



universität
wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

Lebesgue-Integral, Fourierreihen und Fouriertransformati-
on

verfasst von / submitted by

Florian Mohr BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2023 / Vienna, 2023

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 520 523 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Mathematik
UF Physik

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Christian Spreitzer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Maßtheorie	4
3	Lebesgue-Integral	9
4	Fourierreihen	20
5	Fouriertransformation	37
6	Riemann-Lebesgue-Lemma	57
7	Verzeichnisse	59

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Fourierreihen und der Fouriertransformation. In Kapitel 1 werden die mathematische Idee und historische Einordnung erläutert. Um den Einstieg in Fourierreihen zu vereinfachen, wird in Kapitel 2 die Maßtheorie eingeführt. Mit Hilfe dieser wird in Kapitel 3 das Lebesgue-Integral erarbeitet. Nach all dieser Vorarbeit werden in Kapitel 4 Fourierpolynome definiert und berechnet. Im Anschluss daran wird in Kapitel 5 die Fouriertransformation definiert und es werden einige, auch physikalische, Beispiele berechnet und dargestellt. Zum Abschluss wird in Kapitel 6 das Riemann-Lebesgue-Lemma bewiesen.

1 Einleitung

1.1 Mathematische Idee und Anwendungsbereiche

Die Idee hinter einer Fourierreihe ist es, eine beliebige periodische Funktion als Überlagerung von unterschiedlichen Schwingungen fester Frequenzen darzustellen. Dadurch können einzelne Frequenzkomponenten gefiltert bzw. verstärkt werden. Im Gegensatz zu Fourierreihen zerlegt die Fouriertransformation aperiodische Signale in einzelne Komponenten. In jedem Fernseher, DVD-Player oder auch Verstärker kommt sie zum Einsatz. Die Fouriertheorie ist die mathematische Grundlage hinter diesen Anwendung [1].

1.2 Historische Einordnung

Die Bezeichnung geht zurück auf Joseph Fourier (1768-1830), der in Auxerre in Frankreich geboren wurde. 1822 behauptete Fourier, dass es für alle periodischen, stückweise stetigen und beschränkten Funktionen eine Reihenentwicklung in eine Funktionsreihe aus Sinus- und Cosinusfunktionen gäbe. Dies postulierte er in seinem Werk „Théorie analytique de la chaleur“ bzw. „Analytische Theorie der Wärme“ [2]. Erst einige Jahre später konnte von Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) bewiesen werden, dass dies für Lipschitz-stetige Funktionen Gültigkeit besitzt [3]. Lipschitz-stetige Funktionen sind Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für welche eine Konstante L existiert, sodass $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt [8]. Falls eine Fourierreihe punktweise gegen die Funktion konvergiert, ist die Darstellung eindeutig. Dieser Eindeutigkeitsbeweis wurde 1870 von Georg Cantor (1845-1918) gezeigt [5]. 1967 wurde von Lennart Carleson (1928) bewiesen, dass dies auch für stetige bzw. stückweise stetige Funktionen gilt [4].

2 Maßtheorie

Das Ziel dieses Kapitels ist es ein besseres Verständnis für die Begriffe Inhalt, Maßraum, äußeres Lebesgue-Maß und Maß zu vermitteln, sodass basierend darauf die Einführung des Lebesgue-Integrals erfolgen kann. Dafür sind auch σ -Algebren, sowie die Einführung von Indikatorfunktionen und einfachen Funktionen notwendig. Die Definitionen, Sätze und Theoreme dieses Kapitels basieren auf dem Ansatz von Hunter [11] und Ebbinghaus [12].

2.1 Maße

Nachfolgend werden zuerst äußere Maße und σ -Algebren eingeführt, um sodann Maßräume und Maße sinnvoll zu definieren. Ein äußeres Maß ist eine monotone, zählbare, subadditive, nicht negative, erweitert reellwertige Funktion, welche auf allen Teilmengen einer Menge definiert ist. Erweitert reellwertig bedeutet, dass hier die um $-\infty$ und ∞ erweiterte Menge der reellen Zahlen betrachtet wird ($\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) [11].

Definition 2.1 (Äußeres Maß). Ein äußeres Maß μ^* auf einer Menge X ist eine Funktion

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty],$$

sodass

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. falls $E \subset F \subset X$, dann folgt $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$,
3. falls $\{E_i \subset X : i \in \mathbb{N}\}$ eine zählbare Familie von messbaren Teilmengen von X ist, dann gilt

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Punkt 3 der Definition 2.1 wird als Subadditivität bezeichnet.

σ -Algebren sind Teilmengen einer Menge X , welche die leere Menge und die Menge X enthalten. Man definiert sie wie folgt:

Definition 2.2 (σ -Algebra). Eine σ -Algebra auf einer Menge X ist eine Zusammenfassung $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X , für die

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. wenn $A \in \mathcal{A}$, dann liegt auch $A^c \in \mathcal{A}$

3. wenn $A_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$ dann ist

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

gilt.

Ausgehend von der Definition einer σ -Algebra kann nun ein Maßraum definiert werden.

Definition 2.3 (Maßraum). Ein Maßraum $(X, \mathcal{A})$ ist eine nichtleere Menge X , ausgestattet mit einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf X .

Die Elemente eines Maßraums $(X, \mathcal{A})$ nennt man messbare Mengen [14]. Diese beiden Definitionen waren notwendig, um den Begriff des Maßes sinnvoll definieren zu können.

Definition 2.4 (Maß). Ein Maß μ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A})$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, sodass

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. falls $\{A_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare disjunkte Familie von Mengen in $\mathcal{A}$ ist, folgt daraus, dass

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

gilt.

Einen Maßraum $(X, \mathcal{A})$, auf welchem ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ definiert ist, gibt man mittels $(X, \mathcal{A}, \mu)$ an.

2.2 Das äußere Lebesgue-Maß und das Lebesgue-Maß

Als Grundlage für nachfolgende Erläuterungen werden nun messbare Funktionen, Indikatorfunktionen und einfache Funktionen definiert.

Definition 2.5 (Messbare Funktionen). Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ beides Maßräume. Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt messbar, falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Die Messbarkeit einer Funktion hängt nur von der σ -Algebra ab.

Definition 2.6 (Indikatorfunktion). Die Indikatorfunktion einer Teilmenge $E \subset X$ ist jene Funktion $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$, für die

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{für } x \notin E \end{cases}$$

gilt.

Die dadurch definierte Funktion χ_E ist nur messbar, falls E eine messbare Menge ist.

Mit Hilfe dieser Definition können nun einfache Funktionen definiert werden.

Definition 2.7 (Einfache Funktionen). Eine einfache Funktion $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A})$ ist definiert durch

$$\phi = \sum_{n=1}^N c_n \chi_{E_n}, \quad (1)$$

wobei $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ und $E_1, \dots, E_N \in \mathcal{A}$ sind.

Einfache Funktionen sind messbar, da sie auf einem Maßraum definiert sind. Diese Darstellungsform wird Standardrepräsentation genannt, falls alle c_n unterschiedlich und alle Mengen E_n disjunkt sind.

Es wird nun eine monoton steigende Folge von positiven einfachen Funktionen betrachtet. Dieses Theorem wird zu einem späteren Zeitpunkt benötigt.

Theorem 2.1. Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ eine positive und messbare Funktion. Dann gibt es eine Folge von positiven einfachen Funktionen $\phi_n : X \rightarrow [0, \infty)$ mit $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \leq \dots$. Wenn $n \rightarrow \infty$, so konvergiert $\phi_n \rightarrow f$ punktweise. Falls die Funktion f beschränkt ist, dann konvergiert ϕ_n gleichmäßig gegen f .

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ teilt man das Intervall $[0, 2^n]$ im Wertebereich von f in 2^{2n} Teilintervalle mit einer Breite von 2^{-n} . Diese Intervalle sehen wie folgt aus:

$$I_{k,n} = (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}], \quad k = 0, 1, \dots, 2^{2n} - 1$$

Sei $J_n = (2^n, \infty]$ der letzte Teil dieses Bereichs und sei

$$E_{k,n} = f^{-1}(I_{k,n}), \quad F_n = f^{-1}(J_n).$$

Dann hat die Folge von einfachen Funktionen, die durch

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n} \chi_{E_{k,n}} + 2^n \chi_{F_n}$$

gegeben ist, die gesuchten Eigenschaften. □

Der hier gewählte Zugang zum Lebesgue-Maß beruht auf der Idee von Caratheodory (1873-1950), welcher zuerst ein äußeres Maß auf eher allgemeinen Teilmengen $\mathbb{R}^n$ definiert. Dieses äußere Maß wird dann auf eine σ -Algebra von messbaren Teilmengen eingeschränkt. Als Grundmenge werden Rechtecke verwendet.

Definition 2.8. Ein n -dimensionales geschlossenes Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen orientiert ist, ist eine Teilmenge $R \subset \mathbb{R}^n$ mit der Form

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

wobei $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Das n -dimensionale Volumen $\mu(R)$ von R ist definiert durch

$$\mu(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Das Volumen für $n = 1$ ergibt eine Länge, während der Fall $n = 2$ eine Fläche definiert. Als leere Menge nimmt man ein Rechteck mit $\mu(\emptyset) = 0$ an. Die Familie aller n -dimensionalen Rechtecke wird als $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Nach dieser Vorarbeit ist es nun an der Zeit, das äußere Lebesgue-Maß zu definieren.

Definition 2.9 (Äußeres Lebesgue-Maß). Das äußere Lebesgue-Maß $\mu^*(E)$ einer Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i, R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \right\}. \quad (2)$$

Wir nennen die Zuordnung

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty], \quad \mu^* : E \rightarrow \mu^*(E)$$

äußeres Lebesgue-Maß.

Theorem 2.2. Das äußere Lebesgue-Maß hat folgende Eigenschaften:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. falls $E \subset F$ dann folgt $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$
3. falls $\{E_i \subset \mathbb{R}^n : i \in \mathbb{N}\}$ eine messbare Zusammenfassung von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist, dann folgt

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

Der Beweis hierfür ist im Buch von Hunter [11] zu finden.

Man definiert nun mit Hilfe des Ansatzes von Caratheodory die Caratheodory-Messbarkeit, welche nicht stark von der Lebesgue-Messbarkeit abweicht.

Definition 2.10 (Caratheodory-Messbarkeit). Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge X . Eine Teilmenge $A \subset X$ ist Caratheodory-messbar im Bezug auf μ^* , falls

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

für jede Teilmenge $E \subset X$ gilt.

Da μ^* subadditiv (siehe Definition 2.1) ist, gilt

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \quad (3)$$

Theorem 2.3. Eine Zusammenfassung von Caratheodory-messbaren Mengen in Bezug auf ein äußeres Maß μ^* ist eine σ -Algebra und die Einschränkung von μ^* auf messbare Mengen ist ein Maß.

Beweis. Aus der Definition der Caratheodory-Messbarkeit erhält man, dass $\emptyset$ und das Komplement einer messbaren Menge messbar sind. Damit gezeigt wird, dass die Zusammenfassung von messbaren Menge eine σ -Algebra ist, muss gezeigt werden, dass sie die abzählbare Vereinigung der abgeschlossenen Mengen ist. Als ersten Schritt zeigt man, dass die Vereinigung von messbaren Mengen erneut messbar ist. Seien A und B messbar und es gilt $E \subset X$. Da A und B messbar sind, gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

Wir schreiben $A \cup B$ als

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Durch die Subadditivität (siehe Definition 2.1) von μ^* erhält man

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B).$$

Durch diese Ungleichung und da $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ folgt

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

Daraus folgt, dass $A \cup B$ messbar ist. □

Theorem 2.4. Die Zusammenfassung von Caratheodory-messbaren Mengen mit einem äußeren Maß μ^* ist eine σ -Algebra und die Einschränkung von μ^* auf messbare Mengen ist ein Maß.

Der Beweis hierfür ist ebenfalls im Buch von Hunter [11] zu finden. Dieses Theorem zeigt, dass man ein Maß auf $\mathbb{R}^n$ durch die Einschränkung des äußeren Lebesgue-Maßes auf seine Caratheodory-messbaren Mengen, welche die Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind, erhält.

Definition 2.11 (Lebesgue-Messbarkeit). Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar, falls

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

für alle Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Falls $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die σ -Algebra von Lebesgue-messbaren Mengen kennzeichnet, dann nennt man die Einschränkung des äußeren Lebesgue-Maßes auf Lebesgue-messbare Mengen

$$\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty], \quad \mu = \mu^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$$

Lebesgue-Maß. Hierbei gibt $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Zusammenfassung von Lebesgue-messbaren Mengen an.

Das hier definierte Lebesgue-Maß dient zur nun folgenden Konstruktion des Lebesgue-Integrals. Es ordnet Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ihr n -dimensionales Volumen zu.

3 Lebesgue-Integral

Das vorliegende Kapitel führt in seinem ersten Teil das Lebesgue-Integral ein. Dabei wird auch der Unterschied zum Riemann-Integral betrachtet. Die beiden Integrale werden zum besseren Verständnis grafisch in Abbildung 1 und 2 dargestellt. Nachfolgend werden Konvergenzsätze beleuchtet sowie Lebesgue-Räume und grundlegende Eigenschaften dieser erläutert.

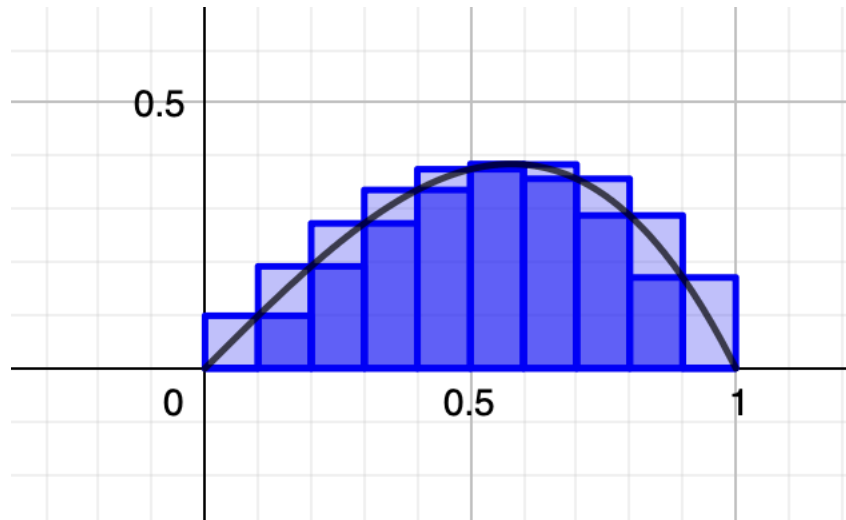


Abbildung 1: Darstellung Riemann-Integral

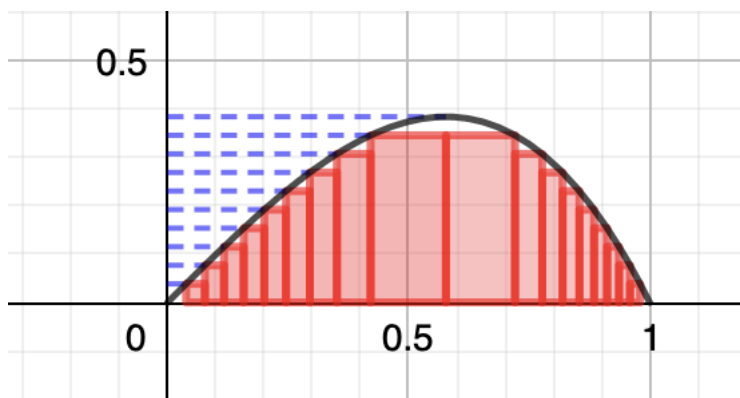


Abbildung 2: Darstellung Lebesgue-Integral

3.1 Definition des Lebesgue-Integrals in drei Schritten

Der hier gewählte Zugang zum Lebesgue-Integral basiert auf dem von Goldhorn verwendeten Ansatz [6] und kombiniert diesen mit dem Ansatz von Hunter [11]. Im Gegensatz zur Riemannschen Integralrechnung wird nicht der Definitionsbereich, sondern der Wertebereich in disjunkte Teilintervalle J_k , welche eine vorgegebene Größe δ nicht überschreiten dürfen, zerlegt.

Nachfolgend wird nun das Lebesgue-Integral in drei Schritten definiert, wobei mit den einfachen Funktionen begonnen wird und auch jeweils deren Eigenschaften betrachtet werden.

Definition 3.1 (Lebesgue-Integral von einfachen Funktionen). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Falls $\phi : X \rightarrow [0, \infty)$ eine einfache Funktion (vgl. Definition 2.7) mit $c_i \geq 0$ und $E_i \in \mathcal{A}$ ist, dann ist das Lebesgue-Integral der einfachen Funktion ϕ in Bezug auf das Maß μ gegeben durch

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E_i). \quad (4)$$

Falls $c_i = 0$ und $\mu(E_i) = \infty$, verwendet man die Konvention, dass $0 \cdot \infty = 0$.

Satz 3.1 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals von einfachen Funktionen). Seien $\phi, \varphi : X \rightarrow [0, \infty)$ positive einfache Funktionen und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es gilt

$$\int k\phi \, d\mu = k \int \phi \, d\mu \quad \text{für } k \in [0, \infty),$$

$$\int (\phi + \varphi) \, d\mu = \int \phi \, d\mu + \int \varphi \, d\mu$$

und

$$0 \leq \int \phi \, d\mu \leq \int \varphi \, d\mu \quad \text{für } 0 \leq \phi \leq \varphi.$$

Der Beweis dieser Eigenschaften folgt aus der Definition des Lebesgue-Integrals für einfache Funktionen (vgl. Definition 3.1).

Um das Lebesgue-Integral von messbaren Funktionen definieren zu können, betrachtet man zuerst nur den positiven Teil dieser Funktionen. Man definiert nun das Lebesgue-Integral einer messbaren positiven Funktion. Man betrachtet hierbei erweitert reellwertige Funktionen.

Definition 3.2. Sei $f : X \rightarrow [0, \infty)$ eine positive, messbare und erweitert reellwertige Funktion und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Lebesgue-Integral der Funktion f ist gegeben durch

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \phi \, d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ einfache Funktion} \right\}. \quad (5)$$

Eine positive Funktion f ist nur dann Lebesgue-integrierbar, falls sie messbar ist und

$$\int f \, d\mu < \infty$$

gilt.

Satz 3.2 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals von positiven messbaren Funktionen). Seien $f, g : X \rightarrow [0, \infty)$ positive, messbare und erweitert reellwertige Funktionen und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es gilt

$$\int k f \, d\mu = k \int f \, d\mu \quad \text{für } k \in [0, \infty)$$

und

$$0 \leq \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu \quad \text{für } 0 \leq f \leq g.$$

Da die Definition des Lebesgue-Integrals von positiven messbaren Funktion auf einfachen Funktionen basiert, folgen auch hier diese Eigenschaften aus Definition 3.2. Die Linearität des Lebesgue-Integrals für diese Art von Funktionen wird zu einem späteren Zeitpunkt erläutert.

Anschließend wird das Lebesgue-Integral für allgemeine erweitert reellwertige und messbare Funktionen definiert. Dafür werden beliebige messbare Funktionen in ihren positiven und negativen Teil zerlegt. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine erweitert reellwertige und messbare Funktion. Man definiert f_+ und $f_- : X \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$f = f_+ - f_-, \quad f_+ = \max \{f, 0\}, \quad f_- = \max \{-f, 0\}.$$

Die Funktion f ist nur messbar, wenn f_+ und f_- messbar sind.

Definition 3.3. Sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Lebesgue-Integral dieser Funktion f ist gegeben durch

$$\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu, \quad (6)$$

falls mindestens eines der beiden Integrale von f_+ und f_- endlich ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man auch als quasi-integrierbar [15]. Die Funktion f ist nur dann Lebesgue-integrierbar, falls sowohl das Integral von f_+ als auch jenes von f_- endlich sind. Dies bedeutet die Funktion f ist Lebesgue-integrierbar, wenn

$$\int |f| < \infty.$$

Auch hier werden, wie bei den beiden vorherigen Schritten, die Eigenschaften des Lebesgue-Integrals bezüglich der betrachteten Funktionen angegeben.

Satz 3.3 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals von allgemeinen erweitert reellwertigen und messbaren Funktionen). Seien f und $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, dann gilt

$$\int kf \, d\mu = k \int f \, d\mu \quad \text{für } k \in \mathbb{R},$$

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu,$$

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu \quad \text{für } f \leq g$$

und

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Der Beweis ist im Buch von Hunter [11] zu finden.

Als letzte Möglichkeit werden noch kurz komplexwertige Funktionen erwähnt. Auch hier muss man Vorarbeit leisten. Bei einem reellwertigen u gilt

$$u_+ := \max\{u, 0\}, \quad u_- := -\min\{u, 0\},$$

Daraus resultiert für u :

$$u = u_+ - u_-, \quad |u| = u_+ + u_-$$

Komplexwertige Funktionen werden in typischer Weise in Real- und Imaginärteil zerlegt und als $u + iv$ geschrieben. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn u und v messbar sind. Damit eine komplexwertige Funktion integrierbar ist, muss sie messbar und ihr Betrag Lebesgue-integrierbar sein.

3.2 Lebesguesche Nullmengen

Als Lebesguesche Nullmenge bezeichnet man Mengen, die bei der Integralrechnung vernachlässigt werden können.

Definition 3.4 (Lebesguesche Nullmenge). Für Lebesguesche Nullmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$\mu_n(A) = 0,$$

$$\int_A f = 0 \quad \text{für alle auf } A \text{ definierten Funktionen.}$$

Ebenfalls ist folgende Aussage äquivalent: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge (I_k) von n -dimensionalen Intervallen, für die

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subseteq A$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(I_k) < \varepsilon$$

gilt.

Außerdem gilt, dass jede Teilmenge einer Nullmenge auch wieder eine Nullmenge sein muss. Auch die Vereinigung einer Folge von Nullmengen resultiert wieder in einer Nullmenge.

3.3 Konvergenzsätze

Der hier gewählte Zugang zu den Konvergenzsätzen basiert auf dem von Goldhorn verwendeten Ansatz [6]. Bevor die Konvergenzsätze eingeführt werden, benötigt man fast überall (bzw. f.ü.) definierte Funktionen.

Definition 3.5. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar. Eine fast überall auf S definierte Funktion ist eine Funktion f , für deren Definitionsbereich D

$$\mu_n(S \setminus D) = 0$$

gilt.

Die Konvergenzsätze sind von großer Bedeutung, da sie die Vertauschung von Grenzwert und Integral bei Funktionenfolgen ermöglichen.

3.3.1 Satz von der monotonen Konvergenz

Theorem 3.4 (Satz der monotonen Konvergenz). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und (g_k) eine Folge von reellwertigen integrierbaren Funktionen auf S .

Fall 1:

Falls für alle k

$$g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \text{f.ü.}$$

gilt, sodass die Funktion g mit dem Funktionswert

$$g(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \sup_{k \geq 1} g_k(x) \quad \text{f.ü.}$$

auf der Menge S definiert und die Folge der Integrale $(\int_S g_k)$ nach oben beschränkt ist, so folgt, dass g integrierbar ist und

$$\int_S g = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_S g_k = \sup_{k \geq 1} \int_S g_k(x) \quad (7)$$

gilt.

Fall 2:

Falls für alle k

$$g_k(x) \geq g_{k+1}(x) \quad \text{f.ü.}$$

gilt, sodass die Funktion g mit dem Funktionswert

$$g(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \inf_{k \geq 1} g_k(x) \quad \text{f.ü.}$$

auf der Menge S definiert und die Folge der Integrale $(\int_S g_k)$ nach unten beschränkt ist, so folgt, dass g integrierbar ist und

$$\int_S g = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_S g_k = \inf_{k \geq 1} \int_S g_k \quad (8)$$

gilt.

In beiden Fällen können also Limes und Integral vertauscht werden.

Der Beweis hierfür ist in Goldhorn [6] angeführt. Mit Hilfe dieses Theorems ist es möglich, die Linearität des Lebesgue-Integrals für positive, messbare und erweitert reellwertige Funktionen zu zeigen.

Satz 3.5. Seien $f, g : X \rightarrow [0, \infty)$ positive, messbare und erweitert reellwertige Funktionen und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es gilt

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Beweis. Seien (ϕ_n) und (φ_n) mit $n \in \mathbb{N}$ monoton anwachsende Folgen, für die $\phi_n \rightarrow f$ und $\varphi_n \rightarrow g$ punktweise gilt, falls $n \rightarrow \infty$. Addiert man ϕ_n und φ_n , so erhält man eine monoton anwachsende

Folge $(\phi_n + \varphi_n)$, für die $\phi_n + \varphi_n \rightarrow f + g$ gilt, falls $n \rightarrow \infty$. Mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz 3.4 und Satz 3.1 folgt

$$\begin{aligned} \int (f + g) \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\phi_n + \varphi_n) \, d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int \phi_n \, d\mu + \int \varphi_n \, d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n \, d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n \, d\mu \\ &= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

□

3.3.2 Satz der dominierten Konvergenz

Theorem 3.6 (Satz der dominierten Konvergenz). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und (f_k) eine Folge von integrierbaren Funktionen auf S , für die f.ü. der Limes $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ existiert. Falls eine integrierbare Funktion g , deren Funktionswerte durch: $g : S \rightarrow [0, \infty]$ gegeben sind, existiert, sodass $|f_k(x)| \leq g(x)$ f.ü. für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in L^1(S)$. Ist dies der Fall, kann das Integral mit dem Limes vertauscht werden, sodass folgender Zusammenhang gilt:

$$\int_S f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_S f_k \quad (9)$$

Der Beweis hierfür ist in Goldhorn [6] angeführt.

3.4 Lebesgue-Räume

Der hier gewählte Zugang zu den Lebesgue-Räumen basiert auf dem von Hunter verwendeten Ansatz [11]. Nun wird im ersten Schritt der L^1 -Raum definiert. Dieser besteht aus integrierbaren Funktionen auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Eine Erweiterung führt sodann L^p -Räume ein, welche alle p -fach integrierbaren Funktionen beinhalten.

Definition 3.6 (L^1 -Raum). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, dann besteht der Raum $L^1(X)$ aus allen integrierbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, für die

$$\|f\|_{L^1} = \int |f| \, d\mu < \infty \quad (10)$$

gilt. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in L^1(X)$ konvergiert in L^1 , falls

$$\|f - f_n\|_{L^1} = \int |f - f_n| \, d\mu \rightarrow 0, \quad (11)$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt.

Definition 3.7 (L^p -Räume). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$. Dann besteht der Raum $L^p(X)$ aus allen Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ für die

$$\int |f|^p d\mu < \infty \quad (12)$$

gilt. Zwei messbare Funktionen sind gleich, falls sie fast überall bezogen auf μ gleich sind. Die Norm von $f \in L^p(X)$ in L^p -Räumen ist definiert durch

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (13)$$

In L^p -Räumen gelten die folgenden beiden Ungleichungen.

Theorem 3.7 (Minkowski-Ungleichung). Falls $f, g \in L^p(X)$ und $1 \leq p \leq \infty$, dann liegt auch $f + g \in L^p(X)$ und es gilt

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Das bedeutet, dass $\|\cdot\|_{L^p}$ eine Norm auf $L^p(X)$ für $1 \leq p \leq \infty$ ist. Falls $0 < p < 1$ gilt, gilt die umgekehrte Ungleichung, wobei $\|\cdot\|_{L^p}$ dann keine Norm ist. Diese umgekehrte Ungleichung lautet

$$\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \leq \|f + g\|_{L^p}.$$

$L^p(X)$ ist für $0 < p < 1$ ein linearer Raum, da

$$|f + g|^p \leq |f|^p + |g|^p$$

gilt.

Der Beweis hierfür ist in Goldhorn [6] angeführt.

Für die zweite Ungleichung, die Hölder-Ungleichung, muss zuvor noch die Hölder-Konjugierte definiert werden.

Definition 3.8 (Hölder-Konjugierte). Sei $1 \leq p \leq \infty$. Die Hölder-Konjugierte p' von p ist durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

falls $1 < p < \infty$ gilt, definiert. Im Spezialfall $p = 1$ bzw. $p = \infty$ gilt $1' = \infty$ und $\infty' = 1$.

Ausgehend von dieser Definition kann nun die Hölder-Ungleichung angegeben werden.

Theorem 3.8 (Hölder-Ungleichung). Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $1 \leq p \leq \infty$. Falls $f, g \in L^p(X)$, gilt für das Produkt fg auch $fg \in L^p(X)$. Zusätzlich gilt

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Für den Spezialfall $p = 2$, wodurch auch $p' = 2$ gilt, ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Ein Beweis der Hölder-Ungleichung ist im Buch von Goldhorn [6] nachzulesen.

Es wird noch ein weiterer wichtiger Satz der Integralrechnung betrachtet, welcher zu einem späteren Zeitpunkt benötigt wird [6].

Satz 3.9 (Satz von Fubini). Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Dann gilt

$$\int d^n x \int d^m y f(x, y) = \int f(x, y) \, d^{n+m}(x + y) = \int d^m y \int d^n x f(x, y). \quad (14)$$

Dies bedeutet, dass die Integrationsreihenfolge vertauscht werden kann. Der Beweis hierfür ist in Forster [7] angeführt.

3.4.1 Dichtheit in Lebesgue-Räumen

Die Eigenschaft, dass einfache Funktionen dicht in L^p -Räumen liegen, ist von großer Bedeutung und wird später für den Beweis des Riemann-Lebesgue-Lemmas (siehe Kapitel 6) benötigt.

Theorem 3.10. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist die Menge der einfachen Funktionen, welche zu $L^p(X)$ gehören, auch dicht in $L^p(X)$.

Beweis. Da Funktionen in ihre positiven und negativen Teile zerlegt werden können, reicht es aus, zu zeigen, dass eine positive Funktion $f : X \rightarrow [0, \infty)$ durch einfache Funktionen approximiert werden kann. Der Beweis wird in zwei Teile aufgeteilt. Für den ersten Teil gilt $1 \leq p < \infty$, während im zweiten Teil, der Fall $p = \infty$ betrachtet wird. Aufgrund von Theorem 2.1 gilt, dass es eine steigende Folge von einfachen Funktionen $\{\phi_n\}$ gibt, sodass ϕ_n punktweise gegen f konvergiert. All diese einfachen Funktionen gehören zu $L^p(X)$. Außerdem gilt folgende Ungleichung

$$|f - \phi_n|^p \leq |f|^p \in L^1(X).$$

Mit Hilfe des Satzes der dominierten Konvergenz (vgl. Theorem 3.6) kann gefolgert werden, dass

$$\int |f - \phi_n|^p \, d\mu \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Dadurch wurde der erste Fall bewiesen. Betrachtet man nun $p = \infty$. Falls $f \in L^\infty(X)$ ist, nimmt man eine beschränkte Funktion als Repräsentant der Funktion f . Erneut erhält man mit Hilfe von Theorem 2.1, dass es eine Folge von einfachen Funktionen gibt, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Dadurch ist auch der zweite Fall gezeigt. $\square$

3.4.2 Banachräume

Es wird hier der Darstellung im Buch von Arens zur Einführung von Banachräumen gefolgt [1]. Hierfür wird der Begriff des normierten Vektorraums und der Cauchy-Folge benötigt.

Definition 3.9 (Normierter Vektorraum). Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Man nennt eine Funktion $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm, falls die folgenden Eigenschaften für $f \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ erfüllt sind. Es gilt

$$\|f\| = 0 \quad \text{nur dann, wenn } f = 0 \text{ (positive Definitheit),}$$

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad \text{(Homogenität)}$$

und

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \text{(Dreiecksungleichung).}$$

Man nennt einen Vektorraum, auf dem eine solche Norm definiert ist, einen normierten Vektorraum.

Definition 3.10 (Cauchy-Folge). Eine Folge (x_n) in einem normierten Vektorraum V heißt Cauchy-Folge, falls es zu jeder Zahl $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, sodass

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon$$

für alle $n, m \geq N$ gilt.

Mit Hilfe dieser beiden Definitionen können nun Banachräume definiert werden.

Definition 3.11 (Banachräume). Ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge einen Grenzwert besitzt, heißt vollständig. Einen vollständigen normierten Vektorraum nennt man Banachraum.

Die Vollständigkeit von L^p -Räumen wird nun gezeigt.

3.4.3 Vollständigkeit von Lebesgue-Räumen

Damit die Vollständigkeit von $L^p(X)$ gezeigt werden kann, benötigt man ein weiteres Lemma.

Lemma 3.11. Sei X ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$. Sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $g_k \in L^p(X)$ eine Folge von L^p -Funktionen, für die

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L^p} < \infty$$

gilt. Dann folgt daraus, dass eine Funktion $f \in L^p(X)$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k = f$$

existiert. Diese Summe konvergiert punktweise f.ü. und liegt in $L^p(X)$.

Der Beweis hierfür ist im Buch von Hunter [11] angeführt. L^p -Räume sind daher auch Banachräume. Mit Hilfe dieses Lemmas kann nun das Riesz-Fischer-Theorem gezeigt werden.

Theorem 3.12 (Riesz-Fischer). Falls X ein Maßraum ist und $1 \leq p \leq \infty$ gilt, dann ist $L^p(X)$ vollständig.

Beweis. Wie schon bei dem Beweis der Dichtheit von einfachen Funktionen zerlegt man diesen Beweis in zwei Teile, wobei der erste Teil für $1 \leq p < \infty$ und der zweite Teil für $p = \infty$ gezeigt wird.

Sei nun $1 \leq p < \infty$ und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(X)$. Nun kann man eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ wählen, für die

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^j}$$

gilt. Schreibt man nun $f_{k_{j+1}} - f_{k_j}$ als g_j , erhält man

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_{L^p} < \infty,$$

da $\sum \frac{1}{2^j}$ eine geometrische Reihe ist. Mit Hilfe des Lemmas 3.11 folgt, dass die Summe $f_{k_1} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j$ punktweise gegen eine Funktion $f \in L^p(X)$ konvergiert und auch in $L^p(X)$ liegt. Für den Limes der Teilfolge gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(f_{k_1} + \sum_{i=1}^{j-1} g_i \right) = f_{k_1} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j = f$$

und er existiert in $L^p(X)$. Da die Ausgangsfolge eine Cauchy-Folge war, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$$

in $L^p(X)$. Daraus kann geschlossen werden, dass jede Cauchy-Folge in $L^p(X)$ konvergiert und daher L^p vollständig für $1 \leq p < \infty$ ist.

Betrachten wir nun den Fall $p = \infty$. Sei (f_k) eine Cauchy-Folge in $L^\infty(X)$. Dann existiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_j(x) - f_k(x)| < \frac{1}{m}$$

für alle $j, k \geq n$ und $x \in N_{j,k,m}^c$ gilt. Hierbei ist $N_{j,k,m}$ eine Nullmenge. Sei nun

$$N = \bigcup_{j,k,m \in \mathbb{N}} N_{j,k,m},$$

dann ist auch N eine Nullmenge und für jedes $x \in N^c$ ist die Folge $\{f_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, für die

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

für $x \in N^c$ gilt. Lässt man nun $k \rightarrow \infty$ gehen, gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_j(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m},$$

für alle $j \geq n$ und $x \in N^c$. Daraus kann man schließen, dass f wesentlich beschränkt ist und $f_j \rightarrow f$ für $j \rightarrow \infty$ gilt. Somit wurde auch gezeigt, dass L^∞ vollständig ist. $\square$

Durch den Beweis der Vollständigkeit der Lebesgue-Räume kann gefolgert werden, dass Lebesgue-Räume auch Banachräume sind.

4 Fourierreihen

Wie in der Einleitung beschrieben, ist die Fouriertheorie aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken. Sie ist ein wichtiger Bestandteil der modernen Signalverarbeitung. Jedes Mal, wenn man den Fernseher einschaltet, die Lautstärke verändert, verwendet man Technologie, die auf der Fouriertheorie basiert. Das Ziel dieses Kapitels ist es, Fourierreihen, deren Koeffizienten und deren Eigenschaften einzuführen. Wie am Anfang der Arbeit erwähnt, ist die Idee der Fouriertheorie jene, dass es für alle periodischen, stückweise stetigen und beschränkten Funktionen eine Reihenentwicklung in eine Funktionsreihe aus Sinus- und Cosinusfunktionen gäbe. Dies bedeutet, dass man Funktionen als Überlagerung von Schwingungen darstellen kann. Dadurch können einzelne Frequenzen verstärkt oder abgeschwächt werden.

Als erstes benötigt man den Begriff des sogenannten Fourierpolynoms einer L^2 -Funktion. Für die Definition des trigonometrischen Fourierpolynoms benötigt man Orthonormalbasen.

Definition 4.1 (Orthonormalbasis). Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V . Dann heißt $(\phi_k)_{k \in I}$ eine Orthonormalbasis von V , falls

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k. \end{cases} \quad (15)$$

gilt.

Definition 4.2 (Trigonometrisches Fourierpolynom). Für $\phi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, mit $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$q = \sum_{k=-n}^n q_k \phi_k \in T_n, \quad (16)$$

trigonometrisches Polynom der Ordnung n , mit Koeffizienten $q_k \in \mathbb{C}$. T_n bezeichnet die Menge aller trigonometrische Polynome der Ordnung n .

Für den Beweis, dass die Funktionen ϕ_k eine Orthonormalbasis auf der Menge der trigonometrischen Polynome T bilden, reicht es

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ 1 & (k = l) \end{cases}$$

zu zeigen. Dies besagt, dass die Funktionen ϕ_k eine Orthonormalbasis im Raum der trigonometrischen Polynome T bilden.

Das Fourierpolynom einer Funktion f ist die beste Approximation im Sinne des quadratischen Mittels. Man betrachtet nun den Abstand einer Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ zu einem trigonometrischen Polynom q vom Grad n . Durch den Übergang von T_n zu L^2 erhält man ein Orthonormalsystem.

Sei f eine beliebige $L^2(-\pi, \pi)$ -Funktion. Wir berechnen den quadrierten Abstand zwischen f und q . Unter Berücksichtigung der Orthogonalität von ϕ_k erhält man

$$\begin{aligned} \|f - q\|_{L^2}^2 &= \langle f - q, f - q \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2\operatorname{Re}\langle f, q \rangle + \langle q, q \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2\operatorname{Re}\langle f, \sum_{k=-n}^n q_k \phi_k \rangle + \langle \sum_{k=-n}^n q_k \phi_k, \sum_{k=-n}^n q_k \phi_k \rangle \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{k=-n}^n \overline{q_k} \langle f, \phi_k \rangle + \sum_{k=-n}^n |q_k|^2. \end{aligned}$$

Durch Einbezug von

$$\begin{aligned} |q_k - \langle f, \phi_k \rangle|^2 &= (q_k - \langle f, \phi_k \rangle) \overline{(q_k - \langle f, \phi_k \rangle)} \\ &= |q_k|^2 - q_k \overline{\langle f, \phi_k \rangle} - \overline{q_k} \langle f, \phi_k \rangle + |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \\ &= |q_k|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{q_k} \langle f, \phi_k \rangle) + |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \end{aligned} \tag{17}$$

folgt

$$\|f - q\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=-n}^n |\langle f, \phi_k \rangle|^2 + \sum_{k=-n}^n |q_k - \langle f, \phi_k \rangle|^2. \tag{18}$$

Betrachtet man Gleichung (18), so erkennt man, dass die ersten beiden Terme nicht vom trigonometrischen Polynom q abhängen, sondern nur von f . Der dritte Term ist immer positiv, da es sich um eine Summe von Quadraten handelt und wird null, wenn $q_k = \langle f, \phi_k \rangle, k = -n, \dots, n$ gilt und $\{\phi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ vollständig ist [1].

Definition 4.3 (Fourierpolynom). Trigonometrische Polynome, durch die der quadratische Abstand zu f minimal ist, approximieren f im quadratischen Mittel in der L^2 -Norm am besten. Man bezeichnet sie als Fourierpolynome p_n vom Grad n zur Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ und man definiert

$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

wobei c_k hier den k -ten Fourierkoeffizienten bezeichnet. Dieser ist gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (20)$$

Reelle Darstellung des Fourierpolynoms

Die reelle Darstellung ist gegeben durch

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]. \quad (21)$$

Ist f reellwertig, gilt $c_{-k} = \overline{c_k}$. Daraus resultieren für reellwertige Funktionen folgende Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (22)$$

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad (23)$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (24)$$

Komplexe Darstellung des Fourierpolynoms

In vielen Fällen ist die Darstellung einer Fourierreihe in komplexer Schreibweise einfacher.

Satz 4.1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Sie besitze eine reellwertige Periode p und sei stückweise stetig differenzierbar. Die komplexwertige Fourierreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen den Funktionswert $f(x)$. Es gilt

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{p} x}.$$

Die Fourierkoeffizienten einer komplexwertigen Fourierreihe sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{p} x},$$

für $k \in \mathbb{Z}$.

Der Beweis hierfür ist in Fröhlich [13] angeführt.

Umrechnung zwischen reeller und komplexer Darstellung

Es gelten folgende Zusammenhänge zwischen reellen und komplexen Fourierkoeffizienten

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad (25)$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad (26)$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad (27)$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ gilt [1].

Gerade und ungerade Funktionen

Es wird nun der Unterschied von geraden und ungeraden Funktion bei der Fourierreihenentwicklung betrachtet [1].

Definition 4.4 (Gerade und ungerade Funktionen). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gerade, falls für alle x aus dem Definitionsbereich

$$f(-x) = f(x)$$

gilt. Sie heißt ungerade, falls

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt.

Für gerade Funktionen gilt

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) \, dx = 0,$$

da das Produkt einer geraden und ungeraden Funktion eine ungerade Funktion ergibt, wodurch die Fourierkoeffizienten $b_k = 0$ werden. Für a_k gilt in diesem Fall

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Für ungerade Funktionen werden aufgrund der Eigenschaften des Cosinus die Koeffizienten $a_k = 0$.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cos(kx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(-x) \cos(-kx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f(-x) + f(x)) \cos(-kx) \, dx \\ &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Für a_0 gilt

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 0, \quad (29)$$

da f eine ungerade Funktion ist. Dadurch ergibt sich

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

4.1 Fourierzerlegung von p -periodischen Signalen

Es werden nun Fourierreihen von p -periodischen Signalen betrachtet [13].

Satz 4.2 (Satz von Fourier für p -periodische Funktionen). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion mit Periode p . Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe der p -periodischen Funktion f und es gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} x\right).$$

Für die Fourierkoeffizienten dieser Fourierreihe gilt

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \, dx,$$

$$a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos\left(k \frac{2\pi}{p} x\right) \, dx \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

und

$$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(k \frac{2\pi}{p} x\right) \, dx \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Der Beweis hierfür ist in Fröhlich [13] nachzulesen. Zum besseren Verständnis und zur Weiterarbeit im folgenden Kapitel wird nun ein Praxisbeispiel betrachtet. Sei $t \mapsto f(t)$ eine periodische Schwingung mit Schwingungsdauer T . Es gilt zu jedem Zeitpunkt t die Fourierreihendarstellung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (30)$$

aus Satz 4.2, wobei $\frac{2\pi}{T}$ hier auch als Grundfrequenz ω_0 bezeichnet wird.

4.2 Bedeutung und Eigenschaften der Fourierkoeffizienten

Die Bedeutung der Fourierkoeffizienten wird am Ansatz von Fröhlich erläutert [13]. Durch die Zerlegung eines Signals $t \mapsto f(t)$ in unendlich viele Cosinus- und Sinusfunktionen teilt man dieses in

dessen harmonische Bestandteile auf. Man bezeichnet dies auch als diskretes Spektrum eines periodischen Signals. Diskrete Spektren bestehen aus einer Grundschwingung, welche die Frequenz ω_0 , also die im Beispiel (30) genannte Grundfrequenz, hat, und Oberschwingungen. Für alle $k \geq 2$ bezeichnet man $k\omega_0$ als die Frequenzen der Oberschwingungen. Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k entsprechen den Amplituden. Die Anteile mit kleinen Werten von k entsprechen den niedrigeren Frequenzen, während große k hohe Frequenzen bestimmen. Auf die Praxis umgelegt, bedeuten kleine Frequenzen tiefe Töne und umgekehrt große Frequenzen hohe Töne. In der Musik geben die Amplituden, also hier die Fourierkoeffizienten, die Lautstärke an. Betrachtet man eine Oberschwingung mit der Frequenz $k\omega_0$ erhält man die Fourierkoeffizienten a_k und b_k . Man geht nun in die Darstellung

$$a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = A_k \cos(k\omega_0 t - \phi_k)$$

mit $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ und $\tan \phi_k = \frac{b_k}{a_k}$ für $a_k \neq 0$ über. Das hier neu eingeführte ϕ_k wird auch als Nullphase und A_k als Amplitude bezeichnet. Diese Darstellung erhält man auf Grund der Cosinus-Additionstheoreme. Es gilt

$$a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = A_k \cos(k\omega_0 t - \phi_k) = A_k \cos(k\omega_0 t) \cos \phi_k + A_k \sin(k\omega_0 t) \sin \phi_k.$$

Führt man einen Koeffizientenvergleich durch, erhält man

$$a_k = A_k \cos \phi_k \quad \text{und} \quad b_k = A_k \sin \phi_k.$$

Dadurch erhält man

$$\tan \phi_k = \frac{b_k}{a_k},$$

falls $a_k \neq 0$. Quadriert man beide Gleichungen, welche man durch den Koeffizientenvergleich erhält, erhält man

$$a_k^2 + b_k^2 = A_k^2 \cos^2 \phi_k + A_k^2 \sin^2 \phi_k = A_k^2 (\cos^2 \phi_k + \sin^2 \phi_k) = A_k^2.$$

Daraus folgt

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Für ϕ_k gilt

$$\phi_k = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & \text{für } a_k > 0 \\ \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \pm \pi & \text{für } a_k < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a_k = 0, b_k < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a_k = 0, b_k > 0 \\ 0 & \text{für } a_k = b_k = 0. \end{cases}$$

Betrachtet man die Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet man diese als Amplitudenspektrum, während man die Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ als Phasenspektrum bezeichnet. Häufig verwendet man auch die sogenannte Spektraldarstellung der Funktion f ,

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \phi_k),$$

wobei $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \neq 0, k \in \mathbb{N}$ und $\sin \phi_k = \frac{a_k}{A_k}$, $\cos \phi_k = \frac{b_k}{A_k}$, $0 \leq \phi_k < 2\pi$. Der Gleichstromanteil eines Signals wird durch $c_0 = \frac{a_0}{2}$ dargestellt. Es gilt $c_k^* = c_{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Betrachtet man die Phase ϕ_k gilt

$$\tan \phi_k = \frac{\operatorname{Im}(c_k)}{\operatorname{Re}(c_k)} = \frac{-\frac{b_k}{2}}{\frac{a_k}{2}} = -\frac{b_k}{a_k}.$$

Dies ist das Phasenspektrum bis auf das Vorzeichen.

4.2.1 Eigenschaften der Fourierkoeffizienten

Es werden nun die Eigenschaften der Fourierkoeffizienten näher betrachtet [1].

Linearität

Man betrachtet nun zwei Funktionen f und g mit Fourierkoeffizienten c_k und d_k . Der Fourierkoeffizient der Funktion $f \pm g$ ist gegeben durch $c_k \pm d_k$. Für die Funktion λf , wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ ist, ist der Fourierkoeffizient gegeben durch λc_k .

Ableitung

Sei f stetig und stückweise stetig differenzierbar und besitze die komplexen Fourierkoeffizienten c_k , dann gilt für die Ableitung f' , dass sie die Fourierkoeffizienten ikc_k besitzt. Bei reellen Fourierkoeffizienten besitzt f' die Koeffizienten $-kb_k$ für die Cosinusterme und ka_k für die Sinusterme. Dadurch ergibt sich

$$p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k(-a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)),$$

wobei die Konstante a_0 wegfällt.

Verschiebung

Verschiebt man eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um a , lauten die Fourierkoeffizienten der durch $f(x - a)$ definierten Funktion, $e^{ika} c_k$. Die durch $e^{inx} f(x)$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt die Fourierkoeffizienten $(c_{k-n})_{k \in \mathbb{Z}}$.

4.3 Fourierscher Entwicklungssatz

Es wird nun der Fouriersche Entwicklungssatz anhand des Ansatzes von Arens erläutert [1]. Das in (19) definierte Fourierpolynom p ist die beste Approximation im quadratischen Mittel einer Funktion f . Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Konvergenz der Folge (p_n) der Fourierpolynome der Funktion f genauer zu betrachten. Für ein Fourierpolynom mit der Form (19) gilt, wenn man (17)

und (18) betrachtet,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Hier wird erneut mit der Orthogonalität (15) gearbeitet. Formt man diese Gleichung nun um, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}|^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\ &\quad \left| + 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \right. \\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}|^2 dx + 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ &\quad \left| - \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}|^2 dx \right. \\ 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}|^2 dx \\ &\quad \left| : 2\pi \right. \\ \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}|^2 dx. \end{aligned}$$

Für diese Gleichung gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (31)$$

Diese Ungleichung wird als Bessel'sche Ungleichung bezeichnet. Auf der linken Seite der Ungleichung steht eine Reihe mit nicht negativen Reihengliedern. Aufgrund des Monotoniekriteriums von Reihen konvergiert die linke Seite, da die Bessel'sche Ungleichung sonst nicht erfüllt wird. Diese Konvergenz bedeutet auch, dass die Fourierkoeffizienten gegen 0 gehen ($c_k \rightarrow 0, k \rightarrow \pm\infty$). Diese Aussage wird auch als Riemann-Lebesgue-Lemma bezeichnet. Auf dieses wird in einem späteren Kapitel genauer eingegangen. Mit Hilfe der Bessel'schen Ungleichung kann gefolgert werden, dass zwei Funktionen f und g , für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt, dieselben Fourierkoeffizienten besitzen [1]. Man darf dadurch nicht automatisch auf $f = g$ schließen, da dies nur Gültigkeit besitzt, falls es keine andere Funktion als die Nullfunktion im $L^2(-\pi, \pi)$ gibt, die zu allen anderen trigonometrischen Polynomen orthogonal ist. Dieser Beweis ist im „Lehrbuch der Analysis 2“ von Heuser angeführt [9]. Ebenfalls folgt aus der Bessel'schen

Ungleichung, dass die Folge der Fourierpolynome gegen eine Funktion $g \in L^2(-\pi, \pi)$ konvergiert. Diese Folgerung basiert auf der Vollständigkeit des $L^2(-\pi, \pi)$ -Raumes.

Mit all diesen Informationen erhält man nun den in der Mathematik wichtigen Fourierschen Entwicklungssatz.

Satz 4.3 (Fourierscher Entwicklungssatz). Sei (p_n) die Folge der Fourierpolynome zu einer Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Sie konvergiert im quadratischen Mittel gegen diese Funktion f .

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (32)$$

Diese konvergente Reihe ist genau die Fourierreihe. Zusätzlich gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx, \quad (33)$$

was auch als Parseval'sche Ungleichung bezeichnet wird.

Dies bedeutet also, dass sich jede periodische L^2 -Funktion f in eine Fourierreihe entwickeln lässt und man nennt dies die Fourierreihendarstellung der Funktion f .

4.4 Restgliedformel des Fourierpolynoms

Um die Differenz zwischen einer Funktion f und ihrem Fourierpolynom p_n zu erhalten, benötigt man die Restgliedformel.

Definition 4.5 (Restgliedformel). Die Restgliedformel ist gegeben durch

$$\frac{1}{2}((f(x_+) + f(x_-))) = \sum_{k=-n}^n c^k e^{ikx} + R_n(x), \quad (34)$$

wobei

$$\begin{aligned} R_n(x) = \frac{1}{2\pi} & \left[\int_{x-\pi}^x (f(x_-) - f(t)) \frac{\sin[(2n+1)\frac{x-t}{2}]}{\sin \frac{x-t}{2}} dt \right. \\ & \left. + \int_x^{x+\pi} (f(x_+) - f(t)) \frac{\sin[(2n+1)\frac{x-t}{2}]}{\sin \frac{x-t}{2}} dt \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Beweis. Der Beweis der Restgliedformel wird hier der Darstellung in [1] folgend gezeigt. Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte 2π -periodische Funktion und p_n das Fourierpolynom der Funktion. Die Restgliedformel gibt die Differenz zwischen der Funktion und deren Fourierpolynom an. Für die

Herleitung der Restgliedformel wird vollständige Induktion verwendet. Für den Induktionsanfang $n = 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)] - c_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi f(x_+) + \pi f(x_-) - \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x-\pi}^x (f(x_-) - f(t)) dt + \int_x^{x+\pi} (f(x_+) - f(t)) dt \right], \end{aligned}$$

wobei $f(x_+)$ als der rechtseitige Limes der Funktion f an der Stelle x und $f(x_-)$ als der linksseitige Limes der Funktion f an der Stelle x definiert sind. Dies ist der Induktionsanfang. Man nimmt nun an, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ die Restgliedformel gilt und setzt

$$A_n(s) = \frac{\sin[(2n+1)\frac{s}{2}]}{\sin(\frac{s}{2})},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ liegt. Für $s = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ist die Definition von A_n im Sinne des Grenzwertes nach der Regel von de L'Hospital zu verstehen. Dann gilt

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{2}[f(x_+) + f(x_-)] - \sum_{k=-(n+1)}^{n+1} c_k e^{ikx} \\ &= R_n(x) - c_{-(n+1)} e^{-i(n+1)x} - c_{(n+1)} e^{i(n+1)x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x-\pi}^x (f(x_-) - f(t)) A_n(x-t) dt \right. \\ &\quad + \int_x^{x+\pi} (f(x_+) - f(t)) A_n(x-t) dt \\ &\quad \left. - \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \left(e^{-i(n+1)(x-t)} + e^{i(n+1)(x-t)} \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Man kann den letzten Integranden vereinfachen, da

$$e^{-i(n+1)(x-t)} + e^{i(n+1)(x-t)} = 2 \cos((n+1)(x-t))$$

gilt. Ebenfalls gilt

$$\begin{aligned} & \int_{x-\pi}^x \cos((n+1)(x-t)) dt \\ &= \left[-\frac{1}{(n+1)} \sin((n+1)(x-t)) \right]_{t=x-\pi}^x \\ &= \frac{1}{i(n+1)} (\sin(0) - \sin((n+1)\pi)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus resultiert

$$\int_{x-\pi}^x f(x_-) \cos((n+1)(x-t)) dt = 0$$

und

$$\int_x^{x+\pi} f(x_+) \cos((n+1)(x-t)) dt = 0.$$

Mit diesen Vereinfachungen folgt

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x-\pi}^x (f(x_-) - f(t))(A_n(x-t) + 2 \cos((n+1)(x-t))) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{x+\pi} (f(x_+) - f(t))(A_n(x-t) + 2 \cos((n+1)(x-t))) dt \right]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt für A_n

$$\begin{aligned} &A_n(s) + 2 \cos((n+1)s) \\ &= \frac{\sin((n+1)s) \cos(s/2) - \cos((n+1)s/2) \sin(s/2)}{\sin(s/2)} + 2 \cos((n+1)s) \\ &= \frac{\sin((n+1)s) \cos(s/2) + \cos((n+1)s/2) \sin(s/2)}{\sin(s/2)} \\ &= \frac{\sin((2n+3)s/2)}{\sin(s/2)} \\ &= A_{n+1}(s). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{x-\pi}^x (f(x_-) - f(t)) A_{n+1}(x-t) dt + \int_x^{x+\pi} (f(x_+) - f(t)) A_{n+1}(x-t) dt \right]. \quad (36)$$

Dies war für die Induktionsbehauptung zu zeigen.

□

4.5 Rechenbeispiele - Fourierreihen

Die in dem vorherigen Kapitel neu eingeführten Informationen sollen nun an simplen Rechenbeispielen angewendet werden, um sie praktisch zu machen. Dazu werden die Fourierreihen von einigen wichtigen Funktionen berechnet, wobei diese jeweils auf einem Intervall der Breite 2π definiert und 2π -periodisch fortgesetzt werden.

4.5.1 Rechtecksfunktion

Die Rechtecksfunktion ist durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

gegeben und wird mit Periode 2π periodisch fortgesetzt. Da es sich um eine ungerade Funktion handelt, können die a_k ignoriert und nur die b_k berechnet werden. Für die b_k folgt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(kx) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cdot \cos(kx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \cos(\pi k) + \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Es kommt zur Fallunterscheidung, je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist. Bei geradem k folgt $b_k = 0$. Bei ungeradem k folgt $b_k = \frac{4}{k\pi}$. Daraus resultiert die Fourierreihe in

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k-pi=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin((2k-1)x).$$

Die ersten Partialsummen der Fourierreihe der Rechtecksfunktion und die Rechtecksfunktion selbst sind in Abb. 3 dargestellt.

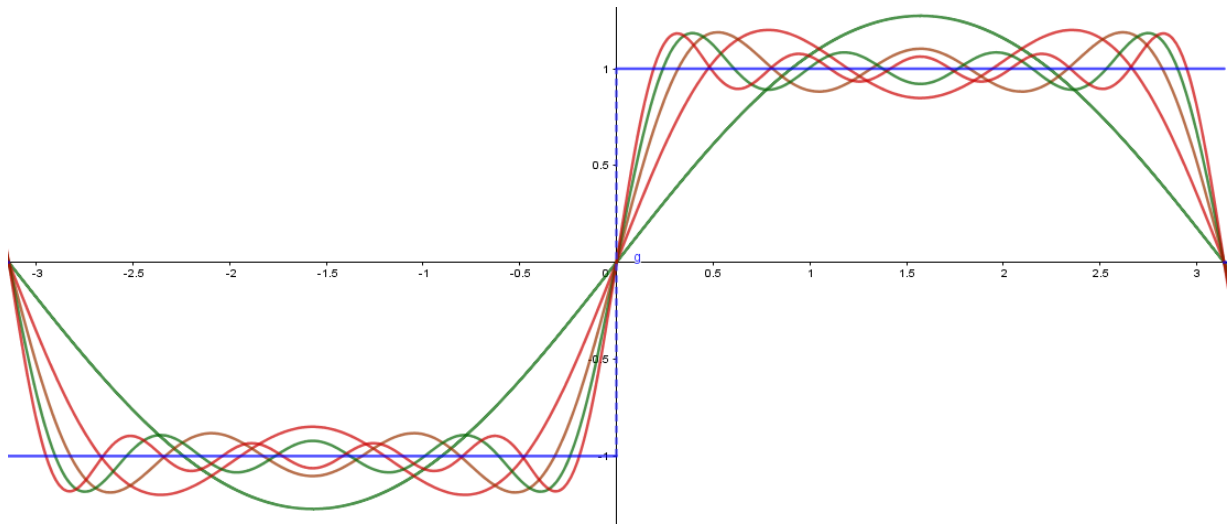


Abbildung 3: Rechtecksfunktion und deren Fourierreihenentwicklung

4.5.2 Dreiecksfunktion

Die Betragsfunktion ist durch

$$f(x) = |x|$$

auf $(-\pi, \pi)$ gegeben und wird mit Periode 2π periodisch fortgesetzt. Da es sich um eine gerade Funktion handelt, können die b_k ignoriert und nur a_0 und die a_k berechnet werden. Für a_0 folgt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi.$$

Für die a_k folgt

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{k} \sin(kx) x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) \cdot 1 \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} \sin(k\pi) - \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_0^{\pi} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} \sin(k\pi) - \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{k} \cos(k\pi) + \frac{1}{k} \right) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} \sin(k\pi) + \frac{1}{n^2} \cos(k\pi) - \frac{1}{n^2} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(k\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right),
 \end{aligned}$$

wobei hier partielle Integration angewendet wird. Es kommt wieder zur Fallunterscheidung nach der Parität von k . Bei geradem k folgt $a_k = 0$. Bei ungeradem k folgt $a_k = -\frac{4}{k^2\pi}$. Daraus resultiert die Fourierreihe in

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

Die ersten Partialsummen der Fourierreihe der Dreiecksfunktion und die Dreiecksfunktion selbst sind in Abb. 4 dargestellt.

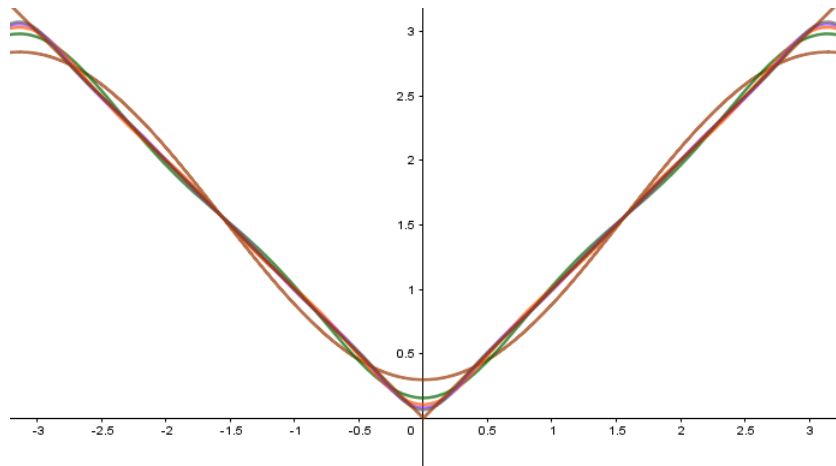


Abbildung 4: Dreiecksfunktion und deren Fourierreihenentwicklung

4.5.3 Quadratfunktion

Die Quadratfunktion ist durch

$$f(x) = x^2$$

auf $(-\pi, \pi)$ gegeben und wird mit Periode 2π periodisch fortgesetzt. Da es sich um eine gerade Funktion handelt, können die b_k ignoriert und nur a_0 und die a_k berechnet werden. Für a_0 folgt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{3} \pi^3 - \left(-\frac{1}{3} \pi^3 \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi^2. \end{aligned}$$

Für die a_k folgt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k} \sin(kx) x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) 2x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(0 - \frac{2}{k} \left(\left[-\cos(kx) \frac{1}{k} x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{k} \cos(kx) \cdot 1 \, dx \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2}{k} \left(\left(-(-1)^k \frac{\pi}{k} + (-1)^k \left(\frac{-\pi}{k} \right) \right) + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \, dx \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2}{k} \left(\left(\frac{-2\pi}{k} (-1)^k \right) + \frac{1}{k} \left[\frac{1}{k} \sin(kx) \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi}{k^2} (-1)^k + 0 \right) \\ &= \frac{4}{k^2} (-1)^k. \end{aligned}$$

Daraus resultiert die Fourierreihe in

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx).$$

Die Fourierreihe der Quadratfunktion und die Quadratfunktion selbst sind in Abb. 5 dargestellt.

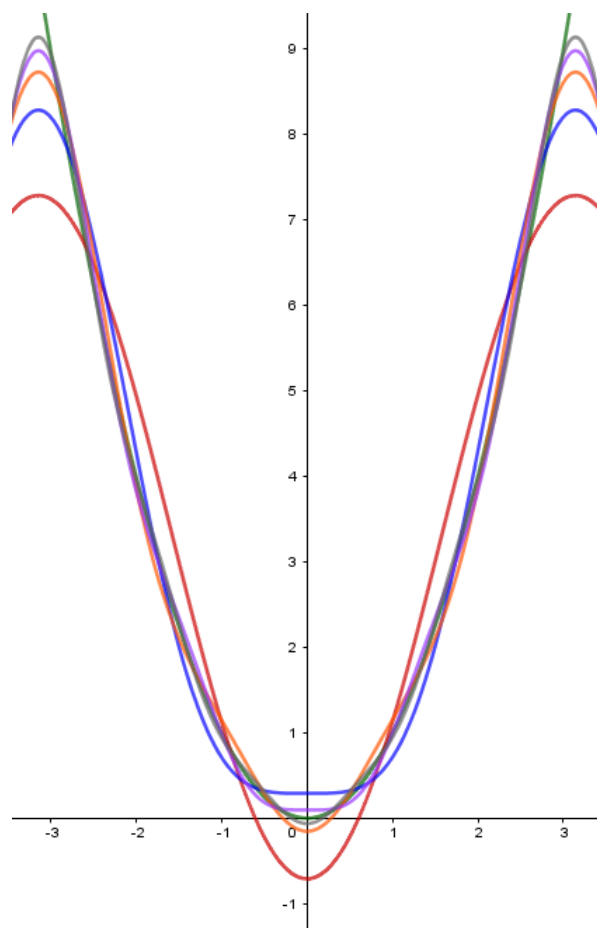


Abbildung 5: Quadratfunktion und deren Fourierreihenentwicklung

4.5.4 Sägezahnfunktion

Die Sägezahnfunktion ist durch

$$f(x) = x \quad \text{für} \quad -\pi < x \leq \pi$$

auf $(-\pi, \pi)$ gegeben und wird mit Periode 2π periodisch fortgesetzt. Da es sich um eine ungerade Funktion handelt, können die a_k ignoriert und nur die b_k berechnet werden. Für die b_k folgt

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[(-\cos(kx)) \frac{1}{k} x \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(kx)) \frac{1}{k} \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{k} (-\cos(\pi k)) + \frac{\pi}{k} (-\cos(-\pi k)) \right) + 0 \\
 &= \frac{1}{k} (-\cos(\pi k) - \cos(\pi k)) \\
 &= -\frac{2}{k} \cos(\pi k) \\
 &= -\frac{2}{k} (-1)^k \\
 &= \frac{2}{k} (-1)^{k+1},
 \end{aligned}$$

wobei $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ verwendet wird. Daraus resultiert die Fourierreihe in

$$f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Die ersten Partialsummen der Fourierreihe der Sägezahnfunktion und die Sägezahnfunktion selbst sind in Abb. 6 dargestellt.

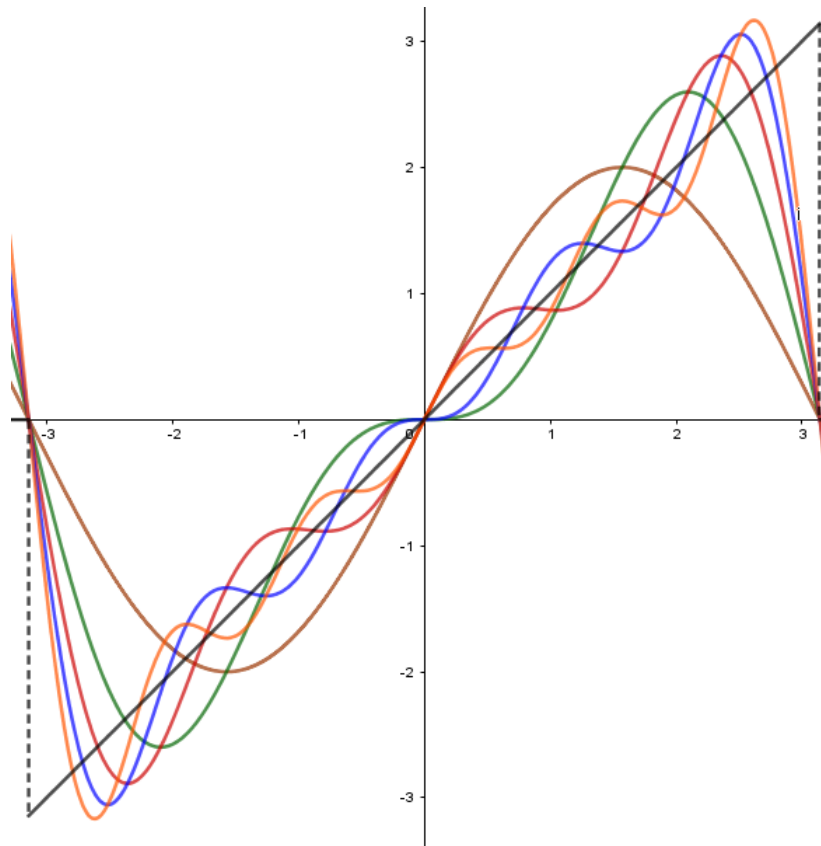


Abbildung 6: Sägezahnfunktion und deren Fourierreihenentwicklung

5 Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist eine Integraltransformation, so wie etwa auch die Laplacetransformation. Mit Hilfe dieser Transformationen können kompliziertere Differential- oder Integralgleichungen gelöst werden. Bei einer Integraltransformation bildet man mit Hilfe eines Integrals eine Funktion auf eine andere Funktion ab. Im Vergleich zu den Fourierreihen, welche sich auf periodische Funktionen beschränken, ist dies bei der Fouriertransformation keine Bedingung. Somit ist die Fouriertransformation eine Verallgemeinerung der Fourierreihenentwicklung, welche auch aperiodische Funktionen in ihr Spektrum zerlegt [1].

5.1 Definition der Fouriertransformation

Die Herleitung der Fouriertransformation wird hier der Darstellung in [6] folgend gezeigt. Zur sinnvollen Definition der Fouriertransformation wird die Definition einer allgemeinen Integraltransformation benötigt.

Definition 5.1 (Allgemeine Integraltransformation).

$$g(p) = \int K(x, p) f(x) \, dx, \quad (37)$$

hierbei ist $K(x, p)$ der Kern der Integraltransformation, g die Bildfunktion und f die Originalfunktion.

Die Fouriertransformation ist eine Integraltransformation mit dem Kern (vgl. Definition 5.1)

$$K(x, p) := \frac{1}{2\pi} e^{-ixp}. \quad (38)$$

Im Gegensatz zu Fourierreihen können bei der Fouriertransformation nicht mehr nur periodische Funktionen, sondern auch nicht periodische Funktionen approximiert werden. Dafür fasst man eine nicht periodische Funktion als periodische Funktion auf, deren Periode aber unendlich groß ist. Die Fouriertransformierte, welche man auch als $\hat{f}$ bezeichnet, ist invertierbar und es ist

$$\overline{K(x, p)} := \frac{1}{2\pi} e^{ixp} \quad (39)$$

als Kern der inversen Fouriertransformation [6].

Bevor die Fouriertransformation definiert werden kann, müssen einige Eigenschaften und Sätze eingeführt werden. Insbesondere gilt es den Fourierschen Integralsatz zu beweisen. Außerdem muss eine Schar von Funktionen definiert werden, welche die Deltafunktion approximiert. Der entsprechende Funktionsterm definiert mehrere Funktionen gleichzeitig, da er neben der Funktionsvariable auch einen Parameter enthält. Die Menge all dieser Funktionen nennt man Funktionenschar.

Lemma 5.1. Sei $(h_s)_{s>0}$ eine Schar von nichtnegativen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Diese Schar approximiere die Deltafunktion. Es gilt

$$h_s \rightharpoonup \delta \quad (s \rightarrow \infty),$$

falls

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\|x\| \geq \chi} h_s(x) \, d^n x = 0 \quad \text{für alle } \chi > 0 \quad (40)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_s(x) \, d^n x = 1 \quad \text{für alle } s > 0. \quad (41)$$

Satz 5.2. Sei φ eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Sei h_s eine Funktionenschar, welche die Deltafunktion approximiert. Es gilt

$$\varphi(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) h_s(x - \xi) d^n \xi \quad (42)$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. Wir wollen die gleichmäßige Konvergenz auf einer abgeschlossenen Kugel $\mathcal{B}_\rho(0)$ zeigen. Diese Schreibweise bedeutet die Betrachtung einer abgeschlossenen Kugel B mit Radius ρ um den Punkt 0. Stetige Funktionen φ auf der kompakten Menge $\mathcal{B}_{2\rho}$ sind gleichmäßig stetig (vgl. Satz 14.9 [6]). Bei gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es $0 < \chi < \rho$ mit

$$x \in \mathcal{B}_\rho(0), \quad \|\eta\| < \chi \Rightarrow |\varphi(x - \eta) - \varphi(x)| < \epsilon/2. \quad (43)$$

Sei $x \in \mathcal{B}_\rho(0)$ beliebig, aber fest. Integrale ohne angegebenen Integrationsbereich sind als Integrale über den ganzen Raum zu verstehen. Es gilt

$$\int \varphi(\xi) h_s(x - \xi) d^n \xi = \int \varphi(x - \eta) h_s(\eta) d^n \eta$$

und

$$\varphi(x) = \int \varphi(x) h_s(\eta) d^n \eta.$$

Die zweite Gleichung gilt aufgrund von (41). Gesamt erhält man dadurch

$$\varphi(x) - \int \varphi(\xi) h_s(x - \xi) d^n \xi = \int [\varphi(x) - \varphi(x - \eta)] h_s(\eta) d^n \eta = I_1(\chi) + I_2(\chi),$$

wobei hier I_1 und I_2 die Integrale über die Bereiche $\|\eta\| < \chi$ und $\|\eta\| \geq \chi$ sind. Das Integral über $\|\eta\| < \chi$ ist $I_1(\chi)$, während $I_2(\chi)$ das Integral über den Bereich $\|\eta\| \geq \chi$ ist. Wir versuchen nun diese beiden Integrale einzeln abzuschätzen. Wählt man χ mit $0 < \chi < \rho$, folgt

$$|I_1(\chi)| \leq \int_{\|\eta\| < \chi} |\varphi(x) - \varphi(x - \eta)| h_s(\eta) d^n \eta \stackrel{(43)}{<} \frac{\epsilon}{2} \int_{\|\eta\| < \chi} h_s(\eta) d^n \eta \leq \frac{\epsilon}{2},$$

wobei man wieder den Satz (41) und auch $h_s(\eta) \geq 0$ verwendet. Betrachtet man den Bereich $I_2(\chi)$, gilt auf Grund der Voraussetzung, dass φ eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, $\sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi(y)| =: M < \infty$. Da (40) gilt, darf man s_0 wählen, sodass

$$\int_{\|\eta\| \geq \chi} h_s(\eta) d^n \eta < \frac{\epsilon}{4M} \quad \text{für alle } s \geq s_0 \quad (44)$$

gilt. Betrachtet man nun $s \geq s_0$, gilt

$$|I_2(\chi)| \leq \int_{\|\eta\| \geq \chi} [|\varphi(x)| + |\varphi(x - \eta)|] h_s(\eta) d^n \eta \stackrel{(44)}{\leq} 2M \int_{\|\eta\| \geq \chi} h_s(\eta) d^n \eta < \frac{\epsilon}{2}.$$

Betrachtet man nun die beiden Ergebnisse für $I_1(\chi)$ und $I_2(\chi)$, erhält man

$$\left| \varphi(x) - \int \varphi(\xi) h_s(x - \xi) d^n \xi \right| \leq |I_1(\chi)| + |I_2(\chi)| < \epsilon$$

falls $s \geq s_0$ und x beliebig in $\mathcal{B}_\rho(0)$. □

Lemma 5.3 (Riemann-Lebesgue). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Dann gilt für jede Funktion $f \in L^1(I)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$

und

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) dx = 0.$$

Der Beweis dieses Lemmas wird in Kapitel 6 gezeigt.

Lemma 5.4. Für jedes stetige $f \in L^1(\mathbb{R})$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$, in dem f differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + u) \frac{\sin \lambda u}{u} du = f(x_0) \quad (45)$$

Beweis. Sei $\alpha > 0$. Zuerst zerlegt man das Integral entsprechend

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + u) \frac{\sin \lambda u}{u} du = \int_{\mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]} \dots + \int_{-\alpha}^{\alpha} \dots$$

Das erste Integral erfüllt die Bedingungen von Lemma 5.3, wenn $\lambda \rightarrow \infty$, da $f(x_0 + u)/u$ diese auf $\mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]$ erfüllt. Für das zweite Integral verwendet man eine stetige Hilfsfunktion $g(u)$.

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{u}(f(x_0 + u) - f(x_0)), & u \neq 0 \\ f'(x_0), & u = 0 \end{cases}$$

Dadurch erhält man

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} g(u) \sin \lambda u du = 0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x_0 + u) \frac{\sin \lambda u}{u} du \\ &= f(x_0) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin \lambda u}{u} du + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \sin \lambda u du \\ &= f(x_0) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin \lambda u}{u} du + \int_{-\alpha}^{\alpha} g(u) \sin \lambda u du. \end{aligned}$$

Betrachtet man den Fall $\lambda \rightarrow \infty$, gilt durch Lemma 5.3, dass das zweite Integral verschwindet. Substituiert man nun $t = \lambda u$, erhält man

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sin \lambda u}{u} du = \int_{-\lambda\alpha}^{\lambda\alpha} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Nachfolgend soll nun der Fouriersche Integralsatz bewiesen werden. Als Ausgangsbedingung für die Herleitung des Fourierschen Integralsatzes geht man von folgendem Zusammenhang aus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-y)} dp = 2\pi\delta(x-y), \quad (46)$$

wobei $\delta(t)$ die Diracsche Deltafunktion ist [6]. Aufgrund des Satzes 5.2 kann für stetige beschränkte Funktionen f angenommen werden, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(y) dy = f(x) \quad (47)$$

gilt, wobei dieses Integral als distributionelle Wirkung zu verstehen ist. Wir können die δ -Funktion durch eine Schar von nichtnegativen, glatten Funktionen (h_s) approximieren, wobei $h_s \rightarrow \delta$ für $s \rightarrow \infty$. Es lässt sich dann zeigen, dass

$$\begin{aligned} \int \left(\int e^{i(x-y)p} f(y) dy \right) dp &= \int \left(\int e^{i(x-y)p} f(y) dp \right) dy \\ &= 2\pi \int \delta(x-y)f(y) dy = 2\pi f(x), \end{aligned}$$

wobei dies gilt, wenn f glatt genug ist und im Unendlichen schnell genug gegen null geht.

Definition 5.2 (Fourierscher Integralsatz). Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ stetig. Ist f differenzierbar für einen Punkt $x \in \mathbb{R}$, dann gilt die Fouriersche Umkehrformel

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-y)} f(y) dy \right) dp. \quad (48)$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ ein fester Punkt. Mit Hilfe des Satzes von Fubini (vgl. 3.9) erhält man für $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
g(\lambda, x) &:= \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ip(x-y)} dy \right) dp \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ip(x-y)} dp \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} \cos(p)(x-y) dp + i \int_{-\lambda}^{\lambda} \sin(p)(x-y) dp \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(2 \frac{\sin(x-y)\lambda}{x-y} \right) dy \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin(\lambda u)}{u} du.
\end{aligned} \tag{49}$$

Der Imaginärteil in (49) verschwindet, da der Sinus eine ungerade Funktion ist. Man nehme an, dass f im Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sei. Mit Hilfe von Lemma 5.4 folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 2\pi f(x),$$

wodurch das Gesuchte gezeigt wird. □

Nun kann man die lineare Zuordnung $\mathcal{F} : f \rightarrow \hat{f}$ definieren, welche ab sofort als Fouriertransformation bezeichnet wird. $\hat{f}$ bezeichnet man als Fouriertransformierte von f .

Definition 5.3 (Fouriertransformierte). Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist die Fouriertransformierte definiert durch

$$\hat{f}(p) \equiv \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[f(x)] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \tag{50}$$

wobei $p \in \mathbb{R}$. Für jede beliebige Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist die Fouriertransformierte eine stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}$. Der Beweis hierfür ist in [6] angeführt.

Definition 5.4 (Inverse Fouriertransformation). Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ in jedem Punkt differenzierbar und sei $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$. Dann gilt

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(p)](x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(p) e^{ipx} dp. \tag{51}$$

Liegt nun auch $\hat{f}$ in $L^1(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(p)](x) = \mathcal{F}[\hat{f}(p)](-x). \tag{52}$$

Deshalb nennt man für $g \in L^1(\mathbb{R})$ die folgende Funktion inverse Fouriertransformierte von g

$$\check{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(p) e^{ipx} dp, \tag{53}$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ liegt. Man schreibt auch

$$\check{g} = \mathcal{F}^{-1}[g]$$

bzw.

$$\check{g}(x) = \mathcal{F}^{-1}[g(p)](x).$$

Definition 5.5 (Fourier-Cosinus- und Fourier-Sinus-Transformierte). Die Fourier-Cosinus-Transformierte, oder kurz FCT, ist definiert durch

$$\hat{f}_c(p) \equiv \mathcal{F}_c[f(x)](p) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty f(x) \cos(px) \, dx,$$

während die Fourier-Sinus-Transformierte, oder kurz FST, definiert ist durch

$$\hat{f}_s(p) \equiv \mathcal{F}_s[f(x)](p) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty f(x) \sin(px) \, dx.$$

Satz 5.5. Für diese beiden Transformationen gilt

$$\mathcal{F}_c[f](p) = \mathcal{F}[f_+](p)$$

und

$$\mathcal{F}_s[f](p) = i\mathcal{F}[f_-](p).$$

Hierbei gilt

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

und

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ -f(-x) & x < 0. \end{cases}$$

Für geeignete Funktionsmengen sind beide Transformationen selbstinvers. Das bedeutet, dass

$$\mathcal{F}_c^{-1} = \mathcal{F}_c, \quad \mathcal{F}_s^{-1} = \mathcal{F}_s$$

gilt.

Der Beweis hierfür ist indirekt in Goldhorn [6] angeführt. Dies sind die geraden und ungeraden Fortsetzungen auf ganz $\mathbb{R}$.

5.2 Eigenschaften der Fouriertransformation

Dieses Kapitel fasst grundlegende Eigenschaften der Fouriertransformation zusammen [6].

5.2.1 Translation und Dilatation

Allgemeine Fouriertransformation

Satz 5.6. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow p}[f(x - a)](p) = e^{-ipa} \hat{f}(p). \quad (54)$$

Diese Eigenschaft bezeichnet man als Verschiebungssatz. Ebenfalls gilt:

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow p}[e^{-ibx} f(x)](p) = \hat{f}(p - b)$$

und

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow p}[f(ax)](p) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{p}{a}\right),$$

wenn $a \neq 0$.

Beweis. Sei $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[f(x - a)](p) &= c \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-ipx} dx \\ &\stackrel{y=x-a}{=} c \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ip(y+a)} dy = e^{-ipa} \hat{f}(p), \\ \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[e^{ibx} f(x)](p) &= c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ibx} e^{-ipx} dx \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(p-b)x} dx = \hat{f}(p - b). \end{aligned}$$

Im Fall $a \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[f(ax)](p) &= c \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ipx} dx \\ &\stackrel{y=ax}{=} c \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ipy/a} |a|^{-1} dy = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{p}{a}\right) \end{aligned}$$

□

Fourier-Cosinus-Transformation und Fourier-Sinus-Transformation

Auch für die FCT und FST können diese Eigenschaften angegeben werden.

Satz 5.7.

$$\mathcal{F}_{c_{x \rightarrow p}}[\cos(\omega x) f(x)](p) = \frac{1}{2} [\hat{f}_c(p + \omega) + \hat{f}_c(p - \omega)],$$

$$\mathcal{F}_{c_{x \rightarrow p}}[\sin(\omega x)f(x)](p) = \frac{1}{2}[\hat{f}_s(p + \omega) + \hat{f}_s(p - \omega)],$$

$$\mathcal{F}_{s_{x \rightarrow p}}[\cos(\omega x)f(x)](p) = \frac{1}{2}[\hat{f}_c(p - \omega) - \hat{f}_c(p + \omega)]$$

und

$$\mathcal{F}_{s_{x \rightarrow p}}[\sin(\omega x)f(x)](p) = \frac{1}{2}[\hat{f}_s(p + \omega) - \hat{f}_s(p - \omega)]$$

Diese Theoreme können mit Hilfe der Additionstheoreme für Cosinus und Sinus bewiesen werden.

5.2.2 Transformation und Differentiation

Allgemeine Fouriertransformation

Satz 5.8. Sei $f \in C^n(\mathbb{R})$ und $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für f

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow p} \left[f^{(n)}(x) \right] (p) = (ip)^n \hat{f}(p). \quad (55)$$

Unter der Zusatzbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)^m |f(x)| \, dx < \infty$$

ist auch $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\frac{d^m}{dp^m} \hat{f}(p) = (-i)^m \mathcal{F}_{x \rightarrow p} [x^m f(x)](p). \quad (56)$$

Beweis. Laut Voraussetzung ist das Integral $\int_0^\infty f'(t) \, dt$ absolut konvergent, da $f \in L^1$. Dies bedeutet, dass das uneigentliche Integral von f konvergiert und sich einem Grenzwert annähert. Daher gibt es ein y , für das

$$y := \lim_{b \rightarrow \infty} f(b) = f(0) + \int_0^\infty f'(t) \, dt \quad (57)$$

gilt. Die Funktion f wäre nicht über $\mathbb{R}$ integrierbar, falls $y \neq 0$ und ebenfalls gilt $\lim_{a \rightarrow -\infty} f(a) = 0$. Wir setzen $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'](p) &= c \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ipx} \, dx \\ &= c [f(x) e^{-ipx}] \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + cip \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} \, dx = ip \hat{f}(p). \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Aussage gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x \rightarrow p}[xf(x)](p) &= c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x e^{-ipx} dx \\ &= ic \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dp} (e^{-ipx}) dx = i \frac{dd}{dp} \hat{f}(p).\end{aligned}$$

Die Vertauschung von Integration und Differentiation darf aufgrund des Satzes 28.19b von Goldhorn [6] stattfinden. $\square$

Fourier-Cosinus-Transformation und Fourier-Sinus-Transformation

Satz 5.9.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c[f'](p) &= p \hat{f}_s(p) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} f(0), \\ \mathcal{F}_s[f'](p) &= -p \hat{f}_c(p)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c[f''](p) &= p^2 \hat{f}_c(p) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} f'(0), \\ \mathcal{F}_s[f''](p) &= -p^2 \hat{f}_s(p) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} pf(0).\end{aligned}$$

Diese Sätze können, wie der Satz für die allgemeine Fouriertransformation, mithilfe von partieller Integration bewiesen werden.

5.2.3 Faltung

Für den Faltungssatz wird auf den in [6] verwendete Ansatz zurückgegriffen.

Definition 5.6 (Faltungssatz). Für Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist das Faltungsprodukt durch

$$(f * g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy \quad (58)$$

definiert. Die neue Funktion $h := f * g$ ist wieder in $L^1(\mathbb{R})$. Der Beweis hierfür ist in [6] angeführt.

Die Rechenregeln für das Faltungsprodukt lauten:

Satz 5.10.

$$\begin{array}{ll}
f * g = g * f & \text{Kommutativität,} \\
f * (g * h) = (f * g) * h & \text{Assoziativität,} \\
f * (g + h) = f * g + f * h & \text{Distributivität,} \\
\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g) & \text{Assoziativität bzgl des Skalarprodukts,}
\end{array}$$

wobei f, g und $h \in \mathbb{R}$ sind und λ eine beliebige komplexe Zahl.

Der Beweis hierfür ist in Goldhorn [6] angeführt.

Der Faltungssatz kann auch für die allgemeine Fouriertransformation und die Fourier-Cosinus-Transformation und Fourier-Sinus-Transformation angegeben werden.

Allgemeine Fouriertransformation

Satz 5.11.

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow p}[(f * g)(x)](p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p)$$

für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1}[f(p)g(p)](x) = (\check{f} * \check{g})(x),$$

falls f und g zweimal stetig differenzierbar und $f, f', f'', g, g', g'' \in L^1(\mathbb{R})$ und man $\check{f} = \mathcal{F}^{-1}[f], \check{g} = \mathcal{F}^{-1}[g]$ setzt.

Beweis. Es ist ausreichend, den ersten Teil zu beweisen, da der zweite Teil aus (48) folgt. Zur Vereinfachung setzt man $\frac{1}{2\pi} = c$ und erhält

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](p) &= c \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-ipx} dx \\
&= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x - y) \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left\{ c \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) e^{ipx} dx \right\} dy \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[g(x - y)] dy \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ipy} dy \hat{g}(p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p).
\end{aligned}$$

Dabei wurde der Verschiebungssatz (54) verwendet. □

Fourier-Cosinus-Transformation und Fourier-Sinus-Transformation

Satz 5.12.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{c_{x \rightarrow p}}[f(x)g(x)](p) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}_c(q) \{ \hat{f}_c(p+q) + \hat{f}_c(|p-q|) \} dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(q) \{ \hat{g}_c(p+q) + \hat{g}_c(|p-q|) \} dq\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{s_{x \rightarrow p}}[f(x)g(x)](p) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{g}_s(q) \{ \hat{f}_s(p+q) + \hat{f}_s(|p-q|) \} dq \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(q) \{ \hat{g}_s(p+q) + \hat{g}_s(|p-q|) \} dq\end{aligned}$$

Durch die trigonometrischen Additionstheoreme und (48) kann auch dieser Satz bewiesen werden.

5.3 Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R})$ (Satz von Plancherel)

Der Satz von Plancherel ist für Fouriertransformationen so wichtig wie die Parseval'sche Ungleichung für Fourierreihen (33).

Satz 5.13 (Satz von Plancherel). Der Satz von Plancherel besagt, falls $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ist, dann sind auch $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ und folgender Zusammenhang

$$\langle f|g \rangle = \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle$$

gilt. Außerdem gilt

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(p)|^2 dp = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Das bedeutet, dass die L^2 -Norm isometrisch, also maßerhaltend ist. Der Beweis hierfür ist in [6] angeführt.

5.4 Fouriertransformationen bei partiellen Differentialgleichungen

Bislang wurde die Fouriertransformation nur in L^1 und L^2 eingeführt. Um die Fouriertransformation auf partielle Differentialgleichungen zu erweitern, muss zunächst die partielle Transformation

eingeführt werden [6]. Man betrachte dafür

$$u(x, y) \quad \text{und} \quad u(x, t),$$

wobei $x \rightarrow p, y \rightarrow q$ und $t \rightarrow s$ angibt, auf welche Variable sich die Transformation bezieht.

Definition 5.7. Falls $u(x, y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, so gilt

$$\hat{u}(p, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-ipx} dy. \quad (59)$$

Ist stattdessen $u(x, y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ definiert, so gilt

$$\hat{u}(x, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-iqy} dy. \quad (60)$$

Betrachtet man diese Transformationen unter dem Aspekt des Verhaltens von Ableitungen der Fouriertransformation, so erhält man Darstellungen für eine einfachere Berechnung. Hierfür überträgt man Satz 5.8 und 5.9 auf partielle Transformationen.

Satz 5.14. Für gegebenes $u(x, y)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[u_x(x, y)](p, y) &= ip\hat{u}(p, y), \\ \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[u_y(x, y)](p, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \hat{u}(p, y), \\ \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[u_{xx}(x, y)](p, y) &= -p^2 \hat{u}(p, y), \\ \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[u_{yy}(x, y)](p, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(p, y). \end{aligned}$$

Diese Transformationen können auch für die Transformation der zweiten Variable angegeben werden.

5.5 Diskrete Fouriertransformation

Wie in Kapitel 1 erwähnt, haben Fourierreihen und auch die in diesem Kapitel eingeführte Fouriertransformation eine große Bedeutung in der Signalverarbeitung. Da ein Computer nur mit endlichen Zahlenmengen arbeiten kann, wird hier noch die diskrete Fouriertransformation besprochen. Diese wird anhand der Darstellung von Arens durchgeführt [1].

Eine Möglichkeit, eine 2π -periodische Funktion zu approximieren, ist die Interpolation durch ein trigonometrisches Polynom. Unser Ziel ist es, für eine Funktion $f : [\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ein trigonometrisches Polynom p zu bestimmen, sodass

$$f(x_j) = p(x_j),$$

mit $j = 0, \dots, 2N$ gilt.

Satz 5.15. Es existiert ein eindeutig bestimmtes trigonometrisches Polynom q_N zu jeder 2π -periodischen Funktion. Die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j) e^{-ikx_j}, \quad k = -N+1, \dots, N. \quad (61)$$

Die Koeffizienten des Interpolationspolynoms erhält man unter Anwendung der zusammengesetzten Trapezregel [1] auf die Integrale in den entsprechenden Ausdrücken für die Koeffizienten der Fourierpolynome.

5.5.1 Zusammenhang zwischen Interpolationspolynom und Fourierpolynom

Damit man die Fouriertransformation numerisch bestimmen kann, müssen Annäherungen getroffen werden. Man definiert ein endliches Intervall $[-A, A]$, $A > 0$ in welchem man $f(x)$ für alle $x \in [-A, A]$ kennt. Außerhalb dieses Intervalls setzt man die Funktion f mit 0 fort. Man erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x \rightarrow p} f(p) &= \int_{-A}^A f(x) e^{-ipx} dx \\ &= \frac{A}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Az}{\pi}\right) e^{-iAzp\pi} dz. \end{aligned}$$

Man ersetzt nun das Integral durch eine Quadraturformel mit den Quadraturpunkten x_j und den Gewichten π/N . Wertet man dies an den Stellen p_k , $k = -N+1, \dots, N$ mit $\frac{Ap_k}{\pi} = k$ und $p_k = k \frac{\pi}{A}$ aus, erhält man

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow p_k} f(p_k) \approx \frac{A}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f\left(\frac{Ax_j}{\pi}\right) e^{-ikx_p}.$$

Diesen Zusammenhang nennt man auch diskrete Fouriertransformation.

Aufwand der Berechnung der Koeffizienten des Interpolationspolynoms

Die Formel für die Berechnung der Koeffizienten des Interpolationspolynoms (61) und ihrer Inversen

$$f(x_j) = \sum_{k=-N+1}^N c_k e^{ikx_j} \quad j = 0, \dots, 2N-1$$

wird nun unter dem Gesichtspunkt des Aufwandes der Berechnung betrachtet. Für dies verwendet man die Vektoren p und z mit Komponenten

$$p_j = e^{i\pi j(N-1)/N} f(x_j), \quad j = 0, \dots, 2N-1$$

und

$$z_k = e^{-i\pi(k-N+1)} c_{k-N+1}, \quad k = 0, \dots, 2N-1.$$

Man erhält jeweils einen Vektor durch Multiplikation einer Matrix mit dem anderen Vektor.

$$z = Fy \quad y = F^{-1}z$$

Hier sind

$$F = (\omega_{jk}) \tag{62}$$

und

$$F^{-1} = (\rho_{jk}) \tag{63}$$

gegeben durch

$$\omega_{jk} = \frac{1}{2N} e^{-i\pi jk/N}, \quad j, k = 0, \dots, 2N-1$$

und

$$\rho_{jk} = e^{i\pi jk/N}, \quad j, k = 0, \dots, 2N-1.$$

Man sieht, dass für die Bestimmung der Koeffizienten und auch für die Rückgewinnung der Daten aus den Koeffizienten eine Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix notwendig ist. Das bedeutet bei $2N$ Einträgen, dass $4N^2$ Multiplikationen und $4N^2 - 2N$ Additionen durchzuführen sind. Unter der Annahme, dass Multiplikation und Addition dieselbe Zeit benötigen, folgt daraus ein Zeitaufwand von $8N^2 - 2N$, wobei der quadratische Term der dominierende ist ($O(N^2)$).

Schnelle Fouriertransformation

Die schnelle Fouriertransformation bzw. „Fast Fourier Transformation“ oder kurz FFT ist ein Verfahren, welches den zeitlichen Aufwand der Berechnung reduziert. Man definiert eine Hilfsgröße

$$\omega_{2N} = e^{-i\pi/N},$$

wobei die Zahl ω_{2N} eine $2N$ -te komplexe Einheitswurzel ist. Es gilt

$$\omega_{jk} = (\omega_{2N})^{jk}, \quad j, k = 0, \dots, 2N-1$$

für die Einträge der Matrix F (vgl. (62)). Außerdem gelten

$$\omega_N = \omega_{2N}^2,$$

$$\omega_N^N = 1$$

und

$$\omega_{2N}^N = -1.$$

Wir betrachten nun die Einträge mit geradem Index des Vektors z . Für $2Nz_{2j}$ folgt

$$2Nz_{2j} = \sum_{k=0}^{N-1} (\omega_N)^{jk} (y_k + y_{k+N}).$$

Für die ungeraden Indizes folgt

$$2Nz_{2j+1} = \sum_{k=0}^{N-1} (\omega_N)^{jk} (y_k - y_{k+N}).$$

Der Beweis hierfür ist in Arens [1] dargestellt. Setzt man nun $y_k^{(1)} = y_k + y_{k+N}$ und $y_k^{(2)} = y_k - y_{k+N}$ für $k = 0, \dots, N-1$, dann folgt für z_{2j} und z_{2j+1}

$$z_{2j} = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega_N)^{jk} y_k^{(1)}$$

und

$$z_{2j+1} = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\omega_N)^{jk} y_k^{(2)}.$$

Diese Formeln entsprechen wieder diskreten Fouriertransformationen, nur dass die Länge der Vektoren nur noch N und nicht mehr $2N$ beträgt.

Der Aufwand zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten bei einer Vektorlänge von $N = 2^p$ liegt bei direkter Matrixmultiplikation bei $2N^2 - N$ Operationen, während der Aufwand bei der FFT bei $\frac{3}{2}N \log_2(N)$ Rechenoperationen liegt [1].

5.6 Rechenbeispiele - Fouriertransformation

Wie bei den Fourierreihen werden auch hier die Fouriertransformierten einiger simpler Funktionen berechnet.

5.6.1 Rechtecksfunktion

Die Rechtecksfunktion ist durch

$$f(t) = \sigma(t + t_0) - \sigma(t - t_0)$$

definiert, wobei

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

die Heaviside-Sprungfunktion ist (vgl. Abbildung 7).

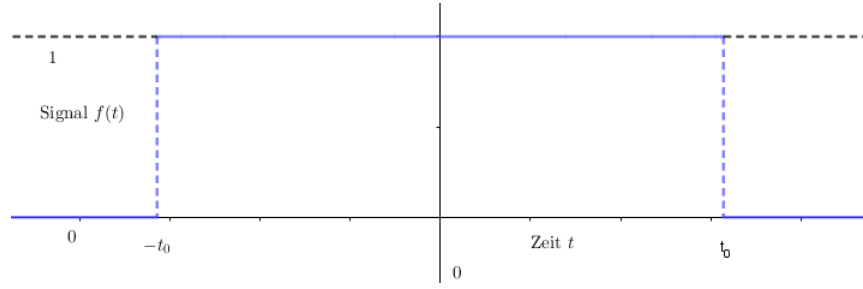


Abbildung 7: Rechtecksfunktion

Das Ziel ist es, diese Rechtecksfunktion mithilfe der Fouriertransformation in den Frequenzbereich zu transformieren. Hierfür wird zuerst die Funktion $t \mapsto x(t)$ in die Definitionsgleichung eingesetzt und man erhält

$$\hat{f}(s) = \mathcal{F}_{t \rightarrow s} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt.$$

Da die Rechtecksfunktion nur im Bereich $-t_0$ bis t_0 von 0 unterschiedlich ist, kann man das Integral umformen und erhält

$$\hat{f}(s) = \int_{-t_0}^{t_0} e^{-ist} dt.$$

Das zuerst uneigentliche Integral ist dadurch zu einem endlichen Integral geworden. Eine Stammfunktion von e^{ax} ist gegeben durch $\frac{1}{a}e^{ax}$. Dadurch resultiert das Integral in

$$\hat{f}(s) = \int_{-t_0}^{t_0} e^{-ist} dt = \frac{1}{-is} e^{-ist} \Big|_{-t_0}^{t_0} = \frac{1}{-is} (e^{-ist_0} - e^{ist_0}) = \frac{-2i \sin(st_0)}{-is} = 2t_0 \frac{\sin(st_0)}{st_0}.$$

Zum Vergleich wird auch die Fouriertransformierte einer um t_0 verschobenen Rechtecksfunktion berechnet, die folgendermaßen definiert ist

$$f(t) = \sigma(t) - \sigma(t - 2t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq -t_0 \\ 1 & \text{für } -t_0 < t < t_0 \\ 0 & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}$$

Das Problem kann auf zwei Arten gelöst werden. Zuerst wird wie bei der vorherigen Rechtecksfunktion das Integral berechnet, während für den zweiten Lösungsweg der Verschiebungssatz herangezogen wird.

$$\hat{f}(s) = \mathcal{F}_{t \rightarrow s} f(t) = \int_{-t_0}^{t_0} e^{-ist} dt = \frac{1}{-is} e^{-ist} \Big|_{-t_0}^{t_0} = \frac{1}{-is} (e^{-ist_0} - e^{ist_0}) = 2t_0 \frac{\sin(st_0)}{st_0} e^{-ist_0}.$$

Verschiebungssatz

Für den zweiten Fall wird Satz 5.6 verwendet. Da es sich um eine Verschiebung um t_0 handelt, muss das Ergebnis der Fouriertransformation der ersten Rechtecksfunktion mit e^{-ist_0} multipliziert

werden. Das Ergebnis stimmt mit jenem der Integralrechnung überein. Vergleicht man das Ergebnis der Integralrechnung und das Ergebnis, welches man mit Hilfe des Verschiebungssatzes erhält, ist erkennbar, dass der Betrag der beiden Transformaten gleich ist, während sich die Phase der Fouriertransformaten aber um $\Delta\phi = -st_0$ unterscheidet. Eine Verschiebung im Zeitbereich führt generell zu einer Verschiebung im Frequenzbereich (vgl. 5.2).

5.6.2 Dreiecksfunktion

Die Dreiecksfunktion ist durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq -t_0, 1 + t/t_0 \\ 1 + t/t_0 & \text{für } -t_0 < t \leq 0 \\ 1 - t/t_0 & \text{für } 0 < t \leq t_0 \\ 0 & \text{für } t_0 < t \end{cases}$$

definiert (vgl. Abbildung 8). Um diese Funktion zu transformieren, muss man die zwei von 0 unterschiedlichen Bereiche betrachten und daher wird das Integral in zwei Teile aufgeteilt.

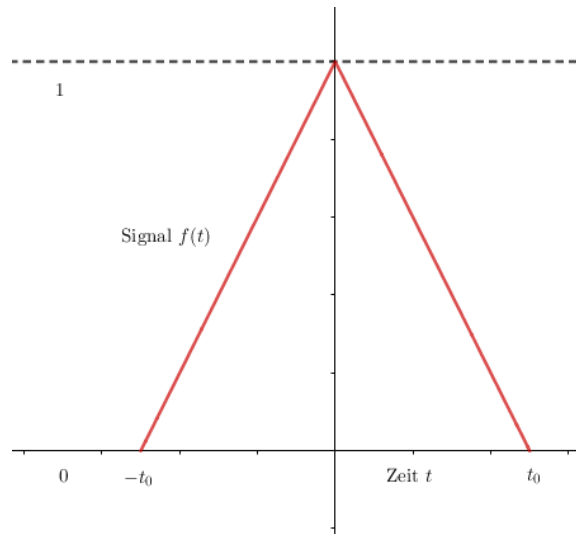


Abbildung 8: Dreiecksfunktion

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \mathcal{F}_{t \rightarrow s} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ist} dt = \int_{-t_0}^0 \left(1 + \frac{t}{t_0}\right) e^{-ist} dt + \int_0^{t_0} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) e^{-ist} dt \\ &= \int_{-t_0}^0 e^{-ist} dt + \frac{1}{t_0} \int_{-t_0}^0 t e^{-ist} dt + \int_0^{t_0} e^{-ist} dt - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} t e^{-ist} dt \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von te^{at} ist durch $\frac{at-1}{a^2}e^{at}$ gegeben. Daraus resultiert

$$\begin{aligned}
\hat{f}(s) &= \mathcal{F}_{t \rightarrow s} f(t) = \int_{-t_0}^0 e^{-ist} dt + \frac{1}{t_0} \int_{-t_0}^0 x e^{-ist} dt + \int_0^{t_0} e^{-ist} dt - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} x e^{-ist} dt \\
&= \frac{1}{-is} e^{-ipt} \Big|_{-t_0}^0 + \frac{1}{t_0} \frac{-ist-1}{-s^2} e^{-ist} \Big|_{-t_0}^0 + \frac{1}{-is} e^{-ist} \Big|_0^{t_0} - \frac{1}{t_0} \frac{-ist-1}{-s^2} e^{-ist} \Big|_0^{t_0} \\
&= \frac{1}{-is} (1 - e^{-ist_0}) + \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{-ist_0+1}{s^2} e^{-ist_0} \right) + \frac{1}{-is} (e^{-ipt} - 1) - \frac{1}{t_0} \left(\frac{ist_0+1}{s^2} e^{-ist_0} - \frac{1}{s^2} \right) \\
&= \frac{2}{t_0 s^2} - \frac{2}{t_0 s^2} \cos(st_0) = \frac{4}{t_0 s^2} \sin\left(\frac{st_0}{2}\right).
\end{aligned}$$

5.7 Rechenbeispiele - Fouriertransformation bei partielle Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt beinhaltet zwei Anwendungsbeispiele der Fouriertransformation bei partiellen Differentialgleichungen [6].

5.7.1 Potentialgleichungen in der Halbebene

Gesucht ist eine Lösung u von

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

wobei $y > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Es gilt die Randbedingung $u(x, 0) = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und die Abklingbedingung $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$.

Die Transformation bezieht sich auf die Variable x . Dies bedeutet, man betrachtet

$$\hat{u}(p, y) := \mathcal{F}_{x \rightarrow p} u(x, y).$$

Mit Hilfe von Satz 5.14 erhält man

$$\hat{u}_{yy}(p, y) - p^2 \hat{u}(p, y) = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, falls $p \in \mathbb{R}$ fest ist. Nun müssen natürlich auch die Rand- und Abklingbedingung angepasst werden. Diese resultieren in

$$\hat{u}(p, 0) = \hat{f}(p) \quad \text{und} \quad \hat{u}(p, y) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad y \rightarrow \infty$$

und die Lösung der Potentialgleichung

$$\hat{u}(p, y) = \hat{f}(p) e^{-|p|y},$$

für $y \geq 0, p \in \mathbb{R}$. Durch diese Lösung folgt für die Randwertaufgabe

$$u(x, y) = \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1} \hat{u}(p, y). \tag{64}$$

Damit Gleichung (64) gelöst werden kann, muss der Faltungssatz (vgl. Definition 58) angewendet werden. Man setzt g als

$$g(x, y) := \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1}[e^{-|p|y}] = \frac{2^{1/2}}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}.$$

Dadurch folgt für $u(x, y)$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (\mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1}[\hat{f}] * \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1}[e^{-|p|y}])(x, y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t, y) dt. \end{aligned} \quad (65)$$

Gleichung (65) ist genau die Poissonsche Integralformel für die Halbebene (vgl. Satz 33.26. [6])

5.7.2 Wärmeleitungsgleichung auf einer Halbgeraden

Bei diesem Beispiel betrachtet man das Anfangswertproblem

$$u_t = c^2 u_{xx},$$

für $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Die Anfangsbedingung lautet

$$u(x, 0) = f(x),$$

für $x \in \mathbb{R}$. Wie beim vorherigen Beispiel bezieht sich die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf die Variable x und man wendet sie auf die Potentialgleichung an. Wir erhalten

$$\hat{u}(p, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow p} u(x, t).$$

Dadurch geht das Anfangswertproblem und die Anfangsbedingung in

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + c^2 p^2 \hat{u} = 0,$$

für $t > 0, p \in \mathbb{R}$ fest und

$$\hat{u}(p, 0) = \hat{f}(p),$$

für $p \in \mathbb{R}$ fest, über. Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung in t und deren Lösung lautet

$$\hat{u}(p, t) = \hat{f}(p)e^{-c^2 p^2 t}.$$

Daraus folgt für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1}[\hat{f}(p)e^{-c^2 p^2 t}] \\ &= f * g \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x - z, y) dz, \end{aligned} \quad (66)$$

wobei für $g(x, t)$ hierbei

$$g(x, t) = \mathcal{F}_{p \rightarrow x}^{-1}[\hat{f}(p)e^{-c^2 p^2 t}] = \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4c^2 t)}$$

gilt. Gleichung (66) ist exakt die Poissonsche Integralformel für die Wärmeleitungsgleichung (vgl. Satz 33.28 [6]).

6 Riemann-Lebesgue-Lemma

Da das Riemann-Lebesgue-Lemma (vgl. Lemma 5.3) von großer Bedeutung ist, wird es nun am Ende dieser Arbeit bewiesen. Ein paar Vorarbeiten in anderen Kapiteln, wie die Dichtheit von Indikatorfunktionen in Lebesgue-Räumen (vgl. 3.10), waren hierfür notwendig.

Lemma 6.1. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, mit anderen Worten, sei

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < \infty. \quad (67)$$

Betrachtet man

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow p} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

und lässt $|x| \rightarrow \infty$ gehen, besagt das Riemann-Lebesgue Lemma, dass $\mathcal{F}[f(x)] \rightarrow 0$.

Beweis. Als ersten Schritt wird $f = 1_{[a,b]}$ angenommen. Diese Indikatorfunktion ist eine Funktion, welche im Intervall $[a, b]$ gleich 1 und überall anders 0 ist. Berechnet man nun die Fouriertransformierte von f , ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{x \rightarrow p}[f(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[a,b]}(x) e^{-ipx} dx \\ &= \int_a^b e^{-ipx} dx = \left[\frac{e^{-ipx}}{-ip} \right]_a^b \\ &= \frac{-e^{-ipb} + e^{-ipa}}{-ip}. \end{aligned} \quad (68)$$

Nimmt man nun p als reellwertige Zahl an und nimmt den Betrag von (68), erhält man

$$\left| \frac{e^{-ipb} + e^{-ipa}}{-ip} \right| \leq \frac{|e^{-ipb}| + |e^{-ipa}|}{|p|} = \frac{2}{|p|} \rightarrow 0,$$

falls p gegen ∞ geht. Dadurch wurde das Riemann-Lebesgue-Lemma als erster Schritt für Indikatorfunktionen gezeigt.

Als zweiten Schritt setzt man f als

$$\sum_{n=1}^M c_n 1_{A_n},$$

wobei $A_n = [a_n, b_n]$ ist. Durch die Linearität der Fouriertransformation erhält man

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow p}[f(x)] = \sum_{n=1}^M c_n 1_{A_n} \rightarrow 0,$$

da das Ergebnis aus dem ersten Schritt angewendet werden kann.

Man nehme an, dass $\epsilon > 0$ ist. Da $f \in L^1(\mathbb{R})$ liegt und Indikatorfunktionen dicht in $L^1(\mathbb{R})$ sind (vgl. Lemma 3.10) folgt, dass eine Indikatorfunktion g existiert, sodass $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Daraus folgt für das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| \, dx < \frac{\epsilon}{2}$. Es gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{x \rightarrow p} f(x)| &= |\mathcal{F}_{x \rightarrow p} f(x) - \mathcal{F}_{x \rightarrow p} g(x) + \mathcal{F}_{x \rightarrow p} g(x)| \\ &\leq |\mathcal{F}_{x \rightarrow p} f(x) - \mathcal{F}_{x \rightarrow p} g(x)| + |\mathcal{F}_{x \rightarrow p} g(x)| \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt aufgrund der Dreiecksungleichung. Schreibt man diese Ungleichung weiter, so gilt durch Beachtung von Schritt 2 und erneute Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} &< \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} - g(x) e^{-ipx} \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| |e^{-ipx}| \, dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| \, dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

7 Verzeichnisse

Abbildungsverzeichnis

1	Darstellung Riemann-Integral	9
2	Darstellung Lebesgue-Integral	10
3	Rechtecksfunktion und deren Fourierreihenentwicklung	32
4	Dreiecksfunktion und deren Fourierreihenentwicklung	33
5	Quadratfunktion und deren Fourierreihenentwicklung	35
6	Sägezahnfunktion und deren Fourierreihenentwicklung	37
7	Rechtecksfunktion	53
8	Dreiecksfunktion	54

Literatur

- [1] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel: *Mathematik* Heidelberg, Springer-Verlag Berlin (2015)
- [2] J. Fourier: *Analytische Theorie der Wärme*
Thür, Universitäts- und Landesbibliothek (1884)
- [3] H. Weber: *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik: Nach Riemann's Vorlesungen*
Vieweg, Braunschweig (1901)
- [4] L. Carleson: *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*
Acta Math. 116: 135-157 (1967)
- [5] G. Cantor: *Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*
Journal für die reine und angewandte Mathematik 72: 130-138. (1870)
- [6] K. Goldhorn, H. Heinz: *Mathematik für Physiker 3*
Heidelberg, Springer-Verlag Berlin (2008)
- [7] O . Forster: *Analysis 3*
Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien, Wiesbaden (2012)

- [8] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*
Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH (2009)
- [9] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*
Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH (2008)
- [10] Hochschule Karlsruhe, Fourier-Transformation grundlegender Signale, URL:
<https://www.eit.hs-karlsruhe.de/mesysto/teil-a-zeitkontinuierliche-signale-und-systeme/spektrum-eines-signals/grundlagen-der-fourier-transformation/fourier-transformation-grundlegender-signale.html> (Stand 29.07.2023)
- [11] John K. Hunter: *Measure Theory* (2011), URL: https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes.pdf (Stand 29.07.2023)
- [12] H.-D. Ebbinghaus: *Einführung in die Mengenlehre (5th ed. 2021)*
Berlin Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg | Springer Spektrum (2021)
- [13] Prof. Dr. Michael Fröhlich: *Kurz-Skriptum zu Fourierreihen*, URL: <https://fbim.hs-regensburg.de/~frm39711/Lehre/LehreWS/AN3/Vorlesung/Fourierreihen.pdf> (Stand 29.07.2023)
- [14] Prof. Dr. Wolfgang Arendt: *Maßtheorie* (2015), URL: https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.020/fackler/WS1415/masstheorie/skriptmt.pdf (Stand 04.08.2023)
- [15] Prof. Dr. Peter Eichelsbacher: *Wahrscheinlichkeitstheorie* (2017), URL: https://www.ruhr-uni-bochum.de/imperia/md/content/stochastik/skripte/wtheorie_ws04.pdf (Stand 04.08.2023)