



MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Rund um den Kreis und das Dreieck – der Satz von Dao und weitere Sätze aus der Elementargeometrie“

verfasst von / submitted by
Katharina Steffel, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2023 / Vienna, 2023

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 502 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Lehrverbund
UF Biologie und Umweltkunde Lehrverbund
UF Mathematik Lehrverbund

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Abstract

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Thematik der Elementargeometrie. Sie basiert ausschließlich auf Literaturstudien. Ziel ist es, mithilfe ausgewählter Sätze aus diesem mathematischen Gebiet die simplen und dennoch faszinierenden Beziehungen zwischen geometrischen Objekten aufzuzeigen. Aufgrund der Fülle an elementargeometrischen Sätzen kann im Rahmen dieser Masterarbeit lediglich ein Bruchteil vorgestellt werden. Den Ausgangspunkt stellen die Geschichte der Geometrie sowie verschiedene axiomatische Zugänge dar. Einer Vorbereitung in Form von grundlegenden Sätzen der Dreiecksgeometrie folgen Sätze rund um den Schulstoff und darüber hinaus. Der Satz von Dao stellt als aktuellster Satz den Abschluss dieser Masterarbeit dar.

The paper deals with the topic of elementary geometry. It is based solely on literature studies. The aim is to demonstrate the simple yet fascinating relationships between geometric objects using selected theorems of this mathematical field. Due to the abundance of elementary geometric theorems, only a fraction can be presented within the scope of this master's thesis. The starting point includes the history of geometry as well as various axiomatic approaches. A preparation in the form of fundamental theorems of triangle geometry is followed by theorems related to school curriculum topics and beyond. The Dao's theorem serves as the most recent theorem and marks the conclusion of this master's thesis.

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei meinem Betreuer Peter Raith bedanken, der mir beim Verfassen meiner Masterarbeit viele Freiheiten gelassen hat und bei Fragen immer erreichbar war. Vielen Dank für die tolle Betreuung!

Außerdem bedanke ich mich bei meiner Familie, meiner Mama Maria, meinem Papa Christian, meiner Schwester Vicy, meinen beiden Omas und meinem Opa, die mich in meinem Studium aber auch im gesamten Leben immer unterstützt und ermutigt haben.

Ein großes Dankeschön an Dani, mit der das Verfassen des letzten Abschnitts meiner Arbeit mindestens doppelt so viel Spaß gemacht hat.

Ich bedanke mich bei Halima für die schöne Zeit, die wir vor allem im Masterstudium gemeinsam verbracht haben und allen anderen Studienkolleg:innen, die ich im Laufe meines Studiums kennenlernen und mit denen ich Freundschaften schließen durfte.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Geschichte der Geometrie - axiomatische Systeme	8
2.1	Überblick über die Anfänge bis zur Antike	8
2.2	Die „Elemente“ - Euklids axiomatisches System	9
2.3	Überarbeitung der „Elemente“	11
2.3.1	Kritik an Euklids Axiomensystem	11
2.3.2	Eine wegweisende Arbeit von Moritz Pasch	12
2.3.3	Hilberts „Grundlagen der Geometrie“	14
2.4	Von der euklidischen zur nichteuklidischen Geometrie	18
3	Grundlagen der Dreiecksgeometrie	20
3.1	Teilverhältnisse	20
3.2	Strahlensätze	21
3.2.1	1. und 2. Strahlensatz und ihre Umkehrungen	21
3.2.2	Orientierter Strahlensatz	26
3.3	Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken	28
3.3.1	Kongruenzsätze für Dreiecke	28
3.3.2	Ähnlichkeitssätze für Dreiecke	29
3.4	Sätze über Winkel im Dreieck und an Geraden	29
3.5	Satzgruppe des Pythagoras	34
3.5.1	Satz des Pythagoras	35
3.5.2	Kathetensatz des Euklid	36
3.5.3	Höhensatz des Euklid	38
4	Rund um den Schulstoff	40
4.1	Merkwürdige Punkte im Dreieck	40

INHALTSVERZEICHNIS

4.1.1	Umkreismittelpunkt	40
4.1.2	Inkreismittelpunkt	41
4.1.3	Schwerpunkt	42
4.1.4	Höhenschnittpunkt	44
4.2	Sätze über Winkel am Kreis	45
4.3	Eulersche Gerade	55
4.4	Transversalen im Dreieck und der Satz vom Mittendreieck	58
5	Interessantes über den Schulstoff hinaus	66
5.1	Zwei Sätze über die Besonderheit gleichseitiger Dreiecke	66
5.2	Die Ankreise eines Dreiecks	71
5.3	Alternative Flächeninhaltsformeln	75
5.4	Feuerbachkreis	78
5.5	Satz von Dao	89
	Literatur	97
	Abbildungsverzeichnis	99

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit hat ausgewählte Sätze aus dem Bereich der Elementargeometrie zum Thema. Dieses mathematische Gebiet setzt sich mit den grundlegenden geometrischen Objekten auseinander, zu denen die meisten Menschen Assoziationen besitzen – darunter Punkte, Geraden, Dreiecke und Kreise. Anders als andere Themen in der Mathematik verfügt die Elementargeometrie über einen hohen Grad der Anschaulichkeit, eine Eigenschaft, die im Hinblick auf meine zukünftige Lehrtätigkeit in der Schule für mich von besonderer Bedeutung ist. Zahlreiche mit Geogebra selbst erstellte Grafiken helfen beim Verstehen der Beweise.

Die Masterarbeit gliedert sich in vier Kapitel und beruht ausschließlich auf Literaturstudien. Im folgenden Abschnitt wird die Geometrie unter einem geschichtlichen Blickwinkel betrachtet. Die Ausführungen reichen von den frühen Auseinandersetzungen mit Geometrie bis hin zum Aufbau der Geometrie auf einige wenige Grundannahmen, den Axiomen. Das dritte Kapitel widmet sich wichtigen Grundlagen der Dreiecksgeometrie, die die Vorbereitung für die anschließenden Studien darstellen. Darunter befinden sich die Strahlensätze, Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze von Dreiecken und die Satzgruppe des Pythagoras, die den wohl bekanntesten mathematischen Satz enthält. Dabei wird lediglich einer der hundert Beweise des Satz des Pythagoras exemplarisch vorgestellt. Im vierten Kapitel beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit elementargeometrischen Sätzen rund um den Schulstoff. Neben den besonderen Punkten im Dreieck wird unter anderem der Peripheriewinkelsatz als Verallgemeinerung des Satz des Thales bewiesen. Aufbauend auf die vorhergehenden Kapitel stehen im abschließenden Abschnitt Sätze, die über den Schulstoff hinaus gehen im Zentrum. Der Feuerbachkreis und der Satz von Dao finalisieren die Arbeit. Dass stets neue Erkenntnisse in der Geometrie gewonnen werden, zeigt dieser letzte Satz, der als zugleich jüngstes Resultat in der Masterarbeit den Bogen zur Gegenwart spannt. Dao Thanh Oai beschreibt in diesem 2013 veröffentlichten Satz einen verblüffenden Zusammenhang zwischen Punkten auf einem Kreis, Umkreismittelpunkten von zugehörigen Dreiecken und ihren sie verbindenden Strecken [25]. Der zunächst fehlende Beweis wurde darauf folgend mit verschiedenen Mitteln erbracht. In der vorliegenden Arbeit wird ein eleganter Beweis aus dem Jahr 2017 ausschließlich unter Verwendung elementarer Geometrie geführt.

Diese Masterarbeit stellt nur einen kleinen Ausschnitt aller existierenden Sätze der Elementargeometrie dar und hat daher nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Vielmehr soll die Auswahl der hier vorgestellten Sätze einen Einblick in die Argumentationslinien beim Beweisen elementargeometrischer Sachverhalte geben.

2 Geschichte der Geometrie - axiomatische Systeme

2.1 Überblick über die Anfänge bis zur Antike

Die Relevanz geometrischer Sachverhalte reicht weit in die Geschichte der Menschheit zurück. Dabei gaben zunächst die Natur und später Situationen im alltäglichen Leben Anlass zur Auseinandersetzung mit Geometrie. Früh erkannte man in der Natur auftretende Muster, wie Kreise als Querschnitte von Grashalmen oder gerade Linien als Sprossachsen von Pflanzen. Bereits Jahrtausende v. Chr. wurden geometrische Verzierungen, oftmals für die jeweilige Kultur charakteristisch, verwendet. Von vielen vorerst intuitiv angewandten geometrischen Sachverhalten wurde schließlich systematischer Gebrauch gemacht.

Die ältesten gesicherten Belege für geometrisches Wissen stammen aus dem alten Ägypten etwa 2000 v. Chr. Schriftliche Aufzeichnungen geben Auskunft über meist näherungsweise Flächen- und Volumenberechnungen und Bauwerke wie Pyramiden zeugen von den damals bestehenden geometrischen Kenntnissen. Eine größere Fülle an Dokumentationen geometrischer Tätigkeiten stammt aus Mesopotamien, auch babylonisches Reich genannt, denn hier wurden im Gegensatz zum alten Ägypten Tontafeln anstelle von Papyrus eingesetzt. Im Zuge der Erforschung der babylonischen Kultur entdeckte man, dass der Lehrsatz des Pythagoras bereits bekannt war – und das Jahrhunderte vor Pythagoras. Obwohl die Auseinandersetzung mit geometrischen Themen noch hauptsächlich durch Alltagssituationen motiviert war, sind auch erste theoretische Überlegungen erkennbar [1, S. 6ff.].

In der Zeit der Griechen erlebte die Mathematik einen Aufschwung. Es erfolgte eine stärkere Fokussierung auf die systematische Auseinandersetzung mit Mathematik, die Erschaffung eines entsprechenden „Theoriegebäudes“ und das Finden von Begründungen für Sachverhalte. Die mathematisch wirkenden Personen dieser Periode werden deshalb auch als „Urheber der wissenschaftlichen Mathematik“ bezeichnet [1, S. 27]. Die Mathematik der griechischen Antike kann in vier Zeitspannen unterteilt werden. Die ionische Periode (600-450 v. Chr.), die athenische (450-300 v. Chr.) und hellenistische Periode (300 v. Chr. - 150 n. Chr.) und schließlich die Spätantike (150-500 n. Chr.). Die ionische Periode brachte die ersten Naturphilosophen hervor, darunter auch Thales von Milet (ca. 624-548 v. Chr.) [2, S. 53ff.]. Während die gerade Linie, der Punkt und der Kreis als geometrische Elemente bereits bekannt waren, führte Thales als erster den Winkelbegriff ein. Im berühmten Satz von Thales: „Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein Rechter“, kommt dieses neue Element zum Tragen [1, S. 32f.].

2.2 Die „Elemente“ - Euklids axiomatisches System

Euklid von Alexandria stellt zeitlich, aber auch inhaltlich, den Übergang zwischen der athenischen und hellenistischen Periode dar. Sein Werk „Elemente“ gilt als eines der bedeutendsten mathematischen Werke aller Zeiten, das, obwohl es aus der Antike stammt, in weiten Teilen auch heute noch von Relevanz ist [1, S. 49]. Bemerkenswert ist die logisch aufeinander aufbauende Struktur, die das zur Zeit der Verfassung bestehende geometrische und zahlentheoretische Wissen kohärent zusammenfasst [3, S. 27]. Die „Elemente“ sind in 13 Teile, die „Bücher“ gegliedert, die sich den folgenden Themen widmen:

- I Grundlagen
- II Geometrische Algebra
- III Kreislehre
- IV Reguläre Polygone
- V Proportionenlehre des Eudoxos
- VI Anwendung der Proportionenlehre auf die ebene Geometrie
- VII-IX Arithmetik
- X Irrationalitäten
- XI Elementares zur räumlichen Geometrie
- XII Sätze über Volumina
- XIII Die fünf gleichmäßigen Polyeder

Euklids „Elemente“ weisen im Gegensatz zu vorangegangenen mathematischen Aufzeichnungen strenge Beweise auf. Das wird durch die am Beginn aufgestellten Definitionen, Axiome und Postulate ermöglicht [2, S. 71]. Den Anfang des ersten Buches bilden 35 „Erklärungen“ (Definitionen). Einige lauten etwa:

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.
10. Steht eine gerade Linie auf einer anderen so, dass sie die Nebenwinkel gleich macht; so heißt sie perpendicular auf der anderen, und jeder der beiden gleichen Winkel heißt ein rechter Winkel.

35. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen, und, soweit sie auch an den beiden Enden verlängert werden, doch an keiner Seite zusammentreffen [4, S. 1ff.].

Daran anschließend werden „Forderungen“ (Postulate) und „Grundsätze“ (Axiome) angeführt, Annahmen auf denen alles Nachfolgende aufgebaut wird. Welche Aussagen den Postulaten oder Axiomen zugeordnet werden, ist je nach Literatur verschieden [1, S. 51]. Auf die Definitionen folgen in [4] drei Postulate:

1. Es sei gefordert, von jedem Punkte zu jedem anderen eine gerade Linie zu ziehen.
2. Desgleichen, eine begrenzte gerade Linie stetig gerade fort zu verlängern.
3. Desgleichen, aus jedem Mittelpunkt und Abstand einen Kreis zu beschreiben.

Bei Lorenz [4] stellen die Postulate Konstruktionsvorschriften dar, die für die in den „Büchern“ vorkommenden Konstruktionsaufgaben erforderlich sind [1, S. 51]. Axiome sind dagegen als wahr angesehene Grundsätze. Einige Beispiele der zwölf von Euklid in diesem Zusammenhang angeführten Aussagen sind:

1. Was einem und demselben gleich ist, das ist auch einander gleich.
2. Zu Gleichem Gleiches hinzugetan, bringt Gleiches.
8. Was einander deckt, ist einander gleich.
11. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
12. Zwei gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, dass die beiden inneren an einer Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte sind, treffen genug verlängert an eben dieser Seite zusammen [4, S. 4].

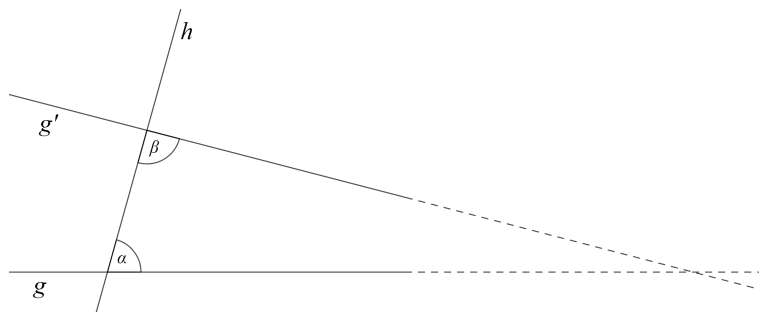


Abbildung 1: Parallelenaxiom (in Anlehnung an [1, S. 55])

Während die ersten zehn Axiome sehr allgemein formuliert sind, beziehen sich die Axiome 11 und 12 auf geometrische Sachverhalte. Daher werden diese beiden Axiome in der Literatur

teilweise den Postulaten zugeordnet. Aus gegenwärtiger Sicht eignen sich diese fünf Aussagen am ehesten um als Axiome angesehen zu werden. Das 12. Axiom oder auch 5. Postulat hebt sich in jedem Fall von den anderen Aussagen ab und ist als Parallelenaxiom oder analog als Parallelenpostulat bekannt [3, S. 29]. Heute ist dieses Axiom folgendermaßen äquivalent formuliert: „In einer Ebene gibt es zu jeder Gerade genau eine parallele Gerade, die durch einen bestimmten Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, führt“ [1, S. 56]. Die Sonderstellung dieses Axioms wurde bereits in der Antike erkannt, was auch auf dessen ausführliche Formulierung zurückzuführen ist. Der Versuch, das Parallelenaxiom aus den anderen Grundannahmen herzuleiten, scheiterte wiederholt. Somit hat sich gezeigt, dass das Parallelenaxiom für den Aufbau der euklidischen Geometrie unerlässlich ist und die Axiome unabhängig voneinander sind [3, S. 29].

2.3 Überarbeitung der „Elemente“

2.3.1 Kritik an Euklids Axiomensystem

Euklids „Elemente“ waren der Beginn des strikten Beweisens, axiomatischen Aufbaus und der deduktiven Methode. Trotzdem weist seine Arbeit Lücken und Fehler im axiomatischen System auf. Ein Axiomensystem zeichnet sich durch Unabhängigkeit, Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit aus. Euklids Axiome sind voneinander unabhängig und widerspruchsfrei. Sie genügen allerdings nicht der Vollständigkeit, wie ein Beispiel zeigt.

Der 1. Satz, eine Aufgabe, in Buch I lautet:

„Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie, AB , einen gleichseitigen Triangel zu errichten. Aus dem gegebenen Punkte A beschreibe mit AB den Kreis BCD , und aus dem Punkte B mit BA den Kreis ACE . Vom Punkte C , in welchem beide Kreise einander schneiden, ziehe nach A , B , die geraden Linien CA , CB : so ist ACB der verlangte Triangel“ [4, S. 5].

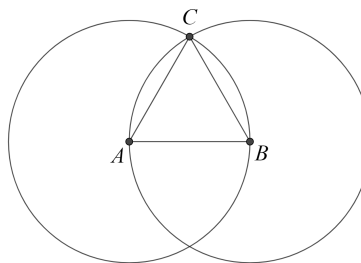


Abbildung 2: 1. Satz Euklid, Buch I (in Anlehnung an [4, S. 5])

Zwar ist anschaulich klar, dass sich die beiden Kreise schneiden. Es fehlt jedoch ein Axiom, das die Existenz des Schnittpunktes C garantiert.

Dieser Satz zeigt exemplarisch Euklids geometrische Anschauung. Die Auseinandersetzung mit Geometrie war in ihren Anfängen, wie am Beginn des Kapitels beschrieben, stark von der realen Welt motiviert. Euklid vollführte den Schritt der Abstraktion, indem er geometrische Objekte idealisierte. Trotzdem waren seine Vorstellungen stark an seine Wahrnehmung geknüpft. In seinen Begründungen greift Euklid deshalb teilweise auch auf die menschliche Intuition zurück [3, S. 9f.]. Das wird auch bei Euklids Definitionen deutlich. Nicht alle sind von gleicher Qualität im heutigen mathematischen Sinn. Einige sind präzise, wie Definition 10, die erklärt, was man unter einem rechten Winkel versteht. Andere sind stark an Alltagserfahrungen geknüpft, so zum Beispiel Definition 1, die beschreibt, worum es sich bei einem Punkt handeln soll. Der Begriff „Punkt“ ist aber ein geometrischer Grundbegriff und kann deshalb nicht definiert werden. Mit Definitionen dieser Art kann demnach kein Satz bewiesen werden [1, S. 51]. Tatsächlich wird in den „Elementen“ in keinsten Weise auf Euklids Definition des Punktes zurückgegriffen [5, S. 6].

2.3.2 Eine wegweisende Arbeit von Moritz Pasch

Die Defizite in Euklids Werk wurden Ende des 19. Jahrhunderts aufgearbeitet. Als erster nahm sich Moritz Pasch (1843-1930) der Aufgabe an, das axiomatische System der Geometrie im Rahmen seines Werkes „Vorlesungen über neuere Geometrie“ zu vervollständigen [1, S. 499]. Entsprechend der Kritik an Euklids Definitionen bilden bei Pasch die undefinierbaren Grundbegriffe „Punkt“, „begrenzte Linie“ und „Fläche“ den Ausgangspunkt. Unter „Grundbegriffen“ versteht Pasch Begriffe, für deren Verständnis man sich allein auf „Naturobjecte“ berufen kann [6, S. 3ff.]. Erst im Laufe der Ausarbeitung erweitert Pasch seine Grundbegriffe zu „Gerade“ und „Ebene“, die im Gegensatz zur begrenzten Linie und Fläche nicht mehr direkt anschaulich wahrnehmbar sind [7, S. 14]. Andererseits gelang die Komplettierung der Axiomatik durch die Einführung neuer Axiome, die Pasch als „Grundsätze“ bezeichnete. Über deren Bedeutung schrieb er:

„Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so dass man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugehen braucht“ [6, S. 17].

Mithilfe der Axiome soll demnach der Übergang von der Wahrnehmung zur Abstraktion ermöglicht werden. Demzufolge orientieren sich Paschs Axiome an den Objekten, die sie betreffen. So findet man acht Axiome „zur geraden Linie“, vier „zu den Ebenen“ und außerdem zehn Axiome zur Kongruenz. Was bei Euklid noch implizit vorausgesetzt wurde, legt Pasch nun mit den Axiomen zur geraden Linie explizit fest, indem er eine Anordnungsrelation von Punkten

auf einer Strecke etabliert [8, S. 14ff.]. Damit führt Pasch neben den bereits vorkommenden Konzepten der Kongruenz und Inzidenz die Zwischenrelation ein [2, S. 530]. Ein wesentlicher Unterschied zu Euklids Ausarbeitung ist der Umgang mit dem Parallelenaxiom. Pasch verzichtet auf dessen Einsatz und versucht, die projektive Geometrie axiomatisch aufzubauen [6, S. IV]. Die projektive Geometrie kommt in der Kunst oder Fotografie zum Tragen und zeichnet sich dadurch aus, dass alle Geraden einen Schnittpunkt besitzen. Es gibt somit keine Parallelen. Abbildung 3 zeigt die perspektivische Darstellung eines Quaders. Es ist bekannt, dass die gegenüberliegenden Seiten und damit auch die entsprechenden Kanten dieses Körpers parallel sind. Verlängert man diese Kanten in der projektiven Geometrie, so schneiden sich beispielsweise die entstehenden Geraden g und h . Den Mathematikern Arthur Cayley und Felix Klein gelang es, die euklidische und nichteuklidischen Geometrien als Sonderfälle der projektiven Geometrie aufzufassen und sie somit in eben diese einzubetten [9, S. 1].

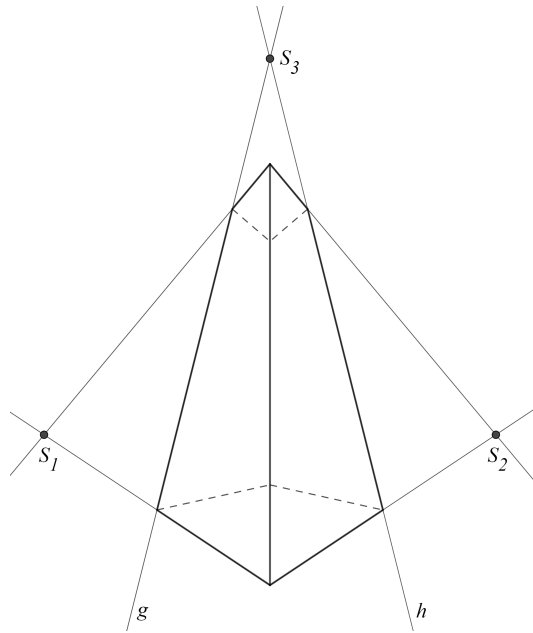


Abbildung 3: Perspektivische Darstellung eines Quaders

Ein wesentlicher Beitrag Paschs zur strikten Axiomatisierung der Geometrie ist das Axiom von Pasch (Grundsatz IV zu den Ebenen). Es lautet in seiner Originalform:

„Sind in einer ebenen Fläche drei Punkte A, B, C durch die geraden Strecken AB, AC, BC paarweise verbunden, und ist in derselben ebenen Fläche die gerade Strecke DE durch einen innerhalb der Strecke AB gelegenen Punkt gezogen so geht die Strecke DE oder eine Verlängerung derselben entweder durch einen Punkt der

Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC “ [6, S. 21].

Heute wird im Axiom von Pasch die Strecke DE durch eine Gerade ersetzt.

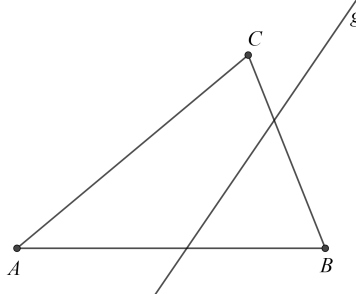


Abbildung 4: Axiom von Pasch

Paschs „Vorlesungen über neuere Geometrie“ waren in ihrer ursprünglichen Fassung nicht vollständig. Deshalb überarbeitete er seine Ausführungen in einer zweiten Auflage.

2.3.3 Hilberts „Grundlagen der Geometrie“

David Hilbert (1864-1943) veröffentlichte 1899 sein Werk „Grundlagen der Geometrie“, das den Gipfel der geometrischen Axiomatik aufbauend auf ihm vorangegangenen Arbeiten darstellt [2, S. 530]. Er war der erste, dem es gelang, ein vollständiges Axiomensystem der euklidischen Geometrie aufzustellen [7, S. 186]. Hilbert überarbeitete seine Schrift mehrmals und auch nach seinem Tod wurden weitere Auflagen publiziert. Die folgenden Ausführungen stützen sich auf die 11. Auflage aus dem Jahr 1972. Das Werk [10] gliedert sich in sieben Kapitel:

1. Die fünf Axiomgruppen
2. Die Widerspruchsfreiheit und gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome
3. Die Lehre von den Proportionen
4. Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene
5. Der Desarguessche Satz
6. Der Pascalsche Satz
7. Die geometrischen Konstruktionen auf Grund der Axiome I-IV

Den Anfang bilden bei Hilbert die „Elemente der Geometrie“: „Punkte“, „Geraden“ und „Ebenen“. Im Gegensatz zu Pasch stehen dabei nicht die Objekte an sich im Zentrum, sondern ihre Beziehungen zueinander, die „durch Worte wie ‚liegen‘, ‚zueinander‘, ‚kongruent‘“ ausgedrückt

werden. Diese Relationen werden durch die Axiome näher charakterisiert und damit implizit definiert. Hilberts Fokussierung weg von der realen Anschauung und hin zur abstrakten Auffassung der Geometrie zeigt sich auch in der Gruppierung von seinen Axiomen, die sich von der bei Pasch unterscheidet:

- I. 1.-8. Axiome der Verknüpfung
- II. 1.-4. Axiome der Anordnung
- III. 1.-5. Axiome der Kongruenz
- IV. Axiom der Parallelen
- V. 1.-2. Axiome der Stetigkeit

Axiome der Verknüpfung [10, S. 3f.]

Die Axiome der Verknüpfung oder auch Inzidenzaxiome legen die Beziehungen zwischen den verschiedenen „Elementen der Geometrie“ fest und determinieren damit die Beschaffenheit des euklidischen Raumes.

- I 1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a , die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
- I 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.
- I 3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
- I 4. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es stets eine Ebene α , die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört. Zu jeder Ebene gibt es stets einen mit ihr zusammengehörigen Punkt.
- I 5. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört.
- I 6. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α .
- I 7. Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen Punkt B gemein.
- I 8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Anstelle von „zusammengehören“ sagt man auch „ a geht durch A , [...] A liegt auf a , [...] A liegt in α .“ I 1 und I 2 schreiben vor, dass zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade festlegen. I 4 und I 5 formulieren eine analoge Aussage für Ebenen, wobei drei verschiedene Punkte genau eine Ebene definieren. I 7 und I 8 garantieren, dass der behandelte Raum dreidimensional ist.

Axiome der Anordnung [10, S. 4f.]

Diese Axiome bestimmen die Ordnung von Punkten auf einer Geraden.

- II 1. Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A .
- II 2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf einer Geraden AC , so daß C zwischen A und B liegt.
- II 3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.
- II 4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC , die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC .

Hilbert nimmt explizit auf Paschs Arbeit Bezug:

„Diese Axiome hat zuerst M. Pasch (...) ausführlich untersucht. Insbesondere rührt das Axiom II 4 [Axiom von Pasch] inhaltlich von M. Pasch her“ [10, S. 4].

Axiome der Kongruenz [10, S. 11ff.]

Diese Axiomgruppe ist in die Kongruenzen bezüglich Strecken, Winkel und Dreiecke gegliedert.

- III 1. Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen:

$$AB \equiv A'B'$$

- III 2. Wenn eine Strecke $A'B'$ und eine Strecke $A''B''$ derselben Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Strecke $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent; oder kurz: wenn zwei Strecken einer dritten kongruent sind, so sind sie untereinander kongruent.
- III 3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann

$$AB \equiv A'B' \text{ und } BC \equiv B'C'$$

ist, so ist auch stets

$$AC \equiv A'C'.$$

- III 4. Es sei ein Winkel $\angle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α' sowie eine bestimmte Seite von a' in α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a' , der vom Punkte O' ausgeht: dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k' , so daß der Winkel $\angle(h, k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\angle(h', k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\angle(h', k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen:

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d.h. es ist stets

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k).$$

III 5. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

gelten, so ist auch stets die Kongruenz

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \text{ erfüllt.}$$

Bereits 1557 wurde die Stellung des SWS-Kongruenzsatzes bei Euklids „Elementen“ hinterfragt. Jaques Pelletier wollte diesen Satz als Axiom festlegen, weil er Zweifel an Euklids Beweis hatte. Hilbert hat diese Überlegung übernommen und den SWS-Satz zum Axiom III 5 erklärt [8, S. 3f.].

Eine gegensätzliche Entwicklung stellt der folgende Satz dar, dessen Stellung als Axiom bei Euklid von Hilbert kritisiert wird. Hilbert beweist die Aussage unter Verwendung des Größenvergleichs von Winkeln.

Satz 21: Alle rechten Winkel sind einander kongruent.

Axiom der Parallelen [10, S. 28]

Bei Hilbert bildet das Parallelenaxiom eine eigene Axiomgruppe, die Gruppe IV. Es lautet:

IV Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a : dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.

Im Gegensatz zu Euklids Parallelenaxiom wird hier also nur gefordert, dass es nicht mehr als eine Parallele gibt. Allerdings folgert Hilbert aus dem Satz vom Außenwinkel (Satz 3.5), dass zu einer Gerade mindestens eine parallele Gerade existiert. Gemeinsam mit dem Parallelenaxiom ergibt sich dieselbe Aussage wie bei Euklid.

Axiome der Stetigkeit [10, S. 30]

Eine Kritik an Euklids „Elementen“ war das Fehlen eines Axioms, das die Existenz von Schnittpunkten sichert, wie in Kapitel 2.3.1 aufgezeigt wurde. Diesem Problem sollen die Axiome der Stetigkeit Abhilfe schaffen.

V 1. (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom).

Sind A , B und C irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, daß das n -malige Hintereinander-Abtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt.

V 2. (Axiom der linearen Vollständigkeit).

Das System der Punkte einer Geraden mit seinen Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen ist keiner solchen Erweiterung fähig, bei welcher die zwischen den vorigen Elementen bestehenden Beziehungen sowie auch die aus den Axiomen I-III folgenden Grundeigenschaften der linearen Anordnung und Kongruenz, und V 1 erhalten bleiben.

Hilbert betont, dass das Archimedische Axiom notwendig ist, da bei alleiniger Erfüllung der Axiomgruppen I-IV weitere Elemente hinzugefügt werden können. Somit wäre das Vollständigkeitsaxiom bei Vernachlässigung des Archimedischen Axioms nicht erfüllt [10, S. 30ff.]. Mit dem Vollständigkeitsaxiom wird andererseits garantiert, dass die mit den vorhergehenden Axiomen aufgestellte Geometrie maximal ist. Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, dass die Punkte einer Geraden mit den reellen Zahlen übereinstimmen. Somit ist – wie die reellen Zahlen – die in Hilberts Werk entwickelte Geometrie vollständig [7, S. 197f.]. Gemeinsam mit der im folgenden Kapiteln gezeigten Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Axiome ist damit die Eignung von Hilberts Axiomensystem der euklidischen Geometrie belegt.

2.4 Von der euklidischen zur nichteuklidischen Geometrie

Euklids Geometrie hat die Zeit bis zum 19. Jahrhundert maßgeblich dominiert. Jahrhundertlang war man bemüht, das Parallelenaxiom zu beweisen, gemäß dem Bestreben, eine möglichst einfache axiomatische Grundlage der Geometrie zu schaffen. Im Zuge der Auseinandersetzung mit dem Parallelenaxiom wurde ersichtlich, dass es nicht die eine Geometrie gibt, für die über 2000 Jahre die euklidische Geometrie synonym verwendet wurde [3, S. 9f.]. Die ersten, die die Existenz anderer Geometrien neben der euklidischen aufzeigten, waren Carl Friedrich Gauß (1777-1855), Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793-1856) und János Bolyai (1802-1860) in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Sie kamen zu dem Schluss, dass wenn man das Parallelenaxiom negierte, eine in sich schlüssige, andere Geometrie aufgebaut werden könnte. Diese Geometrie bezeichnete Gauß als Antieuklidische Geometrie. In einem Brief an Friedrich Wilhelm Bessel aus dem Jahr 1829 schreibt Gauß, dass er das „Geschrei der Boeoter¹“ fürchtete, wenn er seine Ansichten teilen würde. Diese Aussage zeigt einmal mehr die Vormachtstellung der euklidischen Geometrie [11, S. 215ff.]. Lobatschewski und Bolyai ersetzten das euklidische

¹als Böoter wurden ungebildete Menschen bezeichnet

Parallelenaxiom folgendermaßen: „Zu jeder Gerade und einem Punkt, der nicht auf der Gerade liegt, gibt es mindestens zwei parallele Geraden in derselben Ebene, die durch den gegebenen Punkt führen.“ Diese nichteuklidische Geometrie wird hyperbolische Geometrie genannt [3, S. 373f.]. Eine weitere nichteuklidische Geometrie verzichtet ebenfalls auf das Parallelenaxiom und geht davon aus, dass es überhaupt keine Parallelen gibt. Darunter versteht man etwa die elliptische Geometrie [12, S. 16].

3 Grundlagen der Dreiecksgeometrie

3.1 Teilverhältnisse

Definition. Wird der Anfangspunkt A vom Endpunkt B einer Strecke AB unterschieden, so wird AB als *orientierte Strecke* bezeichnet. Demnach ist $AB \neq BA$. Für die *Länge einer Strecke* AB schreibt man $|AB|$. Sie entspricht dem Abstand der beiden Punkte A und B . Dabei ist $|AB| = |BA|$.

Definition. Es sei ABC ein Dreieck. Dann versteht man unter $|ABC|$ den *Flächeninhalt des Dreiecks*.

Definition. [26, S. 10] Es seien A und B zwei Punkte auf einer Geraden g . Man bezeichne die Seite von A in g , auf der B liegt mit $(AB>$ bzw. $<BA)$. Jene Seite von A in g , in der B nicht enthalten ist, wird $<A)B$ bzw. $B(A>$ genannt. Die beschriebenen Seiten von A in g werden als *Halbstrahlen* bezeichnet und es gilt

$$\begin{aligned}(AB> &= \{P \in g : A \notin [PB]\} = <BA) \\ <A)B &= \{P \in g : A \in (PB)\} = B(A>.\end{aligned}$$

Definition. Gegeben seien drei kollineare Punkte A, B, C , mit $B \neq C$. Dann ist das *Teilverhältnis* $\frac{AB}{BC}$ folgendermaßen definiert [26, S. 65]:

$$\frac{AB}{BC} = \begin{cases} \frac{|AB|}{|BC|} & \text{wenn die Strecken } AB \text{ und } BC \text{ in dieselbe Richtung orientiert sind,} \\ -\frac{|AB|}{|BC|} & \text{wenn die Strecken } AB \text{ und } BC \text{ in entgegengesetzte Richtungen orientiert sind.} \end{cases}$$

Für $\frac{AB}{BC} =: x, x \in \mathbb{R}$ gilt damit:

- $x > 0$ für $B \in (AC)$
- $x = 0$ für $A = B$
- $x < 0$ für $A \in (BC>$ oder $B \notin [AC]$
- $x = 1$ wenn B der Mittelpunkt von AC ist
- $x = -1$ für $A = C$

3.2 Strahlensätze

3.2.1 1. und 2. Strahlensatz und ihre Umkehrungen

Satz 3.1. 1. und 2. Strahlensatz [13, S. 1]

Seien g und h zwei Geraden, wobei $g \cap h = \{S\}$ für einen Punkt S gilt. Weiters seien k und l zwei Geraden, mit den Eigenschaften $S \notin \{k, l\}$ sowie $k \parallel \{g, h\}$ und $l \parallel \{g, h\}$. Dabei seien A, A', B, B' Punkte mit $\{A\} = g \cap k, \{A'\} = g \cap l, \{B\} = h \cap k$ und $\{B'\} = h \cap l$. Aus $k \parallel l$ folgt

$$(i). \frac{|SA|}{|AA'|} = \frac{|SB|}{|BB'|}, \frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB|}{|SB'|}, \frac{|SA'|}{|AA'|} = \frac{|SB'|}{|BB'|} \quad (1. \text{ Strahlensatz})$$

$$(ii). \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|SA|}{|SA'|}, \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} \quad (2. \text{ Strahlensatz})$$

Das bedeutet, dass

- (i). die Abschnitte der einen Geraden im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie jene der zweiten Geraden.
- (ii). die Abschnitte der Parallelen im gleichen Verhältnis zueinander stehen wie jene der jeweiligen Geraden [14, S. 124f.].

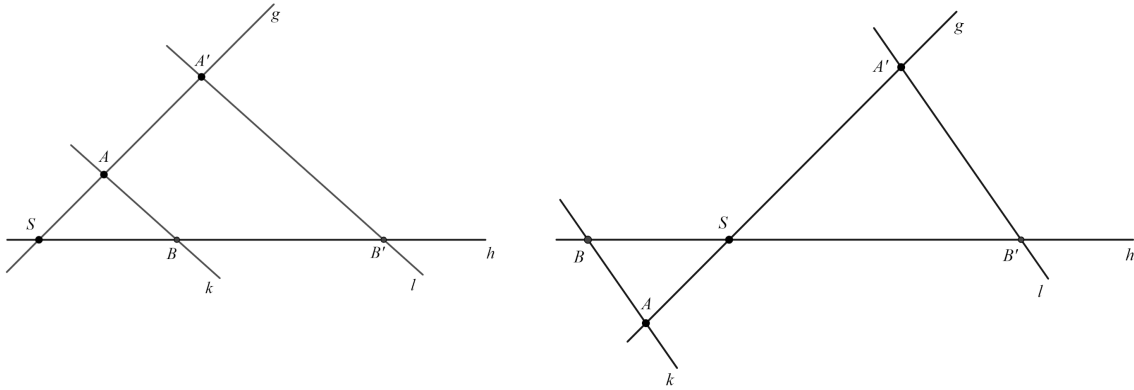


Abbildung 5: Strahlensatz in der V-Figur (links) und X-Figur (rechts) (in Anlehnung an [13, S. 1])

Beweis. [14, S. 124f.]

- (i). Angenommen es sei $k \parallel l$. Um die Behauptung zu zeigen, fällt man das Lot von A' bzw. B' auf k , wodurch man die Höhen der Dreiecke ABA' und ABB' erhält. Die Längen der Höhen stimmen aufgrund der Voraussetzung überein. Da die beiden Dreiecke die Grundseite AB teilen, gilt nach der Flächenformel für Dreiecke

$$(A = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2})$$

$$|ABA'| = |ABB'|. \quad (3.1)$$

Addieren von $|SBA|$ und anschließendes Zusammenfassen der Flächen ergibt

$$\underbrace{|ABA'| + |SBA|}_{|SBA'|} = \underbrace{|ABB'| + |SBA|}_{|SB'A|}. \quad (3.2)$$

Verwendung von (3.1) liefert

$$\frac{|SBA|}{|ABA'|} = \frac{|SBA|}{|ABB'|} \quad (3.3)$$

und (3.2)

$$\frac{|SBA|}{|SBA'|} = \frac{|SBA|}{|SB'A|}. \quad (3.4)$$

Die Flächen in (3.3) bzw. (3.4) können entsprechend der Dreiecksflächenformel dargestellt werden als

$$\frac{\frac{|SA| \cdot |DB|}{2}}{\frac{|AA'| \cdot |DB|}{2}} = \frac{\frac{|SB| \cdot |AC|}{2}}{\frac{|BB'| \cdot |AC|}{2}} \Leftrightarrow \frac{|SA| \cdot |DB|}{|AA'| \cdot |DB|} = \frac{|SB| \cdot |AC|}{|BB'| \cdot |AC|}$$

bzw.

$$\frac{\frac{|SA| \cdot |DB|}{2}}{\frac{|SA'| \cdot |DB|}{2}} = \frac{\frac{|SB| \cdot |AC|}{2}}{\frac{|SB'| \cdot |AC|}{2}} \Leftrightarrow \frac{|SA| \cdot |DB|}{|SA'| \cdot |DB|} = \frac{|SB| \cdot |AC|}{|SB'| \cdot |AC|}.$$

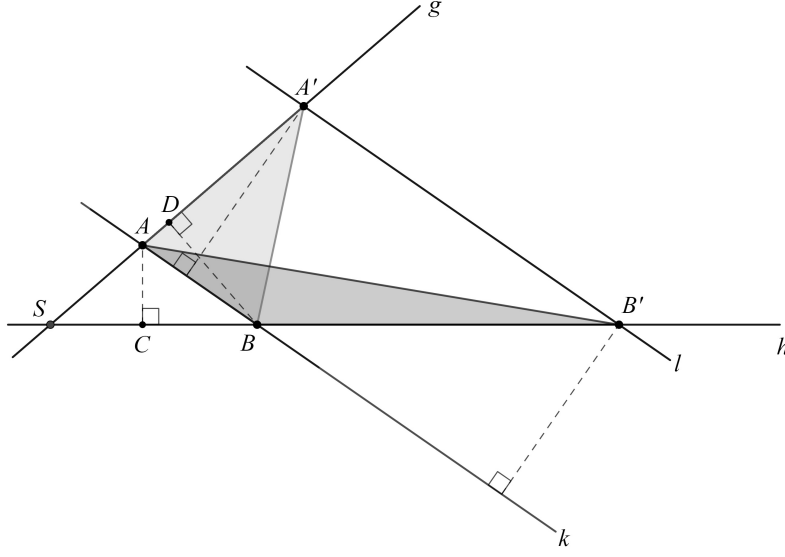


Abbildung 6: Beweis des 1. Strahlensatzes (in Anlehnung an [14, S. 124])

Durch anschließendes Kürzen erhält man

$$\frac{|SA|}{|AA'|} = \frac{|SB|}{|BB'|} \quad (3.5)$$

bzw.

$$\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB|}{|SB'|}.$$

Die letzte zu zeigende Gleichung $\frac{|SA|}{|AA'|} = \frac{|SB|}{|BB'|}$ folgt aus (3.5). Es gilt nämlich $|SA'| = \pm|SA| \pm |AA'|$ und $|SB'| = \pm|SB| \pm |BB'|$. Die Reihenfolge der Monome ist gleich, da $k \parallel l$ gilt. Die Vorzeichen ergeben sich aus der Anordnung von S, A, A' auf g bzw. S, B, B' auf h . Es folgt

$$\frac{|SA'|}{|AA'|} = \pm \frac{|SA|}{|AA'|} \pm \frac{|AA'|}{|AA'|} = \pm \frac{|SA|}{|AA'|} \pm 1 \stackrel{(1.5)}{=} \pm \frac{|SB|}{|BB'|} \pm 1 = \pm \frac{|SB|}{|BB'|} \pm \frac{|BB'|}{|BB'|} = \frac{|SB|}{|BB'|}.$$

- (ii). Es gelte wieder $k \parallel l$. Zunächst erweitert man die Konstruktion um eine zu h parallele Gerade m , für die gilt $\{A\} \in m$. Dann sei $\{E\} = l \cap m$ und es folgt $|AB| = |EB'|$ aufgrund der Parallelität von h und m . Wendet man nun den 1. Strahlensatz auf die Geraden g und l mit $g \cap l = \{A'\}$ an, erhält man $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|EB'|}{|A'B'|}$, was $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$ entspricht. Analog zeigt man, dass $\frac{|SB|}{|SB'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$ gilt.

□

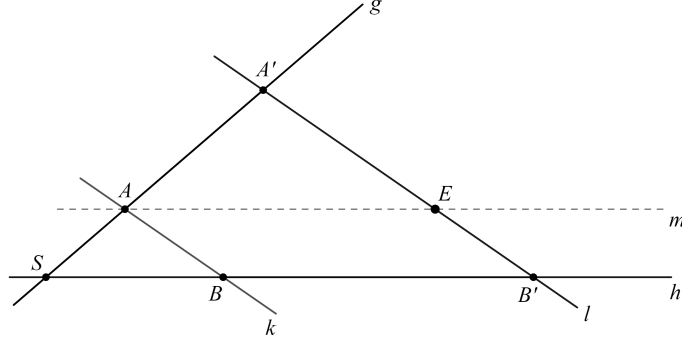


Abbildung 7: Beweis des 2. Strahlensatzes (in Anlehnung an [14, S. 125])

Der 1. Strahlensatz ist umkehrbar, allerdings mit der Einschränkung, dass es sich um Strahlen und nicht um Geraden handeln muss, wie ein Gegenbeispiel im Folgenden verdeutlicht. Zunächst wird die Umkehrung analog zur obigen Implikation in Satz 3.1 formuliert.

Satz 3.2. Umkehrung des 1. Strahlensatzes [14, S. 125]

Seien g und h zwei Strahlen, mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S . Weiters seien k und l zwei Geraden, mit den Eigenschaften $S \notin \{k, l\}$ sowie $k \nparallel \{g, h\}$ und $l \nparallel \{g, h\}$. Dabei seien A, A', B, B' Punkte mit $\{A\} = g \cap k$, $\{A'\} = g \cap l$, $\{B\} = h \cap k$ und $\{B'\} = h \cap l$. Dann gilt

$$\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} \Rightarrow k \parallel l.$$

Beweis. [14, S. 125f.]

Man nehme an, es gelte $k \nparallel l$. Sei $\tilde{l}$ jene Gerade, mit den Eigenschaften $k \parallel \tilde{l}$, $B' \in \tilde{l}$ und $\{\tilde{A}'\} = g \cap \tilde{l}$ mit $\tilde{A}' \neq A'$. Aus der Voraussetzung erhält man

$$\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} \Leftrightarrow |SA| = \frac{|SB| \cdot |SA'|}{|SB'|}.$$

Aufgrund der Konstruktion von $\tilde{l}$ und dem 1. Strahlensatz ergibt sich außerdem

$$\frac{|SA|}{|\tilde{SA}'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} \Leftrightarrow |SA| = \frac{|SB| \cdot |\tilde{SA}'|}{|SB'|},$$

woraus $\tilde{A}' = A'$ folgt. Das steht allerdings im Widerspruch zur Annahme, dass $k \nparallel l$ gilt, wodurch die Behauptung bewiesen ist. $\square$

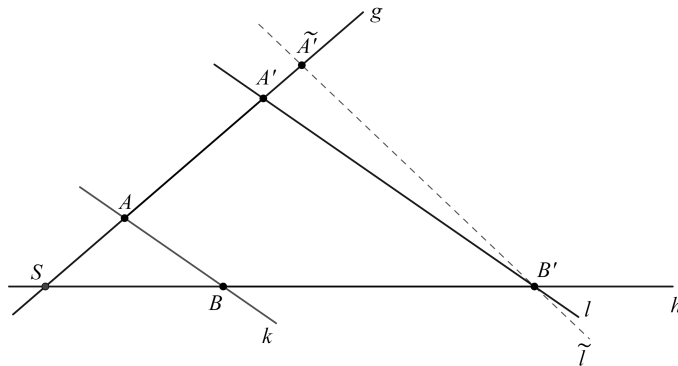


Abbildung 8: Beweis zur Umkehrung des 1. Strahlensatzes (in Anlehnung an [14, S. 125])

Um zu zeigen, dass die Umkehrung des 1. Strahlensatzes für Geraden im Allgemeinen nicht gilt, betrachtet man das Gegenbeispiel in Abbildung 9. Man nimmt zunächst an, es gelte die Implikation

$$\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} \Rightarrow k \parallel l.$$

Die geometrische Darstellung erfüllt für die Punkte S, A, A', B, B' die Voraussetzungen in Satz 3.1 (und insbesondere jene in Satz 3.2). Es gilt somit die Äquivalenz $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} \Leftrightarrow k \parallel l$. Schneidet man den Kreis mit Mittelpunkt S und Radius $r = |SA|$ mit der Geraden g , erhält man den Schnittpunkt $\tilde{A}$. Nach Konstruktion ist $|SA| = |S\tilde{A}|$ und somit gilt $\frac{|S\tilde{A}|}{|SA'|} = \frac{|SB|}{|SB'|}$. Die Punkte $S, \tilde{A}, A', B, B'$ genügen ebenfalls den Bedingungen in Satz 3.1. Dann müsste nach der Behauptung $\tilde{k} \parallel l$ sein, was offensichtlich nicht der Fall ist.

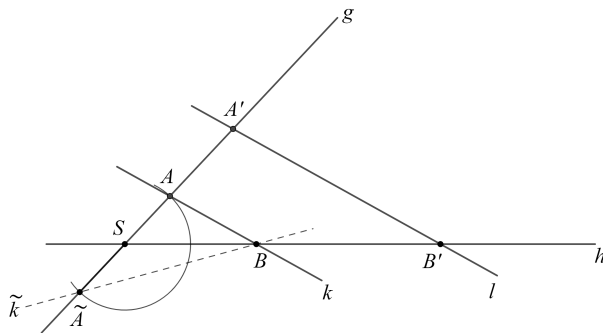


Abbildung 9: Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit der Umkehrung des 1. Strahlensatzes (in Anlehnung an [15, S. 159])

Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes gilt im Gegensatz zur Umkehrung des 1. Strahlensatzes trotz der Einschränkung auf Strahlen im Allgemeinen nicht. Dafür betrachtet man ein Gegen-

beispiel (Abbildung 10) ähnlich zu Abbildung 9 und stellt analoge Überlegungen an. Zunächst wird angenommen, die Implikation

$$\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} \Rightarrow k \parallel l$$

träte zu. Der Kreis um den Mittelpunkt A' mit Radius $r = |A'B'|$ schneidet die Gerade h im Punkt $\widetilde{B}'$. Es gilt $|A'B'| = |A'\widetilde{B}'|$, woraus nach der Behauptung $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|AB|}{|A'\widetilde{B}'|} \Rightarrow k \parallel \widetilde{l}$ folgen müsste. Allerdings gilt offensichtlich $k \nparallel \widetilde{l}$.

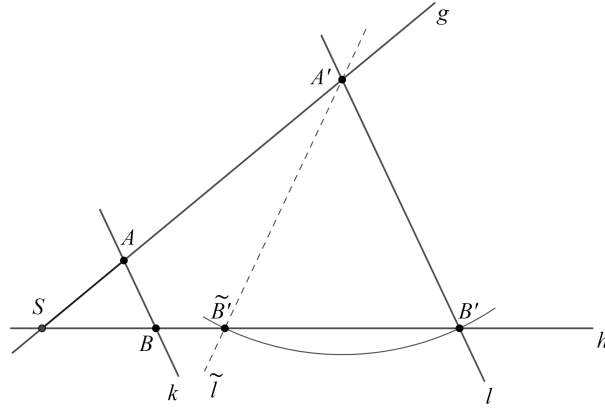


Abbildung 10: Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit der Umkehrung des 2. Strahlensatzes (in Anlehnung an [15, S. 159])

3.2.2 Orientierter Strahlensatz

Satz 3.3. Orientierter Strahlensatz [13, S. 4]

Es seien g und h zwei Geraden, wobei $g \cap h = \{S\}$ für einen Punkt S gilt. Weiters seien k und l zwei Geraden, mit den Eigenschaften $S \notin \{k, l\}$ sowie $k \nparallel \{g, h\}$ und $l \nparallel \{g, h\}$. Dabei seien A, A', B, B' Punkte mit $\{A\} = g \cap k$, $\{A'\} = g \cap l$, $\{B\} = h \cap k$ und $\{B'\} = h \cap l$. Dann sind äquivalent:

(i). Die Geraden k und l sind parallel.

(ii). Für die Teilverhältnisse gilt:

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'} \quad (3.6)$$

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Aus dem 1. und 2. Strahlensatz (Satz 3.1) ist bekannt: Sind k und l parallel, so gilt

für die Teilverhältnisse

$$\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|SB|}{|SB'|}$$

Es gilt also zu zeigen, dass $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} \Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{AB}{A'B'}$ und für die anderen Verhältnisse analog. Dafür betrachtet man Abbildung 5.

1. Fall: V-Figur

Hier liegen A und A' von S aus betrachtet in derselben Richtung, deshalb gilt $\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{SA}{SA'}$. Ebenso sind die Strecken AB und $A'B'$ in derselben Richtung orientiert, woraus $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{AB}{A'B'}$ folgt und man erhält $\frac{SA}{SA'} = \frac{AB}{A'B'}$.

2. Fall: X-Figur

In diesem Fall ist $S \in (AA')$. Die Strecken SA und SA' sind demnach entgegengesetzt orientiert und es gilt $\frac{|SA|}{|SA'|} = -\frac{SA}{SA'}$. Gleiches trifft auf die Strecken AB und $A'B'$ zu, sodass $\frac{|AB|}{|A'B'|} = -\frac{AB}{A'B'}$. Das ergibt

$$\frac{|SA|}{|SA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} \Leftrightarrow -\frac{SA}{SA'} = -\frac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Die übrigen Teilverhältnisse folgen analog.

- (ii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen, (3.6) ist erfüllt. Es sei $\tilde{l}$ eine zu k parallele Gerade, für die gilt $\tilde{l} \cap g = \{\tilde{A}'\} \neq S$ und $\tilde{l} \cap h = \{B'\}$. Dann folgt aus (i)

$$\frac{SA}{S\tilde{A}'} = \frac{AB}{\tilde{A}'B'} = \frac{SB}{SB'}.$$

Aufgrund der Voraussetzung trifft aber auch

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'}$$

zu. Also muss $\tilde{A}' = A'$ gelten und daher $l \parallel k$.

□

3.3 Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken

Definition. In einem Dreieck ABC gelten folgende Bezeichnungen:

- $a := BC$, $b := CA$, $c := AB$, wobei a, b, c abhängig vom Kontext die Seiten oder auch ihre Länge bedeuten können.
- $\alpha := \angle BAC$, $\beta := \angle CBA$, $\gamma := \angle ACB$

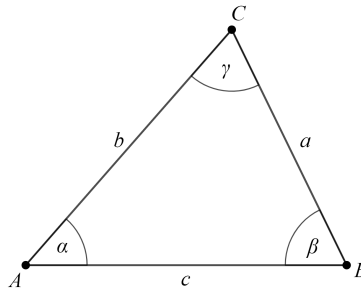


Abbildung 11: Größen im Dreieck

3.3.1 Kongruenzsätze für Dreiecke

Definition. Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nennt man *kongruent*, wenn sie in allen Bestimmungsstücken übereinstimmen. Das heißt, wenn gilt:

$$a \equiv a', \quad b \equiv b', \quad c \equiv c'$$

(die entsprechenden Seiten sind kongruent)

sowie

$$\alpha \equiv \alpha', \quad \beta \equiv \beta', \quad \gamma \equiv \gamma'$$

(die entsprechenden Winkel sind kongruent) [26, S. 19].

Man schreibt: $ABC \equiv A'B'C'$.

Es gibt die folgenden vier Kongruenzsätze. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn

- alle drei entsprechenden Seiten kongruent sind. (SSS-Satz)
- zwei entsprechende Seiten und der eingeschlossene Winkel kongruent sind. (SWS-Satz)
- eine entsprechende Seite und die anliegenden Winkel kongruent sind. (WSW-Satz)

- (iv). zwei entsprechende Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel kongruent sind. (SSW-Satz)

3.3.2 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Definition. Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ werden *ähnlich* genannt, wenn die entsprechenden Winkel kongruent sind und für die Seiten gilt

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Man schreibt: $ABC \sim A'B'C'$.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn

- (i). alle Seiten entsprechend proportional sind. (S:S:S-Satz)
- (ii). sie in einem Winkel übereinstimmen und die einschließenden Seiten entsprechend proportional sind. (S:W:S-Satz)
- (iii). alle entsprechenden Winkel kongruent sind. (W:W:W-Satz)
- (iv). sie in einem Winkel übereinstimmen und zwei Seiten entsprechend proportional sind, wobei der kongruente Winkel der längeren Seite gegenüber liegt. (S:S:W-Satz)

3.4 Sätze über Winkel im Dreieck und an Geraden

Definition. Unter *Nebenwinkeln* versteht man zwei einander anliegende Winkel, die beim Schnitt von zwei Geraden entstehen. Ihre Summe entspricht demnach einem gestreckten Winkel, also $2R$. In der gleichen Situation einander gegenüberliegende Winkel werden *Scheitelwinkel* genannt. Ein zu seinem Nebenwinkel kongruenter Winkel wird *rechter Winkel* genannt und mit R gekennzeichnet. Die Größe eines vollen Winkels beträgt $4R$ [10, S. 15]. In einem Dreieck ABC heißt ein Nebenwinkel eines Innenwinkels *Außenwinkel* [14, S. 39].

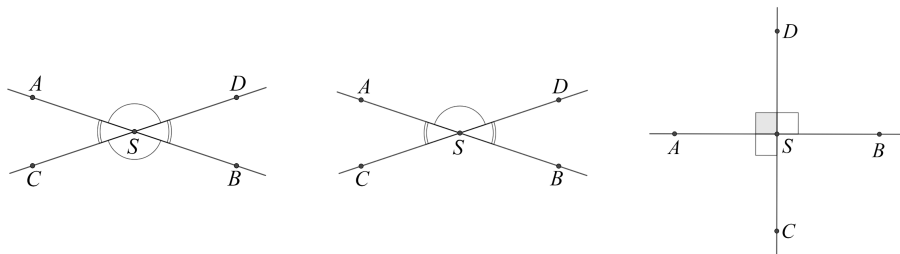


Abbildung 12: Scheitelwinkel (links), Nebenwinkel (mittig), rechter Winkel (rechts) (in Anlehnung an [15, S. 12])

Satz 3.4. Scheitelwinkelsatz [4, S. 12]

Scheitelwinkel sind kongruent.

Beweis. [4, S. 12]

Die Nebenwinkel von $\angle BSD$ sind $\angle DSA$ und $\angle CSB$. Da Nebenwinkel einander zu $2R$ ergänzen, ergibt sich

$$\angle DSA + \angle BSD = 2R = \angle CSB + \angle BSD$$

woraus $\angle DSA \equiv \angle CSB$ folgt. Analog erhält man $\angle ASC \equiv \angle BSD$. □

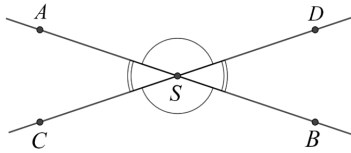


Abbildung 13: Scheitelwinkelsatz (in Anlehnung an [4, S. 12])

Satz 3.5. Satz vom Außenwinkel [4, S. 12]

In einem Dreieck ABC ist jeder Außenwinkel größer als jeder der nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet: Verlängert man die Seite AB eines Dreiecks ABC, so erhält man einen Punkt D und es gilt $\delta > \{\alpha, \gamma\}$, für $\delta := \angle DBC$.

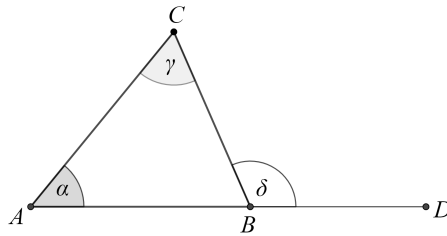


Abbildung 14: Satz vom Außenwinkel (in Anlehnung an [26, S. 29])

Beweis. [4, S. 12]

Der Punkt E sei der Mittelpunkt von BC . Man konstruiere den Punkt F , für den gilt $E \in (AF)$ und $|AE| = |EF|$. Aus dem Scheitelwinkelsatz (Satz 3.4) folgt $\angle CEA \equiv \angle BEF$. Aufgrund des SWS-Satzes gilt die Kongruenz der Dreiecke $AEC \equiv FEB$, da sie in einem Winkel und zwei Seiten übereinstimmen. Deshalb gilt auch $\gamma = \angle FBE$. Der Punkt F liegt auf der gleichen Seite der Geraden $g(B, C)$ wie D . Außerdem sind E und F auf derselben Seite von $g(A, B)$. Also

liegt F im Winkelinneren von $\angle DBC$ und somit erhält man $\delta > \gamma$. Auf gleiche Weise zeigt man $\delta > \alpha$. $\square$

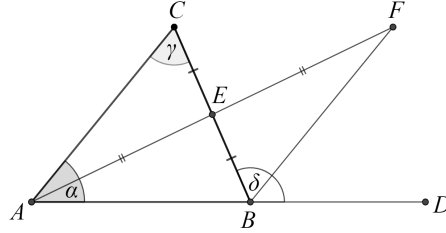


Abbildung 15: Beweis zum Satz vom Außenwinkel (in Anlehnung an [26, S. 30])

Definition. Gegeben seien zwei Geraden g und h , die von einer dritten Gerade k geschnitten werden. Die Gerade k teilt die Ebene in die Halbebenen ε und ε' . Die beim Schnitt entstehenden Winkel $< 2R$ werden *Stufenwinkel* genannt, wenn

- (i). sie in derselben Halbebene liegen
- (ii). und ihre Schenkel auf k in dieselbe Richtung orientiert sind.

Die beim Schnitt entstehenden Winkel $< 2R$ werden *Wechselwinkel* genannt, wenn

- (i). sie in verschiedenen Halbebenen liegen
- (ii). und ihre Schenkel auf k in entgegengesetzte Richtungen orientiert sind [16, S. 94f.].

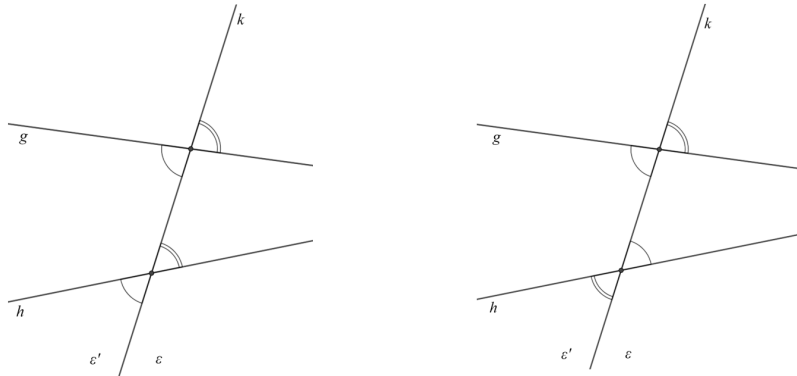


Abbildung 16: Beispiele für Stufenwinkel (links), Beispiele für Wechselwinkel (rechts)

Satz 3.6. Stufen- und Wechselwinkelsatz [4, S. 18f.]

Es seien g , g' und h drei voneinander verschiedene Geraden. Dann sind die zwei folgenden Aussagen äquivalent:

(i). Die Stufen- oder Wechselwinkel von g und g' , die beim Schnitt mit h entstehen, sind kongruent.

(ii). Die Geraden g und g' sind parallel.

Beweis. [4, S. 18f.]

(i) $\Rightarrow$ (ii). Es gelte $g \cap h = \{S\}$ und $g' \cap h = \{S'\}$ für die beiden Punkte S, S' . Nach der Voraussetzung gibt es kongruente Stufenwinkel. o.B.d.A sei $\sigma \equiv \sigma'$ (Abbildung 17). Angenommen, es sei $g \nparallel g'$. Dann gibt es einen Schnittpunkt P mit $g \cap g' = \{P\}$ und es entsteht ein Dreieck SPS' . Nach dem Satz vom Außenwinkel (Satz 3.5) ist $\sigma' > \sigma$. Jedoch trifft auch $\sigma' = \sigma$ nach Voraussetzung zu – ein Widerspruch. Also gibt es keinen Schnittpunkt P und es gilt $g \parallel g'$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Gegeben seien wie oben die Geraden g und g' und nach der Voraussetzung sei $g \parallel g'$. Es sei $\tilde{g}$ jene Gerade, für die gilt $\tilde{g} \cap h = \{S'\}$, $g \parallel \tilde{g}$ und $\tilde{\sigma}$ bilde mit σ ein Paar kongruenter Stufenwinkel $\sigma \equiv \tilde{\sigma}$. Wegen (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt $g \parallel \tilde{g}$. Da es nur eine Gerade geben kann, die parallel zu g ist und durch den Punkt S' verläuft, muss aber $g' = \tilde{g}$ gelten, woraus die Kongruenz der Stufenwinkel $\sigma \equiv \sigma'$ folgt.

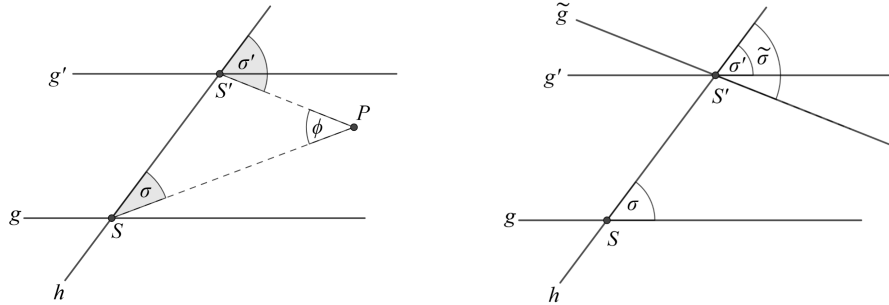


Abbildung 17: Beweis zum Stufenwinkelsatz (i) $\Rightarrow$ (ii) (links) und (ii) $\Rightarrow$ (i) (rechts) (in Anlehnung an [4, S. 18f.])

Der Satz ist sowohl für Stufenwinkel als auch für Wechselwinkel formuliert. In Abbildung 18 ist die Gültigkeit für die Wechselwinkel aufgrund der Kongruenz von Scheitelwinkeln (Satz 3.4) einzusehen. $\square$

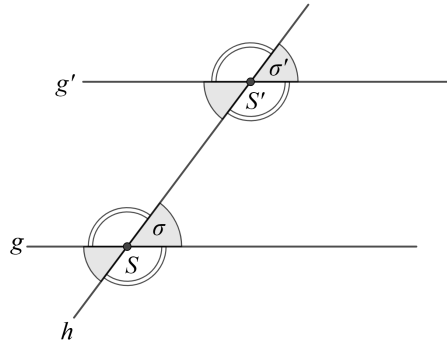


Abbildung 18: Stufen- und Wechselwinkelsatz (in Anlehnung an [26, S. 36])

Satz 3.7. Außenwinkelsatz [4, S. 20f.]

In einem Dreieck ABC ist ein Außenwinkel gleich groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Das bedeutet: Verlängert man die Seite AB eines Dreiecks ABC , so entsteht ein Punkt D und der entstehende Außenwinkel $\angle DBC$ ist gleich groß wie $\alpha + \gamma$.

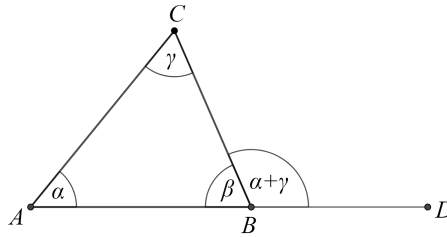


Abbildung 19: Außenwinkelsatz (in Anlehnung an [4, S. 21])

Beweis. [4, S. 20f.]

Man konstruiere für einen Punkt E , der auf derselben Seite von $g(A, B)$ liegt wie C , die Gerade $g(B, E)$ mit $g(B, E) \parallel g(A, C)$. Aus dem Stufenwinkelsatz (Satz 3.6) folgt wegen der Parallelität die Kongruenz $\angle BAC \equiv \angle DBE$. Da E und A auf verschiedenen Seiten von $g(B, C)$ liegen, sind $\angle ACB$ und $\angle EBC$ Wechselwinkel und aus demselben Satz folgt $\angle ACB \equiv \angle EBC$. Das ergibt also

$$\angle DBC = \angle DBE + \angle EBC = \angle BAC + \angle ACB = \alpha + \gamma. \quad (3.7)$$

□

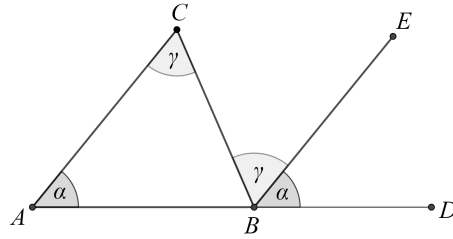


Abbildung 20: Beweis zum Außenwinkelsatz (in Anlehnung an [4, S. 21])

Satz 3.8. Winkelsumme im Dreieck [4, S. 21]

Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck ABC beträgt $2R$.

Beweis. [4, S. 20f.]

In Abbildung 19 sind die Winkel $\angle CBA$ und $\angle DBC$ Nebenwinkel. Sie ergänzen einander demnach zu $2R$. Das heißt, es gilt wegen (3.7) im Außenwinkelsatz

$$\angle CBA + \underbrace{\angle ACB + \angle BAC}_{\angle DBC} = 2R.$$

□

3.5 Satzgruppe des Pythagoras

Definition. Es sei ABC ein Dreieck. Man spricht von einem *rechtwinkligen Dreieck*, wenn es einen rechten Winkel besitzt. Im Folgenden gilt $\gamma := \angle ACB = R$. Dann gelten für die Seiten a, b, c des Dreiecks die Bezeichnungen $c := AB$ als *Hypotenuse* und $b := CA$ und $a := BC$ als *Katheten*. Es sei h_c die Höhe durch den Punkt C und der Punkt H_c der Höhenfußpunkt von h_c auf AB . Dann werden AH_c und H_cB *Hypotenusenabschnitte* genannt und es gilt $q := |AH_c|$ und $p := |H_cB|$ [17, S. 8f.].

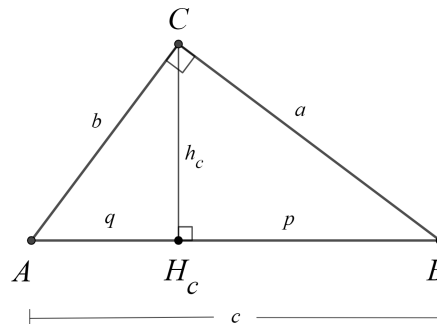


Abbildung 21: rechtwinkliges Dreieck (in Anlehnung an [17, S. 8])

Die „Satzgruppe des Pythagoras“ besteht aus drei Sätzen: dem Satz des Pythagoras, dem Kathetensatz des Euklid und dem Höhensatz des Euklid.

3.5.1 Satz des Pythagoras

Satz 3.9. Satz des Pythagoras [17, S. 9]

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Dann ist der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats gleich groß wie die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Katheten. Oder anders formuliert:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

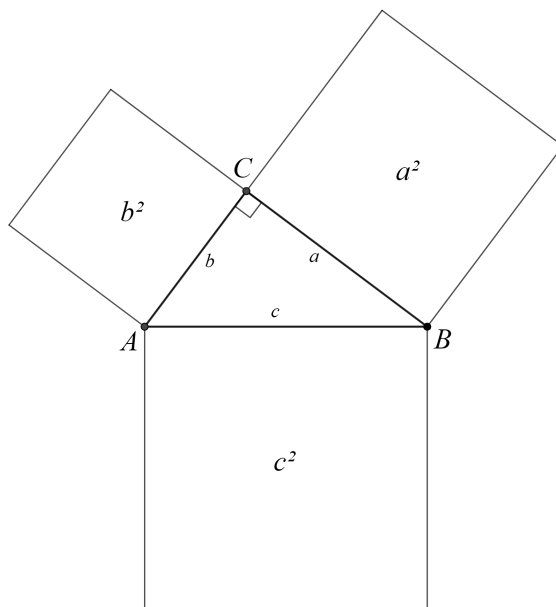


Abbildung 22: Satz des Pythagoras (in Anlehnung an [17, S. 9])

Beweis. [17, S. 34f.]

Zunächst setzt man die beiden Kathetenquadrate zum „Stuhl der Braut“ zusammen. Der Flächeninhalt dieser zusammengesetzten Figur ist $a^2 + b^2$. Die Strecke BQ werde durch einen Punkt P geteilt, sodass $|BP| = b$. Wegen $|BQ| = a + b$ ist $|PQ| = a$. Da es sich bei den Winkeln $\angle PBC$ und $\angle YQP$ um Ecken der Kathetenquadrate handelt, gilt $\angle PBC = R = \angle YQP$. Aufgrund des SWS-Satzes sind die Dreiecke CBP und PQY kongruent zum Dreieck ABC und

somit $|CP| = c = |PY|$. Da es sich bei ABC um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck (Satz 3.8) $\alpha + \beta = R$. Weil $\angle QPB$ ein gestreckter Winkel ist, erhält man für den Winkel $\angle YPC$, dass $\angle CPY = R$ und somit $CP \perp PY$. Nun dreht man das Dreieck PQY um den Punkt Y so, dass die Strecke YQ mit der Strecke YQ' übereinstimmt. Analog geht man für das Dreieck CBP vor. Hierbei kommt die Strecke CB auf der Strecke CB' zum liegen. Auf diese Weise erhält man ein Quadrat mit der Seitenlänge c , für dessen Flächeninhalt $c^2 = a^2 + b^2$ gilt. $\square$

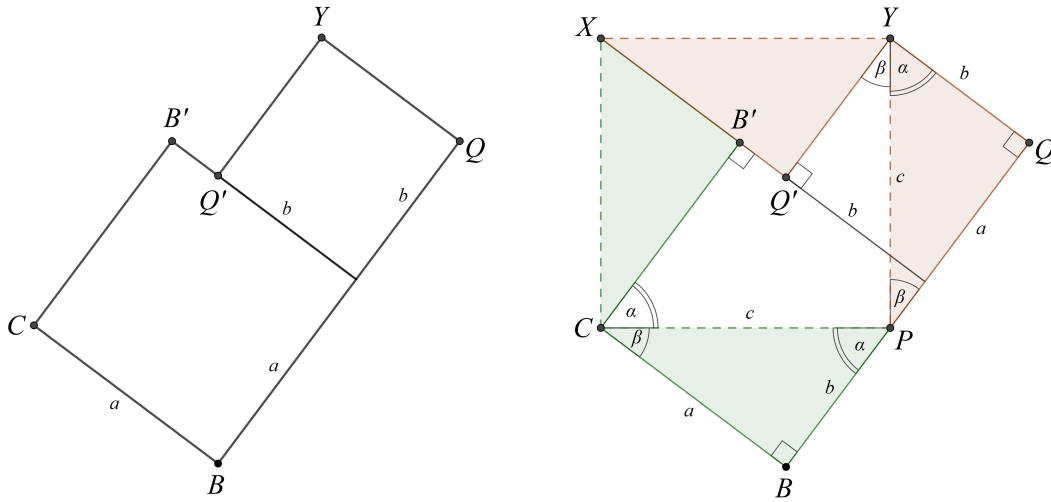


Abbildung 23: Stuhl der Braut (links) und Beweis zum Satz des Pythagoras (rechts) (in Anlehnung an [17, 34f.])

3.5.2 Kathetensatz des Euklid

Satz 3.10. Kathetensatz des Euklid [17, S. 10]

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist der Flächeninhalt eines Kathetenquadrats gleich groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks mit der Hypotenuse und dem entsprechenden Kathetenabschnitt als Seitenlängen. Das bedeutet:

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

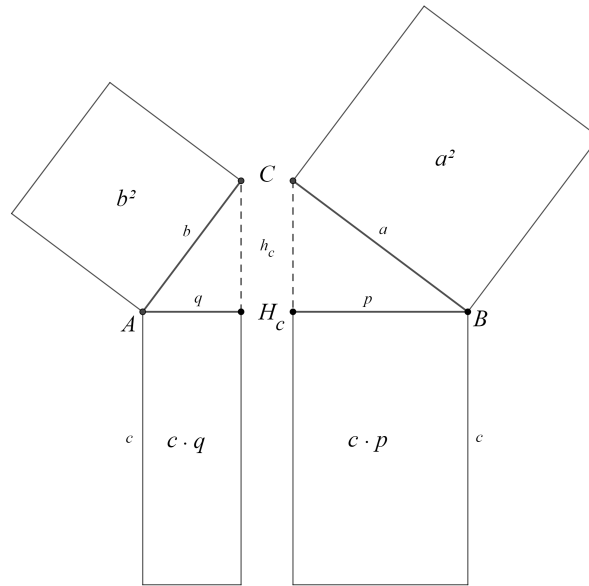


Abbildung 24: Kathetensatz (in Anlehnung an [17, S. 10])

Der folgende Beweis des Kathetensatzes folgt der „euklidischen Methode“ und gilt als ältester Beweis dieses Satzes.

Beweis. [17, S. 20f.]

Um die Aussage des Kathetensatzes zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass $\frac{b^2}{2} = |ACE| = |AGH_c| = \frac{cq}{2}$. Die Dreiecke ACE und ABE haben denselben Flächeninhalt. Sie besitzen die gemeinsame Grundseite AE . AC ist die Höhe des Dreiecks ACE und das Lot von der Gerade $g(A, E)$ durch B ist jene des Dreiecks ABE . Wegen $AE \parallel BC$ sind die beiden Höhen gleich. Aus $CH_c \parallel AG$ folgt gleichermaßen $|AGH_c| = |AGC|$. Für die Dreiecke ABE und AGC gilt $|AE| = b = |CA|$, $|AB| = c = |AG|$ und $\angle EAB = R + \alpha + \angle GAC$. Aus dem SWS-Satz folgt die Kongruenz der beiden Dreiecke, weshalb sofort $|ABE| = |AGC|$ gilt. Insgesamt erhält man

$$|ACE| = |ABE| = |AGC| = |AGH_c|.$$

Analog zeigt man $\frac{a^2}{2} = \frac{cp}{2}$. □

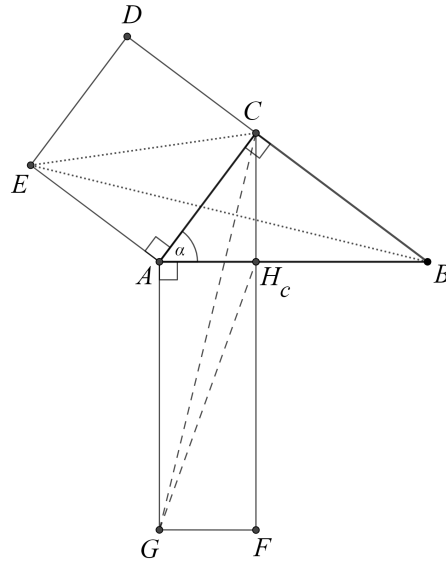


Abbildung 25: Beweis zum Kathetensatz (in Anlehnung an [17, S. 21])

3.5.3 Höhensatz des Euklid

Satz 3.11. Höhensatz des Euklid [17, S. 10]

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Dann hat das Quadrat über der Höhe durch C den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck mit den Hypotenusenabschnitten als Seitenlängen. Oder als Formel:

$$h_c^2 = p \cdot q$$

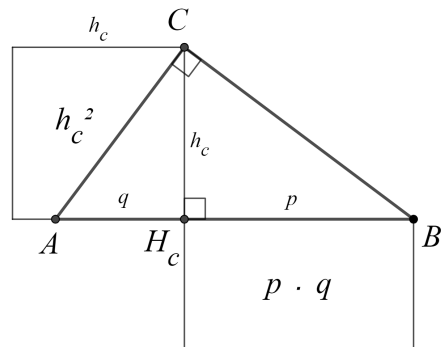


Abbildung 26: Höhensatz (in Anlehnung an [17, S. 10])

Beweis. [17, S. 37f.]

Trennt man das Dreieck ABC an der Höhe h_c , so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke AH_cC und H_cBC . Jetzt konstruiert man zwei neue rechtwinklige Dreiecke, wobei die Dreiecke AH_cC und H_cBC einerseits mit dem Quadrat von der Fläche h_c^2 und andererseits mit dem Rechteck von der Fläche $p \cdot q$ ergänzt werden. Die beiden neuen Dreiecke haben die Seitenlängen $q + h_c$ und $p + h_c$. Die Flächen stimmen somit überein und es folgt sofort $h_c^2 = p \cdot q$. $\square$

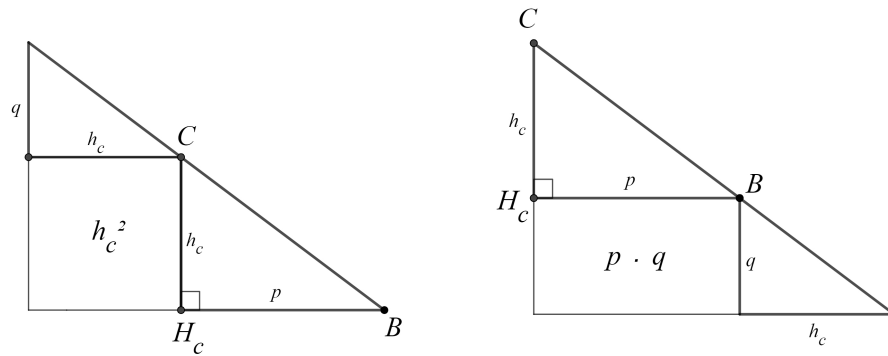


Abbildung 27: Ergänzungsbeweis zum Höhensatz (in Anlehnung an [17, 37f.])

4 Rund um den Schulstoff

4.1 Merkwürdige Punkte im Dreieck

4.1.1 Umkreismittelpunkt

Definition. Unter einer *Streckensymmetrale* einer Strecke AB versteht man jene Gerade, die aus der Menge aller Punkte X besteht, die den gleichen Abstand zu A und B haben. Die Streckensymmetrale geht durch den Mittelpunkt von AB und steht normal auf AB . Sie wird mit m_{AB} bezeichnet [15, S. 11].

Satz 4.1. Umkreismittelpunkt [13, S. 23]

Die Streckensymmetralen der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt U . U ist der Mittelpunkt des Kreises, der durch die Eckpunkte des Dreiecks verläuft und wird deshalb als Umkreismittelpunkt bezeichnet.

Beweis. [13, S. 23]

Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenmittelpunkten M_a und M_c . Die Streckensymmetralen m_{AB} und m_{BC} schneiden sich in einem Punkt U . Die Dreiecke AM_cU und BUM_c sind rechtwinklige Dreiecke, die die gemeinsamen Seiten M_cU und $AM_c = M_cB$ besitzen. Aus dem SWS-Satz folgt die Kongruenz von AM_cU und BUM_c und folglich ist $|AU| = |BU|$. Analoges gilt für die Dreiecke BM_aU und CUM_a , weshalb $|BU| = |CU|$ ist und es folgt sofort $|AU| = |CU|$. Fällt man das Lot von U auf CA , erhält man den Punkt M_b , der AC in zwei Abschnitte mit den Längen $x := |CM_b|$ und $y := |M_bA|$ teilt. Nach dem Satz des Pythagoras (Satz 3.9) gilt

$$x^2 + |M_bU|^2 = |CU|^2 \quad \text{und} \quad y^2 + |M_bU|^2 = |AU|^2.$$

Wegen $|AU| = |CU|$ folgt $x = y$. Also entspricht das gefällte Lot von U auf CA der Streckensymmetrale m_{CA} . Die Streckensymmetralen schneiden sich also alle im Punkt U , dem Mittelpunkt des Kreises mit Radius $|AU| = |BU| = |CU|$, der somit durch die Eckpunkte des Dreiecks verläuft. $\square$

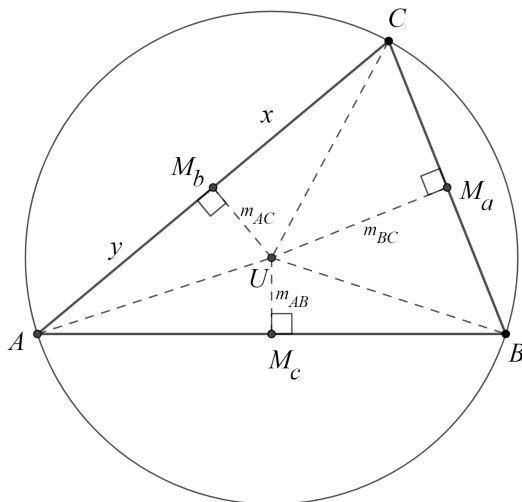


Abbildung 28: Umkreismittelpunkt (in Anlehnung an [13, S. 23])

Definition. Der in Satz 4.1 beschriebene Kreis wird *Umkreis* des Dreiecks genannt.

4.1.2 Inkreismittelpunkt

Definition. Für zwei Halbstrahlen $g = (AB>$ und $g' = (AC>$ gelte $g \cap g' = \{A\}$. Unter einer *Winkelsymmetrale* des Winkels $\alpha := \angle BAC$ versteht man die Gerade w_α , wenn

$$\forall X \in w_\alpha : \angle BAX = \angle XAC.$$

Eine Winkelsymmetrale wird *Innenwinkelsymmetrale* genannt, wenn sie die Winkelsymmetrale eines Winkels in einem Dreieck ist. Sie wird als *Außenwinkelsymmetrale* bezeichnet, wenn sie einen Außenwinkel eines Dreiecks halbiert.

Satz 4.2. Inkreismittelpunkt [13, S. 22]

Die Innenwinkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt I. I ist der Mittelpunkt des Kreises, der alle Seiten des Dreiecks als Tangenten berührt. I wird als Inkreismittelpunkt bezeichnet.

Beweis. [13, S. 22]

Die Behauptung wird mit den gleichen Überlegungen wie im Beweis des Satzes vom Umkreismittelpunkt (Satz 4.1) bewiesen. Es sei ABC ein Dreieck mit den entsprechenden Winkeln α, β, γ . Die Innenwinkelsymmetralen w_α und w_β schneiden sich in einem Punkt I . Fällt man die Lote von I auf die Dreiecksseiten, erhält man die Schnittpunkte D, E, F . Die Dreiecke ADI und AIF sind rechtwinklige Dreiecke, die die gemeinsame Seite AI besitzen. Außerdem haben

sie den Winkel $\frac{1}{2}\angle DAF$ gemeinsam, womit auch $\angle AID \equiv \angle FIA$ gilt. Nach dem WSW-Satz sind ADI und AIF kongruent und somit ist $|FI| = |DI|$. Analoges gilt für die Dreiecke BID und BEI , weshalb $|DI| = |EI|$ ist und es folgt sofort $|FI| = |EI|$. Die Dreiecke CFI und CIE sind kongruent, denn sie haben zwei gleiche Seiten, $|FI| = |EI|$ und CI und einen rechten Winkel. Somit kann der SSW-Satz angewandt werden. Dann gilt aber auch $\angle FCI = \angle ICE$ und CI stimmt mit der Innenwinkelsymmetrale w_γ überein. Also schneiden sich $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ alle im Punkt I , dem Mittelpunkt des Kreises mit Radius $|DI| = |EI| = |FI|$, der alle Dreiecksseiten berührt.

□

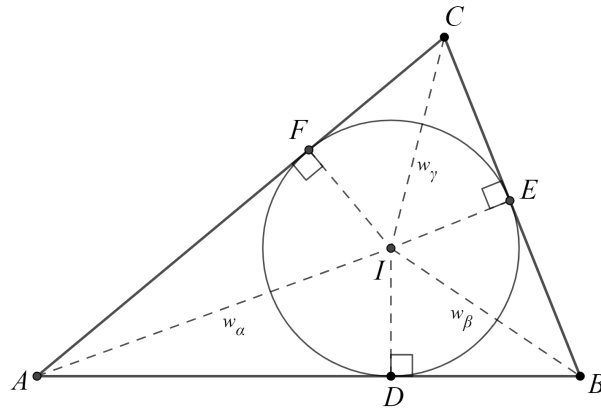


Abbildung 29: Inkreismittelpunkt (in Anlehnung an [13, S. 22])

Definition. Der in Satz 4.2 beschriebene Kreis wird *Inkreis* des Dreiecks genannt.

4.1.3 Schwerpunkt

Definition. Unter einer *Schwerlinie* in einem Dreieck ABC versteht man jene Gerade bzw. Strecke, die eine Ecke und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt verbindet. Die Schwerlinie s_a ist jene Schwerlinie, die durch den Eckpunkt A verläuft [15, S. 21].

Satz 4.3. Schwerpunkt [3, S. 53]

Die Schwerlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S . Dieser Punkt teilt jede Schwerlinie im Verhältnis 2:1, von der jeweiligen Ecke aus betrachtet. In einem Dreieck ABC mit den Seitenmittelpunkten M_a, M_b, M_c gilt also

$$\frac{|AS|}{|SM_a|} = \frac{|BS|}{|SM_b|} = \frac{|CS|}{|SM_c|} = \frac{2}{1}. \quad (4.1)$$

Der Punkt S wird als *Schwerpunkt* des Dreiecks bezeichnet.

Beweis. [15, S. 21f.], [3, S. 53f.]

Es sei ABC ein Dreieck mit den Seitenmittelpunkten M_a, M_b, M_c . Man zeichnet die Schwerlinien AM_a und BM_b , die sich im Punkt S schneiden. Da es sich bei M_a und M_b um Seitenmittelpunkte handelt, trifft offenbar

$$\frac{|CM_b|}{|M_bA|} = \frac{|CM_a|}{|M_aB|}$$

zu. Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes (Satz 3.2) für den Scheitelpunkt C gilt folglich $M_bM_a \parallel AB$. Wendet man den 2. Strahlensatz (Satz 3.1) an, erhält man mittels $|CM_b| = |M_bA| = \frac{1}{2}|CA|$

$$\frac{2}{1} = \frac{|CA|}{|CM_b|} = \frac{|AB|}{|M_bM_a|}.$$

Aus dem 2. Strahlensatz für die Strecken AM_a und BM_b mit Scheitelpunkt S folgt

$$\frac{|AS|}{|SM_a|} = \frac{|AB|}{|M_bM_a|} = \frac{2}{1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|BS|}{|SM_b|} = \frac{|AB|}{|M_bM_a|} = \frac{2}{1}.$$

S teilt AM_a bzw. BM_b demnach im Verhältnis 2:1. Nun betrachtet man die Schwerlinie CM_c , mit $CM_c \cap AM_a = \{S'\}$, um die letzte Gleichung in (4.1) zu zeigen. Mit den gleichen Mitteln wie zuvor erhält man, dass S' sowohl CM_c als auch AM_a im Verhältnis 2:1 teilt. Jedoch wird die Schwerlinie AM_a bereits von S in diesem Verhältnis geteilt. Folglich muss $S' = S$ gelten und die Schwerlinien schneiden sich in einem einzigen Punkt S , der die Schwerlinien im Verhältnis 2:1 teilt. $\square$

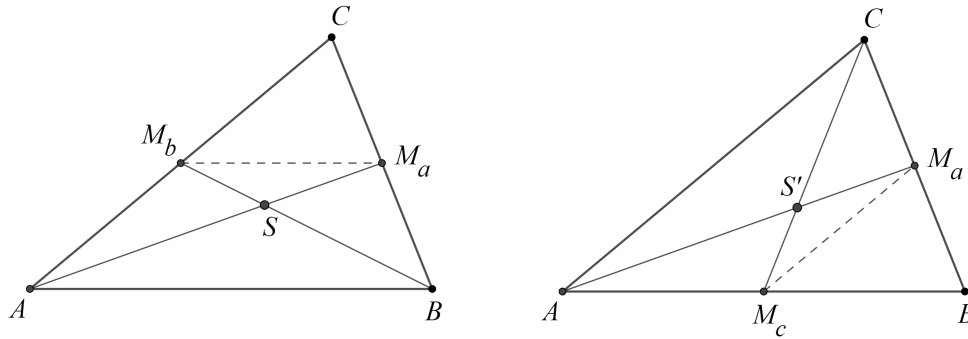


Abbildung 30: Schwerpunkt (in Anlehnung an [3, S. 53])

4.1.4 Höhenschnittpunkt

Definition. Unter einer *Höhenlinie* in einem Dreieck ABC versteht man das Lot durch eine Ecke auf die Gerade, die durch die Eckpunkte ihrer gegenüberliegende Seite verläuft. Die Höhenlinie h_a ist demnach das Lot durch den Punkt A auf $g(B, C)$. Analoges gilt für die Höhenlinien h_b und h_c [14, S. 50].

Satz 4.4. Höhenschnittpunkt [3, S. 54]

Die Höhenlinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt H . H wird als Höhenschnittpunkt des Dreiecks bezeichnet.

Beweis. [3, S. 54]

Es sei ABC ein Dreieck. Man konstruiert die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks, die durch den jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt verlaufen. Auf diese Weise entsteht ein neues Dreieck $A'B'C'$ (Abbildung 31), dessen Eckpunkte den Schnittpunkten der Parallelen entsprechen. Bei $ABCB'$ handelt es sich um ein Parallelogramm, weshalb nach Euklid (I, S. 21) $AB \equiv B'C$ gilt. Analoge Überlegungen können auf $ABA'C$ angewandt werden, woraus $AB \equiv CA'$ resultiert. Daher ist $B'C \equiv CA'$ und C folglich der Mittelpunkt von $B'A'$. Somit entspricht h_c der Streckensymmetrale von $B'A'$ von $A'B'C'$. Ebenso stimmen die anderen Höhenlinien von ABC mit den Streckensymmetralen des Dreiecks $A'B'C'$ überein. Nach dem Satz vom Umkreismittelpunkt (Satz 4.1) existiert genau ein Schnittpunkt der Streckensymmetralen eines Dreiecks. Aufgrund der Übereinstimmung der Höhenlinien von ABC mit den Streckensymmetralen von $A'B'C'$ schneiden sich auch die Höhenlinien in einem Punkt. $\square$

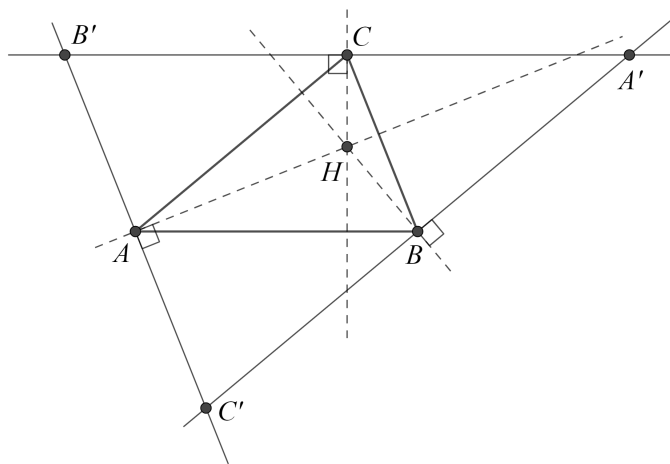


Abbildung 31: Höhenschnittpunkt (in Anlehnung an [3, S. 54])

4.2 Sätze über Winkel am Kreis

Definition. Es sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M . Außerdem seien A und B zwei verschiedene Punkte auf k , dann teilt die Gerade $g(A, B)$ die Ebene in die Halbebenen ε und ε' . Gegeben sei außerdem ein Punkt P auf dem Kreis, mit $P \in \varepsilon$. Dann wird der Winkel $\phi := \angle APB$ *Peripheriewinkel* oder *Umfangswinkel* genannt. Der Kreis k kann auch als Umkreis des Dreiecks ABP mit Umkreismittelpunkt M betrachtet werden.

h sei jener Halbstrahl mit Anfangspunkt A , der in ε' liegt und mit MA einen rechten Winkel einschließt. Den Winkel $\tau := \angle(h, (AB>)$, also jener Winkel, der von h und dem von A ausgehenden Halbstrahl $(AB>$ eingeschlossen wird, bezeichnet man als *Tangentenwinkel*.

Der Winkel μ , mit $0 < \mu < 4R$, sei jener Winkel, der beim Abtragen vom Halbstrahl $(MA>$ um zu $(MB>$ zu gelangen, entsteht. μ heißt *Mittelpunktswinkel* oder *Zentriwinkel* [26, 44f.].

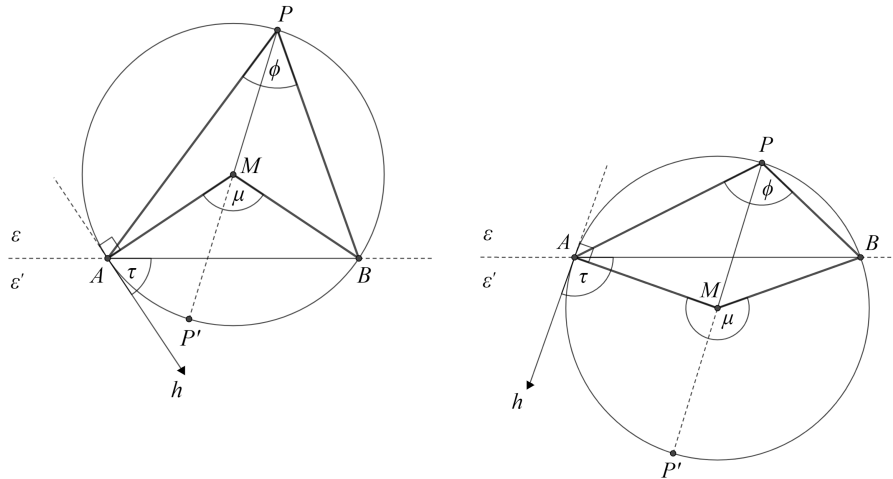


Abbildung 32: Winkel am Kreis (in Anlehnung an [26, S. 45])

Satz 4.5. Zentriwinkelsatz [26, S. 45]

Der Zentriwinkel μ ist doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel ϕ .

$$\mu = 2\phi$$

Beweis. [26, S. 45f.]

Es sei P' der P gegenüberliegende Schnittpunkt von $g(M, P)$ mit dem Kreis.

1. Fall: M liegt im Inneren von $\angle APB$.

Die Dreiecke AMP und MBP sind gleichschenkelig, wegen des Kreisradius $r = |AM| = |BM| =$

$|PM|$. Also ist

$$\phi := \angle APB = \alpha + \beta, \quad (4.2)$$

für $\alpha := \angle APM = \angle BPM$ und $\beta := \angle MPB = \angle PBM$. Aus dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck (Satz 3.8) erhält man $\angle AMP' = 2\alpha$ und $\angle BMP' = 2\beta$ und somit

$$\mu := \angle AMB = 2\alpha + 2\beta.$$

Aufgrund von (4.2) folgt $\mu = 2\phi$.

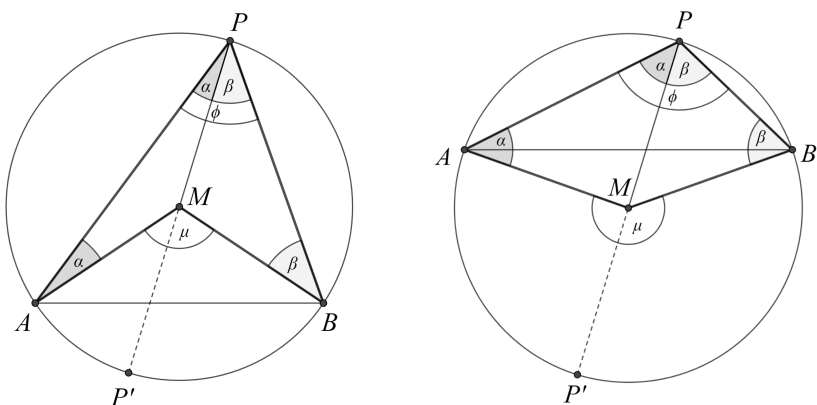


Abbildung 33: Zentriwinkelsatz Fall 1 (in Anlehnung an [26, S. 45])

2. Fall: $M \in AP$

In diesem Fall ist $P' = A$ und $\phi = \beta$, wegen der Gleichschenkligkeit von MBP . Wie oben folgt $\mu := \angle P'MB = 2\beta$ und somit $2\phi = \mu$. Dieselbe Aussage erhält man analog für $M \in BP$.

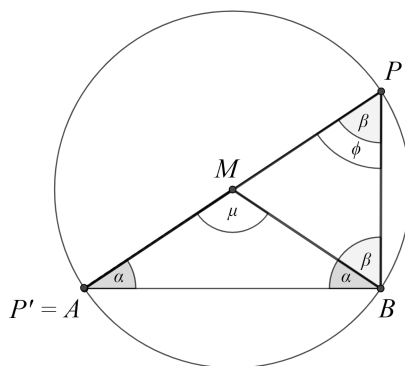


Abbildung 34: Zentriwinkelsatz Fall 2 (in Anlehnung an [26, S. 46])

3. Fall: M liegt außerhalb von $\angle APB$.

o.B.d.A liege A in $\angle MPB$. Dann gilt

$$\phi = \beta - \alpha. \quad (4.3)$$

Wie in Fall 1 erhält man $\angle P'MA = 2\alpha$ und $\angle P'MB = 2\beta$ und somit $\mu = 2\beta - 2\alpha$. Das ergibt abermals $\mu = 2\phi$, wegen (4.3). Analog geht man für B in $\angle APM$ vor. $\square$

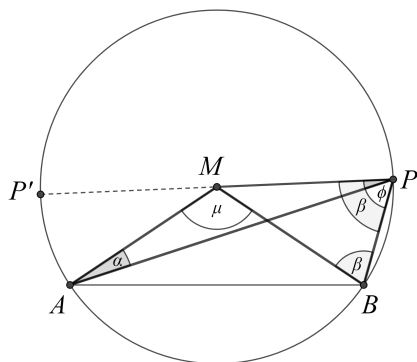


Abbildung 35: Zentriwinkelsatz Fall 3 (in Anlehnung an [26, S. 46])

Satz 4.6. Peripheriewinkelsatz [13, S. 35]

(i). Alle Peripheriewinkel in derselben Halbebene sind gleich groß.

(ii). Ist $\phi' := \angle BP'A$ der zu P' zugehörige Peripheriewinkel in ε' , so gilt $\phi + \phi' = 2R$.

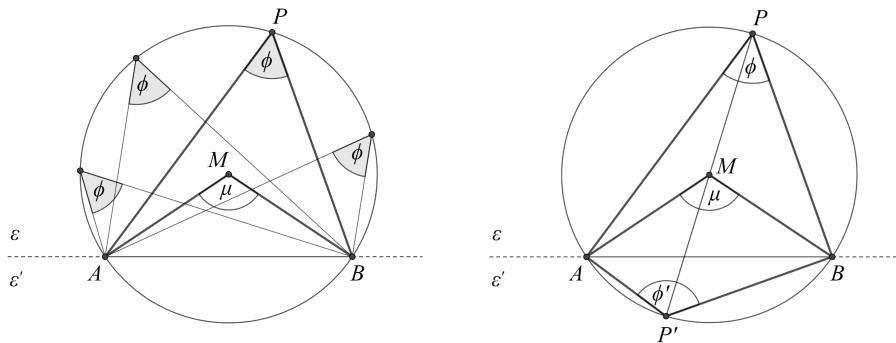


Abbildung 36: Peripheriewinkelsatz

Beweis. [13, S. 35]

- (i). Nach dem Zentriwinkelsatz (Satz 4.5) ist der Zentriwinkel stets doppelt so groß, wie der Peripheriewinkel. Da alle Punkte $P^* \in k$ in der Halbebene ε denselben Zentriwinkel μ besitzen, müssen auch alle Peripheriewinkel gleich sein.
- (ii). Setzt man $\mu = 2\phi$ und $\mu' = 2\phi'$ in $\mu + \mu' = 4R$ ein, erhält man

$$2\phi + 2\phi' = 4R \quad \Leftrightarrow \quad \phi + \phi' = 2R.$$

□

Satz 4.7. Tangentenwinkelsatz [26, S. 45]

Der Tangentenwinkel τ ist so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel ϕ .

$$\phi = \tau \tag{4.4}$$

Beweis. [26, S. 46]

Um die Behauptung (4.4) zu zeigen, wird bewiesen, dass $\mu = 2\tau$ gilt, denn nach dem Zentriwinkelsatz (Satz 4.5) ist $\mu = 2\phi$ und daher $\phi = \tau$. Wie auch beim Beweis des Zentriwinkelsatzes folgt eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $M \in \varepsilon$

Dann ist $\mu = \angle AMB$ und $\angle BAM = \angle MBA = R - \tau$, weil ABM ein gleichschenkliges Dreieck ist. Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck (Satz 3.8) ist

$$\mu + 2(R - \tau) = 2R \quad \Leftrightarrow \quad \mu + 2R - 2\tau = 2R$$

und somit $\mu = 2\tau$.

2. Fall: $M \in AB$

Dann ist $\tau = R$ und $\mu = 2R$ und daher $\mu = 2\tau$.

3. Fall: $M \in \varepsilon'$

Dann ist $\angle BMA = 4R - \mu$ und $\angle MAB = \angle ABM = \tau - R$, weil es sich bei AMB um ein gleichschenkliges Dreieck handelt. Wie in Fall 1 erhält man

$$(4R - \mu) + 2(\tau - R) = 2R \quad \Leftrightarrow \quad 4R - \mu + 2\tau - 2R = 2R \quad \Leftrightarrow \quad 2R - \mu + 2\tau = 2R$$

und erneut folgt sofort $\mu = 2\tau$.

□

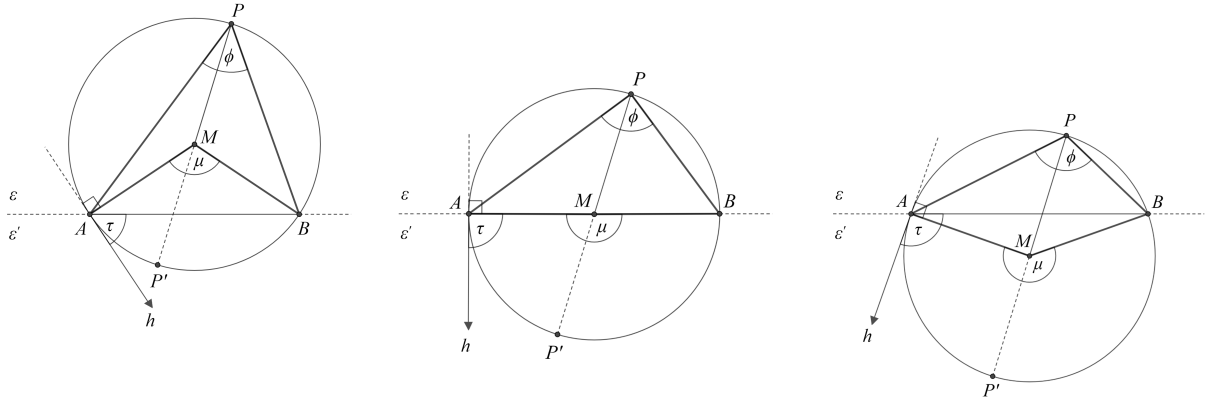


Abbildung 37: Tangentenwinkelsatz Fall 1 (links), Fall 2 (mittig) und Fall 3 (rechts) (in Anlehnung an [26, S. 45])

Satz 4.8. Satz des Thales

Es sei ABC ein Dreieck. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i). Der Punkt C liegt auf dem Halbkreis über AB .
- (ii). Der Peripheriewinkel $\gamma := \angle ACB$ ist ein rechter Winkel.

In der Literatur wird häufig lediglich die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) als „Satz des Thales“ bezeichnet und findet sich auch in Euklid III, 31. Die andere Implikation wird daher oft auch „Umkehrung des Satz des Thales“ genannt [1, S. 32].

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Diese Implikation des Satz des Thales ist ein Spezialfall des Zentriwinkelsatzes. Angenommen C liegt auf dem Halbkreis über AB . Dann ist AB der Durchmesser des Kreises und es gilt $M \in AB$. Demnach ist $\mu = 2R$. Nach dem Zentriwinkelsatz (Satz 4.5) gilt aber auch $\mu = 2\gamma$ und somit erhält man $\gamma = R$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Der Beweis wird indirekt geführt. Es ist also die Implikation

$$C \text{ liegt nicht auf dem Halbkreis über } AB \Rightarrow \gamma \neq R$$

zu zeigen. Man unterscheidet zwei Fälle. Dabei wird jeweils ein Punkt C' mit $\gamma' := \angle AC'B$ konstruiert. Außerdem benötigt man die Winkel $\delta := \angle CC'A$ und $\rho := \angle C'AC$.

1. Fall: C liegt außerhalb des Kreises.

Dann gibt es einen Punkt C' mit $k \cap BC = \{C'\}$. Da C' die Voraussetzungen in (i) erfüllt, gilt, wie zuvor bewiesen, $\gamma' = R$. Somit ist auch $\delta = R$. Aus dem Satz über die

Winkelsumme im Dreieck (Satz 3.8) erhält man für $AC'C$

$$\gamma = 2R - (R + \rho) = R - \rho < R$$

und daher $\gamma \neq R$.

2. Fall: C liegt innerhalb des Kreises.

Dann gibt es einen Punkt C' mit $k \cap g(B, C) = \{C'\}$. Wie in Fall 1 folgt $\gamma' = R$. Wegen $\delta = R - \rho < R$ gilt

$$\gamma = 2R - \delta > 2R - R = R$$

und deshalb ebenfalls $\gamma \neq R$.

□

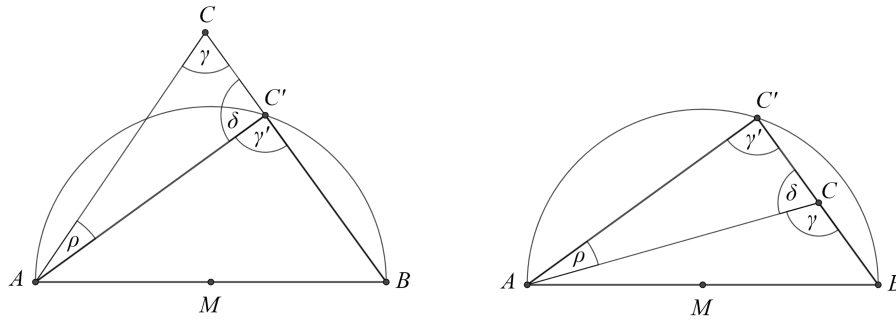


Abbildung 38: Umkehrung Satz des Thales Fall 1 (links), Fall 2 (rechts) (in Anlehnung an [18, S. 31])

Nimmt man in der Abbildung 38 kleine Änderungen vor, kann aus dem Satz des Thales mithilfe der Abbildung 39 der Zusammenhang zwischen der Lage des Umkreismittelpunkts M des Dreiecks ABC und der Beschaffenheit des Peripheriewinkels γ gefolgert werden. Demnach liegt M im Inneren des Dreiecks für $\gamma < R$ (Fall 1 der Umkehrung). Aus $\gamma = R$ folgt nach dem Satz des Thales, dass C auf dem Halbkreis über AB liegt, weshalb M den Mittelpunkt von AB bildet und somit auf der Hypotenuse liegt. In einem stumpfwinkligen Dreieck mit $\gamma > R$ befindet sich M außerhalb des Dreiecks, was dem 2. Fall der Umkehrung entspricht.

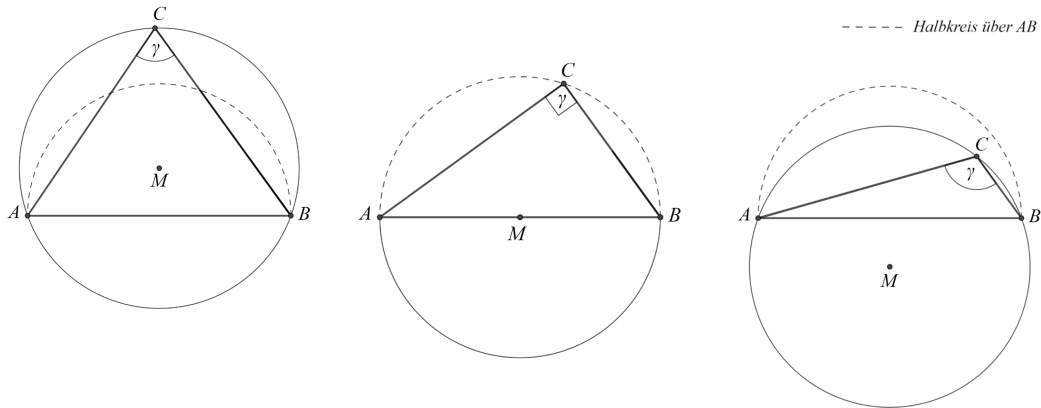


Abbildung 39: Lage des Umkreismittelpunkts $\gamma < R$ (links), $\gamma = R$ (mittig) und $\gamma > R$ (rechts)

Satz 4.9. Sekantensatz [27, S. 10]

Geben seien zwei Geraden $g(A, B)$ und $g(A', B')$, mit $g(A, B) \cap g(A', B') = \{P\}$. Dann sind äquivalent:

(i). Die Punkte A, A', B, B' liegen auf einem Kreis.

(ii). $|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|$

Beweis. [27, S. 10]

(i) $\Rightarrow$ (ii). Nach dem Peripheriewinkelsatz (Satz 4.6) sind die Winkel $\angle A'BA$ und $\angle A'B'A$ als Peripheriewinkel über AA' gleich groß. Da P auf den beiden Geraden liegt, gilt außerdem $\angle A'BP \equiv \angle PB'A$. Wegen $\angle BPA' \equiv \angle B'PA$ stimmen alle Winkel der Dreiecke PBA' und PAB' überein und die Dreiecke sind ähnlich. Dann gilt

$$\frac{|PA|}{|PB'|} = \frac{|PA'|}{|PB|} \Leftrightarrow |PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|.$$

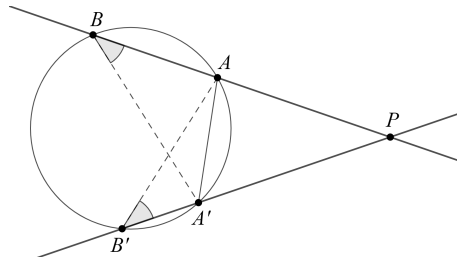


Abbildung 40: Sekantensatz (i) $\Rightarrow$ (ii) (in Anlehnung an [27, S. 11])

- (ii) $\Rightarrow$ (i). Es seien A, A', B, B' vier jeweils nicht kollineare Punkte. Es sei k der Umkreis des Dreiecks $A'AB$ und $\tilde{B}$ der Schnittpunkt von $g(A, B')$ mit k abgesehen von A . Dann liegen die Punkte $A, A', B, \tilde{B}$ auf dem Kreis k und es gilt wegen (i)

$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |P\tilde{B}|.$$

Mit der Voraussetzung in (ii)

$$|PA| \cdot |PB| = |PA'| \cdot |PB'|$$

erhält man damit $\tilde{B} = B'$ und somit $B' \in k$.

□

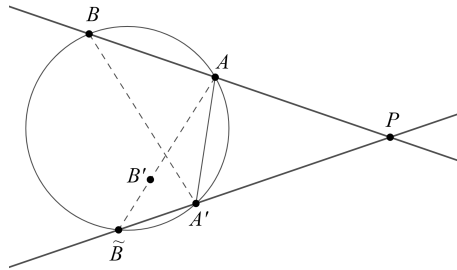


Abbildung 41: Sekantensatz (ii) $\Rightarrow$ (i) (in Anlehnung an [27, S. 11])

Satz 4.10. Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes

- (i). Es sei k ein Kreis und AB eine Sehne von k . Gilt für die Punkte $\{P, P^*\} \in \varepsilon$, dass $\angle APB = \angle AP^*B$, so liegen die Punkte P und P^* auf demselben Kreisbogen bezüglich AB .
- (ii). Es seien A, B, P, P' vier Punkte mit $\phi := \angle APB$ und $\phi' = \angle BP'A$, sodass $\phi + \phi' = 2R$. Dann liegen die vier Punkte auf einem Kreis.

Beweis.

- (i). Es sei k der Umkreis des Dreiecks ABP . Angenommen $P^* \notin k$, dann ist $\tilde{P}$ der Schnittpunkt von $g(A, P^*)$ mit k abgesehen von A . Aus dem Peripheriewinkelsatz (Satz 4.6) und der Voraussetzung folgt

$$\angle A\tilde{P}B = \angle APB = \angle AP^*B.$$

Die Kongruenz der Dreiecke $AB\tilde{P}$ und ABP^* folgt aus dem WWW-Satz und aus der Tatsache, dass sie die gemeinsame Seite AB besitzen. Deshalb muss $\tilde{P} = P^*$ sein und P^* liegt auf dem Kreisbogen in ε über AB .

- (ii). Es sei S der Schnittpunkt der Gerade $g(A, P)$ mit $g(B, P')$. Dann gilt wegen der Voraussetzung

$$\angle APB + \angle BP'A = \angle SPB + \angle BP'A = 2R = \angle AP'S + \angle BP'A \Rightarrow \angle SPB = \angle AP'S.$$

Die Dreiecke SBP und $SP'A$ sind aufgrund des W:W:W-Satzes ähnlich, da sie ein Paar kongruenter Winkel und den gemeinsamen Winkel $\angle BSP$ besitzen. Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|SP'|}{|SP|} \Leftrightarrow |SA| \cdot |SP| = |SP'| \cdot |SB|.$$

Somit kann der Sekantensatz (Satz 4.9) angewandt werden und die Punkte A, B, P, P' liegen auf einem Kreis.

□

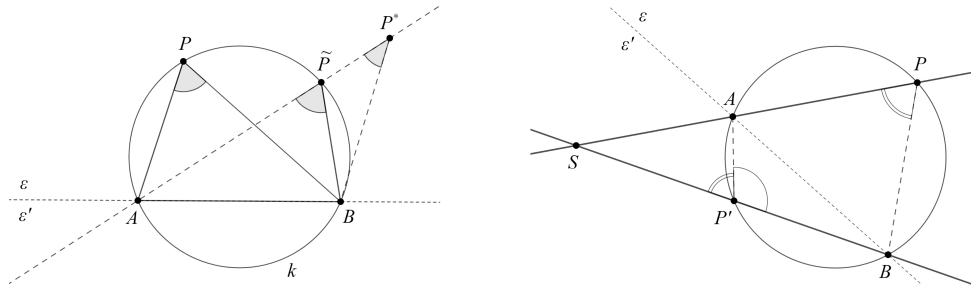


Abbildung 42: Umkehrung der Peripheriewinkelsatzes (i) (links) und (ii) (rechts)

Satz 4.11. Sekanten-Tangenten-Satz [15, S. 47]

Gegeben sei ein Kreis und ein Punkt P außerhalb des Kreises. Eine Gerade durch P schneide den Kreis in den Punkten A und B . Eine weitere Gerade durch P sei die Tangente an den Kreis im Punkt C . Dann gilt

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2.$$

Beweis. [15, S. 47]

Nach dem Tangentenwinkelsatz (Satz 4.7) sind ein Peripheriewinkel und der zugehörige Tangentenwinkel gleich groß. Für den Peripheriewinkel $\angle ABC$ über CA und den Tangentenwinkel $\angle ACP$ gilt daher $\angle ABC \equiv \angle ACP$. Außerdem haben die Dreiecke APC und BPC den gemeinsamen Winkel $\angle CPA \equiv \angle CPB$. Daher sind diese beiden Dreiecke ähnlich und somit

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PC|}{|PB|} \Leftrightarrow |PA| \cdot |PB| = |PC|^2.$$

□

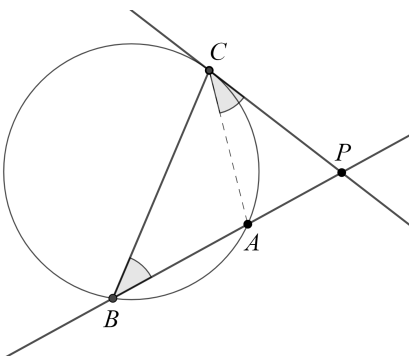


Abbildung 43: Sekanten-Tangenten-Satz (in Anlehnung an [15, S. 47])

4.3 Eulersche Gerade

Satz 4.12. Eulersche Gerade

Sei ABC ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt U , Schwerpunkt S und Höhenschnittpunkt H . Dann liegen U , S und H auf einer Geraden, wobei S zwischen U und H liegt und es gilt

$$|HS| = 2 \cdot |US|.$$

Die beschriebene Gerade wird Eulersche Gerade genannt.

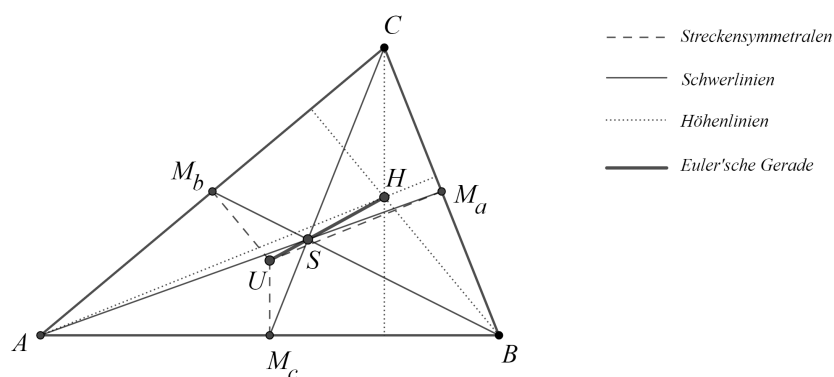


Abbildung 44: Eulersche Gerade (in Anlehnung an [26, S. 57])

Beweis. [26, S. 57f.]

1. Fall: $U = H = S$

In einem gleichseitigen Dreieck gilt $U = H = S$, denn die Seitensymmetralen, Höhenlinien und Schwerlinien fallen zusammen. Die Punkte liegen somit trivialerweise auf einer Geraden und $0 = |HS| = 2 \cdot |US| = 0$, womit die Aussage gezeigt ist.

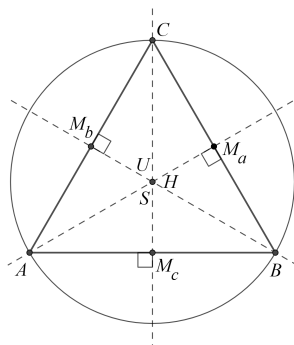


Abbildung 45: Eulersche Gerade im gleichseitigen Dreieck

o.B.d.A kann man deshalb annehmen, dass $U \neq S$ ist. Es sei H' jener Punkt, für den gilt

$$S \in H'U \quad \text{und} \quad |H'S| = 2 \cdot |US|. \quad (4.5)$$

Es muss gezeigt werden, dass H' auf der Höhenlinie h_c liegt und somit mit H übereinstimmt.

2. Fall: $U = M_c$

Nach dem Satz vom Schwerpunkt (Satz 4.3) hat M_c die Eigenschaften

$$S \in M_cC \quad \text{und} \quad |CS| = 2 \cdot |SM_c|. \quad (4.6)$$

Die Voraussetzung besagt, dass der Umkreismittelpunkt den Mittelpunkt der Strecke AB bildet. Daraus folgt die Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC , was im Satz des Thales (Satz 4.8) gezeigt wurde. Die Höhenlinien h_a bzw. h_b entsprechen den Seiten CA bzw. BC und schneiden sich demnach im Punkt C , woraus $C = H'$ folgt. Also liegt H' auf h_c , $H' = H$ und die Behauptung ist gezeigt. o.B.d.A. sei deshalb $U \neq M_c$.

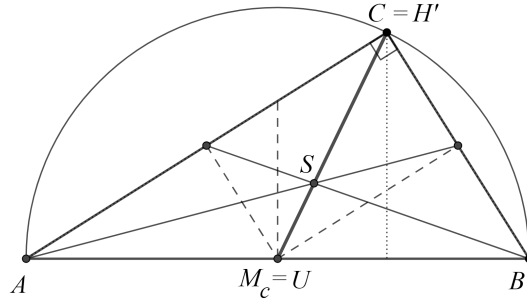


Abbildung 46: Eulersche Gerade im rechtwinkligen Dreieck

3. Fall: $U \in s_c$

In diesem Fall stimmt s_c mit h_c überein und es gilt $H' \in s_c$. Also folgt auch hier $H' \in h_c$, $H' = H$ und die Behauptung ist gezeigt.

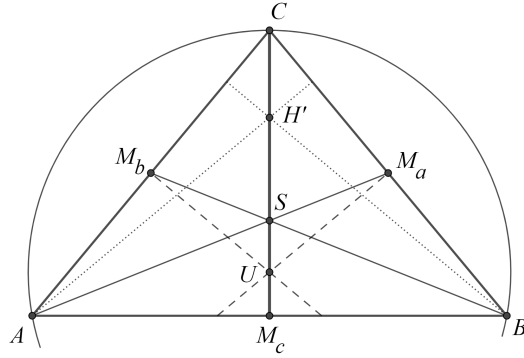


Abbildung 47: Eulersche Gerade im gleichschenkligen Dreieck

4. Fall:

o.B.d.A. nimmt man daher an, es sei $U \notin s_c$, woraus $H' \notin s_c$ folgt. Dann sind CSH' und M_cSU zwei Dreiecke. Für den Schwerpunkt S gilt $S \in M_cC$ und $S \in H'U$. Also sind $\angle H'SC$ und $\angle USM_c$ Scheitelwinkel und somit gilt $\angle H'SC \equiv \angle USM_c$ (Satz 3.4). Aus (4.5) und (4.6) folgt $\frac{|CS|}{|M_cS|} = \frac{|H'S|}{|US|}$. Aus dem S:W:S-Satz erhält man $CSH' \sim M_cSU$. Deshalb gilt ebenso $\angle M_cCH' \equiv \angle CM_cU$.

U und H' liegen auf verschiedenen Seiten von $g(C, M_c)$, weshalb $\angle M_cCH'$ und $\angle CM_cU$ kongruente Wechselwinkel sind. Aus dem Stufenwinkelsatz ergibt sich $g(H', C) \parallel g(U, M_c)$, weshalb $g(H', C) \perp AB$ folgt. Daher fällt $g(H', C)$ mit h_c zusammen und es gilt $H' \in h_c$. Analog zeigt man, dass $H' \in \{h_a, h_b\}$. Demnach ist $H' = H$ und wegen (4.5) ist die Behauptung gezeigt. $\square$

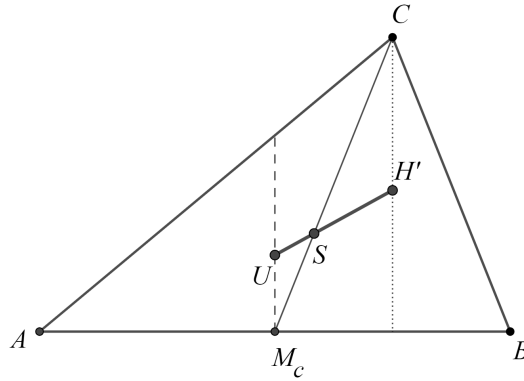


Abbildung 48: Beweis Eulersche Gerade (in Anlehnung an [26, S. 58])

4.4 Transversalen im Dreieck und der Satz vom Mittendreieck

Definition. Es sei ABC ein Dreieck. Eine Gerade g , die Seiten eines Dreiecks trifft, wird *Transversale* genannt. Schneidet eine Transversale eine Dreiecksseite und den ihr gegenüberliegenden Eckpunkt, so wird sie *Ecktransversale* genannt.

Auch bei den Winkelsymmetralen, Schwerlinien, Höhenlinien und Streckensymmetralen eines Dreiecks handelt es sich demnach um Transversalen.

Satz 4.13. Satz von Menelaos [13, S. 17]

Es sei ABC ein Dreieck und D, E, F drei Punkte, mit $D \in g(A, B)$, $E \in g(B, C)$ und $F \in g(A, C)$, wobei D, E, F jeweils von A, B, C verschieden sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i). D, E und F liegen auf einer Geraden h .

(ii). Für die folgenden Teilverhältnisse gilt:

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1 \quad (4.7)$$

Beweis. [13, S. 18]

(i) $\Rightarrow$ (ii). Angenommen, D, E, F liegen auf einer Geraden h . Man fällt die Lote von den Eckpunkten des Dreiecks A, B, C auf h . Dann entstehen die Punkte $\{A', B', C'\} \in h$ und AA', BB', CC' sind jeweils parallel zueinander. Wendet man den orientierten Strahlensatz (Satz 3.3) mit den Scheitelpunkten D, E, F an, erhält man

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AA'}{BB'}, \quad \frac{EB}{EC} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{FC}{FA} = \frac{CC'}{AA'}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \left(-\frac{AA'}{BB'}\right) \cdot \left(-\frac{BB'}{CC'}\right) \cdot \left(-\frac{CC'}{AA'}\right) = -\frac{AA' \cdot BB' \cdot CC'}{BB' \cdot CC' \cdot AA'} = -1$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen, $g(A, B) \parallel g(F, E)$. Dann folgt mittels des orientierten Strahlensatzes

$$\frac{AF}{FC} = \frac{BE}{EC}.$$

Wegen der Voraussetzung (4.7) gilt

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AF}{FC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$$

und wegen $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ somit $\frac{AD}{DB} = -1$. Das kann aber nur zutreffen, wenn $A = B$ gilt, was im Widerspruch dazu steht, dass es sich bei ABC um ein Dreieck handelt. Also folgt $g(A, B) \nparallel g(F, E)$ und es gibt einen Schnittpunkt $\tilde{D}$ der beiden Geraden. Dann liegen $\tilde{D}, E, F$ auf einer Geraden h und es folgt aus (i)

$$\frac{A\tilde{D}}{\tilde{D}B} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$

Wegen der Voraussetzung gilt aber auch

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$$

und man erhält $\tilde{D} = D$. Das ergibt $\{D, E, F\} \in h$.

□

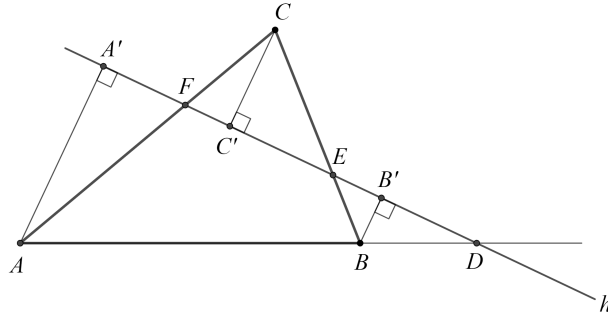


Abbildung 49: Satz von Menelaos (in Anlehnung an [13, S. 18])

Satz 4.14. Satz von Ceva [13, S. 19]

Es sei ABC ein Dreieck und D, E, F drei von A, B, C verschiedene Punkte für die gilt $D \in g(A, B)$, $E \in g(B, C)$ und $F \in g(C, A)$. Dann sind äquivalent:

(i). $g(A, E) \cap g(B, F) \cap g(C, D) = \{S\}$ oder $g(A, E) \parallel g(B, F) \parallel g(C, D)$

(ii). Für die folgenden Teilverhältnisse gilt:

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot \frac{CE}{EB} = 1 \tag{4.8}$$

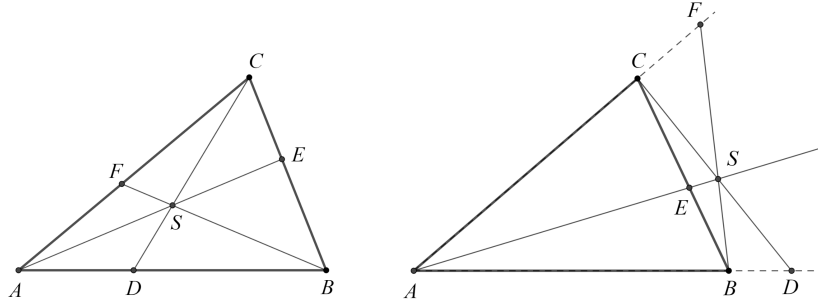


Abbildung 50: Satz von Ceva (Schnittpunkt S innerhalb (links) und außerhalb (rechts) des Dreiecks (in Anlehnung an [13, S. 19])

Beweis. [13, S. 19f.]

(i) $\Rightarrow$ (ii). **1. Fall:** $g(A, E) \cap g(B, F) \cap g(C, D) = \{S\}$

Man betrachte das Dreieck ADC und die Gerade $g(B, F)$, auf der sich die Punkte F, S und B befinden. Dann gilt nach dem Satz des Menelaos (Satz 4.13)

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{DB}{BA} \cdot \frac{CS}{SD} = -1 \quad (4.9)$$

Erneutes Anwenden des Satz des Menelaos auf das Dreieck DBC und die Gerade $g(A, E)$ führt zu

$$\frac{DS}{SC} \cdot \frac{BA}{AD} \cdot \frac{CE}{EB} = -1 \quad (4.10)$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen in (4.9) und (4.10), so erhält man wegen

$$\frac{CS}{SD} \cdot \frac{DS}{SC} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{DB}{BA} \cdot \frac{BA}{AD} = \frac{BD}{DA}$$

$$1 = (-1) \cdot (-1) = \frac{AF}{FC} \cdot \frac{DB}{BA} \cdot \frac{BA}{AD} \cdot \frac{CS}{SD} \cdot \frac{DS}{SC} \cdot \frac{CE}{EB} = \frac{AF}{FC} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot 1 \cdot \frac{CE}{EB}$$

die zu zeigende Gleichung in (4.8).

2. Fall: $g(A, E) \parallel g(B, F) \parallel g(C, D)$

Es folgt aus dem orientierten Strahlensatz (Satz 3.3) mit C bzw. B als Scheitelpunkten

$$\frac{AF}{FC} = \frac{EB}{BC} \quad \text{bzw.} \quad \frac{BD}{DA} = \frac{BC}{CE}. \quad (4.11)$$

Außerdem gilt

$$\frac{EB}{BC} \cdot \frac{BC}{CE} = \frac{BE}{EC} \quad \text{sowie} \quad \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CE}{EB} = 1$$

und es folgt durch Multiplikation der beiden Gleichungen in (4.11)

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FC} \cdot \frac{BD}{DA} &= \frac{BE}{EC} \quad / \cdot \frac{CE}{EB} \\ \frac{AF}{FC} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot \frac{CE}{EB} &= 1 \end{aligned}$$

ebenfalls die Gleichung in (4.8).

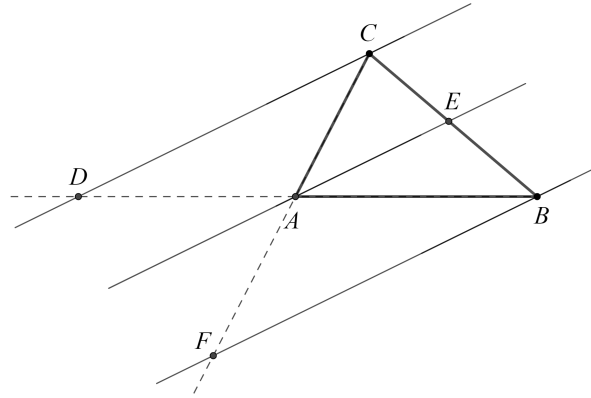


Abbildung 51: Satz von Ceva mit parallelen Geraden (Fall 2)

(ii) $\Rightarrow$ (i). **1. Fall:** O.B.d.A. sei $g(A, E) \parallel g(B, F)$.

Dann folgt aus dem orientierten Strahlensatz (Satz 3.3) mit C als Scheitelpunkt

$$\frac{AF}{FC} = \frac{EB}{BC}.$$

Setzt man das in (4.8) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{EB}{BC} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot \frac{CE}{EB} &= \frac{BD}{DA} \cdot \frac{CE}{BC} = 1 \quad / \cdot \frac{BC}{CE} \\ \frac{BD}{DA} &= \frac{BC}{CE}. \end{aligned}$$

Nach der Umkehrung des orientierten Strahlensatzes (Satz 3.3) sind die Geraden $g(C, D)$ und $g(A, E)$ parallel. Insgesamt bedeutet das $g(A, E) \parallel g(B, F) \parallel g(C, D)$.

2. Fall: O.B.d.A. sei $g(A, E) \not\parallel g(B, F)$.

Daher gibt es einen Schnittpunkt S mit $g(A, E) \cap g(B, F) = \{S\}$. Aus dem Satz von Menelaos (Satz 4.13) folgt für das Dreieck AEC und die Gerade $g(S, F)$

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CB}{BE} \cdot \frac{ES}{SA} = -1. \quad (4.12)$$

Die Geraden $g(C, S)$ und $g(A, B)$ können nicht parallel sein, denn sonst würde wegen des orientierten Strahlensatzes

$$\frac{EC}{CB} = \frac{ES}{SA}$$

gelten.

Eingesetzt in (4.12) ergäbe das

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CB}{BE} \cdot \frac{EC}{CB} = -1.$$

Außerdem wäre $\frac{EC}{CB} \cdot \frac{CB}{BE} = \frac{CE}{EB}$, woraus mit der vorhergehenden Gleichung $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CE}{EB} = -1$ folgt. Dann muss aber wegen (4.8) $\frac{BD}{DA} = -1$ sein und somit $B = A$. Das ist nicht möglich, da es sich bei ABC um ein Dreieck handelt. Damit ist $g(C, S) \nparallel g(A, B)$ und es gibt einen Schnittpunkt $\{D'\} = g(C, S) \cap g(A, B)$. Damit erfüllen die Geraden $g(A, E), g(B, F), g(C, D')$ die Voraussetzungen in (i), da sie sich alle im Punkt S schneiden und man erhält

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{BD'}{D'A} \cdot \frac{CE}{EB} = 1$$

Es gilt aber auch

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot \frac{CE}{EB} = 1$$

wegen der Voraussetzung. Somit gilt $D' = D$ und damit auch $g(A, E) \cap g(B, F) \cap g(C, D) = \{S\}$.

□

Mit dem Satz von Stewart kann die Länge einer Ecktransversale in einem Dreieck berechnet werden.

Satz 4.15. Satz von Stewart [19, S. 62]

Es sei ABC ein Dreieck, X ein beliebiger Punkt auf AB und H_c der Höhenfußpunkt auf AB .
Bezeichne

$$x := |XH_c|$$

$$c_1 := |AX| \quad \text{und} \quad c_2 := |XB|, \quad c_1 + c_2 = c.$$

Dann gilt

$$c \cdot (|CX|^2 + c_1 c_2) = a^2 c_1 + b^2 c_2.$$

Beweis. [19, S. 62f.]

Wegen des Satzes des Pythagoras (Satz 3.9) gilt

$$a^2 = h_c^2 + (c_2 - x)^2 = h_c^2 + c_2^2 + x^2 - 2c_2 x \quad (4.13)$$

$$b^2 = h_c^2 + (c_1 + x)^2 = h_c^2 + c_1^2 + x^2 + 2c_1 x \quad (4.14)$$

Multiplizieren von (4.13) mit c_1 und (4.14) mit c_2 liefert wegen $|CX|^2 = h_c^2 + x^2$

$$a^2 c_1 = c_1 |CX|^2 + c_1 c_2^2 - 2c_1 c_2 x$$

$$b^2 c_2 = c_2 |CX|^2 + c_1^2 c_2 + 2c_1 c_2 x$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, führt das zu

$$a^2 c_1 + b^2 c_2 = |CX|^2 \underbrace{(c_1 + c_2)}_c + c_1 c_2 \underbrace{(c_1 + c_2)}_c = c \cdot (|CX|^2 + c_1 c_2).$$

□

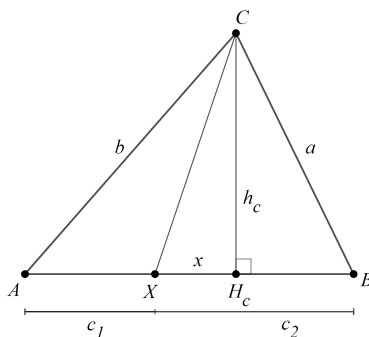


Abbildung 52: Satz von Stewart (in Anlehnung an [19, S. 62])

Satz 4.16. Satz vom Mittendreieck [3, S. 52]

Es sei ABC ein Dreieck und M_a, M_b, M_c die jeweiligen Seitenmittelpunkte. Sie bilden die Eckpunkte des Dreiecks $M_aM_bM_c$, das als Mittendreieck bezeichnet wird.

- (i). Die Dreiecke $AM_cM_b, M_cBM_a, M_bM_aC$ und $M_aM_bM_c$ haben zu AB, BC, CA parallele Seiten mit den Längen $\frac{|AB|}{2}, \frac{|BC|}{2}, \frac{|CA|}{2}$,
- (ii). sind zueinander kongruent und
- (iii). ähnlich zu ABC .
- (iv). Der Höhenschnittpunkt H_M des Mittendreiecks entspricht dem Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC .
- (v). Der Schwerpunkt S von ABC stimmt mit dem Schwerpunkt S_M des Mittendreiecks überein.

Beweis.

- (i). wurde bereits im Beweis zum Satz vom Höhenschnittpunkt (Satz 4.4) gezeigt.
- (ii). Da die Dreiecke jeweils in allen drei Seiten übereinstimmen, folgt aus dem SSS-Satz die Kongruenz.
- (iii). Die Seiten des Dreiecks ABC sind doppelt so lang, wie die Seiten der kleinen Dreiecke. Demzufolge sind $AM_cM_b, M_cBM_a, M_bM_aC$ und $M_aM_bM_c$ nach dem S:S:S-Satz ähnlich zu ABC .

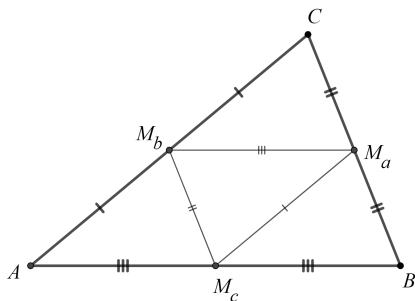


Abbildung 53: Mittendreieck (in Anlehnung an [3, S. 52])

- (iv). wurde ebenfalls im Beweis zum Höhenschnittpunkt mit bewiesen.
- (v). Es sei ABC ein Dreieck und $M_aM_bM_c$ das zugehörige Mittendreieck. M_c ist der Mittelpunkt von AB . Daher handelt es sich bei M_cC um eine Schwerlinie von ABC . Es sei X der Schnittpunkt dieser Schwerlinie mit M_bM_a . Es gilt zu zeigen, dass X der Mittelpunkt

von M_bM_a ist. Die Dreiecke M_bXC und AM_cC sind ähnlich, da sie den Winkel $\angle ACM_c$ gemeinsam haben und $\angle XM_bC \equiv \angle M_cAC$ wegen des Stufenwinkelsatzes (Satz 3.6) gilt. Aufgrund von $|CA| = 2|CM_b|$ erhält man außerdem $|AM_c| = 2|M_bX|$. Es folgt

$$\begin{aligned} |M_bX| + |XM_a| &= \frac{1}{2}|AB| = |AM_c| = 2|M_bX| \\ |XM_a| &= |M_bX|. \end{aligned}$$

Also ist X der Mittelpunkt von M_bM_a und XM_c stimmt mit der Schwerlinie CM_c von ABC überein. Analog zeigt man, dass die übrigen beiden Schwerlinien von $M_aM_bM_c$ mit jenen von ABC übereinstimmen. Daraus folgt $S = S_M$.

□

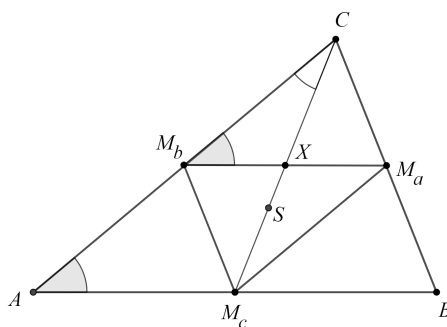


Abbildung 54: Schwerpunkt des Mittendreiecks

5 Interessantes über den Schulstoff hinaus

5.1 Zwei Sätze über die Besonderheit gleichseitiger Dreiecke

Satz 5.1. Satz von Morley [20]

Es sei ABC ein Dreieck. Man unterteile die Innenwinkel des Dreiecks in jeweils drei gleich große Winkel. Die Schnittpunkte der zur jeweiligen Dreiecksseite gehörigen Winkelteilungslinien bilden ein Dreieck XYZ . Dann ist das durch diese Konstruktion entstandene Dreieck stets gleichseitig. Es wird Morley-Dreieck genannt.

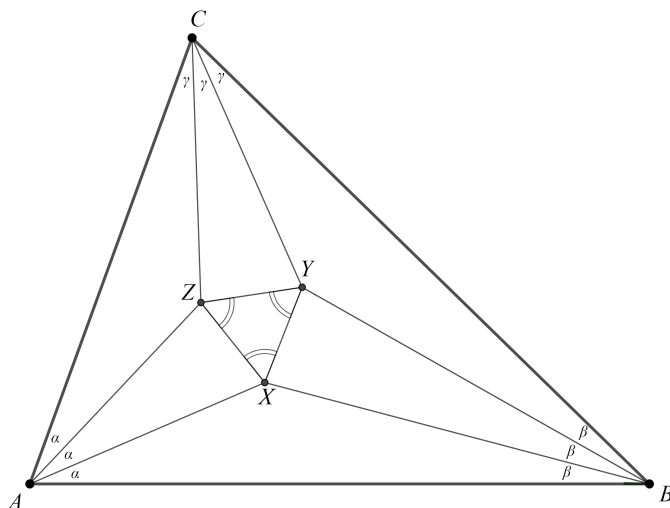


Abbildung 55: Satz von Morley (in Anlehnung an [20, S. 75])

Beweis. [20, S. 75f.]

Für die Innenwinkel von ABC gelte: $\angle BAC =: 3\alpha$, $\angle CBA =: 3\beta$ und $\angle ACB =: 3\gamma$. Es sei X der zur Seite AB gehörige Eckpunkt des Morley-Dreiecks, P ein Punkt auf der Dreiecksseite CA mit $|AX| = |AP|$ und Q jener Punkt auf BC für den $|BX| = |BQ|$ gilt. Man konstruiere ein Dreieck PXR , sodass $\angle XPR = 30^\circ$ und $\angle PRX = R$. Dann ist $\angle RXP = 60^\circ$ wegen der Winkelsumme im Dreieck. Man erkennt, dass die markierten Abschnitte gleich lang sind:

Fällt man das Lot von A auf PX erhält man den Punkt S . Das Dreieck AXP ist nach der Konstruktion gleichschenkelig. Die Strecke AS entspricht somit der Höhe durch A und S ist der Mittelpunkt von PX . Also gilt $|PS| = |SX|$. S ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Umkreises des rechtwinkligen Dreiecks PXR . Dann sind die Strecken PS , SR und SX Radien

des Kreises und somit $|PS| = |SR| = |SX|$. Das Dreieck PSR ist damit gleichschenkelig und $30^\circ = \angle SPR = \angle PRS$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} R &= \angle PRX = \angle PRS + \angle SRX \\ R &= 30^\circ + \angle SRX \Leftrightarrow \angle SRX = 60^\circ. \end{aligned}$$

Dann ist das Dreieck SXR gleichseitig und $|SX| = |XR|$. Man fällt das Lot von X auf AB und erhält den Punkt U . Die Dreiecke AXS und AUX sind kongruent, wegen $\angle XAS = \angle UAX = \alpha$, $\angle ASX = \angle XUA = R$ und der gemeinsamen Seite AX . Daraus folgt $|UX| = |SX|$. Analog erhält man $|UX| = |XT|$, wenn T der Höhenfußpunkt des gleichschenkligen Dreiecks XBQ auf der Seite XQ ist. Das führt schließlich zu $|XT| = |TQ|$. Somit sind alle gekennzeichneten Strecken tatsächlich kongruent.

Es sei nun $g(P, R) \cap g(B, T) = \{Y\}$. Die Dreiecke RXY , YXT und YTQ („Keile“ genannt) sind kongruent. Alle besitzen einen rechten Winkel und jeweils eine kongruente Seite. Außerdem teilen sich die Dreiecke RXY und YXT die Seite XY und YXT und YTQ haben die Seite YT gemeinsam. Es gilt offensichtlich

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 2R = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60^\circ \Leftrightarrow \gamma = 60^\circ - \alpha - \beta.$$

Dann gilt

$$\angle QXP = 360^\circ - 2(90^\circ - \alpha) - 2(90^\circ - \beta) = 2\alpha + 2\beta = 120^\circ - 2\gamma$$

und außerdem

$$\angle YXR = \angle TXY = \angle YQT = \frac{1}{2}(\angle QXP - 60^\circ) = 30^\circ - \gamma.$$

Aufgrund der Gleichschenkligkeit des Dreiecks PXQ ist $\angle XPQ = \angle PQX = 30^\circ + \gamma$. Aus $\angle XPR = 30^\circ$ folgt sogleich $\angle YPQ = \gamma$ und $\angle PQY = \angle PQX - \angle YQT = (30^\circ + \gamma) - (30^\circ - \gamma) = 2\gamma$ und damit $\angle QYP = 180^\circ - 3\gamma$.

Also sind die Winkel $\angle BCA$ und $\angle QYP$ supplementär. Da die Winkelsumme im Viereck $4R = 360^\circ$ beträgt, ergänzen sich auch die Winkel $\angle YPC$ und $\angle CQY$ auf $2R$. Aus dem Peripheriewinkelsatz (Satz 4.6) folgt, dass die Punkte C, P, Y, Q auf einem Kreis liegen. Aus demselben Satz erhält man für die Peripheriewinkel $\angle YCQ = \angle YPQ = \gamma$ über der Sehne YQ . Also ist Y der Eckpunkt des Morley-Dreiecks über der Seite BC . Eine analoge Vorgehensweise resultiert im dritten Eckpunkt des Morley-Dreiecks, dem Punkt Z über der Seite CA . Die dabei entstehenden „Keile“ sind kongruent zueinander und zu den vorherigen „Keilen“. Damit erhält man $|ZX| = |YX|$ und $\angle YXZ = 60^\circ$. Also ist das Morley-Dreieck XYZ tatsächlich gleichseitig. $\square$

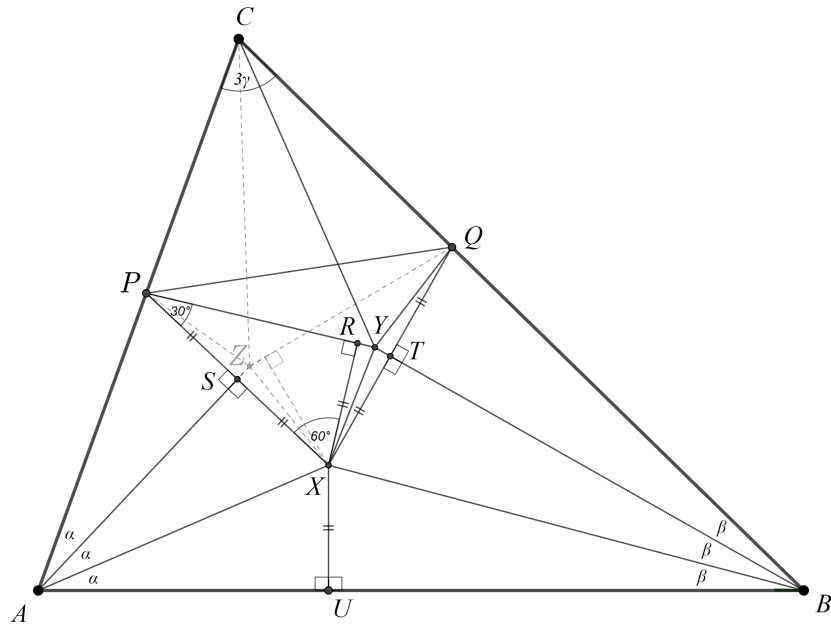


Abbildung 56: Beweis zum Satz von Morley (in Anlehnung an [20, S. 76])

Satz 5.2. Satz von Napoleon [28, S. 111]

Es sei ABC ein Dreieck. Man errichte über jeder Dreiecksseite ein gleichseitiges Dreieck. Dann bilden die Umkreismittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke wieder ein gleichseitiges Dreieck, das Napoleon-Dreieck genannt wird.

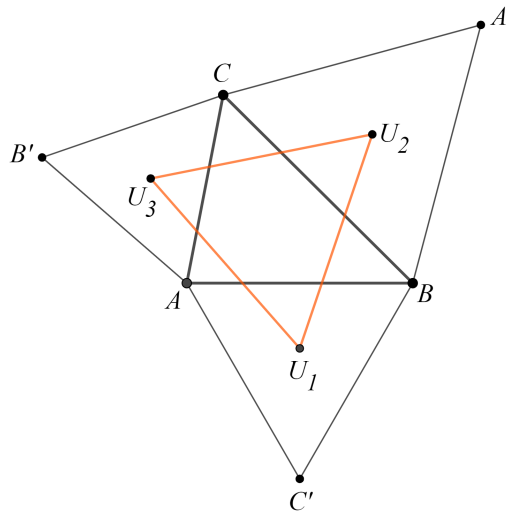


Abbildung 57: Satz von Napoleon

Beweis. [28, S. 112ff.]

Es seien U_1, U_2, U_3 die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $AC'B, BA'C, CB'A$. Man betrachte dazu Abbildung 58. Diese Dreiecke sind nach Konstruktion gleichseitig, deshalb stimmt der Umkreismittelpunkt mit dem Schwerpunkt überein. Aufgrund des Satzes vom Schwerpunkt (Satz 4.3) gilt $\frac{|C'U_1|}{|U_1M_c|} = \frac{2}{1}$. Wegen $|C'M_c| = |C'U_1| + |U_1M_c|$ ist

$$\frac{|C'U_1|}{|C'M_c|} = \frac{2}{3} \quad (5.1)$$

Aus dem Satz von Stewart (Satz 4.15) erhält man

$$\begin{aligned} c \cdot \left(|C'M_c|^2 + \frac{c^2}{4} \right) &= c^2 \cdot \frac{c}{2} + c^2 \cdot \frac{c}{2} \\ |C'M_c|^2 + \frac{c^2}{4} &= \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} \\ |C'M_c|^2 &= c^2 - \frac{c^2}{4} \\ |C'M_c|^2 &= \frac{4c^2}{4} - \frac{c^2}{4} \\ |C'M_c| &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c \end{aligned}$$

Einsetzen in (5.1) liefert

$$\frac{|C'U_1|}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{|C'U_1|}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{|C'U_1|}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Analog treffen ebenso

$$\begin{aligned} \frac{|A'U_2|}{a} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{|B'U_3|}{b} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{|C'U_1|}{c} = \frac{|A'U_2|}{a} = \frac{|B'U_3|}{b}$$

zu. Nun sind die Winkel

$$\begin{aligned}\angle U_3CU_2 &= \angle U_3CA + \angle ACU_2 \\ \angle ACA' &= \angle ACU_2 + \angle U_2CA'\end{aligned}$$

von Interesse. Die Punkte U_1, U_2, U_3 sind Umkreismittelpunkte, Schwerpunkte und Inkreismittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke. Also sind CU_3 und CU_2 Innenwinkelsymmetralen. Damit gilt $\angle U_3CA = \angle U_2CA' = 30^\circ$. Außerdem ist

$$\angle U_3CU_2 = 2 \cdot 30^\circ + \angle ACB = 60^\circ + \angle ACB = \angle ACA'.$$

Nach dem S:W:S-Satz sind die Dreiecke $AA'C$ und U_3U_2C ähnlich. Damit erhält man

$$\frac{|AA'|}{|U_3U_2|} = \frac{b}{|CU_3|} = \frac{b}{|B'U_3|} = \frac{\sqrt{3}}{1}.$$

Außerdem sind die Dreiecke $B'BC$ und $A'AC$ kongruent, wie man durch Anwendung des SWS-Satzes einsieht. Damit ist $|AA'| = |BB'|$. Analog zeigt man $\frac{|BB'|}{|U_3U_1|} = \frac{\sqrt{3}}{1}$ und $\frac{|CC'|}{|U_1U_2|} = \frac{\sqrt{3}}{1}$, sowie $|AA'| = |BB'| = |CC'|$. Das führt zu

$$\frac{|AA'|}{|U_3U_2|} = \frac{|BB'|}{|U_3U_1|} = \frac{|CC'|}{|U_1U_2|}.$$

Dann muss auch $|U_3U_2| = |U_3U_1| = |U_1U_2|$ gelten und das Napoleon-Dreieck ist gleichseitig. $\square$

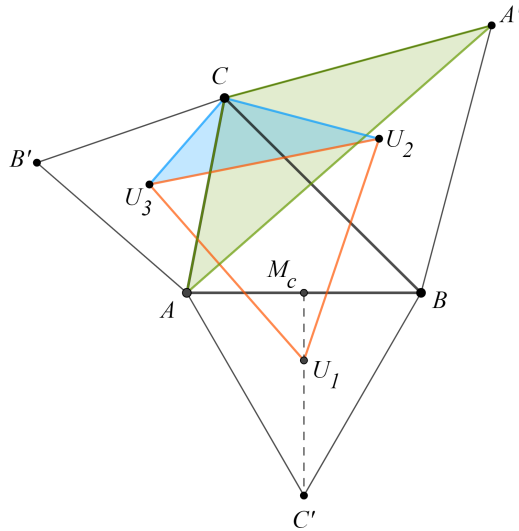


Abbildung 58: Beweis zum Satz von Napoleon (in Anlehnung an [28, S. 113])

5.2 Die Ankreise eines Dreiecks

Satz 5.3. Ankreise des Dreiecks [16, S. 305]

In einem Dreieck ABC schneiden sich je zwei Außenwinkelsymmetralen und eine Innenwinkelsymmetrale in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises, der eine Dreiecksseite und die Verlängerungen der zwei anderen Seiten berührt.

Beweis. [16, S. 305]

Es seien γ' und β' die Außenwinkel zu γ bzw. β . Die Außenwinkelsymmetralen $w_{\gamma'}$ und $w_{\beta'}$ schneiden sich in einem Punkt O_a . Man fällt die Lote von O_a auf $g(A, C)$ und $g(B, C)$. Dabei entstehen die Lotfußpunkte $A_b \in g(A, C)$ und $A_c \in g(B, C)$. Die Punkte auf $g(A, C)$ und $g(B, C)$ sind von $w_{\gamma'}$ gleich weit entfernt. Also ist $|O_a A_b| = |O_a A_c|$. Betrachtet man ebenso die Außenwinkelsymmetrale $w_{\beta'}$ und die Trägergeraden $g(A, B)$ und $g(B, C)$ der Dreiecksseiten mit dem Lotfußpunkt $A_c \in g(A, B)$, so erhält man $|O_a A_a| = |O_a A_c|$. Insgesamt ergibt das

$$|O_a A_b| = |O_a A_a| = |O_a A_c|.$$

Demnach ist der Punkt O_a von $g(A, C)$ und $g(A, B)$ gleich weit entfernt. Es muss daher gelten $O_a \in w_\alpha$. Das bedeutet $w_\alpha \cap w_{\beta'} \cap w_{\gamma'} = \{O_a\}$. Der Punkt O_a ist dann der Mittelpunkt des beschriebenen Kreises mit Radius $|O_a A_a| = |O_a A_b| = |O_a A_c|$. Er berührt die Dreiecksseite BC im Punkt A_a und die Verlängerungen der Dreiecksseiten CA und AB in den Punkten A_b und A_c . $\square$

Definition. Der Kreis in Satz 5.3 wird *Ankreis* des Dreiecks ABC an der Seite BC genannt. Jedes Dreieck besitzt demzufolge drei Ankreise. Die entsprechenden Kreismittelpunkte werden mit O_b und O_c bezeichnet.

Die Ankreismittelpunkte O_a, O_b, O_c bilden die Eckpunkte eines neuen Dreiecks. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $O_a O_b O_c$ stehen in einem besonderen Zusammenhang.

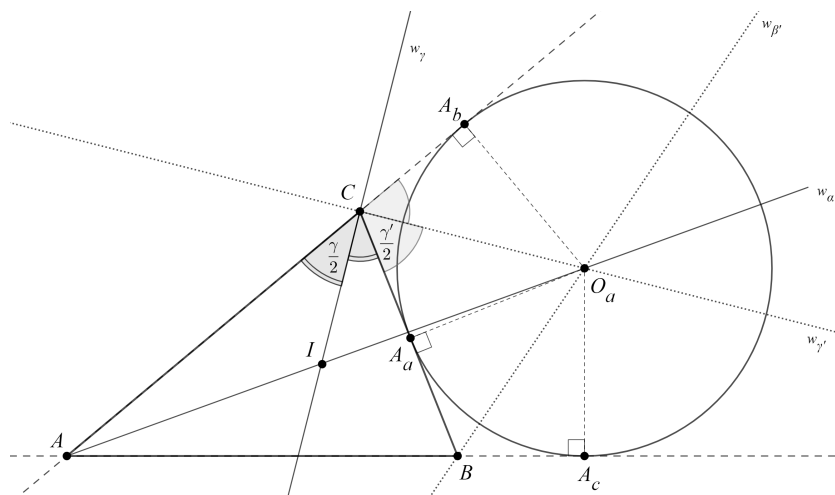


Abbildung 59: Ankreis des Dreiecks

Satz 5.4. Höhenschnittpunkt des Ankreisdreiecks [29, S. 7]

Es sei ABC ein Dreieck und $A_aA_bA_c$ das entsprechende Dreieck mit den Ankreismittelpunkten als Eckpunkten. Dann stimmt der Höhenschnittpunkt des Ankreisdreiecks mit dem Inkreismittelpunkt von ABC überein.

Beweis. [29, S. 7f.]

Man betrachte nochmals Abbildung 59 sowie Abbildung 60. Der Winkel $\gamma' := \angle A_aCA_b$ ist ein Außenwinkel und somit gleichzeitig ein Nebenwinkel von γ . Daraus folgt $\gamma + \gamma' = 2R$. Die Innenwinkelsymmetrale w_γ halbiert den Winkel γ und die Außenwinkelsymmetrale $w_{\gamma'}$ halbiert den Winkel γ' . Für den Winkel $\angle ICO_a$ gilt

$$\angle ICO_a = \angle ICA_a + \angle A_aCO_a = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma'}{2} = R.$$

Demnach gilt $w_\gamma \perp w_{\gamma'}$. Außerdem ist $O_c \in w_\gamma$. Also ist w_γ die Höhenlinie des Dreiecks $O_aO_bO_c$ durch den Eckpunkt O_c . Analoges gilt für die Innenwinkelsymmetralen w_α und w_β , die den Höhenlinien von $O_aO_bO_c$ durch die Punkte O_a bzw. O_b entsprechen. Also stimmt der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks $O_aO_bO_c$ überein. $\square$

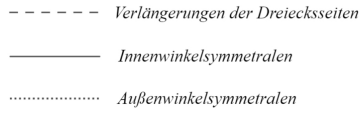


Abbildung 60: Beweis zum Höhenschnittpunkt des Ankreisdreiecks (in Anlehnung an [27, S. 13])

Hilfssatz 5.5. *[27, S. 11]*

Sei P ein Punkt außerhalb eines Kreises. Dann sind die Tangenten $g(A, P)$ und $g(A', P)$ durch P an den Kreis Spiegelbilder am Kreisdurchmesser durch P .

Beweis. Wegen $MA \equiv MA'$, $\angle MAP \equiv \angle PA'M$ und der gemeinsamen Seite MP sind die Dreiecke MPA und $MA'P$ kongruent (SSW-Satz). Also trifft auch $\angle APM \equiv \angle MPA'$ zu und $g(M, P)$ ist die Symmetrieachse der beiden Dreiecke. Also verhalten sich die Tangenten spiegelbildlich zueinander. $\square$

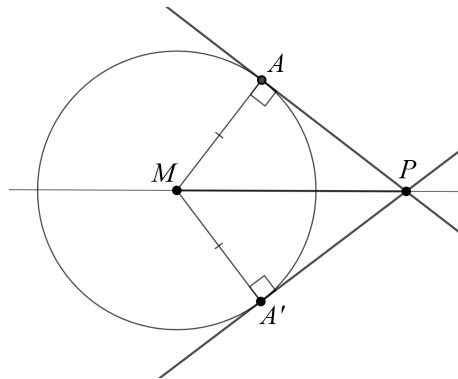


Abbildung 61: Tangenten an einen Kreis

Satz 5.6. Nagelscher Punkt [13, S. 76]

Es sei ABC ein Dreieck und A_a, B_b, C_c die Berührungspunkte der Ankreise an den jeweiligen Dreiecksseiten. Verbindet man diese Punkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks ABC , so schneiden sie sich in einem Punkt, der Nagelscher Punkt genannt wird.

Beweis. [30]

Wegen Hilfssatz 5.5 treffen $|AA_b| = |AA_c|$, $|CA_b| = |CA_a|$ und $|BA_a| = |BA_c|$ zu. Für die Seiten des Dreiecks ABC gilt

$$c = |AB| = |AA_c| - |BA_c|$$

$$a = |BC| = |BA_a| + |CA_a|$$

$$b = |CA| = |AA_b| - |CA_b|.$$

Daraus folgt für den Dreiecksumfang

$$u = a + b + c = |AA_c| + |AA_b| = 2|AA_b| = 2|AA_c| \Leftrightarrow |AA_b| = |AA_c| = \frac{1}{2}u =: s$$

Außerdem sind

$$|CA_a| = |AA_b| - |CA| = s - b$$

$$|BA_a| = |AA_c| - |AB| = s - c.$$

Analog folgen

$$|AB_b| = s - c$$

$$|CB_b| = s - a$$

$$|AC_c| = s - b$$

$$|BC_c| = s - a.$$

Damit erhält man

$$\frac{|AB_b|}{|CB_b|} \cdot \frac{|BC_c|}{|AC_c|} \cdot \frac{|CA_a|}{|BA_a|} = \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} = 1$$

Jetzt kann man den Satz von Ceva (Satz 4.14) anwenden und es folgt $AA_a \cap BB_b \cap CC_c = \{N\}$. □

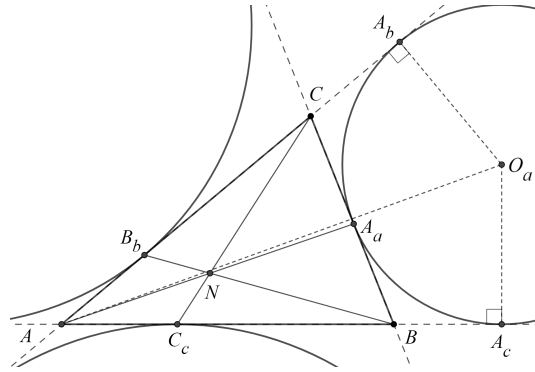


Abbildung 62: Nagelscher Punkt

5.3 Alternative Flächeninhaltsformeln

Die bekannte Formel $A = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$ ist nur eine Möglichkeit den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen. Eine Flächenformel verwendet dagegen den Dreiecksumfang und den Inkreisradius.

Satz 5.7. Flächenformel - Umfang und Inkreisradius [21, S. 220]

Es sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I und entsprechendem Inkreisradius r_I . Außerdem sei $s := \frac{u}{2}$ für den Dreiecksumfang u . Dann kann der Flächeninhalt des Dreiecks folgendermaßen berechnet werden

$$A = r_I \cdot s.$$

Beweis. Das Dreieck ABC kann in die Dreiecke ABI , BCI und AIC unterteilt werden. Dann erhält man aus der üblichen Flächenformel

$$A_{BCI} = \frac{a \cdot r_I}{2}$$

$$A_{AIC} = \frac{b \cdot r_I}{2}$$

$$A_{ABI} = \frac{c \cdot r_I}{2}$$

und damit

$$A_{ABC} = A_{BCI} + A_{AIC} + A_{ABI} = r_I \cdot \frac{a + b + c}{2} = r_I \cdot \frac{u}{2} = r_I \cdot s.$$

□

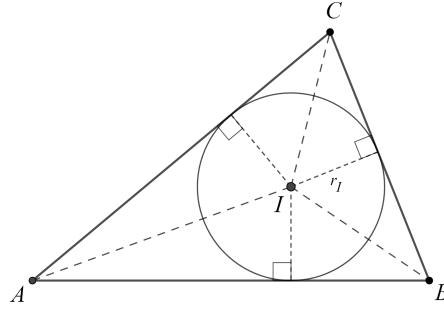


Abbildung 63: Beweis zur Flächenformel - Umfang und Inkreisradius

Satz 5.8. Heronsche Flächenformel [21, S. 220]

Es sei ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und halbem Umfang s . Dann lässt sich der Flächeninhalt wie folgt berechnen:

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

Beweis. [21, S. 219f.]

Die Geraden $g(A, C)$ und $g(A, B)$ sind Tangenten an den Inkreis in den Punkten I_b und I_c . Gleichzeitig berühren diese beiden Geraden den Ankreis an der Seite BC an den Punkten A_b und A_c . Wegen Hilfssatz 5.5 gelten $|AI_b| = |AI_c|$ und $|AA_b| = |AA_c|$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |I_b A_b| &= |I_c A_c| \Leftrightarrow |I_b C| + |CA_b| = |I_c B| + |BA_c| \\ &\Leftrightarrow |CI_a| + |CA_a| = |BI_a| + |BA_a| \end{aligned} \quad (5.2)$$

und außerdem gilt

$$|BC| = |BI_a| + |CI_a| = |BA_a| + |CA_a|. \quad (5.3)$$

Addition der Gleichungen in (5.2) und (5.3) ergibt

$$2|CI_a| + |BI_a| + |CA_a| = 2|BA_a| + |BI_a| + |CA_a| \Leftrightarrow |CI_a| = |BA_a|.$$

und das eingesetzt in (5.3) führt zu $|BI_a| = |CA_a|$. Im Beweis zum Satz vom Nagelschen Punkt (Satz 5.6) wurde $|AA_b| = |AA_c| = \frac{1}{2}u =: s$ gezeigt.

$$|I_b A_b| = |I_c A_c| = |I_c B| + |BA_c| = |BI_a| + |BA_a| = |BI_a| + |CI_a| = |BC| = a$$

Daraus folgt $|AI_b| = |AI_c| = s - a$. Durch analoges Vorgehen erhält man ebenso

$$\begin{aligned} |I_c A_c| &= |I_a A_a| = |AC| = b \quad \text{und} \quad |BI_a| = |BI_c| = s - b \\ |I_a A_a| &= |I_b A_b| = |AB| = c \quad \text{und} \quad |CI_b| = |CI_a| = s - c. \end{aligned}$$

Da es sich bei II_c und $O_a A_c$ um die Lote der jeweiligen Kreismittelpunkte auf $g(A, B)$ handelt, gilt $II_c \parallel O_a A_c$. Somit kann der zweite Strahlensatz mit Scheitelpunkt A angewandt werden und man erhält

$$\frac{|II_c|}{|O_a A_c|} = \frac{r_I}{r_A} = \frac{|AI_c|}{|AA_c|} = \frac{s - a}{s}. \quad (5.4)$$

Im Beweis zum Höhenschnittpunkt des Ankreisdreiecks (Satz 5.4) wurde gezeigt, dass die Innenwinkelsymmetrale und Außenwinkelsymmetrale eines Winkels orthogonal aufeinander stehen. Die Strecke IB ist die Winkelsymmetrale des Winkels β , die Strecke $O_a B$ ist die Winkelsymmetrale des Winkels β' . Es gilt demnach

$$\angle O_a B I = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta'}{2} = R.$$

Nach dem Satz vom Außenwinkel (Satz 3.5) ist

$$\begin{aligned} \angle I B I_c + \angle O_a B I &= \angle B O_a A_c + \angle O_a A_c B \\ \frac{\beta}{2} + R &= \angle B O_a A_c + R \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} = \angle B O_a A_c. \end{aligned}$$

Also sind die Dreiecke $II_c B$ und $O_a B A_c$ ähnlich. Das führt zu

$$\frac{r_I}{|I_c B|} = \frac{|B A_c|}{r_A} \Leftrightarrow r_I \cdot r_A = |I_c B| \cdot |B A_c| = (s - b) \cdot (s - c). \quad (5.5)$$

Multiplikation von (5.4) und (5.5) liefert

$$\begin{aligned} \frac{r_I \cdot r_I \cdot r_A}{r_A} &= \frac{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{s} \\ r_I^2 &= \frac{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{s} \\ r_I &= \sqrt{\frac{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{s}} \\ r_I \cdot s &= \sqrt{s^2 \cdot \frac{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{s}} \\ r_I \cdot s &= \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}. \end{aligned}$$

In Satz 5.7 wurde $A = r_I \cdot s$ gezeigt. Damit folgt sofort

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

□

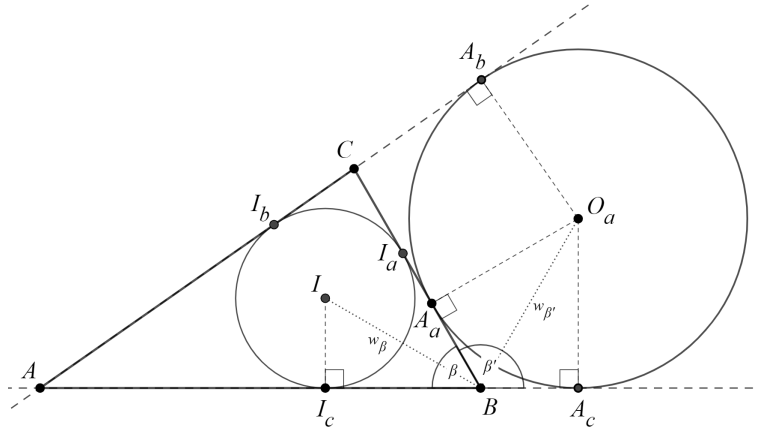


Abbildung 64: Heronsche Flächenformel (in Anlehnung an [21, S. 219])

5.4 Feuerbachkreis

Satz 5.9. Kleiner Satz von Feuerbach [27, S. 2]

In einem beliebigen Dreieck ABC liegen die Seitenmittelpunkte M_a, M_b, M_c und die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c auf einem Kreis.

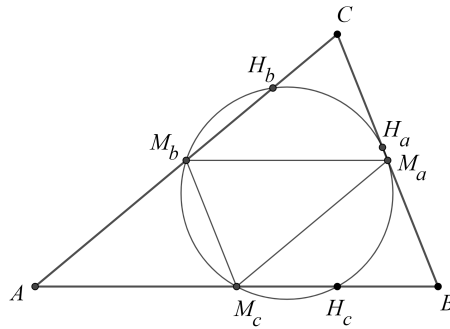


Abbildung 65: Kleiner Satz von Feuerbach (in Anlehnung an [27, S. 3])

Beweis. [27, S. 2f.]

Für die Höhenlinie h_c gilt $h_c \perp g(A, B)$. Aus $g(A, B) \parallel g(M_a, M_b)$ (Satz vom Mittendreieck 4.16) folgt daher auch $h_c \perp g(M_a, M_b)$. Die Dreiecke AH_cC und M_bXC mit $\{X\} = h_c \cap g(M_a, M_b)$ sind ähnlich, da sie den Winkel $\angle ACH_c$ gemeinsam haben und beide einen rechten Winkel besitzen. Außerdem ist $|AM_b| = |M_bC|$. Daraus folgt gemeinsam mit der Ähnlichkeit $|CX| = |XH_c|$. Dann kann H_c als Spiegelbild von C an der Gerade $g(M_a, M_b)$ betrachtet werden. Damit erhält man $\angle M_bCM_a \equiv \angle M_aH_cM_b$.

Da es sich bei $M_aM_bM_c$ um das Mittendreieck von ABC handelt, gilt $M_aM_c \parallel CM_b$ und $CM_a \parallel M_bM_c$. Also ist $CM_bM_cM_a$ ein Parallelogramm und somit $\angle M_bCM_a \equiv \angle M_aM_cM_b$. Insgesamt gilt demnach $\angle M_aM_cM_b \equiv \angle M_aH_cM_b$. Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (Satz 4.10) liegen deshalb M_b, M_a, H_c und M_c auf einem Kreis. Somit liegt H_c auf dem Umkreis des Dreiecks $M_aM_bM_c$. Analog zeigt man, dass sich H_a und H_b auf demselben Kreis befinden. $\square$

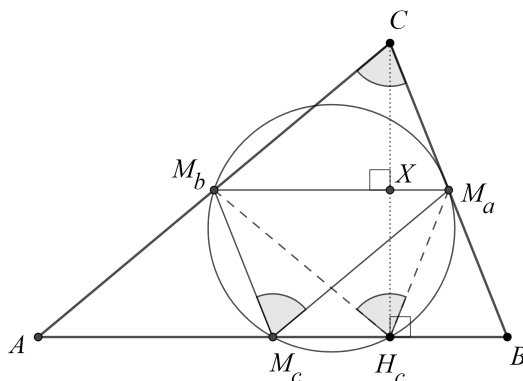


Abbildung 66: Beweis zum Kleinen Satz von Feuerbach

Definition. Der Kreis im Satz 5.9 wird *Feuerbachkreis* des Dreiecks ABC genannt.

Satz 5.10. Neunpunktekreis [27, S. 5]

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit Höhenschnittpunkt H und den Seitenmittelpunkten M_a, M_b, M_c sowie die Punkte D, E, F , die die jeweiligen Mittelpunkte der Strecken AH, BH, CH bilden. Die Punkte D, E, F werden auch als *Eulerpunkte* bezeichnet. Dann liegen die neun Punkte $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, D, E, F$ auf einem Kreis.

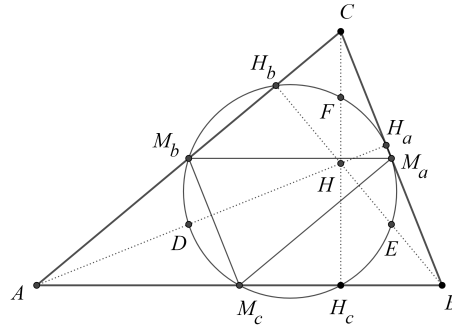


Abbildung 67: Neunpunktekreis (in Anlehnung an [27, S. 5])

Beweis. [27, S. 6]

Dass sich die Punkte $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c$ auf einem Kreis befinden, wurde bereits im Kleinen Satz von Feuerbach gezeigt. Es bleibt zu zeigen, dass auch die Punkte D, E, F auf diesem Kreis liegen. Um dies zu zeigen, betrachtet man das Dreieck AHC . Die Punkte H_a, H_b, H_c sind sowohl die Höhenfußpunkte von ABC als auch von AHC , denn die Höhenlinien von AHC sind AH_c, HH_b und CH_a . Die Mittelpunkte der Seiten von AHC sind D, F und M_b . Aus dem Kleinen Satz von Feuerbach folgt, dass die Seitenmittelpunkte D, F, M_c und die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c des Dreiecks AHC auf einem Kreis liegen. Außerdem befinden sich $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c$ des Dreiecks ABC auf einem Kreis. Es muss sich daher um denselben Kreis handeln, da ein Kreis eindeutig durch drei Punkte bestimmt wird. Ebenso erhält man, dass auch E auf diesem Kreis liegt, wenn man analog für das Dreieck ABH vorgeht. Somit befinden sich die neun angegebenen Punkte auf einem Kreis. $\square$

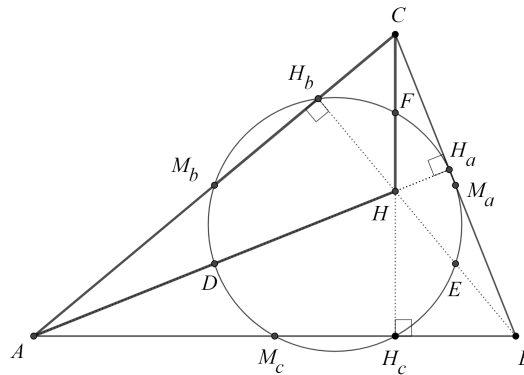


Abbildung 68: Beweis zum Neunpunktekreis (in Anlehnung an [27, S. 6])

Der Neunpunktekreis ist somit gleichzeitig der Umkreis von drei Dreiecken: $M_a M_b M_c$ (Mittendreieck), $H_a H_b H_c$ (Höhenfußdreieck) und DEF (Eulerdreieck).

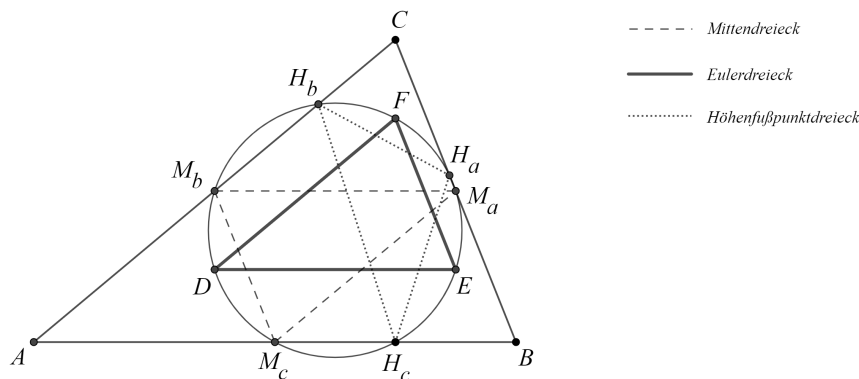


Abbildung 69: Neunpunktekreis als Umkreis

Satz 5.11. Feuerbach und Eulersche Gerade [27, S. 7f.]

Es sei ABC ein Dreieck. Dann liegt der Mittelpunkt Z des Feuerbachkreises auf der Eulerschen Geraden. Für den Mittelpunkt des Feuerbachkreises gilt außerdem

$$|UZ| = |ZH|.$$

Z ist also der Mittelpunkt von UH , wobei H den Höhenschnittpunkt und U den Umkreismittelpunkt von ABC bezeichnen.

Beweis. [27, S. 7f.]

Aus dem Satz zur Eulerschen Geraden (Satz 4.12) ist bekannt, dass U , S und H eines Dreiecks ABC auf der Eulerschen Geraden liegen. Im Satz vom Mittendreieck (Satz 4.16) wurde $U = H_M$ und $S = S_M$ gezeigt. Außerdem liegen S_M , H_M und Z , der Umkreismittelpunkt des Mittendreiecks und gleichzeitig Mittelpunkt des Feuerbachkreises von ABC , auf der Eulerschen Geraden von $M_a M_b M_c$. Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, muss auch Z auf der Eulerschen Geraden von ABC liegen. Die Eulersche Gerade von ABC stimmt demnach mit jener von $M_a M_b M_c$ überein.

Für das Dreieck ABC gilt $|HS| = 2|US|$ und für das Mittendreieck $|H_M S| = |US| = 2|SZ|$. Daraus folgt

$$|HS| = 2|US| = 2 \cdot 2|SZ| = 4|SZ|$$

und somit

$$\begin{aligned} |ZH| &= |HS| - |SZ| = 4|SZ| - |SZ| = 3|SZ| \\ |UZ| &= |US| + |SZ| = 2|SZ| + |SZ| = 3|SZ|. \end{aligned}$$

Also ist $|UZ| = |ZH|$. □

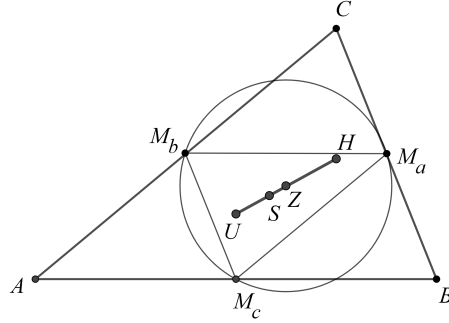


Abbildung 70: Lage des Feuerbachkreis-Mittelpunkts auf der Eulerschen Gerade

Satz 5.12. Radius von Um- und Feuerbachkreis [27, S. 5]

Es sei ABC ein Dreieck. Dann ist der Radius $r_F = |ZM_a|$ des Feuerbachkreises halb so groß wie der Radius $r_U = |AU|$ des Umkreises des Dreiecks ABC . Somit gilt

$$|AU| = 2|ZM_a|.$$

Beweis. [31]

Im Satz vom Schwerpunkt (Satz 4.3) bzw. in Satz 5.11 wurde $\frac{|AS|}{|SM_a|} = \frac{2}{1}$ bzw. $\frac{|US|}{|SZ|} = \frac{2}{1}$ gezeigt. Also gilt $\frac{|AS|}{|SM_a|} = \frac{|US|}{|SZ|}$. Aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes (Satz 3.2) mit Scheitelpunkt S folgt $g(A, U) \parallel g(Z, M_a)$. Mithilfe des 2. Strahlensatzes (Satz 3.1) folgert man $\frac{2}{1} = \frac{|US|}{|SZ|} = \frac{|AU|}{|ZM_a|}$ und die Behauptung ist gezeigt. □

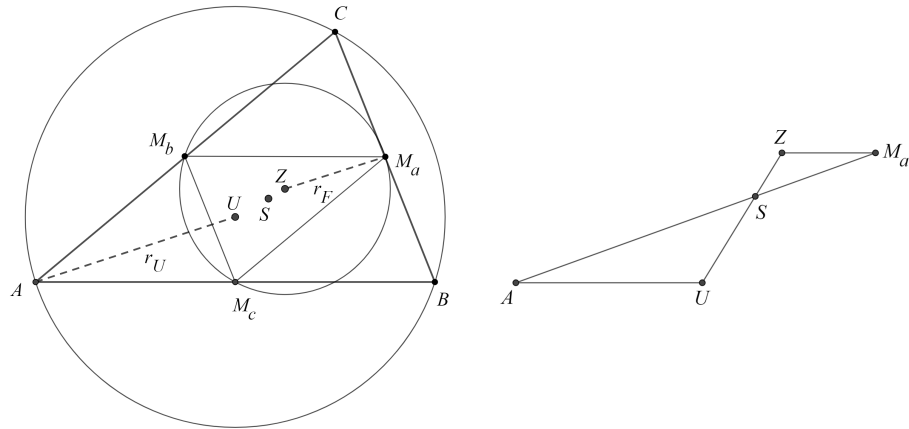


Abbildung 71: Umkreis und Feuerbachkreis des Dreiecks ABC (links) und zugehörige Strahlensatzfigur (rechts)

Satz 5.13. Großer Satz von Feuerbach [27, S. 9]

Es sei ABC ein Dreieck. Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis von innen und die drei Ankreise von außen.

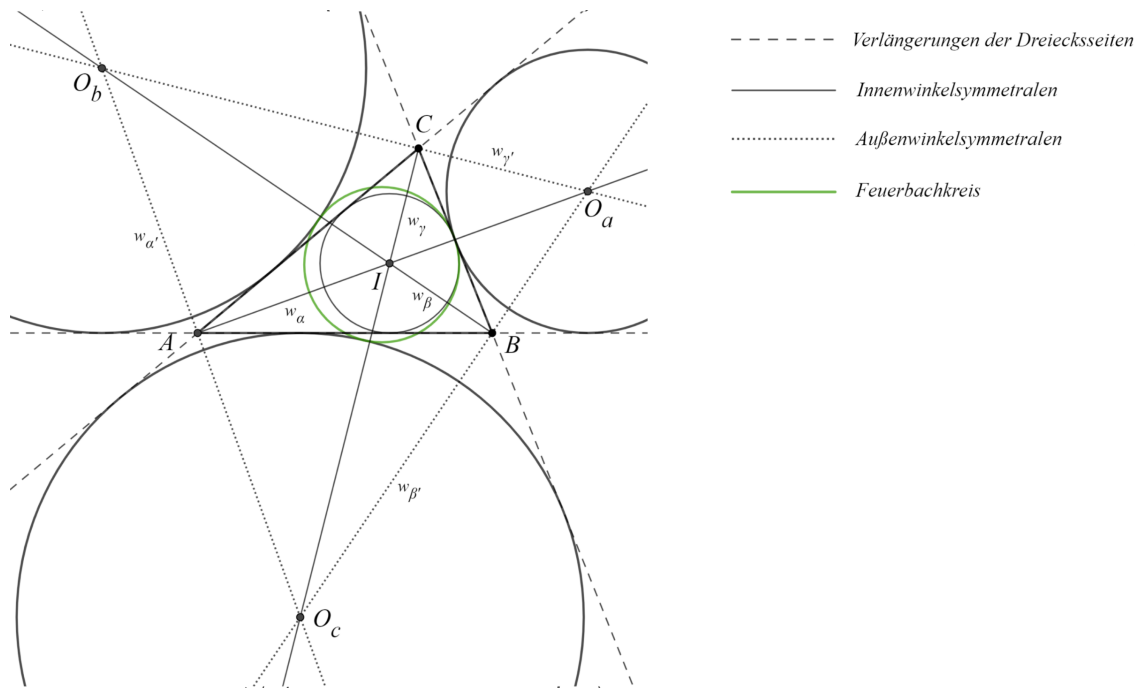


Abbildung 72: großer Satz von Feuerbach (in Anlehnung an [27, S. 9])

Diese Eigenschaft des Feuerbachkreises wurde von Karl Wilhelm Feuerbach 1822 entdeckt und

verleiht dem Kreis seinen Namen [22, S. 251]. Der Beweis dieses Satzes ist recht umfangreich und bedarf abgesehen von Hilfssatz (5.5) eines weiteren Hilfssatzes.

Hilfssatz 5.14. [27, S. 11]

Gegeben seien die Kreise k und k' , mit gemeinsamem Punkt P sowie eine Gerade g , mit $P \in g$, $g \cap k = \{Q\}$ und $g \cap k' = \{Q'\}$. Für die Tangenten t durch Q an k und t' durch Q' an k' gilt $t \parallel t' \Rightarrow k$ und k' berühren sich in P .

Beweis. [27, S. 11]

Für die Kreise k und k' mit den Mittelpunkten M bzw. M' und Radien r bzw. r' gilt $r = |MP| = |MQ|$ bzw. $r' = |M'P| = |M'Q'|$, woraus die Gleichschenkligkeit der Dreiecke PMQ und $PM'Q'$ folgt. Somit treffen außerdem

$$\angle MPQ \equiv \angle PQM \text{ und } \angle M'PQ' \equiv \angle PQ'M' \quad (5.6)$$

zu. Aus $t \parallel t'$ folgt mit $t \perp r$ und $t' \perp r'$ sofort $r \parallel r'$ und man erhält aus dem Stufenwinkelsatz (Satz 3.6) $\angle PQM \equiv \angle PQ'M'$. Daher gilt mithilfe von (5.6) $\angle MPQ \equiv \angle M'PQ'$ und damit $\angle MPQ \equiv \angle M'PQ$, aufgrund von $\{Q, Q', P\} \in g$. Dann müssen auch die Punkte M', M, P auf einer Geraden liegen. Das heißt, P liegt auf den Durchmesser der Kreise. Somit ist P der einzige Schnittpunkt von k und k' . $\square$

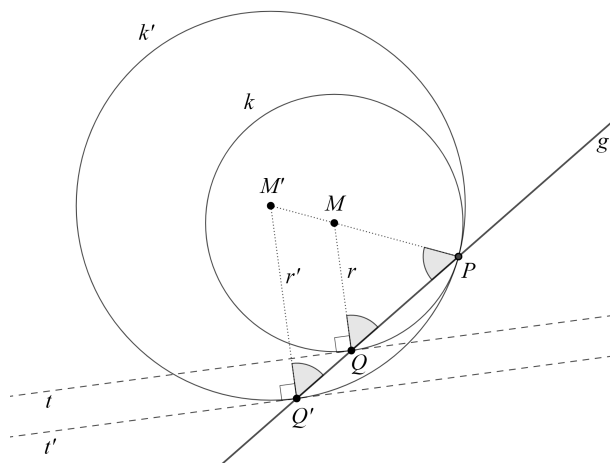


Abbildung 73: Berührungspunkt zweier Kreise (in Anlehnung an [27, S. 12])

Beweis. großer Satz von Feuerbach (Satz 5.13) [27, S. 12f.]

Zunächst definiert man die notwendigen Bestimmungsstücke. Einige sind bereits aus vorherigen Ausführungen bekannt und werden lediglich aus Gründen der Vollständigkeit angeführt.

- $\alpha := \angle BAC$, $\beta := \angle CBA$, $\gamma := \angle ACB$
- M_c ist der Seitenmittelpunkt von AB .
- H_c ist der Höhenfußpunkt der Höhe h_c .
- X ist der Schnittpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC mit AB .
- Der Punkt I ist der Mittelpunkt des Inkreises.
- m_{AB} ist die Streckensymmetrale von AB .
- X' ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_γ mit AB .
- C' ist der Schnittpunkt von w_γ mit dem Umkreis des Dreiecks ABC .

Wegen $C' \in w_\gamma$ gilt $\angle ACC' \equiv \angle C'CB$. Diese Winkel können als Peripheriewinkel über der Sehne AC' bzw. BC' betrachtet werden, woraus $AC' \equiv BC'$ folgt. Das Dreieck $AC'B$ ist demnach gleichschenkelig und $C' \in m_{AB}$. Aus dem Peripheriewinkelsatz für die Sehne AC' erhält man $\angle ABC' \equiv \angle ACC'$.

$$\angle IBC' = \angle ABC' + \angle IBA = \angle ACC' + \angle IBA = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} \quad (5.7)$$

Der Winkel $\angle C'IB$ ist der Außenwinkel von $\angle BIC$ und nach dem Außenwinkelsatz (Satz 3.7) gilt deshalb

$$\angle C'IB = \angle ICB + \angle CBI = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}. \quad (5.8)$$

Mittels (5.7) und (5.8) erhält man $\angle IBC' \equiv \angle C'IB$, weshalb das Dreieck BIC' gleichschenkelig ist und daher

$$C'B \equiv C'I. \quad (5.9)$$

Die Dreiecke $C'BX'$ und $C'BC$ sind ähnlich, wegen $\angle X'BC' \equiv \angle C'CB$ und $\angle BC'X' \equiv \angle BC'C$. Daraus und wegen (5.9) folgt

$$\frac{|C'X'|}{|C'B|} = \frac{|C'B|}{|C'C|} \Leftrightarrow |C'X'| \cdot |C'C| = |C'B|^2 \Leftrightarrow |C'X'| \cdot |C'C| = |C'I|^2. \quad (5.10)$$

Aus $M_cC' \perp AB$, $IX \perp AB$, $CH_c \perp AB$ erhält man $M_cC' \parallel IX \parallel CH_c$. Wendet man den 1. Strahlensatz (Satz 3.1) mit Scheitelpunkt X' an, folgt

$$\frac{|M_cX'|}{|C'X'|} = \frac{|M_cH_c|}{|C'C|} = \frac{|M_cX|}{|C'I|}.$$

Für ein $k \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$|M_c X'| = k \cdot |C' X'|$$

$$|M_c H_c| = k \cdot |C' C|$$

$$|M_c X| = k \cdot |C' I|.$$

Aus (5.10) folgt

$$|M_c X'| \cdot |M_c H_c| = |M_c X|^2. \quad (5.11)$$

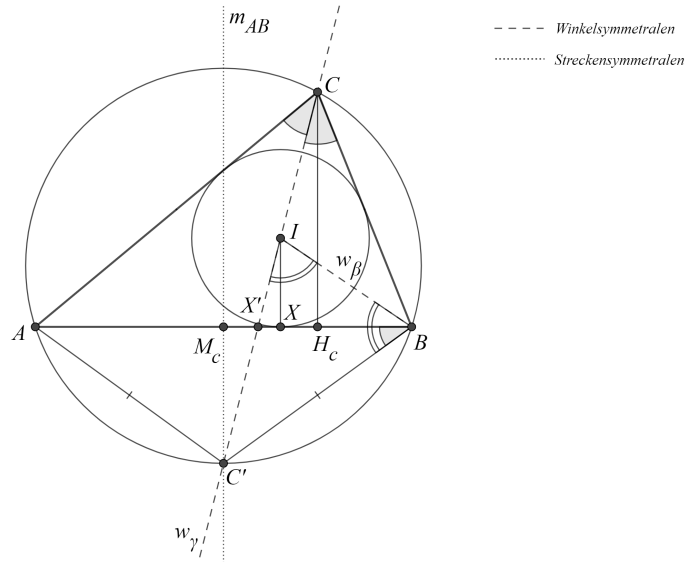


Abbildung 74: Beweis zum großen Satz von Feuerbach (in Anlehnung an [27, S. 13])

Die Gerade $g(A, B)$ ist eine der beiden Tangenten durch X' an den Inkreis. Sie berührt ihn im Punkt X . Die dazu spiegelbildliche Tangente an der Symmetrieachse $g(X', I)$ sei $t_I := g(X', Q)$, für einen Punkt Q auf dem Inkreis (Hilfssatz 5.5). Die Gerade $g(M_c, Q)$ schneide den Inkreis in einem weiteren Punkt Q' . Aus dem Sekanten-Tangenten-Satz (Satz 4.11) und wegen (5.11) gilt deshalb

$$|M_c Q| \cdot |M_c Q'| = |M_c X|^2 = |M_c X'| \cdot |M_c H_c|.$$

Die Punkte Q, Q', X', H_c erfüllen die Bedingungen im Sekantensatz (Satz 4.9) und liegen deshalb auf einem Kreis k_Q . Nach dem Peripheriewinkelsatz (Satz 4.6) ergänzen sich die entsprechenden

Peripheriewinkel in den Ebenen ε und ε' über einer Sehne zu $2R$. Es sei QH_c diese Sehne.

$$\angle QQ'H_c = 2R - \angle H_cX'Q \Leftrightarrow \angle M_cQ'H_c = 2R - \angle H_cX'Q \quad (5.12)$$

Im Beweis von Hilfssatz 5.5 wurde gezeigt, dass $\angle IX'Q \equiv \angle XX'I$. Verwendet man den Außenwinkelsatz (Satz 3.7) für den Winkel $\angle XX'I$ und das Dreieck $AX'C$, erhält man mit (5.12)

$$\begin{aligned} \angle M_cQ'H_c &= 2R - \angle H_cX'Q = 2R - (\angle IX'Q + \angle XX'I) = 2R - 2 \cdot \angle XX'I \\ &= 2R - 2 \cdot (\angle X'AC + \angle ACX') \\ &= 2R - 2 \cdot \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = 2R - 2\alpha - \gamma = \alpha + \beta + \gamma - 2\alpha - \gamma = \beta - \alpha. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Für die Tangente t_F durch M_c an den Feuerbachkreis k_F gelte $t_F \cap g(A, C) = \{R\}$, für einen Punkt R . Man betrachte den Feuerbachkreis, die Sehne M_bM_c und den Punkt M_a . Aus dem Tangentenwinkelsatz (Satz 4.7) folgt $\angle M_bM_aM_c = \angle M_bM_cR$. Die Dreiecke ABC und $M_aM_bM_c$ sind nach dem Satz vom Mittendreieck (Satz 4.16) ähnlich und daher ist $\alpha = \angle BAC = \angle M_bM_aM_c$. Insgesamt führt das zu $\angle M_bM_cR = \alpha$. Wegen $g(B, C) \parallel g(M_b, M_c)$ gilt aufgrund des Stufenwinkelsatzes (Satz 3.6) $\beta = \angle CBA = \angle M_bM_cA$. Das ergibt mit (5.13)

$$\angle RM_cA = \angle M_bM_cA - \angle M_bM_cR = \beta - \alpha = \angle M_cQ'H_c. \quad (5.14)$$

Man betrachte nun erneut den Feuerbachkreis, die Sehne M_cH_c und den Punkt M_a . Wie oben erhält man $\angle RM_cA = \angle M_cM_aH_c$. Das ergibt mit (5.14)

$$\angle M_cQ'H_c = \angle M_cM_aH_c.$$

Aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (Satz 4.10) folgt, dass die Punkte M_c, Q', H_c, M_a auf einem Kreis liegen. Wegen $\{M_c, H_c, M_a\} \in k_F$ gilt deshalb $Q' \in k_F$. In (5.13) wurde $2R - \angle H_cX'Q = \beta - \alpha$ gezeigt. Da sich die Winkel $\angle H_cX'Q$ und $\angle QX'A$ als Nebenwinkel zu $2R$ ergänzen, erhält man $\angle QX'A = \beta - \alpha$ und somit $\angle RM_cA = \angle QX'A$. Aus dem Stufenwinkelsatz (3.6) folgt $QX' \parallel RM_c$. Es gibt also zwei Kreise k_F und k_I mit einem gemeinsamen Punkt Q' , zwei parallele Tangenten an die jeweiligen Kreise in Q bzw. M_c und die Gerade $g(Q', M_c)$. Laut Hilfssatz (5.14) berühren sich k_F und k_I im Punkt Q' . Aufgrund von $Q \in (M_cQ')$ muss der Feuerbachkreis k_F den Inkreis von innen berühren. Mithilfe ähnlicher Überlegungen zeigt man, dass der Feuerbachkreis die Ankreise von außen berührt. $\square$

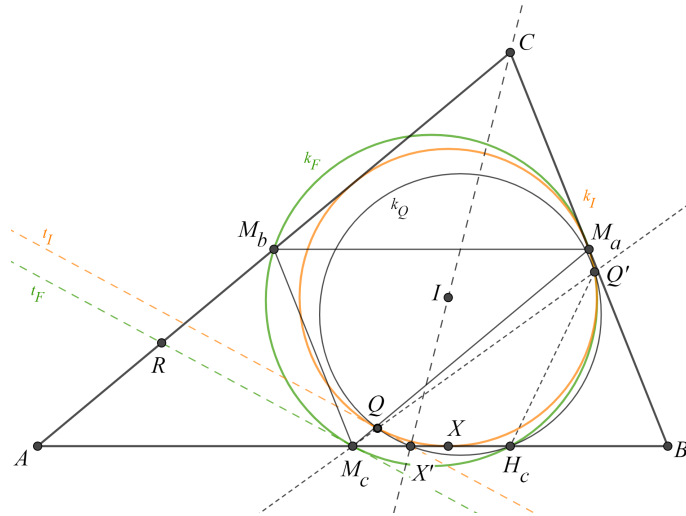


Abbildung 75: Beweis zum großen Satz von Feuerbach (in Anlehnung an [27, S. 13])

5.5 Satz von Dao

Satz 5.15. *Dao's Theorem on Six Circumcenters* [23, S. 58]

Gegeben seien sechs Punkte A, B, C, D, E, F auf einem Kreis und sechs Punkte X, Y, Z, U, V, W mit $AF \cap BC = \{X\}$, $AB \cap CD = \{Y\}$, $BC \cap DE = \{Z\}$, $CD \cap EF = \{U\}$, $AF \cap DE = \{V\}$ und $AB \cap EF = \{W\}$. Außerdem seien $O_1 = U_{BAX}$, $O_2 = U_{CBY}$, $O_3 = U_{DCZ}$, $O_4 = U_{EDU}$, $O_5 = U_{FEV}$ und $O_6 = U_{AFW}$ die Umkreismittelpunkte der entsprechenden Dreiecke. Dann gilt $O_1O_4 \cap O_2O_5 \cap O_3O_6 = \{\tilde{D}\}$.

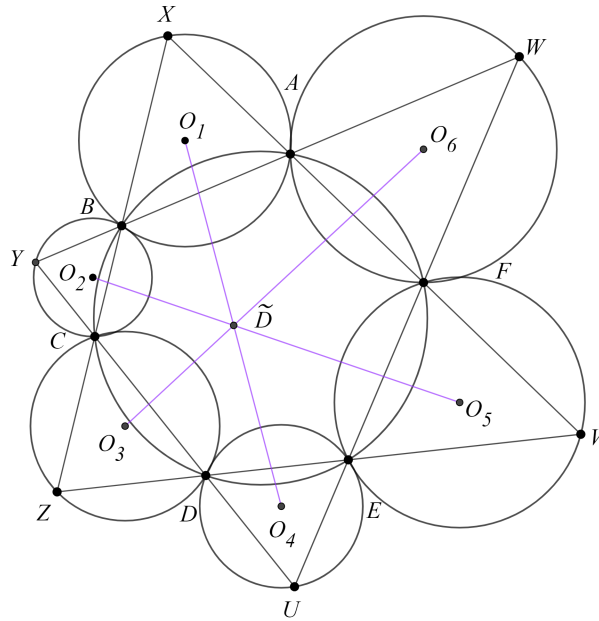


Abbildung 76: Daos Theorem (in Anlehnung an [23, S. 58])

Um diesen Satz zu beweisen, müssen zunächst ein paar Vorbereitungen getroffen werden.

Hilfssatz 5.16. [23, S. 59]

Gegeben seien sechs Punkte A, B, C, A', B', C' auf einem Kreis k und sechs Punkte D, E, F, A_a, B_b, C_c mit $CA' \cap AB = \{D\}$, $AB \cap B'C' = \{E\}$, $B'C' \cap CA' = \{F\}$, $BB' \cap CC' = \{A_a\}$, $CC' \cap AA' = \{B_b\}$ und $AA' \cap BB' = \{C_c\}$. Außerdem sind $O_1 = U_{CBD}$, $O_2 = U_{AC'E}$, $O_3 = U_{B'A'F}$ die Mittelpunkte der Umkreise k_1, k_2, k_3 der entsprechenden Dreiecke. Dann gilt $O_1A_a \cap O_2B_b \cap O_3C_c = \{V\}$ für einen Punkt V .

Beweis. [23, S. 59f.]

Man betrachtet zunächst den Kreis k_2 und die Sehne EC' . Nach dem Peripheriewinkelsatz (Satz 4.6) gilt $\angle C'AE \equiv \angle C'YE$. Wendet man den Peripheriewinkelsatz nun auf den Kreis k und die Sehne BC' an, so erhält man $\angle C'CB + \angle BAC' = 2R$. Der Winkel $\angle C'AE$ ist ein Nebenwinkel von $\angle BAC'$ und daher $\angle C'AE + \angle BAC' = 2R$. Somit folgt $\angle C'CB = \angle C'AE$. Aufgrund des Stufenwinkelsatzes (Satz 3.6) gilt dann $BC \parallel EY$. Analog erhält man $EY \parallel ZF \parallel BC$. Aus dem Zentriwinkelsatz (Satz 4.5) folgt $\angle YO_2C' = 2\angle YEC' = 2\angle B'FZ = \angle ZO_3B'$. Die Dreiecke $YC'O_2$ und $ZB'O_3$ sind beide gleichschenkelig mit dem Radius des jeweiligen Kreises als Schenkel. Deshalb gilt $\angle C'YO_2 \equiv \angle O_2C'Y$ und analog für das Dreieck $ZB'O_3$. Es gilt daher $\angle C'YO_2 \equiv \angle B'ZO_3$. Somit sind die Dreiecke $YC'O_2$ und $ZB'O_3$ wegen des W:W:W-Satzes ähnlich. Es seien d_{ia}, d_{ib}, d_{ic} die Längen der Lote eines Umkreismittelpunkts O_i auf die Strecken AA', BB', CC' und r_i der Radius des jeweiligen Umkreises, mit $i \in \{1, 2, 3\}$. In ähnlichen Dreiecken sind die Seiten und entsprechenden Höhen proportional. Im Dreieck $YC'O_2$ stimmt die Höhe über der Seite YC' mit d_{2c} überein. Analoges gilt für das Dreieck $ZB'O_3$ mit d_{3b} als Höhe über ZB' . Also gilt wegen der Ähnlichkeit von $YC'O_2$ und $ZB'O_3$

$$\frac{d_{2c}}{r_2} = \frac{d_{3b}}{r_3} \Leftrightarrow \frac{d_{2c}}{d_{3b}} = \frac{r_2}{r_3}.$$

Ebenso erhält man

$$\frac{d_{3a}}{d_{1c}} = \frac{r_3}{r_1} \quad \text{sowie} \quad \frac{d_{1b}}{d_{2a}} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Es seien M, N, P drei Punkte mit $\{M\} = O_1A_a \cap B_bC_c$, $\{N\} = O_2B_b \cap A_aC_c$, $\{P\} = O_3C_c \cap A_aB_b$. Man betrachtet das Dreieck $O_1C_cB_b$ mit der Grundseite B_bC_c und dem Lot von O_1 auf $g(B_b, C_c)$ als Höhe h_1 . Ebenso bildet das Lot vom Punkt A_a auf $g(B_b, C_c)$ die Höhe h_2 des Dreiecks $A_aC_cB_b$. Mithilfe des Punktes M und der Gerade $g(O_1, M)$ werden die Dreiecke $O_1C_cB_b$ und $A_aC_cB_b$ in jeweils zwei Dreiecke geteilt. Dann gilt

$$\left. \begin{aligned} |O_1MB_b| &= \frac{MB_b \cdot h_1}{2} \\ |O_1C_cM| &= \frac{MC_c \cdot h_1}{2} \end{aligned} \right\} \quad \frac{|O_1MB_b|}{|O_1C_cM|} = \frac{MB_b}{MC_c}$$

$$\left. \begin{aligned} |A_aMB_b| &= \frac{MB_b \cdot h_2}{2} \\ |A_aC_cM| &= \frac{MC_c \cdot h_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad \frac{|A_aMB_b|}{|A_aC_cM|} = \frac{MB_b}{MC_c}$$

und es folgt

$$\frac{MB_b}{MC_c} = \frac{|O_1MB_b|}{|O_1C_cM|} = \frac{|A_aMB_b|}{|A_aC_cM|} = \frac{|O_1MB_b| - |A_aMB_b|}{|O_1C_cM| - |A_aC_cM|} = \frac{|O_1A_aB_b|}{|O_1A_aC_c|}.$$

Analog gelten

$$\frac{NC_c}{NA_a} = \frac{|O_2B_bC_c|}{|O_2B_bA_a|} \quad \text{und} \quad \frac{PA_a}{PB_b} = \frac{|O_3C_cA_a|}{|O_3C_cB_b|}.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{MB_b}{MC_c} \cdot \frac{NC_c}{NA_a} \cdot \frac{PA_a}{PB_b} &= \frac{|O_1A_aB_b|}{|O_1A_aC_c|} \cdot \frac{|O_2B_bC_c|}{|O_2B_bA_a|} \cdot \frac{|O_3C_cA_a|}{|O_3C_cB_b|} \\ &= \frac{|O_2B_bC_c|}{|O_3B_bC_c|} \cdot \frac{|O_3C_cA_a|}{|O_1C_cA_a|} \cdot \frac{|O_1A_aB_b|}{|O_2A_aB_b|} = \frac{d_{2a}}{d_{3a}} \cdot \frac{d_{3b}}{d_{1b}} \cdot \frac{d_{1c}}{d_{2c}} \\ &= \frac{d_{2a}}{d_{1b}} \cdot \frac{d_{3b}}{d_{2c}} \cdot \frac{d_{1c}}{d_{3a}} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r_3} = 1. \end{aligned}$$

Das Dreieck $A_aB_bC_c$ und die Punkte M, N, P erfüllen die Voraussetzungen des Satz von Ceva (Satz 4.14). Somit schneiden sich die Geraden $g(O_1, A_a), g(O_2, B_b), g(O_3, C_c)$ im Punkt V . $\square$

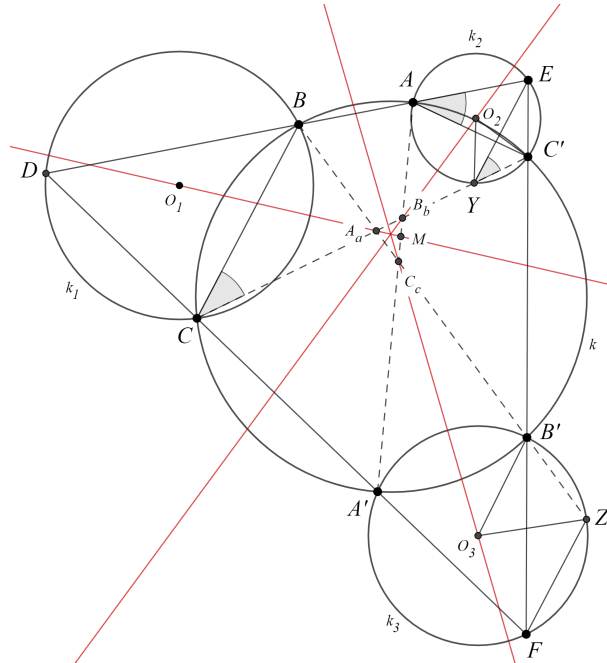


Abbildung 77: Hilfssatz 1 zum Satz von Dao (in Anlehnung an [23, S. 60])

Hilfssatz 5.17. [23, S. 60]

Es seien A, B, C, A', B', C' sechs Punkte auf einem Kreis k . Für die Punkte X, X' gilt $AB \cap A'C = \{X\}$ und $A'B' \cap AC' = \{X'\}$. Außerdem sind $O = U_{CBX}$ und $O' = U_{C'B'X'}$ die Mittelpunkte der Umkreise der entsprechenden Dreiecke. Dann gilt $OO' \cap BB' \cap CC' = \{S\}$ für einen Punkt S .

Beweis. [23, S. 61]

Wie im Beweis zum vorherigen Satz erhält man $\angle BCX = \angle XAA'$. Der Halbstrahl h sei die Tangente durch den Punkt X an den Kreis $\tilde{k}$. Dann ist $\angle((XO), h) = R$. Wegen des Tangentenwinkelsatzes (Satz 4.7) gilt $\angle((XB), h) = \angle BCX$. Mittels $R = \angle((XO), h) = \angle((XB), h) + \angle OXB$ erhält man damit $\angle OXB = R - \angle BCX = R - \angle XAA'$. Für einen Punkt D gelte $\{D\} = g(X, O) \cap g(A, A')$. Aufgrund der Winkelsumme im Dreieck (Satz 3.8) ist $\angle OXB + \angle XAA' + \angle ADX = 2R$. Wegen $\angle OXB + \angle XAA' = R$ gilt $\angle ADX = R$ und damit $XO \perp AA'$. Analog zeigt man $X'O' \perp AA'$ und damit $XO \parallel X'O'$. Man konstruiere die beiden Punkte $B_0 \in \tilde{k}'$ und $C_0 \in \tilde{k}'$, sodass $X'B_0 \parallel XB$ und $X'C_0 \parallel XC$.

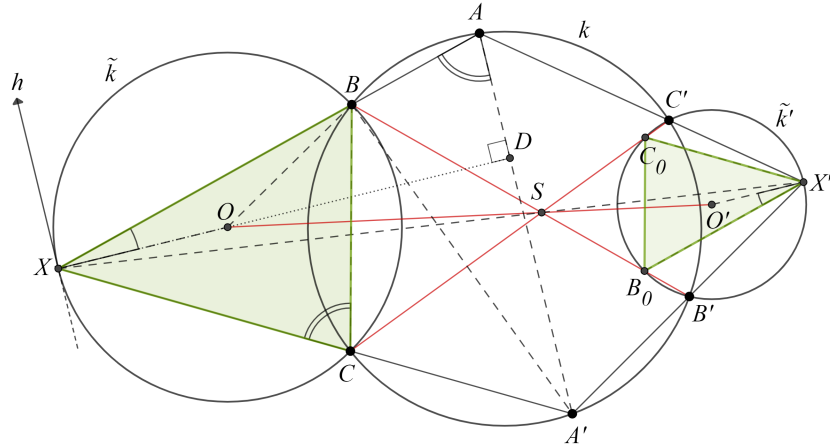


Abbildung 78: Hilfssatz 2 zum Satz von Dao (1. Teil) (in Anlehnung an [23, S. 60])

Wegen der zuvor gezeigten Parallelität von $X'B_0$ und XB bzw. $X'C_0$ und XC ist $\angle CXB = \angle C_0X'B_0$. Aus $XO \parallel X'O'$ und $X'B_0 \parallel XB$ folgt $\angle OXB = \angle O'X'B_0$. Da es sich bei XOB und $X'O'B_0$ um gleichschenklige Dreiecke handelt, muss demnach auch $\angle BOX = \angle B_0O'X'$ gelten. Der Winkel $\angle BCX$ ist Peripheriewinkel zum Zentriwinkel BOX . Eine analoge Beziehung gilt für die Winkel $\angle B_0C_0X'$ und $\angle B_0O'X'$. Aus dem Zentriwinkelsatz (Satz 4.5) erhält man daher $\angle BCX = \angle B_0C_0X'$. Dann sind die Dreiecke XCB und $X'C_0B_0$ nach dem W:W:W-Satz ähnlich.

Es sei S der Schnittpunkt von $g(X, X')$ mit $g(B, B_0)$. Die Winkel $\angle SXB$ und $\angle SX'B_0$ sind wegen des Wechselwinkelsatzes (Satz 3.6) kongruent. Die Winkel $\angle BSX$ und $\angle B_0SX'$ sind als Scheitelwinkel gleich groß (Satz 3.4). Aus diesem Grund folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke BXS und $B_0X'S$ ebenfalls aus dem W:W:W-Satz. Analog zeigt man, dass die Dreiecke $CS'X$ und $C_0S'X'$ ähnlich sind, mit $g(X, X') \cap g(C, C_0) = \{S'\}$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $XC'B$ und $X'C_0B_0$ folgt

$$\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|X'B_0|}{|X'C_0|}$$

und, dass ein $k \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$|XB| = k \cdot |X'B_0| \quad \text{und} \quad |XC| = k \cdot |X'C_0|.$$

Die Ähnlichkeit von BXS und $B_0X'S$ führt zu

$$\frac{|XB|}{|XS|} = \frac{|X'B_0|}{|X'S|} \Leftrightarrow \frac{k \cdot |X'B_0|}{|XS|} = \frac{|X'B_0|}{|X'S|} \Leftrightarrow |XS| = k \cdot |X'S|.$$

Ebenso gilt

$$\frac{|XC|}{|XS'|} = \frac{|X'C_0|}{|X'S'|} \Leftrightarrow \frac{k \cdot |X'C_0|}{|XS'|} = \frac{|X'C_0|}{|X'S'|} \Leftrightarrow |XS'| = k \cdot |X'S'|.$$

Dann muss aber $S = S'$ gelten und

$$BB_0 \cap CC_0 \cap XX' = \{S\}.$$

Oben wurde die Ähnlichkeit der Dreiecke XOB und $X'O'B_0$ gezeigt. Demnach gilt

$$\frac{|XB|}{|XO|} = \frac{|X'B_0|}{|X'O'|} \Leftrightarrow \frac{k \cdot |X'B_0|}{|XO|} = \frac{|X'B_0|}{|X'O'|} \Leftrightarrow |XO| = k \cdot |X'O'|$$

Die Geraden $g(O, O')$ und $g(X, X')$ schneiden sich in einem Punkt S'' . Die Winkel $\angle XOS''$ und $\angle X'O'S''$ sind wegen $XO \parallel X'O'$ und dem dadurch anwendbaren Wechselwinkelsatz (Satz 3.6) kongruent. Die Kongruenz von $\angle OS''X$ und $\angle O'S''X'$ folgt aus dem Scheitelwinkelsatz.

Also trifft

$$\frac{|XO|}{|XS''|} = \frac{|X'O'|}{|X'S''|} \Leftrightarrow \frac{k \cdot |X'O'|}{|XS''|} = \frac{|X'O'|}{|X'S''|} \Leftrightarrow k \cdot |XS''| = |X'S''|$$

zu. Wie oben erhält man deshalb $S = S''$ und somit

$$OO' \cap BB_0 \cap CC_0 \cap XX' = \{S\}.$$

Man betrachtet nun die Kreise $\tilde{k}'$ mit der Sehne $C'B_0$ und k mit der Sehne BC' . Dann gilt gemäß dem Peripheriewinkelsatz (Satz 4.6)

$$\angle C'B'B_0 = \angle C'X'B_0 = \angle XX'B_0 + \angle C'X'X = \angle X'XB + \angle AX'X = 2R - \angle BAC' = \angle C'B'B.$$

Also liegen die Punkte B, B_0, B' auf einer Geraden. Analog zeigt man, dass die Punkte C, C_0, C' kollinear sind und es folgt

$$OO' \cap BB' \cap CC' = \{S\}.$$

□

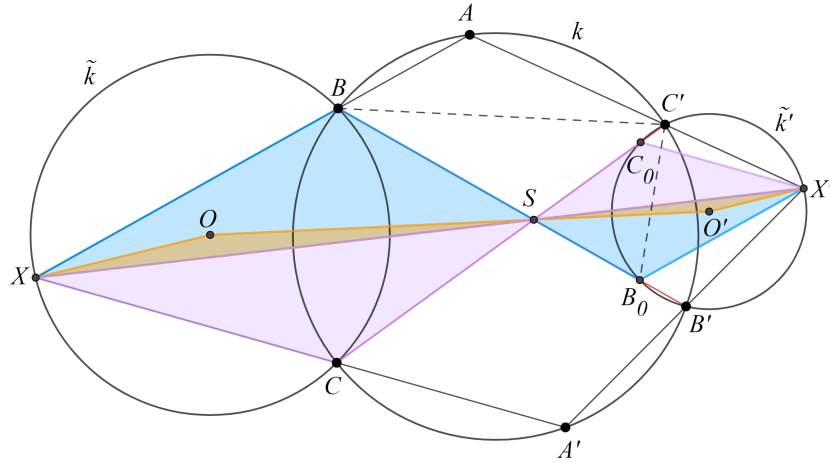


Abbildung 79: Hilfssatz 2 zum Satz von Dao (2. Teil)

Nun sind alle notwendigen Vorbereitungen getroffen und man kann zu Dao's Theorem on Six Circumcenters zurückkehren.

Beweis Satz von Dao (Satz 5.15). [23, S. 61]

Für drei Punkte M, N, P gelte $\{M\} = BE \cap AD, \{N\} = AD \cap CF, \{P\} = CF \cap BE$. Nach Hilfssatz 5.16 schneiden sich O_1M, O_3N, O_5P in einem Punkt. Gemäß Hilfssatz 5.17 liegen die Punkte O_1, M, O_4 ; O_3, N, O_6 und O_5, P, O_2 jeweils auf einer Geraden. Also schneiden sich O_1O_4 , O_2O_5 und O_3O_6 in einem Punkt $\tilde{D}$ und der Satz ist bewiesen. □

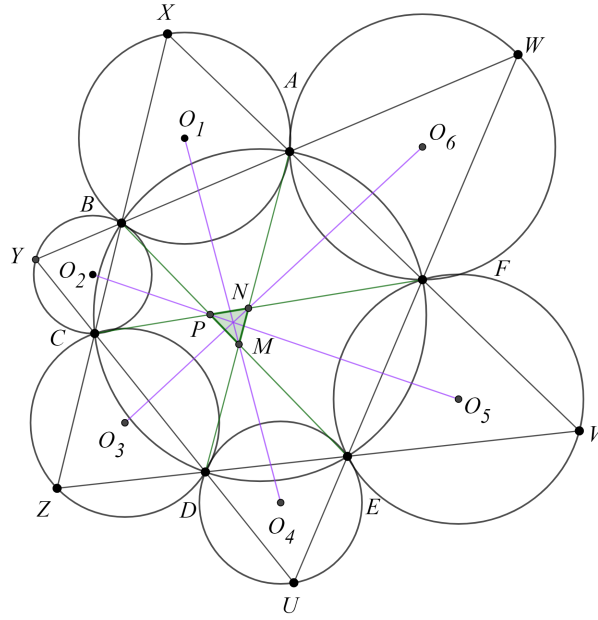


Abbildung 80: Beweis zum Satz von Dao (in Anlehnung an [23, S. 61])

Der Satz von Kosnita ist ein Spezialfall von Dao's Theorem on Six Circumcenters. Man verwendet daher die vorhergehenden Überlegungen.

Satz 5.18. Satz von Kosnita [24, S. 115]

Es sei WYU ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt $\tilde{U}$. Die Punkte O_1, O_3, O_5 seien die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $WY\tilde{U}$, $YU\tilde{U}$ und $UW\tilde{U}$. Dann gilt $O_1U \cap O_3W \cap O_5Y = \{\tilde{K}\}$ für einen Punkt $\tilde{K}$, der als Kosnita-Punkt bezeichnet wird.

Beweis. [23, S. 59]

In diesem Spezialfall fallen die Punkte A, F, W, O_6 ; B, C, Y, O_2 und D, E, U, O_4 jeweils zu einem Punkt zusammen. Aus dem Sechseck $ABCDEF$ wird damit das Dreieck WYU . Nach dem Satz von Dao schneiden sich O_1O_4 , O_2O_5 und O_3O_6 in einem Punkt. Demnach schneiden sich auch O_1U , O_5Y und O_3W in einem Punkt. $\square$

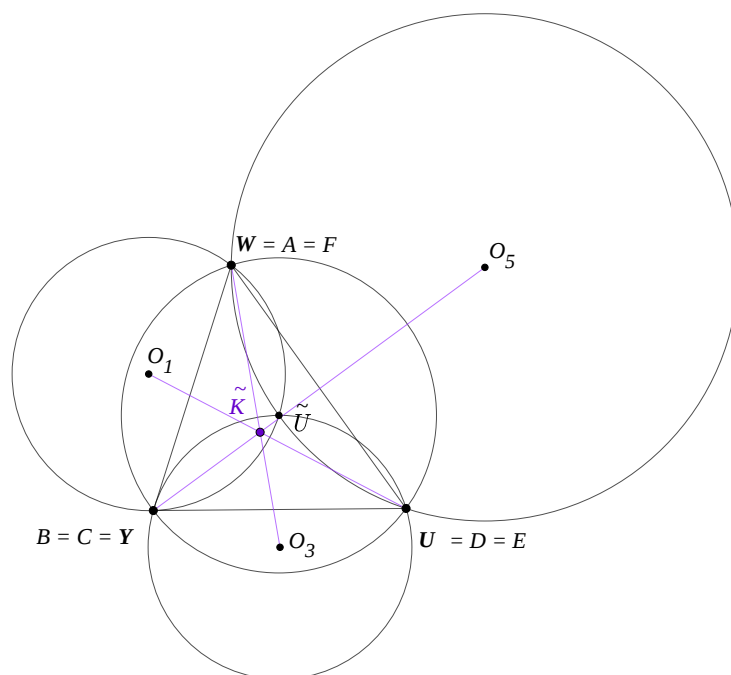


Abbildung 81: Satz von Kosnita (in Anlehnung an [23, S. 59])

Literatur

- [1] Scriba, R. und Schreiber, P. „5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen“. In: *Vom Zählstein zum Computer*. Hrsg. von H.-W. Alten, A. Djafari Naini und H. Wesemüller-Kock. 3. Aufl. [Berlin u.a.]: Springer, 2010.
- [2] Alten H.-W. et al. „4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen“. In: *Vom Zählstein zum Computer*. Hrsg. von H.-W. Alten, A. Djafari Naini und H. Wesemüller-Kock. 2. Aufl. [Berlin u.a.]: Springer, 2014.
- [3] Hartshorne R. „Geometry: Euclid and Beyond“. In: *Undergraduate Texts in Mathematics*. Hrsg. von S. Axler, F. W. Gehring und K. A. Ribet. [New York u.a.]: Springer, 2000.
- [4] Lorenz, J. F. *Euklid's Elemente. fünfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt*. 4., verbesserte Ausgabe. [Halle und Berlin]: Buchhandlung des Hallischen Waisenhauses, 1818. URL: <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb11346084?page=,1>. [zugegriffen am 25.02.2023].
- [5] Baldus R. *Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene*. 3. Aufl. [Berlin]: Walter de Gruyter & Co., 1953. URL: <https://www-degruyter-com.uaccess.univie.ac.at/document/doi/10.1515/9783111658230-fm/html>. [zugegriffen am 29.07.2023].
- [6] Pasch M. *Vorlesungen über neuere Geometrie*. [Leipzig]: B. G. Teubner, 1882. URL: <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.153742/page/n3/mode/2up>. [zugegriffen am 29.07.2023].
- [7] Felgner U. „Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ und ihre Stellung in der Geschichte der Grundlagendiskussion“. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Volume 115* (2014), S. 185–206.
- [8] Volkert K. „David Hilbert. Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)“. In: *Klassische Texte der Wissenschaft*. Hrsg. von O. Breidbach und J. Jost. [Berlin u.a.]: Springer Spektrum, 2015.
- [9] Liebscher S. *Projektive Geometrie der Ebene. Ein klassischer Zugang mit interaktiver Visualisierung*. [Berlin]: Springer Spektrum, 2017.
- [10] Hilbert D. *Grundlagen der Geometrie*. 11. Aufl. [Stuttgart]: B. G. Teubner, 1972.
- [11] Engel F. und Stäckel P. *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss. Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie*. [Leipzig]: B. G. Teubner, 1895. URL: <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN578628864>. [zugegriffen am 27.07.2023].
- [12] Berchtold F. *Geometrie. Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete*. [Berlin]: Springer Spektrum, 2017.
- [13] Agricola, I. und Friedrich, T. *Elementargeometrie. Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht*. 4., überarbeitete Aufl. [Wiesbaden]: Springer Spektrum, 2015.
- [14] Schupp H. *Elementargeometrie*. [Paderborn]: Ferdinand Schöningh, 1977.
- [15] Scheid, H. und Schwarz, W. *Elemente der Geometrie*. 5. Aufl. [Berlin u.a.]: Spektrum Akademischer Verlag, 2017.
- [16] Benölken R., Gorski H.-J. und Müller-Philipp S. *Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter*. 5., überarbeitete und erweiterte Aufl. [Wiesbaden]: Vieweg+Teubner, 2018.

LITERATUR

- [17] Friedrich, A. M. „Die Satzgruppe des Pythagoras“. In: *Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 29*. Hrsg. von N. Knoche und H. Scheid. [Mannheim u.a.]: BI Wissenschaftsverlag, 1995.
- [18] Wellstein, H. und Kirsche, P. *Elementargeometrie. Eine aufgabenorientierte Einführung*. [Wiesbaden]: Vieweg+Teubner, 2009.
- [19] Alsina C. und Nelsen, R. B. *Perlen der Mathematik. 20 geometrische Figuren als Ausgangspunkte für mathematische Erkundungsreisen*. [Berlin u.a.]: Springer Spektrum, 2015.
- [20] Smyth, M. R. F. „MACCOOL’S SECOND PROOF OF MORLEY’S MIRACLE“. In: *Irish Math. Soc. Bulletin* 72 (2013), S. 75–77. URL: <https://www.maths.tcd.ie/pub/ims/bull72/Smyth.pdf>.
- [21] Krauter, S. und Bescherer, C. „Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken“. In: *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Hrsg. von F. Padberg. 2. Aufl. [Berlin u.a.]: Springer Spektrum, 2013.
- [22] Kroll W. „Elementarer Beweis des Satzes von Feuerbach“. In: *Praxis der Mathematik. Sekundarstufen 1 und 2*, 40 (1998), S. 251–254.
- [23] Dung, N. T. „A Simple Proof of Dao’s Theorem on Six Circumcenters“. In: *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, Volume 6 (1)* (2017), S. 58–61.
- [24] Grinberg D. „On the Kosnita Point and the Reflection Triangle“. In: *Forum Geometricorum, Volume 3* (2003), S. 105–111.

Internetquellen

- [25] Bogomolny A. *Another Seven Circles Theorem*. URL: <http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/AnotherSevenCircles.shtml?fbclid=IwAR013UoWONMcd0wTp20YpUHIpVSjf0HZMs0ZI0Vase1xGzPVTZLkJGqArSI>. [zugegriffen am 18.11.2023].
- [26] Haller S. *Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt*. 2018. URL: <https://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2018/Geometrie.V0.Seiten.1-161.pdf>. [zugegriffen am 27.02.2023].
- [27] Grinberg D. *Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie*. 2003. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>. [zugegriffen am 07.03.2023].
- [28] Engelschön C. *Geometrische Behandlung ausgewählter Phänomene rund um das Dreieck*. URL: <https://unipub.uni-graz.at/obvugrhs/content/titleinfo/232448/full.pdf>. [zugegriffen am 14.08.2023].
- [29] Grinberg D. *Über einige Sätze aus der Dreiecksgeometrie*. 2003. URL: <https://www.matheraetsel.de/texte/DreiGeom.pdf>. [zugegriffen am 12.04.2023].
- [30] Brinken A. *Der Nagelpunkt*. URL: <https://www.geogebra.org/m/xb7RaCbB>. [zugegriffen am 12.04.2023].
- [31] Pahl M. URL: http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Materialien/Dreieckszentren/X5_Feuerbach/beweis_radius.html. [zugegriffen am 04.04.2023].

Abbildungsverzeichnis

1	Parallelenaxiom	10
2	1. Satz Euklid, Buch I	11
3	Perspektivische Darstellung eines Quaders	13
4	Axiom von Pasch	14
5	Strahlensatz in der V-Figur (links) und X-Figur (rechts)	21
6	Beweis des 1. Strahlensatzes	23
7	Beweis des 2. Strahlensatzes	24
8	Beweis zur Umkehrung des 1. Strahlensatzes	25
9	Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit der Umkehrung des 1. Strahlensatzes	25
10	Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit der Umkehrung des 2. Strahlensatzes	26
11	Größen im Dreieck	28
12	Scheitelwinkel (links), Nebenwinkel (mittig), rechter Winkel (rechts)	29
13	Scheitelwinkelsatz	30
14	Satz vom Außenwinkel	30
15	Beweis zum Satz vom Außenwinkel	31
16	Beispiele für Stufenwinkel (links), Beispiele für Wechselwinkel (rechts)	31
17	Beweis zum Stufenwinkelsatz (i) $\Rightarrow$ (ii) (links) und (ii) $\Rightarrow$ (i) (rechts)	32
18	Stufen- und Wechselwinkelsatz	33
19	Außenwinkelsatz	33
20	Beweis zum Außenwinkelsatz	34
21	rechtwinkliges Dreieck	34
22	Satz des Pythagoras	35
23	Stuhl der Braut (links) und Beweis zum Satz des Pythagoras (rechts)	36
24	Kathetensatz	37
25	Beweis zum Kathetensatz	38
26	Höhensatz	38
27	Ergänzungsbeweis zum Höhensatz	39
28	Umkreismittelpunkt	41
29	Inkreismittelpunkt	42
30	Schwerpunkt	43
31	Höhenschnittpunkt	44
32	Winkel am Kreis	45
33	Zentriwinkelsatz Fall 1	46
34	Zentriwinkelsatz Fall 2	46

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

35	Zentriwinkelsatz Fall 3	47
36	Peripheriewinkelsatz	47
37	Tangentenwinkelsatz Fall 1 (links), Fall 2 (mittig) und Fall 3 (rechts)	49
38	Umkehrung Satz des Thales Fall 1 (links), Fall 2 (rechts)	50
39	Lage des Umkreismittelpunkts für $\gamma < R$ (links), $\gamma = R$ (mittig) und $\gamma > R$ (rechts)	51
40	Sekantensatz (i) $\Rightarrow$ (ii)	51
41	Sekantensatz (ii) $\Rightarrow$ (i)	52
42	Umkehrung der Peripheriewinkelsatzes (i) (links) und (ii) (rechts)	53
43	Sekanten-Tangenten-Satz	54
44	Eulersche Gerade	55
45	Eulersche Gerade im gleichseitigen Dreieck	55
46	Eulersche Gerade im rechtwinkligen Dreieck	56
47	Eulersche Gerade im gleichschenkligen Dreieck	57
48	Beweis Eulersche Gerade	57
49	Satz von Menelaos	59
50	Satz von Ceva (Schnittpunkt S innerhalb (links) und außerhalb (rechts) des Dreiecks	60
51	Satz von Ceva mit parallelen Geraden (Fall 2)	61
52	Satz von Stewart	63
53	Mittendreieck	64
54	Schwerpunkt des Mittendreiecks	65
55	Satz von Morley	66
56	Beweis zum Satz von Morley	68
57	Satz von Napoleon	68
58	Beweis zum Satz von Napoleon	70
59	Ankreis des Dreiecks	72
60	Beweis zum Höhenschnittpunkt des Ankreisdreiecks	73
61	Tangenten an einen Kreis	73
62	Nagelscher Punkt	75
63	Beweis zur Flächenformel - Umfang und Inkreisradius	76
64	Heronsche Flächenformel	78
65	Kleiner Satz von Feuerbach	78
66	Beweis zum Kleinen Satz von Feuerbach	79
67	Neunpunktekreis	80
68	Beweis zum Neunpunktekreis	80

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

69	Neunpunktekreis als Umkreis	81
70	Lage des Feuerbachkreis-Mittelpunkts auf der Euler'schen Gerade	82
71	Umkreis und Feuerbachkreis des Dreiecks ABC (links) und zugehörige Strahlen- satzfigur (rechts)	83
72	großer Satz von Feuerbach	83
73	Berührungspunkt zweier Kreise	84
74	Beweis zum großen Satz von Feuerbach	86
75	Beweis zum großen Satz von Feuerbach	88
76	Daos Theorem	89
77	Hilfssatz 1 zum Satz von Dao	91
78	Hilfssatz 2 zum Satz von Dao (1. Teil)	92
79	Hilfssatz 2 zum Satz von Dao (2. Teil)	94
80	Beweis zum Satz von Dao	95
81	Satz von Kosnita	96