussagen zu diesem Gebiet (R3 und F8) fast ausschließlich richtig identifiziert wurden, so gab es doch einiges an Gesprächsstoff (siehe Kapitel 4.1.8 und Kapitel 4.2). Eine befragte Person äußerte sich sogar dazu, dass der Begriff der Tangente in diesem Zusammenhang nicht angebracht sei, da es eben zu Verwirrungen führen könne (vgl. IP07, Z. 34-40). Auch andere Proband:innen hatten Schwierigkeiten mit dem Begriff der Tangente und wiesen auf den Unterschied zu der Definition einer Tangente an einen Kreis hin (vgl. IP10, Z. 48-56).

Die Tangentensteigung ist eine der Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff (vgl. Kapitel 2.2.4). Sie hat den Vorteil, dass sie sehr anschaulich ist und daher sicher viele Schüler:innen anspricht, birgt aber dennoch das Potenzial der Fehlvorstellung F8. Gerade bei der Annäherung der Tangentensteigung durch Sekantensteigungen kann schnell Verwirrung auftreten, da der Unterschied von Sekanten und Tangenten, wie man ihn aus der Unterstufe kennt, bei Funktionen nicht mehr wirklich präsent ist. Da auch die Tangente mehrere Punkte mit dem Funktionsgraphen gemeinsam haben kann, ist diese Approximation mit Vorsicht im Unterricht zu behandeln. Die Vorstellung der Tangente als Stützgerade ist nicht mehr tragfähig und muss nun an eine lokale Vorstellung der Tangente angepasst werden (vgl. Blum/Kirsch 1979, S. 11).

Wenn dies im Unterricht bewusst berücksichtigt wird, sollte das Verwenden der Schmiegegerade keine Probleme verursachen.

6.6 Genauigkeit vs. Anschauung in der Analysis

Ein weiterer Punkt neben dem Spannungsfeld zwischen Anwendung und Kalkül in der Analysis ist die Balance zwischen Genauigkeit und Anschauung. Das Gebiet der Analysis fordert eine gewisse Strenge. Unter manch guten anschaulichen und für den Unterricht brauchbaren Erklärungen leidet aber oft diese Genauigkeit, beziehungsweise Korrektheit der Sachverhalte (vgl. Steinbauer/Kramer/Süß-Stepanic 2022, S. 15). Da dieses Thema nach einigen Interviews aufkam, werden wir kurz einen Blick darauf werfen. Denn viele Lehrpersonen wissen sehr wohl, dass gewisse anschauliche Definitionen (wie zum Beispiel die Bleistiftstetigkeit) nicht streng korrekt sind, verwenden sie aber trotzdem aufgrund der besonders einfach zu merkenden Darstellungsform. „Das Alltagsdenken findet keine bruchlose Fortsetzung in der Analysis.“ (Götz 2013, S. 2) Genau dies stellt eines der Probleme des Analysisunterrichts dar, denn die Analysis kann nicht einfach aus Alltagsgedanken fortgesetzt werden. Sie ist eine „deduktiv geordnete Welt mit eigenen Gesetzen“ (Danckwerts/Vogel 2006, S. 4). Ein Beispiel dafür ist die Notwendigkeit der Vollständigkeit der reellen Zahlen (vgl. Danckwerts/Vogel 2006, S. 4). Da also die Begriffe in der Analysis nicht so natürlich und intuitiv sind, plädieren Blum und Kirsch bereits 1979 für einen Analysisunterricht in Grundkursen, bei dem sich vorerst auf die wichtigsten Methoden und Sätze beschränkt werden soll. Der Grund dafür ist, dass Schüler:innen Begrifflichkeiten aus der Analysis nach der Schule schnell vergessen. Das heißt, es sollte umso mehr auf einen einfachen Aufbau des Unterrichts geachtet werden, indem nur die relevantesten Gebiete in den Mittelpunkt gerückt und diese dafür sinnvoll behandelt werden. Dazu gehört vor allem das Anwenden, aber auch das Interpretieren und Argumentieren im Kontext der Analysis, damit die Grundvorstellungen verankert werden (vgl. Blum/Kirsch 1979, S. 6 f.). Dieses Reduzieren auf die wichtigsten Begriffe sorgte auch zu dieser Zeit schon für Kritik und infolgedessen eine Debatte, was denn jetzt im Analysisunterricht wichtiger sei – die Reduktion auf Anschauliches oder die mathematische Strenge und genaue Behandlung aller Themen (vgl. Blum/Kirsch 1979, S. 3). So wird beispielsweise betont, dass die zentralen Begriffe in der Analysis einfach der Ableitungs- und der Integralbegriff seien, und dass Themen wie die Stetigkeit eher eine Hilfsrolle spielen, die nicht dieselbe Relevanz hat (vgl. Blum/Kirsch 1979, S. 8). Das ist insofern spannend, da es ja gerade Teil dieser Arbeit ist, auch die nebensächlicheren Themen im Analysis-Unterricht ein bisschen aufzuwerten, um sie – zumindest mathematisch korrekt – in Teilen im Unterricht zu behandeln.

Gerade beim Beweisen wird dieses Spannungsfeld zwischen Anschauung und Genauigkeit sichtbar und kann sich in Herausforderung und Unsicherheit der Lehrenden zeigen. Vor allem, dass der mathematisch inhaltliche Kern der Sache getroffen wird, bereitet Schwierigkeiten (vgl. Grundey/Knipping 2022, S. 371). Was denn

nun wichtiger sei – Strenge oder Anschauung – das bleibt schlussendlich trotzdem den Lehrer:innen selbst überlassen. Es sei aber gesagt, dass es empfehlenswert ist, immer auf eine Balance der beiden Pole zu achten. Trotz wichtiger Anschauungen soll die mathematische Korrektheit nicht verschwinden. Ein Fokus auf die zentralen Begriffe soll trotzdem keine relevanten Inhalte auslassen oder vernachlässigen. Dass dieser Diskurs um Strenge und Anschauung bis heute noch nicht abgeschlossen ist, zeigen beispielsweise die Änderungen, die immer wieder in den letzten Jahren sowohl in den Lehrplänen als auch bei den Matura-Grundkompetenzen gemacht wurden.

6.7 Fachliche Kompetenz von Lehrkräften

Das fachliche Wissen ist neben der didaktischen Kompetenz eine der wichtigsten Fähigkeiten, die eine Lehrperson mitbringen, beziehungsweise im Studium und im Beruf erlernen sollte. Es beeinflusst die Handlungskompetenz von Lehrer:innen im Unterricht (vgl. Baumert/Kunter 2006, S. 481). Die Evaluierung dieser Kompetenz ist von großer Relevanz, da sie in weiterer Folge die Ausbildung von Lehrkräften beeinflusst und das Curriculum der Universitäten danach angepasst wird (vgl. Baumert/Kunter 2006, S. 478).

Zwar ist das Bewerten der fachlichen Kompetenz der Lehrkräfte kein zentraler Teil dieser Arbeit, da es hauptsächlich um die Bearbeitung der Gegenbeispiele und daraus resultierenden Thematiken gehen soll, trotzdem ist es aber bei dieser Art von Befragung nicht ganz auszulassen. Außerdem soll mit deren Beschäftigung gerechtfertigt werden, dass eine Auseinandersetzung mit den Themen aus den vorherigen Kapiteln wichtig ist.

Aus der empirischen Untersuchung dieser Arbeit sind einige erfreuliche Ergebnisse hervorgegangen, die durchaus zeigen, dass viele Mathematiklehrpersonen über eine hohe professionelle fachliche Kompetenz verfügen, da viele Aufgaben sowohl von Student:innen als auch von Lehrkräften mit einer gewissen Sicherheit beantwortet werden konnten. Jedoch sind auch einige Schwächen aufgetreten, die anscheinend kollektiv im Mathematikunterricht für Hürden sorgen. Hier zu nennen wären etwa der Umgang mit den Themen Folgen und Stetigkeit, wie in den vorherigen Kapiteln bereits behandelt wurde. Wichtig, um im Unterricht spontan und auch korrekt mit gewissen Situationen umgehen zu können, ist eben diese gerade genannte professionelle Kompetenz. Sie kann dabei helfen, auf Fehlvorstellungen rasch zu reagieren und im Unterricht sicher auftreten zu können (vgl. Eberl 2021, S. 62). Fehlvorstellungen bilden sich nicht nur in der Analysis, auch in der Arithmetik treten oft Fragen auf wie, warum Eins keine Primzahl ist oder warum Minus mal Minus gleich Plus ergibt. Sogar für diese Themen, die schon in der Unterstufe behandelt werden, ist ein Blick in die Hochschulmathematik

notwendig und das sollte für Mathematiklehrpersonen kein Problem darstellen (vgl. Eberl 2021, S. 62 ff.).

Ein Unterschied, der sich auch in dieser Arbeit ein wenig herauskristallisiert hat, ist der Unterschied nach Schultypen. Hierbei gibt es bereits Ergebnisse, dass Lehrkräfte an Gymnasien eine etwas höhere fachliche Kompetenz aufweisen als in anderen Schultypen (vgl. Krauss et al. 2008, S. 251). Auch in unserer empirischen Befragung ist ein Unterschied zwischen Lehrenden in der Mittelschule und Lehrenden am Gymnasium erkennbar. Trotzdem muss bedacht werden, dass die fachliche Kompetenz nicht unmittelbar mit der fachdidaktischen Kompetenz zusammenhängt. Es kann also ein qualitativ hochwertiger didaktischer Unterricht gehalten werden, auch wenn die fachliche Kompetenz nicht so hoch ist, wie vielleicht bei anderen Lehrkräften. Umgekehrt ist es aber meistens so, dass durch das vorhandene Wissen, was Inhalte betrifft, auch meist der Unterricht profitiert, das fachliche Können also die didaktische Kompetenz positiv beeinflusst (vgl. Krauss et al. 2008, S. 251). Das fachdidaktische Wissen wurde in dieser Masterarbeit nicht direkt überprüft, weshalb es nicht sinnvoll ist, hier mögliche Rückschlüsse zu ziehen. Die Wertung über die fachliche Kompetenz wird alleine anhand des Wissens über Gegenbeispiele getätigt, weshalb auch hier nicht von einem ganzheitlichen Ergebnis gesprochen werden kann. Um dies zu erforschen, müssten viele andere Teilbereiche miteinbezogen werden.

Bei den bisherigen Forschungen zu diesem Thema muss gesagt werden, dass quantitative Erhebungen nicht so aussagekräftig waren, da sie den Fokus auf den Zusammenhang zu den Leistungen der Schüler:innen nicht miteinbeziehen, was gerade das Spannende wäre (vgl. Baumert/Kunter 2006, S. 490). Es kann lediglich belegt werden, dass vor allem in der Sekundarstufe hohe fachliche Abschlüsse auch bessere Leistungen der Schüler:innen hervorrufen (vgl. Baumert/Kunter 2006, S. 491). Das bedeutet, dass die Kompetenz der Lehrer:innen, gerade wenn es um komplexe Inhalte geht, von großer Wichtigkeit ist. Dies wiederum zeigt, dass es auch relevant ist, sich mit allen Inhalten im Mathematiklehrplan zu beschäftigen, auch wenn sie beispielsweise in den Grundkompetenzen zur Matura momentan nicht abgefragt werden. Denn hohes fachliches Können kann mit besseren Erklärungen im Allgemeinen einhergehen.

Qualitative Studien sind hier noch aufschlussreicher und zeigen, dass das Wissen, das über den Schulstoff hinausgeht, bei den Lehrkräften stark variiert. Wieder wird aber gezeigt, dass das fachdidaktische Handlungsrepertoire durchaus von einem großen Fachwissen abhängen kann (vgl. Baumert/Kunter 2006, S. 492). Auch hier wird also bestätigt, dass das eigene inhaltliche Verständnis nicht zu vernachlässigen ist. Gesamt besteht aber in diesem Bereich noch Bedarf für weitere Forschungen, vor allem im Hinblick auf die Auswirkungen der fachlichen Kompetenzen von Lehrkräften auf den Unterricht (vgl. Baumert/Kunter 2006, S.

505).

Was die Kompetenz zur Beweisführung im Bereich der Analysis im Unterricht betrifft, so gibt es noch weniger Ergebnisse. Die Kompetenz dafür ist fast nicht erforscht, hier bestünde auf jeden Fall Bedarf. Wichtig sei aber, den Kern der Sache immer im Blick zu haben und selbst ein umfassendes Verständnis von den Beweisen zu haben (vgl. Grundey/Knipping 2022, S. 372 f.). Wir sehen auch hier eine große Relevanz des fachlichen Könnens im Unterricht. Selbstreflexion der eigenen Handlungskompetenzen kann hier beispielsweise helfen, um die eigenen Kompetenzen als Lehrperson weiterzuentwickeln (vgl. Grundey/Knippig 2022, S. 385 f.).

Zusammengefasst handelt es sich hierbei also um ein Thema, das noch relativ wenig erforscht ist. Trotzdem gibt es – wenn auch nicht sehr viele – Ergebnisse, die zeigen, dass die fachliche Handlungskompetenz von Lehrkräften nicht irrelevant im Mathematikunterricht ist und sich durchaus auch auf das fachdidaktische Können auswirkt. Dies bestätigt also die Meinung, sich als Lehrperson immer mit komplexen Themen auseinanderzusetzen, auch wenn sie für den Schulalltag vielleicht nicht ganz so relevant sind. Um den eigenen Horizont zu erweitern und somit bessere spontane Erklärungen im Unterricht liefern zu können, kann es allemal helfen.

7 Schlussfazit und Ausblick

Die Analysis ist ein wichtiger Teil im Lehrplan der Oberstufe und auch für die Matura von großer Bedeutung. Da es sich aber um ein komplexes Stoffgebiet handelt, stoßen Lehrende dabei immer wieder auf Hürden. Diese Masterarbeit sollte sich einem Thema annehmen, das diesbezüglich forscht und anschließend auch Hilfestellungen für Lehrende bietet. Abschließend werden wir nun beleuchten, ob und wie gut (angehende) Lehrkräfte in ihrem Unterricht spontan auf Fehlvorstellungen von Schüler:innen reagieren können. Ob dem so ist, lässt sich nämlich nicht einfach mit Ja oder Nein beantworten, sondern bedarf einer etwas tiefer gehenden Ausführung der theoretischen Inputs und in weiterer Folge der Ergebnisse der Studie. Dass diese Ergebnisse jedenfalls von Bedeutung für den Unterricht und die Mathematikdidaktik sind, soviel sei gesagt.

Basierend auf den Aspekten und Grundvorstellungen in der Analysis, die eine wichtige Grundlage im Unterricht darstellen, wurden mögliche Fehlvorstellungen von Schüler:innen für eine empirische Untersuchung herausgearbeitet. Grundvorstellungen können nämlich – trotz ihrer Relevanz – bei einer unvorsichtigen Behandlung zu Hürden im Mathematikunterricht führen. Wichtig ist es immer, auf eine ganzheitliche und ordentliche Bearbeitung dieser zu achten, damit die Begriffe in der Analysis eine sinnvolle, aber dennoch korrekte Bedeutung erlangen. Fehlvorstellungen entstehen, wenn diese Bedeutungen nicht richtig zugeordnet und gewisse Begriffe somit missverstanden werden. Das führt zu fehlerhaften Vorstellungen bei Schüler:innen, diese sind oft schwer zu identifizieren und wenn einmal manifestiert auch manchmal schwer wieder beiseite zu schaffen. Nach der Diagnose einer solchen Fehlvorstellung benötigt es also ein geeignetes Werkzeug, um die falsch eingprägten Inhalte aus dem Weg zu räumen. Dafür eignet sich besonders ein Gegenbeispiel. Es ist ein simpler Weg in der Mathematikdidaktik, um eine falsche Aussage zu identifizieren und tatsächlich zu widerlegen. Somit ist es oft schnell wirkungsvoll und kann rascher den Kern der Sache vermitteln als ein langer Beweis oder eine komplizierte Rechnung. Gegenbeispiele können auch bereits im elementaren Bereich der Mathematik verwendet werden. Um die Qualität eines Gegenbeispiels zu erkennen, wurde basierend auf einem Artikel von Ableitinger (2023) ein Katalog an Kriterien, die ein gutes Gegenbeispiel haben sollte, angegeben. Dieser sollte später eine wichtige Rolle in der Arbeit spielen. Aufbauend auf die theoretischen Inputs wurde eine empirische Befragung mit

elf Teilnehmer:innen durchgeführt. Mittels eines Kurzfragebogens, der die wichtigsten Daten der Personen erhob, und zwei Interviewleitfäden, sollte untersucht werden, wie (angehende) Lehrpersonen spontan auf die oben beschriebenen Fehlvorstellungen im Unterricht reagieren können. In den Interviews wurden den Lehrpersonen also insgesamt je fünf Fehlvorstellungen und je drei wahre Aussagen vorgelegt. Die Proband:innen mussten dann entscheiden, ob es sich überhaupt um eine Fehlvorstellung handelt und - im Falle einer Fehlvorstellung - ein Gegenbeispiel angeben, um diese zu widerlegen. Dabei wurden alle elf Personen getrennt voneinander in einem Zeitraum von etwa zwei Monaten interviewt.

7.1 **Zusammengefasste Ergebnisse der Interviews**

Wir wollen nun einen Blick auf die abschließenden Erkenntnisse der Erhebung, die sowohl aus den Kurzfragebögen als auch den Interviews mit den Proband:innen hervorgegangen sind, werfen. Zu den persönlichen Daten der einzelnen Personen konnte Folgendes festgestellt werden. Mit höherem Dienstalter muss nicht unbedingt die fachliche Kompetenz steigen. Zwar ist eine verstärkte Sicherheit erkennbar, was gewisse Themen betrifft, jedoch auch weniger Anschluss an Themen, die in der Schule nicht mehr so relevant sind. Hier ist bei den jungen Kolleg:innen, die teilweise noch studieren, bemerkbar geworden, dass die Inhalte aus dem Studium noch mehr präsent sind und gewissen Themen sicherer entgegengetreten werden konnte. Das heißt, insgesamt lässt es sich also nicht ausmachen, ob es eine fachlich stärkere oder schwächere Gruppe gab. Dies wird auch durch Literatur mit größeren Studien zu diesem Inhalt belegt (vgl. Krauss et al. 2008, S. 244).

Gymnasiallehrer:innen haben im Gegensatz zu Lehrer:innen anderer Schultypen eine bessere Selbsteinschätzung abgegeben, die sich auch in den weiteren Interviews bestätigt hat. Generell war die Einschätzung über das eigene Wissen bezüglich der Themen Analysis, Fehlvorstellungen und Gegenbeispiele durchwegs sehr treffend und die meisten Proband:innen konnten im Vorhinein gut abschätzen, wie leicht oder schwer ihnen dieses Thema fällt.

Erfreulich war bei den Selbsteinschätzungen, dass sich die Mehrheit der Proband:innen im Gebiet der Analysis sehr sicher fühlt. Einige der befragten Personen, die bereits in der Schule tätig sind, haben auch angegeben, Gegenbeispiele im Unterricht häufig zu verwenden. Bei den noch studierenden Befragten fiel diese Frage etwas anders aus. Die Teilnehmenden standen der Aussage, Fehlvorstellungen und Gegenbeispiele im Studium bearbeitet zu haben, unterschiedlich zustimmend gegenüber. Es liegt aber hier die Vermutung nahe, dass beispielsweise Gegenbeispiele einfach nicht bewusst als relevantes Mittel wahrgenommen

7.1 Zusammengefasste Ergebnisse der Interviews

werden, denn eine Vorlesung zur Analysis wird ohne Gegenbeispiele nicht auskommen.

Kommen wir also nun zu den Schlüssen, die aus den Interviews hervorgegangen sind. Die Interviewleitfäden wurden jeweils aus fünf Fehlvorstellungen, gemischt mit drei wahren Aussagen zusammengestellt. Beachtlich ist, dass die Proband:innen im Schnitt 5,9, also rund 6 Aussagen als richtig identifizieren konnten. Das bedeutet, die Proband:innen haben richtig entschieden, ob es sich bei einer Fehlvorstellung auch wirklich um eine solche handelt oder nicht. Vor allem die richtigen Aussagen wurden fast ausschließlich auch als solche wahrgenommen und eindeutig erkannt. Dies kann sicherlich auch an den gewählten Aussagen liegen, trotzdem ist es aber als erfreuliches Ergebnis nennenswert.

Bei den Themen der verschiedenen Sätze zeigte sich ein eindeutiger Trend, welche Gebiete sicherer bei den Proband:innen parat sind. Die Aussagen zu den Themen Folgen und Stetigkeit stellten sich als am schwierigsten heraus, zumal hier am längsten und meisten nachgedacht wurde, und auch nicht so gut identifiziert werden konnte, ob es sich um Fehlvorstellungen handelt, im Vergleich zu anderen Aussagen/Fehlvorstellungen. Dies spiegelt genau die Inhalte wider, die auch im Lehrplan und in den Grundkompetenzen wenig bis gar nicht vertreten und somit auch im Schulalltag nicht so präsent sind.

Die restlichen Aussagen zu den Themen Monotonie und Untersuchen von Funktionen wurden zum Teil sehr schnell auch richtig identifiziert und es zeigte sich Bestimmtheit bezüglich der verschiedenen Aufgaben.

Zusätzlich zur Identifikation der Aussagen als richtig oder falsch, sollte zu jeder falschen Aussage ein Gegenbeispiel angegeben werden. Hier waren die Antworten relativ durchwachsen. Zu manchen Fehlvorstellungen gab es eine große Auswahl an Gegenbeispielen, zu anderen wiederum konnte gar keines oder immer nur dasselbe angegeben werden.

Aufbauend auf den Gegenbeispielen, die von den Proband:innen genannt wurden, wurde die Auswahl an Beispielen ergänzt und so zu einem Katalog an für die Schule geeigneten Gegenbeispielen zusammengefasst. Anhand der oben erwähnten Kriterien für ein gutes Gegenbeispiel wurden dann alle diese Gegenbeispiele in Form von Funktionen beziehungsweise Folgen analysiert und somit nach ihrer Qualität bewertet. Ein Gegenbeispiel wird demnach als gut befunden, wenn es möglichst viele dieser Kriterien erfüllen kann. So können Lehrende bei Verwendung des Katalogs gleich erkennen, welche Vor- oder Nachteile verschiedene Gegenbeispiele haben.

In der Literatur finden sich wenige Gegenbeispiele für die Analysis, was das Schulstoffgebiet betrifft. Lediglich für höhere Analysis gibt es Bücher zu Gegenbeispielen (vgl. dafür Appell 2009, Bourchtein/Bourchtein 2015, Gelbaum/Olmsted

7 *Schlussfazit und Ausblick*

1964 und Wise/Hall 1993). Für den schulischen Bereich wäre hier also jedenfalls noch Bedarf, weitere Fehlvorstellungen und passende Gegenbeispiele zusammenzustellen, um möglichst vielen davon im Unterricht professionell zu begegnen und Lehrer:innen Hilfestellungen bieten zu können.

Basierend auf den Interviews wurden zum Abschluss der Arbeit Themen herausgearbeitet, die beim Durchgehen der Leitfäden Fragen aufgeworfen, beziehungsweise Hindernisse dargestellt haben. Wie bereits erwähnt lag der Fokus dabei auf den Gebieten Stetigkeit und Folgen und wie man diese in der Schule behandelt. Hier wurde im ersten Schritt auf genaue Definitionen und Begriffsklärungen geachtet, da es bei den Interviews immer wieder Schwierigkeiten gab, diese spontan abzurufen oder herzuleiten. Die Definitionen wurden auf zweiter Ebene auch immer mit Fokus auf die Schule beleuchtet. Es wurden also die zentralen Begriffe mit schulgerechten Erklärungen zusammengefasst, sodass man sie einerseits mathematisch korrekt und andererseits nicht zu komplex im Unterricht weitergeben kann. Denn im Endeffekt ist diese Brücke zwischen korrekter Fachmathematik und verständlicher didaktischer Aufbereitung ein zentrales Thema, das diese Arbeit versucht darzustellen. Die Kapitel wurden zusätzlich mit Ideen angereichert, die in der Literatur für den Unterricht zu finden sind, um auch immer den Nutzen für (angehende) Lehrende ersichtlich zu machen. Auch die Themen Monotonie, besondere Punkte von Funktionen (Kurvendiskussion) und das Tangentenproblem wurden auf diese Art und Weise behandelt.

Zu guter Letzt kann gesagt werden, dass der Analysisunterricht zentrale Spannungsfelder beinhaltet. Eines davon ist jenes zwischen der Orientierung am Kalkül und anwendungsorientierten Aufgaben. Der Analysis in der Schule wird oft vorgeworfen, aus reinen Kalkülen zu bestehen, also Systemen, die man einfach so, ohne jeglichen Bezug zur Realität und ohne tiefergehendes Verständnis, anwenden kann. Dies ist etwas, das Schüler:innen und auch Lehrer:innen jedoch oft Sicherheit gibt, da klar ist, was zu tun ist. Trotzdem sollte immer darauf geachtet werden, auch hier einen Anknüpfungspunkt zu realen Problemen zu entwickeln und nicht nur reine Rechenaufgaben zu lösen. Das zweite Spannungsfeld spiegelt die Kluft zwischen Genauigkeit, beziehungsweise Strenge und Anschauung wider. Analysis braucht mathematische Korrektheit und auf diese sollte man im Unterricht auf jeden Fall achten. Gleichzeitig brauchen Schüler:innen aber auch anschauliche Objekte, an denen sie gut lernen können. Als Beispiel wäre hier die sogenannte Bleistiftstetigkeit von Funktionen zu nennen. Obwohl sie nicht korrekt ist, so wird sie von vielen Lehrenden im Unterricht weiterverbreitet, einfach, weil es sich um eine anschauliche Beschreibung von Funktionen handelt. Schüler:innen können sich darunter etwas vorstellen. Trotzdem stimmt es nicht, dass eine Funktion nur dann stetig ist, wenn sie mit dem Stift durchgezeichnet

werden kann. Zusammengefasst muss hier also klar sein, dass solche Anschauungen auf jeden Fall verwendet werden können und auch sollen, allerdings unter Darlegung der Grenzen und Ungenauigkeiten dieser Bilder. Es darf die mathematische Genauigkeit nicht darunter leiden und es sollen letztlich korrekte Inhalte vermittelt werden.

Wichtig ist es also bei beiden Spannungsfeldern, sich ihrer bewusst zu sein und zu versuchen, eine gute Balance zwischen beiden Polen herzustellen.

7.2 Ausblick

Es konnte erkannt werden, dass Lehrende Gegenbeispiele, unabhängig vom Themengebiet, im Unterricht verwenden. Auch auf Fehlvorstellungen sind viele aufmerksam und achten darauf, diese rasch zu erkennen. Doch nicht immer ist es so einfach, spontan das passende Gegenbeispiel zu finden. Für Lehrende wäre es hilfreich, Nachschlagewerke zu haben, wo eben diese verankert sind. Für den schulischen Gebrauch gibt es hier noch nicht viel Literatur, darum fehlen teilweise auch die Quellen. Es wäre also auf jeden Fall mehr Forschung notwendig, um viele Gegenbeispiele – auch für andere Fehlvorstellungen – zusammenführen zu können (angelehnt an Kapitel 5 dieser Arbeit).

Weiters wäre es spannend zu untersuchen, ob auch Merkmale, wie Schulstandort oder Ausbildungsstätte einen Einfluss auf die untersuchten Inhalte haben. Hierzu war aber die Versuchsgruppe dieser Arbeit zu klein und man müsste demnach die Anzahl an Proband:innen erhöhen und das Forschungsgebiet auf mehrere Bundesländer erweitern.

Alle Mathematik-Lehramt-Studierenden kommen sicherlich im Studium mit der Didaktik der Analysis in Berührung. Trotzdem wird oft gar nicht die Relevanz der hier erarbeiteten Themen, wie eben Fehlvorstellungen erkannt. Hier wäre es sicher hilfreich für Studierende, konkrete Fehlvorstellungen (wie beispielsweise jene dieser Arbeit) zu untersuchen und eigene Gegenbeispiele zu finden. Denn durch die Selbstkonfrontation mit diesen Situationen bleibt oft mehr hängen, als von einer schon vorgegebenen Lösung zu lernen. Hier könnte man folgenderweise Arbeitsblätter entwickeln, die Studierenden dabei helfen, zu lernen, mit solchen Situationen und auch Fehlvorstellungen im Allgemeinen umzugehen. Es wäre ebenfalls wichtig, alle gelernten Definitionen auch gleich für die Schule herunterzubrechen und sie auf einem einfachen Niveau auch wirklich zu verstehen. Oft scheitert dies nämlich am unverstandenen Formalismus. Anschauliche Grafiken oder Erklärungen können das beheben. Auch für Lehrkräfte, die schon länger im Dienst sind, wären Fortbildungen in diese Richtung empfehlenswert. Die Di-

7 Schlussfazit und Ausblick

stanz zur Universität lässt einige Inhalte – verständlicherweise – verschwinden, da sie im Unterricht nicht so oft gebraucht werden. Dass dafür im Unterrichtsalltag nicht immer Zeit ist, ist auch klar. Trotzdem sollte, so gut es geht immer versucht werden, für Schüler:innen korrekte und gleichzeitig anschauliche Darstellungen zu finden und auch an dem eigenen fachlichen Wissen weiterzuarbeiten, um einen möglichst hochwertigen Analysisunterricht zu gewähren.

Literaturverzeichnis

- [1] Ableitinger, Christoph. *Auf Fehlvorstellungen in der Analysis spontan reagieren können - mit passenden Gegenbeispielen*. preprint, eingereicht und angenommen in: Der Mathematikunterricht, 2023
- [2] Appell, Jürgen. *Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen. Eine Einführung in die Theorie reeller Funktionen*. Springer Verlag: Berlin Heidelberg 2009
- [3] Arend, Stefanie. *Verständnisorientierter Umgang von Mathematikstudierenden mit der $\epsilon - \delta$ -Definition von Stetigkeit*. WTM - Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien: Münster 2017
- [4] Aue, Vera/Humenberger, Hans (Hg.). *Das ist Mathematik 1*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG: Wien 2023
- [5] Baumert, Jürgen/Kunter, Mareike. *Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften*. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaften 9. Jahrgang, 4/2006, S.469-520, 2006
- [6] Bender, Peter. *Zwei „Zugänge“ zum Integral-Begriff?*. In: Mathematica didactica 13/1990, S.102-127
- [7] Bender, Peter. *Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten*. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht Jahrgang 44, 4/1991, S.238 - 243
- [8] Blum, Werner/Kirsch, Arnold *Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis IV*. In: Der Mathematikunterricht Jahrgang 25, 3/1979
- [9] Blum, Werner/Törner, Günter. *Didaktik der Analysis*. Vandenhoeck Ruprecht: Göttingen 1983
- [10] Bourchtein, Andrei/Bourchtein, Ludmila. *CounterExamples. From Elementary Calculus to the Beginnings of Analysis*. CRC Press: Boca Raton 2015
- [11] Büchter, Andreas/Henn, Hans-Wolfgang. *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie*. Springer Spektrum: Berlin-Heidelberg 2010

- [12] Brunner, Esther. *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Springer Spektrum: Berlin-Heidelberg 2014
- [13] Dankwerts, Rainer/Vogel, Dankwart. *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg 2006
- [14] Eberl, Andreas et al. *Inwieweit kann universitäres mathematisches Fachwissen helfen, auf Schüler(fehl)vorstellungen zu reagieren?* In: MNU-Journal 01/2021, S.62-66
- [15] Forster, Otto/Lindemann, Florian. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Springer Spektrum: Wiesbaden 2023 (13. Auflage)
- [16] Freiler, Philipp et al. *Lösungswege 7*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG: Wien 2016
- [17] Gelbaum, Bernard R./Olmsted, John M. H. *Counterexamples in Analysis*. Holden-Day: San Francisco 1964
- [18] Greefrath, Gilbert et al. *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum: Berlin-Heidelberg 2016
- [19] Krauss, Stefan et al. *Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und-Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie*. In: Journal für Mathematik-Didaktik Jahrgang 29 3/4/2008, S. 233–258
- [20] Malle, et al. *Mathematik verstehen 7*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH Co. KG: Wien 2017
- [21] Nitsch, Renate. *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer Spektrum: Wiesbaden 2015
- [22] Oldenburg, Reinhard/Weygandt, Benedikt. *Stille Begriffe sind tief*. In: Der Mathematikunterricht Jahrgang 61, 4/2015, S. 39–50
- [23] Plaue, Matthias/Scherfner, Mike. *Mathematik für das Bachelorstudium I. Grundlagen, lineare Algebra und Analysis*. Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg 2009
- [24] Schons, Christian et al. *Developing a Simulation to Foster Prospective Mathematics Teachers' Diagnostic Competencies: The Effects of Scaffolding*. In: Journal für Mathematik-Didaktik Jahrgang 44 1/2023, S.59 – 82

- [25] Tietze, Uwe-Peter/Klika Manfred/ Wolpers Hans. *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen Didaktik der Analysis*. Friedr. Vieweg Sohn Verlagsgesellschaft mbH: Braunschweig/Wiesbaden 1997
- [26] van Riel, Raphael/Vosgerau, Gottfried. *Aussagen- und Prädikatenlogik. Eine Einführung*. J.B. Metzler, Springer-Verlag GmbH Deutschland: Stuttgart 2018
- [27] vom Hofe, Rudolf. *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum akademischer Verlag: Heidelberg 1995
- [28] Winter, Heinrich. *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61/1996
- [29] Wise, Gary/Hall, Eric B. *Counterexamples in probability and real analysis*. Oxford University Press: New York 1993

Online-Quellen:

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2022): *Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS)*,
URL: Grundkompetenzen AHS (9.2.2024)

Steinbauer, Roland/Kramer, Sonja/Süss-Stepancik, Evelyn (2022): *Schulmathematik Analysis. Vorlesungsskriptum Wintersemester 2022/23*,
URL: Schulmathematik Analysis Vorlesungsskript (12.2.2024)

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2019a): *Mathematische Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern*,
URL: Grundkompetenzen allgemein (13.2.2024)

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2019b): *Schulformspezifische Kompetenzen und Begriffe im Cluster HTL 1*,
URL: Grundkompetenzen HTL (13.2.2024)

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2017): *Schulformspezifische Kompetenzen und Begriffe im Cluster BAfEP/BASOP/BRP (P)*,
URL: Grundkompetenzen BAfEP/BASOP/BRP (13.2.2024)

Rechtsinformationssystem des Bundes RIS (2024): *Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen*,
URL: RIS Lehrplan (13.2.2024)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff	9
2.2	Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff	10
2.3	Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff	12
2.4	Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff	12
2.5	Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Integralbegriff	14
3.1	Richtig beantwortete Aussagen	32
4.1	Funktion f mit $f(x) = x^3$ als Gegenbeispiel für F1	37
4.2	Funktion dritten Grades mit monotonen Intervallabschnitten . . .	38
4.3	Parabel mit monotonen Intervallabschnitten	39
4.4	Funktionen mit Sprüngen an den Unstetigkeitsstellen - sogenannte Sprungfunktionen	40
4.5	Funktion f mit $f = \frac{1}{x}$	41
4.6	Funktion f mit $f = \frac{1}{x}$	43
4.7	Funktion vierten Grades als Gegenbeispiel mit fehlerhaftem Graphen	47
4.8	Skizzen von IP08: Polynomfunktionen dritten oder vierten Grades als Gegenbeispiele für F8	49
4.9	Skizzen von IP09 als Überlegungen für F8	50
4.10	Funktion f mit $f(x) = x^4$ als Gegenbeispiel für F9	51
4.11	Gegenbeispiele für F10 von IP08	53
4.12	Skizze von IP01 - Integral eines bestimmten Intervalls	53
4.13	Skizze von IP09 zu F10	54
4.14	Abschnittsweise definierte Funktion als Gegenbeispiel für F10 . .	55
4.15	Tangente an einen Kreis	57
4.16	Sinusfunktion zur Erläuterung von R3	58
5.1	Funktionen f_i mit $f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^5$ und $f_3(x) = x^7$ als Gegenbeispiele	63

Abbildungsverzeichnis

5.2	Gegenbeispiel für F2	64
5.3	Gegenbeispiel 4/2	67
5.4	Gegenbeispiel 5/1 zu F5	68
5.5	Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2$ als Gegenbeispiel für F8	71
5.6	Sinusfunktion mit Tangenten als Gegenbeispiel für F8	73
5.7	Gegenbeispiel für F10: $\int_{-3}^3 x dx$	75
5.8	Gegenbeispiel für F10: f mit $f(x) = x^2 - 4x$	76
5.9	Integral einer stückweise definierten Funktion als Gegenbeispiel für F10	77
6.1	Annäherung der Hypotenuse durch Treppenstufen	81
6.2	Grafische Darstellung der $\epsilon - \delta$ -Definition	86

Quellen der Abbildungen

Eigens erstellt mit GeoGebra: **4.1, 4.5, 4.15, 4.16, 5.1 - 5.9**

Eigens erstellt mit anderen Programmen (Word, Goodnotes, Latex): **2.1 - 2.5**
(vgl. Greefrath et al. 2016), **3.1, 4.4, 6.1, 6.2**

Scans aus Interviewleitfäden:

4.6, 4.10: vgl. IP07

4.7: vgl. IP06

4.8, 4.11: vgl. IP08

4.9, 4.13, 4.14: vgl. IP09

4.12: vgl. IP01

Tabellenverzeichnis

3.1	Eigenschaften der bereits unterrichtenden Proband:innen	23
3.2	Auswertung Likert-Skala bereits unterrichtender Proband:innen .	24
3.3	Auswertung Likert-Skala noch nicht unterrichtender Proband:innen	26
3.4	Fehlvorstellungen in den Interview-Leitfäden	27
3.5	Richtige Aussagen in den Interview-Leitfäden	28
3.6	Legende Auswertung der Interviewleitfäden	29
3.7	Auswertung Interviewleitfaden 1	29
3.8	Auswertung Interviewleitfaden 2	30

8 Anhang

Kurzfragebogen IP _____

- 1) Alter: ☐ unter 30 Jahre
☐ 30 – 40 Jahre
☐ 41 – 50 Jahre
☐ > 50 Jahre

- 2) Geschlecht: ☐ weiblich ☐ männlich ☐ divers

- 3) Studiert an ☐ Universität Wien ☐ andere: _____

- 4) Höchster universitärer Abschluss:

- ☐ Mag. ☐ MEd ☐ BEd ☐ andere: _____

- 5) Ich unterrichte bereits ☐ ja ☐ nein

Wenn nein, geplanter Unterrichtsstart:

Wenn ja:

- 6) Anzahl der Dienstjahre:

- 7) Wöchentliches Unterrichtsausmaß: _____ davon Mathematik: _____

- 8) Schultyp: ☐ AHS
☐ BHS ☐ HTL ☐ HAK ☐ HLW ☐ andere
☐ MS
☐ andere: _____

- 9) Diese Schulstufe(n) habe ich schon in Mathematik unterrichtet:

- | | | |
|---|---|---|
| ☐ 5. Schulstufe | ☐ 6. Schulstufe | ☐ 7. Schulstufe |
| ☐ 8. Schulstufe | ☐ 9. Schulstufe | ☐ 10. Schulstufe |
| ☐ 11. Schulstufe | ☐ 12. Schulstufe | ☐ 13. Schulstufe |

- 10) Schulstandort in

- ☐ Wien ☐ NÖ ☐ anderes Bundesland

11) Bitte zutreffendes Ankreuzen:

Sehr zutreffend

Gar nicht zutreffend

Ich stoße in meinem Unterricht häufig auf Fehlvorstellungen von Schüler:innen.

□ □ □ □ □

Ich glaube, dass ich gut spontan auf Äußerungen von Schüler:innen reagieren kann.

□ □ □ □ □

In meinem Unterricht nutze ich häufig Gegenbeispiele, um etwas zu erklären.

□ □ □ □ □

Ich fühle mich beim Unterrichten des Fachgebiets
Analysis sicher.

--	--	--	--	--

Punkt 11) Ersatz für noch studierende Proband:innen:

Bitte Zutreffendes ankreuzen:

Sehr zutreffend

Gar nicht zutreffend

Ich fühle mich auf den Mathematikunterricht gut vorbereitet.

Ich fühle mich auf den Mathematikunterricht im Fachgebiet der Analysis gut vorbereitet.

Das Thema „Fehlvorstellungen von Schüler:innen“ ist mir im Laufe des Studiums untergekommen.

□ □ □ □ □

Während des Studiums wurde oft mit Gegenbeispielen als didaktisches Hilfsmittel gearbeitet.

--	--	--	--	--

1 Interview Transkript IP01 (ILF 1)

2 Aufgabe 1: F6

3 **A: Gut, passt. Dann gehen wir's an. Sollen wir der Reihe nach vorgehen? Dann**
4 **starten wir mal mit dem ersten Beispiel. Bitte, was würdest du sagen. Ist es richtig**
5 **oder falsch?**

6 B: Ich würde sagen, dass die Aussage richtig ist. Die erste Ableitung ist null an dieser
7 Stelle und die zweite Ableitung ist null und daher ist es eine Sattelstelle, oder auch
8 genannt Terrassenstelle, von dieser Funktion.

9 **A: Das heißt du würdest sagen, die Aussage ist richtig?**

10 B: Ich würde sagen, die Aussage ist richtig.

11 **A: Das heißt, wenn du das meinst, dann kreuz es bitte einfach an, dass es richtig ist.**

12 B: Dann würde ich's richtig ankreuzen.

13 **A: Genau. Passt. Dann gehen wir einmal weiter. Passt, dann Beispiel zwei.**

14 Aufgabe 2: F2

15 B: Ich würde sagen, die Aussage ist falsch, weil es gibt ja auch Funktionen, so wie eben
16 $\frac{1}{x}$, die Hyperbeln, die haben ja Stellen, die nicht definiert sind. Das ist aber dann nicht
17 automatisch eine Sprungstelle, sondern eben eine nicht definierte Stelle. Also zum
18 Beispiel die Funktion $\frac{1}{x}$ ist an der Stelle 0 nicht definiert und die ist insgesamt nicht
19 stetig. Ja, und hat aus meiner Sicht keine Sprungstelle, sondern eine nicht definierte
20 Stelle. Das ist aber für mich was anderes wie eine Sprungstelle.

21 **A: Das heißt, Definitionsbereich für diese Funktion, wäre?**

22 B: Genau, die reellen Zahlen ohne Null.

23 **A: Und würdest du sagen, ist diese Funktion stetig oder nicht stetig auf ihrem**
24 **Definitionsbereich?**

25 B: Aso, auf ihrem Definitionsbereich ... naja, auf ihrem Definitionsbereich ist sie schon
26 stetig. Naja, sie teilt sich halt in zwei Hälften auf, also eigentlich nicht.

27 **A: Das ist jetzt die Frage. Aber du würdest auf jeden Fall einmal sagen, die Aussage**
28 **ist eine Fehlvorstellung, weil es gibt unstetige Funktionen, wo es quasi keine**
29 **Sprungstelle gibt.**

30 B: Ja. Dann weiter?

31 Aufgabe 3: R1

32 **A: Ja. Beispiel drei.**

33 B: Also die erste Ableitung ist größer null für die x aus dem Intervall (a, b) und dann
34 ist die Funktion streng monoton steigend. Ich hätte jetzt gesagt, das stimmt. Wenn
35 die erste Ableitung größer null ist, dann ist die Funktion streng monoton steigend, die
36 Funktion f .

37 **A: Das heißt die Aussage wäre ...**

38 B: ... ist richtig.

39 **A: Dann bitte ein Kreuzerl machen und dann gehen wir gleich weiter zu Beispiel 4.**

40 Aufgabe 4: F8

41 B: Beispiel 4, würde ich sagen, ist falsch, weil die Tangente berührt zwar den
42 Funktionsgraphen in genau einem Punkt aber theoretisch kann die ja den
43 Funktionsgraphen woanders schon noch schneiden. Das heißt es könnte ja einen
44 zweiten Punkt gemeinsam geben.

45 **A: Fällt dir so eine Funktion ein?**

46 B: Zum Beispiel habe ich da eine Funktion dritten Grades aufgezeichnet, mit einem
47 Hochpunkt und einem Tiefpunkt und dann würde ich eine Tangente im Hochpunkt
48 legen. Eine Tangente im Hochpunkt, die hat die Steigung null und die kann ja den
49 Graphen da nochmal schneiden.

50 **A: Das heißt, sie hätten insgesamt mehr als einen Punkt gemeinsam, die Tangente
51 und die Funktion?**

52 B: Ja, ja.

53 **A: Das passt ja dann eh zusammen mit deiner Vermutung?**

54 B: Mhm, ja, ist falsch.

55 Aufgabe 5: R4

56 **A: Gut dann gehen wir weiter. Beispiel 5.**

57 B: Die zweite Ableitung ist null und die dritte ist ungleich null, dann ist die Stelle p
58 eine Wendestelle. Würde ich sagen ist richtig.

59 **A: Okay, dann bitte das anzukreuzen.**

60 Aufgabe 6: F4

61 B: Beispiel 6. Die konvergente Folge kommt ihrem Grenzwert beliebig nahe, ohne ihn
62 je zu erreichen, würde ich sagen ist richtig.

63 **A: Sagst du richtig?**

64 B: Ja, zum Beispiel ... na gut nein, ich bräuchte ein Gegenbeispiel, das mir jetzt nicht
65 einfällt, wenn ich sage, es ist falsch.

66 **A: Also überlegst du quasi zwischen richtig und falsch?**

67 B: Da bin ich mir überhaupt nicht sicher.

68 **A: Ja, du kannst es gerne sagen, wenn du dir wo nicht sicher bist.**

69 B: Ja, dann bin ich mir überhaupt nicht sicher. Und ich habe eben das im Kopf mit der
70 Epsilon-Umgebung, die man unendlich klein macht. Und wenn man sie unendlich
71 klein macht, sind noch immer unendlich viele Folgenglieder drinnen. Aber bei dieser
72 Aussage bin ich mir definitiv sehr, sehr unsicher. Und bei dieser Aussage möchte ich
73 da jetzt gar nicht ... da bin ich mir nicht sicher.

74 **A: Aber du bist dir zumindest sicher, es gibt Folgen, die diese Aussage quasi erfüllen?**

75 B: Genau, so wie $\frac{1}{x}$.

76 **A: Die Frage ist halt dann, gibt es eine, die es nicht erfüllt, denn dann wäre es falsch.**

77 B: Ich weiß, genau. Ja, das überlege ich gerade. Da bräuchte ich wahrscheinlich länger
78 Zeit zu überlegen. Ja, also da bin ich mir einfach nicht sicher.

79 **A: Okay, das passt auch. Dann mach gerne ein Fragezeichen dazu.**

80 B: Ja, da könnte ich nämlich jetzt nichts mit Sicherheit behaupten, wo ich mir sicher
81 bin.

82 **A: Ist überhaupt kein Problem. Dann gehen wir weiter zu 7.**

83 Aufgabe 7: R2

84 B: Die erste Ableitung ist null und die zweite ist größer null an der Stelle p , dann ist
85 das eine lokale Minimumstelle, also ein Tiefpunkt. Da würde ich sagen, dass das
86 stimmt, also richtig.

87 **A: Dann bitte ankreuzen. Und dann sind wir eh schon beim letzten angekommen.**

88 Aufgabe 8: F10

89 B: Also, dass das bestimmte Integral den Flächeninhalt angibt, stimmt nicht. Das gibt
90 einfach nur eben das bestimmte Integral an. Und wenn jetzt zum Beispiel die Funktion
91 unter der x -Achse ist, in diesem Intervall, dann kriegt man ja fürs Integral einen
92 negativen Wert und dieser negative Wert ist nicht der Flächeninhalt, da müsste man
93 dann den Betrag nehmen, um den Flächeninhalt zu bekommen. Und da habe ich eben
94 auch eine Funktion aufgezeichnet, wo das zu ist. Zum Beispiel hier, also Intervall (a, b)
95 ...

96 **A: Also das wäre da irgendeine Funktion dritten Grades, die die x -Achse schneidet,**
97 **oder?**

98 B: Zum Beispiel, genau. Und wo eben die Werte im Intervall (a, b) quasi unter der x -
99 Achse sind, also im negativen sind in diesem Intervall, weil das Intervall ist ja auch
100 angegeben.

101 **A: Ja, aber wo das jetzt genau ist ...**

102 B: Ja, aber auch sonst, also nein, das ist nicht egal, wenn da a und da b wäre, kriegt
103 man ja einen Wert der nicht stimmt. Da muss man es da teilen, muss den Teil
104 ausrechnen quasi und den Teil und dann zusammenzählen. Also das kann genauso
105 gut da sein.

106 **A: Also das heißt, die Aussage ist, ...**

107 B: Falsch. Auf jeden Fall.

108 **A: Gut passt, magst du nochmal irgendwo drüber schauen?**

109 B: Ja.

110 **A: Also wie gesagt, du kannst auch gerne ausführen, wenn du dir wo wirklich nicht**
111 **sicher bist.**

112 B: [geht über alle Beispiele nochmal drüber und bleibt bei Beispiel 6 hängen.] Aber
113 was ist mir der konvergenten Folge ... es ist ja auch eine Folge 1, 1, 1, 1, ... also das ist
114 ja eine, wie heißt die Folge? Oder was ist mit den Alternierenden? Nein, die sind nicht
115 konvergent, die Alternierenden sind logischerweise nicht konvergent. Und dann gibt's
116 noch diese, die wo alles gleich ist.

117 **A: Was kann die zum Beispiel für einen Wert annehmen?**

118 B: Ja, eben. Die kann nämlich schon, ... ist die konvergent? Ja, weil da sind ja auch
119 unglaublich viele Folgenglieder in den Grenzen der Epsilon-Umgebung. Wie heißt
120 denn die? Konstante Folge, konstante Folge. Eine konstante Folge ... Ja, aber ist eine
121 konstante Folge konvergent? Also wenn eine konstante folge konvergent ist, dann
122 erreicht die Folge den Grenzwert. Unter der Voraussetzung 1, also bei der Folge 1, 1,
123 1, ... - also wenn eine konstante Folge konvergent ist, aber das müsste ich jetzt
124 irgendwo in einem Theoriebuch nachblättern. Ich mein das ließe sich herausfinden,
125 also auf das könnte ich schon draufkommen, mit ein bisschen Recherche. Aber so
126 ohne Recherche würde ich es jetzt nicht hundertprozentig einfach behaupten. Also
127 das wäre mir zu unsicher.

128 **A: Okay, also unter der Voraussetzung – konstante Folge ist konvergent – wäre das**
129 **sozusagen ein Gegenbeispiel?**

130 B: Ja, aber jetzt muss ich nochmal kurz nachdenken über die Definition, weil, wenn
131 ich die Epsilon-Umgebung unendlich klein mache, sind noch immer unendlich viel
132 Folgenglieder da drinnen, und die müssen sich ja nicht unterscheiden laut Definition.
133 Dann würde ich jetzt nämlich fast sagen, dass die Aussage falsch ist, und dass die
134 konstante Folge ein Gegenbeispiel ist. Ich riskiere das jetzt ... [ändert das Kreuzerl am
135 Bogen]. Würde aber auf jeden Fall, bevor ich das irgendeinem Schüler erzähle, noch
136 nachschauen, logischerweise.

137 [bleibt bei Beispiel 2 nochmal hängen und zeichnet eine Funktion] Die wäre stetig,
138 aber nicht differenzierbar. Das ist das Beispiel für etwas anderes. Mit der können wir
139 da nichts anfangen. Ich bleibe jetzt bei dem, ist gut.

140 **A: Passt, super. Dann stoppe ich die Aufnahme.**

1 Transkript IP02 (ILF 2)

2 Aufgabe 1: F7

3 **A: Gut, dann starten wir mit dem ersten Beispiel. Da bitte ich dich einmal zu**
4 **entscheiden, was du denkst. Ist es richtig oder falsch?**

5 B: Also ich denke, dass es sich hierbei um eine falsche Aussage handelt. Man kann
6 sich einfach, also eine x^n -Funktion ist immer sehr praktisch, um sozusagen den
7 Sachverhalt nochmal durchzugehen. Wenn wir uns hier vorstellen die x^3 -Funktion,
8 wenn ich die hier aufzeichne, dann schaut die hier so aus und wenn wir uns
9 überlegen, die Ableitung dieser Funktion ist $3x^2$. Und wenn wir das für 0 einsetzen,
10 dann haben wir dreimal 0 ist gleich 0, wegen dem Produkt-Null-Satz, und das heißt
11 wir haben beim Punkt 0 bei der Ableitung einen Wert von 0. Aber wir wissen, wenn
12 wir uns die Funktion hier anschauen, dass der Punkt 0 kein Extremwert ist, das heißt
13 diese Aussage ist falsch.

14 **A: Mhm, sondern, was ist der Punkt 0?**

15 B: In dem Fall ist es ein Wendepunkt.

16 **A: Passt. Also Aussage falsch – Gegenbeispiel da, okay. Dann gehen wir weiter. Wie**
17 **gesagt, wenn du dann was hinzufügen magst, nachher noch, oder so, das geht**
18 **immer, auf jeden Fall.**

19 Aufgabe 2: R6

20 B: So, das bestimmte Integral einer Funktion kann auch einen negativen Wert
21 annehmen. Da bin ich mir jetzt nicht ganz sicher, muss ich ehrlicherweise gestehen.
22 Weil ich weiß, wenn man ein Integral hat, was die x-Achse schneidet, dann muss man
23 das jeweils in den Teilen sozusagen integrieren, wo halt der Schnittpunkt zur x-Achse
24 ist, und sozusagen wenn man sich einfach das bestimmte Integral ansieht, wo ein Teil
25 oberhalb und der größere Teil unterhalb ist, kann ich mir schon vorstellen, dass er
26 negativ wird. Aber ich bin mir gerade wirklich nicht sicher. Mit, ich sag, fünf Minuten
27 Recherche könnt ich's dir sagen. Aber ohne diese fünf Minuten traue ich mich nicht
28 hundertprozentig sagen, ob das richtig oder falsch ist. Aber im traditionellen Sinne
29 weiß ich, dass man sagt, dass das Integral an und für sich immer positiv ist. Deshalb
30 lernen wir's ja auch so, dass man eben diesen, wenn wir's integrieren, dass wir dann
31 eben aufpassen müssen. Ich glaub ... vielleicht, keine Ahnung.

32 **A: Also hast du eine Tendenz?**

33 B: [überlegt] Ich sage jetzt einfach mal „richtig“, aber ich bin mir wirklich nicht sicher,
34 weil ich’s mir einfach schon lange nicht mehr angeschaut hab. Ja.

35 **A: Oder beziehungsweise, dir würde jetzt einfach kein Gegenbeispiel einfallen,**
36 **oder?**

37 B: Ich denke schon, dass es einen negativen Wert annehmen kann. Also rein
38 mathematisch fällt mir wenig ein, was dagegenspricht. Ich weiß nur, dass wir eben,
39 wenn wir es geometrisch deuten, das Ganze, es ein bisschen komisch ist. Aber wenn
40 wir es einfach rein mathematisch durchgehen, natürlich muss es einen negativen
41 Wert annehmen können. Wenn wir uns irgendeine Funktion in einem Fenster
42 anschauen, halt irgendeine Funktion, die halt keine x ist meinetwegen einfach als
43 Integral. Und wenn wir uns das im Fenster von 0 bis minus, äh, -4 bis -2 oder so
44 anschauen, dann sollte da dann was Negatives rauskommen und damit kann’s
45 eigentlich negativ werden.

46 **A: Okay, also wenn du deine Tendenz hast, kannst du diese Tendenz auch einfach**
47 **ankreuzen.**

48 B: Passt. Also das, ich finde das ist eine „okay“-Argumentation.

49 **A: Alles gut. [lacht] Dann weiter zum dritten Beispiel.**

50 **Aufgabe 3: F3**

51 B: Stetige Funktionen lassen sich durchzeichnen, ohne mit dem Stift abzusetzen.
52 Mhm, ich sage einfach mal richtig. Ich glaube, das war ein bisschen das wie wir es
53 sozusagen ... es ist nicht die formelle Definition, aber es ist das wie man es irgendwie
54 Schüler:innen näherbringen kann, wenn ich es richtig im Kopf habe. Und mir fällt jetzt
55 keine stetige Funktion ein, die nicht sozusagen mit einem Strich gezeichnet werden
56 kann. Sie kann natürlich nicht notwendigerweise überall differenziert werden, aber
57 das ist ja jetzt nicht die Frage hier. Und insofern sage ich, dass das eine richtige
58 Aussage ist.

59 **A: Mhm, okay. Passt.**

60 B: Du musst dich schon wundern, wie ich meine Analysis-Prüfungen beide beim
61 ersten Anlauf geschafft habe. [lacht]

62 **A: [lacht]**

63 **Aufgabe 4: R3**

64 B: Dann gehen wir zum vierten Punkt. Eine Tangente an einen Funktionsgraphen kann
65 mit dem Graph einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben. Sage ich, ist richtig.
66 Wenn ich mir jetzt vorstelle, du nimmst die Sinus-Funktion oder die Cosinus-Funktion
67 und du bist am Maximum, dann hast du da eine Parallele, die immer wieder genau
68 diesen Punkt schneidet, sozusagen halt, in die Unendlichkeit weiter, beispielsweise.
69 Oder du kannst eine Polynomfunktion haben, die so „verwoatagelt“ ist, so eine x^3 -
70 Funktion, wenn du da eine Tangente reinschneidest, unweigerlich schneidet die auch
71 noch irgendeinen anderen Punkt.

72 **A: Okay, perfekt, dann Beispiel 5.**

73 Aufgabe 5: F1

74 B: Beispiel 5, ja das ist auch eine von diesen ... nein, das ist nicht das, Verzeihung.
75 Dann lese ich es mal vor. [liest BSP 5 vor]. Ich bin mir nicht ganz, ganz sicher, was
76 streng monoton heißt, das heißt, immer größer, also ich weiß schon, was es heißt,
77 aber ich bin mir nicht ganz sicher, weil das Beispiel, das ich mir gedacht hätte, ist x^3
78 oder x^5 . Halt irgendeine x hoch ungerades n -Funktion. Weil die sind alle steigend, sie
79 haben eine Stelle, wo die Ableitung null ist, im Nullpunkt. Ich weiß nicht, wie das ist,
80 ob sie dann wirklich in diesem Punkt noch größer wird oder nicht. Ich würde einfach
81 sagen, sie sind streng monoton steigend. Weil sie nicht, weil das halt nur punktuell
82 ist.

83 **A: Also streng monoton steigend ist quasi, wenn der x Wert größer wird, dann wird**
84 **auch der y Wert immer zwingend größer.**

85 B: Ja, dann muss es sozusagen falsch sein. Weil in dem Fall, mein Zweifel war eben
86 der, es ist ja, punktuell haben wir genau einen Punkt, wo die Steigung an und für sich
87 0 ist, aber dadurch, wie du sagst, wir haben ja eine, irgendwo eine Mini-Differenz von
88 x und in dieser Mini-Differenz gibt's dann schon wieder einen Punkt, der wieder
89 kleiner oder größer ist, und damit, ...

90 **A: Und das heißt, Gegenbeispiele wären die, die du eh genannt hast, also x^3 oder**
91 **x^5 .**

92 B: Genau. x^3 oder x^5 sind dann einfach sehr leichte Beispiele, die man da heranziehen
93 kann. Oder sehr anschauliche, wie ich finde. Genau, gut, dann schauen wir weiter.

94 **A: Mhm.**

95 Aufgabe 6: F9

96 B: Beispiel 6. [liest BSP 6 vor]. Das ist auch dieser Klassiker auf den Schüler:innen ganz
97 gerne reinfallen. Aber dem ist nicht so, das ist halt irgendwie ein bisschen so, wir
98 sagen ihnen, ja, wenn das sozusagen, wenn die zweite Ableitung 0 ist, dann hat es
99 halt eine Wendestelle. Aber da muss man sich einfach nur eine von den x^4 , also eine
100 x^n , wobei n gleich gerade ist oder x^{2n} -Funktionen, dann ist es besser abgedeckt,
101 vorstellen. Diese x^{2n} -Funktionen, die haben alle, also alle, die größer als x^2 sind, so,
102 die haben alle eine zweite Ableitung die 0 ist, aber wenn man sich hier den
103 Funktionsgraphen anschaut, hat man hier ein großes U und wir haben ein Minimum,
104 oder halt ein Maximum, wenn der konstante Faktor negativ ist. Und insofern ist das
105 dann falsch.

106 **A: Und eben Gegenbeispiele wären ...**

107 B: Gegenbeispiele wären $x^4, x^6, x^8, \dots$ you name it.

108 **A: Mhm, okay.**

109 Aufgabe 7: F5

110 B: Dann schauen wir weiter. [Liest BSP. 7 vor] Da bin ich mir jetzt nicht ganz sicher
111 gewesen, aber ich glaube, dass es von der Definition her so ist. Also es ist egal, wie
112 viele Folgenglieder davor ab den x -ten Folglied, wird der Abstand irgendwie immer
113 kleiner, oder so. Also er wird nicht nochmal größer danach irgendwie, das ist da der
114 wichtige Punkt, wenn man sich da diese, den Grenzwert, glaub ich mit der Epsilon-
115 Umgebung, glaube ich, ist das dann die Herleitung, definiert. Insofern sage ich einfach
116 mal, das ist richtig. Ansonsten wär's ja nicht ein Grenzwert, wenn es nicht immer
117 näherkommen würde. Wenn es dem Wert nicht immer näherkommt, dann hat es
118 einen anderen Grenzwert bei meiner Argumentation. Das ist überhaupt nicht
119 mathematisch leider. Mit der Epsilon-Umgebung kann man es sicher besser
120 argumentieren. Aber ich bin jetzt ein bisschen wackelig, wie es genau ist.

121 **A: Mhm, du kannst auch gerne, eben, wenn du unsicher bist, gerne auch**
122 **dazuschreiben.**

123 B: Okay, ich bin unsicher. [lacht]

124 **A: [lacht] Genau.**

125 B: Aber ...

126 **A: Aber das heißt, dir würde jetzt kein konkretes Gegenbeispiel einfallen, wo du**
127 **sagst, ... wenn du mal so durchstöberst.**

128 B: Das Einzige, was mir noch einfallen würde, sind so springende Folgen. Aber dann
129 hast du immer noch die Teilfolgen, und die konvergieren ja dann trotzdem auch. Und
130 damit, das wäre das einzige Beispiel, was mir sozusagen ein bisschen einfällt. Und das
131 finde ich, ist nicht wirklich ein gutes Gegenbeispiel und eben aufgrund der Definition
132 mit der Epsilon-Umgebung, bin ich mir sehr sicher, dass das richtig ist, aber nicht ganz
133 sicher.

134 **A: Okay.**

135 Aufgabe 8: R5

136 B: Dann sind wir schon beim letzten Punkt. War ja sehr witzig. So, ein konstanter
137 Faktor bleibt beim Differenzieren einer Funktion immer erhalten. Und das ist auch so.

138 **A: Passt.**

139 B: Also da kann ich gar nicht wirklich mehr dazu sagen, außer das ist halt wirklich so.

140 **A: Okay, super. Magst du noch einmal irgendwas drüber schauen?**

141 B: Nein, nicht wirklich.

1 **Transkript IP03 (ILF2)**

2 **Aufgabe 1: F7**

3 **A: Dann starten wir einmal mit Beispiel 1.**

4 B: Ja.

5 **A: Bitte, gern. Was würdest du einmal sagen, ist das richtig oder falsch und ...?**

6 B: Ja, soll ich die Aufgabenstellung auch nochmal erläutern, oder, das ist eh klar, oder?

7 **A: Nein, musst du nicht.**

8 B: Also, da bin ich mir eigentlich ziemlich sicher, die Aussage ist falsch. Weil ich muss
9 mir ja immer noch die weiteren Ableitungen anschauen, theoretisch könnte es ja sein,
10 dass die zweite Ableitung auch gleich null ist und dann hätte ich einen Sattelpunkt. Ja,
11 und ein Sattelpunkt ist ja an sich keine lokale Extremstelle, damit ...

12 **A: Das heißt, welche Funktion würde dir da einfallen? Du hast eh eine**
13 **aufgezeichnet, beispielsweise ...**

14 B: Ja, also, die einfachste Funktion $f(x) = x^3$.

15 **A: Also das wäre sozusagen ein Gegenbeispiel?**

16 B: Die schaut jetzt, da geht zwar der Sattelpunkt ist dann der Ursprung natürlich.

17 **A: Genau, das wäre da noch mit + ...**

18 B: Genau, oder mit irgendeiner Konstanten nach oben verschoben.

19 **A: Mhm, okay. Das heißt da haben wir gleich einmal ein Gegenbeispiel.**

20 B: Genau, ja.

21 **A: Dann gehen wir gleich weiter. Beispiel 2.**

22 **Aufgabe 2: R6**

23 B: Ja, Beispiel 2. Das bestimmte Integral einer Funktion kann auch einen negativen
24 Wert annehmen, ist meiner Meinung nach richtig. [überlegt] Der einzige Knackpunkt,
25 der da halt immer ist, wenn man quasi den Flächeninhalt unter einer Kurve
26 bestimmen will, was ja bei den meisten Aufgabenstellungen der Fall ist, dann muss
27 man halt immer das dahingehend abändern, dass man den Betrag vom Integral
28 nimmt, um einen positiven Wert zu erhalten, weil ein Flächeninhalt per Definition
29 immer positiv ist. Das ist das einzige Problem. Während, wenn ich irgendwelche
30 physikalischen Anwendungen habe. Da haben wir sogar bei der mündlichen Matura
31 einen Anwendungsfall gehabt, ist mir der Kontext aber jetzt entfallen. CO₂-Gehalt in
32 irgendeinem Teich oder so, wo man sehr wohl auch einen negativen Wert haben kann.

A: Gut, dann gehen wir weiter. Bitte nicht von meinen Reaktionen irritieren lassen, ich versuche einfach neutral zu bleiben. [lacht]

Aufgabe 3: F3

B: [lacht auch] Ja, okay. Ja, bei der Nummer 3 bin ich ein bisschen unsicher, weil das ist schon was, was ich selber auch immer so umgangssprachlich verwende im Unterricht, dass man eben stetige Funktionen durchzeichnen kann, ohne mit einem Stift abzusetzen.

A: Was hast du da für eine aufgezeichnet?

B: Ich habe mir jetzt eine mit einer Polstelle aufgezeichnet, weil ich mir gedacht habe, okay da, wenn ich jetzt hätte, beispielsweise ein $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Funktion hat ja an der Stelle $x=0$ eine Polstelle, also wäre da nicht definiert. Dann hätte ich da, wenn ich sie zeichnen würde, zwei Hyperbel-Äste und müsste den Stift absetzen. Damit ist die natürlich nicht stetig an der Stelle $x=0$. Damit würde ich sagen, sobald ich den Stift absetze, weil ich zum Beispiel eine Polstelle hab, oder eine weitere Variante wäre ja irgendeine Sprungstelle. Da fällt mir ein $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, also die Vorzeichenfunktion, die schaut ja so aus, dass ich da für alle Werte kleiner als 0 denn Funktionswert -1 habe, für alle Werte größer als 0 denn Funktionswert +1 und für 0 den Wert 0, und da muss ich dann natürlicherweise absetzen.

A: Das heißt, die wäre in dem Fall unstetig?

B: Die wäre unstetig.

A: Und die auch?

B: Die ist auch unstetig an der Stelle $x_0 = 0$. Die Frage ist, was ist jetzt da genau gemeint. Wenn ich jetzt sage, okay, die Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann könnte ich ja sagen auf der betrachteten Definitionsmenge ist die Funktion schon stetig, aber trotzdem muss ich den Stift absetzen, um beide Äste zu zeichnen. Also das war das, wo ich mir jetzt ein bisschen unsicher bin. Also wenn man das jetzt so wie eben beschrieben betrachtet müsste ich eigentlich falsch dann ankreuzen, also das ist so ein bisschen ...

A: Also du bist eben dazwischen und quasi, wenn du dir sicher sein kannst, dass die Funktion stetig wäre, dann wär's in dem Fall ein Gegenbeispiel?

B: Ja, genau.

64 **A: Okay, alles klar. Ja passt, also du kannst, sonst mach gerne auch ein Fragezeichen**
65 **dazu. Dann weiß ich das im Endeffekt.**

66 B: Ja, da lese ich dann halt, wenn's so weit ist halt hin und wieder im Buch nochmal
67 genauer nach und überlege mir ... wie bringe ich das jetzt. Also das ist manchmal
68 einfach notwendig.

69 **A: Passt. Dann 4.**

70 Aufgabe 4: R3

71 B: Ja, bei der Aufgabe 4 habe ich mir zuerst gedacht, okay, dieser Zusatz, dass die
72 Tangente EINEN oder mehrere Punkte mit dem Funktionsgraph gemeinsam haben
73 kann, da bin ich mir nicht ganz sicher. Weil wenn ich mir jetzt eine herkömmliche
74 Potenz- oder Polynomfunktion mir vorstelle, dann habe ich eigentlich ja immer nur
75 einen Punkt gemeinsam. Dann habe ich mir überlegt, wenn ich jetzt eine
76 Sinusfunktion beispielsweise hernehme und mir eine Tangente an den Hochpunkt
77 lege, dann habe ich ja sehr wohl sogar, genau genommen, unendlich viele
78 gemeinsame Punkte, nämlich dann alle Hochpunkte. Also insofern müsste das
79 theoretisch richtig sein, ja. Also und es steht ja auch KANN.

80 **A: Ja, es muss nicht.**

81 B: Also müsste es theoretisch stimmen, ja. Genau.

82 **A: Okay, passt.**

83 Aufgabe 5: F1

84 B: Gut, dann die Aufgabe 5. Die Monotonie einer Funktion, der Zusatz streng
85 monoton, da geht's ja immer darum, ob jetzt für alle, also wenn ich jetzt nach der
86 Definition gehe, wenn jetzt für alle $x_1 < x_2$, dann muss ja $f(x_1)$ auch immer kleiner
87 einem $f(x_2)$ sein. Dann wäre es streng monoton wachsend. Ich schreibe es nur kurz
88 dazu ... [schreibt] Und jetzt ist die Frage, wenn f' an der Stelle p gleich 0 ist, wenn ich
89 mir da jetzt eine kleine Skizze mache. Zum Beispiel $f(x) = x^2$, dann hätte ich ja an
90 der Stelle ... jetzt gezeichnet habe ich jetzt $-x^2$, aber der Unterschied ist nicht so
91 riesig, würde das bedeuten, ich habe eine waagrechte Tangente an der Stelle $p = 0$.
92 Ja, okay, wenn ich mir es jetzt nochmal durchlesen, dann kommt es halt immer auf
93 die Bereiche an, und ich sage halt dann immer zu meinen Schülern, ich nehme bei der
94 Definition der Monotonie immer die offenen Intervalle, obwohl im Buch oft die
95 abgeschlossenen sind, weil jetzt in meiner gezeichneten Funktion wäre es ja so: $-\infty$

bis 0 ist es streng monoton wachsend und im Gegenintervall 0 bis $+\infty$ wäre es streng monoton fallend und wenn ich jetzt die offenen Intervalle hernehme, dann wäre ja 0 nicht betroffen. Also wenn ich es so definiere, würde jetzt dieses f' an der Stelle $p=0$ nicht stören.

A: Okay, also wenn man quasi die 0 nicht miteinbezieht?

B: Ja, also deswegen betone ich das im Unterricht eigentlich meistens schon, wenn ich dran denke, dass ich da die offenen Intervalle nehme. Aber interessanterweise in unserem Schulbuch ist das abgeschlossene. Weil ich sage immer, okay, dann müsste es ja dann beides sein an der Stelle 0, ja, also meiner Meinung nach, wenn ich die offenen Intervalle dann nehme, müsste ich eigentlich da falsch ankreuzen. Die Frage ist ...

A: Würde dir noch ein anderes Beispiel einfallen, wo es über die ganze Funktion ginge auch? Dass man sagt, die ist trotzdem streng monoton auf ganz $\mathbb{R}$.

B: Ja, das, ja, wenn ich jetzt so, hätte vom Grad 3. Also $f(x) = x^3$, dann hätte ich ja da auch eine waagrechte Tangente an der Stelle – ich hoffe, es stört nicht, wenn ich da kritzle ... [lacht].

A: Nein, überhaupt kein Problem. Gerne den Platz ausnutzen.

B: An der Stelle 0 hätte ich eine waagrechte Tangente und trotzdem ist sie laut Definition schon streng monoton steigend. Also muss ich da falsch ankreuzen. Ja ...

A: Also falsch und Gegenbeispiel.

B: Genau, dann wäre das eigentlich das Gegenbeispiel. Aber das ist halt genau so ein Fall, wo ich mir dann denke, für die Schulmathematik ist es vielleicht nicht ganz so wichtig, weil bei den Maturaaufgaben zumindest wäre mir noch nicht aufgefallen, dass das jetzt konkret abgefragt wird. Für die höhere Mathematik ist es natürlich schon ein Unterschied.

A: Mhm, verstehe. Okay, alles klar. Dann gehen wir weiter.

Aufgabe 6: F9

B: Ja, das war aus meiner Sicht relativ eindeutig, habe ich mit falsch angekreuzt, weil natürlich in der Schulmathematik ist meistens bis zum Grad drei oder vier, und dann kommt es eher selten vor, dass dann die dritte Ableitung wieder 0 wäre. Aber wenn ich jetzt habe $f(x) = x^4$ beispielweise, wäre dann die dritte Ableitung an der Stelle 0 ja wieder 0, wenn ich das richtig im Kopf habe und ich habe aber keine Wendestelle,

128 weil wenn ich mir da die Parabel anschau, die schmiegt sich da so hübsch an an die
129 x-Achse und ich habe einen Tiefpunkt.

130 **A: Also das wäre quasi schon ein Gegenbeispiel?**

131 B: Genau. Also das ist, man muss dann halt immer, wenn eine nächste Ableitung null
132 ist, immer weiterschauen, so lange, bis ich halt eben eine Ableitung hätte, die
133 ungleich 0 ist oder bis ich eben ... ja ... nicht mehr die Möglichkeit habe abzuleiten,
134 dann ist es sowieso zu Ende. Ja, also aus meiner Sicht unproblematisch.

135 **A: Ja, passt. Gut, super. Dann gehen wir weiter.**

136 Aufgabe 7: F5

137 B: Ja, hier konvergente Folge, Folgen tun wir ja nicht mehr so genau unterrichten.
138 [lacht]

139 **A: Ja, also das ist das, was ein bisschen raussticht vom Schulstoff.**

140 B: Aber bis vor kurzem schon. Da habe ich ans Delta-Epsilon-Kriterium gedacht, was
141 ich natürlich den Schülerinnen nicht erkläre. Meiner Meinung nach richtig, weil
142 Grenzwert heißt ja, ich komme diesem Wert a eben immer näher, sofern die Folge
143 konvergent ist. Ja. Hätte ich daher kein Gegenbeispiel.

144 **A: Okay.**

145 B: Selbst wenn ich eine divergente Folge mit zwei Häufungspunkten hätte, die ist ja
146 dann eben divergent und nicht konvergent.

147 **A: Ja, eben, also es bezieht sich hier wirklich auf konvergente Folgen.**

148 B: Ja, also, von dem her auch relativ eindeutig.

149 Aufgabe 8: R5

150 B: Ja, konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren immer erhalten ist meiner
151 Meinung nach richtig. Also, wenn ich richtig ankreuze, brauche ich ja kein
152 Gegenbeispiel. Aber da würde ich dann mit einem Beispiel nochmal argumentieren,
153 wo ich einfach mit konkreten Funktionen und Zahlen mir das anschauen würde. Ja,
154 genau.

155 **A: Okay, passt. Dann magst du noch einmal durchschauen ob für dich sonst so alles
156 passt, oder ob du noch irgendwas hinzufügen willst oder ...**

157 B: [schaut noch einmal drüber] Das war für mich eindeutig, das war aus meiner Sicht
158 auch eindeutig, da war eben die Frage mit den Polstellen, genau.

159 **A: Ja, wo wir eh drüber gesprochen haben.**

160 B: Das war eigentlich dann auch mit dem Sinusbeispiel eindeutig, dann haben wir da
161 ein Gegenbeispiel gefunden, da habe ich mich nochmal umentschieden. Ja ... sollte
162 passen. Das war eigentlich auch logisch ... nein, würde ich jetzt eigentlich so belassen.
163 **A: Okay, super, dann beende ich.**

1 Transkript IP04 (ILF2)

2 Aufgabe 1: F7

3 **A: Dann starte ich. Du kannst gerne auch ausführen, wo du dir was dabei gedacht**
4 **hast. Dann starten wir mit Beispiel 1. Was würdest du sagen, ist die Aussage falsch**
5 **oder richtig?**

6 B: Ja, nach der Frage 5 oder 6, wo das mit f'' war, ist mir eingefallen, dass es
7 Sattelpunkte gibt, darum habe ich jetzt gemeint, dass die Aussage falsch ist. Im ersten
8 Moment habe ich es auch richtig gehabt, weil das die übliche Regel ist, $f'(p) = 0$, für
9 die Extremstelle, aber es gibt eben Ausnahmen, der Sattelpunkt.

10 **A: Zum Beispiel? Du hast ja eine Funktion aufgezeichnet.**

11 B: Eine Potenzfunktion.

12 **A: Was wäre das für ein Grad zum Beispiel?**

13 B: $x^3, x^5, x^7, \dots$ das wär so etwas.

14 Aufgabe 2: R6

15 **A: Okay, super, alles klar. Dann gehen wir gleich weiter zur zweiten Aussage mit dem**
16 **Integral. Was würdest du da sagen?**

17 B: Dass die Aussage richtig ist, weil wenn der Funktionsgraph unter der x -Achse liegt,
18 krieg ich einen negativen Wert.

19 **A: Okay, mhm.**

20 B: Also weil wenn man das dann summiert, kriegt man 0 und man muss eben das
21 bedenken oder man nimmt halt den Betrag.

22 **A: Mhm, okay.**

23 Aufgabe 3: F3

24 B: Stetige Funktionen lassen sich durchzeichnen, ohne mit dem Stift abzusetzen. Da
25 war ich kurz ... [lacht]. Ich weiß, nämlich die Betragsfunktion ist nicht differenzierbar,
26 weil sie da die Spitze hat, ist aber stetig, weil ich durchzeichnen kann, ich muss nicht
27 absetzen, ich habe keine Sprungstelle drinnen. Das ist das, was abgespeichert ist.

28 **A: Okay, das heißt, du würdest meinen, dass es stimmt bzw. es gibt Funktionen, die**
29 **stetig sind, die sich durchzeichnen lassen?**

30 B: Na, ich glaube, das ist eine Eigenschaft, dass stetige Funktionen sich mit einem Stift
31 durchzeichnen lassen.

32 **A: Das ist jetzt die Frage.**

33 B: Ja, nein, also ich glaube das ist sozusagen ... Ich habe zuerst überlegt, ich kann jetzt
34 nicht die Definition exakt wiedergeben für stetige Funktionen. Aber es ist auch das,
35 was ich immer wieder den Schülern sag, und Schülerinnen, weil man sich das
36 vorstellen kann. Ja, und nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, glaube ich. Ist
37 auch eine Aussage.

38 **A: Ja genau, das ist wieder etwas anderes. Wunderbar, dann das vierte. Die**
39 **Tangente.**

40 Aufgabe 4: R3

41 B: Ja, eine Tangente kann mit einem Funktionsgraphen einen oder mehrere Punkte
42 gemeinsam haben. Sie hat sicher den Berührungspunkt gemeinsam, aber wenn sie so
43 liegt, dass die Tangente den Graphen auch noch an einer anderen Stelle schneidet,
44 hat man da einen Schnittpunkt und damit einen gemeinsamen Punkt.

45 **A: Genau, du hast da auch eine Funktion aufgezeichnet. Also zum Beispiel bei einer**
46 **Funktion dritten Grades, oder?**

47 B: Ja, genau.

48 **A: Super, dann gehen wir weiter. Beispiel 5.**

49 Aufgabe 5: F1

50 B: Das war das, im Kontext mit dem ersten Beispiel, da bin ich dann darauf gestoßen,
51 dass man hier den, dass mir eingefallen ist, dass es eben ... achso, nein, Moment, das
52 habe ich jetzt verwechselt. Mit dem, das war differenzierbar und mit streng monoton.
53 Das ist eine falsche Aussage, weil auch wieder eine Polynomfunktion, da habe ich
54 Extremstellen, da ist $f'(p) = 0$ und trotzdem habe ich zur Extremstelle hin und von
55 der Extremstelle weg jeweils streng monotonen Verhalten, je nachdem, ob es ein
56 Hoch- oder Tiefpunkt ist.

57 **A: Passt. Das nächste.**

58 Aufgabe 6: F9

59 B: Das war jetzt das nächste, wo ich zuerst das verwechselt habe. Also da mit $f''(p) =$
60 0 , so handelt es sich bei der Stelle p um eine Wendestelle der Funktion. Da ist mir der
61 Sattelpunkt eingefallen, wo das nicht, also da ist eben diese Eigenschaft, dass ich eben
62 $f''(p) = 0$ habe, $f''(p) = 0$, also dass da eine Mischung ist. Aber ich bin schon
63 gespannt auf die Auflösung.

64 **A: Aber du würdest sagen, es ist falsch? Es gibt also welche, wo eben die zweite**
65 **Ableitung gleich null ist und es ist dann keine Wendestelle?**

66 B: Es ist falsch. Ja, genau.

67 Aufgabe 7: F5

68 B: [liest BSP. 7 vor]. Also eine konvergente Folge hat einen Grenzwert und von daher
69 ist die Aussage richtig.

70 **A: Okay. Passt, dann sind wir schon beim letzten. Nummer 8.**

71 Aufgabe 8: R5

72 B: Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren einer Funktion immer erhalten.
73 D.h. Mir ist bewusst geworden, also da fehlt die Formelsammlung, also das
74 Regelwerk.

75 **A: Aber du hast hier ja ein schönes Beispiel ausgeführt.**

76 B: Genau, ich habe es halt ausprobiert mit einer linearen Funktion und einer
77 quadratischen Funktion und festgestellt, dass die Aussage richtig ist. Aber auch, ja ...
78 mit den besonderen Differenzierungsregeln für andere Funktionen, ja ... ich habe es
79 halt jetzt nur mit Polynomfunktionen gezeigt.

80 **A: Okay, alles klar. Magst du noch einmal durchschauen, noch irgendetwas**
81 **hinzufügen?**

82 B: Nein, ich lasse das jetzt so. [lacht]

83 **A: Passt. Wunderbar.**

1 **Transkript IP05 (ILF 1)**

2 **Aufgabe 1: F6**

3 **A: Dann starten wir mit dem ersten Beispiel. Was würdest du dazu sagen?**

4 B: Ich habe mir jetzt im ersten Moment gedacht, dass es stimmen müsste, weil, ja,
5 wenn die erste Ableitung null ist, dann ist es ja irgendwie entweder ein Maximum
6 oder ein Minimum. Zweite Ableitung ist ja eigentlich ein Wendepunkt und dann hat
7 man ja diese Sattelstelle, wo es ruht. Kann aber sein, dass die dritte Ableitung das
8 noch irgendwie beeinflusst, das habe ich mir jetzt nicht näher überlegt. [lacht]

9 **A: Mhm, also du müsstest quasi noch die dritte Ableitung prüfen, sozusagen, oder**
10 **wie würdest du das machen?**

11 B: [lacht] Ich glaube schon.

12 **A: Bitte nicht verwirren lassen von mir. Ich versuche, neutral zu bleiben.**

13 B: Nein, nein, eh. Also ich hätte es jetzt im ersten Moment nicht geglaubt, aber wie
14 ich dann die weiteren Beispiele gesehen habe mit der dritten Ableitung, war ich mir
15 nicht mehr ganz sicher, ob ich da vielleicht auch noch etwas überprüfen müsste, damit
16 es nicht irgendeine Ausnahme ist.

17 **A: Mhm, also würdest du sozusagen sagen, es gibt Funktionen, wo das zutrifft, aber**
18 **du bist dir nicht sicher, ob es welche gibt, wo es nicht zutrifft?**

19 B: Genau. Also es gibt auf jeden Fall Funktionen, wo das zutreffen müsste. Wenn die
20 erste und zweite Ableitung null ist, dass das eine Sattelstelle ist.

21 **A: Okay, also quasi im Überlegen – müsstest du einfach nachschauen, ob es da etwas**
22 **gibt?**

23 B: Ja.

24 **A: Dann, du kannst auch gerne in der Mitte kreuzen oder ein Fragezeichen dazu**
25 **machen. Oder schreib gerne etwas dazu, dritte Ableitung oder so.**

26 B: Ja, ich würde mal eher das einringen, aber ...

27 **Aufgabe 2: F2**

28 **A: Aber mit Fragezeichen. Okay. Ja, perfekt, passt. Dann gehen wir einmal weiter.**

29 **Zweite Aussage ... was würdest du sagen?**

30 B: Ja, ich habe mir jetzt gedacht, man weiß ja nichts über den Definitionsbereich
31 dieser Funktionen. Weil wenn man jetzt, keine Ahnung, zum Beispiel die
32 Logarithmusfunktion hernimmt und die halt nur in einem gewissen Intervall definiert,

33 dann hat sie ja gar keine Sprungstelle, weil dann ist sie zwar unstetig, meiner Meinung
34 nach ... [lacht], aber hat keine Sprungstelle. Also ich glaube, dass die Aussage nicht
35 stimmt.

36 **A: Also du glaubst, es ist falsch?**

37 B: Mhm.

38 **A: Also du sagst, es gibt Funktionen, die unstetig sind, aber keine Sprungstelle**
39 **haben. Das wäre sozusagen das Gegenteil.**

40 B: Ja, aber jetzt überlege ich gerade. Wenn sie sich wo annähert, heißt es nicht
41 automatisch, dass es unstetig ist, meiner Meinung nach. Drum stimmt es vielleicht
42 doch nicht, also meine vorherige Überlegung.

43 **A: Überlege einmal, fällt dir eine Funktion ein, die unstetig ist und die eben einfach**
44 **keine Sprungstelle hat? Auf das läuft es quasi hinaus ...**

45 B: Ja, es wird wahrscheinlich eine geben, aber ich habe gerade keine Ahnung.

46 **A: Also du glaubst, es gibt eine.**

47 B: Ich denke schon, aber ich habe jetzt gerade die ganzen unstetigen Funktionen nicht
48 vor mir. [lacht]

49 **A: Ja eh, voll. Das ist eher eh etwas, was bisschen hinausgeht über die jetzige**
50 **Schulmathe. Okay, also eher Tendenz zu „es ist falsch“, weil du sagst, es gibt ein**
51 **Gegenbeispiel, aber ...**

52 B: [lacht] ... es gibt so oft Gegenbeispiele.

53 **A: [lacht] Ja, das ist die Frage ...**

54 B: Ja, schon eher. Also ich würde mir wahrscheinlich einfach gewisse Funktionen, die
55 mir einfallen, anschauen und dann ... aber ich habe die jetzt gerade nicht vor mir.

56 **A: Ja, ja, ist kein Problem. Okay, passt. Dann, magst du vielleicht hier auch eher mit**
57 **Tendenz zu falsch, wäre das dann, oder? Dass du sagst, es gibt wahrscheinlich**
58 **irgendein Gegenbeispiel. Mhm. Okay, passt. Dann gehen wir gleich weiter zum**
59 **Beispiel 3.**

60 Aufgabe 3: R1

61 B: Ich glaube, dass das stimmt, weil es ist ein $>$, es ist kein $\geq$, also müsste es eigentlich
62 streng monoton steigend sein.

63 **A: Wenn die erste Ableitung quasi überall positiv ist?**

64 B: Ja.

65 **A: Okay, passt, dann bitte ankreuzen. Das vierte ...**

66 **Aufgabe 4: F8**

67 B: Die vierte Aussage stimmt fast immer, aber nicht immer. Also es gibt das
68 Gegenbeispiel, meiner Meinung nach, der konstanten Funktion, wo sie ja dann nicht
69 nur einen gemeinsamen Berührungspunkt hat, sondern eben die ganze Funktion ist ja
70 quasi der gemeinsame Berührungspunkt.

71 **A: Okay, also du würdest einmal sagen, es ist auf jeden Fall einmal falsch oder?**

72 B: Ja.

73 **A: Und für ein Gegenbeispiel, fällt dir noch ein zweites Gegenbeispiel sein.**

74 B: Ja, die Funktion, wenn es jetzt wirklich einfach rauf geht, oder runter. Dann ist ja
75 die Tangente auch gleich der Funktion.

76 **A: Quasi gleich der Funktion ... und dann hat es wie viele Berührungspunkt?**

77 B: Unendlich viele.

78 **A: Mhm, okay. Alles klar, das heißt du hast quasi sogar zwei Gegenbeispiele, die das
79 widerlegen?**

80 B: Würde ich schon sagen, ja.

81 **A: Ja, wie gesagt, lass dich nicht von mir verwirren, oder so. Passt. Okay, perfekt,
82 dann gehen wir weiter zu Beispiel Nummer 5.**

83 **Aufgabe 5: R4**

84 B: Was habe ich mir da gedacht? [überlegt] Ja, das stimmt grundsätzlich. Ich habe mir
85 nur überlegt, was ist, wenn die erste Ableitung auch null ist, dann wäre es nämlich
86 eine Sattelstelle. Aber wenn das nicht der Fall ist, dann ist es auf jeden Fall eine
87 Wendestelle. Aber es gibt halt, ich weiß nicht, inwiefern das ... ja, eigentlich
88 unterscheidet man das schon, Wendestelle und Sattelstelle, also stimmt es nicht.

89 **A: Also du sagst quasi, man müsste die erste Ableitung noch zusätzlich überprüfen.**

90 B: Ja, ... dass man sich hundert Prozent ... also es ist sicher ein Wendepunkt, aber man
91 könnte es noch verfeinern, ob es jetzt eine Sattelstelle ist, oder nicht. Aber wenden
92 tut sie sich auf jeden Fall.

93 **A: Okay, verstehe ... also es ist sicher prinzipiell ... naja, aber dann, müsste man dann
94 nicht sagen, dass die Aussage dann sogar stimmt?**

95 B: Eigentlich stimmt es sogar, ja. Aber wenn man jetzt wirklich ...

96 **A: Also, bist du dir sicher, dass es immer eine Wendestelle ist? Weil ob es jetzt eine**
97 **Sattelstelle ist oder nicht, ist ja eigentlich nicht die Frage.**

98 B: Ja, dann ist es Wurst. Ja, hätte ich schon geglaubt. [lacht]

99 **A: Ja, du, wie ...**

100 B: Ja, dann stimmt es eher doch.

101 **A: Eher richtig ... aber trotzdem der Einwand quasi, dass es für die Sattelstelle, nicht**
102 **immer so sein muss?**

103 B: Ja, wie streng man das dann halt unterscheidet. Weil es ist jetzt eine Sattelstelle
104 das gleiche, wie eine Wendestelle, aber, dass es sich wendet ...

105 **A: Ja, das ist eh spannend.**

106 B: [lacht]

107 **A: [lacht auch] Ja, nein, ich verstehe. Okay, passt. Dann, passt. Dann gehen wir**
108 **einmal weiter. Zum sechsten.**

109 **Aufgabe 6: F4**

110 B: [überlegt] Also konvergente Folge, heißt ja, dass es gegen irgendeinen Grenzwert
111 konvergiert, aber dem ... also konvergieren heißt ja, dass es sich bei einem
112 bestimmten kleinen Intervall quasi so annähert, dass man das als Grenzwert
113 annimmt, annehmen kann. Aber halt quasi wirklich beliebig nah kommt, also ich
114 glaube schon, dass es stimmt.

115 **A: Mhm, also fällt dir jetzt kein Beispiel irgendwie ein, wo du sagst, nein, da ist das**
116 **eigentlich nicht so, dass quasi der ... weil ich meine da ist ja auch der Zusatz**
117 **irgendwie dabei, dass es auch den Grenzwert nie erreicht.**

118 B: Mhm, na es kann schon sein, dass es solche Beispiele gibt, aber die habe ich jetzt
119 auch nicht parat. [lacht]

120 **A: Also du würdest eher sagen, ja.**

121 B: Ja, eher schon. Aber es kann schon sein, dass es ...

122 **A: Auch mit ein bisschen einem Fragezeichen?**

123 B: Ja.

124 **A: Ich meine, du kannst auch noch ein bisschen nachdenken, vielleicht fällt dir noch**
125 **etwas ein. Gehe einmal durch, ein paar Folgen...**

126 B: Nein. [lacht] Also das müsste ich mir echt wieder einmal durchlesen.

127 **A: Ja, eh. Das ist ja auch legitim. Also es ist überhaupt kein Problem ...**

128 B: Also aus dem Nichts fällt mir da jetzt keine ein ...

129 **A: Ja, mhm, okay. Passt. Dann sind wir bei Beispiel 7.**

130 Aufgabe 7: R2

131 B: [überlegt] Ja, wenn die erste Ableitung null ist, dann ist es auf jeden Fall eine
132 Extremstelle. Zweite Ableitung größer als Null müsste ein Minimum sein, weil größer
133 0 ist dieses Smiley. [lacht]

134 **A: Ah ja, voll.**

135 B: Und dann ist es eine Minimumstelle, also das würde stimmen. Ja. Ob global oder
136 lokal ... aber lokal stimmt natürlich immer. Also ist es richtig.

137 **A: Würdest du sagen, es ist richtig. Gibt es also kein Beispiel, wo es nicht so ist?**

138 B: Nicht in meinem Hirn [lacht].

139 **A: [lacht] Okay, passt. Dann sind wir auch schon beim letzten, beim Integral,**
140 **Nummer 8.**

141 Aufgabe 8: F10

142 B: [überlegt] Ich glaube, also grundsätzlich stimmt das schon, dass man wenn man
143 jetzt integriert, dass man dann in diesem Intervall den Flächeninhalt bekommt, aber
144 es ist halt dann zu beachten – ich weiß nicht inwiefern das da jetzt reinspielt – ob das
145 dann auf der positiven oder auf der negativen Seite ist von der x-Achse. Dass man sich
146 dann nicht quasi wieder das weg ... subtrahiert, sozusagen.

147 **A: An welche Funktion denkst du, zum Beispiel? Fällt dir da eine ein?**

148 B: Naja, wenn die irgendwie so herumgeht ... [zeichnet].

149 **A: Ja, so dritten Grades, oder so?**

150 B: Ja, genau. Und dann hat man halt hier, oder das was du integrierst, dann hast du
151 da jeweils den Flächeninhalt, aber musst halt das zweimal aufsplitten. Weil wenn du
152 das Ganze jetzt integrieren würdest, dann hättest du nicht den richtigen
153 Flächeninhalt.

154 **A: Ist die Frage – ist das sozusagen das bestimmte Integral? Ist das das gleiche?**

155 B: [überlegt] ... Nein.

156 **A: Weil das, was du jetzt aufgezeichnet hast, wäre ja quasi schon ein Gegenbeispiel**
157 **dafür, oder?**

158 B: Ja, ja, eh. Aber, warte einmal, das heißt, das bestimmte Integral, mit dem kann man
159 den Flächeninhalt ausrechnen, es ist aber nicht immer identisch.

160 **A: Mit dem Flächeninhalt?**

161 B: Ja. Also stimmt es eigentlich.

162 **A: Okay, mhm. Magst du noch einmal drüber schauen. Nochmal irgendwo**
163 **nachdenken?**

164 B: Es wird, glaube ich, nicht mehr besser. [lacht]

165 **A: [lacht] Ja, es ist überhaupt kein Problem**

166 B: Aber vielleicht bin ich für sowas auch einfach zu unehrgeizig.

167 **A: Ja, das macht ja nichts. Passt, dann stoppe ich.**

1 **Transkript IP06 (ILF1)**

2 **Aufgabe 1: F6**

3 **A: Gut.**

4 B: Soll ich die Frage vorlesen, oder?

5 **A: Musst du nicht unbedingt. Ich sage einfach, wir starten mit dem ersten und ja ...**

6 B: Genau, also da geht es drum, wenn die erste Ableitung null ist und die zweite
7 Ableitung null ist, handelt es sich bei der Stelle p um eine Sattelstelle. Da habe ich
8 falsch, und als Gegenbeispiel eine Funktion $f(x) = x^4$. Weil wenn ich da halt null
9 einsetze, dann würde null rauskommen, weil es keine Sattelstelle ist, sondern es ist
10 ein Maximum.

11 **A: Okay, passt.**

12 **Aufgabe 2: F2**

13 B: Zweite war unstetige Funktionen haben mindestens eine Sprungstelle. Also wenn
14 ich mir jetzt dieses, also wenn ich dieses Argument für unstetige Funktionen
15 hernehme, dann ist es nicht gültig, weil wir haben da gelernt, dass Bleistiftstetigkeit
16 ... entspricht nicht der genauen Definition von mathematischer Stetigkeit. Und ich
17 weiß nicht mehr genau, wie die Funktion war, aber ich glaube es war so $\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ oder
18 so. Und das sind diese oszillierenden Funktionen. Ja ...

19 **A: Sind die stetig, oder nicht?**

20 B: Nein, ist nicht stetig. Und das ist halt, da hat man keine Sprungstelle drin und es ist
21 trotzdem nicht stetig. Also die Aussage funktioniert bei der Funktion zum Beispiel
22 nicht. Und deswegen ist das kein vollends gültiger Merksatz, sozusagen. Oft lernt man
23 halt dann eben, die Sprungfunktion, ich weiß gerade nicht, wie das genau heißt,
24 genau, kennen als Beispiel. Aber das wäre eben ein Gegenbeispiel, dass man die
25 Aussage nicht für voll nehmen kann.

26 **A: Mhm, okay.**

27 **Aufgabe 3: R1**

28 B: Drei. [Liest BSP. 3 vor]. Da habe ich richtig, mir wäre nichts anderes eingefallen.

29 **A: Okay.**

30 **Aufgabe 4: F8**

31 B: 4. Eine Tangente an einen Funktionsgraphen hat mit dem Graphen genau einen
32 Punkt gemeinsam, nämlich den Berührungspunkt. Ich bin mir nicht sicher, ob ich das

33 richtig verstanden habe, aber wenn ich mir jetzt so eine Funktion dritten Grades
34 hernehme und die Tangente durchlege, oder generell, dann schneidet die Tangente
35 ja die Funktion trotzdem noch in einem zweiten Punkt. Also würde ich das jetzt als
36 falsch, wobei ich mir nicht genau sicher bin worauf das abzielt. Aber so, mit der
37 Aussage hätte ich jetzt eben als falsch.

38 **A: Also was wäre das dann jetzt zum Beispiel. Also das wäre ja schon ein**
39 **Gegenbeispiel, oder?**

40 B: Das ist ein Gegenbeispiel, genau. Also die Aussage ist meiner Meinung nach falsch.

41 **A: Also eine Funktion dritten Grades, mit irgendwelchen Parametern?**

42 B: Genau, aber ich bin mir nicht ganz sicher, weil ich so eine Fragestellung irgendwie
43 mit der Tangente nicht in Verbindung gebracht habe, also, ja. Worauf zielt die ab,
44 wenn die Tangente jetzt einen zweiten Schnittpunkt mit der Funktion hat? Aber über
45 das können wir vielleicht noch reden. Aber jetzt als falsch. Und eben Funktion dritten
46 Grades als Gegenbeispiel, zum Beispiel.

47 **A: Okay.**

48 Aufgabe 5: R4

49 B: BSP 5. Das habe ich als richtig, weil das meiner Ansicht nach, die notwendige und
50 hinreichende Bedingung für eine Wendestelle ist, und mir wäre kein anderes Beispiel
51 eingefallen.

52 **A: Okay.**

53 Aufgabe 6: F4

54 B: [liest BSP 6 vor] Das habe ich als falsch, also wenn ich die Aussage hernehme. Weil
55 die konstante Folge, da entspricht der Grenzwert ja genau dem Wert der konstanten
56 Folge, das heißt, sie erreicht den Grenzwert. Ja, also ist auch nicht vollends gültig,
57 sozusagen.

58 **A: Mhm, okay.**

59 Aufgabe 7: R2

60 B: [Liest BSP 7 vor] Das habe ich als richtig. Weil das auch wieder die notwendige und
61 hinreichende Bedingung ist für eine Minimumstelle, eine lokale. Mir wäre kein
62 anderes Beispiel eingefallen, also kein Gegenbeispiel.

63 **A: Okay, alles klar.**

64 Aufgabe 8: F10

65 B: Und das letzte war das bestimmte Integral gibt den Flächeninhalt zwischen dem
66 Graphen der Funktion und der x -Achse in dem Intervall an. Und da habe ich auch als
67 richtig. Weil das, ... ja, eine gültige Interpretation vom Integral ist.

68 **A: Okay, also würde dir da kein Gegenbeispiel einfallen?**

69 B: Nein [lacht].

70 **A: Okay, magst du nochmal drüber schauen, ob du irgendetwas ergänzen magst,**
71 **oder fällt dir noch irgendetwas ein dazu?**

72 B: Ich glaube nicht. Ich glaube, ich bin heute nicht mehr zu ...

73 **A: Ja, alles gut.**

74 B: Für mich ist es okay, ich hoffe, für dich ist es auch okay.

75 **A: Ja, alles klar. Super.**

1 Transkript IP07 (ILF2)

2 Aufgabe 1: F7

3 **A: Passt, dann gehen wir es einmal an. Starten wir einmal mit dem ersten.**

4 B: Ja, genau. Also da ist es um das Differenzieren gegangen, dass die erste Ableitung,
5 wenn die null ist, eine lokale Extremstelle der Funktion f ist. Das ist meiner Meinung
6 nach falsch, weil ich eben bei x^3 haben wir ja eine durchgehende Funktion, die keine
7 lokale Extremstelle aufweist. Und im Punkt 0 ist eben zwar die Steigung null, aber kein
8 lokales, keine lokale Extremstelle.

9 **A: Okay, also du würdest sagen, das ist quasi ein Gegenbeispiel für die Aussage?**

10 B: Ja, genau.

11 **A: Passt. Du weißt, ich sage jetzt nicht richtig oder falsch damit ...**

12 B: Mhm, passt.

13 **A: Ja, wenn du da fertig bist, dann gehen wir zum nächsten.**

14 Aufgabe 2: R6

15 B: Ja, passt. Beim zweiten. Das bestimmte Integral einer Funktion kann auch einen
16 negativen Wert annehmen. Ja, es kann eben wenn eben zu viel Fläche unter der x -
17 Achse ist und zu wenig oberhalb der x -Achse, also im positiven Bereich. Und wenn
18 man das zusammenzählt, dann und nicht richtig integriert dann kommt
19 schlussendlich auch das Negative raus. Also wenn man keine Beträge, etc. setzt.
20 Genau.

21 **A: Alles klar, okay.**

22 Aufgabe 3: F3

23 B: Dann stetige Funktionen lassen sich durchzeichnen, ohne mit dem Stift abzusetzen.
24 Das ist in der Regel eigentlich falsch. In der Schule lernt man das, oder ist das zwar die
25 Regel aber zum Beispiel bei x^{-1} , die hat zwar eine Sprungstelle drinnen, wo man eben
26 den Stift absetzen muss, aber auf dem Definitionsbereich, wo eben die Funktion
27 definiert ist, ist sie stetig. Eben die Problemstelle wäre eben die 0. Ja, 1 durch 0 ergibt
28 keinen Sinn, somit kann ich da sowieso nie stetig sein. Aber auf dem
29 Definitionsbereich ist sie stetig und man muss sich ja auch immer den
30 Definitionsbereich anschauen. Genau.

31 **A: Mhm, okay. Passt.**

32 Aufgabe 4: R3

B: Dann bei der Nummer vier: eine Tangente an einen Funktionsgraphen kann mit dem Graphen einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben. Ich habe jetzt einmal ja angekreuzt, weil eben halt die Tangente an sich im geometrischen Sinne, also hat mit dem Kreis zum Beispiel nur einen einzigen Schnittpunkt, aber wenn ich mir jetzt eine x^3 -Funktion hernehmen zum Beispiel kann ja die Tangente, wenn man sie lang genug zeichnet auch den Funktionsgraphen an mehreren Stellen schneiden aber wird ja trotzdem als Tangente bezeichnet. Also würde ich eigentlich zu dem ja sagen. Obwohl natürlich der Begriff der Tangente ein bisschen ... ja, nicht angebracht ist.

A: Mhm ... okay.

Aufgabe 5: F1

B: Bei der Frage 5, wenn die erste Ableitung null ist für eine Stelle p aus dem Definitionsbereich, dann kann die Funktion nicht mehr streng monoton sein. [überlegt] Streng monoton sein, und nicht streng monoton steigend ... Ich hätte das aber trotzdem als falsch beantwortet, weil x^3 eben ja, wie das Beispiel von vorher, ja ansteigend ist die ganze Zeit, obwohl eben bei 0 eben die erste Ableitung auch null ist. Aber es geht ja trotzdem durch, somit ...

A: Aber es geht ja von dem her trotzdem durch, oder? Weil streng monoton definiert halt nicht ... also streng monoton steigend, ist ja trotzdem streng monoton, also ... von dem her.

B: Ja, genau. Von dem her würde ich falsch sagen, dass die Aussage eben durch das Gegenbeispiel eben widerlegt wird.

A: Ja, ja. Ich verstehe, was du meinst.

Aufgabe 6: F9

B: Genau. Dann zu der Frage, wenn die zweite Ableitung einer Funktion 0 ist, dann handelt es sich bei der Stelle p um eine Wendestelle der Funktion. Das habe ich auch als falsch angekreuzt, weil eben als Gegenbeispiel x^4 . Die schaut ja grundsätzlich wie eine x^2 -Funktion aus, nur ist halt der Unterschied, dass jetzt die zweite Ableitung bei der x^4 auch null sein kann, aber keine Wendestelle eben da ist.

A: Sondern?

B: Ja, ein Tiefpunkt einfach.

A: Genau.

B: Oder je nachdem Tief- oder Hochpunkt. Genau.

65 **A: Mhm, okay, super.**

66 Aufgabe 7: F5

67 B: Dann BSP 7. Da habe ich jetzt ja angekreuzt, weil wenn eine Folge an konvergiert,
68 konvergiert sie ja gegen einen Wert und das ist ja der Grenzwert. Also ja, Schranke
69 oder Grenzwert gegen den die Folge dann schlussendlich geht.

70 **A: Also würde dir sozusagen kein Beispiel einfallen, wo du sagst, es wäre nicht so?**

71 B: Nein, also eine konvergente Folge. Halt, die Vorzeichenmaschine ist ja keine
72 konvergente Folge in dem Sinne, die ist ja ... hat halt zwei Grenzwerte, oder halt, nicht
73 Grenzwerte, aber divergiert, somit konvergiert sie nicht. Und sonst ist mir jetzt auf
74 die Schnelle ehrlich gesagt kein Gegenbeispiel eingefallen.

75 **A: Mhm, okay, passt. Dann sind wir schon bei der letzten.**

76 Aufgabe 8: R5

77 B: Dann die letzte Frage. Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren immer
78 erhalten. Da ist die Pro.. na, wie heißt die schnell? Konstantenregel ...

79 **A: Ja, Regel vom konstanten Faktor, ich glaube, die hat gar keinen so einen Namen.**

80 B: Ja, genau. Konstanter Faktor ist wahrscheinlich. Also so wie sie da steht mit dem
81 Produkt stimmt es ja auch, dass eben wenn das jetzt erhalten bleibt beim Ableiten,
82 dass die Konstante auch dableibt. Aber wenn die Funktion selbst eine Konstante ist,
83 fällt die beim Ableiten weg, also ist dann 0. Und somit kann ich dieser Aussage
84 eigentlich ... muss ich dieser widersprechen, weil genau. Also es kommt drauf an, ob
85 die Konstante mit dieser Funktion noch verbunden ist oder ob, je nach dem nach
86 welcher Variable ich ableite, ob die Variable noch da ist, dann bleibt er erhalten, dann
87 schon. Aber wenn die Konstante alleine dasteht, dann fällt sie schon weg, also ... es
88 ist finde ich sehr ungenau.

89 **A: Also da geht es bei dir gerade um die Begriffs ... das stimmt, ich weiß, was du**
90 **meinst. Ob da quasi konstante Funktionen, also du überlegst, ob die da**
91 **eingeschlossen sind, oder nicht.**

92 B: Genau. Also so wie es da eben da steht, würde ich es auch unterstreichen in
93 gewisser Weise, aber nachdem wir ja öfter ableiten, kann ja irgendwann die
94 Konstante alleine dastehen. Und da fällt sie ja trotzdem weg.

95 **A: Mhm, ist dann die Frage, sagt man zu dem dann auch Faktor? Ich mein natürlich**
96 **lässt sich alles zerlegen in ein Produkt.**

97 B: Stimmt auch wieder, ja.

98 **A: Das ist was, was ich mir überlege. Also ich überlege gerade wirklich mit mit dir.**

99 B: Stimmt auch wieder, ja, ja. Wenn man konstanter Faktor sagt ...

100 **A: Aber ich weiß, was du meinst. Ich meine, natürlich kann man jede Konstante in**

101 **ein Produkt eigentlich zerlegen.**

102 B: Ja, trotzdem. Ja, das stimmt, wenn man dann wieder ... dem habe ich vielleicht zu

103 wenig Beachtung geschenkt. Wenn dann konstanter Faktor ... könnte man überlegen.

104 **A: Ich meine du kannst es auch so stehen lassen und sagen, das ist halt etwas, wo**

105 **du quasi ... wo es aufs Wording drauf an kommt.**

106 B: Ja, es ist halt, wenn ich's auch zerteilen gehen würde. Bei der Konstante $12 (3 \cdot 4)$,

107 das fällt mir ja trotzdem weg, weil ich eben keine Variable mehr habe, nach der ich

108 ableite. Drum ja, vielleicht aus deiner Hinsicht würde ich sagen, dass die vielleicht, ...

109 dass ich dem dann schon zustimmen würde.

110 **A: Mhm, also quasi mit Unklarheit im Wording für dich?**

111 B: Genau, ganz leicht mit Unklarheit. Aber sonst ...

112 **A: Okay, magst du noch irgendwas hinzufügen oder noch einmal drüber schauen?**

113 **Oder ist für dich sonst alles gesagt?**

114 B: [schaut nochmal drüber] Nein, ich glaube sonst ... also die einzige Unsicherheit ist

115 eben bei der konvergenten Folge. Wobei mir jetzt so auf die Schnelle einfach kein

116 Gegenbeispiel einfallen würde. Weil wenn es konvergiert, dann geht es gegen einen

117 Wert.

118 **A: Ja, du kannst es gerne einfach so stehen lassen. Also das ist kein Problem.**

119 B: Nein, ich finde sonst, bin ich mir halbwegs sicher.

120 **A: Okay, super, passt. Dann, danke.**

1 **Transkript IP08 (ILF1)**

2 **Aufgabe 1: F6**

3 **A: Passt, dann starten wir mit der ersten Aussage.**

4 B: Ja, die ist richtig meiner Meinung nach. Stimmt das, oder?

5 **A: Das sage ich erst am Ende.**

6 B: Ach so, das darfst du gar nichts sagen. Ah, am Ende ... Ja genau, das ist richtig. Da
7 brauche ich also kein Gegenbeispiel sagen.

8 **Aufgabe 2: F2**

9 B: Dann die zweite Aufgabe. Unstetige Funktionen haben mindestens eine
10 Sprungstelle ist falsch. Als Gegenbeispiel hätte ich gebrochen rationale Funktionen.
11 Und mit meinem Wissen, dass eine Sprungstelle nicht dasselbe ist, wie eine Polstelle.
12 Also das wechselt natürlich auch von ganz oben nach ganz unten, aber man nennt das
13 halt nicht Sprungstelle.

14 **A: Würde dir da eine Funktion spontan einfallen, wo das so ist? Oder magst du eine**
15 **aufzeichnen?**

16 B: Ja, eben eine gebrochen rationale Funktion zum Beispiel. Die ist ja auch nicht stetig,
17 genau. Aber ... diese Art von Unstetigkeitsstelle heißt halt nicht Sprungstelle. Also die
18 heißt dann Polstelle. Lücke gibt es ja auch noch, also anderes Beispiel wäre ja auch
19 eine Lücke [zeichnet]. Also das habe ich jetzt nicht so gut gezeichnet. Da ist halt eine
20 Lücke, ist auch etwas anderes, aber da wird ja auch gar nicht gesprungen, also anderes
21 Beispiel – Lücke. Also Lücke in dem Sinn und Definitionslücke. Ist ja das auch eine
22 Definitionslücke aber eben als Unstetigkeitsstelle kenne ich Polstelle, Sprungstelle
23 und Lücke.

24 **A: Okay, passt. Dann gehen wir gleich weiter zum dritten.**

25 **Aufgabe 3: R1**

26 B: Ja, die Aufgabe drei wäre meiner Meinung nach richtig.

27 **A: Okay, passt, ja wenn es richtig ist, kann man es einfach ankreuzen.**

28 **Aufgabe 4: F8**

29 B: Ja, die Aufgabe 4 ist falsch. Da habe ich ein Gegenbeispiel aufgezeichnet. Die
30 Tangente im Punkt hier, ein Hochpunkt, ja, die Gerade ist eine Tangente und die
31 schneidet den Graphen aber auch noch in anderen Punkten. Zumindest bei der, die
32 ich aufgezeichnet habe.

33 **A: Das schaut irgendwie nach viertem Grad aus.**

34 B: Ja, genau. Viertem Grad. Ich habe ein bisschen nachdenken müssen, bis mir eine
35 eingefallen ist, ob das so möglich ist, aber ist offenbar möglich.

36 Aufgabe 5: R4

37 B: Dann die Aufgabe 5 ist meiner Meinung nach richtig. Also die Meinung vom Schüler.

38 Aufgabe 6: F4

39 B: Dann die Aufgabe 6 ist auch richtig, ich habe nur dazu geschrieben, also so wie bei
40 dem Unterschied Lücke, Polstelle, ... falls ich da, wie soll ich sagen, falscher Meinung
41 bin. Ein Grenzwert ist etwas anderes als eine Schranke. Eine Schranke kann erreicht
42 werden, aber ein Grenzwert eben nicht, drum ist die Aussage richtig.

43 **A: Mhm, also würde dir keine Folge einfallen, wo du sagst, da wird der Grenzwert**
44 **schon erreicht, quasi.**

45 B: Das würde für mich gegen die Definition eines Grenzwerts sprechen. [überlegt]

46 **A: Nein, ich verstehe schon, was du meinst.**

47 B: Ja, außer ich habe die Definition vom Grenzwert falsch verstanden. Das kannst du
48 mir nachher sagen, oder auch jetzt, ist mir egal. Also so wie ich Grenzwert verstehe,
49 wird die Folge den Grenzwert nicht erreichen, weil sobald sie ihn erreicht, ist es eine
50 Schranke.

51 **A: Mhm, okay. Alles klar.**

52 Aufgabe 7: R2

53 B: Und die 7. Aussage ist meiner Meinung nach richtig.

54 **A: Mhm.**

55 Aufgabe 8: F10

56 B: Und die letzte Aufgabe mit dem Integral ist falsch. Das gibt nur den Flächeninhalt
57 wieder, wenn die Funktion in dem Intervall stets positiv ist.

58 **A: Könntest du da ein Gegenbeispiel geben, wo das eben nicht so ist, dass der**
59 **Flächeninhalt gleich dem bestimmten Integral ist.**

60 B: Ja [zeichnet]. Also wenn da das Intervall $[a,b]$ ist, wenn das noch dazu symmetrisch
61 wäre, dann würde überhaupt 0 rauskommen und ansonsten liefert halt das Integral
62 über andere Nullstellen drüber nur den Durchschnittswert. Beziehungsweise, wenn
63 es jetzt ganz unterhalb wäre, dann müsste man halt nur, ja, das Vorzeichen ändern,

64 um den Flächeninhalt zu bekommen und da [zeigt auf eine Zeichnung] gibt es halt nur
65 den Durchschnittswert vom Flächeninhalt.

66 **A: Mhm, okay. Magst du noch einmal drüber schauen. Noch einmal schauen, ob du**
67 **irgendwas hinzufügen magst? Ob dir noch irgendwo etwas einfällt? Also du kannst**
68 **gerne noch einmal durchschauen und dir Zeit nehmen.**

69 B: Also ich glaube nicht, dass mir noch etwas einfällt, weil ich habe schon länger
70 drüber nachgedacht vorher. Ich hab dann letztlich das angekreuzt, was ich spontan
71 gedacht habe, ob es richtig oder falsch ist. Aber ich kann mir auch gut vorstellen, dass
72 ich irgendwo, ja ... aus falschem mathematischen Wissen heraus oder ja ... ich jetzt
73 noch etwas lernen werde. [lacht] Falsch ich etwas Falsches angekreuzt habe.

74 **A: Okay, super. Ja, perfekt.**

1 Transkript IP09

2 Aufgabe 1: F6

3 **A: Und dann starten wir mit dem ersten Beispiel.**

4 B: Soll ich es vorlesen auch?

5 **A: Nein das passt schon.**

6 B: Also ich würde hier sagen, wir können das schon annehmen, wenn wir die erste
7 Ableitung nehmen, kriegen wir quasi unsere Aussage zur Monotonie. Und wenn ich
8 da davon ausgehe, dass ich ... soll ich erklären, warum ich denke, dass es richtig ist?

9 **A: Ja, du kannst es erklären. Weil vielleicht kommt dir ja auch während dem**
10 **erklären, keine Ahnung, kommen dir noch Gedanken.**

11 B: Ob das so wäre, ob es richtig oder falsch ist? Okay. Also mit der ersten Ableitung
12 kann ich mal mir die Monotonie grundsätzlich anschauen, das heißt wenn ich die
13 erste Ableitung null habe dann habe ich grundsätzlich schon mal eine waagrechte
14 Tangente. Das heißt ich kann davon ausgehen, ich kriege irgendeine Art von Punkt,
15 wo ich halt die waagrechte Tangente habe. Und wenn ich an der gleichen Stelle quasi
16 die zweite Ableitung null habe, dann hätte ich das sowas wie eine Wendestelle
17 drinnen, und wenn ich das als Kombination nehmen würde, könnte es eine
18 Sattelstelle annehmen, aber ... [überlegt].

19 **A: Was überlegst du?**

20 B: Weil ich mir gerade überlegt habe bezüglich hinreichender Bedingungen und so
21 weiter. Aber ... dritte Ableitung bräuchte ich eigentlich nicht für die Sattelstelle an sich
22 per se, weil das bräuchte ich eigentlich nur bei der Wendestelle, dass ich dann zeigen
23 würde, zweite Ableitung wäre null und dritte wäre ungleich null. Ja ...

24 **A: Eben, die Frage ist jetzt quasi gibt es eine Funktion, oder mehrere, wo das**
25 **vielleicht nicht so ist?**

26 B: [zeichnet] Das heißt ich hätte eine waagrechte Tangente, die würde ich sowieso
27 einmal annehmen und hier hätte ich dann quasi auch eine Krümmung, die ... das heißt
28 hier müsste sich die Krümmung ändern, dass ich das hätte. Aber ob es auch sowas
29 gibt, wo das so ist.

30 **A: Also das wäre jetzt quasi mal ein Beispiel dafür, wo es richtig ist, oder? Was du**
31 **jetzt aufgezeichnet hast ...**

32 B: Mhm. Aber es gäbe auch welche, wo es falsch ist?

33 **A: Ja, das ist eben, die Frage, ob es die gibt.**

34 B: Oh mein Gott, du machst mich fertig. [lacht]

35 **A: [lacht]**

36 B: Wenn du so fragst, wahrscheinlich schon ...

37 **A: Ich frage das vielleicht bei jedem Beispiel.**

38 B: Oh Gott, das ist schlecht, ich fühle mich ...

39 **A: Wie gesagt, keinen Stress, tu dir nichts an.**

40 B: [überlegt weiter zur Zeichnung] Also ich kriege hier meine Sattelstelle und könnte

41 auch.... Doch, ich würde eigentlich schon sagen, dass das funktioniert. Nehme ich jetzt

42 mal an.

43 **A: Mhm, also wenn du eine Tendenz hast, dann kreuze es bitte einfach an.**

44 B: Ich nehme mal die Tendenz wahr. Soll ich noch irgendetwas dazu erläutern?

45 **A: Nein, du musst nichts mehr erläutern. Du kannst dann am Ende gerne nochmal**

46 **über alles drüber schauen. Also wir müssen das nicht so starr durchgehen. Dann**

47 **gehen wir einfach mal weiter zum zweiten würde ich sagen.**

48 Aufgabe 2: F2

49 B: Unstetige Funktionen haben mindestens eine Sprungstelle, das würde ich nicht

50 annehmen. Weil wenn wir uns Stetigkeit generell anschauen. Es wird zwar

51 normalerweise immer vermittelt stetige Funktion könnte ich durchzeichnen

52 immerwährend. Aber das ist von der Idee her manchmal nicht ganz so klug, das so

53 weiterzugeben. Es gibt schon auch welche, wo ich den Stift quasi nicht direkt absetze

54 und es nicht als Sprungstelle nehme, aber die trotzdem als unstetige Funktionen

55 wahrgenommen werden, also würde ich hier sagen, dass das falsch ist – mit dem

56 mindestens eine Sprungstelle. Weil unter einer Sprungstelle verstehe ich, dass ich

57 quasi tatsächlich abgesetzt hätte. Und diese zwei, wenn ich das mit Intervallen mache,

58 dass ich quasi Kugel leer lasse und dass ich das übereinander gebe, und das muss aber

59 quasi nicht der Fall sein.

60 **A: Hättest du ein Beispiel, wo du sagst, da ist es nicht so?**

61 B: [überlegt] Muss ich sie auch benennen?

62 **A: Du kannst sie auch zeichnen. Also eine, die nicht so ist, wie du gerade erklärt**

63 **hast, wo keine Sprungstelle ist.**

64 B: Also wenn wir sagen würde, also diese klassischen unstetigen Funktionen, wo wir
65 halt irgendwie sagen würden, das wäre halt, weiß ich nicht, mit einer Sprungstelle
66 oder so, dann würden wir uns eigentlich das hier vorstellen. Aber ich kann auch
67 annehmen, dass ich quasi andere ... also so etwas wie ... [überlegt vor sich hin]. Naja,
68 wobei. [zeichnet]

69 **A: Denkst du an diese Sägefunktionen?**

70 B: Aber ich bin gerade ein bisschen verwirrt, weil in der fünften Klasse habe ich mit
71 denen so abschnittsweise definierte Funktionen gemacht und da habe ich halt viel so
72 Zeug angeschaut und in der siebten (Klasse) habe ich mit ihnen schon Stetigkeit und
73 solche Dinge gemacht. Und auch quasi, wie können wir uns anschauen, ob etwas
74 stetig oder unstetig ist. Und wie können wir eine Differenzierbarkeit einer Funktion
75 quasi, und wie ist der Zusammenhang von differenzierbar und stetig. Also welche
76 Rückschlüsse kann ich ziehen. Oder welche Folgerungen eigentlich. Und wie diese
77 Pfeile funktionieren.

78 **A: Es ist, wenn dir kein Gegenbeispiel einfällt, ist es nicht tragisch. Also du kannst**
79 **auch sagen, du bist dir sicher es ist falsch, aber dir fällt jetzt kein Gegenbeispiel ein.**

80 B: Ja, es gibt auch welche, die einfach funktionieren ohne absetzen, aber welche?
81 Weil ich habe jetzt auch nämlich die Betragsfunktion im Kopf, aber das ist, glaube ich,
82 kein Problem. [zeichnet]

83 **A: Ja, für das wäre jetzt die Frag, ist die stetig oder unstetig? Weil die wäre ein**
84 **Gegenbeispiel, wenn sie unstetig wäre.**

85 B: Mhm, genau, ja. Und das geht jetzt nicht. Ja, ich überlege noch, vielleicht fällt mir
86 noch etwas ein.

87 **A: Okay, kein Problem. Wir können auch weitergehen.**

88 B: Aber ich würde jetzt mal davon ausgehen, dass es falsch ist. [geht weiter]

89 **Aufgabe 3: R1**

90 B: Okay wir schauen uns grundsätzlich mit der ersten Ableitung schon die Monotonie
91 an und sagen halt größer null würden wir es als streng monoton annehmen. Wenn es
92 größer gleich null wäre, hätten wir halt nur monoton steigend, beispielsweise. Aber
93 in Wirklichkeit müssten wir hier zusätzlich bestimmen, quasi, ob a oder b größer sind.
94 Also ich weiß jetzt nicht, ob wir davon ausgehen können, dass a kleiner als b ist, oder
95 ob nicht, weil je nachdem müsste ich halt dann ordnen, also müsste ich dann

96 zusätzlich angeben, dass ich halt $a < b$ oder $a > b$ habe oder wie auch immer. Dass
97 ich ... oder halt die $x_1, x_2, \dots$ wie auch immer. Wie ich sie anordne, dass ich dann sagen
98 kann, es ist streng monoton steigend.

99 **A: Mhm, du denkst gerade an die Definition, oder?**

100 B: Ja.

101 **A: Aber, im Endeffekt, ist das dafür relevant? Überlege ich mir jetzt gerade.**

102 B: Du meinst, weil es verkehrt herum gefragt wird und quasi schon die Aussage steht,
103 dass die erste Ableitung größer null ist, das heißt, dass ich sowieso schon davon
104 ausgehe, dass es steigt? Doch, dann kann ich es eigentlich schon sagen. [überlegt]
105 Weil wir es jetzt quasi rückwärts aufrollen. Wir sagen, wenn das so ist, dann schließen
106 wir daraus das und wir gehen nicht normalerweise davon aus, also weil die Definition
107 geht ja quasi davon aus, dass ich sage $x_1 < x_2$ und so weiter.

108 **A: Also eh, wie du es aufgezeichnet hast.**

109 B: Okay, deshalb kann ich. Und jetzt habe ich es quasi schon umgekehrt aufgelistet,
110 insofern bräuchte ich es nicht. Ja, okay. Dann gehe ich mal davon aus, dass das richtig
111 ist, wenn ich meine Definition nicht umdrehen muss. Weil ich meine Folgerung
112 sowieso schon anstellen dürfte. Ja, ich lasse es mal so.

113 **A: Okay, dann gehen wir weiter zu 4.**

114 Aufgabe 4: F8

115 B: Also, was man da bei Analysis oft anschaut mit Tangente und Sekante und so weiter,
116 Passante eher bei Kegelschnitten würde ich mal sagen, oder halt in der Geometrie,
117 wie halt beim Kreis. [überlegt] ist der Berührungspunkt, es hat einen Berührungspunkt. Ob der
118 jetzt Berührungspunkt heißt? Gehe davon aus, aber ich berühre genau einmal, weil ich
119 durch die Tangente immer schön zeigen kann, so wie ein „T“, das berührt nur einmal,
120 und das heißt es geht nur einmal vorbei. Mit dem könnte ich dann, wenn ich alle
121 Sachen, wie momentane Änderung und so weiter anschauen möchte, könnte ich das
122 auch anschauen, das heißt ich versuche mich so nah, wie möglich zu nähern. Die Frage
123 ist nur, wenn ich die Tangente für einen Punkt einzeichne, dann ist das der
124 Berührungspunkt? Ja, ich würde schon einmal ja sagen.

125 **A: Also du kannst nochmal überlegen, also ich glaube am besten ist es immer sich**
126 **Beispiele zu überlegen und ein paar Funktionen durchzugehen.**

127 B: Ob es wirklich immer der Fall ist? Ob ich quasi es schaffe, immer hinzukommen, ...

128 **A: Also und der springende Punkt bei der Aussage ist halt ...**

129 B: Genau einen Punkt zu haben.

130 **A: Genau.**

131 B: Ja, genau. Naja, wenn ich es nicht schaffe, wenn ich so weit. Also die Idee von der
132 Tangente wäre schon, dass ich nur einen Punkt habe, in dem ich berühre, ich aber die
133 Tangente nicht so nah annähern kann, dass das tatsächlich funktioniert. Das heißt, ich
134 schaue mir das sowohl rechnerisch, als auch graphisch an ... und graphisch würde ich
135 es nicht schaffen. [zeichnet] Weil wenn ich jetzt zeige, ... das heißt, wenn ich meine
136 Tangenten zeichne, dann könnte ich hier auch ... mein ausschlaggebender Punkt ist
137 schon der Berührungspunkt für meine Tangente, je nachdem wie lange ich sie zeichne
138 [lacht].

139 **A: Also hat die Tangente eine Länge, insofern?**

140 B: Nein, hat sie nicht.

141 **A: Weil ist die Frage, ist die irgendwann aus?**

142 B: Nein, es ist halt das, was ich irgendwie gefühlt zeichne und wie ich sie mir darstelle.
143 Eigentlich hat die kein Ende. Das heißt rein theoretisch ... Weil wenn ich sie mir so
144 anschau, oder ich mal hier eine Tangente her und sage die ist halt waagrecht, dann
145 würde ich halt in meinem Kopf sagen, das ist eine Tangente, weil ich hier berühre.
146 Aber theoretisch ist das ja so wie mit Geraden oder sonstigen Dingen. Hat ja eigentlich
147 auch kein Ende ... auch wenn ich sie mir auf GeoGebra einzeichne eigentlich schmeißt
148 es mir die ganze Tangente rein. Das heißt eigentlich keine Rücksicht auf Verluste in
149 der Hinsicht. Ich glaube, das ist zum Beispiel, wenn wir eine vierten oder weiß ich
150 nicht welchen Grad haben, ist eigentlich egal, aber wenn wir das so hätten und ich
151 sage, sie sollen mir die Tangente da durchlegen, da bin ich ziemlich sicher, dass sie es
152 so durchlegen. Und ich will es ja wissen, wie es mit der einen Stelle ausschaut, das
153 heißt wie meine Steigung zu dem Punkt ist. Die Idee der Tangente wäre schon der
154 eine Punkt, der Berührungspunkt, aber ich muss ja auch eine Tangentengleichung
155 angeben, wenn ich die jetzt eingebe. Und wenn ich die in einer linearen Funktion
156 angebe, will ich das ja auch nicht beenden lassen. Asymptoten laufen ja auch durch.
157 Nicht, dass eine Asymptote eine Tangente wäre, aber ... die könnte ich auch angeben
158 $y = x$ oder was weiß ich. Da hätte ich auch keine Chance, nur dass sich das halt nicht
159 berührt, wenn das irgendwie so wäre. Aber wenn ich das eingebe, dann gibt's mir da

160 trotzdem eine Asymptote an, als Ganzes, das heißt eigentlich müsste ich auch hier ...
161 aber reintheoretisch bräuchte ich eigentlich nur eine Funktion der ersten Ableitung
162 und wir könnten die Wendetangente aufstellen, weil die Wendetangente ist auch
163 immer in der Form einer linearen Funktion. Und da überprüfe ich ja nur, ob der Punkt
164 wirklich da noch drauf liegt und stelle halt vorher die Wendetangente aus diesen
165 Bedingungen auf, aber ich schneide sie ja nirgends ab. Na, ich bleibe bei dem glaube
166 ich.

167 **A: Mhm, also bei dem falsch quasi? Und sozusagen hättest du jetzt zwei**
168 **Gegenbeispiele aufgezeichnet, oder?**

169 B: Ja, das wäre jetzt meine Überlegung eigentlich. So quasi, außer ich beschränke die
170 Tangente auf ein Intervall. Und ich glaube, was hier aber oft das Problem ist und was
171 auch vielleicht mein Denkfehler in dieser Hinsicht ist, ist einfach gerade, wenn man
172 Tangenten viel zur Untersuchung von so Extremstellen und so Dingen verwendet, dass
173 man das einfach halt nur für einen sehr kleinen Teilabschnitt betrachtet und eben
174 nicht quasi aufs große Ganze denkt. Sag ich jetzt einmal ...

175 **A: Mhm, okay. Dann lassen wir das doch einmal so stehen. Dann gehen wir zu 5.**

176 Aufgabe 5: R4

177 B: Ah, das ist das wo ich vorher schonmal bei der Wendestelle mit hinreichend, und
178 so weiter, mit den Bedingungen war. Also grundsätzlich von einer zweiten Ableitung
179 alleine gleich null können wir nicht ausgehen, dass es eine Wendestelle ist. Das wird
180 uns quasi hier nicht genug Bestätigung schon liefern, wir könnten es erst durch die
181 dritte quasi ... also notwendig ist sie schon, aber alleine durch das könnten wir es nicht
182 sagen und eigentlich, wenn die dritte Ableitung ungleich null ist, können wir von einer
183 Wendestelle ausgehen. Wenn wir aber beispielsweise sagen, wir hätten, damit ich die
184 dritte Ableitung noch schaffe, bräuchte ich eine (Funktion) vierten Grades [zeichnet].
185 Das heißt, wenn ich irgend so eine mach und dann male ich halt meine Ableitung ...
186 gezeichnet nicht so gut [lacht]. [überlegt laut und zeichnet währenddessen] Mich
187 macht ein bisschen das Wort „sicher“ ... „sicher“ ist immer so dramatisch.
188 Grundsätzlich würde ich das annehmen. Vor allem dahingehend, dass eigentlich,
189 wenn ich Sattelstellen anschau, dass ich da eben vorher mit der ersten Ableitung
190 noch schauen würde und dass ich da gar nicht diese dritte ungleich null gar nicht so
191 dringend benötige. Aber ... wobei ich weiß eigentlich nicht, ja, aber es macht keinen

192 Unterschied. Selbst, wenn die irgendeinen Grad hätte, was wir nie anschauen.
193 [überlegt]

194 **A: Also wohin würde deine Tendenz gehen?**

195 B: Zu richtig, aber mich macht dieses „sicher“ irgendwie ein bisschen ... weil
196 irgendwie, normalerweise, wenn ich eine Wendestelle angebe und wenn ich sage,
197 okay, wir schauen uns jetzt Wendestellen an. Das ist immer: Was ändert sich da? Das
198 Krümmungsverhalten ändert sich quasi. Oder wie kann ich das überhaupt
199 anschauen? Dann schau ich mir die Krümmungen mit meinem positiv und negativ und
200 so weiter an und kann eben da zeigen, dass es eben nicht der Fall ist und wenn ich
201 mir andersrum überlege ich könnte ja auch ... gut, wir müssen jetzt nicht mit
202 integrieren anfangen, aber ... könnte ich das auch anschauen. Ich würde glaube ich
203 eher mal zu richtig gehen. Ich tu es vielleicht nachher wieder ändern, aber ...

204 **A: Ja, ist okay. Dann bei Nummer 6.**

205 Aufgabe 6: F4

206 B: Gut, wir haben also konvergente Folge ... [überlegt] Also wir haben ja konvergent
207 und divergent und wir haben ja auch hier in diese Richtung, dahingehend, dass wir
208 sagen, es ist irgendwie ... ich weiß nicht, ob das offen heißt oder abgeschlossen oder
209 wie auch immer, aber ich kann sagen, dass das einseitig ist oder auf beiden Seiten und
210 dann kann ich links- oder rechtsbeschränkte Dings machen und ich kann von
211 Beschränktheit immer automatisch dann ausgehen. Das ist eigentlich ... nicht diese
212 Folgerung. [überlegt] Wir haben eine Folge, das heißt ich kriege meine Ding ... und
213 dann könnte ich irgendetwas sagen und da gehe ich da zu einem +1 und so weiter ...
214 das ist das, was wir in Analysis auch einmal gerechnet haben, wo ich dann meinen
215 ganzen Bruch erweitere und so weiter, um zu untersuchen, ob das überhaupt so ist
216 oder nicht. Das heißt, wenn ich irgendwie einen Bruch hätte, dass ich sage ... [schreibt
217 Beispiel auf]. Das heißt, wenn ich das irgendwie anfangen würde, hätte ich ...
218 [berechnet Grenzwert und lässt gegen Null laufen]. ... Was mir jetzt noch nicht viel
219 hilft, weil jetzt habe ich das halt. Jetzt habe ich den Grenzwert, aber da weiß ich nicht,
220 ob das ... anzunehmen ist. Ich könnte sagen, der Grenzwert dieser Folge ist drei, aber
221 ...

222 **A: Mhm, meinst du, dass die den Grenzwert erreicht?**

223 B: Also nein, aber sie nähert sich dem halt an.

224 **A: Aber glaubst du, gibt es welche, die ihn erreichen?**

225 B: Das würde halt irgendwie die Definition des Limes ein bisschen zerstören, weil das
226 ist ja nur eine Annäherung an etwas, das ich versuche zu erreichen, so nah wie
227 möglich hinzukommen. Das heißt ja nicht unbedingt, dass es per se existiert. Das ist
228 ja so wie bei ... vor allem, wenn ich es mir graphisch aufzeichne, könnte ich ja genau
229 so sagen: wenn ich meine Folgenglieder kriege, dann läuft das immer aber das muss ja
230 meinen Grenzwert nicht erreichen. Oder, wenn es drei wäre, dann würde das halt so
231 rauflaufen und dann laufe ich halt da her und dann hätte ich hier meinen Dreier-
232 Grenzwert. Ich bleibe mal bei richtig, ich glaube, ... sie konvergiert gegen etwas und
233 das heißt, ich würde einmal sagen, sie erreicht ihn nicht, weil das würde irgendwie
234 den Sinn von einem Grenzwert zerstören. Das ist nur eine Grenze, die ich probiere.
235 Vor allem, das ist nur die Annahme, dass wenn n gegen 0 gehen würde, nähert es sich
236 dem hier an. Könnte n ja auch ins Unendliche laufen lassen, aber dann kriege ich
237 wieder, ... ja, okay. Ja, ich würde jetzt einmal sagen, wir erreichen ihn nicht.

238 **A: Mhm, okay.**

239 B: Ich hinterfrage gerade jede einzelne Aufgabe, aber okay, egal. [lacht] Manchmal
240 muss man zu seinen Entscheidungen stehen, das ist so.

241 **A: Ja, es ist ja auch nicht tragisch. Dann genau, sieben.**

242 Aufgabe 7: R2

243 B: Also grundsätzlich können wir einmal sagen die erste Ableitung, also wir kriegen
244 wieder eine waagrechte Tangente. Und die zweite Ableitung größer null würde
245 grundsätzlich für eine Minimum stehen, weil ich hier eine, eine positive Krümmung
246 habe, das heißt, ich habe eine Linkskrümmung und kriege hier meine Minimumstelle.
247 Die Frage ist nur, muss sie nicht lokal sein? Sie könne auch ... lokal müsste ich doch ein
248 Intervall begrenzt vorher schon annehmen. Also ich muss irgendwie sagen p liegt wo
249 drinnen, damit ich sagen kann, dass es eine lokale Minimumstelle ist.

250 **A: Naja, p liegt halt in R .**

251 B: Aber was wäre dann der Unterschied zu einer Globalen? Also ich kann ja lokal, also
252 es können ja auch lokale global sein, wenn ich das einfach habe, dann... das muss ich
253 ja nicht per se ausschließen. Aber wenn hier jetzt quasi konkret danach gefragt wird,
254 ob es sich um eine lokale Minimumstelle handelt, dann müsste ich ja bei lokal

255 normalerweise sagen, auf welches Intervall das angewandt wird. Um zu sagen, es ist
256 wirklich nur hier.

257 **A: Aber wenn du jetzt zum Beispiel ... also du hast da irgendwie $-x^2$ oder so etwas**
258 **gezeichnet ... ach so, oder ja x^2 , ist ja egal. Und du hast da ja offensichtlich**
259 **irgendeine Art von Extremstelle. Ist jetzt die Frage, passen da die Kriterien drauf**
260 **oder halt stimmt das?**

261 B: Aber ich meine, das kann ich schon als ein Minimum deuten, wenn ich das möchte,
262 weil ich quasi einmal meine Monotonie und einmal meine Krümmung an sich kriege.

263 **A: Und wäre das dann da eine lokale Minimumstelle?**

264 B: Wenn ich von einer zweiten Grades ausgehe, und dann sage, dann ist meine lokale
265 auch gleich eine globale und dann kann ich locker sage, die ist lokal, das macht ja
266 nichts. Wenn ich jetzt sage, das ist irgendeine Stelle p und ich habe, keine Ahnung,
267 eine x^3 und die geht da weiter, ja dann ist sie auch lokal. Aber ... was wäre, wenn ich
268 das [zeichnet] ... Aber lokal kann es immer sein, eigentlich. Ach so, ich muss ja nicht
269 ausschließen, weil ich eh ... die lokale könnte auch eine globale sein und somit wäre
270 das eigentlich egal, weil es fragt ja niemand danach ob sie global auch noch ist. Und
271 somit ... und die wäre ja ...

272 **A: Es ist schon bewusst, also die Formulierung ist schon bewusst gewählt mit**
273 **„lokal“.**

274 B: [lacht] Das macht es nicht besser. Ja eh, das „lokal“ ist eigentlich das was mich stört,
275 weil das andere würde mich glaube ich nicht so stören.

276 **A: Aber du hast ja gerade etwas gesagt vorher, wie du das so aufgezeichnet hast, wo**
277 **ich mir gedacht habe, das tendiert eigentlich schon in eine Richtung, oder?**

278 B: Ich nehme mal diese Richtung. Ich lass es mal gut sein. Weil, mein Güte, dann ist
279 halt ... selbst wenn ich einen dritten oder vierten Grades draus machen würde. Dann
280 kann ich immer noch andere ... und für diesen Bereich ist es ja eine Minimumstelle,
281 ja.

282 **A: Du kannst es ja einmal so stehen lassen.**

283 B: Wahrscheinlich drehe ich nachher alles um.

284 **A: [lacht]**

285 Aufgabe 8: F10

286 B: Gut, wir haben ein bestimmtes Integral, das heißt ich kriege meinen Graph f
287 irgendwo und habe mein Intervall $[a,b]$ und dann kriege ich eigentlich Integral als
288 Fläche, das heißt immer zu meinem nächsten Ding. Wenn ich davon ausgehe, ich habe
289 meine Ding so ... das heißt ich kriege hier eigentlich den Flächeninhalt raus [zeichnet
290 ihn ein]. [überlegt laut]

291 **A: Du hast jetzt quasi schon ein Beispiel aufgezeichnet, wo es zutrifft, oder? Die**
292 **Frage ist, gibt es Beispiele, wo es nicht zutrifft?**

293 B: Mhm, ja das habe ich auch gerade überlegt. Was ist, wenn meine Funktion ... es
294 gibt schon auch welche, wie ich das anders umdrehen kann, nur das sind dann wieder
295 ... warte mal. Ich kann ja die Funktion jetzt nicht einfach in die andere Richtung
296 drehen, weil dann ist es keine Funktion mehr. Also ich kann jetzt nicht davon
297 ausgehen, dass ich das so male [zeichnet]. Aber dieser Rotationskörper, da weiß ich,
298 dass das irgendwie funktioniert hat. Wir hatten so Rotationskörper, entweder rotieren
299 sie um die x -Achse oder um die y -Achse und je nachdem schaut mich das eben an.

300 **A: Mhm, denkst du an Extremwertaufgaben und dergleichen?**

301 B: Ja, auch ... und eben diese. Ich weiß nicht, das war bei meiner Matura damals schon
302 auch Stoff, ich weiß nicht, ob es jetzt auch ist. Da hat man einfach diese
303 Rotationskörper, so Sachen, wie so Vasen rotieren lassen halt quasi um x - oder y -
304 Achsen.

305 **A: Ja, ich glaube, da ist das dann auch ausgenommen diese Funktions-Definition,**
306 **weil da kommt man ja immer sozusagen auf so etwas, was du gerade aufgezeichnet**
307 **hast und das ist ja dann keine Funktion mehr.**

308 B: Ja, genau. Das heißt, das funktioniert nicht und es ist ja die Frage nach einer
309 Funktion und nicht nach einer Rotationsfunktion.

310 **A: Ja, genau. Aber ich verstehe deinen Gedanken.**

311 B: Also, das ist jetzt nicht die Frage ... [überleg] Es gibt schon welche, wo ich es. Okay,
312 ich habe manchmal auch zwei Funktionen, dann würde ich die untere von der oberen
313 abziehen, aber die habe ich ja nicht. Das heißt, wenn ich ... [zeichnet]. Angenommen
314 ich hätte die und ich lasse meine zweite Funktion laufen, dann hätte ich den
315 Zwischenraum, aber das ist nicht gefragt. Aber was wäre, wenn ich ... [überlegt]. Also
316 bestimmt kann ich einmal ??? ausgehen, weil ich mein Intervall gegeben habe, das
317 heißt ich sage im Rahmen von $[a,b]$ – Integral an sich ist eine Fläche und die Frage

318 wäre eigentlich ob es immer zwischen der Funktion f und der x -Achse ist oder ob auch
319 die Möglichkeit bestünde, dass es von der Funktion f zur y -Achse die Fläche sein
320 könnte. Müsste ja eigentlich die Überlegung sein, oder?

321 **A: Mmmh. Ja, oder ob es... im Endeffekt, ob das bestimmte Integral sozusagen**
322 **immer genau der Wert ist von dieser Fläche. Vom Funktionsgraphen zu x -Achse.**

323 B: Ach so, du meinst quasi, ob es wenn ich es rechne und zeichne, ob es das ist?

324 **A: Ja, genau. Ob rechnerisch genau das ... diese Fläche ist, die man einzeichnet.**

325 B: Okay, das heißt gehen wir da auf die Idee von Ober- und Untersumme, und so
326 etwas? Aber die brauche ich ja eigentlich nicht. Weil wenn ich integrieren kann, dann
327 brauch ich Ober- und Untersumme nicht mehr. Dann bin ja quasi eh schon fähiger, die
328 anderen Dinge zu machen. Ob es den Flächeninhalt wiedergibt ... warte. [überlegt]

329 **A: Gehe einmal ein paar Funktionen durch. Ich glaube, das ist immer eine gute**
330 **Überlegung.**

331 B: [zeichnet] Weil, wenn ich jetzt sage, das wäre so und ich hätte hier mein a und da
332 mein b ... ach so, mit den negativen und positiven Flächen. Dann müsste ich eigentlich
333 schauen, wie ich es angebe. Also, theoretisch könnte ich schon sagen, es gibt die
334 Fläche an, aber nur dann, wenn ich davon ausgehe ... also je nachdem, was ich für
335 eine Fläche will. Will ich quasi absolut wissen, was für eine Fläche dazwischen ist und
336 ich hätte irgendetwas, was über der x -Achse und unter der x -Achse liegt, dann müsste
337 ich halt schauen, ob ich das quasi also positive Fläche bewerte oder nicht, würde ich
338 jetzt mal meinen. Also, wahrscheinlich würde ich mir da dann überlegen ... das sind
339 voll oft so Ankreuz-Aufgaben, wo das dann einfach nicht so ganz stimmt oder auch
340 bei diesen, was die voll oft gerne geben sind solche Pflanzen ... das müsste ja nicht
341 einmal eine anderen Funktion sein, dass ich sage: okay, theoretisch wäre das negativ
342 und ab dem Bereich, wenn ich das mir anschau, wenn ich halt von hier, von a nach
343 b gehe, dass ich da dann positiv wäre, und je nach dem wie ich mich dann drauf einige,
344 ob ich das quasi mit Betrag anschreibe, oder nicht, müsste ich dann schauen ob ich
345 dieses Integral überhaupt teile oder nicht. Das heißt, wenn ich das so überlege, und
346 mal davon ausgehe, dass ich das so annehme, dann würde ich sagen, also ich finde
347 dann, finde ich richtig und falsch beide ein bisschen schwierig zu argumentieren, weil
348 ich finde, von der Idee her ist es jetzt nicht falsch zu sagen, dass das was ich rechne,
349 ich auch grafisch darstellen kann und eigentlich immer die Fläche darstellt zwischen

350 eben der Funktion und der Achse. Nur, dass ich dahingehend eher überlegen muss,
351 wie rechne ich eben. Also wenn, müsste ich es halt unterteilen irgendwie oder eben
352 sagen, okay, dann ist es ... dann muss ich auch irgendwie berücksichtigen, dass es auch
353 negative und positive Flächen sind. Das heißt ich müsste dann sowohl grafisch, als
354 auch rechnerisch auf die andere Art irgendwie Rücksicht nehmen. Aber ich muss mich
355 für eines entscheiden, oder?

356 **A: Es gibt schon eine Lösung ... [lacht]. Aber, überlege dir einfach nochmal, gehe**
357 **einfach nochmal die Aussage durch und denke dir: so wie es hier steht, ist es**
358 **möglich? Weil du hast schon Sachen da genannt, mit, dass man das halt**
359 **berücksichtigen muss und whatever.**

360 B: [lacht]

361 **A: Also, wenn du dir wirklich nicht sicher bis, dann kannst du natürlich auch sagen,**
362 **du gibst nicht ...**

363 B: Nein, man muss manchmal Entscheidungen treffen, das ist egal. Das passt schon.

364 **A: Aber ich habe kein Problem damit, wenn du sagst, du kannst es einfach nicht**
365 **entscheiden. Ist auch in Ordnung.**

366 B: Nein, ich bin eh schlecht im Entscheiden und bei solchen Dingen muss man das
367 eben auch mal lernen. Okay, ich gehe davon aus ... [überlegt nochmal laut durch]. Ich
368 würde eigentlich dann sagen, es ist richtig.

369 **A: Auch für alle anderen Beispiele, die du gerade aufgezeichnet hast?**

370 B: Nein, ... nein, für die anderen Beispiele ist es eigentlich falsch. Unter
371 Berücksichtigung bestimmter Dinge ... Nein, dann sage ich mal falsch und wenn
372 jemand dann doch rechnen kann und das mitberücksichtigt, dann wäre es halt richtig.
373 Ja. Belassen wir es mal dabei.

374 **A: Dann, magst du noch einmal. Schau noch einmal drüber, vielleicht fällt dir noch**
375 **wo etwas ein.**

376 B: Oh Gott, da werde ich mich sicher überall umentscheiden. Gut, bei der Sattelstelle
377 würde ich glaube ich einmal bleiben, einfach dahingehend, weil ich kein
378 Gegenbeispiel finde. In die Richtung, dass ich sage, wenn beides erfüllt ist – was soll
379 es denn dann sein? Ich bin mir zwar nicht hundert Prozent sicher, ob es zwingend die
380 Sattelstelle sein müsste, aber mir fällt jetzt auch nichts ein, was das widerlegt und
381 deshalb bleibe ich jetzt einmal dabei. Bei Aufgabe zwei, da war das mit dem

382 Gegenbeispiel ein bisschen blöd, aber ich glaube trotzdem, dass das falsch ist, weil
383 mich das mit diesen Sprungstellen stört und ich ziemlich sicher weiß, dass es auch
384 Funktionen gibt, die eben nicht so offensichtlich so aussehen. Weil eben immer dieses
385 blöde Beispiel mit diesem: jemand setzt den Stift nicht ab. Und ich habe jetzt keine ...
386 als ich selbst das aufgezeichnet habe und ich weiß jetzt gerade nicht wie diese
387 Funktion heißt, die hat einen seltsamen Namen. Und ich weiß jetzt aber auch, dass
388 wir es in Analysis beim Spreitzer gemacht haben und ich da beim ... weiß ich nicht, ja
389 egal. Ich weiß jetzt kein Gegenbeispiel, aber ich bin mir trotzdem ziemlich sicher. Beim
390 dritten, trotz meiner Verwirrung dieser Definition, wenn das umgekehrt aufgetan ist,
391 würde ich doch dafür stimmen, weil wir sagen ... ich meine, das einzige, was mich
392 vorher irritiert hat, war irgendwie weil, wie die Funktion f , weil dieses ... [liest laut]
393 das fand ich irgendwie seltsam.

394 **A: Ja, das ist im Endeffekt eigentlich nur ...**

395 B: Das soll mich irgendwie nicht ...

396 **A: Nein, das ist im Endeffekt einfach, damit quasi das an einem Intervall definiert**
397 **ist.**

398 B: Gut, dann bleibe ich dabei, aus Prinzip, glaube ich. Das wird nicht so viel ändern.
399 Bei viertens, da habe ich sehr lange überlegt. Das „genau einem Punkt“ würde einer
400 Tangente entsprechen, aber wie ich grafisch schon versucht habe zu erläutern, denke
401 ich trotzdem, dass es falsch ist, weil ich habe zwar einen Berührungspunkt an dieser Stelle,
402 und deswegen ist es ja die Tangente für die Stelle, aber für die ganze Funktion kann
403 es ja immer noch irgendwo schneiden, wenn ich meine Tangentengleichung
404 annehme. Würde ich jetzt einmal meinen. Also falsch. Dann bei fünftens, das war das,
405 wo ich mir, wo ich es irgendwie zu schön sein, um falsch zu sein. [lacht] Oder zu schön
406 sein, um wahr zu sein, aber irgendwie würde ich so meinen, so mit der hinreichenden
407 und notwendigen Bedingung und so weiter, dass es hier sich um eine Wendestelle
408 handelt. Also richtig. Bei Sechstens, würde ich sagen, sie kommt ihm beliebig nahe,
409 wird aber den Grenzwert nicht erreichen, als richtig bewerten, einfach deshalb, weil
410 ich sonst die Idee des Grenzwerts ein bisschen hinterfragen würde, ja ... und weil, das
411 steht jetzt schon dort, deshalb [lacht] nehme ich das jetzt einmal, bevor ich da ... sonst
412 entscheide ich mich 50 Mal um. Okay, da bei 7. hat mich das lokal da ein bisschen
413 genervt, aber aufgrund der Tatsache, dass ich das dann aufgezeichnet habe und jede

414 lokale auch global sein könnte, sehe ich da jetzt irgendwie nicht so ein Problem, dass
415 das nicht richtig wäre, also würde ich mich für richtig entscheiden. Und Minimum ist
416 es sowieso, das heißt, das einzige Problem, wäre die Lokale. Und bei 8. bin ich immer
417 noch ein bisschen im Zwiespalt, aber man muss sich, oder ich möchte mich für etwas
418 entscheiden. Und ich finde, dass die Beispiel eigentlich dafür sprechen würden, ...
419 [lacht], nein, ja, also dass ich zwar verwirrt bin mit diesem ganzen: kann ich es
420 anschreiben? Das heißt, muss ich es in Intervalle teilen, und so weiter?

421 **A: Aber du teilst es da ja eigentlich gar nicht in Intervalle.**

422 B: Eben. Und wenn ich das quasi hier nicht tue, dann wäre es falsch, je nachdem, was
423 gefragt ist. Weil das war auch mal so eine Aufgabe, da stand auch: gib das bestimmte
424 Integral an. Es war auch so eine komische ... und eben je nachdem muss man das mit
425 Betrag anschreiben oder nicht [lacht].

426 **A: Da wird es wahrscheinlich genau um das gegangen sein.**

427 B: Ja ... mhm. Die 8. Klasse kommt erst nächstes Jahr, in so ungefähr 6 Wochen. Ja, ich
428 bleib dabei.

429 **A: Okay, passt. Gut.**

1 **Transkript IP10**

2 **Aufgabe 1: F7**

3 **A: Dann starten wir.**

4 B: Okay, ja beim ersten wäre meine Tendenz eher richtig.

5 **A: Okay, das heißt da fällt dir jetzt spontan keine Funktion ein, wo du sagst, da ist**
6 **es jetzt keine lokale Extremstelle.**

7 B: Nein. [überlegt]

8 **A: Okay. Du kannst dann auch am Schluss, wenn dir noch etwas einfällt, kannst du**
9 **es dann ruhig einwerfen oder so. Dann gehen wir weiter zum zweiten, ja? Okay.**

10 **Aufgabe 2: R6**

11 **A: Das bestimmte Integral kann auch einen negativen Wert annehmen. Was**
12 **würdest du dazu sagen? Hast du eine Tendenz.**

13 B: Ich weiß es nicht ... [überlegt]

14 **A: Nicht sicher?**

15 B: Nein.

16 **A: Überlege dir einmal ein paar Funktionen durch, wenn du da das Integral**
17 **berechnest, ob das einen positiven oder einen negativen, oder einmal so einmal so**
18 **annehmen kann.**

19 B: Ich kann dir jetzt kein Gegenbeispiel nennen, also ... Nein es tut mir voll leid, aber
20 ich könnte dir da gar kein Gegenbeispiel nennen jetzt.

21 **A: Ja, voll, okay. Also, das heißt du würdest. Also prinzipiell wenn man kein**
22 **Gegenbeispiel finden kann – also würdest du sagen es gibt Funktionen, wo das**
23 **Integral einen negativen Wert hat? Oder auch nicht? Wenn du mal so überlegst ...**

24 B: Keine Ahnung, ich kann das echt gar nicht mehr. Ich wüsste gerade auf die Schnelle
25 nicht, wie ich das jetzt ausrechne. Ich habe mich mit dem schon so lange nicht mehr
26 beschäftigt.

27 **A: Also auch keine Tendenz? Also wenn du sagst, du bist einfach unsicher, dann ist**
28 **das die Antwort und fertig ... kein Problem. Wenn es für dich passt, dann gehen wir**
29 **einfach weiter.**

30 **Aufgabe 3: F3**

31 **A: Dann schauen wir zum dritten. Stetigkeit. Also das ist jetzt etwas, was schwierig**
32 **ist für alle, dieses Thema. Stetige Funktionen lassen sich durchzeichnen, ohne mit**
33 **dem Stift abzusetzen.**

34 B: Ist richtig, würde ich sagen.

35 **A: Also würde dir auch spontan kein Beispiel einfallen, wo du sagst, da muss man**
36 **absetzen?**

37 B: Ja, aber ... jetzt eine blöde Frage. Aber du gehst davon aus, wenn es falsch ist muss
38 ich ein Gegenbeispiel geben. Da müssten ja dann alle Aussagen falsch sein.

39 **A: Nein, es sind aber nicht alle Aussagen falsch. Es sind richtige und falsche drin.**

40 B: Ja ... dann, stetig ist, wenn ich es durchzeichnen kann.

41 **A: Denk dir nichts bei meinen Fragen. Ich frage das wahrscheinlich überall so ..**

42 B: Okay, nein also das wäre für mich richtig.

43 Aufgabe 4: R3

44 **A: Okay, dann gehen wir weiter zu viertens. Die Tangente am Funktionsgraphen**
45 **kann einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben.**

46 B: Ja, das ist falsch.

47 **A: Weil?**

48 B: Naja, die Tangente berührt ja immer wie ein „T“ nur in einem Punkt den Graphen.

49 So hätte ich das jetzt ...

50 **A: Mhm, überlege mal. Denk dir mal eine Funktion und lege eine Tangente an. Ist es**
51 **so, dass es immer stimmt, also nur einmal berührt ...?**

52 B: Naja, ach so, aber dann ist es ja keine Tangente, wenn es in mehreren Punkten
53 berührt, oder? Naja ist schon klar, wenn es eine Funktion ist, die einmal rauf und
54 einmal runter geht und im obersten Punkt lege ich eine Tangente an, dann wird es die
55 anderen schneiden, oder einen von den unteren halt, dann wird es durchschneiden.

56 Aber dann ist es ja keine Tangente, oder? Wenn es mehrere Berührungspunkt hat?

57 **A: Naja, das ist die Frage. Aber du meinst jetzt eben, wenn es so eine**
58 **Polynomfunktion oder so ist, die so ...**

59 B: Ja, also keine regelmäßige halt ...

60 **A: Ja. Naja, dann ist die Frage. Wenn man da eben eine Tangente anlegt, dann**
61 **berührt sie ja eigentlich eine Punkte, wie du gesagt hast.**

62 B: Ja, aber dann ist es keine Tangente. Weil Tangente, da ist ja die Definition, dass sie
63 nur in einem Punkt berührt.

64 **A: Mhm, wir können das auch einfach so stehen lassen, wenn du möchtest. Hättest**
65 **du einen anderen Begriff dafür, wenn man die Gerade an eine Funktion anlegt?**

66 B: Naja, dann wäre es eigentlich eine Sekante, oder? Also wenn man es anlegt, und
67 es schneidet in mehreren Punkten, oder? Also hätte ich jetzt gesagt.

68 **A: Naja, ich weiß schon, was du meinst.**

69 B: Vielleicht ist das auch bei mir, weil ich jetzt gerade mit dem Kreis in der Unterstufe
70 so viel mache.

71 **A: Ja, genau. Also im Endeffekt würdest du sagen, der Begriff Tangente ist das, was**
72 **dich da stört, oder?**

73 B: Mhm, genau.

74 **A: Verstehe, okay. Das heißt Tendenz geht eher zu falsch mit: das ist dann einfach**
75 **keine Tangente mehr. Okay, ich verstehe. Ist gut. Dann gehen wir weiter?**

76 B: Passt.

77 Aufgabe 5: F1

78 **A: Passt, dann haben wir bei fünftens eine Funktion, die irgendwo eine erste**
79 **Ableitung null hat und die kann dann nicht mehr streng monoton sein.**

80 B: Puh, warte, ich versuche mich zu erinnern. [lacht]

81 **A: Ja, kein Stress. Überlege mal durch, was das alles heißt.**

82 B: Ja ... die Begriffe glaube ich, habe ich noch, aber ... wenn es eine Ableitung ist, weiß
83 ich nicht mehr, ob es dann die Richtung ändert. Ich glaube es ist richtig, weil wenn es
84 eine Ableitung ist, dann ändert es die Richtung, aber ich bin mir nicht mehr sicher.

85 **A: Weil, wenn die erste Ableitung null ist, was können das für Stellen sein? Vielleicht**
86 **kannst du dir von dem her überlegen, was passiert mit der Monotonie?**

87 B: Naja, Extremstellen oder Wendestellen oder so etwas. Naja, dann ist es eigentlich
88 nicht mehr streng monoton... [überlegt]

89 **A: Also würdest du sagen, dann ist es richtig?**

90 B: Ja, eher.

91 **A: Du meinst jetzt bei einer Extremstelle, dass es dann nicht mehr streng monoton**
92 **steigend ist?**

93 B: Ja ... [überlegt] eine Extremstelle, fällt da eine Wendestelle auch rein?

94 **A: Ich glaube nicht. Was wäre, wenn es eine Wendestelle ist? Würde sich dann die**
95 **Monotonie ändern? Wäre es dann immer noch streng monoton, wenn es eine**
96 **Wendestelle hat? Du kannst es dir auch gerne aufzeichnen, wenn dir das hilft.**

97 B: Ja, ich überlege gerade. Naja, wenn es eine Wendestelle ist, dann ... dann kann sie
98 nicht mehr ...

99 **A: Also, wenn die Funktion eine Wendestelle hat – ändert die Wendestelle die**
100 **Monotonie?**

101 B: Nein, also eigentlich ist es dann falsch, weil es kann schon noch weiter fallen oder
102 weiter steigen.

103 **A: Fällt dir eine Funktion ein, wo es so ist?**

104 [ZOOM Meeting ist aus, wir beginnen ein neues]

105 B: So, ich weiß es irgendwie auch gerade nicht so ganz.

106 **A: Das macht nichts. Ich verstehe genau, was du meinst.**

107 B: Ja, ich weiß sonst nicht mehr dazu...

108 **A: Aber, wenn du ein Gegenbeispiel finden müsstest, dann würdest du eher sagen**
109 **Funktion mit genau einer Wendestelle?**

110 B: Ja genau.

111 **A: Oder glaubst du nicht, dass es dann so sein kann, dass es zum Beispiel streng**
112 **monoton steigend bleibt.**

113 B: Naja, ich weiß nicht, ob es eine Wendestelle ist, wenn ich zum Beispiel den
114 Funktionsgraph steigend habe und dann steigt er und dann bleibt er kurz flach und
115 dann steigt er wieder, dann ist es ja keine Wendestelle, weil es wendet ja nicht die
116 Richtung, oder? Aber es steigt ja im Prinzip trotzdem.

117 **A: Naja, eine Wendestelle wäre es dann eigentlich ja schon, oder? Weil wir gehen**
118 **da von Linkskrümmung auf Rechtskrümmung ...**

119 B: Ja, genau. Stimmt eigentlich. Ja, dann hätte ich das mit der Wendestelle
120 genommen.

121 **A: Okay passt, genau deshalb reden wir ja auch drüber. Das heißt, du sagst dass die**
122 **Monotonie schon gleich bleiben kann, wenn es eine Wendestelle gibt, oder?**

123 B: Naja, aber vielleicht nicht mehr streng.

124 **A: Naja, das kommt jetzt drauf an ... also ob sie wirklich ruht, also der Funktionswert**
125 **eine Zeit lang gleich bleibt, oder ob der Funktionswert immer mehr wird.**

126 B: Naja, aber es könnte schon sein, aber es muss ja nicht sein?
127 **A: Eh, aber wenn es ja ein Beispiel gibt, wo es so ist, dann wäre die Aussage schon**
128 **falsch, weil ein Gegenbeispiel reicht ja ...**
129 B: Ja, stimmt. Ja dann würde ich falsch sagen. Und sagen, es gibt ein Beispiel, wo es
130 so ist. (mit Wendestelle)

131 **Aufgabe 6: F9**

132 **A: Okay, dann gehen wir einfach mal weiter, oder? Jetzt sind wir gleich bei so etwas**
133 **ähnlichem. Also wenn die zweite Ableitung null ist ...**

134 B: Ja, genau. Also das ist glaube ich genau die Definition davon, also wenn die zweite
135 Ableitung null ist, dann ist es eine Wendestelle.

136 **A: Also würdest du meinen, das ist quasi die Bedingung dafür?**

137 B: Ja.

138 **A: Okay, also mit Tendenz zu richtig. Gut ... Dann gehe ich gleich weiter.**

139 **Aufgabe 7: F5**

140 **A: So, das ist jetzt die Aussage ... Konvergenz ist ja jetzt auch in der Schule nicht**
141 **mehr so sehr präsent.**

142 B: [überlegt kurz die Definitionen von konvergent und divergent] Bei divergent
143 addiere ich ja immer das gleiche dazu und bei konvergent immer was anderes ... Ja
144 und wenn der Abstand immer kleiner wird, dann müsste die Aussage ja stimmen.

145 **A: Mh, das ist prinzipiell etwas was sehr oft angenommen wird, meine ich, deshalb**
146 **steht diese Aussage auch da.**

147 B: Naja, dann wird es wahrscheinlich falsch sein ... [lacht]

148 **A: Naja kann richtig auch sein, also lass dich nicht von mir verwirren. [lacht]**

149 B: Nein ... also ich hätte jetzt intuitiv gesagt, es ist richtig. Weil der Abstand immer
150 kleiner wird ...

151 **A: Mhm, alles gut. Wie gesagt, diese Aussage hat schon einiges an Kopfzerbrechen**
152 **bereitet. Also dann gehen wir weiter. Dann sind wir schon beim letzten.**

153 **Aufgabe 8: R5**

154 **A: Der konstante Faktor bleibt immer erhalten.**

155 B: Ja, das ist ja eigentlich eine Regel. Ich meine, es wird nicht alles richtig sein, also
156 dass alle Aussagen richtig sein. [lacht]

157 **A: Naja, es sind ja auch richtige Aussagen dabei, also ...**

158 B: Ja, also bei dem hätte ich es jetzt eher sicher als richtig gesagt, weil ich glaube, dass
159 das die Regel ist, dass die Konstante c erhalten bleibt beim Differenzieren.

160 **A: Okay, also das als sicher richtig?**

161 B: Ja.

162 **A: Mhm, dann wollen wir vielleicht noch einmal von vorne durchgehen?**

163 B: Ja, wir können gerne noch einmal von vorne durchgehen. Vielleicht kommt mir
164 noch eine Erleuchtung!

165 **A: Ja, man kommt doch manchmal noch auf andere Gedanken beim zweiten Mal**
166 **lesen oder wenn man die anderen Dinge schon gesehen hat. Also beim ersten, hast**
167 **du gemeint, du tendierst zu richtig, weil es dann immer eine lokale Extremstelle ist.**

168 B: Nein, also eigentlich glaube ich jetzt, dass es falsch ist. Es muss ja nicht immer eine
169 Extremstelle sein ... ja, es muss nicht immer eine Extremstelle sein, weil es kann ja
170 eben auch eine Wendestelle oder ein Sattelstelle sein. Weil Extremstelle meinst du ja
171 nur das höchste und das niedrigste, oder?

172 **A: Extremstelle heißt Minimum oder Maximum.**

173 B: Ja, dann muss das falsch sein. Das habe ich am Anfang noch nicht ganz gecheckt.
174 Also nein, es muss keine lokale Extremstelle sein und dann ist es falsch. Weil es könnte
175 ja auch ein Sattelpunkt oder eine Wendestelle sein ... oder eine Nullstelle sowieso.

176 **A: Jetzt muss ich noch einmal blöd nachhaken – fällt dir da eine Funktion ein, wo es**
177 **so sein könnte, eine konkrete? Muss nicht sein, aber vielleicht fällt dir ja eine ein ...**

178 B: Nein, tut mir leid. Wahrscheinlich ist es total aufgelegt [lacht]. Aber mir fällt jetzt
179 keine ein.

180 **A: Okay, passt, kein Problem. Dann haben wir das einmal. Dann waren wir da bei**
181 **dem (2.) ... da warst du dir auch unsicher.**

182 B: Dass man das alles vergisst, gell? [lacht] Weil da weiß ich, ich habe selbst solche
183 Sachen voll gerne gerechnet in der Oberstufe. Und dass das jetzt, wenn man es nicht
184 mehr braucht, einfach weg ist.

185 **A: Ja, ... das stimmt. Kommt da noch irgendetwas zum Integral?**

186 B: Ja, nein, ich glaube nicht. Achso, warte mal. Ich glaube doch, es ist falsch. Weil es
187 ist ja immer eine Fläche und es kann ja keine negative Fläche sein. Weil es muss immer
188 ein positive Fläche sein, oder?

189 **A: Naja, genau das ist die Frage. Kann das Integral auch einen negativen Wert haben**
190 **oder muss es immer positiv sein?**

191 B: Oh ja, weil man rechnet ja immer die hintere Grenze minus der vorderen Grenze
192 und dann kann es kein negativer Wert sein. Und das lasse ich jetzt einfach so stehen.

193 **A: Okay, passt! Also du würdest sagen falsch?**

194 B: Ja genau, weil bei der Rechnung ja hintere Grenze minus vordere Grenze ist.

195 **A: Dann war das mit den stetigen Funktionen.**

196 B: Ja, da bleibe ich bei richtig, weil bis mir das in Erinnerung kommt ... [lacht]. Bei 4.
197 da bleibe ich auch bei dem, was ich gesagt habe.

198 **A: Dann waren wir da (5.) eher bei falsch, weil wenn es eine Wendestelle hat, dann**
199 **geht das quasi.**

200 B: Ja, genau.

201 **A: Genau, da (bei 6.) hast du gesagt richtig, weil das immer so sein muss, quasi.**

202 B: Ja.

203 **A: Oder magst du noch mal überlegen?**

204 B: Nein, ich hätte gesagt, das ist die Definition, aber ...

205 **A: Wir können es gerne so stehen lassen. Dann bei den Folgen (7.) ...**

206 B: Wahrscheinlich ist es falsch, aber ich weiß nicht, warum [lacht].

207 **A: Den Satz habe ich nicht zum ersten Mal gehört [lacht].**

208 B: Also ich glaube eher, dass es falsch ist, weil es so dasteht und man glaube es ist
209 richtig. Als Falle. Keine Ahnung.

210 **A: Mhm, aber Beispiel würde dir keines einfallen, oder?**

211 B: Nein.

212 **A: Aber Tendenz zu falsch?**

213 B: Ja, genau.

214 A: Dann sind wir beim letzten. Da warst du dir eh gleich ziemlich sicher.

215 **B: Ja, genau.**

216 A: Dann passt. Sollen wir es so lassen?

217 **B: Ja, ich hoffe, du kannst damit etwas anfangen [lacht].**

1 **Transkript IP11 (ILF 2)**

2 **Aufgabe 1: F7**

3 **A: Passt, dann starten wir einfach mal mit der ersten Aussage. Was hast du**
4 **angekreuzt und warum?**

5 B: Also ich habe falsch angekreuzt, weil man bei der ersten Ableitung. Also die erste
6 Ableitung muss 0 sein, das ist korrekt, aber es muss sich ja auch die Monotonie
7 ändern, weil sonst hätte ich eine Terrassenstelle. Und als Gegenbeispiel würde ich
8 eben genau diese Terrassenstelle anführen.

9 **A: Mhm, was wäre das dann zum Beispiel für eine Funktion?**

10 B: Eine Funktion dritten Grades, oder fünften Grades, irgendeine ungerade ...

11 **A: Alles klar, okay passt.**

12 **Aufgabe 2: R6**

13 B: Das bestimmte Integral einer Funktion kann auch einen negativen Wert annehmen.
14 Ja, wenn es unterhalb der x -Achse ist, sprich im Negativen der y -Achse, das wäre
15 meiner Meinung nach richtig.

16 **A: Alles klar.**

17 **Aufgabe 3: F3**

18 B: Stetige Funktionen lassen sich durchzeichnen, ohne mit dem Stift abzusetzen. Ja,
19 ich müsste jetzt noch einmal nachlesen, wie das bei rationalen Funktionen ist und da
20 muss ich natürlich, an einer Polstelle muss ich den Stift absetzen. Aber prinzipiell kann
21 man das schon so sagen, als nichtmathematische Erklärung, dass es eben
22 durchzuzeichnen ist.

23 **A: Und, weil du gesagt hast, diese rationalen Funktionen. Wäre die dann, wenn du**
24 **von einer Polstelle sprichst, wäre die dann stetig?**

25 B: Ja, das müsste ich eben nochmal nachlesen. Ich glaube nämlich schon ... Weil eine
26 Polstelle ist ja von der Definitionsmenge ausgenommen. Und differenzierbar ist sie.
27 Differenzierbar ist sie sicher. Vielleicht ist sie auch nicht stetig ... also das müsste ich
28 nachlesen.

29 **A: Aber das wäre ja dann, wenn die stetig wäre, dann wäre das ja eigentlich ein**
30 **Gegenbeispiel, oder?**

31 B: Genau. Deswegen sage ich, da bin ich mir nicht ganz sicher, das müsste ich jetzt
32 nachlesen. Aber ich verwende diese Erklärung auch, um den Schülern ein bisschen
33 anschaulicher zu erklären, was damit gemeint ist.

34 **A: Mhm, okay. Passt, alles klar.**

35 Aufgabe 4: R3

36 B: So, eine Tangente an einen Funktionsgraphen kann mit dem Graphen einen oder
37 mehrere Punkte gemeinsam haben. Das ist richtig, meiner Meinung nach, auch wenn
38 die Tangente prinzipiell so definiert ist, dass es einen Berührungspunkt gibt, aber eine
39 Funktion ist ja unendlich lang und da kann es natürlich dann zu einem weiteren
40 Schnittpunkt kommen.

41 **A: Okay, also richtig?**

42 B: Ja, ist also richtig.

43 Aufgabe 5: F1

44 B: Dann Nummer fünf. [liest 5 vor] Das ist meiner Meinung nach falsch, denn auch
45 eine Funktion dritten Grades zum Beispiel mit einer Terrassenstelle ist sehr wohl
46 streng monoton. Nachdem wie man es auch differenziert, kann auch eine
47 quadratische Funktion trotzdem noch streng monoton sein, denn es kann ja Intervalle
48 geben.

49 **A: Genau, das käme dann eben drauf an, ob man es in Intervalle teilt, oder nicht.**

50 B: Ja, genau.

51 **A: Mhm, kenne mich aus. Also auf jeden Fall falsch und ein Gegenbeispiel.**

52 Aufgabe 6: F9

53 B: Frage Nummer 6. Zweite Ableitung null, Wendestelle auf jeden Fall, das ist falsch.
54 Man braucht nur eine (Funktion) vierten Grades anschauen, die hat eine Extremstelle
55 bei p , sagen wir jetzt einmal, aber keine Wendestelle. Und demnach wäre auch die
56 zweite Ableitung null bei einer x^4 zum Beispiel, also falsch.

57 **A: Okay, das wäre also gleich ein Gegenbeispiel?**

58 B: Gegenbeispiel x^4 , x^6 , x^8 , ...

59 **A: Mhm, okay.**

60 Aufgabe 7: F5

61 B: Frage sieben glaube ich ist richtig. Müsste ich vielleicht auch nochmal nachlesen,
62 das ist schon ein paar Jährchen her, dass ich das gebraucht hätte. [lacht]

63 **A: Okay.**

64 Aufgabe 8: R5

65 B: Dann ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren immer erhalten, das heißt,
66 eh schon wissen, würde ich als richtig bezeichnen.

67 **A: Mhm, alles klar. Magst du noch einmal drüber schauen?**

68 B: Oje. [lacht] Nein, für mich passt es.