



KIRCHLICHE
PÄDAGOGISCHE
HOCHSCHULE
WIEN/KREMS



universität
wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

Flächenstrukturen aus berührenden Kugeln

verfasst von / submitted by

Samuel Aparicio Garrido BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the
requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2024 / Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 505 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on the
student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB)
Unterrichtsfach Darstellende Geometrie
Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Assoz. Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn.
Christian Müller

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Strukturen aus berührenden Kugeln. Solche Strukturen können mithilfe von Polygonnetzen dargestellt werden. Klassische Beispiele sind reguläre oder platonische und halb reguläre oder archimedische Polyeder. Eine weitere Klasse wären die Johnson Körper. Allgemeinere Strukturen können mithilfe von bestimmten Dreiecksnetzen, wie die Lobel Netze oder Kreispackungsnetze, oder Vierecksnetze, wie die Rhombennetze, modelliert werden. Rhombennetze haben einen engen Zusammenhang mit der diskreten Differentialgeometrie. Man kann Kugelpackungsnetze mithilfe der numerischen Optimierung approximieren. Die Lie Sphären Geometrie bietet ein Werkzeug, um bestimmte Strukturen aus orientierten und berührenden Sphären zu untersuchen. In dieser Geometrie werden Sphären als fünfdimensionale Punkten auf einer projektiven Quadrik (der Lie Quadrik) identifiziert. Ob sich zwei Kugeln orientiert berühren, kann mithilfe der durch die Lie Quadrik induzierten Bilinearform bestimmt werden. Von besonderem Interesse sind die Lie Sphären Transformationen, die die orientierte Berührung erhalten und sphärentreu sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten	5
2.1.1	Glatte Flächen	5
2.1.2	Diskrete Flächen	7
2.2	Differentialgeometrie	8
2.3	Projektive Geometrie	10
2.4	Datenstrukturen für Polygonnetze	11
2.5	Kugelstrukturen	12
2.5.1	Approximation von Flächen durch Kugelstrukturen . .	12
3	Konvexe Polyeder aus regelmäßigen Facetten	16
3.1	Regularität und Symmetrie	16
3.2	Der Eulersche Polyedersatz	18
3.3	Die Platonischen Körper	19
3.4	Die Archimedischen Körper	20
3.5	Die Johnson Körper	25
3.6	Deltaeder	27
4	Kugelpackungsnetze	28
4.1	Dreiecksnetze und abgeleitete Strukturen	28
4.1.1	Lobel Netze	29
4.1.2	Kugelpackung auf Kreispackungsnetzen (CP-Netze) . .	30
4.1.3	Abgeleitete Strukturen	30
4.1.4	Zusammenhang mit konformen Abbildungen	32
4.2	Rhombennetze	33
4.2.1	Rhombische Polyeder	34
4.2.2	Rhombennetze mit ebenen Knoten	36
4.2.3	Geometrische Deutung der Gauß-Krümmung	39
4.2.4	Rhombennetze mit konischen Knoten	42
4.2.5	Zusammenhang mit zirkulären Netzen	45
5	Approximation von Flächen	51
5.1	Numerische Optimierung	51
5.1.1	Methode des steilsten Abstiegs bzw. Gradientenverfahren	53
5.1.2	Das Newton-Verfahren	54
5.1.3	Methode der konjugierten Gradienten	54
5.1.4	Das Gauß-Newton-Verfahren	55

5.2	Zielfunktionen	55
5.2.1	Kreispackungsnetze	56
5.2.2	Connectivity Shapes	57
5.2.3	Reguläre Netze	58
5.3	Strukturen aus berührenden kongruenten Kugeln	59
5.3.1	Implementierung	59
5.3.2	Vergleichsanalyse	60
5.3.3	Visualisierung	62
6	Lie Sphären Geometrie	64
6.1	Möbiusgeometrie der unorientierten Sphären	66
6.1.1	Stereografische Projektion	67
6.1.2	Einbettung in den projektiven Raum $\mathbb{P}^4$	68
6.1.3	Winkel zwischen unorientierten Sphären	70
6.1.4	Möbiustransformationen	75
6.2	Liesche Geometrie der orientierten Sphären	78
6.2.1	Lie Sphären	79
6.2.2	Orientierte Berührung	81
6.3	Lie Sphären Transformationen	83
6.3.1	Parabolische Büschel orientierter Sphären	84
6.3.2	Lie Inversionen	86
6.3.3	Möbiustransformationen in der Lie Sphären Geometrie	87
6.3.4	Lineare Komplexe von Lie Sphären	88
6.4	Kugelstrukturen aus der Perspektive der Lie Sphären Geometrie	91
7	Zusammenfassung	95
	Literatur	98
A	Python Code zu Kapitel 5	109

1 Einleitung

In dieser Arbeit werden Strukturen aus berührenden Kugeln aus verschiedenen Blickwinkeln untersucht. Solche Strukturen werden als Kugelpackungen bezeichnet und können durch Polygonnetze repräsentiert werden. Dies geschieht, indem man die Mittelpunkte benachbarter Kugeln mittels Strecken verbindet.

Die einfachsten Strukturen sind jene Polyeder mit konstanter Kantenlänge und einer gewissen Regelmäßigkeit. Setzt man Konvexität voraus, dann kommen nur die platonischen, die archimedischen und die Johnson Körper in Frage. Sie sind endlich und werden im Kapitel 3 behandelt.

Im Kapitel 4 werden allgemeinere Netze untersucht (d.h. solche, die nicht unbedingt konvex oder geschlossen sind), die eine Kugelpackung repräsentieren; diese werden als Kugelpackungsnetze definiert. Eine wichtige Unterkategorie sind die Lobel Netze. Das sind Dreiecksnetze aus ausschließlich gleichseitigen Dreiecksfacetten. Solche Netze repräsentieren Kugelpackungen aus kongruenten Kugeln. Eine weitere Familie von Dreiecksnetzen sind die Kreispackungsnetze. Sie werden als jene Dreiecksnetze definiert, bei denen die Inkreise benachbarter Facetten einander berühren. Solche Netze repräsentieren ebenso eine Kugelpackung, diesmal sind die Kugeln i.A. nicht kongruent. Aus solchen Strukturen kann man torsionsfreie wabenförmige Tragstrukturen ableiten, die in der Architektur oft eingesetzt werden. Vierecksnetze, die eine Kugelpackung aus kongruenten Kugeln repräsentieren, heißen Rhombennetze. Ihre Facetten müssen nicht eben sein, sondern können auch windschiefe Rhomben sein. In der diskreten Geometrie spricht man in diesem Fall von diskreten Tschebyscheff Netzen. Die einfachsten Rhombennetze sind die rhombischen Polyeder. Liegen inzidierende Kanten in einer Ebene, dann besitzt das Netz sogenannte ebene Knoten. Solche Netze werden als diskrete pseudosphärische Flächen gesehen. Liegen inzidierende Kanten auf einem gemeinsamen Kegel, dann spricht man von Rhombennetzen mit konischen Knoten. Haben alle Kegeln denselben Öffnungswinkel, dann handelt es sich um diskrete Flächen konstanter Normalkrümmung. Aus Rhombennetzen mit ebenen bzw. koni-

schen Knoten kann man zwei zirkuläre Netze (planare Netze, deren Facetten einen Umkreis besitzen) mit konstantem Radius ableiten und umgekehrt. Zirkuläre Netze stellen diskrete krümmungslinienparametrisierte Flächen dar.

Das Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Optimierung von Netzen im Bezug auf bestimmte geometrische Eigenschaften. Dies kann bei bestimmten Eigenschaften genutzt werden, um in den Ecken der Netze Kugeln zu platzieren, sodass eine Kugelpackung entsteht. Zum Beispiel werden Dreiecksnetze in [1] nach der Kreispackungseigenschaft optimiert. In [2] werden Dreiecksnetze im Sinn von gleichen Kantenlängen optimiert. In [3] werden Netze so optimiert, dass die Facetten möglichst regelmäßige Polygone werden. In der vorhandenen Literatur geschieht die Optimierung numerisch. Die Grundlagen der numerischen Optimierung sowie einige einfache Methoden werden im Kapitel kurz skizziert. Die in der Literatur vorkommenden Algorithmen sind aber etwas komplexer und werden in der Arbeit nicht beschrieben. Am Ende des Kapitels wird eine Implementierung zur Optimierung eines Netzes beschrieben, um eine Struktur aus kongruenten berührenden Kugeln zu gewinnen.

Im Kapitel 6 wird das Thema der Arbeit in die höhere Geometrie eingebettet, nämlich in die Lie Sphären Geometrie. In dieser Geometrie bekommen Ebenen und Sphären eine Orientierung. Punkte, orientierte Ebenen, orientierte Sphären und das uneigentliche Element ∞ werden als Lie Sphären bezeichnet und mit projektiven Punkten auf der sogenannte Lie Quadrik im fünfdimensionalen projektiven Raum in einer eins zu eins Korrespondenz dargestellt. Die Lie Quadrik bestimmt eine indefinite Bilinearform, die als Lie Metrik definiert wird. Mittels der Lie Metrik kann man untersuchen, ob sich zwei Lie Sphären orientiert berühren. Von besonderen Interesse sind jene projektiven Transformationen, die die Lie Quadrik invariant lassen und orientierte Berührung erhalten. Sie werden als Lie Sphären Transformationen bezeichnet und bilden Lie Sphären auf Lie Sphären ab. In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen der Lie Sphären Gruppe und der indefiniten Orthogonalgruppe, die die Lie Metrik invariant lässt, untersucht. Als Folgerung des Theorems von Cartan und Dieudonné wird die Lie Sphären Gruppe

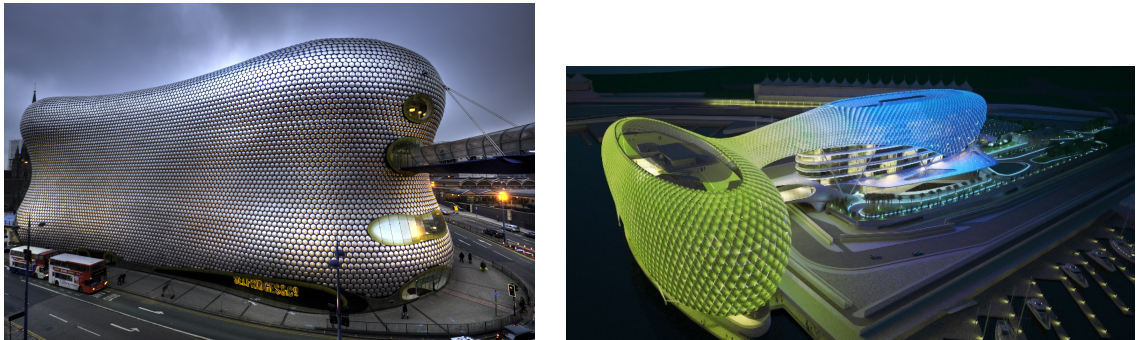


Abbildung 1: Links: Selfridges Building in Birmingham, England. Rechts: Computermodell vom Yas Island Hotel in Abu Dhabi [14].

durch sogenannte Lie Inversionen induziert. Man kann bestimmte Mengen von Lie Sphären als Schnitt einer Hyperebene mit der Lie Quadrik darstellen. Solche Mengen werden als lineare Komplexe bezeichnet und mit dem Pol der Schnitthyperebene identifiziert. Spezielle Komplexe sind jene, die aus Kugeln mit demselben orientierten Radius bestehen. Die Pole solcher Komplexe liegen auf einer projektiven Geraden. Lie Sphären Transformationen, die diese Gerade punktweise fest halten, erhalten Radius und Orientierung. Das Kapitel stellt nur die Grundlagen der Lie Sphären Geometrie dar. Diese Grundlagen sind in [4–10] zu finden. Eine tiefere Untersuchung von Strukturen aus berührenden Kugeln mithilfe der Lie Sphären Geometrie ist aber eine interessante Forschungsrichtung, die in dieser Arbeit nicht behandelt wird.

Strukturen aus berührenden Kugeln haben vielfältige Anwendungsbereiche. Die moderne Architektur beschäftigt sich gerne mit stabilen Freiformstrukturen, die nicht schwer und nicht sehr teuer zu bauen sind. Das Konzept der Panelisierung [1, 11–14] spielt hier eine wichtige Rolle. Ein Beispiel ist das *Selfridges Building* in Birmingham, England. Wie schon erwähnt, kann man aus Kreispackungsnetzen torsionsfreie Wabenstrukturen ableiten. Ein Beispiel davon ist das *Yas Island Hotel* in Abu Dhabi.

Ein weiterer und wichtiger Anwendungsbereich sind Magnetkugeln. Sie sind ein wertvolles didaktisches Instrument, das in verschiedenen Gebieten der

Mathematik, der Physik, der Chemie, der Biologie und des Ingenieurwesens eingesetzt werden kann. Mithilfe von Strukturen aus Magnetkugeln kann man zum Beispiel Eigenschaften von Polyedern, Parkettierungen und Raumfüllungen, Quadrat- und Dreieckszahlen, Magnetfelder, Energien und Kräfte zwischen Dipol-Teilchen, Kristall- und Molekülstrukturen, die chemische Reaktivität organischer Moleküle, die durch die Spannungsenergie induziert wird, Strukturen und Funktionen von Proteinen, Modelle von Naturphänomenen [13], die Kugelpackungen aufweisen, wie Augen von Fliegen, Flächen von Kieselalgen oder Pollen in Pflanzen, die Fortbewegung von Amöben, die Zellteilung, Motoren, Kristalldefekte in Ingenieurmaterialien, Deformationen in dicht gepackten Gittern und die Selbstbelastung von Bauwerken anschaulich untersuchen [15, 16]. Zwei interessante Artikel, die sich mit Konstruktionen aus Magnetkugeln und ihren geometrischen und physikalischen Eigenschaften beschäftigen, sind [17, 18]. Eine Struktur aus Magnetkugeln ist stabil, wenn die sogenannte potentielle Energie minimiert wird. Diese Energie hängt von der Dipol-Dipol Wechselwirkung ab, wobei die Magnetkugeln als Dipole betrachtet werden.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige Prinzipien, Begriffe und Theoreme beschrieben, die für diese Arbeit relevant sind.

2.1 Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten

In dieser Arbeit werden Flächen im Raum mit Strukturen aus Kugeln repräsentiert. D.h. auf der Fläche werden lauter kongruente Kugeln platziert, sodass die Mittelpunkte der Kugeln auf der Fläche liegen. Die resultierende Struktur aus Kugeln soll die Gestalt der Fläche so gut wie möglich approximieren. In diesem Abschnitt soll der Begriff Fläche spezifiziert werden.

2.1.1 Glatte Flächen

Es gibt verschiedene Wege, Flächen zu definieren:

- Als Graph eines *Skalarfeldes* $\mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$.
- Als Nullstellenmenge einer *impliziten Funktion* $\mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$.
- Als Bild einer glatten Abbildung $\mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Viele Flächen oder Stücke von Flächen lassen sich durch Skalarfelder darstellen, aber nicht alle. Z.B. die obere Decke der Einheitskugel lässt sich durch das Skalarfeld $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ darstellen, die vollständige Kugel aber nicht, da es jedem Punkt innerhalb des Einheitskreises uneindeutig zwei mögliche gerichtete Höhen $\pm f(x, y)$ zuordnen würde. D.h. nicht alle Flächen lassen sich als Graph einer Funktion darstellen. Ist eine implizite Funktion $f(x, y, z)$ in einer Umgebung eines Nullstellenpunktes p differenzierbar und die partielle Ableitung nach x, y bzw. z ungleich Null, so kann man, nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen, die Funktion f nach den Variablen x, y bzw. z auflösen. In diesem Fall kann man die Fläche lokal als Graph eines Skalarfeldes darstellen.

Für eine verallgemeinerte Definition, die die obigen drei umfasst, nutzen wir das Konzept der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Abstrakt gesehen

ist eine Fläche eine Teilmenge des Raumes, die lokal zur Ebene „ähnlich“ ist. Betrachtet man die Erdoberfläche, so kann man bestimmte Gebiete auf einer Karte darstellen. D.h. man benötigt bijektive, in beide Richtungen stetige Abbildungen von der Kugeloberfläche in der Ebene. Der Übergang zwischen Karten muss dabei bestimmte Voraussetzungen erfüllen [19, 20].

Definition 2.1. Eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig ist, heißt *Homöomorphismus*. Zwei Mengen heißen *homöomorph*, wenn sie durch einen Homöomorphismus ineinander überführt werden können. Eine bijektive differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch differenzierbar ist, heißt *Diffeomorphismus*. Zwei Mengen heißen *diffeomorph*, wenn sie durch einen Diffeomorphismus ineinander überführt werden können.

Bemerkung 2.1. Da eine differenzierbare Abbildung stetig ist, ist ein Diffeomorphismus automatisch ein Homöomorphismus.

Definition 2.2. Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, dann ist $\mathcal{M}$ eine *zweidimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn sie die Vereinigungsmenge mehrerer Teilmengen $V_i \subset \mathcal{M}$ ist, sodass es:

- 1) $\bigcup_i V_i = \mathcal{M}$.
- 2) für jede Teilmenge V_i eine Teilmenge $U_i \subset \mathbb{R}^2$ gibt, die zu V_i homöomorph ist. Die Homöomorphismen $\phi_i : V_i \rightarrow U_i$ heißen Karten, ihre Umkehrabbildungen *Parametrisierungen*, die Teilmengen U_i *Kartenbereiche* bzw. *Parameterbereiche* und die Menge aller Karten *Atlas*.
- 3) für je zwei nicht disjunkte Teilmengen V_i und V_j die *Kartentransformation*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(V_i \cap V_j) \rightarrow \phi_j(V_i \cap V_j) \quad (2.1)$$

ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung 2.2. Ein Atlas mit diffeomorphen Übergängen zwischen seinen Karten heißt *differenzierbare Struktur*.

2.1.2 Diskrete Flächen

Eine *diskrete zweidimensionale Mannigfaltigkeit* [21] ist ein *Polygonnetz*, das lokal zur Ebene „ähnlich“ ist. Ein Polygonnetz besteht aus einer *Knotenmenge* $\mathcal{V}$, einer *Kantenmenge* $\mathcal{E}$ und einer *Facettenmenge* $\mathcal{F}$. Ein einfaches Beispiel ist der Würfel. Er besteht aus 8 Knoten (die Würfecken), 12 Kanten und 6 Facetten (die Würfelseiten). Die Kantenmenge ist eine Teilmenge der Menge aus allen zweielementigen Teilmengen der Knotenmenge und die Facettenmenge ist eine Teilmenge der Potenzmenge der Kantenmenge, wobei die Ecken in jeder Facette genau zweimal vorkommen. Für die Untersuchung von Polygonnetzen werden folgende Begriffe gebraucht:

Definition 2.3. Die Menge der Facetten, die sich in einem Punkt p treffen, heißt *Stern* von p und wird mit $st(p)$ bezeichnet. Die Anzahl der Kanten, die sich in p treffen, heißt *Valenz* bzw. *Grad* von p und wird mit $val(p)$ bezeichnet. Punkte, die durch eine Kante verbunden sind, heißen *Nachbarpunkte*, Kanten, die sich einen gemeinsamen Punkt teilen, heißen *Nachbarkanten*, und Facetten, die sich eine gemeinsame Kante teilen, heißen *Nachbarfacetten*. Kanten, die nur zu einer Facette gehören, heißen *Randkanten*. In der Graphentheorie wird die Beziehung „Nachbar sein“ mit dem Begriff *Inzidenz* ausgedrückt. Zwei Kanten sind Nachbarkanten, wenn sie in einem Knoten inzidieren. Zwei Facetten, die eine gemeinsame Kante teilen, inzidieren in dieser Kante.

Ähnlich wie bei der Definition von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten kann man jeden Stern als eine Karte eines Atlas betrachten. Damit ein Polygonnetz eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit sein kann, muss es folgende Bedingungen erfüllen:

- (i) Jede Kante gehört zu einer oder zwei Facetten.
- (ii) Jeder Stern ist homöomorph zu einer Kreisscheibe oder einem Kreissektor.

Ist ein Stern $st(p)$ homöomorph zu einem Kreissektor, so heißt p *innerer Knoten*. Jeder innere Knoten verbindet zwei Randkanten. Verfolgt man die inneren Knoten durch die Randkanten, so entsteht ein zyklisch geschlossener

Polygonzug, der zu einem Kreisbogen homöomorph ist. So ein Polygonzug heißt *Rand* des Polygonnetzes. Zwei Ränder können sich keinen Knoten bzw. keine Kante teilen. Fügt man die Ränder eines Polygonnetzes zu der Facettenmenge hinzu, so entsteht eine randlose Mannigfaltigkeit. Auf diese Weise kann man diskrete Mannigfaltigkeiten als Polygonnetze definieren, deren Kanten immer nur zu zwei Facetten gehören und deren Sterne homöomorph zu einer Kreisscheibe sind.

Polygonnetze mit Dreiecken, Vierecken bzw. Sechsecken als Facetten werden *Dreiecksnetze*, *Vierecksnetze* bzw. *Sechsecksnetze* benannt. Solche Polygonnetze heißen *regulär*, wenn die Valenz aller Knoten 6, 4 bzw. 3 ist.

2.2 Differentialgeometrie

In diesem Abschnitt wollen wir die wichtigsten Begriffen und Theoreme bzw. Sätze aus der Differentialgeometrie [20, 22] zusammenfassen, die für diese Arbeit relevant sind.

Definition 2.4. Eine *glatte parametrisierte Fläche* ist eine beliebig oft differenzierbare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

Die Kurven $f(u, v)$ für feste u bzw. v heißen *Parameterlinien*. Sind die partiellen Ableitungen f_u, f_v in einem Punkt $p \in U$ linear unabhängig, so heißt dieser Punkt *regulär*, sonst *singulär*. Parametrisierungen, die keinen singulären Punkt besitzen, heißen *Immersionen*. Eine *Umparametrisierung* ist eine Parametrisierung $V \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei V durch einen Diffeomorphismus $V \rightarrow U$ bestimmt ist.

Definition 2.5. Sei f eine parametrisierte Fläche und df ihr totales Differential, dann heißt

$$I := \langle df, df \rangle = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2 \quad (2.3)$$

die *erste Fundamentalform* von f , wobei $E = \langle f_u, f_u \rangle$, $F = \langle f_u, f_v \rangle$ und $G = \langle f_v, f_v \rangle$.

Definition 2.6. Das Einheitsnormalenfeld $\mathcal{N}(u, v) := \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}$ einer parametrisierten Fläche f heißt die *Gauß-Abbildung* von f . Die *zweite Fundamentalform* von f ist dann

$$II := \langle -df, d\mathcal{N} \rangle = Ldu^2 + Mdudv + Ndv^2, \quad (2.4)$$

wobei $L = \langle -f_u, \mathcal{N}_u \rangle$, $M = \langle -f_u, \mathcal{N}_v \rangle$ und $N = \langle -f_v, \mathcal{N}_v \rangle$.

Definition 2.7. Die *mittlere Krümmung* H bzw. *Gauß-Krümmung* K einer parametrisierten Fläche f wird durch die Spur bzw. die Determinante der zweiten Fundamentalform beschrieben. Betrachtet man eine Tangentialrichtung in einem Punkt der Fläche, so ist die *Normalkrümmung* κ_n in dieser Tangentialrichtung gleich das Verhältnis der zweiten und der ersten Fundamentalform. Die *Hauptkrümmungen* $\kappa_{1,2}$ in einem Punkt der Fläche sind das Maximum bzw. Minimum der Normalkrümmung in diesem Punkt.

Definition 2.8. Eine *Asymptotenlinie* auf einer Fläche ist eine Kurve, in der die Normalkrümmung verschwindet. Eine Fläche, deren Parameterlinien Asymptotenlinien sind, heißt *Asymptotenlinienparametrisierung* bzw. *asymptotisch*.

Definition 2.9. Sind die gegenüberliegenden Bildkurven für jedes Rechteck im Parameterbereich gleich lang, so heißt die parametrisierte Fläche *Tschebyscheff-Netz*.

Mit dieser Definition bilden die Parameterlinien eines Tschebyscheff-Netzes ein infinitesimal kleines Rhombennetz. Für die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform asymptotischer Flächen gilt $e = g = 0$ und für die Koeffizienten der ersten Fundamentalform eines Tschebyscheff-Netzes gilt $E = G = 1$.

Definition 2.10. Eine parametrisierte Fläche mit konstanter negativer Gauß-Krümmung heißt *pseudosphärisch*.

Ein erstaunliches Ergebnis der Differentialgeometrie ist das *Theorema Egregium*. Dieses Theorem besagt, dass die Gauß-Krümmung nur von der ersten Fundamentalform abhängt. Betrachtet man eine beliebige Skalierung einer Parametrisierung, so wird die erste Fundamentalform mit dem Quadrat des Skalierungsfaktors multipliziert. Man kann somit pseudosphärische Flächen so skalieren, dass die Gauß-Krümmung konstant -1 ist. Dabei bleibt die Geometrie der Fläche unverändert.

Das folgende Theorem stellt einen Zusammenhang zwischen Flächen konstanter negativer Krümmung und Tschebyscheff-Netzen dar:

Theorem 2.1. *Sei f eine parametrisierte Fläche. Dann ist f pseudosphärisch, genau dann wenn sie durch ein asymptotisches Tschebyscheff-Netz parametrisiert werden kann.*

2.3 Projektive Geometrie

In der euklidischen Geometrie existiert für nicht parallele Geraden bzw. Ebenen kein gemeinsamer Schnittpunkt. In der projektiven Geometrie existieren solche Schnittpunkte. Sie werden als Fernpunkte betrachtet und man kann ganz normal mit ihnen rechnen. Betrachtet man den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, dann kann man diesen Raum in $\mathbb{R}^{n+1}$ einbetten, in dem man eine Koordinate hinzufügt (üblicherweise am Anfang oder am Ende der Koordinatentupeln). Ein euklidischer Punkt x wird mit der Geraden $\{\lambda(1, x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ identifiziert. Dieser Geraden entspricht ein projektiver Punkt des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n$ mit den homogenen Koordinaten $1, x_1, \dots, x_n$ und er wird mit $[(1, x)]$ bezeichnet.

Eine invertierbare lineare Transformation von $\mathbb{R}^{n+1}$ in sich selbst bildet eindimensionale Unterräume auf eindimensionalen Unterräumen ab. Sie induziert eine projektive Transformation von $\mathbb{P}^n$ in sich selbst. Zwei invertierbare lineare Transformationen $A, B \in GL(n+1)$ induzieren dieselbe projektive Transformationen, wenn $A = \lambda B$ mit $\lambda \neq 0$. Auf diese Weise ist eine Äquivalenzrelation auf der *allgemeinen linearer Gruppe* $GL(n+1)$ wie folgt

definiert

$$A \sim B :\Leftrightarrow A = \lambda B. \quad (2.5)$$

Die Quotientenmenge dieser Äquivalenzrelation auf $GL(n+1)$ bildet eine Partition von $GL(n+1)$ und bestimmt somit die *Projektive Lineare Gruppe*

$$PGL(n) = GL(n+1)/\{\lambda I\}, \quad (2.6)$$

wobei I die Einheitsmatrix ist und $\lambda \neq 0$ [23].

2.4 Datenstrukturen für Polygonnetze

Die Reihenfolge, in der die Knoten einer Facette angeordnet sind, bestimmt die *Orientierung* der Facette. Eine diskrete zweidimensionale Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn sich jede Facette so orientieren lässt, dass die Kanten benachbarter Facetten im Gegensinn durchlaufen werden. Ein Beispiel für eine unorientierbare Fläche ist das *diskrete Möbius-Band*, da es keine orientierbare Realisierung der Facetten gibt.

Ein Polygonnetz besteht aus seiner *Geometrie* und seiner *Topologie* bzw. *Konnektivität*. Die Geometrie eines Netzes wird durch die Knotenkoordinaten charakterisiert. Die Topologie gibt an, wie die Knotenpunkte, Kanten bzw. Facetten miteinander verbunden sind. Man kann Polygonnetze (samt ihrer Geometrie sowie ihrer Topologie) in verschiedenen Datenstrukturen speichern bzw. verarbeiten. Man kann beispielsweise die Geometrie eines Polygonnetzes durch eine $(|\mathcal{V}| \times 3)$ -Matrix beschreiben, deren Zeilen die Koordinaten der Knoten angeben. Die Konnektivität eines Polygonnetzes kann durch die Facettenmenge beschrieben werden. Im Fall von Dreiecks-, Vierecks- bzw. Sechsecksnetzen entsprechend durch eine $(|\mathcal{F}| \times 3)$ -, $(|\mathcal{F}| \times 4)$ - bzw. $(|\mathcal{F}| \times 6)$ -Matrix. Ein Polygonnetz kann als ein Graph betrachtet werden, der im Raum eingebettet ist. Dann kann die Konnektivität durch seine *Adjazenzmatrix* beschrieben werden. Das ist eine symmetrische $(|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|)$ -Matrix, deren Einträge $a_{ij} = 1$, falls die Knoten i und j Nachbarknoten sind, sonst $a_{ij} = 0$.

Eine häufig verwendete Struktur, um Polygonnetze darzustellen, ist das OBJ-Format. Grundsätzlich besteht eine OBJ-Datei aus einer Punkteliste und einer Facettenliste.

2.5 Kugelstrukturen

Eine Struktur aus berührenden überschneidungsfreien Kugeln konstanter Radien $r \in \mathbb{R}^+$ wird durch ein Netz mit folgenden Bedingungen beschrieben:

- Alle Kanten haben die gleiche Länge $2r$.
- Der Abstand zwischen den Knoten ist mindestens die Kantenlänge $2r$.
- Der Winkel zwischen Nachbarkanten beträgt mindestens $\frac{\pi}{3}$.
- Der Torsionswinkel bei benachbarten planaren Facetten ist ebenso größer als $\frac{\pi}{3}$.

2.5.1 Approximation von Flächen durch Kugelstrukturen

Will man eine Fläche durch eine Struktur aus berührenden Kugeln approximieren, dann spricht man von einer Kugelpackung bzw. -überdeckung auf der Fläche. In [13] werden einige Bedingungen für Flächen beschrieben, die eine Kugelpackung aus kongruenten Kugeln ermöglichen:

- Die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf der Fläche.
- Benachbarte Kugeln sollen sich möglichst berühren, aber nicht überschneiden.
- Die Schnittflächen sollen zusammenhängend sein.

In dem Artikel werden nur differenzierbare zweidimensionale Mannigfaltigkeiten berücksichtigt, deren Krümmung begrenzt ist und die kompakt und zusammenhängend sind. Der Radius der Kugeln soll klein genug gewählt werden. Eine gute Schranke für den Radius wird durch die sogenannte *Reichweite* bestimmt. Die Reichweite einer Fläche wird als den kürzesten Abstand

zwischen die Fläche und ihre sogenannte *Mittenachse* an. Man kann sich die Mittenachse als eine Art geometrisches Zentrum einer Fläche vorstellen:

Definition 2.11. Die *Mittenachse* $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ einer Fläche $\mathcal{M}$ ist die Menge aller Punkte p , für die es zwei verschiedene Punkte $m_{1,2}$ auf der Fläche gibt mit minimalem Abstand:

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \exists m_1 \neq m_2 \in \mathcal{M} : \min_{m \in \mathcal{M}} d(p, m) = d(p, m_1) = d(p, m_2)\}. \quad (2.7)$$

Bemerkung 2.3. Die Mittenachse einer Fläche kann man als die Menge der Mittelpunkte jener eingeschriebenen Kugeln interpretieren, die in keiner anderen eingeschriebenen Kugel enthalten ist. Die Bestimmung der Mittenachse ist ein aufwendigeres Verfahren [24–27].

Beispiel 2.1. Die Mittenachse einer Kugel ist ihr Mittelpunkt, und die Mittenachse eines Drehzylinders ist seine Rotationsachse. Eine *Kanalfläche* ist die Einhüllende (*Envelope*) einer einparametrischen Kugelschar. Die Menge der Mittelpunkte der Kugeln bildet die *Leitkurve*, und die Radien der Kugeln werden durch eine Radienfunktion vorgegeben. Beispiele von Kanalflächen sind Drehflächen, Rohrflächen und Dupinsche Zykloiden. Die Leitkurve einer Kanalfläche ist eine Teilmenge ihrer Mittenachse [26, 28]. Beim Torus zum Beispiel ist die Leitkurve ein Kreis, die Rotationsachse ist ebenso eine Teilmenge der Mittenachse [29].

Definition 2.12. Die *Reichweite* ρ einer Fläche $\mathcal{M}$ ist der kürzeste Abstand zwischen $\mathcal{M}$ zu ihrer Mittenachse:

$$\rho = \inf\{\|a - m\| \mid a \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \wedge m \in \mathcal{M}\}. \quad (2.8)$$

Bemerkung 2.4. Die Reichweite einer Fläche muss bei einer Kugelüberdeckung kongruenter Kugeln streng positiv sein. Ist die Fläche ein Dreiecksnetz, dann kann die *diskrete Reichweite* durch iteratives „Glätten“ der Fläche bestimmt werden [30]. Dieser Prozess endet kurz, bevor das Volumen der Fläche verschwindet. Auf diese Weise entsteht eine Art Skelett der Fläche, die man als

die *diskrete Mittenachse* definieren kann. Der Abstand zwischen der Fläche und ihrem Skelett ist dann die diskrete Reichweite.

Eine obere bzw. untere Schranke für die Anzahl der Kugeln für eine Kugelpackung kann durch die Reichweite angegeben werden (siehe [13]):

Theorem 2.2. *Ist $\mathcal{M}$ eine kompakte zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit der Reichweite ρ , dem Flächeninhalt $A_{\mathcal{M}}$ und $r \ll \rho$ der Radius der Kugeln, so kann $\mathcal{M}$ mit höchstens*

$$\left\lceil \left(1 - \frac{r^2}{2\rho^2}\right)^{-2} \frac{A_{\mathcal{M}}}{r^2\pi} \right\rceil \quad (2.9)$$

und mindestens

$$\left\lfloor \left|1 - \frac{2r^2}{\rho^2}\right| \frac{A_{\mathcal{M}}}{4r^2\pi} \right\rfloor \quad (2.10)$$

kongruenten Kugeln mit dem Radius r überschneidungsfrei überdeckt werden.

Im Beweis des Theorems 2.2 verwenden wir folgende Hilfssätze [31]:

Lemma 2.3. *Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge mit Reichweite $\rho > 0$. Für zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathcal{M}$ mit $\|p - q\| < 2\rho$ gilt:*

$$\|p - q\| \leq d_{\mathcal{M}}(p, q) \leq 2\rho \arcsin\left(\frac{\|p - q\|}{2\rho}\right), \quad (2.11)$$

wobei $d_{\mathcal{M}}(p, q)$ die geodätische Distanz zwischen p und q auf $\mathcal{M}$ beschreibt.

Lemma 2.4. *Seien $\mathcal{M}$, ρ und $p, q \in \mathcal{M}$ wie im Lemma 2.3 beschrieben und $\mathcal{T}_x\mathcal{M}$ die Tangentialebene im Punkt $x \in \mathcal{M}$. Dann gilt:*

$$\angle(\mathcal{T}_p\mathcal{M}, \mathcal{T}_q\mathcal{M}) \leq \frac{d_{\mathcal{M}}(p, q)}{\rho}. \quad (2.12)$$

Einen Beweis für obige Hilfssätze findet man in [31].

Beweis des Theorems 2.2 Sei $B(p)$ einer Kugel mit gegebenem Radius r und Mittelpunkt $p \in \mathcal{M}$, $\mathcal{D}$ die Normalprojektion der Schnittfläche $\mathcal{S} = \mathcal{M} \cap B(p)$ auf die Tangentialebene $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$, $p \in \mathcal{S}$, N_p bzw. N_q die Normalvektoren

in p bzw. q , $\phi := \angle(N_p, N_q)$ und ϕ_{max} der größte Winkel zwischen N_p und N_x für alle anderen $x \in \mathcal{S}$.

Aus den Lemmas 2.3 und 2.4 folgt nach Umformen

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \leq \frac{\|p - q\|}{2\rho}. \quad (2.13)$$

Die Schnittfläche $\mathcal{S}$ kann als Graph einer Funktion über $\mathcal{D}$ dargestellt werden. Dafür wählen wir geeignete Koordinaten, sodass N_p mit dem dritten Standardvektor übereinstimmt, und parametrisieren ϕ erneut. Der Flächeninhalt $A_{\mathcal{S}}$ von $\mathcal{S}$ lautet nun

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\cos(\phi)} du dv. \quad (2.14)$$

Da $\cos(\phi_{max}) \leq \cos(\phi)$ und der Flächeninhalt von $\mathcal{D}$ kleiner gleich $r^2\pi$ ist, folgt

$$A_{\mathcal{S}} \leq \frac{1}{|\cos(\phi_{max})|} r^2\pi. \quad (2.15)$$

Mithilfe der Ungleichung (2.13) sowie der Identität $\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ kann nun eine obere Schranke für $A_{\mathcal{S}}$ hergeleitet werden:

$$A_{\mathcal{S}} \leq \left| \frac{1}{1 - \frac{r^2}{2\rho^2}} \right| r^2\pi. \quad (2.16)$$

Ist ψ der Winkel zwischen $q - p$ und $\mathcal{T}_p\mathcal{M}$ so lautet der Flächeninhalt $A_{\mathcal{D}}$ von $\mathcal{D}$ $A_{\mathcal{D}} = \cos^2(\psi)r^2\pi$. Aus $\psi \leq \phi_{max}$, der Ungleichung (2.13) und obiger Identität kann man eine untere Schranke für $A_{\mathcal{S}}$ herleiten:

$$A_{\mathcal{S}} \geq \left(1 - \frac{r^2}{2\rho^2}\right)^2 r^2\pi. \quad (2.17)$$

Da sich die Kugeln nicht schneiden dürfen, kann man eine obere Schranke für die Anzahl der Kugeln berechnen, indem man den Flächeninhalt $A_{\mathcal{M}}$ durch die rechte Seite der Ungleichung (2.17) dividiert. Analog kann man eine untere Schranke berechnen, indem man $A_{\mathcal{M}}$ durch die rechte Seite der Ungleichung (2.16) dividiert. Somit ist das Theorem bewiesen. $\square$

3 Konvexe Polyeder aus regelmäßigen Facetten

Die einfachsten Kugelstrukturen werden durch die sogenannten *uniformen* Polyeder beschrieben. Diese Polyeder werden von regelmäßigen Seitenflächen begrenzt. Ihre Kanten haben eine konstante Länge, und die Winkel zwischen benachbarten Kanten sind größer als $\frac{\pi}{3}$. D.h. sie erfüllen alle Voraussetzungen, um eine Kugelstruktur zu beschreiben. Die uniformen Polyeder bestehen aus den regulären und halbberegulären Polyeder.

Definition 3.1. Die Begrenzung der Durchschnittsmenge endlich vieler Halbräume ist ein *Polyeder*. Ein beschränktes Polyeder nennt man *Polytop* [32–34].

Bemerkung 3.1. Nach dieser Definition ist jedes Polyeder konvex. D.h. alle inneren Punkte einer Strecke, deren Eckpunkte beliebig auf einem Polyeder liegen, liegen im Inneren des Polyeders.

In dieser Arbeit werden nur beschränkte Polyeder behandelt. Ein Polyeder wird durch die Menge seiner Eckpunkte, die Menge seiner Kanten und die Menge seiner Seitenflächen bestimmt. Die Seitenflächen werden auch Facetten genannt und sind ebene Polygone [35].

Für Kugelstrukturen aus kongruenten Kugeln spielt nur die Klasse der Polyeder konstanter Kantenlänge eine Rolle. Eine interessante Forschungsaufgabe wäre es, diese Klasse zu untersuchen. In diesem Kapitel wird nur die Unterkategorie der Polyeder vorgestellt, die durch regelmäßige Facetten begrenzt werden. Im ersten Abschnitt werden jene Eigenschaften präsentiert, nach denen man Polyeder klassifizieren kann. Die darauffolgenden Abschnitte stellen die regulären, halbberegulären und die zusammengesetzten Polyeder vor.

3.1 Regularität und Symmetrie

Polyeder, die von regelmäßigen Polygonen begrenzt werden, besitzen verschiedene Eigenschaften bzw. Symmetrien. Betrachtet man z.B. einen Würfel, dann

kann man ihn im Raum bewegen, und seine Facetten, Kanten und Ecken sehen aus gewissen verschiedenen Blickwinkeln gleich aus. Diese Eigenschaft wird mit den folgenden Definitionen formalisiert [36]:

Definition 3.2. Eine *Symmetrie* eines Polyeders ist eine *Isometrie* (eine längentreue Transformation), die das Polyeder auf sich selbst abbildet. Ein Polyeder heißt *monoedrisch*, wenn seine Facetten paarweise kongruent sind. Sind alle Facetten eines Polyeders paarweise kongruent und existiert für jedes Facettenpaar eine Symmetrie des Polyeders, die eine Facette auf die andere abbildet, so heißt das Polyeder *isoedrisch*.

Definition 3.3. Ein Polyeder heißt *isogonal* bzw. *isotoxal*, wenn für jedes Eckenpaar bzw. Kantenpaar eine Symmetrie des Polyeders existiert, die eine Ecke bzw. eine Kante in die andere überführt.

Zwei Ecken eines isogonalen Polyeders besitzen die gleiche Valenz (Anzahl der Inzidenzkanten) und die gleiche Arten von Inzidenzfacetten. In einem isotoxalen Polyeder ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Facetten (auch als *Diederwinkel* oder *Torsionswinkel* bekannt) gleich.

Definition 3.4. Ein beschränktes, konvexes Polyeder heißt:

1. *uniform*, wenn es isogonal ist und von regelmäßigen Facetten begrenzt wird,
2. *regulär*, wenn es uniform und isoedrisch ist,
3. *halbregulär*, wenn es uniform, aber nicht regulär ist,
4. *zusammengesetzt*, wenn es in zwei oder mehrere uniforme Polyeder unterteilt werden kann.

Reguläre, halbreguläre bzw. zusammengesetzte Polyeder sind als *platonische*, *archimedische* bzw. *Johnson Körper* bekannt. Für konvexe Polyeder entdeckte Leonhard Euler (1707-1783) eine Beziehung zwischen der Anzahl seiner Ecken, Facetten und Kanten. Diese Beziehung wird als der *Eulersche Polyedersatz* bezeichnet. Mithilfe des Eulerschen Polyedersatzes lassen sich die regulären und halbregulären Polyeder klassifizieren [34].

3.2 Der Eulersche Polyedersatz

Theorem 3.1. *Ist ein beschränktes konvexes Polyeder gegeben, so gilt für die Anzahl der Ecken e , die Anzahl der Kanten k und die Anzahl der Facetten f die Gleichung*

$$e + f = k + 2. \quad (3.1)$$

Bemerkung 3.2. Ein beschränktes Polyeder ist geschlossen.

Beweis. Der folgende Beweis nutzt das Induktionsprinzip nach der Anzahl der Facetten. Nimmt man von einem Polyeder eine Facette weg, so bleibt ein offenes Polyeder mit derselben Anzahl an Ecken und Kanten. Für offene Polyeder gilt die Annahme

$$e + f = k + 1. \quad (3.2)$$

Ein offenes Polyeder mit nur einer Facette ist ein Polygon mit n Ecken und n Kanten und erfüllt somit die Annahme. Angenommen (3.2) gilt für offene Polyeder mit Facettenanzahl $f < \tilde{f}$. Ist ein offenes Polyeder mit $\tilde{f}$ Facetten, $\tilde{k}$ Kanten und $\tilde{e}$ Ecken gegeben, so kann man es in zwei kleinere offene Polyeder längst eines offenen Kantenzugs mit x Kanten teilen, dessen Anfang und Ende auf verschiedenen Seiten der Öffnung des Polyeders liegen. Die zwei kleineren Polyeder besitzen weniger als $\tilde{f}$ Facetten und erfüllen somit (3.2). Für die Eckpunkte $e_{1,2}$, die Kanten $k_{1,2}$ und die Facetten $f_{1,2}$ gilt:

$$e_1 + e_2 = \tilde{e} + x + 1, \quad (3.3)$$

$$k_1 + k_2 = \tilde{k} + x \quad (3.4)$$

und

$$f_1 + f_2 = \tilde{f}. \quad (3.5)$$

Daraus ergibt sich beim Anwenden der Annahme (3.2) auf die Teilpolyeder:

$$\tilde{e} + \tilde{f} = e_1 + e_2 - x - 1 + f_1 + f_2 = k_1 + k_2 - x + 1 = \tilde{k} + 1. \quad (3.6)$$

□

Der Eulerschen Polyedersatz ist ein wichtiges Werkzeug, um die genaue Anzahl der platonischen und archimedischen Körper zu bestimmen.

3.3 Die Platonischen Körper

Die regulären Polyeder sind als die *platonischen Körper* bekannt. Sie sind isoedrisch, isotoxal und isogonal und besitzen nur kongruente regelmäßige Polygone als Facetten.

Theorem 3.2. *Es gibt nur die folgenden fünf platonischen Körper:*

1. *Das Tetraeder mit 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Dreiecken.*
2. *Das Oktaeder mit 6 Ecken, 12 Kanten und 8 Dreiecken.*
3. *Das Ikosaeder mit 12 Ecken, 30 Kanten und 20 Dreiecken.*
4. *Das Hexaeder (Würfel) mit 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Quadraten.*
5. *Das Dodekaeder mit 20 Ecken, 30 Kanten und 12 Fünfecken.*

Beweis. Seien e, k und f die Anzahl der Ecken, Kanten und Facetten eines platonischen Körpers, $n \geq 3$ die Anzahl der Kanten bzw. Ecken einer Facette und $s \geq 3$ die konstante Valenz der Ecken (das ist die Anzahl der Facetten bzw. Kanten, die sich in einer Ecke treffen). Addiert man pro Facette die Anzahl der Kanten, dann werden sie doppel gezählt und es gilt

$$nf = 2k. \tag{3.7}$$

Addiert man pro Ecke die Anzahl der inzidierenden Kanten, dann werden sie ebenso doppel gezählt und es gilt

$$se = 2k. \tag{3.8}$$

Die Gleichungen (3.8), (3.7) bilden zusammen mit dem eulerschen Satz (3.1) ein Gleichungssystem in den Variablen e, k, f, n und s . Bestimmt man geeignete Paare (n, s) , dann können die fehlenden Variablen durch das Lösen des

Systems berechnet werden. Die Paare (n, s) werden mithilfe der Innenwinkelsumme der Ecken bestimmt [37, 38]. Die Innenwinkel der Facetten sind konstant $\alpha := \frac{(n-2)\pi}{n}$ und somit ist die Innenwinkelsumme in jeder Ecke $s\alpha$. Da in einem konvexen Polyeder die Innenwinkelsumme der Ecken kleiner als ein voller Winkel ist, gilt $s\alpha < 2\pi$. Daraus folgt die Bedingung

$$3 \leq s < \frac{2n}{n-2}. \quad (3.9)$$

Besteht der platonische Körper aus gleichseitigen Dreiecken, dann folgt aus (3.9) $s \in \{3, 4, 5\}$. Für die Paare $(3, 3)$, $(3, 4)$ und $(3, 5)$ ergeben sich das Tetraeder, das Oktaeder bzw. das Ikosaeder. Besteht der platonische Körper aus Quadraten, dann folgt aus (3.9) $s = 3$. Das Paar $(4, 3)$ entspricht dem Hexaeder (Würfel). Für regelmäßige Fünfecke folgt ebenso $s = 3$, was zum Dodekaeder führt. $\square$

3.4 Die Archimedischen Körper

Lässt man mehrere Typen von regelmäßigen Polygonen als Facetten zu, so spricht man von Archimedischen Körpern oder halbberegulären Polyedern.

Definition 3.5. Die *Archimedischen Körper* sind alle uniforme Polyeder, die nicht regulär sind.

Die archimedischen Körper sind isogonal, aber nicht unbedingt isotoxal. Wegen der nicht Regularität treffen sich in jedem Punkt eines archimedischen Körpers zumindest zwei verschiedene regelmäßige Polygone. Zu den archimedischen Körpern gehören die Prismen und die Antiprismen:

Definition 3.6. Liegen zwei regelmäßige Polygone übereinander, sodass ihre Ecken durch Quadrate verbunden sind, so liegt ein *archimedisches Prisma* vor. Dreht man eines der Polygone, sodass die Ecken durch gleichseitige Dreiecke verbunden werden, so liegt ein *archimedisches Antiprisma* vor.

Da die archimedischen Körper isogonal sind, treffen sich in allen Ecken die gleiche Anzahl an n -seitigen Polygonen. Die Art der Polygone, die in dem Stern einer Ecke vorkommen, kann in einem Tupel $(n_1, \dots, n_s) =: S$

geschrieben werden, sodass benachbarte Werte in S die Anzahl der Seiten von benachbarten Polygonen des Sterns angeben. Werden die Werte in S im Kreis vertauscht, sodass sich eine zyklische Permutation $\tilde{S}$ ergibt, dann stellt $\tilde{S}$ den gleichen Stern dar wie S . Die Länge s von S gibt die Valenz in jeder Ecke an.

Sei f_m die Anzahl der regelmäßigen m -Ecke in einem archimedischen Körper und t_m die absolute Häufigkeit von m in S . Da sich in einer Ecke t_m m -Ecken treffen, erhält man beim Aufzählen der Punkte von allen m -Ecken das t_m -fache der Gesamtanzahl der Ecken. Somit gilt:

$$t_m e = m f_m. \quad (3.10)$$

Ist S gegeben, so kann man mit (3.1), (3.8) und (3.10) die Gesamtanzahl der Ecken, Kanten und Facetten bestimmen [37, 38]. Um die archimedischen Körper zu klassifizieren, bleibt nun nur die Frage offen, welche Werte S annehmen kann. Sind alle Werte von S gleich, dann liegt ein platonischer Körper vor. Daher müssen zumindest zwei Werte von S unterschiedlich sein. Zunächst wird bewiesen, dass es 13 Typen von archimedischen Körpern gibt:

Satz & Definition 3.1. Neben den *Prismen* und *Antiprismen* gibt es die folgenden 13 archimedischen Körper:

1. Das *abgeschrägte Hexaeder* mit $S = (3, 3, 3, 3, 4)$, 24 Punkten, 60 Kanten und 38 Facetten (32 Dreiecke und 6 Quadrate).
2. Das *abgeschrägte Dodekaeder* mit $S = (3, 3, 3, 3, 5)$, 60 Punkten, 150 Kanten und 92 Facetten (80 Dreiecke und 12 Pentagone).
3. Das *Kuboktaeder* mit $S = (3, 4, 3, 4)$, 12 Punkten, 24 Kanten und 14 Facetten (8 Dreiecke und 6 Quadrate).
4. Das *Ikosidodekaeder* mit $S = (3, 5, 3, 5)$, 30 Punkten, 60 Kanten und 32 Facetten (20 Dreiecke und 12 Pentagone).

5. Das *Rhombenkuboktaeder* mit $S = (3, 4, 4, 4)$, 24 Punkten, 48 Kanten und 26 Facetten (8 Dreiecke und 18 Quadrate).
6. Das *Rhombenikosidodekaeder* mit $S = (3, 4, 5, 4)$, 60 Punkten, 120 Kanten und 62 Facetten (20 Dreiecke, 30 Quadrate und 12 Pentagone).
7. Das *abgestumpfte Tetraeder* mit $S = (3, 6, 6)$, 12 Punkten, 18 Kanten und 8 Facetten (4 Dreiecke, 4 Hexagone).
8. Das *abgestumpfte Hexaeder* mit $S = (3, 8, 8)$, 24 Punkten, 36 Kanten und 14 Facetten (8 Dreiecke, 6 Oktagone).
9. Das *abgestumpfte Dodekaeder* mit $S = (3, 10, 10)$, 60 Punkten, 90 Kanten und 32 Facetten (20 Dreiecke, 12 Dodekagone).
10. Das *abgestumpfte Oktaeder* mit $S = (4, 6, 6)$, 24 Punkten, 36 Kanten und 14 Facetten (6 Quadrate, 8 Hexagone).
11. Das *abgestumpfte Ikosaeder* mit $S = (5, 6, 6)$, 60 Punkten, 90 Kanten und 32 Facetten (12 Pentagone, 20 Hexagone).
12. Das *große Rhombenkuboktaeder* mit $S = (4, 6, 8)$, 48 Punkten, 72 Kanten und 26 Facetten (12 Quadrate, 8 Hexaeder, 6 Oktaeder).
13. Das *große Rhombenikosidodekaeder* mit $S = (4, 6, 10)$, 120 Punkten, 180 Kanten und 62 Facetten (30 Quadrate, 20 Hexaeder, 12 Dekagone).

Bemerkung 3.3. Schneidet man die Ecken der platonischen Körper, sodass überall regelmäßige Polygone entstehen, so erhalten wir die obigen abgestumpften Polyeder. Das Kuboktaeder bzw. das Ikosidodekaeder entstehen, wenn man die Ecken des Hexaeders oder des Oktaeders bzw. des Dodekaeders oder des Ikosaeders durch die Mitte ihrer Kanten abschneidet. Die restlichen archimedische Körper können durch Durchschnittsbildungen oder andere Abschneideverfahren bestimmt werden [39].

Beweis. Die Länge s von S kann mithilfe der Innenwinkelsumme limitiert werden. Sie ist in jeder Ecke konstant und wegen der Konvexität kleiner als

ein voller Winkel. Es gilt daher:

$$\sum_{i=1}^s \frac{(n_i - 2)\pi}{n_i} < 2\pi. \quad (3.11)$$

Man kann (3.11) zu folgender Ungleichung umformen:

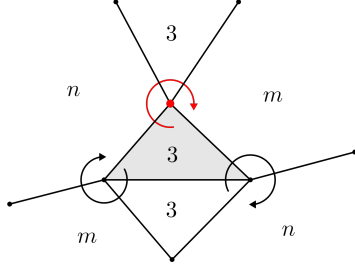
$$\frac{s}{2} - 1 < \sum_{i=1}^s \frac{1}{n_i}. \quad (3.12)$$

Da die Facetten mindestens drei Seiten besitzen (d.h. $n_i \geq 3$ für alle $n_i \in S$), folgt aus (3.12) $3 \leq s \leq 5$. Die rechte Seite von (3.12) ist die Summe aller Kehrwerte von S . Je größere Werte in S , desto kleiner wird sie. Es gibt somit nur endlich viele Konfigurationen für S . Kennt man die Länge s , dann kann man leicht Konfigurationen für S bestimmen.

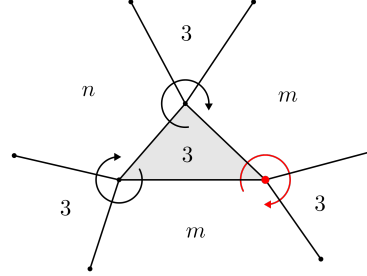
Für $s = 5$ kommt nur die Konfiguration $S = (3, 3, 3, 3, n)$ in Frage. Aus (3.12) folgt die Bedingung $4 \leq n \leq 5$, was zu den Körpern 1 und 2 vom Satz führt.

Ist $s = 4$, dann kann 3 in S einmal, zweimal oder dreimal vorkommen. Im letzten Fall handelt es sich um ein *Antiprisma* mit $S = (3, 3, 3, n)$. Im zweiten Fall ergeben sich die Konfigurationen $(3, 3, n, m)$ und $(3, n, 3, m)$. Die Abbildungen 2a und 2b zeigen, dass beide Konfigurationen in einer Ecke eines Dreiecks verletzt werden. Die zweite Konfiguration würde nicht verletzt werden, wenn $n = m$. Aus (3.12) folgt dann $4 \leq n \leq 5$, was zu den Körpern 3 und 4 führt. Im ersten Fall kommen nur die Konfigurationen $(3, 4, 4, 4)$, $(3, 4, 4, 5)$ und $(3, 4, 5, 4)$ in Frage, denn bei höheren Werten würde (3.12) einen Widerspruch liefern. Die letzte Figur in Abb. 2c zeigt eine Verletzung in der Konfiguration $(3, 4, 4, 5)$. Die anderen zwei Konfigurationen entsprechen den Körpern 5 und 6.

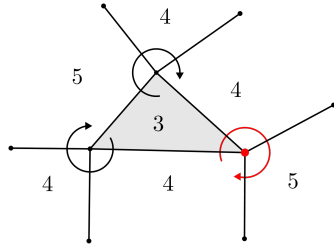
Für den Fall $s = 3$ müssen mindestens zwei Werte von S verschieden sein. Für $S = (a, b, c)$ mit o.B.d.A. $a \neq b$ muss c eine gerade Zahl sein, denn sonst würde es eine Ecke mit der Konfiguration (b, b, c) geben (siehe Abb. 2d). Gibt



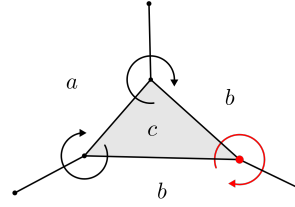
(a) Konfiguration $(3, 3, n, m)$



(b) Konfiguration $(3, n, 3, m)$



(c) Konfiguration $(3, 4, 4, 5)$



(d) Konfiguration (a, b, c)

Abbildung 2: Ungültigkeit einiger Konfigurationen

es in S zwei gleiche Werte, dann müssen sie gerade sein. Die Konfiguration $(n, 4, 4)$ korrespondiert mit einem n -seitigen Prisma. Für $S = (3, n, n)$ folgt aus (3.12) $4 \leq n \leq 10$. Die Tupeln mit $n \in \{6, 8, 10\}$ korrespondieren mit den Körpern 7, 8 und 9. Für $S = (4, n, n)$ folgt aus (3.12) $6 \leq n < 8$, was zum Körper 10 führt. Für $S = (5, n, n)$ folgt aus (3.12) $4 \leq n < 7$, was zum Körper 11 führt. Sind alle Werte in S paarweise verschieden, dann müssen alle Werte gerade sein. Wegen (3.12) kommen nur die Konfigurationen $(4, 6, 8)$ und $(4, 6, 10)$ in Frage. Sie entsprechen den Körper 12 und 13. $\square$

Bemerkung 3.4. Es gibt einen ganz besonderen Körper, der von einigen Autoren als der vierzehnte archimedische Körper bezeichnet wird (siehe [36, 40, 41]). Es handelt sich um das *Pseudo-Rhombenkuboktaeder* (auch als *Millers Körper* oder als *verlängerte quadratische Drehdoppelkuppel* bekannt)

und entsteht, wenn man eine Kappe des Rhombenkuboktaeders um 45° dreht [40]. Das Pseudo-Rhombenkuboktaeder besitzt viele Eigenschaften, die die archimedischen Körper auch besitzen, insbesondere die *lokale Eckenkongruenz*: Zwei Ecken eines Körpers sind lokal kongruent, wenn sie in ihrer unmittelbaren Umgebung gleich aussehen. Global gesehen sind aber nicht alle Ecken des Pseudo-Rhombenkuboktaeders kongruent (das Pseudo-Rhombenkuboktaeder sieht nicht von jeder Ecke aus gleich aus, wenn man den gesamten Körper betrachtet). Fordert man globale Eckenkongruenz, dann gehört das Pseudo-Rhombenkuboktaeder nicht zu den archimedischen Körpern [41].

Bis jetzt wurden alle uniformen Polyeder behandelt. Man kann einige uniforme Polyeder zerlegen und zerlegte Körper zusammensetzen, sodass weitere Körper entstehen, deren Facetten regelmäßig sind. Diese Körper werden im folgenden Abschnitt behandelt.

3.5 Die Johnson Körper

Norman W. Johnson und *Victor Zalgaller* befassten sich in der zweite Hälfte des 20. Jahrhunderts mit nicht uniformen Polyedern, die nur aus regelmäßigen Facetten bestehen. Sie zeigten, dass es genau 92 solcher Körper gibt [36, 41–44].

Definition 3.7. Ein Polyeder aus regelmäßigen Facetten, das nicht uniform ist, heißt *Johnson Körper*.

Definition 3.8. Besitzt ein Polyeder mit regelmäßigen Facetten einen ebenen regelmäßigen Kantenzug, der keine Facette ist, so kann man es in zwei Teilkörper aus regelmäßigen Facetten zerlegen, die eine gemeinsame regelmäßige Facette besitzen. Ein solches Polyeder heißt *zerlegbar*. Ein nicht zerlegbares Polyeder mit regelmäßigen Facetten heißt *elementar*, d.h. es kann nicht als Vereinigung zweier Körpern mit regelmäßigen Facetten gebildet werden.

Beispiele für zerlegbare Körper sind das Oktaeder, das Ikosaeder, das Kuboktaeder, das Ikosidodekaeder, das Rhombenkuboktaeder und das Rhombenicosidodekaeder. Das Oktaeder ist die Vereinigung zweier regelmäßiger

quadratischer Pyramiden, und das Ikosaeder ist die Vereinigung eines *Fünfeckantiprismas* mit zwei *Fünfeckpyramiden*. Aus dem Kuboktaeder, dem Rhombenkuboktaeder und dem Rhombenikosidodekaeder gewinnt man durch einen ebenen Schnitt eine *Dreiecks-*, *Quadrats-* bzw. *Fünfeckkuppel*. Diese bestehen aus einem n -Eck und einem $2n$ -Eck, die parallel sind und abwechselnd von n Dreiecken und n Quadraten begrenzt sind. Ein in der Mitte geteiltes Ikosidodekaeder ergibt zwei *Fünfeckrotunden*.

Durch das Zerlegen uniformer Polyeder und das Zusammensetzen uniformer Polyeder und zerlegter Körper können 83 Johnson Körper gewonnen werden. In [41] findet man eine deutschsprachige Klassifikation aller Johnson Körper. Die oben genannten Pyramiden, Kuppeln und die Rotunde bilden die ersten sechs Johnson Körper. Werden zwei gleiche Pyramiden, Kuppeln oder Rotunden über der Grundfläche vereinigt, so entsteht eine *Doppelpyramide*, eine *Doppelkuppel* oder eine *Doppelrotunde*. Werden eine Kuppel und eine Rotunde vereinigt, so entsteht eine *Kuppelrotunde*. Wird ein Prisma bzw. ein Antiprisma über einer Deckfläche mit einem anderen Körper vereinigt, so heißt der entstandene Körper *verlängert* bzw. *drehverlängert*. Entsteht ein zerlegbarer Körper durch Drehung aus zwei Teilkörpern über der gemeinsamen Facette, so bekommt dieser Körper das Präfix "*Dreh-*". Ein Beispiel ist das *Drehdoppelgiebel*, das aus zwei dreieckigen Prismen besteht. Wird ein Körper mit einer oder mehreren Pyramiden oder Kuppeln vereinigt, so heißt er (*mehrfach-*) *erweitert*. Wird ein zerlegbares uniformes Polyeder einmal oder mehrfach zerlegt, so heißt er (*mehrfach-*) *verkleinert* oder *reduziert*. Die restlichen neun Johnson Körper lassen sich nicht durch Abschneiden oder Vereinigen gewinnen [40–42].

Bemerkung 3.5. Die Johnson Körper bilden mit den platonischen Körpern und den archimedischen Körpern (samt allen Prismen und Antiprismen) die Menge aller konvexen Polyeder mit regelmäßigen Facetten.

3.6 Deltaeder

Alle konvexen Polyeder mit ausschließlich gleichseitigen Dreiecksfacetten sind entweder platonisch oder Johnson Körper. Wir wollen sie aber als eigene Unterklasse der Polyeder mit regelmäßigen Facetten betrachten.

Satz 3.3. *Es gibt unendlich viele Deltaeder, aber nur acht sind konvex: Das Tetraeder, das Oktaeder, das Ikosaeder, die dreieckige Doppelpyramide, die Fünfeckige Doppelpyramide, der stumpfe Doppelkeil, das dreifach erweiterte dreieckige Prisma und die drehverlängerte quadratische Doppelpyramide [41].*

Beweis. Es gibt drei platonische Deltaeder, die anderen fünf sind Johnson Körper. Man kann alternativ kombinatorisch wie folgt vorgehen: Zählt man pro Facette die Anzahl der Kanten, dann werden die Kanten zweifach gezählt und es gilt

$$2k = 3f. \quad (3.13)$$

Aus (3.13) und (3.1) folgt $f = 2(e - 2)$ bzw. $k = 3(e - 2)$. Wegen der Innenwinkelsumme und der Konvexität treffen sich in einer Ecke maximal fünf Dreiecke. Bezeichnet man die Anzahl der Ecken, wo sich drei, vier bzw. fünf Dreiecke treffen, mit e_3, e_4 bzw. e_5 , so gilt $e = e_3 + e_4 + e_5$. Setzt man in den oberen Gleichungen und in (3.1) ein, so erhalten wir:

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 = 12. \quad (3.14)$$

Diese Gleichung besitzt 19 natürliche Lösungen, die in [41] angegeben werden. Die Lösungen $(4, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$, $(0, 0, 12)$, $(2, 3, 0)$, $(0, 5, 2)$, $(0, 4, 4)$, $(0, 3, 6)$ und $(0, 2, 8)$ entsprechen der Reihenfolge nach den im Satz erwähnten Deltaedern. Die anderen Lösungen sind geometrisch nicht konstruierbar [45–47]. $\square$

4 Kugelpackungsnetze

Eine allgemeine Struktur aus berührenden Kugeln kann durch ein Polygonnetz beschrieben werden, das die Mittelpunkte von sich berührenden Kugeln verbindet. Solche Polygonnetze nennen wir *Kugelpackungsnetze*. Die Berührungspunkte liegen dann im Inneren der Kanten. In diesem Kapitel werden einige Eigenschaften von Dreiecks- und Vierecksnetzen untersucht, die eine Kugelpackung ermöglichen. Eine Struktur aus gleichgroßen Kugeln wird durch ein Kugelpackungsnetz mit konstanter Kantenlänge beschrieben. Im Fall von Dreiecksnetzen spricht man von Lobel Netzen und im Fall von Vierecksnetzen von Rhombennetzen.

Im ersten Teil des Kapitels werden, neben den Lobel Netzen, besondere Dreiecksnetze vorgestellt, die sowohl eine Kugelpackung als auch eine Kreispackung ermöglichen. Aus solchen Netzen kann man wabenförmige Strukturen ableiten, deren Zellen aus Tangentialebenen der Kugeln bestehen.

Im zweiten Teil des Kapitels werden Vierecksnetze konstanter Kantenlänge als diskrete Tschebyshev Netze, sowie der Zusammenhang zwischen Vierecknetzen, diskreten pseudosphärischen Flächen und diskreten krümmungslinienparametrisierten Flächen besprochen. Diskrete pseudosphärische Flächen werden durch sogenannte Rhombennetze mit ebenen Knoten und diskrete krümmungslinienparametrisierte Flächen durch sogenannte zirkuläre Netze realisiert. Die letzten werden aus sogenannten Rhombennetzen mit konischen Knoten abgeleitet.

4.1 Dreiecksnetze und abgeleitete Strukturen

Es gibt Dreiecksnetze, deren Inkreise eine Kreispackung auf dem Netz bestimmen. Solche Netze sind als Kreispackungsnetze bekannt. Ein Spezialfall sind die Lobel Netze. Das sind Dreiecksnetze konstanter Kantenlänge und folglich mit gleichseitigen Dreiecken als Facetten. Aus Kreispackungsnetzen kann man eine duale Freiformstruktur gewinnen, die die Form einer Bienenwabe besitzt.

4.1.1 Lobel Netze

Ein Dreiecksnetz mit ausschließlich gleichseitigen Dreiecken als Facetten nennen wir *gleichseitiges Dreiecksnetz*. Ist ein gleichseitiges Dreiecksnetz ein Polyeder, so heißt es *Deltaeder*. Allgemeine gleichseitige Dreiecksnetze werden, nach dem französischen Architekt Alain Lobel, als *Lobel Netze* (engl.: *Lobel Frames*) benannt [48–51]. Sie wurden 1993 von Alfred Novel in der Guildford Konferenz eingeführt. Diese Netze entstanden aus dem Interesse, den Raum für industrielle Zwecke gleichmäßig zu teilen. Die Herausforderung lag darin, zweifach gekrümmte starre Flächen (damit werden nicht abwickelbare Flächen gemeint) aus gleichseitigen Dreiecken zu konstruieren. Die Dreiecke spielen in diesem Kontext eine wichtige Rolle, da sie geometrisch nicht verformbar sind. Der Architekt Alain Lobel entdeckte 9 Familien (*C3*, *C6*, *CSM*, *CUB*, *TRA*, *3P*, *PNT*, *POT*, *HGR*) von Strukturen, die folgende Charakteristika gemeinsam haben:

- (i) Alle Kanten sind gleich lang.
- (ii) Keine Kante ist eine Verlängerung einer anderen Kante.
- (iii) Die Kanten formen ausschließlich Dreiecke.
- (iv) Der Winkel zwischen zwei benachbarten Facetten zeigt in einigen Kanten nach außen, aber in mehr als der Hälfte nach innen.
- (v) Die ganze Struktur ist starr.

Geometrische Charakteristika, Eigenschaften und Beschreibungen der verschiedenen Familien, sowie zahlreiche Risse und Bilder findet man in [51]. Die ersten zwei Familien werden *offene Formen* genannt. Die Strukturen in diesen Familien stützen sich auf weit auseinander liegende Punkte (Stützpunkte), die sich gleichmäßig auf einem Basiskreis verteilen. Zwischen diesen Stützpunkten befinden sich Hohlräume. Die restlichen sieben Familien werden *geschlossene Formen* genannt und bestehen aus geschlossene Strukturen.

Die Lobel Netze bieten vielfältige Möglichkeiten für architektonische Projekte, wie Skulpturen, Museen, Seminarräume, Restaurants, meteorologische Stationen, Sportplätze, Stadien, Abdeckungen von Schwimmbädern und Spielplätze, Wintergärten, u.v.m.

Lobel Netze, deren meisten Knoten regulär sind (d.h. die Valenz 6 besitzen), sind abwickelbar. Das bedeutet, sie können isometrisch in die Ebene abgebildet werden, ohne verzerrt zu werden. Dies folgt, weil alle Innenwinkeln gleich $\frac{\pi}{3}$ sind. Für Knoten mit einer anderen Valenz als 6 muss man das Netz in der Nähe dieser Knoten aufschneiden, um es auf die Ebene abzuwickeln [50].

4.1.2 Kugelpackung auf Kreispackungsnetzen (CP-Netze)

Von besonderem Interesse sind Netze, die ein Kreismuster aufweisen (siehe [1, 11]). Solche Netze sind in der Literatur als *Circle-Packing Netze* oder *CP-Netze* bekannt und werden wie folgt definiert:

Definition 4.1. Ein Dreiecksnetz heißt *Kreispackungsnetz*, wenn die Inkreise benachbarter Facetten einander berühren. Diese Eigenschaft wird als *CP-Eigenschaft* bezeichnet.

Kreispackungsnetze werden wie folgt charakterisiert: Betrachtet man ein Viereck, das aus zwei benachbarten Dreiecksfacetten eines Kreispackungsnetzes besteht, dann ist die Summe der gegenüberliegenden Kantenlängen gleich. Da die Kanten des Netzes tangential zu den entsprechenden Inkreisen liegen, sind die Abstände von den Knoten zu den Berührungspunkten der inzidierenden Kanten gleich. Folglich kann man eine Kugel in jedem Knoten platzieren, die die Inkreise der inzidierenden Facetten orthogonal schneidet. Auf diese Weise entsteht eine Packung aus berührenden Kugeln (siehe Abbildung 3).

4.1.3 Abgeleitete Strukturen

Geht man von einem Kreispackungsnetz aus und verbindet man die Mittelpunkte von benachbarten Inkreisen, so entsteht ein Netz mit im allgemeinen nicht ebenen Facetten. Dieses Netz nennen wir *Übergangsnetz*. Die Achsen

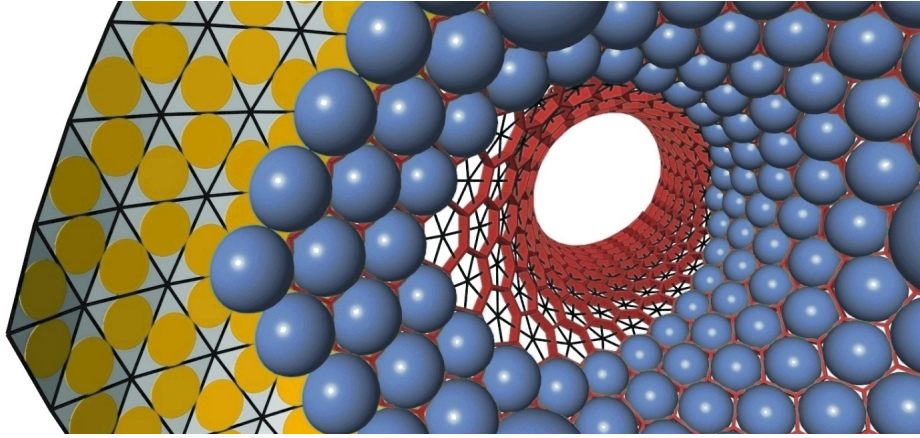
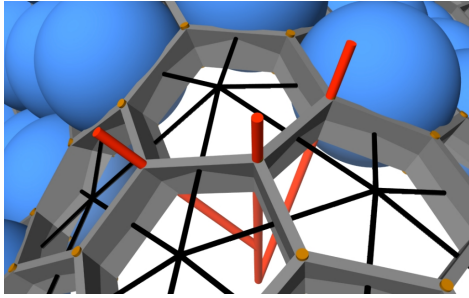


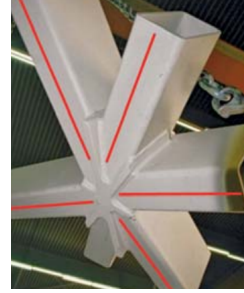
Abbildung 3: Kugelpackung auf einem Kreispackungsnetz mit torsionsfreier Tragstruktur [1].

des entstandenen Netzes heißen *Knotenachsen*. Aufgrund der Symmetrie benachbarter Inkreise, schneiden sich die Knotenachsen in einem Punkt. Die Knotenachsen spannen somit eine Ebene auf, die die entsprechende Kante des abgeleiteten Netzes enthält und mit der Tangentialebene zweier Kugeln aus dem Kreispackungsnetz übereinstimmt [49]. Diese Ebenen werden durch Vierecke visualisiert und können physikalisch als Symmetrieebenen des Trägers interpretiert werden (siehe Abbildung 4). Auf diese Weise entsteht eine sogenannte *torsionsfreie* Tragstruktur in der Form einer Wabenstruktur [1, 11].

Besitzen die Waben einer Wabenstruktur eine Inkugel, dann kann man ein Kreispackungsnetz konstruieren, in dem man die Inkugeln der Waben findet und entsprechend miteinander verbindet. Die Kanten des Kreispackungsnetzes schneiden die Wände der Wabenstruktur orthogonal. In diesem Sinne sind die Wabenstruktur und das Kreispackungsnetz *dual* zueinander. Beispiele für duale Strukturen sind Lobel Netze und Bienenwabenstrukturen (Sechseckwabenstrukturen) mit sechseckförmigen Waben, deren Wände einen Winkel von $\frac{2\pi}{3}$ einschließen [50]. Ein Kreispackungsnetz mit Knoten, die abwechselnd die Valenz 4 und 8 besitzen, sind dual zu Viereck- und Achteckwabenstrukturen [1].



(a) Symmetrieebenen der Träger.



(b) Knotenachse.

Abbildung 4: Torsionsfreie Tragstruktur[1, 11].

Ein weiteres Netz, das man aus einem Kreispackungsnetz mit Knoten der Valenz 6 ableiten kann, ist ein sogenanntes *Tri-Hex Netz* mit Drei- bzw. sechseckigen Facetten. Es entsteht, in dem man die Berührungspunkte benachbarter Inkreise verbindet [1].

4.1.4 Zusammenhang mit konformen Abbildungen

Konforme Abbildungen können, neben der Winkeltreue, auch als jene Abbildungen charakterisiert werden, die infinitesimale Kreise auf infinitesimale Kreise abbilden. Diskrete konforme Abbildungen werden daher durch Kreispackungen charakterisiert [52]. Zwei Kreispackungen, die zwei Flächengebiete überdecken und dieselbe Kombinatorik besitzen, bestimmen eine diskrete konforme Abbildung zwischen den zwei Gebieten. Durch die Kombinatorik wird eine sogenannte konforme Äquivalenzklasse definiert, die aus allen Gebieten bestehen, die von Kreispackungen derselben Kombinatorik überdeckt werden. Eine Kreispackung auf einer einfach zusammenhängenden Fläche mit Rand bestimmt somit eine bis auf Möbiustransformationen eindeutige Kreispackung auf Flächen, die zur Sphäre homöomorph sind. Dreiecksnetze, die nicht homöomorph zur Kreisscheibe oder zur Sphäre sind und die Kreispackungseigenschaft nicht erfüllen, sind i.A. nicht konform äquivalent zu Kreispackungsnetzen mit derselben Kombinatorik wie das Dreiecksnetz. Eine Approximation des Dreiecksnetzes durch ein Kreispackungsnetz (siehe Kapitel 5) wird wahrscheinlich nicht gut funktionieren. Es lässt sich vermuten, dass Abbildungen zwischen Kreispackungsnetzen mit derselben Kombinatorik

konforme Abbildungen zwischen Flächen approximieren [1, 11, 53].

4.2 Rhombennetze

Vierecksnetze, deren Kanten dieselbe Länge haben, besitzen ebene oder windschiefe Rhomben als Facetten. Solche Netze heißen *rhombisch* und werden als *Rhombennetze* bezeichnet. Rhombennetze werden auch als *diskrete Tschebyscheff-Netze* definiert: Betrachtet man ein Rechteck im Parameterbereich eines parametrisierten Tschebyscheff-Netzes, so werden gegenüberliegenden Kanten auf gleichlange Bildkurven abgebildet. Im diskreten Fall wird ein Quadrat auf einen ebenen oder windschiefen Rhombus abgebildet.

In diesem Kapitel wird den Zusammenhang zwischen diskreten Tschebyscheff-Netzen, diskreten pseudosphärischen Flächen (Flächen mit konstanter negativer Gaußkrümmung), diskreten Flächen konstanter Normalkrümmung, diskreten krümmungslinienparametrisierten Flächen und diskreten Isothermflächen bzw. Minimalflächen, sowie ihre Eigenschaften untersucht. Diskrete pseudosphärische Flächen werden durch Rhombennetze mit ebenen Knoten realisiert, diskrete Flächen mit konstanter Normalkrümmung können durch Rhombennetze mit konischen Knoten beschrieben werden und diskrete krümmungslinienparametrisierte Flächen erscheinen als zirkuläre Netze. Aus Rhombennetzen kann man zirkuläre Netze herleiten.

Als erstes legen wir einige Begriffen bzw. Bezeichnungen fest: Ist eine diskrete parametrisierte Fläche $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben, so bezeichnen wir die Nachbarpunkte eines Punktes $f(i, j)$ in den Parameterrichtungen mit $\tau_{\pm 1} := f(i \pm 1, j)$ und $\tau_{\pm 2} := f(i, j \pm 1)$ und die Nachbarkanten mit $\delta_k := \tau_k - f$, $k \in \{\pm 1, \pm 2\}$. Die Kante δ_k bezieht sich immer auf den Punkt $f_{i,j}$, d.h. sie inzidiert mit dem Punkt.

Definition 4.2. Eine diskrete parametrisierte Fläche heißt *Rhombennetz* bzw. *diskretes Tschebyscheff-Netz*, wenn für alle Kanten $\|\delta_k\| =: s$ gilt, wobei $s \in \mathbb{R}^+$.

Bemerkung 4.1. Für die konstante Kantenlänge nutzen wir bei Gelegenheit die Bezeichnung $s := 2r$.

Geometrische Objekte, wie Strecken, Winkel, Vielecke und Körper, werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Der Einfachheit halber kann dieselbe Bezeichnung für mehrere Absichten genutzt werden: Z.B. AB beschreibt die Strecke von A nach B . Wir nutzen aber AB auch als die Länge der Strecke AB . Die Bezeichnung ABC hängt ebenso vom Kontext ab: Es kann sich um den Winkel, der von den Punkten A, B und C eingeschlossen wird, oder um das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C handeln.

Um eine Struktur aus berührenden Kugeln zu gewährleisten, müssen noch zusätzliche Bedingungen erfüllt werden. In dieser Hinsicht spielt der Abstand zwischen nicht benachbarten Punkten bzw. der Winkel zwischen paarweise inzidierenden Kanten (Kanten, die einen Knoten gemeinsam haben) eine wesentliche Rolle. Zunächst werden ganz besondere Rhombennetze präsentiert, die eine Kugelstruktur ermöglichen. Diese sind als rhombische Polyeder bekannt und besitzen nur ebene kongruente Rhomben.

4.2.1 Rhombische Polyeder

Das einfachste rhombische Polyeder ist das *Hexaeder*. Es ist der platonische Körper aus der Menge der rhombischen Polyeder, der aus sechs Quadrate besteht. Es entsteht, wenn in die Facetten eines regelmäßigen Tetraeders eine gleichseitige Pyramide gesetzt wird. Auf dieselbe Art und Weise gewinnt man aus den anderen platonischen Körpern zwei weitere rhombische Polyeder: Das *Rhombendodekaeder* und das *Rhombentriakontaeder*[34, 54].

Diese drei rhombischen Polyeder sind monoedrisch, d.h. alle ihre Facetten sind kongruent. Sie gehören ebenso zur Klasse der sogenannten *Zonoeder*. Es gibt verschiedene Zugangsweisen, wie man diese Klasse definieren kann: Zonoeder sind Körper, die aus sogenannten *Zonen* bestehen. Eine Zone ist eine Familie aus Facetten, die durch parallele Kanten verbunden werden und homöomorph zu einer Drehzylinderfläche sind. Zonoeder werden auch als jene Körper verstanden, deren Facetten punktsymmetrisch sind. Eine Folgerung

aus dieser Eigenschaft ist, dass das ganze Zonoeder ebenso punktsymmetrisch ist, d.h. alle Zonoeder besitzen ein Zentrum. Weiters werden Zonoeder als die dreidimensionale Projektion eines n -dimensionalen Einheitswürfels aufgefasst. Zonoeder werden ebenso als die *Minkowski-Summe*¹ mehrerer Strecken verstanden, die einen sogenannten Stern bilden, d.h. die Mittelpunkte der Strecken treffen sich in einem Punkt [34, 54–60]. Ein empfehlenswertes Visualisierungstool für Zonoeder ist in [61] gegeben. Die Beschreibung der Implementierung zur Bildung von Zonoeder ist in [58] gegeben. Hier werden Zonoeder über die Minkowski-Summe definiert. Geht man von gleichlangen Strecken aus, so wird ein Zonoeder aus gleichlangen Kanten konstruiert [62]. Ob ein Zonoeder eine Kugelstruktur darstellt, hängt von den Innenwinkeln des Zonoeders ab. Die Innenwinkel hängen vom Ausgangsstern ab. Wie sich die Winkel zwischen den Strecken des Ausgangssternes auf die Innenwinkel des gebauten Zonoeders auswirken, ist, meiner Ansicht nach, eine relevante Forschungsfrage, die in dieser Arbeit unbeantwortet bleibt.

Nicht alle Zonoeder sind rhombisch. Die Facetten eines Zonoeders sind verallgemeinerte Parallelelogramme: Wenn es im Ausgangsstern m koplanare Strecken gibt, führt dies zu einem $2m$ -Parallelogramm. Man kann zeigen, wenn ein Zonoeder n Kantenrichtungen besitzt, so besitzt es $n(n-1)$ Facetten [56, 60]. Alle konvexen monoedrischen rhombischen Zonoeder können in 4 Teilklassen unterteilt werden: Die Klasse der *Rhomboeder* (gleichseitige Parallepipeden), der Rhombendodekaeder, der Rhombentriakontaeder und der Rhombenikosaeder. Jede Klasse bis auf die Rhomboeder besteht aus ähnlichen Zonoeder. Die Rhomboeder entstehen durch Dilatation des Hexaeders.

Es gibt eine Familie von nicht monoedrischen rhombischen Polyeder, die auf eine besondere Art und Weise konstruiert werden können: Rotiert man eine Sinuskurve mit einer gewissen Amplitude und schneidet man die entstehende Rotationsfläche mit einem Drehzylinder, der die Rotationsachse enthält und die Hälfte der Amplitude als Radius besitzt, so entstehen zwei

¹Die Minkowski-Summe ist definiert als die Summe mehrerer Teilmengen eines Vektorraumes. Die Summe für zwei Mengen A und B lautet: $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

symmetrische Schraublinien. Durch gleichmäßiges Rotieren der Schraublinien entsteht ein Rhombengitter auf der Rotationsfläche. Verbindet man die Punkte mit Strecken statt mit den Schraublinien, so entsteht ein rhombisches Polyeder. Bemerkenswert ist, dass die Facetten dieses Rhombengittermodell eben sind. Solche Modelle findet man sowohl in der Architektur als auch in der Natur [34, 54].

4.2.2 Rhombennetze mit ebenen Knoten

Rhombennetze mit ebenen Knoten werden in [52, 63, 64] als diskrete Flächen konstanter negativer Krümmung untersucht. Dies stimmt mit dem glatten Zusammenhang zwischen pseudosphärischen Flächen und Tschebyscheff-Netzen überein, der im Kapitel 2.2 erwähnt wurde.

Definition 4.3. Ein Punkt $f(i, j)$ in einem Netz heißt *planar* bzw. *eben*, wenn die mit dem Punkt $f(i, j)$ inzidierenden Kanten $\delta_{\pm 1}, \delta_{\pm 2}$ in einer Ebene liegen. Diese Ebene wird als *Knotenebene* bezeichnet. Sind alle Knoten planar, dann spricht man von einem *asymptotischen Netz* bzw. einem *Rhombennetz mit ebenen Knoten*. Diese sind auch als *diskrete pseudosphärischen Flächen* bekannt.

Bemerkung 4.2. In der glatten Differentialgeometrie können pseudosphärische Flächen durch ein asymptotisches Chebyshev-Netz parametrisiert werden. Asymptotisch heißt, dass die Normalkrümmung entlang der Parameterlinien verschwindet. Im diskreten Fall bedeutet dies, dass Nachbarkanten derselben Parameterrichtung in einer Ebene liegen. Daher eignen sich Rhombennetze mit ebenen Knoten gut als diskretes Modell pseudosphärischer Flächen [22].

Ist eine Facette eines Rhombennetzes mit ebenen Knoten eben, so ist das ganze Netz in einer Ebene enthalten und ist daher *trivial*. Nichttriviale Rhombennetze mit ebenen Knoten besitzen windschiefe Rhomben (siehe 5) als Facetten, die über eine Diagonale gefaltet sind. Aufgrund der konstanten Länge der Kanten gibt es für jede Facette zwei Symmetrieebenen, die jeweils eine Diagonale beinhalten und die andere jeweils halbieren. Die Symmetrie der Facetten führt zu folgender Charakterisierung:

Satz & Definition 4.1. Der Winkel σ zwischen den zwei Knotenebenen einer Kante eines nichttrivialen Rhombennetzes mit ebenen Knoten heißt *Schränkwinkel*. Dieser Winkel ist für alle Kanten in einer Parameterrichtung konstant und für alle Kanten in die andere Parameterrichtung entgegengesetzt. Das Verhältnis zwischen dem Sinus des Schränkwinkels und der Kantenlänge $s = 2r$ heißt die *Schränkung* $\Sigma := \frac{\sin \sigma}{s}$.

Welche Besonderheiten zwischen dem Schränkwinkel und den Facettenwinkeln eines Rhombennetzes mit ebenen Knoten es gibt, wird im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 4.1. *In einem windschiefen Rhombus sind die gegenüberliegenden Winkeln gleich. Wie in Abbildung 5 bezeichnen wir diese Winkeln mit α und β . Zwischen den Winkeln α, β und σ existiert folgende Beziehung:*

$$\cos \sigma = \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \tan \left(\frac{\beta}{2} \right). \quad (4.1)$$

Beweis. Die Gleichheit gegenüberliegender Winkel folgt aus der Symmetrie der Facette. Schneidet man die zwei an einer Kante (z.B. AB) inzidierenden Knotenebenen mit einer zur Kante orthogonale Ebene, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck XYZ (siehe Abbildung 5). Der Winkel ZXY ist der Schränkwinkel. Der Winkel XAY ist genau $\frac{\alpha}{2}$ und der Winkel XAZ ist genau $\frac{\pi-\beta}{2}$. Die Dreiecke AXY und AXZ sind ebenso rechtwinkelig. Die Ankathete XY beim Schränkwinkel ist die Gegenkathete beim Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und beträgt daher $\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot AX$. Die Hypotenuse XZ ist die Gegenkathete bei $\frac{\pi-\beta}{2}$ und beträgt daher $\tan \left(\frac{\pi-\beta}{2} \right) \cdot AX$. Durch Phasenverschiebung und durch die Symmetrie der Tangensfunktion gilt $\tan \left(\frac{\pi-\beta}{2} \right) = \cot \left(\frac{\beta}{2} \right)$. Daraus ergibt sich:

$$\cos(\sigma) = \frac{XY}{XZ} = \frac{\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot AX}{\cot \left(\frac{\beta}{2} \right) \cdot AX} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \tan \left(\frac{\beta}{2} \right). \quad (4.2)$$

□

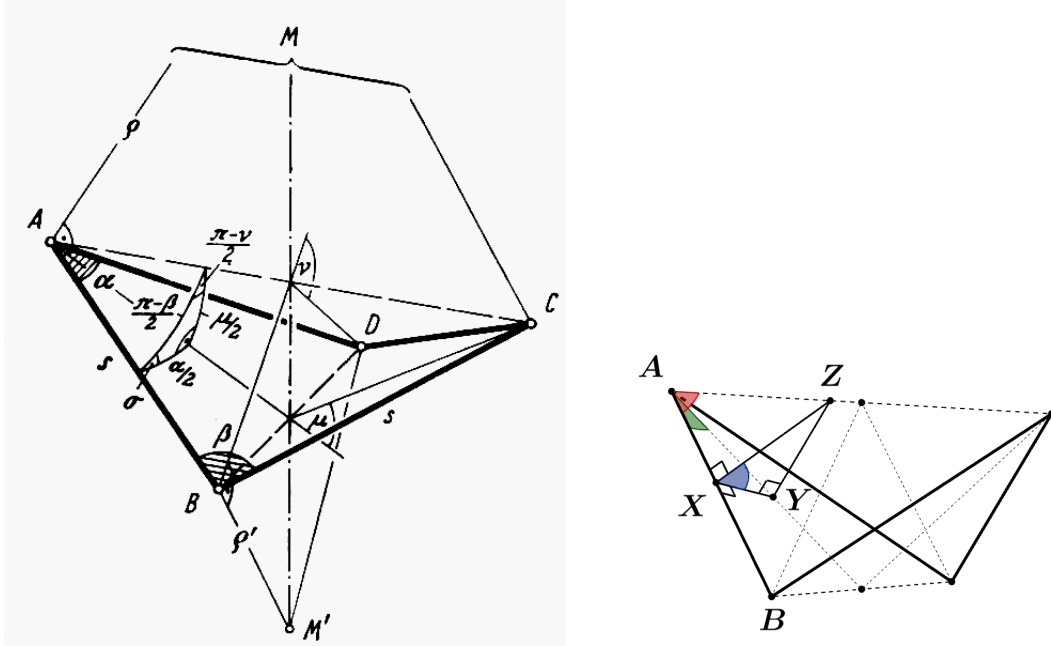


Abbildung 5: Rhombenfacette [63].

Bemerkung 4.3. Die Gleichung (4.1) spielt eine wichtige Rolle bei der *diskreten Sinus-Gordon Gleichung*, die den Zusammenhang zwischen den Winkeln benachbarter Facetten eines Rhombennetzes mit ebenen Knoten darstellt. Eine allgemeine Form für Flächen mit windschiefen Parallelogrammen bzw. ihre Herleitung findet man in [65].

Betrachtet man die Einheitsnormalen der Knotenebene über ein Rhombennetz mit ebenen Knoten, die durch Normieren des Kreuzproduktes der Kanten δ_1 und δ_2 entstehen, so erhält man ein wohldefiniertes Einheitsnormalenfeld über das Rhombennetz, das den Umlaufsinn der Nachbarknoten in einer Knotenebene respektiert. Dieses Normalenfeld bestimmt ein Rhombennetz aus Großkreisbögen auf der Einheitskugel mit konstanter Bogenlänge $|\sigma|$, wobei σ in Bogenmaß gegeben ist. Dieses Netz aus Großkreisbögen wird als *sphärisches Rhombennetz* bezeichnet. Jedes sphärische Rhombennetz auf der Einheitskugel bestimmt ein neues bis auf Skalierung und Verschiebung eindeutiges Rhombennetz mit ebenen Knoten, deren Normalen die Punkte des ursprünglichen Rhombennetzes auf der Kugel sind. Die Kantenrichtungen des neuen Rhombennetzes werden durch die Achsen der Großkreise des

sphärischen Rhombennetzes beschrieben [63].

In einem Rhombennetz mit ebenen Knoten ist der Schränkwinkel überall dem Betrage nach gleich. Entlang einer Parameterrichtung ist der Schränkwinkel positiv, entlang der andere Parameterrichtung negativ. Betrachtet man zwei Polygonzüge mit dieser Eigenschaft, dann bestimmen sie genau ein Rhombennetz mit ebenen Knoten, wenn sie gleich lang sind, konstante Kantenlänge haben und sich in einem Punkt treffen. Ähnlich ist es bei zickzackförmigen Polygonzügen konstanter Kantenlänge mit abwechselnd positiven und negativen Schränkwinkeln, die dem Betrage nach gleich sind. Ein Algorithmus zur Konstruktion von Rhombennetzen mit ebenen Knoten ist in [64] beschrieben.

4.2.3 Geometrische Deutung der Gauß-Krümmung

In diesem Abschnitt soll eine diskrete Version der Gauß-Krümmung beschrieben werden, die über die windschiefen Facetten definiert ist [63, 64]. Die Gauß-Krümmung entspricht in der glatten Version dem Produkt der Hauptkrümmungen (das sind die Extremwerte der Normalkrümmungen). Die Kehrwerte der Hauptkrümmungen sind die Radien der zwei Hauptkrümmungskreise. Für Flächen konstanter negativer Gauß-Krümmung ist das Produkt der Kehrwerte und somit das der beiden Hauptkrümmungskreisradien konstant und negativ. Für windschiefe schränkungsgleiche Rhomben findet man zwei besondere Kreise, die diese Eigenschaft erfüllen:

Definition 4.4. Haben zwei windschiefe Rhomben dem Betrage nach die gleiche Schränkung, dann heißen sie *schränkungsgleich*. Die *Beikreise* eines windschiefen Rhombus sind jene zwei Kreise, die gegenüberliegende Knotenebenen in den Knoten berühren. Die *Beikreismittelpunkte* werden als Schnitt der zu den Knotenebenen Normalgeraden durch die gegenüberliegenden Knoten bestimmt. Die Abstände zwischen den Berührungsknoten und die Beikreismittelpunkten heißen *Beikreisradien*.

Theorem 4.2. *Das Produkt der Beikreisradien ist bei schränkungsgleichen windschiefen Rhomben mit einem Schränkwinkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ konstant*

und negativ.

Beweis. Wir betrachten die Pyramide $AXYZ$ und die Bezeichnungen in der Abbildung 5. Die Winkel XAY , YAZ bzw. YXZ stimmen mit $\frac{\alpha}{2}$, mit $\frac{\mu}{2}$ bzw. σ überein. Man kann leicht mithilfe der Winkelfunktionen folgende Beziehung herleiten:

$$\cot \sigma = \cot \frac{\mu}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4.3)$$

Das Dreieck XYZ entsteht als Schnitt einer zur Kante AB orthogonalen Ebene mit den Knotenebenen von A und B . Ein analoger Prozess mit der Kante BC liefert (unter Berücksichtigung, dass der Schräkwinkel entgegengesetzt ist):

$$-\cot \sigma = \cot \frac{\nu}{2} \sin \frac{\beta}{2}. \quad (4.4)$$

Die Höhen der gleichschenkeligen Dreiecke BAD und ABC haben die Länge $\cos \frac{\alpha}{2} \cdot s$ bzw. $\cos \frac{\beta}{2} \cdot s$ und bilden gemeinsam mit den Beikreisradien zwei zueinander normale rechtwinkelige Dreiecke. Mithilfe der Tangensfunktion erhalten wir nach Umformen:

$$\rho = s \cdot \cot \frac{\mu}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \text{ und } \rho' = s \cdot \cot \frac{\nu}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}. \quad (4.5)$$

Mithilfe der Gleichungen (4.1), (4.3) und (4.4) folgt:

$$\rho\rho' = -s^2 \frac{\cos \sigma}{\sin^2 \sigma}. \quad (4.6)$$

Dieses Produkt hängt nur vom Schräkwinkel ab und ist genau dann negativ, wenn $-\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}$. $\square$

Man kann die Beikreisradien als diskrete Hauptkrümmungskreise interpretieren. Die diskrete Gauß-Krümmung über die Facetten eines Rhombennetzes mit ebenen Knoten kann somit als Kehrwert des Produkts der Beikreisradien definiert werden. Für Rhombennetze mit ebenen Knoten ist die Gauß-Krümmung konstant und negativ.

Wir wollen nun die Analogie zur Differentialgeometrie untersuchen. Die Gauß-Krümmung ist definiert als die Determinante der Weingartenabbildung. Sie wird durch den Quotienten zwischen der zweiten und der ersten Funda-

mentalform gegeben. Die Koeffizienten der Fundamentalformen (siehe Kapitel 2.4) bestehen aus den Skalarprodukten der partiellen Ableitungen. Für eine diskrete Version können partielle Ableitungen über die Facetten definiert werden [66, 67]. Für einen windschiefen Rhombus definieren wir die diskreten partiellen Ableitungen als die gerichtete Diagonalen AC und BD . Die Einheitsnormalen der Knotenebenen bestimmen einen windschiefen Rhombus $n_A n_B n_C n_D$ auf der Einheitskugel. Wir definieren nun die diskreten partiellen Ableitungen der Gauß-Abbildung als die gerichteten Diagonalen $n_C - n_A$ und $n_D - n_B$. Aufgrund der Symmetrie windschiefer Rhomben liegen die partiellen Ableitungen normal zueinander, d.h. $AC \perp BD$ und $n_C - n_A \perp n_D - n_B$. Für die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform folgt somit $0 = f = F$. Die anderen Koeffizienten sind durch die Längen der Diagonalen definiert. Daraus folgt für die diskrete Gauß-Krümmung:

$$\mathcal{K} = \frac{|n_C - n_A| \cdot |n_D - n_B|}{AC \cdot BD}. \quad (4.7)$$

Betrachtet man die zwei gleichschenkeligen Dreiecke, die aus den Beikreisradien und der Diagonalen bestehen, so gilt nach dem Strahlensatz (siehe Abbildung 6):

$$AC = \rho \cdot |n_C - n_A| \quad \text{und} \quad BD = \rho' \cdot |n_D - n_B|. \quad (4.8)$$

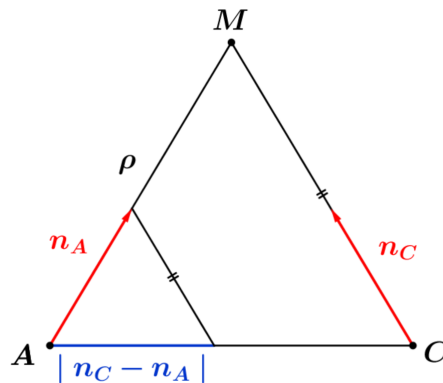


Abbildung 6: Strahlensatz im gleichschenkeligen Dreieck AMC .

Daraus folgt für die Gauß-Krümmung:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\rho \cdot \rho'} = -\frac{\sin^2 \sigma}{s^2 \cdot \cos \rho}. \quad (4.9)$$

Bemerkung 4.4. Es mag verwirrend sein, dass die Gauß-Krümmung in (4.7) positiv und in (4.9) negativ ist. Eine Erklärung lässt sich finden, wenn die Beikreisradien eine Orientierung bekommen, sodass sie zueinander entgegengesetzt sind.

4.2.4 Rhombennetze mit konischen Knoten

In diesem kleinen Abschnitt wird eine neue Art von Rhombennetze präsentiert, deren Knoten gemeinsam mit seiner Nachbarkanten einen Kegel bilden. Diese Art von Netzen wurde in [64] studiert.

Definition 4.5. Liegen die Nachbarkanten eines Knoten in einem Drehkegel, so heißt dieser Knoten *konisch* und der Drehkegel *Knotenkegel*. Der halbe *Öffnungswinkel* (Winkel zwischen der Drehachse des Kegels und einer Erzeugenden) des Kegels wird mit ω bezeichnet. Der Wert $\Omega := \cos \omega$ heißt *Öffnung* des Kegels. Sind alle Knoten eines Rhombennetzes konisch, so handelt es sich um ein Rhombennetz mit konischen Knoten.

Bemerkung 4.5. Rhombennetze mit konischen Knoten unterscheiden sich von den sogenannten *konischen Netze*. Bei konischen Netzen bilden die zu einem Punkt benachbarten Facetten vier Tangentialebenen eines Drehkegels, deren Achse durch den Punkt verläuft. Ist der Öffnungswinkel $\omega = 0$ bei Rhombennetzen mit konischen Knoten, so handelt es sich um ein Rhombennetz mit ebenen Knoten.

Für den halben Öffnungswinkel setzen wir voraus $\omega \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Ein Punkt f_{ij} eines Rhombennetzes ist genau dann konisch, wenn es eine Normale n_{ij} gibt, sodass für alle Nachbarkanten δ_k gilt:

$$\langle \delta_k, n_{ij} \rangle = -s\Omega. \quad (4.10)$$

Bemerkung 4.6. Die Normalen eines Rhombennetzes mit konischen Knoten sind durch die obige Gleichung eindeutig festgelegt.

In [64] werden Rhombennetze mit konischen Knoten *mit konstanter Öffnung* studiert, d.h. dass sowohl die Öffnung aller Kegel als auch der Winkel σ zwischen benachbarten Normalen konstant ist. σ heißt (analog wie bei Rhombennetzen mit ebenen Knoten) Schränkswinkel und der Wert $\Sigma := \frac{\sin \sigma}{s}$ Schränkung. Ist der Schränkswinkel ein spitzer, rechter bzw. ein stumpfer Winkel, so heißt das Netz *regulär*, *speziell* bzw. *abwechselnd* (da die Normalen benachbarter Knoten abwechselnd auf verschiedene Seiten der Fläche zeigen). In der Literatur findet man einige Zusammenhänge zwischen der halben Öffnung, dem Schränkswinkel und den Innenwinkeln der Facetten. Für die halbe Öffnung regulärer Rhombennetze mit konischen Knoten gilt die Bedingung:

$$\Omega \leq \sin \frac{\sigma}{2}. \quad (4.11)$$

Ein relevanter Zusammenhang zwischen Rhombennetzen mit ebenen und konische Knoten ist durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 4.3. *Sei f ein Rhombennetz mit ebenen Knoten und Schränkswinkel $\sigma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, n sein Einheitsnormalenfeld (wie im Kapitel 4.2.2 beschrieben) und $\epsilon \in \mathbb{R}_0^+$, dann ist die Offsetfläche*

$$\tilde{f}_{i,j} = f_{i,j} + \epsilon h_{i,j} n_{i,j} \quad (4.12)$$

ein Rhombennetz mit konischen Knoten bzw. ein abwechselndes Rhombennetz mit konischen Knoten, wenn $h_{i,j} \equiv 1$ bzw. $h_{i,j} = (-1)^{i+j}$.

Beweis. Wir behandeln als Erstes den Fall mit $h_{i,j} \equiv 1$. Die Kante $\tilde{\delta}_1$ (für die anderen Kanten geht man analog vor) der Offsetfläche kann man mit (4.12) berechnen:

$$\tilde{\delta}_1 = \tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i,j} = \delta_1 + \epsilon(n_{i+1,j} - n_{i,j}). \quad (4.13)$$

Per Definition sind die Einheitsnormalen der Offsetfläche gleich den Einheitsnormalen des Rhombennetzes mit ebenen Knoten, d.h. $\tilde{n}_{i,j} = n_{i,j}$. Das bedeu-

tet, dass der Schränkwinkel der Offsetfläche mit dem Schränkwinkel des Rhombennetzes übereinstimmt. Für diesen Schränkwinkel gilt $\cos \sigma = \langle n_{i,j}, n_{i+1,j} \rangle$. Aufgrund der Orthogonalität gilt $0 = \langle \delta_1, n_{i,j} \rangle = \langle \delta_1, n_{i+1,j} \rangle$. Für die Länge der Kante $\tilde{\delta}_1$ und das Skalarprodukt zwischen der Kante und der Normalen der Offsetfläche folgt somit:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_1 \rangle &= s^2 + \epsilon^2(2 - 2 \cos \sigma) =: \tilde{s}^2 \\ \langle \tilde{\delta}_1, \tilde{n}_{i,j} \rangle &= \epsilon(\cos \sigma - 1).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Beide Gleichungen hängen nur von den Konstanten s , ϵ und σ ab. Nach (4.10) ist die Offsetfläche ein reguläres Rhombennetz mit konischen Knoten, konstanter Kantenlänge $\tilde{s}$ und mit der Öffnung

$$\Omega := \frac{\epsilon(1 - \cos \sigma)}{\tilde{s}}.\tag{4.15}$$

Im Fall $h_{i,j} = (-1)^{i+j}$ stimmen die Einheitsnormalen der Offsetfläche mit denen des Rhombennetzes bis auf die Orientierung überein. Sie wechseln in beide Parameterrichtungen der Reihe nach das Vorzeichen ab. In diesem Fall soll man zwei Fälle berücksichtigen: Entweder ist $i + j$ gerade oder ungerade. In beiden Fällen bekommt man beim Berechnen von $\langle \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_1 \rangle$ und $\langle \tilde{\delta}_1, \tilde{n}_{i,j} \rangle$ das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_1 \rangle &= s^2 + 2\epsilon^2(1 - \cos \sigma) =: \tilde{s}^2 \\ \langle \tilde{\delta}_1, \tilde{n}_{i,j} \rangle &= -\epsilon(\cos \sigma + 1).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Weiters gilt:

$$\cos \tilde{\sigma} = \langle \tilde{n}_{i,j}, \tilde{n}_{i+1,j} \rangle = -\langle n_{i,j}, n_{i+1,j} \rangle = -\cos \sigma.\tag{4.17}$$

Die Offsetfläche ist in diesem Fall ein alternierendes Rhombennetz mit konischen Knoten, konstanter Kantenlänge $\tilde{s}$, Schränkwinkel $\tilde{\sigma} = \pi - \sigma$ und Öffnung:

$$\Omega := \frac{-\epsilon(1 + \cos \sigma)}{\tilde{s}}.\tag{4.18}$$

□

Man kann umgekehrt zeigen, dass jedes Rhombennetz mit konischen

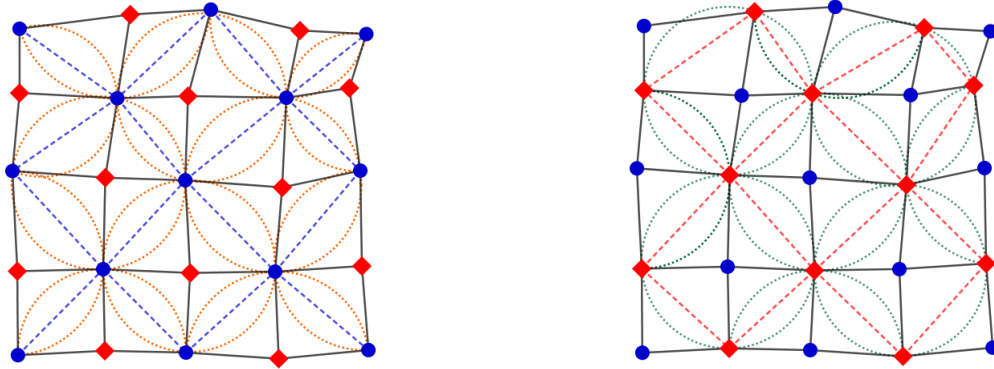


Abbildung 7: Diagonalnetze eines Rhombennetzes.

Knoten konstanter Öffnung eine Offsetfläche eines Rhombennetzes mit ebenen Knoten ist [64].

Bemerkung 4.7. Der erste Fall des obigen Satzes beschreibt eine Parallellfläche des ursprünglichen Rhombennetzes mit ebenen Knoten. Diese besitzt ebenso windschiefe Rhomben als Facetten und ist daher auch ein diskretes Tschebyscheff-Netz. Da der Winkel zwischen den Parameterlinien konstant als das Zweifache des Öffnungswinkels bestimmt ist, spricht man von *diskreten Flächen konstanter Normalkrümmung* [63].

Bemerkung 4.8. Ist der Streckfaktor ϵ der Normalen groß genug, dann treffen sich die gegenüberliegenden Punkte des Netzes in einem Punkt und die Facetten der Offsetfläche würden degenerieren. D.h. dieser Streckfaktor muss kleiner als die Beikreiseradien des ursprünglichen Rhombennetzes sein.

4.2.5 Zusammenhang mit zirkulären Netzen

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen diskreten Tschebyscheff-Netzen und diskreten Krümmungslinien-Netzen hergeleitet. Diskrete Krümmungslinien-Netze sind konjugierte Netze, deren Facettenpunkte auf einem Kreis liegen. Die zwei Diagonalnetze eines Rhombennetzes mit ebenen bzw. konischen Knoten (siehe Abbildung 7) bilden zirkuläre Netze mit konstanten Umkreisradien. Umgekehrt kann man aus einem zirkulären Netz mit konstanten Umkreisradien ein Rhombennetz gewinnen.

Bemerkung 4.9. Ein Diagonalnetz (siehe Abbildung 7) entsteht, wenn man die Knoten $f_{i,j}$, bei denen $i + j$ gerade ist, mit den Diagonalen verbindet, die von diesen Knoten ausgehen. Das andere Diagonalnetz gewinnt man aus den Knoten, bei denen $i + j$ ungerade ist.

Definition 4.6. Ein Netz heißt *konjugiert*, falls jede Facette eben ist. Ein Viercksnetz heißt *zirkulär* oder *diskret orthogonal*, wenn jede Facette einen Umkreis besitzt, d.h. ein Sehnenviereck ist. Ein zirkuläres Netz mit konstanten Umkreisradien heißt *isoradial*.

Zirkuläre Netze werden als *diskrete krümmungslinienparametrisierte Flächen* gesehen: In der Differentialgeometrie erzeugen die Normalen einer krümmungslinienparametrisierten Fläche zwei Flächen, die aus den Hauptkrümmungskreismittelpunkten bestehen. Die erzeugten Flächen bilden die so genannte *Evolute* bzw. *fokale Fläche* und haben die charakteristische Eigenschaft, dass sie abwickelbar sind. In der diskreten Differentialgeometrie werden abwickelbare Flächen als eine Reihe ebener Vierecken betrachtet. Diskrete abwickelbaren Flächen sind daher besondere konjugierte Netze [68, 69]. Nach dem Theorem 14 in [68] bilden die Punkte, die als Schnitt der Achsen benachbarter Umkreise eines zirkulären Netzes entstehen, zwei konjugierte Netze (siehe Abbildung 6 in [68]).

Ist ein zirkuläres Vierecksnetz mit konstantem Umkreisradius gegeben, dann kann man daraus ein Rhombennetz gewinnen, indem man die Umkreismittelpunkte mit den Knoten verbindet [68]. Dies führt zu folgendem Zusammenhang zwischen den zwei Arten von Netzen:

Satz 4.4. *Verbindet man die Umkreismittelpunkte eines zirkulären Vierecksnetzes mit konstantem Umkreisradius mit den entsprechenden Facettenpunkten, dann entsteht ein Rhombennetz. Umgekehrt sind die zwei Diagonalnetze eines Rhombennetzes, deren Knoten auf einer Kugel liegen, zirkulär mit konstantem Umkreisradius.*

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt direkt, denn die Kantenlängen des entstandenen Netzes sind gleich dem Radius der Umkreise und somit konstant.

Ist ein Diagonalnetz eines Rhombennetzes, deren Knoten auf einer Kugel liegen, gegeben, so betrachten wir eine beliebige Facette des Diagonalnetzes. Es gibt einen Punkt f_{ij} des Rhombennetzes, der von den Facettenpunkten gleich weit entfernt ist und der auf der Kugel liegt. Schneidet man die Kugel, deren Mittelpunkt f_{ij} ist und die durch den Facettenpunkte verläuft, so entsteht ein Kreis als Schnittkurve. Der Radius des Schnittkreises hängt nur von dem Radius der Kugel und der Kantenlänge des Rhombennetzes ab und ist somit konstant, wenn man diesen Prozess in allen Facetten des Diagonalnetzes wiederholt. $\square$

Der zweite Teil des Satzes bezieht sich auf sphärische Rhombennetze. Als nächstes wird derselbe Zusammenhang für Rhombennetze mit konischen Knoten verallgemeinert:

Satz 4.5. *Sei f ein Rhombennetz mit konischen Knoten, $a, b \in \mathbb{N}^*$ positive natürliche Zahlen und g ein Netz wie folgt definiert (siehe Abbildung 8):*

- *Die Kanten von f werden abwechselnd im Verhältnis $a : b$ und $b : a$ geteilt, sodass bei den Nachbarkanten eines Punktes f_{ij} die Teilungspunkte von f_{ij} gleich weit entfernt sind.*
- *In jeder Facette werden die Teilungspunkte der Reihe nach zu einem Viereck verbunden. Dieses Viereck nennen wir vom Typ A.*
- *In jedem Punkt werden die Teilungspunkte der zum Punkt inzidierenden Kanten zu einem weiteren Viereck verbunden. Dieses Viereck nennen wir vom Typ B.*

Dann ist g ein zirkuläres Netz.

Beweis. Die Teilungspunkte auf den Facetten vom Typ B liegen auf einem Knotenkegel von f und sind von der Kegelspitze gleich weit entfernt. Sie liegen also auf einem zur Kegelachse orthogonalen Kreis. Aufgrund der Verhältnisse $a : b$ bzw. $b : a$ liegen die Knoten einer Facette vom Typ A symmetrisch bezüglich der zwei aufeinander orthogonalen Symmetrieebenen des zugehörigen windschiefen Rhombus (siehe Abbildung 9). Sie bilden somit ein ebenes Rechteck und besitzen einen Umkreis. $\square$

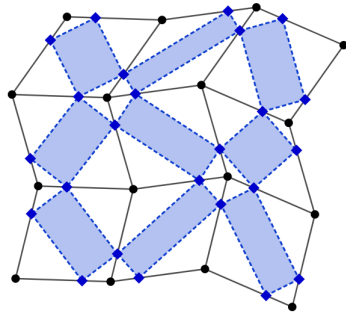


Abbildung 8: Zirkuläres Netz aus Rhombennetz mit konischen Knoten.

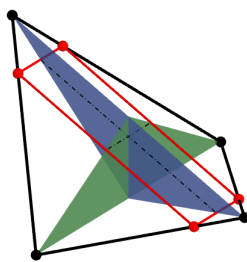


Abbildung 9: Symmetrie eines Vierecks vom Typ A.

Bemerkung 4.10. Der obiger Satz gilt ebenso für Rhombennetze mit ebenen Knoten (Fall $\Omega = 0$).

Auf diese Weise entsteht ein System aus berührenden Kugeln, deren Mittelpunkte mit den Knoten des Rhombennetzes übereinstimmen, und Kreise, deren Trägerebenen orthogonal zu den Symmetrieebenen der entsprechenden Rhombenfacetten liegen.

Eine weitere Eigenschaft zirkulärer Netze ist die Möbius-Invarianz. Zirkuläre Netze werden auch dadurch charakterisiert, dass das Doppelverhältnis der Facettenpunkte reell ist. Ist das Doppelverhältnis gleich -1 für alle Facetten, dann spricht man von *diskreten Isothermflächen*. Sie können geometrisch als eine Anordnung von berührenden Kreisen und Kugeln mit der Eigenschaft gesehen werden, dass die Kreise die Kugeln orthogonal schneiden [1]. Die Klasse der *diskreten Minimalflächen* ist eine Spezialklasse der diskreten Isothermflächen [5, 52, 70]. Aus windschiefen Rhomben kann man keine diskrete Isothermfläche gewinnen, da die Trägerebene der Umkreise die Kugelmittelpunkte nicht enthält und somit nicht orthogonal zur Tangentialebene die Kugel in den Schnittpunkten schneidet (siehe Abbildung 10).

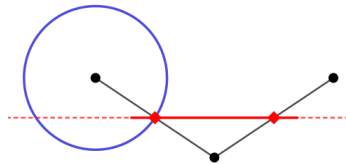


Abbildung 10: Schwarz: Windschiefer Rhombus. Rot: Trägerebene des Kreises. Blau: Kugel.

Bemerkung 4.11. Bis jetzt wurden Rhombennetze mit ebenen und konischen Knoten sowie ihr Zusammenhang mit zirkulären Netzen untersucht. Aus Rhombennetzen kann man Strukturen aus berührenden Kugeln gewinnen. Diese Strukturen sind im Allgemeinen nicht überschneidungsfrei. Eine interessante Forschungsrichtung wäre die Untersuchung nach Bedingungen, die eine überschneidungsfreie Struktur aus berührenden Kugeln ermöglichen, wie z.B. ob es einen Zusammenhang zwischen den Innenwinkeln der Facetten,

den Normalkrümmungen in den Parameterrichtungen und weiteren Objekten wie dem Schränkwinkel oder der Öffnung (im Falle von Rhombennetze mit ebenen bzw. konischen Knoten) gibt.

5 Approximation von Flächen

In diesem Kapitel werden einige Ansätze vorgestellt, die eine Approximation von Flächen durch Kugelpackungsnetze unter gewissen Voraussetzungen erreichen. In [1–3] wird eine Energiefunktion (Zielfunktion) numerisch minimiert, sodass ein Netz gewisse geometrische Eigenschaften möglichst erreicht. Dies kann genutzt werden, um Kugeln in den Knoten des Netzes zu platzieren, sodass benachbarte Kugeln möglichst einander berühren. In [13] werden drei Ansätze beschrieben, die Kugeln iterativ direkt auf Dreiecksnetze platzieren, ohne ein Optimierungsverfahren zu nutzen.

5.1 Numerische Optimierung

Ein Optimierungsproblem fragt nach Extrema (also Minima oder Maxima) einer Zielfunktion. Man unterscheidet zwischen lokalen und globalen Extrema. Eine Funktion kann viele lokale Minima oder Maxima haben, was die Suche nach globalen Extrema erschweren kann. Die mathematischen Grundlagen für die Optimierung von Funktionen, die in diesem Abschnitt beschrieben wird, findet man in [32].

Häufig sind bei Optimierungsaufgaben Gleichungsbedingungen und Ungleichungsbedingungen zu berücksichtigen, die als Nebenbedingungen bezeichnet werden. Die *Lagrange'sche Multiplikatorenregel* [32] liefert ein Kriterium für ein Optimum unter Nebenbedingungen. Dies besagt im geometrischen Sinne, dass in Extremalstellen die Gradienten von der Zielfunktion f und der k Nebenbedingungen $g_i(x) = 0$ linear abhängig sind. Setzt man den Gradient der sogenannten *Lagrange-Funktion*

$$L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i \quad (5.1)$$

gleich dem Nullvektor, dann erhält man ein Gleichungssystem, das zu möglichen Extrema führen kann. Die Werte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ heißen *Lagrange'sche Multiplikatoren*. Fügt man l Ungleichungsbedingungen $h_i(x) \leq 0$ hinzu, dann

kann man die Funktionswerte kritischer Stellen der Zielfunktion in ihrem gesamten Definitionsbereich mit Funktionswerten kritischer Stellen in den Rändern der durch die Ungleichungsbedingungen beschriebenen Gebiete vergleichen. Alternativ kann man unter bestimmten Voraussetzungen kritische Stellen der Lagrange-Funktion

$$L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_l) = f + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i + \sum_{i=1}^l \mu_i h_i \quad (5.2)$$

zur Lösung des Optimierungsproblems verwenden.

Bemerkung 5.1. Die Suche nach einem (lokalen) Maximum einer Funktion f ist äquivalent zur Suche nach einem (lokalen) Minimum der Funktion $-f$. In der Literatur wird daher oft von Minimieren einer Funktion gesprochen.

Da die Suche nach Extrema sehr aufwendig bis unmöglich erscheinen kann, bietet sich an, Optimierungsaufgaben numerisch zu lösen. Das numerische Vorgehen beim Lösen von Optimierungsaufgaben kann wie folgt beschrieben werden. Man befindet sich an einer Startposition, sucht eine Abstiegsrichtung, in der die Funktionswerte lokal kleiner werden, und geht vorsichtig ein paar Schritte in diese Richtung. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis kein Abstieg mehr möglich ist, und man sich möglicherweise in einem lokalen Minimum befindet. Ist $p \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegsrichtung, dann gilt für die Richtungsableitung:

$$\langle \nabla f, p \rangle < 0. \quad (5.3)$$

Gilt für alle Richtungen $p \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \nabla f, p \rangle \geq 0, \quad (5.4)$$

dann folgt die sogenannte *Optimalitätsbedingung* $\nabla f = 0$ und man befindet sich in einem kritischen Punkt. Mit diesen Überlegungen kann man sich einer Minimalstelle wie folgt iterativ nähern:

- 1) Wähle eine Anfangsstelle $x^{(k)} = x^{(0)}$ und die Anzahl der Iterationsschritte N .

- 2) Teste (5.4) für die aktuelle Stelle $x^{(k)}$ und alle Richtungen $p \in \mathbb{R}^n$. Im Fall, dass $x^{(k)}$ ein kritischer Punkt ist, wird die Iteration abgebrochen. Wenn nicht, dann
- 3) wähle eine Abstiegsrichtung p^k , die (5.3) erfüllt.
- 4) Lege eine Schrittweite t_k fest und setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k p^{(k)}$.
- 5) Wiederhole den Prozess ab dem Schritt 2), falls $k \leq N$.

Es gibt unterschiedliche Methoden zur Auswahl der Abstiegsrichtung und der Schrittweite. Eine wichtige Aufgabe der Optimierungstheorie ist die Suche nach Methoden, die die Anzahl der Iterationen bzw. die Laufzeitkomplexität des Optimierungsalgorithmus möglichst verringern. Hier spielt die Wahl der Anfangsstelle eine wesentliche Rolle. In dieser Arbeit werden Konvergenzaussagen bzw. -kriterien von Optimierungsverfahren nicht besprochen. Zunächst werden einige Optimierungsverfahren kurz skizziert.

5.1.1 Methode des steilsten Abstiegs bzw. Gradientenverfahren

Im Gradientenverfahren wird der negative Gradient als Abstiegsrichtung gewählt, da er in Richtung des steilsten Abstiegs zeigt. Dies folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Zielfunktion kann man die Schrittweite exakt berechnen, indem man eine positive Nullstelle der folgende Funktion berechnet

$$\langle \nabla f(x^{(k)} + tp^{(k)}), p^{(k)} \rangle. \quad (5.5)$$

Da eine geschlossene Berechnung der Nullstelle nur für einfache Zielfunktionen möglich ist, können numerische Verfahren (wie das Newton-Verfahren) angewandt werden, um die Nullstelle zu approximieren. Die Tatsache, dass die Gradienten senkrecht zu den Niveaulinien stehen, kann dieses Verfahren bei bestimmten Funktionen stark verlangsamen.

5.1.2 Das Newton-Verfahren

Im Newton-Verfahren wird die Schrittweite $t_k = 1$ und der Vektor

$$H^{-1}\nabla f \tag{5.6}$$

als Abstiegsrichtung gewählt, wobei H die Hesse-Matrix der Zielfunktion f ist. Dies setzt zweimalige stetige Differenzierbarkeit an der Zielfunktion voraus. Im Falle, dass die Anfangsstelle genügend nahe bei einem Minimum liegt, konvergiert die Iterationsfolge gegen das Minimum. Wählt man für die Schrittweite Werte in $(0, 1)$, dann spricht man vom **gedämpften Newton-Verfahren**. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist der Aufwand zur Bestimmung der Hesse-Matrix. Es gibt Varianten dieser Methode, die diese Problematik zu vermeiden versuchen. Z.B. nutzen die **Quasi-Newton-Verfahren** (auch unter Sekanten-Verfahren bekannt) Approximationen der Hesse-Matrizen. Ein bekannte Quasi-Newton-Verfahren ist das nach Broydden, Fletcher, Goldfarb und Shanno benannten **BFGS-Verfahren**.

5.1.3 Methode der konjugierten Gradienten

Diese Methode wurde durch quadratische Funktionen motiviert, bei denen das Optimierungsproblem eine eindeutige Lösung besitzt. In diesem Fall spricht man vom **CG-Verfahren**. Das CG-Verfahren kann auf nichtlineare Optimierungsprobleme mit einer stetig differenzierbaren Zielfunktion erweitert werden. Man beginnt mit dem negativen Gradienten als Abstiegsrichtung. Die Schrittweite wird immer exakt berechnet bzw. approximiert und die nächsten Abstiegsrichtungen werden iterativ bestimmt:

$$p^{(k+1)} = -\nabla f(x^{(k+1)}) + \beta_k p^{(k)}, \tag{5.7}$$

wobei

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(x^{(k+1)})\|^2}{\|\nabla f(x^{(k)})\|^2}. \tag{5.8}$$

5.1.4 Das Gauß-Newton-Verfahren

Dieses Verfahren wird bei nichtlinearen Ausgleichsproblemen der Form

$$f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2 \quad (5.9)$$

angewandt. Es unterscheidet sich von anderen Verfahren, da keine Abstiegsrichtungen gebraucht werden. Stattdessen wird in jedem Iterationsschritt die Funktion F an der Stelle $x^{(k)}$ linear approximiert. Die neue Stelle $x^{(k+1)}$ erhält man, in dem die Funktion

$$f_k(x) = \frac{1}{2} \|F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)})\|^2 \quad (5.10)$$

minimiert wird. Der Nachteil dieses Verfahrens ist, dass die Konvergenz im Allgemeinen nicht gesichert werden kann. Verlangt man mit der Nebenbedingung

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \rho_k, \quad (5.11)$$

dass die Lösung genug nahe bei $x^{(k)}$ liegt, dann spricht man von der **Trust-Region-Methode**. Mit der Ungleichungsnebenbedingung

$$h_k(x) = \|x - x^{(k)}\|^2 - \rho_k^2 \quad (5.12)$$

kann man in jedem Iterationsschritt das Optimierungsproblem mit Zielfunktion f_k und Nebenbedingung h_k mithilfe eines Lagrange-Multiplikators lösen, was zur nächsten Approximationsstelle führt. In diesem Fall spricht man vom **Levenberg-Marquardt-Verfahren**.

5.2 Zielfunktionen

Je nach Vorhaben werden Zielfunktionen generiert, die bestimmte geometrische Eigenschaften erreichen wollen. Besonders relevant für uns sind Zielfunktionen, die durch Optimierung zu Kugelpackungsnetzen führen. Im Folgenden werden drei Artikel kurz skizziert, die sich mit diesem Thema beschäftigen.

5.2.1 Kreispackungsnetze

Schiftner et al. [1] beschreiben ein Optimierungsproblem, das eine Approximation von Dreiecksnetzen durch Kreispackungsnetze derselben Kombinatorik erreichen soll. Dabei wird die Kreispackungseigenschaft, die Approximation zwischen den Flächen und die Approximation zwischen den Rändern der Flächen berücksichtigt. Die Kreispackungseigenschaft besagt, dass die gegenüberliegenden Kanten in zwei benachbarten Dreiecksfacetten gleich lang sind. Für zwei Dreiecksfacetten (i, j, k) und (i, j, m) , die über die Kante (i, j) verbunden sind, gilt:

$$l_{ij} + l_{jm} - l_{kj} - l_{im} = 0, \quad (5.13)$$

wobei l_{ab} die Länge der Kante (a, b) angibt. Somit erhält man für die Kreispackungseigenschaft:

$$f_{cp} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}^*} (l_{ij} + l_{jm} - l_{kj} - l_{im})^2, \quad (5.14)$$

wobei $\mathcal{E}^*$ die Menge aller inneren Kanten angibt. Die Zielfunktion des Optimierungsproblems sieht nun wie folgt aus:

$$F = \lambda_1 f_{cp} + \lambda_2 f_{\text{prox}} + \lambda_3 f_{\text{prox}}^\partial, \quad (5.15)$$

wobei f_{prox} und f_{prox}^∂ die Summe der Abstände zwischen den variablen Punkten (innere bzw. Randpunkte) und der Tangentialebenen der Punkte des zu approximierenden Netzes beschreibt. In diesem Artikel wird eine gedämpfte Version des Gauß-Newton-Verfahrens zur Optimierung verwendet. Geschlossene Netze mit Geschlecht 0 können durch die im Artikel beschriebene Methode erfolgreich approximiert werden. Für Netze höheren Geschlechts wird ein sogenanntes *isotropes*² Netz als Anfangsnetz verwendet.

²Isotrop heißt in diesem Sinne, dass jede Dreiecksfacette möglichst gleichseitig ist. Dies wird durch ein zentroidales Voronoidiagramm erreicht, das durch Lloyd Relaxierung entsteht.

5.2.2 Connectivity Shapes

Isenburg et al. [2] führen eine neue Art von Polygonnetzen ein, nämlich die *Connectivity Shapes*. Sie gehen von einem Graphen $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ aus und suchen eine Einbettung im Raum, die bestimmte „natürliche“ Eigenschaften so gut wie möglich erfüllt. In dem Artikel werden Netze so optimiert, dass alle Kantenlängen möglichst gleich sind. Diese Eigenschaft wird durch folgende Funktion gemessen:

$$f_{se} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} \left(\|x_i - x_j\|^2 - l^2 \right)^2, \quad (5.16)$$

wobei l die Ziellänge der Kanten ist.

Bemerkung 5.2. Die Funktion f_{se} ist eine modifizierte polynomielle Version der sogenannte *Spring Energie*. Durch Optimierung erhält man ein approximiertes Kreispackungsnetz mit konstanter Kantenlänge. Daraus erhält man eine Kugelpackung auf der Fläche mit möglichst konstantem Radius.

Minimiert man f_{se} , so erhält man eine Fläche, die lokal hohe Krümmungen aufweist und daher nicht glatt ist. Um ein glatteres Netz zu bekommen, betrachten die Autoren eine weitere Energie, die als *Rauheitsenergie* bekannt ist. Bezeichnet man die Valenz eines Knoten $i \in \mathcal{V}$ mit d_i und betrachtet man den *diskreten Laplace-Operator*

$$\mathcal{L}(x_i) = \frac{1}{d_i} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} x_j - x_i, \quad (5.17)$$

dann kann man die Rauheitsenergie wie folgt beschreiben:

$$f_{re} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(x_i)^2. \quad (5.18)$$

Die Zielfunktion für Connectivity Shapes wird daher wie folgt dargestellt:

$$F = (1 - \lambda)f_{se} + \lambda f_{re}. \quad (5.19)$$

Es hat sich herausgestellt, dass jener Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, der das Volumen des Netzes maximiert, zu einem schön glatten Ergebnis führt.

Die Methode, die in diesem Artikel zur Optimierung verwendet wird, ist die der konjugierten Gradienten. Für die Schrittweite wird jener Parameter gesucht, der die Energiefunktion bei gegebener Abstiegsrichtung minimiert. Benutzt man ein beliebiges Dreiecksnetz als Anfangsnetz, so wird durch die Optimierung die Geometrie des Netzes verändert. Möchte man die Gestalt des Netzes so gut wie möglich behalten, dann lohnt es sich, eine modifizierte Version des Dreiecksnetzes als Anfangsnetz zu nutzen, deren Dreiecksfacetten möglichst gleichseitig sind. Dies wird durch ein Remeshing-Verfahren erreicht, in dem die folgenden Aspekte miteinbezogen werden:

- 1) Gleichmäßige Punkteverteilung.
- 2) Triangulierung.
- 3) Optimierung der Konnektivität.
- 4) Relaxierung der Punkte.
- 5) Glättung.

Dadurch wird nicht nur die Geometrie mehr oder weniger unverändert belassen, sondern auch die Optimierung beschleunigt, da das Anfangsnetz näher bei einer Minimalstelle der Energiefunktion liegt. Es gibt eine Vielzahl an Methoden, die sich mit solchen Remeshing-Verfahren auseinandersetzen (siehe [71–92]).

5.2.3 Reguläre Netze

In [3] werden zwei Arten von Regularität definiert. Ein Netz ist *euklidisch regulär*, wenn jede Facette ein rotationssymmetrisches gleichmäßiges Polygon ist. Ein Netz ist *Möbius regulär*, wenn jeder Stern des Netzes durch eine Möbiustransformation in einen euklidisch regulären kombinatorisch äquivalenten Stern abgebildet werden kann. Die Autoren nutzen Doppelverhältnisse über die Quaternionen, um eine geometrische Charakterisierung von Regularität

herzuleiten und somit geeignete Zielfunktionen zur Optimierung von Netzen zu erstellen. Dadurch werden möglichst reguläre Netze erhalten. Die im Artikel beschriebene Methode verwendet den Levenberg-Marquadt-Algorithmus und kann unabhängig von den Anfangsnetzen globale Minima erreichen, was im Vergleich mit den Connectivity Shapes zu besseren Ergebnissen (im Sinne von Regularität) führen kann.

5.3 Strukturen aus berührenden kongruenten Kugeln

In diesem Abschnitt wird ein einfaches Computerprogramm (in Python) beschrieben, das ein Netz berechnet, das die Energiefunktion (5.16) minimiert (der Code ist im Anhang A zu finden). Das Programm liefert zwei Ergebnisse: Einerseits werden einige Netze im Sinne von gleichen Kantenlängen mithilfe zweier Algorithmen optimiert, andererseits wird eine Tabelle in einem Excel-Arbeitsblatt erstellt, die einige statistische Werte zum Vergleich der Algorithmen angibt. Zunächst werden die verschiedenen Funktionen beschrieben, die im Programm vorkommen.

5.3.1 Implementierung

Das Programm arbeitet mit OBJ-Formaten. Eine OBJ-Datei besteht grundsätzlich aus einer Punkteliste und einer Facettenliste. Die Funktion *obj.read* entnimmt aus einer OBJ-Datei die Punkteliste und die Facettenliste als Listen von Tupeln, und die Funktion *obj.write* schreibt eine neue OBJ-Datei mit gegebener Punkteliste und Facettenliste.

Die Funktionen *Es*, *jacobian_ Es* und *hess_ Es* liefern die Energiefunktion, den Gradienten und die Hesse-Matrix der Energiefunktion. Sie wurden direkt bestimmt. Für die Konstante l in (5.16) wählen wir die Durchschnittslänge aller Kanten des originalen Netzes. Das Untermodul *Optimize* in der Open Source Python Bibliothek *SciPy* bietet mehrere Möglichkeiten zur Minimierung von Funktionen. Wir verwenden die Funktionen *scipy.optimize.minimize* [93] sowie *scipy.optimize.least_squares* [94] und vergleichen sie. Beide Funk-

tionen können mit verschiedenen Methoden bzw. Algorithmen arbeiten. Für die Funktion *minimize* wählen wir die Methode *trust-ncg* (*Newton conjugate gradient trust-region algorithm*). Diese Methode funktioniert mit dem Gradienten und der Hesse-Matrix der Energiefunktion. Eine detailliertere Beschreibung der Methode findet man in [95]. Für die Funktion *least_squares* wählen wir die Methode *trf* (*Trust Region Reflective*), die nur den Gradienten der Energiefunktion benötigt. Eine kurze Beschreibung der letzten Methode mit weiterführender Literatur findet man in [94].

Da $\mathbb{R}^{3n}$ die Definitionsmenge der Energiefunktion ist, wird eine Funktion benötigt, die die Punkteliste in einer Liste aus $3n$ einzelner Koordinaten umwandelt. Dies wird mit der Funktion *list_from_matrix* erreicht. Um eine neue OBJ-Datei zu erstellen, braucht man wieder eine Punkteliste. Dafür steht die Funktion *matrix_from_list*.

Da die Energiefunktion eine Summe über die Kantenmenge des Netzes ist, benötigt man eine Methode, die Kantenliste zu bestimmen. Dies wird wie folgt erreicht: Startet man mit einer leeren Liste, dann kann man für jede Facette die Facettenkanten (i, j) in der Liste einfügen, wenn die Kante nicht in der Liste enthalten ist. Um doppelte Kanten zu vermeiden, fügen wir nur Kanten mit $i < j$ in die Liste ein.

Bemerkung 5.3. Man kann in der Optimierung Punkte fixieren, indem man die Ableitungen der Energiefunktion an den jeweiligen Stellen 0 setzt. Die Qualität der Ergebnisse kann dadurch verschlechtert werden, sodass keine schönen Kugelpackungen entstehen.

5.3.2 Vergleichsanalyse

Die Qualität der Ergebnisse kann mit der Funktion

$$q = \max_{(i,j) \in \mathcal{E}} \left| 1 - \frac{\|v_i - v_j\|}{l} \right|, \quad (5.20)$$

Datei	Alg.	Laufzeit	Energie	q	s
tricube	lq	0,05	3,10E-06	2,48E-04	1,82E-04
tricube	m	0.01	2,02E-10	1,66E-06	1,47E-06
spinnennetz	lq	5,24	3,66E-05	1,15E-03	2,63E-04
spinnennetz	m	31,38	9,41E-08	6,84E-05	1,34E-05
sheet	lq	0,17	2,91E-05	8,32E-03	8,77E-04
sheet	m	0,80	7,89E-08	4,68E-04	4,57E-05
ball	lq	3,36	6,19E-05	9,45E-03	5,90E-04
ball	m	40,29	2,96E-06	2,33E-03	1,29E-04
spherecap	lq	4,20	1,41E-04	1,13E-01	1,97E-03
spherecap	m	22,36	7,76E-06	2,86E-02	4,46E-04
mask	lq	236,49	1,39E-04	3,91E-01	1,67E-03
mask	m	1220,93	7,99E-05	3,31E-01	1,28E-03

Tabelle 1: Vergleichsanalyse: tricube (n=8,e=18), spinnennetz (n=75,e=195), sheet (n=100,e=180), ball (n=258,e=765), spherecap (n=817,e=2352), mask (n=2572, e=2571)

sowie mit der Varianz

$$s = \sqrt{\frac{1}{e} \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} (\|v_i - v_j\| - l)^2} \quad (5.21)$$

gemessen werden. Für beide Funktionen gilt dasselbe: Je näher der Wert bei 0 liegt, desto besser ist die Qualität der Lösung. Zum Vergleich (siehe Tabelle 1) verwenden wir ebenso die Laufzeit der Funktionen least_squares (abgekürzt lq) bzw. minimize (abgekürzt m), sowie die Energie nach Optimierung.

Man kann aus der Tabelle 1 folgende Ergebnisse ablesen:

- 1) Die Energie in m ist bis auf 3 Nachkomastellen (in tricube bis auf 4) kleiner als in lq.
- 2) Die Funktion lq ist bis auf in „tricube“ schneller als die Funktion m. Insbesondere bei Dateien mit einer großen Anzahl an Ecken ist der Zeitunterschied bemerkenswert.

- 3) Die Qualität der Ergebnisse ist in m bis auf zwei Nachkommastellen besser als in lq .

Aus diesen Fakten kann man herleiten, dass beide Funktionen ähnliche Ergebnisse liefern, wobei die Funktion lq schneller als die Funktion m ist, während die Qualität der Ergebnisse in m etwas besser ist als in lq .

Bemerkung 5.4. Die Anzahl der Ecken und Kanten, wie nah das originale Netz von einem lokalen Minimum steht, sowie die Konnektivität sind Faktoren, die die Optimierung beeinflussen können. Man könnte für den Gradienten und die Hesse-Matrix dünnbesetzte Matrizen verwenden, um die Optimierung zu beschleunigen.

5.3.3 Visualisierung

Eine freie Software zur Verarbeitung von 3D-Modellen ist MeshLab. Wir verwenden diese Software einerseits zur Visualisierung verschiedener Netze und andererseits, um eine Struktur aus Kugeln darzustellen. Man kann mit der Funktion *Create Solid Wireframe* in jedem Punkt eines Netzes eine Kugel mit einem gewissen Radius platzieren. Die Abbildung 11 zeigt sechs verschiedene Netze mit verschiedener Punkteanzahl und verschiedener Kombinatorik, ihre optimierten Versionen und die entsprechende Kugelpackung. Eine überschneidungsfreie Struktur kann durch die Implementierung nicht gesichert werden.

Die Abbildung 12 zeigt das Netz spinnennetz und seine optimierte Version, wobei der kleinere Rand fixiert wurde. Für den Radius der zu platzierenden Kugeln kann man die Hälfte der Durchschnittslänge oder die Hälfte der kleinsten Kante wählen. Man sieht in der Abbildung, wie sich die Kugeln am Rand überschneiden bzw. wie die Kugeln außerhalb des Randes einander nicht berühren.

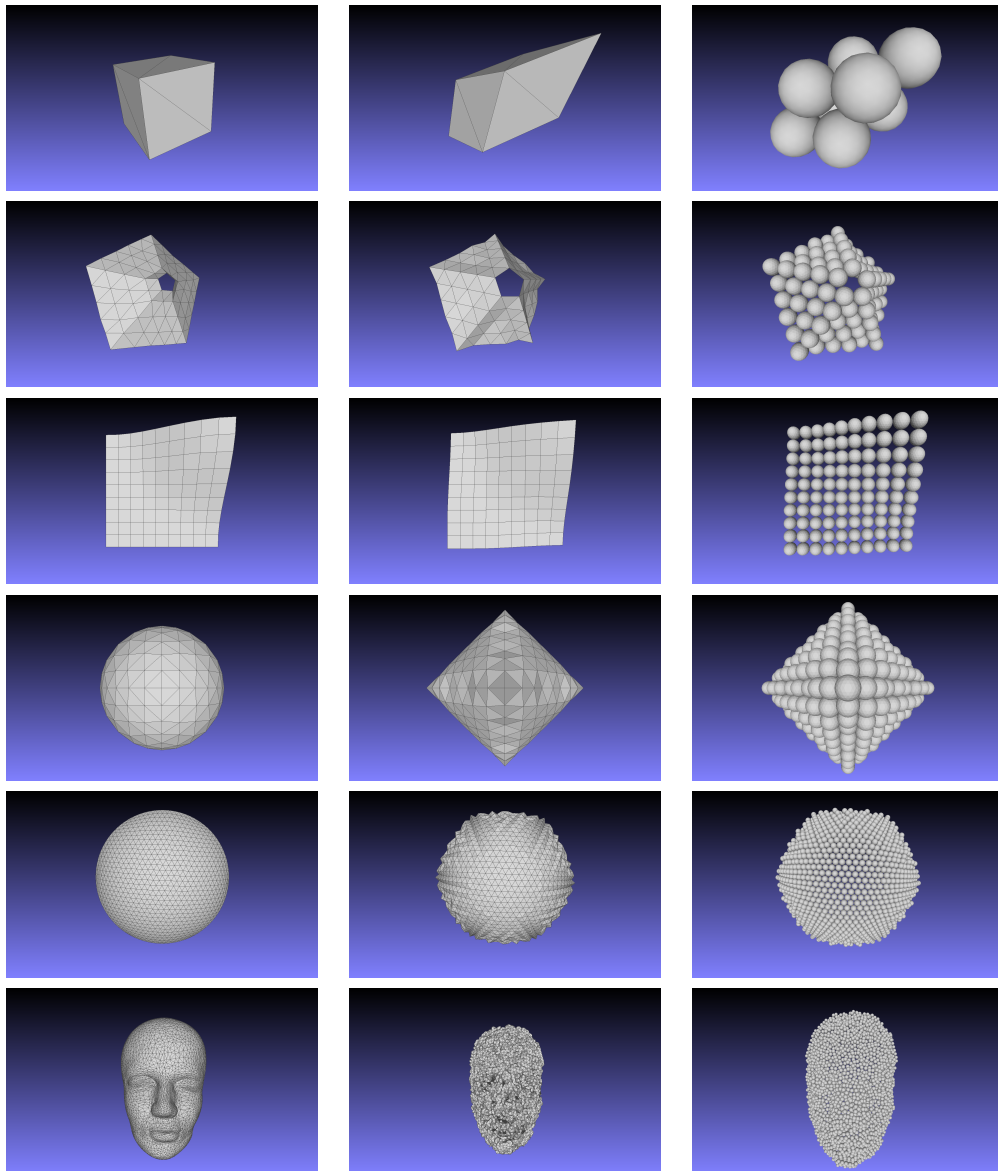


Abbildung 11: Erste Spalte: Originalnetze. Zweite Spalte: Optimierte Netze. Dritte Spalte: Kugelpackung.

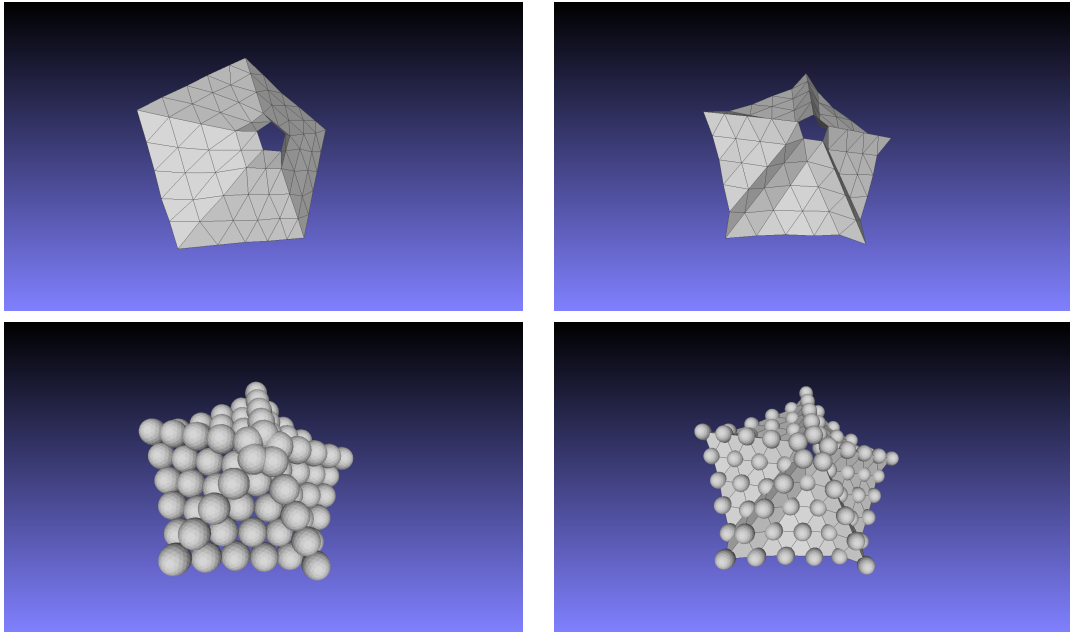


Abbildung 12: Erste Reihe: Optimierung mit fixiertem Rand. Zweite Reihe: Kugelplatzierungen.

6 Lie Sphären Geometrie

In diesem Kapitel soll ein theoretischer Rahmen [4–10] über die Grundlagen der Lie Sphären Geometrie dargestellt werden. In der Lie Sphären Geometrie bekommen geometrische Objekte wie Punkte, Ebenen und Kugeln eine Orientierung. Diese Objekte werden mit Punkten auf einer Quadrik in einem mehrdimensionalen projektiven Raum identifiziert und als Lie Sphären bezeichnet. Die sogenannte Lie Metrik ist eine indefinite Bilinearform, die die sogenannte Lie Quadrik bestimmt. Auf dieser Quadrik befinden sich alle Lie Sphären. Verschwindet die Lie Metrik bei zwei Lie Sphären, dann liegt eine orientierte Berührung vor (d.h. die Normalen zeigen in dieselbe Richtung, siehe Abbildung 13). Transformationen, die die Lie Metrik invariant lassen, behalten die orientierte Berührung zwischen Lie'schen Sphären und heißen Lie Transformationen. Die Lie Transformationen werden durch Inversionen an Lie'schen Sphären generiert.

Strukturen aus berührenden gleich großen und gleich orientierten Kugeln werden durch Netze beschrieben, bei denen jede Facette einen geraden Grad besitzt (siehe Abbildung 13). Spezialfälle sind Rhombennetze, Sechsecknetze und hybride Netze mit Rhomben, Sechsecken, Achtecken usw. als Facetten. Solche Strukturen sind in dem Unterraum enthalten, der aus allen gleich orientierten und kongruenten Sphären besteht. Dieser Unterraum ist der Schnitt zwischen der Lie Quadrik und einer bestimmte Hyperebene. Lie Transformationen, die diesen Unterraum festhalten, sind daher von Interesse.

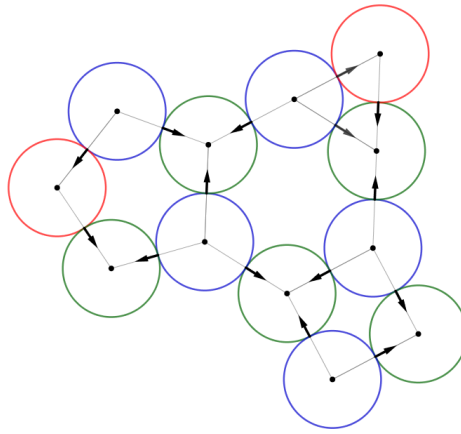


Abbildung 13: Struktur aus berührenden Kugeln mit Orientierungen. Bei Facetten mit ungeradem Grad gibt es eine Sphäre (Rot) mit unpassender Orientierung.

Ein schematischer Ablauf zur Identifizierung von Punkten, Ebenen und Kugeln mit Punkten auf der Lie Quadrik ist in der Tabelle 2 dargestellt und wird in diesem Kapitel schrittweise untersucht.

Bemerkung 6.1. Man kann sich Punkte als Sphären mit verschwindendem Radius und Ebenen als Sphären durch den uneigentlichen Punkt ∞ vorstellen.

Bemerkung 6.2. Zwei für dieses Kapitel relevante Literaturwerke sind [10] und [6]. Das Kapitel hat das Ziel, grundlegende Ergebnisse, die für das Thema dieser Arbeit wichtig sind, vorzustellen.

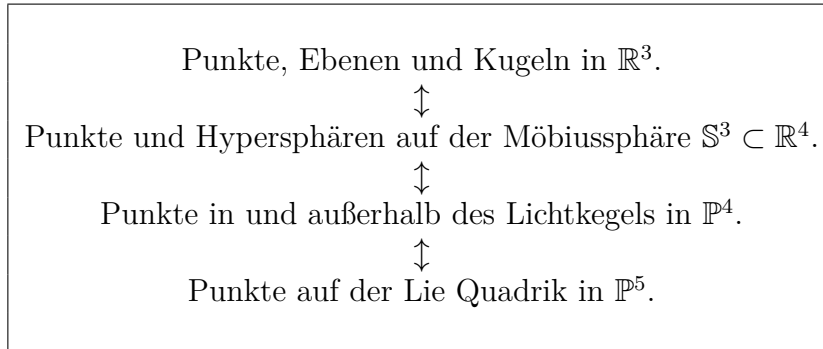


Tabelle 2: Prozess zur Identifizierung der Lie'schen Sphären.

6.1 Möbiusgeometrie der unorientierten Sphären

Die Möbiusgeometrie beschäftigt sich mit Sphären und sphärentreuen Abbildungen, wobei Punkte und Hyperebenen als spezielle Sphären betrachtet werden. Lässt man die Orientierung zur Seite, dann kann man Ebenen und Kugeln mit bestimmten Punkten im projektiven Raum $\mathbb{P}^4$ identifizieren.

Mittels der stereografische Projektion kann man Punkte, Ebenen und Kugeln in $\mathbb{R}^3$ auf Punkte und Hypersphären in $\mathbb{S}^3$ abbilden. Ebenen werden auf Hypersphären, die den Südpol enthalten, und Kugel auf Hypersphären, die den Südpol nicht enthalten, projiziert. Die Sphäre $\mathbb{S}^3$ wird im projektiven Raum $\mathbb{P}^4$ durch den sogenannten Lichtkegel beschrieben. Der Lichtkegel ist eine projektive Quadrik, die durch eine indefinite Bilinearform (die sogenannte Lorentz Metrik) bestimmt wird. Die projektiven Hypersphären kann man als Schnitt einer projektiven Hyperebene mit dem Lichtkegel interpretieren. Die Polare der projektiven Hyperebenen sind Punkte, die außerhalb des Lichtkegels liegen. Diese Punkte werden als raumartig bezeichnet. Durch die Pol-Polare Beziehung gibt es daher eine bijektive Korrespondenz zwischen Ebenen und Kugeln in $\mathbb{R}^3$ und den entsprechenden raumartigen Pole in $\mathbb{P}^4$.

In diesem Kontext sind Möbiustransformationen jene Transformationen, die den Lichtkegel erhalten und raumartige Punkte auf raumartige Punkte abbilden. Sie werden durch invertierbare lineare Transformationen induziert, die die Lorentz Metrik invariant lassen. Eine weitere Eigenschaft von Möbi-

ustransformationen ist die winkeltreue.

6.1.1 Stereografische Projektion

Bei der stereografischen Projektion wird der Südpol $S := (-1, 0, 0, 0)$ mit Punkte $(0, x)$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ verbunden und mit der Sphäre $\mathbb{S}^3 := \{s \in \mathbb{R}^4 \mid \langle s, s \rangle = 1\}$ geschnitten. Der Schnittpunkt besitzt auf diese Weise die Koordinaten

$$\sigma(x) = \left(\frac{1 - \langle x, x \rangle}{1 + \langle x, x \rangle}, \frac{2x}{1 + \langle x, x \rangle} \right). \quad (6.1)$$

Diese Projektion kann als die Einschränkung der Inversion

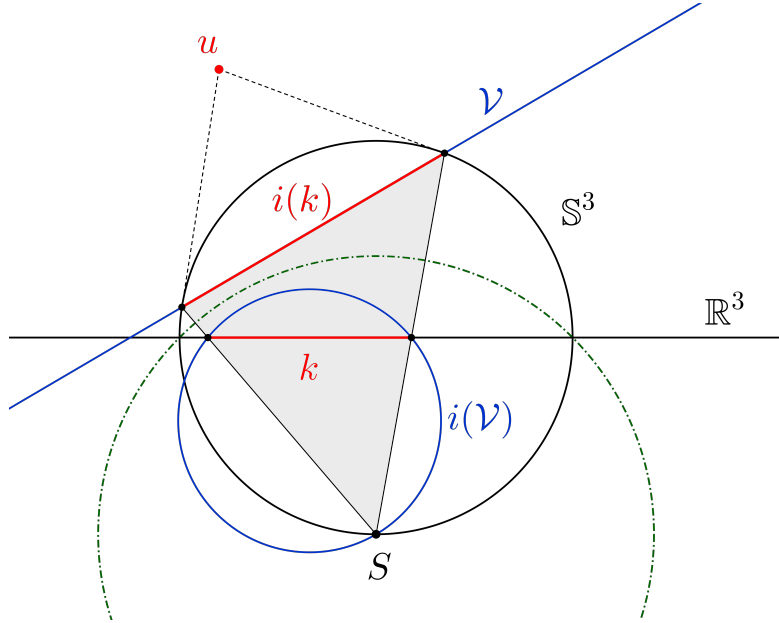


Abbildung 14: Stereografische Projektion als Einschränkung einer Inversion

$$i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$i(u) = S + \frac{2}{|u - S|^2}(u - S) \quad (6.2)$$

an der Sphäre mit Mittelpunkt S und Radius $\sqrt{2}$ auf $\mathbb{R}^3$ gesehen werden und gehört zur Gruppe der Möbiustransformationen in $\mathbb{R}^4$ [5, 96, 97]. Die Abbildung 14 stellt diese Einschränkung bildlich dar. Dabei wird eine zweidi-

mensionale Sphäre k in $\mathbb{R}^3$ als Schnitt einer dreidimensionalen Sphäre $i(\mathcal{V})$, die den Südpol enthält, mit $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Das Bild $i(k)$ der Schnittsphäre unter der Inversion ist eine zweidimensionale Sphäre auf $\mathbb{S}^3$, die wieder als Schnitt einer dreidimensionalen Hyperebene $\mathcal{V}$ und der Sphäre $\mathbb{S}^3$ betrachtet werden kann. Diese Hyperebene ist die Polare bezüglich $\mathbb{S}^3$ zu einem Punkt $u \in \mathbb{R}^4$ (Pol), der außerhalb von $\mathbb{S}^3$ liegt. Dieser Pol wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\langle u, v \rangle = 1, \quad (6.3)$$

wobei $v \in \mathcal{V}$. Man kann analog eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ als Schnitt einer Hyperebene, die den Südpol enthält, mit $\mathbb{R}^3$ betrachten. Dieser Schnitt wird auf eine zweidimensionale Sphäre in $\mathbb{S}^3$ abgebildet, die wiederum als Schnitt einer dreidimensionalen Hyperebene mit $\mathbb{S}^3$ gesehen werden kann und einen Pol außerhalb von $\mathbb{S}^3$ besitzt.

Bemerkung 6.3. Durch die stereografische Projektion wird eine bijektive Korrespondenz zwischen Punkten in $\mathbb{R}^3$ und Punkten in $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ dargestellt. Erweitert man den Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Element ∞ und definiert man den Südpol als Bild von ∞ , dann ergibt sich eine bijektive Zuordnung zwischen $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ und $\mathbb{S}^2$. In diesem Kontext nennen wir das Element ∞ *uneigentlicher Punkt*.

6.1.2 Einbettung in den projektiven Raum $\mathbb{P}^4$

Die Einbettung von $\mathbb{R}^4$ in den projektiven Raum $\mathbb{P}^4$ wird durch die Zuordnung $u \mapsto p(u) := [(1, u)]$ beschrieben, wobei $[(1, u)] = \{\lambda(1, u) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Die Gleichung (6.3) kann mit homogenen Koordinaten wie folgt umgewandelt werden:

$$(\xi, \eta)_l := -\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_5\eta_5 = 0. \quad (6.4)$$

Definition 6.1. Die indefinite Bilinearform $(\cdot, \cdot)_l$ heißt *Lorentz Metrik*. Punkte mit $(\xi, \xi)_l < 0$ heißen *zeitartig*, Punkte mit $(\xi, \xi)_l = 0$ *lichtartig* und Punkte mit $(\xi, \xi)_l > 0$ *raumartig*. Die Quadrik, die durch die Gleichung $(\xi, \xi)_l = 0$ beschrieben wird, heißt *Lichtkegel*. Der Vektorraum $\mathbb{R}^5$ zusammen mit der

Lorentz Metrik wird als *Lorentz Raum* definiert und mit $\mathbb{R}_1^5$ bezeichnet.

Ein in $\mathbb{S}^3$ projizierter Punkt besitzt nach (6.1) mit dem Streckungsfaktor $\lambda = \frac{1+\langle x, x \rangle}{2}$ die homogenen Koordinaten:

$$p(\sigma(x)) = \left[\left(\frac{1 + \langle x, x \rangle}{2}, \frac{1 - \langle x, x \rangle}{2}, x \right) \right]. \quad (6.5)$$

Liegt $x \in \mathbb{R}^3$ auf einer Sphäre k mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^3$ und Radius $r \in \mathbb{R}_0^+$, dann gilt:

$$\langle x - m, x - m \rangle - r^2 = 0. \quad (6.6)$$

Der zu k entsprechende Pol $[\xi] = p(u)$ erfüllt die Pol-Polare Beziehung

$$(\xi, p(\sigma(x)))_l = 0. \quad (6.7)$$

Durch Koeffizientenvergleich der Polynome (6.6) und (6.7) erhält man die homogenen Koordinaten des Pols $[\xi]$:

$$\left[\left(\frac{1 + \langle m, m \rangle - r^2}{2}, \frac{1 - \langle m, m \rangle + r^2}{2}, m \right) \right]. \quad (6.8)$$

In (6.8) gilt $\xi_1 + \xi_2 = 1$ und $(\xi, \xi)_l = r^2 \geq 0$. Auf diese Weise wird jeder Kugel ein raumartiger Punkt zugeordnet. Umgekehrt kann man einen raumartigen Punkt $[\eta] \in \mathbb{P}^4$ mit $\eta_1 + \eta_2 \neq 0$ mit einer Kugel identifizieren: Durch Streckung mit dem Faktor $\lambda = (\eta_1 + \eta_2)^{-1}$ erhält man $\eta_1 + \eta_2 = 1$. Dann entspricht $[\eta]$ die Kugel mit Mittelpunkt $m := (\eta_3, \eta_4, \eta_5)$ und Radius $r := \sqrt{(\eta, \eta)_l}$.

Man kann mit Ebenen analog vorgehen. Eine Ebene e wird durch die Gleichung

$$x \cdot N = c \quad (6.9)$$

gegeben, wobei N der normierte Normalvektor der Ebene und c der Abstand der Ebene zum Ursprung ist. Da Ebenen in $\mathbb{R}^3$ mit Hypersphären in $\mathbb{S}^3$, die den Südpol S enthalten, korrespondieren, erfüllen die entsprechenden Pole ξ

die Pol-Polare Beziehung:

$$(\xi, [(1, S)])_l = 0. \quad (6.10)$$

Aus (6.10) und (6.9) folgt für den Pol $[\xi]$:

$$[(c, -c, N)]. \quad (6.11)$$

Jede Ebene kann also mit einem raumartigen Punkt mit $\xi_1 + \xi_2 = 0$ identifiziert werden. Nach Skalierung mit $\lambda = |(\eta_3, \eta_4, \eta_5)|^{-1}$ kann jeder raumartige Punkt $[\eta]$, der $\eta_1 + \eta_2 = 0$ erfüllt, einer Ebene mit $c := |\eta_1|$ und $N := (\eta_3, \eta_4, \eta_5)$ zugeordnet werden.

Auf diese Weise erhält man eine Bijektion zwischen Ebenen und Kugeln in $\mathbb{R}^3$ und raumartigen Punkten in $\mathbb{P}^4$.

Definition 6.2. Die homogenen Koordinaten von Möbiussphären, die in (6.8) und (6.11) gegeben sind, werden *pentasphärische Koordinaten* der Möbiussphären bezeichnet.

Bemerkung 6.4. Die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^3$ korrespondiert mit dem Lichtkegel (Menge aller lichtartigen Punkten).

6.1.3 Winkel zwischen unorientierten Sphären

Eine wichtige geometrische Größe in der Möbiusgeometrie ist der Winkel zwischen unorientierten Sphären. Analog zur euklidischen Geometrie kann der Winkel ϕ zwischen zwei unorientierten Sphären $[\xi]$ und $[\eta]$ mittels der Lorentz Metrik durch folgende Gleichung definiert werden:

$$\cos \phi = \frac{(\xi, \eta)_l}{\sqrt{(\xi, \xi)_l} \cdot \sqrt{(\eta, \eta)_l}} =: K(\xi, \eta). \quad (6.12)$$

In [9] wird der Winkel durch die Gleichung $\cos^2 \phi = K^2$ definiert. Daraus lässt sich folgende algebraische Bedingung für schneidende Sphären herleiten:

Satz 6.1. *Zwei unorientierte Sphären $[\xi_1], [\xi_2]$ schneiden sich, wenn*

$$0 \leq (\xi_1, \xi_1)_l \cdot (\xi_2, \xi_2)_l - (\xi_1, \xi_2)_l^2. \quad (6.13)$$

Bemerkung 6.5. Die Definition des Winkels in [9] hat den Vorteil, dass die Funktion K^2 unter Skalierungen invariant bleibt, d.h.

$$K^2(\lambda\xi, \mu\eta) = K^2(\xi, \eta). \quad (6.14)$$

Sie bleibt ebenso unter invertierbaren, linearen Transformationen invariant. Dieser Sachverhalt wird im nächsten Kapitel bewiesen.

Die Werte der Funktion K liegen nicht immer zwischen -1 und 1 . Außerdem gibt es Vektoren (nämlich lichtartige), wo der Nenner von K verschwinden würde. D.h. der Winkel ist nicht für alle Sphären wohldefiniert. Der Begriff Winkel macht somit nur für raumartige Vektoren (also für Kugeln und Ebenen in $\mathbb{R}^3$) Sinn, die (6.13) erfüllen. Die Abbildung 15 stellt den Winkel für alle möglichen Kombinationen dar, bei denen der Nenner nicht verschwindet.

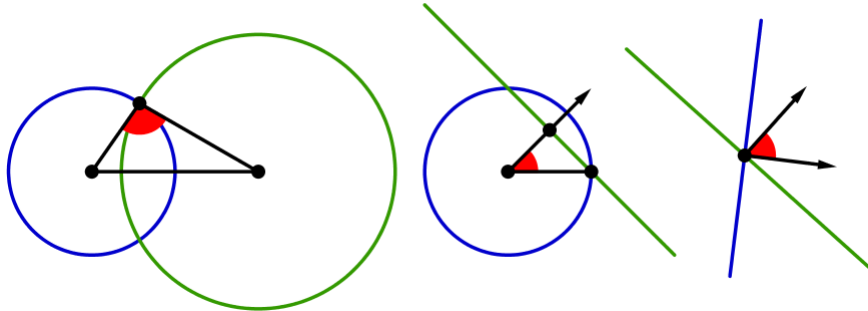


Abbildung 15: Winkel zwischen unorientierten Sphären.

Auch wenn die Funktion K nicht für alle Sphären wohldefiniert ist, kann man die Werte von K geometrisch interpretieren. In diesem Abschnitt werden alle möglichen Kombinationen (Kugel-Kugel, Kugel-Ebene, Ebene-Ebene, Kugel-Punkt, Ebene-Punkt sowie Punkt-Punkt) hinsichtlich besonderer Werte von K untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass sich zwei Kugeln, zwei Ebenen oder eine Kugel und eine Ebene orthogonal schneiden, wenn für die entsprechenden Pole $[\xi], [\eta]$ die folgende Bedingung gilt:

$$(\xi, \eta)_l = 0. \quad (6.15)$$

Lage zwischen zwei Kugeln Wir betrachten zwei Kugeln mit Mittelpunkten $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^3$ und Radien $r_1, r_2 > 0$. Sie werden mit zwei eigentlichen projektiven Punkte $[\xi], [\eta]$ (wie in (6.8) definiert) identifiziert. Eine direkte Rechnung führt zu:

$$K = \frac{r_1^2 + r_2^2 - |m_2 - m_1|^2}{2r_1 r_2}. \quad (6.16)$$

Aus der Gleichung (6.16) folgt:

- (1) $K < -1 \Leftrightarrow |r_1 + r_2| < |m_2 - m_1|$.
- (2) $K > 1 \Leftrightarrow |r_1 - r_2| > |m_2 - m_1|$.
- (3) $K = -1 \Leftrightarrow |r_1 + r_2| = |m_2 - m_1|$.
- (4) $K = 1 \Leftrightarrow |r_1 - r_2| = |m_2 - m_1|$.
- (5) $K = 0 \Leftrightarrow r_1^2 + r_2^2 = |m_2 - m_1|^2$.
- (6) $-1 < K < 1 \Leftrightarrow |r_1 - r_2| < |m_2 - m_1| < |r_1 + r_2|$.

Im ersten Fall liegen die zwei Kugeln auseinander. Im zweiten Fall liegt eine Kugel innerhalb der anderen. Im dritten Fall berühren sich die Kugeln von außen. Im vierten Fall berühren sich die Kugeln von innen oder sie sind identisch. Im fünften Fall schneiden sich die Kugeln orthogonal. Dies folgt aus dem Satz des Pythagoras. Der letzter Fall gibt eine Bedingung an, wann sich die Kugeln schneiden. Der Kosinussatz

$$\langle m_2 - m_1, m_2 - m_1 \rangle = r_1^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha \quad (6.17)$$

beschreibt den Zusammenhang zwischen (6.16) und (6.12).

Lage zwischen Kugel und Ebene Eine Kugel mit Mittelpunkt m und Radius r und eine Ebene mit der Hesseschen Normalform $\langle x, N \rangle = c$ entsprechen wieder zwei eigentlichen projektiven Punkten $[\xi], [\eta]$ (wie in (6.8) und (6.11) definiert). Eine direkte Rechnung führt zu:

$$K = \frac{-c + \langle m, N \rangle}{r} = \frac{d}{r}, \quad (6.18)$$

wobei d der gerichtete Abstand zwischen Punkt m und der Ebene ist. Die Ebene teilt den Raum in zwei Halbräume. Wir nennen jenen Halbraum, in den die Normale N zeigt, den positiven Halbraum. Den anderen Halbraum nennen wir den negativen Halbraum. Aus der Gleichung (6.18) folgt:

$$(1) \quad K < -1 \Leftrightarrow d < -r.$$

$$(2) \quad K > 1 \Leftrightarrow d > r.$$

$$(3) \quad K = -1 \Leftrightarrow d = -r.$$

$$(4) \quad K = 1 \Leftrightarrow d = r.$$

$$(5) \quad K = 0 \Leftrightarrow d = 0.$$

$$(6) \quad -1 < K < 1 \Leftrightarrow -r < d < r.$$

Im ersten Fall ist d negativ und dem Betrage nach größer als der Radius, d.h. die Kugel liegt auf dem negativen Halbraum und schneidet die Ebene nicht. Im zweiten Fall (analog zum Ersten) liegt die Kugel im positiven Halbraum und schneidet die Kugel nicht. Im dritten Fall berührt die Kugel die Ebene im negativen Halbraum. Im vierten Fall berührt die Kugel die Ebene im positiven Halbraum. Im fünften Fall schneidet die Ebene die Kugel orthogonal. Der sechste Fall gib Schranken an, wo ein Schnitt vorliegt. In diesem Fall wird der Winkel zwischen der Kugel und der Ebene als der Winkel $\sphericalangle(s - m, N)$ definiert, wobei s ein Punkt des Schnittkreises ist.

Lage zwischen zwei Ebenen Zwei Ebenen mit den Normalformen $\langle x, N_1 \rangle = c_1$ und $\langle x, N_2 \rangle = c_2$ führen zu:

$$K = \langle N_1, N_2 \rangle. \tag{6.19}$$

Der Winkel zwischen zwei Ebenen wird als der Winkel zwischen den Normalen der Ebenen definiert. In diesem Fall ist er für Ebenen wohldefiniert, d.h. $-1 \leq K \leq 1$. Wir unterscheiden zwischen folgenden Situationen:

$$(1) \quad K = -1 \Leftrightarrow N_1 = -N_2.$$

$$(2) \quad K = 1 \Leftrightarrow N_1 = N_2.$$

$$(3) \quad K = 0 \Leftrightarrow N_1 \perp N_2.$$

Lage zwischen Kugel und Punkt Punkte können als Kugeln mit Radius $\Delta \rightarrow 0$ interpretiert werden. Sie können entweder im Inneren, im Äußeren oder auf einer Kugel liegen. Die Funktion K kann als Grenzwert interpretiert werden:

$$K = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{r^2 - |m - x|^2}{2r\Delta} + \frac{\Delta}{2r} \right), \quad (6.20)$$

wobei m und r Mittelpunkt und Radius der Kugel und x ein Punkt in $\mathbb{R}^3$ ist.

Liegt x auf der Kugel, dann konvergiert K gegen 0. Liegt x im Inneren der Kugel, dann divergiert K gegen ∞ . Liegt x außerhalb der Kugel, dann divergiert K gegen $-\infty$.

Lage zwischen Ebene und Punkt Betrachtet man eine Ebene mit Normalform $\langle x, N \rangle = c$ sowie den Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ mit d als gerichtetem Abstand von x zur Ebene, dann kann die Funktion K wieder als Grenzwert verstanden werden:

$$K = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{-c + \langle x, N \rangle}{\Delta} \right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{d}{\Delta} \right). \quad (6.21)$$

Liegt x im positiven Halbraum, dann divergiert K gegen ∞ . Liegt x im negativen Halbraum, dann divergiert K gegen $-\infty$. Liegt x auf der Ebene, dann konvergiert K gegen 0.

Lage zwischen zwei Punkten Betrachtet man zwei Punkte x, y als Sphären mit Radius $\Delta \rightarrow 0$, dann kann man die Funktion K wie folgt schreiben:

$$K = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(1 - \frac{|x - y|^2}{2\Delta^2} \right). \quad (6.22)$$

Die Funktion K konvergiert nur dann gegen 1, wenn die Punkte identisch sind, ansonsten divergiert sie gegen $-\infty$.

6.1.4 Möbiustransformationen

Die Möbiusgeometrie betrachtet Punkte, Hyperebenen und Hypersphären als unorientierter Sphären und studiert jene Transformationen, die unorientierte Sphären auf unorientierten Sphären abbilden. Diese Transformationen heißen Möbiustransformationen. In $\mathbb{R}^n$ werden sie durch Spiegelungen an Hyperebenen und Inversionen an Hypersphären erzeugt. In $\mathbb{S}^n$ werden sie durch Inversionen an n -dimensionalen Hypersphären in $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ erzeugt, die als Schnitt einer Hyperebene mit der Sphäre $\mathbb{S}^n$ entstehen. Im projektiven Modell betrachtet man jene projektive Transformationen in $\mathbb{P}^4$, die den Lichtkegel und somit $\mathbb{S}^3$ erhalten. Solche Transformationen bilden raumartige Punkte auf raumartigen Punkten ab und sind winkelerhaltend [10, 97].

Definition 6.3. Eine *Möbiustransformation* ist eine projektive Transformation, die lichtartige Punkte auf lichtartige Punkte in $\mathbb{P}^4$ abbildet und somit den Lichtkegel erhält. Die *Möbiusgruppe* $\text{Möb}(\mathbb{P}^4)$ ist die Gruppe aller Möbiustransformationen.

Definition 6.4. Eine *Lorentz Transformation* ist eine invertierbare lineare Transformation in $\mathbb{R}^5$, die die Lorentz Metrik invariant lässt. Die Menge aller Lorentz Transformationen heißt *Lorentz Gruppe* und wird mit

$$O(5, 1) := \{A \in GL(5) \mid \forall v, w \in \mathbb{R}^5 : (Av, Aw)_l = (v, w)_l\} \quad (6.23)$$

bezeichnet, wobei $GL(5)$ die allgemeine lineare Gruppe in $\mathbb{R}^5$ ist.

Jede invertierbare lineare Transformation $A \in GL(5)$ induziert eine projektive Transformation, die durch $P(A)[x] := [Ax]$ definiert ist.

Bemerkung 6.6. Die Abbildung P ist ein Homomorphismus von der allgemeinen Linearen Gruppe $GL(5)$ in die projektive lineare Gruppe $PGL(4) := GL(5)/\{\lambda I\}$.

Jede Lorentz Transformation induziert nach Definition eine Möbiustransformation. Für Matrixrepräsentanten von Möbiustransformationen gilt folgendes Lemma:

Lemma 6.2. *Sei A die Matrixdarstellung einer invertierbaren linearen Transformation, die den Lichtkegel erhält. Dann existiert eine Konstante $\lambda > 0$, sodass*

$$(Av, Aw)_l = \lambda(v, w)_l \quad (6.24)$$

für alle Punkte $v, w \in \mathbb{R}^5$.

Beweis. Sei $(e_1, \dots, e_5)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^5$, $v = (v_1, \dots, v_5)$ und $w = (w_1, \dots, w_5)$ die Koordinaten zweier beliebiger Punkte in $\mathbb{R}^5$ und $A \in GL(5)$ wie im Lemma definiert. Es gilt $(e_1, e_j)_l = 0$, für $j = 2, \dots, 5$. Da $e_1 \pm e_j$ lichtartige Vektoren sind, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (A(e_1 + e_j), A(e_1 + e_j))_l = (Ae_1, Ae_1)_l + 2(Ae_1, Ae_j)_l + (Ae_j, Ae_j)_l, \\ 0 &= (A(e_1 - e_j), A(e_1 - e_j))_l = (Ae_1, Ae_1)_l - 2(Ae_1, Ae_j)_l + (Ae_j, Ae_j)_l. \end{aligned}$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man $-(Ae_1, Ae_1)_l = (Ae_j, Ae_j)_l =: \lambda$ und durch Subtraktion $(Ae_1, Ae_j)_l = 0$ für alle j . Nun folgt für $\Sigma := \sum_{i=1}^5$:

$$\begin{aligned} (Av, Aw)_l &= \left(A \sum v_i e_i, A \sum w_i e_i \right)_l = \left(\sum v_i Ae_i, \sum w_i Ae_i \right)_l \\ &= \sum (v_i Ae_i, w_i Ae_i)_l = \sum v_i w_i (Ae_i, Ae_i)_l \\ &= -v_1 w_1 \lambda + v_2 w_2 \lambda + \dots + v_5 w_5 \lambda = \lambda(v, w)_l. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\lambda = -(e_1, e_1)_l > 0$, da e_1 zeitartig ist. $\square$

Mithilfe des Lemmas kann man einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Lorentz Gruppe und der Möbiusgruppe zeigen:

Theorem 6.3. *Jede Lorentz Transformation induziert eine Möbiustransformation. Umgekehrt wird jede Möbiustransformation von einer Lorentz Transformation induziert. Diese Lorentz Transformation ist bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt.*

Bemerkung 6.7. Anders ausgedrückt existiert ein Isomorphismus zwischen $\text{Möb}(\mathbb{P}^4)$ und der Quotientenmenge $O(5, 1)/\{\pm I\}$. Diese Quotientenmenge stellt eine Partition der Lorentz Gruppe in zweielementige Teilmengen dar, die nur entgegengesetzte Transformationen enthalten.

Beweis. Der erste Teil folgt aus der Definition. Für den zweiten Teil betrachten wir eine Möbiustransformation mit Darstellungsmatrix M . Nach dem Lemma 6.2 existiert ein positiver Skalar λ , sodass $(Mv, Mw)_l = \lambda(v, w)_l$ für alle Punkte $u, v \in \mathbb{R}^5$. Die Menge aller invertierbaren linearen Transformationen, die dieselbe Möbiustransformation induziert, ist durch $\{\mu M \mid \mu \in \mathbb{R}^*\}$ gegeben. Davon sind $\pm M/\sqrt{\lambda}$ die einzigen Lorentz Transformationen. $\square$

Korollar 6.4. *Möbiustransformationen bilden raumartige Vektoren auf raumartigen Vektoren und zeitartige Vektoren auf zeitartige Vektoren ab.*

Beweis. Dies folgt direkt aus (6.2). $\square$

Ein wichtiges Ergebnis der linearen Algebra ist das **Theorem von Cartan und Dieudonné** (siehe Theoreme 3.7 und 3.8 in [6]). Dies besagt in einem allgemeineren Kontext, dass jede orthogonale Transformation in einem n -dimensionalen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $B(\cdot, \cdot)$ als Produkt von maximal n Inversionen dargestellt werden kann. Die Inversion an der Sphäre ξ wird durch folgende Formel beschrieben:

$$i_\xi(x) = x - \frac{2B(x, \xi)}{B(\xi, \xi)}\xi. \quad (6.25)$$

Die Inversion (6.25) im Lorentz Raum beschreibt für raumartige Punkte ξ die Spiegelung an einer Ebene oder an einer Kugel in $\mathbb{R}^3$. Da Möbiustransformationen durch orthogonale Transformationen induziert werden, wird die Möbiusgruppe durch Inversionen generiert.

Eine weitere Eigenschaft der Möbiustransformationen ist die Winkeltreue:

Definition 6.5. Projektive Transformationen, die die Funktion K aus dem Kapitel (6.1.3) invariant lassen (d.h. sie erhalten Winkel), heißen *winkeltreu* oder *konform*.

Satz 6.5. *Möbiustransformationen sind konform.*

Beweis. Aus dem Lemma 6.2 folgt für eine Möbiustransformation M :

$$\begin{aligned} K(M\xi_1, M\xi_2) &= \frac{(M\xi_1, M\xi_2)_l}{\sqrt{(M\xi_1, M\xi_1)_l} \cdot \sqrt{(M\xi_2, M\xi_2)_l}} \\ &= \frac{\lambda \cdot (\xi_1, \xi_2)_l}{\lambda \cdot \sqrt{(\xi_1, \xi_1)_l} \cdot \sqrt{(\xi_2, \xi_2)_l}} = K(\xi_1, \xi_2). \end{aligned} \tag{6.26}$$

□

6.2 Liesche Geometrie der orientierten Sphären

Während die Möbiusgeometrie sich dem Studium der unorientierten Sphären und der sphärentreuen winkeltreuen Transformationen widmet, beschäftigt sich die Lie Sphären Geometrie mit orientierten Sphären, die sogenannten Lie Sphären, und sphärentreuen berührungserhaltenden Transformationen. In diesem Abschnitt leiten wir aufbauend auf die im letzten Abschnitt vorgestellte Möbiusgeometrie eine bijektive Korrespondenz zwischen orientierten Sphären und der sogenannten Lie Quadrik im projektiven Raum $\mathbb{P}^5$ her. Die Lie Quadrik wird durch eine indefinite Bilinearform bestimmt, die sogenannte Lie Metrik.

Lie Sphären Transformationen werden als projektive Transformationen definiert, die die Lie Quadrik invariant lassen und somit Lie Sphären auf Lie Sphären abbilden. In der Lie Quadrik findet man projektive Geraden, die zu parabolischen Büschel von Sphären korrespondieren. Ein parabolisches Büschel besteht aus genau einem Punkt, genau einer orientierten Ebene und unendlich vielen Sphären, die die Ebene in dem Punkt orientiert berühren. Da projektive Transformationen projektive Geraden auf projektive Geraden abbilden, erhalten sie Kontaktelemente.

Schneidet man die Lie Quadrik mit einer Hyperebene, so entstehen verschiedene Systeme aus Sphären mit bestimmten Eigenschaften. Diese Systeme heißen lineare Komplexe. Die Menge aller orientierten Sphären mit konstantem gegebenen Radius kann als ein solcher Komplex dargestellt werden. Lie

Sphären Transformationen, die solche Komplexe erhalten, sind daher im Bezug auf diese Arbeit von Interesse.

6.2.1 Lie Sphären

Aus einer unorientierten Sphäre kann man wie folgt zwei Sphären mit entgegengesetzter Orientierung gewinnen: Eine unorientierte Sphäre entspricht einem raumartigen projektiven Punkt in $\mathbb{P}^4$. Dieser Punkt bestimmt einen eindimensionalen linearen Unterraum in $\mathbb{R}^5$, also eine Gerade durch den Ursprung. Schneidet man diese Gerade mit dem Drehhyperboloid, der durch die Gleichung $(\eta, \eta)_l = 1$ bestimmt wird, dann erhält man zwei entgegengesetzte raumartigen Vektoren, die den zwei Sphären mit selbem Radius und entgegengesetzter Orientierung entsprechen sollen.

Durch die Einbettung $\eta \mapsto [\alpha] = [(\eta, 1)]$ in $\mathbb{P}^5$ kann das Drehhyperboloid mit homogenen Koordinaten wie folgt beschrieben werden:

$$0 = -\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_5^2 - \alpha_6^2 =: (\alpha, \alpha)_L. \quad (6.27)$$

Definition 6.6. Die in (6.27) definierte indefinite Bilinearform $(\cdot, \cdot)_L$ heißt *Lie Metrik* und die dadurch beschriebene Quadrik *Lie Quadrik* $\mathcal{Q}$.

Im Abschnitt 6.1.2 werden Kugeln und Ebenen in $\mathbb{R}^3$ mit projektiven Punkten $[\xi] \in \mathbb{P}^4$ mit $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$ bzw. $\xi_1 + \xi_2 = 0$ repräsentiert. Die Schnittpunkte der entsprechenden homogenen Geraden mit dem Hyperboloid $(\eta, \eta)_l = 1$ sind $\eta_{1,2} := \pm (\xi, \xi)_l^{-\frac{1}{2}} \xi$, denn es gilt $1 = (\eta_1, \eta_1)_l = (\eta_2, \eta_2)_l$. Durch die Einbettung in $\mathbb{P}^5$ bekommen die Schnittpunkte die Gestalt

$$\left[\left(\xi, \pm (\xi, \xi)_l^{\frac{1}{2}} \right) \right] \in \mathcal{Q}. \quad (6.28)$$

Eine Kugel mit Mitte m und orientiertem Radius r entspricht somit dem projektiven Punkt mit homogenen Koordinaten:

$$\left[\left(\frac{1 + \langle m, m \rangle - r^2}{2}, \frac{1 - \langle m, m \rangle + r^2}{2}, m, r \right) \right]. \quad (6.29)$$

Eine Ebene, die durch die Hessesche Normalform $\langle x, N \rangle = c$ gegeben ist, entspricht dem projektiven Punkt mit homogenen Koordinaten:

$$[(c, -c, N, 1)]. \quad (6.30)$$

Punkte in $\mathbb{R}^3$ sowie der uneigentlichen Punkt ∞ entsprechen lichtartigen Punkten in $\mathbb{P}^4$. Sie schneiden das Hyperboloid daher in der Fernhyperebene von $\mathbb{P}^5$. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ entspricht dem projektiven Punkt mit homogenen Koordinaten:

$$\left[\left(\frac{1 + \langle m, m \rangle}{2}, \frac{1 - \langle m, m \rangle}{2}, x, 0 \right) \right]. \quad (6.31)$$

Der uneigentlichen Punkt ∞ entspricht dem projektiven Punkt mit homogenen Koordinaten:

$$[(1, -1, 0, 0, 0, 0)]. \quad (6.32)$$

Dies bedeutet, dass eigentliche projektive Punkte mit Kugeln und Ebenen korrespondieren und projektive Fernpunkte mit Punkten und dem uneigentlichen Punkt ∞ korrespondieren.

Bemerkung 6.8. Die homogenen Koordinaten in (6.29), (6.30), (6.31) und (6.32) heißen *hexasphärische Koordinaten*.

Ist ein eigentlicher Punkt $[\alpha] \in \mathcal{Q}$ ($\alpha_6 \neq 0$) mit $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ gegeben, dann entspricht $[\alpha]$ der Kugel mit Mittelpunkt $m := \lambda(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ und Radius $r := \lambda\alpha_6$, wobei $\lambda := (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$. Gilt für den eigentlichen Punkt $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, dann entspricht $[\alpha]$ der Ebene, die durch die Hessesche Normalform $x \cdot N = c$ beschrieben wird, wobei $c := \alpha_6^{-1}\alpha_1$ und $N := \alpha_6^{-1}(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$. Die Bedingung $(\alpha, \alpha)_L = 0$ zwingt N , ein Einheitsvektor zu sein.

Ist ein Fernpunkt $[\alpha] \in \mathcal{Q}$ gegeben, d.h. $\alpha_6 = 0$, mit $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, dann entspricht $[\alpha]$ dem Punkt $\lambda(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ mit $\lambda := (\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$. Im Falle $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ entspricht der Fernpunkt $[\alpha]$ dem Südpol der Sphäre $\mathbb{S}^3$, denn die Bedingung $(\alpha, \alpha)_L = 0$ zwingt die Koordinaten $\alpha_3, \dots, \alpha_5$, gleich Null zu sein.

Auf diese Weise existiert eine bijektive Zuordnung zwischen Punkten,

Ebenen und Kugeln in $\mathbb{R}^3$ sowie dem uneigentlichen Punkt ∞ und projektiven Punkten auf der Quadrik $\mathcal{Q}$.

Die Menge aller Sphären, die Punkte in der Möbiusphäre $\mathbb{S}^3$ repräsentieren, und die Menge aller Ebenen können als Schnitt einer bestimmten Hyperebene mit der Lie Quadrik interpretiert werden. Solche Hyperebenen sind die Polare bezüglich der Lie Metrik zu einem bestimmten Pol. Die Polare zu einem Pol $[\rho]$ wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$(\alpha, \rho)_L = 0. \quad (6.33)$$

Schnitte von Polaren mit der Lie Quadrik werden später als lineare Komplexe von Sphären näher behandelt. Die Polare zu $[\rho]$ bezeichnen wir mit $\rho^\perp$. Die Menge aller Sphären, die Punkte in $\mathbb{S}^3$ repräsentieren, ist der Schnitt $e_6^\perp \cap \mathcal{Q}$, wobei $e_6 := [(0, 0, 0, 0, 0, 1)]$ der sechste Standardbasisvektor ist. Projektive Punkte mit $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ entsprechen Ebenen in $\mathbb{R}^3$ oder dem Südpol S in $\mathbb{S}^3$. Die Menge aller Ebenen in $\mathbb{R}^3$ zusammen mit dem Südpol $S \in \mathbb{S}^3$ korrespondiert somit dem Schnitt $(e_1 - e_2)^\perp \cap \mathcal{Q}$, wobei $(e_1 - e_2) = [(1, -1, 0, 0, 0, 0)]$.

6.2.2 Orientierte Berührung

Die Lie Sphären Geometrie beschäftigt sich mit der orientierten Berührung der Lie Sphären. Mithilfe der Lie Metrik kann man untersuchen, ob sich zwei Lie Sphären orientiert berühren oder nicht:

Satz 6.6. *Seien $[\alpha]_1, [\alpha]_2 \in \mathcal{Q}$ zwei orientierte Lie Sphären, dann berühren sie sich orientiert, wenn*

$$(\alpha_1, \alpha_2)_L = 0. \quad (6.34)$$

Bemerkung 6.9. Zwei Objekte liegen in orientierter Berührung, wenn sie im Berührungspunkt dieselbe Orientierung besitzen.

Beweis. Für einen alternativen Beweis siehe [6]. Für Sphären $[\alpha] := [(\xi, o_\alpha \sqrt{(\xi, \xi)_l})]$

und $[\beta] := \left[\left(\eta, o_\beta \sqrt{(\eta, \eta)_l} \right) \right]$ gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta)_L &= (\xi, \eta)_l - o_\alpha o_\beta \sqrt{(\xi, \xi)_l} \sqrt{(\eta, \eta)_l} = \\ &= \sqrt{(\xi, \xi)_l} \sqrt{(\eta, \eta)_l} (K - o_\alpha o_\beta), \end{aligned} \quad (6.35)$$

wobei K die Funktion aus dem Abschnitt 6.1.3 ist und $o_\alpha, o_\beta \in \{-1, 1\}$ die Richtung der Normalen der Sphären entgegengesetzt oder gleich lässt.

Ist eine der Sphären ein uneigentlicher Punkt, dann gilt

$$(\alpha, \beta)_L = (\xi, \eta)_l. \quad (6.36)$$

D.h. $(\alpha, \beta)_L = 0$ gilt genau dann, wenn $[\xi]$ in der Polaren von $[\eta]$ liegt und umgekehrt. Repräsentiert $[\beta]$ eine gerichtete Kugel oder eine gerichtete Ebene, dann repräsentiert α einen Punkt auf der Kugel bzw. auf der Ebene. Ist $[\beta]$ auch ein uneigentlicher Punkt, dann folgt aus der Pol-Polare Beziehung $[\alpha] = [\beta]$.

Sind beide Sphären eigentliche Punkte, dann repräsentieren die Kugeln oder Ebenen und (6.34) ist äquivalent zu:

$$K = o_\alpha o_\beta \in \{-1, 1\}. \quad (6.37)$$

Geht man von einer Anfangsorientierung (siehe Abbildung 16) aus, dann kann die Gleichung (6.37) wie folgt interpretiert werden: Ist $K = 1$, dann liegt bereits mit den Anfangsorientierungen bzw. bei Änderung beider Orientierungen eine orientierte Berührung vor (d.h. $o_\alpha = o_\beta$). Ist $K = -1$, dann ist nur die Änderung einer Orientierung notwendig (d.h. $o_\alpha = -o_\beta$). Nach dem Abschnitt 6.1.3 berühren sich zwei Kugeln, zwei Ebenen oder eine Kugel und eine Ebene, wenn $K \in \{-1, 1\}$.

Der Fall $K = 1$ tritt nur bei Kugeln, die sich im Inneren berühren, bei Ebenen mit demselben Einheitsvektor und bei einer Kugel, die eine Ebene

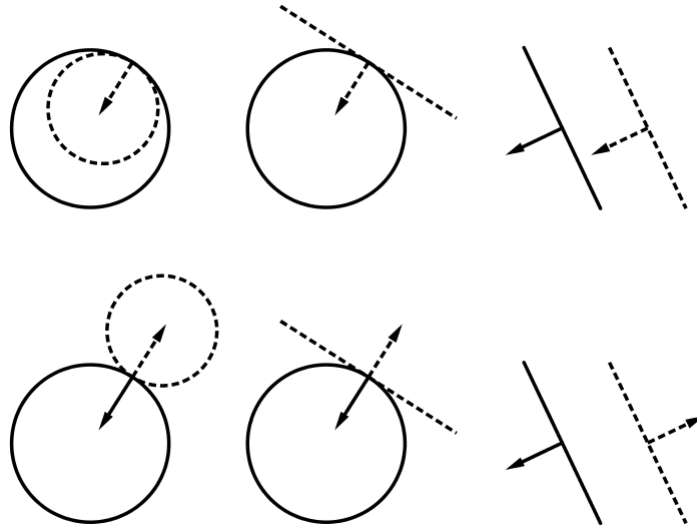


Abbildung 16: Bei Kugeln zeigt die Anfangsorientierung zum Mittelpunkt und bei Ebenen stimmt die Orientierung mit der Orientierung, die durch die Einheitsnormale N bestimmt wird, überein.

in ihrem positiven Halbraum berührt, ein. In diesen Fällen stimmen die Anfangsorientierungen überein und es liegt bereits eine orientierte Berührung vor.

Der Fall $K = -1$ tritt bei Kugeln ein, die sich im Äußeren berühren, bei Ebenen mit entgegengesetzten Normalen und bei Kugeln, die eine Ebene in ihrem negativen Halbraum berühren. In allen diesen Fällen zeigen die Anfangsorientierungen in entgegengesetzte Richtungen. Die Änderung einer der Orientierungen ist daher notwendig. $\square$

6.3 Lie Sphären Transformationen

Hauptmerkmal der Lie Sphären Geometrie ist die orientierte Berührung. Unter Lie Sphären Transformationen erwartet man also Transformationen, die Lie Sphären auf Lie Sphären abbilden und die orientierte Berührungen erhalten.

Definition 6.7. Eine *Lie Sphären Transformation* ist eine projektive Transformation in $\mathbb{P}^5$, die die Lie Quadrik $\mathcal{Q}$ erhält. Die Menge aller Lie Sphären Transformationen heißt *Lie Sphären Gruppe*.

Berühren sich zwei Lie Sphären $[\alpha]$ und $[\beta]$ orientiert in einem Punkt $[\rho]$, dann spannen sie eine projektive Gerade auf der Lie Quadrik auf, die aus allen Sphären besteht, die die zwei Sphären $[\alpha]$ und $[\beta]$ im Punkt $[\rho]$ orientiert berühren. Diese Gerade entspricht somit einem parabolischen Büschel orientierter Sphären. Da projektive Transformationen projektive Geraden auf projektive Geraden abbilden, erhalten sie die orientierte Berührung.

Ähnlich wie bei Möbiustransformationen werden Lie Sphären Transformationen durch orthogonale Transformationen induziert, die die Lie Metrik erhalten. Nach dem Theorem von Cartan und Diedonné wird die Lie Sphären Gruppe von den sogenannten Lie Inversionen generiert.

Die Lie Sphären Gruppe kann mithilfe der sogenannten linearer Komplexe von Sphären in einige charakteristische Untergruppen unterteilt werden. Zwei wichtige Untergruppen sind die Laguerre Gruppe und die Gruppe, die von der Möbiusgruppe $Möb(\mathbb{P}^4)$ generiert wird. Relevant für diese Arbeit sind lineare Komplexe, die aus gleichgerichteten Kugeln mit konstantem Radius bestehen.

6.3.1 Parabolische Büschel orientierter Sphären

Betrachtet man zwei Lie Sphären $[\alpha_{1,2}] \in \mathcal{Q}$, die sich orientiert berühren, dann spannen sie eine Gerade l auf

$$[\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2], \quad (6.38)$$

für die gilt:

$$([\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2], [\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2])_L = 2\lambda_1 \lambda_2 (\alpha_1, \alpha_2)_L = 0. \quad (6.39)$$

Das bedeutet, dass die gesamte Gerade in der Lie Quadrik enthalten ist. Zwei beliebige Punkte der Gerade berühren sich orientiert:

$$([\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2], [\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2])_L = 0. \quad (6.40)$$

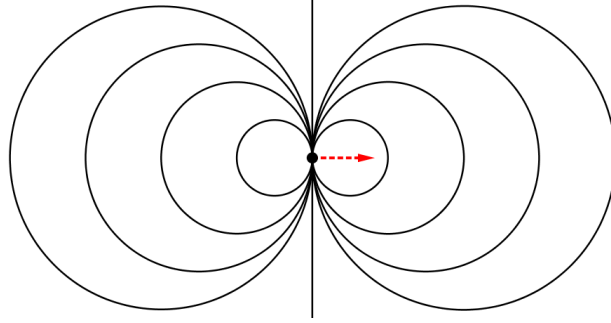


Abbildung 17: Parabolisches Büschel aus Lie Sphären.

Die Gerade korrespondiert also mit einem parabolischen Büschel (siehe Abbildung 17) aus Lie-Sphären. Wenn die Gerade nicht in einer Hyperebene enthalten ist, dann liefert der Schnitt (im projektiven Raum) der Geraden mit der Hyperebene einen eindeutigen Punkt. Der Schnitt der Geraden mit der Fernhyperebene $e_6^\perp$ liefert somit einen eindeutigen Punkt $[\sigma] = [(1, p, 0)]$, der dem Berührungspunkt des Büschels entspricht. Wir unterscheiden zunächst zwei Fälle: Entweder entspricht σ dem Südpol der Sphäre $\mathbb{S}^3$ oder einem Punkt in $\mathbb{R}^3$.

Sphären, die den Punkt $[\sigma] := [(e_1 - e_2)] = [(1, S, 0)]$ berühren, liegen in $(e_1 - e_2)^\perp$. In diesem Fall entspricht das Büschel dem System aus gleichgerichteten parallelen Ebenen mit vorgegebenem Normalvektor.

Ist der Schnitt der Gerade l mit der Polaren $e_6^\perp$ ein anderer Fernpunkt als $[(e_1 - e_2)]$, enthält die Gerade l nur eine Sphäre, die einem Punkt in $\mathbb{R}^3$ entspricht, nur eine Sphäre, die einer Ebene entspricht, und sonst Sphären, die Kugeln repräsentieren.

Bemerkung 6.10. Die Lie-Quadrik enthält keine weiteren Unterräume mit höheren Dimensionen als projektiven Geraden [6].

Zwei Sphären, die sich orientiert berühren, bestimmen also eindeutig einen parabolisches Büschel von Sphären. Da projektive Transformationen projektive Geraden auf projektive Geraden abbilden und die Lie Quadrik erhalten, bilden sie orientiert berührenden Sphären auf orientiert berührende

Sphären.

6.3.2 Lie Inversionen

Analog zur Möbiusgeometrie wird in diesem Abschnitt der Zusammenhang zwischen Lie Sphären Transformationen, invertierbaren Transformationen, die die Lie Metrik invariant lassen, und Inversionen dargestellt.

Definition 6.8. Die Menge aller invertierbaren linearen Transformationen, die die Lie Metrik erhalten, ist die *indefinite orthogonale Gruppe bezüglich der Lie Metrik* und wird mit

$$O(6, 2) := \{A \in GL(6) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^6 : (A\alpha, A\beta)_L = (\alpha, \beta)_L\} \quad (6.41)$$

bezeichnet, wobei $GL(6)$ die allgemeine lineare Gruppe in $\mathbb{R}^6$ ist.

Theorem 6.7. *Jede indefinite orthogonale Transformation induziert eine Lie Sphären Transformation in $\mathbb{P}^5$. Umgekehrt wird jede Lie Sphären Transformation von einer indefiniten orthogonalen Transformation induziert, die bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt ist.*

Beweis. Der erster Teil folgt aus der Definition. Für den zweiten Teil betrachten wir eine Lie Sphären Transformation mit Darstellungsmatrix $A \in GL(6)$. Ähnlich wie bei Lemma 6.2 (der Beweis verläuft im Raum $\mathbb{R}^6$ mit der Lie Metrik analog) gibt es eine positive Konstante λ , sodass für alle Punkte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^6$ gilt:

$$(A\alpha, A\beta)_L = \lambda (\alpha, \beta)_L. \quad (6.42)$$

Die Lie Sphären Transformation, die durch $P(A)[\alpha] := [A\alpha]$ definiert ist, kann nur von den indefiniten orthogonalen Transformationen $\pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}A$ induziert werden. Diese Transformationen existieren, da $\lambda > 0$, und sie sind indefinit orthogonal, denn sie erhalten die Lie Metrik:

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}A\alpha, \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}}A\beta \right)_L = \pm \frac{1}{\lambda} (A\alpha, A\beta)_L = (\alpha, \beta)_L. \quad (6.43)$$

□

Korollar 6.8. *Die Lie Sphären Gruppe ist zur Quotientenmenge $O(6, 2)/\{\pm I\}$ isomorph. Lie Sphären Transformationen bilden zeitartige Punkte auf zeitartige Punkte, lichtartige Punkte auf lichtartige Punkte und raumartige Punkte auf raumartige Punkte ab.*

Aus dem Theorem von Cartan und Dieudonné (siehe Theoreme 3.7 und 3.8 in [6]) folgt, dass jede indefinite orthogonale Transformation als Produkt von maximal sechs Inversionen

$$i_\rho(\alpha) = \alpha - 2 \frac{(\alpha, \rho)_L}{(\rho, \rho)_L} \rho \quad (6.44)$$

dargestellt werden kann.

Bemerkung 6.11. Eine Inversion der Form (6.44) wird nur für zeitartige und raumartige Pole ρ definiert.

Definition 6.9. Lie Transformationen, die durch Inversionen der Form (6.44) induziert werden, heißen Lie Inversionen.

Korollar 6.9. *Die Lie Sphären Gruppe wird von Lie Inversionen generiert.*

6.3.3 Möbiustransformationen in der Lie Sphären Geometrie

Betrachtet man eine Möbistransformation in $\mathbb{P}^4$ mit Darstellungsmatrix M , dann induziert sie zwei Lie Sphären Transformationen

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Die Transformationen A und B sind indefinite orthogonale Transformationen, d.h. sie erhalten die Lie Metrik.

Definition 6.10. Eine Transformation der Form (6.45) nennen wir *Möbiustransformation in der Lie Sphären Geometrie*.

In der Möbiusgeometrie beschreiben $\pm M$ projektiv gesehen dieselbe Transformation. In der Lie-Sphären Geometrie gilt

$$A = WB, \quad (6.46)$$

wobei W jene Transformation ist, die die Orientierung von Lie-Sphären wechselt. Sie wird durch

$$W = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

beschrieben und heißt *Richtungswechsel*.

Bemerkung 6.12. Die Menge aller Möbiustransformationen in der Lie Sphäre Geometrie ist isomorph zur Lorentz Gruppe $O(5, 1)$.

Satz 6.10. *Möbiustransformationen in der Lie Sphären Geometrie erhalten die Möbiussphäre $\mathbb{S}^3$. D.h. sie bilden Sphären, die Punkte in $\mathbb{S}^3$ repräsentieren, auf ebensolchen ab.*

Beweis. Sei A eine der Transformationen von (6.45) und $e_6 := [(0, 0, 0, 0, 0, 1)]$ der sechste Standardbasisvektor. Punkte in $\mathbb{S}^3$ werden durch Fernpunkte auf der Lie Quadrik repräsentiert. Für Fernpunkte $\alpha \in e_6^\perp$ gilt:

$$(A\alpha, Ae_6)_L = \lambda(\alpha, e_6)_L = 0. \quad (6.48)$$

Die Möbiustransformation A fixiert den Punkt e_6 und erhält somit die Fernebene, denn es gilt:

$$0 = (A\alpha, Ae_6)_L = (A\alpha, e_6)_L. \quad (6.49)$$

□

6.3.4 Lineare Komplexe von Lie Sphären

Dieser Abschnitt fasst die wichtigsten Ergebnisse über lineare Komplexe von Sphären zusammen, die in [6] und [9] bereits behandelt wurden. Ein linearer Komplex kann geometrisch als die Schnittmenge $\rho^\perp \cap \mathcal{Q}$ der polaren Hyperbene zum Pol ρ bezüglich der Lie Quadrik mit der Lie-Quadrik interpretiert werden. Damit lassen sich verschiedene Klassen von Lie Sphären unterscheiden.

Am Ende des Abschnitts 6.2.1 und im Beweis des Theorems 6.10 wird z.B. die Menge der Punkte in $\mathbb{S}^3$ mit dem Schnitt der Fernebene mit der Quadrik in Verbindung gebracht. Lie Sphären Transformationen, die solche Klassen invariant lassen, sind daher von Interesse.

Definition 6.11. Ein *linearer Komplex von Lie Sphären* wird durch einen Punkt $[\rho] \in \mathbb{P}^5$ bestimmt und beschreibt die Menge aller Punkte $[\alpha] \in \mathcal{Q}$ auf der Lie Quadrik mit

$$(\alpha, \rho)_L = 0. \quad (6.50)$$

Der Komplex heißt *elliptisch*, *hyperbolisch* bzw. *parabolisch*, falls ρ raumartig, zeitartig bzw. lichtartig ist.

Bemerkung 6.13. Da die Lie Sphären Gruppe transitiv auf jeder Art von Punkten operiert (dies folgt aus der Invarianz der Lie Metrik, siehe Korollar 6.8), werden gleichartige Komplexe durch eine Lie Sphären Transformation auf Komplexe derselben Art abgebildet. Ist ρ ein Fixpunkt einer Lie Sphären Transformation, dann wird der durch ρ definierte Komplex erhalten, denn es gilt:

$$0 = (\alpha, \rho)_L = (A\alpha, A\rho)_L = (A\alpha, \rho)_L. \quad (6.51)$$

Ein Beispiel für einen parabolischen Komplex, der am Ende des Abschnitts 6.2.1 erwähnt wurde, ist die Menge aller Sphären, die Ebenen in $\mathbb{R}^3$ repräsentieren. Dieser Komplex wird durch den Pol $[\rho] = [1 : -1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ bestimmt. Lie Sphären Transformationen, die den Südpol in $\mathbb{S}^3$ fest lassen, führen Ebenen in Ebenen über. Solche Transformationen heißen *Laguerre Transformationen*. Die Menge aller dieser Transformationen heißt *Laguerre Gruppe*. Die Laguerre Geometrie untersucht Eigenschaften dieser Transformationen. Allgemein gesehen besteht ein parabolischer Komplex aus allen Sphären, die eine feste Sphäre orientiert berühren. Da jeder parabolische Komplex durch eine Lie Sphären Transformation in dem Komplex, der aus allen gerichteten Ebenen besteht, überführt werden kann, geht die Gruppe, die einen allgemeinen parabolischen Komplex erhält, über eine Lie Sphären Transformation und die Laguerre Gruppe hervor.

Ein allgemeiner elliptischer Komplex besteht aus allen Sphären, die eine bestimmte Sphäre unter einem konstanten Winkel schneiden. Jeder elliptische Komplex kann durch eine Lie Sphären Transformation in den Komplex überführt werden, der aus allen Kugeln besteht, die eine Ebene senkrecht schneiden. Ein Beispiel dafür ist der durch den Standardbasisvektor e_5 definierte Komplex. Punkte aus diesem Komplex erfüllen die Gleichung $x_5 = 0$ und korrespondieren somit mit Kugeln mit Mittelpunkten in $\mathbb{R}^2$, Ebenen mit Normalvektoren in $\mathbb{S}^2$ oder Punkten in $\mathbb{R}^2$. Solche Kugeln und Ebenen schneiden den Unterraum $\mathbb{R}^2$ orthogonal.

Ein Beispiel für einen hyperbolischen Komplex wurde auch am Ende des Abschnitts 6.2.1 behandelt, nämlich der Komplex, der aus allen Punktsphären besteht. Dieser Komplex wird durch den sechsten Standardvektor e_6 definiert. Die Gruppe aller Lie Sphären Transformationen, die diesen Komplex erhält, stimmt mit der Gruppe der Möbiustransformationen in der Lie Geometrie überein und ist daher zur Orthogonalen Gruppe $O(5, 1)$ isomorph. Die Gruppe, die einen allgemeinen hyperbolischen Komplex erhält, geht über eine Lie Sphären Transformation und die Möbiusgruppe in der Lie Sphären Geometrie über. Für einen allgemeinen hyperbolischen Komplex tritt einer der folgenden zwei Fälle (siehe Abbildung 18) ein: Im ersten Fall besteht der Komplex aus allen gerichteten Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Rotationsachse eines Torus liegen und die den Torus entlang der Breitenkreise orientiert berühren. Im zweiten Fall verändert sich der Radius der Kugeln linear zum Abstand der Kugel von einer festen Ebene.

Von besonderem Interesse (für diese Arbeit) sind Komplexe von Sphären mit konstantem gerichtetem Radius. Der Komplex aus gleich großen Kugeln mit konstantem positiven Radius $r > 0$ wird durch den Pol $[\rho_+] = [-r : r : 0 : 0 : 0 : 1]$ bestimmt, denn für alle Kugeln mit entsprechenden hexasphärischen Koordinaten $[\alpha]$ gilt (unabhängig vom Mittelpunkt der Kugel):

$$(\alpha, \rho)_L = 0. \quad (6.52)$$

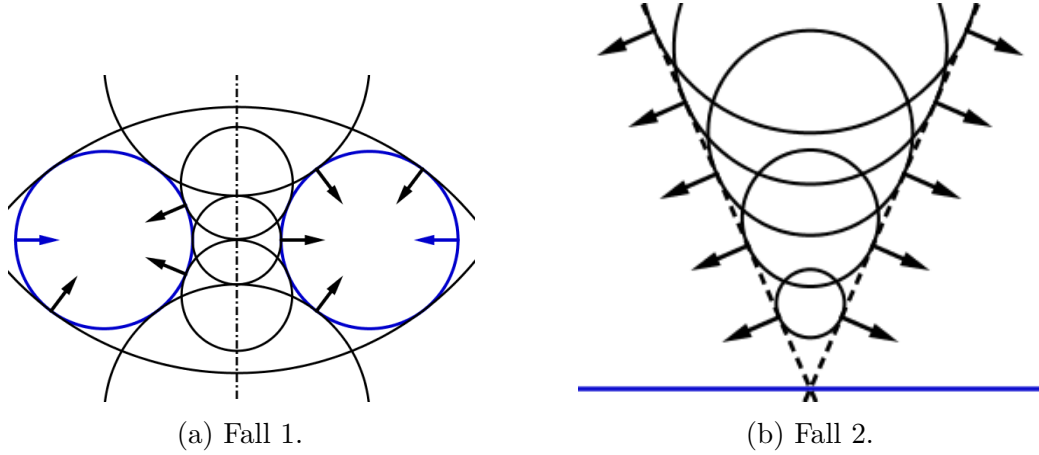


Abbildung 18: Hyperbolische Komplexe von Lie Sphären.

Durch den Richtungswechsel aus (6.47) erhält man den Pol $[\rho_-][W\rho_+] := [r : -r : 0 : 0 : 0 : 1]$ und somit den Komplex aus allen gleich großen Kugeln mit konstantem negativen Radius $-r < 0$. Beide Komplexe sind hyperbolisch, da beide Pole zeitartig sind.

6.4 Kugelstrukturen aus der Perspektive der Lie Sphären Geometrie

In dieser Arbeit betrachten wir Strukturen aus berührenden Kugeln, die sich von außen berühren. Bekommen alle Kugeln eine Orientierung, dann müssen sie abwechselnd das Vorzeichen wechseln, damit eine orientierte Berührung stattfindet. Dies wird durch den Richtungswechsel aus (6.47) erreicht.

Eine allgemeine Struktur aus berührenden Kugeln ist durch eine Radiusfunktion $r : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ und ein Netz $m : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, das den Ort aller Mittelpunkte beschreibt, gegeben. Um die Kugelstruktur mithilfe der Lie Sphären Geometrie zu beschreiben, betrachten wir die Funktion $\rho : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$ mit

$$\rho(i, j) := [(-r(i, j), r(i, j), 0, 0, 0, 1)] \quad (6.53)$$

und die Funktion $\alpha : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{Q}$ mit

$$\alpha(i, j) := \left[\left(\frac{1 + d(i, j)}{2}, \frac{1 - d(i, j)}{2}, m(i, j), r(i, j) \right) \right], \quad (6.54)$$

wobei $d(i, j) := \langle m(i, j), m(i, j) \rangle - r(i, j)^2$. Unter der Voraussetzung, dass die Kugelstruktur nur Facetten geraden Grades besitzt, kann man die Kugelstruktur mit einem der folgenden Netze identifizieren:

$$f^+(i, j) := \begin{cases} \alpha(i, j) & \text{falls } i + j \text{ gerade,} \\ W\alpha(i, j) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.55)$$

oder

$$f^-(i, j) := \begin{cases} \alpha(i, j) & \text{falls } i + j \text{ ungerade,} \\ W\alpha(i, j) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.56)$$

Sei O.B.d.A $f = f^+$, dann gilt:

$$f(i, j) \in \begin{cases} \rho(i, j)^\perp & \text{falls } i + j \text{ gerade,} \\ (W\rho(i, j))^\perp & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.57)$$

Die Berührung der Nachbarsphären einer Sphäre $f(i, j)$ kann mit der Lie Metrik beschrieben werden:

$$0 = (f(i, j), f(i \pm 1, j))_L = (f(i, j), f(i, j \pm 1))_L. \quad (6.58)$$

Ab dieser Stelle kann man versuchen, die Wirkung von Lie Sphären Transformationen auf Netze der Formen (6.55) und (6.56) zu untersuchen und entsprechend die Lie Sphären Gruppe in Unterkategorien zu klassifizieren.

Wir betrachten zunächst eine Möbiustransformation M in der Lie Sphären Geometrie. Diese Transformation lässt, nach dem Beweis des Satzes 6.10, sowohl den Fernpunkt $(e_1 - e_2)$ als auch den Standardbasisvektor e_6 fest. D.h. die Punkte $(e_1 - e_2)$ und e_6 sind Eigenvektoren von M zu bestimmten Eigenwerten $\omega_1, \omega_2 \neq 0$. Ein Punkt $[\lambda(e_1 - e_2) + \mu e_6]$ auf der Geraden durch

$(e_1 - e_2)$ und e_6 wird auf einen Punkt derselben Geraden abgebildet, denn es gilt:

$$M(\lambda(e_1 - e_2) + \mu e_6) = \lambda\omega_1(e_1 - e_2) + \mu\omega_2 e_6. \quad (6.59)$$

Das bedeutet, dass die Gerade durch $(e_1 - e_2)$ und e_6 eine Fixgerade jeder Möbiustransformation ist. Sie ist insbesondere eine Fixpunktgerade, wenn die zwei Eigenwerte gleich sind ($\omega_1 = \omega_2$). Dass die obige Gerade eine Fixgerade ist, kann man geometrisch wie folgt interpretieren:

Satz 6.11. *Das Bild der Funktion ρ ist in der projektiven Geraden enthalten, die durch $(e_1 - e_2)$ und e_6 aufgespannt wird. Umgekehrt bestimmt diese Gerade, mit Ausnahme von $(e_1 - e_2)$ und e_6 , Komplexe aus Kugeln mit konstantem Radius.*

Beweis. Wählt man $\lambda = -r$ und $\mu = 1$, dann folgt $[\rho] = [\lambda(e_1 - e_2) + \mu e_6]$. Die Komplexe, die durch $(e_1 - e_2)$ und e_6 beschrieben werden, beschreiben die Menge aller Ebenen im Raum bzw. aller Punkte in der Möbiussphäre. Für einen Punkt auf der Geraden durch $(e_1 - e_2)$ und e_6 mit $\lambda, \mu \neq 0$ folgt:

$$[\lambda, -\lambda, 0, 0, 0, \mu] = \left[\frac{\lambda}{\mu}, -\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 1\right] =: [\rho]. \quad (6.60)$$

Der Komplex $\rho^\perp$ beschreibt somit die Menge aller Kugeln mit gerichtetem Radius $-\frac{\lambda}{\mu}$.

□

Sphären mit demselben Radius, d.h. aus demselben Komplex $\rho^\perp$, werden auf den Komplex $(M\rho)^\perp$ abgebildet. Die Bildsphären haben nach dem Satz 6.11 denselben Radius.

Definition 6.12. Eine Lie Sphären Transformation heißt *radientreu*, falls sie alle gerichtete Radien erhält.

Satz 6.12. *Ist die Gerade durch $(e_1 - e_2)$ und e_6 eine Fixpunktgerade einer Lie Sphären Transformation, dann ist die Transformation radientreu.*

Beweis. Sei A eine Lie Sphären Transformation, die die Gerade durch $(e_1 - e_2)$ und e_6 punktweise fest lässt. Nach dem Satz 6.11 werden alle Pole $\rho(i, j)$ fixiert. Folglich werden alle Komplexe $\rho(i, j)^\perp$ erhalten und somit auch die orientierten Radian. $\square$

Wir stellen zuletzt eine Bedingung für radientreue Lie Sphären Transformationen dar:

Korollar 6.13. *Sind zwei Punkten aus der Geraden durch $(e_1 - e_2)$ und e_6 Eigenvektoren einer Lie Sphären Transformation A zum selben Eigenwert ω , dann ist A radientreu.*

7 Zusammenfassung

Strukturen aus berührenden Kugeln können mithilfe von Polygonnetzen identifiziert werden, indem man die Mittelpunkte benachbarter Kugeln mittels Strecken verbindet. Einfache Strukturen aus gleichgroßen Kugeln werden durch die platonischen, die archimedischen und die Johnson Körper dargestellt. Sie bilden die Klasse aller konvexen Polyeder mit regelmäßigen Facetten und sind endlich.

Weitere Strukturen aus gleichgroßen Kugeln können durch Lobel Netze (gleichseitige Dreiecksnetze) oder Rhombennetzen dargestellt werden. Rhombennetze werden in der diskreten Differentialgeometrie als diskrete Tschebyscheff Netze bezeichnet. Besitzt ein Rhombennetz nur ebene Knoten, dann handelt es sich um eine diskrete pseudosphärische Fläche. Rhombennetze mit nur konischen Knoten werden als diskrete Flächen konstanter Normalkrümmung bezeichnet. Die Diagonalnetze von Rhombennetzen mit ebenen bzw. konischen Knoten sind zirkulär. Zirkuläre Netze werden als diskrete Krümmungslinienparametrisierte Flächen bezeichnet.

Man kann Strukturen aus berührenden Kugeln mithilfe numerischer Optimierung approximieren. Die numerische Optimierung sucht iterativ ein lokales Minimum einer bestimmten Zielfunktion, die auch als Energiefunktion bezeichnet wird. Bekannte Methoden sind das Newton-Verfahren, die Methode der konjugierten Gradienten sowie das Gauß-Newton-Verfahren. Alle diese Verfahren sind Gradientenverfahren, d.h. das Minimum wird schrittweise in Richtung des Gradienten bei einer gewissen Schrittlänge gesucht. Bei Kreispackungsnetzen optimiert man nach der Kreispackungseigenschaft und nach der *Nähe* zu einem gegebenen Netz. Bei den Connectivity Shapes optimiert man nach der Eigenschaft, dass alle Kanten dieselbe Länge haben, wobei beim Optimierungsprozess das Netz geglättet wird, sodass das Volumen maximiert wird. Bei regulären Netzen optimiert man nach der Eigenschaft, dass alle Facetten regelmäßig sind. Alle diese Eigenschaften können in Energiefunktionen übersetzt werden, die durch etwas komplexere Optimierungsverfahren

minimiert werden. In dieser Arbeit wurde eine Implementierung in Python zur Optimierung von Netzen beschrieben, die zu einem Netz ein weiteres Netz berechnet, dessen Kanten möglichst gleich lang sind. Einflussfaktoren, die zu Überschneidungen, Längenunterschieden zwischen Kanten oder langen Laufzeiten führen, sind die Anzahl der Ecken, die Kombinatorik des Netzes sowie ob das Anfangsnetz weit von einem Minimum weg liegt. Die Bibliothek *SciPy* bietet mehrere Funktionen zur Minimierung von Funktionen. Die Funktionen *scipy.optimize.least_squares* und *scipy.optimize.minimize* führen zu sehr ähnlichen Ergebnissen, wobei die erste schneller ist, während die zweite etwas bessere Qualitätswerte erreicht. Zur Visualisierung der Ergebnisse und der Kugelpackungen wurde die Software MeshLab verwendet. Mit der Funktion *Create Solid Wireframe* kann man in jeder Ecke eines Netzes gleichgroße Kugeln platzieren. Der Code wurde im Anhang A abgedruckt.

Die Lie Sphären Geometrie bietet eine Möglichkeit, Strukturen aus berührenden Kugeln aus dem Blickwinkel der höheren Geometrie zu untersuchen. Objekte der Lie Sphären Geometrie sind orientierte Ebenen, orientierte Kugeln, Punkte und das uneigentliche Element ∞ . Es gibt eine eins zu eins Korrespondenz zwischen solchen Elementen und der sogenannten Lie Quadrik, einer projektiven Quadrik im fünfdimensionalen projektiven Raum. Punkte auf der Lie Quadrik heißen Lie Sphären. Parabolische Büschel aus orientiert berührenden Lie Sphären sind projektive Geraden auf der Lie Quadrik. Projektive Transformationen, die die Lie Quadrik invariant lassen, heißen Lie Sphären Transformationen und bilden Lie Sphären auf Lie Sphären ab. Mithilfe der Lie Metrik, das ist die durch die Lie Quadrik definierte indefinite Bilinearform, kann man bestimmen, ob zwei Lie Sphären einander orientiert berühren. Dies ist dann der Fall, wenn sie verschwindet. Da Lie Sphären Transformationen die Lie Metrik invariant lassen, erhalten sie die orientierte Berührung. Die Lie Sphären Gruppe wird durch die sogenannten Lie Sphären Inversionen induziert. Mithilfe der sogenannten linearen Komplexe, das sind Schnitte von Hyperebenen mit der Lie Quadrik, können bestimmte Mengen aus Lie Sphären dargestellt werden. Man findet zum Beispiel Komplexe aus lauter gleich orientierten und gleich großen Sphären. Die Pole solcher Kom-

plexe in Bezug auf die Lie Quadrik liegen auf einer bestimmten projektiven Gerade. Lie Sphären Transformationen, die diese Gerade punktweise fixieren, erhalten Radius und Orientierung.

Literatur

- [1] Alexander Schiftner, Mathias Höbinger, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Packing circles and spheres on surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 28(5):1–8, dec 2009. doi: 10.1145/1618452.1618485.
- [2] Martin Isenburg, Stefan Gumhold, and Craig Gotsman. Connectivity shapes. In *Proceedings Visualization, 2001. VIS '01*. IEEE. doi: 10.1109/visual.2001.964504. URL <https://www.cs.unc.edu/~isenburg/cs/>.
- [3] Amir Vaxman, Christian Müller, and Ofir Weber. Regular meshes from polygonal patterns. *ACM Transactions on Graphics*, 36(4):1–15, jul 2017. doi: 10.1145/3072959.3073593.
- [4] Alexander I. Bobenko and Yury B. Suris. On organizing principles of discrete differential geometry. geometry of spheres. 62:1–43, 2007. ISSN 0036-0279. doi: 10.1070/rm2007v062n01abeh004380.
- [5] Alexander I. Bobenko and Yuri B. Suris. Discrete differential geometry: Integrable structure. 2008.
- [6] Thomas E. Cecil. *Lie sphere geometry. With applications to submanifolds*. Universitext. New York, NY: Springer, 2nd ed. edition, 2008. ISBN 978-0-387-74655-5.
- [7] Thomas E. Cecil. Lie sphere geometry and dupin hypersurfaces, 2018. URL https://crossworks.holycross.edu/math_fac_scholarship/7.
- [8] Thomas E. Cecil. Classifications of dupin hypersurfaces in lie sphere geometry, 2022.
- [9] Wilhelm Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und Geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 1929. doi: 10.1007/978-3-642-50823-3.
- [10] Udo Hertrich-Jeromin. *Introduction to Möbius Differential Geometry*. Cambridge University Press, aug 2003. doi: 10.1017/cbo9780511546693.

- [11] Helmut Pottman and Johannes Wallner. Freiformarchitektur und mathematik. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 18(2): 88–95, jun 2010. doi: 10.1515/dmvm-2010-0036.
- [12] Mathieu Huard, Michael Eigensatz, and Philippe Bompas. Planar panelization with extreme repetition. In *Advances in Architectural Geometry 2014*, pages 259–279. Springer International Publishing, dec 2014. doi: 10.1007/978-3-319-11418-7_17.
- [13] Henriette Lipschütz, Martin Skrodzki, Ulrich Reitebuch, and Konrad Polthier. Single-sized spheres on surfaces (s4). *Computer Aided Geometric Design*, 85:101971, feb 2021. doi: 10.1016/j.cagd.2021.101971.
- [14] Helmut Pottmann Johannes Wallner. Geometrische struktur und freiformarchitektur. URL <http://www.geometrie.tugraz.at/wallner/ibdg.pdf>.
- [15] Boyd Edwards. Exhibit 4, expert report: Educational value of veodymium magnet spheres in the matter of zen magnets, llc, cpsc docket no. 12-2. Technical report, Utah State University Uintah Basin, 2014. URL https://www.cpsc.gov/s3fs-public/pdfs/lawsuit_EdwardsExhibit4.pdf.
- [16] David A Richter. Exhibit 3, teaching geometry with magnet sphere kits, in the matter of zen magnets, llc, cpsc docket 12-2. Technical report, Department of Mathematics, Western Michigan University, 2014. Online verfügbar unter https://www.cpsc.gov/s3fs-public/pdfs/recall/lawsuits/abc/lawsuit_EdwardsExhibit3-19376.pdf.
- [17] Johannes Schönke, Wolfgang Schöpf, and Ingo Rehberg. Magnetkugeln - ein 10-euro-labor. *Physik Journal*, 15:31, April 2016. Online verfügbar unter <https://hannes.home.oist.jp/publications.html>.
- [18] Henry Segerman and Rosa Zwier. Magnetic sphere constructions. In David Swart, Carlo H. Séquin, and Kristóf Fenyvesi, editors, *Proceedings of Bridges 2017: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture*, pages 79–86, Phoenix, Arizona, 2017. Tessellations

- Publishing. ISBN 978-1-938664-22-9. Online verfügbar unter <http://archive.bridgesmathart.org/2017/bridges2017-79.pdf>.
- [19] Tilo Arens, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelkorn, Klaus Lichtenegger, and Hellmuth Stachel. *Ergänzungen und Vertiefungen zu Arens et al., Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg, 2017. doi: 10.1007/978-3-662-53585-1.
 - [20] Wolfgang Kühnel. *Differentialgeometrie*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013. doi: 10.1007/978-3-658-00615-0.
 - [21] Chern Albert. Discrete differential geometry, November 2020. URL <https://cseweb.ucsd.edu/~alchern/teaching/DDG.pdf>.
 - [22] Gudrun Szewieczek. Notizen zur vorlesung "klassische differentialgeometrie", June 2020. URL https://www.geometrie.tuwien.ac.at/szewieczek/dg2020/notes_22_6.pdf.
 - [23] Alexander I. Bobenko. Projective geometry, December 2019. URL https://page.math.tu-berlin.de/~bobenko/Lehre/Skripte/projective_part.pdf. Vorlesungsnoten.
 - [24] Martin Peternell. Geometric properties of bisector surfaces. *Graphical models*, 62(3):202–236, 2000. ISSN 1524-0703.
 - [25] Hyeong In Choi, Sung Woo Choi, and Hwan Pyo Moon. Mathematical theory of medial axis transform. *Pacific Journal of Mathematics*, 181(1): 57–88, nov 1997. doi: 10.2140/pjm.1997.181.57.
 - [26] Xiangmin Jiao, Daniel R. Einstein, and Vladimir Dyedov. Local orthogonal cutting method for computing medial curves and its biomedical applications. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(2):947–969, jan 2010. doi: 10.1137/090767170.
 - [27] Evan C Sherbrooke, Nicholas M Patrikalakis, and Franz-Erich Wolter. Differential and topological properties of medial axis transforms. *Graphical Models and Image Processing*, 58(6):574–592, nov 1996. doi: 10.1006/gmip.1996.0047.

- [28] Bohumír Bastl, Bert Jüttler, Miroslav Lávička, and Tino Schulz. Blends of canal surfaces from polyhedral medial transform representations. *Computer-Aided Design*, 43(11):1477–1484, nov 2011. doi: 10.1016/j.cad.2011.08.014.
- [29] Michael Schrott and Boris Odehnal. Ortho-circles of dupin cyclides. 2006.
- [30] Andrea Tagliasacchi, Ibraheem Alhashim, Matt Olson, and Hao Zhang. Mean curvature skeletons. *Computer Graphics Forum*, 31(5):1735–1744, aug 2012. doi: 10.1111/j.1467-8659.2012.03178.x.
- [31] Jean-Daniel Boissonnat, André Lieutier, and Mathijs Wintraecken. The reach, metric distortion, geodesic convexity and the variation of tangent spaces. *Journal of Applied and Computational Topology*, 3(1-2):29–58, jun 2019. doi: 10.1007/s41468-019-00029-8.
- [32] Tilo Arens, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelkorn, Klaus Lichtenegger, and Hellmuth Stachel. *Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg, 2018. doi: 10.1007/978-3-662-56741-8.
- [33] Georg Glaeser, editor. *77-mal Mathematik für zwischendurch*. Springer Berlin Heidelberg, 2020. doi: 10.1007/978-3-662-61766-3.
- [34] Georg Glaeser. *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. Springer Berlin Heidelberg, 2014. doi: 10.1007/978-3-642-41852-5.
- [35] Magnus J. Wenninger. *Polyhedron Models*. Cambridge University Press, feb 1971. doi: 10.1017/cbo9780511569746.
- [36] Peter R Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.], 1. paperback ed.. edition, 1999. ISBN 0521554322.
- [37] Hauke. Klein. Mathematische probleme für den schulunterricht, June 2015. URL <https://www.math.uni-kiel.de/geometrie/klein/mpss15/mo1506.pdf>. Skript SS 2015.

- [38] Udo Hebisch. Die archimedischen körper. URL <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/archimedische.html>.
- [39] Ilka Agricola and Thomas Friedrich. *Elementargeometrie*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. doi: 10.1007/978-3-658-06731-1.
- [40] Franziska Finsterer. Konvexe polyeder im mathematikunterricht. Diplomarbeit, Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen. Karl-Franzens-Universität Graz, 2018. URL <https://unipub.uni-graz.at/obvugrhs/content/titleinfo/2845623/full.pdf>.
- [41] Peter Berger. Aspekte der körpergeometrie, 2016. URL <http://www.prof-dr-berger.de/pdf/BergerKoerpergeometrie.pdf>.
- [42] Norman W. Johnson. Convex polyhedra with regular faces. *Canadian Journal of Mathematics*, 18:169–200, 1966. doi: 10.4153/cjm-1966-021-8.
- [43] Branko Grünbaum and Norman Woodason Johnson. The faces of a regular-faced polyhedron. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-40(1):577–586, 1965. doi: 10.1112/jlms/s1-40.1.577.
- [44] Eric W. Weisstein. Johnson solid, . URL <https://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html>. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
- [45] Bartel Leendert van der Waerden Hans Freudenthal. On an asserion of euclid. *Simon Stevin 25*, pages 115–121, 1947.
- [46] A. R. Rajwade. The eight deltahedra. In *Texts and Readings in Mathematics*, pages 54–57. Hindustan Book Agency, 2001. doi: 10.1007/978-93-86279-06-4_8.
- [47] Henry Martyn Cundy. “deltahedra”. *The Mathematical Gazette*, 36(318): 263–266, dec 1952. doi: 10.2307/3608204.
- [48] Caigui Jiang, Chengcheng Tang, Jun Wang, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Freeform honeycomb structures and lobel frames. In *ACM SIGGRAPH 2015 Posters*. ACM, jul 2015. doi: 10.1145/2787626.2787661.

- [49] Caigui Jiang, Jun Wang, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Freeform honeycomb structures. *Computer Graphics Forum*, 33(5):185–194, aug 2014. doi: 10.1111/cgf.12444.
- [50] Caigui Jiang, Chengcheng Tang, Marko Tomiči, Johannes Wallner, and Helmut Pottmann. Interactive modeling of architectural freeform structures: Combining geometry with fabrication and statics. In *Advances in Architectural Geometry 2014*, pages 95–108. Springer International Publishing, dec 2014. doi: 10.1007/978-3-319-11418-7_7.
- [51] Alain Lobel. Lobel frames. URL <https://www.equilatere.net/>.
- [52] Alexander I. Bobenko, John M. Sullivan, Peter Schröder, and Günter M. Ziegler, editors. *Discrete Differential Geometry*. Birkhäuser Basel, 2008. doi: 10.1007/978-3-7643-8621-4.
- [53] Zheng-Xu He and Oded Schramm. Fixed points, koebe uniformization and circle packings. *The Annals of Mathematics*, 137(2):369, mar 1993. doi: 10.2307/2946541.
- [54] Franz Gruber. Über spezielle kugelparkettierungen, zonoeder und andere rhombengitter. 2010.
- [55] Branko Grünbaum. The bilinski dodecahedron and assorted parallelohedra, zonohedra, monohedra, isozonohedra, and otherhedra. *The Mathematical Intelligencer*, 32(4):5–15, apr 2010. doi: 10.1007/s00283-010-9138-7.
- [56] H.S.M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012. ISBN 9780486141589. URL <https://books.google.at/books?id=2ee7AQAAQBAJ>.
- [57] David Eppstein. The geometry junkyard: Zonohedra and zonotopes, . URL <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/zono.html>.
- [58] David Eppstein. Zonohedra and zonotopes, . URL <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/ukraine/ukraine.html>.

- [59] George W. Hart. Zonohedrification. URL <https://www.georgehart.com/zonohedra/zonohedrification.html>. Online Version aus dem Artikel in "The Mathematical Journal, vol. 7 no. 3, 1999".
- [60] Walter William Rouse Ball and Harold Scott MacDonald Coxeter. *Mathematical Recreations and Essays: Twelfth Edition*. Heritage. University of Toronto Press, Toronto, 1974. ISBN 0802061389.
- [61] Wolfgang Kühn. Online zonotope builder and 3d-viewer. URL <https://decatour.de/zonotopebuilder/>.
- [62] Eric W. Weisstein. Equilateral zonohedron, . URL <https://mathworld.wolfram.com/EquilateralZonohedron.html>. From MathWorld—A Wolfram Web.
- [63] Walter Wunderlich. *Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung*. Springer, Wien, 1951.
- [64] Florian Käferböck. *Constrained rhombic nets-discrete differential geometry and applications*. PhD thesis, Vienna University of Technology, 2011. URL <http://hdl.handle.net/20.500.12708/9283>.
- [65] Alexander Bobenko and Ulrich Pinkall. Discrete surfaces with constant negative gaussian curvature and the hirota equation. *Journal of Differential Geometry*, 43(3), jan 1996. doi: 10.4310/jdg/1214458324.
- [66] Tim Hoffmann, Andrew O. Sageman-Furnas, and Max Wardetzky. A Discrete Parametrized Surface Theory in $\mathbb{R}^3$. *International Mathematics Research Notices*, 2017(14):4217–4258, 07 2016. ISSN 1073-7928. doi: 10.1093/imrn/rnw015. URL <https://doi.org/10.1093/imrn/rnw015>.
- [67] Udo Hertrich-Jeromin. Discrete differential geometry: Integrable discretization, May 2020. URL <https://www.geometrie.tuwien.ac.at/hertrich-jeromin/pub/ddg.pdf>.
- [68] Helmut Pottmann and Johannes Wallner. The focal geometry of circular and conical meshes. *Advances in Computational Mathematics*, 29(3): 249–268, aug 2007. doi: 10.1007/s10444-007-9045-4.

- [69] Yang Liu, Helmut Pottmann, Johannes Wallner, Yong-Liang Yang, and Wenping Wang. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 25(3):681–689, jul 2006. doi: 10.1145/1141911.1141941.
- [70] Alexander Bobenko, Tim Hoffmann, and Boris Springborn. Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics. *Annals of Mathematics*, 164(1):231–264, jul 2006. doi: 10.4007/annals.2006.164.231.
- [71] Greg Turk. Generating textures on arbitrary surfaces using reaction-diffusion. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 25(4):289–298, jul 1991. doi: 10.1145/127719.122749.
- [72] Greg Turk. Re-tiling polygonal surfaces. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 26(2):55–64, jul 1992. doi: 10.1145/142920.134008.
- [73] Kenji Shimada and David C. Gossard. Bubble mesh. In *Proceedings of the third ACM symposium on Solid modeling and applications - SMA '95*. ACM Press, 1995. doi: 10.1145/218013.218095.
- [74] Kenji Shimada and David C Gossard. Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis. *Computer Aided Geometric Design*, 15(3):199–222, mar 1998. doi: 10.1016/s0167-8396(97)00037-x.
- [75] Edward S. Popko and Christopher J. Kitrick. *Divided Spheres*. A K Peters/CRC Press, jun 2021. doi: 10.1201/9781003134114.
- [76] Andrew P. Witkin and Paul S. Heckbert. Using particles to sample and control implicit surfaces. In *Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '94*. ACM Press, 1994. doi: 10.1145/192161.192227.
- [77] John Bowers, Rui Wang, Li-Yi Wei, and David Maletz. Parallel poisson disk sampling with spectrum analysis on surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 29(6):1–10, dec 2010. doi: 10.1145/1882261.1866188.

- [78] M. Corsini, P. Cignoni, and R. Scopigno. Efficient and flexible sampling with blue noise properties of triangular meshes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 18(6):914–924, jun 2012. doi: 10.1109/tvcg.2012.34.
- [79] Thomas Schlömer and Oliver Deussen. Towards a standardized spectral analysis of point sets with applications in graphics, 2010. URL <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:352-opus-126088>.
- [80] Hongwei Li, Kui-Yip Lo, Man-Kang Leung, and Chi-Wing Fu. Dual poisson-disk tiling: An efficient method for distributing features on arbitrary surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 14(5):982–998, sep 2008. doi: 10.1109/tvcg.2008.53.
- [81] D. Cline, S. Jeschke, K. White, A. Razdan, and P. Wonka. Dart throwing on surfaces. *Computer Graphics Forum*, 28(4):1217–1226, jun 2009. doi: 10.1111/j.1467-8659.2009.01499.x.
- [82] Yan Fu and Bingfeng Zhou. Direct sampling on surfaces for high quality remeshing. *Computer Aided Geometric Design*, 26(6):711–723, aug 2009. doi: 10.1016/j.cagd.2009.03.007.
- [83] S. Lloyd. Least squares quantization in PCM. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2):129–137, mar 1982. doi: 10.1109/tit.1982.1056489.
- [84] Vitaly Surazhsky, Pierre Alliez, and Craig Gotsman. Isotropic Remeshing of Surfaces: a Local Parameterization Approach. Research Report RR-4967, INRIA, October 2003. URL <https://hal.inria.fr/inria-00071612>.
- [85] Dong-Ming Yan, Jianwei Guo, Xiaohong Jia, Xiaopeng Zhang, and Peter Wonka. Blue-noise remeshing with farthest point optimization. *Computer Graphics Forum*, 33(5):167–176, aug 2014. doi: 10.1111/cgf.12442.
- [86] Dong-Ming Yan, Jian-Wei Guo, Bin Wang, Xiao-Peng Zhang, and Peter Wonka. A survey of blue-noise sampling and its applications. *Journal*

- of *Computer Science and Technology*, 30(3):439–452, may 2015. doi: 10.1007/s11390-015-1535-0.
- [87] Sebastien Valette and Jean-Marc Chassery. Approximated centroidal voronoi diagrams for uniform polygonal mesh coarsening. *Computer Graphics Forum*, 23(3):381–389, sep 2004. doi: 10.1111/j.1467-8659.2004.00769.x.
 - [88] Pierre Alliez, Éric Colin de Verdière, Olivier Devillers, and Martin Isenburg. Centroidal voronoi diagrams for isotropic surface remeshing. *Graphical Models*, 67(3):204–231, may 2005. doi: 10.1016/j.gmod.2004.06.007.
 - [89] Guodong Rong, Miao Jin, Liang Shuai, and Xiaohu Guo. Centroidal voronoi tessellation in universal covering space of manifold surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 28(8):475–496, nov 2011. doi: 10.1016/j.cagd.2011.06.005.
 - [90] Xiaoning Wang, Xiang Ying, Yong-Jin Liu, Shi-Qing Xin, Wenping Wang, Xianfeng Gu, Wolfgang Mueller-Wittig, and Ying He. Intrinsic computation of centroidal voronoi tessellation (CVT) on meshes. *Computer-Aided Design*, 58:51–61, jan 2015. doi: 10.1016/j.cad.2014.08.023.
 - [91] Qi sheng Wang, Jun Ye, Hui Wu, Bo qing Gao, and Paul Shepherd. A triangular grid generation and optimization framework for the design of free-form gridshells. *Computer-Aided Design*, 113:96–113, aug 2019. doi: 10.1016/j.cad.2019.04.005.
 - [92] Thomas Schlömer, Daniel Heck, and Oliver Deussen. Farthest-point optimized point sets with maximized minimum distance. In *Proceedings of the ACM SIGGRAPH Symposium on High Performance Graphics - HPG '11*. ACM Press, 2011. doi: 10.1145/2018323.2018345.
 - [93] The SciPy community. `scipy.optimize.minimize` #, 2008-2023. URL <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html>.

- [94] The SciPy community. `scipy.optimize.least_squares` #, 2008-2023. URL https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html#scipy.optimize.least_squares.
- [95] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical optimization*. Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng. New York, NY: Springer, 2nd ed. edition, 2006. ISBN 0-387-30303-0.
- [96] Boris Springborn. Geometry i lecture notes, May 2007/08. URL https://www3.math.tu-berlin.de/geometrie/Lehre/WS07/GeometrieI/geometry1_ws07.pdf.
- [97] Günter M. Ziegler. Geometrie, April 2013. URL <https://wikis.fu-berlin.de/display/discgeom/GeometrieSS2013>. Vorlesungsskript.

A Python Code zu Kapitel 5

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  @author: Samuel
4  """
5  import numpy as np
6  from geopy import obj
7  from scipy.optimize import least_squares, minimize
8  import time
9  import xlswriter as xls
10
11  #####
12  #Some functions
13  #####
14
15  # Convert a (n x 3) matrix into a list of 3n numbers
16  def list_from_matrix(V):
17      List = []
18      for p in V:
19          if len(p)==3:
20              List.append(p[0])
21              List.append(p[1])
22              List.append(p[2])
23          if len(p)==2:
24              List.append(p[0])
25              List.append(p[1])
26              List.append(np.sqrt(1.00000001- (p[0])**2 -(p[1])**2))
27      return List
28  #Convert a list of 3n numbers into a (n x 3) matrix
29  def matrix_from_list(List):
30      n = len(List)
31      i = 0
32      obj = []
33      point = []
```

```

34     while True:
35         if i>n-1:
36             break
37         point.append(List[i])
38         point.append(List[i+1])
39         point.append(List[i+2])
40         obj.append(point)
41         point=[]
42         i = i+3
43     return obj
44 #Energy function
45 def Es(X):
46     summe = 0
47     for e in Edges:
48         i = e[0]
49         j = e[1]
50         summe += ((X[3*i]-X[3*j])**2 + (X[3*i+1]-X[3*j+1])**2 + (X
                    [3*i+2]-X[3*j+2])**2 - R**2)**2
51     return summe
52 #Gradient
53 def jacobian_Es(X):
54     n = len(X)
55     jac = np.zeros(n)
56     for e in Edges:
57         i = e[0]
58         j = e[1]
59         term = (X[3*i]-X[3*j])**2 + (X[3*i+1]-X[3*j+1])**2 + (X[3*i
                    +2]-X[3*j+2])**2 - R**2
60         jac[3*i] += 4.0 * term*(X[3*i] -X[3*j] )
61         jac[3*i+1] += 4.0 * term*(X[3*i+1]-X[3*j+1])
62         jac[3*i+2] += 4.0 * term*(X[3*i+2]-X[3*j+2])
63         jac[3*j] += -4.0 * term*(X[3*i] -X[3*j] )
64         jac[3*j+1] += -4.0 * term*(X[3*i+1]-X[3*j+1])
65         jac[3*j+2] += -4.0 * term*(X[3*i+2]-X[3*j+2])
66     if fixed:

```

```

67         for k in fixed_ind:
68             jac[3*k] = 0.0
69             jac[3*k+1] = 0.0
70             jac[3*k+2] = 0.0
71     return jac
72 #Hesse-matrix
73 def hess_Es(X):
74     n = len(X)
75     hess = np.zeros((n,n))
76     for e in Edges:
77         i = e[0]
78         j = e[1]
79         term = (X[3*i]-X[3*j])**2 + (X[3*i+1]-X[3*j+1])**2 + (X[3*i
            +2]-X[3*j+2])**2 - R**2
80         hess[3*i , 3*j]=-2*(X[3*i]-X[3*j])**2-4*term
81         hess[3*i+1, 3*j]=-2*(X[3*i+1]-X[3*j])*(X[3*i+1]-X[3*j+1])
82         hess[3*i+2, 3*j]=-2*(X[3*i+2]-X[3*j])*(X[3*i+2]-X[3*j+2])
83         hess[3*i ,3*j+1]=-2*(X[3*i]-X[3*j+1])*(X[3*i]-X[3*j])
84         hess[3*i+1,3*j+1]=-2*(X[3*i+1]-X[3*j+1])**2-4*term
85         hess[3*i+2,3*j+1]=-2*(X[3*i+2]-X[3*j+1])*(X[3*i+2]-X[3*j+2])
86         hess[3*i ,3*j+2]=-2*(X[3*i]-X[3*j+2])*(X[3*i]-X[3*j])
87         hess[3*i+1,3*j+2]=-2*(X[3*i+1]-X[3*j+2])*(X[3*i+1]-X[3*j+1])
88         hess[3*i+2,3*j+2]=-2*(X[3*i+2]-X[3*j+2])**2-4*term
89     if fixed:
90         for k in fixed_ind:
91             hess[:,k]=0
92             hess[k,:]=0
93             hess[:,k+1]=0
94             hess[k+1,:]=0
95             hess[:,k+2]=0
96             hess[k+2,:]=0
97     return hess
98 #For analysis
99 def quality_values(V):
100     values = []

```

```

101     lenghts = []
102     dev = []
103     for e in Edges:
104         l=np.linalg.norm(np.array(V[e[0]])-np.array(V[e[1]]))
105         dev.append((1-R)**2)
106         lenghts.append(l/2)
107         values.append(np.sqrt((1-l/R)**2))
108     var=np.sqrt(sum(dev)/len(dev))
109     return min(lenghts),max(lenghts),max(values),var
110 #####
111 #####
112 #Excel
113 workbook = xls.Workbook('Methodenvergleich.xlsx')
114 worksheet = workbook.add_worksheet()
115 #files = ["spinnennetz", "tricube", "ball", "spherecap", "sheet"]
116 #files = ["mask"]
117 files = ["spinnennetz"]
118 row = 1
119 for file in files:
120     V,F = obj.read(file + ".obj")[0:2]
121     n = len(V)
122     Edges = []
123     L = 0
124     for f in F:
125         i = -1
126         m = len(f)-1
127
128         while True:
129             if i == m:
130                 break
131             if f[i]<f[i+1]:
132                 edge = [f[i],f[i+1]]
133             else:
134                 edge = [f[i+1],f[i]]
135             if not edge in Edges:

```



```

136         Edges.append(edge)
137         v1 = np.array(V[edge[0]])
138         v2 = np.array(V[edge[1]])
139         L += np.linalg.norm(v1-v2)
140         i +=1
141     #Number of edges
142     e = len(Edges)
143     #Lenght average
144     R = L/e
145     #####
146     fixed = True
147     if fixed:
148         fixed_ind = [0,1,2,3,4]
149         b1 = np.array(V[fixed_ind[0]])
150         b2 = np.array(V[fixed_ind[1]])
151         R = np.linalg.norm(v1-v2)
152         #R = L/len(Edges)
153     else:
154         R = L/len(Edges)
155     #####
156     X0 = list_from_matrix(V)
157     #####
158     #Methode 1: Least Squares
159     #####
160     start1 = time.time()
161     res1 = least_squares(Es, X0, jac = jacobian_Es, method='trf',
162         tr_solver='lsqr', verbose = 1)
163     end1 = time.time()
164     time1 = end1 - start1
165     newV1 = matrix_from_list(res1.x.tolist())
166     obj.write(file + "minimized_lq.obj", newV1, F)
167     radiusmin1,radiusmax1,value1,var1=quality_values(newV1)
168     #####
169     #Methode 2: Minimize
170     #####

```

```

170     start2 = time.time()
171     res2 = minimize(Es, X0, method='trust-ncg', jac = jacobian_Es,
        hess = hess_Es)
172     end2 = time.time()
173     time2 = end2 - start2
174     newV2 = matrix_from_list(res2.x.tolist())
175     obj.write(file + "minimized_m.obj", newV2, F)
176     radiusmin2,radiusmax2,value2,var2=quality_values(newV2)
177     #####
178     #Write on table: n, time_lq, time_m, Energy_lq,
179     #Energy_m, Quality_lq, Quality_m, Radius_min_lq, Radius_min_m
180     #####
181     worksheet.write(row, 1, file)
182     worksheet.write(row, 2, n)
183     worksheet.write(row, 3, e)
184     worksheet.write(row, 4, time1)
185     worksheet.write(row, 5, time2)
186     worksheet.write(row, 6, Es(res1.x.tolist()))
187     worksheet.write(row, 7, Es(res2.x.tolist()))
188     worksheet.write(row, 8, value1)
189     worksheet.write(row, 9, value2)
190     worksheet.write(row, 10, var1)
191     worksheet.write(row, 11, var2)
192     worksheet.write(row, 12, R/2)
193     worksheet.write(row, 13, radiusmin1)
194     worksheet.write(row, 14, radiusmin2)
195     worksheet.write(row, 15, radiusmax1)
196     worksheet.write(row, 16, radiusmax2)
197     row += 1
198     #####
199 Rows = ["Netz", "Anzahl_der_Ecken", "Anzahl_der_Kanten",
200         "Zeit_lq", "Zeit_m", "Energie_lq", "Energie_m",
201         "Qualitaet_lq", "Qualitaet_m", "Varianz_lq", "Varianz_m",
202         "l/2", "Min_Radius_lq", "Min_Radius_m", "Max_Radius_lq",
203         "Max_Radius_m" ]

```

```
204 column=1
205 for item in Rows:
206     worksheet.write(0, column, item)
207     column +=1
208 workbook.close()
209 """
210 Error if the xls file is open
211 """
```