

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zur Differenzierbarkeit
einer Funktion

verfasst von | submitted by

Maria Hörler BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 510 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Geographie und wirtschaftliche Bildung
Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Zusammenfassung

In der vorliegenden Masterarbeit werden die Grundvorstellungen von Lehramtsstudierenden der Mathematik zur Differenzierbarkeit untersucht. Dafür wird vor und nach der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ eine schriftliche Befragung durchgeführt und die Antworten der Studierenden bewertet und verglichen. Die Kategorisierung der Äußerungen stellt eine Herausforderung dar, wodurch zwei unterschiedliche Bewertungen vorgestellt werden. Beide Auswertungen zeigen, dass die lokale Linearität als Grundvorstellung am häufigsten vorkommt und eine Verbesserung der Antworten nach der theoretischen Befassung im Zuge der Lehrveranstaltung festgestellt werden kann. Zudem kommt die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor“ in keiner Antwort vor. Die Anzahl der Äußerungen zur Tangentensteigung hält sich im Prä- und Posttest auf einem geringen Niveau. Darüber hinaus ist bei der Grundvorstellung „lokale Änderungsrate“ ein großer Unterschied zwischen den beiden Beurteilungen feststellbar, wodurch diese in einer Auswertung häufig und in der anderen kaum zugeteilt wird.

Abstract

In this master's thesis, the basic mental models of prospective teachers regarding the derivative are examined. For this purpose, a written survey is conducted before and after the course 'School Mathematics Analysis', and the students' responses are evaluated and compared. Categorizing the statements poses a challenge, leading to the introduction of two different assessments. Both analyses show that local linearity is most frequently assigned as a basic mental model, and an improvement in responses can be observed after theoretical engagement during the course. In addition, the basic idea of amplification factor does not occur in any response. The allocation of statements to tangent slope remains at a low level in both tests. Furthermore, there is a significant difference between the two assessments regarding the basic mental model of local rate of change, with it being frequently assigned in one analysis and hardly ever in the other.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meinen aufrichtigen Dank an all diejenigen richten, die mich bei der Erstellung dieser Masterarbeit und bei meinem Studium unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer, Herrn Dr. Stefan Götz, dessen fachliche Kompetenz, konstruktive Kritik und kontinuierliche Unterstützung maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Vielen Dank für Ihre wertvolle Hilfe.

Zudem bedanke ich mich beim Team des BELLA-Projekts für die Möglichkeit, die Fragebögen auszuwerten und ganz besonders bei Dr. Roland Steinbauer für die Hilfestellungen während des Verfassens der Arbeit.

Darüber hinaus möchte ich meinen Eltern und meinem Bruder für die Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit danken. Nur durch euch habe ich die Möglichkeit und den Ehrgeiz gehabt, all die Prüfungen und Lehrveranstaltungen zu absolvieren.

Ein großes Dankeschön geht auch an meinen Freund, der meine seelische Stütze im ganzen Studium gewesen ist und in stressigen Situationen stets die richtigen Worte gefunden hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Fachlicher Hintergrund zur Differenzierbarkeit	8
2.1	Differenzierbarkeit einer Funktion	8
2.2	Die Differenzierbarkeit im Lehrplan der AHS.....	12
3	Ziele und Herausforderungen im Analysisunterricht	14
4	Grundvorstellungen in der Mathematik.....	17
5	Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit	20
5.1	Tangentensteigung	20
5.2	Lokale Änderungsrate.....	24
5.3	Lokale Linearität	26
5.4	Verstärkungsfaktor.....	28
6	Aktueller Forschungsstand.....	29
7	Forschungsinteresse.....	40
7.1	Forschungsfragen.....	40
7.2	Hypothesen	40
8	Methodik	42
8.1	Datengrundlage	42
8.2	Datenerhebung und Erhebungsinstrument.....	42
8.3	Stichprobe	43
8.4	Codierleitfaden.....	44
9	Datenauswertung.....	46
9.1	Bewertung der Antworten.....	46
9.2	Vorhandene Grundvorstellungen (Codierleitfaden A)	49
9.2.1	Statistische Auswertung	50
9.2.2	Grundvorstellung „Tangentensteigung“	52
9.2.3	Grundvorstellung „Lokale Änderungsrate“	53
9.2.4	Grundvorstellung „Lokale Linearität“	53
9.2.5	Zuordnung „Grundvorstellung nicht vorhanden“	54

9.3	Vorhandene Grundvorstellungen (Codierleitfaden B)	55
9.3.1	Statistische Auswertung	56
9.3.2	Grundvorstellung „Tangentensteigung“	58
9.3.3	Grundvorstellung „Lokale Änderungsrate“	58
9.3.4	Grundvorstellung „Lokale Linearität“	58
9.3.5	Zuordnung „Grundvorstellung nicht vorhanden“	59
9.3.6	Weitere Kategorien	60
9.4	Vergleich der Codierleitfäden A und B	61
9.5	Einzelfallbetrachtung.....	61
10	Überblick über die Studie 2018/19	65
10.1	Vergleich der beiden Erhebungen.....	66
11	Diskussion der Ergebnisse.....	68
12	Fazit und Ausblick.....	71
	Literaturverzeichnis	74
	Abbildungsverzeichnis.....	78
	Tabellenverzeichnis.....	79
	Anhang.....	80

1 Einleitung

"Mathematics is not about numbers, equations, computations, or algorithms: it is about understanding." - William Paul Thurston

Mit diesem Zitat wird hervorgehoben, dass das Verständnis in der Mathematik eine hohe Bedeutung hat. Dies stellt unter anderem im schulischen Analysisunterricht eine große Herausforderung dar (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S.4f.). Um die Inhalte in der Schule erfassen zu können, spricht man in der deutschsprachigen Fachdidaktik der Mathematik von Grundvorstellungen (vgl. Hahn & Prediger, 2008, S. 165ff.). In diesem Zusammenhang befasst sich die vorliegende Arbeit mit den grundlegenden Vorstellungen zur Differenzierbarkeit – einer wichtigen Eigenschaft von Funktionen aus dem mathematischen Teilgebiet Analysis.

Das Ziel dieser Masterarbeit besteht darin, die Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit von Lehramtsstudierenden der Mathematik zu untersuchen. Es soll überprüft werden, welche (normativen) Grundvorstellungen bei angehenden Lehrpersonen vor und nach einer Lehrveranstaltung am präsentesten sind. Dafür sind folgende Forschungsfragen formuliert worden: (1) Welche Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit kommen bei den Lehramtsstudierenden am häufigsten vor? (2) Inwiefern verändert sich die Verteilung der Grundvorstellungen nach dem Besuch der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“? Um diese Forschungsfragen zu beantworten, werden die Fragebögen aus dem Projekt „BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis“ ausgewertet.

Für eine klare und nachvollziehbare Darstellung der Inhalte gliedert sich diese Arbeit in einen theoretischen und einen empirischen Teil. Im ersten Abschnitt erfolgt zunächst eine eingehende Analyse der Literatur und vorhandener Studien. Dabei werden im ersten Schritt die fachmathematischen Inhalte zur Differenzierbarkeit aufgearbeitet, woraufhin dann deren Eingliederung in den Lehrplan der AHS folgt. Damit soll unter anderem die Bedeutung der Analysis in der Schule verdeutlicht werden. In weiterer Folge befasst sich die Masterarbeit im nächsten Kapitel mit der Zielsetzung und den Schwierigkeiten des Analysisunterrichts. Anschließend wird die Wichtigkeit von Grundvorstellungen in der Mathematik erläutert. Im weiteren Verlauf werden die grundlegenden Vorstellungen „Tangentensteigung“, „lokale Änderungsrate“, „lokale Linearität“ und „Verstärkungsfaktor“ in Bezug auf die Differenzierbarkeit im Detail betrachtet. Daraufhin folgt die Darstellung einiger ausgewählter Studien zum Thema Differenzierbarkeit, wodurch ein Überblick über den aktuellen Forschungsstand gewährt werden soll.

Im zweiten Teil der Masterarbeit wird die durchgeführte Studie vorgestellt. Dazu werden zunächst die Fragestellungen und Hypothesen näher beleuchtet. Danach wird die Vorgehensweise der Datenerhebung und -aufarbeitung dargestellt. Zum Schluss werden die Ergebnisse präsentiert und diskutiert.

2 Fachlicher Hintergrund zur Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel wird zunächst auf das Differenzieren einer reellen Funktion eingegangen. Dazu werden die wichtigsten Definitionen aus der Fachmathematik vorgestellt. Im Anschluss folgt die Abbildung der Differenzierbarkeit im Lehrplan der AHS in Österreich.

2.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Ein wichtiger Begriff der Analysis ist die Differenzierbarkeit einer reellen Funktion. Die Überlegungen dazu gehen bis ins 17. Jahrhundert zurück und sind in etwa zur selben Zeit, aber unabhängig voneinander, von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton entwickelt worden. Damals ist die Differentialrechnung als Infinitesimalrechnung bezeichnet worden, was auf die Vorstellung von „unendlich kleinen Größen“ zurückgeht. Die Lösung des Tangentenproblems, also die Annäherung mithilfe einer Tangente in einem Punkt an eine Kurve, ist auf Leibniz zurückzuführen. Er hat die Tangentensteigung als Steigung der Hypotenuse in einem „unendlich kleinen“ Dreieck gesehen, welches sich durch den Grenzfall der Sekantendreiecke ergibt (vgl. Behrends, 2011, S. 241). Demgegenüber hat Newton den physikalischen Blickpunkt gewählt und die Momentangeschwindigkeit herangezogen (vgl. Büchter & Henn, 2010, S. 80).

Im Allgemeinen geht es bei der Differenzierbarkeit darum, das Änderungsverhalten einer Funktion lokal anzugeben. Sei eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie zwei Stellen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann beschreibt die Differenz

$$f(b) - f(a)$$

die Änderung des Funktionswertes im Intervall $[a, b]$. Die relative Änderung wird durch den Quotienten

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

angegeben (vgl. Bauer, 2013, S. 52). Dieser wird als Differenzenquotient bezeichnet und gibt die mittlere Änderungsrate im Intervall $[a, b]$ an (vgl. Büchter & Henn, 2010, S. 88). Abbildung 1 zeigt hierzu die grafische Deutung des Differenzenquotienten. Hierbei entspricht die Steigung der Sekante s durch die Punkte A und B dem Differenzenquotient der Funktion f im Intervall $[a, b]$.

Um nun das lokale Änderungsverhalten an einer Stelle a zu beschreiben, benötigt man den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Wenn dieser Grenzwert einer Funktion f existiert, dann ist diese differenzierbar in a (vgl. Bauer, 2013, S. 52).

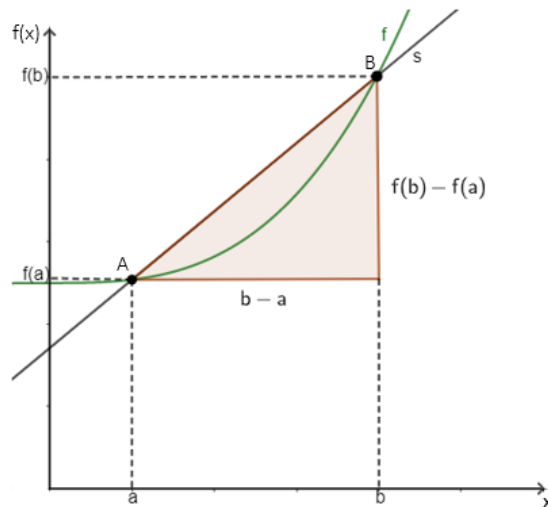


Abbildung 1: Grafische Deutung des Differenzenquotienten

Definition 1: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x \in M$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existiert (Plaue & Scherfner, 2019, S. 205).

Anhand Abbildung 2 und Abbildung 3 wird die grafische Deutung des Übergangs vom Differenzenquotient zum Differentialquotienten sichtbar. Die linke Darstellung in Abbildung 2 zeigt den Differenzenquotient im Intervall $[x_0, x_0 + \Delta x]$, der der Steigung der Sekante durch die Punkte A und B_1 entspricht. Nun wandert der Punkt B_1 immer weiter gegen A , was im rechten Bild (B_2) erkennbar ist. Das Intervall $[x_0, x_0 + \Delta x]$ wird immer kleiner, sodass auch die Differenz Δx beliebig klein wird. Schließlich entspricht in Abbildung 3 die Steigung der Tangente t im Punkt A der Steigung der Funktion f in diesem Punkt. Der Grenzwert der Sekantensteigung ist damit die Steigung der Tangente im Punkt A (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 156).

Dieser Grenzwert wird die Ableitung von f an der Stelle x genannt. Es gibt unterschiedliche Schreibweisen für die Ableitung, wie zum Beispiel $f'(x)$ und $\frac{df}{dx}(x)$. Falls die Funktion f an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar ist, dann heißt f differenzierbar (vgl. Plaue & Scherfner, 2019, S. 205).

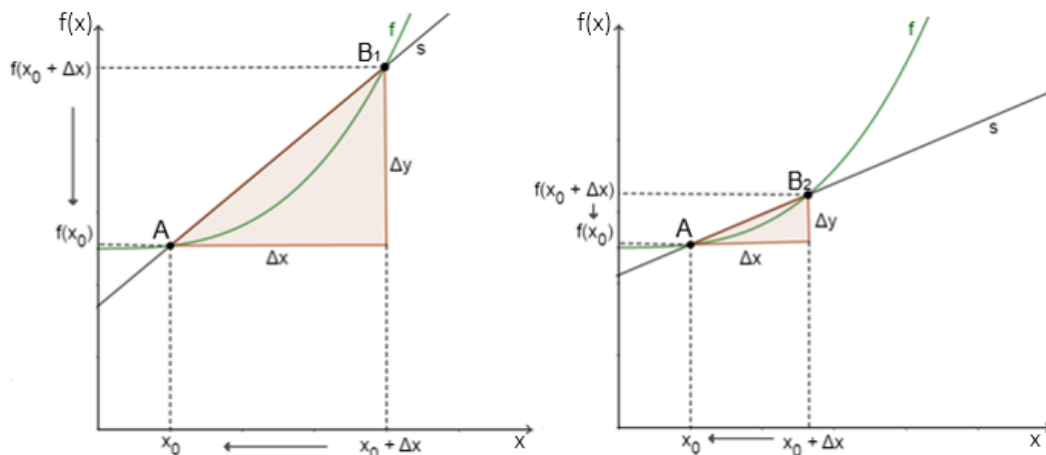


Abbildung 2: Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten 1/2

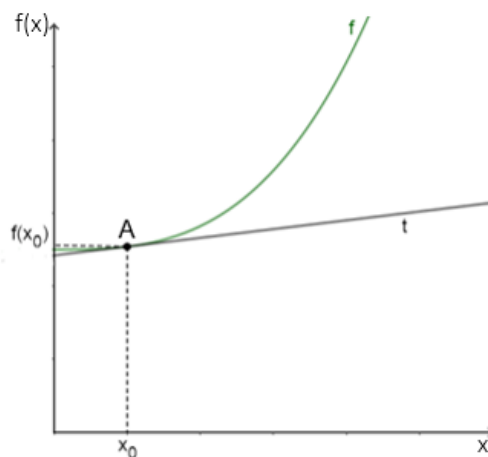


Abbildung 3: Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten 2/2

Definition 2: Die Funktion f ist in x_0 differenzierbar, wenn eine Gerade t_{x_0} durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ existiert, sodass der Approximationsfehler

$$r(h) := f(x_0 + h) - t_{x_0}(x_0 + h), \quad (x_0 + h \in D)$$

der Bedingung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

entspricht (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 88).

Die Steigung der Gerade t_{x_0} wird Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt und mit $f'(x)$ angegeben (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 88).

Die beiden angegebenen Definitionen sind äquivalent, jedoch werden verschiedene Blickpunkte der Differenzierbarkeit betrachtet. Während die erste Definition auf die Ableitung als lokale Änderungsrate abzielt, geht die zweite Definition auf die Tangentensteigung als

bestapproximierende Gerade ein (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 89). Die Äquivalenz wird im folgenden Satz gezeigt.

Satz: (Differenzierbarkeit mittels linearer Approximation)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf einem Intervall D und sei $x_0 \in D$. Die Funktion f ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r: D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - c \cdot h$$

$$\text{und } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

gilt. Dann ist $c = f'(x_0)$ (vgl. Steinbauer, 2024, S. 158).

Beweis:

a) Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Approximierbarkeit

Setze $c := f'(x_0)$ und $r(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$. Dann gilt für $h \neq 0$ und $x_0 + h \in D$

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

b) Approximierbarkeit $\Rightarrow$ Differenzierbarkeit

Für $h \neq 0$ und $x_0 + h \in D$ gilt nach Voraussetzung

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{r(h)}{h} + c \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 + c.$$

Damit ist f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = c$ (vgl. Steinbauer, 2024, S. 158).

□

Darüber hinaus folgt aus der Differenzierbarkeit einer Funktion auch die Stetigkeit. Die Umkehrung gilt jedoch nicht (vgl. Deiser, 2011, S. 217).

Satz: Ist f differenzierbar an der Stelle a , so ist f bei a auch stetig (Büchter & Henn, 2010, S. 199).

Beweis: Der Nenner des Differenzenquotienten $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ geht für $\Delta x \rightarrow 0$ gegen null, wobei $\Delta x \neq 0$ gilt. Es ist dabei notwendig, dass der Zähler genauso gegen null strebt, damit ein sinnvoller Grenzwert möglich ist. Dadurch ergibt sich der unbestimmte Ausdruck „ $\frac{0}{0}$ “, was bedeutet, dass $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ gilt und damit f bei a stetig ist (vgl. Büchter & Henn, 2010, S. 199).

□

Damit ist die Stetigkeit einer Funktion an der Stelle a eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit, jedoch nicht hinreichend. Dies kann an einem Gegenbeispiel gezeigt werden. Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist im gesamten Definitionsbereich stetig. Der Differenzenquotient für $x > 0$ entspricht der Steigung des Funktionsgraphen und beträgt 1. Für $x < 0$ beträgt die Steigung und damit der Differenzenquotient -1 . Für $x_0 = 0$ ergibt sich jedoch das Problem, dass die links- und rechtsseitige Ableitung zwar existieren, aber ungleich sind und damit f an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \\ &= \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \Delta x < 0 \\ 1, & \Delta x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(vgl. Büchter & Henn, 2010, S. 199f.).

Damit gilt:

Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit
 Stetigkeit $\nRightarrow$ Differenzierbarkeit

2.2 Die Differenzierbarkeit im Lehrplan der AHS

Grundlagen für die Differenzierbarkeit werden bereits in der AHS Unterstufe erlernt. Hierbei steht zunächst der Umgang mit Funktionen in verschiedenen Darstellungsformen sowie der Zusammenhang mit Proportionalitäten im Vordergrund. Damit einhergehend wird für die lineare Funktion die konstante Steigung k ihres Graphen in der Form $y = kx + d$ thematisiert (vgl. Kleine, 2012, S. 46).

In höheren Schulstufen wird auf diesem Vorwissen aufgebaut. Für die AHS Oberstufe werden hierfür die Kompetenzen, die im Fach Mathematik erreicht werden sollen, bezogen auf die Handlungs-, Inhalts- und Komplexitätsdimension, unterschieden. Die Inhaltsdimension beschreibt den Bezug zu den mathematischen Inhalten, das heißt, was gelernt werden muss, um in weiterer Folge damit arbeiten zu können. Anhand dieser Dimension wird die Relevanz der Analysis in der Sekundarstufe 2 deutlich, denn neben den Bereichen „Algebra und Geometrie“ und „Wahrscheinlichkeit und Statistik“ werden „Funktionale Abhängigkeiten“ sowie die „Differential- und Integralrechnung“ im Kompetenzmodell für die standardisierte Reifeprüfung aufgelistet (vgl. BMBF, 2012, S. 10f.).

Im Lehrplan der AHS Oberstufe beginnt man in der fünften Klasse (neunte Schulstufe) das Wissen aus der Sekundarstufe 1 zu wiederholen und zu erweitern. Dabei werden beispielsweise erneut die unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen und

direkte sowie indirekte Proportionalitäten genannt. In der zehnten Schulstufe werden verschiedene Funktionstypen wie beispielsweise die Potenzfunktion oder die Polynomfunktion eingeführt und unter anderem auf das Monotonieverhalten oder auf Extremstellen untersucht. Zudem wird die mittlere Änderungsrate berechnet und im Kapitel „Folgen“ der Grenzwert konvergenter Folgen bestimmt (vgl. BMB, 2016, S. 8).

In der siebten Klasse (elfte Schulstufe) tritt der Begriff „Differentialrechnung“ auf. Die mittlere Änderungsrate aus der vorherigen Schulstufe wird im Lehrplan nun als Differenzenquotient bezeichnet und durch die lokale Betrachtung, den Differentialquotienten, erweitert. Die Ableitungsregeln sowie die Bedeutung der Ableitungen in Bezug auf das Monotonieverhalten, das Krümmungsverhalten und Extrem-, Wende- und Sattelstellen müssen beherrscht werden. Darüber hinaus wird explizit auf den Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit einer Funktion sowie der Stetigkeit verwiesen. Das Wissen zur Differentialrechnung soll in verschiedenen Kontexten angewendet werden können (vgl. BMB, 2016, S. 9).

Um den zuletzt genannten Punkt aus dem Lehrplan aufzugreifen und das Wissen aus der Differentialrechnung in verschiedenen Anwendungsbereichen nutzen zu können, muss auch der Mathematikunterricht verständnisorientiert ausgelegt werden. Dafür müssen laut Büchter & Henn (2013) Schülerinnen und Schüler animiert werden, sich mit Aufgabenstellungen zu befassen, die ihre Vorstellung in Hinblick auf die fachmathematischen Inhalte schulen.

3 Ziele und Herausforderungen im Analysisunterricht

Der Beitrag zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler durch den Mathematikunterricht stützt sich auf drei Grunderfahrungen:

- „G1: Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur mithilfe der Mathematik und ihrer Anwendungsbereiche in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen;
- G2: mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktive Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen;
- G3: in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben“ (Greefrath et al., 2016, S. 2).

Damit bezieht sich die erste Grunderfahrung G1 auf Anwendungen und verbindet die Mathematik vor allem mit unserer Umgebung und umgekehrt. Es sollen beispielsweise Erscheinungen aus der Technik und der Natur mithilfe von Mathematik beschrieben, verstanden und bewertet werden. Bei der zweiten Grunderfahrung G2 geht es darum, die Struktur der Mathematik zu erfassen und damit unter anderem mit Begriffen und Symbolen dieser Wissenschaft arbeiten zu können. Unter der letzten Grunderfahrung G3 versteht man Mathematik als *heuristische* Wissenschaft. Die Fähigkeit, Probleme zu lösen, bietet damit eine essentielle Basis dafür, unsere Welt selbständig und vernünftig zu begreifen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 2).

In Hinblick auf die Analysis können nach Greefrath et al. (2016) vier inhaltliche Ziele definiert werden. Dazu gehört zunächst das Verständnis der mathematischen Begriffe, was über die Wiedergabe einer Definition hinausgeht. Es ist vielmehr gemeint, dass man sich Eigenschaften eines Begriffs vorstellen sowie verknüpfen, Verbindungen zu anderen Begriffen herstellen und zugehörige Aspekte erfassen kann. Als Beispiel kann in diesem Zusammenhang der Ableitungsbegriff genannt werden, der in der Analysis von großer Relevanz ist und unter anderem benötigt wird, um dynamische Situationen zu beschreiben (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 9f.).

Als weiteres Ziel wird das Argumentieren, Begründen und Beweisen genannt. Als Ausgangspunkt wird dabei das vorhandene Begriffsnetz begründet und erweitert. Dies kann intuitiv oder formal durch Definitionen und Sätze erfolgen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 10).

Des Weiteren zählt die Verwendung von grundlegenden Verfahren zu den Zielen des Analysisunterrichts. Lernende sollen in der Lage sein, Gleichungen zu lösen und so zum

Beispiel Nullstellen einer Funktion bestimmen. Damit soll es in weiterer Folge möglich sein, die Grundlagen der Analysis in Anwendungen und Modellen zu nutzen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 11f.).

Die Nutzung von anwendungsorientierten Aufgaben und Beispielen spiegelt sich in der ersten Grunderfahrung wider. Trotz der Wichtigkeit der Verwendung anschaulicher Problemstellungen für das Verständnis der mathematischen Inhalte wird in der Schule oftmals der Fokus auf „gut trainierbare Aufgaben“ gesetzt. Grund dafür ist unter anderem die stetige Leistungsbewertung der Schülerinnen und Schüler. Damit einhergehend wird der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben lediglich durch komplexere algebraische Fertigkeiten erhöht und es werden keine tieferen Überlegungen sowie keine unterschiedlichen mathematischen Herangehensweisen gefordert (vgl. Büchter & Henn, 2013, S. 133).

Danckwerts und Vogel (2006) unterscheiden zwei grundlegende Blickwinkel auf den Analysisunterricht. Die erste Position bezieht sich auf einen möglichst anwendungsorientierten Unterricht und die zweite darauf, analytische Ideen und Verknüpfungen verstärkt zu betonen. Näher betrachtet ist mit Ersterem gemeint, dass Anwendungen im Zentrum stehen und der klassische Aufbau der Analysis in den Hintergrund rücken soll. Reale Sachverhalte sollen intuitiv mit mathematischen Denkweisen verknüpft werden. Dadurch soll erreicht werden, dass die Instrumente und Methoden der Analysis auch in der Realität genutzt werden. Damit einhergehend wird die Nutzung von Computern und grafikfähigen Taschenrechnern als positiv erachtet, da diese als „Black Box“ Berechnungen übernehmen, wodurch erneut die realitätsnahen Anwendungen in den Mittelpunkt gestellt werden (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 1f.).

Im Gegensatz dazu steht die zweite Position dafür, dass mathematische Fachbegriffe, Verknüpfungen sowie Beweise für das Verständnis erfasst werden müssen, um in weiterer Folge damit arbeiten zu können. Technologiegestützte Hilfsmittel sollen dabei für die Anschaulichkeit verwendet werden, jedoch nicht grundlegende Fertigkeiten ersetzen (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 2f.).

Beide Sichtweisen setzen jedoch auf die Fähigkeit, Probleme auch außerhalb der Mathematik zu lösen und damit heuristische Kompetenzen zu fördern (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 3).

Trotz der zwei unterschiedlichen Positionen ist deutlich, dass beide eine Unzufriedenheit mit der (damaligen) Lage des Analysisunterrichts zum Ausdruck bringen. Dies liegt unter anderem

daran, dass es besondere Herausforderungen in der Analysis gibt. Es lassen sich zwei Schwierigkeiten identifizieren. Dabei stellt sich einerseits die Frage, inwieweit die formale Genauigkeit der Analysis der Anschaulichkeit weichen soll. Es ist so, dass die Theorie der Analysis nicht lückenlos an das alltägliche Denken anknüpft. Als Beispiel dafür kann die Vollständigkeit der reellen Zahlen genannt werden, die für die Analysis von hoher Relevanz ist, aber im Unterricht nicht im Detail besprochen wird. Die Vorstellungen von rationalen Zahlen hin zu reellen Zahlen gehen über das Alltagsdenken hinaus und zeigen die Theorielastigkeit der Analysis auf. Damit einhergehend können normative Vorstellungen der Lehrperson zu anderen, individuellen Auffassungen bei Schülerinnen und Schülern führen (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 4). In Bezug auf die Schulanalysis kann dies beispielsweise bedeuten, dass die Stetigkeit nicht im Sinne der ε - δ -Definition erfasst wird, sondern von den Schülerinnen und Schülern als eine Funktion ohne Sprünge gesehen wird (vgl. Steinbauer & Kramer, 2023, S. 15).

Andererseits bedeutet den strengen Aufbau der Analysis in der Tiefe zu verstehen auch, dass dadurch heuristische Arbeits- und Denkweisen vernachlässigt werden. Besonders herausfordernd ist dabei, innerhalb von ein bis zwei Unterrichtseinheiten Situationen zu schaffen, in denen Teilaspekte der Analysis sinnvoll erfasst werden können. Dazu wird die stete Leistungsbewertung der Lernenden als Grund genannt, dass überwiegend kalkülorientierte Aufgaben gestellt werden, wodurch tatsächliche Anwendungen im Alltag nicht besprochen werden (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 4f.). Als Beispiel für anwendungsorientierte Aufgaben im Unterricht kann die Herleitung des Zerfallsgesetzes für radioaktive Stoffe oder die Modellierung der Wachstumsprozesse von Bakterien genannt werden (vgl. Greefrath, 2018, S. 163).

Zusammenfassend lässt sich hervorheben, dass reale Anwendungen und heuristische Fähigkeiten im Gegensatz zu theoretischen Aufgaben, die besonders auf den Kalkülaspekt abzielen, zu kurz oder gar nicht vorkommen. Zurückzuführen ist dies vorwiegend auf die Herausforderungen, die aus der Theorielastigkeit der Analysis entstehen (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 5).

4 Grundvorstellungen in der Mathematik

Die Relevanz von Grundvorstellungen wird deutlich, wenn man die Ergebnisse des internationalen Vergleichstest TIMSS III betrachtet. Dabei haben in Deutschland lediglich 35 Prozent der Befragten eine Aufgabe zum Verständnis von Ableitungen korrekt gelöst und das obwohl bei der schriftlichen Matura ein deutlich höherer Anteil die Aufgaben zur Kurvendiskussion lösen konnte und damit die technischen Fähigkeiten besitzt, Funktionen zu differenzieren sowie Null-, Wende- und Extremstellen etc. zu bestimmen (vgl. Hahn & Prediger, 2008, S. 163).

Daran kann unter anderem erkannt werden, dass die Schwierigkeiten bei solchen Aufgaben ihren Ursprung im Mathematikunterricht haben und dadurch in diesem vermehrt auf Verständnis gesetzt werden soll. Im deutschsprachigen Raum wird in diesem Zusammenhang von Grundvorstellungen gesprochen. Darunter versteht man, dass Begriffe, Operationen und Sätze in der Mathematik sinnvoll interpretiert werden können (vgl. Hahn & Prediger, 2008, S. 165ff.). Greefrath et al. (2016) definieren den fachdidaktischen Begriff folgendermaßen:

„Eine Grundvorstellung zu einem mathematische Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.“ (Greefrath et al., 2016, S. 17)

Im Mathematikunterricht ist es also von Bedeutung, dass Schülerinnen und Schüler Fachbegriffe beziehungsweise ihre Definition nicht nur nennen können, sondern zu diesen grundlegende Vorstellungen entwickeln und die Begriffe inhaltlich deuten können. Dies soll einen verständnisvollen Umgang mit mathematischen Begriffen ermöglichen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 17).

Ein häufiges Problem im Mathematikunterricht ist, dass die Erklärungen und Vermittlungen durch die Lehrperson nicht bei den Lernenden ankommen und als „sinnlos“ beziehungsweise „unverständlich“ abgeschrieben werden. Wenn dies öfter vorkommt, kann dies zu einer Abwendung vom Fach Mathematik führen. Im Allgemeinen liegt die grundlegende Ursache dieser Verständnisschwierigkeiten daran, dass die Schülerinnen und Schüler nicht erkennen, was hinter den Begriffen und Symbolen tatsächlich steckt und so Fehlvorstellungen oder gar keine Vorstellungen entwickeln. Die positive Bewältigung der Aufgaben ist in weiterer Folge nur durch das sture Auswendiglernen der Regeln – wenn überhaupt – möglich (vgl. vom Hofe, 1995, S. 10).

Im Allgemeinen werden die normativen Grundvorstellungen von den deskriptiv ermittelten Schülerinnen- und Schülervorstellungen unterschieden. Erstere beziehen sich auf Leitlinien der Didaktik, die verschiedene Deutungen eines mathematischen Begriffs oder Inhalts

zulassen (vgl. vom Hofe & Roth, 2023, S. 3). Unter deskriptiv ermittelten Vorstellungen versteht man das tatsächliche Bild, welches sich Lernende zu den mathematischen Inhalten gebildet haben. Diese können sich von den normativen Grundvorstellungen unterscheiden und dadurch auch fehlerhaft sein (vgl. Griesel et al., 2019, S. 129).

Für die Entwicklung von Grundvorstellungen können mehrere Blickwinkel eingenommen werden. Nach Greefrath et al. (2016) ist für die jeweilige Ansichtswiese die Bezeichnung „Aspekt“ eines mathematischen Begriffs von Bedeutung.

„Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.“ (Greefrath et al., 2016, S. 17)

Es geht hierbei also um eine fachlich korrekte Einordnung der Inhalte. Die fachlichen Grundlagen eines Begriffs der Mathematik können erst durch die fachdidaktischen Grundvorstellungen in ihrer Tiefe begriffen und in einen sinnvollen Zusammenhang gesetzt sowie verwendet werden. Es lässt sich sagen, dass sich diese Grundlagen zu Fachbegriffen der Mathematik ausbilden, wenn man sich mit „Phänomenen“ beschäftigt, die die Aspekte der Fachbegriffe beinhalten (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 17).

Anhand Abbildung 4 lässt sich die Verknüpfung von Aspekten und Grundvorstellungen erkennen. Diese zeigt einerseits, dass ein fachlicher Aspekt eines mathematischen Begriffs die Grundlage für unterschiedliche Grundvorstellungen bieten kann. Andererseits kann eine Grundvorstellung auf mehreren Aspekten beruhen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 18).

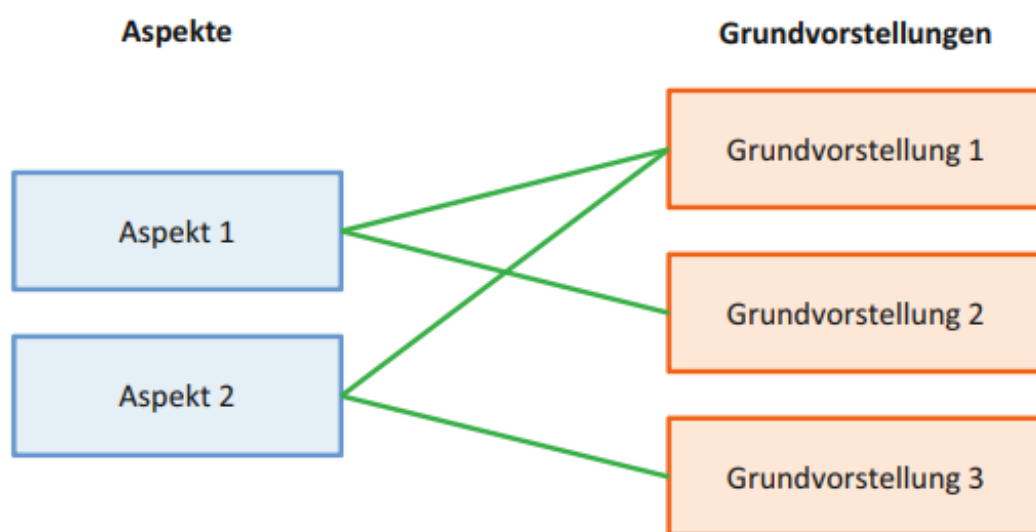


Abbildung 4: Aspekte und Grundvorstellungen zu einem Begriff (Greefrath et al., 2016, S. 17)

Vom Hofe (1995) definiert für die Entwicklung von Grundvorstellungen auf der einen Seite die Rolle der Lehrperson und auf der anderen Seite die Lernenden. Dabei wird hervorgehoben, dass die didaktische Aufarbeitung der fachlichen Inhalte für die Schülerinnen und Schüler zwar hilfreich sein, jedoch keine Grundvorstellungen von alleine „aktivieren“ kann. Anhand der Abbildung 5 ist ersichtlich, dass Lehrerinnen und Lehrer im ersten Schritt aus den fachlichen Inhalten der Mathematik die relevanten Grundvorstellungen herausarbeiten und in weiterer Folge didaktisch vorbereiten müssen. In einem sinnvollen Sachzusammenhang gebettet, soll dies ermöglichen, dass Schülerinnen und Schüler aktiviert werden, um „individuelle Erklärungsmodelle“ zu finden. Dadurch sollen Grundvorstellungen gebildet und damit einhergehend die fachlichen Aspekte der Mathematik verstanden werden (vgl. vom Hofe, 1995, S. 123ff.).

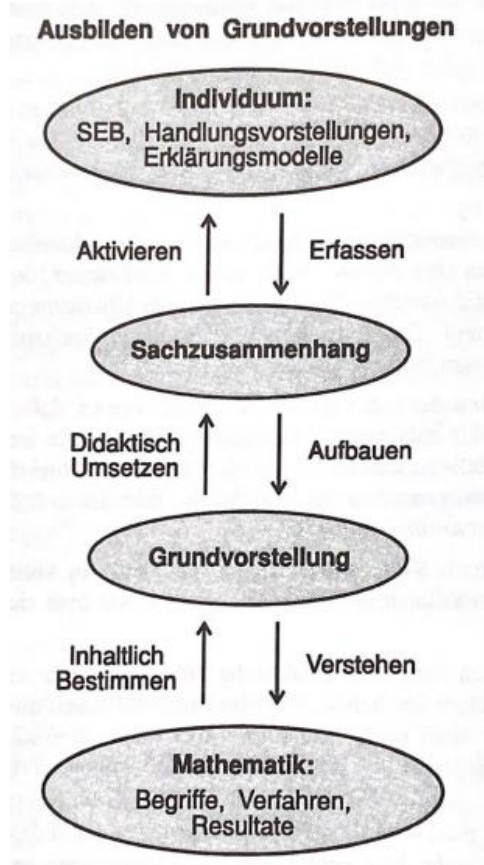


Abbildung 5: Ausbilden von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, S. 124)

5 Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit

Durch die im ersten Kapitel dargestellten Definitionen zum Begriff „Differenzierbarkeit“ können zwei Aspekte abgeleitet werden: der Grenzwert des Differenzenquotienten und die lokale lineare Approximation (Abbildung 6). Die Deutung dieser kann unterschiedlich ausfallen und bildet die Grundlage für die vier Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“, „Tangentensteigung“, „lokale Linearität“ und „Verstärkungsfaktor“ in Abbildung 6 (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 147).

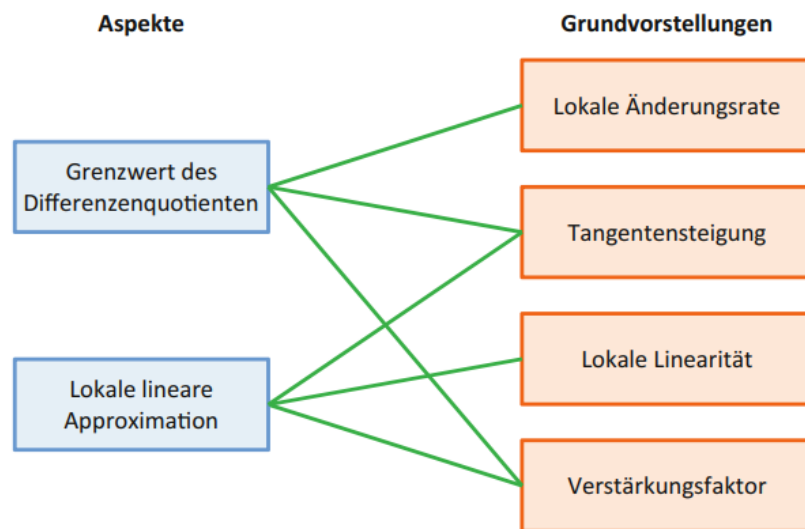


Abbildung 6: Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen der Differenzierbarkeit (Greefrath et al., 2016, S. 17)

5.1 Tangentensteigung

Bei dieser Grundvorstellung befasst man sich mit der Ableitung als Tangentensteigung an einem Punkt des Graphen. Das Vorwissen kommt auch in diesem Fall aus der Unterstufe. Der Begriff „Tangente“ ist bereits aus der Lagebeziehung zwischen einem Kreis und einer Gerade bekannt, jedoch muss das neue Verständnis im Sinne eines funktionalen Zusammenhangs erst ausgebaut werden. In der Sekundarstufe 1 wird gelehrt, dass eine Tangente den Kreis genau an einer Stelle berührt, wodurch angenommen werden könnte, dass die Schlüsseleigenschaft einer Tangente lediglich ein Berührungspunkt mit einer Kurve ist. Das würde bedeuten, dass die Tangente die Kurve in keinem weiteren Punkt berührt oder schneidet und sich lediglich auf „einer Seite“ der Kurve befindet. In der Sekundarstufe 2 kann beim Ableiten einer Funktion aber genau dieser Sachverhalt vorkommen, beispielsweise bei einer Polynomfunktion dritten Grades (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 149). In Abbildung 7 ist der Graph der Funktion $f: f(x) = x^3 - x^2 + 0,1x$ visualisiert und die Tangente t im Punkt A gelegt worden. Es ist erkennbar, dass ein weiterer Schnittpunkt zwischen dem Funktionsgraphen und der Tangente existiert, nämlich Punkt B .

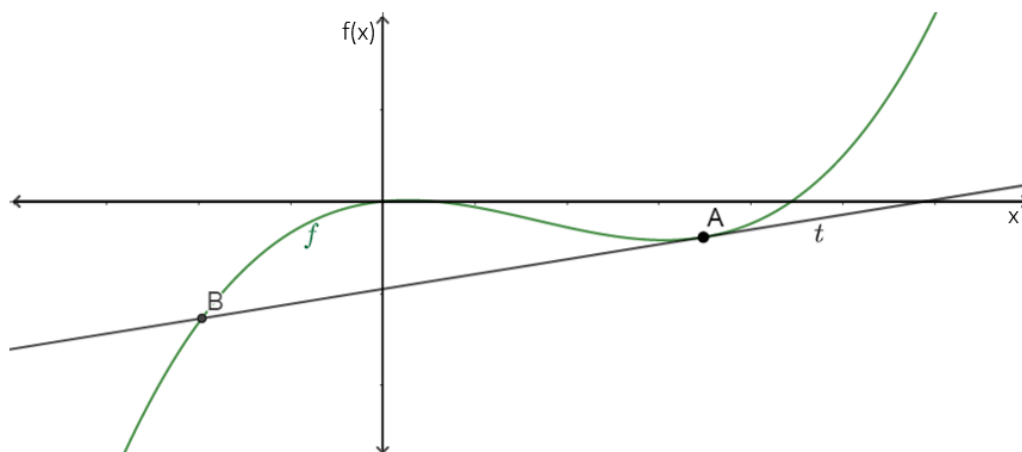


Abbildung 7: Polynomfunktion dritten Grades mit der Tangente t im Punkt A

In diesem Zusammenhang wird die Tangente als eine Gerade verstanden, die sich lokal an eine Kurve bei einem Punkt anschmiegt. Die Tangentensteigung entspricht der Steigung der Kurve in diesem Punkt (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 45f.).

Im Folgenden wird die Einführung des Ableitungsbegriffs in der Schule im klassischen Sinne über das *Tangentenproblem* geschildert. Dazu werden drei Schritte nacheinander bearbeitet:

„1. Schritt: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt über die Tangente.

2. Schritt: Die Tangente als Grenzlage von Sekanten.

3. Schritt: Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert.“ (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 45)

Im ersten Schritt wird das Steigungsproblem einer Kurve auf die Steigung einer Geraden zurückgeführt, die in dieser Schulstufe bereits bekannt ist. Die Schwierigkeit für die Lernenden ist dabei jedoch, von der geometrischen hin zur analytischen Deutung des Begriffs zu gelangen. Erstere beschreibt, dass die Tangente die Kurve in einem Punkt berührt, aber nicht schneidet. Unter der analytischen Bedeutung versteht man die Tangente als Schmiegegerade an eine Kurve um einen Berührungspunkt (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 46).

In Abbildung 8 ist sichtbar, dass das geometrische Verständnis bei einer quadratischen Funktion ausreicht und als „globale Stützgerade“ gesehen werden kann. Bei Funktionen höheren Grades ist diese Vorstellung aber nicht mehr ausreichend. Durch die analytische Sichtweise ist es möglich, die Tangente als Schmiegegerade *lokal* zu betrachten, wodurch auch weitere Schnittpunkte zwischen der Tangente und der Funktion möglich sind (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 46).

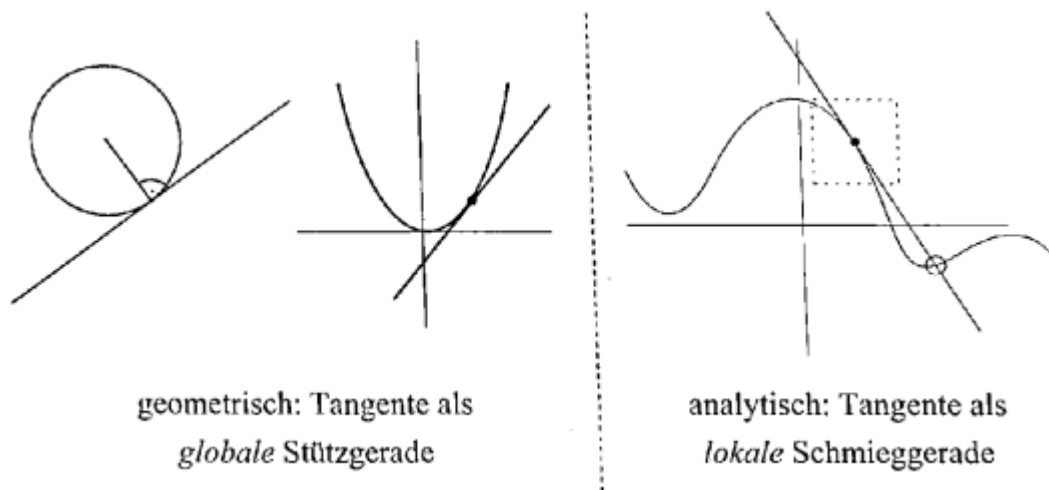


Abbildung 8: Geometrische und analytische Grundvorstellung zur Tangente (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 46)

Der zweite Schritt dient zur Vorbereitung, um die Tangentensteigung tatsächlich zu berechnen. Dabei wird die Idee genutzt, die Tangente als Grenzlage von benachbarten Sekanten zu interpretieren (siehe Abbildung 9). Es gilt jedoch zu beachten, dass für diese Annäherung die Tangente *nicht* wie im ersten Schritt als Schmiegegerade aufgefasst werden kann. Dies weist erneut eine Herausforderung auf, da nicht auf die erste Deutung zurückgegriffen werden kann. In diesem Fall handelt es sich nämlich nicht wie im Schritt zuvor um die „bestapproximierende“ Gerade, die sich lokal anschmiegt (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 47).

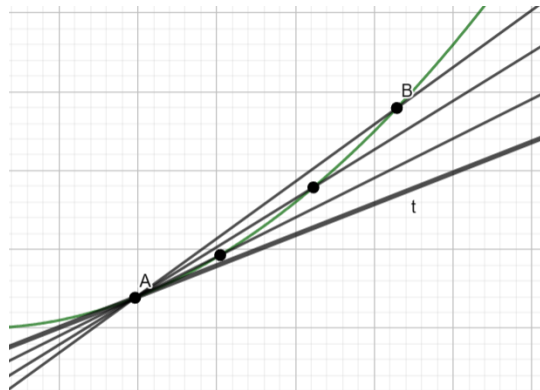


Abbildung 9: Tangentensteigung als Grenzlage benachbarter Sekanten (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 47)

Hinzu kommt, dass häufig die Fehlvorstellung entsteht, dass sich nicht die Sekanten, sondern die Sehnen annähern (siehe Abbildung 10). Damit steht man vor der nächsten Schwierigkeit, da die Sehnen in einem Punkt zusammentreffen und dadurch keine Gerade beziehungsweise Tangente entsteht (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 47).

Im letzten Schritt wird die Steigung der Tangente als Grenzwert berechnet. Hierfür wird häufig der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ herangezogen. Durch benachbarte Sekanten wird die

Tangente im Punkt (1|1) angenähert. Dies wird algebraisch modelliert und der Grenzwert berechnet (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 48).

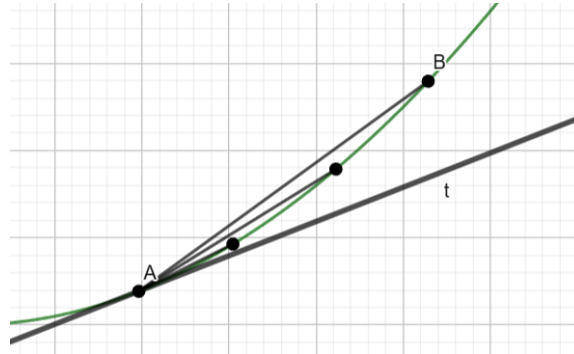


Abbildung 10: Fehlvorstellung – Sehnen statt Sekanten (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 47)

Damit wird der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für die Sekantensteigung berechnet. Dabei wird zunächst $x \neq x_0$ vorausgesetzt, da zwei Punkte für eine Sekante notwendig sind. Durch Einsetzen von $x_0 = 1$ gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Für $x \rightarrow x_0$ streben Zähler und Nenner gegen null. Dennoch ist der Grenzwert des Quotienten gleich 2, wodurch nun doch $x = x_0$ gilt (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 48).

Auch in diesem Schritt treten Herausforderungen auf. Einerseits wird eine intuitive Vorstellung vom Grenzwert vorausgesetzt und andererseits liegt der Fokus beim Arbeiten mit dem Differenzenquotienten der Sekantensteigung auf der algebraischen Fähigkeit, den Term umzuformen. Dadurch geht der inhaltliche Zusammenhang verloren (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 49).

Zusammenfassend sind folgende sekundäre Vorstellungen für das Erfassen der Ableitung als Tangentensteigung essentiell:

- „die Vorstellung von Tangenten als Schmiegeraden,
- die Vorstellung, dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve hat,
- die Vorstellung, dass die Tangente die lokale Richtung einer Kurve angibt.“ (Greefrath et al., 2016, S. 150)

5.2 Lokale Änderungsrate

Die Grundvorstellung von der Ableitung als lokale Änderungsrate basiert auf den Vorerfahrungen, die die Lernenden bereits aus der Sekundarstufe 1 mitnehmen. Dort haben sie sich bereits mit der absoluten, mittleren und seltener auch mit der prozentualen Änderungsrate beschäftigt. Die Änderungsprozesse beziehen sich im Unterricht meist auf das Berechnen von Durchschnittsgrößen in einem bestimmten Zeitintervall. Mit dem Grundwissen über die mittlere Änderungsrate und damit über den Differenzenquotienten sollte die Vorstellung über die lokale Änderungsrate aufgebaut werden. Hierbei ist es wichtig zu erfassen, dass es sich bei der lokalen Änderung nicht mehr um einen Quotienten handelt, sondern um dessen Grenzwert (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 148).

Im schulischen Kontext gilt der Zugang über die Momentangeschwindigkeit als eine Alternative zum Tangentenproblem (siehe Abschnitt 5.1). Dieser wird als anwendungsnah betrachtet und bietet einen Bezug zur Realität, wodurch die Einführung mit einem Beispiel zur Berechnung der Momentangeschwindigkeit aus fachdidaktischer Perspektive befürwortet wird. Außerdem wird deutlich, aus welchem Grund man die lokale Steigung herausfinden will. Dieser Aspekt bleibt beim Tangentenproblem unbeantwortet. Darüber hinaus berücksichtigt dieses Einführungsbeispiel alle drei Grunderfahrungen (siehe Kapitel 3) (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 50f.).

Die beiden Schulbücher Mathematik verstehen 7 (2019) und Dimensionen Mathematik 7 (2017) führen den Differentialquotienten über die Momentangeschwindigkeit ein, indem ein Beispiel zum Bungee-Jumping beziehungsweise zu einem Tandemfallschirmsprung gestellt und ausgearbeitet wird (vgl. Malle et al., 2019, S. 17f. und Bleier et al., 2017, S. 31).

Im Allgemeinen wird beim Einführungsbeispiel zur Momentangeschwindigkeit eine Weg-Zeit-Funktion betrachtet und durch $s(t) = t^2$ vereinfacht dargestellt. Die Parabel der quadratischen Funktion gibt an, wie sich der zurückgelegte Weg in Bezug auf die Zeit entwickelt. In diesem Fall wird der Anfahrvorgang eines Fahrzeugs betrachtet und es wird ein immer längerer Weg pro Zeiteinheit zurückgelegt (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 51f.).

Misst man die Zeit in Sekunden und den Weg in Metern, so gilt folgende Aufteilung:

- In der ersten Sekunde: $s(1) - s(0) = 1^2 - 0^2 = 1$
- In der zweiten Sekunde: $s(2) - s(1) = 2^2 - 1^2 = 3$
- In der dritten Sekunde: $s(3) - s(2) = 3^2 - 2^2 = 5$

Somit wird in der ersten Sekunde ein Meter, in der zweiten werden drei Meter und in der dritten fünf Meter zurückgelegt (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 52).

Allgemein ausgedrückt lässt sich der zurückgelegte Weg in einem beliebigen Zeitintervall durch

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$$

berechnen. Damit kann der zurückgelegte Weg in unterschiedlich langen Zeitabschnitten ermittelt werden und in weiterer Folge auch die durchschnittliche Geschwindigkeit durch

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

berechnet werden (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 53).

Dadurch bleibt jedoch noch die Frage ungeklärt, wie sich die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 verhält. Dafür nähert man sich der Momentangeschwindigkeit zum Beispiel für $t_0 = 1$ durch die Durchschnittsgeschwindigkeit an: Tabelle 1 (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 53).

Zeitintervall $[t_0; t_1]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ im Zeitintervall $[t_0; t_1]$
[1 ; 2]	$\frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 3$
[1 ; 1,1]	$\frac{1,1^2 - 1^2}{1,1 - 1} = 2,1$
[1 ; 1,01]	$\frac{1,01^2 - 1^2}{1,01 - 1} = 2,01$
[1 ; 1,001]	$\frac{1,001^2 - 1^2}{1,001 - 1} = 2,001$
...	...

Tabelle 1: Durchschnittsgeschwindigkeit in immer kleineren Zeitintervallen für $t_0 < t_1$ (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 54)

Bereits aus Tabelle 1 wird deutlich, dass je kleiner der Zeitabschnitt $[t_0; t_1]$ gewählt wird, umso mehr nähert sich die Durchschnittsgeschwindigkeit dem Wert 2 an. Um diese Vermutung zu bestätigen, wird die mittlere Geschwindigkeit auch von der anderen Seite angenähert (Tabelle 2) (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 54).

Zeitintervall $[t_1; t_0]$	Mittlere Geschwindigkeit
	$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ im Zeitintervall $[t_0; t_1]$
$[0; 1]$	1
$[0,9; 1]$	1,9
$[0,99; 1]$	1,99
$[0,999; 1]$	1,999
...	...

Tabelle 2: Durchschnittsgeschwindigkeit in immer kleineren Zeitintervallen für $t_0 > t_1$ (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 54)

Auch in diesem Fall kommt man dem Wert 2 beliebig nahe, wodurch die momentane Geschwindigkeit mit 2 m/s tatsächlich vermutet werden kann. Um sicher zu gehen, dass das Ergebnis richtig ist, wird für jeden beliebigen benachbarten Zeitpunkt t von $t_0 = 1$ die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1; t]$ und ($t \neq 1$) folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} &= \frac{t^2 - 1^2}{t - 1} = \\ &= \frac{(t - 1)(t + 1)}{t - 1} = t + 1 = 1 + t. \end{aligned}$$

Wenn damit t gegen 1 geht, dann konvergiert $1 + t$ gegen 2, wodurch die Momentangeschwindigkeit mit 2 m/s angegeben werden kann (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 54).

Für das vollständige Verständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate müssen folgende drei sekundäre Vorstellungen erschlossen werden:

- die „Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen (z. B. Bewegungsvorgängen)“
- die „Vorstellung von der Steigung einer Kurve in einem Punkt“
- die „Vorstellung, dass die Änderung der Abhängigen y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist.“ (Greefrath et al., 2016, S. 148)

5.3 Lokale Linearität

Bei dieser Grundvorstellung geht es darum, die Umgebung um einen Berührungspunkt A zwischen einer Tangente und der Funktion genauer zu betrachten. Durch Hineinzoomen in diesen Punkt wird nach einiger Zeit sichtbar, dass sich die Tangente dem Graphen annähert und dadurch in dieser Ansicht nicht mehr voneinander unterschieden werden kann. Dies kann mit der im Abschnitt 5.1 beschriebenen Schmiegegerade in Verbindung gebracht werden (vgl.

Danckwerts & Vogel, 2006, S. 69). Im Allgemeinen geht es bei der lokalen Linearität also darum, dass durch ausreichendes Zoomen mithilfe technologiegestützter Hilfsmittel in den Berührungspunkt der Funktionsgraph zur Geraden wird, welche gleichzeitig die Tangente in diesem Punkt ist (vgl. Büchter & Henn, 2010, S. 86).

In Abbildung 11 ist links der Graph der Funktion $f: f(x) = x^2 + 0,4$ sowie die Tangente t im Punkt A dargestellt. Durch Hineinzoomen ist in der rechten Grafik zu erkennen, dass sich der Funktionsgraph und die Tangente immer mehr angleichen.

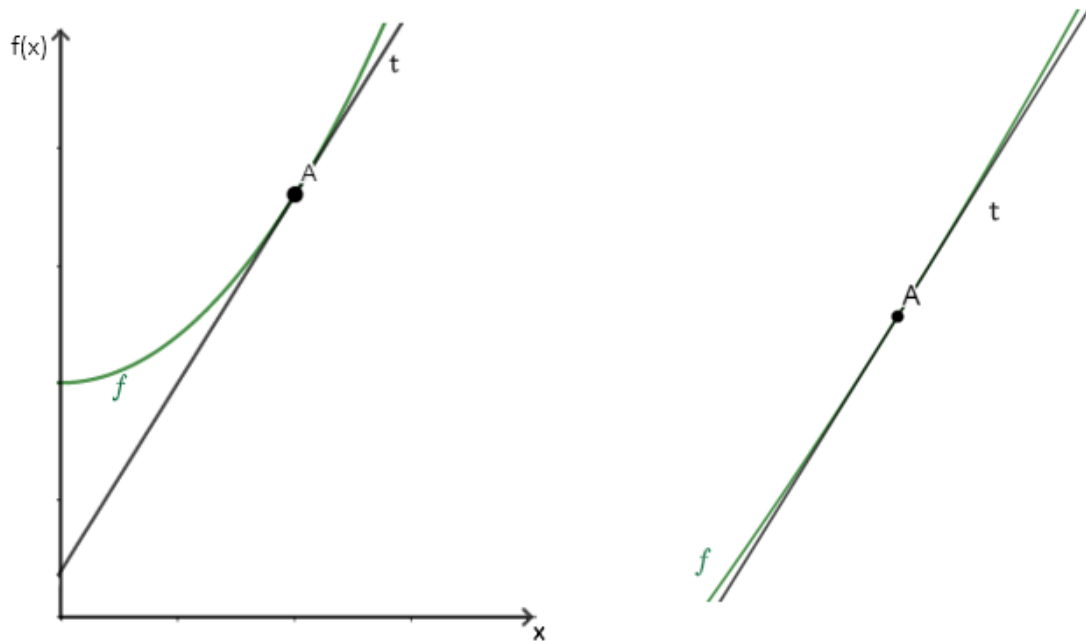


Abbildung 11: Lokale Linearität anhand eines Beispiels

Eine Funktion, die diese Eigenschaft nicht besitzt, ist beispielsweise die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ im Punkt $(0 \mid f(0) = 0)$. In diesem ist die Funktion nicht lokal linear (vgl. Büchter & Henn, 2010, S. 86).

Zum Verständnis der Grundvorstellung der lokalen Linearität zählen:

- „Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man nur ein geradliniges Kurvenstück.
- Für kleine Änderungen der x -Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also approximativ durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden.“ (Greefrath et al., 2016, S. 151)

5.4 Verstärkungsfaktor

Bei der letzten Grundvorstellung nach Greefrath et al. (2016) geht es um die Auswirkung einer kleinen Änderung der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable. Dem Verstärkungsfaktor wird im Allgemeinen in der Fachdidaktik kein großer Wert zugeschrieben, wobei dieser Blickpunkt besonders in physikalischen Anwendungen und der Informatik von Bedeutung ist. Diese Grundvorstellung spielt im schulischen Unterricht eine untergeordnete Rolle (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 152f.).

Die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors kann vollständig erfasst werden, wenn folgendes Wissen verfestigt ist:

- *„Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken.*
- *Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderungen der Funktionswerte.*
- *Für kleine Änderungen ist der Zusammenhang von $\Delta x, \Delta y$ multiplikativ: $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$.“*
(Greefrath et al., 2016, S. 153)

6 Aktueller Forschungsstand

Zum aktuellen Zeitpunkt gibt es einige Studien, die darauf abzielen, die Entwicklung von Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit und anderen analytischen Konzepten zu verstehen. Dazu sind unter anderem Studierende in verschiedenen Phasen des Mathematikstudiums befragt worden, um Unterschiede in ihrem Verständnis zur Differenzierbarkeit und zum Integral herauszufinden (vgl. Oldenburg et al., 2022). Da sich diese Arbeit auf das Differenzieren einer Funktion beschränkt, wird im Weiteren lediglich auf diesen Teil der Studie eingegangen.

Zunächst sind die vier Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“, „Tangentensteigung“, „lokale Linearität“ und „Verstärkungsfaktor“ nach Greefrath et al. (2016) definiert worden, die auch bereits in dieser Arbeit näher beschrieben worden sind (siehe Kapitel 5). Damit sind Aufgaben erstellt worden, die durch vier entsprechende Aussagen erklärt werden können. Hinter jeder Aussage steckt eine der vier Grundvorstellungen (vgl. Oldenburg et al., 2022). Studierende sollten dann auf der fünfstufigen Likert-Skala angeben, inwiefern diese Erklärungen ihrer Denkweise entsprechen. In der ersten von 13 Aufgaben ist beispielsweise eine Erklärung für die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f an der Stelle x gefragt (siehe Abbildung 12). Dabei bezieht sich die erste Aussage auf die lokale Änderungsrate, die zweite auf die Tangentensteigung, die nächste auf die lokale Linearität und die letzte auf den Verstärkungsfaktor (Greefrath et al., 2021).

1. Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f an einer Stelle x kann unterschiedlich erklärt werden!

Bitte kreuzen Sie an, inwiefern die genannte Erklärung ihrem eigenen Denken entspricht:					
-- : „Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise“	--	-	0	+	++
++ : „Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise“					
Die Ableitung gibt die momentane Änderungsrate an der Stelle x an.	☐	☐	☐	☐	☐
Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente in einem Punkt des Graphen von f an.	☐	☐	☐	☐	☐
Der Graph kann in der Nähe von x gut durch eine Gerade angenähert werden. Die Ableitung gibt die Steigung dieser Geraden an.	☐	☐	☐	☐	☐
Wenn man von x ein kleines Stückchen Δx nach rechts oder links geht, ändert sich der Funktionswert um den Wert $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$.	☐	☐	☐	☐	☐

Abbildung 12: Aufgabe 1 aus der Untersuchung über Grundvorstellungen zu Ableitungen (Greefrath et al., 2021)

In dieser Untersuchung sind 262 Studentinnen und Studenten in verschiedenen Studienrichtungen wie beispielsweise Lehramt Mathematik, Mathematik sowie Physik befragt

worden. Die Ergebnisse dieser Studie ergeben, dass die Anzahl der genannten Grundvorstellungen in höheren Semestern im Gegensatz zum ersten Semester abnimmt, was zunächst überraschend erscheint. Grund dafür könnte aber unter anderem sein, dass sich je nach Fach neue beziehungsweise andere Grundvorstellungen entwickeln, die nicht erfragt worden sind. Zudem könnte es durch das fortschrittliche Studium sein, dass die Studierenden sich nicht mehr auf diese Grundvorstellungen stützen müssen (vgl. Oldenburg et al., 2022).

Ein durchaus anderes Bild liefert die durchgeführte Umfrage bei den 35 Lehramtsstudierenden. Die Fragebögen sind hierbei vor und nach einer Lehrveranstaltung durchgeführt worden und es ist eine signifikante Steigerung der Anzahl der Zustimmungen zu den Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“ (RC), „Tangentensteigung“ (TS) und „lokale Linearität“ (LL) erkennbar. Eine mögliche Erklärung für dieses Ergebnis könnte sein, dass Studentinnen und Studenten, die in Zukunft in der Schule unterrichten möchten, diese Grundvorstellungen vermehrt benötigen, um diese auch an Lernende weitergeben zu können. Das heißt, dass die Relevanz dieser Vorstellungen einen höheren Stellenwert in der Studienrichtung Lehramt hat (vgl. Oldenburg et al., 2022). In Abbildung 13 ist die Erhöhung der Zustimmung zu den Grundvorstellungen dargestellt.

BMM	TS	RC	AF	LL
Pre test	4.29	3.83	2.68	3.61
Post test	4.50	4.02	2.85	4.03
Wilcox p (matched)	0.000*	0.035*	0.300	0.000*

Abbildung 13: Ergebnisse des Prä- und Posttests (Oldenburg et al., 2022)

In einer weiteren Studie ist versucht worden, die vier Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“, „Tangentensteigung“, „lokale Linearität“ und „Verstärkungsfaktor“ nach Greefrath et al. (2016) als theoretisches Konstrukt empirisch zu belegen. Dazu sind zwei Forschungsfragen gestellt worden: Ist das theoretisch abgeleitete vierdimensionale Modell gegenüber empirischen Testdaten gültig? Welche Merkmale der Grundvorstellungen zur Ableitung finden sich bei Mathematikstudierenden? (vgl. Greefrath et al., 2023, S. 148f.)

Als Untersuchungsinstrument ist derselbe zuvor beschriebene Fragebogen verwendet worden und man wollte herausfinden, welche Begründungen zu den Beispielen am meisten mit den Vorstellungen zur Ableitung der Teilnehmerinnen und Teilnehmer übereinstimmen. Die Studie ist im Online-Format an vier Universitäten in Deutschland durchgeführt worden und die Stichprobe beträgt 266 Studierende der Mathematik, Physik und Lehramt Mathematik, wobei

sich die meisten im ersten Studienjahr befindet haben und die gesamte Anzahl in der Lehrveranstaltung Analysis 1 eingeschrieben gewesen ist (vgl. Greefrath et al., 2023, S. 151).

Die Ergebnisse zeigen, dass die vier Grundvorstellungen empirisch nachgewiesen werden können und im Allgemeinen die Grundvorstellung „Tangentensteigung“ die höchste Zustimmung erfährt, was wie zu erwarten für die grafischen Beispiele und überraschenderweise auch für die Beispiele ohne Funktionsgraphen gilt. Die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor“ hat in dieser Studie die geringste Zustimmung der Studierenden erhalten. Weiters ist die lokale Änderungsrate im Gegensatz zu den Erwartungen auf weniger Zustimmung bei den Studierenden gestoßen, obwohl diese Vorstellung explizit in den Bildungsstandards genannt wird. Des Weiteren erfährt die lokale Linearität zumindest den dritthöchsten Zuspruch. Grundsätzlich wird dieser Grundvorstellung im Analysisunterricht in der Schule weniger Wert zugesprochen, jedoch ermöglichen unterschiedliche Programme das Hineinzoomen „in den Graphen“, wodurch diese grundlegende Vorstellung auch in der Schule ausgebildet werden kann. Relevant wird die lokale Linearität in weiterer Folge insbesondere an Universitäten (vgl. Greefrath et al., 2023, S. 161f.).

Beim Beispiel 13 in Abbildung 14 wird der Aussage zur lokalen Linearität sogar hinter der Grundvorstellung „Tangentensteigung“ am meisten zugestimmt, was auf eine wichtige Rolle der lokal linearen Betrachtung für Gegenbeispiele der Differenzierbarkeit hindeuten kann. Dadurch können ähnliche Funktionsgraphen zur Betragsfunktion eine besondere Bedeutung für diese Grundvorstellung haben (vgl. Greefrath et al., 2023, S. 161f.). In Abbildung 14 ist eine Funktion mit einem Knick an der Stelle $x = 0$ ersichtlich, was bedeutet, dass sie dort nicht differenzierbar ist. Die erste Aussage entspricht der Denkweise zur Tangentensteigung und die zweite zielt durch das Heranzoomen auf die lokale Linearität ab (vgl. Greefrath et al., 2021).

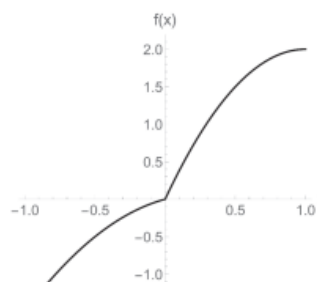
Eine ähnliche Untersuchung ist mit acht Beispielen und jeweils vier Beschreibungen zu den Grundvorstellungen durchgeführt worden, wobei erneut die Zustimmung auf einer fünfstufigen Likert-Skala gegeben werden sollte. Dabei sind knapp 600 Studierende im ersten Semester befragt worden und auch hier fällt in fünf der acht Beispiele die stärkste Zustimmung bei den Aussagen zur Grundvorstellung „Tangentensteigung“ aus. In sieben von acht Fällen erhält der Verstärkungsfaktor die geringste Zustimmung (vgl. Weigand et al., 2019, S. 881ff.).

Eine weitere Studie befasst sich mit dem fachdidaktischen Wissen über die Ableitung von angehenden und bereits aktiven Lehrpersonen. Die Bedeutung dieser Untersuchung zeigt sich an der Feststellung, dass mathematische Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler von der Ausbildung der Lehrenden abhängig sind. In diesem Zusammenhang stellt das Verständnis

über Ableitungen ein großes Problemfeld der Analysis dar. Mithilfe dieser Studie soll das Wissen von Lehrkräften in Ausbildung beziehungsweise im Dienst verglichen werden, um Schlüsselmerkmale ausfindig zu machen, die Unterschiede sowie verfestigtes Wissen der zwei Gruppen aufzeigen. Damit soll in weiterer Folge die Aus- und Weiterbildung für Lehrpersonen verbessert werden (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 36f.).

13. Der Graph der Funktion f hat den abgebildeten Verlauf.

Diese Funktion ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Das kann man folgendermaßen erklären:



Bitte kreuzen Sie an, inwiefern die genannte Erklärung Ihrem eigenen Denken entspricht:

-- : „Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise“

++ : „Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise“

	--	-	o	+	++
Man kann keine eindeutige Tangente anlegen.	☐	☐	☐	☐	☐
Wenn man an den Punkt (0; 0) heranzoomt, erscheint der Graph nicht geradlinig, sondern hat einen Knick.	☐	☐	☐	☐	☐

Abbildung 14: Ausschnitt aus dem Beispiel 13 (Greefrath et al., 2021)

Um dieses Ziel zu erreichen, stützen sich die Autoren auf das „*didactic-mathematical knowledge (DMK) model*“. Dieses Modell beschreibt das Wissen der Lehrkräfte unter der Berücksichtigung von drei Dimensionen, wozu die mathematische, didaktische sowie die meta-didaktisch-mathematische Dimension zählen. Erstere bezieht sich auf das Fachwissen, das notwendig ist, um mathematische Probleme zu lösen und stimmt damit mit dem angestrebten Niveau der Lernenden überein. Zweitere beinhaltet Wissen, das darüber hinausgeht. Lehrkräfte sollen damit in der Lage sein, mathematische Inhalte zu verknüpfen, weitere Lösungsvorschläge zu geben sowie Schülerinnen und Schüler anzuleiten, mathematische Begriffe aus dem Lehrplan und im Alltag zu begreifen. Darüber hinaus müssen Lehrende drittens geeignete Methoden und Darstellungen verwenden, das Vorwissen der Lernenden berücksichtigen und altersadäquate Erklärungen wählen (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 37ff.).

Die Vorgangsweise dieser Studie kann als Mixed-Method bezeichnet werden, da quantitative und qualitative Merkmale festgestellt werden. Auf der einen Seite wird damit die Korrektheit der Antworten überprüft und darüber hinaus das fachdidaktische Verständnis abgefragt. Insgesamt besteht die Stichprobe aus 33 angehenden und berufstätigen Lehrpersonen, wobei zwei Drittel auf die Studierenden entfallen. Zudem ist anzumerken, dass die elf Lehrenden ebenfalls in Ausbildungsprogrammen in der Fachdidaktik der Mathematik involviert sind. Zudem haben die 22 Studierenden alle bereits in ihrem Bachelorstudium Lehrveranstaltungen zur Differentialrechnung besucht (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 39f.).

Für die Untersuchung ist ein Fragebogen mit acht Aufgaben verwendet worden, der Rückschluss auf das mathematische Fachwissen sowie auf didaktische Fähigkeiten ermöglichen soll. Zuletzt genannte beziehen sich auf die Beurteilung von inkorrekten Antworten der Schülerinnen und Schüler (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 40).

Im Folgenden werden Aufgaben näher beschrieben, die auch in Hinblick auf diese Masterarbeit von Relevanz sind. In der ersten Aufgabenstellung ist nach dem persönlichen Verständnis über die Ableitung gefragt worden. Dabei konnten 18 der 22 Studierenden eine korrekte Antwort geben, wobei diese als richtig gilt, wenn zumindest ein Teilaspekt für die Beschreibung der Ableitung genannt wird. Betrachtet man die Antworten genauer, sind rund 45 Prozent auf das Verständnis über die Tangentensteigung und 27 Prozent auf die lokale Änderungsrate zurückzuführen. Die prozentuale Aufteilung stimmt auch in etwa mit den Antworten der berufstätigen Lehrkräfte überein, wobei hier alle korrekt geantwortet haben (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 44f.).

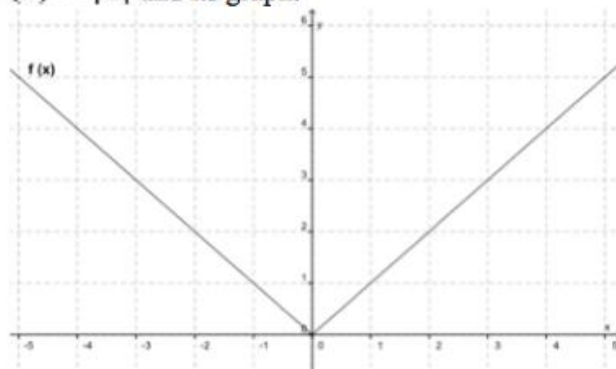
Die zweite Aufgabe in Abbildung 15 befasst sich mit der Betragsfunktion und fragt unter anderem nach der Differenzierbarkeit dieser Funktion. Hierbei sind eindeutige Unterschiede in der korrekten Lösung zwischen den Studierenden und den berufstätigen Lehrkräften erkennbar. Der Unterpunkt a) konnte von 64 Prozent, b) von der Hälfte, c) von rund 55 Prozent und d) von etwa 23 Prozent der Studentinnen und Studenten richtig beantwortet worden ist. Im Gegensatz dazu konnten alle Lehrpersonen die gesamte Aufgabenstellung korrekt bewältigen (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 48f.).

Bei genauerer Betrachtung der Antworten wird deutlich, dass die Begründung, warum die Betragsfunktion an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar ist, eine verbale Beschreibung der grafischen Darstellung der Tangente darstellt. Dafür wird als Beispielantwort „...is not derivable in $x = 0$, since infinite tangents to the function can be drawn at that point“ genannt. Übersetzt bedeutet das, dass die Betragsfunktion an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar ist,

weil in diesem Punkt unendlich viele Tangenten gelegt werden können. Bei den Studierenden trifft dieser Blickwinkel auf 16 Antworten zu und die Lehrkräfte wählen sogar zu 100 Prozent diese Art der Begründung (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 50).

Task 2

Analyze the function $f(x) = |x|$ and its graph.



- For which values of x , $f(x)$ is derivable?
- If it is possible, calculate $f'(2)$ and draw a graphic representation of your solution. If it is not possible explain why.
- If it is possible, calculate $f'(0)$ and draw a graphic representation of your solution. If it is not possible explain why.
- Based on the definition of the derivative, justify why does the graphic of a derivable function cannot have "peaks" (corners, angles).

Abbildung 15: Aufgabe 2 zur Betragsfunktion (Castro & Pino-Fan, 2021, S. 96)

In den weiteren Aufgaben ist ein ähnliches Bild beim korrekten Lösen erkennbar. Der Großteil der Lehrpersonen bearbeitet die Aufgabenstellungen gänzlich oder teilweise richtig, wohingegen ein deutlich höherer Anteil der Studentinnen und Studenten nicht auf das gewünschte Ergebnis kommt (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 51ff.).

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass in dieser Studie die berufstätigen Lehrkräfte in Hinblick auf das mathematische und fachdidaktische Wissen besser als die befragten Studierenden abgeschnitten haben. Die Kenntnisse der zukünftigen Lehrpersonen können in den abgefragten Themen sogar als unzureichend beschrieben werden. Es hat sich beispielsweise gezeigt, dass einzelne Aussagen nicht begründet und erklärt, Fehler in der Antwort von Lernenden nicht identifiziert werden konnten sowie die Herstellung von Verbindungen zwischen den einzelnen Aspekten mangelhaft gewesen ist (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 84f.).

Als mögliche Ursachen für diese deutlichen Unterschiede wird einerseits die Ausbildung der zukünftigen Lehrenden an Universitäten genannt. Andererseits ist es möglich, dass Lehrkräfte vermutlich durch ihre Praxiserfahrung ihr Wissen über die Ableitung erweitern und dadurch bessere Verknüpfungen herstellen (vgl. Castro & Pino-Fan, 2021, S. 85).

Des Weiteren kann „Domain-Specific Beliefs of School Calculus“ als weitere Studie genannt werden, die sich unter anderem mit den Vorstellungen von Studierenden zu Begriffen der Analysis befasst. Es ist eine Befragung in Form eines Fragebogens erstellt worden, mit der bereichsspezifische Betrachtungsweisen der Schulanalysis ausfindig gemacht werden sollen. Dafür sind 83 zukünftige Lehrkräfte in ihrer ersten Woche an einer Universität in Köln befragt worden und können damit keine Erfahrung in der Hochschulmathematik vorweisen (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 131ff.).

Das Erhebungsinstrument besteht aus drei Teilen. Im ersten Abschnitt wird nach einer Erinnerung aus dem Schulunterricht gefragt, in dem die Differential- oder Integralrechnung thematisiert worden ist. Daraufhin werden Folgefragen zu dieser Situation gestellt, wobei unter anderem die Gefühlslage, Gesagtes und eigene Gedanken ermittelt werden. Beispielsweise lautet eine Frage: „Haben Sie die Situation in positiver-negativer-neutraler Erinnerung?“ und auch Gründe dafür werden erfragt. Damit versucht man, die vorherrschenden Erfahrungen zu ergründen. Zudem ist bekannt, dass Vorstellungen zu mathematischen Inhalten oftmals von starken Emotionen beeinflusst werden, wodurch der erste Teil die Möglichkeit bietet, den Gefühlen Raum zu lassen, bevor der nächste Abschnitt bearbeitet wird (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 134f.).

Als Nächstes folgt der Hauptteil des Fragebogens, in dem die Studierenden nach ihren Assoziationen zu bestimmten Begriffen der Analysis befragt worden sind. Diese können schriftlich und mithilfe einer Skizze dargestellt werden. Zu der Auswahl gehören einerseits Schlüsselbegriffe wie Ableitung, Funktion und Integral und andererseits beispielsweise die Tangente, die besonders im grafischen Kontext eine Bedeutung spielt, sowie die Differenzierbarkeit und die Momentangeschwindigkeit. Zum Schluss schließt der Fragebogen mit geschlossenen Fragen zur eigenen Sicht auf die Mathematik als Fachgebiet ab, wobei dabei die Aussagen anhand einer fünfstufigen Likert-Skala beurteilt werden (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 135f.).

Um die offenen Fragen auswerten zu können, ist die Qualitative Content Analysis nach Mayring (2000) verwendet worden. Damit sollte vor allem das Forschungsziel erreicht werden, bereichsspezifische Vorstellungen in der Fachdidaktik adäquat diskutieren zu können. Dieses Ziel soll als Grundlage empirische, theoretische und historische Überlegungen aufweisen (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 136).

Mayring (2000) unterscheidet die induktive und deduktive Vorgehensweise, um Kategorien für die Analyse der Daten zu erstellen. Für die Studie ist zunächst der deduktive Ansatz gewählt

worden, was bedeutet, dass Kategorien auf Basis der Theorie erstellt werden. Im Zuge der Auswertung der Antworten sind zusätzlich auch induktive Elemente miteingeflossen, was bedeutet, dass es immer wieder zur Überprüfung gekommen ist und die Kategorien an die tatsächlichen Daten angepasst worden sind. Damit ist eine Mischung aus der induktiven und deduktiven Erarbeitung der Kategorien entstanden (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 136).

Die Theoriegrundlage bieten Grigutsch et al. (1998) sowie Schoenfeld (2011). Auf dieser Basis sind sechs Kategorien erstellt worden. Dazu gehören die Orientierung nach dem Schema, der Anwendung, logischen Strukturen, abstrakten Terminologien, der Empirie und der Formalität. Da nur zwei der Kategorien für die Ergebnisse relevant sind, werden nur diese näher erläutert. Nach einem Schema wird gearbeitet, wenn Regeln ohne weitere Bedeutung oder Verständnis angewendet werden. Ein Beispiel dafür ist, wenn die Ableitung mit den Ableitungsregeln identifiziert wird. Zudem ist die Anwendungsorientierung gegeben, wenn Problemstellungen aus dem Alltag oder andere außermathematischen Themenfeldern mithilfe von Mathematik gelöst werden. Das bedeutet beispielsweise, dass die Ableitung als lokale Änderungsrate in realen Kontexten interpretiert wird (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 138ff.).

Bezüglich der Reliabilität ist zu sagen, dass der Fragebogen von einer zweiten unabhängigen Person die Antworten mithilfe des Codierleitfadens bewertet hat. Da zum Teil mehrere Kategorien zugeordnet werden können, gilt die Beurteilung nur als gleich, wenn die gesamte Beurteilung übereinstimmt. Beispielsweise bedeutet dies, wenn Rater 1 die Kategorie 1 und 4 vergibt und Rater 2 lediglich Kategorie 4, dann wird dies nicht gewertet. Für manche Einteilungen konnte damit eine Übereinstimmung von bis zu 80 Prozent erreicht werden und der Cohens Kappa beträgt 0,41 (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 143).

Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass bestimmte Erkenntnisse aus der Literatur bestätigt werden können. Dazu zählt beispielsweise, dass die Erwartung bestätigt worden ist, dass wenige Assoziationen mit dem Begriff Differenzierbarkeit hergestellt werden. In 72 Prozent der Fälle ist dieser Begriff ausgelassen und damit nicht beschrieben worden. Betreffend der Tangente ist zu sagen, dass ein Großteil der Studentinnen und Studenten die geometrische Sichtweise als globale Stützgerade aufweist, was oftmals mit einer Skizze einer Tangente an einen Kreis dargestellt worden ist. Wie bereits in Abschnitt 5.1 nach Danckwerts & Vogel (2006) zitiert, stellt dies Schwierigkeiten für den Aufbau des analytischen Verständnisses dar, mit dem die Tangente *lokal* betrachtet wird (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 145).

Darüber hinaus kann eine fehlende Anwendungsorientierung bei den Schlüsselbegriffen wie Ableitung und Integral festgestellt werden. Lediglich zwei Prozent der Antworten zur Ableitung

konnten mit der lokalen Änderungsrate oder Anwendungsbeispielen aus dem Alltag wie der Momentangeschwindigkeit in Verbindung gebracht werden. Damit einhergehend haben auch zwei Drittel der Befragten keine Assoziationen mit der momentanen Geschwindigkeit in Hinblick auf die lokale Änderungsrate angegeben, welche jedoch auch in Deutschland als Standardbeispiel genutzt wird. Das zeigt auf, dass im Gegensatz zu den Bestrebungen der Fachdidaktik, vermehrt auf Anwendungen in der Differential- und Integralrechnung im schulischen Kontext zu setzen, diese Verknüpfungen bei dieser Befragung nicht festgestellt werden konnten (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 147).

Dazu passend haben die Befragten oftmals den Begriffen der Analysis eine grafische Bedeutung zugeschrieben, jedoch keine Verbindung im alltäglichen Kontext geschaffen. Es ist interessant, dass besonders die Verwendung von Anwendungsbeispielen bei der Einführung der Fachbegriffe durch die lokale Änderungsrate anscheinend keinen nachhaltigen Effekt auf die Vorstellungen der Studierenden hat. Im Gegensatz dazu ist die Ansicht dominant, dass die Ableitung die Steigung der Tangente darstellt (vgl. Witzke & Spies, 2016, S. 149).

In einer weiteren Studie sind 604 Studierende im Iran unter anderem zu ihren Vorstellungen zur Ableitung befragt worden, wobei diese von insgesamt neun Universitäten mit den Studiengängen Maschinenbau und anderen Wissenschaften wie Mathematik, Physik und Chemie kommen. Die zufällig gewählten Befragten befinden sich zum Großteil im ersten Studienjahr und haben die Vorlesung Analysis 1 bereits erfolgreich absolviert (vgl. Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 281).

Die Studie mit dem Titel „Undergraduate basic sciences and engineering students' understanding of the concept of derivative“ stützt ihre theoretischen Grundlagen auf die Arbeit von Zandieh (1997). Dabei werden drei Ebenen definiert, die den Grenzwert mit der Ableitung verknüpfen. Um das Konzept der Ableitung zu begreifen, muss zunächst der Differenzenquotient als durchschnittliche Änderungsrate verstanden werden. Danach folgt die zweite Ebene, in der das Verständnis von der mittleren zur momentanen Änderungsrate aufgebaut wird. Die äußerste Ebene befasst sich mit der gesamten Ableitungsfunktion. Dieses Modell ist durch Roundy et al. (2015) erweitert und zu den drei Ebenen sind fünf Kategorien erstellt worden. Dazu gehören das grafische, verbale, symbolische, numerische und physikalische Verständnis. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 16 sichtbar. Beispielsweise wird der Differentialquotient grafisch als Tangente in einem Punkt des Funktionsgraphen und symbolisch als Grenzwert des Differenzenquotienten angegeben (vgl. Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 280).

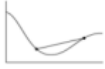
Process-object layer	Graphical	Verbal	Symbolic	Numerical	Physical
	Slope	Rate of change	Difference quotient	Ratio of changes	Measurement
Ratio		"Average rate of change"	$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (For specific x_0)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (ratio of change) Numerically	
Limit		"Instantaneous ..."	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \dots$	... with Δx small ...depends on x (a sequence of numerical ratios of differences around any x)	
Function		"... at any point/time"	$f'(x) = \dots$		Tedious repetition
Function		Symbolic Instrumental understanding Rules to 'take a derivative'			

Abbildung 16: Vorstellungen über die Ableitung nach Roundy et al. (2015) (Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 280)

Die erste von neun Fragen ist eine offene Frage und lautet: „*What does derivative mean to you? Explain it as you can. (...)*“. Damit soll das generelle Verständnis von diesem Begriff abgefragt werden. Die Ergebnisse zeigen, dass 65 Prozent der Befragten die Tangentensteigung in ihren Antworten beschreiben und sich damit auf der zweiten Ebene (momentane Änderungsrate) befinden sowie die grafische Darstellung wählen. Ein Zehntel der Studierenden weist Fehlvorstellungen oder keine zuordenbare Vorstellung auf (vgl. Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 282).

In den nächsten acht Multiple-Choice-Fragen werden Aufgaben gestellt, die bestimmte Vorstellungen voraussetzen. Beispielsweise wird in Aufgabe 5 ein Ball von einer elf Meter hohen Brücke in die Höhe geworfen. Die Tabelle 3 gibt in dieser Aufgabe den Weg in Abhängigkeit von der Zeit an. Das heißt, für $t = 0,2$ befindet sich der Ball 13,8 Meter vom Boden entfernt (vgl. Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 286f.).

t in Sekunden	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(t)$ in Meter	11	12,4	13,8	15,1	16,3	17,4	18,4

Tabelle 3: Tabelle aus Aufgabe 5 (vgl. Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 287)

Damit soll nun aus fünf Antwortmöglichkeiten gewählt werden, wie hoch die annähernde Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0,4$ ist und diese begründen. 29,3 Prozent der Studierenden haben die Aufgabe gelöst und die passende Berechnung $\frac{17,4-15,1}{0,5-0,3} = 11,5 \text{ m/s}$ angegeben. Damit sollte die Fähigkeit überprüft werden, die Ableitung an einer Stelle mithilfe einer Tabelle zu berechnen (vgl. Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 287).

Die Ergebnisse zeigen, dass die Studierenden der Mathematik, Physik, und Chemie in Hinblick auf das Verständnis zur Tangentensteigung besser abgeschnitten haben als die Befragten aus der Fachrichtung Maschinenbau. Im Gegensatz dazu sind laut den Ergebnissen die Vorstellungen der Studierenden des Maschinenbaus zu den drei Ebenen und den meisten weiteren Unterteilungen besser ausgeprägt als die Vorstellungen der anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Im Allgemeinen kann jedoch festgestellt werden, dass die Studierenden ein geringes Verständnis über die Ableitung aufweisen. Häufig ist erkennbar gewesen, dass Formeln wiedergegeben werden können, aber nicht richtig erklärt oder interpretiert werden. Zudem fehlen den Befragten Verknüpfungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen einer Ableitung. Die Schwierigkeiten könnten auf die Art und Weise, wie Ableitungen unterrichtet werden, zurückzuführen sein. Damit einhergehend könnte auch der Aufbau des Verständnisses zur Ableitung durch den Kalkülaspekt eingeschränkt werden (vgl. Hagjoo & Reyhani, 2021, S. 293ff.).

7 Forschungsinteresse

Das Ziel des zweiten Teils dieser Arbeit ist die Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit in den Antworten von Lehramtsstudierenden zu identifizieren und ihre Qualität zu untersuchen. Dazu werden die Fragebögen aus dem Projekt „BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis“ herangezogen, welche im nächsten Kapitel im Detail erläutert werden. Es ist anzumerken, dass die gleiche Befragung des Projekts bereits im Jahr 2017/18 stattgefunden hat. Diese Daten sind in zwei anderen Masterarbeiten von Spannagl (2020) und Achleitner (2022) aufgearbeitet worden. Darüber hinaus ist ein Teil der aktuellen Erhebung in der Masterarbeit von Paradeisz (2024) ausgewertet worden. Dadurch ist das Forschungsvorhaben beziehungsweise der folgende Aufbau diesen Arbeiten ähnlich.

7.1 Forschungsfragen

Um das Ziel dieser Masterarbeit zu erreichen, bezieht sich der empirische Teil auf folgende Forschungsfragen:

Forschungsfrage 1: Welche Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit kommen bei den Lehramtsstudierenden am häufigsten vor?

Forschungsfrage 2: Inwiefern verändert sich die Verteilung der Grundvorstellungen nach dem Besuch der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“?

7.2 Hypothesen

Im Folgenden werden Hypothesen aufgestellt, die sich aus den Forschungsfragen ergeben. Es werden einerseits Annahmen getroffen, welche Grundvorstellungen am präsentesten unter den Studierenden sind und andererseits welche Veränderungen erkennbar sind. Diese Vermutungen basieren auf den theoretischen Grundlagen (Kapitel 5), den Erfahrungen aus den beschriebenen Studien im ersten Teil (Kapitel 6) sowie einer vorläufigen Analyse der Antworten.

Daraus werden folgende Hypothesen in Bezug auf die Häufigkeit der Zuordnung der Grundvorstellungen aufgestellt:

H1: Die Grundvorstellung „Tangentensteigung“ kann in den Antworten am häufigsten identifiziert werden.

H2: Die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor“ ist kaum vertreten.

Es werden folgende Annahmen über die Veränderungen getroffen:

H3: Die Häufigkeit der Äußerungen, die der lokalen Linearität oder der lokalen Änderungsrate zugeordnet werden können, erhöht sich nach dem Besuch der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“.

H4: Die Anzahl der Antworten, die keiner Grundvorstellung zugeordnet werden können, reduziert sich nach dem Besuch der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“.

H5: Die Fehlvorstellungen reduzieren sich nach dem Besuch der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“.

8 Methodik

In diesem Kapitel wird die Methode zur Abfrage der Grundvorstellungen vorgestellt. Dafür wird zunächst das Projekt erläutert, danach folgt eine Beschreibung der Erhebung der Daten, des verwendeten Fragebogens und der Stichprobe. Abschließend wird ein Überblick über den Codierleitfaden gegeben.

8.1 Datengrundlage

Um die Forschungsfrage und die Hypothesen zu beantworten, werden die Daten aus dem Fragebogen „BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis“ ausgewertet. Diese schriftliche Befragung ist im Zuge eines Projekts von der Universität Wien sowie der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich durchgeführt worden, bei dem die Universitätsvortragenden der Fachmathematik mit den Universitätsvortragenden der Fachdidaktik zusammenarbeiten. Teilnehmerinnen und Teilnehmer sind beziehungsweise waren Roland Steinbauer, Christoph Ableitinger, Stefan Götz, Evelyn Süss-Stepancik und Astrid Anger. Das Ziel dieser Fragebögen ist es, die Beliefs und Vorstellungen von Studierenden des Bachelorstudiums Lehramt mit dem Unterrichtsfach Mathematik zu wichtigen Begriffen der Analysis empirisch zu erfassen und zu erforschen (vgl. Steinbauer & Ableitinger, 2020, S. 905).

Bei der Befragung sind die Vorstellungen zu neun Kernbegriffen der Analysis abgefragt worden, wovon eine auf die Differenzierbarkeit abzielt. Die Vervollständigung des Satzes „*Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor...*“ durch die Studierenden wird in dieser Arbeit beschrieben und ausgewertet.

8.2 Datenerhebung und Erhebungsinstrument

Das Erhebungsinstrument besteht aus zwei Fragebögen, wobei der erste im Oktober 2022 zu Beginn der Vorlesung „Schulmathematik Analysis“ ausgegeben worden ist. Dabei handelt es sich um eine Lehrveranstaltung der Fachdidaktik im Modul Analysis, welche laut dem empfohlenen Pfad des Curriculums nach Absolvierung der Fachvorlesung „Analysis in einer Variable für das Lehramt“ belegt werden soll (vgl. Universität Wien, 2022, S. 12). Aus diesem Grund wird angenommen, dass den meisten Studierenden die Kernbegriffe der Analysis bekannt sind und Vorstellungen dazu gebildet worden sind. Am Ende des Wintersemesters 2022/23 ist der zweite Fragebogen in der letzten Einheit der Fachdidaktikvorlesung ausgeführt worden. Damit folgt die Studie einem Prä-Posttestdesign.

Zusammenfassend bedeutet dies, dass die Vorstellungen zur Differenzierbarkeit vor und nach der einsemestrigen Fachdidaktiklehreveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ erhoben worden sind.

Die beiden verwendeten Fragebögen 1A und 1B unterscheiden sich in den ersten zwei Teilen nicht. Der erste Abschnitt besteht aus einer kurzen Beschreibung des Projekts und betont die Anonymität der Auswertung. Um die erste Befragung mit der zweiten am Ende des Semesters verknüpfen zu können, wird eine Anleitung für einen persönlichen Code gegeben. Dieser setzt sich unter anderem aus den ersten zwei Buchstaben des Vornamens sowie den ersten zwei Ziffern des Geburtstags der Mutter zusammen. Daraufhin werden die Vorstellungen zur Analysis abgefragt, wofür Sätze vervollständigt werden sollen. Diese können formal, verbal und bildlich ergänzt werden. Dabei kommen folgende Formulierungen vor:

„Unter ... stelle ich mir vor ...“

„... ist wichtig, weil ...“

„Ein ... ist ...“

„Welches Bild verbinden Sie mit ...“.

Beim zweiten Fragebogen 1B werden nach der Vervollständigung der Sätze zusätzlich noch einige Daten abgefragt. Dabei soll die Unterrichtserfahrung in der Schule sowie Nachhilfeerfahrung angegeben werden. Zudem kann ausgewählt werden, an welcher Schule in Zukunft unterrichtet werden will und ob die Vorlesung und zugehörige Übung zur Fachvorlesung bereits absolviert worden ist. Falls ja, wird ebenfalls nach der Note gefragt. Die beiden Fragebögen 1A und 1B befinden sich im Anhang.

8.3 Stichprobe

Die Stichprobe setzt sich aus den physisch anwesenden Studierenden zusammen, die die Vorlesung „Schulmathematik Analysis“ im Wintersemester 2022/23 zumindest in der ersten und letzten Einheit besucht haben. Damit handelt es sich um Studentinnen und Studenten des vierjährigen Bachelorstudiums Lehramt mit dem Unterrichtsfach Mathematik im Verbund Nordost, die mindestens die Studieneingangs- und Orientierungsphase (StEOP) erfolgreich abgeschlossen haben. Falls der empfohlene Pfad des Curriculums verfolgt worden ist, sollten sich die Teilnehmerinnen und Teilnehmer im 5. Semester des Studiums befinden und wie bereits erwähnt die Fachvorlesung Analysis absolviert haben (vgl. Universität Wien, 2022, S. 5ff.). Anhand von Abbildung 17 lässt sich erkennen, dass in der Stichprobe 18 von 25 Studierenden die Prüfung zur Fachvorlesung bereits erfolgreich absolviert haben und die

gesamte Anzahl die zugehörige Übung besucht hat. Der Umfang der verbundenen Stichprobe beträgt also $n = 25$.

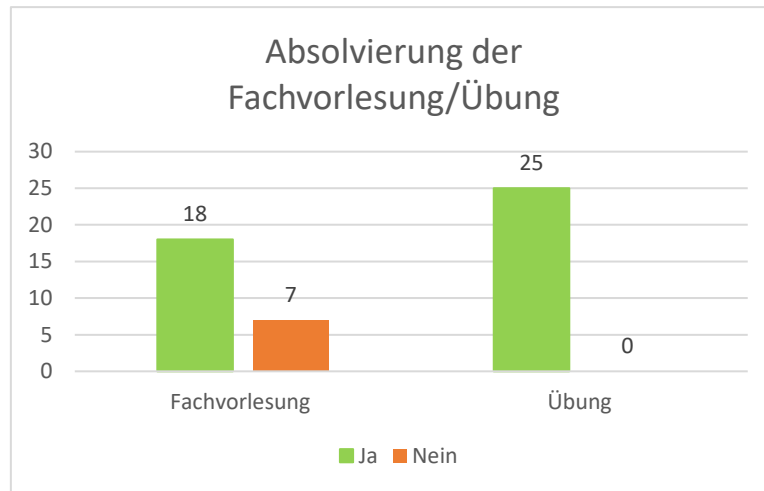


Abbildung 17: Säulendiagramm – Absolvierung der Fachvorlesung/Übung

Damit einhergehend können in den beiden Säulendiagrammen (Abbildung 18) die Notenverteilungen abgelesen werden. Der Großteil hat die Prüfung mit einem *Befriedigend* oder einem *Genügend* bestanden. Insgesamt vier Abgaben sind mit einem *Sehr gut* oder *Gut* beurteilt worden. Bei den Noten aus der Übung ergibt sich ein anderes Bild. Dabei haben 19 Studentinnen und Studenten eine *sehr gute* oder *gute* Beurteilung erhalten und fünf ein *Befriedigend* oder *Genügend*. Im Allgemeinen kann gesagt werden, dass die Noten in der Übung im Durchschnitt besser als bei der Prüfung ausgefallen sind.

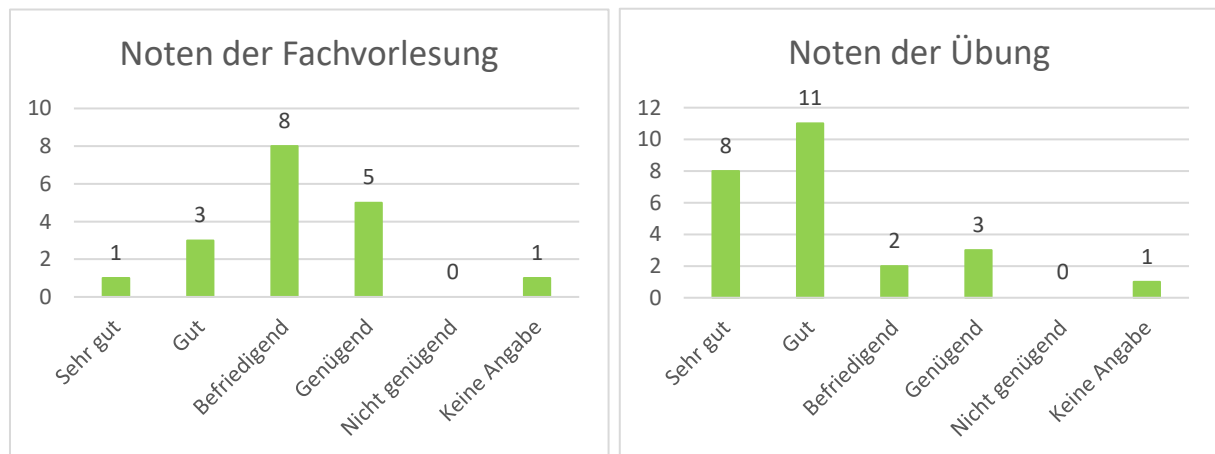


Abbildung 18: Säulendiagramm – Noten der Fachvorlesung/Übung

8.4 Codierleitfaden

Die getätigten Aussagen der Studierenden werden nach Möglichkeit zu einer der vier Grundvorstellungen zugeordnet. Um die Qualität der Antworten zu bewerten, ist folgender Codierleitfaden A erstellt worden:

- 0...GV nicht vorhanden
- 1...GV unspezifisch/naiv
- 2...GV vorhanden/ungenau formuliert
- 3...GV ist klar ausgeprägt bzw. adäquat ausgedrückt.

Die Skala ist nach Spannagl (2020) adaptiert worden, wobei dort eine fünfstufige Skala von 0 bis 4 beschrieben worden ist. Da in dieser Arbeit lediglich 25 Fragebögen zur Verfügung stehen, sind die Ausprägung 2 und 3 „*normative GV ist schwach ausgeprägt bzw. ungenau formuliert*“ sowie „*normative GV ist vorhanden, aber nicht korrekt formuliert*“ zu einer Kategorie zusammengefasst worden.

Die Zahl 0 beschreibt auch in diesem Zusammenhang, dass die normative Grundvorstellung nicht vorhanden ist beziehungsweise durch die Antwort auf keine Grundvorstellung geschlossen werden kann. Mit der Bewertung 1 kann zwar eine Grundvorstellung erkannt werden, jedoch ist die Formulierung inkorrekt. Aussagen, die in die Kategorie 2 fallen, können einer Grundvorstellung zugeordnet werden, sind aber ungenau formuliert. Die höchste Bewertung 3 bringt eine klare Ausprägung sowie eine passende Beschreibung zum Ausdruck.

9 Datenauswertung

Dieses Kapitel befasst sich mit der Auswertung der Daten. Dafür werden zunächst die unterschiedlichen Bewertungen analysiert und anschließend im Rahmen der Möglichkeiten die erfassten Grundvorstellungen quantitativ dargestellt. Daraufhin folgt eine genauere Aufschlüsselung dieser. Zum Schluss werden ausgewählte Antworten im Detail betrachtet.

9.1 Bewertung der Antworten

Die Antworten der Studierenden aus dem Prä- und Posttest sind in ein Dokument übertragen worden. Dieses ist im Anhang zu finden. Anschließend sind diese mithilfe des Codierleitfadens von zwei Ratern bewertet worden, um die Reliabilität des Leitfadens zu überprüfen.

Nach der unabhängig voneinander durchgeführten Beurteilung sind die Ergebnisse verglichen worden. Dabei sind einige Ungereimtheiten aufgetreten. Zunächst ist der Codierleitfaden A für den Beurteiler 2 nicht ausreichend gewesen, wodurch für seine Bewertung die folgende Einteilung nach Spannagl (2020) ergänzt worden ist (Codierleitfaden B):

S...Stetigkeit

D...Definition

F...Fehlvorstellung

G...Aussehen des Funktionsgraphen.

Mit Stetigkeit ist in diesem Zusammenhang gemeint, dass die Vorstellung nicht auf die Differenzierbarkeit, sondern auf stetige Funktionen zurückgeht. Bei einer Bewertung mit *D* ist zum Teil oder gänzlich die Definition der Ableitung wiedergegeben worden und *F* steht für eine fehlerhafte Deutung. Antworten, die das Aussehen eines Funktionsgraphen beschreiben, sind mit *G* beurteilt worden.

Damit einhergehend ist in weiterer Folge keine aussagekräftige Interrater-Reliabilität zustande gekommen. Dafür ist der Cohens Kappa berechnet worden, der einen Wert kleiner als 0,4 angenommen hat (Tabelle 4). Dieser wird für nominalskalierte Kategorien verwendet und ist im Gegensatz zur reinen prozentualen Übereinstimmung von zufälligen Übereinstimmungen bereinigt. Dabei ist anzumerken, dass ein Reliabilitätskoeffizient mit einem Wert von unter 0,4 auf eine *unzureichende* Zuverlässigkeit hindeutet. Ein Wert zwischen 0,4 und 0,6 weist auf eine geringe Reliabilität hin. Zwischen 0,6 bis 0,8 ist die Zuverlässigkeit *mittelmäßig* und darüber hinaus als *gut* zu bewerten (vgl. Döring, 2023, S. 559f.).

Klassifikation	Gut	Mittel	Gering	Unzureichend
Reliabilitätskoeffizient	> 0,8	0,6 – 0,8	0,4 – 0,6	< 0,4

Tabelle 4: Bewertungsnormen für Reliabilitätskoeffizienten (vgl. Döring, 2023, S. 559)

Durch den geringen Wert des Reliabilitätskoeffizienten sind die Antworten genauer analysiert worden. Zwischen den Beurteilern 1 und 2 sind lediglich zwölf Bewertungen der 50 Äußerungen gleich ausgefallen, wovon zehn auf die Vergabe der Zahl 0 fallen und zwei Antworten der Grundvorstellung „Tangentensteigung“ in der Kategorie 2 entsprechen. Dabei ist anzumerken, dass weitere sieben Beurteilungen durch den Rater 1 mit 0 bewertet und gleichzeitig von Rater 2 die Kategorien Stetigkeit und/oder Fehlvorstellung vergeben worden sind. Da diese Einteilung bei der Beurteilung 1 nicht vorkommt, kann argumentiert werden, dass auch diese Bewertungen gleich ausgefallen sind. Grund dafür ist, dass wenn beispielsweise die Stetigkeit in den Antworten der Studierenden beschrieben wird, dies in Bezug auf die Ermittlung der Grundvorstellungen zum Thema Differenzierbarkeit nicht relevant ist und dadurch auch mit „Grundvorstellung nicht vorhanden“ bewertet werden kann. Somit können insgesamt 19 Beurteilungen der 50 Antworten als gleich gewertet werden, was jedoch immer noch nicht reliabel ist.

Des Weiteren ist die unterschiedliche Beurteilung besonders auffällig bei 15 der 50 Äußerungen der Studierenden gewesen, die bei der Differenzierbarkeit an eine Funktion denken, die keinen Knick hat. Dabei ist unter anderem die Betragsfunktion als Gegenbeispiel genannt worden. Nach der Bewertung von Beurteiler 1 handelt es sich dabei um die Grundvorstellung „lokale Linearität“. Begründet wird dies damit, da die Betragsfunktion auch in der Literatur als Gegenbeispiel verwendet wird, um zu zeigen, dass an der Stelle $x = 0$ die Funktion nicht lokal linear ist. Dies ist im Abschnitt 5.3 beschrieben worden. Darüber hinaus argumentieren ebenfalls Greefrath et al. (2023) in der in Kapitel 6 beschriebenen Studie, dass die erhöhte Zustimmung zur lokalen Linearität bei Funktionen mit einem Knick auf eine höhere Relevanz dieser bei Gegenbeispielen bei der Differenzierbarkeit hindeuten kann.

Im Gegensatz dazu werden diese Antworten vom Beurteiler 2 zu der Kategorie „Aussehen des Funktionsgraphen“ zugeordnet und entsprechen danach keiner Grundvorstellungen nach Greefrath et al. (2016). Auch dieser Ansatz kann begründet werden, weil im Endeffekt aus den Antworten der Studierenden tatsächlich nicht eindeutig auf eine der vier grundlegenden Vorstellungen geschlossen werden kann, da jede eine andere Sichtweise auf Funktionen mit einem Knick beschreibt. Die Formulierungen bieten jedoch keine Möglichkeit, um auf die Gedankengänge, die hinter den Antworten stecken, zurückzugreifen.

Darüber hinaus können noch weitere durchgehende Unterschiede in der Bewertung ausfindig gemacht werden. Rater 1 sieht in Formulierungen wie beispielsweise „*Eine stetige Funktion, deren linksseitiger Limes dem rechtsseitigen entspricht*“ oder „*eine Funktion (...) deren Grenzwerte endlich sind*“ Ansätze, die auf die Grundvorstellung „lokale Änderungsrate“

hinweisen, jedoch inkorrekt beschrieben werden, wodurch die Ausprägung 1 gewählt wird. Für Rater 2 handelt es sich dabei um eine Fehlvorstellung, da nicht erläutert wird, wovon der (links- und rechtsseitige) Grenzwert gebildet wird. Diese unterschiedliche Auffassung kommt in sechs der 50 Äußerungen vor.

Eine weitere Unstimmigkeit kann ebenfalls in sechs von 50 Antworten vorgefunden werden. Dabei hat der Beurteiler 1 die höchste Kategorie der lokalen Änderungsrate vergeben, wohingegen der zweite Beurteiler die lokale Linearität in der Ausprägung 1 und zusätzlich die Definition zugeteilt hat. Davon sind Formulierungen wie zum Beispiel *„eine Funktion bei der der Limes des Differenzenquotienten existiert & endlich ist“* betroffen.

Da für die Bewertung durch Beurteiler 2 weitere Kategorien herangezogen worden sind, erweist sich ein Vergleich als schwierig. Aus diesem Grund ist eine weitere Person (Rater 3) zur Beurteilung herangezogen worden, die streng nach dem Codierleitfaden arbeiten sollte. Daher ist in diesem Durchgang nun dieselbe Einteilung verwendet worden. Dennoch hat sich lediglich ein Cohens Kappa von 0,38 ergeben, was erneut auf eine geringe Reliabilität hindeutet. Es ist anzumerken, dass wenn ein Rater beispielsweise zwei Kategorien wie $\ddot{A}3$ (lokale Änderungsrate, Ausprägung 3) sowie $L2$ (lokale Linearität, Ausprägung 2) und der andere Rater lediglich die Kategorie $\ddot{A}2$ gewählt hat, dann ist nur die Zuordnung von $\ddot{A}3$ und $\ddot{A}2$ in den Cohens Kappa miteingeflossen, da in diesem Fall zumindest in einem Teil der Antwort dieselbe Grundvorstellung interpretiert worden ist.

Bei genauerer Betrachtung der Ergebnisse kann festgestellt werden, dass die beiden Rater 17 der 50 Aussagen unabhängig voneinander der Kategorie „Grundvorstellung nicht vorhanden“ zugeschrieben haben.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Rater 1 und 3 ist deutlich zu erkennen. Diese Uneinigkeit basiert erneut auf Antworten der Studierenden, die sich unter der Differenzierbarkeit eine Funktion ohne einen Knick vorstellen. Wie bereits zuvor erläutert, ist dies von Beurteiler 1 als Grundvorstellung „lokale Linearität“ gewertet worden. In der dritten durchgeführten Bewertung wird dies jedoch als Grundvorstellung zur Tangentensteigung in der Ausprägung 1 gesehen. Auch dabei handelt es sich um eine legitime Interpretation, da keine eindeutige Tangente an Stellen mit einem Knick angelegt und damit die Steigung dieser nicht bestimmt werden kann. Darüber hinaus können auch Überlegungen zur lokalen Änderungsrate dahinterstehen, wobei sich in diesem Fall die Werte der Steigungsdreiecke unterscheiden, die man von der Knickstelle nach links und nach rechts abträgt. Für die grundlegende Vorstellung „Verstärkungsfaktor“ ist die Denkweise passend, dass bei der

Betragsfunktion vom Nullpunkt aus kleine Veränderungen Δx nach links oder rechts mit $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$ einhergehen, wobei m gleich sein muss, was jedoch nicht zutrifft (vgl. z.B. Greefrath et al., 2021). Die unterschiedliche Betrachtungsweise dieser Aussagen durch Rater 1 und 3 kommt in 14 der 50 Aussagen vor.

In weiteren zwölf Fällen sind zwar dieselben Grundvorstellungen vergeben worden, jedoch die Ausprägung dieser ist unterschiedlich gewertet worden. Beispielsweise kommt es fünf Mal vor, dass Rater 1 die Kategorie $\ddot{A}1$ (lokale Änderungsrate, Ausprägung 1) vergibt und Rater 3 eine höhere Stufe der Ausprägung interpretiert.

In acht Fällen ist dieselbe Grundvorstellung sowie Ausprägung vergeben worden und drei Aussagen sind unterschiedlich bewertet worden. Dies ergibt insgesamt eine Summe von 54 Bewertungen, was auf Mehrfachnennungen beider Rater zurückzuführen ist.

Ohne Berücksichtigung der Ausprägung kann in 37 Antworten eine beziehungsweise keine Grundvorstellung unabhängig voneinander zugeordnet werden, wenn keine weiteren Kategorien zum Codierleitfaden hinzugefügt werden. Damit entfallen 15 Antworten der Studierenden auf die lokale Änderungsrate, zwei auf die Steigung der Tangente, drei auf die lokale Linearität und wie bereits erwähnt können 17 Antworten keiner Grundvorstellung zugeordnet werden.

Betrachtet man den Cohens Kappa, wenn keine Ausprägungen bewertet werden, erhält man einen Wert von 0,599. Werden nun die Aussagen ausgeschlossen, die die Vorstellung einer Funktion ohne Knick beinhalten, steigt der Cohens Kappa auf 0,89 an, was auf eine gute Interrater-Reliabilität hinweist. Das heißt, damit sind 14 Antworten aus der Bewertung entfernt worden, die durch Rater 1 mit $L2$ (lokale Linearität, Ausprägung 2) und Rater 3 mit $T1$ (Tangentensteigung, Ausprägung 1) beurteilt worden sind.

9.2 Vorhandene Grundvorstellungen (Codierleitfaden A)

Im Folgenden werden die Grundvorstellungen dargestellt, die durch Rater 1 identifiziert werden konnten. Auf eine Aufschlüsselung der Ausprägung wird verzichtet, da hierfür lediglich ein sehr geringer Cohens Kappa von 0,38 berechnet worden ist. Ohne die Ausprägungen ist ein Reliabilitätswert von 0,599 erzielt worden, der knapp auf eine geringe Zuverlässigkeit hindeutet. Ab einem Wert von 0,6 spricht man von einer mittelmäßigen Reliabilität (siehe Tabelle 4, vgl. Döring, 2023, S. 559).

In Abbildung 19 ist zu erkennen, dass 13 der insgesamt 25 Antworten der Studierenden im Prätest zu keiner Grundvorstellung zugeordnet werden können. Die meisten Antworten, die einer Grundvorstellung zugewiesen werden können, entfallen auf die lokale Linearität (LL) und kommen insgesamt acht Mal vor. Vier weitere Vorstellungen entfallen auf die lokale Änderungsrate (LÄ) und zwei sind der Grundvorstellung „Tangentensteigung“ (TS) zuzuordnen. Insgesamt kommt man auf die absolute Häufigkeit von 27, da eine Antwort drei Grundvorstellungen zugeordnet werden konnte.

Im Posttest verändert sich diese Verteilung sichtlich (Abbildung 20). Mit 13 Zuordnungen ist die lokale Linearität am häufigsten vertreten. Weitere elf Antworten können der lokalen Änderungsrate zugeteilt werden und eine entfällt auf die Tangentensteigung. In fünf der 25 Antworten können keine Grundvorstellungen erkannt werden. Im Posttest sind insgesamt 30 Zuordnungen der Antworten vorhanden, da fünf Vervollständigungen des Satzes zwei Grundvorstellungen zugeordnet werden konnten. Weder im Prä-, noch im Posttest können Antworten dem Verstärkungsfaktor zugeordnet werden.

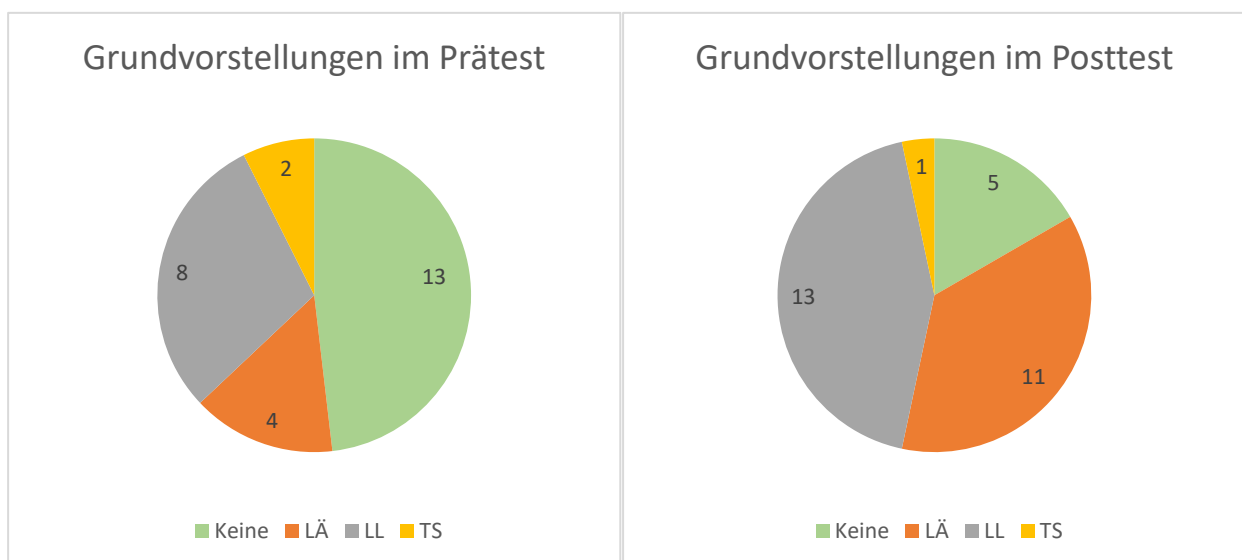


Abbildung 19: Grundvorstellungen im Prätest – Absolute Häufigkeiten

Abbildung 20: Grundvorstellungen im Posttest – Absolute Häufigkeiten

9.2.1 Statistische Auswertung

Um zu überprüfen, ob der Befragungszeitpunkt (Prä- und Posttest) und die Verteilung der Antworten der Studierenden einen statistisch signifikanten Zusammenhang beziehungsweise Unterschied aufweisen, wird ein Homogenitätstest durchgeführt. Der χ^2 -Homogenitätstest entspricht dabei rechnerisch dem χ^2 -Unabhängigkeitstest (vgl. Stocker & Steinke, 2022, S. 631). Da dieser Test für eine höhere Anzahl an Befragten verwendet wird, wird in diesem Fall der exakte Test nach Fisher herangezogen, weil dieser bei kleineren Fallzahlen genauere

Berechnungen hervorbringt (vgl. Falk et al., 2014, S. 187). In Tabelle 5 kann abgelesen werden, dass die exakte Signifikanz (zweiseitig) nach diesem Test 0,032 beträgt. Dieser Wert ist mithilfe des Statistikprogramms SPSS berechnet worden. Mit einem Signifikanzniveau α von fünf Prozent kann die Nullhypothese H_0 , die besagt, dass die beiden Variablen nicht zusammenhängen, abgelehnt werden. Stattdessen kann die Gegenhypothese H_1 angenommen werden. Laut dieser besteht ein Zusammenhang zwischen dem Befragungszeitpunkt und den Antworten der Studierenden (vgl. Fahrmeir et al., 2023, S. 468ff.). Das bedeutet, die Verteilungen der Zuordnungen im Prä- und Posttest unterscheiden sich signifikant voneinander.

Chi-Quadrat-Tests						
	Wert	df	Asymptotische Signifikanz (zweiseitig)	Exakte Sig. (zweiseitig)	Exakte Sig. (einseitig)	Punkt-Wahrscheinlichkeit
Pearson-Chi-Quadrat	8,211 ^a	3	,042	,035		
Likelihood-Quotient	8,464	3	,037	,047		
Exakter Test nach Fisher-Freeman-Halton	8,122			,032		
Zusammenhang linear-mit-linear	2,202 ^b	1	,138	,159	,090	,038
Anzahl der gültigen Fälle	57					

a. 2 Zellen (25,0%) haben eine erwartete Häufigkeit kleiner 5. Die minimale erwartete Häufigkeit ist 1,42.

b. Die standardisierte Statistik ist 1,484.

Tabelle 5: Exakter Test nach Fisher

Zu Forschungsfrage 2 sind folgende Hypothesen aufgestellt worden:

Nullhypothese H_0 : Die Antworten im Posttest weisen *keine* Verbesserung im Vergleich zum Prätest auf.

Gegenhypothese H_1 : Die Antworten im Posttest weisen *eine* Verbesserung im Vergleich zum Prätest auf.

Dazu ist ein Vorzeichentest durchgeführt worden (vgl. Bamberg et al., 2022, S. 170). Mit diesem Test wird lediglich überprüft, ob sich die Antworten verbessern, aber nicht um wie viel. Eine Verbesserung liegt einerseits vor, wenn im Posttest die Antwort einer befragten Person einer Grundvorstellung zugeordnet werden kann, die zuvor der Kategorie „Grundvorstellung nicht vorhanden“ entsprochen hat und andererseits, wenn im Prätest nur eine Grundvorstellung erkennbar ist und im Posttest mehr als eine. Dieser Fall ist in Tabelle 6 in der ersten Zeile erkennbar und wird mit einem positiven Vorzeichen versehen. Eine Verschlechterung liegt genau im umgekehrten Fall vor. In Tabelle 6 ist dies mit einem negativen Vorzeichen bewertet worden. Zudem besteht keine Veränderung, wenn im Prä- und

Posttest genau eine Grundvorstellung erkennbar ist, auch wenn sich diese unterscheiden oder beide Male dieselbe Kategorie zugeteilt wird (siehe Tabelle 6: mittlere Zeile, Bewertung „0“).

Prätest	Posttest	Bewertung
0	LL, LÄ	+
LÄ	TS	0
LL, TS, LÄ	LL	-

Tabelle 6: Beispielbewertungen für den Vorzeichentest A

Diese Bewertung ist für alle 25 befragten Personen durchgeführt worden. Dabei konnten zehn Verbesserungen, eine Verschlechterung sowie 14-mal keine Veränderung festgestellt werden. Da das negative Vorzeichen mit einem Mal seltener vorkommt als das positive, betrachtet man die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$ und erhält $P(X \leq 1) = 0,0059$. Dabei steht die Zufallsvariable X für die Anzahl der negativen Vorzeichen. Unter H_0 ist X binomialverteilt mit $n = 11$ und $p = 0,5$. Bewertungen mit „0“ fließen nicht mit ein. Bei einem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ kann damit die Nullhypothese H_0 verworfen werden. Durch den Vorzeichentest kann angenommen werden, dass im Posttest eine Verbesserung der Antworten erkennbar ist (H_1).

9.2.2 Grundvorstellung „Tangentensteigung“

Im Gegensatz zu den beschriebenen Studien in Kapitel 6 ist in dieser Umfrage lediglich ein kleiner Bruchteil der Antworten der Grundvorstellung „Tangentensteigung“ zuzuordnen. Konkret konnte im Prätest diese grundlegende Vorstellung in zwei von 25 Antworten identifiziert werden, die damit acht Prozent ausmachen. Im Posttest kann in einer Vervollständigung die Tangentensteigung ausfindig gemacht werden, was somit vier Prozent ausmacht: Tabelle 7.

	Tangentensteigung	
	Absolute Häufigkeit	Prozentuelle Häufigkeit
Prätest	2	8%
Posttest	1	4%

Tabelle 7: Vergleich Prä- und Posttest – Tangentensteigung

Im Prätest kommen konkret die Aussagen „dass man ihre Steigung in einem Punkt berechnen kann.“ sowie „Differenzierung durch möglichst kleines Steigungsdreieck. Deshalb Steigung als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bzw. $\frac{dy}{dx}$ “ vor. Im zweiten Durchgang handelt es sich um folgende Antwort: „eine Funktion, bei der man die Steigung berechnen kann & diese einen endlichen Wert annimmt.“

9.2.3 Grundvorstellung „Lokale Änderungsrate“

In Tabelle 8 ist die Aufteilung der Antworten festgehalten worden, die im Prä- und Posttest der lokalen Änderungsrate zuzuordnen sind. Dabei ist ersichtlich, dass die Zuteilung zu dieser Grundvorstellung nach der Lehrveranstaltung mehr als doppelt so oft erfolgt ist wie am Anfang des Semesters. Zu Beginn konnten lediglich vier Aussagen der lokalen Änderungsrate zugeschrieben werden, was von 25 Teilnehmerinnen und Teilnehmern 16 Prozent im ersten Durchgang ausmacht. Am Ende des Semesters können bereits 11 von 25 Antworten dieser Grundvorstellung zugeordnet werden und machen damit 44 Prozent der Äußerungen aus.

	Lokale Änderungsrate	
	Absolute Häufigkeit	Prozentuelle Häufigkeit
Prätest	4	16%
Posttest	11	44%

Tabelle 8: Vergleich Prä- und Posttest – Lokale Änderungsrate

Bei genauerer Betrachtung der Antworten geht es in vielen Fällen darum, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten bestimmbar ist. Beispiele für diese Formulierungen sind „...eine Funktion bei der der Limes des Differenzenquotienten existiert & endlich ist“ oder „...Funktion, deren Differenzenquotient in jedem x -Wert einen Limes hat“. Darüber hinaus kommt folgende Antwort öfters vor: „...Eine Funktion, deren linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert in jedem Punkt übereinstimmen.“ Hierbei lässt sich möglicherweise interpretieren, dass ebenfalls der Grenzwert des Differenzenquotienten gemeint ist. Dennoch könnte auch eine Fehlvorstellung beziehungsweise eine ungenügende Vorstellung dahinter liegen, da nicht explizit genannt wird, wovon der Grenzwert gebildet wird. Diese Formulierung kommt einmal im Prä- und drei Mal im Posttest vor.

9.2.4 Grundvorstellung „Lokale Linearität“

Die grundlegende Vorstellung der lokalen Linearität konnte im ersten Durchgang in acht der 25 Antworten ausfindig gemacht werden und macht damit 32 Prozent aus (Tabelle 9). Im Posttest sind mehr als die Hälfte der Antworten dieser Grundvorstellung zugeordnet worden, was konkret eine absolute Häufigkeit von 13 Vervollständigungen bedeutet. Im Allgemeinen ist dies die am häufigsten zuordenbare Grundvorstellung im Prä- und Posttest.

	Lokale Linearität	
	Absolute Häufigkeit	Prozentuelle Häufigkeit
Prätest	8	32%
Posttest	13	53%

Tabelle 9: Vergleich Prä- und Posttest – Lokale Linearität

Wie bereits zuvor erwähnt, sind Aussagen wie beispielsweise „eine Funktion, die keinen Knick hat“ oder „eine Funktion, die ich leicht auch hier zeichnen kann, aber nur Kurven und keine Knicke dabei sind“ dieser Grundvorstellung zugeordnet worden. Darüber hinaus gehören zu den möglichen Formulierungen ebenfalls „...Eine Funktion, die approximativ linear ist, wenn man nur „weit genug hinein zoomt““ und im Posttest „...eine Funktion, die sich an jeder Stelle „gut“ durch eine lineare Funktion approximieren lässt“ sowie „...Eine Funktion, die ein Stück weit durch eine lineare Funktion approximiert werden kann“ dazu.

9.2.5 Zuordnung „Grundvorstellung nicht vorhanden“

Anhand der Tabelle 10 lässt sich feststellen, dass der Großteil der 18 Antworten, die mit „0“ bewertet worden sind und damit keiner Grundvorstellung entsprechen, im Prätest vorkommt. Insgesamt können damit im ersten Durchgang 13 von 25 Aussagen der Studierenden keiner Grundvorstellung zugeordnet werden, was 52% aller Antworten ausmacht. Dieser Wert sinkt im Posttest nach der Lehrveranstaltung um 32 Prozentpunkte. Damit sind lediglich fünf von 25 Antworten der Studierenden dieser Kategorie zuzuordnen. Es lässt sich damit festhalten, dass im zweiten Durchgang der Befragung deutlich weniger Aussagen keinen Rückschluss auf eine Grundvorstellung zulassen.

	Grundvorstellung nicht vorhanden	
	Absolute Häufigkeit	Prozentuelle Häufigkeit
Prätest	13	52%
Posttest	5	20%

Tabelle 10: Vergleich Prä- und Posttest – Grundvorstellung nicht vorhanden

Die Antworten in dieser Kategorie können in den meisten Fällen in zwei Bereiche eingeteilt werden. Einerseits beziehen sich häufige Ergänzungen des Satzanfangs auf die Verwendung eines Synonyms des Begriffs „differenzierbar“. Das heißt, viele Studierende beschreiben eine differenzierbare Funktion als Funktion, die man ableiten kann. Im Abschnitt 2.1 ist bereits ausführlich dargelegt worden, dass eine Funktion differenzierbar ist, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert. Dieser Grenzwert wird auch als Ableitung bezeichnet. Damit wird keine Erklärung zu der Vorstellung der angehenden Lehrkräfte sichtbar, da die Antworten lediglich eine andere Formulierung für differenzierbare Funktionen beinhalten.

Andererseits beziehen sich weitere Antworten, die keinen Rückschluss auf eine Grundvorstellung ermöglichen, auf die Stetigkeit. Beispiele dafür sind „...eine stetige Funktion“, „...dass sie stetig ist“ und „...eine Funktion ohne Sprünge oder wilde Oszillation“. Ebenfalls in Abschnitt 2.1 ist beschrieben worden, dass die Stetigkeit einer Funktion zwar eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit darstellt, jedoch keine hinreichende.

Besonders interessant ist dies bei der Antwort in Abbildung 21. Diese stammt aus dem Posttest und zeigt, dass der Testperson klar ist, dass aus der Stetigkeit einer Funktion nicht die Differenzierbarkeit folgt. Trotzdem erscheint es durch die Antwort so, als würde die Vorstellung über eine differenzierbare Funktion auf der Stetigkeit dieser beruhen.

5. Unter einer *differenzierbaren Funktion* stelle ich mir vor ...

eine Funktion die auf ihrem gesamten Def. bereich
stetig ist, denn diff. bar $\Rightarrow$ stetig; aber Achtung:
stetig $\nRightarrow$ diff. bar ~~sonst wäre es ja trivial~~

Abbildung 21: Antwort aus dem Fragebogen 1B

9.3 Vorhandene Grundvorstellungen (Codierleitfaden B)

Durch den geringen Wert des Cohens Kappa ist auch der erweiterte Codierleitfaden B (siehe Abschnitt 9.1) von Rater 2 und nach Spannagl (2020) durch eine weitere Bewertung von Rater 4 auf die Reliabilität überprüft worden. Dabei ist ein Cohens Kappa von 0,667 berechnet worden, was auf eine mittelmäßige Zuverlässigkeit hindeutet (vgl. Döring, 2023, S. 559f.). Dies stellt damit den höchsten Reliabilitätswert in dieser Arbeit dar.

Die Bewertung durch Rater 2 wird im Folgenden genauer beleuchtet. Im Prätest ist zu erkennen, dass lediglich sechs Aussagen den Grundvorstellungen nach Greefrath et al. (2016) zugeordnet werden konnten (siehe Abbildung 22). Dabei entfallen vier Antworten auf die lokale Linearität und jeweils eine auf die lokale Änderungsrate sowie die Tangentensteigung. Auch in dieser Bewertung wird die grundlegende Vorstellung „Verstärkungsfaktor“ nicht zugeteilt. Sechs Aussagen beschreiben eine stetige Funktion. Jeweils sieben Antworten werden dem Aussehen des Funktionsgraphen sowie der Fehlvorstellung zugewiesen und zwei beziehen sich auf die Definition der Differenzierbarkeit. Die häufigste Anzahl entfällt auf Aussagen, die keiner Grundvorstellung oder Kategorie zugeordnet werden können und macht acht Äußerungen aus. Insgesamt sind 36 Zuteilungen getroffen worden, da acht Antworten mindestens zwei Kategorien zugewiesen worden sind.

Im Posttest kann insgesamt acht Mal eine Grundvorstellung identifiziert werden (Abbildung 23), wobei sechs auf die lokale Linearität, zwei auf die Tangentensteigung und keine auf die lokale Änderungsrate sowie den Verstärkungsfaktor entfallen. Elf der 25 Antworten werden unter anderem der Fehlvorstellung und vier der Stetigkeit zugeordnet. Weitere elf Aussagen beziehen sich auf das Aussehen des Graphen und drei auf die Definition. Das ergibt insgesamt 39 Zuordnungen, wobei zwölf Antworten mindestens zwei Kategorien zugeteilt worden sind.

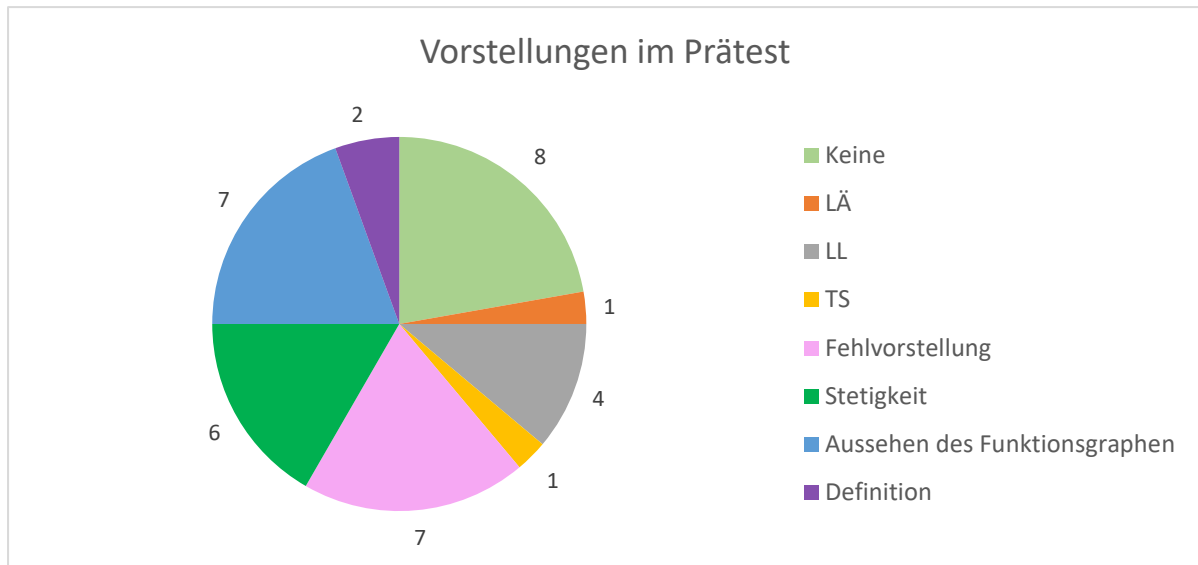


Abbildung 22: Vorstellungen im Prätest – Absolute Häufigkeiten

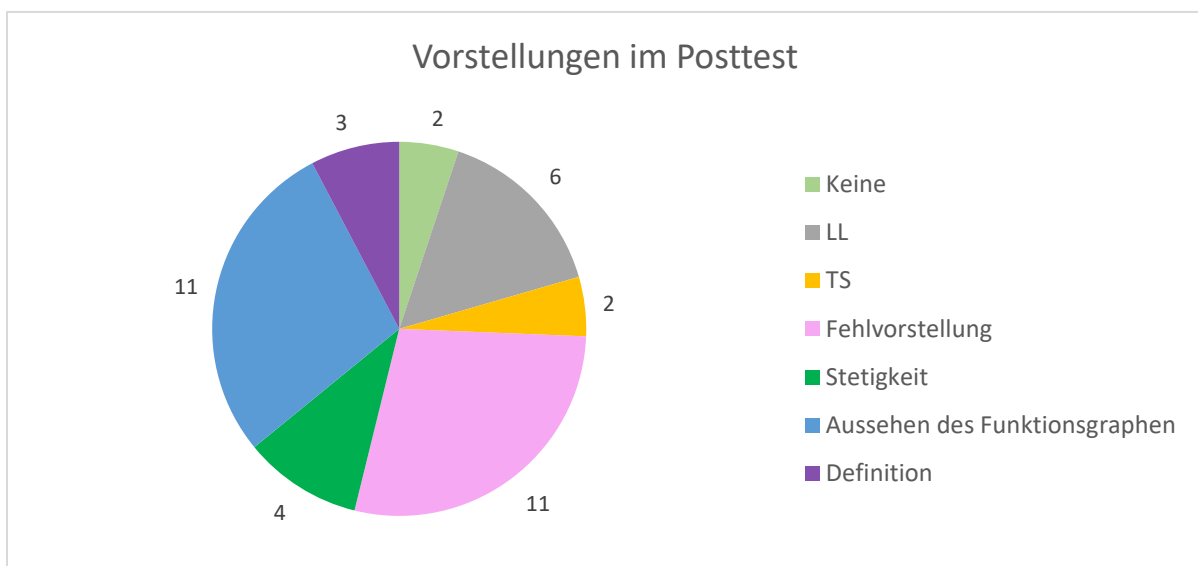


Abbildung 23: Vorstellungen im Posttest – Absolute Häufigkeiten

9.3.1 Statistische Auswertung

Für den Codierleitfaden B ist ebenfalls der exakte Test nach Fisher durchgeführt worden. Dabei ist mithilfe des Statistikprogramms SPSS ein Wert von 0,359 errechnet worden, was deutlich höher als das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ ist. Daher kann die Nullhypothese H_0 nicht verworfen werden. Diese besagt, dass kein statistisch signifikanter Unterschied zwischen den Antworten im Prä- und Posttest beziehungsweise kein Zusammenhang zwischen dem Zeitpunkt der Befragung und der Verteilung der Antworten festgestellt werden kann (vgl. Fahrmeir et al., 2023, S. 468ff.).

Darüber hinaus ist ebenfalls ein Vorzeichentest wie in Abschnitt 9.2.1 mit folgenden Hypothesen durchgeführt worden:

Nullhypothese H_0 : Die Antworten im Posttest weisen *keine* Verbesserung im Vergleich zum Prätest auf.

Gegenhypothese H_1 : Die Antworten im Posttest weisen *eine* Verbesserung im Vergleich zum Prätest auf.

Die Bewertung, ob eine Verbesserung, Verschlechterung oder keine Veränderung vorliegt ist mithilfe einer Rangliste (Tabelle 11) visualisiert worden. Dabei ist erkennbar, dass die drei Grundvorstellungen „lokale Änderungsrate“, „lokale Linearität“ und „Tangentensteigung“ die höchste Beurteilung bekommen. Danach folgt das Aussehen des Funktionsgraphen und an dritter Stelle befindet sich die Zuordnung zu der Kategorie Definition. Diese Reihenfolge ist so gewählt worden, da durch die Beschreibung eines (nicht) differenzierbaren Funktionsgraphen vermehrt eine Vorstellung interpretiert wird, als wenn lediglich eine Definition wiedergegeben wird. Auf dem vierten Rang folgen die Stetigkeit und Fehlvorstellung noch vor den Antworten, die keiner Kategorie zugeordnet werden konnten.

Beispielhaft sind in Tabelle 12 die durchgeführten Bewertungen dargestellt. Wenn im Prätest keine Kategorie zugeteilt wird und im Posttest eine Zuordnung zur Grundvorstellung „Tangentensteigung“ sowie Aussehen des Funktionsgraphen möglich ist, wird dies als Verbesserung mit einem positiven Vorzeichen bewertet. Bei keiner Veränderung wird eine null vergeben und wenn im Prätest die Tangentensteigung und im Posttest lediglich die Kategorie Aussehen des Graphen vergeben wird, handelt es sich um eine Verschlechterung. Diese wird mit einem negativen Vorzeichen gekennzeichnet.

1	LÄ, LL, TS
2	Aussehen des Funktionsgraphen
3	Definition
4	Stetigkeit, Fehlvorstellung
5	Keine

Tabelle 11: Absteigende Rangliste

Prätest	Posttest	Bewertung
0	G, TS	+
F, S	F, S	0
TS	G	-

Tabelle 12: Beispielbewertungen für den Vorzeichentest B

Damit kommt man mit der Bewertung aller 25 Antworten auf 14 Verbesserungen und vier Verschlechterungen. Insgesamt sieben Mal kann weder eine Verbesserung noch eine Verschlechterung festgestellt werden. Damit kann die Binomialverteilung mit $n = 18$ und $p = 0,5$ unter H_0 angenommen werden. Für die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 4)$ erhält man den Wert 0,0154. Dabei zählt die Zufallsvariable X die Verschlechterungen. Mit einem Signifikanzniveau α von fünf Prozent kann erneut die Nullhypothese H_0 verworfen werden. Es kann also die

Gegenhypothese H_1 angenommen werden, die besagt, dass sich die Antworten am Ende des Semesters im Vergleich zur ersten Befragung verbessert haben.

9.3.2 Grundvorstellung „Tangentensteigung“

Die Tangentensteigung ist nur selten zugeordnet worden. Im Prätest fällt lediglich die Antwort „*dass man ihre Steigung in einem Punkt berechnen kann.*“ in diese Kategorie und macht damit vier Prozent der 25 Antworten aus (Tabelle 13). Die zwei Antworten „*eine stetige Funktion, (...) deren Ableitung nirgendwo ∞ -groß ist*“ sowie „*eine Funktion, bei der man die Steigung berechnen kann & diese einen endlichen Wert annimmt.*“ werden im Posttest zur Grundvorstellung „Tangentensteigung“ eingeteilt.

	Tangentensteigung	
	Absolute Häufigkeit	Prozentuale Häufigkeit
Prätest	1	4%
Posttest	2	8%

Tabelle 13: Vergleich Prä- und Posttest – Tangentensteigung

9.3.3 Grundvorstellung „Lokale Änderungsrate“

Mit dem Codierleitfaden B konnte die lokale Änderungsrate lediglich einmal im Prätest zugeordnet werden, was vier Prozent der 25 Antworten ausmacht (Tabelle 14). Dies betrifft die Antwort „*Differenzierung durch möglichst kleines Steigungsdreieck. Deshalb Steigung als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bzw. $\frac{dy}{dx}$.*“ Im Posttest kommt diese Grundvorstellung kein einziges Mal vor.

	Lokale Änderungsrate	
	Absolute Häufigkeit	Prozentuale Häufigkeit
Prätest	1	4%
Posttest	0	0%

Tabelle 14: Vergleich Prä- und Posttest – Lokale Änderungsrate

9.3.4 Grundvorstellung „Lokale Linearität“

Nach der Zuordnung von Rater 2 ist die lokale Linearität die am häufigsten vorkommende Grundvorstellung. Diese konnte nach Tabelle 15 im Prätest vier Mal ausfindig gemacht werden und entspricht damit 16 Prozent der Antworten. Im Fragebogen nach der Lehrveranstaltung ist die prozentuale Häufigkeit um acht Prozentpunkte gestiegen und macht damit sechs der 25 Antworten aus.

	Lokale Linearität	
	Absolute Häufigkeit	Prozentuale Häufigkeit
Prätest	4	16%
Posttest	6	24%

Tabelle 15: Vergleich Prä- und Posttest – Lokale Linearität

Dazu gehören beispielsweise Antworten wie „eine Funktion bei der der Limes des Differenzenquotienten existiert & endlich ist“ sowie „der Grenzwert von Differenzenquotient [sic] ist in jedem definierten Punkt bestimmbar“. Hierbei ist anzumerken, dass Antworten dieser Art von Rater 2 auch als Definition interpretiert werden und als Aspekt nach Greefrath et al. (2016) verstanden werden können. Als weitere Beispiele für diese Grundvorstellung können „Eine Funktion, die approximativ linear ist, wenn man nur „weit genug hinein zoomt“.“ und „eine Funktion, die sich an jeder Stelle „gut“ durch eine lineare Funktion approximieren lässt“ genannt werden.

9.3.5 Zuordnung „Grundvorstellung nicht vorhanden“

Die Kategorie „Grundvorstellung nicht vorhanden“ ist mit acht Zuordnungen im ersten Fragebogen die größte Kategorie und macht 32 Prozent aller 25 Antworten aus (Tabelle 16). Aussagen, die keiner Grundvorstellung zugeteilt werden können, verringern sich im zweiten Durchlauf auf zwei und stellen mit acht Prozent der Antworten einen deutlich geringeren Anteil als im Prätest dar.

	Grundvorstellung nicht vorhanden	
	Absolute Häufigkeit	Prozentuale Häufigkeit
Prätest	8	32%
Posttest	2	8%

Tabelle 16: Vergleich Prä- und Posttest – Grundvorstellung nicht vorhanden

Wie bereits ausführlich im Abschnitt 9.2.5 beschrieben, fallen auch nach Rater 2 Antworten in diese Kategorie, die lediglich Synonyme für eine differenzierbare Funktion verwenden, wie beispielsweise „eine Funktion, die abgeleitet werden kann“.

Um zu überprüfen, ob in dieser Kategorie eine signifikante Veränderung feststellbar ist, wird der Anteilstest herangezogen. Dazu werden die folgenden Hypothesen formuliert, wobei $p_0 = 0,32$ gilt:

Nullhypothese $H_0: p \geq p_0$

Gegenhypothese $H_1: p < p_0$

Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der Antworten, in denen keine Grundvorstellung identifiziert werden konnte. Unter H_0 ist diese binomialverteilt mit $n = 25$ und $p_0 = 0,32$. Da $X = 2 \in V = \{0, \dots, 3\}$, wobei V den Verwerfungsbereich darstellt, kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von fünf Prozent die Nullhypothese H_0 abgelehnt werden. Damit kann angenommen werden, dass der Anteil der Äußerungen, die keiner Grundvorstellung zugeordnet werden konnten, im Posttest statistisch signifikant sinkt (vgl. Meißner, 2004, S. 378ff.).

9.3.6 Weitere Kategorien

Unter den weiteren Kategorien sind im Prätest das Aussehen des Funktionsgraphen sowie die Fehlvorstellung mit je sieben Antworten am häufigsten vertreten. Im Fragebogen nach der Lehrveranstaltung werden insgesamt jeweils elf Aussagen diesen Kategorien zugewiesen. Danach folgt die Stetigkeit mit sechs Zuordnungen im Prätest, die Anzahl der Verknüpfungen mit der Stetigkeit sinkt um zwei Aussagen im Posttest. Äußerungen, die der Kategorie „Definition“ zugeteilt werden, kommen im Prätest zwei Mal und im Posttest drei Mal vor: Tabelle 17.

	Fehlvorstellung		Stetigkeit		Aussehen des Funktionsgraphen		Definition	
	Abs. H.	Proz. H.	Abs. H.	Proz. H.	Abs. H.	Proz. H.	Abs. H.	Proz. H.
Prätest	7	28%	6	24%	7	28%	2	8%
Posttest	11	44%	4	16%	11	44%	3	12%

Tabelle 17: Vergleich Prä- und Posttest – Weitere Kategorien

Die Fehlvorstellungen sind unter anderem auf Formulierungen wie *„Eine stetige Funktion, deren linksseitiger Limes dem rechtsseitigen entspricht“* zurückzuführen. Diese treten am Anfang des Semesters einmal und im Posttest in drei Äußerungen auf. Ansonsten sind auch Antworten wie *„eine Funktion die auf ihrem gesamten Definitionsbereich definiert ist und gegen einen Grenzwert konvergiert“* und *„eine Funktion ohne Sprünge oder wilde Oszillation“* als fehlerhafte Vorstellung gewertet worden. Letztere bezieht sich beispielsweise auf die Stetigkeit und fällt damit auch in diese Kategorie. Weitere Aussagen zur Stetigkeit sind *„eine Funktion die auf dem gesamten Definitionsbereich definiert ist und stetig ist“* sowie *„eine stetige Funktion.“*

Wie bereits in Abschnitt 9.1 erläutert, beinhalten alle Antworten der Studierenden in der Kategorie „Aussehen des Funktionsgraphen“, dass es sich um eine Funktion handelt, die keinen Knick aufweist. Dazu gehören beispielsweise *„eine Funktion die stetig ist und außerdem keinen ‚Knick‘ hat“* und *„eine Funktion, die ich leicht auch hier zeichnen kann, aber*

nur Kurven und keine Knicke dabei sind“. Darüber hinaus fällt auch die Formulierung *„eine „ausreichend glatte (runde)“ Funktion“* in diese Kategorie.

Antworten der Studierenden wie zum Beispiel *„Limes des Differenzenquotient [sic] existiert und ist endlich in einem Punkt x_0 “* und *„eine Funktion bei der der Limes des Differenzenquotienten existiert & endlich ist“* sind nach Rater 2 unter anderem in die Kategorie „Definition“ zugeordnet worden.

9.4 Vergleich der Codierleitfäden A und B

Die unterschiedliche Einordnung nach den beiden Codierleitfäden ist bereits in Abschnitt 9.1 diskutiert worden. Im Allgemeinen lassen sich trotz dieser Unterschiede auch Gemeinsamkeiten herausarbeiten.

Auf der einen Seite kommt nach der Bewertung der beiden Rater die Grundvorstellung „lokale Linearität“ am häufigsten vor und Vorstellungen zum Verstärkungsfaktor werden in keiner der Antworten identifiziert. Andererseits sinkt in beiden Zuordnungen die Anzahl der Aussagen, die keiner Grundvorstellung zugeordnet werden können. Besonders auffällig ist jedoch, dass fehlerhafte Vorstellungen nach Rater 2 nach der Lehrveranstaltung häufiger vorkommen als zuvor. Darüber hinaus sind laut den durchgeführten Vorzeichentests (Abschnitte 9.2.1 und 9.3.1) nach beiden Codierleitfäden Verbesserungen statistisch feststellbar.

9.5 Einzelfallbetrachtung

In diesem Abschnitt werden nun einige Antworten der Befragten im Detail betrachtet. Diese qualitative Vorgangsweise ermöglicht, Einzelfälle näher zu analysieren und die Antworten im direkten Vorher-Nachher-Vergleich zu beleuchten. Dabei kann auch die (unterschiedliche) Vergabe der Ausprägung von Rater 1 und 2 diskutiert werden.

Es wird zunächst die Antwort im Prätest *„Eine Funktion, die approximativ linear ist, wenn man nur „weit genug hinein zoomt“.* Differenzierung durch möglichst kleines Steigungsdreieck. Deshalb Steigung als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bzw. $\frac{dy}{dx}$ “ von RO1630 herangezogen. Diese ermöglicht auf mehrere Grundvorstellungen zu schließen. Rater 1 und 2 sind sich in diesem Fall einig, dass die lokale Linearität in der höchsten Ausprägung sowie die lokale Änderungsrate in der Kategorie 2 vorkommen. Dies kann mithilfe der Literatur begründet werden, da in Abschnitt 5.3 dargelegt wird, dass um diese grundlegende Vorstellung zu erfassen, einerseits die Funktion annäherungsweise durch eine lineare Funktion verstanden werden soll und andererseits der Graph durch Hineinzoomen geradlinig erscheint. Beide Vorstellungen werden im ersten Satz

abgedeckt (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 151). Zudem haben beide Rater auch die lokale Änderungsrate in der Ausprägung 2 vergeben: „ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bzw. $\frac{dy}{dx}$ “. Darüber hinaus kann der Beisatz „Deshalb Steigung als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bzw. $\frac{dy}{dx}$ “ laut Rater 1 ebenfalls auf die Vorstellung zur Tangentensteigung zurückzuführen sein, da diese Steigung die Tangentensteigung beziehungsweise die Steigung der Kurve meinen könnte (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 150).

Interessanterweise antwortet die befragte Person im Posttest lediglich mit „Eine Funktion, die ein Stück weit durch eine lineare Funktion approximiert werden kann.“, was laut Rater 1 noch immer die höchste Ausprägung der lokalen Linearität bedeutet, jedoch keine weiteren Rückschlüsse auf andere Grundvorstellungen ermöglicht. Rater 2 bewertet diese Antwort nur mit der zweithöchsten Ausprägung. Das bedeutet, dass die befragte Person am Anfang des Semesters eine ausgeprägtere Antwort als nach der Lehrveranstaltung angibt.

In den Antworten von DO0704 ist eine Veränderung der Grundvorstellungen erkennbar. Die Aussage „eine Funktion bei der der Limes des Differenzenquotienten existiert & endlich ist“ aus dem ersten Fragebogen wird von Rater 1 als lokale Änderungsrate interpretiert und von Rater 2 als lokale Linearität beziehungsweise als Wiedergabe der Definition gesehen. Im Posttest wird die Antwort „eine Funktion, bei der man die Steigung berechnen kann & diese einen endlichen Wert annimmt“ von beiden Ratern unabhängig voneinander der Tangentensteigung in der Ausprägung 2 zugeordnet. Die Uneinigkeit der Beurteiler 1 und 2 in der ersten Antwort kann vermuten lassen, dass sich diese nicht eindeutig einer Grundvorstellung oder Qualität zuordnen lässt. Da die Vervollständigung des Satzes „Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor ...“ im Posttest von beiden nicht nur zur selben Grundvorstellung, sondern auch dieselbe Ausprägung zugewiesen worden ist, kann dies auf eine bessere Zuteilbarkeit hindeuten und damit eindeutig einer Grundvorstellung zugeordnet werden.

Einen weiteren erwähnenswerten Fall stellen die Antworten von CL2420 dar. Im Prätest ermöglicht die Äußerung „dass die Funktion ableitbar ist; dass sie stetig ist“ keinen Rückschluss auf eine Grundvorstellung und es wird lediglich ein Synonym für eine differenzierbare Funktion gegeben sowie missachtet, dass die Stetigkeit zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit aufzeigt. Im Posttest lautet die Antwort: „eine stetige Funktion, die keinen Knick hat und deren Ableitung nirgendwo ∞ -groß ist; es gibt einen limes [sic].“ Hierfür wird nach Rater 1 einerseits die lokale Linearität für „keinen Knick“ sowie andererseits die lokale Änderungsrate für die Erwähnung des Limes, jedoch ist zu beachten, dass nicht gesagt wird, welcher Grenzwert existiert. Für Rater 2 handelt es sich um das Aussehen des Funktionsgraphen und die Grundvorstellung

„Tangentensteigung“. Es ist anzunehmen, dass *„deren Ableitung nirgendwo ∞ -groß ist“* als Steigung der Tangente interpretiert wird und für diese in jedem Punkt ein Wert berechnet werden kann. Auch wenn sich die Beurteilungen der zweiten Antwort unterscheiden, wird von beiden zumindest eine grundlegende Vorstellung erkannt, was auf eine Verbesserung im Laufe des Semesters hindeutet.

Des Weiteren antwortet die Testperson MO2022 im Prätest, dass sie sich unter einer differenzierbaren Funktion *„eine ‚ausreichend glatte (runde)‘ Funktion“* vorstellt. Dies wird von Rater 1 bereits als sehr hohe Ausprägung der lokalen Linearität interpretiert, da eine glatte Funktion in der Mathematik beliebig oft differenzierbar ist und damit linear approximiert werden kann. Für Rater 2 beschreibt dies vorerst das Aussehen des Funktionsgraphen und lässt keinen Rückschluss auf die Grundvorstellung zu. Am Ende des Semesters wird mit *„eine Funktion, die sich an jeder Stelle ‚gut‘ durch eine lineare Funktion approximieren lässt“* geantwortet. Hierbei ist nun in beiden Bewertungen die lokale Linearität festgestellt worden. Durch die Zuordnung der beiden unabhängigen Rater zur selben Kategorie ist davon auszugehen, dass die zweite Antwort von MO2022 nun einer Grundvorstellung nach Greefrath et al. (2016) entspricht. Es kann somit eine grundlegende und damit auch bessere Vorstellung zur Differenzierbarkeit einer Funktion nach der Vorlesung festgestellt werden.

In den nächsten Äußerungen von DA2917 kann nach Rater 1 eine Verschiebung zu einer anderen Grundvorstellung und nach der Beurteilung von Rater 2 eine Verschlechterung festgestellt werden. Die erste Antwort *„dass man ihre Steigung in einem Punkt berechnen kann“* bewerten beide als Tangentensteigung in der Ausprägung 2. Im Posttest wird eine *„Funktion ohne Knick und ohne wilde Oszillation“* beschrieben, was für den ersten Rater wie in den anderen Fällen als lokale Linearität beurteilt wird. Für Rater 2 handelt es sich dabei um das Aussehen des Funktionsgraphen und wird damit keiner Grundvorstellung zugeordnet.

Etwas überraschend ist bei einigen Antworten, dass sich die Formulierungen und/oder Inhalte nach einem Semester kaum verändert haben. Dies trifft beispielsweise auf MA1906 zu, da die Äußerungen *„eine Funktion ohne Knickstellen“* aus dem Prätest und *„eine Funktion, die keinen Knick hat“* aus dem Posttest inhaltlich ident bleiben. Darüber hinaus kann hier auch BR0615 genannt werden, die/der im ersten Fragebogen *„Eine stetige Funktion, deren linksseitiger Limes dem rechtsseitigen entspricht“* und im zweiten Durchgang *„eine Funktion, bei der alle Werte differenzierbar sind, d.h. der rechtsseitige und linksseitige Limes übereinstimmt“* angegeben hat. Die Bewertung dieser Formulierungen ist bereits im Detail diskutiert worden (zum Beispiel Abschnitte 9.1 und 9.3.6). Zudem gibt es auch Testpersonen, bei denen am Anfang und am Ende des Semesters keine Grundvorstellungen identifiziert werden konnten

und die Aussagen fast ident bleiben. Dazu gehören beispielsweise GA2421 mit „*Funktion kann man ableiten, sodass sie immer noch der Definitionsmenge entspricht*“ im Prätest und „*Funktion, die man an jeder Stelle ableiten kann*“ im Posttest sowie JO0911, die/der in beiden Antworten von einer stetigen Funktion spricht.

10 Überblick über die Studie 2018/19

Wie bereits erwähnt, ist die gleiche Befragung im Jahr 2018/19 mit den Studierenden der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ durchgeführt worden. Die Antworten zur Differenzierbarkeit sind in der Arbeit von Spannagl (2020) analysiert worden. Es ist anzumerken, dass die Daten zum Teil anders ausgewertet worden sind. Dennoch sollen hier einige Ergebnisse wiedergegeben werden, um mögliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede herauszuarbeiten.

Die verbundene Stichprobe mit $n = 59$ ist deutlich höher als die in dieser Masterarbeit beschriebene mit 25 Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Von diesen 59 Äußerungen zur Vorstellung einer differenzierbaren Funktion konnten am Anfang des Semesters genau sieben einer und die anderen 52 keiner Grundvorstellung zugeordnet werden. Dabei sind jeweils drei Antworten auf die lokale Änderungsrate und die Tangentensteigung entfallen. Eine Äußerung konnte dem Verstärkungsfaktor zugeordnet werden und damit keine der lokalen Linearität (vgl. Spannagl, 2020, S. 78).

Aufgrund der hohen Anzahl an Antworten, die keiner Grundvorstellung zugeordnet werden konnten, sind die weiteren Kategorien Fehlvorstellung, Definition, Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Aussehen erstellt worden. Aus den verbleibenden 52 Äußerungen entfallen acht auf Fehlvorstellungen, zwei auf die Definition, sechs auf die Stetigkeit, 32 (Teil-)Aussagen auf die Differenzierbarkeit und 14 auf das Aussehen des Graphen (Mehrfachnennungen). Differenzierbarkeit bezieht sich in der Arbeit auf Antworten, die eine Funktion beschreiben, „*die differenzierbar ist*“ (vgl. Spannagl, 2020, S. 85).

Im Posttest konnten 28 der 59 Antworten genau einer Grundvorstellung zugeteilt werden. Der Großteil der Äußerungen wird mit 16 Zuordnungen der Tangentensteigung zugeschrieben. 11 Aussagen entfallen auf die lokale Änderungsrate, eine auf den Verstärkungsfaktor und erneut keine auf die lokale Linearität (vgl. Spannagl, 2020, S. 87).

Mehr als die Hälfte aller Antworten wird den weiteren Kategorien zugeordnet. Neun Mal kann eine Fehlvorstellung, einmal die Definition und elf Mal die Stetigkeit festgestellt werden. In 25 Äußerungen wird unter anderem die Differenzierbarkeit und in 18 das Aussehen des Funktionsgraphen beschrieben (vgl. Spannagl, 2020, S. 92f.).

Es ist anzumerken, dass auch in dieser Analyse mehr Zuordnungen als Antworten vorkommen, da manche Äußerungen der Studierenden mehreren Kategorien zugeschrieben werden können. Außerdem ist in dieser Studie auch eine Zuteilung der Ausprägungen 1-4

vorgenommen worden (siehe Abschnitt 8.4), worauf in dieser Masterarbeit durch die geringe Interrater-Reliabilität verzichtet worden ist und daher auch nicht näher beschrieben wird.

Im Allgemeinen kann eine Verbesserung in zwei der vier grundlegenden Vorstellungen festgestellt werden. Die am häufigsten auftretenden Grundvorstellungen sind die Tangentensteigung und die lokale Änderungsrate und besonders die Tangentensteigung erfährt im Posttest eine deutliche Verbesserung. Die beiden Grundvorstellungen „lokale Linearität“ sowie „Verstärkungsfaktor“ treten kaum bis gar nicht auf (vgl. Spannagl, 2020, S. 108).

10.1 Vergleich der beiden Erhebungen

Obwohl die Fragebögen aus dem Jahr 2018/19 eine deutlich größere verbundene Stichprobe ausmachen, sind im Prätest lediglich in sieben von 59 Antworten (etwa zwölf Prozent) Grundvorstellungen identifiziert worden (Tabelle 18). Im Gegensatz dazu sind nach Codierleitfaden A (Studie 22/23 A in Tabelle 18) in zwölf von 25 Äußerungen (48 Prozent) und nach Codierleitfaden B (Studie 22/23 B in Tabelle 18) in sechs Antworten (24 Prozent) grundlegende Vorstellungen festgestellt worden. Mit der Bewertung von Rater 2 ist die Studie aus dem Jahr 18/19 durch den ähnlicheren Codierleitfaden eher vergleichbar. Dabei ist zu erkennen, dass in der aktuellen Erhebung um 12 Prozentpunkte mehr Grundvorstellungen im Prätest zugeordnet werden konnten als in der von Spannagl (2020).

	Grundvorstellung	Keine Grundvorstellung
Studie 18/19	12%	88%
Studie 22/23 A	48%	52%
Studie 22/23 B	24%	76%

Tabelle 18: Prozentuelle Häufigkeit von Grundvorstellungen in den Antworten der Erhebung 18/19 sowie 22/23 – Prätest

In der vergangenen Studie sind im ersten Fragebogen die Tangentensteigung und die lokale Änderungsrate am häufigsten zugeordnet worden. Im Gegensatz dazu ist in dieser Masterarbeit nach beiden Codierleitfäden die lokale Linearität in den Antworten der Studierenden am präsentesten.

Am Ende des Semesters konnten 28 der 59 Antworten (etwa 47 Prozent) einer Grundvorstellung zugeteilt werden, wobei die Tangentensteigung mit 16 Nennungen die höchste Anzahl ausmacht (vgl. Spannagl, 2020, S. 87). Nach Codierleitfaden A sind 20 von 25 Äußerungen (80 Prozent) und nach Codierleitfaden B acht der 25 Äußerungen (32 Prozent) als Grundvorstellungen identifiziert worden. Es ist zu erkennen, dass nach der

Lehrveranstaltungen in allen Beurteilungen mehr Grundvorstellungen interpretiert worden sind. Dennoch unterscheiden sich die prozentuellen Häufigkeiten gravierend (Tabelle 19). Beispielsweise ist ersichtlich, dass die Anzahl der Grundvorstellungen in der Erhebung 2018/19 und der aktuellen nach Codierleitfaden A um mehr als 30 Prozentpunkte gestiegen ist. Im Gegensatz dazu ist die Anzahl nach Codierleitfaden B lediglich um 8 Prozentpunkte gestiegen.

	Grundvorstellung	Keine Grundvorstellung
Studie 18/19	47%	53%
Studie 22/23 A	80%	20%
Studie 22/23 B	32%	68%

Tabelle 19: Prozentuelle Häufigkeit von Grundvorstellungen in den Antworten der Erhebung 18/19 sowie 22/23 – Posttest

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass im Allgemeinen bis auf die Bewertung des Posttests nach Codierleitfaden A überwiegend wenige Grundvorstellungen in den Äußerungen der Studierenden gefunden worden sind. Dennoch lässt sich in allen Auswertungen zumindest von der Anzahl der identifizierten Grundvorstellungen eine Verbesserung erkennen. Darüber hinaus kommen unterschiedliche Vorstellungen nach Greefrath et al. (2016) in den beiden Befragungen am öftesten vor. Die Tangentensteigung wird 2018/19 und die lokale Linearität 2022/23 am häufigsten interpretiert. Überraschend dabei ist, dass die lokale Linearität in der Auswertung von Spannagl (2020) gar nicht vorkommt und in der vorliegenden Studie die Tangentensteigung kaum vertreten ist.

11 Diskussion der Ergebnisse

Im Allgemeinen kann gesagt werden, dass sich die Kategorisierung der Antworten schwieriger als erwartet herausgestellt und eine zuverlässige Einteilung eine Herausforderung dargestellt hat. Es konnte lediglich ein geringer Wert für Cohens Kappa berechnet werden, was auf eine geringe Interrater-Reliabilität hindeutet. Aus diesem Grund musste auch auf die Einteilung der Ausprägungen (Qualität) der einzelnen Grundvorstellungen verzichtet werden und es sind zwei mögliche Codierleitfäden präsentiert worden. Da solch eine genaue Zuordnung beim Kernbegriff Grenzwert derselben Befragung möglich gewesen ist (vgl. Paradeisz, 2024, S. 51), kann dies speziell in Hinblick auf die Vorstellungen zur Differenzierbarkeit auf eine geringe Qualität der Antworten hinweisen. Ein Grund dafür kann sein, dass das Ableiten einer Funktion bereits kalkülbasiert abläuft und anderen, möglicherweise weniger vertrauten Inhalten der Analysisvorlesung ein größerer Wert zugeschrieben worden ist. Diese Vermutung wird beispielsweise auch in der Studie von Oldenburg et al. (2022) aufgestellt, da dabei die Zustimmung zu den Grundvorstellungen abnimmt, je weiter sich die Studierenden der Mathematik und Physik im Studium befinden. Es ist jedoch festzuhalten, dass diese Ergebnisse nicht auf die 35 befragten Lehramtsstudierenden in der Studie von Oldenburg et al. (2022) zutreffen, da hierbei nach einer Lehrveranstaltung vermehrt den Grundvorstellungen zugestimmt wird als zuvor (siehe Kapitel 6).

Trotz dieser Schwierigkeiten sind zwei mögliche Bewertungen der Äußerungen der Studierenden präsentiert worden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 20 und Tabelle 21 ersichtlich. In beiden Fällen lassen sich im zweiten Durchgang der schriftlichen Befragung mehr Grundvorstellungen identifizieren als im ersten. Nach Codierleitfaden A sind zwölf Grundvorstellungen im ersten Fragebogen und 20 im zweiten Durchgang zugeordnet worden. Im Vergleich dazu sind nach Codierleitfaden B sechs grundlegende Vorstellungen im Prätest und acht im Posttest festgestellt worden. In beiden Beurteilungen wird die lokale Linearität am häufigsten zugeordnet.

	TS	LÄ	LL	Keine
Prätest	2	4	8	13
Posttest	1	11	13	5

Tabelle 20: Ergebnisse der Zuordnungen nach Codierleitfaden A

	TS	LÄ	LL	Keine	F	S	Aussehen	D
Prätest	1	1	4	8	7	6	7	2
Posttest	2	0	6	2	11	4	11	3

Tabelle 21: Ergebnisse der Zuordnungen nach Codierleitfaden B

Damit lässt sich die erste Hypothese „Die Grundvorstellung ‚Tangentensteigung‘ kann in den Antworten am häufigsten identifiziert werden.“ nicht bestätigen. Dieses Ergebnis ist überraschend, da in den im Kapitel 6 und Kapitel 10 beschriebenen Studien von Greefrath et al. (2023), Weigand et al. (2019), Castro & Pino-Fan (2021), Haghjoo & Reyhani (2021) sowie Spannagl (2020) die Tangentensteigung die größte Zustimmung erhalten hat beziehungsweise am häufigsten zugeteilt werden konnte.

Darüber hinaus konnte der Verstärkungsfaktor nach Rater 1 und 2 in keiner Äußerung der Studierenden ausfindig gemacht werden. Damit kann die zweite Hypothese „Die Grundvorstellung ‚Verstärkungsfaktor‘ ist kaum vertreten.“ für die vorliegende Befragung angenommen werden. Dies deckt sich ebenfalls mit der Literatur, da dieser Grundvorstellung in der Fachdidaktik wenig Bedeutung zugeschrieben wird (siehe Abschnitt 5.4) und der Verstärkungsfaktor auch in manchen beschriebenen Studien (siehe Kapitel 6) eine untergeordnete Rolle gespielt hat.

Die dritte Hypothese „Die Häufigkeit der Äußerungen, die der lokalen Linearität oder der lokalen Änderungsrate zugeordnet werden können, erhöht sich nach dem Besuch der Lehrveranstaltung ‚Schulmathematik Analysis‘.“ kann nach dem ersten Codierleitfaden bestätigt werden, da die Anzahl der Äußerungen, in der die lokale Linearität vorkommt, von acht auf 13 steigt und die Äußerungen, die auf die lokale Änderungsrate hindeuten, von vier auf elf erhöht werden. In der Beurteilung nach Rater 2 trifft die Erhöhung ebenfalls auf die lokale Linearität zu, wobei im Posttest zwei Aussagen mehr dieser Grundvorstellung zugeordnet werden konnten als im ersten Fragebogen. Bei der lokalen Änderungsrate zeichnet sich jedoch ein anderes Bild ab. Diese konnte im Prätest einmal und im zweiten Durchgang kein einziges Mal bestimmt werden.

Des Weiteren kann der vorletzten Hypothese „Die Anzahl der Antworten, die keiner Grundvorstellung zugeordnet werden können, reduziert sich nach dem Besuch der Lehrveranstaltung ‚Schulmathematik Analysis‘.“ zugestimmt werden. In der Beurteilung von Rater 1 werden zunächst mehr als die Hälfte der Antworten keiner Grundvorstellung zugeordnet. Zum zweiten Befragungszeitpunkt beschränkt sich die Anzahl der Äußerungen dieser Kategorie auf fünf. Nach Codierleitfaden B ist ein Rückgang von acht auf zwei Aussagen erkennbar. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Anzahlen in den erweiterten Kategorien Fehlvorstellung, Aussehen des Funktionsgraphen und Definition neben den Anzahlen der Grundvorstellungen „lokale Linearität“ sowie „Tangentensteigung“ ebenfalls zugenommen haben.

Damit einhergehend kann die letzte Hypothese „Die Fehlvorstellungen reduzieren sich nach dem Besuch der Lehrveranstaltung ‚Schulmathematik Analysis‘.“ mithilfe des zweiten Codierleitfadens überprüft werden. Dabei ist wie bereits erwähnt festzustellen, dass die Anzahl der Fehlvorstellungen in den Aussagen der Befragten gestiegen ist. Dies ist besonders überraschend, da man eigentlich davon ausgehen könnte, dass fehlerhafte Vorstellungen reduziert werden, je länger man sich mit der Thematik befasst.

12 Fazit und Ausblick

Anhand der vorliegenden Arbeit lassen sich die beiden Forschungsfragen für diese Untersuchung mit 25 Teilnehmerinnen und Teilnehmer folgendermaßen beantworten: Die Grundvorstellung „lokale Linearität“ wird am häufigsten in den Antworten der Studierenden in beiden Fragebögen identifiziert und im Allgemeinen ist eine Verbesserung der Äußerungen im Posttest erkennbar. Dies geht im zweiten Durchgang der Befragung aus der höheren Anzahl der zugeordneten Grundvorstellungen und der damit einhergehenden Reduktion der Aussagen, die keiner (grundlegenden) Vorstellung zugeschrieben werden können, hervor.

Darüber hinaus kann die Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor“ weder im Prä- noch im Posttest festgestellt werden. Am Ende des Semesters kommt nach dem Codierleitfaden A die Grundvorstellung „lokale Änderungsrate“ deutlich häufiger vor und die Anzahl der Nennungen der Tangentensteigung reduziert sich im Posttest ausgehend von einem niedrigen Niveau. Im Gegensatz dazu wird nach dem zweiten Codierleitfaden die lokale Änderungsrate insgesamt einmal zugeteilt und die Tangentensteigung tritt kaum auf, wodurch der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Befragung sehr gering ist.

Die Auswertung der durchgeführten Befragung ist für den Umfang dieser Masterarbeit ausreichend. Dennoch muss erwähnt werden, dass die geringe Anzahl an befragten beziehungsweise Antwort gebenden Personen keine allgemeinen Schlussfolgerungen ermöglicht und die Repräsentativität der Ergebnisse eingeschränkt ist. Die deutlich geringere Stichprobe ($n = 25$) im Gegensatz zu der Befragung aus dem Jahr 2018/19 mit 59 Teilnehmerinnen und Teilnehmern kann auf die Corona-Pandemie zurückzuführen sein. Aufgrund dessen hat sich das online Angebot der Universität Wien erweitert, wodurch auch die Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ im Stream und im Nachhinein jederzeit abrufbar gewesen ist. Es kann angenommen werden, dass dadurch die Anzahl der Studierenden abgenommen hat, die physisch im Hörsaal anwesend gewesen ist.

Darüber hinaus ist nicht klar, wie viele Vorlesungen der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studie im Laufe des Semesters besucht haben. Die verbundene Stichprobe bringt lediglich hervor, dass die Probandinnen und Probanden in der ersten und letzten Einheit der Schulmathematik Analysis physisch anwesend gewesen sind.

Des Weiteren ist unklar, wann die Fachvorlesung beziehungsweise Übung „Analysis in einer Variable für das Lehramt“ von den Studierenden absolviert worden ist. Im Curriculum ist zwar festgehalten, dass diese ein Semester vor der Schulmathematik-Lehrveranstaltung und damit

in diesem Fall im Sommersemester 2022 besucht werden sollte, jedoch ist dies nicht verbindlich und könnte beispielsweise schon früher abgeschlossen worden sein (vgl. Universität Wien, 2022, S. 12). Dadurch kann einerseits bereits viel Zeit zwischen der fachmathematischen Vorlesung beziehungsweise Übung und dem Prätest liegen sowie andererseits unterschiedliche Vortragende andere Schwerpunkte gesetzt haben. Damit ist es denkbar, dass beispielsweise auch die Notenvergabe der Vorlesung und Übung variiert.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass eine Verbesserung der Äußerungen der Studierenden nach der Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“ erkennbar und die lokale Linearität von den Grundvorstellungen nach Greefrath et al. (2016) am häufigsten zugeteilt worden ist. Dennoch muss berücksichtigt werden, dass die Zuordnung der Antworten in Grundvorstellungen und in weitere Kategorien eine Herausforderung dargestellt hat, was unter anderem auf die Qualität der Antworten zurückzuführen ist.

Anhand der Erkenntnisse aus dieser Arbeit kann gesagt werden, dass weitere Forschung in diesem Bereich notwendig ist, um allgemeinere Schlussfolgerungen ziehen zu können. Es ist beispielsweise vorstellbar, die Grundvorstellungen zur Differenzierbarkeit anhand einer größeren Stichprobe zu untersuchen und mehrere Universitätsstandorte miteinzubeziehen. Außerdem können qualitative Methoden verwendet werden, um einen Einblick in die Tiefe der Vorstellungen der Studierenden zu erhalten. Dabei können beispielsweise Interviews dazu dienen, Denkweisen und Überzeugungen von angehenden Lehrpersonen zu verstehen und potenzielle Fehlvorstellungen zu erkennen.

Literaturverzeichnis

- Achleitner, M. (2022). *Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff. Eine empirische Studie unter Lehramtsstudierenden*. Universität Wien: Masterarbeit.
<https://doi.org/10.25365/thesis.71839>
- Bamberg, G., Baur, F., & Krapp, M. (2022). *Statistik. Eine Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler*. Berlin/Boston: De Gruyter.
- Bauer, T. (2013). *Analysis - Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik – sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Behrends, E. (2011). *Analysis Band 1. Ein Lehrbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Bleier, G., Lindenberg, J., Lindner, A., & Süss-Stepancik, E. (2017). *Dimensionen Mathematik 7*. Wien: E. Dörner.
- BMB (2016). *Handreichung zum Lehrplan Mathematik 2016 Oberstufe AHS*. Wien: Bundesministerium für Bildung.
<https://www.matura.gv.at/index.php?elD=dumpFile&t=f&f=2120&token=084273fd9172596eab3f89e5bedcdd146d1363f1>
- BMBF (2012). *Mathematik an AHS. Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben*. Wien: Bundesministerium für Bildung und Frauen.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2013). Kurve, Kreis und Krümmung – ein Beitrag zur Vertiefung und Reflexion des Ableitungsbegriffs. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S. 133-146). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Castro, W., & Pino-Fan, L. (2021). Comparing the Didactic-Mathematical Knowledge of Derivative of In-Service and Pre-service Teachers. *Acta Scientiae*, 23(3), 34-99.
- Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Berlin, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Deiser, O. (2011). *Analysis 1*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Döring, N. (2023). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. Berlin: Springer.
- Fahrmeir, L., Heumann, C., Künstler, R., Pigeot, I., & Tutz, G. (2023). *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse*. Berlin: Springer Spektrum.
- Falk, M., Hain, J., Marohn, F., Fischer, H., & Michel, R. (2014). *Statistik in Theorie und Praxis*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht*. Berlin: Springer Spektrum.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2021). *Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen (GV-AI). Empirische Erfassung von Grundvorstellungen zur ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle und zum bestimmten Integral*. Augsburg, Bayreuth, Münster, Würzburg. <https://hal.science/hal-03103685>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2023). Mathematics Students' Characteristics of Basic Mental Models of the Derivative. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 44(1), 143-169. <https://doi.org/10.1007/s13138-022-00207-9>
- Griesel, H., vom Hofe, R., & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 123-133. <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00140-4>
- Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(1), 3-45. <https://doi.org/10.1007/BF03338859>
- Haghjoo, S., & Reyhani, E. (2021). Undergraduate basic sciences and engineering students' understanding of the concept of derivative. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 6(4), 277-298. <https://doi.org/10.23917/jramathedu.v6i4.14093>
- Hahn, S., & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung - Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(1), 163-198. <https://doi.org/10.1007/BF03339061>
- Kleine, M. (2012). *Lernen fördern Mathematik. Unterricht in der Sekundarstufe I*. Seelze: Friedrich Verlag.
- Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., & Ulovec, A. (2019). *Mathematik verstehen 7*. Wien: öbv.
- Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum: Qualitative Social Research*, 1(2). <https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089>
- Meißner, J.-D. (2004). *Statistik verstehen und sinnvoll nutzen*. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.
- Oldenburg, R., Greefrath, G., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2022). Basic Mental Models of Derivative and Integral: First Hypothesis. *Twelfth Congress of the European*

- Society for Research in Mathematics Education (CERME12). Bozen-Bolzano, Italien.
<https://hal.science/hal-03754870>
- Paradeisz, L. (2024). *Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff von Folgen*. Universität Wien: Masterarbeit. <https://doi.org/10.25365/thesis.75716>
- Plaue, M., & Scherfner, M. (2019). *Mathematik für das Bachelorstudium 1*. Berlin: Springer Spektrum.
- Roundy, D., Dray, T., Manogue, C., Wagner, J.-F., & Weber, E. (2015). An Extended Theoretical Framework for the Concept of the Derivative. In T. Fukawa-Connolly, N. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Hrsg.), *Proceedings of the Eighteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (S. 919-924). Pittsburgh, PA. <http://sigmaa.maa.org/rume/RUME18v2.pdf>
- Schoenfeld, A. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York: Routledge.
- Spannagl, A. (2020). *Grundvorstellungen zu den Konzepten 'Stetigkeit' und 'Differenzierbarkeit' von angehenden Mathematiklehrer*innen*. Universität Wien: Masterarbeit. <https://doi.org/10.25365/thesis.65272>
- Steinbauer, R. (2024). *Analysis für das Lehramt*. Universität Wien (Moodle): Vorlesungsskript.
- Steinbauer, R., & Ableitinger, C. (2020). Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff. In H.-S. Siller, W. Weigel, & J. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 905-908). Münster: WTM-Verlag.
- Steinbauer, R., & Kramer, S. (2023). *Schulmathematik Analysis*. Universität Wien: Vorlesungsskript.
<https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem22/smana-gesamt-2023-01-17.pdf>
- Stocker, T. C., & Steinke, I. (2022). *Statistik. Grundlagen und Methodik*. Berlin/Boston: De Gruyter.
- Universität Wien (2022). *Teilcurriculum für das Unterrichtsfach Mathematik im Rahmen des Bachelorstudiums zur Erlangung eines Lehramts im Bereich der Sekundarstufe (Allgemeinbildung) im Verbund Nord-Ost*. Wien.
https://senat.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/s_senat/konsolidiert_Lehramt/Teilcurriculum_Mathematik_BA_Lehramt.pdf
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.
- vom Hofe, R., & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *mathematiklehren*, 236(1), 2-7. https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2023/vom_Hofe_Roth_2023_Grundvorstellungen_aufbauen.pdf

- Weigand, H.-G., Drösemeier, A., Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., & Ulm, V. (2019). Eine empirische Überprüfung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen. In A. Frank, S. Krauss, & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 881-884). Münster: WTM-Verlag.
- Witzke, I., & Spies, S. (2016). Domain-Specific Beliefs of School Calculus. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 131-161. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0106-4>
- Zandieh, M. (1997). *The evolution of student understanding of the concept of derivative*. Oregon: PhD Thesis.
https://ir.library.oregonstate.edu/concern/graduate_thesis_or_dissertations/nc580p89k

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Grafische Deutung des Differenzenquotienten.....	9
Abbildung 2: Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten $1/2$	10
Abbildung 3: Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten $2/2$	10
Abbildung 4: Aspekte und Grundvorstellungen zu einem Begriff (Greefrath et al., 2016, S. 17)	18
Abbildung 5: Ausbilden von Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995, S. 124).....	19
Abbildung 6: Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen der Differenzierbarkeit (Greefrath et al., 2016, S. 17)	20
Abbildung 7: Polynomfunktion dritten Grades mit der Tangente t im Punkt A	21
Abbildung 8: Geometrische und analytische Grundvorstellung zur Tangente (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 46).....	22
Abbildung 9: Tangentensteigung als Grenzlage benachbarter Sekanten (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 47).....	22
Abbildung 10: Fehlvorstellung – Sehnen statt Sekanten (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 47).....	23
Abbildung 11: Lokale Linearität anhand eines Beispiels	27
Abbildung 12: Aufgabe 1 aus der Untersuchung über Grundvorstellungen zu Ableitungen (Greefrath et al., 2021)	29
Abbildung 13: Ergebnisse des Prä- und Posttests (Oldenburg et al., 2022).....	30
Abbildung 14: Ausschnitt aus dem Beispiel 13 (Greefrath et al., 2021).....	32
Abbildung 15: Aufgabe 2 zur Betragsfunktion (Castro & Pino-Fan, 2021, S. 96).....	34
Abbildung 16: Vorstellungen über die Ableitung nach Roundy et al. (2015) (Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 280).....	38
Abbildung 17: Säulendiagramm – Absolvierung der Fachvorlesung/Übung.....	44
Abbildung 18: Säulendiagramm – Noten der Fachvorlesung/Übung.....	44
Abbildung 19: Grundvorstellungen im Prätest – Absolute Häufigkeiten	50
Abbildung 20: Grundvorstellungen im Posttest – Absolute Häufigkeiten.....	50
Abbildung 21: Antwort aus dem Fragebogen 1B.....	55
Abbildung 22: Vorstellungen im Prätest – Absolute Häufigkeiten.....	56
Abbildung 23: Vorstellungen im Posttest – Absolute Häufigkeiten	56
Abbildung 24: Fragebogen – Prätest Seite 1/2	80
Abbildung 25: Fragebogen – Prätest Seite 2/2	81
Abbildung 26: Fragebogen – Posttest Seite 1/2.....	82
Abbildung 27: Fragebogen – Posttest Seite 2/2.....	83
Abbildung 28: Antwort von AN2026 im Posttest.....	84

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Durchschnittsgeschwindigkeit in immer kleineren Zeitintervallen für $t_0 < t_1$ (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 54)	25
Tabelle 2: Durchschnittsgeschwindigkeit in immer kleineren Zeitintervallen für $t_0 > t_1$ (vgl. Danckwerts & Vogel, 2006, S. 54)	26
Tabelle 3: Tabelle aus Aufgabe 5 (vgl. Haghjoo & Reyhani, 2021, S. 287)	38
Tabelle 4: Bewertungsnormen für Reliabilitätskoeffizienten (vgl. Döring, 2023, S. 559)	46
Tabelle 5: Exakter Test nach Fisher	51
Tabelle 6: Beispielbewertungen für den Vorzeichentest A	52
Tabelle 7: Vergleich Prä- und Posttest – Tangentensteigung	52
Tabelle 8: Vergleich Prä- und Posttest – Lokale Änderungsrate	53
Tabelle 9: Vergleich Prä- und Posttest – Lokale Linearität	53
Tabelle 10: Vergleich Prä- und Posttest – Grundvorstellung nicht vorhanden	54
Tabelle 11: Absteigende Rangliste	57
Tabelle 12: Beispielbewertungen für den Vorzeichentest B	57
Tabelle 13: Vergleich Prä- und Posttest – Tangentensteigung	58
Tabelle 14: Vergleich Prä- und Posttest – Lokale Änderungsrate	58
Tabelle 15: Vergleich Prä- und Posttest – Lokale Linearität	59
Tabelle 16: Vergleich Prä- und Posttest – Grundvorstellung nicht vorhanden	59
Tabelle 17: Vergleich Prä- und Posttest – Weitere Kategorien	60
Tabelle 18: Prozentuelle Häufigkeit von Grundvorstellungen in den Antworten der Erhebung 18/19 sowie 22/23 – Prätest	66
Tabelle 19: Prozentuelle Häufigkeit von Grundvorstellungen in den Antworten der Erhebung 18/19 sowie 22/23 – Posttest	67
Tabelle 20: Ergebnisse der Zuordnungen nach Codierleitfaden A	68
Tabelle 21: Ergebnisse der Zuordnungen nach Codierleitfaden B	68

Anhang

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist laut aktuellen Forschungsbefunden die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind; es geht also um die „Bilder im Kopf“.

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern. Daher ersuchen wir Sie, den folgenden Fragebogen auszufüllen. Die Auswertung erfolgt *ausschließlich anonym!*

Wir möchten diese Befragung am Ende des Wintersemesters in dieser Lehrveranstaltung wiederholen (Fragebogen 1B) und die Ergebnisse abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen mit einem Code zu versehen. Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!

Der persönliche Code setzt sich aus folgenden sechs Zeichen zusammen:

- (a) Bitte geben Sie die ersten zwei Buchstaben des Vornamens Ihrer Mutter an.
- (b) Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern des Geburtstags Ihrer Mutter an (Bitte zweistellig als z.B. „05“ für „5“).
- (c) Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern Ihres eigenen Geburtstags an.

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtstag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtstag: erste zwei Ziffern	
Code						

Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

2. Unter einer *Reihe* stelle ich mir vor ...

3. Die *Vollständigkeit von $\mathbb{R}$* ist wichtig, weil ...
4. Unter einer *stetigen Funktion* stelle ich mir vor ...
5. Unter einer *differenzierbaren Funktion* stelle ich mir vor ...
6. Ein *unbestimmtes Integral* ist ...
7. Ein *bestimmtes Integral* ist ...
8. Welches Bild verbinden Sie mit dem *Nullstellensatz/Zwischenwertsatz*?
9. In der *Analysis* geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Wir möchten diese Befragung mit der identischen zu Beginn des Wintersemesters durchgeführten Befragung (Fragebogen 1A) abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen wieder mit demselben Code zu versehen. *Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!*

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtstag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtstag: erste zwei Ziffern	
Code						

Die Fragen sind fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Fragebogen 1B: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...
2. Unter einer *Reihe* stelle ich mir vor ...
3. Die *Vollständigkeit von $\mathbb{R}$* ist wichtig, weil ...
4. Unter einer *stetigen Funktion* stelle ich mir vor ...

5. Unter einer *differenzierbaren Funktion* stelle ich mir vor ...
6. Ein *unbestimmtes* Integral ist ...
7. Ein *bestimmtes* Integral ist ...
8. Welches Bild verbinden Sie mit dem *Nullstellensatz/Zwischenwertsatz*?
9. In der *Analysis* geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...
10. Ich habe selbst schon in der Schule Mathematik unterrichtet: ☐ Ja ☐ Nein
Wenn ja, wo und in welchem Rahmen
☐ Orientierungspraktikum (PÄP) ☐ Schulpraxis (FAP)
☐ Sondervertragslehrer/in
11. Ich gebe/gab regelmäßig Mathematik-Nachhilfe: ☐ Ja ☐ Nein
12. Ich plane in der ☐ NMS ☐ AHS-Unterstufe ☐ AHS-Oberstufe
☐ BHMS zu unterrichten (Mehrfachnennungen möglich).
13. Ich habe die „Analysis in einer Variable für das LA“ oder eine entsprechende andere Analysis-LVA positiv absolviert:
Vorlesung ☐ Ja Note ☐ Nein
Übungen ☐ Ja Note ☐ Nein

Antworten im Fragebogen 2022/23 zur Differenzierbarkeit:

- 25 verbundene Stichproben → Antworten 1) vor und 2) nach der Lehrveranstaltung

Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor ...

AN0111

- 1) eine Funktion, die ich ableiten kann
- 2) eine Funktion die auf ihrem gesamten Definitionsbereich definiert ist und gegen einen Grenzwert konvergiert

AN1014

- 1) eine Funktion die auf dem gesamten Definitionsbereich definiert ist und stetig ist
- 2) eine stetige Funktion die in jedem Punkt eine Ableitung besitzt

AN2026

- 1) eine Funktion für die auf ganz $\mathbb{R}$ eine Ableitung existiert
- 2) eine stetige Funktion ohne Knick, z.B. die Betragsfkt. hat bei $x=0$ einen Knick $\Rightarrow$ dort ist die Fkt. nicht diff.bar

Anmerkung: Die Originalantwort ist aufgrund der Skizze hinzugefügt worden.

5. Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor ...

⊗ stetige

eine ⊗ Fkt. ohne Knick z.B.
die Betrags fkt. hat bei $x=0$
einen Knick $\Rightarrow$ dort ist die Fkt. nicht diff.bar

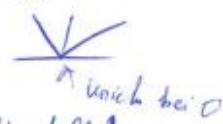


Abbildung 28: Antwort von AN2026 im Posttest

BI0809

- 1) eine Funktion, die man ableiten kann
- 2) eine Funktion von der man den Differenzialquotienten bilden kann, z.B. kein Knick

BR0615

- 1) Eine stetige Funktion, deren linksseitiger Limes dem rechtsseitigen entspricht
- 2) eine Funktion, bei der alle Werte differenzierbar sind, d.h. der rechtsseitige und linksseitige Limes übereinstimmt.

CH1818

- 1) dass man mithilfe von Ableiten gewisse Dinge weglassen kann, sich die Funktion aber nicht wesentlich ändert
- 2) eine Funktion ohne Sprünge oder wilde Oszillation

CL2420

- 1) dass die Funktion ableitbar ist; dass sie stetig ist
- 2) eine stetige Funktion, die keinen Knick hat und deren Ableitung nirgendwo ∞ -groß (Anm.: unendlich groß) ist; es gibt einen limes

DA2917

- 1) dass man ihre Steigung in einem Punkt berechnen kann.
- 2) Funktion ohne Knick und ohne wilde Oszillation

DO0704

- 1) eine Funktion bei der der Limes des Differenzenquotienten existiert & endlich ist
- 2) eine Funktion, bei der man die Steigung berechnen kann & diese einen endlichen Wert annimmt.

DO1324

- 1) eine Funktion die stetig ist und außerdem keinen „Knick“ hat
- 2) Fkt. deren Differenzenquotient in jedem x-Wert einen Limes hat

EL0214

- 1) eine Funktion, die abgeleitet werden kann ohne auf Grenze zu stoßen
- 2) eine Funktion, die keinen Knick hat

EL0826 (EL0926)

- 1) Eine Funktion, dessen Ableitung auf dem Def.bereich stetig ist
- 2) eine Funktion die auf ihrem gesamten Def.bereich stetig ist, denn $\text{diff.bar} \Rightarrow \text{stetig}$; aber
Achtung: $\text{stetig} \not\Rightarrow \text{diff.bar}$

EL0827

- 1) der Grenzwert von Differenzenquotient ist in jedem definierten Punkt bestimmbar
- 2) (ohne Knick) Limes des Differenzenquotient existiert und ist endlich in einem Punkt x_0

EL2405

- 1) eine Funktion, die ich leicht auch hier zeichnen kann, aber nur Kurven und keine Knicke dabei sind
- 2) eine Funktion ohne Knicke und Sprünge bzw. wo der links- & rechtsseitige Limes übereinstimmen

EV1406

- 1) Diese Funktion kann mehrmals abgeleitet werden.
- 2) eine Funktion, die keinen Knick hat und ohne Absetzen gezeichnet werden kann

GA2421

- 1) Funktion kann man ableiten, sodass sie immer noch der Definitionsmenge entspricht
- 2) Funktion, die man an jeder Stelle ableiten kann

JO0911

- 1) stetig
- 2) eine stetige Funktion

MA1020

- 1) (Skizze der Betragsfunktion) im Punkt 0 nicht diffbar
- 2) Eine Funktion, deren Differenzialquotient endlich ist und existiert

MA1906

- 1) eine Funktion ohne Knickstellen
- 2) eine Funktion, die keinen Knick hat

MA1930

- 1) Eine Funktion ohne Knicke, etc.

Die Funktion ist stetig

- 2) Eine Funktion, die bei der für jeden Punkt $x_0 \in D$ (Definitions Menge) gilt: Der Limes des Differenzenquotient $(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x_0 - f(x_0 + x))}{x})$ existiert und ist endlich.

MA2319

- 1) eine Funktion, die abgeleitet werden kann
- 2) Eine Funktion, deren linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert in jedem Punkt übereinstimmen

MA2403

- 1) Eine stetige Funktion, die noch zusätzlich
- 2) eine Funktion mit Ableitung, also eine noch schönere Funktion, die keine Knicke hat & deren Grenzwerte endlich sind

MO2022

- 1) eine „ausreichend glatte (runde)“ Funktion
- 2) eine Funktion, die sich an jeder Stelle „gut“ durch eine lineare Funktion approximieren lässt

MO2230

- 1) stetig+, keine Ecken, bzw. keine Stellen, die nicht diffbar sind mit Formel.
- 2) stetige Funktion ohne Knicke

RO1630

- 1) Eine Funktion, die approximativ linear ist, wenn man nur „weit genug hinein zoomt“.

Differenzierung durch möglichst kleines Steigungsdreieck. Deshalb Steigung als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bzw. $\frac{dy}{dx}$

- 2) Eine Funktion, die ein Stück weit durch eine lineare Funktion approximiert werden kann.