

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Grundvorstellungen im Mathematikunterricht der
Sekundarstufe I
Eine Zusammenschau normativer Grundvorstellungen und ihre
Abbildung in aktuellen Schulbüchern.

verfasst von | submitted by

Sebastian Bruno Kohlert BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 504 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Chemie Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger
Privatdoz.

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Masterarbeit ist es, empirisch erforschte normative Grundvorstellungen der mathematischen Teilgebiete der AHS Sekundarstufe I zu katalogisieren und mit Musteraufgaben aus aktuellen Schulbüchern zu untermauern. Sie gibt dadurch, im Gegensatz zu anderen Arbeiten auf diesem Gebiet, einen Überblick über normative Grundvorstellungen und enthält Musteraufgaben, welche als Anhaltspunkt für die Aufgabenauswahl im Mathematikunterricht bereitstehen. Somit ist diese Arbeit speziell an Mathematiklehrer*innen der Sekundarstufe I gerichtet.

Die Arbeit gibt einen Einblick in das Wesen von Grundvorstellungen und erläutert, welches Konzept ihnen zugrunde liegt. Anschließend werden Konzepte, welche im englischsprachigen Raum vorherrschen, dem Grundvorstellungskonzept gegenübergestellt. Die Grundvorstellungen, zu im Lehrplan der AHS Unterstufe vorhandenen Gebieten, werden anhand von Musteraufgaben erläutert. Die Arbeit betont die Bedeutung der Grundvorstellungen von Brüchen und ihren Zusammenhang mit den Grundvorstellungen zur Proportionalität und zu Prozentsätzen. Darüber hinaus werden die Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen, insbesondere zum Erweitern und Kürzen, diskutiert. Die Arbeit hebt hervor, dass diese Grundvorstellungen in den Schulbüchern nicht immer ausreichend vertreten sind und dass es noch Potenzial zur Eingliederung von entsprechenden Aufgaben in aktuellen Schulbüchern gibt.

Es wird auf Grundvorstellungen zur Stochastik eingegangen und die in der Literatur fehlenden Grundvorstellungen zur beschreibenden Statistik thematisiert. Auf Themengebiete, für die es noch keine erforschten Grundvorstellungen gibt, wie die Geometrie, wird hingewiesen und somit mögliche neue Forschungsgebiete im Bereich der normativen Grundvorstellungen beleuchtet. Die Arbeit bietet einen Einstieg zur Beschäftigung mit normativen Grundvorstellungen und ist als Bestandsaufnahme zum derzeitigen Forschungsstand auf diesem Gebiet zu sehen.

Abstract

The objective of this master's thesis is to catalogue empirically researched normative "Grundvorstellungen" in the mathematical subfields of the AHS secondary level I and to substantiate them with sample tasks from current school textbooks. In contrast to other works in this field, it provides an overview of normative "Grundvorstellungen" and includes sample tasks that can serve as a guide for task selection in mathematics lessons. Thus, this thesis is specifically aimed at mathematics teachers in secondary level I.

The thesis provides an insight into the nature of "Grundvorstellungen" and explains the concept on which they are based. Subsequently, concepts prevalent in the English-speaking world are compared with the concept of "Grundvorstellungen". The "Grundvorstellungen" of the areas in the curriculum of the AHS lower level are explained using sample tasks. The thesis emphasizes the importance of the "Grundvorstellungen" of fractions and their connection to the "Grundvorstellungen" of proportionality and percentages. In addition, the "Grundvorstellungen" of arithmetic with fractions, in particular extending and shortening, are discussed. The thesis points out that these "Grundvorstellungen" are not always adequately represented in school textbooks and that there is still potential for the integration of corresponding tasks into current school textbooks.

"Grundvorstellungen" in stochastics are discussed and the "Grundvorstellungen" of descriptive statistics, which are missing in the literature, are addressed. Topics for which there are no yet researched "Grundvorstellungen", such as geometry, are pointed out and thus possible new research areas in the field of normative "Grundvorstellungen" are illuminated. The thesis offers an introduction to the topic of normative "Grundvorstellungen" and can be seen as an inventory of the current state of research in this field.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Grundvorstellungskonzept	5
2.1.1	Ursprung des Grundvorstellungskonzepts	6
2.1.2	Grundvorstellungen als Vermittler zwischen Mathematik und Realität	7
2.1.3	Grundvorstellungen als Übersetzer zwischen unterschiedli- chen Darstellungsebenen	8
2.1.4	Aspekte der Grundvorstellungsidee	10
2.1.5	Unterteilung von Grundvorstellungen	11
2.1.6	Ausbildung von Grundvorstellungen	13
2.1.7	Konzepte im englischsprachigen Raum	15
2.1.8	Resümee zum Konzept der Grundvorstellung	19
3	Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten	21
3.1	Grundvorstellungen zu Bruchzahlen	21
3.2	Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen	29
3.2.1	Grundvorstellungen zum Erweitern und Kürzen von Brüchen	30
3.2.2	Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion von Bruch- zahlen	33
3.2.3	Grundvorstellungen zur Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl	37
3.2.4	Grundvorstellungen zur Multiplikation von Bruchzahlen . . .	39
3.2.5	Grundvorstellungen zur Division von Bruchzahlen	41
3.3	Grundvorstellungen zu den negativen Zahlen	44

Inhaltsverzeichnis

3.4	Grundvorstellungen zur Proportionalität	50
3.5	Grundvorstellungen zu Prozenten	56
3.5.1	Prozente als relative Größen (Intensive Quantity)	57
3.6	Grundvorstellungen zur Prozentrechnung	60
3.7	Grundvorstellungen zur Algebra	64
3.7.1	Grundvorstellungen zum Variablenbegriff	65
3.7.2	Grundvorstellungen zum Termbegriff	67
3.7.3	Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff	68
3.7.4	Grundvorstellungen zu Gleichungen	72
3.8	Grundvorstellungen zu Potenzen	77
3.9	Grundvorstellungen zur Stochastik	80
3.9.1	Grundvorstellungen zur beschreibenden Statistik	81
3.9.2	Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff	81
3.10	Grundvorstellungen zur Geometrie	87
4	Schluss	89
	Literaturverzeichnis	92

1 Einleitung

Schon lange beschäftigen sich Mathematikdidaktik, Pädagogik und Psychologie damit, welche „Vorstellungen“, „Anschauungen“ und „Verinnerlichungen“ von Schüler*innen ausgebildet werden (Vom Hofe, 1995, S.10-18). Es sollen adäquate Vorstellungen etabliert werden, um Verständnisschwierigkeiten zu vermeiden und die Begriffsbildung zu unterstützen. Das Ziel der Forschung in diesem Bereich ist es, die Prozesse beim Erlernen mathematischer Konzepte genau zu verstehen (Salle und Clüver, 2021, S. 554).

Vom Hofe (1995) arbeitet die Herkunft des Begriffes der „Grundvorstellung“ auf. Grundvorstellungen stehen, laut ihm, für „fundamentale mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen“ (siehe Vom Hofe, 1995, S. 98). Sie sind inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe und dienen als „Elemente der Vermittlung bzw. als Objekte des Übergangs zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffswelt des Lernenden“ (siehe Vom Hofe, 1995, S. 98).

Das Grundvorstellungskonzept hat seit seiner Begriffsbestimmung stark an Bedeutung gewonnen. Es konnte, in empirischen Studien, Leistungsunterschiede von Schüler*innen erklären (Prediger, 2008, S. 16) und wird explizit im neuen Lehrplan für die AHS Unterstufe (BMBWF, 2023a) erwähnt.

Somit sind Grundvorstellungen ein wesentlicher Teil des Lernens und Lehrens von Mathematik.

Leider gibt es aber noch keine umfassende Sammlung der entsprechenden Grundvorstellungen für alle im Lehrplan der AHS Sekundarstufe verankerten Teilgebiete

1 Einleitung

der Mathematik.

Diese Masterarbeit soll einen Versuch abbilden, die bisher empirisch erforschten Grundvorstellungen der mathematischen Teilgebiete der AHS Sekundarstufe I zu sammeln und entsprechende Musteraufgaben zur Förderung der Ausbildung dieser Grundvorstellungen aufzuzeigen.

Zu diesem Zweck wurde die mathematikdidaktische Literatur auf entsprechende normative Grundvorstellungen durchkämmt. Um die gefunden Grundvorstellungen zu veranschaulichen, sind diesen entsprechende Musteraufgaben beigelegt. Hierfür wurden zehn Schulbuchreihen (Lösungswege Mathematik, Thema Mathematik, Das ist Mathematik, Mathematik verstehen, Plus! Mathematik, Genial! Mathematik, Mathematik verstehen + üben + anwenden, Schritt für Schritt Mathematik, Mehrfach Mathematik und Ganz Klar Mathematik) auf Aufgaben zu den entsprechenden Grundvorstellungen untersucht. Die entnommenen Aufgaben stammen hierbei aus den fünf erstgereihten Schulbuchreihen, da bei diesen die Aufgaben zur Ausbildung der entsprechenden Grundvorstellungen vorteilhaft gestaltet sind.

So soll ein Überblick über normative Grundvorstellungen für den Mathematikunterricht der AHS Sekundarstufe I gegeben werden. Die zu den Grundvorstellungen ausgewählten Musteraufgaben können als Anhaltspunkte zur Auswahl geeigneter Aufgaben für den Mathematikunterricht der entsprechenden Schulstufe dienen. Überdies wird durch die Zusammenschau der Grundvorstellungen aufgezeigt, zu welchen mathematischen Teilgebieten, bei der erfolgten Literaturrecherche, keine normativen Grundvorstellung gefunden wurden und noch dazu, wird die fehlende Abbildung von diversen normativen Grundvorstellungen in den verwendeten aktuellen Schulbüchern beleuchtet. Dies illustriert, auf welchen Gebieten noch Raum zur Erforschung entsprechender Grundvorstellungen besteht und welche Grundvorstellungen ein Potential zur besseren Abbildung in Schulbüchern beinhalten.

So wird Mathematiklehrer*innen der Sekundarstufe I ein Einstieg in den Bereich der normativen Grundvorstellungen, sowie Ansatzpunkte zur Aufgabenauswahl

für den Unterricht geboten und Mathematikdidaktiker*innen werden mathematische Gebiete aufgezeigt, in denen noch keine normativen Grundvorstellungen erforscht sind.

2 Grundlagen

In diesem Abschnitt wird zunächst darauf eingegangen, was Grundvorstellungen sind oder treffender gesagt, wie sie, aus verschiedenen Blickwinkeln, beschrieben sind. Des Weiteren wird besprochen, wie Grundvorstellungen didaktisch genutzt werden können und aufgezeigt, welchen Grenzen das Grundvorstellungskonzept unterliegt.

2.1 Grundvorstellungskonzept

Wie schon in der Einleitung erwähnt, kommt dem Konzept der Grundvorstellung eine wichtige Rolle im Lernen und Lehren von Mathematik zu. Aber was ist nun eine Grundvorstellung, wie kann eine Grundvorstellung am besten beschrieben werden und wie entsteht sie?

Beginnen wir die Annäherung an das Konzept der Grundvorstellung mit dem Beispiel einer Grundvorstellung.

„Eine Funktion erfasst, wie sich Änderungen einer Zahl oder Größe auf die Änderungen der abhängigen Zahl oder Größe auswirken.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 144)

Oben stehende Aussage ist eine Grundvorstellung zum Funktionsbegriff und kann, beispielsweise anhand eines Graphen, wie in Abbildung 2.1, dargestellt werden. Es handelt sich um die Kovariationsvorstellung und wird im entsprechenden Kapitel näher behandelt.

2 Grundlagen

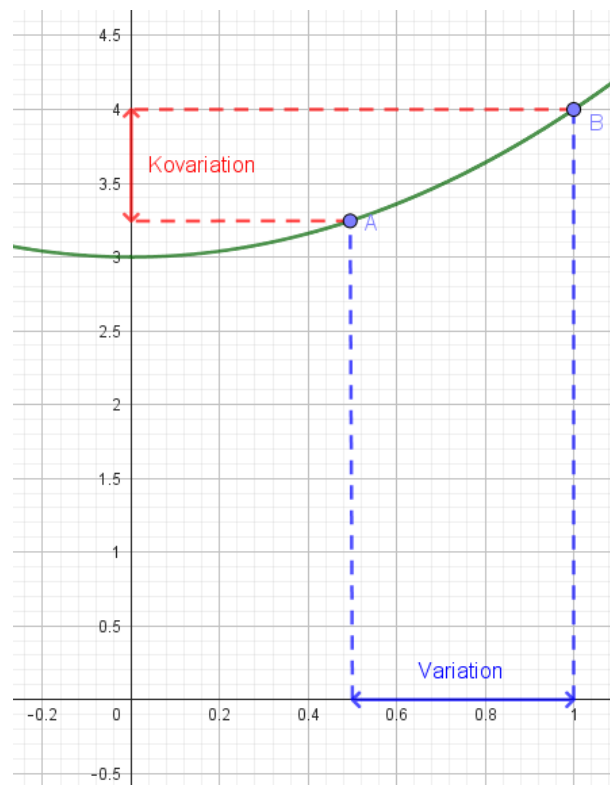


Abbildung 2.1: Kovariationsvorstellung (in Anlehnung an Steinbauer et al., 2019, S. 23)

2.1.1 Ursprung des Grundvorstellungskonzepts

Laut Vom Hofe und Fast (2015, S. 43) stammt das Konzept der Grundvorstellung aus der deutschen Rechendidaktik des 19. Jahrhunderts, insbesondere aus dem elementaren Arithmetikunterricht. Es sollten Zahlen und Rechenoperationen mit Sinn erfüllt werden und eine Basis für Anwendungen geschaffen werden. Im Kontrast zu dem ansonsten üblichen Auswendiglernen von Rechenverfahren ohne anschauliche Grundlage.

In den folgenden Epochen wurde es auf unterschiedliche mathematische Gebiete, wie die Algebra, die Funktionenlehre und die Analysis, erweitert. Seine zentrale Funktion ist dabei „... die Übersetzung zwischen Realität und Mathematik bzw. zwischen unterschiedlichen Darstellungsebenen der Mathematik.“ (siehe Vom Hofe und Fast, 2015, S. 43)

2.1.2 Grundvorstellungen als Vermittler zwischen Mathematik und Realität

Eine andere Möglichkeit, sich dem Grundvorstellungskonzept zu nähern, besteht darin sich anzusehen, wie mathematisches Arbeiten beschrieben wird.

Mathematisches Arbeiten, in Anwendungskontexten, wird in der gängigen Praxis als Modellierungskreislauf interpretiert (Blum und Leiß, 2005). In diesem Modell wird der Modellierungskreis in „den Rest der Welt“ und „die Mathematik“ aufgeteilt, wie in Abbildung 2.2 ersichtlich.

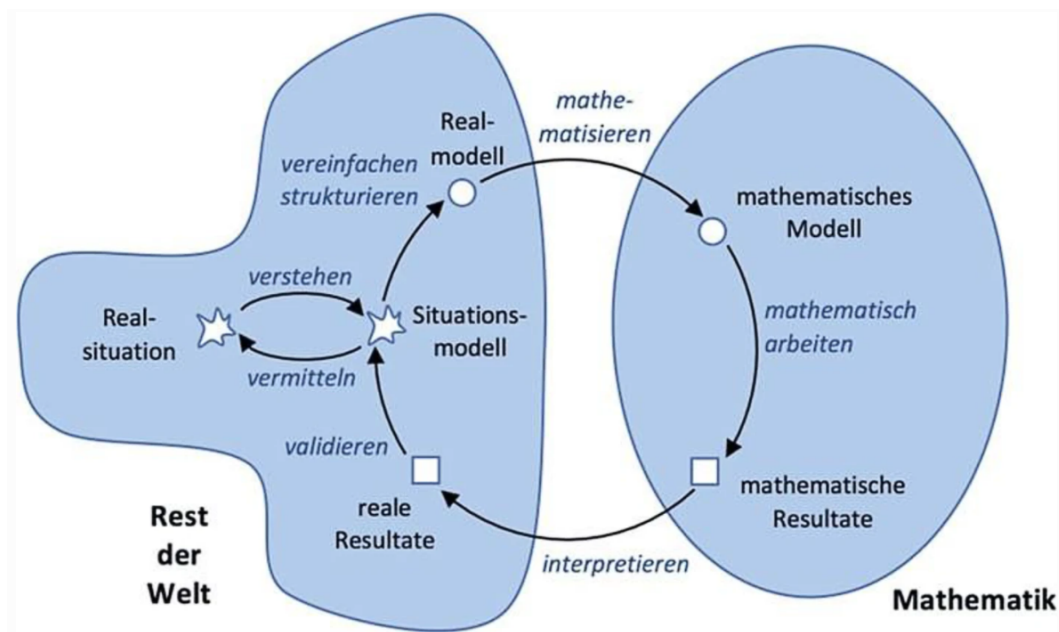


Abbildung 2.2: Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (2005, S. 19)

Wie Kleine et al. (2005, S. 226) in seinem Artikel mit einem Fokus auf Grundvorstellungen ausführen, kommt dem Mathematisieren bei der Transformation vom Realmodell („Rest der Welt“) zum mathematischen Modell („Mathematik“) eine besondere Bedeutung zu.

2 Grundlagen

Es ist laut Kleine et al. nur dann eine Transformation des Realmodells in das mathematische Modell realisierbar, wenn „mentale Objekte vorhanden sind, die diese Übertragungen ermöglichen. Solche mentalen Objekte werden in der deutschen Mathematik-Didaktik als Grundvorstellungen bezeichnet,...“ (siehe Kleine et al., 2005, S. 226).

In diesem Fall spricht Vom Hofe von einer Grundvorstellungsidee, die sich in der Auseinandersetzung zwischen Theorie und Praxis herausbildet. Für ihn ist die Idee der Grundvorstellung nun die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der individuellen Begriffsbildung und den entsprechenden mathematischen Inhalten (1995, S. 97).

2.1.3 Grundvorstellungen als Übersetzer zwischen unterschiedlichen Darstellungsebenen

Grundvorstellungen werden aber nicht nur bei der Vermittlung zwischen Mathematik und Realität benötigt. Sie sind auch im innermathematischen Kontext dienlich.

Noch bevor der aus der Psychologie stammende Begriff der mentalen Repräsentation in die Mathematikdidaktik übernommen wurde, ist der Begriff der Grundvorstellung im Sinne der Repräsentation eines gedanklichen Konstruktes für zahlreiche Bereiche der Schulmathematik verwendet worden. Was im allgemeinen Sprachgebrauch intuitives Verständnis genannt wird, sollen Grundvorstellungen präzisieren. (Griesel et al., 2019, S. 129)

„Grundvorstellungen zu einem Begriff können sich etwa entwickeln, wenn sich Lernende mit Phänomenen befassen, denen Aspekte dieses Begriffs zugrunde liegen. [...] Dadurch wird der Begriff in Bezug zu sinnhaltigen Kontexten mit Bedeutung versehen.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 46)

Schulz und Wartha (2021, S.10) beschreiben Grundvorstellungen als gedankliche

2.1 Grundvorstellungskonzept

Modelle, wie in Abbildung 2.3 visualisiert, welche das Übersetzen zwischen unterschiedlichen Darstellungsebenen ermöglichen. Gegenstand dieser Übersetzung sind hierbei mathematische Objekte und Beziehungen. So können Grundvorstellungen den Zusammenhang zwischen Symbolen und Zeichen, wie die Bruchdarstellung $\frac{3}{4}$ und anderen Darstellungen wie zum Beispiel Bildern herstellen.



Abbildung 2.3: Grundvorstellungen ermöglichen Darstellungswechsel (Schulz und Wartha, 2021, S. 10)

Griesel et al. (2019) beschreiben mathematische Objekte und die dazugehörigen mentalen Repräsentationen als „Relationsgebilde, bestehend aus jeweils einer Menge, zwischen deren Elementen Relationen bestehen. Zwischen beiden Relationsgebilden muss Strukturgleichheit (Isomorphie) bestehen“ (siehe Griesel et al., 2019, S. 127).

Ein Beispiel für diese Strukturgleichheit sind die natürlichen Zahlen und deren *mental number line*. Diese besteht aus einer Reihe isolierter Punkte auf einer Linie, welcher zusätzlich ein Richtungssinn aufgeprägt ist und jeder dieser Punkte steht für eine natürliche Zahl. Der Richtungssinn überträgt eine Nachfolgerbeziehung auf die Punkte. So erkennt man, dass zwischen der *mental number line* und den natürlichen Zahlen bezüglich der Nachfolgerbeziehung Isomorphie besteht. (Griesel et al., 2019, S. 126)

Falls aber keine Strukturgleichheit zwischen einer Vorstellung und dem zu repräsentierenden Begriff besteht, dann entspricht diese Vorstellung nicht der ide-

2 Grundlagen

altypischen Grundvorstellung und wird als unkorrekt bezeichnet. (Griesel et al., 2019, S. 127)

Fasst man nun diese beiden Auffassungen zusammen, so sollten für eine typische Grundvorstellung eine Strukturübereinstimmung zwischen mentaler Repräsentation und dem zugehörigen mathematischen Gebilde, sowie zwischen mentaler Repräsentation und dem zugehörigen Realmodell gegeben sein (Salle und Clüver, 2021, S. 556). Diese Strukturübereinstimmung sehen wir zum Beispiel bei der Nachfolgerbeziehung der natürlichen Zahlen und der *mental number line*.

2.1.4 Aspekte der Grundvorstellungsidee

Vom Hofe (1996) hebt besonders drei Aspekte der Grundvorstellungsidee hervor. Als erstes beschreibt er die „Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfen an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen“. Anschließend führt er den „Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen“, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen“ an.

Als letzten Aspekt nennt Vom Hofe die „Fähigkeiten zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur“ (Vom Hofe, 1995, S. 97-98).

Als grundlegendes Beispiel zum dritten Aspekt einer Grundvorstellung, kann man sich eine Situation vorstellen, in der ein Raum verfließt werden soll. Es soll eine bestimmte Fläche mit Fliesen einer bestimmten Größe ausgelegt werden. Um die geeignete Anzahl an Fliesen zu erwerben, wird sich der bzw. die Ausführende nun fragen, wie oft eine Fliese in die zu verfliesende Fläche passt. Somit wurde hier mit dem Messen, einer Grundvorstellung zur Division, ein Sachproblem in ein mathematisches Modell überführt. Nun muss das mathematische Problem, mittels einer Rechenoperation, gelöst werden.

2.1.5 Unterteilung von Grundvorstellungen

Wir müssen auch zwischen den Grundvorstellungen, die vermittelt werden sollen und den sich bei Schüler*innen tatsächlich ausbildenden Vorstellungen differenzieren. Aus diesem Grund unterscheiden Vom Hofe und Roth zwischen normativ formulierten Grundvorstellungen, welche sie als „didaktische Leitlinien, die Deutungsmöglichkeiten eines mathematischen Inhalts oder Verfahrens beschreiben“ kennzeichnen und deskriptiv ermittelten Schüler*innenvorstellungen. Diese „geben Aufschluss über die individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodelle, die Lernende tatsächlich haben; diese weichen mehr oder weniger von den intendierten Grundvorstellungen ab“ (Vom Hofe und Roth, 2023, S. 3).

Sie definieren dabei Grundvorstellungen als „anschauliche Deutungen eines mathematischen Begriffs, die diesem Sinn geben und Verständnis ermöglichen“ (Vom Hofe und Roth, 2023, S. 4), wie in Abbildung 2.4 ersichtlich oder anders ausgedrückt, als, „viable and robust mental representations“ (siehe Vom Hofe und Blum, 2016, S. 227).

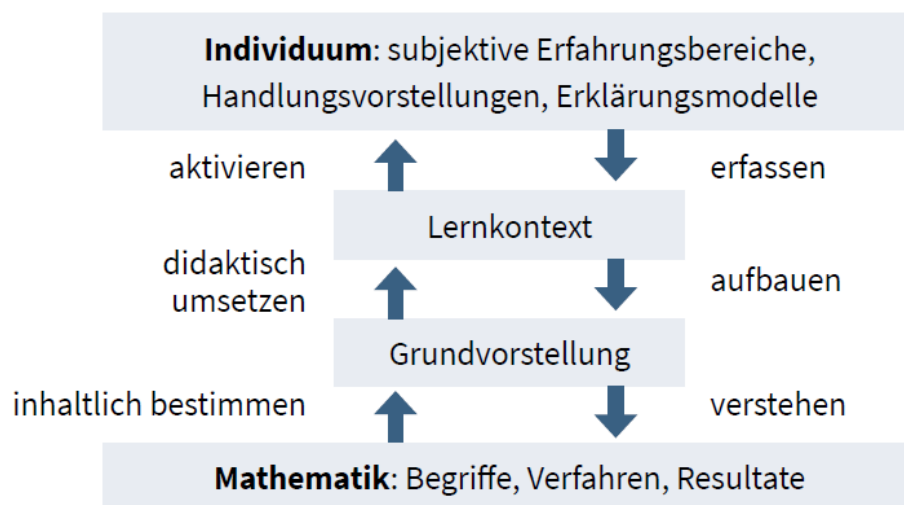


Abbildung 2.4: Unterrichtliche Schritte und individuelle Lernschritte im Zusammenspiel (siehe Vom Hofe und Roth, 2023, S. 4)

Laut Vom Hofe und Roth entstehen Grundvorstellungen durch mathematische Handlungserfahrungen, wobei ihre Ausprägung von Umfang und Häufigkeit der

2 Grundlagen

entsprechenden Handlungserfahrung abhängt (2023, S. 2). Es lassen sich hierbei zwei Arten von Grundvorstellungen unterscheiden:

Einerseits primäre Grundvorstellungen, welche sich lange vor der Schulzeit entwickeln und ihren Ursprung in Handlungen mit realen Objekten haben. Als Beispiel kann hier das „Hinzufügen“ von Spielsteinen oder Geld, als Grundvorstellung der Addition genannt werden (Vom Hofe und Roth, 2023, S. 3).

Andererseits sekundäre Grundvorstellungen, welche sich im Umgang mit mathematischen Objekten im Unterricht entwickeln. Als Beispiel kann hier das mentale Bewegen im Koordinatensystem, wenn die Änderung des x -Wertes und die davon abhängige Änderung des y -Wertes betrachtet wird, die „Kovariation“, genannt werden. Sie ist eine Grundvorstellung für das funktionales Denken (Vom Hofe und Roth, 2023, S. 3).

Laut Vom Hofe (2003) ist für das Konzept der Grundvorstellung ebenfalls ausschlaggebend, dass es für einen mathematischen Begriff, im Allgemeinen, mehrere Grundvorstellungen gibt. Mathematische Begriffe können nicht durch eine einzelne Grundvorstellung erfasst werden. Es ist die Vernetzung von mehreren Grundvorstellungen, welche in Beziehung zueinander stehen, welche den zugehörigen mathematischen Begriff umfassend beschreibt (Hafner, 2012, S. 22).

Vom Hofe (1995) fasst das Konzept der Grundvorstellung so zusammen:

„Der Terminus „Grundvorstellung“ charakterisiert somit fundamentale mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen. Er beschreibt damit Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen oder kurz: *Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität.*“ (siehe Vom Hofe, 1995, S. 98)

Grundvorstellungen haben somit eine vermittelnde Funktion. Hafner (2012) sieht sie als kognitive Objekte der Vermittlung wie in Abbildung 2.5 schematisch dargestellt wird.

Es wird deutlich, dass für inhaltliches Denken Grundvorstellungen unverzichtbar

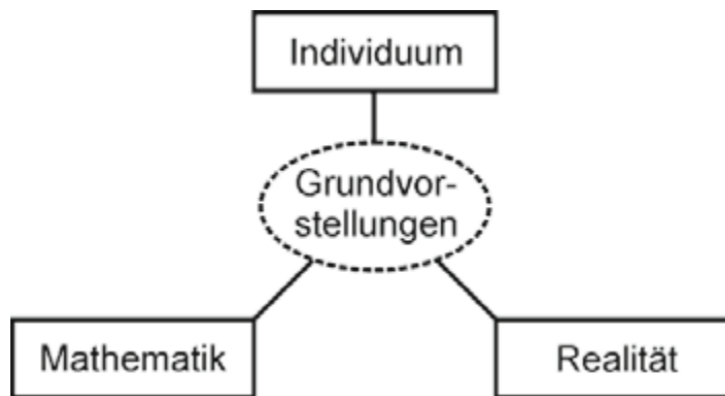


Abbildung 2.5: Vermittelnder Charakter von Grundvorstellungen (siehe Hafner, 2012, S. 22)

sind. Ohne Grundvorstellungen gibt es keine Beziehung zwischen Sach- und Anwendungsfeldern und der Mathematik mit ihrer Fülle an Verfahren, Strukturen und abstrakten Begriffen (Vom Hofe, 1996).

2.1.6 Ausbildung von Grundvorstellungen

Laut Vom Hofe et al. (2005) müssen Grundvorstellungen als konstruktivistischer Begriff aufgefasst werden. Sie sind keine allgemein gültigen Repräsentationen von mathematischen Begriffen. Dies ist im Sinn einer, durch die Einwirkung des Bildungsprozesses, laufenden Veränderung, Neuorganisation und Neuinterpretation des mathematischen Begriffes und somit, der dazu verbunden Grundvorstellungen zu verstehen. (2005, S. 276).

Durch diese ständige Veränderung, entwickeln sich Grundvorstellungen „zu einem immer leistungsfähigeren System mentaler mathematischer Modelle“ (siehe Vom Hofe et al., 2005, S. 276).

Um die Ausbildung mathematischer Grundvorstellungen zu fördern, müssen didaktische Maßnahmen gesetzt und der Ausbildungsprozess muss begleitet werden. Dabei ist darauf zu achten, dass die drei, bereits erwähnten, Aspekte der Grundvorstellungsidee von Vom Hofe, berücksichtigt werden.

Bei der Erfassung und Sinnkonstituierung neuer mathematischer Begriffe ist an

2 Grundlagen

bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge anzuknüpfen.

Es werden generalisierte mentale Modelle aufgebaut, um die mathematischen Begriffe auf der Vorstellungsebene zu repräsentieren.

Die mathematischen Begriffe werden auf neue Sachsituationen angewandt. Somit wird die Problemstellung mit geeigneten mathematischen Strukturen modelliert und beschrieben (Hafner, 2012, S. 24).

Es ist zu erkennen, dass diese drei Aspekte aufeinander aufbauen. Laut Vom Hofe et al. (2005) prägt die individuelle Sinnzuweisung eines mathematischen Begriffs die entsprechende mentale Vorstellung. Die mentale Vorstellung ist nun die Voraussetzung zur Anwendung der zugrunde liegenden mathematischen Strukturen im Kontext neuer Sachzusammenhänge.

Grundvorstellungen sind somit, wie oben bereits erwähnt, nicht nur sinnkonstituierend, sondern ebenfalls für Modellierungsprozesse ausschlaggebend (Hafner, 2012, S. 24).

Das Fundament für die mathematische Kompetenz legt somit die mathematische Begriffsbildung, in Abhängigkeit von der Ausbildung von Grundvorstellungen. Die mathematischen Regeln, Verfahren und Formalismen stehen, in diesem Fall, mit einem leistungsfähigen System mentaler Modelle auf der Vorstellungsebene in Verbindung (Vom Hofe et al., 2005).

Jedoch wird der Aufbau von mathematischen Kompetenzen durch nicht adäquate Vorstellungen zu den entsprechenden mathematischen Begriffen erschwert oder im schlechtesten Fall sogar verhindert (Vom Hofe et al., 2005).

In diesen Situationen entstehen oft mental stabile Fehlvorstellungen, die in systematischen Fehlerstrategien enden. Fischbein et al. (1990, S. 28) halten dazu fest: „This implies that mental models may remain impermeable to specific, even important, properties of the originals, and instead of serving them, may generate inaccurate or distorted representations.“

Wenn wir nun Grundvorstellungen im Kontext des normativen und deskriptiven Aspektes betrachten, lassen sich daraus nützliche didaktische Maßnahmen für den

Unterricht ableiten (Hafner, 2012, S. 25):

Die Ansicht des Lehrenden, was sich Schüler*innen idealerweise unter einem mathematischen Begriff vorstellen sollten, wird durch den normativen Aspekt von Grundvorstellungen beschrieben. Was sich die betreffenden Schüler*innen tatsächlich unter einem mathematischen Begriff vorstellen, beschreibt der deskriptive Aspekt. Wird nun eine Verbindung zwischen normativen und deskriptiven Aspekten von Grundvorstellungen hergestellt, so bietet diese oft Erklärungen für individuelle Lösungen von Schüler*innen. Diese Diskrepanzen konstruktiv zur Behebung von Verständnisschwierigkeiten oder Fehlvorstellungen zu nutzen, wird als der konstruktive Aspekt von Grundvorstellungen gesehen (Hafner, 2012, S. 25 und Hafner und Vom Hofe, 2008).

Den Nutzen, den Lernende aus Grundvorstellungen ziehen, beschreibt Hock (n. d.): „Sobald adäquate Vorstellungen beim Lernenden aufgebaut sind, ist dieser auch in der Lage, formale Definitionen und Regeln auf ihre Plausibilität zu untersuchen, wodurch es für ihn nicht notwendig ist, bloß schematische, nicht verstandene Fertigkeiten auszubilden.“ (siehe Hock, n. d., S. 115)

2.1.7 Konzepte im englischsprachigen Raum

Das Konzept der Grundvorstellung ist ein Konstrukt, welches in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik entstanden ist. Im Folgenden wird beschrieben, welche Konstrukte, die dem Konzept der Grundvorstellung ähnlich sind, im englischsprachigen Raum verwendet werden.

Die wichtigsten Konzepte aus dem englischsprachigen Raum werden *concept image*, *concept definition* und *conceptual change* genannt.

Mit dem Ausdruck *concept image* ist das mentale Abbild, das mit einem mathematischen Konzept verbunden ist, inklusive aller Eigenschaften, die mit diesem Bild verknüpft sind, gemeint. Wobei wir hier vom Abbild im weitesten Sinn sprechen, welches alle visuellen Darstellungen des mathematischen Konzeptes enthält sowie

2 Grundlagen

die zugehörigen Symbole und Verfahren. Aus dieser Definition wird klar, dass das concept image immer subjektiv ist (Vinner, 1983, S. 293).

Durch diese Subjektivität kann es, am ehesten, mit einer deskriptiven Grundvorstellung verglichen werden.

Vinner schreibt zur concept definition: „By ‘concept definition’ we mean here a verbal definition that accurately explains the concept in a non-circular way.“ (siehe 1983, S. 293). Es ist also eine verbale Definition oder eine Abfolge von Wörtern und Symbolen, welche das mathematische Konzept genau beschreibt.

Laut Vinner (1983, S. 293) nimmt das concept image, bei Konzepten welche wir informell lernen, meist Überhand und die concept definition wird manchmal sogar wieder vergessen.

In formalen Lernumgebungen, wie der Schule, sind Schüler*innen aber oft mit der concept definition konfrontiert, bevor sich überhaupt ein concept image gebildet hat. Dies ist laut Vinner (1983, S. 294) beispielsweise beim Koordinatensystem oder beim gleichseitigen Dreieck der Fall.

Concept image und concept definition beeinflussen sich gegenseitig. Es kann aus dem concept image heraus eine concept definition entstehen und aus einer concept definition kann eine Vorstellung entstehen, die in das entsprechende concept image aufgenommen wird (Vinner, 1983, S. 294). Beide Konzepte können sowohl richtige als auch falsche Informationen enthalten. Diese Informationen können auch gegensätzlich, widersprüchlich, beschränkend und unvollständig sein. (Vinner, 1983, S. 304-305).

Der Grund für das Bestehenbleiben von widersprüchlichen Informationen in einem concept image oder einer concept definition kann darin liegen, dass bei einer spezifischen Aufgabe nur Teile des concept images verwendet werden. Somit kann laut Vinner dessen Ausbildung nicht in seiner Gesamtheit beobachtet werden. Ein möglicher Konflikt im concept image kommt daher auch nur dann zu Tage, wenn die sich widersprechenden Abbilder, Verfahren oder Symbole zur gleichen Zeit abgerufen werden (Vinner, 1983, S. 297).

Zur Nutzung der beiden Konzepte im Unterricht schreibt Vinner (1983, S. 293):

2.1 Grundvorstellungskonzept

„Concept definitions (where the concept was introduced by means of a definition) will remain inactive or even will be forgotten. In thinking, almost always the concept image will be evoked“. Im Unterricht sollte der Aufbau von entsprechenden concept images, durch für den entsprechenden mathematischen Begriff typischen Aufgaben, gefördert werden. Dies sollte nicht nur am Anfang des Unterrichts geschehen, sondern während der ganzen Lernperiode. Teile des concept image, die nicht immer wieder wiederholt werden, werden schnell vergessen und stören somit den Aufbau eines tragfähigen concept image (Vinner, 1983, S. 305).

Concept image und Grundvorstellungen vereint, dass es sich um mentale Repräsentationen mathematischer Begriffe handelt. Sie werden durch individuelle Erfahrungen aufgebaut. Neue Informationen werden zur vorhanden Struktur der mentalen Präsentationen hinzugefügt, diese somit umstrukturiert und weiterentwickelt.

Das concept image umfasst die mentalen Repräsentationen einer Person zu einem mathematischen Begriff und deckt sich großteils mit dem Konzept der deskriptiven Vorstellung. Es erfasst dabei die Gesamtheit der kognitiven Strukturen. Das Konzept der Grundvorstellung bezieht sich auf den Kern der mathematischen Inhalte und auf den Übergang zwischen der Realität und der Mathematik, also auf die Übersetzung. Aus diesem Gesichtspunkt betrachtet, ist der Informationsgehalt des concept image umfassender als der, der Grundvorstellung, welche das concept image einschließt (Hafner, 2012, S. 28-29).

Das Konzept der Grundvorstellungen, die Konzepte des concept image und der concept definition beschreiben die mentalen Repräsentationen von mathematischen Objekten als veränderbare Objekte. Sie beschreiben aber nicht die Eingliederung neuer Inhalte oder die Umstrukturierung der vorhanden Repräsentation. Den Fokus auf diese Entwicklungsvorgänge liefert das Konzept des conceptual change (Hafner, 2012, S. 29).

„Conceptual change is used to characterize situations where learners' prior knowledge is incompatible with the new conceptualization, and where learners are often disposed to make systematic errors or build misconceptions.“ (siehe Merenluoto und Lehtinen, 2004, S. 519).

2 Grundlagen

Dieses Konzept beleuchtet somit die Änderungen vorhandener mentaler Strukturen, vom meist außerhalb des Unterrichts erworbenem, intuitivem Alltagsverständnis zu einem wissenschaftlich und fachlich orientierten Verständnis, wobei bei nicht adäquatem Vorwissen ein Umlernen des Lernenden erforderlich ist (Hafner, 2012, S. 30).

Zwei wichtige Aspekte für das Lernen im Fach Mathematik werden durch den conceptual change beleuchtet. Das Vorwissen und ein aus diesem Vorwissen entstammendes Konfliktpotential und mögliche Erklärungen für Lernschwierigkeiten. Vorwissen ist beim Wissenserwerb zentral. Neue Informationen werden mit bereits vorhandenen mentalen Repräsentationen in Bezug gesetzt und inadäquate Strukturen werden gegebenenfalls verändert (Hafner, 2012, S. 30).

Merenluoto und Lehtinen (2004, S. 520) schreiben dazu: „Discontinuity of learning occurs in a situation where prior knowledge is incompatible with the new information and needs reorganization; where significant restructuring—not merely enrichment—of existing knowledge structures is needed.“

Mehrere Studien haben aber ergeben, dass das Vorwissen von Schüler*innen sich oft als resistent gegenüber neuen Lehrinhalten erweist. Des Weiteren sind sich Schüler*innen der Qualität ihres Vorwissens und dessen möglichen Widersprüchen zu wissenschaftlichen Erkenntnissen meist nicht bewusst. Diese Erkenntnisse und dass Schüler*innen ihr Vorwissen eher ignorieren oder anreichern anstatt es zu revidieren, da sie keine Notwendigkeit für einen Wandel sehen, sind laut Merenluoto und Lehtinen (2004, S. 520) weitere Probleme die sich beim Lehren von Mathematik ergeben.

Das heißt, dass obwohl ein Widerspruch vom Vorwissen zum neu zu erlernenden Inhalt vorliegt, die Schüler*innen an ihren, in diesem Fall, Fehlvorstellungen festhalten.

Wartha stellt conceptual change in Verbindung mit dem Grundvorstellungskonzept. Conceptual change beschreibt die Veränderung von vorhandenen zu erwünschten mentalen Repräsentationen und steht somit im Zusammenhang zum Aufbau von Grundvorstellungen (2007, S. 39). Die Veränderung von Fehlvorstellungen zu tragfähigen Grundvorstellungen als Umlernen, kann mit dem conceptual change

beschrieben werden und ist somit ein Teilaspekt des Ausbildens von Grundvorstellungen (Hafner, 2012, S. 31).

Es steht bei beiden Konzepten der Übergang von primären zu sekundären Vorstellungen im Fokus, wobei das Grundvorstellungskonzept mit seinem deskriptiven Teilbereich etwas weiter gefasst ist als der conceptual change (Hafner, 2012, S. 31-32).

2.1.8 Resümee zum Konzept der Grundvorstellung

Zusammenfassend kann nun gesagt werden, dass Grundvorstellungen anschauliche Deutungen eines mathematischen Begriffes sind, welche diesem Sinn geben und somit Verständnis ermöglichen (Vom Hofe und Roth, 2023, S. 4).

Sie werden einerseits in primäre Grundvorstellungen, welche sich vor der Schulzeit ausbilden und sekundäre Grundvorstellungen, welche sich beim Umgang mit mathematischen Objekten im Unterricht entwickeln, eingeteilt (Vom Hofe und Roth, 2023, S. 3). Andererseits haben sie eine normative, deskriptive und konstruktive Dimension (Hafner, 2012, S. 25).

Grundvorstellungen beziehen sich auf den Kern der mathematischen Inhalte und deren Übergang zwischen der Realität und der Mathematik. Sie grenzen sich somit vom concept image ab, welches die Gesamtheit der kognitiven Strukturen zu einem mathematischen Begriff umfasst (Hafner, 2012, S. 28-29).

Mit dem conceptual change vereinen die Grundvorstellungen, dass ihr konstruktiver Teilbereich ebenfalls die Änderungen mentaler Strukturen, in diesem Fall den Übergang von primärer zu sekundärer Grundvorstellung, beleuchtet (Hafner, 2012, S. 31-32).

Mathematische Begriffe können im Allgemeinen erst durch eine Vernetzung von zueinander in Beziehung stehenden Grundvorstellungen vollständig erfasst werden. So kann eine Addition mit der Grundvorstellung der Vereinigung, des Hinzufügens oder der Veränderung verknüpft sein. (Hafner, 2012, S. 22). Diese Vernetzung ist

2 Grundlagen

einer ständigen Veränderung unterworfen, durch die sich die vorhandenen Grundvorstellungen laut Vom Hofe et al. (2005, S. 276) „zu einem immer leistungsfähigeren System mentaler mathematischer Modelle“ entwickeln.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

In diesem Kapitel sollen bereits empirisch erforschte Grundvorstellungen zu diversen schulmathematischen Begriffen aufgezeigt und in Bezug zum österreichischen AHS-Lehrplan gebracht werden. Des Weiteren soll zu bestimmten Grundvorstellungen eine exemplarische Aufgabe, welche diese spezielle Grundvorstellung fördert bzw. benötigt, vorgestellt werden. Diese Aufgaben sind gegebenenfalls aus aktuellen Schulbüchern entnommen oder selbst erstellt.

3.1 Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

Die Bruchzahlen und das Rechnen mit Bruchzahlen sind im Lehrplan der AHS Unterstufe in der ersten Klasse sowie in der zweiten Klasse verankert. Sie zählen in der ersten und zweiten Klasse zum Themengebiet des Arbeitens mit Zahlen und Maßen (BMBWF, 2023b, S. 82 - 83).

Im neuen Lehrplan für die AHS Unterstufe, welcher ab dem Schuljahr 2023/24 für die Schüler*innen der fünften Schulstufe (erste Klasse AHS Unterstufe) Verwendung findet, sind Grundvorstellungen auch im Abschnitt zu den zentralen fachlichen Konzepten verankert. Hier heißt es im Kompetenzbereich der Zahlen und Maße, „Aufbauend auf den Erfahrungen aus der Primarstufe werden Grundvorstellungen und operative Fertigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen gefestigt. Diese werden zunächst zu den nichtnegativen Dezimal- und Bruchzahlen, ... erweitert“ (BMBWF, 2023a, S. 75).

In der ersten Klasse der AHS Unterstufe sollen Schüler*innen „Vorstellungen mit positiven rationalen Zahlen verbinden, mit der Darstellung in ... Bruchschreibwei-

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

se vertraut sein, ..., mit den positiven rationalen Zahlen Rechnungen mit leicht abschätzbaren Ergebnissen durchführen und zur Lösung von Problemen in Sachsituationen vielfältig anwenden können, Rechnen mit Brüchen, nur in einfachen Fällen, die anschaulich deutbar sind, ... “ können und anwenden können (BMBWF, 2023b, S. 82).

Im neuen Lehrplan ist das Rechnen mit positiven rationalen Zahlen in der ersten Klasse der AHS Unterstufe nicht mehr verankert. Hier sollen Schüler*innen „natürliche Zahlen sowie nichtnegative Dezimal- und Bruchzahlen interpretieren, darstellen und vergleichen“ können (BMBWF, 2023a, S. 77).

In der zweiten Klasse der AHS Unterstufe steht für Schüler*innen das „Festigen und Vertiefen der Fähigkeiten beim Arbeiten mit positiven rationalen Zahlen, um vielfältige und komplexere Probleme in Sachsituationen bearbeiten zu können, Rechnen mit Brüchen (mit kleinen Zählern und Nennern), damit die Rechenregeln im Hinblick auf die Algebra sicher beherrscht werden, diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können, Bruchdarstellung in Dezimaldarstellung überführen und umgekehrt,“ im Lehrplan (BMBWF, 2023b, S. 83).

Im neuen Lehrplan wird für die zweite Klasse der AHS Unterstufe verankert, dass Schüler*innen „nichtnegative Dezimal- und Bruchzahlen sowie ganze Zahlen interpretieren, darstellen und vergleichen, Rechenoperationen mit nichtnegativen Bruchzahlen durchführen und interpretieren“ können und „die Addition bzw. Subtraktion einer natürlichen Zahl zu bzw. von einer ganzen Zahl als Bewegung auf der Zahlengeraden deuten“ können (BMBWF, 2023a, S. 77).

Des Weiteren kommen Bruchzahlen nun auch im Kompetenzbereich der Variablen und Funktionen vor. Hier sollen Schüler*innen in Zukunft „Terme, Gleichungen und Formeln auch mit Brüchen und im Zusammenhang mit Proportionalitäten und Prozenten aufstellen und interpretieren können“ (BMBWF, 2023a, S. 77).

Laut Malle (Malle, n. d. a, S. 8), besteht die Anwendung des Bruchrechnens im Grunde aus der Zuordnung von, in der speziellen Situation vorkommenden, Größen zu Bruchzahlen und deren richtiger Verknüpfung mit ausgewählten Rechenoperationen. Den Grundvorstellungen kommt nun hierbei die Rolle des Vermittlers

3.1 Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

zwischen der Situation und den Rechenoperationen zu.

Die folgenden Grundvorstellungen zu Bruchzahlen wurden großteils aus einem Skript von Malle (Malle, n. d. a) entnommen. Die Ergänzungen hierzu stammen aus Padberg und Wartha (2017). Sie heben zwei zentrale Grundvorstellungen zu Bruchzahlen heraus. Die Grundvorstellung des **Bruches als Anteil** und die Grundvorstellung des **Bruches als Operator** (Padberg und Wartha, 2017, S. 21-22).

Bruchzahlen als Teile (eines Ganzen)

$$\frac{a}{b} \text{ (von 1)}$$

Bei dieser Grundvorstellung kann das Ganze ein Objekt oder eine Größe sein, z.B.: das Viertel einer Pizza, eine Achtelnote oder ein Dreiviertelmeter (Malle, n. d. a, S. 1).

Als Schulbuchaufgaben, welche diese Grundvorstellung fördern, können zeichnerische Aufgaben genannt werden, welche Bruchteile ausmalen lassen oder Aufgaben, die zeichnerisch dargestellte Bruchteile benennen lassen, wie in den Abbildungen 3.1 und 3.2 visualisiert.

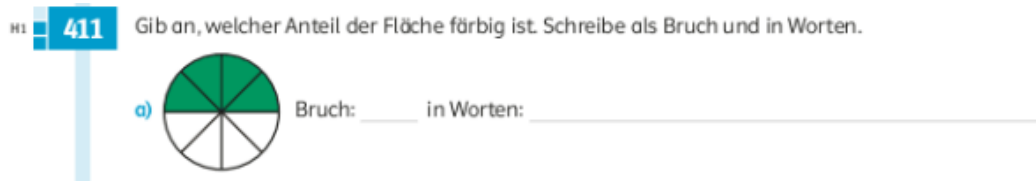


Abbildung 3.1: Bruchzahlen als Teile 1 (siehe Bortenschlager et al., 2020, S. 92)

Bruchzahlen als relative Anteile

$$\frac{a}{b} \text{ (von } c \text{)}$$

Für diese Grundvorstellung sind Aufgaben förderlich, welche verschiedene Anteile einer Größe berechnen lassen, wie in Abbildung 3.3 illustriert. Hier ist laut Malle

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

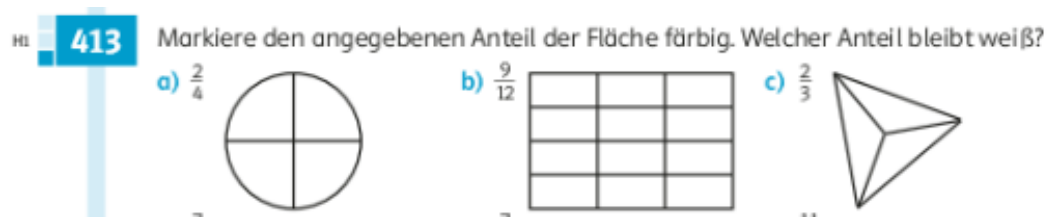


Abbildung 3.2: Bruchzahlen als Teile 2 (siehe Bortenschlager et al., 2020, S. 93)

(n. d. a, S. 13) noch darauf zu achten, dass der Ausdruck des relativen Anteils in der Aufgabenstellung verwendet werden kann. Wie in Abbildung 3.3 beispielhaft zu sehen ist, beträgt der relative Anteil von weißen Katzen $\frac{1}{4}$.



Abbildung 3.3: Bruchzahlen als relative Anteile (siehe Bortenschlager et al., 2021, S. 72)

Bruchzahlen als Vergleichsoperatoren

$$\frac{a}{b} \text{ mal so viel wie } c,$$

wobei hier „viel“ durch „groß“, „schwer“, „lang“, usw. ersetzt werden kann (Male, n. d. a, S. 1).

Hier besteht die Möglichkeit mit Situationen aus dem Alltag der Schüler*innen zu arbeiten und Aufgaben wie die folgende zu stellen.

Aufgabe: Wolfram ist $\frac{3}{4}$ mal so groß wie sein Vater. Wolframs Vater ist 1,80m groß.

Berechne, wie groß Wolfram ist!

3.1 Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

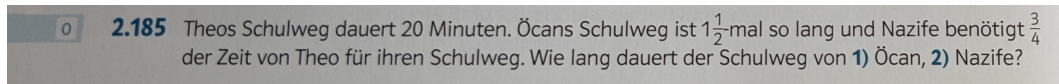


Abbildung 3.4: Bruchzahlen als Vergleichsoperatoren (siehe Salzger et al., 2022a, S. 64)

Wie in Abbildung 3.4 ersichtlich, können Aufgaben bei denen die Zeitdauer verglichen wird, für die Ausbildung der Grundvorstellung fördernd sein.

Bruchzahlen als Resultate von Divisionen

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Diese Grundvorstellung wird laut Padberg und Wartha (2017, S. 18) und Malle (n.d. a, S. 1) durch Aufgaben der folgenden Art dargestellt:

Aufgabe: Fünf Freunde haben Geld geschenkt bekommen und wollen sich damit Schokolade kaufen. Das Geld reicht für drei Tafeln Schokolade, welche gerecht aufgeteilt werden sollen. Berechne, welchen Anteil jeder der vier Freunde erhält!

$$3 : 5 = \frac{3}{5}$$

Hier wurde der Division ein Bruch als Ergebnis zugeordnet (Padberg und Wartha, 2017, S. 20). Das Ergebnis $\frac{3}{5}$ wiederum kann als Teil eines Ganzen (nämlich $\frac{3}{5}$ einer Tafel Schokolade) interpretiert werden, wobei sich hier offensichtlich die Grundvorstellungen Bruchzahlen als Resultate einer Division und Bruchzahlen als relative Anteile überlappen.

In engem Zusammenhang zu der Grundvorstellung Bruchzahlen als Resultate einer Division steht laut Padberg und Wartha (2017, S. 21) die Vorstellung von Brüchen als Lösungen linearer Gleichungen, wie in folgender Aufgabe dargestellt.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Aufgabe: Löse folgende Gleichung nach x !

$$\begin{aligned}5 \cdot x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Bruchzahlen als Verhältnisse

$$\frac{a}{b} = a : b \text{ (} a \text{ zu } b \text{)}$$

Hierbei gilt laut Malle ein Verhältnis $a : b$ (a zu b) nicht als eigenständiges Denkojekt. „Es hat nur im Rahmen einer (symbolisch oder verbal formulierten) Proportion eine Existenzberechtigung.“ (siehe Malle, n. d. a, S. 2)

Aus dieser Überlegung heraus kann eine Gleichung der Form (3.1) laut Malle nicht als Gleichheit „zweier eigenständiger Denkojekte aufgefaßt werden.“ (siehe n. d. a, S. 2)

$$a : b = 4 : 7 \quad \text{ist äquivalent zu} \tag{3.1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{7} \tag{3.2}$$

Gleichung (3.2) kann hingegen als numerische Gleichheit zweier Bruchzahlen gesehen werden. Somit ist für den Übergang von (3.1) zu (3.2) ein Objektivierungsschritt, „die Bildung von Bruchzahlen als eigenständige Denkojekte“ nötig. Laut Malle ist dies „ein psychologisch schwieriger Schritt“. (siehe Malle, n. d. a, S. 2)

Aufgaben, welche diese Grundvorstellung beinhalten, sind beim Strahlensatz oder im Zusammenhang mit Proportionen zu finden, wie in Abbildung 3.5 ersichtlich wird.

3.1 Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

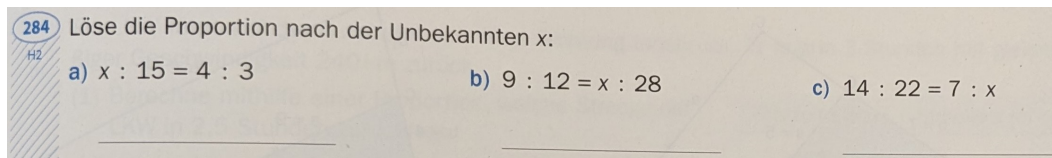


Abbildung 3.5: Bruchzahlen als Verhältnisse (siehe Dorfmayr et al., 2019b, S. 93)

Bruchzahlen als Quasikardinalzahlen

$$\frac{3}{4} = 3 \text{ Viertel}$$

Hier wird „ein Viertel“ als Größeneinheit aufgefasst und das Rechnen mit Bruchzahlen kann auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen zurückgeführt werden (Malle, n. d. a, S. 2). Laut Padberg und Wartha (2017) können wir „Brüche $\frac{a}{b}$ in diesem Sinn „quasikardinal“ als Größen mit der Maßzahl a und der Größeneinheit $\frac{1}{b}$ auffassen.“

Der Bruch tritt in Sachsituationen dann als bezeichnete Größe auf (Padberg und Wartha, 2017, S. 20).

Die Verbindung zu alltäglichen Situationen, wie dem Einkaufen oder dem Kochen, liegt hier nahe. So können Situationen, in denen $\frac{1}{2}$ kg Brot gekauft wird oder $\frac{3}{4}$ l Milch benötigt werden, in den Unterricht integriert werden.

Eine Aufgabe, welche Kuchenstücke in der Größe von Achteln zusammenrechnen lässt und somit diese Grundvorstellung hervorhebt, ist in Abbildung 3.6 zu sehen.

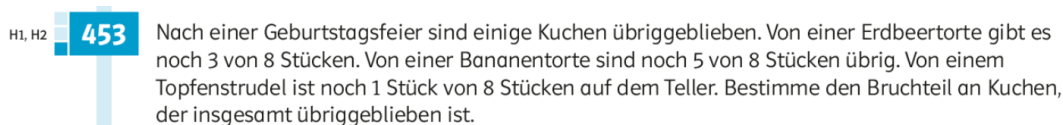


Abbildung 3.6: Bruchzahlen als Quasikardinalzahlen (siehe Bortenschlager et al., 2020, S. 101)

Durch den Kontext als Maßzahl ist hier ein Zusammenhang zu Brüchen als Skalenwerte zu erkennen.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Bruchzahlen als Skalenwerte

Laut Padberg und Wartha (2017, S. 21) kann ein Bruch auch zur genaueren Bezeichnung einer Stelle auf einer Skala dienen.

Der Zeiger meiner Tankuhr steht genau in der Mitte zwischen $\frac{3}{4}$ und 1. (Padberg und Wartha, 2017, S. 18)

Die Grundvorstellung der Bruchzahlen als Skalenwerte ist, in den für diese Arbeit verwendeten Schulbüchern, nicht explizit vertreten. Es handelt sich hierbei eher um eine primäre Grundvorstellung, welche im Kontext der Bruchzahl als Maßzahl auftritt.

Bruchzahlen als Quasiordinalzahlen

$$\frac{1}{4} \dots \text{jeder bzw. jede Vierte}$$

Hier ist zu beachten, dass diese Grundvorstellung nur bei Bruchzahlen mit Stammbruchdarstellung angewendet werden kann. Es ist hier möglich, die Grundvorstellung im strikten Sinne zu sehen, sodass wirklich jedes vierte Objekt eine bestimmte Eigenschaft hat. Oder man kann die Grundvorstellung im statistischen Sinne betrachten, bei welcher die Reihenfolge der Objekte egal ist. Hier muss im Endeffekt ein Viertel der Gesamtmenge der Objekte die bestimmte Eigenschaft besitzen (Malle, n. d. a, S. 2).

Zur Grundvorstellung der Bruchzahlen als Quasiordinalzahlen wurden bei der Recherche zu dieser Arbeit wenige passende Aufgaben in diversen Schulbüchern gefunden. Diese Grundvorstellung ist somit unterrepräsentiert und in der Aufgabenauswahl noch Potenzial zur Eingliederung dieser Grundvorstellung vorhanden.

In der Abbildung 3.7 ist eine Aufgabe zur Grundvorstellung der Bruchzahlen als Quasiordinalzahlen zu sehen, diese Aufgabe enthält auch eine, laut Malle (n. d. a), problematische Deutung welche im Folgenden besprochen wird.

3.2 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

Eine problematische Deutung

$$\frac{3}{5} \dots \text{drei von fünf}$$

Bei statistischen Erhebungen ist diese Deutung nicht unüblich, wie in Aufgabe 3.7 zu erkennen ist. Diese Vorstellung ist aber dadurch problematisch, da sie laut Malte (n. d. a, S. 2) zu einer Fehlvorstellung bei der Addition von Brüchen führen kann.

11.21 Ordne den Angaben der fünf Aussagen die jeweils entsprechende relative Häufigkeit in Bruchdarstellung zu!

2 von 10 Befragten besitzen ein E-Bike.	•	• $\frac{6}{10}$
34 von 68 Personen spazieren gerne in Parks.	•	• $\frac{25}{100}$
Jeder 4. befürwortet die Errichtung einer Begegnungszone.	•	• $\frac{2}{20}$
Jeder Zehnte wünscht sich breitere Gehsteige.	•	• $\frac{1}{5}$
3 von 5 befürworten im Ortsgebiet ein Tempolimit von 30 km/h.	•	• $\frac{1}{2}$

Abbildung 3.7: Brüche als Quasiordinalzahlen und die problematische Deutung von Brüchen (siehe Salzger et al., 2022a, S. 272)

Bei der Addition von Brüchen würde laut dieser Deutung gelten:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{8} = \frac{5}{13}$$

Da sich ja aus „drei von fünf“ plus „zwei von acht“ „fünf von dreizehn“ ergibt.

3.2 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

Wie die Bruchzahlen selbst, ist das Rechnen mit Bruchzahlen im alten Lehrplan der AHS Unterstufe in der ersten Klasse, sowie in der zweiten Klasse, im Themengebiet des Arbeitens mit Zahlen und Maßen verankert. (BMBWF, 2023b, S. 82 - 83).

Rechnen mit Bruchzahlen ist, laut dem neuen Lehrplan der AHS Unterstufe, welcher ab dem Schuljahr 2023/24 für die Schüler*innen der fünften Schulstufe (erste

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Klasse AHS Unterstufe) Verwendung findet, ab der zweiten Klassen AHS Unterstufe verankert. In der ersten Klasse der AHS Unterstufe findet es sich nicht mehr (BMBWF, 2023a, S. 77).

Die folgenden Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen wurden überwiegend aus einem Skript von Malle (n. d. a) entnommen. Viele Ergänzungen und einige Grundvorstellungen stammen aus Padberg und Wartha, 2017.

3.2.1 Grundvorstellungen zum Erweitern und Kürzen von Brüchen

Erweitern (Kürzen) entspricht einer Verfeinerung (Vergröberung) der Einteilung

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \text{ und } \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Hierbei ist zu beachten, dass es sich beim Erweitern und Kürzen eines Bruches nur um eine Darstellungsänderung der Bruchzahl handelt. Der Wert der Bruchzahl bleibt dabei bestehen (Malle, n. d. a, S. 3).

Aufgaben, welche Schüler*innen ermutigen Darstellungen von Brüchen zu finden, die denselben Anteil beschreiben, zeigen diese Grundvorstellung auf (siehe Abbildung 3.8).

Da laut Malle (n. d. a, S. 3) die Ausdrücke Erweitern und Kürzen in der fünften Schulstufe noch nicht eingeführt werden müssen, sollte in dieser Schulstufe vor allem darauf geachtet werden, dass die Vorstellung gefestigt wird, dass der Anteil eines Ganzen durch verschiedene Brüche dargestellt werden kann.

So ein Fall ist mit den Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ in Abbildung 3.8 gegeben.

Die Erkenntnis, dass „eine Bruchzahl auf unendliche viele Arten durch Brüche dargestellt werden“ (siehe Malle, n. d. a, S. 12) kann, lässt sich durch die Darstel-

3.2 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

H1 **417** Markiere den angegebenen Anteil der Fläche und finde die Brüche, die denselben Anteil beschreiben.

$\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{4}{6}$

Abbildung 3.8: Erweitern und Kürzen von Bruchzahlen 1 (siehe Bortenschlager et al., 2020, S. 93)

lung eines Bruches auf dem Zahlenstrahl unterstützen. Hier kann die Erfahrung gemacht werden, dass sich ein Punkt mit unendlich vielen Brüchen beschriften lässt (Malle, n. d. a, S. 12).

In der sechsten Schulstufe, wenn die Ausdrücke Erweitern und Kürzen eingeführt werden, sind Aufgaben welche die Verfeinerung bzw. die Vergrößerung ins Zentrum stellen (siehe Abbildungen 3.9 und 3.10) förderlich.

H1, H3 **264** Kürze den gegebenen Bruch. i) Male die Teile an und fülle die Lücken aus.

ii) Vervollständige die Sätze.
 Vier Sechstel ist das gleiche wie _____. Zwölf Sechzehntel ist das gleiche wie _____.

Abbildung 3.9: Erweitern und Kürzen von Bruchzahlen (siehe Bortenschlager et al., 2021, S. 60)

Wie man an den Aufgaben in den Abbildungen 3.9 und 3.10 erkennen kann, ist eine schriftliche Wiederholung der durchgeführten mathematischen Tätigkeit zur Verinnerlichung der Grundvorstellung erstrebenswert.

Erweitern und Kürzen sind Umkehroperationen voneinander

Diese Grundvorstellung beschreibt das Erweitern eines Bruches $\frac{a}{b}$ mit einer natürlichen Zahl n und das Kürzen des dabei entstandenen Bruches $\frac{n \cdot a}{n \cdot b}$ durch dieselbe

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

H1, H3 **277** Erweitere den gegebenen Bruch. i) Fülle die Lücken aus.

ii) Fülle den Lückentext aus.

Bei beiden Darstellungen wurde jeweils _____ angemalt. Somit haben die
 _____ auch den gleichen _____. Ein Drittel ist das gleiche
 wie _____.

Brüche	zwei Sechstel	Wert	gleich viel
--------	---------------	------	-------------

Abbildung 3.10: Erweitern und Kürzen von Bruchzahlen (siehe Bortenschlager et al., 2021, S. 62)

Zahl n . Durch die Verknüpfung des Erweiterns und des Kürzens finden wir uns am Ausgangspunkt, dem Bruch $\frac{a}{b}$ wieder. Dasselbe gilt auch, wenn wir zuerst Kürzen und danach Erweitern, wie die ikonische Darstellung 3.11, dieser Grundvorstellung, zeigt.

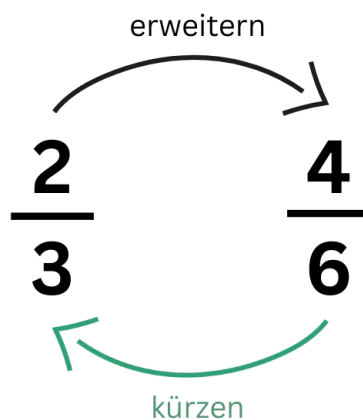


Abbildung 3.11: Erweitern und Kürzen als Umkehroperationen (eigene Darstellung)

Laut Malle (n. d. a, S. 3) werden in der sechsten Schulstufe die Ausdrücke Erweitern und Kürzen mit den entsprechenden Rechenregeln verbunden.

3.2 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

Aufgaben, wie die in den Abbildungen 3.9 und 3.10 dargestellten, vereinen die erforderlichen Rechenoperationen mit der Verfeinerungs- bzw. Vergrößerungsvorstellung. Um nun den Aspekt der Umkehroperation herauszuheben, kann eine Aufgabe ausgewählt werden, welche die Schüler*innen, über eine kleinschrittige Arbeitsanweisung, zuerst einen Bruch erweitern und danach diesen wieder kürzen lässt, wie in Abbildung 3.12 dargestellt.

H2, H3

288

Folge den Anweisungen für den Bruch.

i)

Erweitere den Bruch mit 2, 3 und 4.

ii)

Kürze den Bruch durch 2, dann durch 3 und durch 4.

iii)

Welches Ergebnis erhältst du? Begründe.

a)

$\frac{2}{5} =$

b)

$\frac{1}{6} =$

c)

$\frac{4}{7} =$

d)

$\frac{3}{11} =$

Abbildung 3.12: Erweitern und Kürzen als Umkehroperationen (siehe Bortenschlager et al., 2021, S. 64)

Bei der Durchsicht verschiedener Schulbuchreihen zu passenden Aufgaben für die zwei oben genannten Grundvorstellungen zum Erweitern und Kürzen von Brüchen ist aufgefallen, dass diese in vielen Schulbüchern nicht vertreten sind. Aufgaben, welche die beiden Grundvorstellungen gut beschreiben, waren nur in Bortenschlager et al., 2020 und Bortenschlager et al., 2021 zu finden.

Somit ist auch im Fall der Grundvorstellungen zum Erweitern und Kürzen von Brüchen noch Potenzial zur Eingliederung von entsprechenden Aufgaben in aktuelle Schulbücher vorhanden.

3.2.2 Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion von Bruchzahlen

Addieren als Zusammenfügen oder Hinzufügen und Subtrahieren als Wegnehmen

In Abbildung 3.13 sehen wir die Addition als Zusammenfügen bzw. als Hinzufügen bei gleichnamigen Brüchen.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

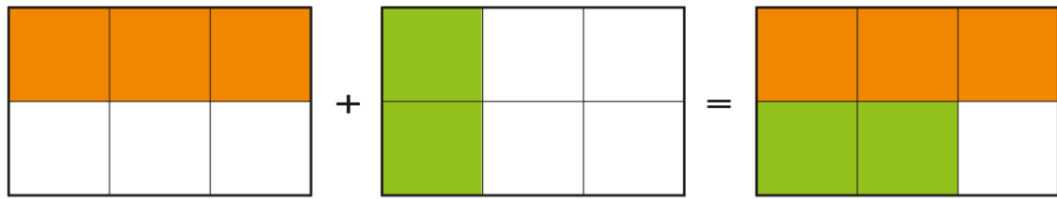


Abbildung 3.13: Addieren als Zusammenfügen oder Hinzufügen bei gleichnamigen Brüchen (siehe Salzger et al., 2015, S. 66)

Es gilt:

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Hinter der Addition und der Subtraktion von gleichnamigen Brüchen verbirgt sich die Grundvorstellung von Brüchen als Quasikardinalzahlen. Laut Padberg und Wartha (2017, S. 21) werden hierbei die Nenner der Brüche als Größeneinheit, im Fall der Addition und Subtraktion als Einheit der gleichen Größe, aufgefasst.



Abbildung 3.14: Subtrahieren als Wegnehmen bei gleichnamigen Brüchen (siehe Bortenschlager et al., 2020, S. 98)

In Abbildung 3.14 sehen wir die Subtraktion als Wegnehmen bei gleichnamigen Brüchen. Es gilt:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Hier gilt es laut Malle (n. d. a, S. 4) zu beachten, dass Bruchzahlen allgemein nicht

3.2 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

als Mächtigkeiten ausgedrückt werden können, die von den natürlichen Zahlen bekannte Deutung bei der Addition und der Subtraktion hier aber aufrechterhalten werden kann. Also:

$$3 \text{ Fünftel} - 1 \text{ Fünftel} = 2 \text{ Fünftel}$$

Bei der Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen ist noch zu thematisieren, dass die Brüche vor der Addition bzw. Subtraktion verfeinert oder vergrößert werden müssen, um auf einen gemeinsamen Nenner zu kommen, wie in Abbildung 3.15 zu erkennen ist.

472 H1 Bringe die Brüche auf gemeinsamen Nenner und berechne mithilfe einer Skizze: $\frac{7}{10} + \frac{2}{5}$

Ausführung:

Skizze:

Rechnung:

$$\frac{7}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10} + \frac{4}{10} = \frac{11}{10} = 1 \frac{1}{10}$$

Abbildung 3.15: Addieren als Zusammenfügen oder Hinzufügen bei ungleichnamigen Brüchen 1 (siehe Dorfmayr et al., 2019a, S. 98)

Aufgaben, welche zusätzlich eine bildliche Darstellung des Rechenvorgangs liefern oder bei denen die Schüler*innen auch eine bildliche Darstellung des Rechenvorgangs erstellen müssen, wie dezidiert in Abbildung 3.16, aber auch in den Abbildungen 3.13, 3.14 und 3.15 zu sehen ist, heben die Grundvorstellung nochmals hervor.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten



Abbildung 3.16: Addieren als Zusammenfügen oder Hinzufügen bei ungleichnamigen Brüchen 2 (siehe Salzger et al., 2015, S. 66)

Addieren als Vorwärtsbewegen bzw. Vorwärtsschreiten und Subtrahieren als Rückwärtsbewegen bzw. Rückwärtsschreiten

Hier ist die Deutung ebenfalls von den natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen erweiterbar (Malle, n. d. a, S. 4).

Wenn wir die Rechnungen

$$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9} \text{ und } \frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$$

auf einem Zahlenstrahl darstellen wollen, dann erhalten wir die Abbildungen 3.17 und 3.18.

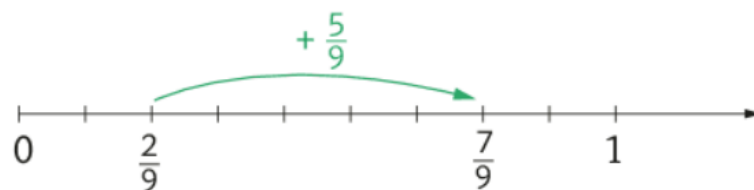


Abbildung 3.17: Addition als Vorwärtsbewegen bzw. Vorwärtsschreiten (siehe Bortenschlager et al., 2020, S. 99)

Hier wird ersichtlich, dass die Addition in Abbildung 3.17 als Vorwärtsbewegung

3.2 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

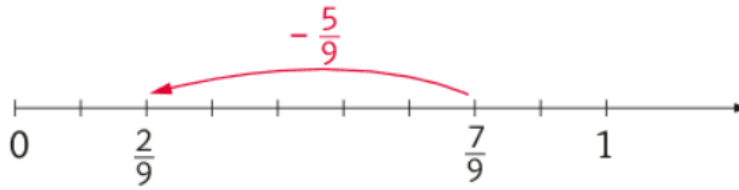


Abbildung 3.18: Subtraktion als Rückwärtsbewegen bzw. Rückwärtsschreiten (siehe Bortenschlager et al., 2020, S. 99)

und die Subtraktion in Abbildung 3.18 als Rückwärtsbewegung in Neuntelschritten gedeutet werden kann (Malle, n. d. a, S. 4).

Aufgaben, bei denen die Schüler*innen die Rechnung am Zahlenstrahl bildlich darstellen müssen, heben diese Grundvorstellung hervor.

3.2.3 Grundvorstellungen zur Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl

Multiplikation als abgekürzte Addition

$$3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$n \cdot \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}}_{n \text{ Summanden}}$$

Wenn wir das Kommutativgesetz voraussetzen, dann kann auch, wie in der Praxis üblich, der Ausdruck $\frac{2}{3} \cdot 3$ als $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ gedeutet werden (Malle, n. d. a, S. 5).

Die Einbindung einer graphischen Darstellung, bei den Aufgaben zur Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl, stellt die Grundvorstellung der Multiplikation als abgekürzte Addition sehr gut dar (3.19).

In Verbindung mit der Grundvorstellung des Addierens als Vorwärtsbewegen, he-

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

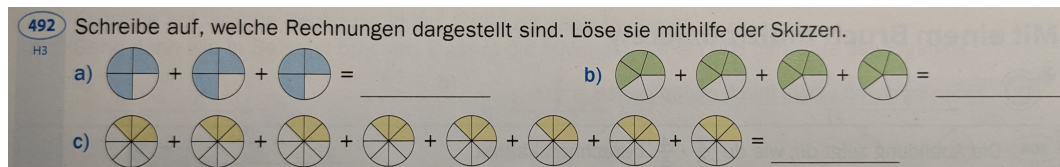


Abbildung 3.19: Multiplikation als abgekürzte Addition 1 (siehe Dorfmayr et al., 2019a, S. 101)

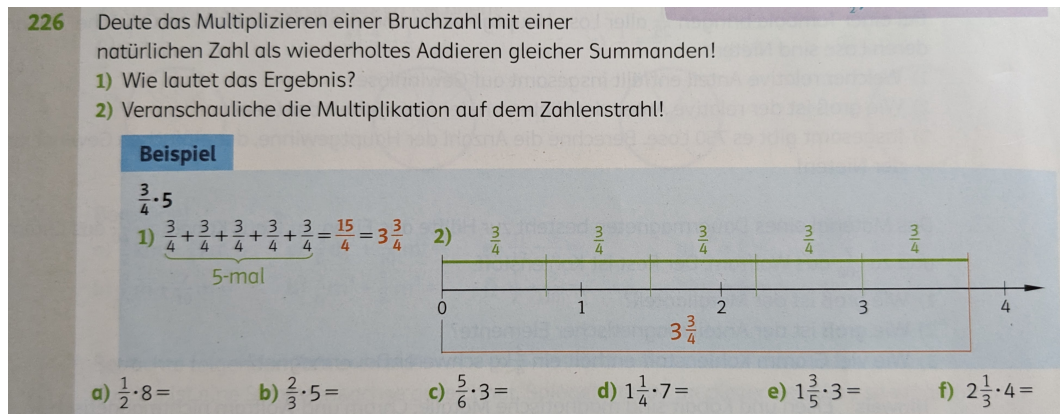


Abbildung 3.20: Multiplikation als abgekürzte Addition 2 (siehe Humenberger et al., 2018, S. 60)

ben Aufgaben, in denen die Multiplikation auf einem Zahlenstrahl eingezeichnet werden soll, wie in Abbildung 3.20 ersichtlich, die Grundvorstellung der Multiplikation als abgekürzte Addition hervor.

Von-Deutung der Multiplikation

$$\frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{2}{3} \text{ von } 3$$

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \text{ von } n$$

Diese Vorstellung ist für $n \cdot \frac{a}{b}$ nicht gültig, da man $3 \cdot \frac{2}{3}$ nicht als 3 von $\frac{2}{3}$ deuten kann. In der gängigen Praxis wird hier wieder $3 \cdot \frac{2}{3}$ als $\frac{2}{3}$ von 3 gedeutet und wiederum das Kommutativgesetz vorausgesetzt (Malle, n. d. a, S. 5).

3.2 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

Betrachten wir nun Aufgaben, welche einen Anteil einer Menge berechnen lassen, so kann im Sprachgebrauch die Multiplikation eines Bruches mit einer natürlichen Zahl leicht mit der Von-Deutung belegt werden, wie in Abbildung 3.21 zu erkennen ist.

2.173 Frau Thal hat 24kg Marillen geerntet. Aus $\frac{2}{3}$ der Ernte macht sie Marmelade. Wie viel Kilogramm Marillen verarbeitet Frau Thal zu Marmelade?
Lösung: Hier wird ein „Anteil von“ einer Menge berechnet, nämlich das $\frac{2}{3}$ -Fache von 24: $\frac{2}{3} \cdot 24 = 16$
Frau Thal hat 16 kg Marillen zu Marmelade verarbeitet.



Abbildung 3.21: Von-Deutung der Multiplikation 1 (siehe Salzger et al., 2015, S. 70)

Hier ist darauf zu achten, dass die Schüler*innen ihre Vorstellung aufgeben müssen, dass bei der Multiplikation zweier Zahlen, das Produkt immer größer ist als die beiden Faktoren. Dies gilt nur, wenn beide Faktoren größer als 1 sind. Bei der Multiplikation von Bruchzahlen ist diese Vorstellung nicht mehr allgemein gültig (Malle, n. d. a, S. 6).

3.2.4 Grundvorstellungen zur Multiplikation von Bruchzahlen

Von den zuvor vorgestellten Grundvorstellungen zur Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl, lässt sich laut Malle (n. d. a, S.6) nur die Von-Deutung auf die Multiplikation von Bruchzahlen übertragen.

Von-Deutung der Multiplikation

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{4}{5}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ von } \frac{c}{d}$$

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Bei Padberg und Wartha (2017) wird diese Grundvorstellung auch **Anteil vom Anteil** genannt.

Der Aufbau dieser Grundvorstellung wird am Beispiel von $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ aufgezeigt.

Im ersten Schritt werden $\frac{4}{5}$ eines Ganzen (in diesem Fall: eines Rechtecks) bestimmt und dabei auf die Grundvorstellung Anteil eines Ganzen zurückgegriffen. Wie in Abbildung 3.22 ersichtlich, wird es hierfür senkrecht in 5 gleich große Teile geteilt und 4 davon werden schraffiert.

Im zweiten Schritt werden die schraffierten $\frac{4}{5}$ nun als das neue Ganze bezeichnet. Wir teilen das Rechteck nun waagerecht in 3 Teile und schraffieren davon 2, in einer anderen Farbe.

Bis hierhin war nur die Grundvorstellung Anteil eines Ganzen notwendig. Durch die doppelte Schraffierung ist nun die Aufgabe $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ ikonisch gelöst. Die Lösung erhalten wir durch die Bestimmung des Anteils im ursprünglichen Rechteck. Wie in Abbildung 3.22 erkennbar beträgt dieser Anteil $\frac{8}{15}$ (Padberg und Wartha, 2017, S. 108-109).

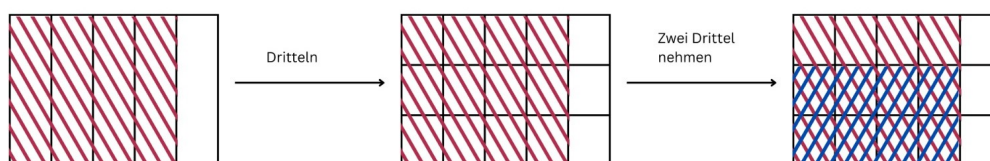


Abbildung 3.22: Ikonische Darstellung der Anteil vom Anteil Grundvorstellung (angelehnt an Padberg und Wartha, 2017, S. 109)

Indem wir die Nenner der beiden Ausgangsbrüche multiplizieren, erhalten wir die Anzahl der Teile, in die das ursprüngliche Ganze unterteilt wurde und bei der Multiplikation der Zähler der Ausgangsbrüche, erhalten wir die Anzahl der Teile, die doppelt schraffiert wurden. Insgesamt, sind wir zur Rechenregel für das Multiplizieren von Bruchzahlen vorgedrungen (Padberg und Wartha, 2017, S. 109).

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad b, d \neq 0$$

Und diese lautet, lapidar gesagt, Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner.

3.2.5 Grundvorstellungen zur Division von Bruchzahlen

Die, bei den natürlichen Zahlen, vorhandenen Vorstellungen zur Division, das **Messen** und das **Teilen**, können auf die Bruchzahlen übertragen werden (Malle, n. d. a, S. 6). Wobei Malle (n. d. a, S. 6) hier die Begriffe Verteilen für Messen und Aufteilen für Teilen verwendet. Bei dieser Übertragung ergeben sich aber leichte Einschränkungen, wie wir im Folgenden erfahren werden (Malle, n. d. a, S. 6).

Des Weiteren ist hier noch darauf zu achten, dass bei der Division von Bruchzahlen nicht, wie bei den natürlichen Zahlen, der Quotient immer kleiner als der Dividend ist. Hier ist auch der umgekehrte Fall möglich, wie bei der ersten Aufgabe zur Grundvorstellung des Messens ersichtlich wird (Malle, n. d. a, S. 7).

Teilen

Die Vorstellung des Teilens ist laut Malle (n. d. a, S. 6) nur dann sinnvoll, wenn der Divisor eine natürliche Zahl ist. Eine Division mit einer Bruchzahl als Divisor kann nicht mit der Grundvorstellung des Teilens gedeutet werden.

Aufgaben, wie die folgende, heben die Grundvorstellung des Teilens gut hervor.

Aufgabe: Rosemarie hat $\frac{3}{4}$ kg Zitronenkuchen bekommen. Sie will den Zitronenkuchen mit ihren 2 Freundinnen teilen. Berechne, wie viel Kilogramm Zitronenkuchen jedes Kind bekommt!

$$\frac{3}{4} \text{ kg} : 3 = \frac{1}{4} \text{ kg}$$

Messen

Wir passen die Aufgabe aus der Grundvorstellung des Teilens nun so an, dass sie mit der Grundvorstellung des Messens gelöst werden kann.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Aufgabe: Rosemarie teilt $\frac{3}{4}$ kg Zitronenkuchen in Jausenboxen auf. In jeder Box sollen $\frac{1}{4}$ kg Zitronenkuchen enthalten sein. Berechne, wie viele Boxen mit dieser Menge an Zitronenkuchen gepackt werden können!

$$\frac{3}{4} \text{ kg} : \frac{1}{4} \text{ kg} = 3 \text{ Boxen}$$

Wie in Abbildung 3.23 zu sehen ist, heben Aufgaben, in denen Längenmaße verwendet werden, die Grundvorstellung des Messens besonders hervor. Bei der abgebildeten Aufgabe wird der Messvorgang durch die vorgegebene Einteilung in Drittel erleichtert (Padberg und Wartha, 2017, S. 127).

- (4) Lukas macht *zwei drittel* Meter lange Schritte. Wie viele Schritte macht er auf einer 4 Meter langen Strecke?

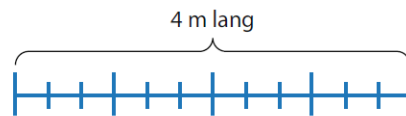


Abbildung 3.23: Division als Messen 1 (siehe Padberg und Wartha, 2017, S. 127)

Bei Aufgaben, welche die Grundvorstellung des Messens fördern, ist auch eine Deutung der Division als fortlaufende Subtraktion möglich (Malle, n. d. a, S. 7).

$$\underbrace{\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}}_{1. \text{ Subtraktion}} \xrightarrow{\text{nächster Schritt}} \underbrace{\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}}_{2. \text{ Subtraktion}} \xrightarrow{\text{nächster Schritt}} \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0}_{3. \text{ Subtraktion}}$$

Laut Malle (n. d. a, S. 7) gibt es auch Divisionen von Bruchzahlen, welche nicht unter eine der beiden genannten Grundvorstellungen fallen. Er nennt hier Divisionen, welche keine natürliche Zahl als Divisor oder als Quotient haben und falls dies nicht der Fall ist, muss eine ungleichmäßige Aufteilung akzeptiert oder auf

3.2 Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen

eine natürliche Zahl gerundet werden. Für diese Fälle existiert laut Malle keine sinnvolle Grundvorstellung und die Division dieser Bruchzahlen kann nur als formale Rechnung gedeutet werden.

Diese Aussage ist nicht widerspruchsfrei hinnehmbar. Es können auch Divisionen mit der Grundvorstellung des Messens betrachtet werden, bei denen weder der Divisor noch der Quotient ein Element der natürlichen Zahlen sind, wie in folgender Aufgabe ersichtlich.

Aufgabe: Berechne, wie oft $\frac{1}{4}$ l in eine Kanne mit dem Volumen von $\frac{7}{8}$ l hineinpasst!

$$\frac{7}{8} \text{ l} : \frac{1}{4} \text{ l} = 3\frac{1}{2}$$

Das heißt $\frac{1}{4}$ l passen $3\frac{1}{2}$ mal in $\frac{7}{8}$ l.

Auch Padberg und Wartha (2017) widersprechen der Sichtweise Malles. Sie sehen hier ebenso die Grundvorstellung des Messens gegeben und dadurch die Division von Brüchen durch Brüche, durch diese Grundvorstellung, fundiert. Dies ist auch anhand eines Beispiels, siehe Abbildung 3.24, Weg 2, illustriert (2017, S. 132).

Division als Umkehroperation zur Multiplikation

Die Grundvorstellung der Division als Umkehroperation zur Multiplikation, analog zur bekannten Grundvorstellung in den natürlichen Zahlen, kann auch bei Brüchen eingesetzt werden (Padberg und Wartha, 2017, S. 135).

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot d} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Beispiel

$5\frac{3}{4}$ kg Bonbons sollen in Tüten mit je einem halben Kilogramm Bonbons abgepackt werden. Wie viele Tüten erhalte ich?

- **Weg 1** (Schätzen/Überschlag)

Das Ergebnis muss zwischen 10 und 12 liegen; denn mit 6 kg Bonbons kann ich 12 Tüten, mit 5 kg Bonbons 10 Tüten füllen.

- **Weg 2**

5 kg Bonbons ergeben 10 Tüten. Von den restlichen $\frac{3}{4}$ kg kann ich eine weitere Tüte füllen, also insgesamt 11 Tüten. Es bleibt noch $\frac{1}{4}$ kg übrig. Hiermit kann ich eine halbe Tüte füllen, also insgesamt $11\frac{1}{2}$ Tüten.

Abbildung 3.24: Division als Messen 2 (siehe Padberg und Wartha, 2017, S. 132)

Aufgaben, bei denen die Schüler*innen die Probe für die erfolgte Division ausführen müssen, wie in Abbildung 3.25 dargestellt, heben die Grundvorstellung als Umkehroperation hervor. Des Weiteren schließen sie an die analoge Grundvorstellung aus den natürlichen Zahlen an.

272 Führe die Division durch, indem du vorher kürzt!
Vergiss nicht auf die Probe!

Beispiel

$$2\frac{2}{3} : 1\frac{7}{9} = \frac{8}{3} : \frac{16}{9} = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{8}{2} = 4$$

Probe: $1\frac{7}{9} \cdot 4 = \frac{16}{9} \cdot 4 = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$

a) $\frac{8}{9} : \frac{4}{5} =$ c) $5\frac{3}{5} : \frac{1}{4} =$ e) $5 : 7\frac{1}{2} =$ g) $2\frac{1}{7} : \frac{3}{4} =$ i) $5\frac{1}{7} : \frac{9}{14} =$

b) $\frac{6}{7} : \frac{3}{7} =$ d) $4 : 1\frac{1}{2} =$ f) $5\frac{3}{5} : 1\frac{1}{3} =$ h) $5\frac{3}{11} : 2\frac{4}{11} =$ j) $5\frac{5}{6} : 1\frac{3}{4} =$

Abbildung 3.25: Division als Umkehroperation (siehe Humenberger et al., 2018, S. 68)

3.3 Grundvorstellungen zu den negativen Zahlen

Die negativen Zahlen sind ab der dritten Klasse der AHS Unterstufe im Lehrplan verankert. Sie gehören dem Kompetenzbereich der Zahlen und Maße an. Schüler*innen sollen „rationale Zahlen darstellen, vergleichen und ordnen“ können und mit rationalen Zahlen „Rechenoperationen durchführen und interpretieren“ können. (siehe BMBWF, 2023a, S. 78)

3.3 Grundvorstellungen zu den negativen Zahlen

Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen können sich über vielfältige reale Handlungen entwickeln. Den negativen Zahlen fehlt diese Handlungsgrundlage. Negative Temperaturen oder Kontostände können zwar als Vorerfahrungen genannt werden, jedoch ist das systematische Rechnen mit negativen Zahlen ein Produkt mathematischer Unterweisung.

Dadurch ist bei den negativen Zahlen nicht mehr die Kardinalzahl die wichtigste Zahlvorstellung, sondern es geht mehr um die Beschreibung von Zuständen und deren Änderungen innerhalb eines (linearen) Systems. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 45-46)

Laut Roth und Ames (2014, S. 1268) sind die dominanten Vorstellungen zu den Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen, das Hinzufügen, das Wegnehmen, das sukzessive oder simultane Vervielfachen sowie das Verteilen, gegenständlich realisierbar und sie sprechen von einer Realisantenebene, in welcher Zahlen als konkrete Dingmengen realisierbar sind und Verknüpfungen als durchführbare Handlungen gesehen werden.

Die gegenständliche Repräsentation auf Realisantenebene ist bei den negativen Zahlen nicht möglich. (Kirsch, 2004, S. 63)

Die Strukturen der Zustand-Änderung-Zustand- und Änderung-Änderung-Änderung-Vorstellung lassen sich zwar darstellen, doch beschreiben die Zahlen und Operationen hier keine konkreten Dingmengen oder Gegenstände. In diesen Fällen werden Zustände und Zustandsänderungen beschrieben.

Die Multiplikation einer negativen mit einer positiven Zahl lässt sich durch Zustände und Zustandsänderungen noch plausibel interpretieren. Bei der Multiplikation zweier negativer Zahlen lässt sich hiermit aber keine sinnvolle Deutung herstellen. Zustände und ihre Änderungen sind somit zum Aufbau entsprechender Grundvorstellungen eher nicht geeignet. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 46)

Kombiniert mit einem entsprechenden Pfeilmodell, findet sich auf der Zahlengerade eine tragfähige Vorstellungsgrundlage. Dieses Modell ist zwar abstrakter als derzeitige Modelle, es knüpft aber trotzdem an die Erfahrungen aus der Zahlengerade

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

rade an, welche schon in der Primarstufe bekannt ist.

Bei der Zahlengeraden handelt es sich somit um eine sekundäre Grundvorstellung, welche bereits angelegt ist und mit den Grundvorstellungen zu den negativen Zahlen weiter ausgebaut werden kann. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 46)

Vom Hofe und Fast (2015, S. 46) schlagen das Pfeilmodell als Basis für die Ausbildung der Grundvorstellungen für negative Zahlen vor.

Sie deuten die Multiplikation als Streckung. Eine Strecke kann auf ihre n -fache Länge gestreckt werden oder eine Strecke ist n mal so lang wie eine andere. Hierbei greift die Idee des Streckens und Stauchens auf die Grundvorstellung der Multiplikation als wiederholtes Addieren zurück.

Die Idee des Streckens geht sogar noch darüber hinaus. Denn es können auch nicht-ganzzahlige Streckfaktoren vorkommen und eröffnen somit den Weg zum Rechnen mit rationalen Zahlen. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 46)

Erweiterung des Zahlenstrahls als Spiegelung am Nullpunkt

„Die Erweiterung des Zahlenstrahls von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ kann leicht als *Spiegelung* des Zahlenstrahls am Nullpunkt vermittelt werden. Jede Zahl in $\mathbb{N}$ wird im gleichen Abstand zu 0 auf die vom Nullpunkt andere Seite in den neuen, negativen Bereich abgebildet.“ (siehe Vom Hofe und Fast, 2015, S. 47)

Addition als Aneinanderhängen zweier Pfeile

Die Rechnung $a + b$ entspricht im Pfeilmodell visuell dem Aneinanderhängen der beiden Pfeile mit der Länge a und b . Der Anfang des Pfeils b wird hierbei an das Ende des Pfeils a gehängt. Dies funktioniert auch, wenn eine oder beide Zahlen kleiner als 0 sind.

Hierbei wird auch ersichtlich, dass die Addition kommutativ ist, da die Reihenfolge der Anordnung das Ergebnis nicht beeinflusst. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 47)

3.3 Grundvorstellungen zu den negativen Zahlen

Hervorgehoben wird diese Grundvorstellung und die Grundvorstellung zur Subtraktion mit Aufgaben, welche das Pfeilmodell benutzen, wie in Abbildung 3.26 zu erkennen ist.

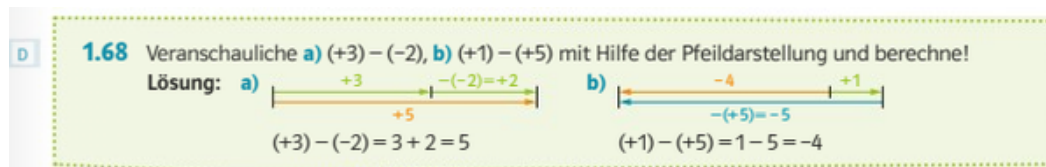


Abbildung 3.26: Aufgabe zur Addition und Subtraktion mit negativen Zahlen 1 (Salzger et al., 2022b, S. 33)

Subtraktion als Addition der Gegenzahl

Durch die Interpretation der Subtraktion als Addition der Gegenzahl, wird die Subtraktion auf die Addition zurückgeführt und kann dadurch geometrisch genauso interpretiert werden.

Im Pfeilmodell ist leicht ersichtlich, dass das Ergebnis dasselbe ist, egal ob man eine Zahl subtrahiert oder ihre Gegenzahl addiert. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 48)

Diese Grundvorstellung wird durch Aufgaben hervorgehoben, welche die Rechnungen mit Hilfe des Pfeilmodells veranschaulichen lassen, wie in Abbildung 3.27 dargestellt.



Abbildung 3.27: Aufgabe zur Addition und Subtraktion mit negativen Zahlen 2 (Salzger et al., 2022b, S. 34)

Multiplikation mit einer positiven Zahl als Streckung

Die Multiplikation kann zunächst als Streckung dargestellt werden:

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Der erste Faktor als Pfeil und der zweite Faktor als Operator, welcher die Länge des Pfeils verändert. Für die Rechnung $(-4) \cdot 5$ bedeutet diese Interpretation, dass der Pfeil (-4) mit dem Faktor 5 gestreckt wird. Als Ergebnis erhalten wir somit -20 . (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 48)

Laut Vom Hofe und Fast (2015, S. 49) sollte nun mit der Festlegung gearbeitet werden, dass das Kommutativgesetz auch im Bereich der ganzen Zahlen gilt, wie in Abbildung 3.28 zu sehen ist. Dadurch muss $5 \cdot (-4)$ ebenfalls -20 ergeben.

$(-3) \cdot (+2) =$	Auch in den ganzen Zahlen gilt das Kommutativgesetz (es darf die Reihenfolge der Faktoren vertauscht werden): $(-3) \cdot (+2) = (+2) \cdot (-3) = -6$	$(-3) \cdot (+2) = -6$
---------------------	--	------------------------

Abbildung 3.28: Festlegung des Kommutativgesetzes im Bereich der ganzen Zahlen (Bortenschlager et al., 2023b, S. 18)

Diese Grundvorstellung wird durch Aufgaben hervorgehoben, welche die Berechnungen durch Pfeildarstellungen veranschaulichen lassen.

Eine solche Aufgabe ist in Abbildung 3.30 zu sehen, welche auch die Grundvorstellung zur Multiplikation mit einer negativen Zahl hervorhebt.

Multiplikation mit einer negativen Zahl als Kombination von Spiegeln und Strecken

Eine Multiplikation mit (-1) wirkt, auf einen als Pfeil dargestellten ersten Faktor, wie eine Spiegelung am Nullpunkt. Der Betrag des ersten Faktors bleibt hierbei erhalten, es wird nur die Richtung umgedreht. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 49)

Diese Vorstellung der Spiegelung am Nullpunkt ist in den für die Literaturrecherche gesichteten Schulbüchern nicht vorgekommen. Sie kann durch die Benutzung eines Geometrie-Programms sichtbar gemacht werden, wie in Abbildung 3.29 zu sehen ist.

Dabei entsteht die Gegenzahl zum ersten Faktor. (Salzger et al., 2016, S. 35)

3.3 Grundvorstellungen zu den negativen Zahlen

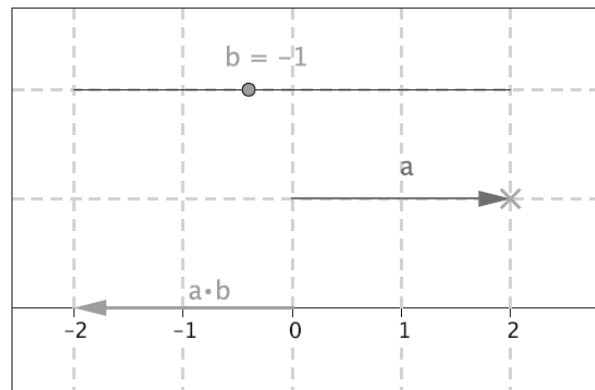


Abbildung 3.29: Multiplikation mit (-1) als Spiegelung am Nullpunkt (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 49)

Auf diese Situation kann nun die Multiplikation mit anderen negativen Zahlen zurückgeführt werden. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 49)

$$5 \cdot (-4) = 5 \cdot (-1) \cdot 4$$

„Entsprechend kann die Multiplikation als Kombination von Spiegeln und Strecken interpretiert werden.“ (siehe Vom Hofe und Fast, 2015, S. 49)

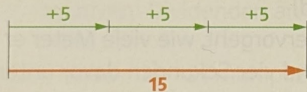
Diese Grundvorstellung kann durch Aufgaben hervorgehoben werden, welche die Berechnung durch eine Pfeildarstellung veranschaulichen lassen oder Aufgaben, welche einer entsprechenden Pfeildarstellung eine Rechnung zuordnen lassen. Beides ist in Abbildung 3.30 veranschaulicht.

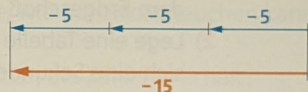
Der Unterschied zwischen den Vorzeichen der Faktoren kann mit Aufgaben aufgezeigt werden, welche die verschiedenen Vorzeichen mit den gleichen Faktoren vergleichen lassen. Solch eine Aufgabe ist in Abbildung 3.31 visualisiert.

Falls die Schüler*innen die Zusatzaufgabe des Darstellens der Rechnungen auf einer Zahlengeraden bekommen, dann können die oben genannten Grundvorstellungen zur Multiplikation mit negativen Zahlen auch hier hervorgehoben werden.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

1.77 Veranschauliche a) $(+3) \cdot (+5)$, b) $(+3) \cdot (-5)$ mit Hilfe der Pfeildarstellung und berechne!

Lösung: a)  $(+3) \cdot (+5) = 3 \cdot 5 = 15$

b)  $(+3) \cdot (-5) = -(3 \cdot 5) = -15$

1.78 Veranschauliche mit Hilfe der Pfeildarstellung und berechne!

a) $(+2) \cdot (+4)$ b) $(+2) \cdot (-3)$ c) $(+1) \cdot (+8)$ d) $(+4) \cdot (-6)$ e) $(+5) \cdot (-4)$

1.79 Kreuze an, welche Rechnung durch die Pfeildarstellung veranschaulicht ist!

☐ $(-7) \cdot (-6) = 42$ ☐ $7 \cdot (-6) = -42$

☐ $6 \cdot (-7) = -42$ ☐ $6 \cdot 7 = 42$

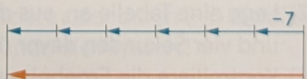


Abbildung 3.30: Multiplikation mit einer negativen Zahl als Kombination von Spiegeln und Strecken (Salzger et al., 2016, S. 35)

63 Berechne und vergleiche deine Ergebnisse.

a) $(+5) \cdot (+4) =$ b) $(+3) \cdot (+7) =$ c) $(+8) \cdot (+9) =$ d) $(+2) \cdot (+24) =$

$(+5) \cdot (-4) =$ $(+3) \cdot (-7) =$ $(+8) \cdot (-9) =$ $(+2) \cdot (-24) =$

$(-5) \cdot (+4) =$ $(-3) \cdot (+7) =$ $(-8) \cdot (+9) =$ $(-2) \cdot (+24) =$

$(-5) \cdot (-4) =$ $(-3) \cdot (-7) =$ $(-8) \cdot (-9) =$ $(-2) \cdot (-24) =$

Abbildung 3.31: Multiplikation mit zwei Faktoren und unterschiedlichen Vorzeichen (Bortenschlager et al., 2023b, S. 18)

3.4 Grundvorstellungen zur Proportionalität

Proportionalitäten sind im Lehrplan der AHS Unterstufe in der ersten Klasse sowie in der zweiten Klasse verankert. Sie zählen in der ersten und zweiten Klasse zum Themengebiet des Arbeitens mit Modellen und Maßen. Wobei in der ersten Klasse nur die direkte Proportionalität im Lehrplan verankert ist (BMBWF, 2023b, S. 83). Schüler*innen sollen, in der ersten Klasse, direkte Proportionalitäten erkennen können und in der zweiten Klasse „charakteristische Kennzeichen von indirekten und direkten Proportionalitäten an Beispielen angeben können (siehe BMBWF, 2023b, S. 83).“ Weiters sollen Schüler*innen einfache Fragestellungen zu Proportionalitäten graphisch darstellen und formulieren können, sowie Fragen zu sinnvollen Anwendungsbereichen von Proportionalitäten stellen können (BMBWF, 2023b, S. 83).

3.4 Grundvorstellungen zur Proportionalität

Im neuen Lehrplan für die AHS Unterstufe sind Proportionalitäten in der zweiten Klasse im Kompetenzbereich der Zahlen und Maße, verankert. Schüler*innen sollen, laut Lehrplan, mit Proportionalitäten arbeiten können (BMBWF, 2023a, S. 77).

Sie werden hier auch im Kompetenzbereich der Variablen und Funktionen genannt und in Verbindung mit Brüchen und Prozentsen gebracht. „Die Schülerinnen und Schüler können Terme, Gleichungen und Formeln auch mit Brüchen und im Zusammenhang mit Proportionalitäten und Prozentsen aufstellen und interpretieren (siehe BMBWF, 2023a, S. 77).

Bei den Grundvorstellungen zur Proportionalität handelt es sich, laut Hafner (2012, S. 34), um sekundäre Grundvorstellungen, welche an Anschauungsmittel, in diesem Fall eine Tabelle, gebunden sind.

Diese Aussage soll nicht widerspruchsfrei übernommen werden. Es gibt hierzu intuitive Vorerfahrungen, wie die Preissteigerung mit der Menge des gekauften Produktes. Zum Beispiel kostet 1 kg Äpfel 2,70€ und 3 kg derselben Äpfel 8,10€.

Die Grundvorstellungen zur Proportionalität wurden aus dem Buch von Hafner (2012) übernommen.

Vervielfachungsvorstellung

Menge (in kg)	Preis (in €)
1,5	2,70
3	5,40

Diagramm zur Vervielfachungsvorstellung: Die Menge (in kg) wird von 1,5 auf 3 verdoppelt (·2). Der Preis (in €) wird von 2,70 auf 5,40 verdoppelt (·2).

Abbildung 3.32: Proportionalität Vervielfachungsvorstellung (siehe Hafner, 2012, S. 34)

Verdoppelt man die Ausgangsgröße, so muss auch die zugeordnete Größe verdoppelt werden (Hafner, 2012, S. 34). Oder allgemeiner ausgedrückt, multipliziert man

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

die Ausgangsgröße mit einer Zahl, so wird auch die zugeordnete Größe mit der selben Zahl multipliziert.

Diese Grundvorstellung gilt natürlich für die direkte Proportionalität. Sie wird vor allem durch Aufgaben aufgezeigt, welche Preise von bestimmten Stückzahlen einer Ware berechnen lassen, wie in Abbildung 3.33 ersichtlich. Hierdurch ist auch ein Bezug zur Lebensrealität der Schüler*innen gegeben und vorhandenes Vorwissen kann aktiviert werden.

H2 **730** Fülle die Lücken.

eitsblatt
cp9n5s

a)

Stück	Preis in €
1	
2	24
3	
4	

b)

Stück	Preis in €
1	
2	
3	51
4	

c)

Stück	Preis in €
1	
2	
3	
4	84

Abbildung 3.33: Aufgabe zur Vervielfachungsvorstellung (siehe Bortenschlager et al., 2021, S. 152)

Additionsvorstellung

Menge (in kg)	Preis (in €)
1,5	2,70
0,5	0,90
2	3,60

Abbildung 3.34: Proportionalität Additionsvorstellung (siehe Hafner, 2012, S. 34)

Addiert man zwei Ausgangsgrößen, so müssen auch die zugeordneten Größen addiert werden (Hafner, 2012, S. 34).

3.4 Grundvorstellungen zur Proportionalität

Um die Additionsvorstellung darzustellen, sollten die Aufgaben für die Lernenden derart gestaltet sein, dass bei der Ausgangsgröße mit Größen gearbeitet wird, die im Allgemeinen auch als Teile eines oder mehreren Ganzen bzw. als Dezimalzahl vorliegen können.

So könnte aus der Darstellung zur Additionsvorstellung, wie in Abbildung 3.34 illustriert, unten stehende Aufgabe erstellt werden um die Additionsvorstellung hervorzuheben.

Aufgabe: Carina kauft am Markt 1,5 kg Äpfel um 2,70 €. Am nächsten Tag kauft sie, beim selben Händler, 0,5 kg Äpfel um 0,90 €. Am darauffolgenden Tag will Carina 2 kg Äpfel kaufen. Stelle in einer Tabelle die Einkäufe dar und berechne, wie viel Carina für 2 kg Äpfel bezahlen muss!

Proportionalitätsvorstellung

Wenn die Ausgangsgröße mit dem Proportionalitätsfaktor multipliziert wird, erhält man die zugeordnete Größe (Hafner, 2012, S. 35).

Menge (in kg)		Preis (in €)
1	$\cdot 1,8$ $\frac{\text{€}}{\text{kg}}$	1,80
4	$\cdot 1,8$ $\frac{\text{€}}{\text{kg}}$	7,20

Abbildung 3.35: Proportionalitätsvorstellung (siehe Hafner, 2012, S. 34)

Aufgaben, welche ein Vielfaches einer Größe ermitteln lassen, wie in Abbildung 3.36 ersichtlich, stellen diese Grundvorstellung gut dar. Bei solchen Aufgaben muss zuerst der Proportionalitätsfaktor ermittelt werden und es bietet sich für die Schüler*innen an, danach mit diesem, das Vielfache einer Größe zu ermitteln.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

5.27

Bei einem Kirtag werden an einem Stand Zuckerl nach Masse verkauft. Es steht angeschrieben, dass 10 dag Zuckerl 1,20 € kosten. Bernadette kauft 25 dag Zuckerl. Wie viel muss sie bezahlen? Lege auch eine Tabelle an!

Abbildung 3.36: Aufgabe zur Proportionalitätsvorstellung (siehe Salzger et al., 2015, S. 135)

Quotientenvorstellung

Dividiert man die zugeordnete Größe durch die Ausgangsgröße, so erhält man immer denselben Wert (Hafner, 2012, S. 35).

Menge (in kg)	Preis (in €)	$\frac{\text{Preis}}{\text{Menge}}$ in $\frac{\text{€}}{\text{kg}}$
6	10,80	1,8
2	3,60	1,8

Abbildung 3.37: Quotientenvorstellung (siehe Hafner, 2012, S. 35)

Die Quotientenvorstellung hängt stark mit dem Proportionalitätsfaktor zusammen, da er der Quotienten der Division ist. Somit sind Aufgaben, wie die zur Proportionalitätsvorstellung angeführte, gut geeignet, um diese Vorstellung aufzubauen. Aber auch Aufgaben, die einen Stückpreis ermitteln lassen, wie in Abbildung 3.38 dargestellt, heben die Quotientenvorstellung hervor.

5.20



Berechne den Preis für eine Einheit!

- a) Eine 6er-Packung Orangensaft kostet 2,40 €. Wie viel kostet eine Packung?
- b) Buntstifte in einer 12er-Packung kosten 9,60 €. Wie viel kostet ein Buntstift?
- c) Ein viertel Kilogramm Butter kostet 95c. Wie viel kostet ein Kilogramm Butter?
- d) $\frac{1}{8}$ l Öl kostet 2,95 €. Wie viel kostet ein Liter Öl?

Abbildung 3.38: Aufgabe zur Quotientenvorstellung (siehe Salzger et al., 2015, S. 134)

Verhältnisvorstellung

Dividiert man zwei zugeordnete Größen und die beiden zugehörigen Ausgangsgrößen, so erhält man dieselbe Zahl.

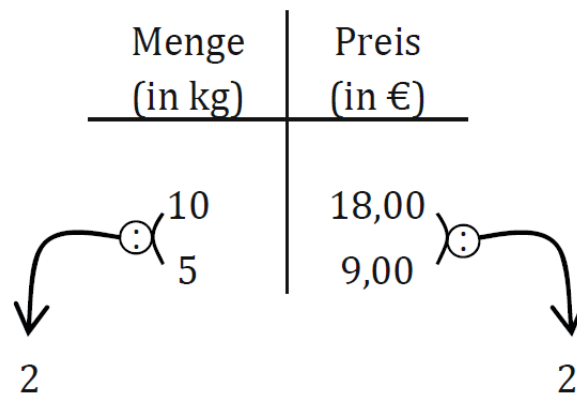


Abbildung 3.39: Verhältnisvorstellung (siehe Hafner, 2012, S. 35)

Diese Grundvorstellung ist klar mit der Vervielfachungsvorstellung verbunden. Sie kann durch Aufgaben, wie in Abbildung 3.40, hervorgehoben werden, in welcher die Ausgangsmengen nicht nur steigen, sondern auch fallen und die durchgeführten Rechenschritte neben der Tabelle angegeben werden.

	Stück	Preis in €	
	6	1,20	
:2	3		:2
:3	1		:3
·7	7		·7

Abbildung 3.40: Aufgabe zur Verhältnisvorstellung (siehe Humenberger et al., 2018, S. 118)

3.5 Grundvorstellungen zu Prozenten

Die Prozentrechnung ist im Lehrplan der AHS Unterstufe in der zweiten Klasse verankert. Sie zählt zum Themengebiet des Arbeitens mit Modellen und Maßen. Schüler*innen sollen mit Prozenten in vielfältigen Zusammenhängen rechnen können (BMBWF, 2023b, S. 83).

Im neuen Lehrplan für die AHS Unterstufe, sind die Prozente in der zweiten Klasse, im Kompetenzbereich der Zahlen und Maße, in Verbindung mit den Proportionalitäten, verankert. Schüler*innen sollen, laut Lehrplan, mit Proportionalitäten und Prozenten arbeiten können. (BMBWF, 2023a, S. 77).

Laut Pöhler (2018, S. 12) haben die in diesem Kapitel erwähnten Grundvorstellungen als gemeinsamen Kern den proportionalen Zusammenhang zweier Größen. Somit ist hier eine Überlappung mit dem Themengebiet der Proportionalität gegeben.

Prozente als Zahlen

Diese Grundvorstellung legitimiert die Gleichsetzung von Prozentangaben mit Brüchen und Dezimalzahlen. Dabei ist es allerdings notwendig, dass zu der vorhandenen Prozentangabe eine Bezugsgröße angegeben wird. Als Ausnahme davon sind die Prozentangaben im Kontext von Wahrscheinlichkeiten und Wirkungsgraden zu sehen (Pöhler, 2018, S. 13).

$$37\% = 0,37$$

Es ist ersichtlich, dass diese Grundvorstellung eng mit der Hundertstel- oder Prozentoperatorvorstellung aus der Prozentrechnung verbunden ist. Aufgaben, welche diese Grundvorstellung gut hervorheben (siehe Abbildung 3.46), sind somit auch

3.5 Grundvorstellungen zu Prozenten

für die Grundvorstellung der Prozente als Zahlen gut geeignet.

Ebenso stellen Aufgaben, welche den Prozenten einen bestimmten Zahlenwert zuzuordnen lassen, wie in Abbildung 3.41 ersichtlich, diese Grundvorstellung dar. Wobei bei dieser Aufgabe die Grundvorstellung von Prozenten als relative Anteile, welche in den nächsten Absätzen besprochen wird, auch abgebildet wird.

342 Finde die richtigen Paare! Verbinde mit Linien!

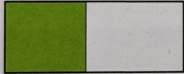
$\frac{7}{10}$	A	1	66%
	B	2	45%
0,66	C	3	80%
	D	4	143%
1,43	E	5	33,3%
	F	6	70%

Abbildung 3.41: Aufgabe zu Prozente als Zahlen und als relative Anteile (siehe Humenberger et al., 2018, S. 81)

3.5.1 Prozente als relative Größen (Intensive Quantity)

Wie Pöhler (2018, S. 13) erwähnt, ermöglichen laut Parker und Leinhardt (1995, S. 437) Prozente als relative Größen die Quantifizierung multiplikativer Zusammenhänge und stellen ein Verhältnis von zwei Zahlen oder gleichartiger Größen dar:

„37% der Lehrer*innen“

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Durch die Prozentdarstellung können wir relative Häufigkeiten so ordnen, wie es im Dezimalsystem üblich ist (Parker und Leinhardt, 1995, S. 438).

Dies geschieht laut Parker und Leinhardt (siehe 1995, S. 438) in besonders offensichtlicher Form: „But when this quantification (0,34) is expressed in the language of percent (34 %) there is no doubt that the numeral is an expression of an intensive relationship [...]. Mathematically, the appearance of the percent language flags the entry into an intensive world of comparisons between quantities.“

Wie Pöhler (2018) darstellt, gibt es zur Grundvorstellung Prozente als relative Größen neun Situationsmuster, wie in Abbildung 3.42 visualisiert.

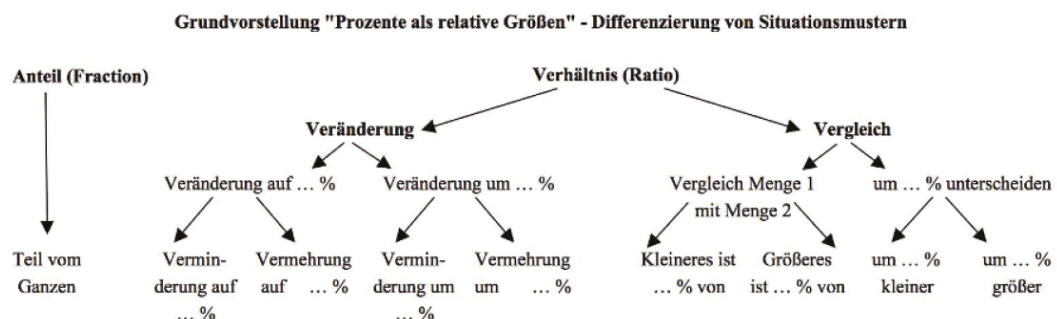


Abbildung 3.42: Situationsmuster zur Grundvorstellung Prozente als relative Größen (siehe Pöhler, 2018, S. 13, nach Parker und Leinhardt, 1995, S. 439)

Prozente als Anteile (Fraction)

Bei dieser Grundvorstellung liegt ein enger Zusammenhang mit der Grundvorstellung von Bruchzahlen als Teile (eines Ganzen) und als relative Anteile vor. Des Weiteren hängt auch die Grundvorstellung von Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile (Laplace) mit dieser Grundvorstellung zusammen (Pöhler, 2018, S. 15).

Illustriert können solche Anteile anhand von Torten- oder Balkendiagrammen werden. Auch eine Darstellung in Prozentstreifen, wie in Abbildung 3.43 visualisiert, hebt diese Grundvorstellung hervor (Pöhler, 2018, S. 15).

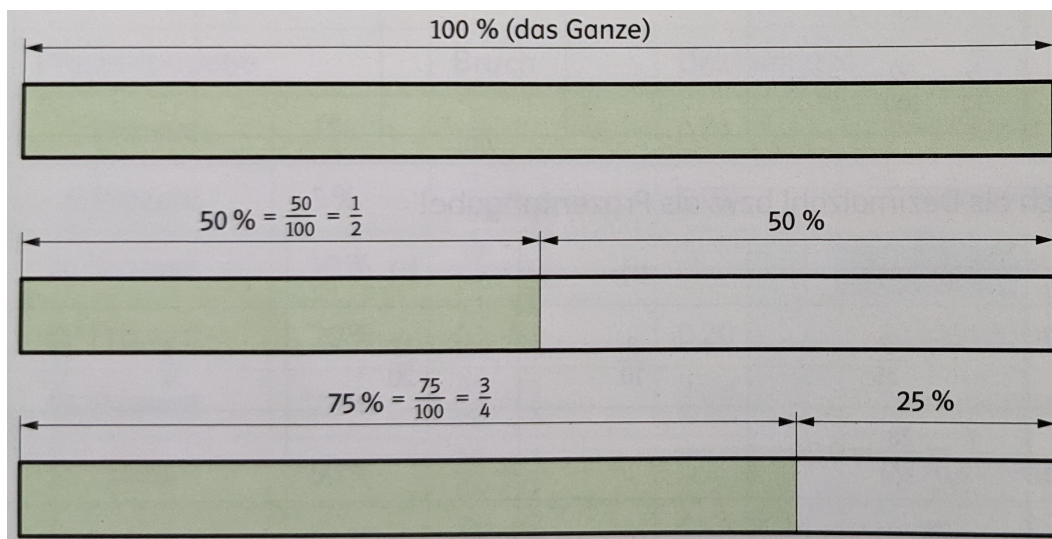


Abbildung 3.43: Prozentstreifen (siehe Humenberger et al., 2018, S. 80)

Prozente als Verhältnisse (Ratio)

Die Grundvorstellung Prozente als Verhältnisse ermöglicht den Vergleich zweier Mengen. Wobei hier laut Pöhler (2018, S. 15) Vergleichs- und Veränderungssituationen unterschieden werden können. Diese zwei Situationstypen können, wie in Abbildung 3.42 dargestellt, weiter in feinere Situationsmuster aufgegliedert werden.

Aufgaben, bei denen der Vergleich zweier Prozentwerte im Zentrum steht, wie in Abbildung 3.44 zu sehen, heben diese Grundvorstellung hervor.

3.19

Nuran gibt von den 20 € Taschengeld 8 € für Süßigkeiten aus. Tom gibt von den 25 € Taschengeld 9 € für Süßigkeiten aus.

- 1) Wer von den beiden gibt verhältnismäßig mehr Geld für Süßigkeiten aus?
- 2) Wie viel Prozent des Taschengeldes gibt Nuran für Süßigkeiten aus?
- 3) Wie viel Prozent des Taschengeldes gibt Tom für Süßigkeiten aus?

Abbildung 3.44: Prozente als Verhältnisse (siehe Salzger et al., 2015, S. 91)

3.6 Grundvorstellungen zur Prozentrechnung

Laut Hafner (2012, S. 37) kann die Prozentrechnung als eigenständiges Themengebiet der Mathematik gesehen werden. Sie kann aber auch als eine Anwendung der Bruchrechnung oder als ein Teilgebiet der Proportionalität aufgefasst werden.

Von-Hundert-Vorstellung

Diese Grundvorstellung von Prozentsätzen ist mit der Verhältnisvorstellung von Brüchen verbunden.

„Diese Vorstellung basiert auf der ursprünglichen Wortbedeutung des %-Zeichens im Sinne von pro/je hundert. Demnach stellt man sich vor, eine Grundmenge G bestehe aus lauter Teilen zu je 100 Einheiten. Unter dem relativen Anteil $p\%$ von G versteht man p Einheiten von jedem dieser 100er-Päckchen.“ (siehe Hafner, 2012, S. 37).

Die folgende Aufgabe inklusive der ikonischen Darstellung 3.45, in der jeweils die ersten 42 Bücher einer Reihe in rotem Einband dargestellt sind, kann genutzt werden, um die Von-Hundert-Vorstellung sichtbar zu machen.

Aufgabe: In einem Bücherregal stehen 600 Bücher in 6 Reihen zu je 100 Büchern. 42% der Bücher haben einen roten Einband. Berechne die Anzahl der Bücher mit rotem Einband!

Gudladt (2021, S. 28) sieht bei dieser Grundvorstellung die Gefahr, der Überbetonung der 100er Einheiten. So könnte hier die Vorstellung entstehen, dass 42% immer 42 Einheiten sind. Also, dass 42% von 1762 Büchern als 42 Bücher (Einheiten) interpretiert werden.

Hundertstel- oder Prozentoperator-Vorstellung

Bei der Hundertstel-Vorstellung werden $p\%$ als der Bruch $\frac{p}{100}$ interpretiert.

3.6 Grundvorstellungen zur Prozentrechnung

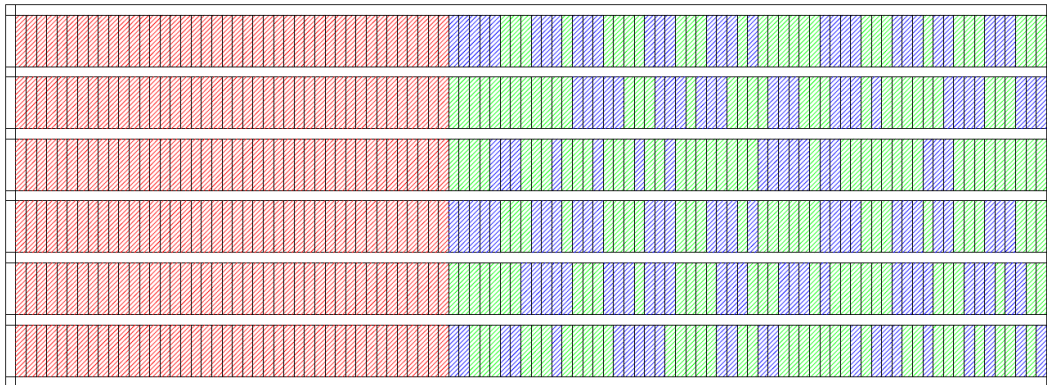


Abbildung 3.45: Ikonische Darstellung der Von-Hundert-Vorstellung (eigene Darstellung)

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ (ein Hundertstel)}$$

Für die Prozentoperator-Vorstellung fassen wir $\frac{p}{100}$ als multiplikativen Operator auf und beziehen ihn auf die Grundmenge G . Somit entspricht der Prozentwert dem $\frac{p}{100}$ -fachen des Grundwerts G (Hafner, 2012, S. 38).

335 Vervollständige die „Umrechnungstabelle“!

	Beispiel	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Prozentangabe	1%		$12\frac{1}{2}\%$				120%	
Bruch	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{5}$			$1\frac{1}{2}$
Dezimalzahl	0,01			0,15		0,7		

Abbildung 3.46: Prozente als Hundertstel (siehe Humenberger et al., 2018, S. 79)

Gut hervorgehoben werden diese Vorstellungen durch Aufgaben, welche Prozente in Brüche umrechnen lassen (Hundertstel-Vorstellung), wie in Abbildung 3.46 ersichtlich oder Aufgaben, in denen der Prozentwert berechnet werden soll (Prozentoperator-Vorstellung), wie in Abbildung 3.47 ersichtlich.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

942 Berechne die Prozentwerte.

G \ p %	1 %	10 %	2 %	20 %	3 %	30 %	4 %	40 %	50 %
1280									
128									
340									

Abbildung 3.47: Prozentoperator (siehe Bortenschlager et al., 2021, S. 199)

Bedarfseinheitenvorstellung oder quasikardinale Vorstellung

Diese Grundvorstellung beruht laut Pöhler (2018, S. 19) auf Proportionalität. Sie bildet einen Spezialfall der Proportionalitätsrechnung ab und lässt sich der Lösungsstrategie des Dreisatzes zuordnen (Gudladt, 2021, S. 29).

Es wird bei der Bedarfseinheitenvorstellung der fiktive Größenbereich, die Menge der positiven rationalen Zahlen, mit der Benennung % geschaffen. Nun entspricht die Größe 100% dem Grundwert G und 1% entspricht immer dem hundertsten Teil von G , dieser hundertste Teil entspricht der Bedarfseinheit. Das Siebenfache dieses Anteils entspricht dann 7%. Dadurch lassen sich eindeutige Zuordnungen in diesem Größenbereich herstellen.

Im Unterschied zur von-Hundert-Vorstellung wird G hier in 100 gleich große Teile zerlegt, auch wenn diese in der realen Sachsituation, nicht möglich ist (Hafner, 2012, S. 38).

Eine solche Situation ist in der abgebildeten Aufgabe 3.48 visualisiert. Um die Aussage zu widerlegen, können mehrere Rechenwege gewählt werden. Will man 55% von 871 Besuchern ausrechnen, so kann man den Grundwert durch 100 teilen und erhält $1\% \hat{=} 8,71$. Um auf 55% zu gelangen werden nun 8,71 mit 55 multipliziert und man erhält 479,05 Besucher. Um zur Lösung zu gelangen, wurden die Besucherzahlen in Teile zerlegt, obwohl dies in der realen Sachsituation nicht möglich ist, da die Besucherzahl nur eine natürliche Zahl sein kann. Es kann nicht nur ein Teil eines Besuchers bei der Vorführung anwesend gewesen sein.

Es ist dies somit die Grundvorstellung, mit der bei der Berechnung des Prozentsat-

3.6 Grundvorstellungen zur Prozentrechnung

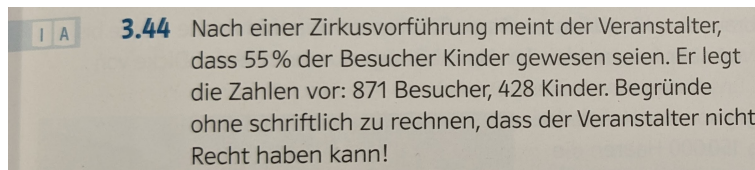


Abbildung 3.48: Gleich große Teile für die Bedarfseinheitenvorstellung, welche in der realen Sachsituation nicht möglich sind (siehe Salzger et al., 2022a, S. 91)

zes meist hantiert wird. Somit heben Aufgaben, welche den Prozentwert berechnen lassen und hierbei den Weg über 1% des Grundwerts nehmen, die Bedarfseinheitenvorstellung hervor. Noch expliziter tritt diese Grundvorstellung bei der Berechnung über eine Schlussrechnung hervor, wie in Abbildung 3.49 aufgezeigt wird. Sie wird natürlich durch ebensolche Aufgaben, die genau diese Art der Berechnung fordern, wie in Abbildung 3.50 visualisiert, gefördert.

Der Prozentwert und der Prozentsatz stehen im direkten Verhältnis zueinander. Wir können die Lösung mit einer Tabelle bzw. einer Schlussrechnung finden. Schreibe dazu die Angaben aus dem Text in die erste Zeile der Tabelle:

Prozent	Preis in €
100	5,10
1	0,051
30	1,53

100 % entspricht dem **Grundwert**, also 5,10 Euro.
 1 % entspricht dem hundertsten Teil des Grundwertes, also 0,051 Euro.
 30 % entsprechen dann dem 30-fachen von 0,051.

Abbildung 3.49: Bedarfseinheitenvorstellung: Hervorhebung durch Schlussrechnung (siehe Humenberger et al., 2018, S. 82)

344 Berechne 5 % des gegebenen Wertes, indem du **1)** die Schlussrechnung, **2)** die Formel verwendest!

a) 100 €	c) 105 €	e) 50 kg	g) 80 dag	i) 250 kg
b) 300 €	d) 248 €	f) 5 kg	h) 10 dag	j) 30 t

Abbildung 3.50: Aufgabe zur Bedarfseinheitenvorstellung (siehe Humenberger et al., 2018, S. 842)

Laut Gudladt (2021) hat diese Vorstellung die Schwäche, dass bei Aufgaben zu einem vermehrten oder verminderten Grundwert, die Schüler*innen die verschie-

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

denen Grundwerte nicht richtig identifizieren können und dadurch den falschen Anteil berechnen.

3.7 Grundvorstellungen zur Algebra

Das mathematische Gebiet der Algebra ist im Lehrplan der AHS Unterstufe vor allem im Kompetenzbereich der Variablen und Funktionen aufzufinden.

Laut BMBWF (2023a, S. 77) sollen Schüler*innen der ersten Klasse der AHS Unterstufe einfache Terme, Gleichungen und Formeln aufstellen und interpretieren können, sowie die Lösungen für einfache Gleichungen finden können.

In der zweiten Klasse der AHS Unterstufe sollen Schüler*innen „Terme, Gleichungen und Formeln auch mit Brüchen und im Zusammenhang mit Proportionalitäten und Prozentsätzen aufstellen und interpretieren“ und „lineare Gleichungen durch Umkehren von Rechenoperationen lösen und Formeln umformen.“ (siehe BMBWF, 2023a, S. 78)

Schüler*innen sollen in der dritten Klasse der AHS Unterstufe „Terme, Gleichungen und Formeln auch im Zusammenhang mit Verhältnissen bzw. Proportionen aufstellen und interpretieren, Terme umformen, auch unter Anwendung der Potenzdarstellung mit positiven ganzzahligen Exponenten, Gleichungen und Formeln umformen“ und „Gleichungen durch Äquivalenzumformungen lösen“ können, sowie „Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren und mit den zugehörigen Modellen arbeiten.“ (siehe BMBWF, 2023a, S. 78)

In der vierten Klasse der AHS Unterstufe sollen Schüler*innen laut BMBWF (2023a, S. 78) „mit Termen, Gleichungen mit einer Variablen und Formeln in vielfältigen Situationen arbeiten, unterschiedliche Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge nutzen und Darstellungsformen wechseln, mit linearen Funktionen arbeiten“ und „lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen und lösen.“

3.7.1 Grundvorstellungen zum Variablenbegriff

Variablen als Unbestimmte bzw. allgemeine Zahl

„Die Variable ist eine allgemeine Zahl, deren Wert nicht gegeben ist bzw. zunächst nicht von Interesse ist.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 35)

Im Wortsinn wird durch diese Grundvorstellung auf den Begriff der Unbestimmten verwiesen. Dieser Begriff erlaubt die Formulierung von mathematischen Gesetzen und Formeln in ihrer allgemeinen Form (Weigand et al., 2022, S. 35).

4.43 Ordne jedem Satz einen passenden Term zu! Gib jeweils an, was die Variablen bedeuten!

	Term	Bedeutung der Variablen
Bertas Schulweg ist doppelt so lang wie Esras.		
Drei Leute teilen sich eine Pizza.		
Sabine bekommt halb so viel Taschengeld wie Klaus.		
Bruno ist drei Jahre älter als Jonas.		
Bei Regen kommen nur ein Viertel der sonst üblichen Besucher in den Park.		
Mit einem Flaschenzug kann man die dreifache Masse heben.		
Das Boot kostet jetzt 20 € weniger als die Hälfte seines alten Preises.		

$3 \cdot p$ $T : 4$ $X : 3$ $a : 2$ $y : 2 - 20$ $n + 3$ $t \cdot 2$

Abbildung 3.51: Variablen als Unbestimmte bzw. allgemeine Zahl (Salzger et al., 2015, S. 119)

Diese Grundvorstellung wird bei Aufgaben welche die Schüler*innen dazu anhalten den Sinn der dargestellten Terme zu ergründen, hervorgehoben, wie in Abbildung 3.51 zu sehen ist.

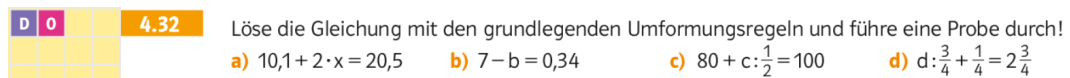
Variablen als unbekannte Zahl

„Die Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl, deren Wert nicht bekannt ist, aber prinzipiell bestimmt werden kann, etwa durch regelgeleitete Umformungen.“ (siehe

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Weigand et al., 2022, S. 35)

Diese Grundvorstellung ist wohl die am meisten verwendete in der Schulmathematik. Sehr viele Aufgaben zielen darauf ab, den Wert für „ x “ zu finden, wie in Abbildung 3.52 zu erkennen ist.



Löse die Gleichung mit den grundlegenden Umformungsregeln und führe eine Probe durch!

a) $10,1 + 2 \cdot x = 20,5$ b) $7 - b = 0,34$ c) $80 + c : \frac{1}{2} = 100$ d) $d : \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2 \frac{3}{4}$

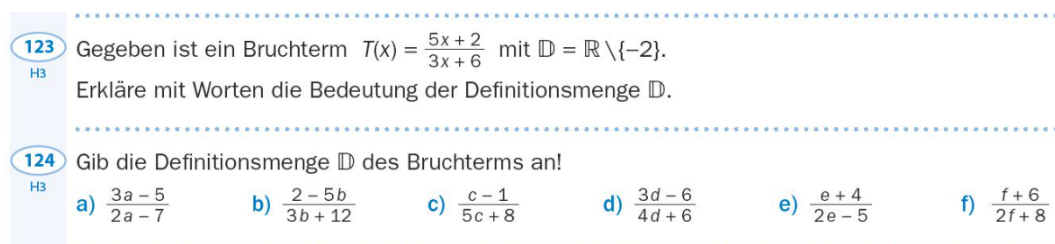
Abbildung 3.52: Variablen als unbekannte Zahl (Salzger et al., 2015, S. 117)

Variablen als Veränderliche

„Die Variable ist eine Zahl oder Größe, die verschiedene Werte aus einem festgelegten Bereich annehmen kann, also veränderlich ist.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 36)

Bei dieser Grundvorstellung kann die Veränderliche in zwei Aspekten beschrieben werden. Einerseits **simultan**, wenn alle Zahlen aus einem Bereich gleichzeitig gedacht werden. Andererseits **zeitlich veränderlich**, wenn alle Zahlen aus einem Bereich in zeitlicher Abfolge repräsentiert gedacht werden. (Malle und Wittmann, 1993, S. 81)

Bei dem ersten Aspekt ist vor allem an Aufgaben zu denken, die eine Definitionsmenge ermitteln lassen, wie in Abbildung 3.53 visualisiert.



123 H3 Gegeben ist ein Bruchterm $T(x) = \frac{5x+2}{3x+6}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Erkläre mit Worten die Bedeutung der Definitionsmenge $\mathbb{D}$.

124 H3 Gib die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ des Bruchterms an!

a) $\frac{3a-5}{2a-7}$ b) $\frac{2-5b}{3b+12}$ c) $\frac{c-1}{5c+8}$ d) $\frac{3d-6}{4d+6}$ e) $\frac{e+4}{2e-5}$ f) $\frac{f+6}{2f+8}$

Abbildung 3.53: Simultanaspekt der Variablen als Veränderliche (Dorfmayr et al., 2021, S. 33)

Bei dem zweiten Aspekt kann an Aufgaben gedacht werden, die eine Größe in Abhängigkeit zu einer anderen Größe setzen. Eine solche Aufgabe ist in Abbildung 3.54 zu sehen.

624 Ein Fahrtendienst verrechnet für eine Fahrt als Grundpreis 4,20€. Jede gefahrene Minute kostet 2,40€.

H1 | H4

- (1) Erstelle eine Tabelle für die Fahrpreise für eine 1, 10, 20, 30 und 60 Minuten lange Fahrt.
- (2) Stelle den Zusammenhang zwischen dem Fahrpreis und der Fahrzeit grafisch dar.
- (3) Der Fahrpreis F (in €) ist eine Funktion der Fahrzeit t (in Minuten). Gib ihre Termdarstellung an.
- (4) Begründe, dass der Gesamtpreis linear mit der Zeit zunimmt.

Abbildung 3.54: Veränderlichenaspekt der Variablen als Veränderliche (Dorfmayr et al., 2021, S. 142)

Hier wird der Preis in Abhängigkeit zur Zeit (in Minuten) gesetzt. Hierbei wird nicht nur die Grundvorstellung der Variablen als Veränderliche hervorgehoben, sondern auch Grundvorstellungen zu funktionalen Abhängigkeiten ausgebildet.

3.7.2 Grundvorstellungen zum Termbegriff

Modell-Grundvorstellung

„Ein Term wird als ein Modell für die Strukturierung einer inner- oder außermathematischen Situation angesehen.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 90)

Durch diese Grundvorstellung wird laut Weigand et al. die semantische Seite von Termen betont. Durch den Bezug zu realen Situationen und mathematischen Darstellungen wird die Struktur des Terms in den Vordergrund gestellt. (2022, S. 90)

2.144 Es sollen 9500€ so auf drei Preisträger aufgeteilt werden, dass jeder um ein Drittel weniger erhält als der vorhergehende. Welche Gleichung(en) drückt (drücken) dies korrekt aus? Kreuze an!

☐ $x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = 9500$
☐ $x + \frac{2x}{3} + \frac{4x}{9} = 9500$
☐ $9x + 6x + 4x = 85500$
☐ $3x + 2x + x = 9500$

Abbildung 3.55: Aufgabe zur Modell-Grundvorstellung (Salzger et al., 2017, S. 64)

Wie in Abbildung 3.55 ersichtlich ist, wird diese Grundvorstellung durch Aufgaben hervorgehoben, welche die Struktur der Terme mit dem Kontext in welchem die Aufgabe verankert ist in Zusammenhang setzt.

Bauplan-Grundvorstellung

„Ein Term wird als Bauplan zur strukturierten Darstellung von Rechenoperationen oder zur Berechnung von Termwerten angesehen.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 92)

Bei dieser Grundvorstellung wird, laut Weigand et al. (2022, S. 91) der Term als Berechnungsvorschrift oder als hierarchisch gegliedertes Rechenschema gesehen. Es wird die syntaktische Seite von Termen betont.

Diese syntaktische Sicht ist auf das Ziel ausgerichtet Terme zu vereinfachen. Für das dafür benötigte Umformen, ist das Erkennen der Struktur und die Auswahl der benötigten Umformungsschritte wichtig (Weigand et al., 2022, S. 97).

Grobstruktur und Feinstruktur von Termen

2.01 Gegeben sind vier verschiedene Terme. Ermittelt deren Grobstruktur, indem ihr untersucht, ob es sich um eine Summe, eine Differenz, ein Produkt oder einen Quotienten handelt, notiert eure Entscheidung unter dem jeweiligen Term und begründet sie!

$(3a + 6b) \cdot (2c - 8d)$ $9 - 8x \cdot 2y$ $\frac{6k-7m}{5s+10t}$ $5 \cdot p + \frac{6}{q}$

Ein Term kann eine Zahl, eine Variable oder eine durch mehrere Rechenoperationen verbundene Struktur bestehend aus Zahlen und/oder Variablen sein. Aufgrund der Vorrangregeln wissen wir bereits, dass nicht alle Rechenoperationen gleichrangig zu betrachten sind. Außerdem kann der Einsatz von Klammern eine weitere Struktur in einem Term schaffen. Jene Rechenoperation, die **zuletzt** durchgeführt wird, gibt die Grobstruktur an.

Für Terme A und B gilt:	A + B ist eine Summe .	A · B ist ein Produkt .
	A – B ist eine Differenz .	$\frac{A}{B}$ ist ein Quotient .

Abbildung 3.56: Grob- und Feinstruktur von Termen (Salzger et al., 2017, S. 40)

Auf diese Grundvorstellung kann hingearbeitet werden, indem Terme in Grob- und Feinstrukturen aufgeteilt werden, wie in Abbildung 3.56 erkennbar ist.

3.7.3 Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff

Formale Definitionen werden in ihrer Wirksamkeit für das Verständnis des Funktionsbegriffs häufig überschätzt. Vielmehr sind die mit dem Funktionsbegriff einher-

gehenden Vorstellungen entscheidend für das Verstehen dieses Begriffes. (Weigand et al., 2022, S. 144)

Zuordnungsvorstellung

„Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Zahl oder Größe genau einen Wert einer zweiten Zahl oder Größe zu.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 144)

Oder anders ausgedrückt: Jedem Element einer Definitionsmenge wird durch die Funktion genau ein Element der Zielmenge zugeordnet. Laut Weigand et al. (2022, S. 144) ist dies die grundlegende Vorstellung zum Funktionsbegriff.

Sie wird an Aufgaben sichtbar, die diese eindeutige Zuordnung selbst erarbeiten lassen, wie in Abbildung 3.57 aufgezeigt wird.

4.01

Stapelt einen Turm aus Münzen und geht dabei so vor, dass am Beginn des Experiments noch keine Münze hingelegt worden ist und danach alle zehn Sekunden die aktuelle Höhe des Turms in der nachstehenden Tabelle notiert wird! Bringt zu diesem Zweck daneben ein Lineal oder ein Maßband an!

Zeit t in Sekunden	Höhe h in Millimeter
0	
10	
20	
30	
40	
50	

Jedem Zeitpunkt t kann nur genau eine Höhe h zugeordnet werden.

Abbildung 3.57: Aufgabe zur Erarbeitung der Zuordnungsvorstellung zum Funktionsbegriff (Salzger et al., 2017, S. 144)

Der funktionale Zusammenhang wird bei der Zuordnungsvorstellung punktuell betrachtet. Es stehen die Wertepaare $(x | y)$ im Fokus. Im Kontext einer Wertetabelle, wird bei der Zuordnungsvorstellung, vor allem in horizontaler Richtung gelesen. (Weigand et al., S. 145)

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Kovariationsvorstellung

„Eine Funktion erfasst, wie sich Änderungen einer Zahl oder Größe auf die Änderungen der abhängigen Zahl oder Größe auswirken.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 144)

Hier wird das „Miteinander-Variieren“ zweier Variablen oder Größen ausgedrückt. Wir betrachten hier, im Gegensatz zur Zuordnungsvorstellung, einen lokalen Bereich der Definitions- bzw. Wertemenge. Hier wird das Augenmerk auf die Änderungen der Variablen x und y gelegt. Im Kontext der Wertetabelle bedeutet dies, dass diese bei der Kovariationsvorstellung vor allem in vertikaler Richtung betrachtet wird. (Weigand et al., S. 145)

Eine graphische Darstellung des Unterschiedes der Zuordnungs- und der Kovariationsvorstellung zum Funktionsbegriff, im Kontext der Wertetabelle, ist in Abbildung 3.58 zu sehen.

Im Kapitel zu den Grundlagen wurde die Kovariationsvorstellung anhand eines Graphen in der Abbildung 2.1 visualisiert.

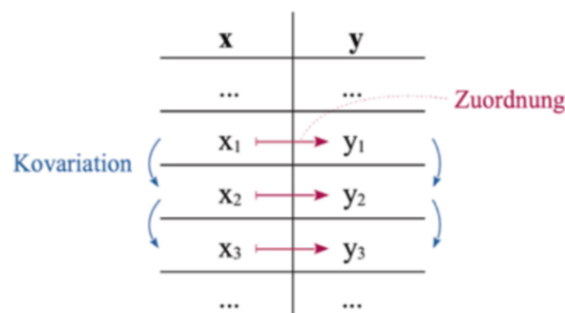


Abbildung 3.58: Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung im Kontext der Wertetabelle (Weigand et al., 2022, S. 145)

Die Grundvorstellung der Kovariation zum Funktionsbegriff, wird durch Aufgaben wie in Abbildung 3.59 aufgezeigt, bei denen eine Größe verändert wird und die Schüler*innen die Änderung der Abhängigen bestimmen sollen.

3.7 Grundvorstellungen zur Algebra

550
H3 Für das Volumen V einer Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h gilt folgende Formel: $V = \frac{G \cdot h}{3}$
Beschreibe, wie sich das Volumen verändert, wenn sich
a) G verdoppelt, b) h halbiert, c) G verdoppelt und h halbiert, d) G und h verdoppeln.

551
H3 Für die Oberfläche O eines Würfels mit Kantenlänge a gilt: $O(a) = 6 \cdot a^2$
Beschreibe, wie sich die Oberfläche verändert, wenn sich die Kantenlänge a
a) verdoppelt, b) verdreifacht, c) verzehnfacht, d) ver- n -facht, e) um 10% vergrößert.

552
H1 | H3 Das Volumen V eines Würfels ist abhängig von der Länge der Seitenkante a .
(1) Lege eine passende Funktion fest.
(2) Ermittle, wie sich das Volumen verändert, wenn sich die Länge der Seitenkante a) verdoppelt, b) verdreifacht, c) ver- n -facht.
(3) Überprüfe die Richtigkeit deiner Berechnungen grafisch anhand der nebenstehenden Skizze.

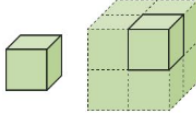


Abbildung 3.59: Aufgaben zur Zuordnungsvorstellung des Funktionsbegriffs (Dorfmayr et al., 2021, S. 123)

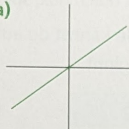
Objektvorstellung

„Eine Funktion ist ein Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.“
(siehe Weigand et al., 2022, S. 145)

Erst die Objektvorstellung erlaubt es Eigenschaften von Funktionen zu untersuchen. Durch die Zuschreibung dieser Eigenschaften wie Monotonie, Stetigkeit, usw. können Funktionen kategorisiert und unterschieden werden. Dadurch entsteht die Aufteilung in lineare, quadratische oder trigonometrische Funktionen. (Weigand et al., 2022, S. 145-146)

413 Haben alle den Funktionsbegriff richtig verstanden? Kreuze Richtiges an und bessere Falsches aus:

a) ☐ Das ist eine fallende Gerade.
b) ☐ Je kleiner das „ k “, desto steiler ist die Gerade.
c) ☐ Diese Gerade geht durch den Nullpunkt.
d) ☐ „Linear“ bedeutet, der Graph ist eine Gerade.
e) ☐ Wenn das „ k “ negativ ist, ist die Gerade fallend.

a) 

c) 

Abbildung 3.60: Aufgabe zur Objektvorstellung des Funktionsbegriffs 1 (Fitzka, 2019, S. 95)

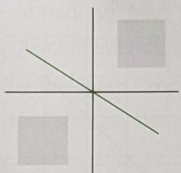
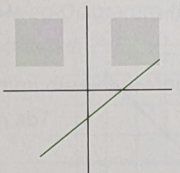
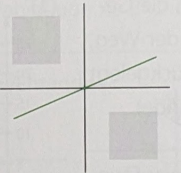
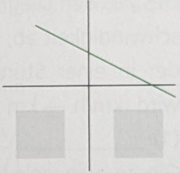
3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Zudem ist die Objektvorstellung erforderlich um mit Funktionen Operationen auszuführen. Das heißt, erst durch sie ist es möglich Funktionen zu vervielfachen, zu addieren, zu multiplizieren oder zu verketten. (Weigand et al., 2022, S. 146)

Die Objektvorstellung wird durch Aufgaben in Darstellung gebracht, welche einem Funktionsgraphen verschiedene Eigenschaften zuweisen lassen. Solche Aufgaben sind in den Abbildungen 3.60 und 3.61 zu sehen.

428 Stelle fest, um welche Funktion es sich handelt. Schreibe jeweils zwei Begriffe dazu:

Homogen **H** = durch den Nullpunkt Steigend **St**
Inhomogen **I** = nicht durch den Nullpunkt Fallend **F**

a)  b)  c)  d) 

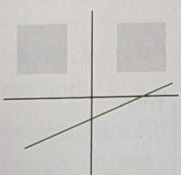
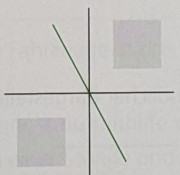
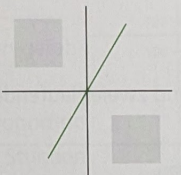
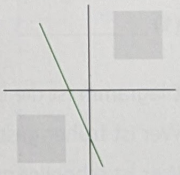
e)  f)  g)  h) 

Abbildung 3.61: Aufgabe zur Objektvorstellung des Funktionsbegriffs 2 (Fitzka, 2019, S. 99)

Aufgaben welche Aussagen zu Funktionen auf ihre Richtigkeit beurteilen lassen, wie in Abbildung 3.62 illustriert, fördern ebenso die Objektvorstellung des Funktionsbegriffs.

3.7.4 Grundvorstellungen zu Gleichungen

Bei den Gleichungen sind die unterschiedlichen Grundvorstellungen durch die operationale und die relationale Bedeutung des Gleichheitszeichens bedingt. Hier ist der Übergang von der arithmetisch geprägten Mathematik der Primarstufe zur

3.7 Grundvorstellungen zur Algebra

430	Beurteile die Aussagen auf ihre Richtigkeit und kreuze an:	richtig	falsch
a)	Steigende Geraden haben eine positive Steigung k.	☐	☐
b)	Homogene lineare Funktionen schneiden die x-Achse im Nullpunkt.	☐	☐
c)	Inhomogene lineare Funktionen sind immer steigend.	☐	☐
d)	Bei fallenden Geraden ist die Steigung negativ.	☐	☐
e)	Der Abstand d wird auf der x-Achse eingezeichnet.	☐	☐
f)	Lineare Funktionen werden immer durch eine Gerade dargestellt.	☐	☐

Abbildung 3.62: Aufgabe zur Objektvorstellung des Funktionsbegriffs 3 (Fitzka, 2019, S. 99)

Algebra der Sekundarstufe abgebildet. Weiters bilden die folgenden Grundvorstellungen ein fortgeschrittenes Verständnis von Gleichungen ab. (Weigand et al., 2022, S. 256-257)

Operationale Grundvorstellung

„Eine Gleichung wird als Ausdruck einer Berechnung oder Umformung verstanden. Konstituierend hierfür ist das Gleichheitszeichen als Operationszeichen, das eine Leserichtung im Sinne eines „Ergibt-Zeichens“ anzeigt.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 257)

Bei der arithmetischen Berechnung kann diese Grundvorstellung durch Verbalisierungen wie „5 mal 4 ergibt 20“ für die Gleichung

$$5 \cdot 4 = 20$$

zum Ausdruck gebracht werden. (Weigand et al., 2022, S. 257)

Im Gebiet der Algebra in der Sekundarstufe zeigt sich die operationale Grundvorstellung beim Zusammenfassen oder bei der Termumformung.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Bei den Ausdrücken

$$2x + 3x - x = 4x$$

und

$$(c + t) \cdot (c - t) = c^2 - t^2$$

kann das Gleichheitszeichen als „ergibt“ in beide Richtungen gelesen werden. (Weigand et al., 2022, S. 257)

Um die operationale Grundvorstellung aufzeigen zu können, eignen sich einfache Rechenaufgaben wie in Abbildung 3.63 dargestellt.

RK 718	Rechne.			
a) $4,5 + 3,2 =$	c) $0,27 + 0,24 =$	e) $10,0 - 8,5 =$	g) $7,8 - 0,3 =$	
b) $1,6 + 5,9 =$	d) $6,3 + 0,2 =$	f) $0,52 - 0,43 =$	h) $9,1 - 6,5 =$	

RK 719	Rechne.			
a) $600 \cdot 4 =$	c) $9\,000 \cdot 3 =$	e) $400 : 8 =$	g) $360 : 9 =$	
b) $800 \cdot 7 =$	d) $2\,000 \cdot 8 =$	f) $1\,500 : 5 =$	h) $12\,000 : 4 =$	

RK 720	Rechne.			
a) $8 \cdot 3,1 =$	c) $7 \cdot 1,2 =$	e) $3,5 : 7 =$	g) $6,3 : 9 =$	
b) $4 \cdot 2,5 =$	d) $5 \cdot 5,5 =$	f) $4,2 : 6 =$	h) $3,2 : 4 =$	

Abbildung 3.63: Aufgabe zur operationalen Grundvorstellung zur Gleichung 1 (Wohlhart und Scharnreitner, 2022, S. 135)

Auf dem Niveau der Sekundarstufe bei Aufgaben zur Vereinfachung von Termen bzw. bei Termumformungen, sind klarerweise entsprechende Aufgaben, mit dem verbalen Hinweis, dass die beiden Terme den selben „Wert“ haben, vorzuziehen. Eine zusätzliche Möglichkeit auf das Gleichheitszeichen einzugehen, ist es, den ursprünglichen Term und den vereinfachten Term auswerten zu lassen, wie in Abbildung 3.64 zu sehen ist.

84 Vereinfache den Term und werte ihn für $a = -3$ aus.

H2

a) $T(a) = 7a - 13 + 2 + 6a - a + 9$ b) $T(a) = 21 + 18a - 23a - 16 + 14a - 5$

c) $T(a) = 9 - 3a + 4 + 8a - 2$ d) $T(a) = 4a + (3 - 2a) - a - 9$

e) $T(a) = 3 + (7a - 9 + 3a) + 5a - 1$ f) $T(a) = 18a + 24 - (3a - 18 + 12a)$

g) $T(a) = 13a - (8 + 3a - 2) + 4a$ h) $T(a) = 4 - (5a - 5 + a - 4) + a - 12$

Abbildung 3.64: Aufgabe zur operationalen Grundvorstellung zur Gleichung 2 (Dorfmayr et al., 2021, S. 27)

Relationale Grundvorstellung

„Eine Gleichung wird als Anlass verstanden, Zahlen oder Terme zu ermitteln, für die beide Seiten denselben Wert besitzen oder äquivalente Terme sind. Das Gleichheitszeichen wird dabei als Relationszeichen angesehen. Die Variable wird als Unbekannte verstanden.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 257)

Laut Weigand et al. (2022, S. 257) ist die ikonische Darstellung dieser Grundvorstellung das Modell der Balkenwaage in welcher jeder Term als eine Kombination von Gewichten repräsentiert wird.

Die Darstellung einer Gleichung mittels Balkenwaage ist in Abbildung 3.65 zu erkennen und natürlich sind ebensolche Aufgaben gut geeignet um die relationale Grundvorstellung hervorzuheben.

M, DI 984 Stelle für die Waage eine passende Gleichung auf und löse sie.

a) 

c) 

b) 

d) 

Bei d) kannst du zuerst überlegen, ob du links und rechts gleich viele Vierecke wegnehmen kannst.

Abbildung 3.65: Prototypische Darstellung der relationalen Grundvorstellung inkl. passender Aufgabenstellung (Bortenschlager et al., 2023a, S. 211)

Funktionale Grundvorstellung

„Eine Gleichung wird interpretiert als Ausdruck eines Vergleichs zwischen zwei Termen, die als Funktionsterme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ aufgefasst werden. Auch hier

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

wird das Gleichheitszeichen relational verstanden, aber die Grundvorstellung der Variablen ist hier die der Veränderlichen.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 258)

Im Kontext zweier Funktionen mit $y = T_1(x)$ und $y = T_2(x)$ wird bei der funktionalen Grundvorstellung nach dem Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen durch das Lösen der entsprechenden Gleichung gesucht.

Somit lässt sich diese Grundvorstellung auf Gleichungssysteme mit zwei Variablen übertragen. In diesem Sinne wird hier mit jeder Gleichung eine Funktion definiert und zu einem bestimmten Argument der gemeinsame Funktionswert der beiden Gleichungen bestimmt. (Weigand et al., 2022, S. 258)

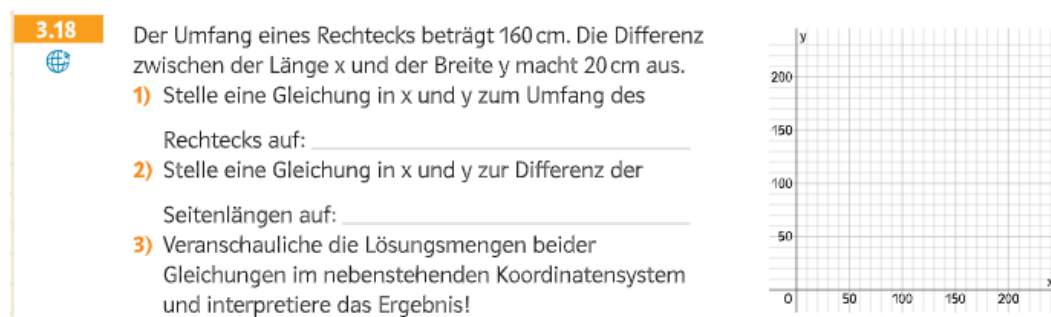


Abbildung 3.66: Aufgabe zur funktionalen Grundvorstellung zu Gleichungen (Salzger et al., 2017, S. 80)

Wie in Abbildung 3.66 aufgezeigt wird, sind Aufgaben, bei denen zwei Gleichungen aufgestellt und als Funktionen mit einem gemeinsamen Schnittpunkt interpretiert werden, förderlich für die funktionale Grundvorstellung bei Gleichungen.

Ein zusätzlicher Schritt um die Grundvorstellung hervorzuheben wäre die Lösung des linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen mittels der Komparationsmethode, da hier die beiden Gleichungen über eine der Variablen gleichgesetzt werden und dadurch die laut Weigand et al. (2022, S. 258) beschriebene Situation, zur funktionalen Grundvorstellung, herbeigeführt wird.

Objekt-Grundvorstellung

„Eine Gleichung wird als ein bestimmtes Objekt angesehen, das charakteristische Eigenschaften hat, wie etwa Anzahl möglicher Lösungen, Definitionsbereich oder

3.8 Grundvorstellungen zu Potenzen

Lösungsalgorithmen. Auf diese Weise können verschiedene Typen von Gleichungen unterschieden werden.“ (siehe Weigand et al., 2022, S. 258)

In der Sekundarstufe I kann diese Vorstellung durch Aufgaben hervorgehoben werden die, wie in Abbildung 3.67 visualisiert, Definitionsmenge und die Lösungsmenge für Bruchgleichungen bestimmt werden.

212
H2

Gib die passende Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Bruchgleichung an!

a) $\frac{2x}{x-1} = 4 - \frac{2x-4}{x+1}$	$\mathbb{D} =$ _____	$\mathbb{L} =$ _____
b) $-\frac{1}{x+3} = \frac{21}{x^2-9} - \frac{2}{x-3}$	$\mathbb{D} =$ _____	$\mathbb{L} =$ _____
c) $\frac{1}{x-4} - \frac{3}{x^2-16} = \frac{3}{3x-12}$	$\mathbb{D} =$ _____	$\mathbb{L} =$ _____
d) $\frac{3}{(2x-1)^2} - \frac{6x-2}{4x^2-1} = -\frac{6}{4x-2}$	$\mathbb{D} =$ _____	$\mathbb{L} =$ _____

Abbildung 3.67: Aufgabe zur Objekt-Grundvorstellung von Gleichungen (Dorfmayr et al., 2021, S. 47)

3.8 Grundvorstellungen zu Potenzen

Die Potenzdarstellung findet in der dritten Klasse der AHS Unterstufe Einzug in den Lehrplan. Sie gehört zum Kompetenzbereich der Variablen und Funktionen, wobei Schüler*innen unter Anwendung der Potenzdarstellung mit positiven ganzzahligen Exponenten Terme umformen können sollen. (BMBWF, 2023a, S. 78)

Laut Barzel et al. (2021, S. 197) birgt die Potenzschreibweise und das Rechnen mit ebendieser, große Schwierigkeiten für Lernende. Als Ursache hierfür wird genannt, dass die Regeln und Gesetze zum Umgang mit Potenzen nicht verstanden und nachvollzogen sind. Besonders die Bedeutung des Exponenten wird nicht verstanden und somit kann die Struktur von Rechenausdrücken und algebraischen Termen, welche Potenzen enthalten, nicht verstanden werden.

Dies unterstreicht, wie wichtig der Aufbau von angemessenen Grundvorstellungen für den Umgang mit Potenzen ist. (Barzel et al., 2021, S. 197)

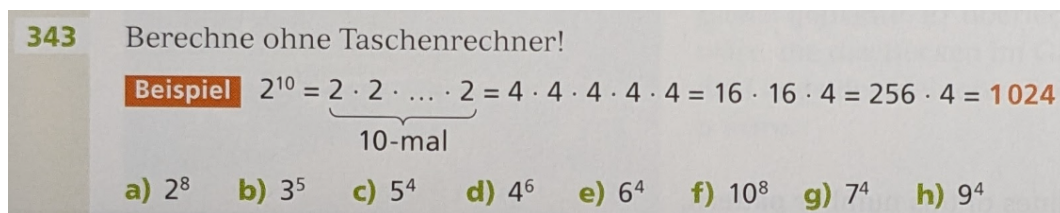
3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Laut Barzel et al. (2021, S. 197) lassen sich zwei wesentliche Grundvorstellungen unterscheiden. Beide Vorstellungen können hierbei dynamisch als Prozess oder statisch als Produkt betrachtet werden.

Potenz als wiederholte Multiplikation mit demselben Faktor

Bei der prozessbezogenen Betrachtung dieser Grundvorstellung wird a^n als wiederholte „Ver- a -fachung“ verstanden. Die „Ver- a -fachung“ von a wird hierbei $n - 1$ -mal vollzogen. (Barzel et al., 2021, S. 198)

Durch Aufgaben welche sich, wie in Abbildung 3.68 ersichtlich, auf den Prozess des wiederholten Multiplizierens, den dynamischen Prozess, konzentrieren, wird diese Grundvorstellung hervorgehoben.



343 Berechne ohne Taschenrechner!

Beispiel $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 16 \cdot 4 = 256 \cdot 4 = 1024$
10-mal

a) 2^8 **b)** 3^5 **c)** 5^4 **d)** 4^6 **e)** 6^4 **f)** 10^8 **g)** 7^4 **h)** 9^4

Abbildung 3.68: Aufgabe zur prozessbezogenen Betrachtung der Potenz als wiederholte Multiplikation (Reichel et al., 2009, S. 75)

Bei der produktbezogenen Betrachtung dieser Grundvorstellung wird a^n als neues mathematisches Objekt wahrgenommen. Es ist sozusagen das Produkt, welches durch das wiederholte Multiplizieren mit demselben Faktor entstanden ist.

Für das Aufzeigen dieser Grundvorstellung im produktbezogenen Kontext sind Aufgaben, welche die Potenzschreibweise forcieren, wie in Abbildung 3.69 zu sehen, oder Aufgaben zur Gleitkommadarstellung, wie in Abbildung 3.70 illustriert, hilfreich.

3.8 Grundvorstellungen zu Potenzen

342 Gib in der Potenzschreibweise an!

Beispiel $7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7 = 7^4 \cdot 9^3$

a) $11 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 11 =$ d) $e \cdot f \cdot f \cdot e \cdot f \cdot e \cdot e \cdot f \cdot f \cdot f =$
b) $(-8) \cdot 7 \cdot 7 \cdot (-8) \cdot 7 \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) \cdot 7 =$ e) $r \cdot r \cdot s \cdot r \cdot s \cdot t \cdot s \cdot r \cdot s \cdot s \cdot t \cdot r \cdot t \cdot t =$
c) $(-1) \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 5 \cdot (-1) =$ f) $3 \cdot s \cdot s \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot r \cdot r \cdot 5 \cdot s \cdot 3 =$

Abbildung 3.69: Aufgabe zur produktbezogenen Betrachtung der Potenz als wiederholte Multiplikation 1 (Reichel et al., 2009, S. 75)

393 Wie lautet die Zahl ausgeschrieben?

a) $7 \cdot 10^6$ b) $12 \cdot 10^4$ c) $578 \cdot 10^2$ d) $4 \cdot 10^{10}$ e) $25 \cdot 10^9$ f) $125 \cdot 10^5$

394 Gib in Potenzschreibweise mit einer möglichst kleinen natürlichen Zahl als Vorzahl an!

Beispiel $5 \text{ km}^2 \text{ in cm}^2$ $5 \text{ km}^2 = 5000000 \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^6 \text{ m}^2$

a) 5 km in m c) 3 kg in g e) $10 \text{ km}^2 \text{ in m}^2$ g) $2 \text{ m}^3 \text{ in dm}^3$
b) $37,2 \text{ km in m}$ d) $2,5 \text{ kg in g}$ f) $0,5 \text{ km}^2 \text{ in m}^2$ h) $5 \text{ m}^3 \text{ in cm}^3$

Abbildung 3.70: Aufgabe zur produktbezogenen Betrachtung der Potenz als wiederholte Multiplikation 2 (Reichel et al., 2009, S. 83)

Kombinatorische Vorstellung der Potenz

„Bei der kombinatorischen Vorstellung beschreibt die Potenz n^k die Anzahl aller möglichen Variationen, k Elemente aus n vorhandenen mit Zurücklegen auszuwählen. (siehe Barzel et al., 2021, S. 197)

Die kombinatorische Vorstellung wird vor allem durch Aufgaben zum Ziehen von Kugeln mit Zurücklegen, wie im nächsten Absatz beschrieben, hervorgehoben.

Aufgabe: In einer Schüssel befinden sich 8 verschiedenfarbige Kugeln. Von diesen werden 5 gezogen, wobei die Kugeln nach dem Ziehen jeweils wieder zurück in die Schüssel gelegt werden. Berechne die Anzahl der möglichen Kombinationen an gezogenen Kugeln!

3.9 Grundvorstellungen zur Stochastik

Im neuen Lehrplan der AHS Unterstufe kommt dem Themenbereich Daten und Zufall größere Bedeutung zu als noch im alten Lehrplan der AHS Unterstufe. Der Fokus liegt hier auf der beschreibenden Statistik, sowie auf dem Wahrscheinlichkeitsbegriff. Zu diesem steht im neuen Lehrplan:

„Der Wahrscheinlichkeitsbegriff wird – ausgehend vom alltäglichen Sprachgebrauch von „wahrscheinlich“ – intuitiv entwickelt und der Zusammenhang von Wahrscheinlichkeiten mit relativen Häufigkeiten bei wiederholbaren Zufallsexperimenten hergestellt.“ (siehe BMBWF, 2023a, S. 75)

Der Themenbereich Daten und Zufall ist von der ersten bis vierten Klasse AHS Unterstufe im neuen Lehrplan verankert.

Die Schüler*innen sollen in der ersten Klasse Daten erheben, ordnen, darstellen und aus unterschiedlichen Darstellungsformen ablesen können, sowie einfache statistische Kennzahlen ermitteln und interpretieren können. (BMBWF, 2023a, S. 77)

In der zweiten Klasse der AHS Unterstufe sollen Schüler*innen relative Häufigkeiten ermitteln, grafisch darstellen und grafische Darstellungen interpretieren können. (BMBWF, 2023a, S. 77)

In der dritten Klasse der AHS Unterstufe sollen die Schüler*innen statistische Darstellungen erstellen und nutzen, sowie Manipulationen in statistischen Darstellungen erkennen können. Des Weiteren sollen Schüler*innen aufbauend auf einem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff Wahrscheinlichkeiten in einfachen Zufallsexperimenten ermitteln, vergleichen und interpretieren können. (BMBWF, 2023a, S. 78)

In der vierten Klasse der AHS Unterstufe sollen Schüler*innen Kreuztabellen erstellen und interpretieren und Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten ermitteln und interpretieren können. (BMBWF, 2023a, S. 78)

Laut Krüger et al. (2015, S. 7) ist das traditionell systematische Vorgehen, in dem zuerst alle benötigten Begriffe und Verfahren eingeführt werden und dann in komplexen Anwendungen Verwendung finden, im Stochastikunterricht selten

anwendbar. Es sollte vorwiegend exemplarisch gearbeitet werden. Wobei hier das verwendete Begriffssystem möglichst minimal und auf zentrale Begriffe beschränkt sein sollte. Hierbei muss die Sicherung grundlegender Kenntnisse und der entsprechenden Vorstellungen immanent erfolgen.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt es häufiger als in anderen Gebieten der Schulmathematik fehlerhafte Primärintuitionen. Weiters ist beim Unterrichten von Stochastik auf die erhöhte Bedeutung verbaler Erläuterungen und Begründungen zu achten. Der Sachkontext der Aufgaben ist in der Stochastik oft besonders wichtig. (Krüger et al., 2015, S. 8)

3.9.1 Grundvorstellungen zur beschreibenden Statistik

Zur beschreibenden Statistik finden sich in der Literatur vor allem Grundbegriffe aber keine Grundvorstellungen. Diese Grundbegriffe sind beispielsweise in Kütting und Sauer (2011), Krüger et al. (2015) und Sill (2014) vermerkt.

Somit ist die beschreibende Statistik auch ein Themengebiet, in dem sich für die Erforschung entsprechender Grundvorstellungen noch Raum bietet.

3.9.2 Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

Laut Malle (n. d. b) gibt es verschiedene Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, welche in diesem Kapitel aufgezählt werden.

Die ebenfalls in Malle (n. d. b) erwähnten Grundvorstellungen zu Zufallsvariablen und ihren Verteilungen sowie zum statistischen Testen und zum Schätzen von Anteilen gehören zum Themengebiet der Sekundarstufe II und werden von mir in dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

Zur Stochastik in der Sekundarstufe II gibt es des Weiteren noch erforschte Grundvorstellungen und Grundverständnisse, zum Beispiel bei Bender(1997).

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Da bei der Erstellung dieser Arbeit gerade die Umstellung des alten auf den neuen Lehrplan erfolgt, sind zu den Themenbereichen der dritten und vierten Klasse AHS-Unterstufe noch keine Schulbücher nach dem neuen Lehrplan vorhanden. Somit sind einige der ausgewählten Aufgaben aus dem Skript von Malle (n. d. b) entnommen und auch entsprechend gekennzeichnet.

Wahrscheinlichkeit als ein Maß für eine Erwartung

Bei dieser Grundvorstellung wird die Erwartung, dass ein Ereignis E eintritt, durch eine Zahl $P(E)$ mit $0 \leq P(E) \leq 1$ ausgedrückt.

Hierbei wird ein unmögliches Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 0 und ein sicheres Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit 1 beschrieben. (Malle, n. d. b, S. 1)

Diese Grundvorstellung wird laut Sill und Kurtzmann (2019, S. 66) durch Aufgaben hervorgehoben, welche künftige Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit einordnen lassen. Es eignet sich hierbei beispielsweise das zukünftige Wettergeschehen, welches sich in Sonnenschein, Regen, Schneefall, bewölkt, windig, Gewitter, Hagel und Nebel einteilen lässt.

Eine Wahrscheinlichkeit kann auf drei verschiedene Arten ermittelt werden

Im folgenden ist zu beachten, dass die drei Methoden zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können. Falls dies der Fall ist, wird meistens der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit der Vorzug gegeben. (Malle, n. d. b, S. 1)

Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil

„Es sei G eine endliche Menge und E das Ereignis, dass ein aus G zufällig ausgewähltes Element in der Teilmenge $A \subseteq G$ liegt. Als Wahrscheinlichkeit von E kann man den relativen Anteil von A in G nehmen.“ (siehe Malle, n. d. b, S. 1)

$$P(E) = \frac{A}{G}$$

Laut Malle (n. d. b, S. 1) ist bei dieser Methode darauf zu achten, dass sie nur dann angewendet werden darf, wenn jedes Element von G die gleiche Chance hat ausgewählt zu werden.

Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit

„Ein Zufallsversuch werde n -mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt (n groß). Als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses E kann man die relative Häufigkeit von E unter diesen n Versuchen nehmen.“ (siehe Malle, n. d. b, S. 1)

$$P(E) = h_n(E)$$

Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen

„Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E kann der Grad des subjektiven Vertrauens in das Eintreten von E genommen werden.“ (siehe Malle, n. d. b, S. 1)

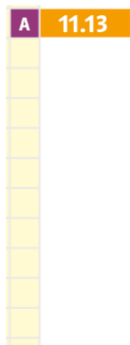
Aufgaben, welche die relative Häufigkeit berechnen lassen und noch Fragen zur persönlichen Einschätzung der Schüler*innen stellen, können diese Grundvorstellung hervorheben. Eine solche Aufgabe ist in Abbildung 3.71 zu sehen.

Um die Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit hervorzuheben, ist eine Aufgabe, bei der die Schüler*innen selbst einen Zufallsversuch durchführen und mit den Ergebnissen die relativen Häufigkeiten berechnen, gut geeignet.

Eine Wahrscheinlichkeit ist stets unsicher

Hier ist darauf zu achten, dass die Unsicherheit je nach der Ermittlungsmethode einer Wahrscheinlichkeit von sehr klein bis sehr groß reichen kann.

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten



Bei einem Schulfest wird ein Gewinnspiel veranstaltet. Es sollen 600 Lose verkauft werden, von denen 120 einen Gewinn beinhalten.

- 1) Wie viele Lose beinhalten keinen Gewinn? Gib dazu die absolute Häufigkeit an!
- 2) Wie groß ist die relative Häufigkeit für einen Gewinn?
- 3) Wie viel Prozent der Lose sind keine Gewinnlose?
- 4) Vergrößert sich die Chance auf einen Gewinn, wenn man zwei Lose kauft? Begründe die Antwort!
- 5) Verena kauft genau 120 Lose. Kann sie sicher sein, dass sich darunter mindestens ein Gewinnlos befindet? Begründe die Antwort!
- 6) Wie viele Lose muss Verena mindestens kaufen, damit sie mit Sicherheit ein Gewinnlos erhält?

Abbildung 3.71: Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil (Salzger et al., 2015, S. 269)

Unsicherheit bei der Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil

Die Unsicherheit bei der Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil ist im allgemeinen klein. Sie begründet sich daraus, dass es kein perfektes Zufallsgerät gibt. (Malle, n. d. b, S. 1)

Dies ist so zu verstehen, dass auch die Wahrscheinlichkeit eines Sechсers beim Würfeln, welche gemeinhin mit $\frac{1}{6}$ angenommen wird, einer kleinen Unsicherheit unterliegt. Dies ist dem Umstand geschuldet, dass der Würfel nicht so hergestellt werden kann, dass alle Würfelseiten, aufgrund von fehlerbehafteten Messwerten, hundertprozentig die selbe Länge haben.

Unsicherheit bei der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit

Die Unsicherheit bei der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit begründet sich aus der Möglichkeit, dass eine Fortführung oder Wiederholung einer Versuchsserie abweichende Ergebnisse liefern wird.

Sie ist im allgemeinen größer als bei der Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil. Wegen des empirischen Gesetzes der großen Zahlen ist sie aber nicht übermäßig groß. (Malle, n. d. b, S. 1)

Unsicherheit bei der Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen

Hier liegt im allgemeinen extreme Unsicherheit vor, weil die Einschätzungen zur Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen stark differieren können. (Malle, n. d. b, S. 1)

Aufgaben, welche auf die vorhandenen Unsicherheiten bei Wahrscheinlichkeiten eingehen, zeigen diese Grundvorstellung auf, wie in Abbildung 3.72 dargestellt ist.

- 8** [GV 3] Jim und Joe werfen eine Münze. Wer Zahl wirft, gewinnt. Jim behauptet, dass die Münze in Ordnung sei und dass deshalb $P(\text{Zahl}) = 0,5$ sei. Joe vermutet, dass die Münze gezinkt sei und wirft die Münze 100-mal, wobei er nur 45-mal Zahl erhält. Er behauptet also, dass $P(\text{Zahl}) = 0,45$ sei.
- a) Angenommen, Jim hat die Münze nicht gezinkt. Warum kann er Joes Behauptung trotzdem nicht mit Sicherheit verwerfen?
 - b) Angenommen, Jim hat die Münze gezinkt. Warum kann Joe trotzdem Jims Behauptung nicht mit Sicherheit verwerfen?

Abbildung 3.72: Aufgabe zu Unsicherheiten bei Wahrscheinlichkeiten (Malle, n. d. b, S. 4)

Gegenereignis

„Das Gegenereignis $\neg E$ eines Ereignisses E tritt genau dann ein, wenn E nicht eintritt.“ (siehe Malle, n. d. b, S. 2)

Hierbei gilt:

$$P(E) = 1 - P(\neg E)$$

Aufgaben welche die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis angeben und damit die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses berechnen lassen, wie in Abbildung 3.73 illustriert, heben diese Grundvorstellung hervor.

- 10** [GV 2b, GV 4] In einer Urne befindet sich eine unbekannte Anzahl von weißen und schwarzen Kugeln. Durch eine Versuchsserie hat man festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ungefähr 0,38 beträgt. Wie groß ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen?

Abbildung 3.73: Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses 1 (Malle, n. d. b, S. 4)

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Ebenso sind Aufgaben welche, wie in Abbildung 3.74 zu erkennen, die eine Argumentation mit dem Gegenereignis erfordern geeignet um diese Grundvorstellung hervorzuheben.

9 [GV 4] Eine meteorologische Zentralanstalt behauptet: In 45% aller Fälle stimmen unsere Wetterprognosen. Jemand sagt dazu: Meine Prognosen stimmen in 55% aller Fälle. Wie macht er das?

Abbildung 3.74: Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses 2 (Malle, n. d. b, S. 4)

Eine Wahrscheinlichkeit hängt stets vom Informationsstand ab

Hier sind Aufgaben, welche eine Änderung des Informationsstandes simulieren, wie in Abbildung 3.75 zu sehen ist, geeignet, um diese Grundvorstellungen hervorzuheben.

11 [GV 5] In einer Schulklasse sind 18 Knaben und 12 Mädchen. Der Mathelehrer hat angekündigt, dass in der nächsten Stunde eine Schülerin oder ein Schüler geprüft wird.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es Maria erwischt?
b) Zu Beginn der Stunde kündigt der Lehrer an, dass er ein Mädchen prüfen wird. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass es Maria erwischt?

Abbildung 3.75: Aufgabe zum Informationsstand bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (Malle, n. d. b, S. 4)

Eine bedingte Wahrscheinlichkeit ist eine gewöhnliche Wahrscheinlichkeit mit explizit angeführter Vorinformation

„Eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E_1 | E_2)$ ist nichts anderes, als eine gewöhnliche Wahrscheinlichkeit, nur wird eine gewisse Vorinformation (E_2 ist eingetreten) explizit angeführt.“ (siehe Malle, n. d. b, S. 2)

Aufgaben, welche ebendiese explizite Vorinformation enthalten, sind zur Hervorhebung dieser Grundvorstellung geeignet, wie in den Abbildungen 3.76 und 3.77 zu sehen ist.

3.10 Grundvorstellungen zur Geometrie

13 [GV 5] Die 628 Beschäftigten einer Firma verteilen sich gemäß nebenstehender Tabelle auf die Gruppen Frauen/Männer bzw. Raucher/Nichtraucher. Eine Person X wird zufällig ausgewählt. Berechne:

- a) $P(X \text{ ist Raucher})$
- b) $P(X \text{ ist Raucher})$, wenn man bereits weiß, dass eine Frau ausgewählt wurde.
- c) $P(X \text{ ist Raucher})$, wenn man bereits weiß, dass ein Mann ausgewählt wurde.

	Frauen	Männer	Gesamt
Raucher	201	189	390
Nicht-raucher	98	140	238
Gesamt	299	329	628

Abbildung 3.76: Bedingte Wahrscheinlichkeit als Wahrscheinlichkeit mit expliziter Vorinformation 1 (Malle, n. d. b, S. 4)

14 (Fortsetzung von 13) [GV 6] Berechne:

- a) $P(X \text{ ist eine Frau})$
- b) $P(X \text{ ist eine Frau} / X \text{ ist Raucher})$
- c) $P(X \text{ ist eine Frau} / X \text{ ist Nichtraucher})$
- d) $P(X \text{ ist Nichtraucher})$
- e) $P(X \text{ ist Nichtraucher} / X \text{ ist ein Mann})$
- f) $P(X \text{ ist Nichtraucher} / X \text{ ist eine Frau})$

Abbildung 3.77: Bedingte Wahrscheinlichkeit als Wahrscheinlichkeit mit expliziter Vorinformation 2 (Malle, n. d. b, S. 5)

3.10 Grundvorstellungen zur Geometrie

Wie Vom Hofe und Fast (2015, S. 43) festhalten, wurde die Rolle von Grundvorstellungen in der Geometrie bislang kaum untersucht. Dies liegt daran, dass die Geometrie selbst als anschaulich angesehen wird und zu ihrem Verständnis keine weiteren Anschauungsmittel als die Geometrie selbst benötigt werden.

Natürlich gibt es trotzdem Gründe sich mit Grundvorstellungen zum Thema der Geometrie zu beschäftigen. Zu einem ist sie, wie die Algebra, ein wichtiges mathematisches Gebiet für die Schulmathematik und die Übersetzung zwischen der Geometrie und der Algebra gehören zu den Basiskompetenzen eines anspruchsvollen Mathematikunterrichts. Zum anderen gibt es in der Geometrie Anwendungsfelder in denen eine Übersetzung zwischen Mathematik und Realität erforderlich ist. (Vom Hofe und Fast, 2015, S. 44)

Die zentrale Rolle der Geometrie in der Schulmathematik sieht man auch an ihrer Verankerung im Lehrplan. Sie ist mit dem Kompetenzbereich „Figuren und Körper“ in der gesamten AHS Unterstufe vertreten. (BMBWF, 2023a, S. 77-78)

3 Grundvorstellungen zu im Lehrplan vorhandenen Gebieten

Für Vom Hofe und Fast (2015, S. 44) ergeben sich zwei zentrale Fragestellungen für Grundvorstellungen in der Geometrie.

„Wie können geometrische Objekte und Zusammenhänge durch Grundvorstellungen beschrieben werden, die ein sinnvolles mathematisches Arbeiten innerhalb der Geometrie und ihren Anwendungen für die Realität ermöglichen? “ Und „inwiefern können geometrische Objekte und Repräsentationen tragfähige Grundvorstellungen für andere Gebiete der Mathematik - insbesondere für die Algebra - bilden? “ (siehe Vom Hofe und Fast, 2015, S. 44)

Auf den zweiten Aspekt haben Vom Hofe und Fast (2015) die Grundvorstellungen zu den negativen Zahlen aufgebaut, die in dieser Arbeit beschrieben wurden.

4 Schluss

Die vorliegende Arbeit katalogisiert die empirisch erforschten normativen Grundvorstellungen der mathematischen Teilgebiete der AHS Sekundarstufe I und untermauert sie mit Musteraufgaben aus aktuellen Schulbüchern. Sie gibt einen umfassenden Überblick über normative Grundvorstellungen und bietet, speziell für Mathematiklehrer*innen, einen Anhaltspunkt für die Aufgabenauswahl im Unterricht der entsprechenden Schulstufen.

Wie in ihr ersichtlich wurde, ist der Grundvorstellungsbegriff mit all seinen Facetten ein komplexes Forschungsgebiet für die Mathematikdidaktik.

Bereits in der fachlichen Klärung des Grundvorstellungsbegriffs wird klar, dass dieser aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden kann und ein facettenreiches Konzept darstellt. Es wird deutlich, dass Grundvorstellungen nicht nur als Vermittler zwischen Mathematik und Realität dienen, sondern auch als Übersetzer zwischen unterschiedlichen Darstellungsebenen fungieren. Außerdem wird hervorgehoben, dass die Ausbildung adäquater Grundvorstellungen entscheidend ist, um Verständnisschwierigkeiten zu vermeiden und die Begriffsbildung zu unterstützen. Es wird klar, dass Mathematiklehrer*innen sich der Bedeutung von Grundvorstellungen bewusst sein sollten, um gezielt Aufgaben auszuwählen, die deren Ausbildung unterstützen.

Für viele im Lehrplan der Sekundarstufe I vorhandenen Gebiete sind Forschungsarbeiten für die entsprechenden Grundvorstellungen vorhanden. Vor allem die Grundvorstellungen zum Rechnen mit Brüchen und der damit verbundenen Prozentrechnung, sowie die Proportionalität hat in den letzten Jahrzehnten eine intensive Erforschung erfahren.

4 Schluss

Auch die in der Algebra allseits vorhandenen Begriffe der Variable, der Terme, der Gleichungen und des funktionalen Zusammenhangs sind im Bezug auf Grundvorstellungen gut erforscht.

Andererseits sind manche Gebiete der Mathematik im Bezug auf die darin vorhandenen Grundvorstellungen noch relativ unerforscht. Wie Vom Hofe und Fast (2015, S. 43) festhalten, wurden Grundvorstellungen und ihre Rolle in der Geometrie bislang kaum untersucht.

Auch zum Themengebiet der beschreibenden Statistik sind im Zuge der Literaturrecherche für diese Arbeit keine normativen Grundvorstellungen gefunden worden. Hier werden in der Literatur nur Grundbegriffe genannt.

Im Wesentlichen sind Aufgaben, welche die besprochenen Grundvorstellungen adäquat abbilden, in den, in dieser Arbeit verwendeten, Schulbüchern des Faches Mathematik in der Sekundarstufe I inkludiert.

Einerseits ist dabei wieder auf die Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen zu verweisen, welche bis auf zwei Ausnahmen, durchwegs in allen bei dieser Arbeit verwendeten Schulbüchern sinnvoll abgebildet wurden.

Andererseits sind die beiden Grundvorstellungen zum Erweitern und Kürzen von Brüchen nur in einem Schulbuch vertreten, wie im dazugehörigen Kapitel bereits angeführt wurde. Hier ist noch Potenzial zur Eingliederung von passenden Aufgaben in aktuelle Schulbücher vorhanden.

Die starke Vertretung der Grundvorstellungen zum Rechnen mit Brüchen und zur Algebra in den Schulbüchern verwundert aber nicht, da diese Gebiete fachdidaktisch, wie oben erwähnt, seit längerem gut erforscht sind.

In den aktuellen Schulbüchern sind Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff noch selten zu finden. Dieser Umstand beruht vermutlich darauf, dass zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit der neue Lehrplan nur in der ersten Klasse der AHS Unterstufe wirksam ist und der Wahrscheinlichkeitsbegriff laut diesem Lehrplan erst in der dritten Klasse Erwähnung findet.

Abschließend ist somit festzuhalten, dass viele Grundvorstellungen, welche als Hilfe für das Verstehen von mathematischen Inhalten benutzt werden können, bereits erforscht und auch in den aktuellen Schulbüchern, in Form von passenden Aufgaben, vorhanden sind.

Andererseits gibt es aber auch einige unerforschte Themengebiete im Bezug auf Grundvorstellungen, welche ein interessantes Forschungsgebiet darstellen würden. Diese noch nicht erforschten Grundvorstellungen würden, in adäquate Aufgaben verpackt, eine Bereicherung in den Schulbüchern der Sekundarstufe I darstellen. So würde die Möglichkeit geschaffen werden, Aufgaben, die der Förderung von Grundvorstellungen dienen, stärker in den Unterricht zu integrieren.

Literatur

- Barzel, B., Glade, M., & Klinger, M. (2021). *Algebra und Funktionen: Fachlich und fachdidaktisch*. Springer.
- Bender, P. (1997). Grundvorstellungen und Grundverständnisse für den Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule*, 17(1), 8–33.
- BMBWF. (2023a). Verordnung des Bundesministers für Bildung, Wissenschaft und Forschung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der Volksschule und Sonderschulen, die Verordnung über die Lehrpläne für Minderheiten-Volksschulen und für den Unterricht in Minderheitensprachen in Volksschulen in den Bundesländern Burgenland und Kärnten, die Verordnung über die Lehrpläne der Mittelschulen und die Verordnung über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht. [BGBl. II Nr. 1/2023].
- BMBWF. (2023b). Verordnung des Bundesministers für Unterricht und Kunst vom 14. November 1984 über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen. [BGBl. II Nr. 239/2023].
- Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128. S. 1, 21.
- Bortenschlager, M., Fischer, A., Koller, M., Marsik, J., Olf, M., & Wittberger, M. (2020). *Lösungswege Mathematik 1*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Bortenschlager, M., Fischer, A., Koller, M., Marsik, J., Olf, M., & Wittberger, M. (2021). *Lösungswege Mathematik 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Literatur

- Bortenschlager, M., Fischer, A., Koller, M., Marsik, J., Olf, M., & Wittberger, M. (2023a). *Lösungswege Mathematik 1*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Bortenschlager, M., Fischer, A., Koller, M., Marsik, J., Olf, M., & Wittberger, M. (2023b). *Lösungswege Mathematik 3*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Dorfmayr, A., Mistlbacher, A., & Sator, K. (2019a). *Thema Mathematik 2*. VERITAS - Verlag und Ed. Hölzel Verlag.
- Dorfmayr, A., Mistlbacher, A., & Sator, K. (2019b). *Thema Mathematik Übungen 3*. VERITAS - Verlag und Ed. Hölzel Verlag.
- Dorfmayr, A., Mistlbacher, A., & Sator, K. (2021). *Thema Mathematik 4*. VERITAS - Verlag und Ed. Hölzel Verlag.
- Fischbein, E., Tirosh, D., Stavy, R., & Oster, A. (1990). The Autonomy of Mental Models. *For the Learning of Mathematics*, 10(1), 23–30. Verfügbar 13. November 2023 unter <http://www.jstor.org/stable/40247971>
- Fitzka, E. (2019). *Mathematik. Verstehen + Üben + Anwenden. Kompakt 4*. VERITAS - Verlag.
- Griesel, H., vom Hofe, R., & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 123–133.
- Gudladt, P. (2021). *Inhaltliche Zugänge zu Anteilsvergleichen im Kontext des Prozentbegriffs: Theoretische Grundlagen und eine Fallstudie*. Springer.
- Hafner, T. (2012). Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I. *Empirische Untersuchung und didaktische Analysen (Perspektiven der Mathematikdidaktik)*. Wiesbaden: Vieweg+ Teubner Verlag.
- Hafner, T., & Vom Hofe, R. (2008). *Aufgaben analysieren und Schülervorstellungen erkennen: diagnostische Interviews zur Prozentrechnung*. na.
- Hock, N. (n. d.). Förderung von diagnostischen Kompetenzen.
- Humenberger, H., Hasibeder, J., Himmelsbach, M., Schüller-Reichl, J., Litschauer, D., Groß, H., & Aue, V. (2018). *Das ist Mathematik 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

- Kirsch, A. (2004). *Mathematik wirklich verstehen : eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen* (4. Aufl.). Aulis-Verl. Deubner.
- Kleine, M., Jordan, A., & Harvey, E. (2005). With a focus on ‘Grundvorstellungen’ Part 1: a theoretical integration into current concepts. *ZDM*, 37, 226–233.
- Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer.
- Kütting, H., & Sauer, M. J. (2011). *Elementare stochastik: mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. Springer-Verlag.
- Malle, G. (n. d. a). *Material zur Lehrerfortbildung a. Bruchrechnen 1. und 2. Klasse Überlegungen zum Kernstoff*. [Skript].
- Malle, G. (n. d. b). *Material zur Lehrerfortbildung b. Grundwissen und Grundvorstellungen: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Beurteilende Statistik*. [Skript].
- Malle, G., & Wittmann, E. C. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Springer.
- Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and instruction*, 14(5), 519–534.
- Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer-Verlag.
- Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421–481.
- Pöhler, B. (2018). *Konzeptuelle und lexikalische Lernpfade und Lernwege zu Prozentsätzen: eine Entwicklungsforschungsstudie*. (Bd. 35). Springer-Verlag.
- Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and instruction*, 18(1), 3–17.
- Reichel, H.-C., Humenberger, H., Litschauer, D., Groß, H., Aue, V., & Neuwirth, E. (2009). *Das ist Mathematik 3*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Roth, J., & Ames, J. (2014). Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03. 2014 bis 14.03. 2014 in Koblenz*.

Literatur

- Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien–Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(2), 553–580.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2015). *Mathematik verstehen 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2016). *Mathematik verstehen 3*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2017). *Mathematik verstehen 4*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2022a). *Mathematik verstehen 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2022b). *Mathematik verstehen 3*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Schulz, A., & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe*. Springer.
- Sill, H., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer.
- Sill, H. (2014). Grundbegriffe der Beschreibenden Statistik. *Stochastik in der Schule*, 34(3), 2–9.
- Steinbauer, R., Kramer, S., & Süss-Stepancik, E. (2019). Schulmathematik Analysis. *Universität Wien, Vorlesungsmanuskript, Rohversion* <https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/WS1819/smana-gesamt-2019-02-14.pdf>.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image und the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science und Technology*, 14(3), 293–305.
- Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren*, 118.

- Vom Hofe, R., & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *mathematik lehren*, 2023(236), 2–7.
- Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akad. Verl.
- Vom Hofe, R. (1996). Grundvorstellungen-Basis für inhaltliches Denken.
- Vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 1(37), 225–254.
- Vom Hofe, R., & Fast, V. (2015). Geometrische Darstellungen als Vorstellungsbasis für algebraische Operationen am Beispiel der negativen Zahlen. *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen: Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 43–55.
- Vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W., & Pekrun, R. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I-theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In *Diagnostik von Mathematikleistungen* (Bd. 4).
- Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Franzbecker Hildesheim.
- Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer.
- Wohlhart, D., & Scharnreitner, M. (2022). *Plus! Mathematik 1, Erarbeitungsteil-Prüfexemplar*. Helbling.