

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Fraktale Dimensionsbegriffe und die Einbettung von Fraktalen
im Mathematikunterricht

verfasst von | submitted by
Julia Pum BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 511 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Geschichte und Politische Bildung Unterrichtsfach
Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Dr. David Nicolas Nenning BSc MSc

Abstract - Deutsch

Die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel „Fraktale Dimensionsbegriffe und die Einbettung von Fraktalen im Mathematikunterricht“ erforscht die facettenreiche Welt der fraktalen Geometrie und ihre Integration in den schulischen Mathematikunterricht. Beginnend mit einem mengentheoretischen Hintergrund werden grundlegende Konzepte etabliert, die den Weg für die vertiefte Untersuchung fraktaler Dimensionsbegriffe und ihrer Bezüge ebnen. Alternativen zu traditionellen Dimensionskonzepten werden eingehend betrachtet und durch die Berechnung anhand exemplarischer Fraktale wie dem Sierpinski-Dreieck, der Cantormenge und der Kochkurve veranschaulicht. Eine herausragende Feststellung ist dabei die Äquivalenz der Ähnlichkeitsdimension und der Hausdorff-Dimension.

Der praktische Fokus der Arbeit liegt auf der Entwicklung von einem Unterrichtsbeispiel für unterschiedliche Altersstufen, angefangen von der Unterstufe. Dieses Beispiel zeigt auf, wie Fraktale nicht nur als abstrakte mathematische Konzepte, sondern auch als visuell ansprechende Phänomene im Mathematikunterricht erlebt werden können. Die Integration von Fraktalen in den Unterricht verspricht nicht nur eine Bereicherung des Lehrinhalts, sondern auch eine inspirierende Möglichkeit, das Interesse der Schüler:innen an Mathematik zu wecken.

Insgesamt trägt diese Masterarbeit dazu bei, das Bewusstsein für die Bedeutung der fraktalen Geometrie im Mathematikunterricht zu stärken und ein konkretes Anwendungsbeispiel für Lehrende bereitzustellen.

Abstract - English

The master thesis titled „Fraktale Dimensionsbegriffe und die Einbettung von Fraktalen im Mathematikunterricht“ explores the diverse realm of fractal geometry and its integration into secondary school mathematics education. Commencing with a set-theoretical foundation, fundamental concepts are established, paving the way for an in-depth examination of fractal dimension concepts and their interconnections. Alternatives to traditional dimension concepts are thoroughly explored and exemplified through calculations based on prominent fractals such as the Sierpinski triangle, Cantor set, and Koch curve. A notable revelation is the equivalence between the similarity dimension and the Hausdorff-Dimension.

The practical emphasis of the thesis lies in the development of a teaching example suitable for various age groups, starting from lower grades. This example illustrates how fractals can be experienced not only as abstract mathematical concepts but also as visually engaging phenomena in mathematics education. The integration of fractals into the curriculum promises not only enrichment but also an inspiring means to ignite students' interest in mathematics.

Overall, this master thesis contributes to strengthening awareness of the significance of fractal geometry in mathematics education and provides a tangible application example for educators.

Inhaltsverzeichnis

1	Mengentheoretischer Hintergrund	4
1.1	Notation	4
1.2	Grundlegendes	4
2	Begriffsdefinitionen und Bezüge	9
2.1	Cantormenge	9
2.2	Kochkurve	10
2.3	Sierpinski-Dreieck	12
2.4	Begriffsgeschichte und grundlegende Eigenschaften	14
2.5	Topologische Dimension	15
2.6	Hausdorff-Dimension	18
3	Alternative fraktale Dimensionen	24
3.1	Selbstähnlichkeits-Dimension	24
3.2	Box-Counting Dimension	27
4	Berechnung anhand konkreter Beispiele	30
4.1	Das Sierpinski Dreieck	30
4.2	Die Cantormenge	31
4.3	Die Kochkurve	32
5	Anwendung in der Fachdidaktik	34
5.1	Lehrplanbezug	34
5.1.1	Fraktale Geometrie im Bereich der Bildungs- und Lehraufgabe	36
5.1.2	Einordnung von Fraktalen im Lehrstoff Mathematik	37
5.2	Unterrichtsbeispiel - Sierpinski-Dreieck	40
5.2.1	Einführung in das Thema	41
5.2.2	Erarbeitung wichtiger Theorie	42
5.2.3	Eigenständige Erarbeitung	45
5.3	Reflexion	48

Einleitung

„1953 erkannte ich, da[ss] die gerade Linie zum Untergang der Menschheit führt.

Aber die gerade Linie ist zur absoluten Tyrannei geworden.

Die gerade Linie ist der Fluch unserer Zivilisation.

Heute erleben wir den Triumph der rationalen Technik, und währenddessen befinden wir uns gleichzeitig vor dem Nichts.“

Friedrich Hundertwasser

Zunächst scheint dieses Zitat wenig mit Mathematik zu tun zu haben, aber im Verlauf dieser Arbeit wird sich diese Ansicht ändern. Meine Wahl fiel auf diesen Textauszug, da es meine beiden Schwerpunkte in meiner Ausbildung als Pädagogin für Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung und Mathematik vereint. Auch wenn dieses Zitat nun schon einige Jahre alt ist, so trifft es doch nach wie vor den Kern unserer Zeit.

Wenn wir die Geschichte der Mathematik betrachten, müssen wir weit in die Vergangenheit zurückblicken. Überreste antiker Architektur oder erhaltene Schriften lassen auf die frühe Anwendung von Mathematik schließen. Es mag schwer vorstellbar sein, dass es sich beim Thema „Fraktale Geometrie“ um etwas handelt, das erst seit knapp einem halben Jahrhundert existiert. Obwohl es zuvor wissenschaftliche Erkenntnisse in diesem Bereich gab, erhielt diese Art von Mathematik erst in den 70er Jahren durch den Mathematiker Benoît Mandelbrot eine direkte Bezeichnung. Das macht dieses Thema besonders faszinierend, da es noch nicht vollständig erforscht ist, obwohl es uns so vertraut ist. Natürliche Fraktale begegnen uns täglich, und für uns ist ihr Wesen und ihre Existenz so selbstverständlich wie die Tatsache, dass die Erde rund ist.

Die fraktale Geometrie ist nicht nur für die Fachmathematik spannend, sondern auch für die Schule und den Mathematikunterricht. Aufgrund ihrer alltäglichen Nähe und praktischen Anwendungsmöglichkeiten eröffnet sie neue Perspektiven im theoretischen Mathematikunterricht und ebnet den Weg für Möglichkeiten im Bereich der mathematischen Didaktik. Die Theorie einfacher Fraktale ist sowohl für Lehrende als auch für Lernende leicht verständlich und anwendbar. Selbst wenn dieser Bereich nicht im Lehramtsstudium vorgesehen ist, kann sich eine Lehrperson schnell einlesen, da alle Voraussetzungen für das Verständnis der fraktalen Geometrie vertraut sind. Im Verlauf dieser Arbeit wird erörtert, was alles unter den Bereich der fraktalen Geometrie fällt und wie vielfältig sie sein kann.

Die vorliegende Masterarbeit hat sich mit der vielschichtigen Welt der fraktalen Dimensionsbegriffe und im Weiteren mit der Einbettung von Fraktalen im Mathematikunterricht beschäftigt. Durch einen mengentheoretischen Hintergrund wurden die Grundlagen für das Verständnis von Fraktalen gelegt, gefolgt von einer umfassenden Untersuchung verschiedener Begriffsdefinitionen und Bezüge. Dabei sollen vor allem die Topologische Dimension und die Hausdorff-Dimension genauer betrachtet werden. Es gilt hierbei, den wesentlichen Unterschied der beiden Dimensionen festzustellen, um ein *Fraktal* gemäß Mandelbrot [8] richtig zu definieren. Schnell wurde allerdings klar, dass diese Definition jedoch unzureichend ist und es einer genaueren Auseinandersetzung mit diesem Begriff bedarf. Demnach wird in dieser Arbeit ein Fraktal nach Falconer [4] definiert. Diese Definition ist genauer und passender. Alternative fraktale Dimensionen, wie etwa die Selbstähnlichkeitsdimension und die Box-Counting Dimension, wurden eingehend betrachtet, wodurch ein tieferes Verständnis für die komplexe Struktur fraktaler Mengen erreicht wurde. Mithilfe dieser Dimensionsdefinitionen ist es uns schließlich einfach und schnell möglich, fraktale Dimensionen von einfachen Strukturen, wie des Sierpinski Dreiecks, der Cantormenge oder der Kochkurve zu bestimmen.

Die Berechnung fraktaler Dimensionen anhand dieser Beispiele lieferte konkrete Einblicke in die Anwendung der theoretischen Konzepte. Dafür wurde die faszinierende Feststellung, dass die Ähnlichkeitsdimension unter bestimmten Bedingungen gleich der Hausdorff-Dimension ist, verwendet. Wiederum führte dies zu einem tieferen Verständnis der strukturellen Eigenschaften von Fraktalen.

Ein zentraler Schwerpunkt der Arbeit war die Entwicklung von einer praxisorientierten Unterrichtsidee für verschiedene Altersstufen, beginnend in der Sekundarstufe I. Dafür wurde zuerst der Lehrplan in Mathematik genauer betrachtet. Schnell hatte sich herausgestellt, dass die fraktale Geometrie in vielen Bereichen eingeschlossen werden kann. Schüler:innen sollen dabei eine Erfahrung von Mathematik außerhalb des Regelunterrichts machen und die Möglichkeit haben, sich experimentierfreudig austoben zu können – ganz ohne Leistungsdruck. Es geht nicht um „die eine richtige Lösung“, sondern um den Weg, den die Schüler:innen dahin einschlagen und um die Erfahrung, die sie erleben können. Dieses Beispiel zeigt, wie Fraktale auf ansprechende und motivierende Weise in den Mathematikunterricht integriert werden können. Die Schüler:innen sollen dabei ermutigt werden, Fraktale nicht nur als abstrakte mathematische Konzepte, sondern auch als faszinierende visuelle Phänomene zu erleben.

Insgesamt trägt diese Masterarbeit dazu bei, das Bewusstsein für die Bedeutung und den Nutzen der fraktalen Geometrie im Mathematikunterricht zu stärken. Die vorgestellte Unterrichtsidee bietet Lehrenden ein konkretes Werkzeug, um den Lehrplan mit innovativen Ansätzen zu bereichern und das Interesse der Schüler:innen an Mathematik zu fördern. Fraktale werden somit nicht nur als abstrakte mathematische Konzepte vermittelt, sondern als lebendige und fesselnde Elemente, die die Schönheit und Vielfalt der Mathematik verdeutlichen.

1 Mengentheoretischer Hintergrund

In diesem Kapitel soll der mengentheoretische Hintergrund beleuchtet werden, der für das Verständnis dieser Arbeit essenziell ist. Ein gewisses mathematisches Grundverständnis wird allerdings vorausgesetzt. Da dieses Kapitel lediglich für das formale Verständnis unterstützend wirken soll, wird auf Beweise verzichtet. Diese können bei Bedarf im Originalwerk von Boto von Querenburg [13] nachgeschlagen werden.

1.1 Notation

Grundlegend werden folgende feste Bezeichnungen von Mengen vorausgesetzt:

$\emptyset$: leere Menge

$\mathbb{N}$: natürliche Zahlen einschließlich 0

$\mathbb{N}^*$: natürliche Zahlen ohne 0

$\mathbb{Z}$: ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$: rationale Zahlen

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen

$\mathbb{C}$: komplexe Zahlen [13, S. 1]

1.2 Grundlegendes

Definition 1. Sei A eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen. Wir nennen $(A_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $B \subset A$, falls $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Angenommen $(A_i)_{i \in I}$ und $(C_j)_{j \in J}$ sind nun Überdeckungen von B , dann nennen wir $(C_j)_{j \in J}$ Teilüberdeckung von $(A_i)_{i \in I}$, wenn es zu jedem $j \in J$ ein $i \in I$ gibt mit $C_j = A_i$. [13, S. 3]

Definition 2 (Metrischer Raum). Sei A eine Menge. Eine Abbildung $d : A \times A \rightarrow [0, \infty[$ mit den Eigenschaften:

- i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in A$
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in A$

ist eine Metrik auf A . Der letzte Punkt entspricht der Dreiecksungleichung und das Paar (A, d) nennen wir metrischer Raum. [13, 1.1 Definition, S. 7]

Ein typisches Beispiel, auf das wir uns auch in dieser Arbeit beziehen, ist der n -dimensionale euklidische Raum. Für $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ definiert

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$, die sogenannte euklidische Metrik. Wir nennen $(\mathbb{R}^n, d)$ n -dimensionalen euklidischen Raum. [13, S. 7]

Definition 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X, r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann bezeichnet $B(a, r) = \{x \in X | d(a, x) < r\}$ eine offene Kugel, wobei a das Zentrum und r der Radius der Kugel ist. Eine Teilmenge A von X ist offen, wenn für alle $x \in A$ ein $r > 0$ existiert, sodass $B(x, r) \subset A$. Wir nennen die Menge A abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist. [13, 1.3 Definition, S. 8]

Satz 1.1. *Eine offene Kugel ist eine offene Menge. [13, 1.4 Satz, S. 8]*

Satz 1.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann gilt:*

- i) Die Vereinigung von offenen Mengen ist offen.*
- ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*
- iii) X und die leere Menge sind offen. [13, 1.5 Satz, S. 8]*

Definition 4. Seien A und B zwei Mengen. Wir nennen A und B disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Satz 1.3. *Alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind eine Vereinigung abzählbar vieler offener, disjunkter Intervalle. [13, 1.7 Satz, S. 9]*

Definition 5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Wir nennen eine Menge um x Umgebung, wenn sie rund um x eine offene Kugel enthält. Weiters ist $\mathcal{U}(x)$ die Menge aller Umgebungen um x und wird Umgebungssystem von x genannt. [13, 1.8 Definition, S. 9]

Definition 6. Angenommen (X, d) und (X', d') sind metrische Räume und $f : X \rightarrow X'$ eine Abbildung. f heißt stetig in $x_0 \in X$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon, x_0) > 0$ existiert und schließlich aus $d(x_0, x) < \delta(\epsilon, x_0)$ folgt, dass $d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon$. Wir nennen die Abbildung f stetig auf X , sofern f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist. [13, 1.16 Definition, S. 11]

Definition 7. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Die Teilmenge A heißt beschränkt, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ mit $k \geq 0$ gibt, sodass $d(x, y) \leq k$ für alle $x, y \in A$ erfüllt ist. [13, 1.21 Definition, S. 12] Wenn eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ nun gleichzeitig beschränkt und abgeschlossen ist, so heißt sie kompakt. [13, 8.10 Satz, S. 86] Allgemein kann gesagt werden, dass eine Menge A kompakt ist, wenn jede offene Überdeckung von ihr eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Definition 8. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Wir nennen die Folge (x_n) in X konvergent gegen $x \in X$, mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$, wenn es zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$. Dabei entspricht x dem Limespunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sobald in jeder Umgebung von einem Punkt $y \in X$ unendlich viele Folgenglieder liegen, nennen wir y einen Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. [13, 1.23 Definition, S. 12]

Satz 1.4. *In einem metrischen Raum hat eine konvergente Folge höchstens einen Limespunkt.* [13, 1.24 Satz, S. 12]

Definition 9. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d) . Wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_p, x_q) < \epsilon$ für alle $p, q \geq N(\epsilon)$ existiert, dann heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. [13, 1.26 Definition, S. 13]

Satz 1.5. *Ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im metrischen Raum (X, d) , so ist jeder Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zugleich Limespunkt.* [13, 1.27 Satz, S. 13]

Demnach ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge und weiters ist in $\mathbb{R}$ jede Cauchy-Folge konvergent. [13, S. 13]

Da sich diese Arbeit auch mit dem Unterschied der euklidischen und der topologischen Dimension beschäftigt, bedarf es auch einer Definition von topologischen Räumen.

Definition 10. Sei X eine Menge und $\mathcal{O}$ ein System von Teilmengen von X . Dann heißt $\mathcal{O}$ Topologie auf X , wenn es folgende Eigenschaften aufweist:

i) Jede Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$:

$$O_i \in \mathcal{O}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

ii) Jeder Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{O}$ gehört zu $\mathcal{O}$:

$$O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{O}. \quad [13, 2.1 Definition, S. 17]$$

Definition 11. Sei X ein metrischer Raum, dann heißt $|U|$ Durchmesser einer Menge. Es gilt:

$$|U| := \sup\{d(x - y) : x, y \in X\}.$$

Definition 12. X sei nun eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X . Dann nennen wir $(X, \mathcal{O})$ einen topologischen Raum. „Die Teilmengen von X , die zu $\mathcal{O}$ gehören, heißen offene Mengen von $(X, \mathcal{O})$. Die Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossene Mengen von $(X, \mathcal{O})$.“ [13, 2.2 Definition, S. 17]

$\emptyset$ und X selbst sind immer offene Mengen von $(X, \mathcal{O})$, da $\bigcup_{i \in \emptyset} O_i = \emptyset$ und $\bigcap_{i \in \emptyset} O_i = X$. [13, S. 17]

Definition 13. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und x ein Punkt davon. Sei $x \in U \subset X$. Falls es ein $O \in \mathcal{O}$ gibt, sodass $x \in O \subset U$, so nennen wir U Umgebung von x . Die Menge all dieser Umgebungen von x nennen wir Umgebungssystem von $x : \mathcal{U}(x)$. [13, 2.13 Definition, S. 19]

Definition 14. Sei A eine Teilmenge von X mit $B \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in A$, so ist B eine Umgebung von A . [13, 2.17 Definition, S. 20]

Definition 15. Sei $\mathcal{B}(x)$ ein Teilsystem des Umgebungssystems $\mathcal{U}(x)$ von x . Gibt es zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$, wobei B eine Teilmenge von U ist, so ist $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von x . [13, 2.18 Definition, S. 20]

„In einem metrischen Raum (X, d) bilden die offenen Kugeln mit Zentrum x und den Radien $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ eine Umgebungsbasis von x .“ [13, S. 21]

Definition 16. Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume. Wir nennen die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ stetige Abbildung von $(X, \mathcal{O}_1)$ in $(Y, \mathcal{O}_2)$, insofern die Urbilder offener Mengen von $(Y, \mathcal{O}_2)$ offene Mengen von $(X, \mathcal{O}_1)$ sind. Das heißt für alle $O \in \mathcal{O}_2$ gilt $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1$. [13, 2.35 Definition, S. 23]

Definition 17. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Und angenommen f und f^{-1} sind stetig, dann nennen wir f topologische Abbildung bzw. Homöomorphismus. [13, 2.41 Definition, S. 24]

Satz 1.6. Seien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(Y, \mathcal{O}_2)$ topologische Räume und die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann gilt: f ist ein Homöomorphismus genau dann wenn f stetig und offen ist. [13, 2.42 Satz, S.24]

Definition 18. Sei I eine Menge. [13, S. 4] Wir nennen die Menge I gerichtet, wenn auf ihr eine Relation $\leq$ mit diesen Eigenschaften gültig ist:

- i) $i \leq i$ für alle $i \in I$.
- ii) Wenn $i_1 \leq i_2$ und $i_2 \leq i_3$, folgt daraus $i_1 \leq i_3$.
- iii) Für $i_1, i_2 \in I$ existiert ein $i_3 \in I$, sodass $i_1 \leq i_3$ und $i_2 \leq i_3$. [13, S. 54]

Definition 19. Sei X ein topologischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung. Dann heißt die Überdeckung offen, wenn auch alle $U_i, i \in I$ in X offen sind. Die Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ wird endlich (abzählbar) genannt, wenn I eine endliche (abzählbare) Menge ist. [13, 7.11 Definition, S. 79]

Zusätzlich bedarf es noch einer formalen Definition aus dem Buch von Falconer [4].

Definition 20.

- i) Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt linear, wenn $T(x + y) = T(x) + T(y)$ und $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
- ii) Eine lineare Abbildung ist injektiv genau dann, wenn $T(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ gilt.
- iii) Sei die Transformation $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Form $S(x) = T(x) + a$, wobei T eine injektive lineare Abbildung und a ein Punkt in $\mathbb{R}^n$ ist, dann heißt S affine Abbildung. [4, S. 8]

2 Begriffsdefinitionen und Bezüge

In historischer Betrachtung hat sich die Mathematik in erster Linie mit Mengen und Funktionen beschäftigt, auf denen klassische Berechnungsmethoden anwendbar sind. Funktionen und Mengen, die dafür nicht „glatt“ oder „regelmäßig genug“ waren, wurden als „pathologisch“ abgetan und waren eine genauere wissenschaftliche Untersuchung nicht wert. Sie wurden als individuelle Kuriositäten angesehen und kaum als eigene Klasse, auf der eine allgemeine Theorie anwendbar ist. Doch vor einigen Jahrzehnten hat sich diese Denkweise geändert. Die Wissenschaft hat das aussagekräftige Potential dieser „nicht-glatten“ Funktionen und Mengen erkannt und sieht auch deren großen Vorteil für eine bessere Beschreibung von Naturphänomenen. Für diese irregulären Mengen besitzt die klassische Geometrie meist nur eine unzureichende Beschreibung. Sie können mithilfe der fraktalen Geometrie weitaus genauer studiert werden. [4, S. xvii]

2.1 Cantormenge

Ein sehr bekanntes Beispiel hierfür ist die Cantormenge. In ihrer Einfachheit sind allerdings sofort die typischen Eigenschaften für fraktale Mengen sichtbar. Diese Menge konstruiert sich durch ein vorgegebenes Einheitsintervall mit einer Folge von Löschoperationen. S_0 sei Schritt Null und repräsentiert die Ausgangssituation des Einheitsintervalls $[0, 1]$. Im ersten Schritt S_1 wird nun das mittlere Drittel des Einheitsintervalls entfernt - übrig bleiben die beiden Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$. Im nächsten Schritt S_2 werden abermals die mittleren Drittel der übrigen Intervalle entfernt. Somit bleiben die vier Intervalle $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$ übrig. Dieser Löschprozess findet sich in den weiteren Schritten S_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) wieder, wobei immer das mittlere Drittel der Intervalle von S_{i-1} entfernt wird. Wir erhalten dadurch für S_i 2^i Intervalle mit den Längen 3^{-i} . Die Cantormenge F besteht demnach aus den Zahlen, die für alle i in S_i liegen, also $F = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$. Wir können uns F als Grenzwert der Folgen S_i für i gegen unendlich vorstellen. Die Cantormenge F kann unmöglich bildlich detailgerecht gezeichnet oder veranschaulicht werden. Deshalb werden für eine Abbildung stets nur die ersten Schritte der Zerlegung dargestellt. [4, S. xvii]

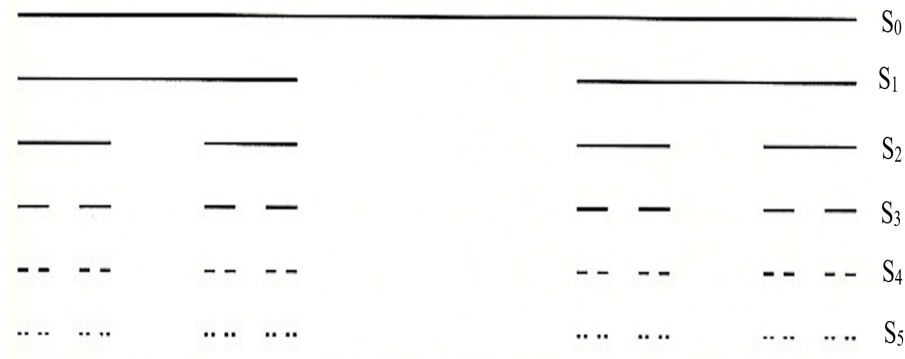


Abbildung 1: Die ersten fünf Konstruktionsschritte der Cantormenge.

Die Cantormenge F ist eine überabzählbare Menge, welche unendlich viele Zahlen in jeder Umgebung eines Punktes beinhaltet, auch wenn es auf den ersten Blick so aussieht, als bliebe nichts vom Einheitsintervall übrig. Jedoch trägt der Schein und es bleiben genug einzelne Punkte übrig. Das konkrete Aussiebverfahren kann im Werk von Falconer [4] nachgelesen werden. Im Folgenden sind einige Merkmale der Cantormenge F aufgelistet, die wir später noch öfter und genauer betrachten werden. [4, S. xviii] Einfache und leicht ableitbare Eigenschaften von F , die wir später für allgemeine Fraktale definieren werden, sind folgende:

- Selbstähnlichkeit.
- Feinstruktur.
- Trotz einer komplizierten Struktur gibt es eine klare Definition.
- Rekursives Verfahren für die Konstruktion.
- F kann mit klassischer Geometrie nicht beschrieben werden.
- Obwohl F eine große Menge ist, kann ihre Größe nicht mit den üblichen Maßeinheiten wie Länge gemessen werden. [4, S. xviii]

2.2 Kochkurve

Ein weiteres einfaches Beispiel eines Fraktals ist etwa die Kochkurve. Sie ist besonders bekannt, da drei aneinandergelegte Kochkurven einer Schneeflocke in ihrem Aussehen sehr ähnlich sind (siehe Abbildung 3). [4, S. xviii] Der schwedische Mathematiker, Helge von Koch, führte 1904 die sogenannte *Kochkurve* ein.

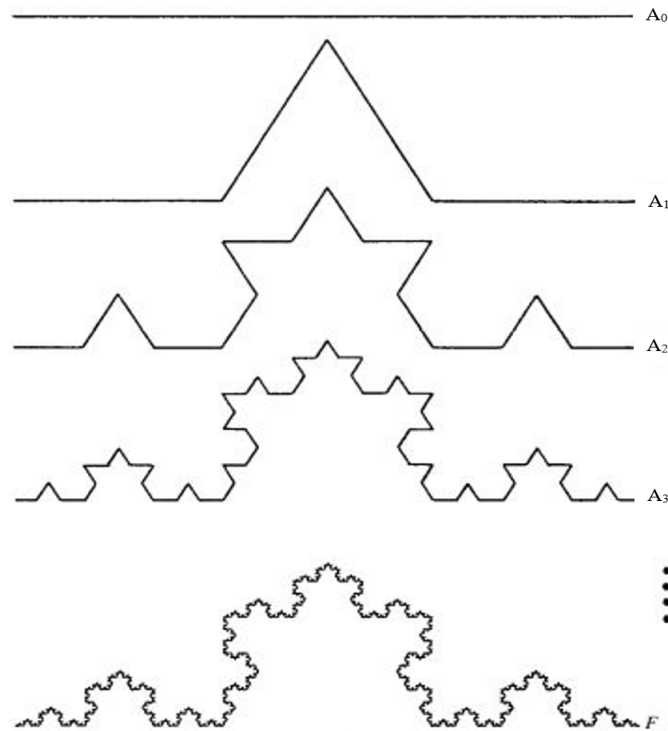


Abbildung 2: Die Konstruktionsschritte der Kochkurve.

Das ursprüngliche Ausgangsobjekt der Kochkurve A_0 ist eine gerade Linie. Diese wird für das nächste Objekt A_1 in drei gleich große Teile geteilt, wobei das mittlere Stück durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt wird ohne Basis. D. h. unser neues Ausgangsobjekt A_1 besteht nun aus vier Teilen. Im nächsten Schritt, um zu A_2 zu gelangen, werden abermals alle Linien gedrittelt und ihr mittlerer Teil durch ein gleichseitiges Dreieck ohne Basis ersetzt. Damit ergibt sich, dass jeder der vier Teile im k -ten Schritt eine verkleinerte Kopie, um den Faktor $\frac{1}{3}$, des Schrittes davor, also des $(k-1)$ -ten Schrittes ist.[12, S. 107, 111] Dieses Verfahren wird immer wieder angewendet und schließlich ergibt sich für diese Iteration die Kochkurve als Grenzwert.[3, S. 20] Wohlbemerkt handelt es sich bei der Kochkurve um keine klassische Kurve, wie wir sie kennen. Außerdem hat sie keine geraden Linien oder Abschnitte. [12, S. 110]

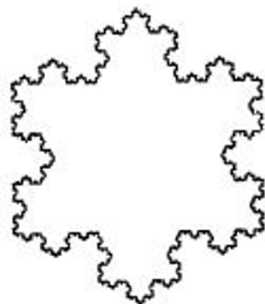


Abbildung 3: Drei Kochkurven aneinandergereiht ergeben eine Schneeflocke.

Ebenfalls sehr einfach in Konstruktion und Darstellung ist das Sierpinski-Dreieck (dazu später mehr in Kapitel 2.3). Hier wird ähnlich wie bei der Cantormenge immer ein Teil der Menge in jedem Schritt entfernt. [4, S. xx]

2.3 Sierpinski-Dreieck

Ein weit verbreitetes und bekanntes Beispiel für ein Fraktal ist das Sierpinski-Dreieck – es handelt sich dabei um eine Menge in der Ebene. Für die Konstruktion starten wir in einem ausgefüllten gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 1 (also sowohl das Dreieck, als auch die Innenfläche). Dies ist unsere Ausgangssituation und wird S_0 genannt. Im nächsten Schritt unterteilen wir das Ausgangsdreieck in vier gleich große Dreiecke, durch Linien, die die Mittelpunkte der Seiten verbinden. Die Seitenlänge der neuen Dreiecke ist nun $\frac{1}{2}$ und das mittlere der Dreiecke ist um 180 Grad gedreht, dieses Dreieck wird entfernt (nur das innere „offene Dreieck“ wird entfernt, der Rand bleibt). S_1 ist hier also vollendet (siehe Abbildung 4) und S_1 ist eine Teilmenge von S_0 . Im Schritt S_2 werden die drei verbliebenen Dreiecke abermals in vier gleiche Dreiecke mit Seitenlänge $\frac{1}{4}$ unterteilt und die mittleren „offenen Dreiecke“ entfernt. S_2 ist nun eine Teilmenge von S_1 und damit auch eine Teilmenge von S_0 . Die nächsten Schritte erfolgen stets gleich wie in S_1 und S_2 bis wir schlussendlich eine Folge S_i von Mengen erhalten. Das *Sierpinski-Dreieck* ist der Grenzwert S dieser Folge von den Mengen. Da die Folge abnehmend ist ($S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supset \dots$), meint der Grenzwert die Schnittmenge der Mengen S_i also $S = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i$. [3, S. 7]

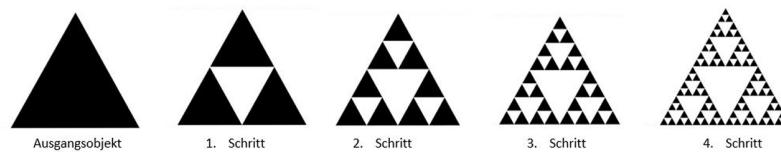


Abbildung 4: Die Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks in den ersten vier Schritten.

Wie bereits erwähnt, hat sich die Mathematik vor den Fraktalen hauptsächlich mit klassischen Objekten begnügt. Dies beruht darauf, dass viele mathematische Objekete oder Vorgehensweisen dafür benutzt wurden, um die Natur und deren Phänomene einfach und verständlich zu beschreiben. So findet sich auch die Entwicklung der Geometrie im Interesse an der Natur. Plausible Beispiele dafür sind etwa die Erde als Kugel oder die Planetenbahnen als Ellipsen anzunehmen. Es ist vollkommen klar, dass es sich nicht um exakte Ellipsen oder eine genaue Kugel handelt, jedoch macht diese Annahme physikalische Berechnungen möglich. Damit können etwa Planetenbewegungen oder das Gravitationsfeld der Erde untersucht werden. Ähnlich dazu finden wir die Anwendung von Fraktalen. Eine beachtliche Menge von ihnen ist in der Natur vorzufinden, wofür uns eine mathematische Beschreibung abermals im Verständnis derer weiterbringt. Wolken, Gemüse, Küstenlinien, topografische Oberflächen oder Turbulenzen in Flüssigkeiten seien hier als wenige von den vielen Beispielen genannt. Allerdings sind keine von ihnen, mathematisch gesehen, „echte“ Fraktale. Bei genauerer Betrachtung in kleinen Maßstäben verschwinden die typischen Merkmale eines Fraktals. Jedoch genügt ihre Ähnlichkeit in genügend großen Maßstäben, um sie als „natürliche“ Fraktale zu kennzeichnen. [4, S. xxvi]

Mandelbrot [8] hingegen hat von einem Unterschied von „natürlichen“ und mathematisch „echten“ Fraktalmengen gesprochen. Falconer [4] weist jedoch darauf hin, dass es in der Natur keine Fraktale gibt, da es ja auch keine geraden Linien oder genaue Kreise gibt. Die Natur liefert uns in ihrer Unvollkommenheit Phänomene, die es mithilfe von Mathematik zu beschreiben gilt, um sie besser verstehen zu können. Demnach können wir uns natürlichen Beispielen mit der fraktalen Geometrie abermals nur annähern. Diese Annäherung gelingt mit ihr jedoch teilweise besser als mit der klassischen Geometrie und unterstreicht damit die Notwendigkeit ihres Bestehens. Als Beispiel dient uns hierfür Abbildung 5. Zu sehen ist ein natürlicher Farn, wie er gepflückt worden ist und ein computeranimierter Farn, der klar eine gewisse Selbstähnlichkeit aufweist. Für den selbstähnlichen computeranimierten Farn benötigen wir ein iteriertes Verfahren, das genau dem Sinn von Selbstähnlichkeit entspricht wie wir später noch genauer

erfahren werden. [5, S. 262]



Abbildung 5: Links: natürlicher Farn, rechts: computeranimierter Farn.

2.4 Begriffsgeschichte und grundlegende Eigenschaften

Wie bereits aus den Eigenschaften der Cantormenge hervorgegangen ist, sind die Methoden der klassischen Geometrie für die Beschäftigung mit Fraktalen unbefriedigend und es bedarf einer neuen/anderen Herangehensweise. Das Hauptwerkzeug für das Studium der Fraktale und deren Charakteristik ist die Dimension in ihren verschiedenen Formen. [3, S. vii]

Der Begriff der Dimension ist für die fraktale Geometrie essentiell, da sie bestimmt wie viel Raum eine Menge in unmittelbarer Nähe ihrer Punkte einnimmt. In der Elementargeometrie haben Punkte Dimension null, Kurven Dimension eins, Oberflächen Dimension zwei und Ebenen Dimension drei. [3, S. 85] Für Fraktale ist diese Dimension allerdings nicht optimal, da zum Beispiel bei der Cantormenge immer wieder Teile entfernt werden und sie trotzdem aus unendlich vielen Punkten besteht. Fraktale bedürfen also einer anderen Art von Dimension, als der typisch geometrischen. [4, S. xxii]

Der Begriff *Fraktal*, um den es sich neben *Dimensionen* in dieser Arbeit hauptsächlich handelt, wurde erstmals vom Mathematiker Benoit Mandelbrot ins Leben gerufen. Seinen Ursprung findet das Wort in den 1970ern mit dem Aufkommen des Themas in der Mathematik. Es stammt von den lateinischen Wörtern *fractus* und *frangere* ab – übersetzt bedeuten diese gebrochen bzw. zerbrochen. Mandelbrot wollte einen Sammelbegriff für alle Objekte schaffen, die mithilfe der euklidischen Geometrie nicht definierbar waren. In der Fachwissenschaft wird dieser Begriff als sehr treffend angesehen, da er die Unregelmäßigkeiten von

natürlichen Fraktalen berücksichtigt. [8, S. 13–17]

Für eine ausreichende und treffende Definition bedarf es in der Mathematik jedoch mehr. Laut Mandelbrot definierte sich ein Fraktal demnach dadurch, dass es aus einer Menge besteht, „deren Hausdorff-Dimension strikt größer als ihre topologische Dimension ist.“ [8, S. 27]

2.5 Topologische Dimension

Die topologische Dimension (auch Lebesguesche Überdeckungsdimension genannt) geht auf den französischen Mathematiker Henri Léon Lebesgue zurück. [10, S. 5]

Die topologische Dimension einer Menge ist stets ganzzahlig mit $n \in \mathbb{N}$. n ist gleich null, wenn sie total unzusammenhängend ist. n ist gleich eins, wenn jeder Punkt beliebig kleine Nachbarschaften mit Begrenzung von Dimension null hat und so weiter. [4, S. xxv].

Die allgemein bekannte und gebräuchliche Dimension ist die der euklidischen Geometrie. Da diese allerdings der Feinstruktur exotischer Mengen oft nicht gerecht wird, wie bereits im vorigen Kapitel zu sehen war, haben Mathematiker:innen in der Vergangenheit immer wieder andere Dimensionen definiert, die für die Untersuchung von speziellen Mengen notwendig waren. So verhielt es sich auch mit der fraktalen Geometrie. Für diese ist die klassische euklidische Dimension zu ungenau und bereits aus der Definition von Mandelbrot [8] geht hervor, dass es einer genaueren Auseinandersetzung mit der topologischen Dimension und der Hausdorff-Dimension bedarf. [3, S. 85]

Definition 21. Sei S ein metrischer Raum. Dann heißt eine Menge A aus S *clopen*, wenn sie gleichzeitig abgeschlossen und offen ist (closed and open). Genauer gesagt sind etwa $\emptyset$ und S selbst clopen. [3, S. 86]

Eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ ist eine Verfeinerung einer Überdeckung $\mathcal{U}$, wenn jedes Element aus $\mathcal{V}$ in einem Element in $\mathcal{U}$ enthalten ist. Kurz: $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. [10, S. 5f]

Definition 22. Eine clopen Menge A definiert eine offene Überdeckung von F , die aus offenen disjunkten Mengen besteht, nämlich A und $F \setminus A$. Der Raum F ist nulldimensional, wenn jede endliche offene Überdeckung von F eine endliche Verfeinerung hat, die aus disjunkten clopen Teilmengen besteht. [3, S. 86]

Beispiel. Wenn F eine endliche Menge ist, so ist F nulldimensional. (Überprüfung im Originalwerk). [3, S. 86]

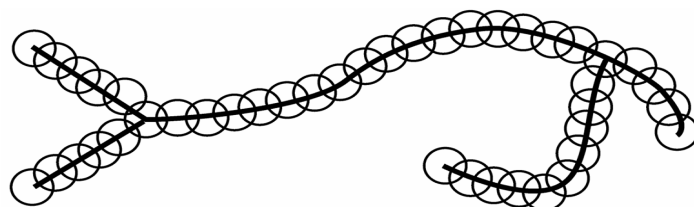


Abbildung 6: 1-dimensionale Menge überdeckt mit Scheiben.

Anhand eines Beispiels soll die Definition der topologischen Dimension verdeutlicht werden. Eine Menge (siehe Abbildung 6 oben) wird demnach 1-dimensional genannt, wenn sie mit mehreren kleinen offenen Mengen abgedeckt werden kann, welche sich zwei Mal überlappen. Kann eine Menge nur von disjunkten offenen Mengen überdeckt werden, so ist deren topologische Dimension null. Eine 2-dimensionale Menge kann demnach von kleinen offenen Mengen überdeckt werden, die sich jeweils drei Mal überlappen. Also hat eine Menge immer dann die topologische Dimension n , wenn sie mit kleineren offenen Mengen, die sich $n + 1$ -mal überschneiden, abgedeckt werden kann. [3, S. 86]

Definition 23. Die Ordnung einer Familie F von Mengen sei $\leq n$, mit $n \in \mathbb{N}$, wenn beliebige $n + 2$ der Mengen eine leere Schnittmenge haben. Wenn $n \geq 0$ ist, dann hat F die Ordnung n , wenn sie die Ordnung $\leq n$ hat, aber nicht die Ordnung $\leq n - 1$. [3, S. 92]

Definition 24 (Covering Dimension). Angenommen F ist ein metrischer Raum und $n \in \mathbb{N}$. Dann hat F die Überdeckungsdimension $\leq n$, wenn jede endliche offene Überdeckung von F eine Verfeinerung der Ordnung $\leq n$ hat. Die Überdeckungsdimension ist n , wenn sie $\leq n$, aber nicht $\leq n - 1$ ist. Formal wird dafür $Cov(F) = n$ geschrieben. Ist die Überdeckungsdimension $\leq n$ für kein ganzzahliges n , so $Cov(F) = \infty$. [3, S. 92]

Die einfachsten Fälle sollen hier kurz aufgelistet werden:

- $Cov(F) = -1$: Also $Cov(F) = -1$ nur dann, wenn $F = \emptyset$.
- Die Überdeckungsdimension für nichtleere Mengen F ist null, wenn F nulldimensional ist. [3, S. 92]

Für die Überdeckungsdimension gibt es mehrere unterschiedliche Definitionsmöglichkeiten – im Endeffekt sind sie jedoch alle äquivalent und es reicht, wenn wir uns auf die Definition 24 beschränken. [3, Theorem 3.2.1., S. 92]

Die topologische Dimension von $\mathbb{R}$

Als nächstes wollen wir uns die Berechnung der topologischen Dimension auf einzelnen Beispielen ansehen. Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht nulldimensional ist, benötigen wir die Besonderheit der Mengen, die clopen sind.

Lemma 2.1. *Sei S ein metrischer Raum. Gibt es nun eine clopen Menge U , so ist U zusammen mit $S \setminus U$ eine offene Überdeckung von S und liefert gleich ein Beispiel für die offene Teilüberdeckung, bei der jeder Punkt von S in höchstens einer Menge vorkommt. Umgekehrt ist auch nicht schwer zu zeigen, dass $\text{Cov}(S) = 0$ die Existenz einer clopen Menge impliziert.* [3, S. 86]

Beispiel. Wenn S endlich ist, dann ist S nulldimensional. Jeder einzelne Punkt $\{x\}$ ist eine offene Menge, also eine clopen Menge. Und weiters ist jede offene Hülle verfeinert durch die offene Hülle, die aus all diesen Punkten besteht, welche eine clopen Teilmenge von S ist. [3, S. 86]

Theorem 2.2. *Die einzigen clopen Mengen in $\mathbb{R}$ sind $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ selbst. Daraus folgt, dass $\text{Cov}(\mathbb{R}) \neq 0$.*

Beweis. Siehe [3, Theorem 3.1.4, S. 87]. □

Lemma 2.3. *Die Überdeckungsdimension für das Intervall $[a, b]$, für $a < b$ und $a, b \in \mathbb{R}$, ist gleich eins.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\text{Cov}[a, b] \leq 1$. Angenommen es gibt ein $\epsilon > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$, dann ist

$$\left\{ \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

eine offene Überdeckung von $[a, b]$ mit einem Durchmesser kleiner gleich ϵ und damit gleich eins. [3, Lemma 3.2.14, S. 97] □

Dass die topologische Dimension von $\mathbb{R}$ gleich eins ist, ist nicht nur zu erwarten, sondern hat auch hohen Plausibilitätsfaktor. Für einen kurzen Beweis, dass dies auch wirklich so ist, benötigen wir jedoch noch das Summentheorem. (Welches hier jedoch nicht bewiesen wird. Der Beweis dazu ist in Edgars Werk nachzulesen.) [3, S. 94]

Für das Summentheorem müssen wir uns zunächst die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Mengen ansehen und im nächsten Schritt eine Folge von abgeschlossenen Mengen. [3, S. 94]

Theorem 2.4. *Sei S ein metrischer Raum mit den abgeschlossenen Teilmengen F_1 und F_2 . Angenommen $\text{Cov}(F_1) \leq 1$ und $\text{Cov}(F_2) \leq 1$, dann ist auch $(\text{Cov}(F_1) \cup \text{Cov}(F_2)) \leq 1$. [3, Theorem 3.2.9, S. 95]*

Beweis. Siehe [3, Theorem 3.2.9, S. 95]. □

Theorem 2.5 (Summentheorem). *Sei S ein metrischer Raum und für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $F_i \subseteq S$. Wenn für jedes i $\text{Cov}(F_i) \leq 1$ zutrifft, dann ist $\text{Cov} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \leq 1$.*

Beweis. Siehe [3, Theorem 3.2.11, S. 95]. □

Theorem 2.6. $\mathbb{R}$ hat Überdeckungsdimension gleich eins.

Beweis. Die Vereinigung der abgeschlossenen Mengen $[-n, n]$ repräsentiert für $n \in \mathbb{N}$ die Linie $\mathbb{R}$. Nach Lemma 2.3 ist $\text{Cov}[-n, n] = 1$ und aus dem Summentheorem plus Theorem 2.2 mit $\text{Cov}\mathbb{R} \geq 1$ folgt, dass $\text{Cov}\mathbb{R} \leq 1$ und damit $\text{Cov}\mathbb{R} = 1$. [3, Theorem 3.2.15, S. 97] □

2.6 Hausdorff-Dimension

Im Gegenzug dazu wird die Hausdorff-Dimension, die dem deutschen Mathematiker Felix Hausdorff zu verdanken ist, mit vorigem Hausdorff-Maß wie folgt definiert.

Definition 25. Sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$ und s eine reelle Zahl $d \in [0, n]$, dann ist das d -dimensionale Hausdorff-Maß durch

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, |U_i| \leq \delta, \text{ für } i \in \mathbb{N} \right\}$$

gegeben. Und dabei ist U_i eine δ -Überdeckung von F . [10, Definition 2.2, S. 7] und [4, S. 27]

Das heißt abzählbar viele Mengen U_i mit Durchmesser kleiner gleich δ überdecken die Menge F . Dabei wird die Größe der Überdeckung $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ durch das Infimum optimiert und der Grenzwert $\delta \rightarrow 0$ betrachtet. Das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^s$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{H}^s$ ist monoton, also: $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$.
- $\mathcal{H}^s$ ist subadditiv, also: $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i)$.

- $\mathcal{H}^s$ ist metrisch, also: $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$, falls $\inf\{|x - y| \mid x \in A, y \in B\} > 0$. [10, S. 7]

Unter Zuhilfenahme des Hausdorff-Maßes lässt sich nun eine nicht ganzzahlige Dimension einführen. Die Betonung liegt hierbei auf „nicht ganzzahlig“, womit wir uns später in Kapitel 2.6 noch genauer auseinandersetzen werden.

Definition 26. Sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$, dann definiert sich die Hausdorff-Dimension für F durch:

$$\dim_H(F) = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\} = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\}. [10, \text{Definition 2.3, S. 8}]$$

Auch auf die Hausdorff-Dimension trifft die Eigenschaft der Monotonie zu und aus der Subadditivität des Hausdorff-Maßes folgt die abzählbare Stabilität der Dimension:

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup \{ \dim_H(F_i) \mid i \in \mathbb{N} \}. [10, \text{S. 8}]$$

Damit ergibt sich sofort, dass die Hausdorff-Dimension von abzählbaren Mengen gleich der topologischen Dimension dieser Mengen ist, also null. Für den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ sind die beiden ebenfalls gleichwertig und es gilt allgemein die Ungleichung

$$\text{Cov}(F) \leq \dim_H(F). [10, \text{S. 8}]$$

Nach Falconer [4] ist die Definition eines Fraktals nach Mandelbrot jedoch unzureichend und unbefriedigend, da nicht alle Fraktale inkludiert sind. Die bloße Annahme, dass die topologische Dimension kleiner sein muss als die Hausdorff-Dimension sei zu ungenau. Viele „klassische“ Definitionsansätze haben dieses Problem. Falconer rät daher zu einer mathematisch unüblichen Form der Definition – einer Definition bestehend aus beschreibenden Eigenschaften.

Definition 27. Eine Menge F ist ein Fraktal, wenn folgende Eigenschaften zutreffen:

- i) F besitzt eine Feinstruktur, also können Einzelheiten auch noch auf beliebig kleinen Skalen gezeigt werden.
- ii) F ist zu irregulär und kann daher weder lokal, noch global mit traditionellen geometrischen Mitteln beschrieben werden.
- iii) F besitzt häufig eine Form von Selbstähnlichkeit (auch annähernde oder statistische Selbstähnlichkeit).

- iv) Die topologische Dimension von F ist normalerweise kleiner als die fraktale Dimension (die beliebig definiert ist - dies trifft zumindest auf jede fraktale Dimensionsdefinition zu, die in dieser Arbeit definiert ist).
- v) F ist meistens sehr einfach definiert, vielleicht rekursiv. [4, S. xxv]

Für ein genaueres Verständnis dieser Definition bedarf es noch einer Erläuterung des Terminus *Selbstähnlichkeit*. Abgeleitet von der geometrischen Bedeutung von Ähnlichkeit – wobei zwei Objekte als ähnlich gelten, falls deren Winkel- und Streckenverhältnisse übereinstimmen – meint Selbstähnlichkeit, dass sich ein Teil eines Objektes zum Ganzen ähnlich verhält. *Ähnlich* impliziert ja gerade, dass die beiden Objekte unterschiedliche Größen aufweisen können auf denen verschiedene Transformationen angewandt und kombiniert werden. Wenn ein Objekt also selbstähnlich ist, dann kann ein Teil desselben mithilfe von Streckung, Stauchung und Verschiebung auf das Ausgangsobjekt abgebildet werden. [12, S. 83]

Als Beispiel erinnern wir uns an die Cantormenge zu Beginn dieses Kapitels. Siehe Beispiel auf S. 9 .

Ausgehend von der Natur ist jedoch festzustellen, dass eine exakte Selbstähnlichkeit in der Mathematik schlichtweg idealisiert ist. Trotzdem stammt die Idee zur Selbstähnlichkeit von natürlichen Phänomenen ab. Beispiele dafür sind im Bereich der Landschaft, – wie etwa bei Küsten und Bergen – Pflanzen und Oberflächen von Planeten zu finden. Betrachten wir einen Berg, so können wir bei Annäherung feststellen, dass er eine ähnliche Struktur aufweist wie Gesteinsbrocken. Auch kleine und größere Teile einer Wolke weisen dieselbe Komplexität wie die Ursprungswolke auf und Krater in der Mondoberfläche sind sich auch trotz unterschiedlicher Größen sehr ähnlich. Jedoch ist unsere Natur mit all ihren Facetten begrenzt – so auch diese „selbstähnlichen“ Phänomene. Trotzdem werden sie für eine genauere und bessere Untersuchung in der Mathematik idealisiert. [14, S. 34f]

Die Hausdorff-Dimension in der fraktalen Geometrie

Wie bereits aus der Definition 26 der Hausdorff-Dimension mit dem Hausdorff-Maß herausgeht, unterscheidet sich diese zuallererst darin, dass sie keine natürliche Zahl sein muss. In Bezug auf Fraktale, bei denen es darum geht, wie viel Raum eine Menge in unmittelbarer Nähe ihrer Punkte beansprucht, ist eine solche Dimension verständlicherweise besser geeignet. Heutzutage gibt es andere Dimensionen, die fraktale Phänomene beschreiben können, jedoch ist die Hausdorff-Dimension die älteste und vermutlich auch die wichtigste von allen.

Sie kann auf allen Mengen angewandt werden und ist mathematisch leicht zu handhaben, weil sie mit einfachen Maßen funktioniert. Sie hat jedoch auch den Nachteil, dass sie meist nur sehr schwer zu berechnen bzw. computerunterstützt abzuschätzen ist. Nichtsdestotrotz ist für eine mathematische Auseinandersetzung mit Fraktalen und deren Dimension das Wissen über die Hausdorff-Dimension Voraussetzung. [4, S. 27]

Nach Falconer [4] sollten die Eigenschaften, die für die Hausdorff-Dimension gelten, von jeder „vernünftigen“ Definition einer Dimension erfüllt sein.

- i) Monotonie: Sei $E \subset F$, dann ist $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$. Dies folgt umgekehrt aus der Maß-Eigenschaft $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ für jedes d .
- ii) Abzählbare Stabilität: Wenn $F_1, F_2, \dots$ eine abzählbare Folge von Mengen ist, dann ist $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$. Umgehend aus der Monotonieeigenschaft folgt $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H(F_j)$ für jedes j . Andererseits, wenn $d > \dim_H(F_i)$ für alle i , dann ist $\mathcal{H}^d(F_i) = 0$, sodass $\mathcal{H}^d(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$ die umgekehrte Ungleichung ergibt.
- iii) Abzählbare Mengen: Sei F abzählbar, dann ist $\dim_H(F) = 0$. Für einpunktige Mengen F_i gilt klarerweise $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ und $\dim_H(F_i) = 0$. Aus der abzählbaren Stabilität folgt somit $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$.
- iv) Offene Mengen: Wenn F eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $\dim_H(F) = n$. Da F eine Kugel mit n -dimensionalem positivem Volumen enthält, ist $\dim_H(F) \geq n$, aber weil F in abzählbar vielen Kugeln enthalten ist, ist $\dim_H(F) \leq n$ aufgrund von der abzählbaren Stabilität und Monotonie.
- v) Glatte Mengen: Wenn F eine glatte (also stetig differenzierbar) m -dimensionale Teilmanigfaltigkeit (zum Beispiel eine m -dimensionale Oberfläche) des $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $\dim_H(F) = m$. Dabei ist hervorzuheben, dass glatte Kurven Dimension eins und glatte Oberflächen Dimension zwei haben. Dies lässt sich aus der Beziehung zwischen Hausdorff- und Lebesgue-Maßen ableiten, würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen. [4, S. 32]

Um auf die Transformationseigenschaft und damit einen wichtigen Kernteil der Hausdorff-Dimension genauer eingehen zu können, müssen wir zuerst noch die des Hausdorff-Maßes genauer untersuchen.

Proposition 2.7. *Wenn $F \subset \mathbb{R}^n$ und die Abbildung $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist für die Konstanten $c > 0$ und $\lambda > 0$, sodass*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\lambda \quad (x, y \in F). \quad (\text{Hölder Bedingung})$$

Dann gilt für jedes d

$$\mathcal{H}^{\frac{d}{\lambda}}(f(F)) \leq c^{\frac{d}{\lambda}} \mathcal{H}^s(F)$$

Beweis. Siehe [4, Proposition 2.2, S. 30]. $\square$

Mit dieser Erkenntnis lassen sich die Transformationseigenschaften der Hausdorff-Dimension leichter beweisen, da sie direkt aus ihr folgen.

Proposition 2.8. Sei $F \subset \mathbb{R}^n$ und die Abbildung $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ erfülle die Hölder-Bedingung

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Dann gilt: $\dim_H f(F) \leq (\frac{1}{\alpha}) \dim_H(F)$.

Beweis. Wenn $d > \dim_H(F)$ dann ist nach Proposition 2.7 $\mathcal{H}^{\frac{d}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{d}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F) = 0$. Das impliziert, dass $\dim_H f(F) \leq \frac{d}{\alpha}$ für alle $d > \dim_H(F)$. [4, Proposition 2.3, S. 32] $\square$

Mit dieser Proposition ist es uns schließlich ganz schnell und einfach möglich, die fundamentale Eigenschaft der Hausdorff-Dimension zu zeigen. Und zwar ist die Hausdorff-Dimension unveränderlich unter bi-Lipschitz Transformationen.

Definition 28. Seien X, Y Mengen und f eine Funktion mit $f : X \rightarrow Y$, dann heißt f *Hölderfunktion des Exponenten λ* , wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\lambda \quad (x, y \in X)$$

für eine Konstante $c \geq 0$. Wir nennen die Funktion f *Lipschitz-Funktion*, wenn $\lambda = 1$ angenommen werden kann, also

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad (x, y \in X)$$

und wir nennen f eine *bi-Lipschitz-Funktion*, wenn

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (x, y \in X)$$

für $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ erfüllt ist. In diesem Fall sind sowohl f , als auch $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ Lipschitz-Funktionen. [4, S. 8]

Korollar 2.9.

i) Wenn die Abbildung $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lipschitz Transformation (wie in 28) ist, dann gilt: $\dim_H f(F) \leq \dim_H(F)$.

ii) Wenn die Abbildung $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine bi-Lipschitz Transformation mit

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (x, y \in F)$$

und $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, dann ist $\dim_H f(F) = \dim_H(F)$.

Beweis. i) folgt sofort aus der Proposition 2.2 für $\alpha = 1$. Wird diese nun auf $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$ angewendet, folgt daraus die Ungleichung für ii). [4, Corollary 2.4, S. 32f] $\square$

Wir sehen also, dass falls zwei Mengen unterschiedliche Dimensionen aufweisen, es keine bi-Lipschitz Überdeckung von der einen auf die andere geben kann. Dies erinnert an die Topologie, wo verschiedene „Invarianten“ aufgestellt werden, um zwischen Mengen, die nicht homöomorph sind, zu unterscheiden: Es gibt keinen Homöomorphismus, wenn sich die topologischen Invarianten von zwei Mengen unterscheiden. Zwei Mengen werden in der Topologie als „gleich“ betrachtet, wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus gibt. In der fraktalen Geometrie gibt es dafür einen ähnlichen Ansatz. Es ist von zwei „gleichen“ Mengen auszugehen, falls eine bi-Lipschitz Abbildung zwischen ihnen besteht. Wir suchen also nach Parametern (Dimension inkludiert), die Aufschluss darüber geben, ob Mengen bi-Lipschitz äquivalent sind oder nicht. Notwendigerweise sind bi-Lipschitz Transformationen Homöomorphismen, damit erhalten wir topologische Parameter als Startpunkt und im Weiteren die Hausdorff-Dimension (oder ähnliche Definitionen von Dimensionen). Diese liefern schlussendlich die erfordernten Unterscheidungsmerkmale von Fraktalen. [4, S. 33]

Allgemein erhalten wir anhand der Dimension kaum Informationen über die topologischen Eigenschaften einer Menge. Jedoch wissen wir, dass eine Menge, deren Dimension kleiner als eins ist, weitgehend unzusammenhängend ist. Damit ist gemeint, dass keine zwei Punkte einer Menge in der gleichen Zusammenhangskomponente liegen.

Proposition 2.10. *Eine Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dim_H(F) < 1$ ist total unzusammenhängend.*

Beweis. Siehe [4, Proposition 2.5, S. 33]. $\square$

3 Alternative fraktale Dimensionen

Da die Hausdorff-Dimension, wie bereits erwähnt, meistens eher schwer zu berechnen bzw. computerunterstützt abzuschätzen ist, gibt es eine Reihe von anderen Dimensionsdefinitionen, die für die Berechnung von fraktalen Dimensionen herangezogen werden können.

3.1 Selbstähnlichkeits-Dimension

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, gibt es viele Fraktale, die eine hohe Selbstähnlichkeit aufweisen. Dies ist etwa bei der Cantormenge oder dem Sierpinski-Dreieck leicht zu erkennen. Einzigartig ist dabei, dass die Selbstähnlichkeit hier nicht nur als fraktale Eigenschaft gesehen werden kann, sondern wir können mit ihr auch Fraktale definieren. Dafür benötigen wir „iterierte Funktionensysteme“, welche dies auf einzigartige Weise tun und oftmals ist es möglich, durch sie auch direkt eine einfache Dimension für die Fraktale zu finden. [4, S. 123]

Definition 29.

- i) Sei D eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (oftmals mit $D = \mathbb{R}^n$). Sei c mit $0 < c < 1$ und S eine Abbildung mit $S : D \rightarrow D$ mit

$$|S(x) - S(y)| \leq c|x - y| \text{ für alle } x, y \in D,$$

dann nennen wir die Abbildung S eine Kontraktion auf D .

- ii) Jede Kontraktion ist stetig. Wenn nun aber die Gleichung erfüllt ist mit $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$, dann wandelt die Abbildung S die Mengen in geometrisch ähnliche Mengen um und wir nennen S eine *kontrahierende Ähnlichkeit*.
- iii) Gibt es eine endliche Menge von solchen Kontraktionen $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ für $m \geq 2$, dann nennen wir diese Menge *iteriertes Funktionensystem* oder kurz *IFS*.
- iv) Sei $F \subset D$ nicht leer und kompakt, dann ist F ein *Attraktor* (oder invariante Menge) vom IFS, wenn

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) \text{ gilt. [4, S. 123]}$$

Theorem 3.1. *Angenommen es gibt ein IFS mit den Transformationen $\{S_1, \dots, S_m\}$ auf $D \subset \mathbb{R}^n$, sodass*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y| \quad (x, y) \in D$$

mit $c_i < 1$ für alle i . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Attraktor F mit

$$F = \bigcup_{i=1}^n S_i(F). [4, \text{Theorem 9.1, S. 124}]$$

Definition 30. Wenn ein IFS aus affinen Transformationen $\{S_1, \dots, S_m\}$ auf $\mathbb{R}^n$ mit einem Attraktor F wie in Definition 3.1 definiert existiert, dann nennen wir das IFS eine *selbst-affine Menge*. [4, S. 139]

Die Haupteigenschaft des iterierten Funktionensystems ist es, einen individuellen Attraktor zu bestimmen. Dieser ist meistens ein Fraktal. Als einfaches Beispiel soll uns hier abermals die Cantormenge dienen.

Beispiel. Angenommen $S_1, S_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x; \quad S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Sei F die Cantormenge. Wir erinnern uns an die Abbildung der Cantormenge F und ihre ersten Konstruktionsschritte – sie sei hier noch einmal abgebildet für eine bessere Orientierung.

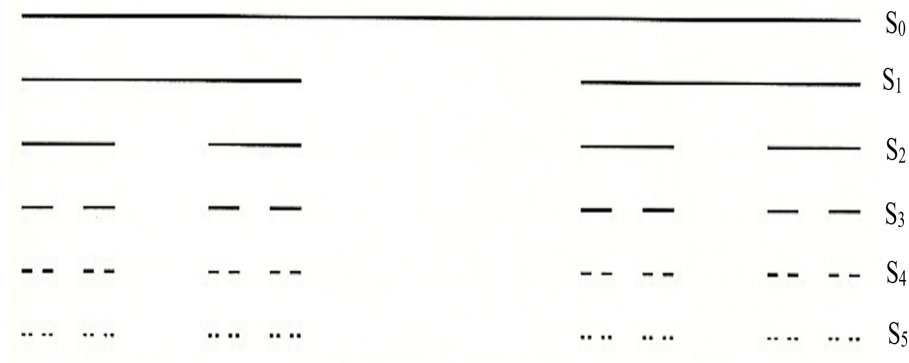


Abbildung 7: Die ersten fünf Konstruktionsschritte der Cantormenge

Damit ist $S_1(F)$ die linke und $S_2(F)$ sozusagen die rechte „Hälfte“ von F . Im Weiteren ergibt sich daraus $F = S_1(F) \cup S_2(F)$. Somit ist F ein Attraktor des iterierten Funktionensystems, bestehend aus $\{S_1, S_2\}$. Die grundlegende Selbstähnlichkeit der Cantormenge wird durch diese beiden Abbildungen repräsentiert. [4, S. 123]

Allgemein gibt es zwei Hauptprobleme, die im Bereich des iterierten Funktionensystems auftauchen. Das erste ist die Darstellung oder die „Kodierung“ einer gegebenen Menge als Attraktor eines iterierten Funktionensystems. Das zweite Problem bezieht sich dabei auf die „Dekodierung“ des IFS durch Bekanntheit des Attraktors. In beiden Fällen können wir mithilfe des IFS die Analyse der

Struktur und die Dimension des Attraktors weiter fortsetzen. Bei gegebenen F ein iteriertes Funktionensystem mit einzigartigem Attraktor zu finden ist oft durch Überprüfung möglich, solange F selbstähnlich oder zumindest selbst-affin ist. Zum Beispiel ist es plausibel, dass der Cantor-Staub der Attraktor der vier Ähnlichkeiten ist, welche die grundlegende Selbstähnlichkeit der Menge darstellen:

$$\begin{aligned} S_1(x, y) &= (\tfrac{1}{4}x, \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}), & S_2(x, y) &= (\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}y), \\ S_3(x, y) &= (\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}y + \tfrac{3}{4}), & S_4(x, y) &= (\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}). \end{aligned} \quad [4, \text{S. 126}]$$

Es ist allgemein nicht möglich, bei gegebener Menge als Attraktor, ein iteriertes Funktionensystem zu finden. Dennoch kann eines mit einem annähernd ähnlichem Attraktor zur benötigten Menge gefunden werden. [4, S. 126]

Nach dieser kurzen Einführung zu iterierten Funktionensystemen kommen wir zum eigentlichen Thema dieses Unterkapitels: der Selbstähnlichkeits-Dimension. Die Verwendung von iterierten Funktionensystemen hat den Vorteil, dass die Dimension des Attraktors oftmals sehr einfach zu berechnen oder zumindest durch die definierenden Kontraktionen zu schätzen ist.

Definition 31. Eine Transformation $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Ähnlichkeitsverhältnis oder eine Größenordnung $c > 0$, wenn

$$|S(x) - S(y)| = c|x - y|, \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Eine Ähnlichkeit wandelt Mengen in geometrisch ähnliche Mengen um, wobei die Längen mit dem Faktor c multipliziert werden. [4, S. 8]

Wir gehen davon aus, dass $S_1, S_2, \dots, S_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Ähnlichkeiten sind mit

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n),$$

wobei $0 < c_i < 1$ (mit c_i als Verhältnis von S_i). Daraus folgt, dass jedes S_i Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ in geometrisch ähnliche Mengen umwandelt. Wir nennen den Attraktor so einer Menge von Ähnlichkeiten (*streng*) *selbstähnliche Menge*. Sie ist eine Menge bestehend aus kleineren Kopien ihrer selbst. [4, S. 128]

Ein wichtiger Satz, der uns eine simple schnelle Berechnung von einfach konstruierten Fraktalen liefert, ist derjenige, dass $\dim_H(F) = \dim_B(F) = s$ unter bestimmten Bedingungen gilt. [4, S. 129]

Definition 32 (Open set condition). Ein IFS bestehend aus Abbildungen S_i erfüllt die open set condition, wenn es eine nichtleere beschränkte offene Menge V gibt, sodass S_i erfüllt nun die *open set condition*, wenn es eine nichtleere begrenzte offene Menge V gibt, sodass

$$V \supset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i(V)$$

und $S_i(V)$ mit $S_i \cap S_j, i \neq j$ paarweise disjunkt sind. [4, S. 129]

Die *open set condition* stellt sicher, dass die Teilmengen $S_i(F)$ von F sich nicht „zu sehr“ überschneiden. [4, S. 129]

Theorem 3.2. *Angenommen für die Ähnlichkeiten S_i auf $\mathbb{R}^n$ mit den Verhältnissen $0 < c_i < 1$ für $1 \leq i \leq m$ gilt die open set condition von oben. Wenn F nun der Attraktor des iterierten Funktionensystems $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ ist mit*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F),$$

dann gilt $\dim_H(F) = \dim_B(F) = s$, wobei s gegeben ist durch

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Des Weiteren gilt damit auch, für den Wert s , $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Beweis. Siehe im Original von Falconer [4, Theorem 9.3, S. 130]. □

Im nächsten Kapitel 3.2 soll dementsprechend auch $\dim_B$ definiert werden.

Beispiel. Angenommen wir haben ein Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann kann dieses in die beiden Intervalle $[a, (a+b)/2]$ und $[(a+b)/2, b]$ aufgeteilt werden. Beide Intervalle sind dem Ausgangsintervall $[a, b]$ im Verhältnis $\frac{1}{2}$ ähnlich. Aus der Verhältnislste $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ergibt sich der Ähnlichkeitswert s durch die Lösung der Gleichung

$$2(\frac{1}{2})^s = 1.$$

Daraus folgt, dass $s = 1$, also ist die Selbstähnlichkeitsdimension eins. [3, S. 118]

3.2 Box-Counting Dimension

Die *Box-Counting Dimension* bzw. *Box-Dimension* definiert sich wortwörtlich durch das Abzählen von Kästchen. Sie ist wohl die am häufigsten verwendete Dimension, aufgrund ihrer einfachen Berechnungsmöglichkeit. Ihre Ursprünge gehen zurück bis mindestens 1930 und findet sich heute auch mit verschiedenen anderen Namen. [4, S. 41] Allgemein gilt sie als die in der Wissenschaft am häufigsten verwendete Dimension für die Berechnung von fraktalen Objekten. [12, S. 246]

Definition 33. Sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer und beschränkt und $N_\delta(F)$ die kleinste Anzahl von Mengen mit Durchmesser von maximal δ , die F überdecken können. Dann definiert sich die

- i) untere Box-Counting Dimension durch: $\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$
- ii) obere Box-Counting Dimension durch: $\overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$

Wenn die obere und die untere gleich sind, dann ist der Wert der Box-Counting Dimension durch

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \text{ gegeben. [4, S. 41]}$$

Bemerkung. Für obige Definition ist anzunehmen, dass wir $\delta > 0$ beliebig klein wählen können und damit $-\log \delta$ auf jeden Fall stets positiv ist. [4, S. 42]

Die Hausdorff-Dimension steht in Verbindung zur Box-Counting Dimension, welche uns hilft, die Hausdorff-Dimension besser abschätzen zu können. Und zwar gilt nach der Definition der Hausdorff-Dimension, falls F von $N_\delta(F)$ Mengen überdeckt werden kann, dann ist

$$\mathcal{H}^d \leq N_\delta(F) \delta^s \text{ [4, S. 46]}$$

Die Eigenschaften der Box-Counting Dimension sind denen der Hausdorff-Dimension sehr ähnlich und können daher auch auf ähnliche Weise gezeigt werden.

- i) Eine glatte m -dimensionale Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension $\dim_B(F) = m$.
- ii) Die beiden Dimensionen $\underline{\dim}_B$ und $\overline{\dim}_B$ sind monoton.
- iii) $\overline{\dim}_B$ ist endlich stabil, das heißt

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\};$$

und die zugehörige Identität gilt *nicht* für die untere Box-Counting Dimension $\underline{\dim}_B$.

- iv) $\underline{\dim}_B$ und $\overline{\dim}_B$ sind bi-Lipschitz invariant. Denn wenn $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ und F kann von $N_\delta(F)$ Mengen mit Durchmesser maximal δ überdeckt werden, dann erzeugen die $N_\delta(F)$ Bilder von diesen Mengen unter f eine Überdeckung von $f(F)$ von Mengen mit Durchmesser höchstens $c\delta$: $\dim_B f(F) \leq \dim_B(F)$. Bezüglich der bi-Lipschitz-Transformationen verhalten sich Box-Counting und Hausdorff-Dimension also gleich. [4, S. 47f]

Unter bestimmten Bedingungen ist die Hausdorff- und die Box-Counting Dimension einer selbstähnlichen Menge F gleich dem Wert s mit

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Weiters hat F positives und endliches Hausdorff-Maß. Wenn $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$, wobei die Vereinigung nahezu disjunkt ist, erhalten wir

$$\mathcal{H}^s(F) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \mathcal{H}^s(F). \quad [4, \text{S. 128f}]$$

Obwohl die Box-Counting Dimension grundsätzlich einfach aufgebaut ist, bringt sie dennoch Schwächen mit sich. Diese sind vor allem im Bereich von kleinen, abzählbaren Mengen von Punkten zu finden. Wird sie auf solchen Mengen angewendet, kann es im schlimmsten Fall sogar zu einer Definition führen, welche die Dimension beeinträchtigt. Allgemein kann jedoch behauptet werden, dass die Box-Counting Dimension für Theorie und Praxis einen großen und nützlichen Beitrag leistet. Die vorhin angeführten Schwächen sind zwar überwindbar, jedoch führt dies zu benutzerunfreundlichen Berechnungsmethoden. Die auftretenden Komplikationen sind ähnlich, wie bei der Berechnung der Hausdorff-Dimension. [4, S. 48]

Ein großer Nachteil der Box-Counting Dimension ist, dass sie nicht abzählbar stabil ist wie die Hausdorff-Dimension zum Beispiel. Lediglich ihre obere Dimension hat endliche Stabilität. Dafür ist es möglich, dass auch abzählbare Mengen eine positive Box-Counting Dimension besitzen – auch, wenn dies dem intuitiven Dimensionsbegriff widerspricht. [10, S. 13]

Beispiel. $\dim_B\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} = \frac{1}{2}$ und $\dim_B(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$. [10, S. 13]

Allerdings eignet sich die Box-Counting Dimension gut für die obere Abschätzung der Hausdorff-Dimension und es gilt:

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F).$$

In wenigen Fällen sind die beiden Dimensionen sogar gleich. [10, S. 13]

Natürlich gibt es noch zahlreiche andere Varianten für die Definition der Box-Counting Dimension, je nach Anwendungsbereich kann diese angepasst werden. So wird die Box-Counting Dimension auch des öfteren als Minkowski-Dimension bezeichnet - hier werden statt „Kästchen“ „Kugeln“ angenommen - die Herangehensweise der Definition der Dimension ist allerdings sehr ähnlich. [4, 10]

4 Berechnung anhand konkreter Beispiele

In diesem Kapitel soll nun das Wissen aus dem Kapitel 3 angewendet werden und die Dimensionen von einfachen Fraktalen berechnet bzw. angenähert werden.

4.1 Das Sierpinski Dreieck

Für eine einfache Berechnung der Dimension des Sierpinski Dreiecks verwenden wir die Tatsache, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Dimensionen $\dim_H(F) = \dim_B(F) = s$ gilt nach Theorem 3.2.

Das Sierpinski Dreieck, wie im Beispiel auf der Seite 12 beschrieben, wird durch wiederholtes Entfernen eines gleichseitigen umgekehrten Dreiecks konstruiert (siehe auch Abbildung 4).

Theorem 4.1. *Für die Dimension des Sierpinski Dreiecks F ergibt sich: $\dim_H(F) = \dim_B(F) = \frac{\log 3}{\log 2}$.*

Beweis. Die drei offensichtlichen Ähnlichkeitsabbildungen mit den Verhältnissen $\frac{1}{2}$, welche das Ausgangsdreieck von S_0 auf S_1 abbilden (siehe Abbildung 4), haben die Menge F als Attraktor. Wenn V das Innere von S_0 ist, dann gilt die open set condition. Wir suchen nun nach einer Lösung für s für $3(\frac{1}{2})^s = \sum_{k=1}^3 (\frac{1}{2})^s = 1$. Wenn wir diese Gleichung nach s auflösen so erhalten wir $s = \frac{\log 3}{\log 2}$. Daraus folgt nun nach Theorem 3.2, dass $\dim_H(F) = \dim_B(F) = \frac{\log 3}{\log 2}$. [4, Example 9.4, S. 132] $\square$

Im Vergleich wollen wir uns die topologische Dimension des Sierpinski-Dreiecks ansehen.

Proposition 4.2. *Für das Sierpinski Dreieck gilt: $Cov(F) = 1$.*

Beweis. Wir verwenden hierfür die Mengenbezeichnungen S und S_i aus dem Beispiel auf Seite 12 des Sierpinski-Dreiecks. Jede Menge von S_i besteht aus 3^i ausgefüllten Dreiecken mit einer Seitenlänge von 2^{-i} . Für einen gegebenen Wert i treffen sich zwei Dreiecke entweder in einem Punkt oder haben Distanz von mindestens $\frac{2^{-i}}{\sqrt{3}}$ voneinander. Wenn also $r > 0$ kleiner als $\frac{2^{-i}}{\sqrt{3}}$ ist, dann sind die r -Nachbarschaften von diesen Dreiecken offene Mengen, welche eine Überdeckung von S mit Grad eins und einem Durchmesser der Menge von $2^{-i} + 2r$ aufweisen. Demnach ist $Cov(S) \leq 1$, aber S beinhaltet Linienabschnitte mit Dimension 1 und damit ist $Cov(S) \geq 1$. Daraus folgt, dass die Überdeckungsdimension der Sierpinski-Dreiecks insgesamt gleich eins ist. [3, Proposition 3.2.18, S. 97] $\square$

Weiters funktioniert die Berechnung der fraktalen Dimension des Sierpinski-Teppichs ähnlich, wie beim Sierpinski Dreieck.

Theorem 4.3. Nach Theorem 3.2 ergibt sich für die Dimension des Sierpinski-Teppichs: $\dim_H T = \dim_B T = s = \frac{\log 8}{\log 3}$

Beweis. Beim Sierpinski-Teppich haben wir kein Dreieck, sondern ein Quadrat als Ausgangsobjekt. Das Ausgangsobjekt wird in 9 gleich große um ein Drittel verkleinerte Quadrate aufgeteilt, wobei das mittlere entfernt wird. Diese Operation findet immer wieder auf den übrigen Quadraten statt. D. h. der Vorgang ist sehr ähnlich zum Dreieck.

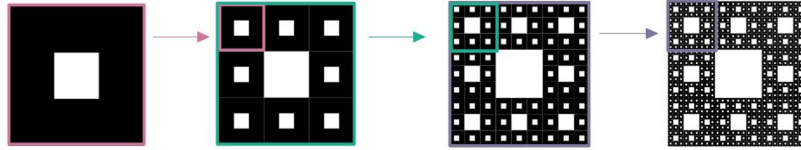


Abbildung 8: Der Sierpinski Teppich in den ersten Konstruktionsschritten.

Von unserem Ausgangsobjekt bleiben uns acht gleich große Quadrate pro angewandter Fläche übrig, welche um den Faktor $\frac{1}{3}$ verkleinert werden mit der Menge F als Attraktor. Wenn V das Innere von unserem Ausgangsobjekt ist, dann gilt die open set condition. Dafür ergibt sich die Gleichung

$$8 = 3^D$$

Durch Anwendung des Logarithmus mit beliebiger Basis auf beiden Seiten ergibt sich im nächsten Schritt:

$$\begin{aligned} \log 8 &= D \cdot \log 3 \\ D &= \frac{\log 8}{\log 3} \quad [12, 250\text{f}] \end{aligned}$$

□

4.2 Die Cantormenge

Die Cantormenge konstruiert sich wie im Beispiel auf Seite 9 erklärt durch wiederholtes Entfernen des mittleren Drittels eines Intervalls.

Theorem 4.4. Nach Theorem 3.2 ergibt sich für die Dimension der Cantormenge : $\dim_H(F) = \dim_B(F) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Beweis. Die Cantormenge ist eine invariante Menge, welche das iterierte Funktionensystem mit Verhältnislste $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ mit F als Attraktor verwirklicht. Wenn V das Innere von unserem Ausgangsobjekt ist, dann gilt die open set condition. Damit ergibt sich für die Selbstähnlichkeitsdimension die Lösung nach s für die folgende Gleichung:

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Für die Lösung erhalten wir $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. [3, Corollary 6.4.8, S. 188] □

4.3 Die Kochkurve

Die Konstruktion der Kochkurve wurde im Beispiel 2.2 genauer erläutert. Hier wollen wir uns einer möglichen Berechnung ihrer Dimension widmen.

Theorem 4.5. *Sei F die Menge der Kochkurve. Nach Theorem 3.2 ergibt sich für $\dim_H K = \dim_B K = s = \frac{\log 4}{\log 3}$.*

Beweis. Da wir für die Konstruktion der Kochkurve (siehe Abbildung 2 aus den einzelnen Ausgangsstrecken immer wieder vier Teile erhalten, die um den Faktor $r = \frac{1}{3}$ verkleinert wurden, wobei F der Attraktor ist. Bei der Kochkurve ist die Überprüfung der open set condition jedoch nicht ganz so einfach bzw. gilt sie nicht für das Ausgangsobjekt selbst. Wir müssen uns also noch eine offene Menge für F suchen, damit sie erfüllt ist.

Wir betrachten dafür das IFS der Kochkurve. Angenommen wir starten mit unserem Ausgangsobjekt auf der Strecke zwischen den beiden Koordinatenpunkten $(0, 0)$ und $(0, 1)$. Dann rotieren wir die mittleren beiden Strecken, die um $\frac{1}{3}$ verkleinert sind, um 60° – einmal in und einmal gegen den Uhrzeigersinn, um unser gleichseitiges Dreieck ohne Basis zu erhalten. Nach Larry Riddle vom Agnes Scott College [7] erhalten wir somit das folgende IFS für die Kochkurve:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x && \text{skaliert um } r \\
 f_2(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} && \text{skaliert um } r, \text{ rotiert um } 60^\circ \\
 f_3(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} && \text{skaliert um } r, \text{ rotiert um } -60^\circ \\
 f_4(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} && \text{skaliert um } r \text{ [7]}
 \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass der festgelegte Attraktor dieses IFS die Kochkurve ist. Gehen wir nun nach der Information von Mark McClure aus dem *Stackexchange-Forum* vor, so legen wir ein Dreieck mit den Koordinaten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ über unser Ausgangsobjekt bzw. unsere Kochkurve. Das Innere V dieses Dreiecks erfüllt schließlich die open set condition.[9]

Damit ergibt sich für die Berechnung der Dimension der Kochkurve die folgende Gleichung

$$4 = 3^D$$

Bilden wir nun auf beiden Seiten die Logarithmen mit beliebiger Basis, so erhalten wir

$$\log 4 = D \cdot \log 3$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \text{ [12, Fraktale Dimension, S. 247-249]}$$

□

5 Anwendung in der Fachdidaktik

Die Anwendung von hochkomplexer Fachmathematik findet sich nur selten im Schulunterricht wieder. Jedoch gilt für die Bearbeitung von Fraktalen dasselbe, wie für viele andere Themenbereiche in der Mathematik – sie können heruntergebrochen und plausibel nahegelegt werden. Viele Bereiche im mathematischen Schulalltag werden damit begründet, dass sie wichtig für das Allgemeinwissen sind. Schon länger gibt es in der Mathematik das Relevanzparadoxon, das besagt, dass die Mathematik im Allgemeinen für die Gesellschaft immer wichtiger (technologische Entwicklung, Wirtschaft, ...), aber für das Individuum immer weniger bedeutsam wird. Denn die Mathematik wird immer komplexer und damit für Einzelne immer unverständlicher. Jedoch bedarf es z.B. für die Anwendung dieser neuen Technologien (fast) keine (fach-)mathematischen Kenntnisse. Das drängt Lehrpersonen immer mehr in eine Position, in der sie Mathematik für Schüler:innen alltagsorientiert, spannend und wichtig aufbereiten müssen. Fraktale bilden eine gute Möglichkeit, um eine interessante Pause vom mathematischen Schulalltag zu verwirklichen. Heutzutage ist das Finden von geeigneten Codes mithilfe von künstlicher Intelligenz und damit das selbstständige Erstellen von Fraktalen auch zugänglicher für die breite Masse. Wie genau das aussieht und funktionieren kann, soll in diesem Kapitel genauer erläutert werden anhand eines Beispiels. Doch zuerst bedarf es einer genaueren fachdidaktischen Begutachtung.

5.1 Lehrplanbezug

Da es für österreichische Schulen je nach Schulzweig gesonderte Lehrpläne gibt, wollen wir uns dem Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS) widmen. Sie sind am häufigsten vertreten und aufgrund einer hohen Anzahl an Mathematikwochenstunden bieten sie damit ein breites Spektrum für Möglichkeiten. Der Lehrplan besteht aus mehreren Teilen, die Verpflichtungen und Richtlinien vorgeben. Somit sind Lehrpersonen oftmals in ihrer Art und Weise der Vermittlung von Wissensinhalten sehr frei und können selbst entscheiden, wie sie ihren Unterricht gestalten wollen. Der allgemeine Teil, der dies festhält, gilt sowohl für die Unter- als auch für die Oberstufe und bezieht sich auf alle Fächer. Der allgemeine Teil beinhaltet:

- allgemeines Bildungsziel (z.B. Leitvorstellungen, Aufgaben- und Bildungsbereiche)
- allgemeine didaktische Grundsätze (z.B. Motivierung von Schüler:innen, Unterrichtsformen, Leistungsbeurteilung, Förderung)
- Schul- und Unterrichtsplanung (Schularbeiten, Prüfungsmodalitäten, Defi-

dition von Kern- und Erweiterungsbereichen, schulautonome Lehrplanbestimmungen [2]

Zusätzlich findet sich im allgemeinen Teil des Lehrplans eine Auflistung von „übergreifende[n] Themen“, die verpflichtend in den jeweiligen Fächern aufgegriffen und vermittelt werden sollen. Diese sind:

- Bildungs-, Berufs- und Lebensorientierung
- Entrepreneurship Education
- Gesundheitsförderung
- Informatische Bildung
- Interkulturelle Bildung
- Medienbildung
- Politische Bildung
- Reflexive Geschlechterpädagogik und Gleichstellung
- Sexualpädagogik
- Sprachliche Bildung und Lesen
- Umweltbildung für nachhaltige Entwicklung
- Verkehrs- und Mobilitätsbildung
- Wirtschafts-, Finanz- und Verbraucher:innenbildung [2]

Im Bereich der Mathematik sind fast alle Bereiche, bis auf „Bildungs-, Berufs- und Lebensorientierung“, „Gesundheitsförderung“ und „Sexualpädagogik“ abzudecken. Insbesondere die Themen „Informatische Bildung“ und „Medienbildung“ sind im Bereich der Fraktale gut zuzuordnen und finden hier Anknüpfungspunkte. [2]

Im nächsten Teil des Lehrplans finden sich schließlich die Stundentafeln der einzelnen Jahrgänge und als nächstes die Lehrpläne der jeweiligen Unterrichtsfächer. In jedem Gegenstand werden Bezüge zum allgemeinen Teil hergestellt. Der Lehrplan selbst bietet eine Orientierung für verpflichtende Themeninhalte, die Vermittlung und Schwerpunkte sind jedoch individuell gestaltbar. Die didaktischen Grundsätze sollen einen möglichen Rahmen für die Vermittlung bieten. Etwa wird geraten, dass ein abwechslungsreicher Unterricht geformt wird, um so viele Schüler:innen wie möglich zu erreichen. Unterschiedliche Unterrichtsformen

(Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit oder projektorientierter Unterricht) sollen von der Lehrperson situationsspezifisch eingesetzt werden. Alltagsbezüge und Verbindungen zu anderen Gegenständen sind wünschenswert, da sie das große Ganze des Bildungssystems betonen. Sowohl in der Unter- als auch in der Oberstufe ist ein Mathematikunterricht ohne Technologien nicht mehr denkbar und wäre heutzutage auch nicht mehr zeitgemäß. Seit der Digitalisierungsoffensive sind Lehrpersonen bereits in der Unterstufe dazu verpflichtet, Technologie in den Unterricht einfließen zu lassen. Dies können etwa Computeralgebra-Systeme, Geometrie-Software und Tabellenkalkulationsprogramme sein. Aufwendige Rechnungen per Hand können verkürzt werden und es bleibt damit mehr Raum für die Problemstellung oder die Analyse der Ergebnisse selbst. Geometrien können schnell visualisiert und untersucht werden und ein tieferes Verständnis von Zusammenhängen wird ermöglicht. Allgemein gibt es immer mehr online Bildungsangebote und die selbständige Recherche im Internet ermöglicht den Kindern und Jugendlichen einen neuen Zugang zu Wissenserwerb. Damit verbunden ist natürlich auch der Einsatz von Künstlicher Intelligenz, die Kindern und Jugendlichen die einfache Anwendung von komplexeren Themen ermöglicht. [2]

5.1.1 Fraktale Geometrie im Bereich der Bildungs- und Lehraufgabe

Die drei Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts nach Heinrich Winter bilden den Anfang dieses Kapitels im Lehrplan. Daraus geht hervor, dass die Wahrnehmung und das Verständnis von „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten“, schon aufzeigt, dass die Anwendung von Fraktalen im Unterricht eine Berechtigung hat. Weiters findet sich in der Oberstufe die „Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt“. Dies soll einen wichtigen Teil im Sinne der Bildungs- und Lehraufgabe einnehmen. Wie bereits erwähnt, haben Naturphänomene und deren Beschreibungsmöglichkeiten einen wesentlichen Einfluss auf das Forschungsgebiet der Fraktalen Geometrie geliefert. Dass wir in unserer Umwelt ebenfalls eine große Menge an Fraktalen (wenn auch nicht exakten) finden, ist einem wohl erst bewusst, sobald man erste Berührungspunkte mit der Thematik hatte. [2]

„Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt. Sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen. Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.“ [2]

Der erkenntnistheoretische Aspekt des AHS-Lehrplans im Mathematikunterricht könnte durchaus gut mithilfe von der Bearbeitung von Fraktalen abgedeckt werden. Speziell soll jeder Unterrichtsgegenstand Beiträge zu den fünf Bildungsbereichen liefern:

- Natur und Technik
- Sprache und Kommunikation
- Mensch und Gesellschaft
- Kreativität und Gestaltung
- Gesundheit und Bewegung [2]

Die Fraktale finden sich hauptsächlich im Bereich „Natur und Technik“ wieder. Die Tatsache, dass Fraktale auch in ihrer Umwelt als Naturphänomene auftreten, kann für viele motivierend wirken. Jedoch, wenn wir z.B. an die Julia-Mengen denken, so ist auch im Bereich „Kreativität und Gestaltung“ eine Anwendung sinnvoll. Mit der Möglichkeit fraktale Gebilde einzufärben, sind der Kreativität keine Grenzen gesetzt und kann ein sehr theorielastiges Fach, wie Mathematik, auflockern. [2]

5.1.2 Einordnung von Fraktalen im Lehrstoff Mathematik

Die fraktale Geometrie lässt sich nicht explizit im AHS Lehrplan finden, trotzdem gibt es viele Punkte, die für ihre Eingliederung sprechen. Es gibt sowohl in der Unter- als auch in der Oberstufe Themenbereiche, wo sich ein Einschub der fraktalen Geometrie gut eignen würde. Wo bzw. wann genau dies stattfindet, soll hier genauer aufgeschlüsselt werden. Die einzelnen Stoffgebiete werden in ihren jeweiligen Schulstufen aus dem Lehrplan der AHS Unter- und Oberstufe zitiert und wird hinlänglich der Eingliederung von Fraktalen aufgeschlüsselt. [2]

In der zweiten Klasse beinhaltet der Mathematiklehrstoff: „Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper

Die Schülerinnen und Schüler können

- mit kartesischen Koordinatensystemen arbeiten,
 - achsensymmetrische Figuren sowie zueinander kongruente Figuren erkennen, konstruieren und ihre Eigenschaften nutzen,
 - mit Dreiecken, besonderen Vierecken und ihren Flächeninhalten arbeiten.“
- [2]

Mit diesen Kompetenzen können bereits Kinder in der 2. Klasse Unterstufe zum Beispiel die ersten Grundzüge des Sierpinski-Dreiecks per Hand konstruieren. Das Ermitteln der Halbierungspunkte durch Streckensymmetralen wird am Ende mit einer besonderen Figur belohnt. Die Untersuchung des Flächeninhaltes und Umfanges z.B. kann intuitiv bzw. auch mithilfe von computergestützter Algebra veranschaulicht werden.

Der Lehrstoff der dritten Klasse beinhaltet außerdem: „Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper

Die Schülerinnen und Schüler können

- mit Vielecken und ihren Flächeninhalten arbeiten,
- Figuren zentrisch vergrößern bzw. verkleinern; ähnliche Figuren erkennen und nutzen,
- räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln.“ [2]

Während die zweite Klasse hauptsächlich von kongruenten Figuren (Dreiecken) handelt, so finden sich in der dritten Klasse ähnliche Figuren. Gemeinsam mit dem Begriff der Ähnlichkeit kann der Begriff der Selbstähnlichkeit hier für Kinder und Jugendliche sehr plausibel erklärt und nahegebracht werden. Durch das Einbringen von natürlichen Beispielen ist ein Bezug zur Lebenswelt außerdem quasi garantiert und abermals sehr plausibel. Die Flächeninhaltsformel des Dreiecks erlaubt zudem eine genauere Untersuchung dessen auf jahrgangsadäquatem Niveau.

In der Oberstufe findet sich in der 6. Klasse (3. Semester) folgender Eintrag im Lehrstoff: „Folgen

- Zahlenfolgen [...] durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können
- Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, Grenzwert).“ [2]

Rekursion ist ein wichtiger Bestandteil für die Beschreibung oder auch Darstellung von Fraktalen – die wiederholte Anwendung derselben Regeln auf ein Endprodukt. Das Fraktal selbst bildet sich aus dem Limes dieser rekursiven Folge. Wenn Schüler:innen nun wissen, was Konvergenz und Grenzwert bedeuten, können sie dahingehend bestimmte einfache Fraktale auch bereits untersuchen.

Weiters finden wir im Eintrag des Lehrstoffes im 6. Semester in der 7. Klasse: „Komplexe Zahlen

- Die Zweckmäßigkeit der Erweiterung der reellen Zahlen erkennen
- Komplexe Zahlen in der Form $a + b \cdot i$ kennen; mit ihnen rechnen und sie zum Lösen von Gleichungen verwenden können.“ [2]

Durch die Iteration der komplexen Zahlen, kommt es zu den Julia-Mengen oder Mandelbrots berühmten Apfelmännchen. Hierfür untersucht man die komplexen Zahlen etwa nach Divergenz und Konvergenz der rekursiven Folge $z_{n+1} = z_n^2 + c, c \in \mathbb{C}$.

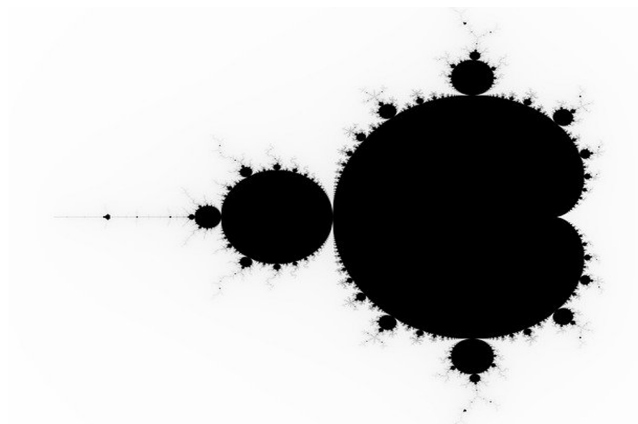


Abbildung 9: Das „Apfelmännchen“ nach Mandelbrot bzw. die Mandelbrotmenge.

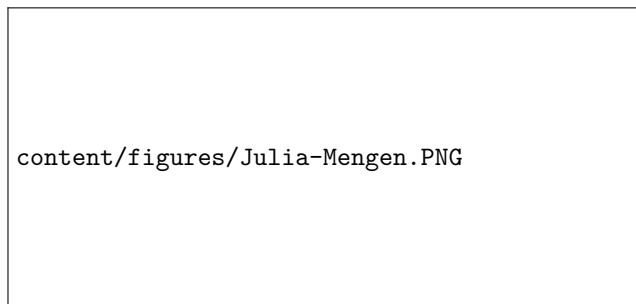


Abbildung 10: Links: farbige Darstellung einer begrenzten Julia-Menge, rechts: farbige Darstellung einer unbegrenzten Julia-Menge.

Allgemein ist es wichtig zu betonen, dass einfachere Untersuchungen an Fraktalen aus unteren Klassen jederzeit in höheren angewendet werden können. Jedoch sollte die Unterrichtsvorbereitung stets an das Niveau der Schüler:innen angepasst werden und eine Abschreckung durch „zu viel Theorie“ vermieden werden.

5.2 Unterrichtsbeispiel - Sierpinski-Dreieck

Demnach soll hier nun ein Unterrichtsbeispiel skizziert werden, welches mithilfe von Künstlicher Intelligenz (KI) und computergestützter Software kaum Vorkenntnisse benötigt und für viele Jahrgangsstufen individuell anpassbar ist. Ziel der Unterrichtsstunde ist die eigenständige Konstruktion von Fraktalen am Computer. Wesentlich für die Erstellung ist hierbei das Verständnis von Selbstähnlichkeit und der Rekursion. Heruntergebrochen auf Unterstufenniveau bedeutet dies: die wiederholte Anwendung auf ein Ausgangsobjekt. Hier soll das Sierpinski-Dreieck dafür herangezogen werden, da es im Prinzip eine sehr simple Vorgehensweise und für Schüler:innen deshalb sehr anschaulich und plausibel ist. In der Schule ist es sinnvoll mit Plausibilitätserklärungen zu arbeiten, da diese komplexere Mathematik leichter nachvollziehbar machen. Schüler:innen können mit mathematischen Beweisen oft nichts anfangen – hingegen sind Plausibilitätserklärungen oft sehr schnell einleuchtend. Das Unterrichtsbeispiel widmet sich einer Doppelstunde, wobei der Fokus der ersten Stunde auf der Erarbeitung wichtiger Theorie und dem Verständnis von Fraktalen dienen soll. In der zweiten Einheit sollen Schüler:innen dann das Sierpinski-Dreieck am PC selbst konstruieren (lassen). Dafür sollen sie KI verwenden, um einen Code für die Konstruktion bzw. eine Anleitung zu finden. Die KI liefert hierfür eine Schritt für Schritt Anleitung und einen Code, den die Schüler:innen kopieren können. Durch Ausprobieren bekommen Schüler:innen das Gefühl, dass sie selbst etwas erschaffen und wenn es schließlich funktioniert, gibt es ein Erfolgserlebnis, das quasi garantiert ist bei diesem Arbeitsauftrag. Ich habe dies selbst ausprobiert mit *ChatGPT3.5*, welches mir einen *Turtle-Code* vorgeschlagen hat. Vorab war eine Installation von *Python* nötig, anschließend musste der Code aus ChatGPT kopiert und im Editor eingefügt und als *.py*-Dokument gespeichert werden. Schließlich die Datei öffnen, Rekursion und Größe eingeben und schon wurde das Sierpinski Dreieck erstellt. Wenn jemand nun Erfahrung mit Programmieren (viele Kinder und Jugendliche arbeiten mit Scratch) hat, kann natürlich auch anders ein Code gefunden bzw. der gefundene Code umgeschrieben werden. Außerdem ist es möglich, dass Kinder und Jugendliche durch Selbstrecherche zu einem Code gelangen und können diesen sofort von ChatGPT überprüfen und umschreiben lassen, falls nötig. Sollte es in der Ausführung Fehler geben, so können diese ebenfalls schnell mithilfe von ChatGPT behoben werden. Natürlich ist eine KI fehlerbehaftet, aber hierfür eignet sie sich wirklich gut und ermöglicht es anspruchsvollere Mathematik auf einfache Art und Weise zu erleben. Voraussetzung hierfür ist allerdings, dass die Kinder und Jugendlichen bereits erste Erfahrungen mit KI gemacht haben, bzw. sie zuvor bereits einmal ausprobiert haben. Sollte dies nicht der Fall sein, so würde sich auch ein fächerübergreifender Unterricht mit *Digitaler Grundbildung*

anbieten.

Die folgende Planungsmatrix soll einen Überblick für die geplanten 100 Minuten für die Erarbeitung des Themas liefern. Wichtig ist hierfür zu erwähnen, dass die Zeit hier sehr knapp bemessen ist. Viele Schüler:innen benötigen wahrscheinlich mehr Zeit. Eventuell könnte diese Idee auch in einem Mathe-Projekttag realisiert werden. Ich habe mich hierfür an meiner jetzigen 2. Klasse AHS orientiert. Im Vergleich weiß ich allerdings, dass z.B. Parallelklassen für einzelne Sequenzen mehr Zeit benötigen würden. Die genaueren Punkte und didaktische Überlegungen dazu werden in den nachfolgenden Kapiteln genauer erläutert.

Phase	Zeit	Form	Inhalt
Einstieg	10'	Partnerarbeit	Untersuchen von Schneeflockenbildern auf Gemeinsamkeiten und Unterschieden
Diskussion	5'	Plenum	Besprechen der Ergebnisse
Erarbeitung und Wiederholung	15-20'	Vortrag	Überleitung natürliche Muster und Naturgesetze → Ähnlichkeit Sierpinski Dreieck vorstellen → Selbstähnlichkeit
Übung und Aktivierung	10-15'	Partnerarbeit	Chaos-Spiel selbst ausprobieren
Festigung	5'	Plenum	Chaos-Spiel Animation und Wiederholung des Gelernten
PAUSE			
Erklärung	5'	Vortrag	Arbeitsauftrag erklären
Übung	30'	Gruppenarbeit	3-4 Schüler:innen pro Gruppe erarbeiten einen Code für die Erstellung eines Sierpinski Dreiecks
Präsentation	15'		Gruppen präsentieren ihre Ergebnisse vor der Klasse

Abbildung 11: Planungsmatrix für das Unterrichtsbeispiel.

5.2.1 Einführung in das Thema

Wichtige Voraussetzungen für die Anwendung dieses Unterrichtsbeispiel ist einerseits das nötige Fachwissen für die Anwendung am PC (Umgang mit ChatGPT und Grundkenntnisse für den Umgang mit dem PC - insbesondere Installation von Programmen) und andererseits fachmathematischer Hintergrund (Eigenschaften von gleichseitigen Dreiecken, Basiswissen zu Flächeninhalt und Umfang von Dreiecken und Verständnis für den Begriff *Ähnlichkeit*). All diese Punkte sind ab der 6. Schulstufe erreicht bzw. zumindest bedarfsgemäß ausreichend entwickelt. Die Schüler:innen sollen zum Einstieg in das Thema motiviert werden und sehen, dass Mathematik nicht immer nur aus reinen Zahlen besteht, sondern als Hilfsmittel für die Beschreibung von Naturphänomenen herangezogen werden kann. An natürlichen Beispielen soll verdeutlicht werden, worin der Ursprung

mathematischen Interesses liegt.

Hierfür sollen die Bilder aus Abbildung 12 verwendet werden, die gleichzeitig nicht unterschiedlicher und ähnlicher sein könnten. Schüler:innen sollen in Partnerarbeit anhand der Bilder Gemeinsamkeiten und Unterschiede erkennen und finden. Dabei sollen sie die Gemeinsamkeiten farblich markieren und die Unterschiede schriftlich festhalten. Die Ergebnisse werden anschließend im Plenum besprochen und diskutiert. Bestmöglich wäre natürlich, dass die Schüler:innen alleine den Begriff *Ähnlichkeit* ansprechen bzw. nicht schon vorab von der Lehrperson thematisiert wird. Die Schüler:innen sollen selbst *untersuchen* und tüfteln.

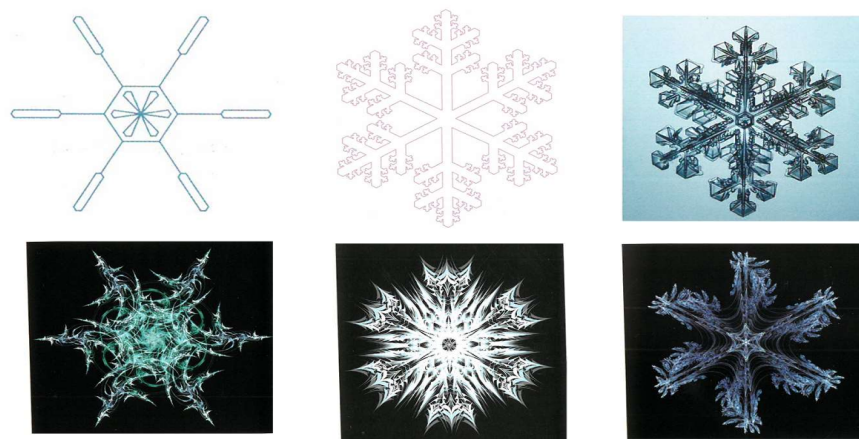


Abbildung 12: Schneeflocken als Einstieg ins Thema.

5.2.2 Erarbeitung wichtiger Theorie

Durch die Besprechung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Schneeflockenabbildungen soll eine Überleitung zu natürlichen Mustern geschaffen werden. Hierfür soll abermals mit Bildern gearbeitet werden, um die Schüler:innen zu motivieren und ihnen aufzuzeigen, dass nichts dem Zufall entspricht, sondern auch die Natur ihre eigenen *Gesetze* und *Regeln* hat. Dabei sollen die Bilder aus Abbildung 13 als Veranschaulichung dienen.

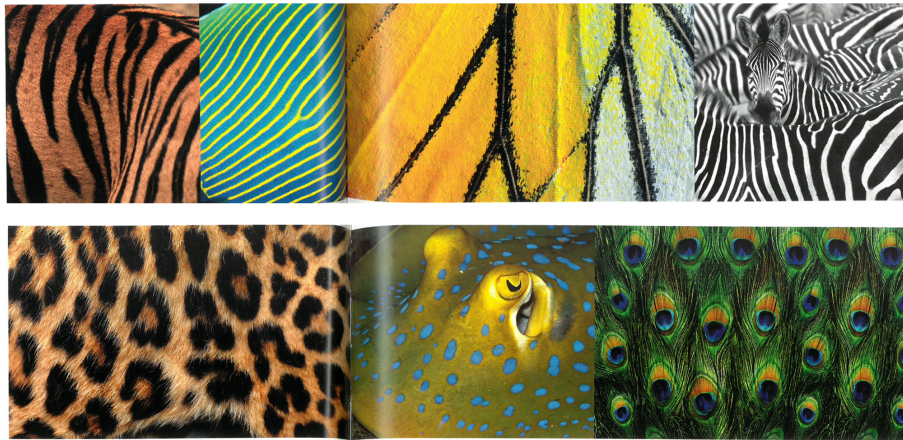


Abbildung 13: Streifen und Flecken von verschiedenen Tieren.

Danach zurück zu dem Beispiel mit der Schneeflocke. Der mathematische Begriff der *Ähnlichkeit* soll wiederholt und erweitert werden auf die Selbstähnlichkeit mithilfe einer Abbildung der ersten Konstruktionsschritte des Sierpinski-Dreiecks ohne genauer darauf einzugehen. Ziel ist es hierbei zu erkennen, dass sich ein Teil der neuen Abbildung immer wieder in einer anderen Abbildung finden lässt (verkleinert bzw. vergrößert).

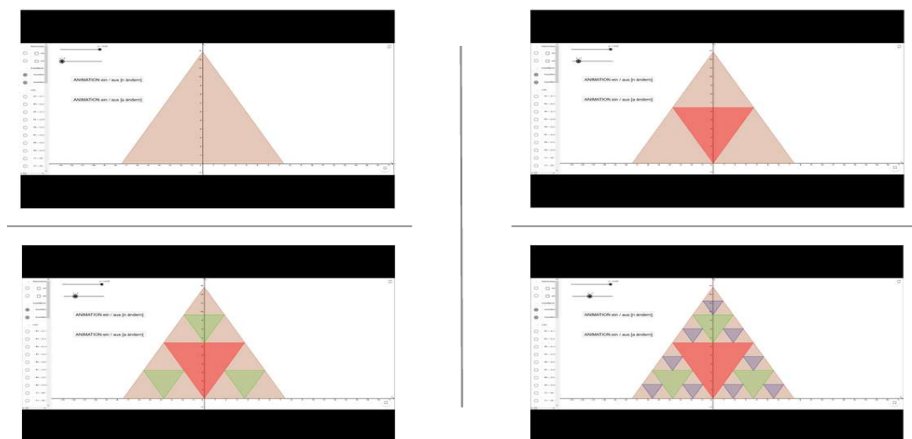


Abbildung 14: Konstruktionsschritte des Sierpinski Dreiecks mit Geogebra, auch online unter: <https://www.geogebra.org/m/svxzuDSD> (10.01.2024).

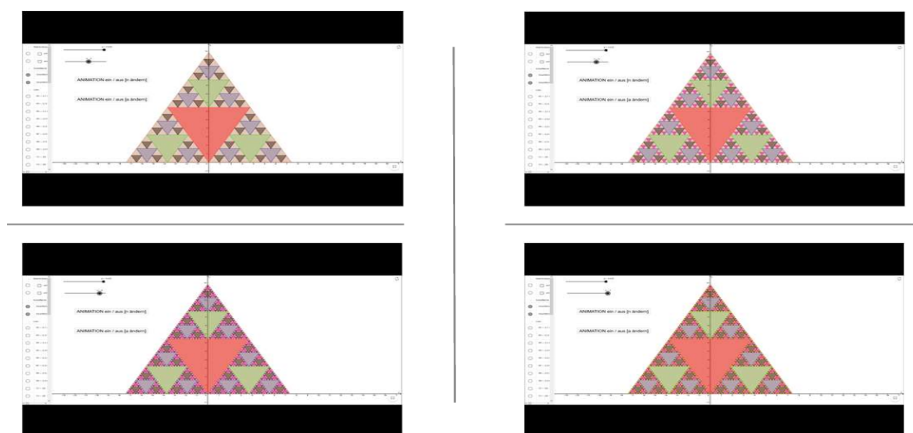


Abbildung 15: Konstruktionsschritte des Sierpinski Dreiecks mit Geogebra, auch online unter: <https://www.geogebra.org/m/svxzuDSD> (10.01.2024).

Wenn der Begriff der *Selbstähnlichkeit* nun bekannt ist, kann das Sierpinski-Dreieck mit seinem Namensvetter und dem Konstruktionsprinzip nun genauer besprochen werden. Hierfür sollen zuerst noch einmal die Eigenschaften, sowie Flächen- und Umfangsformel vom gleichseitigen Dreieck wiederholt bzw. zumindest wörtlich besprochen werden. Dann sollen die einzelnen Konstruktionsschritte mithilfe von einer computergestützten Software (wie z. B. von den Abbildungen 14 und 15) veranschaulicht und nachvollziehbar gemacht werden. Anschließend kann mit den Kindern noch ein Gedankenexperiment gestartet werden, um den Flächeninhalt und den Umfang des Sierpinski-Dreiecks plausibel zu machen.

Die Besonderheit dieses Dreiecks soll dann anhand einer Simulation des *Chaos-Spiels* erklärt und gezeigt werden. Michael F. Barnsley gelang es mit einem einfachen „Spiel“ einen Zusammenhang zwischen Chaos und Fraktalen herzustellen. Dieses Spiel ermöglicht es auf einfache und spielerische Weise Fraktale (in unserem Fall das Sierpinski Dreieck) zu konstruieren. Für das Spiel werden lediglich ein Würfel, ein Lineal, ein Blatt Papier und ein Stift benötigt. [12, S. 45] Im Vorhinein kann die Lehrperson auf das Blatt Papier ein gleichseitiges Dreieck mit den nummerierten Ecken 1, 2 und 3 drucken. Die Zahlen des Würfels sind den jeweiligen Ecken zuzuordnen. Zur Ecke 1 gehören die Zahlen eins und sechs, der Ecke 2 ordnen wir die Zahlen 2 und 4 zu und für die Ecke 3 stehen die Würfelzahlen drei und fünf. [12, S. 45]

Regeln: Zuerst markiert man einen beliebigen Punkt, wir nennen ihn *Spielpunkt* im gleichseitigen Dreieck. Dann wird gewürfelt, je nachdem welche Zahl gewürfelt wird, begibt man sich in halber Länge zur jeweiligen Ecke. Z. B. wenn man die Zahl 1 würfelt, verbindet man mit dem Lineal den Spielpunkt mit der Ecke und

setzt genau in der Mitte dieser Strecke einen neuen Ausgangspunkt. Die erste Spielrunde ist damit beendet. Jetzt wird erneut gewürfelt. Würfelt man etwa die Zahl vier, so verbindet man erneut mit dem Lineal den Spielpunkt mit der Ecke 2 und setzt in der Mitte einen neuen Punkt. Dieses Vorgehen wird nun immer öfter wiederholt. Da erst nach über 100 Spielrunden ein Muster zu sehen ist, bietet es sich an, dass das *Chaos-Spiel* computerunterstützt simuliert wird und nur das Prinzip bzw. maximal ein paar erste Schritte gemeinsam mit den Schüler:innen gemacht werden. Die besten Ergebnisse werden erst ab über 1000 Durchgängen sichtbar.[12, S. 46f]

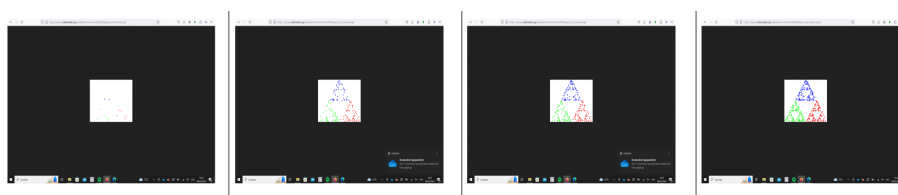


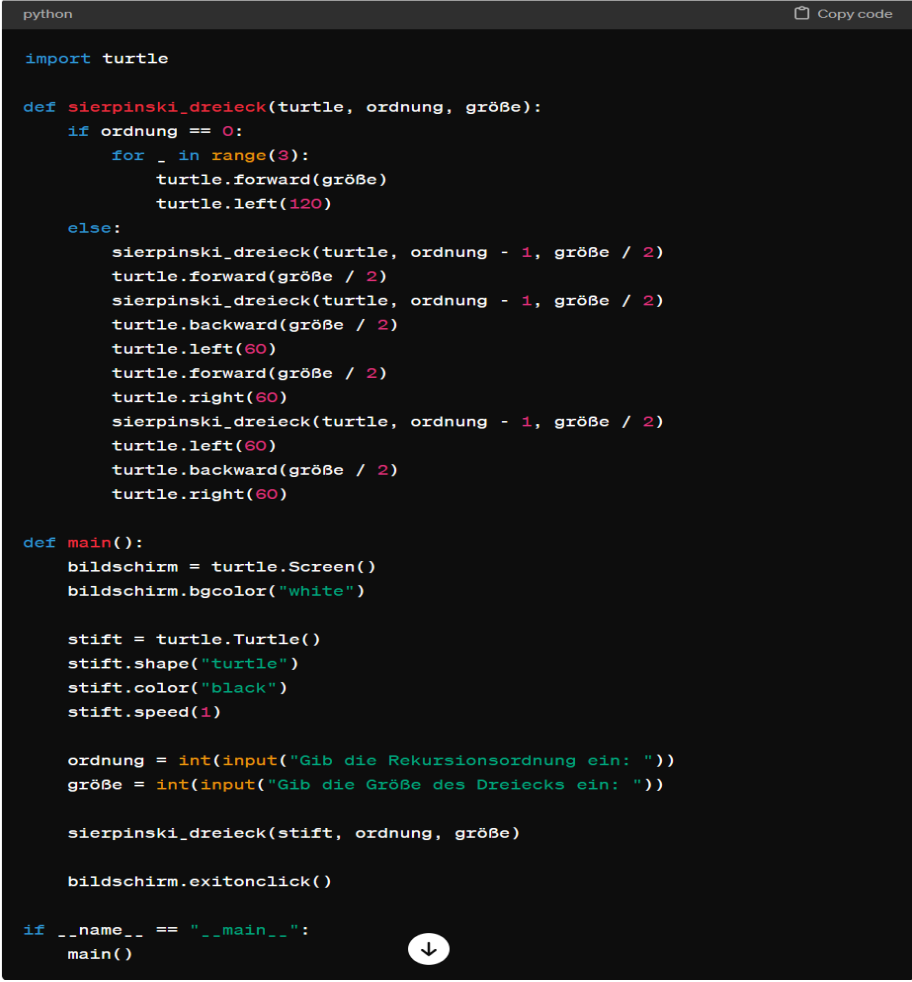
Abbildung 16: Screenshots eines animierten Chaosspiels, alternativ: Chaos Game (0:00-1:10), online unter: <https://www.youtube.com/watch?v=IGIGvSXkRGI>

5.2.3 Eigenständige Erarbeitung

Für die eigenständige Erarbeitung bzw. Anwendung benötigen die Schüler:innen jeweils zu zweit (Partnerarbeit) oder zu dritt (Gruppenarbeit) einen PC. Da seit der Digitalisierungsinitiative 2021 allen Schüler:innen zu einem kleinen Selbstbehalt ab der 5. Schulstufe digitale Endgeräte zur Verfügung gestellt werden [11], haben dies auch tatsächlich alle Schüler:innen ab der Sekundarstufe I. Gleichzeitig ist seit 2022 im Lehrplan der Sekundarstufe I verankert, dass *Digitale Grundbildung* ein verpflichtender Unterrichtsgegenstand ist [1]. Das heißt, dass Schüler:innen mindestens seit dem Schuljahr 2022/23 diverse Kenntnisse über PC, digitale Medien, Software, Hardware,... erworben haben. Manche Schulen haben allerdings schon mit der Einführung der Digitalisierungsinitiative *freiwillig* dieses Fach für Schüler:innen ab der 5. Schulstufe eingeführt.

Bestenfalls haben die Schüler:innen schon im Vorhinein Erfahrungen mit KI bzw. ChatGPT. Falls nicht, müssen diese Kompetenzen im Vorhinein noch erworben werden. Dabei ist es wichtig, die KI stets als Unterstützung/„Helferlein“ und niemals als unantastbare Wahrheit anzusehen. In diesem Unterrichtsbeispiel gehen wir jedoch davon aus, dass die Schüler:innen bereits wissen, wie eine KI funktioniert und wie sie verwendet wird.

Die Schüler:innen bekommen einen Arbeitsauftrag, in dem genau verankert ist, was zu tun ist. In den meisten Schulen werden die digitalen Endgeräte im Vorhinein vom IT-Kustodiat aufgesetzt und dabei sind Programme wie *Python* etwa bereits vorinstalliert – somit können die Installation von Programmen erspart bleiben. Die Schüler:innen sollen die KI-Software ChatGPT öffnen und selbstständig mit der KI kommunizieren und einen Code verlangen, mit dem sie das Sierpinski-Dreieck darstellen können. Zusätzlich wäre es für die Schüler:innen hilfreich, die KI auch zu befragen, wie der erhaltene Code schließlich ausgeführt und dargestellt werden kann. Hierbei ist es wichtig, dass sich die Schüler:innen untereinander absprechen und entscheiden, welche Informationen relevant sind für einen richtigen Code. Hier ein Beispiel, wie so ein Code aussehen kann mit dem dazugehörigen Prompt:



```
python Copy code  
  
import turtle  
  
def sierpinski_dreieck(turtle, ordnung, größe):  
    if ordnung == 0:  
        for _ in range(3):  
            turtle.forward(größe)  
            turtle.left(120)  
    else:  
        sierpinski_dreieck(turtle, ordnung - 1, größe / 2)  
        turtle.forward(größe / 2)  
        sierpinski_dreieck(turtle, ordnung - 1, größe / 2)  
        turtle.backward(größe / 2)  
        turtle.left(60)  
        turtle.forward(größe / 2)  
        turtle.right(60)  
        sierpinski_dreieck(turtle, ordnung - 1, größe / 2)  
        turtle.left(60)  
        turtle.backward(größe / 2)  
        turtle.right(60)  
  
def main():  
    bildschirm = turtle.Screen()  
    bildschirm.bgcolor("white")  
  
    stift = turtle.Turtle()  
    stift.shape("turtle")  
    stift.color("black")  
    stift.speed(1)  
  
    ordnung = int(input("Gib die Rekursionsordnung ein: "))  
    größe = int(input("Gib die Größe des Dreiecks ein: "))  
  
    sierpinski_dreieck(stift, ordnung, größe)  
  
    bildschirm.exitonclick()  
  
if __name__ == "__main__":  
    main()
```

Abbildung 17: Python-Turtle-Code von ChatGPT3.5, Prompt: Wo kann man Fraktale selbst mit Befehlen nachbauen? Zum Beispiel das Sierpinski Dreieck

Weiters lieferte ChatGPT3.5 für den Prompt „Wo kann man Fraktale selbst mit Befehlen nachbauen? Zum Beispiel das Sierpinski Dreieck“ folgende Anleitung:

„Dieses einfache Python-Programm verwendet die Turtle-Grafikbibliothek, um das Sierpinski-Dreieck zu zeichnen. Du kannst die Rekursionsordnung und die Größe des Dreiecks interaktiv eingeben. Je höher die Rekursionsordnung, desto detaillierter wird das Sierpinski-Dreieck. Um dieses Beispiel auszuführen, musst du Python auf deinem Computer installiert haben. Speichere den Code in einer Datei mit der Endung „.py“ und führe sie dann aus.

Es gibt auch andere Programmiersprachen und Bibliotheken, die für die Erstellung von Fraktalen verwendet werden können. Zum Beispiel kann man in JavaScript mit HTML5 Canvas oder in Java mit der Graphics-Bibliothek Fraktale zeichnen. Experimentiere mit verschiedenen Sprachen und Bibliotheken, um herauszufinden, welche dir am besten gefällt!“

Die Lehrperson hat in diesem zweiten Teil der Unterrichtseinheit einen rein beratenden und unterstützenden Auftrag. Die Schüler:innen sollen aktiv ChatGPT miteinbeziehen und auch bei Fragen zuerst die KI mit konkreten Aufforderungen um Hilfe bitten. Sollte ein Code nicht funktionieren etwa, können die Schüler:innen das Problem der KI schildern und sie damit beauftragen, es auch direkt im Code zu beheben. Dabei geht es weniger um die Richtigkeit der Konstruktion, als um die experimentierende Arbeit und die Auseinandersetzung mit dem Thema. Die Schüler:innen sollen hierbei die Anwendung von Mathematik auf einer anderen Ebene abseits des Schulalltags kennenlernen. Am Ende der Einheit soll jede Gruppe kurz ihr Endergebnis präsentieren und erläutern, was besonders einfach und schnell erledigt war und wo es eventuell Hürden gab. Falls programmieraffine Schüler:innen dabei sind, ist es natürlich auch eine Möglichkeit, das Sierpinski-Dreieck in Scratch darstellen zu lassen. Dafür gibt es auch viele Tipps und Tricks bzw. sogar Anleitungen im Internet, die dafür herangezogen werden können. Aus pädagogischer Sicht, ist jedoch die Anwendung mit ChatGPT bestimmt die „einfachere“ Variante. Allgemein gilt natürlich auch, dass das Niveau der Unterrichtseinheit stets auf die jeweilige Klasse angepasst werden muss. Ich selbst unterrichte aktuell eine 6. Schulstufe in Mathematik und das Niveau dieses Unterrichtsbeispiels orientiert sich ebenfalls an dieser.

5.3 Reflexion

Ich habe dieses Unterrichtsbeispiel selbst in meiner 2. Klasse an einer AHS in einer Doppelstunde ausprobiert. Insgesamt betrachtet, war die Stunde erfolgreich und war eine auflockernde Abwechslung sowohl für mich, als auch für die Schüler:innen. Ich habe auch in dieser Klasse ein Jahr zuvor ausprobiert, die Tatsache, dass der Flächeninhalt im Quadrat immer größer ist als in einem umfangeichen Rechteck, plausibel zu machen und mit den Schüler:innen zu untersuchen. Das hat ihnen gefallen und Spaß gemacht. Das war auch die Motivation, wieder komplexere Mathematik für die Kinder zugänglich und plausibel zu machen. Natürlich hilft auch der Zusatz, dass das Erarbeitete der Doppelstunde nicht relevant ist für den Schularbeitsstoff.

Am Anfang waren die Schüler:innen noch nicht so begeistert von der Thematik bzw. konnten sich einige nicht mehr an die Begriffe „ähnlich, Ähnlichkeit“ und deren Bedeutung erinnern. Auch die Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks waren etwas holprig und bedurften Unterstützung von der Lehrseite. Jedoch, als sie selbst erkannt haben, dass das Sierpinski-Dreieck in seinen Konstruktionsschritten „selbstähnlich“ ist, hatte ich sie zur Teilnahme motivieren können. Plötzlich hatten sie ein Erfolgserlebnis und ihr Interesse war da. Aus Zeitgründen haben wir schließlich gemeinsam das Chaos-Spiel ausprobiert. Wobei zu meiner Überraschung viele selbstständig mitarbeiten wollten und tatsächlich auch selbst das gleichseitige Dreieck ins Heft konstruiert haben. Als ich den Schüler:innen anschließend noch die Simulation gezeigt habe, kam plötzlich ein Ausruf: „Das ist ja das Sierpinski-Dreieck!“

Am Ende der Stunde wurde noch einmal wiederholt, was es mit den Randpunkten, dem Flächeninhalt und dem Umfang des Sierpinski-Dreiecks auf sich hat. Intuitiv war den Schüler:innen klar, „der Rand muss übrig bleiben, wir nehmen ja nur das Innere heraus“. Damit einhergehend haben wir ein Gedankenexperiment gestartet mit der Überlegung, was mit dem Flächeninhalt passiert, wenn ich vom Ausgangsdreieck immer wieder Teile herausnehme. Auf die Frage was dann mit dem Flächeninhalt passiert, kam sofort „ja, der wird halt immer weniger.“ Auf meine Nachfrage, wie groß er irgendwann mal sein wird, wenn ich unendlich oft etwas rausnehme kam ebenfalls gleich: „ja, der wird Null.“

Im Gegensatz dazu war es für manche Schüler:innen nicht ganz so einfach der Besonderheit, dass der Umfang des Sierpinski-Dreiecks gegen unendlich strebt, auf Anhieb zu folgen. Einige mathematisch begabte Kinder hatten aber auch das sofort durchblickt. Ich habe dann noch einmal das Prinzip des „Abgehens“

für den Umfang durchbesprochen und den Schüler:innen versucht plausibel zu machen, dass ich bei unendlichem Hineinzoomen unendlich viele Dreiecke zum Abgehen habe, bevor ich erst in das nächste Teildreieck reinzoomen kann, um dort weiterzumachen. Die Idee und Vorstellung des Unendlichen hat die Kinder fasziniert und sie auf eine ganz besondere Art und Weise gefesselt, mit der ich gar nicht gerechnet hatte. Denn als ich die Stunde gestartet habe, war ich mir selbst unentschlossen, ob wir das Experiment durchführen sollen. Ich war mir nicht sicher, ob ich sie vielleicht vollkommen überfordere, ob sie sich langweilen, oder ob sie einfach nur froh sind, keinen schularbeitsrelevanten Stoff machen zu müssen. Kurzzeitig habe ich sogar überlegt, die Stunde nach 20 Minuten wieder abubrechen, da ich das Gefühl hatte, sie sind nicht interessiert genug. Doch nur um schlussendlich festzustellen, dass sich meine Befürchtungen nicht bewahrheitet hatten. Jetzt im Nachhinein wird mir hierzu etwas sehr wichtiges bewusst: Oftmals vergessen wir, dass es außerdem sehr wichtig ist, über Mathematik zu sprechen. Im Studium oder in der Wissenschaft machen wir das ständig. In der Schule fehlt dafür meistens die Zeit oder man will sich diese Zeit nicht nehmen. Doch genau das ist doch so wichtig und macht Mathematik so greifbar und lebensnah. Und dann habe ich auch beschlossen, dass die Schüler:innen die gesamte zweite Stunde in Anspruch nehmen sollen. Nichtswissend, dass ich sie unterschätzt habe, was ihre digitalen Skills angeht.

Die Idee für die zweite Stunde war den Schüler:innen ein breites Spektrum an Möglichkeiten zu geben und genügend Zeit, sich mit dem Thema zu beschäftigen. Verblüfft hat mich dann die Gruppe, die zuerst nicht so recht gewusst hatte, wie sie anfangen soll und gleich gefragt hat: „Dürfen wir auch etwas Schneiden und Zusammenfügen?“ Damit haben sie gemeint, ob sie denn auch aus Fotos ein Video basteln dürften, um etwa ein Gif zu erstellen. Rückblickend wäre natürlich auch das eine tolle Idee gewesen. Das war mir dann aber im Moment zu weit weg von der Ursprungsüberlegung. Schließlich, knapp zehn bis 15 Minuten später, kamen sie erneut: „Wir sind fertig.“ Ich dachte zuerst, das ist ein Scherz, doch es war keiner. Sie haben sich auf Scratch einen bestehenden Code gesucht, diesen kopiert und als neuen „eigenen“ hochgeladen und noch etwas „angepasst“. Ich habe ja auch nicht gesagt, dass sie das nicht dürfen. Schließlich trifft es auch den Kern der Idee: die Schüler:innen suchen sich selbständig Hilfe und probieren sich aus. Daraufhin musste natürlich schnell eine Alternative her und die Stundenplanung erweitert werden. Spontanes Umstrukturieren ist schlussendlich die alltägliche Praxis. Ohne den Kindern Genaueres zu erklären, habe ich sie beauftragt, sich den Sierpinski-Teppich anzusehen und nun einen Code für eine Darstellungsmöglichkeit dessen zu finden. Sofort sind sie erneut fündig geworden. Die schnelleren Gruppen haben schließlich auch noch die Kochkurve

inkl. Schneeflocken Darstellung gefunden und zwei von fünf Gruppen haben sogar von selbst die Sierpinski-Pyramide gefunden. Am Ende der Stunde haben zwei Gruppen jeweils die Kochkurve und das Sierpinski-Dreieck noch präsentiert und über den Beamer ihr Kunstwerk projiziert.

Feedback von Schüler:innen

In den letzten Minuten der Stunde habe ich meine Schüler:innen noch um anonymes Feedback gebeten und dafür kleine Zettelchen ausgeteilt. Ein Ausschnitt davon ist in Abbildung 18 zu sehen. Insgesamt war ich vom Feedback der Stunde ebenfalls sehr überrascht. Keine einzige negative Kritik. Ich dachte zuerst, dass ist ein Scherz bzw. sie haben sich nicht getraut, etwas Negatives zu schreiben. So habe ich sie am nächsten Tag erneut darauf angesprochen und gefragt, ob sie übertrieben haben oder ob das tatsächlich so gemeint war. Daraufhin war schnell klar, dass ich diese Klasse diesbezüglich total falsch eingeschätzt habe. Sie schwärmten abermals von der „coolen Auszeit“ und der „tollen Stunde“. Sofort kam auch der Wunsch nach mehr Exkurs und dem Eintauchen in die Welt der „forschenden Mathematik“.

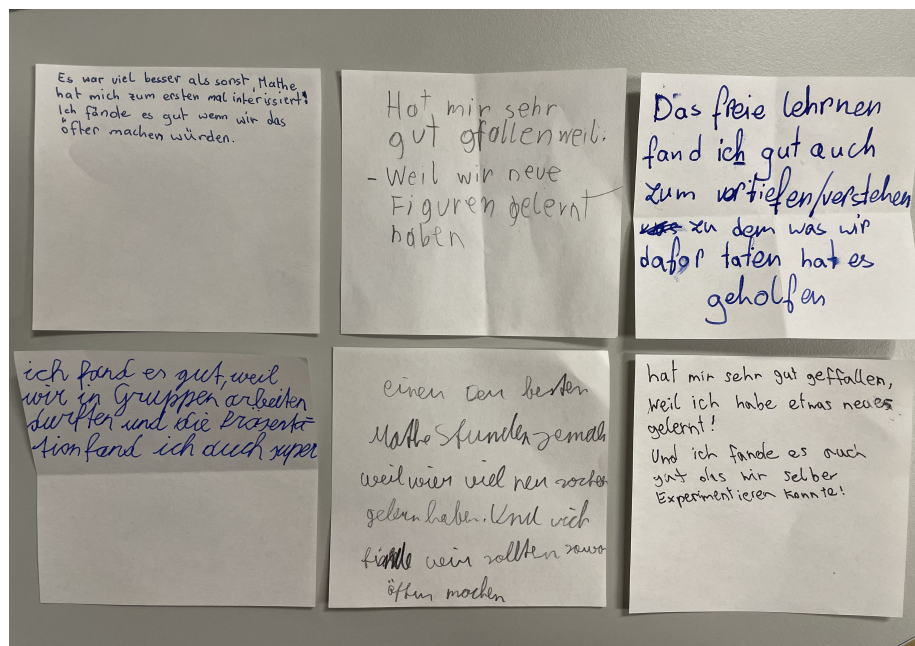


Abbildung 18: Ausgewählte Feedback-Zettel

Besonders der erste Zettel links oben berührt mich sehr. In meinem Vorstellungsgespräch als Lehrperson an meiner Schule hat mich die Schulleitung gefragt, warum ich Mathematiklehrerin werden möchte bzw. werde. Meine Antwort dar-

auf war klar: „Ich möchte es für alle Schüler:innen ermöglichen, Mathematik als wichtig, spannend und so einfach wie möglich wahrnehmen zu können.“ Im Lehralltag geht diese Intention jedoch leider sehr oft unter. Umso mehr freut es mich, dass ich dieses Kind nun auch so erreichen konnte und Mathematik nun auch für sie/ihn spannend geworden ist. Der Zettel daneben spricht ebenfalls etwas sehr wichtiges an. Ich habe oft das Gefühl, dass die Schulmathematik zu starr ist und den Kindern der Bezug zum großen Ganzen fehlt. Ohne Mathematik gäbe es so viele andere Wissenschaften nicht und der Mensch könnte sich ohne sie so viele Dinge bis heute nicht erklären. Gleichzeitig braucht der Mensch rationales und abstraktes Denken, um im Alltag besser zurechtzukommen. Somit deckt Mathematik eindeutig um so vieles mehr ab, als in der Schule vermittelt wird.

Freies Lernen und Experimentieren wie es in den beiden Feedbackzetteln rechts oben und unten erwähnt wird findet im Regelunterricht leider auch sehr oft zu wenig Zeit. Meistens wird damit argumentiert, dass diese Art des Unterrichts nicht prüfungsrelevant ist. Mein Unterrichtsansatz ist so aufgebaut, dass ich die Schüler:innen sehr viel zu selbständiger Arbeit motivieren möchte. Klar, manchmal bedarf es einer Erklärung oder Vorarbeit der Lehrperson, doch im Wesentlichen sollen die Kinder bei mir selbständig arbeiten und lernen. Dadurch ist es auch einfacher zu differenzieren. Die leistungsstärkeren Schüler:innen haben die Möglichkeit, sich mehr zu vertiefen, während schwächere nicht zurückbleiben, weil ich mehr Zeit und Aufmerksamkeit für sie habe. Diese Klasse ist es also auch gewohnt, selbständig Arbeitsaufträge zu erledigen und tut das gern. Trotzdem war es dieses Mal vollkommen anders. Das Ziel dieses Arbeitsauftrages war nicht das Ergebnis, sondern der Weg. Gleichzeitig wurde die Theorie, die im Vorhinein besprochen wurde für manche, die sich im Vorhinein noch nicht so sicher waren, ob sie das jetzt tatsächlich verstehen, ganz klar und greifbar.

Der Mensch und Kinder im Speziellen sind wissbegierig. In der Praxis ist es nur manchmal nicht oft so einfach, diese Lernbegeisterung zu aktivieren und die Schüler:innen kommen uns lernfaul vor. Der Zettel unten in der Mitte beweist uns hierfür aber genau das Gegenteil. Natürlich reicht ein spannendes Thema für diese Aktivierung alleine nicht aus – hierfür spielen mehrere Argumente eine wichtige Rolle. Meiner Meinung nach, ist ein wesentlicher Grundpfeiler die Lehrer:innen-Schüler:innen-Beziehung. Wenn diese Beziehung gehegt und gepflegt wird, so erleichtert das nicht nur vieles im Unterricht, sie hat auch einen wesentlichen Anteil an der Entwicklung der Schüler:innen. Kinder benötigen jemanden, der „an sie glaubt“ und nach der *Neuen Autorität* nach Haim Omer werden durch umsorgte Beziehungen maximale Entwicklungschancen ermöglicht.[6] Wenn es

uns als Lehrkörper gelingt, Kinder nach wie vor für Neues zu begeistern und ihnen Mut zuzusprechen, dass sie bestimmte Aufgaben schaffen und wir an sie glauben, so wird vieles Udenkbares plötzlich möglich.

Conclusio

Das Feld der fraktalen Geometrie birgt zahlreiche Geheimnisse und faszinierende Fragen, die sich während der Beschäftigung mit diesem Themenbereich ergeben. Die fraktale Geometrie eröffnet uns eine alternative Perspektive auf die Welt und ermöglicht es, die Unregelmäßigkeiten und Unvollkommenheiten der Natur zu schätzen. Selbst scheinbar unregelmäßige Phänomene zeigen bei genauerer Betrachtung einen Zusammenhang. Die Betrachtung von Natur und ihrer Einzigartigkeit sowie von Fachmathematik und ihren Darstellungen spezieller Mengen wurde durch die fraktale Geometrie vollständig revolutioniert. Besonders spannend war im Laufe dieser Arbeit zu sehen, dass Mathematiker:innen sich bereits mit speziellen fraktalen Folgen beschäftigt haben, noch bevor es den Computer gab. Schließlich erweckte die Einführung des Computers gemeinsam mit Mandelbrot diesen Bereich erst richtig zum Leben und immer mehr Personen haben sich mit diesem Thema beschäftigt. Was zuerst nur für einzelne zugänglich war, wurde plötzlich für mehrere Mathematiker:innen interessant und spannend. Der Weg von der Hausdorff-Dimension bis hin zu alternativen, einfacheren Dimensionen, die unter der *open set condition* gleich der Hausdorff-Dimension sind, zeigt außerdem das Wesen von Mathematik und Wissenschaft. Wie bereits zu Beginn dieser Arbeit im Zitat vorgekommen ist, dass wir „vor dem Nichts“ stehen trifft auch hier zu. Es gibt noch so vieles zu erforschen und die Wissenschaft wird niemals aufhören, denn es gibt immer noch etwas Neues, das nur darauf wartet entdeckt zu werden.

Durch die Allgegenwärtigkeit von Fraktalen und das intuitive Verständnis von ihnen kann in den Klassenzimmern eine neue Ära beginnen. Fraktale ebnen den Weg für praxisorientierten und forschenden Unterricht, der von Lernenden selbst gestaltet werden kann. Die Anwendung des Sierpinski-Dreiecks eignet sich beispielsweise hervorragend für den Mathematikunterricht. Die Berechnungen für Flächeninhalt und Umfang sind einfach und für Schüler:innen leicht nachzuvollziehen. Die genaue Berechnung kann aufgrund der Verwendung des Limes jedoch erst in der Oberstufe durchgeführt werden. In der Unterstufe können nichtsdestotrotz Gedankenexperimente oder das Chaosspiel (zuerst manuell und dann mit Technologieinsatz) mit dem Sierpinski-Dreieck durchgeführt werden. Auf diese Weise können Lernende auf einer anderen Ebene erreicht werden, und es besteht die Möglichkeit, eine Wende im „Hassfach“ Mathematik einzuleiten. Schüler:innen können Freude am Mathematikunterricht und am Lernen erfahren, wenn die Theorie von der Lehrperson richtig in die Praxis umgesetzt wird.

Literatur

- [1] Wissenschaft und Forschung Österreich Bundesministerium Bildung. *Digitale Grundbildung*. <https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/zrp/dibi/dgb.html> [Abgerufen: (07.02.2024)].
- [2] Wissenschaft und Forschung Österreich Bundesministerium Bildung. *Rechtsvorschriften für Lehrpläne*. www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568 [Abgerufen: (08.01.2024)].
- [3] G. Edgar. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2007.
- [4] Kenneth J Falconer. *Fraktale Geometrie : mathematische Grundlagen und Anwendungen*. ger. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl., 1993.
- [5] Georg Glaeser. *Wie aus der Zahl ein Zebra wird : Ein mathematisches Fotoshooting*. ger. 1st ed. 2011. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag : Imprint: Spektrum Akademischer Verlag, 2011.
- [6] ina Institut für Neue Autorität. *Die 7 Säulen der Neuen Autorität*. <https://www.neueautoritaet.at/ueber-uns/saeulen-der-neuen-autoritaet.html> [Abgerufen: (04.04.2024)].
- [7] Agnes Scott College Larry Riddle. *Classic Iterated Function Systems*. <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/kcurve/kcurve.htm> [Abgerufen: (21.04.2024)].
- [8] Benoît B Mandelbrot. *Die fraktale Geometrie der Natur*. ger. Einmalige Sonderausg. Basel [u.a.]: Birkhäuser, 1991.
- [9] Mark McClure. *Stack Exchange, Mathematics. Moran's theorem Open set condition Koch Curve*. <https://math.stackexchange.com/questions/4570480/morans-theorem-open-set-condition-koch-curve>. [Abgerufen: (21.04.2024)].
- [10] Jörg Neunhäuserer. *Dimensionstheorie*. ger. 1st ed. 2021.. essentials. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden : Imprint: Springer Spektrum, 2021.
- [11] Bundeskanzleramt Österreich. *EU Aufbauplan*. <https://www.bundeskanzleramt.gv.at/eu-aufbauplan/projekte/notebooks-und-tablets-fuer-digitales-lehren-und-lernen.html> [Abgerufen: (07.02.2024)].
- [12] Heinz-Otto Peitgen. *Bausteine des Chaos : Fraktale*. ger. Rororo 60250 : rororo-Sachbuch : rororo science. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt, 1998.
- [13] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. ger. Hochschultext. Berlin [u.a.]: Springer, 1973.

- [14] Ian Stewart. *Die Schönheit der Schneeflocke : Mathematik in der Natur*.
ger. Darmstadt: Theiss, 2017.

Abbildungsverzeichnis

1	Die ersten fünf Konstruktionsschritte der Cantormenge, [12], 87 .	10
2	Die Konstruktionsschritte der Kochkurve, [4], xiv	11
3	Drei Kochkurven aneinandergereiht ergeben eine Schneeflocke, [4], xiv	12
4	Die Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks in den ersten vier Schrit- ten, eigenes Bild	13
5	Natürlicher und computeranimierter Farn, links: eigenes Bild, rechts: [5], 262	14
6	1-dimensionale Menge überdeckt mit Scheiben[3], 86	16
7	Die ersten fünf Konstruktionsschritte der Cantormenge, [12], 87 .	25
8	Der Sierpinski Teppich in den ersten Konstruktionsschritten, eige- nes Bild	31
9	Das „Apfelmännchen“ nach Mandelbrot bzw. die Mandelbrotmen- ge, christianpackenius, online unter: https://pixabay.com/de/illustrations/apfelmännchen-mandelbrot-mathematik-2512689/ (26.03.2024)	39
10	Links: farbige Darstellung einer begrenzten Julia-Menge, WikiI- mages, online unter: https://pixabay.com/de/illustrations/fraktal-julia-menge-mathematik-63166/ (26.03.2024), rechts: farbige Dar- stellung einer unbegrenzten Julia-Menge, CDRowell, online unter: https://pixabay.com/de/illustrations/fraktal-julia-mandelbrot-kunst-980849/	39
11	Planungsmatrix für das Unterrichtsbeispiel	41
12	Schneeflocken als Einstieg ins Thema, [14]9,169,191	42
13	Streifen und Flecken von verschiedenen Tieren, [14]86-89	43
14	Teil 1: Konstruktionsschritte Sierpinski Dreieck mit Geogebra, auch online unter: https://www.geogebra.org/m/svxzuDSD (10.01.2024)	43
15	Teil 2: Konstruktionsschritte Sierpinski Dreieck mit Geogebra, auch online unter: https://www.geogebra.org/m/svxzuDSD (10.01.2024)	44
16	Screenshots eines animierten Chaosspiels, Ederporto, Triangulo de Sierpinski, online unter: https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Dreieck (16.01.2024)	45
17	Python-Turtle-Code von ChatGPT3.5, Prompt: Wo kann man Fraktale selbst mit Befehlen nachbauen? Zum Beispiel das Sier- pinski Dreieck	46
18	Ausgewählte Feedback-Zettel der Unterrichtsstunde vom 03.04.2024	50