



MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Lösen von Textaufgaben:
Hilfestellungen in österreichischen Schulbüchern der Sekundarstufe I

verfasst von | submitted by

Teresa Richter BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt |
Degree programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 510 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree pro-
gramme as it appears on the student record
sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Ge-
ographie und wirtschaftliche Bildung Unterrichtsfach
Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Danksagung

Zunächst möchte ich die Gelegenheit nutzen, um mich bei allen zu bedanken, die mich während meiner Studienzeit unterstützt haben.

Ein besonderer Dank geht dabei an Mag. Dr. Andreas Ulovec für die fachkundige Anleitung und die wertvollen Ratschläge.

Zusätzlich möchte ich mich bei allen Lehrenden und Kommiliton*innen bedanken, die mich auf meinem akademischen Weg begleitet und inspiriert haben. Ihre Ermutigung und ihr Fachwissen haben mir geholfen, über mich hinaus zu wachsen und neue Perspektiven zu entwickeln.

Des Weiteren möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, die mich stets ermutigt haben. Ihre moralische Unterstützung hat mir Kraft und Motivation geschenkt.

Kurzfassung

Das Lösen von Textaufgaben zählt für Schüler*innen zu den unbeliebtesten Teilbereichen des Mathematikunterrichts und erfordert die Kombination aus sprachlichem und mathematischem Vorwissen. Vor allem der Übersetzungsschritt von einem konkreten Text in eine Gleichung wird für viele Lernende zu einer vermeintlich unüberwindbaren Hürde. Trotzdem stellt das Problemlösen eine wichtige Kompetenz dar und wird auch in Schulbüchern thematisiert. Zusätzlich dienen Lehrbücher sowohl für Lehrpersonen als auch für Lernende als inhaltlicher Anhaltspunkt. Folglich fokussiert sich diese Arbeit auf die Unterstützungsmöglichkeiten zum Bearbeiten von Textaufgaben in österreichischen Schulbüchern der Sekundarstufe I. Zunächst gibt eine theoretische Einordnung Aufschluss über die Begriffsdefinition, sowie Schwierigkeiten und Hilfestellungen in Bezug auf Textaufgaben. Basierend auf dieser Grundlage wird ein Analyseraster entwickelt, welches die wesentlichen Hilfestellungen umfasst. Anschließend erfolgt die Analyse von vier Schulbuchreihen der Sekundarstufe I. Die Ergebnisse zeigen, dass insbesondere eine schrittweise Herangehensweise in Form von Lösungsplänen als Unterstützung der Lernenden dient. Des Weiteren wird deutlich, dass die Anzahl der Hilfestellungen von der sechsten bis zur achten Schulstufe sukzessive rückläufig ist. Dies deutet darauf hin, dass von Schüler*innen in höheren Schulstufen angenommen wird, dass sie in der Lage sind Problemlösestrategien eigenständig anzuwenden.

Abstract

Solving word problems is regarded as one of the most challenging aspects of mathematics education for students. In particular, the translation of a text into an equation poses an extreme hurdle for many learners. Nevertheless, textbooks contain a large number of word problems and serve as primary instructional resources for both teachers and students. Consequently, this study focuses on the additional instructions available for word problem solving in Austrian secondary school textbooks. Firstly, a theoretical framework provides insights into the challenges and support strategies related to solving word problems. Based on this, a conceptual framework is developed, in order to measure the quantity and quality of the support mechanisms in textbooks. Subsequently, four textbook series are analyzed. The findings indicate that many textbooks impose a step-by-step solution method. Furthermore, it becomes evident that the frequency of instructions decreases gradually from sixth to eighth grade, which indicates that students at higher school levels are expected to be able to apply problem-solving strategies independently.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	9
2.	Definition und Relevanz von Textaufgaben	12
2.1.	Begriffsdefinition	12
2.1.1.	Eingekleidete Aufgabe	12
2.1.2.	Sachaufgaben	15
2.1.3.	Textaufgaben	16
2.2.	Relevanz von Textaufgaben	19
3.	Das Lösen von Textaufgaben	22
3.1.	Modellieren	23
3.2.	Problemlösen	25
3.3.	Schwierigkeiten	29
3.3.1.	Sprachliche Schwierigkeiten	30
3.3.2.	Mathematisieren	31
3.4.	Hilfestellungen und Lösungsstrategien	32
3.4.1.	Über Aufgaben sprechen	33
3.4.2.	Bildliche Darstellung	34
3.4.3.	Lösungspläne	36
4.	Analytischer Rahmen	41
4.1.	Relevanz der Schulbücher	41
4.2.	Hypothesen	43
4.3.	Methodisches Vorgehen	44
5.	Schulbuchanalyse	45
5.1.	Thema Mathematik	46
5.1.1.	Fünfte Schulstufe	47
5.1.2.	Sechste Schulstufe	50
5.1.3.	Siebte Schulstufe	53
5.1.4.	Achte Schulstufe	54
5.2.	Lösungswege	55
5.2.1.	Fünfte Schulstufe	55
5.2.2.	Sechste Schulstufe	58
5.2.3.	Siebte Schulstufe	60
5.2.4.	Achte Schulstufe	64
5.3.	Mathematik verstehen	66
5.3.1.	Fünfte Schulstufe	67
5.3.2.	Sechste Schulstufe	68
5.3.3.	Siebte Schulstufe	70
5.3.4.	Achte Schulstufe	72
5.4.	Das ist Mathematik	73
5.4.1.	Fünfte Schulstufe	73
5.4.2.	Sechste Schulstufe	75
5.4.3.	Siebte Schulstufe	79
5.4.4.	Achte Schulstufe	81

6.	Diskussion	83
6.1.	Hilfestellungen mit Lösungsplänen	84
6.2.	Intensität der Hilfestellungen.....	86
6.3.	Schlüsselwörter.....	87
6.4.	Visuelle Darstellung	88
6.5.	Bedeutung der Lehrperson	89
7.	Fazit	91
	Literaturverzeichnis	94
	Abbildungsverzeichnis	99
	Tabellenverzeichnis	101

1. Einleitung

Die Bearbeitung von Textaufgaben stellt Schüler*innen im Mathematikunterricht oftmals vor eine große Herausforderung. Es gibt Schwierigkeiten bei der Übersetzung von Texten in die mathematische Sprache, aber auch zahlreiche andere Hürden. Deshalb ist es wenig überraschend, dass Textaufgaben zu einem der unbeliebtesten Teilbereiche des Mathematikunterrichts zählen (Heymann, 2013; Schneeberger, 2009). Sie werden von vielen Lernenden gemieden und als Stolperstein angesehen (Reusser, 1989). Oftmals sinkt die Lösungswahrscheinlichkeit sobald Textaufgaben in ein Testverfahren integriert werden (Franke & Ruwisch, 2010). Ebenso weist Prediger (2010) darauf hin, dass in einem deutschen Bundesland nach dem Erhöhen des Anteils an Textaufgaben in Abschlussarbeiten, die Durchschnittsnote gesunken ist.

Schüler*innen müssen beim Lösen von geeigneten Textaufgaben ihr mathematisches Verständnis aktivieren. Dabei geht es nicht nur um das Eintrainieren von Schemata, die das Lösen der Aufgabe, ohne einen tatsächlichen Verstehensprozess, ermöglichen, sondern um ein tiefgehendes, alltagstaugliches mathematisches Verständnis. Wie bereits Winter (1995) erläutert, sollen die Schüler*innen im Mathematikunterricht Probleme, die über das Fach hinausgehen, lösen können. Dementsprechend ist es von besonderer Bedeutung, dieser heuristischen Fähigkeit im Unterricht ausreichend Aufmerksamkeit zu schenken.

Das Bearbeiten von Textaufgaben verlangt eine Vielzahl an Fähigkeiten, welche beim Lösen von isomorphen Aufgaben nur punktuell abgefragt werden. Beim Lösen von Textaufgaben geht es beispielsweise um ein ausgeprägtes sprachliches Verständnis, aber auch um die Fertigkeit mit Zahlen und Größen umzugehen sowie um das Erkennen von Zahlenbeziehungen (Schneeberger, 2009). Das Lösen von Textaufgaben wird demnach durch mehrere Faktoren bedingt, welche ein gleiches Maß an Aufmerksamkeit fordern.

Dabei muss jedoch erwähnt werden, dass Textaufgaben nicht gleich Textaufgaben sind. In einigen Mathematikbüchern lassen sich auch Beispiele von weniger gelungenen Textaufgaben finden, die ausschließlich zum Eintrainieren von Verfahren dienen. Dabei geht es um sogenannte Scheinaufgaben, welche extra für den Unterricht konzipiert werden. Ohne den Text und die dahinterstehende Idee verstanden zu haben, können die Schüler*innen mit der passenden Regel die Aufgabe lösen. Die Lernenden assoziieren die Mathematik also mit in sich geschlossenen Aufgaben, die keine Anknüpfungspunkte in der Alltagswelt finden (Büchter & Leuders, 2005). Erst wenn das Interesse durch eine geeignete Fragestellung geweckt wird und diese auch einen direkten Bezug zum Alltag der Schüler*innen hat, sodass sie einen Nutzen darin sehen die Aufgabe zu verstehen,

kann ein konstruktiver Erarbeitungsprozess beginnen (Kubli, 2010). Dadurch wird die intrinsische Motivation unterstützt und die Lernenden haben ein aktives Interesse an der Aufgabe. Nach Schneeberger (2009) lernen die Schüler*innen mathematisches Denken durch eine mathematische Kultur, die darin besteht über Mathematik zu Sprechen und sie aktiv zu betreiben. Eine interaktive Auseinandersetzung mit der Aufgabe ist also zwingend notwendig. Somit zeigt sich, dass bereits die Auswahl der richtigen Textaufgabe eine wesentliche Rolle für den Verstehensprozess der Schüler*innen spielt.

Zusätzlich spielt das Schulbuch in diesem Zusammenhang eine wichtige Rolle, da Textaufgaben in den Mathematikbüchern stark vertreten sind (Schlager, 2020). Verschaffel et al. (2000) identifiziert drei Schlüsselfaktoren, welche beim Umgang der Schüler*innen mit Textaufgaben von zentraler Bedeutung sind. Dazu zählt unter anderem der starke Einfluss von Textaufgaben in Schulbüchern. Sowohl für Schüler*innen als auch für Lehrpersonen dienen Lehrbücher als Anhaltspunkte und helfen die einzelnen Themen und Inhalte zu strukturieren (Erbas et al., 2012).

Diese ersten Erkenntnisse zeigen die Komplexität des mathematischen Verstehensprozesses. Demnach gibt es zahlreiche Schwierigkeiten, die mit dem Lösen von Textaufgaben einhergehen. Deshalb wird in dieser Arbeit nach Unterstützungsmöglichkeiten zum Bearbeiten von Textaufgaben gefragt. In diesem Kontext werden Schulbücher als bedeutende Einflussfaktoren betrachtet und als wesentlicher Bestandteil des Unterrichtsmaterials angesehen, weshalb diese einer detaillierten Analyse unterzogen werden. Dahingehend liegt das Augenmerk auf in Schulbüchern erläuterte Hilfestellungen und Lösungsmuster zum erfolgreichen Bearbeiten von Textaufgaben. Derartige Heuristiken stellen für Lernende einen Anhaltspunkt im Lösungsprozess dar und helfen bei einer klaren Strukturierung der Arbeitsschritte. Dabei ist jedoch nicht gemeint, dass Schüler*innen einen Lösungsweg eintrainieren und diesen anschließend als Regel für alle Textaufgaben anwenden sollen. Vielmehr geht es um das Kennenlernen von unterschiedlichen Strategien, welche den Lösungsprozess für die Lernenden erleichtern.

In der Studie von Radatz (1983) konnte gezeigt werden, dass Kinder, die länger im Schulsystem sind, häufiger unlösbare Aufgaben, wie die sogenannten Kapitänsaufgabe, versuchen zu berechnen. Somit manifestieren sich durch den schulischen Einfluss vorgefertigte Lösungsschemata, welche zur Bearbeitung jeglicher Aufgaben herangezogen werden. Dabei rückt der Verstehensprozess in den Hintergrund. Um diese Tendenz genauer zu hinterfragen und vor allem um die Rolle der Schulbücher in diesem Zusammenhang näher einordnen zu können, werden in dieser Arbeit Schulbücher der Sekundarstufe I näher analysiert.

Für eine umfassende Bearbeitung dieser Thematik ist zunächst eine Auseinandersetzung mit dem Begriff *Textaufgabe* unumgänglich. Die Literatur zeigt eine Vielzahl an Definitionen und Kategorisierungen des Begriffs, welche im zweiten Kapitel näher erläutert werden. Zusätzlich steht der Lösungsprozess von Textaufgaben im Mittelpunkt der Analyse. Daher wird im dritten Kapitel der Fokus auf das Problemlösen und Modellieren, sowie diverse Hürden in diesem Prozess gelegt. Denn nur durch eine aktive Beschäftigung mit den Problemfeldern kann auch eine effektive Lösungsmöglichkeit geschaffen werden. Außerdem sind anhand der Literatur zahlreiche Hilfestellungen identifizierbar. Dahingehend lassen sich einige dominierende Aspekte herausarbeiten, welche in einem eigenen Unterkapitel näher erläutert werden.

Auf Basis dieser Auseinandersetzung mit Textaufgaben folgt die genaue Analyse der Schulbücher in Hinblick auf die Herangehensweise an das Thema „Lösen von Textaufgaben“. Mit Hilfe der Lösungspläne von Pólya (1980), Schoenfeld (1985) und Verschaffel et al. (2000) erfolgt der Aufbau eines eigenen Analyserasters, welcher wesentliche Faktoren der genannten Autor*innen vereint. Daran anknüpfend werden vier Schulbuchreihen der Sekundarstufe I ausgewählt und anhand der Untersuchungskriterien analysiert. Der Schulbuchvergleich soll Aufschluss über die Bearbeitungsmöglichkeiten in der Schule geben. Zwar ist das Schulbuch nicht der einzige Indikator der Unterrichtsgestaltung, dennoch stellt es für viele Lehrkräfte einen wesentlichen Teil des Mathematikunterrichts dar. Anschließend werden die Ergebnisse diskutiert und weitere Implikationen aus den Erkenntnissen abgeleitet.

2. Definition und Relevanz von Textaufgaben

In Bezug zum Sachrechnen existiert eine Bandbreite an Begrifflichkeiten, welche in Koexistenz in der Literatur auftreten (Franke & Ruwisch, 2010). Dabei wird von Sachaufgaben, Anwendungsaufgabe, eingekleideten Aufgaben bzw. Scheinaufgaben, Modellierungsaufgaben oder Textaufgaben gesprochen (Bednorz, 2021; Greefrath, 2018; Müller & Wittmann, 1984; Schneeberger, 2009). In diesem Abschnitt werden die Bezeichnungen, welche zum Teil synonym verwendet werden, genauer erläutert und *die Textaufgaben* als solche näher definiert. Dabei wird der Fokus auf eine klassische Definition gelegt, welche Textaufgaben, Sachaufgaben und eingekleidete Aufgaben unterscheidet. Abgesehen von dieser klassischen Einteilung gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten, um Textaufgaben näher zu klassifizieren (Krauthausen, 2018). Zusätzlich ist die Abgrenzung zu anderen Aufgabentypen notwendig, um anschließend auf die Funktion und Relevanz von Textaufgaben eingehen zu können.

2.1. Begriffsdefinition

Textaufgaben können zum Überbegriff des Sachrechnens gezählt werden (Krauthausen, 2018). Dabei verbindet das Sachrechnen, wie bereits im Wort impliziert, die Sache mit dem Rechnen (Krauthausen, 2018). Folglich handelt es sich um eine Verknüpfung der Realität mit der Mathematik. Bei Aufgaben des Sachrechnens geht es also weniger um das korrekte Rechnen, sondern mehr um das Verständnis der Situation und die daraus resultierenden Rechenoperationen. Daraus können Schüler*innen eine umfassende Problemlösefähigkeit entwickeln, welche über die Mathematik hinaus anwendbar ist (Franke & Ruwisch, 2010).

Franke und Ruwisch (2010) betonen jedoch das Fehlen einer einheitlichen Begriffsdefinition im Bereich des Sachrechnens und der jeweiligen Aufgabentypen. Für eine genauere Klassifikation des Begriffs *Textaufgabe* wird in dieser Arbeit auf die klassische Einordnung nach dem Aufgabenkontext zurückgegriffen. Dabei wird in der Literatur zwischen Textaufgaben, eingekleideten Aufgaben und Sachaufgaben unterschieden (Greefrath, 2010; Schlager, 2020; Schneeberger, 2009). Für die weitere Arbeit ist es somit notwendig, die drei Begriffe genauer zu untersuchen, um daraus eine klare Definition des Begriffs *Textaufgabe* zu deduzieren.

2.1.1. Eingekleidete Aufgabe

Greefrath (2010) definiert eingekleidete Aufgaben als Problemstellungen ohne tatsächlichen Realitätsbezug. Die Aufgabe wird also explizit für den Unterricht konzipiert, lässt sich jedoch in der Realität nicht wiederfinden. Das Problem an sich ist austauschbar und

unwichtig, im Fokus steht das mathematische Lösen der Aufgabe, sowie das Anwenden von neu gelernten Begrifflichkeiten (Schneeberger, 2009). Die Realität wird genutzt, um mathematische Konzepte verständlich zu vermitteln (Jahnke, 2005). Ein Beispiel dafür ist folgende Aufgabenstellung:

„Die Farm eines amerikanischen Rinderzüchters hat die Form eines regelmäßigen Sechsecks mit gegebener Seitenlänge a . Wie groß ist die Seitenlänge der Nachbar-Ranch, die flächengleich ist und die Form eines regelmäßigen Fünfecks hat?“ (Humenberger, 2021)

Hier ist der Sachkontext völlig frei erfunden und wird vermutlich in der Realität so nie gestellt werden. Dabei handelt es sich um eine schädliche Scheinanwendung, welche ein falsches Bild von der Mathematik produziert.

Folglich wird dieser Aufgabentyp oftmals kritisiert, da die vermehrte Anwendung im Unterricht ein falsches Bild von der Mathematik vermittelt und demnach zu einer verminderten Lernmotivation der Schüler*innen führen kann. Auch Heymann (2013) übt Kritik an eingekleideten Aufgaben, da so das oberflächliche Lösen von Aufgaben gestärkt werde. Die Problemsituation „präsentiert“ bereits die mathematischen Aspekte und im Prinzip wird ein Teil der Mathematik in einen Text „versteckt“, der jedoch wenig zur Erschließung der Umwelt beiträgt. Generell lehrt es den Schüler*innen eine Aufgabe zu decodieren und den für sie verpackten mathematischen Inhalt zu finden. Wobei sich keineswegs die Sinnhaftigkeit hinter der Problemstellung erschließt. Mit eingekleideten Aufgaben lässt sich die selbstisolierende Wirkung des Mathematikunterrichts keineswegs aufbrechen. (Heymann, 2013).

In der klassischen Form der Unterrichtsgestaltung eignen sich derartige Aufgaben zum Üben von unmittelbar zuvor gelehrt Inhalten (Heymann, 2013). Dabei wird bewusst der Terminus *gelehrt* gewählt, da diese Form des Unterrichtens oftmals mit einem lehrerzentrierten Unterricht einhergeht. Das Ziel dieser Problemstellungen ist es, die innermathematischen Inhalte konkret fassbar zu machen (Schneeberger, 2009), sowie mathematische Begriffe zu üben (Franke & Ruwisch, 2010). Darüber hinaus ist es üblich, dass der Lösungsprozess mit dem Hinschreiben des Ergebnisses beendet ist (Heymann, 2013).

Ein Hauptkritikpunkt an eingekleideten Aufgaben ist der unzureichende Bezug zur Realität. Bei der Bearbeitung ist im Grunde keine Verknüpfung zu Vorerfahrungen erforderlich. Zudem gibt es Studien dazu, dass Lernende unlösbare Aufgaben, die sogenannten „Kapitänsaufgaben“, lösen, indem sie die mathematischen Daten aus dem Text ziehen

und, ohne Bezug zum Sachverhalt, Rechenoperationen durchführen. Die folgende Aufgabe nach Baruk (1989) ist eines der prominentesten Beispiele:

Auf einem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?

In diesem Zusammenhang kann auch von einem oberflächlichen Lösen einer Aufgabe gesprochen werden. Die Lernenden ziehen mathematische Informationen aus dem Text, ohne ihn tatsächlich verstanden zu haben. Dahingehend ist es anschließend nicht möglich das numerische Ergebnis im Sachzusammenhang zu deuten. (Verschaffel et al., 2000).

Radatz (1983) zeigte mit seiner Untersuchung an insgesamt 300 Schüler*innen, dass derartige Kapitänsaufgaben häufiger gelöst werden, je älter die Kinder sind. Während nur etwa 10% der Kindergartenkinder die Aufgabe lösen wollten, waren es in etwa 45% in der Sekundarstufe I. Dies lässt darauf schließen, dass die im Unterricht gelehrt Herangehensweise an Textaufgaben, vor allem mit einer Dominanz an eingekleideten Aufgaben, zu einer Verstärkung des oberflächlichen Lösens von Textaufgaben führt. Die Schüler*innen suchen sich also die geeigneten Zahlen aus dem Text und mit Hilfe von Schlüsselwörtern versuchen sie das Problem zu lösen, ohne den tatsächlichen Verstehensprozess durchlaufen zu haben. Sie blenden realistische Überlegungen aus und schließen auf ihre Vorerfahrungen mit eingekleideten Aufgaben (Verschaffel et al., 2000).

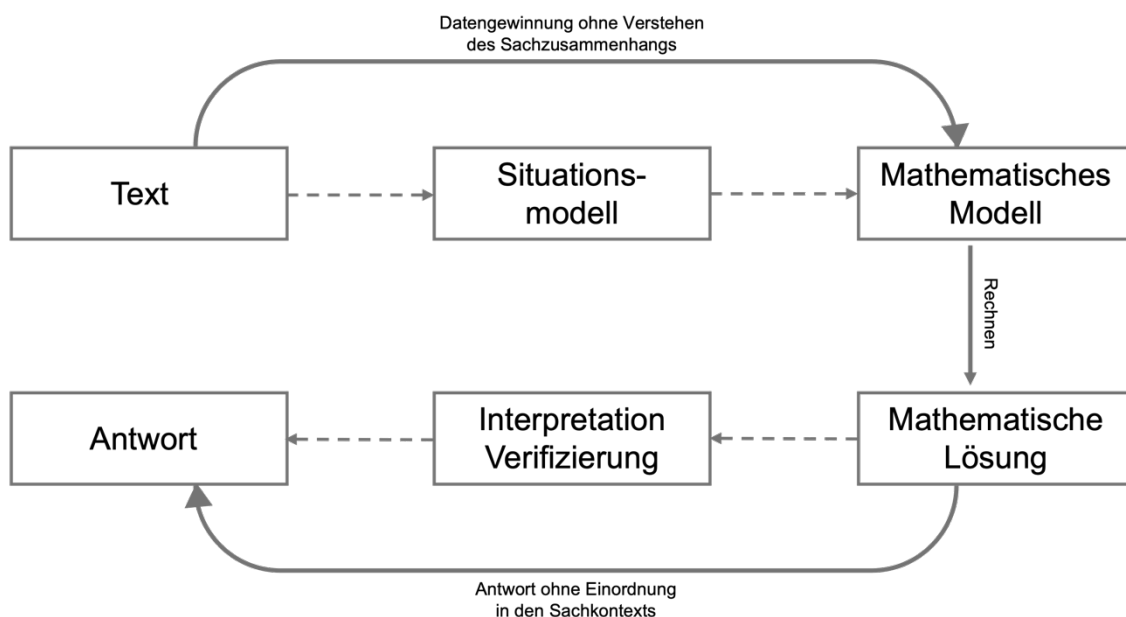


Abbildung 1: Oberflächliches Lösen von eingekleideten Aufgaben
 Quelle: Verschaffel et al., 2000, S.13; modifiziert durch die Autorin

2.1.2. Sachaufgaben

Im Gegensatz dazu beschäftigen sich Sachaufgaben mit realweltlichen Problemstellungen, welche mit Hilfe der Mathematik gelöst werden können. Zu diesem Aufgabentyp zählen unter anderem Modellierungsaufgaben (Greefrath, 2010). In diesem Fall werden Sachsituationen mathematisch modelliert und nicht umgekehrt ausgedachte Situationen an die Mathematik angepasst. (Heymann, 2013)

Bei diesem Aufgabentyp handelt es sich um einen mathematischen Sachtext, welcher zur Erschließung der Umwelt dient (Greefrath, 2010). Mathematik ist sozusagen lediglich das Instrument zur Erklärung realweltlicher Phänomene (Franke & Ruwisch, 2010). Dadurch wird das eigenständige Modellieren angeregt und ein gehaltvoller Umgang mit mathematischen Modellen und Methoden geübt (Verschaffel et al., 2000). Zusätzlich sind diverse Recherchetätigkeiten notwendig, da für die Bearbeitung oftmals mehr Informationen benötigt werden als angegeben sind (Greefrath, 2010). Die Aufgabe an sich öffnet den Horizont für weitere Interpretationsmöglichkeiten. Das Lösen derartiger Aufgaben ist bei weitem nicht abgeschlossen wenn das Ergebnis berechnet wurde, sondern gibt den Anstoß für weitere Fragen und die Möglichkeit der Reflexion. Oftmals wird diesen Aufgaben eine gewisse Offenheit zugesprochen, was bedeutet, dass sie mit unterschiedlichen Lösungswegen bearbeitet werden können (Heymann, 2013).

Durch realweltliche Problemstellungen, welche authentisch im Unterricht behandelt werden, erschließt sich für die Schüler*innen die Sinnhaftigkeit des Mathematikunterrichts. Dadurch lässt sich eine Motivationssteigerung der Lernenden erkennen, sowie eine positive Einstellung zum Unterricht ausbilden (Borromeo Ferri, 2010). Sie können die Aufgabe tatsächlich mit ihrer Lebenswelt und ihren Vorerfahrungen verknüpfen und daraus einen Mehrwert ziehen. Nachstehend wird eine Sachaufgabe näher erläutert:

Welches Angebot ist das Beste?

In der Schule soll ein neuer Kopierer angeschafft werden, da der alte Kopierer defekt ist. Die Schulleitung hat sich bereits für das Modell KM-C2520 entschieden. Zwei Firmen bieten jeweils einen Service-Vertrag an.

Angebot 1:
649,- € pro Jahr und 1 Cent pro Kopie

Angebot 2:
749,- € pro Jahr und 0,9 Cent pro Kopie



Abbildung 2: Beispiel einer Sachaufgabe
Quelle: Greefrath, 2010, S.13

In dieser Aufgabe wird der Bezug zur Wirklichkeit deutlich. Das Problem der Kopierkosten, welches sich im Schulalltag als reale Fragestellung herausstellt, wird aufbereitet und in den Fokus gerückt. Für eine verstärkte Authentizität müssen die Lernenden tatsächlich argumentieren und entscheiden, welches Angebot die Schule annehmen soll. Dadurch kann in das Themengebiet der linearen Funktionen eingestiegen werden. Die Schüler*innen erkennen den tatsächlichen Anwendungsbereich dieses Themas. Mit Hilfe dessen kann die Motivation der Lernenden steigen und das Verständnis für lineare Funktionen erhöht werden (Greefrath, 2010).

2.1.3. Textaufgaben

Textaufgaben übernehmen nach der klassischen Definition die Mediatorrolle zwischen eingekleideten Aufgaben und Sachaufgaben. Sie beinhalten zwar einen realitätsbezogenen Kontext, werden aber explizit für den Mathematikunterricht konzipiert und daher oftmals als leicht eingekleidete Aufgaben verstanden.

Eine mathematische Textaufgabe bezieht sich generell auf eine Problemstellung, welche in Form von Texten, Bildern oder Handlungsanweisungen vermittelt wird (Reusser, 1989). Der Begriff *Aufgabe* bezeichnet eine bewusste Suche nach einer Handlungsweise, um ein nicht unmittelbar ersichtliches Ziel zu erreichen (Pólya, 1966). Der grundlegende Kern einer Textaufgabe ist folglich eine schriftliche Schilderung einer Situation, welche sachbezogene Überlegungen nach sich zieht (Schlager, 2020). Demnach hat dieser Aufgabentyp eine eher deduktiv-vermittelnde Basis und schließt auch jene Themen ein, welche im Alltag nur selten auftreten (Schneeberger, 2009).

Darüber hinaus sind mathematischen Texte im Vergleich zu literarischen Texten inhaltlich verdichtet (Schlager, 2020). Sie stehen zwischen zwei Stühlen: für Deutschlehrkräfte gehören sie in den Mathematikunterricht und Mathematiker*innen umgehen umfangreiche Textaufgaben, da es in ihren Augen dabei mehr um das sprachliche Verstehen, als um die Mathematik an sich geht (Schneeberger, 2009).

Nach Schlager (2020) werden innermathematische Problemstellungen nicht als Textaufgabe aufgefasst. Trotzdem gibt es auch Textaufgaben, welche keine Situation der realen Welt miteinschließen, wie zum Beispiel:

Die Summe aus einer Zahl und dem Produkt aus 5 und einer anderen Zahl beträgt 20. Wenn die erste Zahl um 2 größer ist als die zweite, welche Zahlen sind gemeint?

Diese Aufgabe zeigt, dass sich der Text zwar nicht auf ein außermathematisches Problem bezieht, aber trotzdem von einer Textaufgabe gesprochen werden kann, da ein

sprachlich formuliertes Problem in eine mathematische Gleichung übersetzt wird (Greefrath, 2018).

Im Gegensatz dazu charakterisiert Heymann (2013) die Textaufgabe als Verknüpfung mit einer echten Problemsituation. Folglich muss tatsächlich eine Situation aus der Realität gegeben sein. Das hier angeführte Beispiel würde nach dieser Definition nicht zu diesem Aufgabentyp zählen.

Die Sache an sich ist bei einer Textaufgabe austauschbar (Greefrath, 2010). Zusätzlich wird die Realität vereinfacht und idealisiert dargestellt (Borromeo Ferri, 2010; Schneeberger, 2009). Trotzdem werden Anstöße zur Teilmodellierung gegeben und gewisse reale Sachsituationen vereinfacht abgebildet. Die mathematische Struktur kann ohne Übersetzungsschritt nicht so offensichtlich wie bei eingekleideten Aufgaben aus dem Text gefiltert werden (Schlager, 2020). Der Vergleich folgender Aufgaben, zeigt den eben erläuterten Unterschied:

Ein Mann will ein Seil mit 12 m Länge in gleich große Stücke von jeweils 1,5 m schneiden. Wie viele Stücke erhält er?

Der Lösungsweg lässt sich leicht herauslesen und die mathematische Struktur ist lediglich minimal eingekleidet. Indem man die Division von 12 und 1,5 durchführt, kann die Aufgabe ohne weitere Überlegungen gelöst werden. Im Gegensatz dazu kann die Aufgabe auch folgendermaßen gestellt werden:

Ein Mann möchte ein Seil zwischen zwei Pfosten, welche 12 m voneinander entfernt sind, spannen. Jedoch besitzt er nur 1,5 m lange Seile. Wie viele dieser Stücke muss er zusammenknoten, um sie zwischen den Pfosten zu spannen?

Diese Aufgabe kann nicht einfach durch die Division von 12 m durch 1,5 m gelöst werden. Die Lernenden müssen berücksichtigen, dass die Seilstücke zusammengeknotet werden. Außerdem muss die Länge des Seils für die beiden Pfosten passend gewählt werden. Daher werden mehr als acht Stücke des Materials benötigt.

Übliche Themen für diese Art von Aufgaben sind Kostenberechnungen, Energieverbrauch und Geschwindigkeits- bzw. Bremsverhalten von Fahrzeugen (Heymann, 2013).

Im englischsprachigen Raum werden Textaufgaben üblicherweise als „word problems“ bezeichnet. Verschaffel et al. (2020) definieren diese folgendermaßen:

„Word problems are typically defined as verbal descriptions of problem situations wherein one or more questions are raised the answer to which can be obtained by the application of mathematical operations to numerical data available in the problem statement or on numerical data derived from them.“
(Verschaffel et al., 2020)

Dabei wird angemerkt, dass die Problemstellungen nicht zwingend einen echten Realitätsbezug haben müssen. Jedoch können Textaufgaben als Medium zum Bearbeiten und Üben von mathematischen Teilschritten dienen (Verschaffel et al., 2020).

Folglich ergibt sich aus den vorangegangenen Definitionen für diese Arbeit die Auffassung, dass Textaufgaben sowohl sprachliche als auch mathematische Elemente beinhalten. Dabei können außermathematische Sachzusammenhänge, aber auch innermathematische Problemstellungen mit Hilfe von Texten beschrieben sein. Die Abgrenzung zu eingekleideten Aufgaben verläuft fließend. Dennoch ist der primäre Unterschied, dass bei Textaufgaben die mathematische Struktur nicht sofort erkannt wird und daher ein zusätzlicher Übersetzungs- und Interpretationsschritt notwendig ist.

Tabelle 1 veranschaulicht die genaue Verortung der Begrifflichkeiten. Greefrath (2010) greift dabei sowohl Motivationen der Anwendungen, als auch Darstellungsformen und den Kontext in seiner Erläuterung explizit heraus.

Tabelle 1: Aufgabentypen im Vergleich

	Eingekleidete Aufgaben	Textaufgaben	Sachaufgaben
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen
Motivation	Anwendung und Übung von Rechenfertigkeit	Förderung mathematischer Fähigkeiten (Mathematisierung)	Umwelterschließung mit Hilfe von Mathematik
Darstellung	in einfachen Sachsituationen eingegliedert, mit fehlender Relevanz	in (komplexere) Sachsituationen eingegliedert	Reale Daten und Fakten bzw. offene Angaben
Kontext	kein wirklicher Realitätsbezug	kein wirklicher Realitätsbezug	echter Realitätsbezug
Tätigkeiten	Rechnen	Mathematisieren, Rechnen, Interpretieren.	Recherchieren, Vereinfachen, Mathematisieren, Rechnen, Interpretieren, Validieren.

Quelle: Greefrath, 2010, S.86; modifiziert durch die Autorin

2.2. Relevanz von Textaufgaben

Textaufgaben nehmen eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht ein (Büchter & Leuders, 2005; Verschaffel et al., 2020) und haben einen besonderen Stellenwert als Form der Leistungskontrolle in der Schule (Schneeberger, 2009). Trotz der zum Teil fehlenden Authentizität, dominiert dieser Aufgabentyp in Schulbüchern (Schlager, 2020). Aus diesem Grund fokussiert sich diese Arbeit explizit auf das Lösen von Textaufgaben und nicht auf das gesamte Spektrum an Aufgabentypen. Zusätzlich können mit derartigen Aufgaben Teilprozesse des Modellierens und mathematische Fähigkeiten (Schlager, 2020), sowie eine der zentralen Herausforderungen beim Sachrechnen, nämlich das Übersetzen von Texten in die mathematische Sprache, geübt werden (Greefrath, 2010). Hürden, welche sich beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben manifestieren, werden punktuell trainiert.

Für Winter (1991) gibt es drei wesentliche Funktionen des Sachrechnens, welche nach Krauthausen (2018) auch für den Teilbereich der Textaufgaben gelten. Dazu zählen:

- Sachrechnen (Textaufgaben) als „Lernstoff“
- Sachrechnen (Textaufgaben) als „Lernprinzip“
- Sachrechnen (Textaufgaben) als „Lernziel“

Mit *Lernstoff* ist in diesem Zusammenhang der Umgang mit mathematischen Größen und Rechenoperationen gemeint, welche auch in alltäglichen Situationen gebraucht werden. Beispielsweise zählen dazu Bereiche des Schätzens, Messens und Zählens. Das *Lernprinzip* bezieht sich auf die gesteigerte Motivation der Schüler*innen, ausgelöst durch realitätsnahe Anwendungen (Krauthausen, 2018). Zum Beispiel kann ein Stundeneinstieg mit Hilfe einer realen Problemstellung zu einer authentischeren Behandlung des mathematischen Themenbereichs führen (Greefrath, 2010). In Bezug zu *Lernzielen* sollen Textaufgaben also zur Entfaltung der Kreativität beitragen, welche wiederum das Bild der Lernenden auf die Realität prägt (Krauthausen, 2018).

Im Vergleich dazu definieren Verschaffel et al. (2000) fünf alternative Merkmale, welche für die Relevanz von Textaufgaben wesentlich sind:

- Wissenstransfer („*application function*“)
- Förderung der Lernmotivation („*motivation function*“)
- Textaufgaben zur Selektion und Leistungsbeurteilung („*selection function*“)
- Grundgerüst für die Erarbeitung von mathematischen Begriffen („*concept forming function*“)

- Aktivierung des Vorwissens und Anstoß zu neuen Verstehensprozessen („*thought-provoking function*“)

Textaufgaben dienen zur Übung von gelernten Inhalten und zur Anwendung von Problemlöseverfahren, welche auch auf außermathematische Situationen übertragen werden können (Verschaffel et al., 2020).

Textaufgaben werden auch heute noch als häufigster Aufgabentyp im Unterricht eingesetzt, da es zahlreiche Hemmnisse gibt, welche Lehrpersonen davon abhält den Schwerpunkt des Mathematikunterrichts auf Modellierungsaufgaben zu lenken. Dazu zählen fehlende Materialien und persönliche Unsicherheiten mit dem offenen Unterrichtsformat (Greefrath, 2018). Auch die mathematischen Anforderungen übersteigen zum Teil die im Regelunterricht vorhandenen Ressourcen. Zusätzlich ist die Zeitkomponente eine Hürde für die adäquate Bearbeitung einer Modellierungsaufgabe. Zum einen ist die Vorbereitungszeit oftmals länger als beim traditionellen Unterricht, zum anderen übersteigt die benötigte Bearbeitungszeit die 50 Minuten einer Unterrichtseinheit (Franke & Ruwisch, 2010). Außerdem würde ein Testformat, das ausschließlich aus Modellierungsaufgaben besteht und bei dem möglicherweise zusätzliche Informationen recherchiert werden müssen, den zeitlichen Rahmen und die Standardisierungsbedingungen einer Leistungsüberprüfung überschreiten (Büchter & Henn, 2015). Zusätzlich liegt die im Alltag verwendete Mathematik immer tiefer und kann für das Individuum zum Teil nicht mehr ersichtlich sein. Dadurch verlieren Lernende den Anknüpfungspunkt und erkennen, bis auf einige elementare Fertigkeiten, keinen Bezug zwischen der Mathematik und der Realität (Heymann, 2013). Folglich sind authentischen Aufgabenstellungen, welche in der Realität der Schüler*innen vorkommen, oftmals schwer zugänglich und mit einem erheblichen Arbeitsaufwand verbunden.

Wegen diesen Hürden wird oftmals auf herkömmliche Textaufgaben zurückgegriffen. Natürlich sollten vermehrt Modellierungsaufgaben im Unterricht Einzug halten (Heymann, 2013), dennoch lassen sich in österreichischen Schulbüchern vor allem Textaufgaben finden. Demnach bedarf es einer genauen Analyse der Herangehensweise und Hilfestellungen in diesen Büchern, um einen adäquaten Einsatz im Unterricht zu ermöglichen.

Allerdings ist zu erwähnen, dass der Blick auf einzelne Aufgaben niemals den umfassenden Lehr-Lernprozess im Mathematikunterricht widerspiegelt (Greefrath, 2010). Dennoch sind nach Büchter and Leuders (2005) Textaufgaben eine der kleinsten Einheiten der Reflexion des Mathematikunterrichts und bieten eine anschauliche sowie allgemein anerkannte Grundlage für Diskussionen.

Die tatsächliche Relevanz einer Textaufgabe ist jedoch nur gegeben, wenn die bereits genannten Kriterien erfüllt werden. Dazu zählt zusätzlich, dass die Lebenswelt der Schüler*innen unmittelbar mit den Aufgaben in Verbindung stehen muss. Darüber hinaus sollte die Aufgabe einen realweltlichen Bezug haben und tatsächlich auch Sinn ergeben. Außerdem sollte im Text ersichtlich sein, wieso diese Fragestellung von Bedeutung ist (Heymann, 2013). Sind diese Aspekte beinhaltet, kann anwendungsorientierter Unterricht zur Erschließung der Umwelt und einem verbesserten Bild der Mathematik führen (Leuders, 2018). Außerdem kann durch den derartigen Aufgabentyp ein kreativer Denkprozess angestoßen werden und den Lernenden ein vielfältiges, mathematisches Methodenrepertoire an die Hand gegeben werden (Dewolf et al., 2015).

Die Fokussierung auf Textaufgaben bedeutet keinesfalls, dass dieser Aufgabentyp als optimal angesehen wird. Mathematikunterricht sollte auch Modellierungsaufgaben beinhalten, um die Motivation der Schüler*innen zu steigern (Borromeo Ferri, 2010). Dadurch soll eine Balance zwischen realen Problemen und innermathematischen Aufgabenstellungen geschaffen werden (Heymann, 2013). Dennoch dominieren sowohl in Prüfungsformaten als auch in Schulbüchern die klassischen Textaufgaben, weshalb in dieser Arbeit die Betonung auf diesem Aufgabentyp liegt.

3. Das Lösen von Textaufgaben

Das Lösen von Textaufgaben erfordert ein Zusammenwirken aus unterschiedlichen Kompetenzschritten. Der Lösungsprozess beinhaltet folgende Vorgehensweisen: eine Übersetzung der Realität in ein mathematisches Modell, das anschließende Lösen dieser mathematischen Problemstellung, das Rückübersetzen der mathematischen Lösung und deren Formulierung im gegebenen Sachzusammenhang (Greefrath, 2018). Dabei sind diese in Verbindung stehenden Schritte für die Schüler*innen nicht immer leicht zu erkennen und durchzuführen.

Für das Bearbeiten einer Textaufgabe erscheint ein Zusammenspiel aus Mathematik, Realität und dem Lernenden als unerlässlich (Krauthausen, 2018). Dieses Wechselspiel ist zentral für den anwendungsbezogenen Mathematikunterricht, insbesondere für anwendungsbezogene Textaufgaben. Folgende Teilprozesse können identifiziert werden: Mathematisieren, Interpretieren und Validieren (Blum, 1996; Büchter & Leuders, 2005; Schupp, 1988). Somit zeigt sich, dass ein gewisses Maß an Rechenfertigkeit, Situationsverständnis und Welt- bzw. Alltagswissen als Grundvoraussetzung für das Problemlösen erforderlich ist (Reusser, 1989). Zusätzlich werden die einzelnen Tätigkeiten vernetzt und der Lösungsprozess erweist sich als Wechselspiel zwischen realer Welt und mathematischem Modell (Krawec, 2014). Der rechnerische Aspekt rückt in den Hintergrund. Vielmehr handelt es sich um eine korrekte Modellbildung (Schneeberger, 2009).

In der Literatur wird zum Teil zwischen Problemlösen und Modellieren unterschieden. Franke and Ruwisch (2010) sehen den Begriff *Problemlösen* in Zusammenhang mit einer kognitionspsychologischen Perspektive und das *Modellieren* aus mathematikdidaktischer Sicht. Greefrath (2018) unterscheidet Modellieren und Problemlösen dahingehend, dass Problemlösen einen viel breiter gefassten Begriff darstellt und nicht nur Modellierungsaufgaben, sondern auch innermathematische Problemstellungen enthält. Somit wird bei Textaufgaben häufig von Problemlösen gesprochen, während es sich bei Sach- oder Modellierungsaufgaben um Modellierungstätigkeiten handelt. Dennoch sprechen Büchter und Leuders (2005) nicht nur beim Modellieren, sondern auch beim Problemlösen von der Bildung eines mathematischen Modells. Somit sind die Prozesse des Problemlösens und des Modellierens von zentraler Bedeutung und werden in den nachfolgenden Absätzen näher erläutert.

3.1. Modellieren

Da auch in der Bearbeitung von Textaufgaben Teilschritte des Modellierens erforderlich sind (Borromeo Ferri, 2010), braucht es zunächst eine Auseinandersetzung mit dem mathematischen Modellierungsbegriff. Insbesondere stellt das Mathematisieren, womit der Vorgang einer Übersetzung von sprachlichen Elementen in die Mathematik beschrieben wird, einen zentralen Aspekt des Modellierens dar. Diesem Übergang von einem Aufgabentext zur Gleichung wird bei dem Lösungsprozess von Textaufgaben eine besondere Bedeutung zugeschrieben (Schlager, 2020).

Für die nähere Erläuterung des Modellierens wird auf Blum and Niss (1991) zurückgegriffen. Allgemein lässt sich unter dem Begriff *Modellieren* das Bearbeiten realweltlicher Fragestellungen mit Hilfe der Mathematik auffassen (Borromeo Ferri, 2013). Die Realität wird mit Hilfe von mathematischen Modellen idealisiert und reale Problemstellungen können dadurch bearbeitet werden. Daraus entstehen Modelle, welche die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Realität abbilden, sowie die Umwelt für die Lernenden erschließen (Büchter & Leuders, 2005). Diese Modelle sind situationsabhängig und erfordern eine angemessene Interpretation. Die Konzeption von Modellen dient als Bindeglied zwischen mathematischem Fachwissen und praktischen Anwendungsgebieten in der realen Welt (Heymann, 2013). Somit entsteht bei der Anwendung von Mathematik zur Lösung realer Sachverhalte ein Kreislauf an Vorgehensweisen, welche zwischen dem mathematischen und dem realen Modell wechseln. Grundsätzlich zeigen sich starke Überschneidungen der einzelnen Modellierungskreisläufe. Im Wesentlichen sind nach Schneeberger (2009) folgende Schritte beinhaltet:

- (1) das Verständnis und die Definition der Problemsituation, um ein umfassendes Situationsmodell zu entwickeln,
- (2) die Konstruktion eines mathematischen Modells, das die relevanten Elemente, Beziehungen und Bedingungen in der Situation abbildet,
- (3) die Anwendung disziplinspezifischer Methoden, um durch das mathematische Modell einige mathematische Ergebnisse zu erzielen,
- (4) die Interpretation des mathematischen Ergebnisses im Sachzusammenhang.

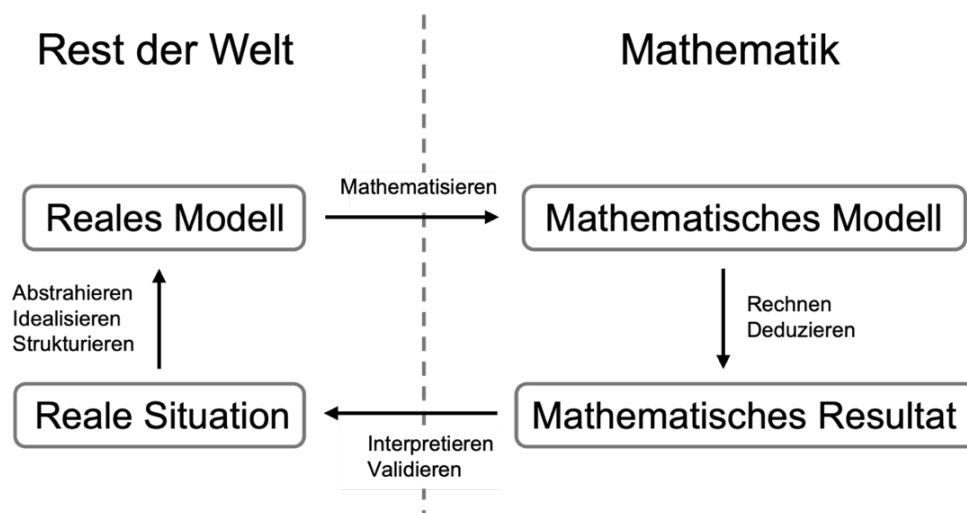


Abbildung 3: Modellierungskreislauf

Im ersten Schritt wird dabei eine reale Situation derart reduziert, dass lediglich für die Problemstellung relevante Inhalte herausgefiltert werden. Dabei wird der Sachverhalt eingegrenzt und idealisiert. Anschließend wird dieses reale Modell in die Mathematik übersetzt (Franke & Ruwisch, 2010). Lernende beschreiben also ein realweltliches Problem oder eine Situation durch ein mathematisches Modell. Dafür müssen geeignete Aspekte aus der Situation herausgegriffen werden. In diesem Zusammenhang muss eine geeignete Modellierung gewählt werden, um die Situation adäquat behandeln zu können (Büchter & Leuders, 2005). Das heißt, die Schüler*innen müssen in ihrer Toolbox das richtige Bearbeitungswerkzeug finden. In weiterer Folge wird durch das Rechnen ein mathematisches Ergebnis entwickelt, welches in einem nächsten Schritt in die Realität rückübersetzt und validiert werden muss. Tritt bei der Rückinterpretation ein Fehler auf, muss der gesamte Prozess erneut durchlaufen werden (Franke & Ruwisch, 2010).

Darüber hinaus darf nicht außer Acht gelassen werden, dass es neben diesem idealtypischen Modell einen individuellen Modellierungsprozess gibt (Borromeo Ferri, 2010). Außerdem wechseln Lernende immer wieder zwischen realem und mathematischem Modell und der Kreislauf kann mehrmals durchlaufen werden (Borromeo Ferri, 2010; Schupp, 1988).

Das mathematische Modellieren kann mit Hilfe interaktiver Tätigkeiten gelernt werden, jedoch ist es nicht lehrbar. Dementsprechend braucht es eine adäquate Unterrichtskultur, um die passenden Strukturbildungsprozesse hervorzurufen (Schneeberger, 2009). Greefrath (2018) nennt in diesem Zusammenhang neun Teilkompetenzen, welche die Schüler*innen für die Bearbeitung einer Modellierungsaufgabe benötigen.

Tabelle 2: Modellierungskompetenzen

Kompetenzen	Erläuterungen
Verstehen	Erarbeitung eines passenden Situationsmodells
Vereinfachen	Herauslesen relevanter Informationen
Mathematisieren	Übersetzung der realen Situation in die Mathematik
Mathematisch Arbeiten	Rechnen und Erarbeitung der mathematischen Lösung
Interpretieren	Lösung auf reale Situation übertragen
Validieren	Resultat im Sachkontext überprüfen
Vermitteln	Antwort formulieren
Beurteilen	Reflektieren der verwendeten Methoden
Realisieren	Mathematisches Modell einer realen Situation zuordnen

Quelle: Greefrath, 2018, S.43; modifiziert durch die Autorin

Somit zeigt sich, dass eine Vielzahl an Fähigkeiten zusammengeführt werden müssen, um eine derartige Aufgabe adäquat lösen zu können. Obwohl bei Textaufgaben lediglich ein reduzierter Realitätsbezug gegeben ist, benötigen die Lernenden entsprechende Teilkompetenzen, um eine passende Modellierung durchzuführen.

Dabei muss erwähnt werden, dass es durchaus von Bedeutung ist, den spontanen Lösungsvorschlägen der Kinder mehr Raum zu geben und sie stärker in den Fokus des Unterrichts zu rücken. Die zusätzliche Anknüpfung an ihre Vorerfahrungen erweist sich in diesem Fall als sinnvoll. Somit zeigt sich, dass besonders die Lehrperson und ihr Handeln zu einem Erfolg beim Lösen von Textaufgaben führen kann. Folglich ist die entsprechende Unterrichtskultur von außerordentlicher Bedeutung. (Franke & Ruwisch, 2010; Leiß, 2007; Schneeberger, 2009)

3.2. Problemlösen

Die Idee des Problemlösens setzt voraus, dass eine (mathematische) Situation auftritt, für die keine unmittelbare Lösung bereitsteht. Die Lernenden müssten eine passende Strategie entwickeln, um die Situation adäquat zu bearbeiten. In solchen Problemsituationen können unterschiedliche Problemlösestrategien, sogenannte Heuristiken, angewendet werden (Büchter & Leuders, 2005). Gegebenenfalls ist es erforderlich, diese Lösungsverfahren mit Hilfe der individuellen Ressourcen anzupassen oder mit anderen Ansätzen zu kombinieren (Sturm, 2018). Dieser Prozess ist mit Transferleistungen verbunden (Büchter & Leuders, 2005). Außerdem werden Teilprozesse des Modellierens,

wie zum Beispiel die Interpretation und Analyse des Problems sowie die Identifizierung der benötigten Rechenoperationen benötigt (Passolunghi & Pazzaglia, 2005).

Das Problemlösen kann zusätzlich in einem engeren Sinn gesehen werden. Dabei liegt der Fokus auf rein innermathematischen Aufgaben. Diese können durch mathematische Modelle gelöst werden. (Büchter & Leuders, 2005).

Im Allgemeinen ist zu erwähnen, dass die Schüler*innen ihr Vorwissen aktivieren müssen, um angemessene Problemlösestrategien zu entwickeln. Schoenfeld (1985) sieht Vorerfahrungen, also die Ressourcen an Weltwissen und Verständnis für das Problem, als Grundlage für einen erfolgreichen Problemlöseprozess. Das Finden einer geeigneten Bearbeitungsstrategie gestaltet sich ohne passende Alltagserfahrungen als deutlich anspruchsvoller (Heymann, 2013). Zusätzlich müssen die metakognitiven Prozesse der Schüler*innen angeregt (Büchter & Leuders, 2005; Cai, 1994), sowie die intrinsische Motivation gestärkt werden (Messner & Blum, 2006). Dies kann durch eine passende Unterrichtsgestaltung, in der die Eigenerfahrungen und das Vorwissen berücksichtigt werden, geschehen. Wird mit einer Aufgabe ein tiefer Wissensdrang geweckt, ist der schulische Mehrwert sehr hoch. Die Lernenden entdecken die Mathematik in einer für sie schlüssigen Form und können sich auch selbst dafür begeistern (Pólya, 1980). Folglich benötigt das Problemlösen ein geeignetes Unterrichtssetting, mit konstruktiven Interventionen durch die Lehrperson. Leistungsdruck hemmt dabei den Lernerfolg (Büchter & Leuders, 2005).

Nach Reusser (1989) liegt der Kern des Transformationsprozesses eines Textes in eine mathematische Gleichung in einem systematischen Aufbau und einer planvollen Bearbeitung einer Situationsvorstellung. Dabei werden vier Bereiche als Grundvoraussetzung erachtet: *sprachliches Basiswissen, Weltwissen, mathematisches Wissen, Planungs- und Kontrollwissen* (Reusser, 1989). Außerdem kann das Problemlösen durch das von Reusser (1989) entwickelte Prozessmodell beschrieben werden. Unter anderem hilft diese Illustration des Lösungsprozesses bei der Verortung von Schwierigkeiten und Hürden. Somit können im Unterricht einzelne Teilaspekte herausgegriffen und geübt werden (Schlager, 2020).

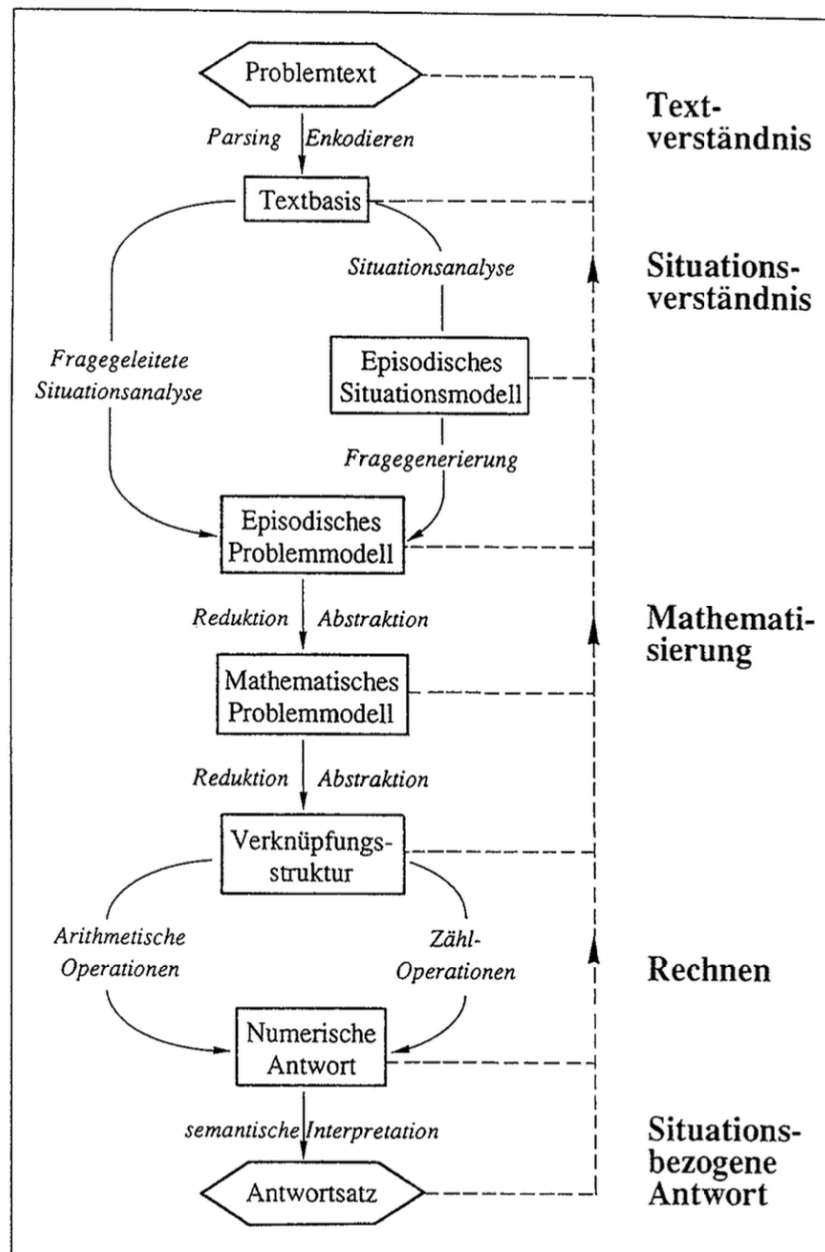


Abbildung 4: Problemlösen
Quelle: Reusser, 1989, S.91

Greefrath (2018) identifiziert wiederum mögliche Teilkompetenzen des Problemlösens. Dabei ist im Vergleich zu den Kompetenzen des Modellierens zu erkennen, dass die Prozesse des *Beurteilens* und *Realisierens* wegfallen. Vielmehr liegt hier der Fokus auf einem planmäßigen Lösen der Problemsituation. Zusätzlich werden neben Modellierungsaufgaben auch andere Aufgabentypen miteinbezogen. Dies kann teilweise zu fehlenden realweltlichen Bezügen führen. Demnach ist der Prozess abgeschlossen, sobald eine passende Antwort formuliert wird.

Tabelle 3: Teilkompetenzen des Problemlösens

Kompetenzen	Erläuterungen
Verstehen	Erarbeitung eines passenden mentalen Modells
Vereinfachen	Zerlegen in Teilprobleme
Mathematisieren	Übersetzung der realen Situation in die Mathematik
Mathematisch Arbeiten	Nutzen mathematischer Verfahren und Regeln
Interpretieren	Lösung auf reale Situation übertragen
Validieren	Resultat auf Plausibilität prüfen
Vermitteln	Antwort formulieren

Quelle: Greefrath, 2018, S.67; modifiziert durch die Autorin

Abschließend kann schlussgefolgt werden, dass der Modellierungsaspekt auch im Problemlöseprozess enthalten ist. Dennoch schließt diese Begrifflichkeit alle (mathematischen) Problemsituationen mit ein. Ein entscheidender Unterschied ist jedoch, dass das Modellieren einen realweltlichen Bezug erfordert und schlussendlich eine Rückübersetzung der Lösung benötigt. Dieser Kreislauf kann mehrmals durchlaufen werden, während das Problemlösen eine eher lineare Herangehensweise darstellt.

Tabelle 4: Modellieren vs. Problemlösen

Modellieren	Problemlösen
Strukturieren Idealisieren Abstrahieren	Verstehen der Aufgabe Planen
Mathematisieren	Mathematisieren
Rechnen Deduzieren	Rechnen
Interpretieren Validieren	Antwort

3.3. Schwierigkeiten

Schwierigkeiten beim Lösen von Aufgaben sind immer dann erkennbar, wenn Fehler im Lösungsprozess ersichtlich sind. Diese entstehen, wenn eine Diskrepanz zwischen den Kompetenzen der Lernenden und der Aufgabenschwierigkeit besteht (Schneeberger, 2009). Dabei gilt es herauszufinden, wie diese Unterschiede vermieden werden können. Hierfür gibt es zahlreiche Erklärungsansätze, welche versuchen die Schwierigkeitsbereiche der Lernenden zu klassifizieren.

Reusser (1989) nennt die „lexikalisch-syntaktischen, situations- und sprachverstehenden bzw. quantitativ-numerischen Ebenen“ als zentrale Herausforderungen. Die lexikalisch-syntaktische Ebene, alternativ als sprachlich-syntaktische Ebene bezeichnet (Franke & Ruwisch, 2010), betrifft Schwierigkeiten, die sich aus der sprachlichen Strukturierung der Aufgabenstellung ergeben. Die zweite Ebene betrifft den Übersetzungsprozess des Situationsmodells in die mathematische Sprache. Daran anknüpfend konnten Leiss et al. (2019) zeigen, dass der Aufbau eines passenden Situationsmodells für ein korrektes Lösen entscheidend ist und dieser Schritt einen großen Teil der Lösungszeit in Anspruch nimmt.

Im Vergleich dazu erläutert Prediger (2010) drei konkrete Schwierigkeitsbereiche. Diese umfassen Verständnisprobleme durch fehlende Lesekompetenz, der fehlende Aufbau von adäquaten Grundvorstellungen und ein unvollständiges oder nicht passendes Situationsmodell.

Schlager (2020) greift in diesem Zusammenhang sieben Punkte auf, welche den Lösungsprozess erschweren können. Dazu zählen unter anderem die sprachliche Komplexität, Hürden beim Lesen des Textes, konzeptuelle Schwierigkeiten, fehlende Übungsgelegenheiten, sowie kulturell und sprachlich bedingte Unterschiede in der Herangehensweise an Problemsituationen.

Eine andere Perspektive auf Schwierigkeiten im Lösungsprozess ist, diese in einer integrierten Form zu betrachten. Dabei werden Probleme im Bearbeitungsprozess verortet. Diese Hürden sind ineinander verschränkt und können nicht isoliert voneinander betrachtet werden. Demnach identifiziert Schlager (2020) vier Schwierigkeitsbereiche:

- (1) Aufbau des Situationsmodells (Lesekompetenz wird benötigt)
- (2) Mathematisieren
- (3) Umsetzung des mathematischen Modells
- (4) Fehler bei der Deutung

Bei dieser prozessorientierten Sichtweise wirken in jedem Schritt mehrere Faktoren zusammen, welche den Lösungsprozess der Lernenden erschweren können. Der Aufbau eines passenden Situationsmodells setzt beispielsweise eine dem Alter entsprechende Lesekompetenz voraus. Zusätzlich kann es passieren, dass Texte aufgrund von Vorerfahrungen anders interpretiert werden und dadurch lückenhafte Situationsmodelle entstehen. Daran anknüpfend kann durch die Fokussierung auf syntaktische Merkmale die Mathematisierung nur oberflächlich passieren und deshalb weitere Fehlerquellen auftreten. Im dritten Schritt steht der Rechenaspekt im Vordergrund, denn auch dieser erweist sich als Hürde für die Schüler*innen (Wilhelm, 2016). Im Deutungsprozess zeigt sich das fehlende Validieren und Interpretieren der Lösung als häufige Fehlerquelle (Prediger, 2010; Verschaffel et al., 2000).

Die einzelnen Kategorisierungen der Schwierigkeiten beim Lösen von Textaufgaben zeigen teilweise Überlappungen. Prediger und Krägeloh (2015) fassen diese zusammen und identifizieren drei Hauptursachen: konzeptuelle Hürden, Verständnisschwierigkeiten und die Tendenz zu oberflächlicher Modellierung. Dabei bedeutet *oberflächlich*, dass sich die Schüler*innen von Signalwörtern beeinflussen lassen, oder anhand von im Unterricht behandelten Inhalten, sowie dem daraus vermuteten Rechengang Annahmen treffen, welche nicht mit der Sachsituation in Zusammenhang stehen (Franke & Ruwisch, 2010).

Zwei wesentliche Punkte, welche das Lösen von Textaufgaben erschweren, sind sprachliche Hürden und die Übersetzung eines Textes in eine mathematische Gleichung. Diese beiden Prozesse laufen nicht getrennt voneinander ab. Deshalb bedarf es einer integrativen Betrachtung (Wilhelm, 2016). Die beiden Problembereiche werden in den nachfolgenden Absätzen näher erläutert.

3.3.1. Sprachliche Schwierigkeiten

Textaufgaben sind aufgrund ihrer sprachlichen Beschaffenheit von literarischen Texten zu unterscheiden. Die Informationsdichte der Problemstellung erfordert ein hohes Maß an Sprachverständnis und stellt für Schüler*innen eine Hürde dar (Schlager, 2020). Die Lesekompetenz kann als Voraussetzung für den Verständnisprozess gesehen werden (Sturm, 2018). Die Lernenden müssen die Informationen filtern und für die Aufgabe relevante Inhalte aus dem Text ziehen (Krawec, 2014). Hinzu kommt, dass die Schüler*innen nicht zwingend die gleichen Assoziationen mit dem Gelesenen teilen (Krauthausen & Scherer, 2007; Sturm, 2018). Dadurch entstehen, je nach Vorerfahrungen, unterschiedliche Situationsmodelle. Besonders für Lernende mit sprachlichen Defiziten zeigt sich dahingehend eine Hürde (Orosco, 2014; Schlager, 2020).

Studien belegen die Vermutung, dass für Schüler*innen mit sprachlichen Defiziten der Verstehensprozess bei Textaufgaben erschwert wird und zusätzlich mehr Zeit in Anspruch nimmt (Prediger & Özdil, 2011). Ein fehlendes Verständnis der Situation verhindert die Bildung eines passenden Situationsmodell. Dadurch zieht sich diese Hürde über den gesamten Bearbeitungsprozess hinweg. Aufgaben, die nicht oberflächlich, also ohne die Situation tatsächlich verstanden zu haben, gelöst werden können, stellen für sprachlich schwache Lernende eine stark ausgeprägte Fehlerquelle dar. Die sprachliche Komplexität kann zusätzlich die Lösungshäufigkeit bei sprachlich schwachen Schüler*innen determinieren (Schlager, 2020). Somit zeigt sich, dass die Lesekompetenz mathematische Verstehensprozesse erheblich beeinflusst (Prediger, 2010). Jedoch deuten die Ergebnisse einer Studie von Reikerås (2009) darauf hin, dass die Leseleistung den Lösungsprozess nicht in gleichem Maße beeinträchtigt, wie die allgemeine mathematische Kompetenz, weshalb auch diese mathematische Übersetzungsleistung einer genauen Analyse bedarf.

3.3.2. Mathematisieren

Lernende beschreiben ein realweltliches Problem oder eine Situation durch ein mathematisches Modell. Dafür müssen geeignete Aspekte aus der Situation herausgegriffen und übersetzt werden (Büchter & Leuders, 2005; Reusser, 1989). Zunächst integrieren die Lernenden den Text in ihre eigene Vorstellung der Realität und filtern anschließend das mathematische Grundgerüst der Situation heraus (Reusser, 1989). Dabei ist das Wechselspiel zwischen Situationsmodell und dem mathematischen Modell wesentlich. Dieser Transfer kann als Hauptfehlerquelle angesehen werden. Die Lernenden haben die Aufgabe zwischen der Alltagssprache und der mathematischen Sprache eine Brücke zu schlagen und dem Text einen mathematischen Sinn zu geben. Dazu müssen Rechenoperationen gezielt verwendet werden, um den Sachzusammenhang der einzelnen Elemente adäquat darstellen zu können (Reusser, 1989). Powell et al. (2022) konnten in ihrer Studie zeigen, dass der häufigste Fehler beim Lösen von Textaufgaben in der Wahl der geeigneten Rechenoperation lag. Der Übersetzungsprozess von Textaufgaben in ein mathematisches Modell beinhaltet die Integration von Vorerfahrungen der Lernenden. Außermathematisches Vorwissen fließt somit in das Modell mit ein (Borromeo Ferri, 2010). Dieser Prozess wird als Mathematisieren bezeichnet und stellt für Lernende eine zentrale Hürde im Lösungsprozess dar. Oftmals werden einzelne Informationen isoliert voneinander betrachtet und es fehlt die Vernetzung der Inhalte, um zu einer korrekten Lösung zu kommen. Zusätzlich werden zum Teil indirekte Informationen nicht in das mathematische Modell miteinbezogen. Folglich führt dies zu einem unvollständigen Ergebnis.

Außerdem besteht die Schwierigkeit, dass Schüler*innen die im Text gegebene Reihenfolge der Informationen chronologisch abarbeiten, ohne den Sachzusammenhang genauer zu reflektieren (Franke & Ruwisch, 2010).

3.4. Hilfestellungen und Lösungsstrategien

Als mögliche Hilfestellungen beim Lösen von Textaufgaben lassen sich zahlreiche Herangehensweisen eruieren. Allgemein kann zwischen direkter und indirekter Hilfe differenziert werden, wobei sich die direkte Hilfestellung auf konkrete mathematische Inhalte bezieht (Greefrath, 2018). Für die Bearbeitung von Textaufgaben sind für diese Arbeit jedoch vor allem universell anwendbare Strategien von Interesse.

Lösungsstrategien können den Schüler*innen helfen eine schematische Herangehensweise zu entwickeln (Lessani et al., 2014). Es gibt zahlreiche kognitive und metakognitive Strategien auf Mikro- und Makro-Ebene (Schlager, 2020). Unter Strategie wird dabei eine systematische Vorgehensweise zur Lösung eines Problems verstanden. Diese sind zwar keine Garantie für eine korrekte Lösung des Problems, erhöhen jedoch die Wahrscheinlichkeit einer gehaltvollen Auseinandersetzung mit der dargestellten Situation (Verschaffel et al., 2020). Darauf aufbauend werden auch automatisch ausgeführte Handlungen als Strategie aufgefasst, da die meisten Strategien nach wiederholter Anwendung automatisiert werden und somit unbewusst ablaufen. Sie werden folglich in vielen Fällen nicht bewusst ausgewählt (Schlager, 2020).

Das mathematische Verständnis wird durch exemplarische Lösungsvorschläge vertieft und hilft bei einer strukturierten Herangehensweise (Lessani et al., 2014). Dabei ist jedoch nicht gemeint, dass ein Lösungsweg eintrainiert werden soll, welcher bei jeder Textaufgabe zu Anwendung kommt. Vielmehr kann das Kennenlernen von unterschiedlichen Lösungswegen eine gewisse Flexibilität im Lösungsprozess mit sich ziehen. Somit können diese Herangehensweisen auf verschiedene Problemstellungen übertragen werden. Dabei sollte explizit im Lehrbuch betont werden, dass es sich um mögliche Strategien handelt, welche auch abgewandelt werden können (Fan & Zhu, 2007).

Büchter und Leuders (2005) nennen fünf mögliche Problemlösestrategien, welche den Schüler*innen bei einem flexiblen Umgang mit Aufgaben helfen sollen. Dazu zählt das Veranschaulichen der Problemsituation, ein systematisches Ausprobieren, Beispiele in den Fokus nehmen, von der Lösung ausgehen und „rückwärts“ Arbeiten sowie „vorwärts“ Arbeiten, also ausgehend von gegebenen Informationen im Text. Dabei wird betont, dass nicht eine Strategie immer wieder geübt und schematisch eintrainiert werden soll, sondern verschiedene Möglichkeiten von Lösungsverfahren und Hilfestellungen in Betracht gezogen werden sollen. Es ist somit wichtig, nicht nur die Lösung im Blick zu

haben, sondern auch zu überlegen, welche Strategie angewendet werden kann (Büchter & Leuders, 2005).

Jedoch sollten die Erwartungen an heuristische Strategien nicht zu hoch sein, denn der Erfolg des Problemlösens basiert auf mathematischen Ressourcen und Vorerfahrungen. Selbst eine sorgfältige Anwendung von Heuristiken kann keine fehlenden Kenntnisse des Fachwissens ersetzen (Schoenfeld, 1985). Zusätzlich gibt es eine vermeintliche Hilfestellung, das Aufsuchen von Schlüsselworten, welche nicht zu dem erhofften Ergebnis führt (Schlager, 2020). Die Möglichkeiten das kritische Denken der Schüler*innen anzuregen wird dadurch minimiert (Xin, 2007), was weniger dem Verstehensprozess dient, sondern eher das oberflächliche Bearbeiten eintrainiert (Schlager, 2020). Folglich stoßen Lernende mit Schlüsselwortstrategien beim Bearbeiten authentischer Textaufgaben auf fehlendes Verständnis für die Situation (Jitendra, 2008; Xin, 2007).

Dennoch konnte eine Studie von Meloth und Deering (1994) zeigen, dass eine Vorerfahrung mit spezifischen Problemlösestrategien zu einem höheren Niveau im Lösungsprozess der Schüler*innen führt. Deshalb werden hier exemplarisch einige Elemente herausgegriffen, welche als geeignete Hilfestellung beim Lösen von Textaufgaben erachtet werden. Dazu zählen: Über die Mathematik sprechen, bildliche Darstellungsformen und Lösungspläne. Letztere stellen eine Kombination aus unterschiedlichen Heuristiken dar.

3.4.1. Über Aufgaben sprechen

Die Erfahrungen beim Lösen einer Textaufgabe variieren unter Schüler*innen. Deshalb kann es von Vorteil sein, wenn die Lernenden über ihre persönlichen Erkenntnisse sprechen und sich gegenseitig verschiedene Lösungsprozesse erklären (Büchter & Leuders, 2005; Jitendra, 2008). Die Schüler*innen müssen in der Lage sein, eine Aufgabe in eigenen Worten wiederzugeben. Dadurch wird der Verstehensprozess vorangetrieben (Pólya, 1980). Im Speziellen erfordert die Problemübersetzung des Textes in die Mathematik einen Zwischenschritt, welcher die Übersetzung in eigene Worte beinhaltet (Mayer, 1998). Dieser Schritt ist für das spätere Problemlösen unerlässlich (Krawec, 2014). Durch das Sprechen über die Mathematik können mitunter mehr Begrifflichkeiten geklärt werden. Das mathematische Vokabular erweitert sich und führt zu einem besseren Verständnis der Textaufgabe (Powell et al., 2022). Außerdem können oftmals Erklärungen von Gleichaltrigen besser nachvollzogen werden (Franke & Ruwisch, 2010).

Somit zeigt sich die Notwendigkeit im Unterricht den Diskurs über mathematische Themen anzuregen. Dabei umfasst der Begriff *Diskurs* mehr als nur Sprache. Er ermöglicht auch die Schaffung und Strukturierung von Realität (Schneeberger, 2009). Diese

Tatsache kann für den Verstehensprozess von außerordentlicher Bedeutung sein und sollte von Lehrpersonen speziell berücksichtigt werden. Die Lernenden stehen dabei im Vordergrund des Unterrichts. Kurze Plenumsphasen können zum Vergleichen der Rechenwege genutzt werden. Demnach ist eine Erarbeitung in Kleingruppen geeignet, um den kommunikativen Prozess zu fördern (Greefrath, 2018). Jedoch konnte Schneeberger (2009) in seiner Studie zeigen, dass die Gruppenkonstellation eine entscheidende Rolle spielt, da die Anleitung und Hilfestellung durch einen leistungsstarken, gleichaltrigen Lernenden zu einem erfolgreichen Kompetenzzuwachs führt. Somit sollte bei der Zusammensetzung der Teams auf eine ausgewogene Niveauverteilung geachtet werden (Schneeberger, 2009).

3.4.2. Bildliche Darstellung

Eine der gängigsten Hilfestellungen ist das Visualisieren der Aufgabe. Durch das Erstellen einer Skizze können Schüler*innen unterstützt werden, Zusammenhänge zu erkennen und ein mentales Modell der Situation zu bekommen (Schlager, 2020). Zusätzlich kann das Zeichnen der Problemsituation einen erheblichen Erkenntniszuwachs der Lernenden anregen (Pólya, 1980). Außerdem dient eine Verschriftlichung des Denkprozesses während der Erarbeitung als Anhaltspunkt. Zusätzlich ermöglicht die Darstellung in Form von Skizzen eine Rückschau auf die Problemsituation und kann deshalb als Kontroll- und Validierungselement gesehen werden (Franke & Ruwisch, 2010). Dennoch hängt die Qualität der Visualisierung in einem hohen Maße von dem Verständnis der Situation ab (Krawec, 2014). Außerdem besteht die Gefahr, dass sich die Schüler*innen in Details verlieren, welche für das tatsächliche Lösen der Aufgabe irrelevant sind (Franke & Ruwisch, 2010).

Darüber hinaus besteht die Möglichkeit mit Hilfe von digitalen Werkzeugen Problemstellungen und komplexe Zusammenhänge zu visualisieren. Die Lernenden können anhand der Technik unterschiedliche Lösungsansätze ausprobieren und weitere Hintergrundinformationen recherchieren. Die Anwendung von dynamischen Geometriesoftware hilft bei der Simulation von mathematischen Prozessen (Greefrath, 2018). Beide Tätigkeiten können zu einem umfassenden Verständnis der Situation beitragen. Zusätzlich dienen technische Hilfsmittel als Rechen- und Kontrollwerkzeug (Greefrath, 2010).

Nicht nur das Zeichnen einer Skizze, sondern auch eine zusätzliche Hilfestellung in Form von einer bereits vorhandenen Illustration der Situation kann den Schüler*innen beim Lösen helfen. Wird eine Textaufgabe mit einem Bild komplementiert, entsteht dadurch ein reichhaltigeres mentales Situationsmodell (Dewolf et al., 2015). Dennoch ist hier zu beachten, dass die Anforderungen an die Lernenden verändert werden.

Es entsteht eine neue Situation, welche mit veränderten Modellierungstätigkeiten gekoppelt ist. Zum Beispiel kann die folgende Aufgabe auf zwei Arten gestellt werden:

Wie weit sieht man von einem 15 m hohen Leuchtturm am Strand auf das offene Meer?

Dabei ist eine der größten Herausforderungen für die Schüler*innen die Situation in ein mathematisches Problem zu verwandeln. Für eine korrekte Bearbeitung sind zusätzlich Vorerfahrungen miteinzubinden, zum Beispiel die Erkenntnis, dass die Erde eine Kugel ist und in diesem Fall in der Skizze als Kreis abgebildet werden kann. Außerdem müssen die Lernenden die Sichtweite als Tangente erkennen und daraus die richtigen Schlussfolgerungen für ein passendes mathematisches Modell ziehen (Humenberger, 2021).

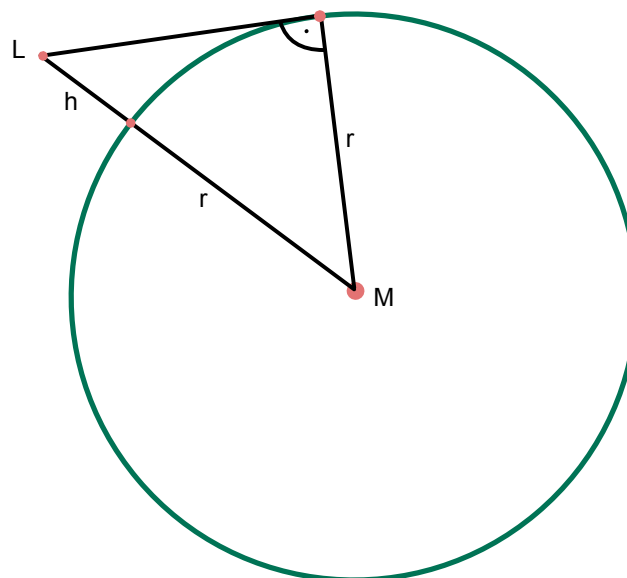


Abbildung 5: Skizze der Leuchtturm-Aufgabe

Wird die Skizze bereits vorgegeben, fällt ein Großteil dieses Verstehensprozesses weg. Somit entwickelt sich daraus eine schnell lösbare Aufgabe, welche nur punktuell Teile des Modellierungskreislaufs beinhaltet. Daher ist es wesentlich, dass sich Lehrpersonen erkennen, welche Wirkung das Einbeziehen von Illustrationen auf die Lernenden hat (Humenberger, 2021).

Dewolf et al. (2015) erkannten in ihrer Studie lediglich eine geringe Korrelation zwischen bildlichen Darstellungen und der Häufigkeit der Lösungsfindung bei Textaufgaben. Dabei wird unter anderem auf die bereits existierenden Vorerfahrungen der Schüler*innen verwiesen, welche im Zweifelsfall dazu führen können, dass die Lernenden diverse Illustrationen als überflüssig ansehen. Oftmals wurden die Lernenden bereits in ihren Schulbüchern mit Bildern konfrontiert, welche lediglich die Buchseiten schmücken und

Aufmerksamkeit für die nachstehende Textaufgabe generieren sollen, jedoch wenig zum eigentlichen Lösungsprozess beitragen (Levie & Lentz, 1982). Daher ist es entscheidend, bei der Verwendung von Illustrationen besonders darauf zu achten, dass sie einen tatsächlichen Mehrwert bieten.

3.4.3. Lösungspläne

Oftmals besteht das Lösen einer Aufgabe aus einer Aneinanderreihung von bereits bekannten Schritten, die schlussendlich zu einem Resultat führen. Das bedeutet eine planmäßige Herangehensweise ist hilfreich, um das Problem zu lösen (Pólya, 1966). Durch diesen konzeptuellen Ansatz, welcher mathematische Problemlösungs- und Leseverständnisstrategien integriert, können die Schwächen von allgemeinen Heuristiken, wie zum Beispiel dem Aufsuchen von Schlüsselwörtern, ausgeglichen werden (Jitendra, 2008). Das schematische Vorgehen spielt eine entscheidende Rolle bei der Konstruktion des Situationsmodells und bei der Mathematisierung. Dabei soll die Bearbeitung mit einem Lösungsplan als Hilfestellung und weniger als obligatorische Regel gesehen werden, die streng durchlaufen und eingehalten werden muss (Goulet-Lyle et al., 2020). Ein geschickter Lösungsprozess beinhaltet die Auswahl eines geeigneten kognitiven Schemas auf Basis der Hintergrundinformationen im Text. Dadurch kann das Verstehen der Aufgabe erleichtert und die Motivation der Lernenden gesteigert werden (Verschaffel et al., 2020).

Die Funktion der Lehrperson ist es, die Lernenden behutsam und sorgfältig an Probleme heranzuführen. Dabei sollen die Schüler*innen das Gefühl der Selbstwirksamkeit bekommen, aber mit der Problemstellung nicht allein gelassen werden. Die Aktivität der Schüler*innen steht im Zentrum des Lösungsprozesses. Deshalb erweist sich das Stellen von gezielten Fragen, welche allgemeingültig auf unterschiedliche Problemstellungen übertragen werden können, als äußerst günstige Möglichkeit, die Schüler*innen optimal zu unterstützen (Pólya, 1980). Dadurch entsteht eine Hilfestellung, welche strategische und indirekte Hinweise zur Lösung der Aufgabe gibt (Greefrath, 2018).

Auf Basis dieser Erkenntnisse formuliert Pólya (1980) vier Schritte mit Fragestellungen in den jeweiligen Teilschritten, die den Lernenden an die Hand gegeben werden können, um das Lösen von mathematischen Aufgaben zu erleichtern. Die Schüler*innen erlangen dadurch die Fähigkeit, bestimmte Informationen aus den Teilschritten so zu internalisieren, dass sie schließlich in der Lage sind, sich selbst die angemessenen Fragen zu stellen und die entsprechenden Denkprozesse auf natürliche und überzeugende Weise durchzuführen (Pólya, 1980).

Zu den vier Phasen des Lösens nach Pólya (1980) gehören:

- (1) Verstehen der Aufgabe,
- (2) Entwickeln eines Plans,
- (3) Durchführung,
- (4) Rückschau auf die Problemsituation.

Der erste Schritt des Verstehensprozesses beinhaltet zusätzlich das bildliche Darstellen des Problems, sowie das aktive, mündliche Wiedergeben der Problemstellung von Seiten des Lernenden. Dabei wird das grundlegende Verstehen der Aufgabe als zentral erachtet. Die Frage nach dem gegebenen Sachzusammenhang und der gesuchten Unbekannte stellen sich als wesentlich heraus (Pólya, 1980). In diesen Prozess fließt die Informationsgewinnung sowohl aus dem Text als auch aus weiterführenden Recherche-tätigkeiten mit ein (Cai, 1994).

Der zweite Schritt ist das Erstellen eines Plans. Dabei verknüpfen die Lernenden ihre Vorerfahrungen mit dem gegebenen Kontext. Das Ziel dieses Schrittes ist, sich eine mathematische Methode zu überlegen, die es ermöglicht, die Aufgabe zu lösen (Pólya, 1980). Dieser Prozess kann als Mathematisieren aufgefasst werden. Vor allem leistungsschwache Schüler*innen haben in diesem Planungsprozess Schwierigkeiten, da sie oftmals nur oberflächlich ein Grobziel definieren und den einzelnen Schritten bzw. Teilzielen weniger Aufmerksamkeit schenken. Im Gegensatz dazu zeigen leistungsstarke Lernende eine ausführlichere Planungstätigkeit, welche sich unter anderem in der Definition von kleineren Teilzielen auf dem Weg zur Lösung des Problems äußern (Cai, 1994). Außerdem ist es entscheidend, Vorwissen, bereits erarbeitete Strategien und verwandte Aufgaben mit der neuen Aufgabe zu verknüpfen. Dahingehend erweist sich das Herstellen von Vernetzungen als sinnvoll (Pólya, 1980).

Im dritten Schritt steht die Umsetzung des Plans im Vordergrund. Dazu zählt neben den Rechenschritten auch die gleichzeitige, sorgfältige Prüfung jedes mathematischen Teilaspekts. Zusätzlich können die Informationen des Texts noch einmal reflektiert werden und die Frage, ob alle relevanten Daten und Informationen genutzt wurden, erscheint als hilfreich (Pólya, 1980).

Schlussendlich wird der Lösungsprozess durch eine erneute Kontrollschleife, welche auch auf die Deutung und Interpretation des Sachzusammenhangs abzielt, abgeschlossen (Pólya, 1980). Des Weiteren evaluieren die Schüler*innen erneut ihre getroffenen Entscheidungen im Lösungsprozess (Cai, 1994).

Außerdem können Methoden und Rechenwege reflektiert, sowie auf andere Problemsituationen übertragen werden (Franke & Ruwisch, 2010). Pólya (1980) betont, dass die Kontrolle der Lösung einen wesentlichen Teil ausmacht, um noch einmal die Gesamtsituation und den Lösungsweg in den Blick zu nehmen.

Schoenfeld (1985) unterteilt den Lösungsprozess noch etwas detaillierter. Dabei beschreibt er sechs Schritte: Lesen, Analysieren, Explorieren, Planen, Implementieren bzw. Durchführen und Verifizieren. Somit wurde von ihm der Aspekt des Verstehens der Aufgabe unterteilt in den Lese-, Analyse- und Explorationsprozess.

Verschaffel et al. (2000) unterteilt das Problemlösen in sechs Teilschritte, welche von den Schüler*innen durchlaufen werden müssen, um die Aufgabe auf eine authentische Weise lösen zu können:

- (1) Informationsgewinnung: Dabei ist gemeint, dass die Schüler*innen adäquat mit den im Text enthaltenen Informationen umgehen können. Beinhaltet sind das Extrahieren relevanter Informationen, das Weglassen von überflüssigen Textpassagen, das Herauslesen von Daten aus Diagrammen und Tabellen, sowie die Umstrukturierung der Aussagen zur Gewinnung der passenden Informationen.
- (2) Situative und mathematische Überlegungen: Dieser Schritt umfasst den Verstehensprozess der qualitativen Situation. Die Lernenden versuchen die Situation nachzuvollziehen, um ein passendes Situationsmodell herzustellen. Zusätzlich können die Schüler*innen daraus mathematische Beziehungen herstellen, woraus in weiterer Folge für die Lösung notwendige Rechenoperationen abgeleitet werden können.
- (3) Auswahl einer Problemlösungsstrategie: Die Schüler*innen sind außerdem gefragt eine passende Strategie zu finden. Dazu zählen das Anfertigen einer Skizze, das Erstellen einer Tabelle, das Aufsuchen einer Regel oder eines Musters, das Ausschließen möglicher Lösungen und viele weitere Heuristiken, welche beim Lösen helfen können.
- (4) Auswahl der mathematischen Operation: Schlussendlich führen die vorherigen Überlegungen zur Auswahl der passenden mathematischen Operationen und die Durchführung der notwendigen Rechnungen.
- (5) Interpretation der Antwort: In diesem Schritt liegt das Augenmerk auf der richtigen Deutung des Ergebnisses, um als Lösung der Aufgabe angesehen zu werden.

- (6) Verifizieren der Lösung im Sachzusammenhang: Neben der Durchführung einer mathematischen Probe, kann das Ergebnis zusätzlich im Sachkontext hinsichtlich dessen Sinnhaftigkeit überprüft werden. Die Rückschau und erneute Validierung der Problemsituation als letzten Schritt ist zentral, um die zyklische Komponente eines Lösungsprozesses herauszuarbeiten.

Die vorgestellten Konzepte weisen zahlreiche Ähnlichkeiten und Überlappungen auf, doch sie gliedern die einzelnen Teilschritte unterschiedlich. Dadurch entstehen leicht abgewandelte Lösungsansätze, welche in Schulbüchern und im Unterricht integriert werden können.

Tabelle 5: Vergleich der Lösungsstrategien

Pólya	Schoenfeld	Verschaffel et al.
Verstehen der Aufgabe	Lesen Analysieren Explorieren	Informationsgewinnung Situative und mathematische Überlegungen
Entwickeln eines Plans	Planen	Auswahl der Strategie
Durchführung	Durchführung	Mathematische Operation
Rückschau	Verifizierung	Interpretation Verifizierung

Neben den hier vorgestellten Konzepten nach Pólya (1980), Schoenfeld (1985) und Verschaffel et al. (2000) greifen unter anderem Franke und Ruwisch (2010) Beispiele aus Schulbüchern auf, welche Lösungspläne und -strategien beinhalten. Diese Abfolge an Schritten ähnelt den Konzepten, sie ist jedoch altersgerecht formuliert und beinhaltet konkrete Handlungsempfehlungen für die Lernenden. Deshalb werden diese Hilfestellungen exemplarisch aufgegriffen, um als Ergänzung zur vorhandenen, wissenschaftlichen Perspektive zu dienen. Die Abfolge des Lösungsprozesses lautet folgendermaßen:

Erfolgreich sachrechnen

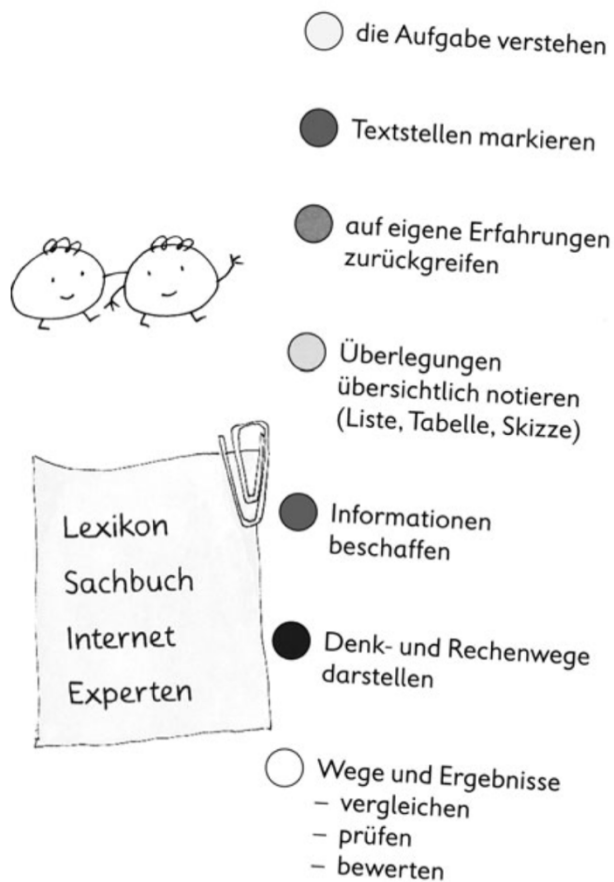


Abbildung 6: Lösungsplan für Sachaufgaben
Quelle: Zahlenreise 4, 2004, S.12

Somit zeigt sich, dass neben den wissenschaftlichen Konzepten bereits konkrete Lösungspläne in den Schulbüchern integriert werden, welche eine altersgerechte Formulierung aufweisen. Außerdem zeigt diese Lösungsstrategie Parallelen zu den Konzepten von Pólya (1980), Schoenfeld (1985) und Verschaffel et al. (2000), weshalb es in diesem Zusammenhang als geeignetes Beispiel angeführt werden kann. In weiterer Folge gilt es herauszufinden, welche Strategien den Schüler*innen in österreichischen Schulbüchern an die Hand gegeben werden, um das Lösen von Textaufgaben zu fördern.

4. Analytischer Rahmen

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht das Lösen von Textaufgaben und mögliche Hilfestellungen im Erarbeitungsprozess, welche Schulbücher in Österreich bereitstellen. Demnach ist das Verfahren des Modellierens von Problemstellungen eine Schlüsselfertigkeit, welche bei einer genaueren Analyse mehr Aufschluss über die Hürden von Textaufgaben gibt. Zunächst ist es also wichtig, die Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgaben zu kennen, um passende Interventionsmöglichkeiten zu schaffen. Dabei hat sich gezeigt, dass Lösungspläne und exemplarische Lösungswege zu einem Kompetenzzuwachs der Schüler*innen hinsichtlich des Umgangs mit Textaufgaben führen können. Da Schulbücher eine zentrale Quelle für Unterrichtsmaterialien darstellen, werden die darin enthaltenen Erklärungsvorschläge und Herangehensweisen in Bezug auf das Lösen von Textaufgaben analysiert. Die folgende Fragestellung gilt als Ausgangspunkt der Untersuchung:

Welche Hilfestellungen verwenden Schulbücher, um Schüler*innen beim Lösen von Textaufgaben im Mathematikunterricht zu unterstützen?

Zur Beantwortung der Fragestellung wird ein Analyseraster konzipiert, welches als Basis der Untersuchung dient. Bevor jedoch näher auf das konzeptionelle Vorgehen eingegangen wird, erfolgt zunächst eine genauere Einordnung der Bedeutung von Schulbüchern im österreichischen Regelunterricht. Anschließend können aus den Erkenntnissen der Literaturrecherche Hypothesen abgeleitet werden. Diese Überlegungen dienen als Ausgangspunkt des weiteren Analysevorgehens. In diesem Prozess werden Schulbücher anhand eines eigens dafür konzipierten Analyserasters untersucht und im abschließenden Unterkapitel detaillierter erläutert.

4.1. Relevanz der Schulbücher

Verschaffel et al. (2000) identifizieren den Einfluss von Schulbüchern als Schlüsselfaktoren, welche beim Umgang der Schüler*innen mit Textaufgaben eine dominante Rolle spielen, wozu unter anderem der starke Einfluss von Schulbüchern zählt. Weitere Faktoren sind die Kompetenzen der Lehrperson und geeignete Bewertungsinstrumente. Demnach zeichnet sich also eine bedeutende Rolle der Schulbücher ab und Mathematiklehrbücher werden auch heute noch als zentrales Element des Unterrichts angesehen (Fan & Zhu, 2007; Haggarty & Pepin, 2002; Oates, 2014; Vicente et al., 2020). Außerdem weisen die Daten von 57 Länder, darunter auch Österreich, die an der *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) teilgenommen haben, darauf hin, dass durchschnittlich 96% der Lehrkräfte ein Lehrbuch verwenden und dieses für viele die Hauptgrundlage der pädagogischen Praxis darstellt (Mullis et al., 2012).

Schulbücher bestimmen zum Teil die gelehrten Inhalte und können somit als Indikator zur Analyse eines Unterrichtscurriculums dienen (Apple, 1992; Oates, 2014). Sie geben einen Einblick, auf welche Art und Weise Mathematik in den Schulen unterrichtet wird (Mayer et al., 1995) und dienen als Leitfaden für den Unterricht (Erbas et al., 2012). Außerdem helfen sie Themen zu strukturieren und liefern zahlreiche Materialien und Ideen für die Unterrichtsgestaltung (Erbas et al., 2012; Grouws & Mathematics, 1992). Demnach sind sie also sowohl für die Lehrpersonen als auch für die Lernenden von zentraler Bedeutung (Erbas et al., 2012). Da vor allem die Textaufgaben von den Lehrpersonen nicht selbst formuliert werden, sondern aus Lehrbüchern stammen, erscheint es als sinnvoll, die Schulbücher näher zu betrachten, um Aussagen über das Vorgehen beim Lösen von Textaufgaben in der österreichischen Sekundarstufe I treffen zu können. Natürlich ist hier anzumerken, dass die Digitalisierung voranschreitet und die Relevanz von Schulbüchern in Papierform in Frage gestellt werden kann. Dennoch spielen Lehrbücher bis heute eine wichtige Rolle bei der Unterrichtsgestaltung (Oates, 2014). Außerdem werden zahlreiche digitale Materialien von Schulbuchverlagen zur Verfügung gestellt. Demnach ist folglich eine Überschneidung der Inhalte möglich und eine Analyse der Schulbücher kann in gewissen Bereichen auf Online-Materialien zu Textaufgaben übertragen werden.

Mathematiklehrbücher haben einen Einfluss auf das Lernen von Problemlösestrategien, zum einen durch die Vielfalt an Problemstellungen, welche in Textaufgaben enthalten sind und zum anderen durch die exemplarisch angegebenen Lösungsansätze (Vicente et al., 2020). Viele Studien, welche Textaufgaben in Schulbüchern analysiert haben, konzentrieren sich lediglich auf die Fülle und Qualität dieser Aufgaben (Vicente et al., 2018; Xin, 2007), jedoch weniger auf die Art und Weise, wie Lösungsstrategien in Lehrbüchern erklärt werden.

Dennoch betonen Fan und Zhu (2007) die Bedeutung von exemplarischen Darstellungen von Problemlöseverfahren, da diese einen wichtigen Einfluss auf die Herangehensweise des Problemlösens der Schüler*innen hat. Auch in Österreich enthalten Schulbücher Modelle zur Lösung von Textaufgaben, die in verschiedene Schritte unterteilt sind und Lösungsvorschläge mit explizit identifizierten und angewendeten Teilaspekte beinhalten.

Zur Analyse werden österreichische Schulbücher der Sekundarstufe I herangezogen, da bereits Radatz (1983) in seiner Studie zeigte, dass Kinder, die länger im Schulsystem sind, häufiger unlösbare Aufgaben, wie die sogenannten Kapitänsaufgabe, versuchen zu berechnen.

Somit manifestieren sich durch den schulischen Einfluss vorgefertigte Lösungsschemata. Dadurch ist es von besonderem Interesse, diesen Prozess in der Sekundarstufe I näher zu analysieren.

4.2. Hypothesen

Goulet-Lyle et al. (2020) nennen Pólya's Abfolge an Schritten, als die am häufigsten verwendete Lösungsanleitung. Ebenso erläutert Jitendra (2008), dass neben dem Fokus auf Schlüsselwörter und ähnlichen, oberflächlichen Heuristiken oftmals die vier Schritte nach Pólya für Erklärungsansätze in Schulbüchern zum Lösen von Textaufgaben herangezogen werden. Fan und Zhu (2007) konnten in der Studie zeigen, dass unter anderem in China und den USA die vier Schritte nach Pólya, jeweils leicht adaptiert, Erwähnung in Schulbüchern der Sekundarstufe I finden. Auf Basis dieser Erkenntnisse lautet die erste Hypothese wie folgt:

Die häufigste Erklärungsabfolge in Schulbüchern basiert auf den vier Schritten nach Pólya (1966), welche die Punkte (1) Verstehen der Aufgabe, (2) Darstellen und Überlegen, (3) Aufschreiben der Lösung, (4) Kontrolle und Antwort beinhalten.

Außerdem zeigt sich die generelle Beobachtung, dass in guten Lehrbüchern das Ausmaß an Erklärungen zum Thema Problemlösen allmählich abnimmt, je älter die Lernenden sind. Die Schüler*innen verinnerlichen nach und nach die unterschiedlichen Ansätze des Problemlösens, weshalb eine erneute Erklärung im Lehrbuch obsolet wird (Vicente et al., 2020). Beispielsweise konnten Vicente et al. (2020) für Schulbücher der Sekundarstufe I in Singapur zeigen, dass eine stufenweise Anleitung des Problemlöseprozesses mit höheren Klassenstufen abnimmt. Basierend auf diesen Überlegungen wird hinsichtlich der einzelnen Klassenstufen eine Abnahme an Erklärungsansätzen zwischen der 5. und 8. Schulstufe erwartet. Konkret bedeutet dies also:

In österreichischen Schulbüchern nimmt die quantitative Anzahl an Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben zwischen der 5. und 8. Schulstufe sukzessive ab.

4.3. Methodisches Vorgehen

Angelehnt an diese Überlegungen werden in dieser Arbeit die Erklärungsansätze in österreichischen Schulbüchern analysiert. Dabei wird auf Basis der Konzeptideen von Pólya (1980), Schoenfeld (1985) und Verschaffel et al. (2000) ein Analyseraster erstellt, welches als Grundlage für die weiterführende Untersuchung der Lehrbücher dient.

Tabelle 6: Analyseraster

Stufen	Inhalt
Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen Markieren wichtiger Informationen Recherchieren Verknüpfen mit Vorwissen
Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren Skizze Zusammenhänge erkennen Informationen strukturieren
Entwicklung eines Plans	Mathematische Operationen wählen
Durchführung	Lösung ausrechnen Rechenweg darstellen
Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen
Reflexion	Lösung hinterfragen Probe durchführen

Zunächst werden entsprechende Schulbuchseiten, welche explizit Erklärungsansätze und Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben enthalten, extrahiert und Teileaspekte entsprechend dem Analyseraster den einzelnen Kategorien zugewiesen.

Die Analyse gliedert sich in zwei Phasen. Zum einen wird untersucht, ob die einzelnen Problemlösungsschritte in den Erklärungen der Bücher enthalten sind und zum anderen wird darauf geachtet, ob eine bestimmte Abfolge von Schritten in mehreren Schulbüchern vorkommen. Anhand dieser Zerlegung etabliert sich ein detailliertes Bild an Hilfestellungen, welche den Lernenden von Seiten der Lehrbücher an die Hand gegeben wird.

5. Schulbuchanalyse

Die Arbeit fokussiert sich auf vier österreichische Schulbücher, welche im Schulalltag häufig Verwendung finden. Zu Beginn dieser Analyse wurden informelle Gespräche mit Mathematik-Lehrkräften geführt, um eine möglichst repräsentative Auswahl an Schulbüchern treffen zu können. Die hier untersuchten vier Bücher wurden dabei am häufigsten erwähnt. Außerdem zeigt ein Blick in österreichische Buchhandlungen die Dominanz dieser Schulbücher und die Reichweite der gewählten Texte. Zu den Analysematerialien zählen folgende vier Bücher:

- (1) Thema Mathematik,
- (2) Lösungswege,
- (3) Mathematik verstehen,
- (4) Das ist Mathematik.

Zunächst werden Buchseiten zum Thema Textaufgaben aus den Schulbuchreihen herausgegriffen und anschließend hinsichtlich des Analyserasters genauer eingeordnet. Dabei erweist sich eine chronologische Herangehensweise nach der Schulstufe als sinnvoll. Bei der Sichtung der Schulbücher wird auf die Aktualität der Schulbücher geachtet. Folglich wird in allen Schulbuchreihen die jeweils neueste Version verwendet. Außerdem wird als sinnvoll erachtet, dass die Analyse nach den Schulbuchreihen gegliedert ist. Zunächst werden jeweils die ersten Eindrücke der Buchreihen geschildert und anschließend die jeweiligen Bücher analysiert. Dabei erfolgt zu Beginn die Angabe entsprechender Eckdaten: Titel, Autor*innen, Erscheinungsjahr, Auflage, Verlag. Weiters werden die entsprechenden Buchseiten dargelegt und relevante Textstellen entsprechend dem Analyseraster kategorisiert. Die Abbildungen beinhalten nicht immer die gesamte Buchseite, sondern jene Textpassagen, welche konkreten Hilfestellungen beinhalten und deshalb für die Analyse von zentraler Bedeutung sind.

Allgemein ist festzustellen, dass der Großteil der Buchseiten, welche Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben bieten, im Themenbereich von *Terme und Gleichungen* verortet werden kann. Demnach zeigt sich vor allem in der sechsten Schulstufe eine vermehrte Häufigkeit entsprechender Inhalte, wobei sich in diesem Zusammenhang die konkrete Hilfestellung vor allem auf den Übersetzungsprozess vom Text zur Gleichung konzentriert.

5.1. Thema Mathematik

Die Buchreihe zeichnet sich durch eine Vielzahl an Musterlösungen aus, welche gemeinsam mit Erklärungen in der Regel zu Beginn jedes Kapitels zu finden sind. Dabei können insgesamt zehn Seiten mit Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben identifiziert werden. Die Häufigkeit dieser Seiten erreicht in der sechsten Schulstufe mit vier Seiten ihren Höhepunkt und nimmt dann kontinuierlich ab. Lediglich in der fünften und sechsten Schulstufe werden Schrittabfolgen, sogenannte Lösungspläne, für die Erklärung herangezogen.

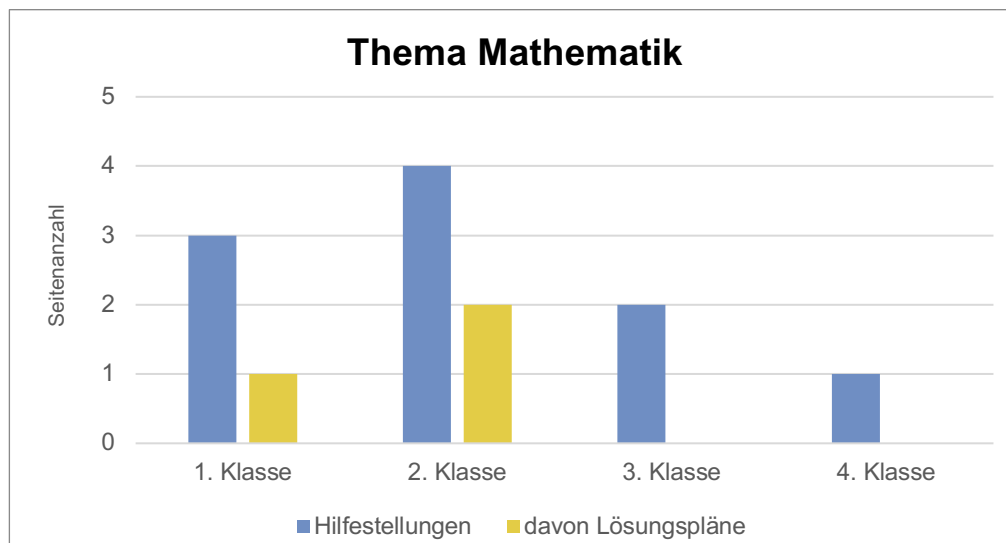


Abbildung 7: Übersicht der Hilfestellungen in ‚Thema Mathematik‘

Die Tendenz eines erhöhten Aufkommens an Hilfestellungen in der sechsten Schulstufe könnte durch die Dominanz des Themengebiets der Terme und Gleichungen erklärt werden. Da insbesondere der Prozess der Mathematisierung eine zentrale Rolle spielt, wird dieser auch ausführlich im Kontext von Textaufgaben erläutert.

In den nachfolgenden Unterkapiteln lässt sich eine genaue Analyse der einzelnen Hilfestellungen pro Klassenstufe finden. Dabei werden die Seiten herausgegriffen und die Inhalte entsprechend des Analyserasters codiert. Auf dieser Grundlage können vertiefte Erkenntnisse hinsichtlich der Qualität und Vollständigkeit der Hilfestellungen gewonnen werden.

5.1.1. Fünfte Schulstufe



Titel:	Thema Mathematik 1
Autor*innen:	Anita Dorfmayr, August Mistlbacher, Katharina Sator-Wunsch
Erscheinungsjahr:	2023
Auflage:	2. Auflage
Verlag:	Veritas Verlag

In diesem Buch befinden sich zwei Seiten mit der expliziten Überschrift *Textaufgaben*, wobei lediglich eine dieser Seiten eine genaue Erklärung der Herangehensweise mit Hilfe eines konkreten Lösungsplans beinhaltet. Zusätzlich lässt sich eine Seite zum Thema *Terme aufstellen und interpretieren* herausgreifen, welche den Fokus konkret auf die Übersetzung eines Textes zur Gleichung legt. Somit können drei Seiten mit Erklärungen und Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben identifiziert werden, welche in den folgenden Absätzen genauere Betrachtung finden.

Zunächst behandelt der ausgewiesene Lösungsplan drei Schritte: *Lesen, Planen, Lösen*. Hier kann eine Parallele zu den Schritten nach Pólya (1980) gesehen werden, wobei die Rückschau als vierter Schritt fehlt. Dennoch zeigt sich in einer genaueren Betrachtung der Erklärungen zu den jeweiligen Schritten, dass eine Vielzahl an Aspekten enthalten ist, welche weiter untergliedert werden können. Außerdem wird die Frage „Sind die Ergebnisse sinnvoll?“ gestellt, was wiederum zur Reflexion der Lösung anstoßen soll. Somit ist auch die *Rückschau* indirekt enthalten.

Schritt für Schritt eine Textaufgabe lösen:

- 1. LESEN:** Lies den Text langsam und aufmerksam durch. Hast du verstanden, worum es geht?
Wenn nein: Lies den Text noch einmal oder sogar noch zweimal durch.
Wenn ja: → Markiere Schlüsselwörter und schreibe dann eine *Kurzangabe*.
geg.: Was ist *gegeben*? Schreibe hier in Stichworten alle wichtigen Angaben auf: gegebene Zahlenwerte mit Einheiten usw.
ges.: Was ist *gesucht*? Schreibe hier in Stichworten alle Fragen auf, die du beantworten sollst.
- 2. PLANEN:** Plane deinen Lösungsweg: Welche Rechenschritte brauchst du?
Musst du addieren oder subtrahieren oder ...?
→ Schreibe die *Rechnungen* auf! Vielleicht helfen dir auch kurze *Zwischenüberschriften*.
- 3. LÖSEN:** Löse jetzt die Rechnungen und schreibe eine *Antwort*.
→ Kontrolliere zum Schluss: Hast du alle Fragen beantwortet?
Hast du in der Antwort auch die Einheiten dazugeschrieben?
Sind die Ergebnisse sinnvoll?

Abbildung 8: Lösungsplan Thema Mathematik 1
Quelle: Thema Mathematik 1, 2023, S. 44

Eine genauere Analyse zeigt, dass alles sechs Schritte des Analyserasters enthalten sind. Zunächst weist der erste Punkt *Lesen* auf die Informationsgewinnung hin. Anschließend wird darauf verwiesen in eigenen Worten die Angabe wiederzugeben um sich klar zu werden, welche Informationen gegeben sind und welche gesucht werden. Dies Aspekte lassen sich im Bereich des Analysierens verorten. Darüber hinaus können die Punkte *Planen* und *Lösen* auf die beiden identen Schritte des Analyserasters bezogen werden, wobei hier explizit darauf hingewiesen wird, nicht nur die Rechnung zu lösen, sondern auch den Rechenweg darzustellen. Anschließend sind die Interpretation und Reflexion im dritten Schritt des *Lösens* enthalten. Dennoch wird die Rückführung der Lösung auf die Sachsituation nur knapp umrissen. Dabei wird lediglich auf die Formulierung einer Antwort hingewiesen, jedoch sollte in diesem Zusammenhang nicht nur das Aufgreifen und Umformulieren der Fragestellung gemeint sein, sondern ein tatsächliches Interpretieren der Antwort. Eine mögliche Ergänzung wäre in diesem Zusammenhang die Frage: Was bedeutet diese Antwort im Sachzusammenhang?

Tabelle 7: Analyseraster - Thema Mathematik 1

Thema Mathematik 1 - S. 44			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lesen"
		Markieren wichtiger Informationen	"Markiere Schlüsselwörter"
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	"schreibe dann eine Kurzangabe"
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	"Was ist gegeben? Was ist gesucht?"
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Planen", "Welche Rechenschritte brauchst du?"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Löse jetzt die Rechnung"
		Rechenweg darstellen	"Schreibe die Rechnung auf"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Schreibe eine Antwort"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	"Sind die Ergebnisse sinnvoll?"
		Probe durchführen	

Eine weitere Hilfestellung, welche in diesem Zusammenhang speziell herausgehoben werden sollte, ist im Themengebiet *Terme und Gleichungen* verortet. In dem gleichnamigen Kapitel wird zwar nicht explizit das Wort *Textaufgabe* verwendet, dennoch sind die Inhalte für das Lösen von Textaufgaben relevant. Der Fokus liegt auf dem Teilprozess des Mathematisierens. Darüber hinaus werden einige Beispiele gegeben, wie ein kurzer Text in eine Gleichung übersetzt werden kann. Zum Beispiel ist „die Zahl um 5 erhöhen“ äquivalent zu „ $z+5$ “. Hier ist anzumerken, dass mit Schlüsselwörtern gearbeitet wird, welche die Rechenoperation anzeigen.

Terme und Gleichungen



Terme und Gleichungen aufstellen und interpretieren

Sprichst du Mathematisch?

Du kannst deutsche Texte in eine Fremdsprache, z. B. Englisch, übersetzen und umgekehrt. Ähnlich können wir deutsche Texte in die Sprache der Mathematik übersetzen und umgekehrt.

Du kannst dir ähnlich wie für eine Fremdsprache ein Vokabelheft anlegen. Wähle eine Variable für die unbekannte Zahl oder einen unbekannten Wert. Ein Term passt oft zu verschiedenen Texten. Du könntest so beginnen:

Deutsch	Mathematisch
eine Zahl um 5 erhöhen	$z + 5$
einen Wert um 5 vermehren	
zu einer Zahl 5 addieren	
5 um einen Wert erhöhen	$5 + z$
5 um einen Wert vermehren	
eine Zahl zu 5 addieren	

Deutsch	Mathematisch
eine Zahl um 5 vermindern	$z - 5$
einen Wert um 5 verringern	
von einer Zahl 5 subtrahieren	
5 um einen Wert vermindern	$5 - z$
5 um einen Wert verringern	
eine Zahl von 5 subtrahieren	

„Stelle einen Term (eine Gleichung) auf.“ bedeutet:
Übersetze einen Text in die Sprache der Mathematik. Schreibe ihn dazu als Term (Gleichung) an.
„Interpretiere den Term (die Gleichung).“ bedeutet:
Beschreibe in Worten, was der Term (die Gleichung) in der gegebenen Sachsituation bedeutet.



Abbildung 9: Thema Mathematik 1 - Terme und Gleichungen

Quelle: Thema Mathematik 1, 2023, S. 48

Zusammengefasst können also drei Buchseiten der fünften Schulstufe thematisch dem Lösen von Textaufgaben zugeordnet werden. Davon beinhaltet eine Seite eine konkrete Erklärung der Herangehensweise mit einem Lösungsplan und eine weitere Seite konkretisiert den Prozess des Mathematisierens. Schlussendlich wird im hinteren Teil des Schulbuches erneut das Lösen von Textaufgaben in den Fokus gestellt und anhand von Musteraufgaben bearbeitet. Hier gibt es zusätzlich eine kurze Erklärung, welche die Begriffe *teilen* und *messen* mit der Division in Verbindung bringt. Demnach werden also Schlüsselwörter abgeleitet, welche die Rechenoperation vorhersagen sollten. In den entsprechenden Textaufgaben kann diese Strategie ohne Probleme angewendet werden. Jedoch fehlt ein Hinweis auf die Risiken und Grenzen der Schlüsselwortstrategie.

7.2 Textaufgaben



Textaufgaben lösen



Online-Übung



MatheArena

869 San Marino ist ein Zwergstaat innerhalb Italiens. Auf einer Fläche von ca. 61 km² leben dort rund 33 600 Personen. (Daten nach: Wikipedia 2021)

Berechne, wie viele Personen in San Marino durchschnittlich auf einem Quadratkilometer leben.

Ausführung:
Wir teilen 33 600 Personen gleichmäßig auf 61 km² auf:

$$\begin{array}{r} 3 \ 3 \ 6 \ 0 \ 0 : 6 \ 1 = 550 \\ 3 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 5 \ 0 \\ 5 \ 0 \text{ Rest} \end{array}$$

Ergebnis: Pro Quadratkilometer wohnen in San Marino durchschnittlich ca. 550 Personen.

Dividieren bedeutet in Textaufgaben **Teilen** oder **Messen**.

Wir **teilen** eine Größe¹ in 2, 3, 4, ... gleich große Teile.

Das Ergebnis der Division gibt an, wie groß einer dieser Teile ist.

Beispiel: 40 € werden gleichmäßig auf 5 Personen aufgeteilt.
 $40 \text{ €} : 5 = 8 \text{ €}$
Jede Person bekommt 8 €.

Wir **messen**, ob eine Größe in einer anderen Größe 2-mal, 3-mal, 4-mal, ... enthalten ist.

Das Ergebnis der Division gibt an, wie oft die eine Größe in der anderen enthalten ist.

Beispiel: 40 € (in 1-Euro-Münzen) werden in Stapel zu je 5 € aufgestapelt.
 $40 \text{ €} : 5 \text{ €} = 8$
Es sind 8 gleich hohe Stapel.

Abbildung 10: Thema Mathematik 1 – Musterlösung

Quelle: Thema Mathematik 1, 2023, S. 154

5.1.2. Sechste Schulstufe



Titel:	Thema Mathematik 2
Autor*innen:	Anita Dorfmayr, August Mistlbacher, Katharina Sator-Wunsch
Erscheinungsjahr:	2021
Auflage:	5. Auflage
Verlag:	Veritas Verlag

In *Thema Mathematik 2* können zwei Buchseiten mit Lösungsplänen identifiziert werden. Dabei ist ersichtlich, dass die dreiteilige Schrittabfolge (ähnlich des Lösungsplans von *Thema Mathematik 1*) noch einmal konkretisiert und vor allem auf das Themengebiet der Terme und Gleichungen angepasst wird. Die erste Erklärung dient als Hilfestellung zum Lösen von Textaufgaben im Themengebiet der Brüche.

Schritt für Schritt eine Textaufgabe lösen:

1. **LESEN:** Lies den Text (mehrmals) aufmerksam durch.
→ Markiere Schlüsselwörter und schreibe dann eine *Kurzungabe*.
2. **PLANEN:** Plane deinen Lösungsweg:
→ Schreibe die *Rechnungen* auf! Vielleicht helfen dir auch kurze *Zwischenüberschriften*.
3. **LÖSEN:** Löse die Rechnungen. Erkläre in einer *Antwort*, was das Ergebnis bedeutet.

Abbildung 11: *Thema Mathematik 2 - Lösungsplan 1*
Quelle: *Thema Mathematik 2*, 2021, S. 106

Zunächst lässt sich erkennen, dass die Erklärung im Vergleich zu *Thema Mathematik 1* knapper ausfällt. Es werden wiederum drei Schritte angeführt. Die Formulierungen sind nahezu ident zu jenen in der fünften Schulstufe. Dennoch werden beispielsweise die Fragen „Was ist gegeben? Was wird gesucht?“ weggelassen. Stattdessen heißt es hier: „Schreibe eine Kurzungabe“. Diese Anweisung kann gleichsam in die Kategorie der *Analyse* eingeordnet werden, da die Schüler*innen zur Strukturierung der Informationen aufgefordert werden. Auch der Schritt des Planens fällt kürzer aus als in *Thema Mathematik 1*. Trotzdem wird ausführlich erklärt, welche Teilaspekte in diesem Zusammenhang eine Hilfestellung bieten. Im dritten Schritt wird sowohl die *Durchführung* als auch die *Interpretation* der Antwort integriert. Dennoch fehlt der Hinweis, die Lösung noch einmal zu kontrollieren und eine Rückschau auf die Problemsituation durchzuführen.

Folglich können fünf der sechs Analyse Kriterien identifiziert werden. Die Abfolge an Schritten weist Ähnlichkeiten zu dem Lösungsplan nach Pólya (1980) auf, wobei die Rückschau fehlt.

Tabelle 8: Analyseraster 1 - Thema Mathematik 2

Thema Mathematik 2 - S. 106			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lies den Text (mehrmals) aufmerksam durch"
		Markieren wichtiger Informationen	"Markiere Schlüsselwörter"
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	"schreibe dann eine Kurzangabe"
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Plane deinen Lösungsweg"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Löse die Rechnung"
		Rechenweg darstellen	"Schreibe die Rechnung auf"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Erkläre in einer Antwort, was das Ergebnis bedeutet"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	
		Probe durchführen	

Im nächsten Kapitel wird schlussendlich die Schrittabfolge etwas verändert und umformuliert. Dabei handelt es sich um das Themenfeld der Terme und Gleichungen, insbesondere mit der Überschrift „Vom Text zur Gleichung und zurück“. Folglich wird der dritte Schritt des *Lösens* auf den Aspekt des *Rechnens* und *Interpretierens* aufgeteilt.

Schritt für Schritt eine Textaufgabe lösen:

1. **LESEN:** Lies den Text (mehrmals) aufmerksam durch.
→ Markiere Schlüsselwörter und schreibe dann eine *Kurzangabe*.
2. **ÜBERSETZEN:** Übersetze den Zusammenhang aus dem Text in die Sprache der Mathematik:
→ Lege (wenn nötig) eine *Variable* für die gesuchte Größe fest und stelle eine *Gleichung* auf.
3. **RECHNEN:** Berechne die *Lösung* der Gleichung.
4. **INTERPRETIEREN:** Erkläre in einer *Antwort*, was die Lösung der Gleichung bedeutet.

Abbildung 12: Thema Mathematik 2 - Lösungsplan 2

Quelle: Thema Mathematik 2, 2021, S. 126

Außerdem wird im Vergleich zum Buch der fünften Schulstufe die Frage, ob die Ergebnisse tatsächlich sinnvoll sind, weggelassen und stattdessen auf die Bedeutung der Lösung im Sachzusammenhang eingegangen. Dadurch fokussieren sich die Autor*innen nicht auf die Reflexion, sondern auf eine passende Interpretation des Ergebnisses. Ein wesentlicher Unterschied der beiden Lösungspläne im Vergleich zu *Thema Mathematik 1* ist, dass die Fragen „Was ist gegeben? Was ist gesucht?“ weggelassen werden. Dadurch fällt ein möglicher Hinweis zur passenden Strukturierung der Informationen weg. Die weiteren Formulierungen weisen Ähnlichkeiten zu *Thema Mathematik 1* auf und die einzelnen Schritte können nahezu ident zugeordnet werden.

Tabelle 9: Analyseraster 2 - Thema Mathematik 2

2.Klasse - S. 126			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lies den Text (mehrmals) aufmerksam durch"
		Markieren wichtiger Informationen	"Markiere Schlüsselwörter"
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	"schreibe dann eine Kurzangabe"
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Übersetze den Zusammenhang aus dem Text in die Sprache der Mathematik"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Berechne die Lösung der Gleichung"
		Rechenweg darstellen	"Schreibe die Rechnung auf"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Erkläre in einer Antwort, was die Lösung der Gleichung bedeutet"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	
		Probe durchführen	

Zusätzlich können zwei weitere Seiten mit Musterlösungen zum Thema „Texte und Bilder in die mathematische Sprache übersetzen“ identifiziert werden. Dabei handelt es sich um insgesamt sieben Textaufgaben, welche exemplarisch für die Schüler*innen gelöst werden. Diese Aufgaben sind, wie der zweite angeführte Lösungsplan, Teil des Themenbereichs *Terme und Gleichungen*. Nach Lessani et al. (2014) wird das mathematische Verständnis durch exemplarische Lösungsvorschläge vertieft und hilft bei einer strukturierten Herangehensweise. Dadurch können die Schüler*innen ein Repertoire an Strategien zur Lösung von Textaufgaben entwickeln. Folglich können auch exemplarische Lösungsvorschläge als Hilfestellung gewertet werden.

591 Im Bild rechts siehst du ein Volleyballfeld von oben (Maße in m).
H1 Das Spielfeld ist insgesamt 9m breit und 18m lang.
 Gib eine Formel für den Umfang u der blau eingezeichneten Freizone an!

Ausführung: Überlege zuerst, wie breit und wie lang das blaue Rechteck ist.

Breite: Das Spielfeld ist 9m breit. Links und rechts kommen je x m dazu.
 $\Rightarrow$ Breite = $9 + 2 \cdot x$

Länge: Das Spielfeld ist 18m lang. Oben und unten kommen je y m dazu.
 $\Rightarrow$ Länge = $18 + 2 \cdot y$

Für den Umfang u gilt: $u = 2 \cdot (\text{Breite} + \text{Länge}) = 2 \cdot (9 + 2 \cdot x + 18 + 2 \cdot y)$

Ergebnis: $u = 2 \cdot (27 + 2 \cdot x + 2 \cdot y)$

Abbildung 13: Thema Mathematik 2 – Musterlösung
 Quelle: Thema Mathematik 2, 2021, S. 118

5.1.3. Siebte Schulstufe



Titel:	Thema Mathematik 3
Autor*innen:	Anita Dorfmayr, August Mistlbacher, Katharina Sator-Wunsch
Erscheinungsjahr:	2021
Auflage:	4. Auflage
Verlag:	Veritas Verlag

Dieser Band enthält keinerlei Lösungspläne für Textaufgaben. Lediglich zwei Buchseiten befassen sich explizit mit dem Lösen von Textaufgaben und beinhalten dies auch in ihrer Überschrift. Diese Inhalte befinden sich in den Themengebieten *Lineare Gleichungen* und *Proportionen und Ähnlichkeit*. Dabei wird die Hilfestellung in Form von Musteraufgaben gegeben und ohne weitere Erklärungen die Rechnungen durchgeführt. Somit gibt es weder eine Abfolge an Schritten, welche zur Analyse bereitsteht, noch weitere Anmerkungen zur Herangehensweise. Besonders auffällig ist die Auflistung der gegebenen und gesuchten Informationen. Dadurch wird noch einmal die Information aus dem Text strukturiert und kurz zusammengefasst.

609 Du weißt schon seit der 2. Klasse: In den USA und in Großbritannien misst man die Temperatur nicht wie bei uns in Grad Celsius °C, sondern in Grad Fahrenheit °F.
Die Temperatur in °C kannst du mit folgender Formel in °F umrechnen: $f = c \cdot 1,8 + 32$
Dabei stehen c für die Temperatur in °C und f für die Temperatur in °F.
Stelle eine Formel auf, mit der du °F in °C umrechnen kannst. Rechne damit 0 °F in °C um.

Ausführung:
Beginne mit einer Kurzangabe und schreibe deinen Lösungsweg übersichtlich auf!

Kurzangabe: geg.: $f = c \cdot 1,8 + 32$
ges.: Formel für c ; 0 °F in °C umrechnen

Forme die Formel nach c um.

$$\begin{array}{rcl} f & = & c \cdot 1,8 + 32 \\ f - 32 & = & c \cdot 1,8 \quad | : 1,8 \\ \frac{f - 32}{1,8} & = & c \end{array}$$

Formel:

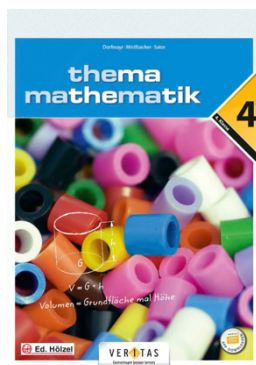
Setze $f = 0$ ein:

$$\begin{array}{rcl} c & = & \frac{0 - 32}{1,8} \\ c & \approx & -17,8 \end{array}$$

Ergebnis: Formel zur Umrechnung von °F in °C: $c = \frac{f - 32}{1,8}$ 0 °F sind ungefähr -17,8 °C.

Abbildung 14: Thema Mathematik 3 – Musterlösung
Quelle: Thema Mathematik 3, 2021, S. 126

5.1.4. Achte Schulstufe



Titel:	Thema Mathematik 4
Autor*innen:	Anita Dorfmayr, August Mistlbacher, Katharina Sator-Wunsch
Erscheinungsjahr:	2021
Auflage:	4. Auflage
Verlag:	Veritas Verlag

Ähnlich wie in *Thema Mathematik 3* lassen sich auch hier keine konkreten Lösungspläne finden. Generell gibt es lediglich eine Buchseite mit der Überschrift *Textaufgaben* und zwei dazu passende Musterlösungen als Hilfestellung. Diese Seite befindet sich im Themengebiet *Lineare Gleichungen*. Hier ist anzumerken, dass die jeweilige Lösung in drei Schritte unterteilt wird, wobei im ersten Schritt das Anfertigen einer Skizze oder Erstellen einer Tabelle postuliert wird. Anschließend sollen die Zusammenhänge in Gleichungen übersetzt werden und im letzten Schritt die Gleichungssysteme gelöst und das Ergebnis interpretiert werden. Somit lassen sich also indirekt einige bereits bekannte Aspekte aus den Erklärungen in *Thema Mathematik 2* herauslesen.

8. Lineare Gleichungssysteme

8.4 Textaufgaben

Textaufgaben mit linearen Gleichungssystemen lösen

702 In einem rechtwinkligen Dreieck wird eine Kathete um 2 cm verlängert und die andere Kathete um 4 cm verkürzt. Dabei entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit gleich langer Hypotenuse, aber einem um 12 cm² kleineren Flächeninhalt. Stelle ein Gleichungssystem auf, um die Katheten des ursprünglichen Dreiecks zu berechnen.

Ausführung:

1. Lege Variable fest und beschreibe alle relevanten Größen mit Termen. Verwende dazu eine Skizze und/oder eine Tabelle, zum Beispiel so:

Dreieck 1

Dreieck 2

	Dreieck 1	Dreieck 2
1. Kathete	a	a + 2
2. Kathete	b	b - 4
Hypotenuse	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{(a+2)^2 + (b-4)^2}$
Flächeninhalt	$\frac{a \cdot b}{2}$	$\frac{(a+2) \cdot (b-4)}{2}$

2. Übersetze die beiden Zusammenhänge zwischen den Dreiecken in Gleichungen:

Eigenschaft der Hypotenusen $\Rightarrow$ I: $a^2 + b^2 = (a+2)^2 + (b-4)^2$

Eigenschaft der Flächeninhalte $\Rightarrow$ II: $\frac{a \cdot b}{2} - 12 = \frac{(a+2) \cdot (b-4)}{2}$

3. Löse das Gleichungssystem und interpretiere die Lösung:

$$\begin{aligned} \text{I: } a^2 + b^2 &= a^2 + 4a + 4 + b^2 - 8b + 16 &\Rightarrow & -4a + 8b = 20 \\ 2 \cdot \text{II: } ab - 24 &= ab - 4a + 2b - 8 &\Rightarrow & 4a - 2b = 16 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} + \\ - \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6b &= 36 &\Rightarrow & b = 6 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Katheten des ursprünglichen Dreiecks sind 6 cm und 7 cm lang.

Abbildung 15: Thema Mathematik 4 – Musterlösung
Quelle: Thema Mathematik 4, 2021, S.158

5.2. Lösungswege

In dieser Schulbuchreihe lässt sich zwar ähnlich wie in *Thema Mathematik* eine Abnahme der Hilfestellungen in der achten Schulstufe erkennen, jedoch erreicht die Anzahl an Erklärungen zum Lösen von Textaufgaben statt in der sechsten erst in der siebten Schulstufe ihren Höhepunkt.

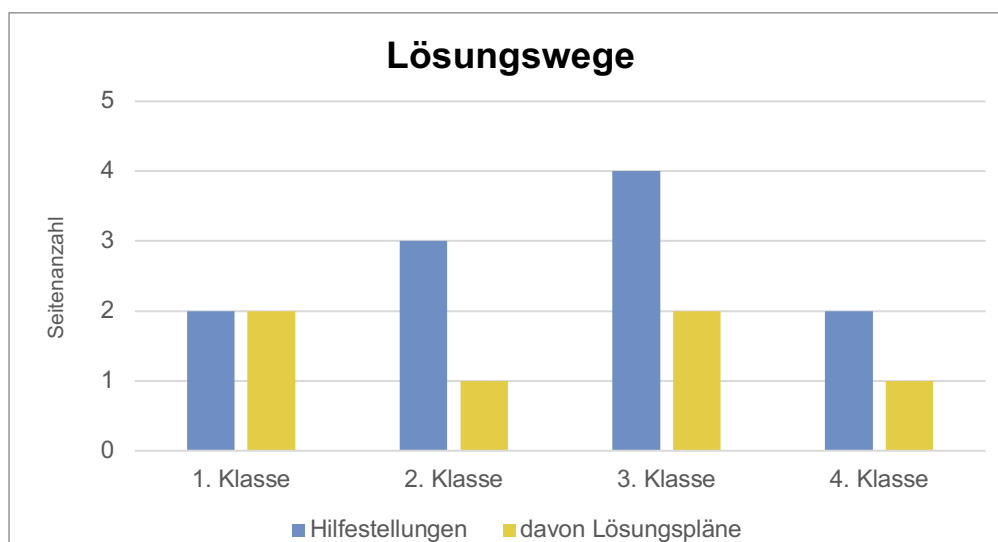


Abbildung 16: Übersicht der Hilfestellungen in ‚Lösungswege‘

Zusätzlich ist feststellbar, dass mit steigender Klassenstufe die sprachliche Komplexität der Aufgaben zunimmt. In der fünften Schulstufe werden beispielsweise auch innermathematische Aufgabenstellungen als Text formuliert, während in der achten Schulstufe tatsächliche Sachzusammenhänge dargelegt werden. Nachstehend werden diese Beobachtungen im Detail erläutert und je Klassenstufe analysiert.

5.2.1. Fünfte Schulstufe



Titel:	Lösungswege 1
Autor*innen:	Mathias Bortenschlager, Andreas Fischer, Max Koller, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger
Erscheinungsjahr:	2023
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In dem hier vorliegenden Schulbuch ist eine generelle Tendenz zu beobachten, welche sich durch eine geringe Anzahl an textlastigen Aufgaben auszeichnet. Insgesamt konnten zwei Buchseiten mit konkreten Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben

identifiziert werden. In diesem Zusammenhang fällt auf, dass es eine geringe Anzahl an Musterlösungen zu Textaufgaben gibt. Dennoch wird im Kapitel *Rechnen mit natürlichen Zahlen* nach einer konkreten Erklärung in Bezug auf Textaufgaben ein dazu passendes Beispiel gegeben. Dabei ist jedoch zu erwähnen, dass es sich um eine rein innermathematische Aufgabenstellung handelt, welche dennoch in Textform verfasst wurde. Da die in dieser Arbeit verwendete Definition der Textaufgabe auch derartige innermathematische Aufgabenstellungen beinhaltet, kann diese Musteraufgabe durchaus als Referenz in Betracht gezogen werden.

Textaufgaben

Merke Tipps beim Lösen von Textaufgaben

- Lies den Text genau.
- Unterstreiche wichtige Begriffe und schreibe dir eventuell die Bedeutung dazu.
- Überlege die einzelnen Rechenschritte und berechne anschließend.
- Überprüfe, ob dir dein Ergebnis sinnvoll erscheint. Schreibe bei einer Frage einen Antwortsatz.

Muster Schreibe als eine Rechnung an und berechne anschließend.
Subtrahiere von der Summe der Zahlen 57 und 18 die Differenz der beiden Zahlen.

Abbildung 17: Lösungswege 1 - Tipps und Musterlösung
Quelle: Lösungswege 1, 2023, S. 34

Dieses Beispiel zeigt wiederum, dass sich die Textlastigkeit der Aufgabenstellungen in Grenzen hält. Statt einer eingekleideten Aufgabe, welche rein mathematisch auf dieselbe Gleichung stoßen würde, wird hier ein rein innermathematisches Problem dargestellt.

In den formulierten Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben kann die *Informationsgewinnung*, *Entwicklung eines Plans*, *Durchführung* und *Reflexion* identifiziert werden. Dennoch fehlt die eigene Strukturierung der Informationen und somit Punkt zwei des Analyserasters zur Gänze. Außerdem wird lediglich die Information „Schreibe bei einer Frage einen Antwortsatz“ gegeben, wobei eine Interpretation der Lösung in jeglicher Form relevant wäre, ohne dies von der Frage abhängig zu machen. Dadurch kann gewährleistet werden, dass die Lösung noch einmal hinterfragt und schlussendlich einer Reflexion unterzogen werden kann. In diesem Zusammenhang ist die Anweisung einen Antwortsatz zu verfassen, wenn im Text eine Frage gestellt wird, nicht als ausreichend für die Interpretation der Situation anzusehen. Somit wurden bei dieser Hilfestellung vier der sechs Analyse Kriterien erfüllt.

Tabelle 10: Analyseraster 1 - Lösungswege 1

Lösungswege 1 - S. 34			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lies den Text genau"
		Markieren wichtiger Informationen	
		Recherchieren	"unterscheide wichtige Begriffe und schreibe dir eventuell die Bedeutung dazu"
		Verknüpfen mit Vorwissen	"unterscheide wichtige Begriffe und schreibe dir eventuell die Bedeutung dazu"
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Überlege die einzelnen Rechenschritte"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"berechne"
		Rechenweg darstellen	
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	"Überprüfe, ob dir dein Ergebnis als sinnvoll erscheint"
		Probe durchführen	

Im Kapitel *Rechnen mit Dezimalzahlen* weist erneut eine farblich gekennzeichnete Box auf eine Hilfestellung zum Lösen von Textaufgaben hin. Insgesamt werden sieben Punkte angeführt, welche während des Lösungsprozesses relevant sind. Dabei können alle sechs Analysesekriterien identifiziert werden.

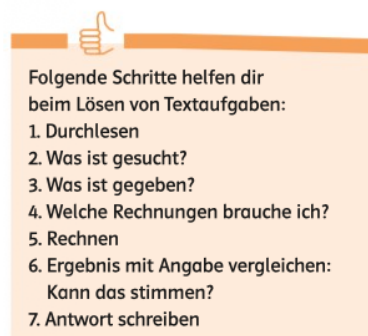


Abbildung 18: Lösungswege 1 – Lösungsplan
Quelle: Lösungswege 1, 2023, S. 141

Zunächst fällt die Anmerkung zur Informationsgewinnung kurz aus. Dabei wird lediglich die Anweisung zum Durchlesen gegeben, jedoch nicht auf die Verknüpfung mit dem Vorwissen, oder auf das Markieren von wichtigen Informationen hingewiesen. Dennoch führen die Fragen „Was ist gegeben? Was ist gesucht?“ zu einer genaueren Analyse der Informationen. Dadurch können die einzelnen Erkenntnisse aus dem Text passend strukturiert werden, um einen adäquaten Überblick zu erhalten. Daran anknüpfend wird gefragt „Welche Rechnungen brauche ich?“, wobei hier die Planung des mathematischen Vorgehens herausgelesen werden kann. Schlussendlich wird die Rechnung durchgeführt und das Ergebnis soll mit der Angabe verglichen werden. Außerdem setzt die Anweisung eine Antwort zu schreiben voraus, dass die Lösung auf die Sachsituation zurückgeführt wurde. Daher kann dieser Punkt als Interpretation kategorisiert werden. Dennoch fehlen hier weitere Ausführungen zur Interpretation des Ergebnisses im Sachzusammenhang. Des Weiteren heißt es lediglich, dass die Lösung mit der Angabe verglichen werden soll. In diesem Kontext wäre eine weitere Information, auf welcher

Grundlage der Vergleich stattfinden soll, sinnvoll. Beispielsweise kann gefragt werden, ob die Lösung im gegebenen Sachkontext Sinn ergibt.

Alles in allem wird in knappen Worten der gesamte Prozess des Lösens von Textaufgaben abgedeckt. Dadurch können mit wenigen zeitlichen Ressourcen noch einmal die wichtigsten Hilfestellungen wiederholt werden.

Tabelle 11: Analyseraster 2 - Lösungswege 1

Lösungswege 1 - S. 141			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen Markieren wichtiger Informationen Recherchieren Verknüpfen mit Vorwissen	"Durchlesen"
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren Skizze Zusammenhänge erkennen Informationen strukturieren	"Was ist gegeben? Was ist gesucht?"
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Welche Rechnungen brauche ich?"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen Rechenweg darstellen	"Rechnen"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Antwort schreiben"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen Probe durchführen	"Ergebnis mit der Angabe vergleichen"

5.2.2. Sechste Schulstufe



Titel:	Lösungswege 2
Autor*innen:	Mathias Bortenschlager, Andreas Fischer, Max Koller, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger
Erscheinungsjahr:	2021
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In *Lösungswege 2* kann eine konkrete Erklärung mit einer Schrittabfolge herausgegriffen werden. Diese Hilfestellung ist im Kapitel *Arbeiten mit Variablen* verortet. Konkret lautet die Überschrift *Textgleichung* und es wird bereits in den Seiten unmittelbar davor das Übersetzen von Texten in die mathematische Sprache thematisiert und Musterlösungen dazu bereitgestellt. Dabei gibt es bereits eine konkrete Erklärung zum Mathematisieren, aber ohne konkreten Lösungsplan. Schlussendlich zeigt sich in der Zusammenfassung des Kapitels die Anweisung „Um Textaufgaben zu lösen musst du folgende Schritte

durchführen“. Insgesamt werden vier Schritte und zusätzlich eine Aufgabe mit Musterlösung angeführt.

Um Textaufgaben zu lösen musst du folgende Schritte durchführen:

1. Angabe genau lesen. Was ist gesucht? Wofür steht die Unbekannte?
2. Stelle eine Gleichung passend zum Text auf und löse sie.
3. Überprüfe, ob deine Lösung sinnvoll ist und mache eine Probe mit dem Text.
4. Schreibe einen Antwortsatz.

Michi, Kathi und Alex sind zusammen 42 Jahre alt. Michi ist doppelt so alt wie Kathi, Alex ist um 2 Jahre älter als Kathi. Wie alt ist Kathi?

Alter von Kathi: x
 Alter von Michi: $2 \cdot x$
 Alter von Alex: $x + 2$

$(2x) + x + (x + 2) = 42$ | Zusammenfassen
 $2x + x + x + 2 = 42$
 $4x + 2 = 42$ | $- 2$
 $4x = 40$ | $: 4$
 $x = 10$

Lösung: Kathi ist 10 Jahre alt.

Abbildung 19: Lösungswege 2 – Lösungsplan
 Quelle: Lösungswege 2, 2021, S. 164

Die Hinweise zur Informationsgewinnung fallen wiederum knapp aus. Außerdem fehlt im Vergleich zu *Lösungswege 1* die Frage „Was ist gesucht?“. Dadurch fehlt die Anregung das vorhandene Wissen zu strukturieren. Diese Frage allein kann nicht zur Analyse der Informationen gezählt werden, da hier der entscheidende Hinweis zur Gliederung der vorhandenen Informationen fehlt. Die Punkte Entwicklung eines Plans und Durchführung werden in einem Satz abgehandelt und zu einem Schritt zusammengeführt. Anschließend gibt es eine detaillierte Anweisung zur Reflexion, sowohl um die Lösung zu hinterfragen als auch mit dem Hinweis eine Probe durchzuführen. Abschließend soll ein Antwortsatz geschrieben werden. Hier ist wiederum die Rückführung der Lösung auf die Sachsituation notwendig. Deshalb kann dieser Punkt zur Interpretation gezählt werden. Trotzdem besteht in diesem Zusammenhang mehr Potential, um diesen Schritt noch weiter auszuführen und einen tatsächlichen Interpretationsprozess anzuregen.

Dennoch werden in knappen Sätzen fünf von sechs Kriterien des Analyserasters abgedeckt. Dabei ist zu erwähnen, dass Punkte wie *Informationsgewinnung* oder *Interpretation* der Lösung sehr knapp ausfallen. Trotzdem kann mit dieser Zusammenfassung eine adäquate Hilfestellung geschaffen werden, welche den Schüler*innen womöglich den Umgang mit Textaufgaben erleichtert.

Tabelle 12: Analyseraster - Lösungswege 2

Lösungswege 2 - S. 164			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen Markieren wichtiger Informationen Recherchieren Verknüpfen mit Vorwissen	"Angabe genau lesen"
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren Skizze Zusammenhänge erkennen Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Stelle eine Gleichung passend zum Text auf und löse sie"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen Rechenweg darstellen	"Stelle eine Gleichung passend zum Text auf und löse sie"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Schreibe einen Antwortsatz"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen Probe durchführen	"Überprüfe, ob deine Lösung sinnvoll ist" "Mache eine Probe"

Neben diesen beiden Seiten mit Hilfestellungen zu Textaufgaben im Kapitel *Arbeiten mit Variablen* lässt sich in Bezug auf Prozentrechnung eine weitere Erklärung zu Textaufgaben finden. Die dementsprechende Überschrift lautet „Tipps zum Lösen bei Textaufgaben mit Prozenten“. Da hier jedoch vor allem die Prozentrechnung im Vordergrund steht, kann kein konkreter Lösungsplan identifiziert werden.

Insgesamt lassen sich drei Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben in *Lösungswege 2* finden. Davon beinhaltet eine Seite einen konkreten Lösungsplan mit Schrittabfolge.

5.2.3. Siebte Schulstufe



Titel:	Lösungswege 3
Autor*innen:	Mathias Bortenschlager, Andreas Fischer, Max Koller, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger
Erscheinungsjahr:	2023
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In diesem Schulbuch lassen sich vier Seiten mit konkreten Tipps zum Lösen von Textaufgaben finden. Davon können die Inhalte von zwei der vier Seiten in den Analyseraster eingeordnet werden. Die erste dieser beiden Hilfestellungen kann im Themengebiet der *Gleichungen und Formeln* verortet werden. Die Überschrift dazu lautet „Textgleichungen“. Dadurch liegt der Schwerpunkt vor allem auf dem Übersetzen eines Textes in die mathematische Sprache.

Dennoch wird gleich zu Beginn des Kapitels ein gelbes Kästchen mit „Lösen von Textaufgaben“ präsentiert. Darin beinhaltet sind fünf Aufzählungspunkte mit Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben. Diese können mit Hilfe des Analyserasters einer Funktion zugeordnet und analysiert werden.

Lösen von Textaufgaben

- Lies den Text aufmerksam durch und wähle für die gesuchte Größe eine Variable, z.B. x.
- Übertrage die Informationen aus deinem Text in eine Gleichung.
- Löse die Gleichung.
- Überprüfe anhand des Textes, ob die berechnete Lösung der Gleichung zum Text passt und sinnvoll ist.
- Schreibe einen Antwortsatz.

Abbildung 20: Lösungswege 3 - Tipps zu Textaufgaben

Quelle: Lösungswege 3, 2023, S. 116

Die Punkte weisen Ähnlichkeiten zu den Hilfestellungen in *Lösungswege 2* auf. Zunächst werden die Schüler*innen aufgefordert den Text aufmerksam zu lesen und die Informationen in eine Gleichung zu übertragen. Da sich die Erklärung im Themengebiet der Gleichungen befindet, wird die Wahl der mathematischen Operation bereits vorweggenommen. Somit fällt Punkt drei des Analyserasters, *die Entwicklung eines Plans*, sehr knapp aus und die Erstellung einer passenden Gleichung ist bereits vorgegeben. Dennoch muss eine für den Text adäquate Rechenoperation gewählt werden, was wiederum als Teilaspekt dieses Punktes gewertet werden kann.

Anschließend wird das Ergebnis ausgerechnet, noch einmal überprüft und ein Antwortsatz formuliert. Somit decken diese Angaben die *Durchführung*, *Interpretation* und *Reflexion* ab. Lediglich das *Analysieren* der Informationen fehlt in der Erklärungshilfe. Das Anfertigen von Notizen und Skizzen wird hier näher erläutert. Folglich können fünf der sechs Analysekatgorien identifiziert werden.

Tabelle 13: Analyseraster 1 - Lösungswege 3

Lösungswege 3 - S. 116			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lies den Text aufmerksam"
		Markieren wichtiger Informationen	
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Übertrage die Informationen aus dem Text in eine Gleichung"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Löse die Gleichung"
		Rechenweg darstellen	
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Schreibe einen Antwortsatz"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	"Überprüfe, ob die berechnete Lösung sinnvoll ist"
		Probe durchführen	

Die zweite Hilfestellung zum Thema Textaufgaben lässt sich im Kapitel *Flächeninhalte ebener Figuren* finden. Diese Einordnung ist von besonderer Bedeutung, da bisherige Hilfestellungen vor allem im Themengebiet der *Terme und Gleichungen* verortet werden konnten. Somit zeigt sich hier eine neue Sichtweise, welche jedoch eine ähnliche Schrittabfolge aufweist.

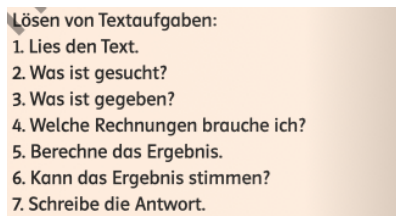


Abbildung 21: Lösungswege 3 – Lösungsplan
Quelle: Lösungswege 3, 2023, S. 144

Die insgesamt sieben Punkte geben knappe Anweisungen zum schrittweisen Lösen von Textaufgaben. Dabei werden alle sechs Aspekte des Analyserasters abgedeckt. Die Reihenfolge der Schritte weicht leicht von dem in dieser Arbeit konzipierten Analyseraster ab. Zunächst können die Fragen „Was ist gegeben? Was ist gesucht?“ als ein Punkt zusammengeführt und in Punkt zwei der *Analyse* eingeordnet werden. Mit Hilfe dieser Fragen sind die Schüler*innen dazu aufgefordert, die vorhandenen Informationen noch einmal zu strukturieren. Anschließend wird mit der Frage „Welche Rechnungen brauche ich?“ die Planung und Durchführung der Rechnungen angeregt. Somit ermöglicht diese Herangehensweise eine durchdachte Wahl der mathematischen Operationen. Nach der Durchführung wird in dieser Lösungshilfe die Reflexion des Ergebnisses postuliert. Diese setzt jedoch bereits eine passende Interpretation der Lösung im gegebenen Sachkontext voraus. Außerdem sollte für das Formulieren einer passenden Antwort das Ergebnis auf die Situation zurückgeführt worden sein. Dennoch fehlt die konkrete Anweisung zur Interpretation der Lösung, welche auch in Form einer Frage formuliert werden könnte.

Im Vergleich zur Hilfestellung im Kapitel *Gleichungen und Formeln* wird in diesem Abschnitt der Aspekt der Planung und Durchführung der Rechnung allgemeiner gehalten. Außerdem fehlen in der vorhergehenden Erklärung zu Textgleichungen die Analyse und Strukturierung der Informationen. Trotz dieser Unterschiede weisen die Formulierungen signifikante Ähnlichkeiten auf. In beiden Fällen sind die Anweisungen äußerst prägnant formuliert, ohne zusätzliche Hinweise zu einer passenden Informationsgewinnung anzubieten. Beispielsweise fehlt eine Erklärung wie die richtigen Informationen identifiziert und herausgefiltert werden können.

Tabelle 14: Analyseraster 2 – Lösungswege 3

Lösungswege 3 - S. 144			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lies den Text"
		Markieren wichtiger Informationen	
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	"Was ist gesucht? Was ist gegeben?"
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Welche Rechnungen brauche ich?"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Berechne das Ergebnis"
		Rechenweg darstellen	
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Schreibe die Antwort"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	"Kann das Ergebnis stimmen?"
		Probe durchführen	

Darüber hinaus wird in den nachfolgenden Themengebieten der Geometrie immer wieder darauf hingewiesen, dass das Anfertigen einer Skizze dem Verständnis dienen kann. Dies ermöglicht eine bessere Visualisierung der Informationen und dadurch können die Schüler*innen einen konkreten Plan zur Umsetzung der passenden Rechenschritte konzipieren.

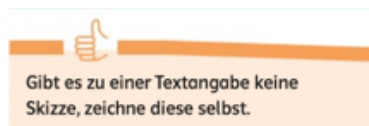


Abbildung 22: Lösungswege 3 - Anfertigen einer Skizze
Quelle: Lösungswege 3, 2023, S.212

Diese Neuerung weist abermals darauf hin, dass im Kapitel *Flächeninhalte ebener Figuren* der Analyse der Informationen eine zentrale Bedeutung zukommt. Insbesondere in Bezug zu Aufgabenstellungen, die geometrische Formen betreffen, erweist es sich als hilfreich, die Informationen noch einmal visuell darzustellen, um die erforderlichen Rechenschritte zu identifizieren.

5.2.4. Achte Schulstufe



Titel:	Lösungswege 4
Autor*innen:	Mathias Bortenschlager, Andreas Fischer, Max Koller, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger
Erscheinungsjahr:	2024
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

Vorweg ist anzumerken, dass zum Zeitpunkt des Verfassens der Arbeit lediglich eine Vorabversion für *Lösungswege 4* zur Verfügung steht, da sich die Veröffentlichung um einige Monate verzögert hat. Demnach wird hier der bisherige Arbeitsstand des Buches analysiert.

Das Kapitel der *Linearen Gleichungssysteme* beinhaltet zwei konkrete Buchseiten in Bezug zu Textaufgaben. Zunächst wird anhand eines Beispiels das Vorgehen bei Textaufgaben mit zwei Unbekannten erläutert. Dabei ist vor allem das richtige Lösen des Gleichungssystems im Vordergrund. Anschließend gibt es einige Seiten weiter noch einmal ein farblich gekennzeichnetes Kästchen mit konkreten Tipps zum Lösen von Textaufgaben. Hier werden die genannten Aspekte zwar nicht in einer Schrittabfolge aufgezählt, jedoch können sie inhaltlich dem Analyseraster zugeordnet werden.

Tipps für das Lösen von Textaufgaben

- Lies den Text genau durch und fasse ihn in eigenen Worten zusammen.
- Was ist gesucht? Wähle für die gesuchten Größen Variablen.
- Stelle eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem zum Text passend auf.
- Löse die Gleichung/das Gleichungssystem.
- Mache eine Probe mit dem Text und überprüfe, ob die Lösung sinnvoll ist.
- Schreibe einen Antwortsatz.

Abbildung 23: *Lösungswege 4 - Tipps zum Lösen von Textaufgaben*
Quelle: *Lösungswege 4*, 2024, S.204

Insgesamt werden sechs Aspekte genannt, welche jeweils einem der sechs Schritte des Analyserasters zugeordnet werden können. Dabei stimmt die Reihenfolge fast überein. Lediglich der vorletzte Punkt mit dem Hinweis zur Durchführung einer Probe, welcher Teil der Reflexion des Ergebnisses ist, wird vor der Formulierung eines Antwortsatzes genannt. In Bezug darauf zählt der letztgenannte Hinweis zur Interpretation des Ergebnisses.

Hier ist wiederum anzumerken, dass die reine Formulierung eines Antwortsatzes für die Interpretation nicht unbedingt ausreicht. Außerdem wird bereits im vorletzten Hinweis der Aufzählung deutlich, dass bereits zu diesem Zeitpunkt schon eine Rückführung des Ergebnisses auf die Situation stattgefunden haben muss. Ansonsten würde es den Schüler*innen schwerfallen, das Ergebnis hinsichtlich der Sinnhaftigkeit zu beurteilen. Somit wird deutlich, dass die Hilfestellung der Rückinterpretation noch weiter ausgeführt werden sollte, um tatsächlich eine adäquate Reflexion der Lösung durchführen zu können. Zusätzlich wäre eine Umstrukturierung der Hinweise denkbar, um die Interpretation der Lösung vor der Reflexion durchzuführen.

Tabelle 15: Analyseraster - Lösungswege 4

Lösungswege 4 - S. 204			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen Markieren wichtiger Informationen Recherchieren Verknüpfen mit Vorwissen	"Lies den Text genau durch und fasse ihn in eigenen Worten zusammen"
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren Skizze Zusammenhänge erkennen Informationen strukturieren	"Lies den Text genau durch und fasse ihn in eigenen Worten zusammen"
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Stelle eine Gleichung auf"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen Rechenweg darstellen	"Löse die Gleichung"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Schreibe einen Antwortsatz"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen Probe durchführen	"Überprüfe, ob die Lösung sinnvoll ist" "Mache eine Probe"

5.3. Mathematik verstehen

Die Schulbücher *Mathematik verstehen 1-4* beinhalten lediglich zwei Seiten mit expliziten Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben. Dabei lässt sich jeweils eine Musterlösung und eine weiterführende Erklärung zu den Lösungsschemata finden. Diese beiden Hilfestellungen können in den Schulbüchern der sechsten und siebten Schulstufe verortet werden.

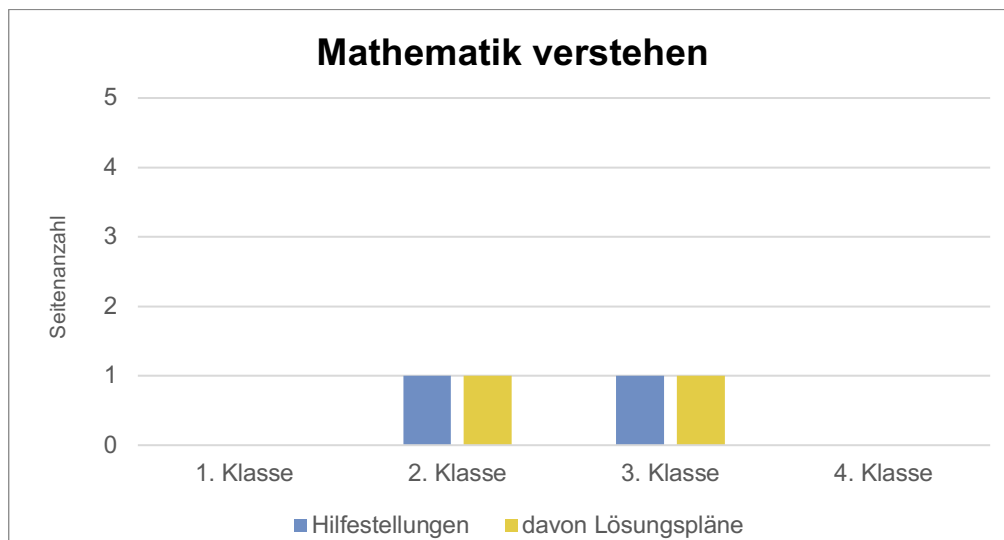


Abbildung 24: Übersicht der Hilfestellungen in *Mathematik verstehen*

Darüber hinaus ist anzumerken, dass in der siebten Schulstufe zwar keine konkreter Lösungsplan mit Aufzählungspunkten angeführt wird, jedoch können aus dem Fließtext Elemente extrahiert werden, welche identisch mit anderen Anweisungen in Lösungsplänen sind und auch in den Analyseraster eingeordnet werden können. Deshalb wird diese Hilfestellung auch als eine Art Lösungsplan gewertet und dementsprechend analysiert.

Aus diesen Erkenntnissen kann abgeleitet werden, dass in dieser Schulbuchreihe vorwiegend die fachliche Wissensvermittlung im Vordergrund steht, denn wie bereits Schoenfeld (1985) betonte, kann selbst eine sorgfältige Anwendung von Heuristiken keine fehlenden Kenntnisse des Fachwissens ersetzen. Zusätzlich besteht die Gefahr, dass ein Lösungsschema internalisiert wird und daraufhin auf jegliche Problemsituationen angewendet wird, ohne den tatsächlichen Sachkontext verstanden zu haben. Dennoch weist Lessani et al. (2014) darauf hin, dass das Kennenlernen von unterschiedlichen Lösungsstrategien den Schüler*innen hilft eine strukturierte Herangehensweise zu entwickeln und somit ein Verständnis für das Problemlösen aufzubauen.

5.3.1. Fünfte Schulstufe



Titel:	Mathematik verstehen 1
Autor*innen:	Bernhard Salzger, Judith Bachmann Andreas Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer, Andreas Ulovec
Erscheinungsjahr:	2023
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

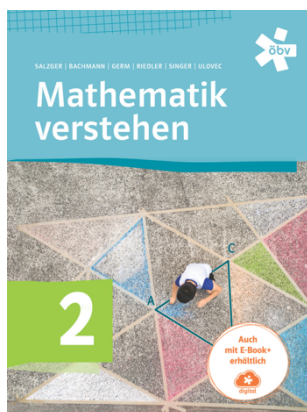
Die Ausgabe von *Mathematik verstehen* für die fünften Schulstufe beinhaltet keinerlei Erklärungen zu Lösungsprozessen von Textaufgaben. Generell kann im Vergleich zu den anderen Büchern derselben Klassenstufe keine Überschrift mit dem Begriff *Textaufgaben* gefunden werden.

Allgemein ist zu erkennen, dass die einzelnen Kapitel Musterlösungen zu manchen Aufgaben beinhalten, teilweise auch zu Textaufgaben. Dadurch können die Schüler*innen ihre Herangehensweise vergleichen und möglicherweise ein analytisches Vorgehen trainieren. Dennoch fehlen Hilfestellungen in Form von schriftlichen Erklärungen zum Lösen von Textaufgaben.

Lediglich zwei Punkte, *Terme aufstellen und deuten* und *Gleichungen aufstellen*, können als Teilaspekte herausgegriffen werden. In diesen Unterkapiteln wurden exemplarisch kurze Textaufgaben in die mathematische Sprache übersetzt und gelöst, aber keine weiteren Erklärungen dazu gegeben.

Somit kann schlussgefolgert werden, dass die spezifische Herangehensweise sowie Erklärungen der Lehrkraft bei der Vermittlung von Inhalten von entscheidender Bedeutung sind. Infolgedessen gewinnt sowohl die Qualität der mündlichen Instruktionen als auch die weiterführende Gestaltung des Unterrichts an Bedeutung. Dadurch ist eine strukturierte Planung des Unterrichts mit zusätzlichen Materialien für einen erfolgreichen Kompetenzzuwachs der Lernenden wesentlich.

5.3.2. Sechste Schulstufe



Titel:	Mathematik verstehen 2
Autor*innen:	Bernhard Salzger, Judith Bachmann Andreas Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer, Andreas Ulovec
Erscheinungsjahr:	2022
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In *Mathematik verstehen 2* lässt sich eine Buchseite mit einer konkreten Erklärung zum Lösen von Textaufgaben finden. Dabei werden sechs Schritte aufgelistet, welche den Lösungsprozess erleichtern können. Hier ist zuvor angeführt, dass diese Schritte „helfen können“. Somit wird betont, dass es nicht zwingend notwendig ist, dieses schematische Vorgehen in jedem Lösungsprozess zu integrieren. Vielmehr soll es als zusätzliche Hilfestellung dienen. Dadurch unterstreicht diese Formulierung die Notwendigkeit eines Repertoires an unterschiedlichen Heuristiken. Die Kunst des Lösens besteht darin, passende Schemata auszuwählen, welche schlussendlich zu einem adäquaten Ergebnis führen.

4.5 Textaufgaben

Manchmal ist es möglich, für Textaufgaben passende Lösungen mit Hilfe einer Gleichung zu finden. Dabei können dir folgende Schritte helfen:

1. Schritt: Verdeutliche dir den Sachverhalt! Dabei kann oft eine Skizze, ein Diagramm, eine Tabelle oder eine bildhafte Darstellung als Unterstützung dienen.
2. Schritt: Wähle für die gesuchte Zahl eine Variable und drücke – wenn nötig – andere gesuchte Zahlen mit Hilfe dieser Variablen aus!
3. Schritt: Stelle eine passende Gleichung auf!
4. Schritt: Löse die Gleichung! Durch Einsetzen des Zahlenwerts der Variablen lassen sich auch andere gesuchte Zahlen berechnen.
5. Schritt: Überprüfe, ob die Lösung der Gleichung zur gestellten Aufgabe passt!
6. Schritt: Formuliere eine sinnvolle Antwort!

4.76 Bei einem Rechteck ist die längere Seite 10 cm länger als die andere Seite. Der Umfang des Rechtecks beträgt 116 cm. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

Lösung:
 Umfang: 116 cm
 Länge der kürzeren Seite: x
 Länge der anderen Seite: $x + 10$
 Gleichung: $x + x + x + 10 + x + 10 = 116$

$$4 \cdot x + 20 = 116$$

$$4 \cdot x = 116 - 20$$

$$4 \cdot x = 96$$

$$x = 24$$

$$x + 10 = 34$$

Zusammenfassen durch Umformen

Umformen

Durch Einsetzen des Zahlenwerts der Variablen wird die Länge der anderen Seite ermittelt.

Diese Lösung ist möglich, die längere Seite ist um 10 cm länger als die kürzere und der Umfang beträgt 116 cm.
 Die kürzere Seite des Rechtecks ist 24 cm lang, die andere ist 34 cm lang.

Abbildung 25: *Mathematik verstehen 2 – Lösungsplan und Musterbeispiel*
 Quelle: *Mathematik verstehen 2*, 2022, S. 121

Wie bereits in den vorherigen Büchern befindet sich die Buchseite zu Textaufgaben im Themengebiet der Gleichungen. Demnach liegt der Fokus auf dem Schritt des Mathematisierens, welcher bereits in der fünften Schulstufe thematisiert wird.

In diesem Lösungsplan sind alle Schritte des Analyserasters enthalten. Zwar fällt vor allem der Hinweis zur Informationsgewinnung knapp aus, da keine expliziten Anleitungen zur Integration des vorhandenen Wissens der Lernenden oder zum gezielten Extrahieren relevanter Informationen angegeben werden, dennoch wird der Analyse von relevanten Informationen Raum gegeben, indem auf die Anfertigung von Skizzen und Diagrammen hingewiesen wird. Außerdem lässt sich die Anweisung „verdeutliche dir den Sachverhalt“ sowohl zu dem Bereich des sinnentnehmenden Lesens als auch der Strukturierung der Informationen zuordnen. Die Verdeutlichung der Sachsituation kann einerseits lediglich den Prozess der Informationsgewinnung anregen, aber gleichsam auch die Strukturierung der Informationen voraussetzen.

Die weiteren Schritte sind sehr ähnlich zu den Anweisungen von *Das ist Mathematik*. Zunächst muss eine passende Gleichung aufgestellt werden, welche anschließend gelöst werden soll. Dabei ist von einer „sinnvollen Antwort“ die Rede, wobei natürlich gefragt werden kann, was dies genau bedeutet und ab wann eine Antwort tatsächlich sinnvoll ist. Wäre beispielsweise das Umformulieren der Fragestellung bereits eine sinnvolle Antwort, kann die Kategorisierung zum Punkt der *Interpretation* nicht zur Gänze erfüllt werden. Denn wesentlich ist, dass die Situation im Kontext eingeordnet und die Frage, was dies nun für die Sachsituation bedeutet, gestellt wird.

Schlussendlich folgt der Hinweis, noch einmal zu überprüfen, ob das Ergebnis tatsächlich zur gegebenen Situation passt. Damit ist also die Rückschau auf die Problemsituation abgedeckt.

Tabelle 16: Analyseraster - Mathematik verstehen 2

Mathematik verstehen 2 - S. 125			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Verdeutliche dir den Sachverhalt"
		Markieren wichtiger Informationen	
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	
		Skizze	"Skizze, Diagramm, eine Tabelle oder andere Bildhafte Darstellung als Unterstützung"
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	"Verdeutliche dir den Sachverhalt"
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Stelle eine passende Gleichung auf"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Löse die Gleichung"
		Rechenweg darstellen	
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Formuliere eine sinnvolle Antwort"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	"Überprüfe, ob die Lösung der Gleichung zur gestellten Aufgabe passt"
		Probe durchführen	

5.3.3. Siebte Schulstufe



Titel:	Mathematik verstehen 3
Autor*innen:	Bernhard Salzger, Judith Bachmann Andreas Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer, Andreas Ulovec
Erscheinungsjahr:	2022
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

Die Buchseite mit Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben kann im Kapitel *Variablen, funktionale Abhängigkeiten* verortet werden. Hier wird zunächst eine Beispiel-Aufgabe angeführt und anschließend im nachstehenden Fließtext das Vorgehen erläutert. Dabei wird keine konkrete Schrittabfolge genannt. Dennoch lassen sich gewisse Aspekte herauslesen, welche in den Analyseraster eingeordnet werden können. Trotzdem liegt in dieser Erklärung der Fokus auf dem Themengebiet der Gleichungen, was auch bei der nachstehenden Analyse deutlich wird.

4.7 Textaufgaben

4.198 Priska hat 260 € auf ihrem Sparbuch. Von diesem Geldbetrag spendet sie 30% einem wohltätigen Zweck. Von dem verbleibenden Geld hebt sie die Hälfte in bar ab. Wie viel Euro hat Priska bar abgehoben?

Lösung: Diese Aufgabe kann mit Hilfe einer Gleichung gelöst werden. Dabei sei x der Geldbetrag, den sie bar abgehoben hat:

$$260 \cdot 0,3 + 2x = 260$$

$$2x = 260 - 260 \cdot 0,3$$

$$2x = 260 \cdot (1 - 0,3)$$

$$2x = 260 \cdot 0,7$$

$$2x = 182$$

$$x = 182 : 2$$

$$x = 91$$

Priska hat 91 € in bar abgehoben.



Textaufgaben werden häufig mit Hilfe von Gleichungen gelöst. Dabei ist zunächst einmal wichtig, welche Größe gesucht ist. Hierfür setzt man eine **Variable**. Aufgrund der Angabe lässt sich dann eine **Gleichung aufstellen**, die mit **Elementarumformungen** oder dem Anwenden von Kommutativ-, Assoziativgesetz oder Distributivgesetzen **gelöst** wird. Eine **Antwort** schließt die Bearbeitung der Aufgabe ab.

In Aufgabe 4.198 wurde jeder einzelne Umformungsschritt genau angeschrieben. Bei ähnlichen Gleichungslösungen kann man meist einige Schritte auf einmal machen, bis die Lösung direkt ablesbar ist. Jede der angeführten sieben Gleichungen ist aber **gleichwertig (äquivalent)**, da in jeder Gleichung die Lösung $x = 91$ gilt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **Äquivalenzumformungen**.

! Elementarumformungen und das Anwenden von Rechengesetzen, die gleichwertige Aussageformen (Gleichungen) ineinander überführen, nennt man **Äquivalenzumformungen**.

Abbildung 26: Mathematik verstehen 3 - Hilfestellung zu Textaufgaben
Quelle: Mathematik verstehen 3, 2022, S. 116

Insgesamt lassen sich mit Hilfe der Kategorisierung des Textes drei von sechs Punkte des Analyserasters finden. Dabei steht vor allem das Aufstellen und Lösen der Gleichung im Vordergrund. Die angeführte Buchseite befindet sich zudem im Kapitel *Variablen, funktionale Abhängigkeit*, was das besondere Augenmerk auf Gleichungen erklärt.

Der Fließtext beinhaltet keine Hilfestellung zu der Informationsgewinnung und dem sinnentnehmenden Lesen. Es wird lediglich angeführt, dass es wichtig ist zu erkennen, welche Größe gesucht wird. Trotzdem sollte davor die gegebene Information strukturiert werden. Außerdem kann eine kurze Notation der relevanten Informationen den Schüler*innen helfen, den passenden Lösungsweg zu erkennen.

Zusätzlich heißt es „eine Antwort schließt die Bearbeitung ab“. Dabei ist wiederum fraglich, ob hier die Antwort auch eine Rückinterpretation der Lösung impliziert. Dadurch kann der fehlende Hinweis zu einer Reflexion und Probe der Antwort problematisch sein, da die Schüler*innen nicht lernen ihre Antworten zu hinterfragen und die Sinnhaftigkeit im gegebenen Sachzusammenhang zu überprüfen. Demnach sollte der Antwortsatz nicht zwingendermaßen das Ende des Lösungsprozesses darstellen.

Tabelle 17: Analyseraster - Mathematik verstehen 3

Mathematik verstehen 3 - S. 116			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen Markieren wichtiger Informationen Recherchieren Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren Skizze Zusammenhänge erkennen Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Gleichung aufstellen"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen Rechenweg darstellen	"Elementarumformung"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"eine Antwort schließt die Bearbeitung der Aufgabe ab"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen Probe durchführen	

5.3.4. Achte Schulstufe



Titel:	Mathematik verstehen 1
Autor*innen:	Bernhard Salzger, Judith Bachmann Andreas Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer, Andreas Ulovec
Erscheinungsjahr:	2023
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In *Mathematik verstehen 4* wird keine Erklärung zum Thema Textaufgaben angeführt. Trotz einer umfassenden Abdeckung mathematischer Themen, inklusive zahlreicher Textaufgaben, lassen sich keine spezifischen Erklärungen oder Anleitungen zum Lösen von Textaufgaben finden. Zwar beinhalten die Themenbereiche Terme, Gleichungen und Gleichungssystem einige Musterlösungen zu Textaufgaben, dennoch wird die Vorgehensweise nicht weiter ausgeführt oder in einem entsprechenden Infokästchen dargestellt.

Somit kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass bereits in der sechsten und siebten Schulstufe ein Lösungsschema vorgestellt wurde, welches nicht erneut wiederholt werden muss. Womöglich sollen sich die Schüler*innen auf ihr bereits vorhandenes Wissen und Repertoire an Heuristiken stützen, um die Textaufgaben adäquat zu lösen. Vor allem in den höheren Schulstufen wird oftmals eine geeignete Herangehensweise zum Lösen von Textaufgaben vorausgesetzt, ähnlich zu der Erkenntnis von Vicente et al. (2020) für Schulbücher der Sekundarstufe I in Singapur. Auch hier nehmen die stufenweisen Anleitungen des Problemlöseprozesses mit höheren Klassenstufen sukzessive ab.

5.4. Das ist Mathematik

Insgesamt beinhalten die Schulbücher *Das ist Mathematik 1-4* sechs Seiten mit Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben. Zumeist ist zusätzlich ein Lösungsplan angeführt, welcher in Form von Aufzählungspunkten die einzelnen Schritte erläutert. Dabei ist erkennbar, dass vor allem in der sechsten und siebten Schulstufe ein höheres Aufkommen an derartigen Erklärungen gegeben ist und anschließend wiederum eine Reduktion in der achten Schulstufe sichtbar wird.

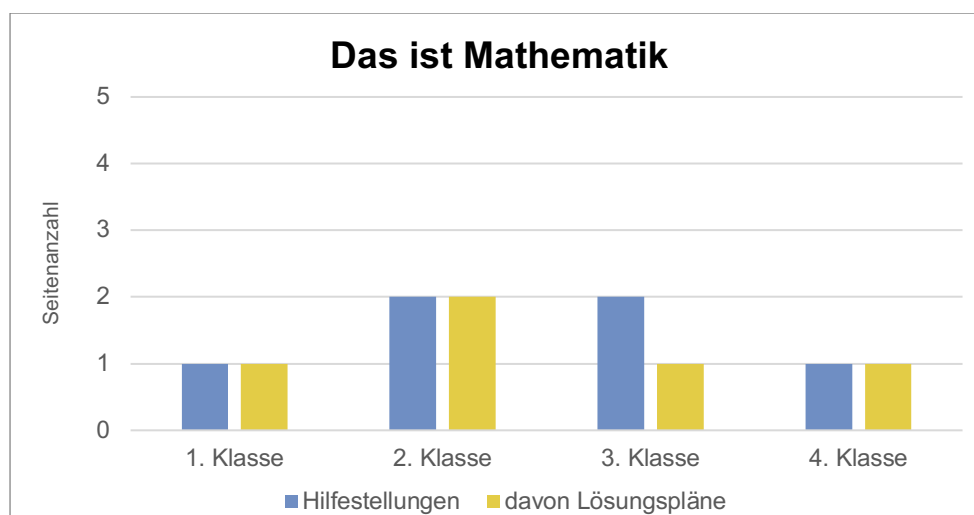


Abbildung 27: Übersicht der Hilfestellungen in ‚Das ist Mathematik‘

Jeder Erklärung geht ein Beispiel voraus, das teilweise gelöst ist und bei dem einige Lücken von den Lernenden ausgefüllt werden müssen. Darin kann ein erhöhtes Fehlerpotential gesehen werden, da die Schüler*innen zunächst die Musterlösung korrekt vervollständigen müssen, um die Erklärung nachvollziehen zu können. Demnach bedarf es einer geeigneten Instruktion der Lehrperson, um einen tatsächlichen Erkenntnisgewinn zu ermöglichen.

5.4.1. Fünfte Schulstufe



Titel:	Das ist Mathematik 1
Autor*innen:	Hans Humenberger, Vera Aue, Johannes Hasibeder, Michael Himmelsbacher, Johanna Schüller-Reichl
Erscheinungsjahr:	2023
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In diesem Schulbuch lässt sich eine Seite mit Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben finden. Diese Textpassage ist wiederum im Themengebiet *Variablen und Gleichungen* verortet. Dabei wird eine exemplarische Aufgabe der Erklärung vorangestellt, wobei diese Aufgabe Lücken beinhaltet, welche es zu füllen gilt. Die Textaufgabe wird zunächst Stück für Stück zerlegt und die Informationen in einer Tabelle dargestellt. Anschließend wird in einer separaten Spalte die Übersetzung in die Mathematische Sprache angegeben. Dadurch können die einzelnen Informationen zu einer Gleichung zusammengeführt und gelöst werden.

1.3 Gleichungen aus Textaufgaben



Lisa hat im letzten Monat einen Teil ihres Taschengeldes gespart, denn sie will Schlittschuhe kaufen. Wenn sie dreimal so viel Geld hätte, müsste sie noch einen Euro dazugeben, damit sie sich die Schuhe um 40 € kaufen kann. Wie viel Euro hat Lisa nun eigentlich von ihrem Taschengeld gespart?

Diese Aufgabe kann man mit Hilfe einer Variablen und einer Gleichung lösen.

1. Schritt

Text	Mathematische Sprache
Ersparnis von Lisa	x
dreimal so viel Geld	$3 \cdot x$
1 € dazugeben	$3 \cdot x + 1$
Ware um 40 € kaufen	$3 \cdot x + 1 = 40$
Lösung der Gleichung	$x = 13$

2. Schritt

Überprüfen der Lösung
$x = 13$
dreimal: $3 \cdot \text{ } = 39$
eins dazu: $\text{ } + 1 = \text{ }$
$40 = \text{ } \text{ (wahre Aussage)}$

Antwort: Lisa hat **13 €** gespart.

Bei diesen Textaufgaben ergibt sich also eine Gleichung mit einer Variablen. Die Variable ist natürlich wieder nur ein **Platzhalter** für eine ganz **bestimmte**, uns aber noch **unbekannte Zahl**. Um eine Gleichung aus dem Text aufzustellen, kannst du so vorgehen:

Abbildung 28: Das ist Mathematik 1 – Musterlösung
Quelle: Das ist Mathematik 1, 2023, S.149

Daran anknüpfend wird in einem farblich gekennzeichneten Kästchen noch einmal näher auf das Lösen von Textaufgaben eingegangen, wobei der beschriebene Prozess fünf Schritte beinhaltet.

Lösen von Textaufgaben mit Hilfe von Gleichungen

1. Lies dir den Text **genau** durch! **Markiere** gegebene **Zahlen** und deren **Bedeutung**! **Markiere Signalwörter** (dazugibt, verdreifacht, ...)!
2. Bezeichne die **gesuchte Zahl** oder Größe mit einer **Variablen**! Überlege, was in der Aufgabe gesucht wird!
3. Übersetze den Text in die Sprache der Mathematik, indem du eine **Gleichung aufstellst**!
4. **Löse** die Gleichung!
5. **Überprüfe** mit Hilfe der Angabe, ob die **gefundene Lösung** tatsächlich stimmt (**Probe**)! **Verfasse** anschließend eine sinnvolle **Antwort**!

Abbildung 29: Das ist Mathematik 1 – Lösungsplan
Quelle: Das ist Mathematik 1, 2023, S.149

Zunächst zeigt der erste Schritt die Bedeutung der Informationsgewinnung. Dies beinhaltet das Markieren und Hervorheben von Signalwörtern, um klar zu definieren, was in der Aufgabe gesucht wird. Im nächsten Schritt wird eine Gleichung aufgestellt, also der Lösungsweg geplant und schlussendlich durchgeführt. Anschließend soll eine „sinnvolle

Antwort“ formuliert werden, wobei hier das Adjektiv „sinnvoll“ darauf hinweist, dass die Antwort nicht nur direkt aus der Frage abgeleitet werden sollte, sondern eine kritische Rückinterpretation erfordert, um die Sinnhaftigkeit der Lösung zu gewährleisten. Zusätzlich wird im selben Schritt empfohlen, die Lösung mit Hilfe der Angabe zu überprüfen. Somit ist auch der letzte Schritt der Reflexion im Lösungsplan enthalten. Trotzdem stellt sich wiederum die Frage, was eine „sinnvolle“ Antwort auszeichnet und ob bereits durch Umformulieren der Fragestellung eine „sinnvolle“ Antwort entsteht.

Alles in allem kann daraus schlussgefolgert werden, dass insgesamt fünf der sechs Punkte in der Hilfestellung des Schulbuchs enthalten sind. Lediglich die Analyse der Angabe wird in dieser Lösungshilfe zu kurz gefasst. Dabei wird die Relevanz der Problemdarstellung in eigenen Worten und in Form von Skizzen oftmals unterschätzt und der Fokus eher auf das Rechenverfahren und Lösen der Gleichung gelenkt.

Tabelle 18: Analyseraster - *Das ist Mathematik 1*

Das ist Mathematik 1 - S. 149			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lies die Aufgabe durch", "Überlege, was in der Aufgabe gesucht wird"
		Markieren wichtiger Informationen	"Markiere gegebene Zahlen", "Markiere Signalwörter"
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Gleichung aufstellen"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Löse die Gleichung"
		Rechenweg darstellen	
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Verfasse anschließend eine sinnvolle Antwort"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	"Überprüfe mit Hilfe der Angabe, ob die gefundene Lösung tatsächlich stimmt"
		Probe durchführen	

5.4.2. Sechste Schulstufe



Titel:	Das ist Mathematik 2
Autor*innen:	Hans Humenberger, Johannes Hasibeder, Michael Himmelsbacher, Johanna Schüller-Reichl, Dieter Litschauer, Herbert Groß, Vera Aue
Erscheinungsjahr:	2017
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In diesem Buch lassen sich zwei Seiten mit Hilfestellungen zum Thema Lösen von Textaufgaben finden. Der inhaltliche Aufbau ist nahezu ident zu der Buchseite in *Das ist Mathematik 1*. Zunächst wird anhand eines Beispiels das Lösen einer Textaufgabe im Kapitel *Gleichungen aus Texten* veranschaulicht. Die Textaufgabe zeigt inhaltliche

Parallelen zur Beispiel-Textaufgabe der fünften Schulstufe. Dabei wird wiederum von einer Fragestellung mit Bezug auf das Taschengeld ausgegangen und ähnlich wie im Schulbuch des Vorjahres beinhaltet die Musteraufgabe Lücken, welche von den Schüler*innen zu vervollständigen sind.

2.5 Gleichungen aus Texten



Constantin möchte wissen, wie viel Euro Taschengeld sein Freund Theo im Monat bekommt.
 Theo antwortet: „Wenn ich zur Hälfte meines Taschengeldes 18 € dazugebe, ergibt das 30 €.“
 Wie viel Taschengeld bekommt Theo?

Constantin „übersetzt“ den Text in die „Sprache der Mathematik“. Die unbekannte Zahl bezeichnet er mit t .
 Wenn er anschließend die Gleichung löst, weiß er, wie viel Euro Theo im Monat bekommt.

Text	Mathematische Sprache
Die Hälfte des Taschengeldes...	$t : \square$ oder $\frac{t}{\square}$
...18 € dazugeben...	$\frac{t}{\square} + \square$
...ergibt 30 €.	$\frac{t}{\square} + \square = 30$
Theo bekommt $\square$ Euro.	

⇒ Lösung: $t = \square$ €

Abbildung 30: Das ist Mathematik 2 – Musterlösung
 Quelle: Das ist Mathematik 2, 217, S.111

Daran anschließend wird eine konkrete Erklärung mit insgesamt sechs Schritten zum Lösen von Textaufgaben gegeben. Dabei ist die postulierte Herangehensweise ident zu der Erklärung des Vorjahres.

Lösen von Textaufgaben

1. Lies den Text **genau** durch! Markiere Zahlen und Signalwörter!
2. Bezeichne die **gesuchte Zahl** oder Größe mit einer **Variablen**!
3. Übersetze den Text in die **Sprache der Mathematik**, indem du eine **Gleichung** aufstellst!
4. **Löse** die Gleichung!
5. Überprüfe, ob die Lösung zum Text passt und ob sie stimmt (Probe)!
6. **Verfasse** eine sinnvolle **Antwort**!

Abbildung 31: Das ist Mathematik 2 – Lösungsplan 1
 Quelle: Das ist Mathematik 2, 2017, S.111

Der letzte Punkt des Verfassens einer sinnvollen Antwort wurde jedoch isoliert und als separater Aspekt aufgeführt, während die anderen Punkte weiterhin in den gleichen Kategorien wie im Vorjahr eingeordnet werden können. Folglich wird wiederum der Analyseaspekt vernachlässigt, was dazu führt, dass wenig Aufmerksamkeit auf die Entwicklung eines geeigneten Situationsmodells gelegt wird. Die Anfertigung von eigenen Notizen und Skizzen nimmt einen geringen Stellenwert ein.

Tabelle 19: Analyseraster 1 - Das ist Mathematik 2

Das ist Mathematik 2 - S. 111			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lies den Text genau durch"
		Markieren wichtiger Informationen	"Markiere Zahlen und Signalwörter"
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Gleichung aufstellen"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Löse die Gleichung"
		Rechenweg darstellen	
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Verfasse eine sinnvolle Antwort"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	"Überprüfe noch einmal am Text, ob die Lösung zum Text passt"
		Probe durchführen	"Probe"

Nachdem die sechs Schritte zum Lösen von Textaufgaben erklärt werden, wird in dem Buch eine kleine Box mit Signalwörtern angeführt. Dadurch soll den Lernenden bei der Identifikation der richtigen Rechenoperation geholfen werden. Diese Hilfestellung kann auf Basis der Literatur von Jitendra (2008); Schlager (2020); Xin (2007) hinterfragt werden, da derartige Schlüsselwortstrategien oftmals nicht zu einem nachhaltigen Kompetenzzuwachs führen. Außerdem kann dadurch das kritische Denken der Lernenden wenig geschärft werden. Schlüsselwortstrategien dienen dem oberflächlichen Eintrainieren von Lösungsschemata und die Schüler*innen stoßen in weiterer Folge bei authentischen Textaufgaben auf ein fehlendes Verständnis für die Situation.

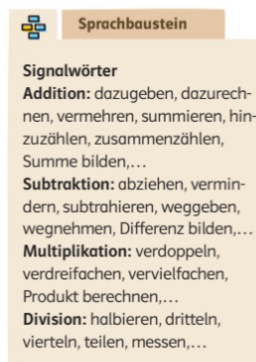


Abbildung 32: Signalwörter
 Quelle: Das ist Mathematik 2, 2017, S.111

Neben den Hilfestellungen im Kapitel *Gleichungen aus Texten* beinhaltet das Kapitel *Direkte und indirekte Proportionalität* zusätzlich eine Hilfestellung zur Vorgehensweise beim Lösen von Textaufgaben zur Schlussrechnung. Dabei wird die allgemeine Hilfestellung auf ein konkretes Thema übertragen, angepasst und in insgesamt sechs Schritten erläutert.

Tipp

Vorgangsweise beim Lösen von Textaufgaben zur Schlussrechnung:

1. Liegt ein **direkt** oder **indirekt proportionales** Verhältnis vor?
2. **Was** ist zu berechnen? Was muss dafür **zuerst** berechnet werden?
3. Führe eine **Schätzung** oder eine **Überschlagsrechnung** durch!
4. Führe die **Rechnung** durch!
5. **Vergleiche** dein Ergebnis mit deiner Schätzung bzw. Überschlagsrechnung!
6. Schreibe die **Antwort** und überlege, ob sie auch sinnvoll ist!

Abbildung 33: Das ist Mathematik 2 - Lösungsplan 2

Quelle: Das ist Mathematik 2, 2017, S.130

Die daraus ableitbaren, allgemeinen Ratschläge zum Lösen von Textaufgaben beinhalten lediglich vier der sechs Punkte des Analyserasters. Dabei ist besonders auffällig, dass die Informationsgewinnung und weiterführende Strukturierung der Herangehensweise vernachlässigt wird und mehr die Durchführung der Rechenoperationen im Fokus steht. Lediglich die Frage „Was ist zu berechnen?“ weist darauf hin, dass davor die Situation veranschaulicht werden muss. Dies allein wird jedoch nicht ausreichen, um den Schüler*innen eine Hilfestellung zur Informationsgewinnung zu bieten. Darüber hinaus gibt es keine weiteren Hinweise zur Strukturierung der Informationen aus dem Text oder die Anmerkung, dass die Anfertigung von Skizzen und Notizen für die Berechnung hilfreich sein könnte.

Somit zeigt sich hier, dass explizit der Themenbereich *Direkte und indirekte Proportionalität* im Fokus steht und das zentrale Element bildet. Die generellen Hinweise zum Lösen von Textaufgaben kommen weniger zur Geltung.

Tabelle 20: Analyseraster 2 - Das ist Mathematik 2

Das ist Mathematik 2 - S. 130			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen Markieren wichtiger Informationen Recherchieren Verknüpfen mit Vorwissen	"Was ist zu berechnen?"
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren Skizze Zusammenhänge erkennen Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen Rechenweg darstellen	"Führe die Rechnung durch"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Schreibe die Antwort"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen Probe durchführen	"Schreibe die Antwort und überlege, ob sie auch sinnvoll ist"

5.4.3. Siebte Schulstufe



Titel:

Das ist Mathematik 3

Autor*innen:

Hans Humenberger, Johannes Hasibeder, Michael Himmelsbacher, Johanna Schüller-Reichl, Dieter Litschauer, Herbert Groß, Vera Auel

Erscheinungsjahr:

2019

Auflage:

1. Auflage

Verlag:

Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In diesem Band lässt sich eine Doppelseite finden, die sich mit dem Lösen von Textaufgaben beschäftigt. Das Kapitel trägt dieselbe Überschrift wie in *Das ist Mathematik 2*, nämlich *Gleichungen aus Texten*. Der Unterschied ist jedoch, dass hier der Lösungsprozess Schritt für Schritt anhand eines Beispiels erklärt wird. Darüber hinaus existieren wiederum Lücken, was voraussetzt, dass diese fehlenden Inhalte von den Lernenden korrekt ergänzt werden.

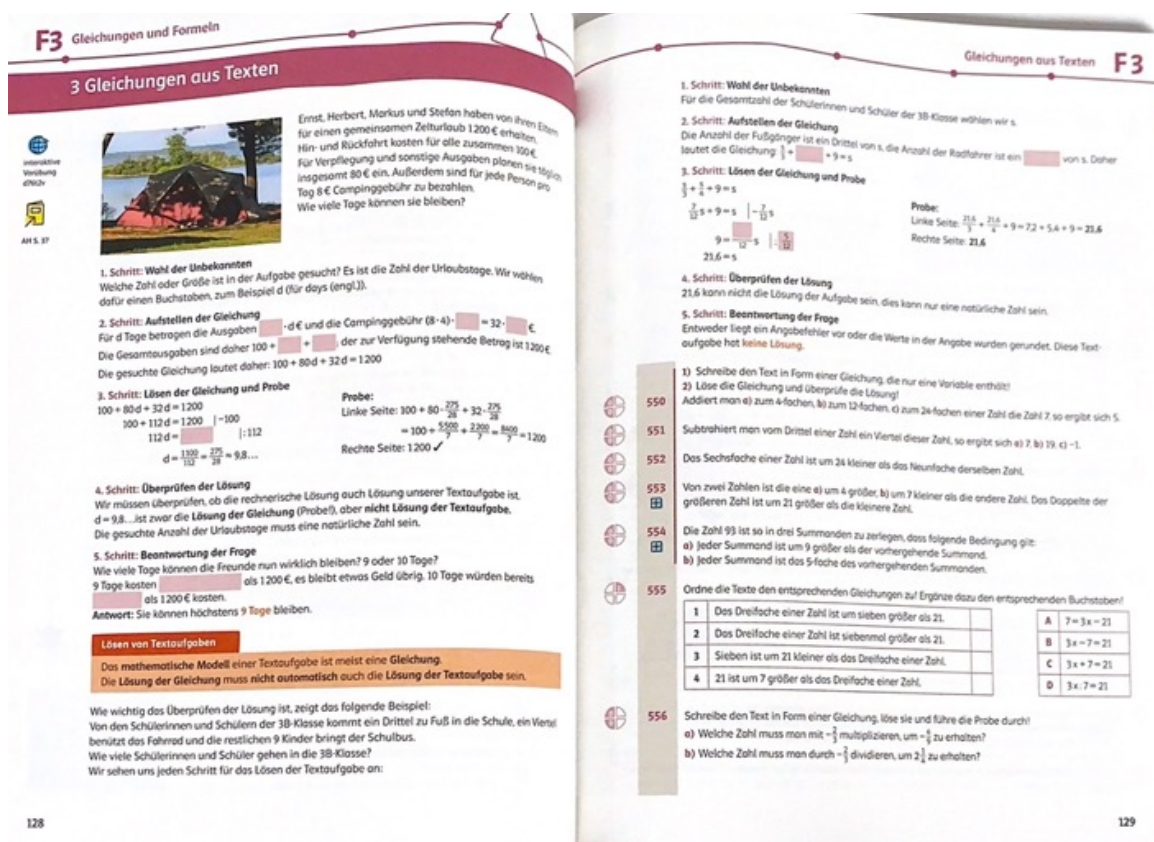


Abbildung 34: Das ist Mathematik 3 – Lösungsplan
Quelle: Das ist Mathematik 3, 2019, S.128f.

Die beiden Beispiele beinhalten insgesamt fünf Schritte, wobei ein klarer Fokus auf dem Aufstellen und Lösen der Gleichung liegt. Zusätzlich wird im zweiten Beispiel veranschaulicht, wieso die Reflexion der Lösung einen besonders wichtigen Stellenwert einnimmt. Es gibt wiederum wenig Hilfestellung bei der Informationsgewinnung und keine Hinweise zu einer passenden Strukturierung der gegebenen Inhalte. Lediglich die Frage „Was ist gesucht?“ wird gestellt. Dabei kann jedoch auch die Rückschau auf die bereits vorhandenen Informationen, beispielsweise in Form der Frage „Was ist gegeben?“, zu einem erheblichen Erkenntnisgewinn im Lösungsprozess führen.

Außerdem wird der fünfte Punkt zur Interpretation sehr kurz umrissen. Dazu heißt es lediglich „Beantwortung der Frage“. Dabei kann natürlich die Rückführung der numerischen Lösung auf die Situation gemeint sein, jedoch wird von den Schüler*innen oftmals die Fragestellung mit denselben Worten zu einem Antwortsatz umformuliert, ohne die tatsächliche Bedeutung der Lösung erkannt zu haben. Selbst bei dem angeführten Beispiel zeigt sich dieses Muster. Die Frage lautet dort: „Wie viele Tage können sie bleiben?“, und als Antwortsatz wird angeführt: „Sie können höchstens 9 Tage bleiben“. Somit zeigt dieses exemplarische Vorgehen ein ähnliches Schema, wobei die Interpretation der Antwort knapp ausfällt. Zudem scheint dieses Vorgehen vom Aufgabentyp abzuhängen. Basierend auf der bisherigen Analyse lässt sich vermuten, dass bei realitätsnäheren Texten mehr Rückinterpretation erforderlich ist.

Tabelle 21: Lösungsplan - Das ist Mathematik 3

Das ist Mathematik 3 - S. 128f.			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen Markieren wichtiger Informationen Recherchieren Verknüpfen mit Vorwissen	"Welche Zahl oder Größe ist in der Aufgabe gesucht"
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren Skizze Zusammenhänge erkennen Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"Aufstellen der Gleichung"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen Rechenweg darstellen	"Lösen der Gleichung"
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Beantwortung der Frage"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen Probe durchführen	"Überprüfen der Lösung" "Probe durchführen"

5.4.4. Achte Schulstufe



Titel:	Das ist Mathematik 4
Autor*innen:	Hans Humenberger, Johannes Hasibeder, Michael Himmelsbacher, Johanna Schüller-Reichl, Dieter Litschauer, Herbert Groß, Vera Aue
Erscheinungsjahr:	2020
Auflage:	1. Auflage
Verlag:	Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

In *Das ist Mathematik 4* lässt sich eine Buchseite identifizieren, welche Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben beinhaltet. Die entsprechende Seite befindet sich im Kapitel *Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen*. Zunächst wird eine Beispiel-Aufgabe mit Lücken gegeben, wobei hier die Relevanz der gewählten Aufgabe hinterfragt werden kann. Dennoch veranschaulicht diese Textaufgabe das Anwendungsgebiet der linearen Gleichungssysteme und zusätzlich können die notwendigen Schritte im Lösungsprozess abgeleitet werden.

2.4 Textaufgaben



Frau Lehner kauft 7 kg Blütenhonig und 5 kg Waldhonig und bezahlt 80,40 €. Herr Mahler kauft 5 kg Blütenhonig und 8 kg Waldhonig und bezahlt 84 €. Wie teuer ist 1 kg Honig jeder Sorte? Um diese Fragestellung zu beantworten, stellen wir zwei Gleichungen (oder ein Gleichungssystem) auf.

Zuerst **bezeichnen** wir die **gesuchten Größen mit Variablen**:
 Preis pro kg Blütenhonig: b Preis pro kg Waldhonig: w

Mit diesen kann man ein **Gleichungssystem mit zwei linearen Gleichungen** aufstellen:
 I: $7b + 5w =$ II: $5b + 8w =$

Mit dem Eliminationsverfahren kann man das Gleichungssystem lösen:

$$\begin{array}{r} 5 \cdot \text{I: } 35b + 25w = 402 \\ 7 \cdot \text{II: } 35b + 56w = 588 \\ \hline -31w = -186 \Rightarrow w = 6 \Rightarrow b = 7,2 \end{array}$$

Antwort: Der Waldhonig kostet 6 € und der Blütenhonig kostet 7,20 € pro Kilogramm.

Lösen von Textaufgaben, die zu linearen Gleichungssystemen führen

1. Lies den Text genau durch, wenn nötig mehrmals!
2. Bezeichne die gesuchten Zahlen oder Größen mit Variablen!
3. Übersetze den Text in die Sprache der Mathematik, indem du zwei Gleichungen aufstellst!
4. Wähle ein geeignetes Lösungsverfahren und löse das Gleichungssystem!
5. Überprüfe noch einmal am Text, ob die Lösung zum Text passt und ob sie stimmt (Probe)!
6. Schreibe eine (sinnvolle) Antwort auf!

Abbildung 35: *Das ist Mathematik 4 - Lösungsplan und Musterlösung*
 Quelle: *Das ist Mathematik 4*, 2020, S.125

Das orangefarbene Kästchen fungiert erneut als Erklärung zum Lösungsprozess von Textaufgaben, die zu linearen Gleichungssystemen führen. Im Vergleich zu den vorherigen Bänden wird in diesem Kontext spezifisch darauf hingewiesen, die

Aufgabenstellung eingehend zu lesen und bei Bedarf den Vorgang mehrfach zu wiederholen. Somit zeigt sich die klare Zielsetzung, das Textverständnis der Lernenden hervorzuheben. Dennoch fehlen Hinweise zur Analyse des Textes und einer konkreten Strukturierung der Informationen. Diese Lücke im Lösungsprozess führt vom Lesen des Textes zum Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems. Dadurch besteht die Gefahr, dass essenzielle Informationen übersehen und im Lösungsprozess nicht berücksichtigt werden.

Zusätzlich gibt es den Hinweis des Schreibens einer „sinnvollen Antwort“. Es wird in diesem Zusammenhang jedoch nicht erklärt, was dies für die Lernenden bedeutet. Dabei sollte das Zurückführen der Lösung auf die Sachsituation gemeint sein. Dennoch bleibt die Frage offen, wann die Antwort tatsächlich als „sinnvoll“ angesehen wird. Es könnte dabei gemeint sein, dass die Lösung im Kontext tatsächlich Sinn ergibt, aber auch ob die Formulierung des Antwortsatzes zur tatsächlichen Frage passt. Dies wird jedoch nicht weiter ausgeführt.

Tabelle 22: Lösungsplan - Das ist Mathematik 4

Das ist Mathematik 4 - S. 125			
Analyseraster			Code
1.	Informationsgewinnung	Sinnentnehmendes Lesen	"Lies den text genau durch, wenn nötig mehrmals"
		Markieren wichtiger Informationen	
		Recherchieren	
		Verknüpfen mit Vorwissen	
2.	Analysieren	Überlegungen übersichtlich notieren	
		Skizze	
		Zusammenhänge erkennen	
		Informationen strukturieren	
3.	Entwicklung eines Plans	Mathematische Operation wählen	"zwei Gleichungen aufstellen", "Wähle ein geeignetes Lösungsverfahren"
4.	Durchführung	Lösung ausrechnen	"Löse das Gleichungssystem"
		Rechenweg darstellen	
5.	Interpretation	Lösung auf die Situation zurückführen	"Schreibe eine (sinnvolle) Antwort"
6.	Reflexion	Lösung hinterfragen	"Überprüfe noch einmal am Text, ob die lösung zum Text passt"
		Probe durchführen	"Probe"

6. Diskussion

Die Ergebnisse der Forschung haben gezeigt, dass auch österreichische Schulbücher Hilfestellungen in Hinblick auf das Lösen von Textaufgaben beinhalten. Dabei ist zunächst ein großer Unterschied in der Anzahl dieser Hilfestellungen je nach Buch erkennbar. Insgesamt konnten 29 Seiten in vier verschiedenen Schulbuchreihen der Sekundarstufe I identifiziert werden. Dennoch ist diese Anzahl an Hilfestellungen im Vergleich zur Dominanz von Textaufgaben in einigen Schulbüchern sehr gering. Demnach kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass vor allem Lehrpersonen für eine adäquate Heranführung an das Problemlösen verantwortlich sind.

Zusätzlich zeigt sich ein Anstieg der Hilfestellungen von der fünften auf die sechste Schulstufe und ein sukzessiver Rückgang der Unterstützung im Zusammenhang mit Textaufgaben ab der sechsten Schulstufe. Die geringste Anzahl an Hilfestellungen konnte in der achten Schulstufe identifiziert werden. Hintergründe dieser Erkenntnis werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch ausführlicher diskutiert.

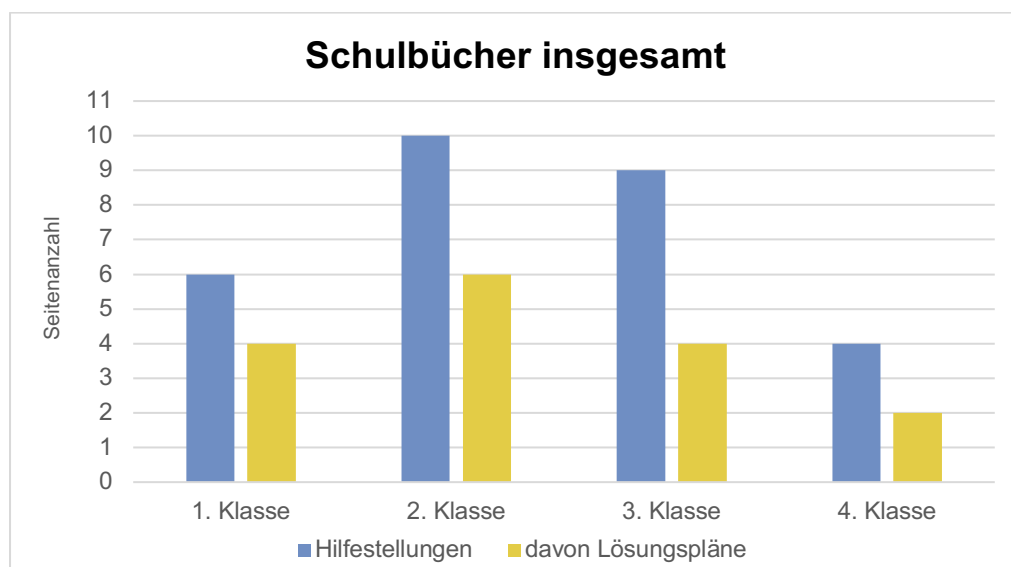


Abbildung 36: Übersicht der Hilfestellungen in österreichischen Schulbüchern

Drüber hinaus wird in dieser Masterarbeit deutlich, dass neben den allgemeinen Heuristiken zum Lösen von Textaufgaben, auch konkrete Schrittabfolgen angegeben werden. Dieses planmäßige Vorgehen kann für die Schüler*innen als Anhaltspunkt bei der Konstruktion des Situationsmodells und bei der Mathematisierung dienen (Goulet-Lyle et al., 2020). In nahezu allen untersuchten Schulbüchern sind Lösungspläne präsent und weisen eine ähnliche Häufigkeitsverteilung auf wie die insgesamt Anzahl an Hilfestellungen. Neben der quantitativen Erfassung der Lösungspläne ist zusätzlich die inhaltliche Komponente von Bedeutung. Die qualitativen Merkmale werden im nachstehenden Kapitel detailliert erörtert.

6.1. Hilfestellungen mit Lösungsplänen

Eine systematische Vorgehensweise kann den Schüler*innen im Lösungsprozess helfen, sich gehaltvoll mit der Problemsituation auseinander zu setzen. Demnach ist die Bearbeitung mit Hilfe eines Lösungsplans zwar kein Allheilmittel, kann jedoch das Verstehen der Aufgabe erleichtern und die Motivation der Lernenden fördern (Verschaffel et al., 2020). Deshalb ist es zu begrüßen, dass auch in österreichischen Schulbüchern derartige Schemata vorgestellt werden. Nicht allein die Präsenz von Lösungsplänen in Schulbüchern ist jedoch von Bedeutung, sondern auch deren Qualität.

Die zusätzliche Einordnung der Hilfestellungen in den Analyseraster konnte zeigen, dass vor allem die Informationsgewinnung, Planung und Durchführung der Rechnung im Vordergrund der Erklärungen stehen.

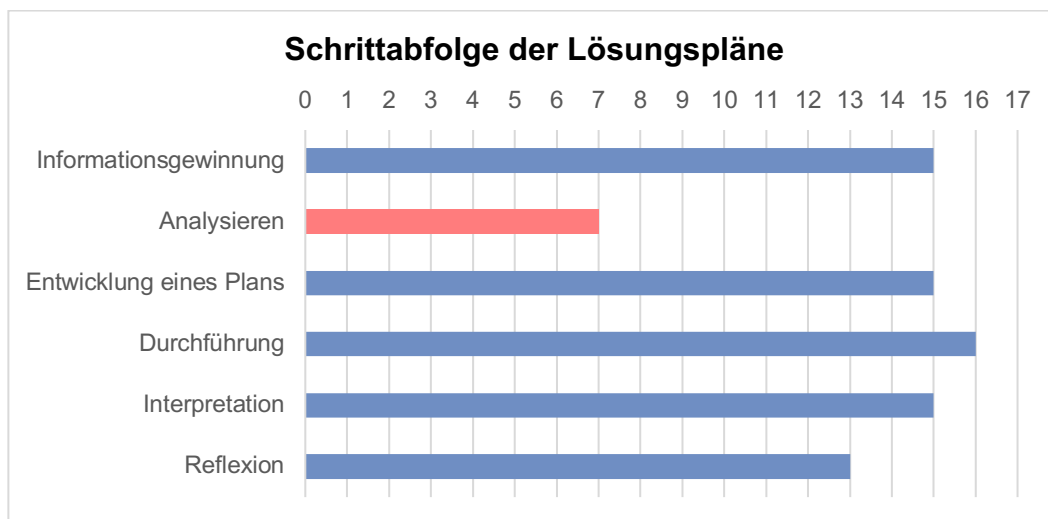


Abbildung 37: Schrittfolge der Lösungspläne

Außerdem waren Elemente der Interpretation in fast allen Lösungsplänen enthalten. In diesem Zusammenhang ist jedoch anzumerken, dass zumeist „Schreibe eine Antwort!“ als Angabe angeführt war. Dabei ist zwar eine Rückinterpretation des Ergebnisses auf die Sachsituation notwendig, jedoch ist fragwürdig, ob diese Anweisung für eine adäquate Interpretation der Lösung ausreichend ist. Falls die Lernenden tatsächlich eine Rückschau auf die Textangabe vornehmen und die Lösung innerhalb dieses Konstruktes interpretieren, wird dieser Schritt natürlich erfüllt. Das Schreiben einer Antwort kann jedoch auch lediglich die Umformulierung der Fragestellung ohne entsprechende Reflexion über die Ausgangssituation bedeuten. Infolgedessen war vor allem dieser Aspekt in den meisten Lösungsplänen nur unzureichend formuliert. Trotzdem wurde das Schreiben eines Antwortsatzes in der Analyse entsprechend berücksichtigt, da das Spektrum der Herangehensweise variabel ist und eine tatsächliche Rückinterpretation im Zuge dessen zwar möglich, jedoch nicht zwangsläufig ist.

Die Reflexion der Lösung wurde zwar in vielen, aber nicht in allen Hilfestellungen angesprochen. Dabei ist dieser Prozess in Zusammenhang mit der eigenständigen Validierung des Ergebnisses äußerst wichtig. Pólya (1980) betont, dass die Kontrolle der Lösung einen wesentlichen Teil ausmacht, um noch einmal die Gesamtsituation und den Lösungsweg in den Blick zu nehmen. Diese Rückschau auf die Problemsituation sollte nicht unterschätzt werden, da einige Schüler*innen häufig sehr unrealistische Lösungen als Antwort hinnehmen, ohne sie tatsächlich auf ihre Sinnhaftigkeit zu hinterfragen. Dementsprechend wäre eine Integration dieser Hilfestellung zu befürworten. Zusätzlich kann die Lehrperson während des Unterrichts nachdrücklich darauf hinweisen, die Lösung zu hinterfragen, um dadurch etwaige Fehler zu vermeiden. Die Intensität dieses Reflexionsprozesses liegt im Ermessen der Lehrkraft.

Die Anweisungen zur Analyse der Informationen sind in den Lösungsplänen nur wenig vorhanden. Lediglich 7 von 16 Lösungspläne beinhalten den Prozess der Strukturierung der im Text enthaltenen Informationen. Dieser Schritt kann zusätzlich das Anfertigen von Skizzen und Notizen beinhalten. Lediglich in *Thema Mathematik* heißt es: „schreibe dann eine Kurzangabe“. Damit wird ausdrücklich darauf hingewiesen die wichtigsten Informationen noch einmal übersichtlich zu notieren, was zusätzlich eine vorherige Strukturierung der Inhalte voraussetzt. Nach Schoenfeld (1985) hilft dieser Vorgang den Lernenden noch einmal bei der Vernetzung der vorhandenen Informationen und kann zu einem erheblichen Erkenntniszuwachs führen. Demnach sollte dieser Aspekt sowohl in Schulbüchern als auch durch Instruktionen der Lehrperson ausdrücklich hervorgehoben werden.

In diesem Zusammenhang ist jedoch zu erwähnen, dass in dieser Analyse die Fragen „Was ist gegeben? Was ist gesucht?“ als Teil der Strukturierung der Informationen gesehen wurden. In manchen Büchern konnte jedoch nur die Frage „Was ist gesucht?“ identifiziert werden, wobei dieser Teilaspekt nicht als vollständig angesehen und die grundlegende Frage nach den im Text angeführten Inhalten vernachlässigt wird. Deshalb reicht diese Frage nicht aus, um eine vollständige Strukturierung der Informationen zu gewährleisten und wurde infolgedessen nicht als Teil des Analyseaspekts codiert.

Hinsichtlich der vier Phasen des Lösens nach Pólya (1966) gab es wenige Überschneidungen mit österreichischen Schulbüchern. Natürlich sind diese Schritte als Teilaspekte in den Lösungsplänen enthalten, jedoch variiert die Gliederung stark. Oftmals sind die Schrittabfolgen aufgeteilt in Lesen, Planen, Lösen, Überprüfen und eine Antwort schreiben. Dementsprechend zeigt sich in diesen fünf Schritten eine andere Gliederung, als die vier Phasen nach Pólya (1966).

Lediglich in *Thema Mathematik 1 & 2* weisen die drei Schritte „Lesen, Planen, Lösen“ eine erhebliche Ähnlichkeit mit Pólya's Abfolge auf. Dennoch kann hier keine allgemeingültige Aussage getroffen werden. Diese Erkenntnis lässt die Schlussfolgerung zu, dass die erste Hypothese, welche besagt, dass die Erklärungsabfolgen in Schulbüchern auf den vier Schritten nach Pólya (1966) basiert, verworfen werden kann.

Gemeinsam mit den Lösungsplänen wurden in den analysierten Schulbüchern zahlreiche Musteraufgaben, welche die jeweiligen Schritte integrieren, vorgestellt. In *Thema Mathematik* lässt sich beispielsweise eine Doppelseite mit Musterlösungen zu Textaufgaben finden. *Das ist Mathematik* integriert Beispielaufgaben, welche teilweise gelöst sind und von den Lernenden vervollständigt werden müssen. Auch *Mathematik verstehen* und *Lösungswege* beinhalten Musteraufgaben in Kombination mit Erklärungen zu Textaufgaben. Diese exemplarischen Lösungsvorschläge helfen den Lernenden eine strukturierte Herangehensweise zu entwickeln (Lessani et al., 2014). Somit kann auch dieser Aspekt als konkrete Hilfestellung angesehen werden. Dabei ist besonders bedeutend, dass die Schüler*innen unterschiedliche Lösungswege kennenlernen, um dadurch eine gewisse Flexibilität im Lösungsprozess zu erwerben (Fan & Zhu, 2007). Daraus lässt sich ableiten, dass auch exemplarische Lösungsvorschläge als Hilfestellung gesehen werden können und diese häufig in österreichischen Schulbüchern integriert sind.

6.2. Intensität der Hilfestellungen

Hinsichtlich der Anzahl an Hilfestellungen in österreichischen Schulbüchern ist festzustellen, dass sie zunächst zunimmt und ab der sechsten Schulstufe schrittweise zurückgeht. Somit kann der Hypothese eines graduellen Rückgangs der Hilfestellungen teilweise zugestimmt werden, wobei dieser Prozess erst ab der sechsten Schulstufe beobachtbar ist.

In dieser Hinsicht könnte ein Zusammenhang mit den inhaltlichen Schwerpunkten, in denen das Lösen von Textaufgaben erklärt wird, bestehen. Es ist festzustellen, dass die meisten Hilfestellungen in Zusammenhang mit den Themen *Terme und Gleichungen* angesiedelt sind. Insbesondere ab der sechsten Schulstufe wird eine vermehrte Präsenz dieser Inhalte im Lehrplan lokalisiert. Im Lehrplan der fünften Schulstufe wird hingegen betont, dass die Schüler*innen lediglich einfache Gleichungen aufstellen und lösen sollen (Bundeskanzleramt Österreich, 2024). Dementsprechend ist es aus dieser Perspektive nachvollziehbar, dass die Anzahl der Hilfestellungen in der sechsten Schulstufe größer ist als in der fünften. Lediglich in *Lösungswege 3* beschränkt sich die Hilfestellung zu Textaufgaben nicht nur auf Gleichungen und Funktionen, sondern umfasst auch Themen der Geometrie. Dabei wird das Thema *Flächeninhalt* behandelt und zusätzlich mit

diversen Textaufgaben ausgeschmückt. Als Hilfestellung wird dabei noch einmal ein mögliches Vorgehen beim Lösen von Textaufgaben wiederholt. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass Erklärungen zum Lösen von Textaufgaben auch in anderen Themengebieten integriert werden können. Die Limitation auf das Training des Aufstellens und Lösen von Gleichungen spiegelt nicht den gesamten Anwendungsbereich wider.

Ähnlich zu den Erkenntnissen von Vicente et al. (2020) für Schulbücher der Sekundarstufe I in Singapur, ist auch in Österreich ein Rückgang der Hilfestellungen zu erkennen. Nachdem sich Schüler*innen in der siebten und achten Schulstufe bereits einige Jahre mit dem Lösen von Textaufgaben auseinandergesetzt haben, kann also angenommen werden, dass sie die unterschiedlichen Ansätze des Problemlösens bereits verinnerlicht haben. Folglich braucht es keine weiteren Wiederholungen der Schrittabfolge. Trotzdem wäre es durchaus wünschenswert, dass die Lehrperson das Öffnen ein systematisches Vorgehen des Lösungsprozesses postuliert, um so die Lernenden immer wieder an unterschiedliche Heuristiken zu erinnern.

6.3. Schlüsselwörter

Neben den bereits diskutierten Hilfestellungen in Form von Lösungsplänen zeigen vor allem die zwei Buchreihen, *Thema Mathematik* und *Das ist Mathematik*, die Tendenz zur Verwendung einer Schlüsselwortstrategie. Dabei wird gefordert, auf spezifische Signalwörter zu achten und diese bereits im Text eindeutig zu markieren. In *Das ist Mathematik 2* lässt sich sogar eine eigene Info-Box mit spezifischen Signalwörtern finden. Hier werden die vier Grundrechenarten angeführt und jeweils passende Ausdrücke. Beispielsweise wird für die Subtraktion das Wort ‚vermindern‘ angeführt. Dabei ist klar, dass die sprachliche Basis eine zentrale Rolle im Lösungsprozess einnimmt und folglich auch Relevanz hat. Somit sollten die Schüler*innen durchaus den Prozess der Subtraktion verbalisieren können, jedoch kann sich diese Konzentration auf Schlüsselwörter auch negativ auf den Lösungsprozess auswirken. Prediger und Krägeloh (2015) sprechen dabei von der Gefahr eines oberflächlichen Modellierens. Die Lernenden werden von Signalwörtern beeinflusst und treffen bereits Annahmen, ohne die tatsächliche Sachsituation verstanden zu haben. Die Möglichkeiten das kritische Denken der Schüler*innen anzuregen wird dadurch minimiert (Xin, 2007). Dementsprechend wird weniger der Verstehensprozess angeregt, sondern eher das oberflächliche Bearbeiten eintrainiert (Schlager, 2020).

Ähnlich dazu wird in *Thema Mathematik* das Markieren von Signalwörtern als Lösungsschritt angeführt. Dabei wäre als passendere Ausdrucksweise zum Beispiel „das Hervorheben wichtiger Informationen“ anzuführen. Diese Formulierung legt den Fokus

weniger auf Schlüsselwörter, welche ähnlich einer Vokabelsammlung angewendet werden, sondern vielmehr auf der Vernetzung der Informationen im Text.

Obwohl die Schlüsselwortstrategie in einigen geeigneten Textaufgaben gut funktionieren kann, stoßen die Schüler*innen bei authentischen Problemstellungen auf Schwierigkeiten. Sie können mit dieser Strategie nicht das fehlende Verständnis für die Sachsituation ausgleichen. Folglich werden die Lernenden nicht in der Lage sein, die Aufgabenstellung durch bloße Identifizierung einzelner Signalwörter zu erfassen und einen geeigneten Lösungsansatz zu entwickeln.

Daraus ergibt sich die Schlussfolgerung, dass diese Strategie mit Bedacht eingesetzt werden soll. Insbesondere bedarf es bei einer Verwendung von Büchern, welche Signalwörter explizit aufgreifen, eine geeignete Instruktion von Seiten der Lehrperson. Die Wirksamkeit der Schlüsselwortstrategie sollte in diesem Zusammenhang nicht überschätzt werden.

6.4. Visuelle Darstellung

Zusätzlich konnte anhand der Analyse gezeigt werden, dass in *Mathematik verstehen* und *Lösungswege* zusätzlich das Visualisieren der Inhalte mit Hilfe einer Skizze oder einer Tabelle als Hilfestellung angeführt wird. Dieser zentrale Punkt, welcher nach Schlager (2020) die Schüler*innen bei der Erstellung eines mentalen Situationsmodells unterstützen soll, ist in einigen Erklärungsansätzen jedoch unterrepräsentiert. Die Kombination der Inhalte mit einer Skizze ermöglicht den Lernenden wesentliche Zusammenhänge des Textes und der darin beschriebenen Situation zu erfassen. Darüber hinaus ermöglicht die Darstellung in Form von Skizzen eine Rückschau auf die Problemsituation und kann deshalb als Kontrollelement fungieren (Franke & Ruwisch, 2010). Daher sollte erwogen werden, diese Elemente der visuellen Darstellung als Teil der Problemanalyse in die Lösungspläne zu integrieren.

Darüber hinaus wird in keinem der Bücher die Möglichkeit erwähnt, digitale Werkzeuge zur Unterstützung der Visualisierung und Kontrolle einzusetzen. Obwohl dieses Tool den Schüler*innen helfen könnten, mathematische Prozesse besser zu verstehen, fehlen sie bisher in den Lehrmaterialien zur Lösung von Textaufgaben. Dynamische Geometriesoftwares ermöglichen beispielsweise das Simulieren von mathematischen Prozessen. Mit Hilfe von digitalen Werkzeugen können zudem unterschiedliche Lösungsansätze ausprobiert und weitere Informationen, welche für den Lösungsprozess notwendig sind, recherchiert werden (Greefrath, 2018). In den Schulbüchern wird auf diese Optionen kein Bezug genommen.

6.5. Bedeutung der Lehrperson

Diese Erkenntnisse über die teils unzureichende Anleitung in Schulbüchern verdeutlichen die enorme Bedeutung der Lehrperson bei der Vermittlung von mathematischen Konzepten und Lösungsstrategien. Sowohl bei der Wiederholung von Heuristiken zum Lösen von Textaufgaben in höheren Schulstufen als auch bei ergänzenden Hinweisen, wie zum Beispiel dem Anfertigen einer Skizze, können sie die Lernenden bei der Bearbeitung einer Textaufgabe unterstützen. Auch in Hinblick auf Schlüsselwörter kann die Lehrperson intervenieren. Beispielsweise spielt die Auswahl der passenden Textaufgaben eine zentrale Rolle. Werden Aufgaben mit zahlreichen Schlüsselwörtern und unauthentischen Situationen gewählt, besteht die Gefahr einer oberflächlichen Bearbeitung. Werden jedoch reale Situationen herangezogen, welche möglicherweise kein offensichtliches Rechenschema vorgeben, kann den Schüler*innen geholfen werden, ein Repertoire an Lösungswegen zu entwickeln, das auch in Zukunft anwendbar ist und auf außermathematische Problemstellungen übertragen werden kann. Generell sollte der Anspruch an die Mathematik bestehen, dass auch authentische Sachsituationen besprochen werden, welche mathematische Standardverfahren aufbrechen und tatsächlich einen Lebensweltbezug herstellen. Dadurch soll ein Bewusstsein für die Interdependenzen von Mathematik und realer Welt geschaffen werden (Heymann, 2013). Zusätzlich müssen Aufgabentypen variieren, damit keine schematische Vorgehensweise nach Regeln den Unterricht dominiert, sondern der mathematische Verstehensprozess im Vordergrund steht (Jitendra, 2008).

Jegliche Hilfestellungen in Schulbüchern dienen als Ergänzung der fachlichen und fachdidaktischen Kompetenz der Lehrperson. Diese hat die Möglichkeit im Unterricht unterschiedliche Heuristiken des Problemlösens zu präsentieren und mit den Schüler*innen gemeinsam unterschiedliche Hilfestellungen auszuprobieren. Dahingehend ist besonders wichtig, dass die Lernenden ihre Informationen strukturieren, wobei auch hier die Lehrperson mit gezielten Fragen positiv intervenieren kann.

Außerdem hilft das Sprechen über die Mathematik enorm in Hinblick auf den Verstehensprozess der Lernenden. Schüler*innen sollten in der Lage sein, die Textaufgabe in eigenen Worten wiederzugeben (Pólya, 1980). Auch in diesem Zusammenhang haben Lehrpersonen die Möglichkeit positiv einzuwirken. Zum Teil erfordert der Übersetzungsprozess von einer Textaufgabe in die Mathematik einen Zwischenschritt, welcher die Übersetzung in eigene Worte einschließt (Mayer, 1998).

Eben bei diesem Schritt kann die Lehrperson als Lernbegleiter*in zur Seite stehen und die nötigen Anstöße für eine umfangreiche Bearbeitung der Sachsituation geben. Folglich darf die Wirkungskraft einer Lehrperson nicht unterschätzt werden, welche auch mit unzureichenden Erklärungen in Lehrbüchern einen gehaltvollen Unterricht gestalten kann.

7. Fazit

In dieser Arbeit wurden diverse Hilfestellungen aufgegriffen, welche für das Bearbeiten von Textaufgaben unterstützend wirken können. Obwohl Textaufgaben oftmals als unbeliebt unter Schüler*innen gelten, ist das Problemlösen eine Grundfertigkeit, welche die Schüler*innen im Verlauf ihrer mathematischen Ausbildung erwerben müssen. Diese Fähigkeit, komplexe Prozesse zu verstehen und Lösungsansätze für Fragestellungen zu entwickeln, ist eine Schlüsselkompetenz für das gesamte Leben. Daher muss sich diese Kompetenzbildung auch in den Lehrbüchern widerspiegeln. Gehaltvolle Schulbücher präsentieren folglich nicht nur mathematisches Wissen, sondern helfen den Schüler*innen, Zusammenhänge zu erkennen und in einer fundierten Art und Weise den Gegenstand zu entdecken. Sie geben dem Inhalt eine Bedeutung (Erbas et al., 2012). Dahingehend konnte gezeigt werden, dass Lehrbücher eine Vielzahl von Heuristiken für das Lösen von Textaufgaben miteinbeziehen. Dennoch bestehen große Unterschiede zwischen unterschiedlichen Schulbuchreihen hinsichtlich Qualität und Intensität der Erklärungen. Zum Beispiel bieten einige lediglich exemplarische Lösungsvorschläge als Bearbeitungshilfe in Bezug auf Textaufgaben an.

Anhand der Schulbuchanalyse konnte gezeigt werden, dass, ähnlich wie in der Studie von Vicente et al. (2020) für Singapur und Spanien, auch in österreichischen Mathematik-Lehrbüchern Hilfestellungen zur Bearbeitung von Textaufgaben integriert sind. Dabei zeigt sich die Dominanz einer schrittweisen Instruktion des Lösungsverfahrens. Diese Lösungspläne konnten anhand ihrer Qualität untersucht werden und dadurch wird deutlich, dass vor allem das Aufstellen einer Gleichung, die Rechnung an sich und das Schreiben eines Antwortsatzes betont werden. Es ist jedoch anzumerken, dass diese Aspekte lediglich einen Teil des Lösungsprozesses darstellen und zusätzliche Verfahren notwendig sind, um ein authentisches Lösen zu gewährleisten. Dabei mangelt es in den analysierten Schulbüchern vor allem an Hilfestellungen zur Strukturierung der Informationen. Hinzu kommt, dass kaum Hinweise zur visuellen Darstellung der Inhalte gegeben werden, obwohl beispielsweise das Anfertigen einer Skizze zu einem erheblichen Erkenntnisgewinn führen kann. Durch solche visuellen Hilfsmittel sind Schüler*innen in der Lage, die Zusammenhänge zwischen den Inhalten zu erfassen und zu verknüpfen.

Außerdem verdeutlicht diese Arbeit eine schrittweise Abnahme der Anzahl an Hilfestellungen zum Lösen von Textaufgaben von der sechsten bis zur achten Schulstufe. In diesem Zusammenhang kann vermutet werden, dass Lernende ab einem gewissen Alter ein Repertoire an Heuristiken aufgebaut haben und selbstständig aus diesem schöpfen können, ohne weitere Anweisungen des Schulbuches zu benötigen.

Darüber hinaus wird deutlich, dass vor allem das Themengebiet der *Terme und Gleichungen* eine vermehrte Häufigkeit an Hilfestellungen und Lösungsplänen aufweist.

Zusätzlich ist anzumerken, dass das Lösen von Textaufgaben nicht mit einer Abfolge an Problemlösestrategien gleichzusetzen ist, welche in weiterer Folge von den Lernenden als Regeln angesehen werden. Stattdessen sollte eine Art Werkzeugbox mit unterschiedlichen Hilfestellungen geschaffen werden, welche in den regulären Unterricht miteinfließen (Fan & Zhu, 2007).

Die Art und Weise, wie Lösungspläne eingesetzt werden, ist zentral, um einen reflektierten und verständnisorientierten Lösungsprozess zu ermöglichen. Die Schüler*innen sollen ihr Lösungsverfahren frei wählen können und müssen dabei geschult werden, eine mentale Repräsentation der impliziten Daten zu erstellen (Goulet-Lyle et al., 2020). Folglich besteht die Erkenntnis, dass vor allem die Lehrperson für einen gehaltvollen Unterricht verantwortlich ist und auch aus geringen Hilfestellungen in Schulbüchern passende Interventionsmöglichkeiten konzipieren kann, welche sich mit den Einschätzungen von Büchter und Leuders (2005) sowie Oates (2014) decken, denn die Lehrkraft selbst entscheidet in welcher Art und Weise die Aufgaben eingesetzt werden und in welchem Ausmaß interveniert werden muss (Haggarty & Pepin, 2002). Dabei ist zusätzlich die passende Auswahl der Textaufgabe von Bedeutung. Werden vermehrt unauthentische Aufgabenstellungen mit vielen Schlüsselwörtern im Unterricht behandelt, besteht die Gefahr eines oberflächlichen Lösens. Auch Pólya (1980) betont die Notwendigkeit einer passenden Aufgabenstellung, um den Verstehensprozess der Schüler*innen anzuregen. Diese Erkenntnisse geben den Anstoß für weitere Forschungsarbeiten in diesem Bereich und weisen zugleich auf die Einschränkungen dieser Masterarbeit hin, da es in dieser Analyse vor allem um Hilfestellungen in österreichischen Schulbüchern geht. Trotzdem wäre zusätzlich die Einbindung und Umsetzung dieser Hilfestellungen in die Unterrichtsgestaltung relevant und sollte in weiterführenden Studien analysiert werden.

Zudem ist anzumerken, dass aus einer Vielzahl an Lehrbüchern lediglich vier Buchreihen für die Analyse selektiert wurden. Zwar sind diese Bücher im österreichischen Mathematikunterricht sehr gängig, jedoch wurden nicht alle am Markt vorhandenen Lehrbücher analysiert. Somit ergibt dies noch kein voll umfassendes Bild der Hilfestellungen in Schulbüchern.

Alles in allem konnte somit gezeigt werden, dass Hilfestellungen in Form von Lösungsplänen und eine schrittweise Herangehensweise die gängigste Form der Erklärungen in österreichischen Schulbüchern darstellt. Darüber hinaus gewährleistet eine Vielzahl an exemplarischen Lösungsvorschlägen einen Einblick in strukturierte Lösungsprozesse.

Daher kann auch dieser Aspekt als entscheidende Hilfestellungen in österreichischen Schulbüchern betrachtet werden. Des Weiteren war es möglich, die einzelnen Lösungspläne hinsichtlich ihrer Qualität zu analysieren, wodurch zahlreiche Erkenntnisse gewonnen wurden. Insbesondere fehlten dabei weitgehend Strategien zur Strukturierung der Informationen. Zudem wäre es sinnvoll, die Interpretation der Ergebnisse im Sachzusammenhang noch weiter zu vertiefen. In Anbetracht dessen bleibt die Rolle der Lehrperson als Schnittstelle zwischen den Unterrichtsmaterialien und Lernenden von zentraler Bedeutung und darf keinesfalls unterschätzt werden.

Literaturverzeichnis

- Aichberger, G., Brunner, E., Eisschiel, K., Mitis, W., Moitzi, F., & Wanitschka, S. (2004). *Zahlenreise*. Veritas Verlag.
- Apple, M. W. (1992). The Text and Cultural Politics. *Educational researcher*, 21, 4-19.
- Baruk, S. (1989). *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik*. Birkhäuser.
- Bednorz, D. (2021). Textverstehen von Textaufgaben als sprachliche Anforderung im Mathematikunterricht. In (Vol. 5). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.
- Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht - Trends und Perspektiven.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects: State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational studies in mathematics*, 22, 37-68.
- Borromeo Ferri, R. (2010). Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens - Analysen und empirische Rekonstruktionen. In *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens* (pp. 101-167). Vieweg Verlag.
- Borromeo Ferri, R. (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Bortenschlager, M., Fischer, A., Koller, M., Marsik, J., Olf, M., & Wittberger, M. (2021). *Lösungswege: Mathematik 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Bortenschlager, M., Fischer, A., Koller, M., Marsik, J., Olf, M., & Wittberger, M. (2023a). *Lösungswege: Mathematik 1*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Bortenschlager, M., Fischer, A., Koller, M., Marsik, J., Olf, M., & Wittberger, M. (2023b). *Lösungswege: Mathematik 3*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Bortenschlager, M., Fischer, A., Koller, M., Marsik, J., Olf, M., & Wittberger, M. (2024). *Lösungswege: Mathematik 4*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 19-49).
- Büchter, A., & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen*. Cornelsen Scriptor.
- Bundeskanzleramt-Österreich. (2024). *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen*. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> [20.04.2024]
- Cai, J. (1994). A Protocol-Analytic Study of Metacognition in Mathematical Problem Solving. *Mathematics Education Research Journal*, 6, 166-183.
- Dewolf, T., Van Dooren, W., Hermens, F., & Verschaffel, L. (2015). Do students attend to representational illustrations of non-standard mathematical word problems, and, if so, how helpful are they? *Instructional science*, 43, 147-171.

- Dorfmayr, A., Mistelbacher, A., & Sator-Wunsch, K. (2021a). *Thema Mathematik 2*. Veritas.
- Dorfmayr, A., Mistelbacher, A., & Sator-Wunsch, K. (2021b). *Thema Mathematik 3*. Veritas.
- Dorfmayr, A., Mistelbacher, A., & Sator-Wunsch, K. (2021c). *Thema Mathematik 4*. Veritas.
- Dorfmayr, A., Mistelbacher, A., & Sator-Wunsch, K. (2023). *Thema Mathematik 1*. Veritas.
- Erbas, A. K., Alacaci, C., & Bulut, M. (2012). A Comparison of Mathematics Textbooks from Turkey, Singapore, and the United States of America. *Educational sciences: theory & practice*, 12.
- Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational studies in mathematics*, 66, 61-75.
- Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Spektrum.
- Goulet-Lyle, M.-P., Voyer, D., & Verschaffel, L. (2020). How does imposing a step-by-step solution method impact students' approach to mathematical word problem solving? *ZDM Mathematics Education*, 52, 139-149.
- Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Spektrum.
- Greefrath, G. (2018). Schwierigkeiten, Lösungshilfen und Üben. In *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht* (pp. 191-210). Springer Berlin Heidelberg.
- Grouws, D., & Mathematics, N. C. o. T. o. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan.
- Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British educational research journal*, 28, 567-590.
- Hartman, P. A. (2007). *Comparing students with mathematics learning disabilities and students with low mathematics achievement in solving mathematics word problems*. ProQuest Dissertations Publishing.
- Heymann, H. W. (2013). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz.
- Humenberger, H. (2021). *Schulmathematik Angewandte Mathematik*. Vorlesungsskript an der Universität Wien.
- Humenberger, H. H., Aue, V., Hasibeder, J., Himmelsbacher, M., & Schüller-Reichl, J. (2023). *Das ist Mathematik 1*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Humenberger, H. H., Hasibeder, J., Himmelsbacher, M., Schüller-Reichl, J., Litschauer, D., Groß, H., & Aue, V. (2017). *Das ist Mathematik 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Humenberger, H. H., Hasibeder, J., Himmelsbacher, M., Schüller-Reichl, J., Litschauer, D., Groß, H., & Aue, V. (2019). *Das ist Mathematik 3*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Humenberger, H. H., Hasibeder, J., Himmelsbacher, M., Schüller-Reichl, J., Litschauer, D., Groß, H., & Aue, V. (2020). *Das ist Mathematik 4*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

- Jahnke, T. (2005). Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 271-274). Franzbecker.
- Jitendra, A. K. (2008). Using Schema-Based Instruction to Make Appropriate Sense of Word Problems. *Perspectives on language and literacy*, 34.
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4. Aufl. 2018 ed.). Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum.
- Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl. ed.). Spektrum.
- Krawec, J. L. (2014). Problem Representation and Mathematical Problem Solving of Students of Varying Math Ability. *Journal of learning disabilities*, 47, 103-115.
- Kubli, F. (2010). Narrative Aspekte in der Vermittlung der Naturwissenschaften. *Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften*.
- Leiß, D. (2007). „Hilf mir es selbst zu tun“: Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren. Franzbecker.
- Leiss, D., Plath, J., & Schwippert, K. (2019). Language and Mathematics - Key Factors influencing the Comprehension Process in reality-based Tasks. *Mathematical thinking and learning*, 21, 131-153.
- Lessani, A., Yunus, A. S. M., Tarmiz, R. A., & Mahmud, R. (2014). Why Singaporean 8th Grade Students Gain Highest Mathematics Ranking in TIMSS (1999-2011). *International education studies*, 7, 173-181.
- Leuders, T. (2018). *Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*. Cornelsen Verlag.
- Levie, W. H., & Lentz, R. (1982). Effects of Text Illustrations: A Review of Research. *Educational communication and technology*, 30, 195-232.
- Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional science*, 26, 49-63.
- Mayer, R. E., Sims, V., & Tajika, H. (1995). A Comparison of How Textbooks Teach Mathematical Problem Solving in Japan and the United States. *American educational research journal*, 32, 443-460.
- Meloth, M. S., & Deering, P. D. (1994). Task talk and task awareness under different cooperativel learning conditions. *American educational research journal*, 31, 138-165.
- Messner, R., & Blum, W. (2006). *Selbstständiges Lernen im Fachunterricht*. University Press.
- Müller, G., & Wittmann, E. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe: Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele*. Vieweg.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arona, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*.
- Oates, T. (2014). *Why textbooks count*. Cambridge Assessment.
- Orosco, M. J. (2014). Word Problem Strategy for Latino English Language Learners at Risk for Math Disabilities. *Learning disability quarterly*, 37, 45-53.

- Passolunghi, M. C., & Pazzaglia, F. (2005). A comparison of updating processes in children good or poor in arithmetic word problem-solving. *Learning and individual differences*, 15, 257-269.
- Pólya, G. (1966). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren*. Birkhäuser.
- Pólya, G. (1980). *Schule des Denkens: vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke.
- Powell, S. R., Urrutia, V. Y., Berry, K. A., & Barnes, M. A. (2022). The Word-Problem Solving and Explanations of Students Experiencing Mathematics Difficulty: A Comparison Based on Dual-Language Status. *Learning disability quarterly*, 45, 6-18.
- Prediger, S. (2010). Über das Verhältnis von Theorien und wissenschaftlichen Praktiken – am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben. *Journal für Mathematik-Didaktik* 31, 167-195.
- Prediger, S., & Krägeloh, N. (2015). Low achieving eighth graders learn to crack word problems: a design research project for aligning a strategic scaffolding tool to students' mental processes. *ZDM*, 47, 947-962.
- Prediger, S., & Özdi, E. (2011). *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit: Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland*. Waxmann.
- Radatz, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Journal für Mathematikdidaktik*, 3, 205-217.
- Reikerås, E. K. L. (2009). A Comparison of Performance in Solving Arithmetical Word Problems by Children with Different Levels of Achievement in Mathematics and Reading. *Investigations in mathematics learning*, 1, 49-72.
- Reusser, K. (1989). *Vom Text zur Situation zur Gleichung: Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben*. Universität Zürich.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2022a). *Mathematik verstehen 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2022b). *Mathematik verstehen 3*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2023a). *Mathematik verstehen 1*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2023b). *Mathematik verstehen 4*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- Sánchez, M. R., & Vicente, S. (2015). Models and processes for solving arithmetic word problems proposed by Spanish mathematics textbooks *Cultura y educacion*, 27, 695-725.
- Schlager, S. (2020). Bearbeitungsstrategien bei Textaufgaben. In *Zur Erforschung des Zusammenhangs Zwischen Sprachkompetenz und Mathematikleistung* (pp. 41-80). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.
- Schneeberger, M. (2009). *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog: der Erwerb von Mathematisierungskompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis*. Waxmann.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

- Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht*, 34.
- Sturm, N. (2018). *Problemhaltige Textaufgaben lösen: Einfluss eines Repräsentationstrainings auf den Lösungsprozess von Drittklässlern*. Springer Fachmedien Wiesbaden Imprint: Springer Spektrum.
- Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, 52, 1-16.
- Vicente, S., Manchado, E., & Verschaffel, L. (2018). Solving arithmetic word problems. An analysis of Spanish textbooks *Cultura y educacion*, 30, 71-104.
- Vicente, S., Sánchez, R., & Verschaffel, L. (2020). Word problem solving approaches in mathematics textbooks: a comparison between Singapore and Spain. *European journal of psychology of education*, 35, 567-587.
- Wilhelm, N. (2016). *Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben: Quantitative und qualitative Analysen sprachlicher und konzeptueller Hürden*. Springer Fachmedien Wiesbaden Imprint: Springer Spektrum.
- Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Vieweg.
- Winter, H. (1995). Mathematik und Allgemeinbildung. *Mitteilung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37-46.
- Xin, Y. P. (2007). Word Problem Solving Tasks in Textbooks and Their Relation to Student Performance. *The Journal of educational research (Washington, D.C.)*, 100, 347-360.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Oberflächliches Lösen von eingekleideten Aufgaben Quelle: Verschaffel et al., 2000, S.13; modifiziert durch die Autorin.....	14
Abbildung 2: Beispiel einer Sachaufgabe Quelle: Greefrath, 2010, S.13	15
Abbildung 3: Modellierungskreislauf	24
Abbildung 4: Problemlösen Quelle: Reusser, 1989, S.91	27
Abbildung 5: Skizze der Leuchtturm-Aufgabe	35
Abbildung 6: Lösungsplan für Sachaufgaben Quelle: Zahlenreise 4, 2004, S.12	40
Abbildung 7: Übersicht der Hilfestellungen in ‚Thema Mathematik‘	46
Abbildung 8: Lösungsplan Thema Mathematik 1 Quelle: Thema Mathematik 1, 2023, S. 44 ..	47
Abbildung 9: Thema Mathematik 1 - Terme und Gleichungen Quelle: Thema Mathematik 1, 2023, S. 48	49
Abbildung 10: Thema Mathematik 1 – Musterlösung Quelle: Thema Mathematik 1, 2023, S. 154.....	49
Abbildung 11: Thema Mathematik 2 - Lösungsplan 1 Quelle: Thema Mathematik 2, 2021, S. 106.....	50
Abbildung 12: Thema Mathematik 2 - Lösungsplan 2 Quelle: Thema Mathematik 2, 2021, S. 126.....	51
Abbildung 13: Thema Mathematik 2 – Musterlösung Quelle: Thema Mathematik 2, 2021, S. 118.....	52
Abbildung 14: Thema Mathematik 3 – Musterlösung Quelle: Thema Mathematik 3, 2021, S. 126.....	53
Abbildung 15: Thema Mathematik 4 – Musterlösung Quelle: Thema Mathematik 4, 2021, S.158	54
Abbildung 16: Übersicht der Hilfestellungen in ‚Lösungswege‘	55
Abbildung 17: Lösungswege 1 - Tipps und Musterlösung Quelle: Lösungswege 1, 2023, S. 34	56
Abbildung 18: Lösungswege 1 – Lösungsplan Quelle: Lösungswege 1, 2023, S. 141	57
Abbildung 19: Lösungswege 2 – Lösungsplan Quelle: Lösungswege 2, 2021, S. 164	59
Abbildung 20: Lösungswege 3 - Tipps zu Textaufgaben Quelle: Lösungswege 3, 2023, S. 116	61
Abbildung 21: Lösungswege 3 – Lösungsplan Quelle: Lösungswege 3, 2023, S. 144	62

Abbildung 22: Lösungswege 3 - Anfertigen einer Skizze Quelle: Lösungswege 3, 2023, S.212	63
Abbildung 23: Lösungswege 4 - Tipps zum Lösen von Textaufgaben Quelle: Lösungswege 4, 2024, S.204	64
Abbildung 24: Übersicht der Hilfestellungen in ‚Mathematik verstehen‘	66
Abbildung 25: Mathematik verstehen 2 – Lösungsplan und Musterbeispiel Quelle: Mathematik verstehen 2, 2022, S. 121	68
Abbildung 26: Mathematik verstehen 3 - Hilfestellung zu Textaufgaben Quelle: Mathematik verstehen 3, 2022, S. 116	70
Abbildung 27: Übersicht der Hilfestellungen in ‚Das ist Mathematik‘	73
Abbildung 28: Das ist Mathematik 1 – Musterlösung Quelle: Das ist Mathematik 1, 2023, S.149	74
Abbildung 29: Das ist Mathematik 1 – Lösungsplan Quelle: Das ist Mathematik 1, 2023, S.149	74
Abbildung 30: Das ist Mathematik 2 – Musterlösung Quelle: Das ist Mathematik 2, 217, S.111	76
Abbildung 31: Das ist Mathematik 2 - Lösungsplan 1 Quelle: Das ist Mathematik 2, 2017, S.111	76
Abbildung 32: Signalwörter Quelle: Das ist Mathematik 2, 2017, S.111	77
Abbildung 33: Das ist Mathematik 2 - Lösungsplan 2 Quelle: Das ist Mathematik 2, 2017, S.130	78
Abbildung 34: Das ist Mathematik 3 – Lösungsplan Quelle: Das ist Mathematik 3, 2019, S.128f.	79
Abbildung 35: Das ist Mathematik 4 - Lösungsplan und Musterlösung Quelle: Das ist Mathematik 4, 2020, S.125	81
Abbildung 36: Übersicht der Hilfestellungen in österreichischen Schulbüchern	83
Abbildung 37: Schrittabfolge der Lösungspläne	84

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Aufgabentypen im Vergleich	18
Tabelle 2: Modellierungskompetenzen	25
Tabelle 3: Teilkompetenzen des Problemlösens	28
Tabelle 4: Modellieren vs. Problemlösen	28
Tabelle 5: Vergleich der Lösungsstrategien.....	39
Tabelle 6: Analyseraster	44
Tabelle 7: Analyseraster - Thema Mathematik 1	48
Tabelle 8: Analyseraster 1 - Thema Mathematik 2	51
Tabelle 9: Analyseraster 2 - Thema Mathematik 2	52
Tabelle 10: Analyseraster 1 - Lösungswege 1	57
Tabelle 11: Analyseraster 2 - Lösungswege 1	58
Tabelle 12: Analyseraster - Lösungswege 2.....	60
Tabelle 13: Analyseraster 1 - Lösungswege 3.....	61
Tabelle 14: Analyseraster 2 – Lösungswege 3	63
Tabelle 15: Analyseraster - Lösungswege 4.....	65
Tabelle 16: Analyseraster - Mathematik verstehen 2.....	69
Tabelle 17: Analyseraster - Mathematik verstehen 3.....	71
Tabelle 18: Analyseraster - Das ist Mathematik 1.....	75
Tabelle 19: Analyseraster 1 - Das ist Mathematik 2	77
Tabelle 20: Analyseraster 2 - Das ist Mathematik 2	78
Tabelle 21: Lösungsplan - Das ist Mathematik 3	80
Tabelle 22: Lösungsplan - Das ist Mathematik 4	82