

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff
von Folgen

verfasst von | submitted by
Lisa Paradeisz BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 510 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Geographie und wirtschaftliche Bildung
Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Roland Steinbauer

Zusammenfassung

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit Ausprägungen von Aspekten und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff von Folgen bei Lehramtsstudierenden des Unterrichtsfaches Mathematik. Zu Beginn und am Ende einer fachdidaktischen Analysisvorlesung wurden Fragebögen zur Datenerhebung ausgefüllt. Diese Fragebögen umfassten zu beiden Zeitpunkten dieselben Fragestellungen. Daraufhin wurden die Antworten der Studierenden kategorisiert sowie den einzelnen Aspekten und Grundvorstellungen zugeordnet. Anschließend wurden die Resultate dieser beiden Zeitpunkte miteinander verglichen. Die Ergebnisse dieser Studie verdeutlichen, dass die überwiegende Mehrheit der Studierendenantworten der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurden. Umgebungsvorstellungen traten seltener auf, jedoch offenbarte sich innerhalb dieser Grundvorstellung eine Verbesserung der Qualität. Die Objektvorstellung konnte nur in unspezifischer Form wahrgenommen werden.

Abstract

The present master's thesis addresses manifestations of aspects and fundamental conceptions of the notion of the limit of a real sequence in written statements of pre-service teachers. Surveys were administered at the beginning and end of a didactic lecture on the topic of analysis. The students responses were categorized and analyzed based on individual aspects and fundamental ideas, and subsequently compared between the two points in time. The results of the study illustrate that the majority of student responses were associated with the approximation idea. Statements addressing the neighborhood idea were less frequently expressed, nevertheless, an improvement in quality was observed within these statements. The object idea was only found to be expressed in an unspecified manner.

Danksagung

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um all jenen zu danken, die mich während dem Schreiben dieser Masterarbeit unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt meinem Betreuer, Roland Steinbauer. Seine fachliche Expertise und wertvollen Anregungen waren entscheidend für die erfolgreiche Realisierung dieser Arbeit. Von unschätzbarem Wert war seine Bereitschaft, jederzeit für Fragen und Hilfestellungen zur Verfügung zu stehen und seine schnellen und hilfreichen Antworten. Vielen Dank für diese tolle Zusammenarbeit!

Weiters möchte ich mich beim gesamten Team des BELLA-Projektes, insbesondere bei Stefan Götz, für die Verfügbarkeit und die Möglichkeit der Auswertung der Studie bedanken.

Meinen Eltern schulde ich einen tiefen Dank für ihre unermüdliche Unterstützung und Ermutigung. Sie haben es mir ermöglicht, dieses Studium zu verfolgen und waren selbst in schwierigen Zeiten für mich da. Als mein alter Laptop während des Schreibprozesses den Geist aufgab, haben sie ohne zu zögern für Ersatz gesorgt, wodurch ich meine Arbeit ohne größere Unterbrechungen fortsetzen konnte. Ihre aufbauenden Worte gaben mir Kraft, die stressigsten Phasen zu meistern.

Meinem Freund möchte ich für seine konsequente und vor allem emotionale Unterstützung während des gesamten Schreibprozesses danken. Seine Anwesenheit war eine Quelle der Stärke und des Trostes.

Nicht zuletzt danke ich meinen Freund:innen und Kolleg:innen, die sich die Zeit genommen haben, meine Arbeit zu korrigieren und wertvolles Feedback zu geben. Ihre sorgfältige Lektüre und ihre Anmerkungen haben wesentlich zur Qualität dieser Arbeit beigetragen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I. Theoretischer Hintergrund	3
1. Fachdidaktischer Hintergrund	5
1.1. Aspekte und Grundvorstellungen im Mathematikunterricht	5
1.2. Grunderfahrungen im Mathematikunterricht	7
1.2.1. Grunderfahrungen im Analysisunterricht	8
1.3. Schwierigkeiten im Analysisunterricht	9
1.3.1. Verschränkung fachdidaktischer und fachmathematischer Inhalte	10
1.3.2. Aktuelle Ansätze und Vorschläge an der Universität Wien	12
2. Folgen und Grenzwerte: fachlicher und fachdidaktischer Hintergrund	15
2.1. Historischer Abriss	15
2.1.1. Kurze Geschichte des Grenzwertbegriffs	16
2.2. Aspekte und Grundvorstellungen	18
2.2.1. Aspekte des Folgenbegriffs	18
2.2.2. Grundvorstellungen zum Folgenbegriff	19
2.2.3. Aspekte des Grenzwertbegriffs	20
2.2.4. Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff	21
3. Ausgewählte empirische Arbeiten zu Vorstellungen zum Grenzwertbegriff	23
3.1. Schüler:innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen	23
3.1.1. Geometrisches Rätsel	24
3.1.2. Zahlenrätsel	24
3.1.3. Mathematikwelt vs. Außenwelt	25
3.1.4. Einblick in die Interviews	26
3.1.5. Konsequenzen für den Analysisunterricht	29
3.2. Visualisierungen und informelle Darstellungen	30
3.2.1. Die Relevanz von Visualisierungen	30
3.3. Fehlvorstellungen zum Grenzwertbegriff	36
II. Empirischer Teil	39
4. Forschungsvorhaben	41
4.1. Forschungsfragen	42

Inhaltsverzeichnis

4.2. Hypothesen	42
5. Forschungsmethoden	45
5.1. Das Umfeld der Studie	45
5.1.1. Ablauf der Studie 2018/19	45
5.2. Ablauf der Studie 2022/23	46
5.3. Gewinnung der Daten	47
6. Datenauswertung und -verarbeitung	49
6.1. Codierung der Fragebögen	49
6.2. Codierung der Studierendenäußerungen	49
6.3. Interrater-Reliabilität	51
7. Ergebnisdarstellung	53
7.1. Allgemeine Auswertung	53
7.1.1. Absolute Häufigkeiten	53
7.1.2. Relative Häufigkeiten	55
7.2. Annäherungsvorstellung	56
7.3. Umgebungsvorstellung	59
7.4. Objektvorstellung	61
7.5. Veränderungen in der Ausprägungsqualität	62
7.6. Einzelfallbetrachtung	62
7.7. Zusammenhang Vorlesungsnoten und Ausprägungsqualität	67
7.8. Zusammenhang präferierte Schulform und Ausprägungsqualitäten	70
7.9. Zusammenhang bisherige Unterrichtserfahrungen und Ausprägungsqualitäten	70
7.10. Bildhafte Vorstellungen zum Grenzwertbegriff	71
7.11. Fehlvorstellungen	76
8. Reflexion und Diskussion	81
8.1. Analyse im Vergleich zur Studie 2018/19	82
8.2. Limitationen	85
8.3. Conclusio und Ausblick	85
Literaturverzeichnis	87
Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	89
Anhang	93

Einleitung

Der Grenzwertbegriff stellt den zentralen Begriff im Fachgebiet der Analysis dar. Die Entwicklung und Verfeinerung dieses Konzepts erstreckt sich über Jahrtausende und ist eng mit dem Begriff des Unendlichen verbunden. Die heutige Formulierung des Grenzwertbegriffs ist auf den deutschen Mathematiker Karl Weierstraß (1815-1897) zurückzuführen. Diese Definition des Grenzwerts ist sehr abstrakt und versteckt alle intuitiven Vorstellungen. Der Begriff des Grenzwerts stellt auch ein grundlegendes Konzept im Unterricht in der Sekundarstufe 2 dar, weshalb Untersuchungen zum Lehren und Lernen dieses Konzepts ebenfalls eine lange Geschichte aufweisen. In dieser Arbeit möchten wir einen Fokus auf das Lehren und Lernen des Grenzwertbegriffs im Lehramtsstudium Mathematik legen.

Die vorliegende Arbeit ist in zwei Teile aufgeteilt. In Teil I dieser Arbeit wird der allgemeine fachdidaktische Hintergrund dargestellt. Zu Beginn wird die Terminologie von Aspekten und Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen im Mathematikunterricht vorgestellt. Anschließend wird das Konzept der Grunderfahrungen im Mathematikunterricht nach Winter (1996) präsentiert. Des Weiteren werden allgemeine Herausforderungen im Analysisunterricht sowie die gegenwärtige Praxis an der Universität Wien damit umzugehen beleuchtet.

Danach wird in einem Abschnitt zum mathematischen Hintergrund der fachliche Rahmen zum Grenzwertbegriff von Folgen dargestellt. Nach einem kurzen historischen Abriss werden Aspekte und Grundvorstellungen zu Folgen und dem Grenzwert vorgestellt.

Den Abschluss des ersten Teiles bildet eine Beleuchtung ausgewählter empirischer Arbeiten.

Teil II dieser Arbeit umfasst die Analyse unserer durchgeführten Studie. Die Datenbasis für diese Analyse bilden Fragebögen, die zu Beginn und am Ende einer fachdidaktischen Vorlesung mit Titel "*Schulmathematik Analysis*" im Wintersemester 2022/23 erhoben wurden.

Zu Beginn des Abschnitts wird das Forschungsvorhaben, die Forschungsmethoden sowie die Datenauswertung der durchgeführten Studie vorgestellt. Im Anschluss daran werden die Ergebnisse präsentiert und diskutiert.

Ziel dieser Arbeit ist es herauszufinden, welche Vorstellungen und inhaltliche Bedeutungen Lehramtsstudierende mit dem Grenzwertbegriff von Folgen verbinden. Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf den Veränderungen dieser Vorstellungen, die durch die Teilnahme an der fachdidaktischen Analysisvorlesung hervorgerufen wurden. Die Ergebnisse sollen auch dazu beitragen, die Kooperation zwischen fachdidaktischer und fachmathematischer Hochschullehre weiter zu verbessern.

Mathematische Begriffe aus dem Bereich der Analysis, die in dieser Arbeit verwendet werden und nicht weiter technisch definiert sind, können im Standardwerk von vgl. (Forster [2008](#)) sowie im Vorlesungsskript von vgl. (Kramer and Steinbauer [2023](#)) nachgeschlagen werden.

Teil I.

Theoretischer Hintergrund

1. Fachdidaktischer Hintergrund

1.1. Aspekte und Grundvorstellungen im Mathematikunterricht

Der folgende Abschnitt stellt das Konzept der Grundvorstellungen und Aspekte im Mathematikunterricht vor. Zu Beginn werden die beiden Begriffe definiert und anschließend anhand ausgewählter Beispiele erklärt. Unsere Darstellung des fachdidaktischen Hintergrunds basiert auf dem Standardwerk von Greefrath et al. (2016, Kapitel 1.5).

Im Allgemeinen ist es ein Ziel des Mathematikunterrichts, den Lernenden den Aufbau von zuverlässigen Vorstellungen zu ermöglichen sowie den fachlichen Aspekten inhaltlichen Sinn zu geben. Dabei wird zwischen Aspekten und Grundvorstellungen unterschieden. Beide Begriffe stammen aus dem Bereich der Fachdidaktik. Den Aspekten unterliegt die Analyse eines mathematischen Sachverhalts, während den Grundvorstellungen eine fachdidaktische Analyse zugrunde liegt. Die beiden Begriffe können folgendermaßen definiert werden vgl. (Greefrath et al. 2016, S.16f):

Definition 1.1.1 (Aspekt) *Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine Facette des Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben werden kann.*

Definition 1.1.2 (Grundvorstellung) *Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.*

Mithilfe von Grundvorstellungen können Aspekte von mathematischen Begriffen sinnstiftend erfasst und gedeutet werden. Auf diese Weise wird ein Verständnis für diese Begriffe geschaffen und ihnen Bedeutung verliehen. Die Ausbildung von Grundvorstellungen erfolgt durch die Auseinandersetzung der Lernenden mit den jeweiligen Themen und den zugehörigen fachlichen Begriffen. In diesem Prozess werden Aspekte dieser Begriffe ersichtlich gemacht vgl. (Greefrath et al. 2016, S.17f).

Betrachten wir nun ein Beispiel aus dem Arithmetikunterricht der Volksschule, um das Konzept zu verstehen. Schüler:innen der Primarstufe sollen sich zu Begriffen von Zahlen, wie zum Beispiel der Zahl Fünf, eine Gruppe von fünf Objekten vorstellen können. Diese Vorstellung kann als Muster von fünf Punkten oder auch als Sammlung von fünf Steinen dargestellt werden. Den

1. Fachdidaktischer Hintergrund

Schüler:innen soll bewusst werden, dass die Art und die Beschaffenheit der Objekte unwesentlich und nur deren Anzahl von Bedeutung ist. Die Lernenden können diese Vorstellungen durch haptische und kinästhetische Lernprozesse, wie dem Zusammenstellen von Bausteinen oder dem Zeichnen von Mengen, aufbauen. Eine natürliche Zahl wird somit als Anzahl der Elemente einer Menge aufgefasst. Basierend auf dieser Vorstellung kann das Operieren mit Zahlen Schritt für Schritt erarbeitet werden.

Aus fachlicher Perspektive umfasst diese Vorstellung den Kardinalzahlaspekt der natürlichen Zahlen. Die Schüler:innen sollen mithilfe dieses Aspekts inhaltliches Verständnis erwerben und Grundvorstellungen für natürliche Zahlen aufbauen. Anhand dieser Vorstellungen können folglich weitere Operationen erarbeitet werden.

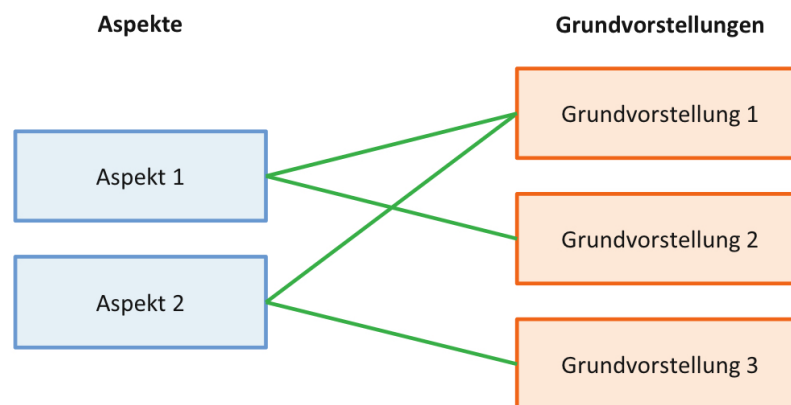


Abbildung 1.1.: Aspekte und Grundvorstellungen (Greefrath et al. 2016, S.18)

Das angeführte Beispiel aus der Arithmetik zeigt, dass Aspekte und Grundvorstellungen in einer wechselseitigen Beziehung zueinander stehen. Wie in Abbildung 1.1 zu sehen ist, kann ein bestimmter Aspekt verschiedene Grundvorstellungen hervorrufen. Umgekehrt kann auch eine spezielle Grundvorstellung zu mehreren Aspekten führen. In den folgenden Kapiteln werden wir auch sehen, dass die Intensität der Beziehungen zwischen manchen Aspekten und Grundvorstellungen unterschiedlich stark ausgeprägt sein kann.

In der Fachliteratur wird zwischen universellen und individuellen Grundvorstellungen unterschieden. Unter den universellen Grundvorstellungen werden normative Vorstellungen von mathematischen Begriffen verstanden. Diese Vorstellungen stammen aus fachdidaktischen Analysen und bilden Richtlinien für den Mathematikunterricht. Diese universellen Grundvorstellungen bieten

1.2. Grunderfahrungen im Mathematikunterricht

den Lehrkräften Orientierung beim Planen und Durchführen ihres Unterrichts.

Im Gegensatz dazu beziehen sich individuelle Grundvorstellungen auf einzelne Lernende und deren individuelle Vorstellungen von mathematischen Begriffen. Die Bildung dieser Vorstellungen resultiert aus den persönlichen Lernvorgängen. Individuelle Grundvorstellungen bilden somit auch die Basis für gezielte Förderungen im Unterricht.

Weiters werden primäre und sekundäre Grundvorstellungen unterschieden. Primäre Grundvorstellungen werden mithilfe von Handlungserfahrungen aus dem Alltag zu mathematischen Begriffen gebildet, während sekundäre Grundvorstellungen auf bereits erworbenen Vorstellungen basieren. Abstraktere, daher vorwiegend mathematische Begriffe aus der Sekundarstufe 2, vor allem aus dem Gebiet der Analysis, sind daher meistens mit sekundären Grundvorstellungen verbunden.

Die Terminologie von Grundvorstellungen bildet somit einen wichtigen Begriffsapparat in der Fachdidaktik. Sie dienen als Werkzeug für Fachdidaktiker:innen, um die Prozesse der Lernenden analysieren und beschreiben zu können.

Das Konzept der Grundvorstellungen zählt zum professionellen fachdidaktischen Wissen und ist auch für Lehrpersonen hilfreich. Das Konzept bietet einen theoretischen Rahmen mit dessen Hilfe ein nachvollziehbarer Unterricht aufgebaut werden kann. Den Schüler:innen wird ermöglicht, sinnstiftende Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten aufzubauen.

1.2. Grunderfahrungen im Mathematikunterricht

Im folgenden Kapitel geben wir einen Überblick über das Konzept der Grunderfahrungen im Mathematikunterricht nach Winter (1996, S.35-41). Winter vertritt die Meinung, dass Mathematikunterricht erst dann allgemeinbildend ist, wenn die drei folgenden Grunderfahrungen im Unterricht ermöglicht werden. Zu Beginn werden die drei Grunderfahrungen definiert. Anschließend wird die Diskussion von Danckwerts und Vogel (2006, Kapitel 1) über Grunderfahrungen im Analysisunterricht zusammenfassend dargestellt.

1. **Mathematischer Blick:** Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus der Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen.
2. **Mathematische Welt:** Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art zu lernen und zu begreifen.

1. Fachdidaktischer Hintergrund

3. **Heuristische Fähigkeiten:** In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben.

Für den Mathematikunterricht ist insbesondere die Verbindung der ersten beiden Grunderfahrungen von großer Bedeutung, welche die Anwendung von mathematischen Inhalten ermöglicht. Modellbildende Lehrinhalte sind hierfür essenziell. Die dritte Grunderfahrung, die heuristische Fähigkeit, zielt auf das Verständnis unserer Welt ab. Im Mathematikunterricht sollen die Lernenden die Möglichkeit bekommen, Problemen auf kreative Weise und mithilfe selbst entwickelter Strategien zu lösen. Diese meist zeitintensiven Denkprozesse sollen von der Lehrkraft gefördert und unterstützt werden. Aus fachdidaktischer Sicht sollen alle drei Grunderfahrungen im Unterricht Platz finden, um den Lernprozess der Schüler:innen bestmöglich unterstützen zu können.

1.2.1. Grunderfahrungen im Analysisunterricht

Wie bereits zu Beginn des Kapitels erwähnt, werden wir nun auf die Diskussion von Danckwerts und Vogel (2006, S.10-12) über Grunderfahrungen im Analysisunterricht eingehen.

Die erste Grunderfahrung **1** bezieht sich auf außermathematische Zusammenhänge, die auf der Anwendung von analytischen Methoden aufbauen. In der Analysis sind das zum Beispiel das Verstehen der lokalen Änderungsrate sowie das Rekonstruieren mithilfe der Integralrechnung.

Die zweite Grunderfahrung **2** befasst sich mit dem Definieren von analytischen Begriffen und dem besseren Verständnis der deduktiv aufgebauten Welt der Analysis. Beispiele sind die Begriffe des Grenzwerts, der Ableitung und des Integrals. Hinsichtlich des analytischen Kalküls stehen die Ableitungsregeln und der Extremwertkalkül im Vordergrund.

Die dritte Grunderfahrung **3** umfasst das heuristische Arbeiten. Der Fokus liegt auf dem Grenzwertbegriff. Anstatt den Grenzwert formal zu verwenden, wird hierbei das Operieren mit hinreichend kleinen Größen erprobt.

Nach einer Analyse von Danckwerts und Vogel (2006, S.10f) lassen sich unter den Lehrer:innen zwei Positionen im Analysisunterricht erkennen. Die eine Seite der Lehrpersonen fokussiert auf die erste Grunderfahrung und fördert somit einen anwendungsorientierten Unterricht. Die andere Seite thematisiert überwiegend abstrakte analytische Ideen und Zusammenhänge im Unterricht. Beide Seiten betonen die Bedeutsamkeit von heuristischen Denk- und Arbeitsprozessen beim Unterrichten von Analysis. Hierbei sollte ausreichend Zeit und Raum eingeplant werden.

Danckwerts und Vogel stellen fest, dass der Analysisunterricht oftmals nur auf die Grunderfahrung **2** abzielt und sich somit hauptsächlich auf den Kalkülaspekt fokussiert. Die Grunderfahrung

in Bezug auf die Anwendung [1](#) sowie die Erfahrung des heuristischen Arbeitens [3](#) werden im schulischen Alltag oft vernachlässigt.

1.3. Schwierigkeiten im Analysisunterricht

Seit Jahrzehnten wird über die Gestaltung und den Unterricht von Analysis sowohl in Schulen als auch in der Lehramtsausbildung diskutiert. Im folgenden Abschnitt wollen wir die gegenwärtigen Herausforderungen beleuchten. Das Kapitel folgt im Wesentlichen Danckwerts und Vogel ([2006](#), Kapitel 1), Weber et al. ([2024](#)), Götz ([2013](#)) sowie Ableitinger und Steinbauer ([2022](#), Kapitel 7).

Zu Beginn geben wir einen kurzen Überblick über die allgemeinen Herausforderungen in der Analysis-Ausbildung im Lehramtsstudium. Anschließend stellen wir Ansätze in der Lehre vor, die eine explizite Verbindung von fachdidaktischen und fachmathematischen Inhalten herstellen möchten. Diese Einblicke setzen wir zum Schluss des Abschnitts mit dem Analysisunterricht in Schulen in Verbindung.

Eine lang diskutierte und aktuelle Problematik in der Lehramtsausbildung im Unterrichtsfach Mathematik stellt die doppelte Diskontinuität dar. Bei diesem Phänomen kommt es zu zwei Brüchen: einen ersten Bruch gibt es zwischen Schul- und Hochschulmathematik und einen zweiten Bruch beim Berufseinstieg von Mathematiklehrer:innen.

Der erste Bruch stellt die Diskontinuität zwischen Schul- und Hochschulmathematik dar. Darunter wird die Herausforderung, die an Beispielen orientierte Schulmathematik mit der deduktiv-theoretisch vorgehenden Hochschulmathematik zu verbinden, verstanden. Die Diskontinuität wird oftmals als Problem mangelnder Übereinstimmung zwischen persönlichen Fähigkeiten und Interessen sowie hochschulischen Anforderungen beschrieben. Dies hat Auswirkungen auf die Wahrnehmung der Relevanz von Hochschulmathematik für den Lehrberuf und die Fähigkeit, Schul- und Hochschulmathematik zu verbinden. Einige Hochschulen haben bereits gezielte Vorgehensweisen in ihrem Curriculum verankert, um dieser Diskontinuität entgegenzuwirken. Da die Untersuchung dieser Umsetzungen noch vergleichsweise neu ist, liegen nur begrenzt empirische Ergebnisse vor.

Der zweite Bruch findet beim Berufseinstieg als Mathematiklehrer:in in der Schule statt. Lehramtsstudierende erleben oft eine Diskontinuität zwischen ihrem Hochschulwissen und den Anforderungen im Schulunterricht. Diese Diskontinuität kann zu Schwierigkeiten beim Unterrichten

1. Fachdidaktischer Hintergrund

von Schulmathematik führen, wenn die Inhalte unzureichend mit dem hochschulmathematischem Wissen verknüpft sind.

Eine aktuelle Studie aus Deutschland (Weber et al. 2024) hat sich intensiv mit der Verwendung von "Lehramtsaufgaben" auseinandergesetzt, um der doppelten Diskontinuität entgegenwirken zu können. Unter diesen "Lehramtsaufgaben" werden Aufgaben verstanden, die bewusst in der Hochschullehre eingesetzt werden, um gezielt Verbindungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik in den Übungen zu den Fachvorlesungen herstellen zu können. Es hat sich gezeigt, dass diese gezielte Auswahl von "Lehramtsaufgaben" einen positiven Einfluss auf die Wahrnehmung der Diskontinuität zwischen Schul- und Hochschulmathematik von Lehramtsstudierenden hat. Um herausfinden zu können, ob diese Aufgaben auch dazu beitragen, konkretes Wissen über die Verbindungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik erwerben zu können, benötigt es in Zukunft ein umfangreicheres Forschungsengagement. Die Problematik der Diskontinuität wird daher weiterhin Gegenstand der Lehramtsausbildung sein.

Wir möchten nun einen spezifischen Ansatz, mit der doppelten Diskontinuität umzugehen, an der Universität Wien betrachten.

1.3.1. Verschränkung fachdidaktischer und fachmathematischer Inhalte

Im Wintersemester 2012/13 führten Stefan Götz und Roland Steinbauer an der Universität Wien ein Projekt durch, dass sich mit dem Übergang von fachlichen zu fachdidaktischen Inhalten befasste (Götz 2013). Ziel war es, durch kooperatives Arbeiten zwischen Fachdidaktiker:innen und Fachmathematiker:innen das Verständnis und vor allem die Verbindung zwischen Schul- und Hochschulmathematik im Fach Analysis zu verbessern. Rahmenbedingungen waren eine enge Abstimmung der fachdidaktischen und fachmathematischen Inhalte sowie das gegenseitige Betreuen der Übungsgruppen. In der Fachvorlesung wurden beabsichtigt Bezugspunkte gesetzt, die später in der Schulmathematik aufgegriffen wurden. Dadurch konnten inhaltliche Zusammenhänge sowie verschiedene Zugänge zur Hochschulanalysis diskutiert und erarbeitet werden.

Ein weiteres Problem, welches die universitäre Lehre in der Analysis aufweist, ist der unterschiedliche Zugang zu einigen ihrer grundlegenden Konzepte im Vergleich zum Schulunterricht. Während zum Beispiel das Konzept von Folgen ähnlich wie im Schulunterricht vermittelt wird, weist zum Beispiel die Einführung der Winkelfunktionen große Unterschiede auf. Dabei kommt es bei Studierenden häufig zu Brüchen in ihren eigenen Grundvorstellungen und somit auch zu Schwierigkeiten im Verständnis. Diese Erkenntnisse über die Variabilität bei der Vermittlung von

Analysis führt uns zu drei Spannungsfeldern: Anschauung versus Strenge, normative Stoffbilder versus individuelle Sinnkonstruktionen sowie Systematik versus Heuristik. Diese drei Bereiche möchten wir im nächsten Schritt etwas genauer erklären.

Anschaulichkeit vs. Strenge

Die erste Herausforderung bildet der Gegensatz von Anschaulichkeit und Strenge. Diese widersprüchliche Problematik wird von Didaktiker:innen schon seit den 70er Jahren immer wieder diskutiert. Das Kernproblem besteht darin, dass das informelle Wissen im Alltag nicht nahtlos in die analytische Betrachtung übergeht. Konkret bezieht sich das Problem darauf, dass die Lehrenden nach Abschluss ihres Studiums ein umfangreiches Fachwissen im Bereich der Analysis besitzen, jedoch Schwierigkeiten haben, dieses Fachwissen angemessen aufzubereiten und nachvollziehbar für Anfänger:innen im Unterricht zu vermitteln. Lehrpersonen, die den Fokus auf anschauliche Lernprozesse legen, haben oftmals Angst, die Theorie zu vernachlässigen. Die Analysis ist ein deduktiv aufgebautes Konstrukt und dieser Aufbau führt bei Lernenden häufig zu Brüchen innerhalb der eigenen Denkprozesse. Zum Beispiel wird auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen im Unterricht aufgebaut, jedoch wird oftmals nicht genau besprochen, wieso Analysis nicht auch auf $\mathbb{Q}$ möglich ist. Diese Brüche im Denkprozess der Schüler:innen müssen im Unterricht aufgegriffen und diskutiert werden.

Normative Stoffbilder vs. individuelle Sinnkonstruktionen

Oftmals gibt es hinsichtlich der zentralen Begriffe der Analysis einen großen Unterschied zwischen den universellen und den individuellen Grundvorstellungen der Lernenden. Normative Stoffbilder umfassen formale Definitionen und fachspezifisches Wissen, während individuelle Stoffbilder von den Lernenden eigenständig entwickelt werden. Dabei bemühen sich die Lernenden, ihre eigenen Vorstellungen und Ideen zu formulieren. In diesem Prozess kann es zu Vermischungen oder ungenauen Formulierungen kommen.

Betrachten wir zum Beispiel den Begriff der Stetigkeit. Hierbei kommt es z.B. zu Spannungen zwischen der formalen ε - δ -Definition und der Vorstellung von unstetigen Funktionen. Lernende assoziieren mit der Unstetigkeit einer reellen Funktion häufig Sprungstellen, jedoch gelingt eine umfassende Erfassung des Begriffs erst durch die ε - δ -Definition oder die Folgenstetigkeit.

Systematik vs. Heuristik

Das dritte Spannungsfeld umfasst die Kalküllastigkeit der Analysis. Oftmals wird die Heuristik vernachlässigt, was potenziell zu bedeutenden Verständnisschwierigkeiten führen kann.

Im Mathematik Unterricht kommen heuristische Denkprozesse, in denen die Problemlösefähigkeit

1. Fachdidaktischer Hintergrund

über den Analysisunterricht hinausreichen soll, häufig zu kurz oder werden kaum thematisiert. Oftmals werden aufgrund der begrenzten Zeit im Unterricht Denkprozesse abrupt unterbrochen. Die zeitliche Ressource stellt somit eine Hürde für intensivere Aufgaben dar.

Weiters legen die schulischen Prüfungsvorgaben einen großen Fokus auf den Kalkülaspekt der Analysis und vertiefen ihr Verständnis im Bereich der Algebra intensiv. Somit wird Aufgaben mit Verständnis- und Anwendungsschwerpunkt wenig Raum gelassen. Der Analysisunterricht tendiert aus diesem Grund zu heuristischen Methoden und beschränkt die Theorie oftmals nur auf den Kalkülaspekt.

Ein weiteres Problem stellt die Komplexität des mathematischen Bereichs der Analysis dar. Die Auswahl der Aufgaben richtet sich demnach nach dem Verständnis der Lehrperson und ist zum Leidwesen der Betroffenen oftmals begrenzt.

Schlussfolgerung und aktuelle Einblicke

Die Evaluation des Projekts (Götz 2013) zeigte, dass der Großteil der Studierenden die Vorgehensweise und die Vernetzung von Schul- und Hochschulmathematik als sehr gewinnbringend empfand. Die Studierenden waren in der Lage, die Analysis als zusammenhängendes Ganzes zu erfassen und die Konzepte effektiver miteinander zu verbinden. Entscheidend dafür war jedenfalls die Art und Weise, wie die Bedeutung der Hochschulanalysis für den Schulunterricht formuliert und präsentiert wurde.

Einige Studierende äußerten in der Evaluation, dass sie immer noch Schwierigkeiten mit der Verbindung von Schul- und Hochschulanalysis haben. Dies verdeutlicht ebenfalls, dass die Lösung des Problems der doppelten Diskontinuität nicht so schnell erzielt werden kann. Es bedarf weiterhin einer umfassenden Bewusstseinsarbeit und intensiver Auseinandersetzung mit der Vernetzung der Inhalte, die auch in Zukunft notwendig sein wird.

Das Projekt stellte einen erfolgreichen Auftakt dar, die Lehramtsausbildung im Unterrichtsfach Mathematik gewinnbringender zu gestalten. Die Kooperation von Fachmathematiker:innen und Fachdidaktiker:innen war dabei unerlässlich.

1.3.2. Aktuelle Ansätze und Vorschläge an der Universität Wien

Die aktuelle Situation an der Universität Wien schildern die beiden Autoren Ableitinger und Steinbauer in ihrem Artikel (2022, Kapitel 7). Anhand von Interviews mit Dozent:innen der Fachvorlesungen formulieren die Autoren konkrete Ansätze für die weitere Zusammenarbeit zwischen Fachmathematiker:innen und Fachdidaktiker:innen. Die Diskussion bezieht sich auf die Vorlesungen für Lehramtsstudierende sowie die Verankerung von Schulmathematikvorlesungen im Curriculum.

Häufig äußern Studierende im Lehramtsstudium Bedenken hinsichtlich der Erforderlichkeit verschiedener Fachvorlesungen während ihrer Ausbildung. Schon seit etwa 40 Jahren wird der Einfluss von fachlichem Wissen der Lehrperson auf die Lernerfolge der Schüler:innen erforscht. Die beiden Autoren diskutieren Ergebnisse der COACTIV-Studie (2011), in der gezeigt wird, dass fachdidaktisches Wissen der Lehrperson wesentlich für den Lernerfolg der Schüler:innen ist. Zudem zeigt die Studie, dass mathematisches Fachwissen unerlässlich für die Vermittlung fachdidaktischer Inhalte ist.

Auf Grundlage dieser theoretischen Basis wurden im Wintersemester 2016/17 Leitfrageninterviews mit Dozent:innen der Fachvorlesungen in der Lehramtsausbildung durchgeführt. Ziel war es herauszufinden, welche Kriterien die Vortragenden bei der Planung ihrer Fachvorlesungen für Lehramtsstudierende für bedeutungsvoll empfinden.

Die Ergebnisse zeigen, dass die meisten Dozent:innen großen Wert auf innermathematische Kriterien und auf ihre individuelle Einstellung legen. Dass sich die Inhalte der Fachvorlesung direkt auf die spätere Tätigkeit als Lehrperson beziehen sollen, vertreten nur wenige der befragten Dozent:innen. Die beiden Autoren stellen fest, dass die interviewten Fachmathematiker:innen hochschuldidaktischer Literatur, wenig Beachtung schenken, was die fachliche Ausbildung von Lehramtsstudierenden betrifft. Ebenfalls ging in den Interviews hervor, dass das gezielte Eingehen auf Maßnahmen zur Bewältigung der doppelten Diskontinuität von den Vortragenden kaum aufgegriffen wird. Die Autoren sind der Ansicht, dass diese Einstellungen durch Traditionen am Standort und der Fakultät geprägt sind.

Vorlesungen in der Lehramtsausbildung sollen aus Sicht der Autoren neben dem Fachwissen auch gezielte Zusammenhänge zwischen Begriffen, Resultaten und Methoden diskutieren. Dabei sollen bewusste Verbindungen zu Themen der Schulmathematik hergestellt werden. Auch in den Übungen sollen unterschiedliche Methoden umgesetzt werden, um die doppelte Diskontinuität bestmöglich überwinden zu können. Alles in allem appellieren die beiden Autoren zur Umsetzung von verzahnten Lehrveranstaltungen in der Lehramtsausbildung und der laufenden Evaluierung der Hochschuldidaktik.

Weiters knüpfen die beiden Autoren an das Pilotprojekt von Götz und Steinbauer (2013) an und formulieren Vorschläge für die weitere Kooperation zwischen fachmathematischen und fachdidaktischen Inhalten in der Ausbildung für angehende Mathematiklehrpersonen. Eine Konsequenz aus dem Projekt war, dass Roland Steinbauer (aus dem Bereich der Fachmathematik), gemeinsam mit Evelyn Süss-Stepancik (aus dem Bereich der Fachdidaktik) im Wintersemester 2018, die Schulmathematikvorlesung Analysis hielt. Die Inhalte der Schulmathematik Analysis wurden

1. Fachdidaktischer Hintergrund

somit bewusst an die fachlichen Inhalte angeknüpft und diskutiert. Auch in den Übungen gab es viele Verbindungspunkte. Mit diesem Aufbau der Vorlesung wurde die gezielte Verknüpfung von fachmathematischen und fachdidaktischen Inhalten geplant und umgesetzt. Auch in den Jahren 2020 und 2022 wurde die Fachvorlesung von Roland Steinbauer und die Schulmathematikvorlesung von Roland Steinbauer gemeinsam mit Sonja Kramer gelesen. Genauere Einblicke und Resümees der Umsetzung dieser Vorlesungs-Kombination werden wir im empirischen Teil dieser Arbeit diskutieren.

2. Folgen und Grenzwerte: fachlicher und fachdidaktischer Hintergrund

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit zwei Kernthemen der Analysis, den Folgen und dem Grenzwert. Anfangs geben wir einen kurzen Einblick in die historische Geschichte des Unendlichkeits- und des Grenzwertbegriffs. Danach werden Aspekte sowie Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff anhand von Beispielen diskutiert.

2.1. Historischer Abriss

Die Konzepte des Unendlichkeitsbegriffs beschäftigen die Menschheit schon mindestens seit der Antike. Eine genaue Beschreibung des historischen Verlaufs würde den Rahmen dieser Arbeit überschreiten, weshalb wir nur eine kurze Übersicht geben. Unsere Hauptquellen sind die Publikation von Weigand (2016, Kapitel 2) sowie Brückler (2017, Kapitel 5) und Greefrath et al. (2016, Kapitel 3.1).

Zu Beginn beschäftigen wir uns mit der Sichtweise von Aristoteles auf das Unendliche. Er unterschied zwischen dem potentiellen und dem aktual Unendlichen.

Definition 2.1.1 (Das potentiell Unendliche) *Das potentiell Unendliche bezieht sich auf fortlaufende Prozesse, welche unendlich oft wiederholt werden.*

Das potentiell Unendliche bezieht sich auf eine Eigenschaft oder einen Zustand, der theoretisch unbegrenzt oder endlos sein könnte. Beispiele für die potentielle Unendlichkeit sind das andauernde Zählen oder das Durchlaufen einer natürlichen Zahlenfolge. In der Realität wird dieses unendliche Ganze als etwas angesehen, dass nicht vollständig durchlaufen werden kann. Aristoteles sah das potentiell Unendliche als die zentrale Idee des Unendlichen, welches die Wirklichkeit eines niemals endenden Vorgangs kennzeichnet. Seiner Ansicht nach basiert diese Vorstellung auf dem *Modus der Möglichkeit*.

Definition 2.1.2 (Das aktual Unendliche) *Das aktual Unendliche bezieht sich auf ein endliches Ergebnis eines unendlichen Prozesses.*

2. Folgen und Grenzwerte: fachlicher und fachdidaktischer Hintergrund

Aus der Definition des aktual Unendlichen ergibt sich die Existenz eines Ergebnisses aus einem unendlichen Prozess. Ein Beispiel für aktuelle Unendlichkeit ist die Länge eines Weges, welcher durch unendlich viele Teilstrecken zusammengesetzt wird. Aristoteles zweifelte an der möglichen Existenz einer Menge, die bereits unendlich viele Objekte enthält. Seit der Antike wurde die aktuelle Unendlichkeit oftmals verwendet, um die Existenz Gottes zu beschreiben.

2.1.1. Kurze Geschichte des Grenzwertbegriffs

Der Grenzwertbegriff steht im engen Zusammenhang mit dem Begriff der Folgen und Reihen. Im 16. und 17. Jahrhundert wurde bereits die (unendliche) Summe der geometrischen Reihe vorgestellt

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

Immer wieder kam der Wunsch auf, das potentiell Unendliche durch die Idee des aktual Unendlichen auszudrücken. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) sowie Leonhard Euler (1707–1783) begannen für die Berechnung des Differenzialquotienten mit unendlich kleinen sowie unendlich großen Zahlen als festgelegte mathematische Größen zu rechnen. Die beiden Mathematiker gehen bei der Berechnung des Differentialquotienten von einem festen Objekt aus und beziehen sich somit auf die statische Vorstellung, die wir in Abschnitt [2.2.3](#) vorstellen.

Isaac Newton (1643-1727) fokussierte beim Grenzwertbegriff vor allem die kinematische Vorstellung und den Prozess des potentiell Unendlichen.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) veröffentlichte 1821 ein Lehrbuch zur Analysis. In diesem Buch wird der Grenzwert als ein Hauptbegriff der Analysis vorgestellt. Cauchy definiert den Grenzwert einer Zahlenfolge mithilfe sich nach und nach annähernden Werten. Das Originalzitat lautet wie folgt:

Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die letztere die Grenze aller übrigen.
(Cauchy 1828, S.3)

Cauchy kam der heutigen Definition mit seinen Worten sehr nahe. Er fokussiert sich durch das schrittweise Annähern jedoch auf die dynamische Vorstellung. Mit den Worten "so wenig verschieden sind, als man irgend will" könnte sich Cauchy auf den statischen Aspekt beziehen und damit eine Verbindung zwischen dynamischer vgl. [2.2.3](#) und statischer vgl. [2.2.3](#) Sichtweise

schaffen, die im kommenden Abschnitt näher erklärt werden.

Am Ende des 19. Jahrhunderts wurde die Analysis an den Hochschulen zu einer systematischen, formalen und strenger Disziplin. Unter dem Einfluss von Karl Weierstraß (1815–1897) wurden unendlich kleine sowie unendlich große Größen durch Operationen im Endlichen ersetzt. Auf dieser Basis entstand die Definition eines Grenzwerts einer Folge, wie sie bis heute gelehrt und verwendet wird.

Definition 2.1.3 (Grenzwert einer Folge) Eine reelle Folge (a_n) konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 : \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Hierbei wird a *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (a_n) genannt und wir sagen (a_n) konvergiert gegen a . Im Falle, dass die Folge einen Grenzwert besitzt, wird sie *konvergent* genannt, ansonsten wird die Folge als *divergent* bezeichnet.

Analog zur Definition des Folgengrenzwerts kann auch der Grenzwert einer Funktion definiert werden.

Definition 2.1.4 (Grenzwert einer Funktion) Eine reelle Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert an der Stelle x_0 ¹ gegen ein $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Hierbei wird a als *Grenzwert* oder *Limes* der Funktion f an der Stelle x_0 bezeichnet und wir schreiben $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \rightarrow a$ für $x \rightarrow x_0$.

In dieser Definition wird der Grenzwert als eine Zahl festgelegt, die in Bezug auf die Folge bzw. Funktion eine gewisse Eigenschaft hat. Damit werden alle Schwierigkeiten vermieden, die durch die Betrachtung eines unendlichen Prozesses entstehen können.

Die Definition bildet den Schlusspunkt einer langen historischen Begriffsentwicklung, stellt jedoch nur ein minimales Gerüst für diesen zentralen Begriff auf. Gerade deswegen stoßen Lernende beim Erlernen und Interpretieren der formalen Definition häufig auf Schwierigkeiten.

¹Hier muss x_0 ein Berührungspunkt des Definitionsbereichs sein.

2.2. Aspekte und Grundvorstellungen

In den kommenden Abschnitten diskutieren wir Aspekte sowie Grundvorstellungen des Folgen- und des Grenzwertbegriffs. Diese Aspekte und Grundvorstellungen werden mithilfe des Standardwerks Greefrath et al. (2016, S.103-106) sowie dem Vorlesungsskript Kramer und Steinbauer (2023, Kapitel 4) definiert. Anschließend werden die spezifischen Aspekte und Grundvorstellungen durch Beispiele detaillierter erläutert.

2.2.1. Aspekte des Folgenbegriffs

Beim Folgenbegriff werden drei Aspekte unterschieden, der *Iterationsaspekt*, der *Aufzählungsaspekt* und der *Zuordnungsaspekt*.

Der Iterations- bzw. Rekursionsaspekt

Beim Iterationsaspekt wird jedes Folgenglied, bis auf den Startwert, sukzessive aus seinem Vorgänger bzw. seinen Vorgängern konstruiert.

Gegeben ist ein Startwert a_0 und eine Vorschrift mithilfe dessen das Folgenglied a_{n+1} durch seinen Vorgänger a_n konstruiert werden kann. Anhand einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird diese Vorschrift formalisiert. Somit sind für alle $n \geq 1$ alle Folgenglieder mit $a_{n+1} = f(a_n)$ gegeben. Die Iterationsfolge sieht folgendermaßen aus:

$$a_0, a_1 = f(a_0), a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2), \dots$$

Um diesen Aspekt nachvollziehen zu können, muss den Schüler:innen die funktionale Beziehung zwischen zwei Folgengliedern bewusst gemacht werden. Im Mathematikunterricht kann die Vorstellung der Iteration besonders gut mit digitalen Werkzeugen veranschaulicht werden. Ein Problem könnte darstellen, dass nicht alle Folgen rekursiv dargestellt werden können, wie z.B. die Folge der Primzahlen.

Der Aufzählungsaspekt

Vom Aufzählungsaspekt sprechen wir, wenn eine Folge als sukzessive Auflistung, Aneinanderreihung oder Aufzählung von Zahlen oder Objekten dargestellt wird. Von Bedeutung ist die Reihenfolge der aufgezählten Folgenglieder. Schüler:innen ist dieser Aspekt meist aus Alltagserfahrungen bekannt.

Der Zuordnungsaspekt

Beim Zuordnungsaspekt wird die Folge als eine Funktion gedeutet, die jeder natürlichen Zahl genau einen Funktionswert zuordnet. Der Aspekt kann mithilfe von Tabellen und Graphen veranschaulicht werden.

2.2.2. Grundvorstellungen zum Folgenbegriff

In der Literatur lassen sich vier Grundvorstellungen zum Folgenbegriff finden: die *Reihenfolgenvorstellung*, die *Kovariationsvorstellung*, die *Zuordnungsvorstellung* und die *Objektvorstellung*. Die Grundvorstellungen zum Folgenbegriff stehen in engem Zusammenhang mit den Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff.

Definition 2.2.1 (Reihenfolgenvorstellung zum Folgenbegriff) *Eine Folge wird als Aneinanderreihung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge angesehen.*

Diese Grundvorstellung baut auf dem Iterations-, Aufzählungs- und Zuordnungsaspekt auf.

Definition 2.2.2 (Kovariationsvorstellung zum Folgenbegriff) *Eine Folge erfasst, wie sich Werte von einem Folgenglied zum nächsten Folgenglied ändern.*

Die Vorstellung der Kovariation baut vor allem auf dem Iterationsaspekt auf. Im Mathematikunterricht wird die Vorstellung vor allem bei der rekursiven Darstellung von arithmetischen und geometrischen Folgen verwendet. Auch beim Aufzählen von Folgengliedern findet man die Vorstellung der Kovariation wieder. Aus diesem Grund steht sie auch im Zusammenhang mit dem Aufzählungsaspekt.

Definition 2.2.3 (Zuordnungsvorstellung zum Folgenbegriff) *Eine Folge ordnet jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zu.*

Die Vorstellung baut direkt auf dem Zuordnungsaspekt auf. Durch graphische Darstellungen und Wertetabellen kann diese Grundvorstellung veranschaulicht werden.

Definition 2.2.4 (Objektvorstellung zum Folgenbegriff) *Eine Folge wird als Ganzes betrachtet.*

Diese Vorstellung ist die abstrakteste Grundvorstellung des Folgenbegriffs. Nützlich ist die Vorstellung beim Operieren mit Folgen als Ganzes, z.B. beim Thema der Grenzwertsätze.

2. Folgen und Grenzwerte: fachlicher und fachdidaktischer Hintergrund

Der Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen des Folgenbegriffs kann wie in Abbildung 2.1 dargestellt werden. Die fett-markierten Linien kennzeichnen eine stärkere Verbindung zwischen den beiden Seiten. Nicht alle Aspekte sind mit allen Grundvorstellungen verbunden.

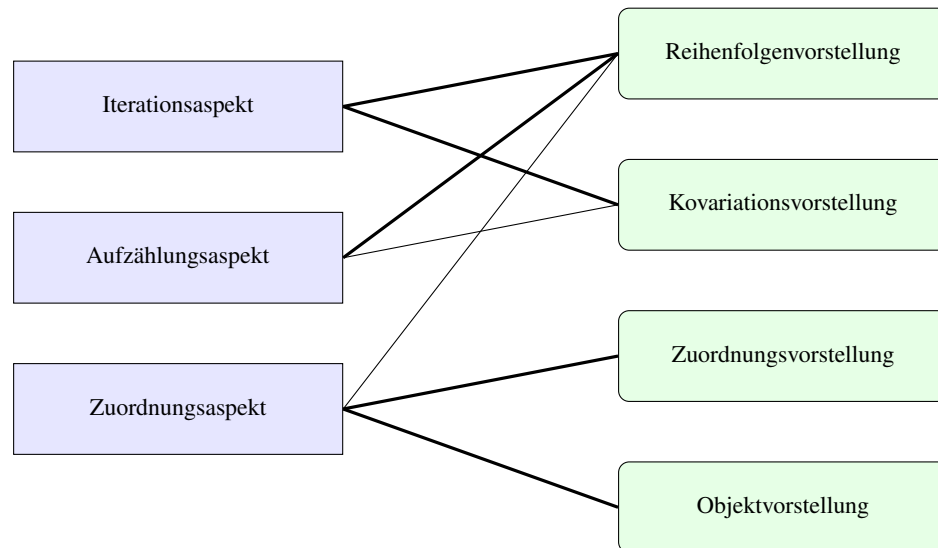


Abbildung 2.1.: Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff (Kramer and Steinbauer 2023, S.61)

2.2.3. Aspekte des Grenzwertbegriffs

Resultierend aus der historischen Entwicklung des Grenzwertbegriffs entstanden der *dynamische* und der *statische* Aspekt. Für das Verständnis des Grenzwertbegriffs werden beide Aspekte benötigt.

Der dynamische Aspekt

Im Zentrum des dynamischen Aspekts steht das potentiell Unendliche vgl. 2.1.1. Der dynamische Aspekt des Grenzwertes hat eine sehr lange Tradition und war bereits in der Antike bekannt. Häufig wird mit diesem Aspekt das fortlaufende Durchschreiten einer natürlichen Zahlenfolge assoziiert. Die Folgenglieder nähern sich Schritt für Schritt einem Wert an. Ein Beispiel hierfür ist die Nullfolge $x_n = \frac{1}{n}$. Angestrebt wird die Vorstellung eines Wertes, um welchen sich fast alle Folgenglieder "versammeln".

2.2. Aspekte und Grundvorstellungen

Im Unterricht wird diese Sichtweise oftmals mithilfe von Flächen und Funktionen dargestellt. Weiters begegnen wir dem dynamischen Aspekt im Mathematikunterricht bei Aufgaben, die sich mit Folgen beschäftigen, die streng monoton wachsend bzw. fallend und nach oben bzw. unten beschränkt sind. Aufgrund ihrer Eigenschaften konvergieren die Folgen gegen ihr Supremum bzw. Infimum.

Dabei soll anhand gut ausgewählter Beispiele veranschaulicht werden, dass der Grenzwert als Folgenwert sehr wohl auch angenommen werden darf.

Der statische Aspekt

Beim statischen Aspekt wird der Grenzwert als endliches Ergebnis eines unendlichen Prozesses aufgefasst. Historisch betrachtet ist der statische Aspekt vergleichsweise jung und wurde erst im 19. Jahrhundert von Karl Weierstraß formalisiert. Der Fokus liegt hier nicht mehr auf dem Feststellen des Wertes, dem sich die Folgenglieder schrittweise annähern. Dieser Wert wird zu Beginn bereits festgelegt und es wird das Folgenglied angegeben, ab welchem sich alle bis auf endliche viele Folgenglieder in jeder noch so kleinen Umgebung um diesen Wert befinden. Dieser Aspekt wird oftmals als der Gegenspieler des dynamischen Aspekts gedeutet. Die statische Sichtweise bildet die Grundlage für die formale Definition des Grenzwertes vgl. 2.1.3.

Ein überwiegender Teil der Fachdidaktiker:innen sowie die fachdidaktische Literatur vertreten die Meinung, dass zuverlässige Vorstellungen von Unendlichkeit und dem Grenzwertbegriff zu Beginn über den dynamischen Aspekt aufgebaut werden sollen. Ein tieferes Verständnis verlangt jedoch einen gewollten Wechsel zum statischen Aspekt. Oftmals treten Schwierigkeiten beim Wechseln dieser Perspektiven auf vgl. (Bender 1991).

2.2.4. Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Im folgenden Abschnitt werden die drei Grundvorstellungen des Grenzwertbegriffs vorgestellt und anhand von Beispielen näher erklärt. Diese sind die *Annäherungs-*, die *Umgebungs-* und die *Objektvorstellung*. Die Beschreibung der Grundvorstellungen beziehen wir aus Greefrath et al. (2016, S.103-106) sowie Kramer und Steinbauer (2023, Kapitel 4).

Definition 2.2.5 (Annäherungsvorstellung) *Die Annäherungsvorstellung bezieht sich auf das schrittweise Zustreben bzw. Annähern der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt.*

Die Vorstellung der Annäherung steht in enger Verbindung zum dynamischen Aspekt des Grenzwertbegriffs. Da sich die Folgenglieder sukzessive einem festen Wert nähern, wird aber auch eine schwache Verbindung zum statischen Aspekt aufgebaut.

2. Folgen und Grenzwerte: fachlicher und fachdidaktischer Hintergrund

Definition 2.2.6 (Umgebungsvorstellung) *Ab einem bestimmten Folgenglied liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder in jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert.*

Im Gegensatz zur Annäherungsvorstellung baut die Umgebungsvorstellung auf dem statischen Aspekt auf. Hier wird ausgehend vom Grenzwert eine Umgebung vorgegeben, welche beliebig klein sein kann. In dieser Umgebung wird nach einem Folgenglied Ausschau gehalten, sodass sich alle darauf folgenden Folgenglieder in dieser festgelegten Umgebung befinden. Die Vorstellung soll bei den Lernenden Verständnis für graphische und numerische Folgenwerte in einer Umgebung um den Grenzwert schaffen.

Definition 2.2.7 (Objektvorstellung) *Grenzwerte werden als mathematische Objekte - etwa (feste) Werte, Matrizen oder geometrische Objekte - angesehen, die durch eine Folge - etwa eine Zahlenfolge, eine Folge von Matrizen oder geometrischer Objekte - konstruiert oder definiert werden.*

Die Objektvorstellung baut auf dem statischen Aspekt des Grenzwertbegriffs auf und steht somit in enger Verbindung mit diesem Aspekt. Die Objektvorstellung ist die abstrakteste der Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff.

Abbildung 2.2 stellt die gegenseitige Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Grenzwert dar. Die fett-markierten Linien kennzeichnen wieder eine stärkere Verbindung zwischen den beiden Seiten. Die Objektvorstellung ist nicht mit dem dynamischen Aspekt verbunden vgl.(Greefrath et al. 2016, S.107).

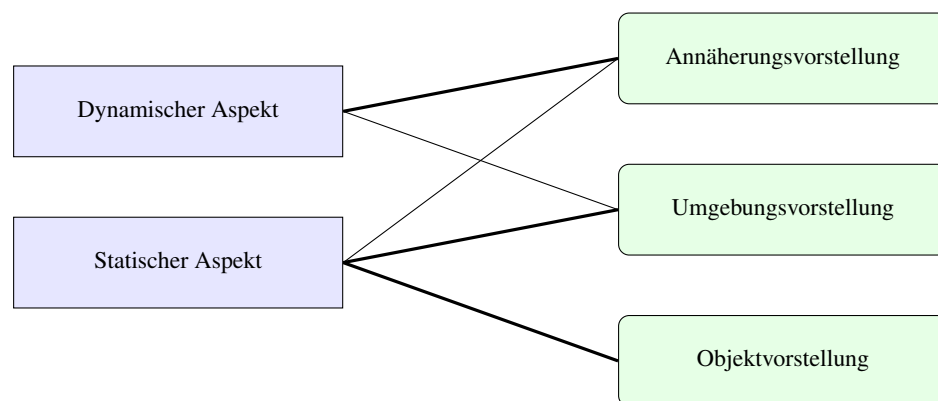


Abbildung 2.2.: Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff (Kramer and Steinbauer 2023, S.75)

3. Ausgewählte empirische Arbeiten zu Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit ausgewählten empirischen Arbeiten rund um Vorstellungen zum Unendlichkeits- und Grenzwertbegriff. Zu Beginn wird die Studie über Schüler:innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen von Marx (2006) vorgestellt. Danach geben wir einen kurzen Einblick in ausgewählte Kapitel der Monographie von Nardi (2008a). Dabei setzen wir uns mit dem Konzept der Visualisierungen genauer auseinander. Im Anschluss geben wir einen kurzen Einblick in die Arbeit von Bender (1991). Er thematisiert insbesondere Fehlvorstellungen von Lernenden zum Grenzwertbegriff von Folgen.

3.1. Schüler:innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen

Die erste empirische Studie, die wir genauer betrachten, beschäftigt sich mit Schüler:innen-vorstellungen zu unendlichen Prozessen und wurde von Marx (2006) durchgeführt. Marx erhob mithilfe von Schüler:innen-Interviews qualitative Daten. Für die Interviews wurden Schüler:innen der 10. Jahrgangsstufe eines Gymnasiums ausgewählt. Diese Schulstufe wurde auserwählt, da die Schüler:innen bereits den Unterricht der Sekundarstufe 1 absolviert hatten und gerade am Beginn des Analysisunterrichts in der Sekundarstufe 2 standen.

Ausgangspunkte für die geführten Interviews bildeten ein geometrisches Rätsel und ein Zahlenrätsel. Diese beiden Denkaufgaben stellen allgemeine Grenzprozesse dar. Das geometrische Rätsel umfasst die Frage nach einer gesamten Fläche, während das Zahlenrätsel auf der Intervallschachtelung aufbaut.

Zu Beginn stellen wir die Aufgabenstellungen der beiden Rätsel vor. Anschließend fassen wir die Ergebnisse der geführten Interviews von vgl. (Marx 2006) zusammen. Danach geben wir einen Überblick über das Resümee und die Erkenntnisse der Studie.

3. Ausgewählte empirische Arbeiten zu Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

3.1.1. Geometrisches Rätsel

Zu Beginn wurde den befragten Schüler:innen ein geometrisches Rätsel vorgelegt. Ausgangspunkt stellte ein Rechteck dar, welches einen Dezimeter breit und einen Dezimeter hoch war. Das zweite Rechteck war ebenfalls einen Dezimeter breit, aber nur einen halben Dezimeter hoch. Das dritte Rechteck war genauso breit, die Höhe betrug nur noch $\frac{1}{4}$ Dezimeter. Jede Fläche war somit halb so groß wie die vorhergehende Fläche. Die Aufgabe der Proband:innen war es nun zu überlegen, wie groß die gesamte Summe aller Rechtecke zusammen sei. Die angeführte Grafik 3.1 veranschaulicht das geometrische Rätsel, ist jedoch nicht maßstabsgetreu.

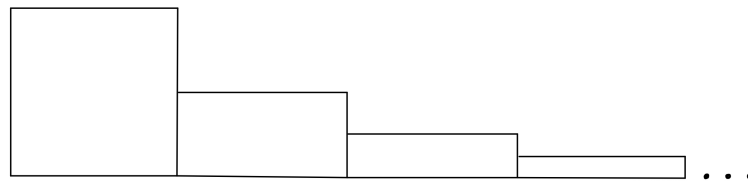


Abbildung 3.1.: Geometrisches Rätsel; eigene Darstellung, vgl. (Marx 2006, S.19)

3.1.2. Zahlenrätsel

Die zweite Gruppe an Proband:innen beschäftigte sich mit einem Zahlenrätsel. Hierbei wurde der Zahlenstrahl zwischen den Zahlen 0 und 1 betrachtet. Diese Strecke wurde in zehn Teilstrecken, mit jeweils gleicher Länge, unterteilt. Der Fokus lag auf der vierten Teilstrecke zwischen den Punkten 0,3 und 0,4. Diese Strecke wurde wiederum in zehn Teile mit gleicher Länge unterteilt. Dann wurde erneut die vierte Teilstrecke, zwischen den Punkten 0,33 und 0,34 ausgewählt. Der Prozess wurde nun fortlaufend nach diesem Prinzip weitergeführt. Die Proband:innen sollten nun argumentieren, ob Zahlen existieren können, welche auf all den ausgewählten Teilstrecken, zwischen 0,3 und 0,4 sowie 0,33 und 0,34 und so weiter, liegen. Wenn sie die Frage bejahten, dann sollten die Teilnehmer:innen diese Zahlen nennen. Die Grafik 3.2 veranschaulicht die Vorgehensweise des Zahlenrätsels.

3.1. Schüler:innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen

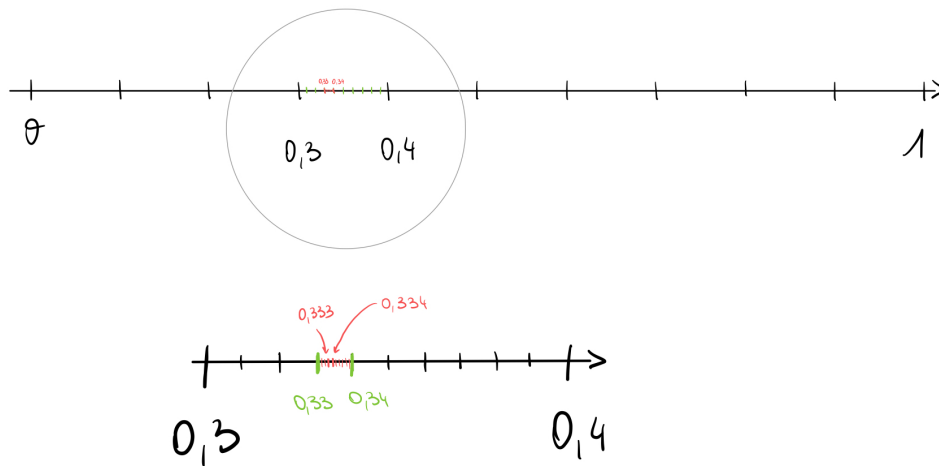


Abbildung 3.2.: Zahlenrätselfragen; eigene Darstellung, vgl. (Marx 2006, S.43)

3.1.3. Mathematikwelt vs. Außenwelt

Beide Problemstellungen stellen klassische Aufgabenstellungen im Analysisunterricht dar. Die Schüler:innen, die sich näher mit dem geometrischen Rätsel befassten, versuchten die Aufgabe in den passenden Kontext einzuordnen. Sie betrachteten dabei Lösungen zum einen aus der Sichtweise der "Außenwelt" und zum anderen aus der "mathematischen Welt". Dabei fanden die Schüler:innen verschiedene Argumente und Lösungen.

Die befragten Schüler:innen verstehen unter der Außenwelt eine Form von Realität, die real durchführbare Prozesse beschreibt. Dabei assoziieren sie einen Prozess, der nach einer gewissen Anzahl an Schritten zu Ende ist. Ein Beispiel hierfür wäre die Division von Zehn durch Vier. Mit Hilfe des Divisionsalgorithmus kann das endliche Ergebnis berechnet werden. Die Schüler:innen verstehen darunter aber auch die individuelle Festlegung eines "Endes". Zum Beispiel bei der Division Eins durch Drei, führen die Schüler:innen den Algorithmus so lange aus, bis sie aus Zeit- oder auch aus Platzgründen aufhören müssen. Der Fokus liegt hierbei auf dem Ende eines Prozesses, unabhängig ob dieser endlich ist oder ob die Entscheidung des Endes von außen festgelegt wurde.

Mit der mathematischen Welt verbinden die Schüler:innen meist nur theoretische Überlegungen. Anders als in der Außenwelt können hier Prozesse existieren, die nicht abbrechen. Wenn wir wieder die Division Eins durch Drei betrachten, dann kann die Division aus Sicht der Schüler:innen

3. Ausgewählte empirische Arbeiten zu Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

hier in der mathematischen Welt unendlich fortgesetzt werden. Der Prozess wird nicht durch das Erreichen des Ergebnisses und auch nicht durch äußere Störungen beendet. Die Welt der Mathematik verläuft aus Schüler:innensicht somit ungestört und ohne Einfluss von außen weiter.

Der Schwerpunkt der beiden Aufgabenstellungen liegt in der Welt der Mathematik, welcher mit gewissen Elementen in die Außenwelt eingegliedert wurde. Die Schüler:innen ziehen zur Problemlösung Erfahrungen aus der Außenwelt heran und versuchen diese in der mathematischen Welt zu lösen. Die Herausforderung liegt nun darin, dass die Schüler:innen die Aufgaben keiner der beiden Welten vollkommen zuordnen können und das Herstellen einer Verbindung zwischen den beiden Welten für sie ungewohnt ist.

Das geometrische Rätsel kann mithilfe von Papierstreifen veranschaulicht werden und findet somit Platz in der realen Welt. Jedoch hat das Aneinanderreihen von Papierstreifen kein Ende und geht somit in die mathematische Welt über.

Das Zahlenrätsel basiert auf der Idee der Intervallschachtelung und geht somit von der Zahlenwelt in die Welt der Geometrie über. Das Rätsel kann aus diesem Grund mithilfe von Intervallen auf der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Die Schüler:innen verbinden die Aufgabenstellung vorwiegend mit konkreten Handlungen in der Außenwelt. Die Teilstrecke wird zu einem Strich auf dem Papier oder einem abgeschnittenen Stück Faden.

3.1.4. Einblick in die Interviews

Schüler:innen sind vor allem mit konkreten Handlungen sowie endlichen Prozessen vertraut. Auf diese Problemstellungen treffen sie sowohl in der Außenwelt als auch in der mathematischen Welt. Diese Aufgaben sind somit endlich und liefern ein Ergebnis. Oftmals wird beobachtet, dass Schüler:innen versuchen die Problemstellungen unendlicher Prozesse auf endliche Prozesse zurückzuführen. Sie verwenden somit eine Art des Permanenzprinzips und führen Erkenntnisse aus dem Endlichen in das Unendliche über. Der folgende Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über die geführten Interviews und die Sichtweisen der Schüler:innen zu unendlichen Prozessen. Die Einblicke wurden bereits von Marx (2006) eingeordnet und gedeutet.

Einige Schüler:innen haben zu Beginn der Aufgabenstellung die Existenz der Zahl bzw. der Fläche in Frage gestellt.

Eine befragte Schülerin gliederte das geometrische Rätsel in die Außenwelt ein und widersprach der Idee einer Gesamtfläche. Sie interpretierte die Aufgabe als konkrete Handlung und fokussiert

3.1. Schüler:innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen

sich vollkommen auf das Aneinanderreihen von Papierstreifen. Sie argumentierte ihren Lösungsweg mit bekannten Handlungsweisen und dem stets endlichen Ergebnis aus ihren Erfahrungen. Die Schülerin war der Meinung, dass der Prozess des Aneinanderreihens nie enden wird. Sie meinte, dass es somit nie eine gesamte Fläche geben kann. Sie lehnte im Hinblick auf den Unendlichkeitsbegriff die Existenz einer Gesamtfläche vollkommen ab.

Andere Schüler:innen äußerten beim Lösen des Zahlenrätsels ähnliche Argumente. Einer der Schüler war der Meinung, dass die Zahl Null Komma Drei Periode zwar existiere, aber es gäbe für sie keinen entsprechenden Punkt auf der Zahlengeraden. Der Schüler versuchte schrittweise immer eine Dezimalstelle mehr bei der Suche auf der Zahlengeraden miteinzubeziehen. Er meinte, dass dieser Prozess für die Zahl Null Komma Drei Periode nicht enden würde und dass somit kein Punkt für sie auf dem Zahlenstrahl existiere. Die zweite Schülerin verweigerte die Existenz der Zahl von Anfang an. Die Zahl kann aus ihrer Sicht nicht aufgeschrieben und auch nicht als Dezimaldarstellung dargestellt werden.

Nicht alle befragten Schüler:innen haben sich zu Beginn mit der Existenzfrage auseinandergesetzt. Eine Schülerin ordnete das Zahlenrätsel sofort der mathematischen Welt zu und setzte die Existenz von unendlichen Prozessen voraus. Sie versuchte die Aufgabenstellung mithilfe von Objekten aus der mathematischen Welt zu beschreiben. Die Schüler:in zog zur Beschreibung der Gesamtfläche die Zahl Eins Komma Neun Periode heran und meinte, dass sich diese Zahl an den wachsenden Flächeninhalt anpassen könne. Die Schüler:in assoziierte mit der Gesamtfläche ein veränderliches Objekt, welches von der Anzahl der Teilflächen abhängig ist. Ihre Sichtweise vermischt den Prozess und das Ergebnis des Prozesses.

Keine der Schüler:innen-Gruppen diskutierte explizit über den Unterschied von Prozess und dem Ergebnis eines Prozesses. Eine Mehrheit an Schüler:innen versuchte die unendlichen Prozesse als Ganzes zu verstehen und diese bestmöglich mit Zahlen zu beschreiben.

Eine weitere Schülerin stellte die Teilergebnisse des unendlichen Prozesses mithilfe einer Folge dar und beschrieb somit den Prozess als Veränderung.

Bei einigen Schüler:innen war auch eine gewisse Unsicherheit im Umgang mit unendlichen Prozessen erkennbar. Zwei Schüler:innen versuchten das Problem mithilfe ihrer Erfahrungen aus dem Endlichen zu lösen und schlussfolgerten, dass auch der unendliche Prozess ein Ende haben muss. Die beiden waren sich jedoch über den genauen Zeitpunkt des Abbruchs des unendlichen Prozesses unsicher. Die Unendlichkeit lässt für die Schüler:innen somit das Ende des Prozesses offen.

3. Ausgewählte empirische Arbeiten zu Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

Ein anderer Schüler bezog sich auf seine Erfahrungen aus dem Endlichen und stellte sich die Intervallschachtelung mithilfe der Konstruktion von immer kleiner werdenden Intervallen vor, die jeweils im vorherigen Intervall enthalten waren. Er konnte nicht nachvollziehen, wieso nun genau eine Zahl und kein Intervall in allen Intervallen liegen sollte. Der Schüler verwendete das Permanenzprinzip, um eine Verbindung vom Endlichen in das Unendliche herstellen zu können. Er verfolgte die Vorstellung, dass die Problemstellung im Endlichen gestellt und ins Unendliche übertragen wurde. Somit musste es seiner Ansicht nach, analog zum Konzept im Endlichen, zu einem Ergebnis im Unendlichen führen.

Manche Schüler:innen setzten von Beginn an voraus, dass der unendliche Prozess zwar lange andauert, aber schließlich doch endlich sei. Sie sprachen im Laufe des Interviews immer von diesem Ende, erklärten aber nicht genau wie dieses Ende erreicht wurde.

Die Schüler:innen verwendeten unterschiedliche Strategien, um mit unendlichen Prozesse umzugehen. Dabei versuchten sie oftmals die Problemstellungen mithilfe von Zahlen zu beschreiben. Die Interviews zeigen jedoch, dass die Schüler:innen keine einheitliche Vorstellung des reellen Zahlenbegriffs vertreten. Diese unterschiedlichen Zahlenvorstellungen hinderten die Schüler:innen aber keinesfalls an der Diskussion, führten jedoch häufig zu Brüchen in ihren individuellen Denkprozessen.

Marx (2006) identifizierte einige konkrete Schüler:innen-Vorstellungen von Zahlen aus den geführten Interviews. Einige Schüler:innen versuchten das geometrische Rätsel mithilfe von periodischen Dezimalzahlen zu beschreiben und stellten somit den unendlichen Additionsprozess dar. Spannend ist folgende Schülerin, die ein Drittel nicht als Zahl sondern als Rechenoperation deutete. Sie rechnete jedoch im Laufe des Interviews mit einem Drittel sowie Null Komma Periode Drei, da sie diese unbewusst doch als Zahlen deutete. Die Schülerin verwendete in ihren Argumentationen zwei Zahlenmodelle, ohne dass sie selbst eine Verbindung dazu äußern konnte. Diese Denkweise führte die Schülerin zu Konflikten zwischen ihren eigenen Interpretationen von einem Drittel. Die gleiche Schülerin war auch der Meinung, dass eine Zahl nur existieren kann, wenn man sie als Dezimalzahl darstellen kann. Analog formulierte sie, dass die fehlende Dezimaldarstellung die Nichtexistenz der Zahl zeigt.

Zwei weitere Schüler:innen deuteten ein Drittel als einen Anteil und suchten auf der Zahlengeraden nach dem dritten Teil einer Strecke. Beide waren der Meinung, dass ein Drittel keine Zahl sei und somit auch kein Punkt auf der Zahlengeraden sein kann. Im weiteren Verlauf wechselten

3.1. Schüler:innenvorstellungen zu unendlichen Prozessen

die Schüler:innen zur Dezimaldarstellung, um den Punkt auf der Zahlengeraden zu finden. Die Schüler:innen argumentierten, dass sie für die Lösung des Problems mit der Denkweise ihres Anteils nicht weiter kommen können und somit zur Operation in die Dezimaldarstellung wechseln müssen.

3.1.5. Konsequenzen für den Analysisunterricht

Die geführten Interviews geben einen interessanten Einblick in das Verständnis und die Interpretationen von unendlichen Prozessen durch die Schüler:innen. Zum Abschluss möchten wir, die von Marx (2006) gezogenen Konsequenzen kurz zusammenfassen.

Marx betont die Relevanz einer reflektierten Grundhaltung im Mathematikunterricht sowie die durch die Lehrkraft wahrgenommenen eigenen Vorstellungen von Schüler:innen. Hierfür sollen die Zusammenhänge von Außenwelt und der mathematischen Welt konkret im Unterricht thematisiert werden. Weiters soll als Grundlage der Unendlichkeitsbegriff und der Unterschied zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen besprochen werden. Folglich können Aufgaben zu unendlichen Prozessen gemeinsam erarbeitet und in den beiden Welten gegenübergestellt werden. Den Schüler:innen soll jedoch bewusst gemacht werden, dass der Unendlichkeitsbegriff in die mathematische Welt eingeordnet werden soll. Diese Einordnung hilft den Schüler:innen, die Aufgabenstellungen losgelöst von konkreten Handlungen zu betrachten.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist das Aufbauen eines Verständnisses für die unterschiedlichen Auffassungen von Zahlen. Dafür eignet sich eine persönliche Reflexion über das in der Sekundarstufe 1 erworbene Wissen zu den Erweiterungen der Zahlenbereiche. Auch die Unterschiede zwischen einer Zahl und ihrer Darstellung sollen im Unterricht thematisiert werden. Die Schüler:innen sollen eine Zahl als Objekt wahrnehmen, welches auf unterschiedliche Arten dargestellt werden kann. Diese Erfahrungen sollen bereits mit endlichen Zahlen erfolgen. Für das weitere Verständnis soll der Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Prozessen ausführlich thematisiert werden. Die Schüler:innen sollen mit unendlichen Prozessen vertraut gemacht werden und sinnvoll über Ergebnisse dieser Prozesse sprechen können. All diese Faktoren sollen neue Zugänge für den Umgang mit Aufgabenstellungen im Analysisunterricht, vor allem im Umgang mit unendlichen Prozessen, ermöglichen.

3.2. Visualisierungen und informelle Darstellungen

Im kommenden Abschnitt diskutieren wir einige für unser Thema relevante Aspekte aus den Arbeiten von Nardi (2008a, S.44-61) sowie Nardi (2008b, Kapitel 6).

Allgemein beschäftigt sie sich in ihren Studien mit der Perspektive, wie Mathematiker:innen Lernprozesse von Studierenden wahrnehmen, ihre eigene Lehre reflektieren und deren Zusammenarbeit mit Fachdidaktiker:innen.

Dafür wurden qualitative Daten von britischen Mathematiker:innen im Zeitraum von 1992 bis 2004 erhoben. Die Daten stammen aus Kursen der Analysis, Linearen Algebra und Gruppentheorie. Die gesammelten Daten wurden aufbereitet und in fiktiven Dialogen zwischen einer/einem Mathematiker:in "M" und einer/einem Fachdidaktiker:in "RME" (researcher in mathematics education) dargestellt. Die Dialoge basieren auf unterschiedlichen mathematischen Problemen und ausgewählten Antworten von Studierenden.

Wir betrachten nun ein Kapitel aus dem Monographen von Nardi (2008a) genauer.

3.2.1. Die Relevanz von Visualisierungen

Ein Teil der Studie beschäftigt sich mit der Relevanz von Visualisierungen beim Erlernen von mathematischen Themen. Studierende haben häufig eine unsichere Beziehung zu visuellen Darstellungen von mathematischen Inhalten. Oftmals treten Schwierigkeiten dabei auf, die formellen Definitionen mit visuellen Darstellungen zu verbinden. Im folgenden wird ein Fokus auf die Einstellung von Studierenden sowie den Einfluss von Lehrenden hinsichtlich graphischer Darstellungen gelegt. Dabei soll gezeigt werden, wie Lehrende nicht nur die Verwendung von Visualisierungen beeinflussen, sondern auch Brücken zwischen informellen und formalen Denkweisen schaffen können.

Die Studie hat gezeigt, dass sich Studierende oftmals unsicher beim Verwenden von graphischen Darstellungen fühlen und auch daran zweifeln, ob diese in die Welt der Mathematik gehören. Ein Grund dafür kann sein, dass Studierende mit Mathematik ausschließlich lange Sequenzen an Symbolen assoziieren. Ein weiterer Grund könnten wenig ausgeprägte geometrische Fähigkeiten sein.

Aus den Interviews wurde weiters ersichtlich, dass eine gewisse Hemmnis zwischen formellen und informellen Denkmodellen besteht. Studierende glauben meist, dass sie entweder formell oder informell Argumentieren müssen. Es muss das sichere Wechseln zwischen der Außenwelt und der mathematischen Welt erlernt und gefördert werden, um eine gewisse Flexibilität der

Zugänge zu erreichen.

Mathematiker:innen haben mithilfe der Sichtweisen der Studierenden und ihren eigenen Vorstellungen zum Umgang mit graphischen Darstellungen folgende vier Punkte formuliert:

1. Graphische Darstellungen sind hilfreich, wenn diese eindeutig und verständlich sind.
2. Elektronische Hilfsmittel sollen als Unterstützung genutzt werden, jedoch mit einer gewissen Behutsamkeit.
3. Studierende verbessern durch regelmäßigen Umgang mit graphischen Darstellungen die Qualität ihrer Visualisierungen.
4. In der fachdidaktischen Lehre an Universitäten ist das Konzept von Visualisierungen nicht klar definiert und lässt somit Spielraum für Interpretationen.

Wir beschäftigen uns im weiteren Verlauf mit den letzten beiden Punkten [3](#) und [4](#).

Studierende gehen unterschiedlich mit dem Einsatz von graphischen Darstellungen um. Sie stellen Beziehungen zu den Grafiken her oder verwenden sie als Stütze für ihren Denkprozess. Betrachten wir nun ein ausgewähltes Beispiel der Studie sowie Schlussfolgerungen der Autorin.

Einer der befragten Professoren stellte den Studierenden folgende Aufgabe:

Write down a careful proof of the following useful lemma sketched in the lectures.
If b_n is a positive sequence (for each n , $b_n > 0$) that converges to a number $s > 0$, then the sequence is bounded away from 0: there exists a number $r > 0$ such that $b_n > r$ for all n . (Hint on how to start: Since $s > 0$, you might take $\frac{1}{2}s = \varepsilon > 0$ in the definition of convergence.) (Nardi [2008b](#), S.51)

Folgende Musterlösung wurde von dem Professor für die Aufgabe [3.2.1](#) formuliert:

Let $\varepsilon = \frac{s}{2}$ in the definition of convergence. Then there is an N such that $n > N \Rightarrow |b_n - s| < \frac{s}{2} \Rightarrow b_n \geq \frac{s}{2}$. Then, for any n , $b_n \geq r = \min\{b_1, \dots, b_N, \frac{s}{2}\}$ which is the minimum of finitely many positive quantities, hence is positive.
(Nardi [2008b](#), S.52)

Drei Möglichkeiten, um Bezug zu Bildern bzw. Visualisierungen herzustellen:

Nardi stellte mithilfe der gesammelten Daten fest, dass es drei Arten gibt, wie Studierende einen Bezug zu Bildern aufbauen können. Wir präsentieren diese drei Möglichkeiten mit Lösungsvorschlägen [3.2.1](#) von Studierenden und Äußerungen von Mathematiker:in "M".

3. Ausgewählte empirische Arbeiten zu Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

Die erste Proband:in *student N* verwendete keine Visualisierung um die Aufgabenstellung 3.2.1 zu beantworten. Sie stellte eine Folge auf siehe Abbildung 3.3 und übersah dabei, dass auch der Folgenanfang berücksichtigt werden muss. "M" ist der Ansicht, dass die Person mithilfe einer Grafik, vermutlich gemerkt hätte, welche Folgenglieder vergessen wurden.

$$\begin{aligned} \{b_n\} \text{ is positive } \forall n \quad b_n > 0 &\rightarrow s > 0 \\ \text{prove } \exists r > 0 \text{ such that } b_n > r \quad \forall n. \\ \text{Definition of convergence for this sequence:} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N: n \geq N, |b_n - s| < \varepsilon \\ \text{chose } \varepsilon = \frac{1}{a} s > 0 \\ \text{then } \varepsilon: |b_n - s| < \frac{1}{a} s \quad \frac{1}{a} s < b_n < \frac{3}{a} s \\ \exists r (= \frac{1}{a} s) > 0 \text{ such that } b_n > r \quad \forall n \end{aligned}$$

Abbildung 3.3.: Antwort student N; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.195)

Die zweite Proband:in *student H* verwendete die Veranschaulichung in Abbildung 3.4, die in der Vorlesung behandelt wurde. Die Darstellung war für die Studierende wenig hilfreich, da sie eine genauere bzw. individuellere Erklärung benötigt hätte.

"M" stellt fest, dass die beiden Studierenden N und H, an der Idee festhielten, den Betrag als *Distanz zwischen Dingen* zu deuten.

Die dritte Proband:in *student E* zeichnete eine Grafik 3.5 basierend auf Hinweisen aus der Vorlesung. Das Diagramm unterstützte die Studierende kaum, ihre Ausarbeitung ist rein formal und bezieht sich nicht auf die Grafik. Offensichtlich fehlte die Verbindung zwischen der Darstellung und dem angeführten Beweis.

3.2. Visualisierungen und informelle Darstellungen

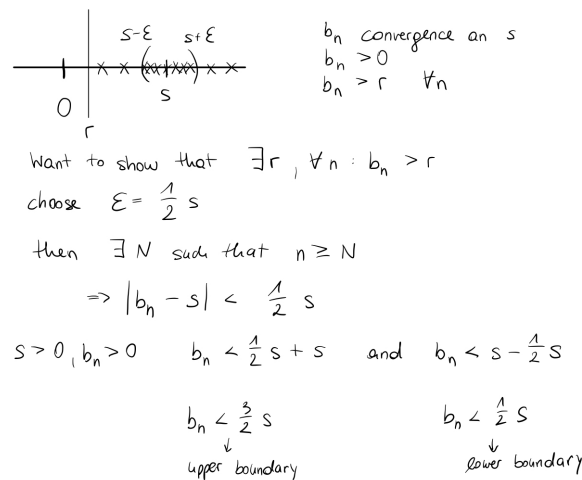
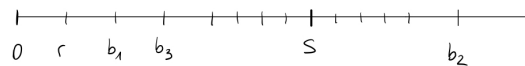


Abbildung 3.4.: Antwort student H; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.195)

If (b_n) is a positive sequence ($b_n > 0 \forall n$) that converges to a number $s > 0$, then the sequence is bounded away from zero; there exists a number $r > 0$, $b_n > r$ for all n .



$$b_n \rightarrow s.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n \geq N \Rightarrow |b_n - s| < \varepsilon.$$

$$\frac{1}{2} S = \mathcal{E} > 0.$$

$$|b_n - s| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$b_n < \frac{1}{2}S + S$$

$$b_n < 1\frac{1}{2} \text{ s}$$

Abbildung 3.5.: Antwort student E; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.196)

3. Ausgewählte empirische Arbeiten zu Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

Zwei Möglichkeiten, um Graphen als Stütze zu verwenden:

Bei einer weiteren Aufgabe sollten die Studierenden entscheiden, ob ausgewählte Funktionen von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

Die Aufgabe lautete wie folgt:

For each of the following functions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decide wheter it is one-to-one, onto (or both, or neither). Give brief explanations for your answers.

(i) $f_1(x) = \sin(x) + \cos(x)$

(ii) $f_2(x) = 7x + 3$

(iii) $f_3(x) = e^x$

(vi) $f_4(x) = x^3$

(v) $f_5(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(Nardi [2008b](#), S.141)

Im folgenden präsentieren wir Antworten von zwei Studierenden, in denen sie laut "M" für die Beantwortung der Aufgabe [3.2.1](#) typische Beweise mithilfe von Graphen anführen.

Die Bearbeitung durch *Student WD* zeichnet sich durch die fehlende Verbindung zwischen dem Graphen und der geschriebenen Erklärung aus, siehe Abbildung [3.6](#). "M" ist der Meinung, dass die Antwort vor dem Zeichnen des Graphen formuliert wurde. Weiters geht "M" davon aus, dass der Graph doch eine gewisse Rolle bei der Problemlösung spielte, da die Erklärung durchgestrichen und ergänzt wurde. Es kann jedoch nicht mit Sicherheit gesagt werden, ob der Graph Einfluss auf die Argumente von *student WD* hatte. "M" ist über den Gebrauch des Graphen ein wenig enttäuscht.

"M" ist hingegen über den Graphen und die Antwort von *student LW* erfreut. Der Graph [3.7](#) ist fast perfekt, da laut "M" nur noch Kleinigkeiten für eine exakte Antwort fehlen.

"M" betont mehrfach die Ironie beim Verwenden von Graphen um eine Problemstellung zu beantworten. Die Fähigkeit diesen Graphen zu konstruieren setzt das entsprechende Fachwissen bereits voraus. Die Lernenden sollen laut "M" bestärkt werden, Graphen als Unterstützung, aber vor allem auch fachlich korrekt zu verwenden.

"M" wäre noch zufriedener, wenn mithilfe der Daten nachgewiesen werden könnte, dass die Studierenden die Diagramme neben Worten und Symbolen als dritte Art von Sprache verwenden.

3.2. Visualisierungen und informelle Darstellungen

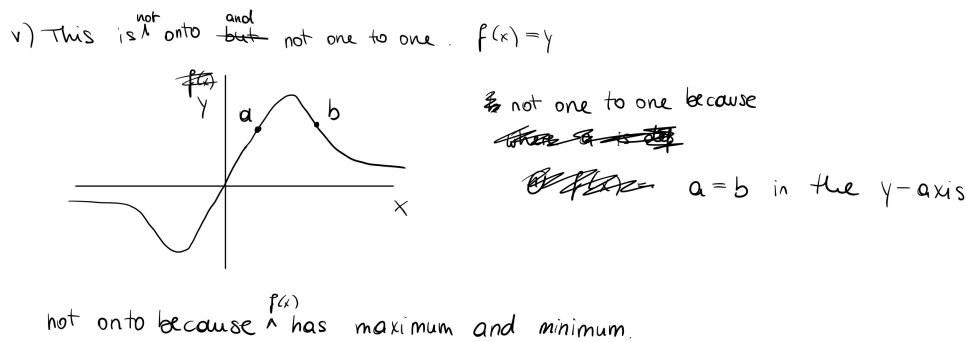


Abbildung 3.6.: Antwort student WD; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.141)

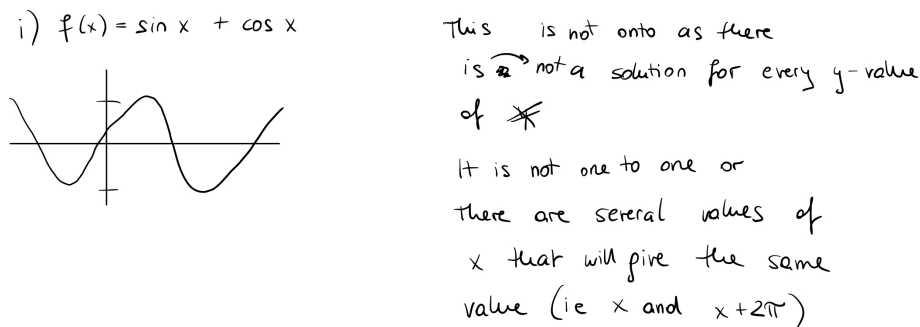


Abbildung 3.7.: Antwort student LW; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.142)

"M" ist der Ansicht, dass Studierende häufig nicht die Kraft der graphischen Darstellungen erkennen und somit nicht das vollständige Potenzial nutzen.

Dabei sollen sie bewusste Wechsel zwischen dem formellen und dem informellen Zugang durchführen. Dieser Übergang vgl. 1.3.1 von analytischer Strenge zu oftmals visuellen Intuitionen und umgekehrt, muss erlernt werden. Deswegen sollen Lehrende die Lernenden aktiv beim Aufbau eines Bewusstseins für Visualisierungen und dem Erstellen von eigenen Darstellungen unterstützen. Die Studierenden müssen verstehen, dass es sich hier um ihre eigenen Bilder handelt und Darstellungen aus der Vorlesung nur als Grundlage dienen. Weiters soll ihnen klar gemacht werden, dass diese graphischen Darstellungen eine wichtige Unterstützung und keine vollständigen Beweise darstellen.

3. Ausgewählte empirische Arbeiten zu Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

Lehrende sollen ebenfalls bewusster auf die Verwendung von graphischen Darstellungen achten und die Rückmeldungen der Studierenden miteinbeziehen. Sie sollen die unterstützende Rolle von Visualisierungen thematisieren und das Darstellen mit den Lernenden üben. Eine Vernetzung von Fachmathematik und Fachdidaktik ist hierbei wünschenswert.

Mit diesen Überlegungen als Basis kann die Professionalität und das Verständnis für die Verwendung von graphischen Darstellungen gesteigert werden. Die Lehrenden bekommen somit auch einen besseren Einblick in das Verständnis der Lernenden.

3.3. Fehlvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Im folgenden Abschnitt diskutieren wir einige Aspekte des Artikels von Bender (1991, S.238-243). Bender analysiert häufige Fehlvorstellungen von Studierenden und Schüler:innen zum Grenzwertbegriff. Er äußert sich dabei sehr kritisch im Hinblick auf deren mögliche Ursachen sowie gängige didaktische Probleme im Umgang mit dem Thema. In diesem Abschnitt möchten wir seine Argumente und Sichtweisen kurz zusammenfassen.

Der klassische Analysisunterricht in der Schule baut auf den Themen der Folgen und des Grenzwertes auf und führt auf dieser Basis in Richtung Stetigkeit, Differentiation und Integration. Bender ist der Ansicht, dass viele Lehrpersonen ihren Fokus auf die letzten beiden Themen legen und somit die aufbauende Thematik häufig sehr komprimiert unterrichten. Grund dafür könnten laut Bender der große Unterrichts-Misserfolg in den Gebieten von Folgen und Stetigkeit sein. Somit wird häufig ein größerer Fokus auf die Themengebiete Differentiation und Integration gelegt. Die Schwerpunktsetzung hängt von den Kompetenzen und dem Fachwissen der Lehrpersonen ab. Durch die vernachlässigte Thematisierung der Gebiete Folgen und Stetigkeit, kommt es daher oftmals zu falschen bzw. unpassenden Vorstellungen von zentralen Begriffen und Fragestellungen der Analysis.

Bender vermutet, dass die dynamische Vorstellung von Folgen zu Fehlvorstellungen und Fehlverständnissen des Grenzwertbegriffs führen kann. Die Vorstellung soll seiner Ansicht nach nicht vollkommen vermieden werden, da sie einen geeigneten Einstieg in die Thematik bildet und auch bei Anwendungen förderlich ist. Beim Erlernen des Grenzwertbegriffs gibt es zufolge Bender jedoch eine Entwicklungsstufe, in der die dynamische Vorstellung irreführend ist. Somit braucht es einen festgelegten Übergang zur statischen Sichtweise. Er ist der Meinung, dass der Analysisunterricht die Aufgabe hat, die Schüler:innen im Lernprozess zu unterstützen, sodass sie in gewissen Phasen die dynamische Vorstellung ausblenden und später wieder einblenden können.

3.3. Fehlvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Ein weiteres Verständnisproblem stellt die formale Definition des Grenzwertes dar. Die Lernenden haben oft Probleme die Bedeutung der symbolischen Schreibweise zu verstehen. Bender ist der Ansicht, dass zu Beginn die ausformulierte Definition nachvollziehbarer ist *"... falls in jeder noch so kleinen Umgebung von a , alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen."*

Darüber hinaus gibt es aber noch weitere Fehlerquellen. Viele Lernende vertreten die Vorstellung, dass eine Folge ein letztes Glied, das Folgenglied " ∞ ", besitzt. Bender begründet diese Fehlvorstellung durch die bedenkenlose Übernahme von mathematischen Rede- und Schreibweisen im Unterricht sowie die mangelnde Sorgfalt im Aufbau der Grundvorstellungen und des Verständnisses. Auch einige Lehramtsstudierende vertreten die Vorstellung eines letzten Folgenglieds " ∞ " einer Folge. Diese Überzeugungen gehen laut Bender auf die Schulzeit, genauer auf schlecht ausgebildete Grundvorstellungen und die Art wie mit dem Symbol " ∞ " umgegangen wird, zurück.

Problematisch ist auch die doppelte Bedeutung von " $\lim$ ". Aus Sicht der dynamischen Vorstellung bezieht sich der Ausdruck auf die Durchführung eines Grenzprozesses sowie auf den resultierenden Grenzwert. Laut Bender wird diese Betrachtungsweise beim Durchlaufen einer divergenten Folge fraglich. Durch die prozesshafte Denkweise lehnen viele Lernende die Gleichheit von z.B. $0, \overline{9} = 1$ ab. Die Darstellung erfordert ein höheres Niveau an Verständnis und den Wechsel zur statischen Sichtweise.

Weiters besitzen Folgen, die aus Permutationen von Gliedern konvergenter Folgen gebildet werden, den gleichen Grenzwert. Auch hier führt die dynamische Sichtweise zu Problemen im Verständnis.

Abschließend lässt sich sagen, dass Bender Problemstellungen wie z.B. $0, \overline{9} = 1$ für sehr wichtig im Schulunterricht hält. Er ist der Meinung, dass Schüler:innen durch das Diskutieren von solcher Aufgabenstellungen, Fähigkeiten für infinitesimales Denken üben und festigen. Angehende Lehrer:innen sollen aus seiner Sicht genau diese Kompetenzen und Grundvorstellungen zum Folgen- und Grenzwertbegriff besitzen. Die Lehrkraft soll somit selbst keine Fehlvorstellungen haben und diese auch bei Schüler:innen nicht provozieren.

Teil II.

Empirischer Teil

4. Forschungsvorhaben

Der zweite Teil dieser Masterarbeit setzt sich mit einer empirischen Studie auseinander, die an der Fakultät für Mathematik (Universität Wien) durchgeführt wurde. Die Fragestellungen der Studie beschäftigen sich mit Grundvorstellungen von Lehramtsstudierenden zu Grundbegriffen der Analysis. Die umfassende Analyse sämtlicher Aspekte der Studie würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weshalb wir unseren Schwerpunkt auf den Grenzwertbegriff von Folgen legen.

Die Daten dieser empirischen Studie wurden im Wintersemester 2022 von Roland Steinbauer und Sonja Kramer zu Beginn ihrer Schulmathematik Analysis Vorlesung im September 2022 und am Ende dieser Vorlesung im Jänner 2023 erhoben. Ziel dieser Auswertung ist es, die Grundvorstellungen von Lehramtsstudierende zum Grenzwertbegriff von Folgen zu ermitteln und herauszufinden, ob die Qualität dieser Aussagen durch die Teilnahme an der Schulmathematik Vorlesung verbessert werden konnte. Eine Vorstudie wurde bereits mit Daten aus dem Studienjahr 2018/19 durchgeführt vgl.(Ableitinger, Götz, and Steinbauer 2022).

Im kommenden Abschnitt werden zunächst die anfänglich aufgestellten Forschungsfragen und Hypothesen erläutert. Im Anschluss daran wird der genaue Ablauf der Studie sowie die darauf folgende Auswertung ausführlich beschrieben. Nachfolgend präsentieren wir eine allgemeine Darstellung der Ergebnisse unserer Analyse, gefolgt von einer detaillierten Darstellung der einzelnen Kategorien.

Anschließend wird eine eingehende Diskussion über die Qualität von einzelnen Aussagen der Studierenden geführt, wobei besonders interessante Aspekte hervorgehoben werden. Im weiteren Verlauf werden spannende Zusammenhänge, die sich aus den Äußerungen der Studierenden ergeben, näher betrachtet und in Bezug zu den aufgestellten Hypothesen gesetzt. Dabei wird auch die Thematik der visuellen und fehlerhaften Vorstellungen zum Grenzwertbegriff von Folgen eingehend erörtert.

Abschließend erfolgt eine umfassende Zusammenfassung der Analyse, die sowohl die gewonnenen Erkenntnisse als auch etwaige Einschränkungen der Studie diskutiert.

4. Forschungsvorhaben

4.1. Forschungsfragen

Im Rahmen dieser empirischen Auswertung werden wir uns mit den folgenden Forschungsfragen auseinandersetzen:

- F1: Welche Vorstellungen äußern Studierende im Lehramt nach dem Besuch der fachlichen Lehrveranstaltung „Analysis in einer Variable für das Lehramt“ zum Grenzwertbegriff (einer Folge) und wie lassen sich diese kategorisieren?
- F2: Wie verändern sich diese geäußerten Vorstellungen durch die fachdidaktische Lehrveranstaltung „Schulmathematik Analysis“, in der (normative) Grundvorstellungen zum Grenzwert einer Folge explizit thematisiert werden?

Diese Fragen bilden die Grundlage unserer Untersuchung und dienen dazu, relevante Erkenntnisse sowie Zusammenhänge zwischen den beiden Befragungszeitpunkten zu ermitteln.

4.2. Hypothesen

In diesem Abschnitt präsentieren wir Hypothesen, die sich sowohl auf die Häufigkeit als auch auf die qualitative Ausprägung der einzelnen Grundvorstellungen und Aspekte zum Grenzwertbegriff von Folgen beziehen. Einige Hypothesen behandeln ebenso die Veränderungen der Äußerungen zwischen den beiden Zeitpunkten. Diese Hypothesen wurden auf Basis theoretischer Überlegungen und einer ersten Analyse des Auftretens der verschiedenen Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff von Folgen formuliert.

- H1: Äußerungen, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet werden können, zeigen eine höhere Häufigkeit als Vorstellungen, die der Umgebungs- oder Objektvorstellung zugeordnet werden können.
- H2: Die Qualität der Äußerungen, die der Umgebungsvorstellung zugeordnet werden können, steigt vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt.
- H3: Äußerungen zur Objektvorstellung treten nur in unspezifischer Ausprägungsqualität auf.
- H4: Die Häufigkeit von Äußerungen mit fehlerhaften Grundvorstellungen nimmt vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt ab.
- H5: Studierende mit qualitativ hohen Annäherungsvorstellungen absolvieren die Fachprüfung Analysis mit Sehr Gut oder Gut.

4.2. Hypothesen

- H6: Studierende mit qualitativ hohen Umgebungsvorstellungen absolvieren die Fachprüfung Analysis mit Sehr Gut oder Gut.
- H7: Die Qualität der Studierendenäußerungen korreliert mit der Schulform, in der die Studierenden unterrichten möchten.
- H8: Die Qualität der Studierendenäußerungen korreliert mit den bisherigen Unterrichtserfahrungen.

5. Forschungsmethoden

5.1. Das Umfeld der Studie

Der Verbund *Nord-Ost*, bei dem die Universität Wien mit den pädagogischen Hochschulen in Wien und Niederösterreich zusammenarbeitet, bietet seit dem Studienjahr 2016/17 das Lehramtsstudium Mathematik für beide Sekundarstufen aller Schulformen an. Laut Curriculum werden alle fachmathematischen Vorlesungen und Übungen für Lehramtsstudierende getrennt von den Fachstudierenden angeboten. Weiters sieht das Curriculum einige Schulmathematik Vorlesungen zu zentralen Fachvorlesungen, wie Geometrie und lineare Algebra, Analysis und Stochastik, vor. Es steht den Schulmathematik Vorlesungen frei, sich auf die jeweiligen Fachvorlesungen zu beziehen, jedoch ist dies nicht zwingend erforderlich. Von Bedeutung ist vielmehr, dass schulrelevante Standpunkte entsprechend thematisiert werden. Die zu erwerbenden Kompetenzen sind im Curriuculum wie folgt festgelegt:

Die Studierenden erkennen die Relevanz der fachmathematischen Konzepte für den Schulunterricht und können diese dort angemessen verwenden. Sie kennen verschiedene Möglichkeiten für Zugänge zu grundlegenden Themen des Geometrie-Schulunterrichts und der Vektorrechnung im Unterricht und können diese bewerten. Die Studierenden können in diesem Gebiet fachdidaktische Konzepte anwenden und den Computer in angemessener Weise einsetzen, sie kennen typische Fehlvorstellungen und passende Interventionsmöglichkeiten (vgl. Curriculum Lehramt Mathematik Universität Wien (2022)).

Die jeweiligen Schulmathematik Vorlesungen finden immer im darauffolgenden Semester, nach dem Besuch der Fachvorlesungen, statt. Dieser Ablauf beabsichtigt, eine inhaltliche Verzahnung herzustellen (Ableitinger and Steinbauer 2022).

5.1.1. Ablauf der Studie 2018/19

Im Studienjahr 2018/19 wurde die Schulmathematik Analysis Vorlesung von Fachmathematiker Roland Steinbauer und Fachdidaktikerin Evelyn Süss-Stepancik gemeinsam gelesen. Die beiden

5. Forschungsmethoden

erstellten ein neues Konzept für die Schulmathematik Vorlesung, in dem sie bewusst fachliche und fachdidaktische Inhalte verknüpften. Die beiden setzten einen weiteren Schwerpunkt auf die Reflexion von fachlichen Inhalten und unterrichtspraktischer Denkprozesse als Weiterentwicklung von Götz (2013) siehe Kapitel 1.3.1. Betrachten wir nun die Methoden der Vorlesung zum Grenzwertbegriff von Folgen genauer.

In der Vorlesung wurde der Begriff des Grenzwerts mithilfe des Iterationsprozesses erarbeitet. Anschließend wurden der statische und der dynamische Aspekt sowie die Grundvorstellungen nach Greefrath et al. (2016, Abschnitt 3.5.2) diskutiert. Die beiden Vortragenden stellten Unterrichtszugänge vor und thematisierten die Begriffe des potentiell und des aktual Unendlichen im Hinblick auf die drei Grundvorstellungen. Ein wichtiger Punkt stellte die *"Entzauberung des Unendlichen"* durch die statische ε - N -Definition dar (Ableitinger, Götz, and Steinbauer 2022, S.10). Gleichzeitig wurde in den Übungen parallel zur Vorlesung auf die korrekte Formulierung der Grenzwertdefinition eingegangen. Des Weiteren wurden Auszüge aus Schulbüchern thematisiert sowie Fehlvorstellungen zum Grenzwertbegriff besprochen.

Im Rahmen des hochschuldidaktischen Projekts BELLA (Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis) führten die Autoren Ableitinger, Götz und Steinbauer (2022) in Kooperation mit Fachdidaktier:innen der Universität Wien und der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich, eine Studie mit Lehramtsstudierenden durch. Die Studierenden wurden während des Wintersemesters 2018/19 gebeten, sowohl zu Beginn als auch am Ende der Schulmathematik Analysis Vorlesung einen Fragebogen auszufüllen. Die Antworten auf die Frage *"Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ..."* wurden von den drei Mathematikern kategorisiert, analysiert und daraufhin mit den Noten der Fachvorlesung in Beziehung gesetzt. Alle relevanten Informationen zum Fragebogen wurden in Abbildung 5.1 detailliert dargestellt.

In dieser Arbeit fokussieren wir auf eine Nachfolgestudie, die unter sehr ähnlichen Bedingungen im Studienjahr 2022/23 durchgeführt wurde. Die Ergebnisse dieser ersten Studie im Jahr 2018/19 werden wir am Ende dieser Arbeit mit den neu gewonnenen Erkenntnissen in Beziehung setzen.

5.2. Ablauf der Studie 2022/23

Im Wintersemester 2022/23 wurde die Schulmathematik Analysis Vorlesung von Fachmathematiker Roland Steinbauer und Fachdidaktikerin Sonja Kramer wieder im Team gehalten. Das Konzept war ähnlich wie im Wintersemester 2018/19 siehe Abschnitt 5.1.1 und fokussierte sich dabei auf die bewusste Vernetzung von fachlichen und fachdidaktischen Inhalten. Das Skriptum

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist laut aktuellen Forschungsbefunden die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind; es geht also um die „Bilder im Kopf“.

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern.

Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Abbildung 5.1.: Der für die Studie relevante Abschnitt des Fragebogens

der vorherigen Vorlesung wurde überarbeitet und auch in dieser Vorlesung verwendet vgl. (Kramer and Steinbauer 2023). Ein Unterschied bestand darin, dass Roland Steinbauer im Sommersemester 2022 auch die Fachvorlesung Analysis für das Lehramt hielt. Das war neben dem Wechsel der Fachdidaktikerinnen, der bemerkenswerteste Unterschied.

Wie in der Studie zuvor, wurden die Studierenden während des Wintersemesters 2022/23 darum gebeten, sowohl zu Beginn als auch am Ende der Schulmathematik Analysis Vorlesung denselben Fragebogen wie im Studienjahr 2018/19 auszufüllen. Die operative Durchführung der Befragung wurde von den Fachdidaktiker:innen Arabella Denk und Felix Woltron von der Universität Wien übernommen. Die Daten für die Analyse in dieser Masterarbeit stammen aus dem Wintersemester 2022/23 und werden in den nächsten Kapiteln näher dargestellt.

5.3. Gewinnung der Daten

Die Studie wurde im Prä-Post-Design durchgeführt. Das bedeutet, dass die Studierenden an zwei Zeitpunkten eingeladen wurden, einen Fragebogen auszufüllen. Der erste Teil *Fragebogen A*, siehe Anhang 4, wurde von den Studierenden in der ersten Schulmathematik Analysis Vorlesung im Herbst 2022 ausgefüllt, nachdem die Proband:innen die Fachvorlesung Analysis für das Lehramt besucht hatten. Dieser Teil der Umfrage umfasste Fragen zu Vorstellungen von Kernbegriffen der Analysis. Weiters wurde zu diesem Zeitpunkt ein weiterer Fragebogen zum fachlichen Wissen zu Konzepten der Analysis erhoben. Zum Schluss sollten die Studierenden ihre Noten der Vorlesungsprüfung *Analysis in einer Variable für das Lehramt* angeben, sofern sie

5. Forschungsmethoden

das Kolloquium zur Vorlesung bereits absolviert hatten.

Am Ende des Semesters wurde in der Schulmathematik Analysis Vorlesung der zweite Teil *Fragebogen B*, siehe Anhang 4, erhoben. Dieser Fragebogen war ident mit *Fragebogen A* und umfasste erneut Fragen bezüglich der Vorstellungen von Kernbegriffen der Analysis.

Die Fragebögen wurden danach sortiert und geordnet. Dabei ergab sich eine verbundene Stichprobe ($n = 25$) aus der Gesamtheit aller Proband:innen, welche die Fragebögen zu beiden Zeitpunkten ausgefüllt hatten.

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts erwähnt wurde, wird sich die Auswertung in dieser Masterarbeit auf die Fortsetzung des Schreibimpulses "*Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...*", siehe Abbildung 5.1, fokussieren. Die Fragestellungen bzw. die Schreibimpulse wurden so formuliert, dass die individuellen Vorstellungen der Proband:innen zu den jeweiligen Begriffen bestmöglich hervorgerufen werden konnten. Im Einleitungstext des Fragebogens, siehe Abbildung 5.1, wurde explizit erwähnt, dass die Fragen keine Prüfungsfragen darstellen und nur darauf abzielen, die jeweiligen Vorstellungen zu Kernbegriffen der Analysis erfassen zu können.

Im Laufe der Schulmathematik Analysis Vorlesung wurden die drei Grunvorstellungen zum Grenzwertbegriff siehe Abschnitt 2.2 thematisiert und diskutiert. Dabei wurde aber nie eine *allgemein richtige Grundvorstellung* vorgestellt, sondern die respektiven Vor- und Nachteile der einzelnen Grunvorstellungen diskutiert und diese mit den Aspekten in Verbindung gesetzt. Die Formulierung des Schreibimpulses strebte nach individuellen Antworten der Proband:innen und beabsichtigte nicht die Reproduktion von Konzepten aus der Vorlesung. Selbstverständlich ist es bei solchen Fragestellungen nicht möglich, sozial erwünschte Antworten vollständig zu vermeiden. Des Weiteren ist es nicht zwingend erforderlich, dass sämtliche Vorstellungen der Studierenden in ihrer Gesamtheit ersichtlich werden. Einige Proband:innen setzten den Satz zudem mithilfe einer Skizze fort.

6. Datenauswertung und -verarbeitung

Die vorliegende Studie umfasst eine ausführliche Analyse zu den Grundvorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff von Folgen. In diesem Abschnitt möchten wir die Codierung der Fragebögen sowie die Codierung und Kategorisierung der Studierendenäußerungen darstellen. Dabei stellen wir den verwendeten Codierleitfaden vor, welcher bereits im Wintersemester 2018/19 für die Auswertung erstellt wurde. Zur Bewertung der Reliabilität der Beurteilungen der Antworten wurde das Cohen's Kappa, welches im Folgenden kurz erläutert wird, berechnet.

6.1. Codierung der Fragebögen

Aufgrund des Forschungsdesigns, wurde der fachdidaktische Teil des Fragebogens an zwei Zeitpunkten erhoben. Um die zugehörigen Fragebögen der einzelnen Proband:innen identifizieren zu können und die Anonymität zu wahren, füllten die Studierenden einen persönlichen Code aus. Der Code setzte sich aus den ersten zwei Buchstaben des Vornamens der Mutter, den ersten zwei Ziffern des Geburtstags der Mutter und den ersten beiden Ziffern des eigenen Geburtstags zusammen. Abbildung 6.1 zeigt die genaue Anleitung zur Erstellung des individuellen Codes. Mittels diesem persönlichem Code wurden die entsprechenden Stichproben zusammengeführt. Insgesamt wurden 25 verbundene Fragebögen identifiziert, welche als Grundlage für die weitere Analyse dienen.

6.2. Codierung der Studierendenäußerungen

Wie bereits zu Beginn des Kapitels erwähnt, haben Ableitinger, Götz und Steinbauer (2022) im Jahr 2018 bereits eine ähnliche empirische Studie zu den Grundvorstellungen von Lehramtsstudierenden durchgeführt, vgl. Abschnitt 5.1.1. Dabei wurden die Studierendenäußerungen den Grundvorstellungen von Greefrath et al. 2.2 zugeordnet. Diese Grundvorstellungen stellen das angestrebte Ziel für den Lernprozess des Grenzwertbegriffs dar, siehe Kapitel 2.2.4. Innerhalb der jeweiligen Grundvorstellung wurden die Aussagen nach ihrer Qualität gereiht und mit einem

6. Datenauswertung und -verarbeitung

Wir möchten diese Befragung am Ende des Wintersemesters in dieser Lehrveranstaltung wiederholen (Fragebogen 1B) und die Ergebnisse abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen mit einem Code zu versehen. Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!

Der persönliche Code setzt sich aus folgenden sechs Zeichen zusammen:

- (a) Bitte geben Sie die ersten zwei Buchstaben des Vornamens Ihrer Mutter an.
- (b) Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern des Geburtstags Ihrer Mutter an (Bitte zweistellig als z.B. „05“ für „5“).
- (c) Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern Ihres eigenen Geburtstags an.

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtsstag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtsstag: erste zwei Ziffern	
Code	A	N	0	1	1	1

Abbildung 6.1.: Persönlicher Code Fragebogen

Code bewertet. Für eine unspezifische Aussage wurden null Punkte vergeben, während Fehlvorstellungen mit F und einem Punkt bewertet wurden. Die weiteren Grundvorstellungen wurden mit einem bis vier Punkten bewertet, wobei vier die höchste und somit auch beste Bepunktung innerhalb einer Grundvorstellung darstellt. Die Autoren entwickelten für diese Kategorisierung einen Codierleitfaden, siehe Abbildung [6.2](#).

Der Codierleitfaden in Abbildung [6.2](#) ist in Form einer Tabelle dargestellt und umfasst die drei Grundvorstellungen unterteilt in die jeweiligen Ausprägungsqualitäten (von Unspezifisch bis zu vier Punkten). Die Autoren haben für den Codierleitfaden Studierendenäußerungen aus den Fragebögen 2018/19 induktiv ermittelt. Die Kategorien, die nicht ausdrücklich erwähnt wurden, wurden durch normative Vorstellungen (in kursiv geschrieben) ergänzt. Vor allem Äußerungen, die der Objektvorstellung zuzuordnen sind, wurden zum Zeitpunkt der ersten Studie kaum von den Studierenden genannt. Diese Beispielformulierungen im Codierleitfaden wurden mithilfe einer Sachanalyse formuliert. Die Autoren analysierten dabei in welchem Ausmaß die Vorstellungen der mathematischen Charakterisierung des Grenzwertbegriffs entsprechen.

Folgende Abkürzungen werden im Codierleitfaden für den Grenzwert und dessen Grundvorstellungen verwendet:

AV ... Annäherungsvorstellung

UV ... Umgebungsvorstellung

OV ... Objektvorstellung

GW ... Grenzwert

6.3. Interrater-Reliabilität

Um die Zuverlässigkeit zu gewährleisten, wurden die Antworten gemäß des Codierleitfadens, vgl. Abbildung 6.2, von der Autorin dieser Arbeit, Lisa Paradeisz, und Roland Steinbauer unabhängig voneinander kategorisiert und bewertet. Die absoluten Häufigkeiten der Ausprägungsqualitäten wurden anschließend mithilfe einer Kreuztabelle dargestellt. Für diese Daten wurde die *interrater-reliability* berechnet. Das Cohens Kappa erzielte einen Wert von 0,755113. Dieser Wert repräsentiert eine "*beachtliche Übereinstimmung*". Durch die Anwendung von Cohen's Kappa wurde die Zuverlässigkeit der Auswertung bestätigt, wodurch die von der Autorin codierten Ergebnisse für die weitere Berechnungen verwendet und präsentiert werden können vgl. (Döring 2023, S.562).

6. Datenauswertung und -verarbeitung

Code/ Kategorie	Qualität der Ausprägung	Beispielformulierungen AV	Beispielformulierungen UV	Beispielformulierungen OV
U	Unspezifisch (Antwort ermöglicht keinen Zugriff auf die Vorstellung)	Wert, der angestrebt wird	<i>Folenglieder liegen um den GW</i>	Limes; eine Zahl
1 (F)	Fehlvorstellung erkennbar	Grenze für Annäherung (Stoppschild); erreichen diesen nie	in Umgebung liegen die meisten Folgenglieder	das Ende einer Folge
1	GV naiv ausgedrückt	nähert sich im Unendlichen an	alle Folgenglieder müssen nahe am GW liegen und dort hineinpassen	<i>Ziel einer Folge</i>
2	GV schwach ausgeprägt/ungenau formuliert	kommt immer näher; nähert sich (mit wachsendem n) an	ab einem n bleiben alle Folgenglieder in einer Umgebung	<i>Zahl, deren Nachkommastellen man mit der Folge berechnen kann</i>
3	GV vorhanden, nicht korrekt formuliert	kommt unendlich nahe	ab einem n bleiben alle Folgenglieder in jeder Umgebung	<i>Zahl, die durch die Folge auf beliebig viele Nachkommastellen angegeben werden kann</i>
4	GV klar ausgeprägt und adäquat formuliert	kommt schließlich beliebig nahe	in beliebig kleiner Umgebung liegen fast alle Folgenglieder	<i>Zahl, die durch diese Folge konstruiert ist</i>

Abbildung 6.2.: Codierleitfaden für die Qualität der Ausprägung der AV, der UV und der OV, *kursiv*: Beispielformulierungen, die nicht direkt aus den Studierendenantworten gewonnen wurden (GW steht für Grenzwert) (Ableitinger, Götz, and Steinbauer 2022, S.12)

7. Ergebnisdarstellung

In diesem Abschnitt betrachten wir die Ergebnisse der durchgeführten Studie. Zu Beginn präsentieren wir die absoluten sowie relativen Häufigkeiten des Auftretens der verschiedenen Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff von Folgen. Anschließend gehen wir auf die einzelnen Ausprägungen der drei Grundvorstellungen des Grenzwertbegriffs von Folgen (Annäherungs-, Umgebungs- und Objektvorstellung) ein. Dabei veranschaulichen wir die absoluten und relativen Häufigkeiten der jeweiligen Ausprägungsqualitäten. Im Anschluss daran präsentieren wir exemplarische Veränderungen der Grundvorstellungen und ihrer Ausprägungen vom ersten zum zweiten Zeitpunkt. Hierbei gehen wir auf einzelne Studierendenäußerungen ein. Anschließend beabsichtigen wir, die Zusammenhänge zwischen der Qualität der Äußerungen, den Noten, der präferierten Schulform und den bisherigen Unterrichtserfahrungen genauer zu untersuchen. Der Schreibimpuls im Fragebogen wurde von einigen Studierenden mithilfe von graphischen Darstellungen beantwortet. Diese werden wir nachfolgend in einem eigenen Abschnitt präsentieren und diskutieren. Zum Abschluss dieses Kapitels bieten wir noch einen Einblick in geäußerte Fehlvorstellungen zum Grenzwertbegriff von Folgen.

7.1. Allgemeine Auswertung

7.1.1. Absolute Häufigkeiten

Bevor wir in die Details eintauchen, werden wir zunächst einen Überblick über die wesentlichen Änderungen zwischen den beiden Zeitpunkten geben. Aufgrund der vergleichsweise allgemein formulierten Fragestellung "*Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...*", hatten die Studierenden die Möglichkeit, den Satz auf vielfältige Weise fortzusetzen. Unser Ziel bestand darin, die jeweiligen Grundvorstellungen zu erkennen und die Studierendenäußerungen nach ihrer Qualität zu bewerten. Der offene Aufbau der Fragestellung ermöglichte den Studierenden auch die Chance, innerhalb ihrer Antwort mehrere Grundvorstellungen zu äußern. Aus diesem Grund konnten wir beim Prätest 34 und beim Posttest 33 zuordenbare Grundvorstellungen finden.

In Tabelle [7.1](#) sind die Ergebnisse der absoluten und relativen Häufigkeiten der jeweiligen Grundvorstellungen aus dem Prä- sowie Posttest veranschaulicht.

7. Ergebnisdarstellung

	AV		UV		OV		Summe	
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
Prätest	21	62	5	15	8	23	34	100
Posttest	20	61	6	18	7	21	33	100

Tabelle 7.1.: Absolute und relative Häufigkeiten der Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff von Folgen

Vorstellungen, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurden, wurden 21 Mal (62%) im Prätest und 20 Mal (61%) im Posttest geäußert.

Vorstellungen, die der Umgebungsvorstellung zugeordnet wurden, wurden im Prätest fünf Mal (15%) und im Posttest sechs Mal (18%) genannt.

Vorstellungen, die der Objektvorstellung zugeordnet wurden, zeigten sich im Prätest bei acht (23%) und im Posttest bei sieben (21%) Studierendenäußerungen.

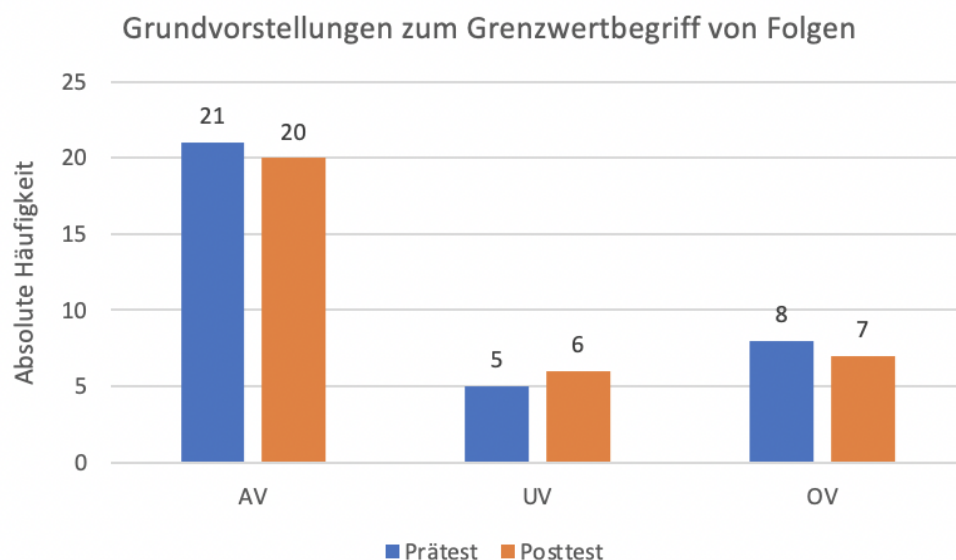


Abbildung 7.1.: Absolute Häufigkeiten der Grundvorstellungen

In Abbildung 7.1 wird ersichtlich, dass sowohl im Prä- als auch im Posttest die Annäherungsvorstellung am Häufigsten gefunden wurde und die Umgebungsvorstellung am seltensten. Die Ergebnisse unterstützen die zuvor aufgestellte Hypothese **H1**. Des Weiteren zeigt sich, dass die Äußerungen zur Annäherungs- und zur Objektvorstellung vom Prä- zum Posttest abgenommen haben, während die Umgebungsvorstellung im Posttest eine weitere Äußerung dazugewinnen

konnte. Diese Veränderung ist allerdings marginal, sodass wir eine gewisse Stabilität der Grundvorstellungen vermuten können. Aus den Äußerungen der Studierenden geht weiters hervor, dass der Großteil der Proband:innen zu beiden Zeitpunkten Äußerungen formulierte, die zur selben Grundvorstellung zugeordnet wurden. Nur einzelne Studierende wechselten kreuzweise zwischen den Grundvorstellungen.

7.1.2. Relative Häufigkeiten

Für einen genaueren Vergleich zwischen den beiden Zeitpunkten wurden die Häufigkeiten der jeweiligen Ausprägungsqualitäten im Verhältnis zur Gesamtzahl der Antworten mithilfe von Kreisdiagrammen dargestellt. Betrachten wir hierfür die Grafik [7.2](#) genauer, welche die relativen Häufigkeiten der Grundvorstellungen im Prätest zeigt. Zum ersten Zeitpunkt der Befragung äußerten mehr als die Hälfte der Proband:innen (62%) Antworten, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurden. Die zweithäufigste Gruppe der Proband:innen (22%) formulierte Äußerungen, die der Objektvorstellung zugeteilt wurden. Dabei handelte es sich bei allen Antworten um unspezifische Objektvorstellungen. Die kleinste Gruppe der Proband:innen (15%) formulierte Äußerungen, die der Umgebungsvorstellung zugeordnet wurden.

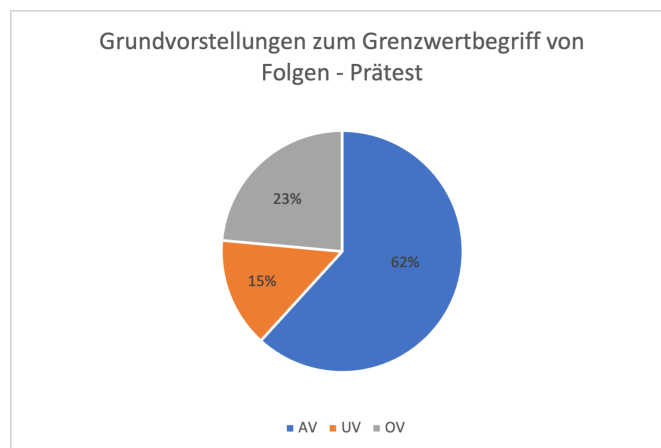


Abbildung 7.2.: Relative Häufigkeiten Prätest

Betrachten wir nun die zweite Grafik [7.3](#), welche die relativen Häufigkeiten des Posttests zeigt. Zum zweiten Zeitpunkt der Befragung äußerte die Mehrheit der Proband:innen (61%) Antworten, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurden. Wie bereits im Prätest beobachtet wurde, formulierte die zweithäufigste Gruppe (21%) Objektvorstellungen und die kleinste Gruppe an Proband:innen (18%) Umgebungsvorstellungen.

Die Ergebnisse zeigen eine Stabilität in den Häufigkeiten der jeweiligen Äußerungen.

7. Ergebnisdarstellung

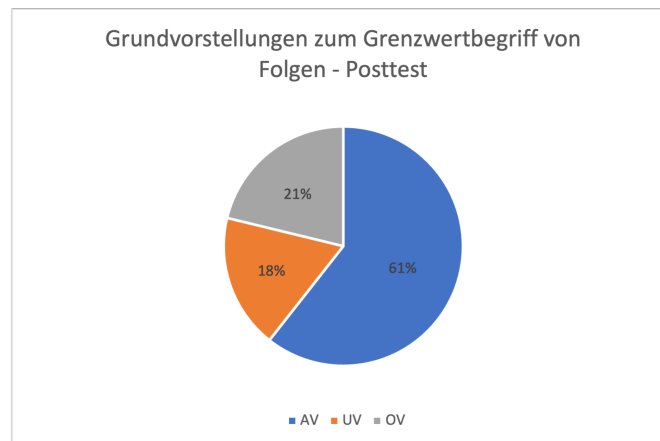


Abbildung 7.3.: Relative Häufigkeiten Posttest

7.2. Annäherungsvorstellung

In diesem Abschnitt möchten wir die Antworten genauer betrachten, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurden. Tabelle 7.2 zeigt die Daten bezüglich der Annäherungsvorstellung sowohl in absoluten als auch in relativen Häufigkeiten.

	U		F		1		2		3		4		Summe	
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
Prätest	6	28	6	28	5	24	2	10	1	5	1	5	21	100
Posttest	4	20	4	20	4	20	5	25	2	10	1	5	20	100

Tabelle 7.2.: Absolute und relative Häufigkeiten der Ausprägungsqualität zur Annäherungsvorstellung

Im Prätest haben 21 von insgesamt 25 Studierenden den Satz *"Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ..."* mit einer Äußerung beantwortet, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurde. Davon waren sechs Aussagen unspezifisch (28%) und weitere sechs Aussagen (28%) zeigten Fehlvorstellungen. Fünf Aussagen von Studierenden (24%) konnten Ausprägungsqualität 1 erreichen. Lediglich zwei Studierendenäußerungen (10%) konnten der Ausprägungsqualität 2 zugeordnet werden. Jeweils eine Person (5%) erzielte im Prätest Ausprägungsqualität 3 bzw. 4.

Im Posttest äußerten 20 von insgesamt 25 Proband:innen Antworten, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurden. Im Vergleich zum ersten Zeitpunkt der Befragung reduzierte sich die Anzahl der unspezifischen und fehlerhaften Äußerungen auf jeweils vier Personen (20%). Die Anzahl der Äußerungen, die Ausprägungsqualität 1 erzielten, verringerte sich ebenfalls auf

vier Personen (20%). Die Äußerungen, die Ausprägungsqualität 2 zugeordnet wurden, erzielten eine Steigerung von zwei auf fünf Äußerungen (25%). Ausprägungsqualität 3 wurde im Posttest von zwei Proband:innen (10%) erreicht. Keine Änderung zeigte sich in Ausprägungsqualität 4, da erneut dieselbe Proband:in (5%) Äußerungen formulierte, die dieser Kategorie zugeordnet wurden.

In Abbildung 7.4 werden die absoluten Häufigkeiten der Ausprägungsqualität der Annäherungsvorstellung in einem Säulendiagramm dargestellt. Deutlich zu erkennen sind die absoluten Abnahmen der unspezifischen Kategorie, der Fehlvorstellungen und Ausprägungsqualität 1. Das Säulendiagramm verdeutlicht eine signifikante Steigerung innerhalb von Ausprägungsqualität 2. Auch die Steigerung in Ausprägungsqualität 3 sowie die gleichbleibende absolute Häufigkeit von Ausprägungsqualität 4 ist aus der Grafik klar ersichtlich.

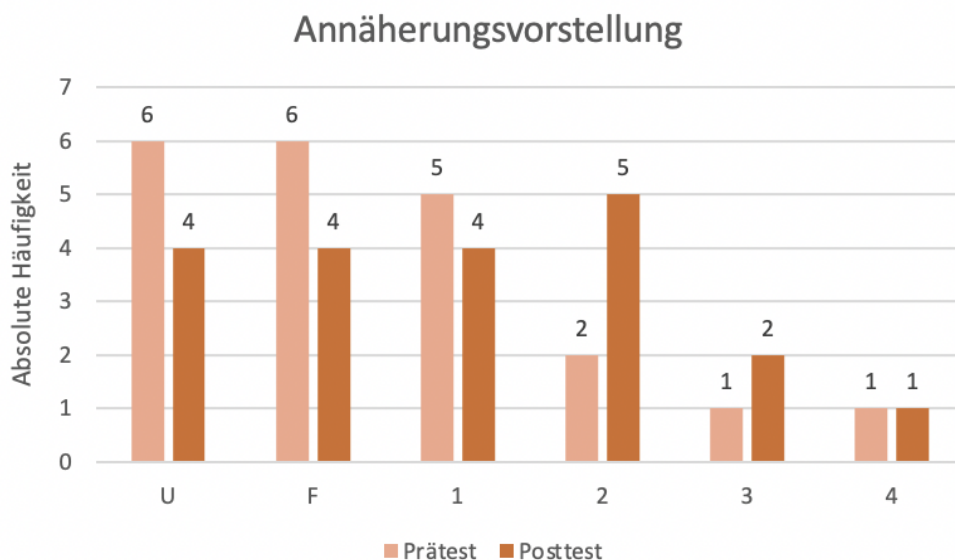


Abbildung 7.4.: Ausprägung der Annäherungsvorstellung zum Grenzwertbegriff

Die beiden Kreisdiagramme 7.5 und 7.6 präsentieren die relativen Häufigkeiten der geäußerten Annäherungsvorstellungen. Wie bereits zuvor erwähnt, formulierten im Prätest 21 und im Posttest 20 Proband:innen Antworten, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurden. Die prozentualen Angaben beziehen sich dementsprechend auf die Gesamtzahl der Proband:innen, die Äußerungen zur Annäherungsvorstellung formulierten.

Die Analyse dieser Ergebnisse zeigt, dass sich die Qualität im Rahmen der Annäherungsvor-

7. Ergebnisdarstellung

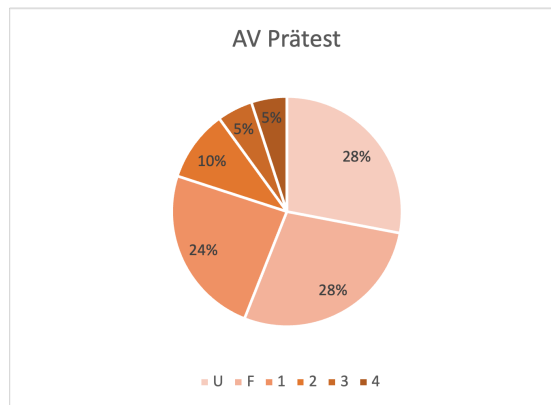


Abbildung 7.5.: Relative Häufigkeiten AV Prätest

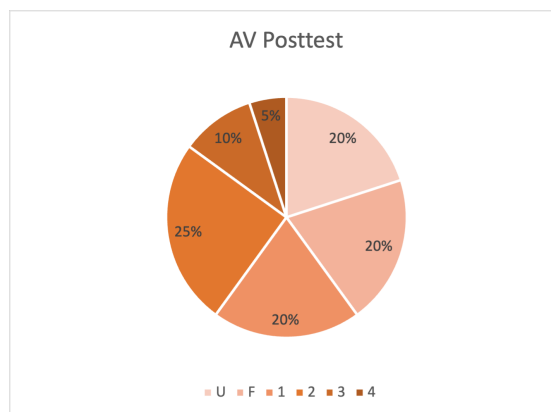


Abbildung 7.6.: Relative Häufigkeiten AV Posttest

stellung vom ersten zum zweiten Zeitpunkt der Befragung änderte. Es lässt sich eine Abnahme in den Kategorien mit qualitativ niedrigem Niveau feststellen. Im Gegensatz dazu wurde eine Steigerung in den Ausprägungsqualitäten 2 und 3 erreicht. Diese Steigerung wird vor allem in Ausprägungsqualität 2 ersichtlich.

7.3. Umgebungsvorstellung

In diesem Abschnitt möchten wir die Aussagen genauer betrachten, die der Umgebungsvorstellung zugeordnet wurden. Im Prätest wurde die Umgebungsvorstellung von fünf und im Posttest von sechs Studierenden formuliert. Die Tabelle 7.3 präsentiert die Daten bezüglich der Umgebungsvorstellung sowohl in absoluten als auch in relativen Häufigkeiten.

	U		F		1		2		3		4		Summe	
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
Prätest	2	40	0	0	0	0	1	20	2	40	0	0	5	100
Posttest	0	0	0	0	1	17	0	0	2	33	3	50	6	100

Tabelle 7.3.: Absolute und relative Häufigkeiten der Ausprägungsqualität zur Umgebungsvorstellung

Im Prätest konnten zwei unspezifisch (40%) formulierte Umgebungsvorstellungen zugeordnet werden. Die Aussagen von einer Proband:in (20%) konnten einer Umgebungsvorstellung der Ausprägungsqualität 2 zugeteilt werden. Zwei Proband:innen (40%) formulierten Antworten, die Ausprägungsqualität 3 zugeordnet wurden. Fehlvorstellungen und Vorstellungen der Ausprägungsqualität 1 bzw. 4 wurden zum ersten Zeitpunkt der Befragung nicht festgestellt.

Im Posttest wurden keine unspezifischen, fehlerhaften sowie Äußerungen, die der Ausprägungsqualität 2 zugeordnet wurden, wahrgenommen. Ausprägungsqualität 1 wurde einer Antwort (17%) zugeordnet. Analog zum Prätest, äußerten zwei Proband:innen (33%) Vorstellungen, die Ausprägungsqualität 3 zugeteilt wurden. Das bemerkenswerteste Resultat zeigte sich bei Ausprägungsqualität 4. Drei Studierende (50%) erzielten mit ihren formulierten Aussagen, die höchst mögliche Ausprägungsqualität der Umgebungsvorstellung.

Abbildung 7.7 stellt die absoluten Häufigkeiten der Umgebungsvorstellung in einem Säulendiagramm dar. Die Unterschiede zwischen Prä- und Posttest werden hierbei ersichtlich. Bemerkenswert sind vor allem die Kategorien die im Prä- bzw. Posttest verschwanden bzw. neu hinzukamen.

Die beiden Kreisdiagramme 7.8 und 7.9 zeigen die relativen Häufigkeiten der geäußerten Umgebungsvorstellungen. Wie bereits zuvor erwähnt, formulierten im Prätest fünf und im Posttest sechs Proband:innen Antworten, die der Umgebungsvorstellung zugeordnet wurden. Die prozentualen Angaben beziehen sich dementsprechend auf die Gesamtzahl der Proband:innen, die Überlegungen zur Umgebungsvorstellung äußerten.

7. Ergebnisdarstellung

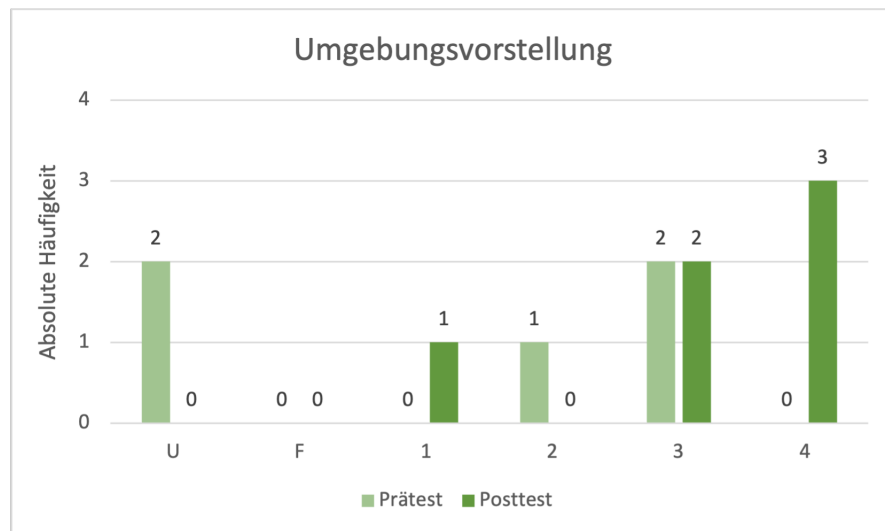


Abbildung 7.7.: Ausprägung der Umgebungsvorstellung zum Grenzwertbegriff

Bei der Analyse dieser Ergebnisse wird deutlich, dass sich die Qualität im Rahmen der Umgebungsvorstellung vom ersten zum zweiten Zeitpunkt der Befragung änderte. Es zeigt sich ein Rückgang in der unspezifischen Kategorie sowie ein Rückgang in Ausprägungsqualität 2. Das herausragendste Ergebnis zeigt sich in der Steigerung und dem prozentualen Anteil der Proband:innen, die im Posttest die Ausprägungsqualität 4 mit ihrer Formulierung erreichen konnten. Unsere Beobachtungen stützen somit die zuvor formulierte Hypothese H2. Allerdings ist hier die Stichprobe relativ klein, sodass unsere Schlüsse nur mit Vorsicht zu genießen sind.

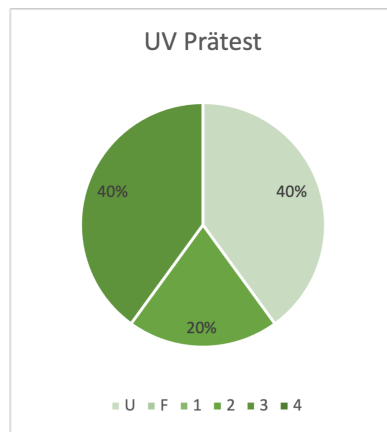


Abbildung 7.8.: Relative Häufigkeiten UV Prätest

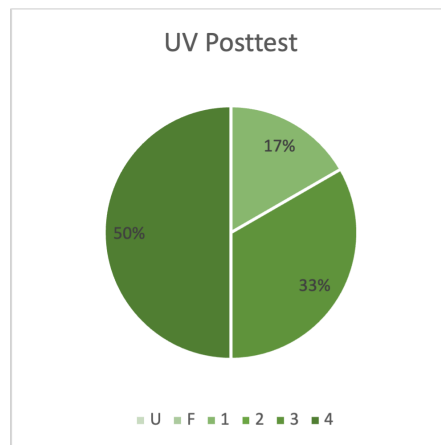


Abbildung 7.9.: Relative Häufigkeiten UV Posttest

7.4. Objektvorstellung

Die Objektvorstellung konnte im Prätest acht und im Posttest sieben Studierendenäußerungen zugeordnet werden. Bei allen Äußerungen finden wir unspezifische Formulierungen vor. Die erhobenen Daten bestätigen daher die zuvor formulierte Hypothese **H3**.

Aus diesem Grund wurden die absoluten Häufigkeiten in Tabelle **7.4** mithilfe der unspezifischen Kategorie komprimiert dargestellt.

Basierend auf der Literatur wurde festgestellt, dass die Formulierung der Objektvorstellung äußerst herausfordernd ist. Da die Proband:innen in der Umfrage nur unspezifische Antworten gegeben haben, werden wir in der folgenden Analyse nicht näher auf diese Grundvorstellung eingehen.

7. Ergebnisdarstellung

	U		Summe	
	abs.	%	abs.	%
Prätest	8	100	8	100
Posttest	7	100	7	100

Tabelle 7.4.: Absolute und relative Häufigkeiten der Objektvorstellung eingeteilt in Kategorien

7.5. Veränderungen in der Ausprägungsqualität

Durch eine qualitative Analyse wurde festgestellt, dass insgesamt neun Proband:innen (36%) ihre Äußerungen vom Prä- zum Posttest verbessern konnten. Bei vier Proband:innen (16%) konnte eine Verschlechterung in der Qualität ihrer Äußerungen beobachtet werden.

Im Vergleich zwischen den beiden Zeitpunkten konnten sechs Proband:innen (24%) die Ausprägungsqualität ihrer Annäherungsvorstellung steigern. Weitere fünf Proband:innen (20%) steigerten sich von einer Annäherungsvorstellung im Prätest zu einer Umgebungsvorstellung von Kategorie 3 oder 4 im Posttest. Es ist ebenso erwähnenswert, dass drei Proband:innen (12%) ihre Fehlvorstellung vom ersten zum zweiten Zeitpunkt verbessern konnten. Die Abnahme der Fehlvorstellungen unterstützt daher die zuvor formulierte Hypothese **H4**.

Im kommenden Abschnitt möchten wir einzelne interessante Formulierungen der Studierenden genauer untersuchen.

7.6. Einzelfallbetrachtung

Der Fokus dieses Kapitels liegt auf der Ausprägungsqualität der formulierten Äußerungen von einzelnen Proband:innen. Hierbei möchten wir einzelne qualitative Veränderungen zwischen den beiden Zeitpunkten genauer betrachten und diskutieren. Die Grundlage für diese Analyse bilden die Antworten auf die Fragestellung *"Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ..."* aus dem Prä- und Posttest. Die Bewertungen der Studierendenantworten wurden basierend auf dem Codierleitfaden vgl. **6.2** festgelegt.

Zu Beginn betrachten wir Proband:in AN2026 genauer. Im Prätest formulierte die Proband:in folgende Antwort: *"wie sich Werte einer Funktion sich einem Wert (=Grenzwert) annähern "*. Die Antwort wurde einer Annäherungsvorstellung der Ausprägungsqualität 1 zugeordnet. Diese Aussage enthält einige Ungenauigkeiten, die das Verständnis des Grenzwertbegriffs beeinträchtigten. Im Posttest äußerte die Proband:in folgende Antwort: *"einen Wert, wohin ab einem gewissen Folgenglied jedes folgende Glied beliebig nahe hinstrebt "*. Diese Antwort wurde ebenfalls der

Annäherungsvorstellung zugeordnet, jedoch der Ausprägungsqualität 3. Im Gegensatz zum ersten Zeitpunkt präzierte die Proband:in ihre Antwort und verbesserte somit die Qualität ihrer Grundvorstellung. Ausschlaggebend für die Einordnung in Ausprägungsqualität 3 waren vor allem die Worte *"ab einem gewissen Folgenglied"* und *"beliebig nahe hinstrebt"*. Die Äußerungen dieser Proband:in stellen ein Beispiel für eine qualitative Steigerung innerhalb einer Grundvorstellung, in diesem Fall der Annäherungsvorstellung, dar. Diese Steigerung ist jedoch immer noch deutlich von der normativen Grundvorstellung entfernt.

Eine erwähnenswerte Veränderung zeigte sich bei den Antworten von Proband:in DA2917. Im Prätest äußerte die Proband:in folgende Antwort: *"einen Punkt an dem die Glieder einer Folge oder Funktion immer näher kommen aber nie berühren, in der Epsilon-Umgebung liegen fast alle"*. Diese Antwort wurde aufgrund der Worte *"immer näher kommen aber nie berühren"* einer fehlerhaften Annäherungsvorstellung zugeordnet. Der zweite Teil der Antwort *"in der Epsilon-Umgebung liegen fast alle"* wurde einer Umgebungsvorstellung der Ausprägungsqualität 3 zugeordnet.

Im Posttest äußerte die Proband:in folgende Antwort: *"einen Wert dem sich angenähert wird, doch nie erreicht wird, mit jedem Schritt kommt man dem Wert näher"*. Der Teil *"doch nie erreicht wird"* stellt eine fehlerhafte Annäherungsvorstellung dar. Der verbleibende Teil der Antwort wurde einer Annäherungsvorstellung der Ausprägungsqualität 2 zugeordnet. Die Antworten dieser Proband:in sind exemplarisch für das Verschwinden einer Grundvorstellung, in diesem Fall der Umgebungsvorstellung. Weiters zeigt sich eine Abnahme vom ersten zum zweiten Zeitpunkt in der Bewertung der Aussagenqualität.

Eine weitere spannende Erkenntnis wurde beim Betrachten der Antworten von Proband:in DO0704 ersichtlich. Die Proband:in formulierte im Prätest folgende Antwort: *"eine Zahl gegen die Folge konvergiert, eine Zahl der die Glieder der Folge schließlich beliebig nahe kommen"*. Aufgrund der Formulierung *"schließlich beliebig nahe kommen"* wurde die Aussage mit Ausprägungsqualität 4 der Annäherungsvorstellung bewertet.

Im Posttest formulierte die Proband:in folgende Antwort: *"einen Wert dem sich die FG schließlich beliebig nahe annähern"*. Auch zum zweiten Befragungszeitpunkt wählte die Proband:in die Worte *"schließlich beliebig nahe annähern"*. Die Aussage wurde ebenfalls einer Annäherungsvorstellung der Qualität 4 zugeordnet. Die Proband:in hat bereits zum ersten Zeitpunkt eine gut ausgeprägte Grundvorstellung zum Grenzwertbegriff, die allem Anschein nach, über den Verlauf des Semesters nicht verloren ging.

Auch die Antworten von Proband:in DO1324 zeigen eine spannende Veränderung. Die Proband:in

7. Ergebnisdarstellung

formulierte im Prätest folgende Antwort: *"Einen konvergenten Wert, an dem sich eine Folge immer mehr annähert und ihn ev. sogar erreicht"*. Diese Antwort wurde der Annäherungsvorstellung mit Qualität 2 zugeordnet. Die Antwort der Proband:in erfüllte bisher nicht alle notwendigen Kriterien der Annäherungsvorstellung, um eine höhere Bewertung zu rechtfertigen. Die Aussage *"immer mehr annähert"* könnte noch präziser formuliert werden.

Spannenderweise hat die Proband:in im Posttest keine wörtliche Antwort gewählt, sondern folgende Grafik, siehe Abbildung 7.10, skizziert.



Abbildung 7.10.: Proband:in DO1324, Posttest

Hierbei wird eine alternierende Folge ersichtlich, die sich von oben und unten einem Wert annähert. Die Proband:in hat mithilfe einer geschwungenen Klammer die Epsilon-Umgebung gekennzeichnet und die Darstellung mit den Worten *"ε- Umgebung"* ergänzt. Die visuelle Darstellung lässt sich sowohl einer Annäherungs- als auch einer Umgebungsvorstellung zuordnen.

Bei Proband:in MA1020 wird eine markante Veränderung zwischen den beiden Zeitpunkten ersichtlich. Im Prätest verfasste die Studierende folgende Antwort: *"eine Zahl über die die Folge nicht rüberspringt"*. Diese Äußerung wurde einer Fehlvorstellung zugeordnet, da durch diese Formulierung alle alternierenden Folgen ausgeschlossen werden bzw. eine Verwechslung von Grenzwert und Schranke vorliegt.

Im Posttest äußerte die Proband:in folgende Antwort: *"Folenglieder, die sich immer näher kommen am Grenzwert. Es dürfen nur endlich viele Folenglieder außerhalb aller ε-Umgebungen liegen"*. Die angeführte Antwort wurde sowohl der Annäherungs- als auch der Umgebungsvorstellung zugeordnet. Der erste Teil der Antwort *"Folenglieder, die sich immer näher kommen am Grenzwert"* wurde einer Annäherungsvorstellung der Qualitätskategorie 2 zugeordnet. Der zweite Teil *"Es dürfen nur endlich viele Folenglieder außerhalb aller ε-Umgebungen liegen"* wurde einer Umgebungsvorstellung der Qualitätskategorie 4 zugeordnet.

Die Aussagen der Proband:in bieten ein konkretes Beispiel für das Wiedergeben von zwei verschiedenen Grundvorstellungen innerhalb einer Antwort. Angesichts der Aussagenqualität ist zu bemerken, dass sich diese vom Prä- zum Posttest bemerkenswert steigerte. Die Proband:in erreicht mit ihrer Aussage im Posttest sogar die höchste Bewertung der Umgebungsvorstellung. Es liegt nahe zu vermuten, dass die Proband:in die Formulierung *"Es dürfen nur endlich viele Folgen-*

glieder außerhalb aller ε -Umgebungen liegen" während des Semesters in der Schulmathematik Vorlesung wiederholt gehört hat und somit die Qualitätssteigerung ihrer Grundvorstellungen erzielen konnte. Hinzu kommt, dass die Proband:in die Fachvorlesungsprüfung *Analysis in einer Variablen für das Lehramt* zu beiden Zeitpunkten der Befragung noch nicht absolviert hatte. Es besteht die Möglichkeit, dass sich die Studierende zum Zeitpunkt des Posttests in der Vorbereitungsphase auf die Prüfung befand und somit über das erforderliche Wissen aus der Vorlesung verfügte.

Eine ähnliche Qualitätssteigerung konnte bei Proband:in MA2319 wahrgenommen werden. Im Prätest äußerte die Proband:in folgende Vorstellung: *"Ein Wert, gegen den die Werte einer Folge konvergieren"*. Diese Aussage wurde einer unspezifischen Annäherungsvorstellung zugeordnet. Im Posttest hingegen formulierte die Proband:in eine spezifischere Antwort: *"Ein fester Wert, an den sich die Folgenglieder einer konvergenten Folge immer weiter annähern. Ab einem bestimmten Index n liegen alle weiteren Folgenglieder in einem (beliebig kleinen) Intervall um den Grenzwert."* Der erste Teil der Antwort: *"Ein fester Wert, an den sich die Folgenglieder einer konvergenten Folge immer weiter annähern"* wurde einer Annäherungsvorstellung der Ausprägungsqualität 2 zugeordnet. Der zweite Teil der Antwort: *"Ab einem bestimmten Index n liegen alle weiteren Folgenglieder in einem (beliebig kleinen) Intervall um den Grenzwert"* konnte sogar eine Umgebungsvorstellung der Ausprägungsqualität 3 erreichen.

Hier wird erneut eine Steigerung von einer qualitativ niedrigen Annäherungsvorstellung zu einer qualitativ hohen Umgebungsvorstellung ersichtlich.

Proband:in RO1630 ist der letzte Einzelfall, den wir ausführlicher betrachten möchten. Hierbei liegt ebenfalls eine qualitative Verbesserung in der Formulierung vor. Zum ersten Zeitpunkt der Befragung äußerte die Proband:in folgende Antwort: *"Das Verhalten einer Folge, ab einem bestimmten Folgenglied sodass geschaut werden kann was die „restlichen“ (meist unendlich vielen) Folgenglieder tun und wohin sie gehen und vorallem, dass sie von dort nicht abhauen"*. Die Aussage ist wenig präzise formuliert und wurde einer Annäherungsvorstellung der Qualität 1 zugeordnet.

Im Posttest formulierte die Proband:in folgende Antwort: *"Wenn die Folgenglieder ab einem gewissen Punkt innerhalb jeder Schwankungsbreite ($\varepsilon > 0$) liegen"*. Unserer Ansicht nach repräsentiert diese Antwort eine Umgebungsvorstellung der Ausprägungsqualität 3.

Auch hier lässt sich erneut eine Entwicklung von einer Annäherungsvorstellung niedriger Qualität zu einer Umgebungsvorstellung hoher Qualität erkennen.

Im Gegensatz zu Proband:in MA1020 haben die Proband:innen MA2319 und RO1630 bereits

7. Ergebnisdarstellung

die Fachvorlesungsprüfung *Analysis in einer Variablen für das Lehramt* abgelegt. Deshalb ist es möglich, dass sich die Proband:innen in der Lernphase für die *Schulmathematik Analysis* Vorlesung befanden. Unter Berücksichtigung der zuvor diskutierten Theorie lässt sich annehmen, dass das Formulieren von guten Äußerungen zur Annäherungsvorstellungen den Studierenden oftmals schwer fallen. Es kann angenommen werden, dass die Proband:innen in den Vorlesungen häufiger mit normativen Umgebungsvorstellungen als mit Annäherungsvorstellungen konfrontiert waren, was es ihnen ermöglichte, sich die Aussagen besser einzuprägen. Auch der Wechsel von einer dynamischen zu einer statischen Perspektive könnte zur qualitativen Steigerung der Formulierungen beigetragen haben.

7.7. Zusammenhang Vorlesungsnoten und Ausprägungsqualität

Dieser Abschnitt dient dazu, die Verbindung zwischen den Prüfungsergebnissen der Fachvorlesung *Analysis in einer Variablen für das Lehramt* und den Qualitäten der Studierendenäußerungen im Posttest zu beleuchten. Die Proband:innen wurden angewiesen, im Rahmen der Umfrage anzugeben, ob sie bereits die Fachvorlesungsprüfung abgelegt haben und sofern dies zutrifft, welche Note sie erreicht haben. Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den Prüfungsnoten und den Qualitäten der Annäherungsvorstellung bzw. Umgebungsvorstellung wurden ausschließlich die Aussagen der Teilnehmer:innen aus dem Posttest verwendet. Um eine möglichst unverzerrte Datengrundlage zu gewährleisten, wurden die Daten der Teilnehmer:innen ausgeschlossen, die entweder die Vorlesungsprüfung noch nicht abgelegt oder keine entsprechenden Grundvorstellungen im Posttest geäußert hatten.

In Bezug auf die zuvor aufgestellten Hypothesen **H5** und **H6** gehen wir davon aus, dass Studierende, deren Äußerungen der Annäherungs- sowie Umgebungsvorstellung der Ausprägungsqualität 3 oder 4 zugeordnet wurden, die Prüfung der Fachvorlesung Analysis mit einem Bewertungsergebnis von Gut oder Sehr Gut bestanden haben. Diese Annahmen werden wir nun mithilfe von Blasendiagrammen untersuchen.

Zusammenhang Qualität Annäherungsvorstellung und Vorlesungsnoten

Das folgende Diagramm **7.11** illustriert die Korrelation zwischen den qualitativen Äußerungen der Studierenden zur Annäherungsvorstellung im Posttest und den Prüfungsnoten aus der Fachvorlesung Analysis. Die x-Achse repräsentiert die Vorlesungsnote, während auf der y-Achse die Ausprägungsqualität der Studierendenäußerungen abgebildet sind.

Für die Analyse des Zusammenhangs wurden nur die Studierenden berücksichtigt, die zum Zeitpunkt des Posttests die Vorlesungsprüfung bereits absolviert hatten und im Posttest Annäherungsvorstellungen äußerten. Diese Bedingung war bei insgesamt 14 Proband:innen (56%) erfüllt.

Ein genauerer Blick auf die Grafik offenbart, dass es keinen erkennbaren Zusammenhang zwischen den genannten Variablen gibt.

Studierende, die bei der Prüfung ein Ergebnis von Sehr Gut erzielten, zeigten in der Qualität ihrer Aussagen einen Höchstwert von 3. Eine Proband:in, welche die Prüfung mit einem Sehr Gut absolvierte, äußerte eine Fehlvorstellung.

Die Äußerungen der Studierenden, die die Prüfung mit der Bewertung Gut absolvierten, wurden zweimal der Ausprägungsqualität 2 und einmal einer Fehlvorstellung zugeordnet.

Studierende mit dem Prüfungsergebnis Befriedigend wurden zweimal der unspezifischen Kategorie, zweimal der Ausprägungsqualität 1 und einmal der Ausprägungsqualität 3 zugeordnet.

7. Ergebnisdarstellung

Studierende, die ein Genügend auf die Prüfung erhielten, formulierten Aussagen, die einmal der unspezifischen Kategorie, zweimal der Ausprägungsqualität 2 und einmal Ausprägungsqualität 4 zugeordnet wurden.

Basierend auf den vorliegenden Daten scheint es unwahrscheinlich, dass die aufgestellte Hypothese **H5** zutrifft, da die empirischen Befunde eine gegenteilige Entwicklung zeigen. Allerdings ist aufgrund der begrenzten Stichprobengröße keine Schlussfolgerung auf signifikante Ergebnisse möglich. Die Hypothese **H5** kann somit weder verworfen noch bestätigt werden.

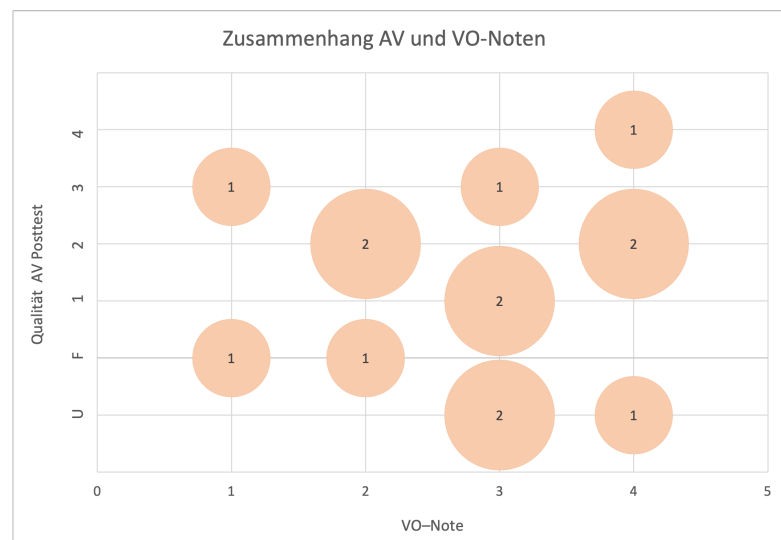


Abbildung 7.11.: Zusammenhang Vorlesungsnoten und Qualität der AV-Aussagen-Posttest

Zusammenhang Qualität Umgebungsvorstellung und Vorlesungsnoten

Das zweite Diagramm **7.12** veranschaulicht die Korrelation zwischen der Ausprägungsqualität der Äußerungen der Studierenden zur Umgebungsvorstellung im Posttest und den Prüfungsnoten aus der Fachvorlesung Analysis. Die x-Achse repräsentiert wieder die Vorlesungsnote, während auf der y-Achse die Ausprägungsqualität der Studierendenäußerungen abgebildet sind.

Für die Analyse wurden nur die Studierenden berücksichtigt, die eine positive Vorlesungsprüfung absolvierten und im Posttest Umgebungsvorstellungen äußerten. Diese Bedingung war bei insgesamt fünf Proband:innen (20%) erfüllt.

Eine vorläufige Analyse deutet darauf hin, dass insbesondere Studierende, welche die Prüfung der Fachvorlesung mit Genügend absolvierten, qualitativ hochwertige Äußerungen zur Umgebungsvorstellung formulierten. Es ist außerordentlich bemerkenswert, dass zwei Personen, mit

7.7. Zusammenhang Vorlesungsnoten und Ausprägungsqualität

einem Genügend auf die Vorlesungsprüfung, die Ausprägungsqualität 4 erzielten. Die Grafik veranschaulicht, dass jeweils eine Person mit Prüfungsnote Gut bzw. Befriedigend, Ausprägungsqualität 3 erreichte. Erstaunlich ist, dass im Posttest keine Proband:in mit einem sehr guten Prüfungsergebnis Aussagen formulierte, die der Umgebungsvorstellung zugeordnet wurden. Aufgrund der geringen Stichprobenanzahl kann die Hypothese **H6** weder verworfen noch bestätigt werden. Für signifikante Feststellungen bedarf es weiterer Daten.

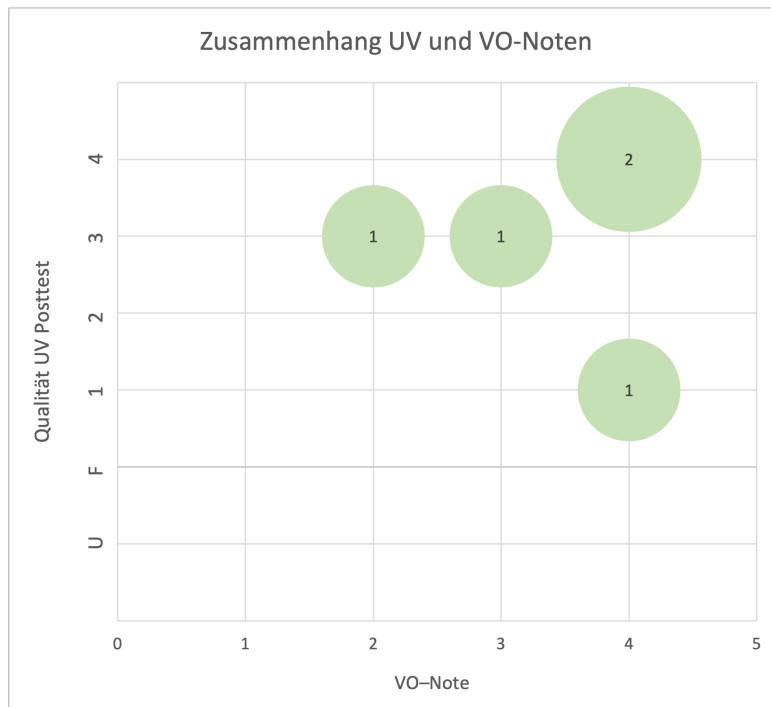


Abbildung 7.12.: Zusammenhang Vorlesungsnoten und Qualität der UV-Aussagen-Posttest

7.8. Zusammenhang präferierte Schulform und Ausprägungsqualitäten

In unseren zu Beginn aufgestellten Hypothesen **H7** haben wir uns die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Ausprägungsqualität der Studierendenäußerungen und den bevorzugten Schultypen der Studierenden gestellt. Beim Beantworten des Posttest-Fragebogens wurde den Studierenden folgende Frage zum Ankreuzen gestellt:

*Ich plane in der NMS, AHS-Unterstufe, AHS-Oberstufe, BHMS zu unterrichten.
(Mehrfachnennungen möglich)*

Die Proband:innen konnten somit ihre Wunsch-Schulformen ankreuzen, wobei auch Mehrfachnennungen möglich waren. Von den 25 Proband:innen der verbundenen Stichproben äußerten lediglich vier Personen (16%) den Wunsch, nicht in einer Sekundarstufe II unterrichten zu wollen. Der Wunsch in einer Berufsbildenden mittleren und höheren Schule (BMHS) zu unterrichten, wurde von insgesamt sechs Proband:innen (24%) geäußert. Acht Studierende (32%) würden gerne in einer Neuen Mittelschule (NMS) arbeiten. Drei Proband:innen (12%) könnten sich das Unterrichten in allen der genannten Schulformen vorstellen.

Aufgrund der begrenzten Stichprobenanzahl und den relativ homogenen Ergebnissen, lässt sich kein signifikanter Zusammenhang mit den Ausprägungsqualitäten der Studierendenäußerungen feststellen. Somit kann die von uns aufgestellte Hypothese **H7** weder bestätigt, noch verworfen werden.

7.9. Zusammenhang bisherige Unterrichtserfahrungen und Ausprägungsqualitäten

In Hypothese **H8** haben wir uns die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Qualität der Studierendenäußerungen und den bisherigen Unterrichtserfahrungen der Proband:innen gestellt. Von den 25 Proband:innen gaben nur fünf Personen (20%) an, noch keine Unterrichtserfahrung zu haben. Aufgrund dieser begrenzten Stichprobe können keine signifikanten Ergebnisse bzw. Zusammenhänge formuliert werden.

7.10. Bildhafte Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

In diesem Abschnitt möchten wir, unabhängig von den bereits diskutierten verbalen Äußerungen der Studierenden, auf die visuellen Vorstellungen der Proband:innen zum Grenzwertbegriff von Folgen eingehen. Insgesamt haben 13 von 25 Proband:innen (52%) die Fragestellung *"Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ..."* mithilfe einer Skizze beantwortet. Die Anzahl der bildhaften Vorstellungen reduzierte sich von acht Proband:innen (32%) im Prätest auf fünf Proband:innen (20%) im Posttest.

Die visuellen Vorstellungen der Studierenden wurden in die folgenden Kategorien eingeteilt:

- Monotone Folgen
- Darstellung von Graphen
- Grenzwert als Schranke
- Alternierende Folgen
- Folgen auf der Zahlengeraden
- Kennzeichnung einer Epsilon-Umgebung
- Markierung des Grenzwerts

In Abbildung [7.13](#) sind die absoluten Häufigkeiten der jeweiligen Kategorien dargestellt. Die graphische Darstellung der Daten im Säulendiagramm hebt die Unterschiede zwischen Prätest (blau) und Posttest (orange) hervor. Die bildhaften Vorstellungen der 13 Proband:innen konnten meist mehreren Kategorien zugeordnet werden.

Die Analyse des Säulendiagramms zeigt, dass im Prätest jeweils fünf Proband:innen monotone Folgen, Graphen sowie den Grenzwert als Schranke skizzierten. Ein Vergleich mit den Ergebnissen des Posttests verdeutlicht, dass nur noch zwei Proband:innen monotone Folgen sowie Graphen skizzierten. Die visuelle Vorstellung vom Grenzwert als Schranke visualisierte eine Person.

Alternierende Folgen wurden im Prätest nicht skizziert, im Posttest hingegen von drei Studierenden.

Eine leichte Zunahme von Darstellungen des Bildes der Folge auf der Zahlengeraden ist zu verzeichnen. Im Prätest konnten wir die graphische Darstellung bei zwei Proband:innen und im Posttest bei drei Proband:innen finden.

7. Ergebnisdarstellung

Eine Epsilon-Umgebung bzw. ein Epsilon-Schlauch wurde im Prätest von zwei und im Posttest von drei Studierenden in ihren visuellen Vorstellungen gekennzeichnet.

Der Grenzwert wurde im Prä- sowie im Posttest jeweils von zwei Proband:innen explizit gekennzeichnet.

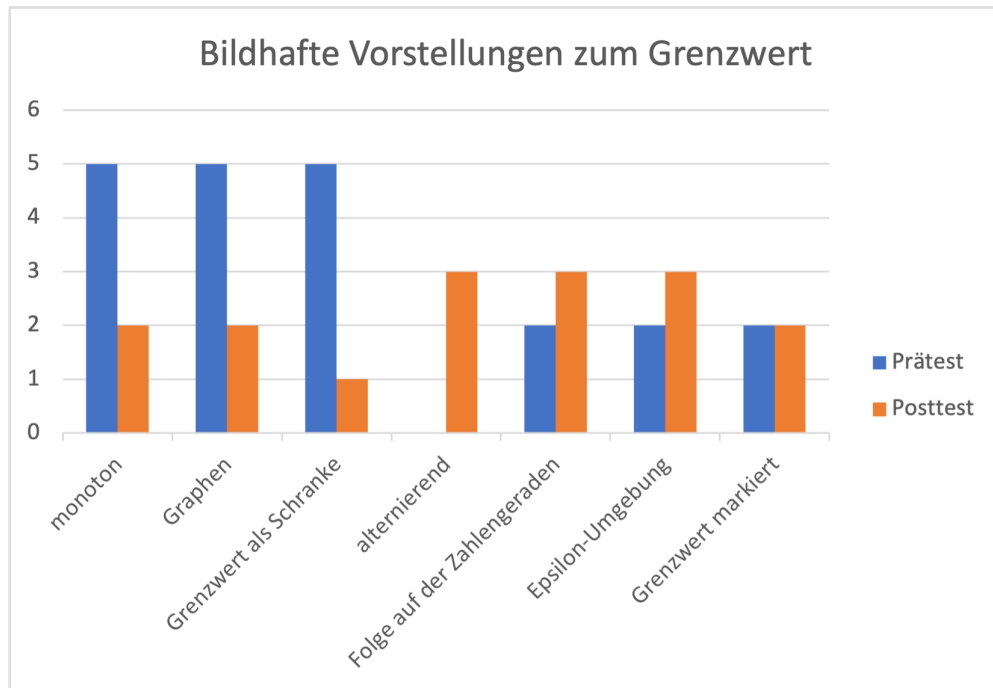


Abbildung 7.13.: Bildhafte Vorstellungen zum Grenzwert

An dieser Stelle möchten wir auf ausgewählte bildhafte Vorstellungen von einigen Proband:innen genauer eingehen.

Sowohl im Prä- als auch im Posttest konnten wir von Proband:in CL2420 eine wörtliche als auch eine visuelle Antwort finden. Die Grafik zeigt eine monoton wachsende Folge, die sich mit jedem Schritt einem Wert annähert. Diese Annahme wird durch die Worte der Proband:in unterstützt: *"Dass eine Folge sich langsam einem Wert annähert."*

Die Proband:in skizzierte im Posttest zwei unterschiedliche Folgen, siehe Abbildung [7.15](#). Interessanterweise hat die Proband:in andere visuelle Vorstellungen als im Prätest gewählt. Die linke Darstellung zeigt eine alternierende Folge, die sich von oben und unten an einen gemeinsamen Wert annähert. Die rechte Skizze stellt eine Folge auf einem Zahlenstrahl dar. Die gekennzeichneten immer näher beieinander liegenden Striche könnten auf die Kennzeichnung eines Grenzwerts

7.10. Bildhafte Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

1. Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...

den eine Folge sich langsam einem Wert annähert

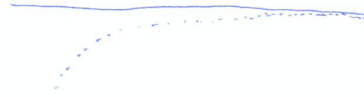


Abbildung 7.14.: Proband:in CL2420, Prätest

hinweisen. Die Skizzen wurden von der Proband:in mithilfe der folgenden Worte ergänzt: "Ein Wert, dem sich eine Folge annähert."

1. Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...

ein Wert, dem sich eine Folge annähert

z.B.

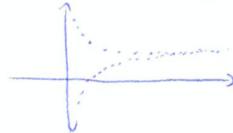


Abbildung 7.15.: Proband:in CL2420, Posttest

Auch Proband:in EL0826 skizzierte zu beiden Befragungszeitpunkten bildhafte Vorstellungen zum Grenzwertbegriff.

Die Proband:in äußerte im Prätest folgendes: "Einen Wert, von dem fast alle Folgenglieder in einer ε -Umgebung liegen". Diese Grundvorstellung wurde einer Umgebungsvorstellung der Qualität 3 zugeordnet. Zusätzlich zu dieser verbalen Antwort skizzierte die Proband:in eine Folge, siehe Abbildung 7.16. Die visuelle Darstellung zeigt eine Zahlenfolge am Zahlenstrahl. Dabei wurden die ersten fünf Folgenglieder und die ε -Umgebung gekennzeichnet. Ein Grenzwert wurde von der Proband:in nicht explizit markiert. Eine interessante Beobachtung stellt die klar erkennbare Begrenzung durch die Epsilon-Umgebung dar. In dieser Epsilon-Umgebung befinden sich alle eingezeichneten Folgenglieder.

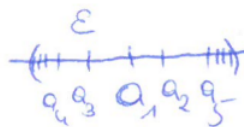


Abbildung 7.16.: Proband:in EL0826, Prätest

7. Ergebnisdarstellung

Im Posttest wurde von der Proband:in EL0826 folgende Grundvorstellung geäußert: *"einen Wert in dessen jeder beliebigen ε -Umgebung alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen"*. Diese Grundvorstellung wurde einer Umgebungsvorstellung der Qualität 4 zugeordnet. Die Proband:in skizzierte zusätzlich eine Folge, siehe Abbildung 7.17. Die visuelle Darstellung zeigt eine Zahlenfolge am Zahlenstrahl. Die vorliegende Skizze deutet darauf hin, dass die Proband:in die Folgenglieder mithilfe von Strichen kennzeichnete. Die Epsilon-Umgebung wurde mithilfe von runden Klammern dargestellt und zusätzlich mit dem ε -Symbol beschriftet. Das gekennzeichnete a in der Mitte lässt sich als Grenzwert deuten. Diese Annahme wurde von der Proband:in jedoch nicht durch zusätzliche Worte oder eine explizite Beschriftung verdeutlicht.

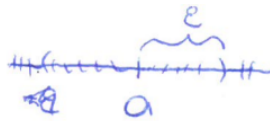


Abbildung 7.17.: Proband:in EL0826, Posttest

Die Auswertung zeigt, dass auch Proband:in MO2230 sowohl im Prä- als auch im Posttest visuelle Vorstellungen zum Grenzwertbegriff skizzierte.

Interessanterweise beantwortete diese Proband:in die Fragestellung im Prätest nur mit der bildhaften Darstellung, siehe Abbildung 7.18. Die Skizze veranschaulicht eine Folge am Zahlenstrahl. Es ist anzunehmen, dass die eingezeichneten Punkte die Folgenglieder darstellen. Eine mögliche Schlussfolgerung wäre, dass die eingezeichnete Markierung den Grenzwert der Folge darstellen soll.



Abbildung 7.18.: Proband:in MO2230, Prätest

Im Posttest äußerte die Proband:in zusätzlich zur visuellen Darstellung folgende Grundvorstellung: *"Der Wert bei dem die Folge nach endlich vielen Werten schließlich in jeder ε -Umgebung bleibt"*. Diese Grundvorstellung wurde einer Umgebungsvorstellung der Qualität 4 zugeordnet. Außerdem skizzierte die Proband:in folgende visuelle Vorstellung, siehe Abbildung 7.19. Die Skizze veranschaulicht eine Zahlenfolge am Zahlenstrahl. Die Folgenglieder wurden mit Punkten dargestellt und bis zum Folgenglied a_3 beschriftet. Der Grenzwert wurde von der Proband:in mit a beschriftet. Um den Grenzwert wurde eine Epsilon-Umgebung mithilfe von Klammern

7.10. Bildhafte Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

gekennzeichnet. Beschriftet wurde die Klammer auf der linken Seite mit $a-\varepsilon$ und auf der rechten Seite mit $\varepsilon+a$. Die Skizze verdeutlicht, dass sich die Folgenglieder innerhalb der Epsilon-Umgebung nur auf der linken Seite des Grenzwerts versammeln. Eine mögliche Schlussfolgerung wäre, dass die Person die visuelle Darstellung unterstützend zur geschriebenen Grundvorstellung skizzierte.

1. Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...

Der Wert ^{bei} dem ~~die~~ die Folge nach endlich vielen Werten schließlich in jeder ε -Umgebung bleibt

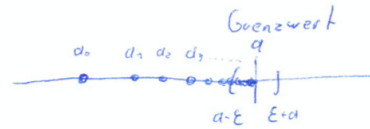


Abbildung 7.19.: Proband:in MO2230, Posttest

In Anbetracht dieser ausgewählten Proband:innen und unter Berücksichtigung des Kapitels 3.2.1 lässt sich behaupten, dass der Großteil der Proband:innen die visuellen Vorstellungen unterstützend zur wörtlich formulierten Grundvorstellung skizzierten. Lediglich zwei Proband:innen beantworteten die Fragestellung ausschließlich mit ihren visuellen Vorstellungen. Weiters legen die Indizien nahe, dass die Studierenden oftmals Skizzen aus dem Schulunterricht, aus Vorlesungen und Übungen reproduzierten.

7.11. Fehlvorstellungen

Im Zuge der Befragung äußerten einige Studierende Fehlvorstellungen.

Von den 25 Proband:innen formulierten insgesamt sechs Studierende (24%) beim Prätest und vier Studierende (16%) beim Posttest Fehlvorstellungen.

Sowohl im Prätest als auch im Posttest konnten alle Fehlvorstellungen der Annäherungsvorstellung zugeordnet werden. In Übereinstimmung mit den theoretischen Überlegungen, die in Kapitel 3.3 beschrieben wurden, bezeichneten die Studierenden den Grenzwert häufig als Schranken und Stoppschild. Dies zeigte sich auch im vorherigen Kapitel beim Betrachten der Visualisierungen von Studierenden, in den Abbildungen 7.14, 7.15 und 7.18. Einige Studierende äußerten sich dahingehend, dass der Grenzwert als Zahl nicht angenommen werden darf.

Die folgenden fehlerhaften Formulierungen wurden im Prätest von den Proband:innen geäußert:
Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor...

- *den Bereich bis zu dem die Folge geht und nicht weiter (AN0111)*
- *die Grenze (BI0809)*
- *einen Punkt an dem die Glieder einer Folge oder Funktion immer näher kommen aber nie berühren (DA2917)*
- *einen Wert, an den sich eine Folge beliebig annähert, den jedoch nie erreicht (EL0214)*
- *Ein Wert dem sich eine Folge annähert, diesen aber nie berührt (GA2421)*
- *eine Zahl über die die Folge nicht rüberspringt (MA1020)*

Die folgenden fehlerhaften Formulierungen wurden im Posttest von den Proband:innen geäußert:
Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor...

- *einen Punkt an dem sich eine Funktion annähert, ohne ihn jemals zu überschreiten (CH1818)*
- *einen Wert dem sich angenähert wird, doch nie erreicht wird, mit jedem Schritt kommt man dem Wert näher (DO0704)*
- *einen Wert, an den man sich beliebig annähern, ihn jedoch nie erreichen (EL0214)*
- *eine Zahl, gegen die eine Funktion/Folge/Reihe konvergiert (annähert, aber nicht berührt) (GA2421)*

Einige Erkenntnisse, die sich aus dieser Analyse gewinnen lassen, sind Proband:innen (EL0214) und (GA2421), die sowohl im Prä- als auch im Posttest Fehlvorstellungen äußerten. Die anderen Studierenden äußerten lediglich zu einem der beiden Zeitpunkte Fehlvorstellungen.

Unabhängig von den wörtlich geäußerten Formulierungen wurden im vorherigen Kapitel, zu den bildhaften Vorstellungen der Studierenden, vgl. 7.13, bereits Fehlvorstellungen graphisch analysiert. Beim Vergleichen mit den Kategorien wird ersichtlich, dass die Fehlvorstellung vom Grenzwert als Schranke vor allem bei den visuellen Antworten abgenommen hat, vgl. 7.13. Die Häufigkeit der verbalen formulierten Fehlvorstellungen hat sich vom ersten zum zweiten Zeitpunkt um zwei Aussagen reduziert. Unsere Beobachtungen unterstützen daher die zuvor formulierte Hypothese H4. Aufgrund der geringen Stichprobe können jedoch keine signifikanten Erkenntnisse festgestellt werden.

7. Ergebnisdarstellung

Zusammenhang Fehlvorstellungen und Vorlesungsnoten

Eine weitere interessante Frage ist die nach dem Zusammenhang zwischen den geäußerten Fehlvorstellungen und den Prüfungsergebnissen der Fachvorlesung *Analysis in einer Variablen für das Lehramt*. Der Zusammenhang wurde sowohl für den Prä- als auch für den Posttest mithilfe von Blasendiagrammen dargestellt.

Das erste Diagramm [7.20](#) zeigt die Korrelation zwischen den geäußerten Fehlvorstellungen der Studierenden im Prätest und den Prüfungsnoten aus der Fachvorlesung. Auf der x-Achse wird die Vorlesungsnote veranschaulicht, während auf der y-Achse das Auftreten einer Fehlvorstellung dargestellt wird.

Für die Analyse wurden nur die Studierenden berücksichtigt, die zum Zeitpunkt des Prätests die Vorlesungsprüfung bereits absolviert hatten. Diese Bedingung war bei insgesamt 16 Proband:innen (64%) erfüllt. Ein erster Blick auf die Grafik zeigt, dass es keinen ersichtlichen Zusammenhang zwischen den beiden Variablen gibt. Erstaunlich ist, dass die Person, die bei der Prüfung ein Sehr Gut erzielte, im Prätest eine Fehlvorstellung äußerte. Von drei Proband:innen, die die Prüfung mit der Bewertung Gut absolvierten, äußerten zwei Proband:innen Fehlvorstellungen. Erstaunlich ist, dass sechs Personen mit dem Prüfungsergebnis Befriedigend, im Prätest keine Fehlvorstellungen formulierten. Drei Proband:innen absolvierten die Fachvorlesung mit einem Genügend. Eine von diesen drei Personen äußerte Fehlvorstellungen. Dieselbe Beobachtung gilt auch für diejenigen, die die Prüfung negativ absolvierten.

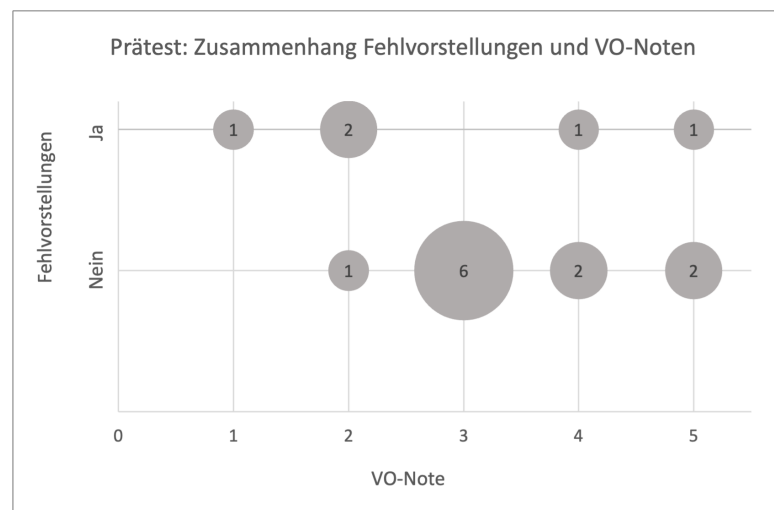


Abbildung 7.20.: Zusammenhang Vorlesungsnoten und Fehlvorstellungen Prätest

Das zweite Diagramm 7.21 zeigt die Korrelation zwischen den geäußerten Fehlvorstellungen der Studierenden im Posttest und den Prüfungsnoten aus der Fachvorlesung. Die x-Achse veranschaulicht die Vorlesungsnote, während auf der y-Achse das Auftreten einer Fehlvorstellung dargestellt wird.

Für die Analyse wurden nur die Studierenden berücksichtigt, die zum Zeitpunkt des Posttests die Vorlesungsprüfung bereits absolviert hatten. Diese Bedingung war bei insgesamt 16 Proband:innen (64%) erfüllt. Ein erster Blick auf die Grafik zeigt, dass es keinen ersichtlichen Zusammenhang zwischen den beiden Variablen gibt.

Erstaunlich ist, dass dieselbe Person, die die Prüfung mit einem Sehr Gut absolvierte, sowohl im Prä- als auch im Posttest Fehlvorstellungen äußerte. Von drei Proband:innen, die die Prüfung mit der Bewertung Gut absolvierten, äußerte eine Person Fehlvorstellungen. Ebenfalls bemerkenswert sind die acht Proband:innen, die die Prüfung mit einem Befriedigend sowie die vier Proband:innen die die Prüfung mit einem Genügend absolvierten. Bei keiner von diesen insgesamt zwölf Proband:innen konnten Fehlvorstellungen nachgewiesen werden.

Entgegen unserer Hypothese zeigen nur Studierende mit Vorlesungsnoten Sehr Gut und Gut Fehlvorstellungen im Posttest.

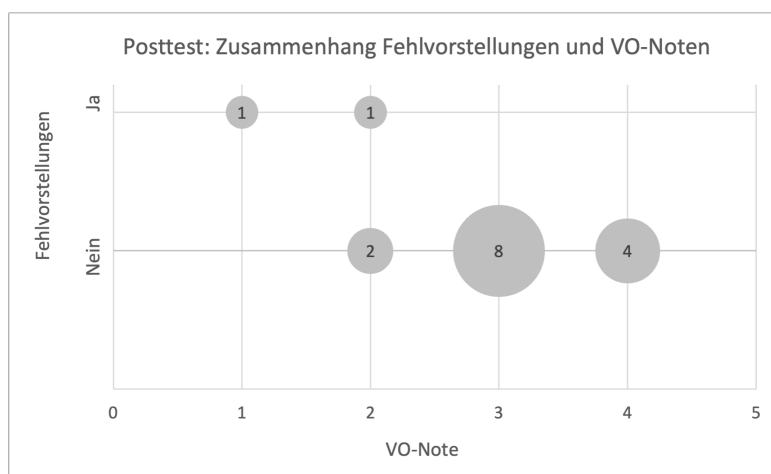


Abbildung 7.21.: Zusammenhang Vorlesungsnoten und Fehlvorstellungen Posttest

Aufgrund der begrenzten Datenbasis können jedoch keine aussagekräftigen Erkenntnisse formuliert werden.

8. Reflexion und Diskussion

Das vorliegende Kapitel zielt darauf ab, die wichtigsten Erkenntnisse unserer Analyse zu reflektieren, einen Vergleich zur Studie 2018/19 vgl. (Ableitinger, Götz, and Steinbauer 2022), herzustellen und mögliche Limitationen unserer Studie zu identifizieren.

Die Ergebnisse der durchgeführten Studie wurden bereits in den vorherigen Kapiteln detailliert analysiert und diskutiert. Zum Abschluss möchten wir noch einen allgemeinen Überblick der Veränderungen bezüglich der Qualität der Grundvorstellungen zwischen den beiden Befragungszeitpunkten geben. Betrachten wir hierfür die folgende Abbildung 8.1. Das Blasendiagramm stellt die Güte der Ausprägung in Abhängigkeit von den Grundvorstellungen dar. Die x-Achse repräsentiert die drei Grundvorstellungen (Annäherungs-, Umgebungs- und Objektvorstellung) zum Grenzwertbegriff von Folgen im Prätest (1) und Posttest (2). Auf der y-Achse ist die Ausprägungsqualität der Grundvorstellungen abgebildet. Die Blasengrößen repräsentieren die absolute Häufigkeit der jeweiligen Qualitäten der Grundvorstellungen.

Vorab ist zu erwähnen, dass Fehlvorstellungen zur Ausprägungsqualität 1 hinzugefügt wurden. Den Grund hierfür stellt die Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen der Studie 2018/19 dar.

Aus dem Blasendiagramm wird ersichtlich, dass sich sowohl die Qualität der Annäherungsvorstellung als auch die der Umgebungsvorstellung vom ersten zum zweiten Zeitpunkt verbesserte. Hervorzuheben ist, dass Studierendenäußerungen im Posttest der Umgebungsvorstellung mit Ausprägungsqualität 4 zugeordnet wurden. Deutlich zu erkennen ist auch der Rückgang der unspezifischen Formulierungen in allen Grundvorstellungen. Die Dimension der Blase verdeutlicht erneut, dass zu beiden Zeitpunkten die überwiegende Mehrheit der Proband:innen Äußerungen formulierte, die der Annäherungsvorstellungen zugeordnet wurden.

8. Reflexion und Diskussion

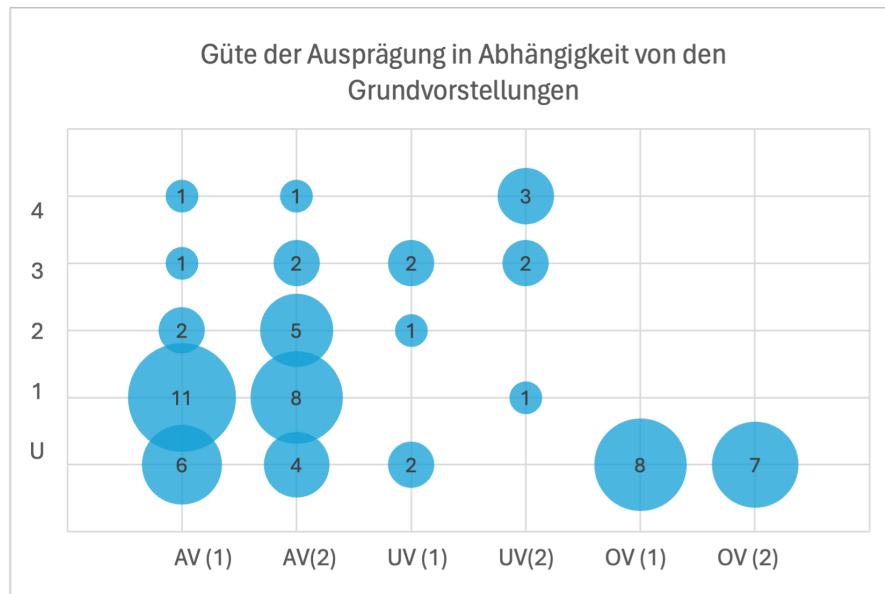


Abbildung 8.1.: Blasendiagramm mit Ergebnissen der Studie 2022/23

8.1. Analyse im Vergleich zur Studie 2018/19

Wie bereits in Kapitel [5.1.1](#) erwähnt wurde, möchten wir einen Vergleich zwischen den Ergebnissen der Studie 2018/19 und den Ergebnissen der aktuellen Studie 2022/23 herstellen. Wir geben hierfür einen kurzen Überblick über die Ergebnisse der Studie 2018/19.

Die Studie aus dem Wintersemester 2018/19 umfasste eine verbundene Stichprobe mit $n = 59$, diese war also mehr als doppelt so groß. Im Prätest wurden 56 und im Posttest 60 zuordenbare Grundvorstellungen festgestellt.

Vorstellungen, die der Annäherungsvorstellung zugeordnet wurden, wurden 44 Mal (79%) im Prätest und 45 Mal (75%) im Posttest geäußert.

Vorstellungen, die der Umgebungsvorstellung zugeordnet wurden, wurden im Prätest drei Mal (5%) und im Posttest 14 Mal (23%) genannt.

Vorstellungen, die der Objektvorstellung zugeordnet wurden, zeigten sich im Prätest bei neun (16%) und im Posttest bei einer (2%) Studierendenäußerung.

Wie in unseren Ergebnissen der aktuellen Studie äußerten die Proband:innen überwiegend Annäherungsvorstellungen. Erwähnenswert ist die Zunahme der Umgebungsvorstellungen. Auch der Rückgang der Objektvorstellungen ist erstaunlich.

8.1. Analyse im Vergleich zur Studie 2018/19

Betrachten wir Abbildung 8.2, um die jeweiligen Ausprägungsqualitäten der genannten Grundvorstellungen zu diskutieren. In Übereinstimmung mit den Resultaten unserer aktuellen Untersuchung wurde festgestellt, dass sich die Qualität sämtlicher Grundvorstellungen von Prä- zum Posttest verbessern konnte.

Richten wir nun unsere Aufmerksamkeit auf Ausprägungsqualität 4. Spannenderweise konnten weder im Prä-, noch im Posttest Annäherungsvorstellungen der Ausprägungsqualität 4 wahrgenommen werden. Ähnlich wie in unserer aktuellen Studie konnten drei Proband:innen im Posttest eine Umgebungsvorstellung mit Ausprägungsqualität 4 erzielen. Ein bemerkenswerter Fall ist das Auftreten einer Objektvorstellung der Ausprägungsqualität 4.

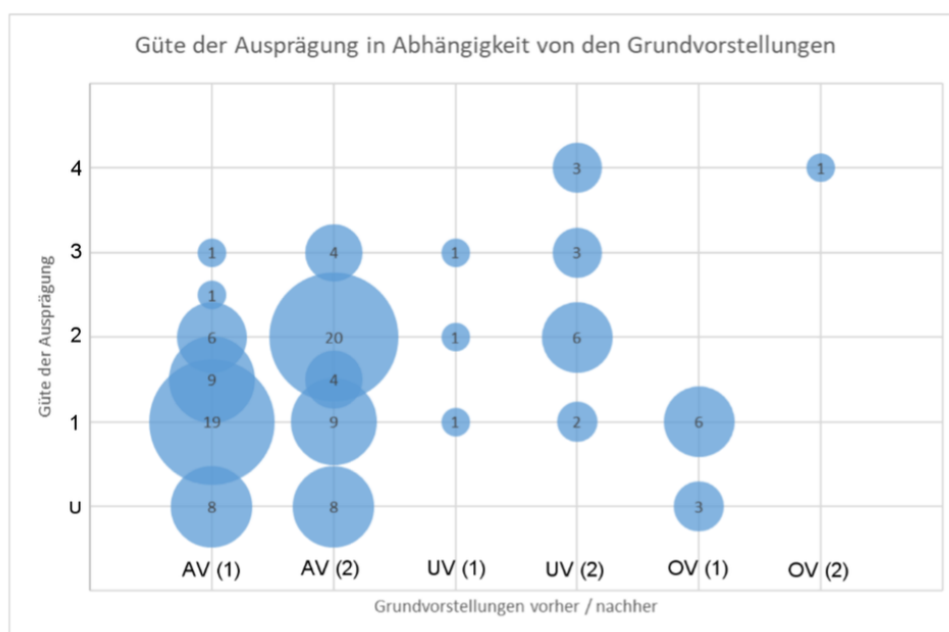


Abbildung 8.2.: Blasendiagramm mit Ergebnissen der Studie 2018/19 (2022, S.15)

In der Zusammenfassung sind parallele Entwicklungen bei der Gegenüberstellung der beiden Studien erkennbar. Eine detailliertere Analyse würde die Berücksichtigung der Antworten der Proband:innen aus den Jahren 2018/19 und deren Verknüpfung mit den aktuellen Antworten erfordern.

8. Reflexion und Diskussion

Mittelwerte der Ausprägungsqualitäten

In den durchgeführten Studien von 2018/19 und 2022/23 wurden signifikante Unterschiede in den Mittelwerten der Ausprägungsqualitäten zwischen den beiden Zeitpunkten und den beiden Studien festgestellt. Tabelle 8.1 stellt die Mittelwerte der Ausprägungsqualitäten der Annäherungs- und Umgebungsvorstellung zu den jeweiligen Zeitpunkten aus beiden Studien dar.

	Studie 2018/19		Studie 2022/23	
	Prä	Post	Prä	Post
Mittelwerte AV	1,36	1,49	1,05	1,4
Mittelwerte UV	2	2,5	1,6	3,17

Tabelle 8.1.: Mittelwerte der Ausprägungsqualität

In Studie 2018/19 stieg der Mittelwert der Ausprägungsqualität der Annäherungsvorstellung von 1,36 auf 1,49. Der Mittelwert der Ausprägungsqualität der Umgebungsvorstellung erhöhte sich von 2 auf 2,5. Die Ausprägungsqualität der Annäherungsvorstellung zeigt eine geringe Steigerung, während die Ausprägungsqualität der Umgebungsvorstellung ersichtlich gestiegen ist.

Im Vergleich dazu zeigte die Studie von 2022/23 in der Ausprägungsqualität der Annäherungsvorstellung eine Veränderung des Mittelwerts von 1,05 auf 1,4 zum zweiten Zeitpunkt. Diese Erkenntnis deutet auf eine Verbesserung hin, obwohl der Mittelwert im Prätest niedriger war als in der Studie von 2018/19. In der Ausprägungsqualität der Umgebungsvorstellung stieg der Mittelwert signifikant von 1,6 auf 3,17. Diese Veränderung weist auf eine erhebliche Steigerung dieser Ausprägungsqualität hin.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass beide Studien eine Steigerung der Mittelwerte von Zeitpunkt eins zu Zeitpunkt zwei aufzeigen, wobei die Studie von 2022/23 in der Ausprägungsqualität der Umgebungsvorstellung eine bemerkenswerte Verbesserung erzielte. Diese Ergebnisse könnten auf verschiedene Faktoren zurückzuführen sein, wie in der Zusammensetzung der Proband:innengruppe, der unterschiedlichen Vortragenden der Fachvorlesungen, in den Rahmenbedingungen der Studien sowie vielen anderen externen Einflüssen.

8.2. Limitationen

Trotz der Bemühungen, die Studie umfassend zu gestalten, sind bestimmte Limitationen nicht zu übersehen, wie zum Beispiel die geringe Anzahl an Proband:innen. Im Vergleich zur Studie 2018/19 weist die aktuelle Studie eine kleinere verbundene Stichprobe vor. Es lässt sich vermuten, dass seit dem Ausbruch der Pandemie die Anzahl an Studierenden, welche Vorlesungen in Präsenz besuchen, zurückgegangen ist. Diese Vermutung könnte die geringe Teilnahme vor allem am Posttest stützen.

Hinzu kommt das Setting der Befragung. Die Studierenden haben alle dieselbe Schulmathematik Vorlesung besucht. Spannender wäre hierbei natürlich ein Vergleich mit Ergebnissen aus ähnlichen Interventionen und Befragungen von anderen Universitäten in Österreich oder sogar in Europa.

Weiters wäre es denkbar, dass die Studierenden *sozial erwünschte* bzw. durch die Vorlesung *antrainierte* Antworten formuliert haben. In der Vorlesung wurde zwar keine allgemein richtige Grundvorstellung präsentiert, jedoch stellte die Formulierung einer geeigneten Umgebungsvorstellung einen Schwerpunkt dar.

Darüber hinaus wissen wir nicht mit Sicherheit, ob die Studierenden alle dieselbe Fachvorlesung Analysis im Sommersemester 2022 besucht und absolviert haben. Daher könnte es sein, dass die Vorlesungsnoten aus unterschiedlichen Semestern stammen und somit bei unterschiedlichen Professor:innen absolviert wurden. Aus diesem Grund ist die Gleichwertigkeit der Notengrade nicht gegeben.

8.3. Conclusio und Ausblick

Zum Abschluss möchten wir nun allgemein über die Ergebnisse dieser Studie reflektieren und mögliche Überlegungen für die Zukunft äußern.

In der Auswertung der Studierendenäußerungen konnten wir einige Fehlvorstellungen finden, die auch in der Literatur immer wieder zitiert werden. Ein Beispiel hierfür wäre: *"Ein Wert dem sich eine Folge annähert, diesen aber nie berührt"* (GA2421).

In Abbildung 8.1 wird noch einmal ersichtlich, dass Studierende den Grenzwert von Folgen vorwiegend mit der Annäherungsvorstellung assoziieren. Die Annäherungsvorstellung stellt keinen fachlich besonders hervorgehenden Schwerpunkt in der Analysis Vorlesung dar. Aus diesem

8. Reflexion und Diskussion

Grund kann angenommen werden, dass die Grundvorstellung im Schulunterricht erworben und gefestigt wurde. Es zeigt sich auch, dass Studierende Schwierigkeiten beim Formulieren einer qualitativ guten Annäherungsvorstellung haben. Alle geäußerten Fehlvorstellungen konnten der Annäherungsvorstellung zugeordnet werden, siehe Abschnitt 7.11. Diese unzureichenden, oft auch fehlerhaften Annäherungsvorstellungen können wesentlichen Einfluss auf das Verständnis des Grenzwertbegriffs von Folgen haben und im schlimmsten Fall ein umfassenderes Verständnis des Begriffs verhindern.

Gemäß den Erkenntnissen in der Literatur wurde betont, dass eine gut ausgeprägte Umgebungsvorstellung wesentlich ist, um das Konzept des Grenzwertes vollständig verstehen zu können vgl. (Bender 1991). Ein erfreuliches Ergebnis ist, dass die Ausprägungsqualität der Umgebungsvorstellung durch die Intervention gesteigert werden konnte. Aufgrund der begrenzten Stichprobengröße ist es allerdings nicht möglich weitreichende Schlüsse zu ziehen.

Hinsichtlich zukünftiger Interventionen zum Konzept des Grenzwertes, wird es weiterhin wichtig sein, die Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff von Folgen klar zu definieren und zu besprechen. Vor allem die statische und dynamische Sichtweise sollte detailliert diskutiert werden. Der Fokus sollte auf die Betonung der Vorteile des statischen Aspekts in Bezug auf die Existenz der Ergebnisse unendlicher Prozesse gelegt werden. Auch der gezielte Wechsel zwischen den beiden Sichtweisen sollte anhand von Beispielen thematisiert werden. In den Übungen hat sich bereits gezeigt, dass das Diskutieren über *gute* und *weniger gute* Formulierungen zum Grenzwertbegriff von Folgen sehr hilfreich für den Aufbau eines Verständnisses sein kann. Dies sollte in Zukunft weiterhin aufgegriffen werden. Auch Fehlvorstellungen sollten mit den Studierenden gezielt besprochen und diskutiert werden.

Die Grundlage für diese Maßnahmen besteht in einer engen Kooperation zwischen Fachdidaktik und Fachmathematik.

Literaturverzeichnis

- Ableitinger, Christoph, Stefan Götz, and Roland Steinbauer (Nov. 2022). “Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff”. In: *mathematica didactica* 45. DOI: [10.18716/ojs/md/2022.1620](https://doi.org/10.18716/ojs/md/2022.1620). URL: https://journals.ub.uni-koeln.de/index.php/mathematica_didactica/article/view/1620.
- Ableitinger, Christoph and Roland Steinbauer (2022). “Beiträge der fachlichen Ausbildung zur Bewältigung von Anforderungen der Unterrichtspraxis”. ger. In: *Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung*. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, pp. 119–138. ISBN: 3658340665.
- Bender, Peter (1991). “Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten.” ger. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 44/4, pp. 238–243. ISSN: 0025-5866.
- Brückler, Franka Miriam (2017). “Geschichte der Analysis”. ger. In: *Geschichte der Mathematik kompakt*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–63. ISBN: 9783662555736.
- Danckwerts, Rainer and Dankwart Vogel (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. ger. 1. Aufl. Mathematik Primar- und Sekundarstufe. München: Elsevier, Spektrum Akad. Verl. ISBN: 9783827417404.
- Döring, Nicola (2023). “Publisher Erratum zu: Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften”. eng. In: *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783662647622.
- Forster, Otto (2008). *Analysis I : Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. ger. 9., überarbeitete Auflage. Wiesbaden: Friedr. Vieweg und Sohn Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden. ISBN: 9783834894649.
- Götz, Stefan (2013). “Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien.” ger. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* 1, pp. 364–367.
- Greefrath et al., Gilbert (2016). *Didaktik der Analysis : Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. ger. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum. ISBN: 9783662488775.
- Kramer, Sonja and Roland Steinbauer (2023). *Schulmathematik Analysis*. Vorlesungsskript. URL: <https://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem22/smana-gesamt-2023-01-17.pdf>.
- Marx, Andreas (2006). *Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen*. ger. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre ; 50. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker. ISBN: 9783881204323.
- Nardi, Elena (Jan. 2008a). *Amongst mathematicians. Teaching and learning mathematics at university level*. ISBN: 978-0-387-37141-2. DOI: [10.1007/978-0-387-37143-6](https://doi.org/10.1007/978-0-387-37143-6).
- (2008b). “The Encounter With the Concept Of Limit”. In: *Amongst Mathematicians*. Boston, MA: Springer US, pp. 181–204. ISBN: 978-0-387-37143-6. DOI: [10.1007/978-0-387-37143-6_6](https://doi.org/10.1007/978-0-387-37143-6_6). URL: https://doi.org/10.1007/978-0-387-37143-6_6.

Literaturverzeichnis

- Thonhauser, Josef (2011). “Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. und Neubrand, M. (Hrsg.): Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV: Münster u.a.: Waxmann, 2011”. ger. In: *Zeitschrift für Bildungsforschung (Internet)* 1.3, pp. 249–253. ISSN: 2190-6890.
- Weber et al., Birke-Johanna (2024). “Welchen Effekt haben Lehramtsaufgaben auf die Wahrnehmung von Studierenden zur doppelten Diskontinuität?: Eine Untersuchung im Fachstudium für das gymnasiale Mathematiklehramt”. ger. In: *Journal für Mathematik-Didaktik (Internet)* 45.1. ISSN: 0173-5322.
- Weigand, Hans-Georg (2016). “Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive”. ger ; eng. In: *Mathematische Semesterberichte* 63.1, pp. 135–154. ISSN: 0720-728X.
- Wien, Universität (2022). “Teilcurriculum für das Unterrichtsfach Mathematik im Rahmen des Bachelorstudiums zur Erlangung eines Lehramts im Bereich der Sekundarstufe (Allgemeinbildung) im Verbund Nord-Ost”. In: *Universität Wien Homepage*. URL: https://senat.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/s_senat/konsolidiert_Lehramt/Teilcurriculum_Mathematik_BA_Lehramt.pdf.
- Winter, Heinrich (1996). “Mathematikunterricht und Allgemeinbildung”. eng. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4.2. ISSN: 0947-4471.

Abbildungsverzeichnis

1.1. Aspekte und Grundvorstellungen (Greefrath et al. 2016, S.18)	6
2.1. Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Folgenbegriff (Kramer and Steinbauer 2023, S.61)	20
2.2. Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff (Kramer and Steinbauer 2023, S.75)	22
3.1. Geometrisches Rätsel; eigene Darstellung, vgl. (Marx 2006, S.19)	24
3.2. Zahlenrätsel; eigene Darstellung, vgl. (Marx 2006, S.43)	25
3.3. Antwort student N; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.195)	32
3.4. Antwort student H; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.195)	33
3.5. Antwort student E; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.196)	33
3.6. Antwort student WD; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.141)	35
3.7. Antwort student LW; eigene Darstellung, vgl. (Nardi 2008b, S.142)	35
5.1. Der für die Studie relevante Abschnitt des Fragebogens	47
6.1. Persönlicher Code Fragebogen	50
6.2. Codierleitfaden für die Qualität der Ausprägung der AV, der UV und der OV, kursiv: Beispielformulierungen, die nicht direkt aus den Studierendenantworten gewonnen wurden (GW steht für Grenzwert) (Ableitinger, Götz, and Steinbauer 2022, S.12)	52
7.1. Absolute Häufigkeiten der Grundvorstellungen	54
7.2. Relative Häufigkeiten Prätest	55
7.3. Relative Häufigkeiten Posttest	56
7.4. Ausprägung der Annäherungsvorstellung zum Grenzwertbegriff	57
7.5. Relative Häufigkeiten AV Prätest	58
7.6. Relative Häufigkeiten AV Posttest	58
7.7. Ausprägung der Umgebungsvorstellung zum Grenzwertbegriff	60
7.8. Relative Häufigkeiten UV Prätest	61
7.9. Relative Häufigkeiten UV Posttest	61
7.10. Proband:in DO1324, Posttest	64
7.11. Zusammenhang Vorlesungsnoten und Qualität der AV-Aussagen-Posttest	68
7.12. Zusammenhang Vorlesungsnoten und Qualität der UV-Aussagen-Posttest	69
7.13. Bildhafte Vorstellungen zum Grenzwert	72
7.14. Proband:in CL2420, Prätest	73
7.15. Proband:in CL2420, Posttest	73

Abbildungsverzeichnis

7.16. Proband:in EL0826, Prätest	73
7.17. Proband:in EL0826, Posttest	74
7.18. Proband:in MO2230, Prätest	74
7.19. Proband:in MO2230, Posttest	75
7.20. Zusammenhang Vorlesungsnoten und Fehlvorstellungen Prätest	78
7.21. Zusammenhang Vorlesungsnoten und Fehlvorstellungen Posttest	79
8.1. Blasendiagramm mit Ergebnissen der Studie 2022/23	82
8.2. Blasendiagramm mit Ergebnissen der Studie 2018/19 (2022, S.15)	83
8.1. Fragebogen Prätest 1	93
8.2. Fragebogen Prätest 2	94
8.3. Fragebogen Posttest 1	95
8.4. Fragebogen Posttest 2	96

Tabellenverzeichnis

7.1. Absolute und relative Häufigkeiten der Grundvorstellungen	
zum Grenzwertbegriff von Folgen	54
7.2. Absolute und relative Häufigkeiten der Ausprägungsqualität zur Annäherungs-	
vorstellung	56
7.3. Absolute und relative Häufigkeiten der Ausprägungsqualität zur Umgebungsvor-	
stellung	59
7.4. Absolute und relative Häufigkeiten der Objektvorstellung eingeteilt in Kategorien	62
8.1. Mittelwerte der Ausprägungsqualität	84

Anhang

Fragebogen A und B

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist laut aktuellen Forschungsbefunden die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind; es geht also um die „Bilder im Kopf“.

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern. Daher ersuchen wir Sie, den folgenden Fragebogen auszufüllen. Die Auswertung erfolgt *ausschließlich anonym!*

Wir möchten diese Befragung am Ende des Wintersemesters in dieser Lehrveranstaltung wiederholen (Fragebogen 1B) und die Ergebnisse abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen mit einem Code zu versehen. Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!

Der persönliche Code setzt sich aus folgenden sechs Zeichen zusammen:

- Bitte geben Sie die ersten zwei Buchstaben des Vornamens Ihrer Mutter an.
- Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern des Geburtstags Ihrer Mutter an (Bitte zweistellig als z.B. „05“ für „5“).
- Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern Ihres eigenen Geburtstags an.

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtsstag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtsstag: erste zwei Ziffern	
Code	A	N	0	1	1	1

Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

- Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...
den Bereich bis zum der Folge geht und nicht weiter

- Unter einer *Reihe* stelle ich mir vor ...
eine logische Reihe von Zahlen

Abbildung 8.1.: Fragebogen Prätest 1

3. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist wichtig, weil ...
wir somit alle Zahlen zur Verfügung haben.
4. Unter einer stetigen Funktion stelle ich mir vor ...
eine Funktion die auf ihren Def. Bereich durchgehend ist.
5. Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor ...
eine Funktion, die ich ableiten kann.
6. Ein unbestimmtes Integral ist ...
ist eine Rechenoperation ohne Grenzen.
7. Ein bestimmtes Integral ist ...
ist eine Rechenoperation mit Grenzen.
8. Welches Bild verbinden Sie mit dem Nullstellensatz/Zwischenwertsatz?
Dass eine Funktion/Folge/Reihe eine Nullstelle in ihrer Darstellung hat.
9. In der Analysis geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...
um das Herstellen mit Zahlen zu arbeiten.

Abbildung 8.2.: Fragebogen Prätest 2

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Wir möchten diese Befragung mit der identischen zu Beginn des Wintersemesters durchgeführten Befragung (Fragebogen 1A) abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen wieder mit demselben Code zu versehen. *Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!*

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtsdag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtsdag: erste zwei Ziffern	
Code	A	N	0	1	1	1

Die Fragen sind fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Fragebogen 1B: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

den Wert gegen den die Folge in Lines steht bzw. annimmt.

2. Unter einer *Reihe* stelle ich mir vor ...

eine logische Verknüpfung von mathematischen Operationen.

3. Die *Vollständigkeit von $\mathbb{R}$* ist wichtig, weil ...

dadurch die Lücken in $\mathbb{Q}$ gefüllt werden.

4. Unter einer *stetigen Funktion* stelle ich mir vor ...

eine Funktion die auf ihrem gesamten Definitionsbereich definiert ist.

Abbildung 8.3.: Fragebogen Posttest 1

5. Unter einer *differenzierbaren Funktion* stelle ich mir vor ...

eine Funktion die auf ihrem gesamten Definitionsbereich definiert ist und gegen einen Grenzwert konvergiert.

6. Ein *unbestimmtes Integral* ist ...

ein Werkzeug um die Stammfunktion ermitteln zu können.

7. Ein *bestimmtes Integral* ist ...

die Fläche unter einer Kurve im angegebenen Bereich.

8. Welches Bild verbinden Sie mit dem Nullstellensatz/Zwischenwertsatz?

9. In der *Analysis* geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...

die Behandlung des Grenzwertes und was man damit machen kann, bzw. daraus schließen kann und damit weiterarbeiten kann.

10. Ich habe selbst schon in der Schule Mathematik unterrichtet: ☐ Ja ☒ Nein

Wenn ja, wo und in welchem Rahmen

☐ Orientierungspraktikum (PÄP) ☐ Schulpraxis (FAP)

☐ Sondervertragslehrer/in

11. Ich gebe/gab regelmäßig Mathematik-Nachhilfe: ☒ Ja ☐ Nein

12. Ich plane in der ☒ NMS ☒ AHS-Unterstufe ☒ AHS-Oberstufe
☒ BHMS zu unterrichten (Mehrfachnennungen möglich).

13. Ich habe die „Analysis in einer Variable für das LA“ oder eine entsprechende andere Analysis-LVA positiv absolviert:

Vorlesung ☐ Ja Note ☒ Nein

Übungen ☒ Ja Note ...4.... ☐ Nein

Abbildung 8.4.: Fragebogen Posttest 2