

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

**„Mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung für die
Anwendung in der Schule“**

verfasst von / submitted by

Jochen Löb

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2023 / Vienna 2023

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 510 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB)
Unterrichtsfach Geographie und wirtschaftliche Bildung
Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Assoz. Prof. Dr. Martin Ehler, Privatdoz.

Mitbetreut von / Co-Supervisor:

Dr.ⁱⁿ Anna Breger, BSc MSc

Zusammenfassung

Dem Erstellen und Bearbeiten von digitalen Bildern liegen mathematische Definitionen und Methoden zu Grunde. Wie diese Grundlagen didaktisch reduziert und im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden höheren Schulen in der Sekundarstufe II angewandt werden können, ist der Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit.

Hierbei werden Aspekte der Bildbearbeitung in Hinsicht auf den Lebensweltbezug der Schülerinnen und Schüler, den pädagogischen Nutzen und die Vereinbarkeit mit dem geltenden Lehrplan für Mathematik in den allgemeinbildenden höheren Schulen erörtert. Grundlegende mathematische Objekte und Operationen werden für die Bildbearbeitung definiert und anschließend didaktisch an schulische Voraussetzungen angepasst. Daran anknüpfend werden praktische Anwendungsbeispiele für den Schulunterricht erarbeitet. Dafür wurde im Rahmen der Arbeit eine siebenstündige Unterrichtssequenz zu den mathematischen Grundlagen der Bildbearbeitung in zwei Klassen der 11. Schulstufe abgehalten und anschließend evaluiert. In einer Befragung wurde das digitale Bildnutzungsverhalten der Schülerinnen und Schüler erhoben und interpretiert. Ausgewählte, im Unterricht entstandene Lernprodukte werden präsentiert und die Durchführbarkeit sowie die Relevanz des Themas für den Mathematikunterricht bestätigt.

Abstract

Creating and processing digital images relies on implementing definitions and methods from mathematics. This thesis develops a simplified approach to the mathematics behind image processing for students at the secondary level.

Aspects of the application of image processing in school are discussed regarding the relevance for students, pedagogical benefit and compatibility with the Austrian curriculum. Mathematical methods relevant for image processing are defined and later explained on a level of difficulty that fits the competence of students at the secondary level. For this purpose applications are introduced and a workshop on the mathematics of image processing has been applied and evaluated in two classes of the eleventh grade. Data about the behaviour of students regarding the usage of digital images and image processing has been gathered and interpreted. Selected results created by students in the workshop are presented. The integration of image processing into mathematical education is confirmed as feasible and relevant.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Aspekte der Bildbearbeitung in der Schule	9
2.1	Lebensweltbezug des digitalen Bildes und der Bildbearbeitung	9
2.2	Bildbearbeitung als Unterstützung zur mündigen Urteilsfindung	12
2.3	Einbettung in den AHS-Lehrplan für Mathematik	14
2.4	Schnittstellen mit anderen Fachgebieten am Beispiel Biologie	23
3	Mathematische Grundlagen und Umsetzung in der Schule	25
3.1	Das Bild	25
3.1.1	Definition eines Bildes	25
3.1.2	Beispiele für Bilder	26
3.1.3	Anwendungen für Bilder in der Schule	29
3.2	Einfache Matrixoperationen	34
3.2.1	Grundlegende Definitionen zu Matrizen	34
3.2.2	Anwendung einfacher Operationen auf Bildmatrizen	35
3.2.3	Einfache Operationen auf der Bildmatrix für die Anwendung in der Schule	38
3.3	Rangordnungsfilter und Schwellenwertverfahren	39
3.3.1	Ordnung von Intensitätswerten	39
3.3.2	Beispiele für Rangordnungsfilter, Schwellenwerte und Histogramme . . .	41
3.3.3	Anwendung von Rangordnungsfiltern in der Schule	43
3.4	Filtern durch Faltung	47
3.4.1	Definition der Faltung	47
3.4.2	Beispiele für Filter, die Faltung verwenden	50
3.4.3	Anwendungen diskreter Faltung in der Schule	52
4	Auswertung der Anwendungen in der Schule	59
4.1	Ausgewählte Lernprodukte	59
4.2	Umgang mit privatem und fremdem Bildmaterial	63
4.3	Befragungen	64
4.3.1	Evaluation und Befragung einer 7. Klasse der AHS im Jahr 2021	64
4.3.2	Evaluation und Befragung einer 7. Klasse der AHS im Jahr 2023	68

4.3.3 Allgemeine Befragung zu Erfahrungen mit Bildbearbeitung und Bildnutzungsverhalten in sozialen Medien 2023	71
5 Conclusio	75
Literatur	79
Abbildungsverzeichnis	81
A Planungsmatrizen zur Unterrichtsvorbereitung	85
B MATLAB®-Skript	93
C Fragebögen und Einverständniserklärung	99

1 Einleitung

Ob für den privaten Gebrauch, zum Teilen in sozialen Medien, in der Medizin, der Industrie oder der Wissenschaft: Bildbearbeitung wird in vielen Bereichen angewandt und spielt eine immer größer werdende Rolle in unserem Leben. Neben bekannten Anwendungen in Bild- oder Video-bearbeitungsprogrammen auf dem Smartphone oder dem PC, werden Bildbearbeitungsmethoden auch in den Anwendungsbereichen des maschinellen Lernens, der Computer Vision und des Deep Learnings mit Hilfe künstlicher neuronaler Netze verwendet (vgl. [1]). Weiters finden sich allein in der Geoinformatik zahlreiche auf Satellitendaten basierende Anwendungsgebiete wie geologische Kartierung, Wetter-, Klima- und Atmosphärenforschung, Erhebung von Wasser-, Schnee- und Waldbedeckung, Ozeanographie oder Archäologie (vgl. [2]). Auch in der Medizin werden mittlerweile Bilddaten von einer solchen Quantität aufgenommen, die Menschen allein ohne technische Hilfsmittel nicht mehr bewältigen können (vgl. [3]). Eine immer größer werdende Recycling-Industrie nutzt digitale Bilder zur Analyse des zu recycelnden Materials wie beispielsweise dem Bauschutt eingerissener Gebäude (vgl. [4]). Angesichts dieser Fülle an Anwendungsbereichen stellt sich die Frage: Können die mathematischen Grundlagen der Bildbearbeitung in den Mathematikunterricht eingebettet werden?

Dafür wird im schulischen Kontext des Mathematikunterrichts der österreichischen allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS), insbesondere der 11. Schulstufe, angeknüpft. Drei Ziele werden verfolgt: Zum einen geht es darum die mathematischen Grundlagen, auf denen elementare Bildbearbeitung basiert, didaktisch zu reduzieren und in der Schule alltagsnah durch Bearbeitung von selbst mitgebrachten Bildern aufzuarbeiten. Als zweites wird untersucht, wo Schnittstellen mit dem Lehrplan für Mathematik der österreichischen AHS zu finden sind und die Inhalte somit gesetzlich konform in den Unterricht integriert werden können (vgl. [5]). Als drittes werden im experimentellen Teil der Arbeit Vorkenntnisse und Lernerfolge erhoben, sowie ein Vergleich zwischen zwei 7. Klassen aufgestellt, von welchen eine im Jahr 2021 und eine im Jahr 2023 eine Unterrichtssequenz von siebenstündiger Dauer absolviert hat. Dafür wurden einige Anwendungen mit Schülerinnen und Schülern der 11. Schulstufe im Unterricht ausprobiert und im Anschluss reflektiert.

Einzelne Aspekte der mathematischen Grundlagen von Bildbearbeitung könnten schon in der Volksschule kreativ im Unterricht angewendet werden. Die Erstellung eines Schwarz-Weiß-Bildes erfordert lediglich die Fähigkeit schwarze und weiße Kästchen in einer Matrix mit den repräsentativen Zahlen 0 und 1 zu codieren. So können Schwarz-Weiß-Bilder auf sehr intuitive und kreative Weise auf einem Papier erschaffen werden. Durch das anschließende Übertragen auf den Computer wird die Grunderfahrung eines digitalen Bildes spielerisch erzeugt (vgl. [6]).

Diese Arbeit behandelt verschiedene Aspekte von Bildbearbeitung in der Schule. Die Relevanz hinsichtlich eines Lebensweltbezugs und die Entwicklung der Mündigkeit im Sinne einer staatsbürgerlichen Erziehung durch die Kombination der Bereiche Mathematik und Bildbearbeitung wird im zweiten Kapitel beschrieben (vgl. [7]). Im Zuge dessen wird der Lehrplan für Mathematik auf Anknüpfungspunkte für Bildbearbeitungsmethoden untersucht. Schließlich werden Verknüpfungen zu anderen Schulfächern am Beispiel der physiologischen Grundlagen des menschlichen Auges in Biologie dargestellt.

Im dritten Kapitel werden die mathematischen Grundlagen, die für die im Unterricht durchgeführten Bildbearbeitungsschritte benötigt werden, dargelegt. Im Zuge dessen wird auf mathematische Definitionen und Methoden der Bild- und Signalverarbeitung zurückgegriffen. Diese werden in Beispielen aufgearbeitet und anschließend für die Anwendung im Unterricht präsentiert. Dies beinhaltet einige Ergänzungen des vorgesehenen Lehrstoffs der AHS-Oberstufe wie beispielsweise die Matrix, die für mathematische Bildbearbeitung benötigt wird.

Die Ergebnisse der Unterrichtseinheiten und der Evaluationen werden im vierten Kapitel behandelt. Dabei werden zuerst Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern präsentiert, welche in der Anwendung im Unterricht entstanden sind. Durch Befragungen mit Fragebögen wurde weiters eine Erhebung des Vorwissens und des Nutzungsverhaltens zu digitalen Bildern und Bildbearbeitung durchgeführt. Die siebenstündigen Unterrichtssequenzen wurden 2021 und 2023 mit jeweils einer 7. Klasse der AHS erprobt und anschließend von allen Beteiligten evaluiert. Zusätzlich wurde 2023 für Klassen der 8. bis 12. Schulstufe eine Einführungseinheit zu mathematischen Grundlagen von digitalen Bildern gehalten. Die etwa einhundert Schülerinnen und Schüler, die daran teilnahmen, wurden vorher bezüglich ihrer Vorerfahrungen zur Bildbearbeitung und der Verwertung ihrer digitalen Bilder befragt.

Um Matrizen und speziell Bildmatrizen speichern und bearbeiten zu können, wird eine Software benötigt. Auf Grund der Spezialisierung auf das Bearbeiten von Matrizen fiel die Auswahl der Software auf MATLAB[®], siehe [8].

Der Einbezug der Bildbearbeitung in den Mathematikunterricht schließt eine große Lücke zwischen dem, was die Schülerinnen und Schüler tagtäglich mit ihren Smartphones machen und dem, was sie drei bis viermal pro Woche im Mathematikunterricht lernen. Aus diesem Grund macht es Sinn, sich als Lehrkraft mit diesem Thema auseinanderzusetzen und es in den Mathematikunterricht zu integrieren.

2 Aspekte der Bildbearbeitung in der Schule

Die digitale Bildbearbeitung knüpft an viele Bereiche des schulischen Aufgabengebietes an. Neben der Lebensweltrelevanz und der Anwendung von mathematischen Grundlagen, stehen auch eine politische Bildung im Sinne einer Förderung der Mündigkeit sowie der verantwortungsvolle Umgang mit Bildmaterial im Blickfeld. Bedeutend ist auch die Frage, wie mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung mit dem Lehrplan für Mathematik in den allgemeinbildenden höheren Schulen verknüpft werden können. Auch andere Fächer wie Digitale Grundbildung, Biologie oder Bildnerische Erziehung bieten Anknüpfungspunkte für die Grundlagen der Mathematik in der Bildbearbeitung (vgl. [5]). Somit bietet sich eine vorteilhafte Gelegenheit für verschiedene digitale und auch fächerübergreifende Projekte. Das Erlangen von Kompetenzen der digitalen Datenverarbeitung kann dabei als berufsvorbereitender Lernprozess in einer immer digitaler werdenden Arbeitswelt verstanden werden.

2.1 Lebensweltbezug des digitalen Bildes und der Bildbearbeitung

Bilder begleiten uns ein Leben lang. Seit den 1980er Jahren werden in Österreich für alle Schwangeren mit Hilfe von Ultraschallsignalen in der Mutterschaftsvorsorge Bilder von ungeborenen Kindern erstellt (vgl. [9]). Es folgen unzählige Fotos auf dem Smartphone mit Momentaufnahmen des eigenen Lebens und des der anderen. Der steigende Einfluss von Bildern und Videos als Medien der Dokumentation und des kreativen Schaffens ist schwer zu erfassen. Eine große Menge von digitalem Bildmaterial wird von Österreichs Jugendlichen in sozialen Netzwerken geteilt (vgl. [10]). Laut dem Jugend-Internet-Monitor von 2022 von *Saferinternet.at* liegt die Nutzungsrate bei Jugendlichen zwischen 11 und 17 Jahren der Plattformen *WhatsApp* und *Youtube* jeweils bei über 95% und bei *Instagram*, *Snapchat* und *TikTok* jeweils über 70%. Bild- und Videomaterial spielt auf diesen Plattformen eine herausragende Rolle und es lässt sich daraus schließen, dass nahezu alle Jugendlichen betroffen sind, ihre Lebenswelt geradezu vom digitalen Bild erobert wird.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Umfragen ergaben, dass etwa zwei Drittel der befragten Jugendlichen Bilder in irgendeiner Weise digital bearbeiten (vgl. Abbildung 4.19). Dies kann auch mit Anwendungen geschehen, die in den Sozialen Netzwerken integriert sind. So ist es beispielsweise in *Instagram*, *Snapchat* oder *TikTok* möglich mit ein paar Klicks spezielle Filter über die eigenen Bilder zu legen. Das digitale Bearbeiten von Bildern ist nichts Außergewöhnliches

oder etwas, wofür besonders viel Wissen nötig ist. Durch die sozialen Austauschplattformen wird dabei ein sehr niederschwelliger Zugang zur digitalen Bildbearbeitung geschaffen.

Dabei löst das Smartphone den PC als Anwendungsgerät für soziale Medien und, damit gekoppelt, auch für viele Bildbearbeitungsprogramme immer mehr ab (vgl. [11]). Große Plattformen wie *Facebook*, *Instagram*, *Youtube* oder *Snapchat* haben für diese Zwecke Mobilversionen entwickelt. Auch im Unterricht lässt sich beobachten, dass Jugendliche teils wenig, manchmal sogar keine Erfahrung mit einem PC haben. Das von ihnen hauptsächlich genutzte und präferierte Gerät ist das Smartphone. In den Phasen des Distance-Learnings wurden in den von mir unterrichteten Unterstufenklassen die angebotenen Online-Inhalte, ob Live-Unterricht über *Microsoft Teams*, interaktive Übungen oder Arbeitsaufträge überwiegend mit dem Smartphone angenommen. Alle Schülerinnen und Schüler hatten einen, notfalls von der Schule bereitgestellten, Laptop zur Verfügung. Trotzdem wurden auch die Anwendungen, die nicht für das Smartphone optimiert waren, in dieser Altersklasse oftmals mit dem Smartphone durchgeführt. Die Entwicklung im schulischen Kontext geht somit, wenn nicht aktiv in eine andere Richtung gesteuert wird, hin zu einem mobilen E-Learning.

Die Schule stellt einen zentralen Ort der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler dar. Das Arbeiten mit dem Computer und online zur Verfügung gestellten Lerninhalten hat in und nach den Corona-Lockdowns einen höheren Stellenwert angenommen. Zum einen ist die Suche nach sinnvollen digitalen Anwendungen groß und zum anderen das Objekt, nämlich das digitale Bild, extrem in den Fokus des Schulalltags gerückt. Im Distance-Learning wurden alle vermittelbaren schulischen Inhalte auf eine digitale Darstellung in Bild und Ton reduziert. Viele Schülerinnen und Schüler haben daran nur mit einem Smartphone partizipiert, da ihnen dieses Gerät geläufiger ist als der Computer. Aus diesem Grund spielen auch Bildschirmgrößen, Betriebssysteme, Programme und Dateiformate eine große Rolle, wenn es um die Nutzung digitaler Bilder in der Schule geht. Diese Attribute der Leistungsfähigkeit betreffen den Alltag der Kinder unmittelbar bei der Nutzung digitaler Inhalte an ihren Endgeräten. Umso nützlicher ist es für Jugendliche, wenn sie sich unter den Begriffen *Megapixel* und *RGB* etwas vorstellen können. Darum ist es auch von Vorteil, wenn Lehrerinnen und Lehrer, die den Unterricht gestalten, selbst Wissen über digitale Bilder haben und mit mathematischen Grundlagen von Bildbearbeitung im Studium in Kontakt kommen. Denn auch die Lebenswelt der Lehrerinnen und Lehrer wird zunehmend digitalisiert und Unterricht muss, wie wir in den Lockdowns der Corona-Pandemie gesehen haben, auf digitale Kanäle übertragbar sein.

Die Anzahl der Jugendlichen, die Computerspiele spielen, ist in den vergangenen Jahren und Jahrzehnten kontinuierlich gestiegen. Die Auswahl der Spiele wird dabei immer größer und der Zugang insbesondere durch Spiele auf dem Smartphone immer einfacher. Aus den *JIM-Studien* des *Medienpädagogischen Forschungsverbund Südwest* in Deutschland geht hervor, dass im Jahr 2020 schon 56% der Mädchen und 79% der Burschen mehrmals pro Woche oder täglich digitale Spiele spielten. Im Jahr 2022 waren es 68% und 84% (vgl. [12] S.14, [13] S.15). Viele Spiele, die einst von Fans auf dem PC gespielt wurden, sind jetzt kostenlos und auf dem Smartphone verfügbar.

Alte Spiele und 2D-Spiele basieren oft auf Rastergraphiken. Computerspiele könnten im Rahmen

des Unterrichts ein sinnvoller und interessanter Bestandteil werden, der direkt an der Freizeitgestaltung der Jugendlichen anknüpft. Dies wäre ein weiterer technischer Zugang zum Thema der digitalen Bilder, der hier jedoch nicht weiter verfolgt wird.

Es macht Sinn ein Bewusstsein dafür zu schaffen, welche Rolle Bilder in unserer gesellschaftlichen Wahrnehmung spielen. Auch sollen die Schülerinnen und Schüler reflektieren, welche Wichtigkeit Bilder in ihrem eigenen Leben spielen. Computerspiele, welche in der Lebenswelt der Jugendlichen eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen, funktionieren hauptsächlich über die Interaktion in Bildern. Hier ist oft ein Anspruch, dass die Grafik immer realistischer sein soll im Sinne eines optischen Vergleichs mit dem Rest der Welt. Handlungsabläufe werden dabei oft komplexer und visuelle Eindrücke immer detaillierter. Das Spiel wird als realistisch wahrgenommen, obwohl es mit der Realität des eigenen Lebens wenig zu tun hat. Welchen Platz haben diese Bilder im Leben der Jugendlichen im Vergleich zu dem außerhalb der digitalen Welt Erlebten? Die Erforschung dieser Frage würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es soll aber hervorgehoben werden, dass die Beschäftigung mit diesen Fragen und das Erzeugen und Bearbeiten von Bildern die Fähigkeit, konsumierte Medien einzuschätzen, erhöht. Auch der Unterschied und das Zusammenspiel von Rastergraphiken und Vektorgraphiken in Computerspielen könnte im Mathematikunterricht in diesem Zusammenhang thematisiert werden.

Die Bild- und Signalverarbeitung hat insbesondere in der Medizin eine große Bedeutung. Verschiedene diagnostische Verfahren erzeugen unterschiedliche Arten von Signalen, die dann in Bilder übersetzt und für Ärztinnen und Ärzte visualisiert werden. Dazu gehören Ultraschall, Computertomographie (CT), Magnetresonanztomographie (MRT), Röntgenstrahlen und weitere. Diese Messverfahren, mit denen in unseren Körper „hineingeschaut“ wird, sind Standarddiagnosegeräte in der österreichischen Medizin und fast jeder oder jede ist mit einem oder mehreren davon schon einmal in Kontakt gewesen. Das Bearbeiten von Bildern mit mathematischen Grundlagen lässt eine Vorstellung davon entstehen, wie in diesen Prozessen Bilder erzeugt oder bearbeitet werden. Sie bilden auch die Grundlagen für das maschinelle Lernen, welches auf Forschungsebene in der Medizin eingesetzt wird. So kann beispielsweise das Auge selbst und dessen Krankheiten der Netzhaut mit Hilfe von Bildbearbeitungsalgorithmen besser erforscht werden (vgl. [14]).

Aufnahmen des Universums, die so, wie wir sie in Zeitschriften oder im Internet erblicken, nicht von unserem Auge aufgenommen werden könnten, entstehen ebenfalls in Bildverarbeitungsprozessen. Aufnahmen von Infrarot-Spektren werden vom *Hubble-Teleskop* oder neuerdings vom *James-Webb-Teleskop* aufgefangen und dann so bearbeitet, dass wir mit unserem Sehempfinden etwas damit anfangen können. Denn ohne die Bearbeitung der Bilddaten würden wir nichts sehen können (vgl. [15]). Das Verändern der Farben durch mathematische Bildbearbeitung bietet dabei einen geeigneten Rahmen um die Notwendigkeit solcher Anpassungen zu thematisieren.

In Anbetracht der Wichtigkeit des digitalen Bildes für das Alltagsleben von Jugendlichen, aber auch der gesamten Gesellschaft, wäre eine Einbeziehung in den Unterricht in Hinsicht auf Lebensweltaspekte empfehlenswert. Es spricht vieles dafür, sich im Rahmen des Mathematikunterrichts mit digitalen Bildern zu beschäftigen.

2.2 Bildbearbeitung als Unterstützung zur mündigen Urteilsfindung

Oft transportieren digitale Bilder Aussagen, die beim ersten Blick nicht bewusst wahrgenommen werden. Eine solche Aussage kann beispielsweise der Anspruch sein, die Realität abzubilden. Bilder, die in sozialen Netzwerken wie *Instagram* oder *Facebook* zu dem Zweck geteilt werden, andere am eigenen Leben teilhaben zu lassen, beinhalten diesen Realitätsanspruch bis zu einem gewissen Grad. Das digitale Bild kann auch suggestiv benutzt werden, um die Wahrheit von offensichtlichen Aussagen scheinbar zu belegen oder diese einer bestimmten Wertung zu unterziehen. Beispiele dafür finden sich in Zeitungen, *Youtube*-Videos oder Wahlwerbung und weiteren Medien. Insbesondere spielen digitale Bilder bei der politischen Meinungsbildung eine wichtige Rolle. Die Schule hat die Aufgabe die Schülerinnen und Schüler politisch zu bilden und ihnen zu einer Mündigkeit der Urteilsfindung als zukünftige Bürgerinnen und Bürger zu verhelfen (vgl. [5]).

Durch verschiedene Beispiele von Deep Fake Videos, in denen Mimik und Stimme einer Person verändert werden, ist klar geworden, dass auch dem geübten Auge Falschinformationen glaubhaft gemacht werden können. Die Produzenten und die Analysten liefern sich ein Rennen in Verbesserung und Detektierbarkeit von derartigen Videos (vgl. [16]). Jugendliche, Eltern und Lehrkräfte haben es schwer bei dieser Entwicklung mitzuhalten.

Die modischen Fotografien von Influencerinnen und Influencern sind vielfach nachbearbeitet und durch leicht zugängliche Anwendung von Filtern verändert. Für die Jugendlichen suggerieren sie den Eindruck eines leuchtenden, erfolgreichen Lebens und lassen die eigene, unbearbeitete Realität möglicherweise trist erscheinen. Auf der anderen Seite bekommen Selfies mit weniger Filtern auf *Instagram* mehr Likes (vgl. [17]). Wenn man beachtet, dass über 70% der österreichischen Jugendlichen *Instagram* nutzen, betrifft diese Verzerrung der visuellen Realitätswahrnehmung viel mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler (vgl. [10]). Im Rahmen des Mathematikunterrichts und der nüchternen Betrachtung der mathematischen Hilfsmittel, die zu Veränderungen von Bildern führen, können digitale Bilder in Bezug auf die oben angeführten Aspekte untersucht werden. Auf diesem Weg lernen die Jugendlichen digitale Inhalte besser in der Realität einzuordnen.

Überwachungstechnologien werden permanent verbessert und deren Anwendungsgebiet ausgeweitet. So bieten Soziale Medien einen Raum, in dem Unternehmen beispielsweise nach potentiellen Sicherheitslücken suchen können. Dafür kann Gesichtserkennung oder auch die Erkennung von Gesten eine Rolle spielen. Märkte für Produkte dieser Art wachsen rapide. So wuchs der Markt für Überwachungsequipment wie Überwachungskameras und ähnliche Waren von 10 Milliarden Dollar im Jahr 2011 auf 20 Milliarden Dollar im Jahr 2016 (vgl. [18] S.107). Die bewusste oder unbemerkte Überwachung des privaten Raumes ist eine Thematik, die im Rahmen einer Beschäftigung mit digitalen Bildern Platz hat und Anstöße für eine politische Diskussion in der Klasse liefert, die sich mit Überwachung in der Gesellschaft beschäftigt. Inhalte von Bildern, die mit dem Smartphone aufgenommen werden und Anbieter wie beispielsweise *Google Maps*, die Bilder und Standortdaten verbinden, können dabei Inhalt dieser Diskussionen sein (vgl. [19]).

Mit der Bearbeitung von Bildern und dem Verstehen des mathematischen Hintergrundes von verschiedenen Bearbeitungseffekten und -schritten steigt die Erkenntnis, wie einfach es ist, Bilder zu verändern. Die Erkenntnis kann erlangt werden, dass digitale Bilder weniger die Realität, sondern mehr einen Ausschnitt dieser abbilden. Auf diesem Weg soll auch eine kritische Hinterfragung der eigenen Medienwelt und des digitalen Bildes stattfinden, sowie das Beurteilen konsumierter Medien geschult werden. Digitale Bilder können durch das Kennenlernen der Mathematik, die bei deren Entstehung angewandt wird, besser als Modellierung der Realität begriffen werden. Realisierungen von Farben, die Anzahl von Pixeln, die Verarbeitung von Belichtung zu Farbwerten und viele weitere Einflussfaktoren prägen ein Bild, welches letzten Endes nur eine kurze Momentaufnahme bzw. ein begrenztes Medium darstellt. Durch die Bearbeitung der eigenen Bilder wird zum einen ein Bewusstsein dafür geschaffen, dass Filter, die auf sozialen Netzwerken benutzt werden, mit Mathematik arbeiten, aber auch, dass die Bearbeitung eines Bildes einen Grund hat und damit eine Nachricht für den Betrachter transportiert (vgl. [20]).

Dies berührt in direkter Weise die Fähigkeit sich politisch weiterzubilden. Das Hinterfragen von Bildern und von Kontexten zu Bildern und das Erkennen von Bearbeitungen in digitalen Bildern erhöht die Mündigkeit der Jugendlichen als heranwachsende Bürgerinnen und Bürger. Das Fälschen von Statistiken hat in der Fachdidaktik und verschiedenen für Schülerinnen und Schüler angebotenen Projekten schon Einzug gefunden (vgl. [21]). Dabei geht es aber meist um die Manipulation von Daten und von deren Darstellungen. Auch das Fälschen von Zeitdokumenten kann, wenn klar und deutlich gekennzeichnet, dabei Helfen zu verstehen, dass nicht alles geglaubt werden darf, was auf einem Bild zu erkennen ist. In der visuellen Meinungsbildung spielen Über- oder Untertreibung sowie Falschinformationen eine wichtige Rolle. Deren kritische Hinterfragung, insbesondere im Rahmen selbst produzierter Bildbearbeitungen, schult die Erfahrungen und das Einschätzungsvermögen der heranwachsenden Konsumentinnen und Konsumenten von digitalen Medien. Auch das Betrachten der Bilder von anderen Schülerinnen und Schülern im Klassenverband und das Erkennen derer digitaler Bildrealität kann dazu führen, dass die eigene visuelle, digitale Welt als ein Blickwinkel begriffen wird, der neben vielen anderen Blickwinkeln auf die Welt gerichtet ist.

Die Ausübung elementarer Bürgerrechte wird immer mehr digitalisiert. Das bedeutet unter anderem, dass wichtige Dokumente digitalisiert werden oder Anträge digital durchgeführt werden. In Deutschland haben sich beispielsweise von 2007 bis 2017 die abgegebenen digitalen Steuererklärungen von 5,5 Millionen auf 22 Millionen vervierfacht. Die Digitalisierung der öffentlichen Ämter wird durch die Gesetzgebung weiter anvisiert und vorgeschrieben (vgl. [22] S.14). Unsere Passbilder befinden sich auf Personalausweisen, Reisepässen, Führerscheinen, Krankenversicherungskarten und vielen weiteren wichtigen Dokumenten. Geburts- und Heiratsurkunden, Besitzurkunden, Grundbuchauszüge und vieles weitere wird eingescannt oder digital produziert und als offizielle Grundlage von Amtshandlungen verwendet. Es wäre von Vorteil die digitalen Abbilder dieser Dokumente besser zu verstehen und ihre mögliche Anfälligkeit für Manipulation oder Fälschung durch Beispiele zu thematisieren.

Auch Wahlwerbung und politische Meinungsbildung haben sich zusehends in das Internet verlagert. Die Beeinflussung der öffentlichen Meinung über die Kanäle von, unter anderen auch

ausländischen, Medienplattformen macht eine kritische Hinterfragung der Inhalte zu einer schulischen Pflichtaufgabe im Rahmen der politischen Bildung. Eine mathematische Grundvorstellung des digitalen Bildes legt hier einen grundlegenden Beitrag und kann neben den Fächern Geschichte und politische Bildung und Geographie und wirtschaftliche Bildung einiges an Aufklärung leisten. Dabei wird die wichtige Aufgabe verfolgt, die Schülerinnen und Schüler zu mündigen Wählerinnen und Wählern einer demokratischen Gesellschaft zu erziehen. Dazu gehört auch ihnen zu helfen die Meinungsbildungsinstrumente des Internets in ihrer zweckgebundenen Entstehung einzuordnen.

2.3 Einbettung in den AHS-Lehrplan für Mathematik

Die kompetenzorientierten Lehrpläne für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS) in Österreich bilden die gesetzliche Grundlage für die Gestaltung des dort stattfindenden Unterrichts. Die in diesem Abschnitt verwendeten Direktzitate stammen alle aus den Lehrplänen der AHS-Oberstufe und jenen der AHS-Unterstufe (vgl. [23], [5]).

Vorweg ist zu bemerken, dass im AHS-Lehrplan für Mathematik in der Oberstufe Matrizen als Lehrstoff nicht vorkommen. Dies ist beachtlich, wenn man sich vor Augen hält, wie wichtig diese mathematischen Objekte für sämtliche Bereiche der Datenverarbeitung sind.

Nichtsdestotrotz ist es möglich an allgemeiner gehaltenen Inhalten des Lehrplanes anzuknüpfen und das ist der Zweck dieses Teils der Arbeit. Die mathematischen Grundlagen der Bildbearbeitung können, wie im Lehrplan festgehalten, auch im Rahmen des freier wählbaren Erweiterungstoffs, der über den im Lehrplan festgehaltenen Kernbereich hinausgehen kann, in den Unterricht eingebaut werden. Bevor der Lehrplan der Oberstufe betrachtet wird, macht es Sinn, auch einen Blick in den Lehrplan der AHS-Unterstufe zu werfen, da hier grundlegende Kompetenzen geschaffen werden.

Unterstufe

Das Erstellen von digitalen Schwarz-Weiß-Bildern mit binären Matrizen ist eine spielerische und kreative Aufgabe, die schon in der Unterstufe gestellt werden kann. Im Lehrplan für Mathematik in der Unterstufe findet sich die Bildungs- und Lehraufgabe, dass die Schülerinnen und Schüler

„verschiedene Technologien (zB Computer) einsetzen können“ ([23], S.1049).

Dabei ist es hilfreich die aus Einsen und Nullen bestehenden Raster händisch auf ein Blatt Papier zu schreiben und diese dann in ein Programm, wie in diesem Fall MATLAB[®], zu übertragen.

Es wird auch Wert auf systematisches, situationsbezogenes und verständnisvolles Lernen gelegt. Ein großer Vorteil der in dieser Arbeit beschriebenen Bildbearbeitungsmethoden ist die unmittelbare Sichtbarkeit der mathematischen Anwendungen in den durch die Schülerinnen und Schüler hergestellten Lernprodukten. Im Lehrplan wird dazu folgendes gefordert:

„Die Schülerinnen und Schüler sind nicht Konsumierende eines fix vorgegebenen Wissens, sondern Produzierende ihres Wissens, mit Betonung auf aktives Erarbeiten, Erforschen, Darstellen, Reflektieren. Mathematische Begriffe und Verfahren werden

durch die eigenen Aktivitäten von den Schülerinnen und Schülern in ihr Wissenssystem eingebaut.“ ([23], S.1050)

Die genannten Arten der Wissenserarbeitung werden durch das mathematische Bearbeiten von eigenen Bildern erreicht. Es gibt viel Raum zum Herumspielen und zum Einbau kreativer Ideen. Die dabei verwendete Mathematik und das Erlernen der wichtigen Begriffe wird dabei als Nebensächlichkeit zur Selbstverständlichkeit. Erklärende Einschübe der Lehrkraft sichern, dass die Verfahren nicht nur angewendet, sondern deren mathematische Hintergründe auch verstanden werden, wie es bei der Unterrichtsform gefordert wird. Schon mit dem Stoff der 8. Schulstufe beispielsweise lassen sich viele der mathematischen Grundlagen zur Bilderzeugung und zu Farbräumen anwenden. Das Bild steht dabei am Ende immer als von den Kindern erarbeitetes Produkt. Der Lehrplan sieht auch eine Vernetzung der Unterrichtsinhalte zur Lebenswelt und anderen Gegenständen vor:

„Querverbindungen zu anderen Unterrichtsgegenständen sowie zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler sind herzustellen.“ ([23], S.1051)

Dabei sind Querverbindungen zu Biologie, Physik, Chemie, Bildnerische Erziehung und allen Fächern, die politische Bildung inkludieren, gut denkbar. Die Kompetenzen zum Umgang mit Projekten, die soziale Medien mit einbeziehen, werden auf technischer Seite gestärkt. Auch Fragen zum Urheberrecht liegen beim Bearbeiten von Bildmaterial auf der Hand und passen gut in die Thematik. Durch die Untersuchung von geschichtlichem, biologischem oder auch politischem Bildmaterial ist die Möglichkeit gegeben um mit Bildbearbeitung Querverbindungen zu anderen Fächern zu schaffen. Eine Möglichkeit ist dabei beispielsweise die Erstellung von Fake News mit Hilfe von manipulierten Bildern oder eine Analyse von *Instagram*-Inhalten. Ein Lebensweltbezug der Schülerinnen und Schüler ist durch die hohe Beschäftigungsrate mit digitalen Bildern gegeben. Die Allgegenwart von Smartphones, Tablets und Laptops, mittlerweile auch in der Schule und im Unterricht, machen die Lehre über die Entstehung dieser Bilder geradezu zu einer Pflichtaufgabe. Die Zusammenhänge zwischen den Lichtrezeptoren des menschlichen Auges und den Eigenschaften unserer digitalen Bilder stellt eine sinnvolle Wissensbasis für die Nutzung und Anschaffung von Geräten dar, mit denen Bilder aufgenommen, angezeigt oder bearbeitet werden. Für das Arbeiten mit Computern ist im Unterstufenlehrplan folgendes enthalten:

„Die Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen.“

Das kritische Vergleichen von Eingaben und Ausgaben bei verschiedenen Programmen und Geräten bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines problem- und softwareadäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertens beitragen.“ ([23], S.1051)

Der Umgang mit verschiedener Software ist in bestimmten Bedienebenen sehr ähnlich. So ist es ein großer Zugewinn, wenn die Kinder lernen mit mathematischer Software umzugehen, selbst wenn es nur das Eingeben einer binären Matrix ist. Das Vergleichen und dadurch automatisch

durchgeführte Analysieren von Eingabe und Ausgabe bei der Bilderzeugung stärkt das Verständnis von der Funktionsweise vergleichbarer Software.

Die Unterrichtsinhalte, welche die Grundlagen der mathematischen Bildbearbeitung ansprechen, sind in der Unterstufe dünn gesät. Trotzdem finden sich einige Anknüpfungspunkte.

In der ersten Klasse:

„- elektronische Rechenhilfsmittel einsetzen können

...

- Tabellen und graphische Darstellungen zum Erfassen von Datenmengen verwenden können“ ([23], S.1052)

In der dritten Klasse:

„- Untersuchen und Darstellen von Datenmengen“ ([23], S.1054)

Bei elektronischen Hilfsmitteln wird in der Unterstufe im Mathematikunterricht meist mit Taschenrechnern oder Excel gearbeitet. Im Rahmen des Unterrichts für Geometrisches Zeichnen findet die CAD-Lernsoftware GAM Anwendung. Einfache, gut angeleitete Befehle können die Kinder aber auch in anderen Programmen oder Programmiersprachen durchführen. Der mathematische Begriff der Matrix und einfache Bearbeitungen von Matrizen sind auch Unterstufenschülerinnen und -schülern zuzutrauen. Die Erfassung von Belichtungsdaten in einer Matrix und die darauf folgende Darstellung dieser Daten in einem digitalen Bild eröffnet eine ganz neue Richtung im Umgang mit „Datenmengen“. Man mag an dieser Stelle, wie im Lehrplan erwähnt, in erster Linie an deskriptive Statistik und Diagramme denken. Die Möglichkeiten werden durch die mathematische Bildbearbeitung aber sehr erweitert. Auch über die Intensitätswerte in Bildmatrizen lassen sich deskriptive Kennzahlen oder Histogramme erstellen, die sinnvoll bei der Bearbeitung der Bilder verwendet werden können.

In der vierten Klasse:

„- Untersuchen und Darstellen von Datenmengen unter Verwendung statistischer Kennzahlen (zB Mittelwert, Median, Quartil, relative Häufigkeit, Streudiagramm)“ ([23], S.1051)

Bei der Anwendung von Rangordnungsfiltren tauchen Minimum, Maximum und Median als statistische Kenngrößen auf. Auch die anderen genannten statistischen Kennzahlen lassen sich in Filtren anwenden. Dabei werden diese von den Intensitätswerten in einem Ausschnitt einer Bildmatrix bestimmt. Die Vorgehensweise entspricht der Untersuchung einer Datenmenge. Die Verwendung dieser Lehrplaninhalte bei der Bildbearbeitung unterstreicht deren allgemeine Nützlichkeit und universelle Anwendbarkeit.

Oberstufe

In der Oberstufe finden sich erwartungsgemäß weit mehr Anknüpfungspunkte, bei denen sich mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung anwenden lassen. So findet sich in der Bildungs- und Lehraufgabe schon eine Aufforderung zur mathematischen Beschreibung von Prozessen:

„Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.“ ([5], S.67)

Die oben genannte Beschreibung von „Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt“ findet in der Herstellung digitaler, bildhafter Repräsentationen ihre Anwendung. Aufgenommene Daten unserer Umwelt oder von uns selbst werden zu Bildern verarbeitet. Im Unterricht wird dieses Abbild der Umgebungswelt bearbeitet. Der Schwerpunkt auf den Sinn des Sehens wiegt seit der Verbreitung der Smartphones und anderen bildschirmorientierten Geräten immer mehr. Daher ist es umso wichtiger, die mathematische Beschreibung unserer Umwelt im Mathematikunterricht und im Rahmen der mathematischen Bildbearbeitung in den Fokus zu rücken. Die vertiefte Einsicht über Effekte von Bildbearbeitungsprogrammen führt über die Mathematik. Unter den verschiedenen Aspekten des Mathematikunterrichts ist beim erkenntnistheoretischen Aspekt und bei dem pragmatisch-anwendungsorientierten Aspekt Folgendes aufgeführt:

„Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen. . . . Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien und Berufsfelder.“ ([5], S.67)

Die Alltagserfahrung im Umgang mit digitalem Bildmaterial wird nachhaltig qualitativ verändert, indem Verständnis für die Funktionsweise der digitalen Bildbearbeitung geschaffen wird. Lichtwellen, die von Objekten ausgehend unser Auge erreichen, dort gebrochen und über Nervenrezeptoren an unser Gehirn weitergeleitet und verarbeitet werden, stellen ein besonderes „Phänomen“ unseres Lebens dar. Dieses kann im Rahmen mathematischer Bildbearbeitung greifbar gemacht werden. Viel Fachvokabular, das bei der Bedienung von Kameras, Bildbearbeitungsprogrammen oder Bildschirmeneinstellungen auftritt, wird über die mathematischen Grundlagen erklärt. Dadurch wird jede Schülerin und jeder Schüler auf diesem Gebiet in der Expertise gefördert und nachhaltig gestärkt. Mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung und das darin enthaltene Methodenreservoir ist mittlerweile schon Bestandteil vieler Studien- und Berufsfelder. Mit der erhöhten Präsenz und wirtschaftlichen Bedeutung digitaler Medien, seien es nun Computerspiele oder soziale Medien, werden auch immer mehr Berufe geschaffen, die sich mit der visuellen Präsenz von Unternehmen oder Institutionen beschäftigen. Auch in technischen, naturwissenschaftlichen und medizinischen Berufen erlangt die Mathematik der Bildbearbeitung immer mehr an Bedeutung. In den Beiträgen der Mathematik zu den Bildungsbereichen, insbesondere dem Bildungsbereich „Mensch und Gesellschaft“, findet sich der folgende Bezug:

„Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin) eine wichtige Rolle spielt.“ ([5], S.67)

Dadurch, dass digitale Bilder in so vielen wissenschaftlichen Bereichen eingesetzt werden, wird die Notwendigkeit mathematischer Grundlagen zu digitalen Bildern aufgezeigt. Auch in der modernen

Medizin werden bildgebende Verfahren immer wichtiger. Bilder sind auch häufig die Grundlage für weiterführende Prozesse der automatisierten Datenverarbeitung und des Machine Learnings. Bei den didaktischen Grundsätzen heißt es allgemein:

„Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen.“
([5], S.68)

Bei der mathematischen Bildbearbeitung steht das eigene Werk im Vordergrund und beim Bearbeiten eigener Bilddaten haben die Schülerinnen und Schüler direkt die Wahrnehmung etwas für sich zu machen. Auf diese Art werden die Methoden und Begriffe verinnerlicht. Im Grundsatz „Lernen in anwendungsorientierten Kontexten“ erhalten wir folgende Vorgabe:

„Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte durch geeigneten fächerübergreifenden Unterricht ist anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung besteht in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.“ ([5], S.68)

Bei einer mehrstündigen Unterrichtssequenz werden mathematische Inhalte ständig in einer Anwendung einbezogen. Wenn auch die fachlichen Inhalte mit dem Lehrplan zusammenpassen, ist eine maximale Realisierung der Anwendungsorientierung gegeben. Diese ist unter Einhaltung des Lernstoffs anzustreben.

Unter dem Grundsatz „Leben in Phasen“ wird im Lehrplan festgehalten:

„Unter Beachtung der Vorkenntnisse sind Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret-anschaulichen intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln, bei einfachen Anwendungen zu erproben und erst in einer späteren Phase zu vertiefen, ergänzen, verallgemeinern oder exaktifizieren.“ ([5], S.68)

Die Bildbearbeitung eignet sich auch dafür, neue mathematische Werkzeuge zu erkunden und kennen zu lernen. So lässt sich die Anwendbarkeit der Gauß-Funktion in einem Glättungsfilter für ein Bild gut veranschaulichen, während im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Normalverteilung unmittelbar weniger Berührungspunkte mit dem Leben der Schülerinnen und Schüler gegeben sind. Diese Anwendungsmethode ist eine Möglichkeit, komplizierte Filter heuristisch zu erkunden und dabei deren Bezeichnungen zu lernen. Im Nachhinein ist es leichter Dinge zu erklären, mit deren Umgang die Jugendlichen schon vertraut sind.

Dabei ist es von Vorteil, diese Filter in Form von vorgefertigten Codeblöcken zur Verfügung zu stellen, sodass die Anwendung und das Resultat möglichst schnell zur Verfügung stehen. Auch im Lehrplan heißt es unter dem Grundsatz „Lernen mit instruktionaler Unterstützung“:

„Lernen ohne instruktionale Unterstützung ist in der Regel - insbesondere in Mathematik - wenig effektiv und führt leicht zu Überforderung.“ ([5], S.68)

Durch die Vorbereitung von Softwarebefehlen oder Programmierbausteinen wird einer Überforderung mit einem umfangreichen Programm vorgebeugt. Der Zusammenhang zwischen der in den Befehlen verarbeiteten Mathematik und dem erzielten Effekt ist trotzdem klar ersichtlich und naheliegend.

Auch für den Grundsatz „Lernen mit technologischer Unterstützung“ ist die mathematische Bildbearbeitung ein geeignetes Feld. Im Lehrplan wird Folgendes vorgeschrieben:

„Technologische Hilfsmittel sollen in allen Kompetenzbereichen sinnvoll zum Einsatz kommen. Sie müssen zumindest über grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionen, Kurven und anderen geometrischen Objekten, zum symbolischen Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- und Stammfunktionen, zur Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik verfügen. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen technologischer Hilfsmittel durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Einsatz entsprechender Hilfsmittel beim Lösen von Aufgaben und dem gelegentlichen Einsatz als didaktisches Werkzeug beim Erarbeiten neuer Inhalte. Die maximale Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien als Werkzeug beim Modellieren, Visualisieren und Experimentieren.“ ([5], S.68-69)

MATLAB[®] ist ein Programm, welches allen genannten Anforderungen entspricht. Bedient man sich an einem vorgefertigten Katalog von Codeblöcken, ist die Bedienung weit weniger kompliziert, als vielleicht zu erwarten wäre. Das Programm bietet eine Vielfalt von mathematischen Anwendungsgebieten, wovon eine die Bildbearbeitung mit mathematischen Grundlagen ist. Auch der Einsatz einer Programmiersprache wie *Python* ist vorstellbar, wenn vorgefertigte Codeblöcke zur Verfügung stehen. Durch die immer besser werdende Versorgung mit Laptops in den österreichischen Schulen sowie in den Klassenverbänden bietet sich ein Blick in Programme, die mathematische Bildbearbeitung zulassen, an.

Mathematische Kompetenzen werden im Lehrplan in die folgenden drei Kategorien eingeteilt:

„Mathematische Kompetenzen besitzen eine Inhaltsdimension (auf welche Inhalte sie sich beziehen, also womit etwas getan wird), eine Handlungsdimension (auf welche Art von Tätigkeit sie sich beziehen, also was getan wird) und eine Komplexitätsdimension (bezogen auf die Art und den Grad der Vernetzungen). Unter mathematischen Kompetenzen werden hier längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten verstanden, die von Lernenden entwickelt werden sollen ...“ ([5], S.69)

In diesem Zusammenhang würde es Sinn machen für die mathematischen Grundlagen der Bildbearbeitung Kompetenzen zu definieren. Die Erstellung und Bearbeitung von Bilddaten ist in

der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler von hoher Relevanz. Darum wäre es empfehlenswert Grundkompetenzen festzulegen, die in den Lehrplan integriert werden könnten. Ein solcher Kompetenzkatalog übersteigt jedoch den Rahmen dieser Arbeit.

In der Handlungsdimension werden Algorithmen angesprochen:

„Formal-operatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die auf Kalkülen bzw. Algorithmen beruhen, also das Anwenden von Verfahren, Rechenmethoden oder Techniken.“ ([5], S.69)

Im Rahmen mathematischer Bildbearbeitung haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit Programmieren zu üben und dabei sofort die Ergebnisse zu sehen. Eine Änderung des Codes kann nach der Kompilierung direkt im Bild wiedergefunden werden und der Algorithmus als digitales Werkzeug kann damit wie in einer Werkstatt direkt am Quellcode erprobt, erlernt und verfeinert werden.

In der Komplexitätsdimension findet sich die Grundlage für die Kategorisierung in Reproduktion, Transfer und Reflexion wieder, welche für die Aufgabenerstellung relevant ist:

„- Einsetzen von Grundwissen und Grundfähigkeiten meint die Wiedergabe oder direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Verfahren oder Darstellungen. In der Regel sind nur reproduktives mathematische Wissen und Können oder die aus dem Kontext unmittelbar erkennbare direkte Anwendung von Kenntnissen und Fertigkeiten erforderlich.“

- Herstellen von Verbindungen ist erforderlich, wenn der mathematische Sachverhalt vielschichtiger ist, sodass Begriffe, Sätze, Verfahren und Darstellungen aus einem oder verschiedenen mathematischen Gebieten oder unterschiedliche mathematische Tätigkeiten in geeigneter Weise miteinander verbunden werden müssen.

- Problemlösen und Reflektieren: Problemlösen baut auf Eigentätigkeit und heuristischen Strategien in nicht vertrauten Situationen auf. Reflektieren meint das Nachdenken über Zusammenhänge, die sich aus dem dargelegten mathematischen Sachverhalt nicht von selbst ergeben. Reflexionswissen ist ein anhand entsprechender Nachdenkprozesse entwickeltes Wissen über Mathematik.“ ([5], S.69-70)

Das Arbeiten mit mathematischen Methoden zur Bearbeitung digitaler Bilder fördert besonders die Transfer- und die Reflexionsleistungen der Schülerinnen und Schüler. Die mathematischen Grundkenntnisse werden permanent in das Anwendungsgebiet der Bildbearbeitung eingebunden. Bei den einzelnen Bildbearbeitungsbausteinen werden die in der Schule gelernten mathematischen Grundkompetenzen zusammengeführt. Beispielsweise müssen die Operationen, die bei Filtern verwendet werden und aus anderen schulischen Kontexten bekannt sind, auf das Objekt der Matrix angepasst werden. So entsteht dauerhaft eine Transferleistung, die es erlaubt die Grundvorstellung zu einzelnen mathematischen Begriffen besser zu verstehen.

Das Verändern von Bilddaten erzwingt einen Prozess der Reflexion. Sowohl die Arbeit durch „Trial and Error“ als auch die gezielte Vorbereitung auf einen Bearbeitungsschritt bringen die Schülerinnen und Schüler dazu ihre Handlungen und Handlungsanweisungen zu reflektieren.

In den aufgelisteten, inhaltlichen Themenbereichen des Lehrplans ist die Bildbearbeitung - auch beispielhaft - nicht erwähnt. Trotzdem lässt sie sich an einigen Punkten einbetten. Im Bereich der Definitionsmengen für Bildfunktionen und der Farbräume kann viel über die Eigenschaften von Mengen untergebracht werden.

Bei „Zahlen, Mengen, Rechengesetze“ in der 5. Klasse steht das Folgende geschrieben:

„Grundlegende Begriffe über Aussagen und Mengen kennen

...

- Mit Näherungswerten sinnvoll umgehen können “ ([5], S.70)

Die Unterscheidung zwischen kontinuierlichen und diskreten Mengen ist grundlegender Bestandteil der Bildbearbeitungsmethoden und des Definitionsbereichs für Bildfunktionen. Schon bei der Frage, was ein Bild mathematisch gesehen sein soll, kommen diese Begriffe ins Spiel. Bei einigen Berechnungen, die mit Intensitätswerten von Bildern durchgeführt werden, müssen Ergebnisse sinnvoll gerundet werden, um nicht aus dem vordefinierten Farbraum herauszufallen. So beispielsweise bei der Umwandlung von RGB-Bildern in Graustufenbilder. Dies führt zu einer Auseinandersetzung mit Näherungswerten und Eigenschaften von Zahlenmengen in einem mathematischen Modell.

Unter „Funktionen“ in der 5. Klasse findet man:

„Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind, mittels Termen, Tabellen und Graphen beschreiben und über den Modellcharakter von Funktionen reflektieren können“ ([5], S.70)

Dass Bildfunktionen von zwei Variablen abhängen ist intuitiv und hält uns nicht davon ab die anderen genannten Aspekte anzuwenden. Wir ergänzen dafür im Stoff eine ganz eigene Darstellung der Funktion: die Bildfunktion. Eine solche gedankliche Brücke ist ein gutes Training um die Vorstellungskraft in verschiedenen Dimensionen zu erweitern. Beispielsweise versucht man komplexe Funktionen mit Hilfe von Farbspektren darzustellen und es hilft, wenn eine solche Idee nicht gänzlich neu ist. Weiters eignen sich die Bilddaten auch dafür, tabellarisch und graphisch Metastrukturen der Bilder, zum Beispiel Häufigkeiten von verschiedenen Farbwerten, darzustellen.

In der 6. Klasse wird unter „Reelle Funktionen“ beschrieben:

„- Reelle Funktionen untersuchen können (Monotonie, lokale und globale Extremstellen, Symmetrie, Periodizität)

...

- Reelle Funktionen in mehreren Variablen kennen; Funktionen in Formeln erkennen können; den allgemeinen Funktionsbegriff kennen ($f: A \rightarrow B$, wobei A und B beliebige Mengen sind)“ ([5], S.71)

Bildfunktionen mit verschiedenen Farbräumen eignen sich sehr gut dafür, nicht nur die Sinnhaftigkeit von Funktionen in mehreren Variablen klar zu machen, sondern auch zu erkennen, dass

Funktionen Zahlentupel als Funktionswerte haben können. Durch Histogramme werden Bilddaten in Bezug auf die Häufigkeit der vorkommenden Intensitätswerte dargestellt. Lokale Extremwerte und andere das Monotonieverhalten betreffende Eigenschaften von Histogrammen können bei Bearbeitungsverfahren wie dem Schwellenwertverfahren eine Rolle spielen.

Für das Beschreiben von Bilddaten passt Folgendes aus der beschreibenden Statistik:

„Darstellungen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik kennen und damit arbeiten können“ ([5], S.72)

Zu digitalen Bildern lassen sich Histogramme erzeugen und statistische Kennzahlen im Kontext der Bildbearbeitung deuten. Auch Maximum-, Minimum- und Medianfilter benutzen lokal statistische Kennzahlen.

Folgender Stoff der Differentialrechnung findet sich in der 7. Klasse:

*„- Den Differenzen- und Differentialquotienten ... in außermathematischen Bereichen deuten können
- Den Begriff der Ableitungsfunktion kennen; höhere Ableitungen kennen“ ([5], S.72)*

Die mathematische Bildbearbeitung bietet die Möglichkeit die oben genannten Begriffe auf Bildfunktionen anzuwenden und dabei einen weiteren außermathematischen Bereich zu erschließen. Bei der Bestimmung von Rändern und großen Unterschieden zwischen benachbarten Intensitätswerten spielt die Bestimmung von Differenzen eine hervorgehobene Rolle. Dies ermöglicht eine Diskretisierung von Ableitungen und einen anderen Blickwinkel auf deren Bedeutung (vgl. [24] S.87).

In der 8. Klasse findet sich zu Gauß-Funktionen:

„Die Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen verwenden können“ ([5], S.72)

Der Gauß-Filter nutzt die Eigenschaften von Gauß-Funktionen um eine gewisse Glättung in den Bildern zu erzeugen. Dies ist eine hervorragende Gelegenheit diese Art der Funktionen einmal außerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie zu verwenden und damit ihre universelle Wichtigkeit zu betonen.

Der Lehrplan für Mathematik sieht explizit keine Grundlagen der mathematischen Bildbearbeitung vor. Im Angesicht der großen Präsenz des digitalen Bildes ist dies nicht nachvollziehbar. Auch wenn an vielen Stellen genug Anknüpfungspunkte gefunden werden können, um Bildbearbeitung in den Unterricht einzubauen, fehlt eine explizite Anweisung, in welcher Schulstufe und in welchem Kontext des vorgeschriebenen Unterrichtsstoffs Bildbearbeitung stattfinden sollte.

2.4 Schnittstellen mit anderen Fachgebieten am Beispiel Biologie

Auch wenn immer mehr Anwendungen und Berufe Programmierkenntnisse erfordern und Programmierarbeit in der Regel mathematische Kenntnisse erfordert, fehlt das Fach „Programmieren“ in den allgemeinbildenden höheren Schulen. Mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung bieten dabei ein breites Anwendungsspektrum, das sich auch im Rahmen des Lehrplans „Digitale Grundbildung“ oder in „Informatik“ realisieren ließe (vgl. [5]). Allgemein bietet die Thematik ein großes Potential für Kooperationen mit anderen Fächern, da digitales Bildmaterial in nahezu allen Fächern eine Rolle spielt.

Hier soll eine Schnittstelle mit der Biologie aufgezeigt werden. Viele Eigenschaften, die digitale Bilder oder Bilder im Allgemeinen aufweisen, entwickelten sich vor dem Hintergrund der Sehfähigkeiten des Menschen. Die Menge an Farben oder Graustufen, die das menschliche Auge unterscheiden kann, sowie die Anzahl an Bildelementen sind wichtig für die Ansprüche, die an ein digitales Bild gestellt werden. Der Aufbau der Sensorik des Auges hilft dabei den Aufbau künstlicher Informationsverarbeitung zu verstehen. Auch im Hinblick auf die Verarbeitung von Bildern in künstlichen neuronalen Netzen ist der Blick auf das menschliche Sehorgan interessant. Im Lehrplan für Biologie und Umweltkunde in der AHS-Oberstufe ist für die 6. Klasse folgendes zu finden:

„Information und Kommunikation im Nervensystem (Reizaufnahme, Erregungsleitung, Verarbeitung, Einfluss von Drogen)“

([5], S.78)

Teil dieses Themenkomplexes ist in der Regel auch das menschliche Auge und dessen Funktionsweise. Daher bietet es sich an, bei der Behandlung digitaler Bilder auf dieses Vorwissen zurückzugreifen. Darum soll hier kurz wiedergegeben werden, wie das menschliche Auge aufgebaut ist und wie es Licht sowie Farben wahrnehmen kann (vgl. Abbildung 2.1).

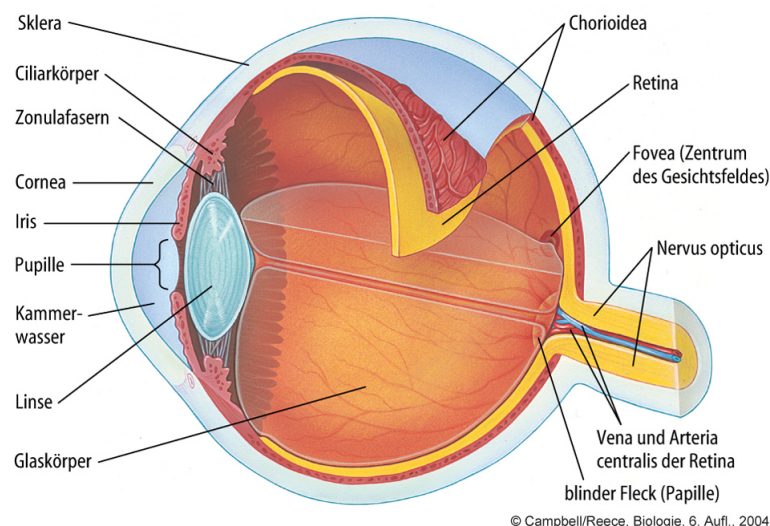


Abbildung 2.1: Seitlicher Querschnitt eines menschlichen Auges, Quelle: [25]

Das von Objekten reflektierte Licht wird durch die durchsichtige Hornhaut (Cornea) in das Kammerwasser in der vorderen Augenkammer durchgelassen, wo es gebrochen und auf die Pupille geleitet wird. Diese Öffnung zum Augeninneren wird je nach Lichtstärke von der Iris, die wie eine Blende wirkt, vergrößert oder verkleinert. Aus diesem Grund scheint sich unsere Pupille im Dunkeln zu weiten und im Hellen zu verkleinern. Das Licht wird dann durch den ebenfalls fokussierend wirkenden, gelatineartigen Glaskörper auf die Netzhaut gebracht. Dort wird es, wie in Abbildung 2.2 sichtbar, von Photorezeptoren, die auf der Netzhaut verteilt sind, in ein für den Sehnerven transportierbares und für das Gehirn verarbeitbares Signal umgewandelt. Beim Menschen werden diese Rezeptoren durch etwa 6 Millionen Zapfen und 125 Millionen Stäbchen repräsentiert. Diese machen zusammen 70 Prozent aller menschlichen Sinneszellen aus (vgl. [25]).

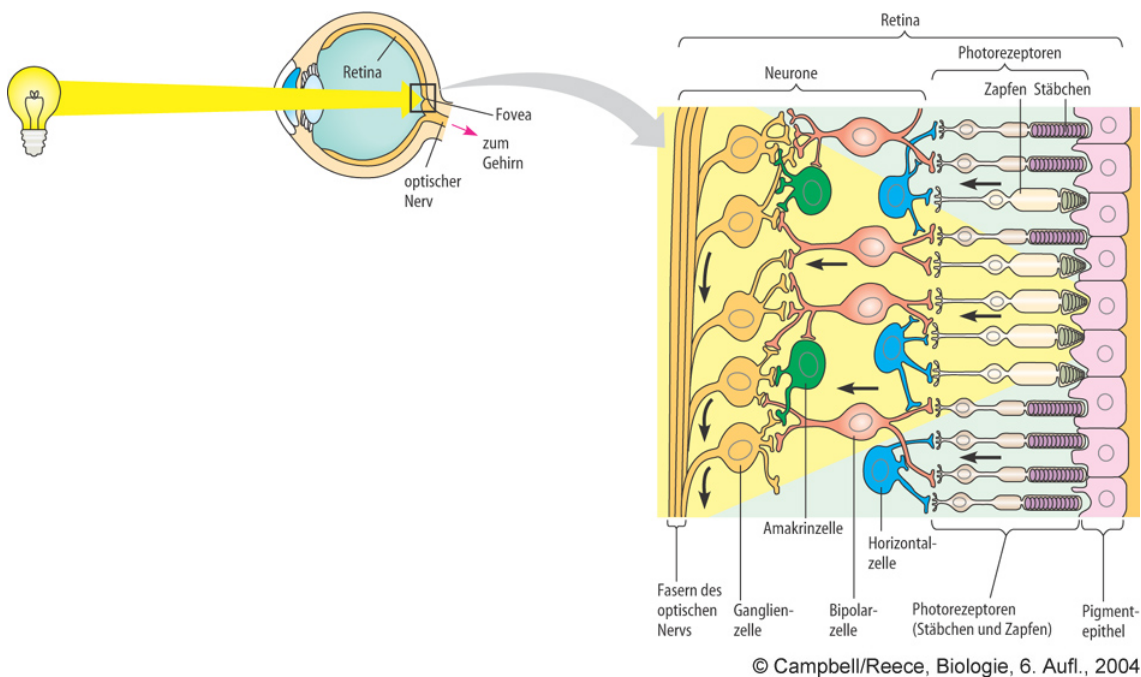


Abbildung 2.2: Lichtaufnahme durch das Sensoriksystem des Auges, Quelle: [25]

Die Zapfen sind für das Wahrnehmen von Farben zuständig und die Stäbchen für das Erkennen von Graustufen. Die Zapfen brauchen eine höhere Lichtstärke, um Lichtenergie in elektrische Impulse umzuwandeln, während die Stäbchen viel empfindlicher sind. In der Nacht sind daher nur die Stäbchen in der Lage Licht zu erkennen und wir sehen alles in Grautönen. Stäbchen sind bis zu 1000 mal lichtempfindlicher als Zapfen. Die Zapfen teilen sich in drei Typen auf, welche besser dafür geeignet sind rotes, grünes oder blaues Licht aufzunehmen. Diese Farben werden durch die Wellenlänge des Lichts unterschieden. Die unterschiedlichen Zapfentypen sprechen auf unterschiedliche Wellenlängen besser an. Durch verschiedene Nervenzellen, Neuronen genannt, werden elektrische Impulse verarbeitet und weitergeleitet (vgl. [26]). Dies stimmt mit den Grundfarben Rot, Grün und Blau der Bildbearbeitung überein und kann als Grund für diese Wahl gesehen werden.

3 Mathematische Grundlagen und Umsetzung in der Schule

In diesem Kapitel werden mathematische Definitionen und Grundlagen behandelt und im Anschluss durch anschauliche Beispiele präsentiert. In einem dritten Schritt folgt eine Beschreibung für die Anwendung in der Schule mit MATLAB[®] und dem entsprechenden Quellcode. Ein ausführlich kommentiertes MATLAB[®]-Skript als Vorlage für die durchgeführten Unterrichtssequenzen befindet sich im Appendix B.

Für die mathematischen Grundlagen der in dieser Arbeit behandelten Bildbearbeitungsmethoden folge ich elementaren Definitionen und Bezeichnungen folgender Lehrbücher: [24], [27], [28], [29], [30], [1].

3.1 Das Bild

Das Bild ist das zentrale Objekt, an welchem die Bildbearbeitung operiert. Dabei muss zuerst geklärt werden, wie ein Bild in der Mathematik modelliert wird.

3.1.1 Definition eines Bildes

In der Praxis sind Bilder in diskreter Form gegeben. Die Methoden, die zur Bearbeitung von Bildern gebraucht werden, sind jedoch großteils aus mathematischen Grundlagen für kontinuierliche Räume erwachsen. Aus diesem Grund macht es Sinn das Bild sowohl aus kontinuierlicher als auch aus diskreter Perspektive zu betrachten.

Definition 1. *Kontinuierliches zweidimensionales Bild*

Ein kontinuierliches, zweidimensionales Bild ist eine Abbildung u von einer Definitionsmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in einen Wertebereich $F \subseteq \mathbb{R}^k$:

$$u : \Omega \rightarrow F.$$

Dabei wird jedem Punkt des Definitionsbereiches durch die Funktion u ein k -Tupel von Werten zugeordnet. Die einzelnen Teilräume des Wertebereiches werden als Kanäle bezeichnet.

Meistens werden für k die Werte $k = 1$ oder $k = 3$ benutzt. Die Definitionsmenge kann auch für höhere Dimensionen gewählt werden (vgl. [24]). Dies ist für den Zweck dieser Arbeit jedoch nicht notwendig.

Um die diskrete Perspektive zu betrachten, ist es hilfreich sich vorher mit Matrizen zu beschäftigen.

Definition 2. *Reelle Matrix*

Eine $M \times N$ -Matrix ist eine Anordnung von $M \cdot N$ Elementen aus der Menge $F \subseteq \mathbb{R}^k$, mit $M, N, k \in \mathbb{N}$, nach folgendem Schema:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & \dots & a_{M,N} \end{bmatrix} \in F^{M \times N}$$

Die waagrechten n -Tupel

$$\begin{bmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,N} \end{bmatrix}$$

heißen Zeilen und die senkrechten m -Tupel

$$\begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{M,j} \end{bmatrix}$$

werden Spalten genannt. Die Indizes sind die Nummerierungen der Zeilen und Spalten.

(vgl. [31]).

Definition 3. *Diskretes zweidimensionales Bild*

Ein diskretes, zweidimensionales Bild ist eine Abbildung v einer Definitionsmenge $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, M\} \times \{1, 2, 3, \dots, N\}$ in einen Wertebereich $F \subseteq \mathbb{R}^k$. Die Funktion v ordnet jeder Position (i, j) , auch Bildpunkt genannt, einen Wert $v(i, j)$ zu:

$$v : \Omega \rightarrow F \quad \text{mit } (i, j) \in \Omega, \quad v(i, j) \in F.$$

Ein diskretes Bild kann durch eine Matrix

$$A = (a_{i,j}) \in F^{M \times N} \quad \text{mit } a_{i,j} = v(i, j),$$

auch Bildmatrix genannt, repräsentiert werden.

In einigen folgenden Definitionen und Beispielen zu diskreten Bildern werden Operationen der Anschaulichkeit halber nur für die Bildmatrix definiert und erklärt, nicht für die Bildfunktion.

3.1.2 Beispiele für Bilder

Digitale Bilder setzen sich aus sogenannten *Pixeln* zusammen. Der Begriff *Pixel* ist dabei ein Mischwort aus den beiden Wörtern *picture* und *element*. Es kann auch als *Bildelement* übersetzt werden. Die Position eines Pixels wird dabei durch die Definitionsmenge des Bildes bestimmt.

Für die Anwendungen an digitalen Bildern bildet eine diskrete, endliche, zweidimensionale Definitionsmenge die Grundlage.

Die Farbe eines Pixels wird durch die Einträge an der entsprechenden Position in der Bildmatrix bestimmt. Der Wertebereich von Bildern wird im Weiteren als *Farbraum* bezeichnet, auch wenn es sich um Schwarz-Weiß-Bilder oder Graustufenbilder handelt. Die einzelnen Teilräume und Werte des Farbraumes werden als *Farbkanäle* und *Intensitätswerte* bezeichnet (vgl. [24], [30]). Die Namen der folgenden Bildkategorien beziehen sich auf deren Farbraum.

Beispiel 1. Schwarz-Weiß-Bilder

Ein Schwarz-Weiß-Bild wird durch eine binäre Matrix repräsentiert, es gilt: $F = \{0,1\}$ mit der Dimension des Farbraumes $k = 1$. Dabei wird die Zahl 0 mit Schwarz übersetzt und die Zahl 1 mit der Farbe Weiß. Das Aussehen eines Schwarz-Weiß-Bildes lässt sich leicht von der dazugehörigen binären Matrix ableiten, siehe Abbildung 3.1.

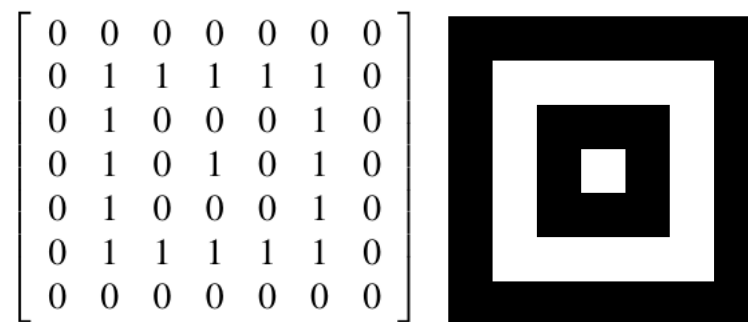


Abbildung 3.1: Schwarz-Weiß-Bild mit Bildmatrix

Beispiel 2. Graustufenbilder

In diesem Fall gilt, dass der Farbraum $F = \{0,1,2,\dots,255\}$ die Dimension $k = 1$ besitzt. Da 8-Bit-Blöcke $2^8 = 256$ verschiedene Zahlen speichern können, bietet es sich an, 256 Abstufungen von Grau für ein Graustufenbild zu nutzen. Somit werden die Zahlen 0 – 255 als Grundlage für den Wertebereich des Bildes verwendet. Andere Abstufungen sind auch denkbar, wie beispielsweise 16-Bit-Blöcke. Dadurch ergibt sich ein Farbraum $F = \{0,1,2,\dots,2^{16} - 1\}$ mit über 60000 Abstufungen, die durch computergestützte Analyse unterschieden werden können.

Abstände im Grauwertbereich eines 8-Bit-Bildes, die kleiner als zehn sind, lassen sich schon schwer erkennen. Nicht das gesamte Grauspektrum wird vom Menschen gleich gut unterschieden (vgl. [30]). In Abbildung 3.2 sehen wir verschiedene Intensitäten von Graustufen. Die Unterschiede im Bild erhöhen sich von links nach rechts jeweils um 1, sodass die Werte eine Differenz von 1,2,3,4,5 haben. Im dunkleren Bereich sind die Unterschiede schwieriger auszumachen.

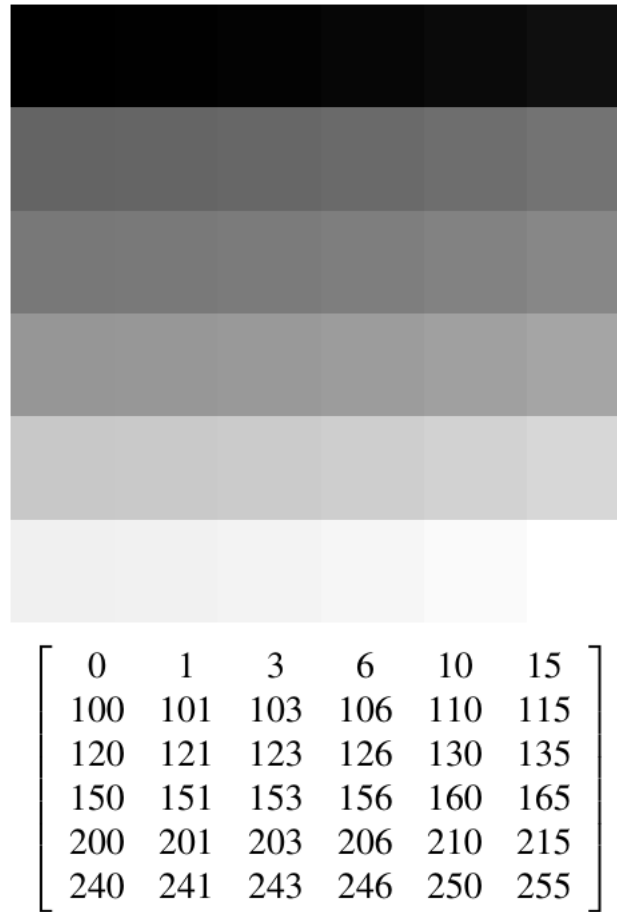


Abbildung 3.2: 8-Bit-Graustufenbild mit Bildmatrix

Beispiel 3. RGB-Bilder

RGB-Bilder bestehen aus drei Matrizen für die Farben Rot, Grün und Blau. In jeder Matrix wird im Eintrag (i, j) festgehalten, wie hoch der Intensitätswert der jeweiligen Farbe im dargestellten Pixel sein soll. Der Farbraum der Bildfunktion ist hier: $F = \{0, 1, 2, \dots, 255\}^3$ mit der Dimension $k = 3$. Das heißt, jeder Eintrag der Bildmatrix $A \in (\{0, 1, 2, \dots, 255\}^3)^{M \times N}$ besteht aus einem Tupel $a_{i,j} \in \mathbb{R}^3$. Die $M \times N$ -Matrizen, in denen nur die Intensitätswerte für Rot, Grün und Blau eingetragen sind, werden mit A_R , A_G und A_B bezeichnet. Es gilt

$$A(i, j) = \begin{pmatrix} A_R(i, j) \\ A_G(i, j) \\ A_B(i, j) \end{pmatrix}.$$

Werden RGB-Bilder wie in diesem Beispiel durch drei Matrizen mit 8-Bit-Einträgen repräsentiert, entspricht dies 24 Bit pro Pixel. Insgesamt können dadurch $2^{24} = 16777216$, also über 16 Millionen Farbabstufungen, dargestellt werden (vgl. [32]).

In Abbildung 3.3 sieht man in der obersten Zeile die Farben Rot, Grün und Blau, welche durch das Setzen der jeweils anderen Farbkanäle auf Null in den drei darunter abgebildeten Matrizen entstehen. Die sogenannten Sekundärfarben Gelb, Magenta und Cyan in der zweiten Zeile entstehen durch die Kombination von zwei der drei Farben Rot, Grün oder Blau. Es entstehen Gelb (Rot und Grün), Magenta (Rot und Blau) und Cyan (Grün und Blau). Je nach Wahl der Höhe

der Intensitätswerte und des Verhältnisses entstehen, wie in der dritten Zeile zu sehen, andere Mischfarben. Setzt man die Intensitätswerte aller drei Farbkanäle auf 255, wird Weiß angezeigt.

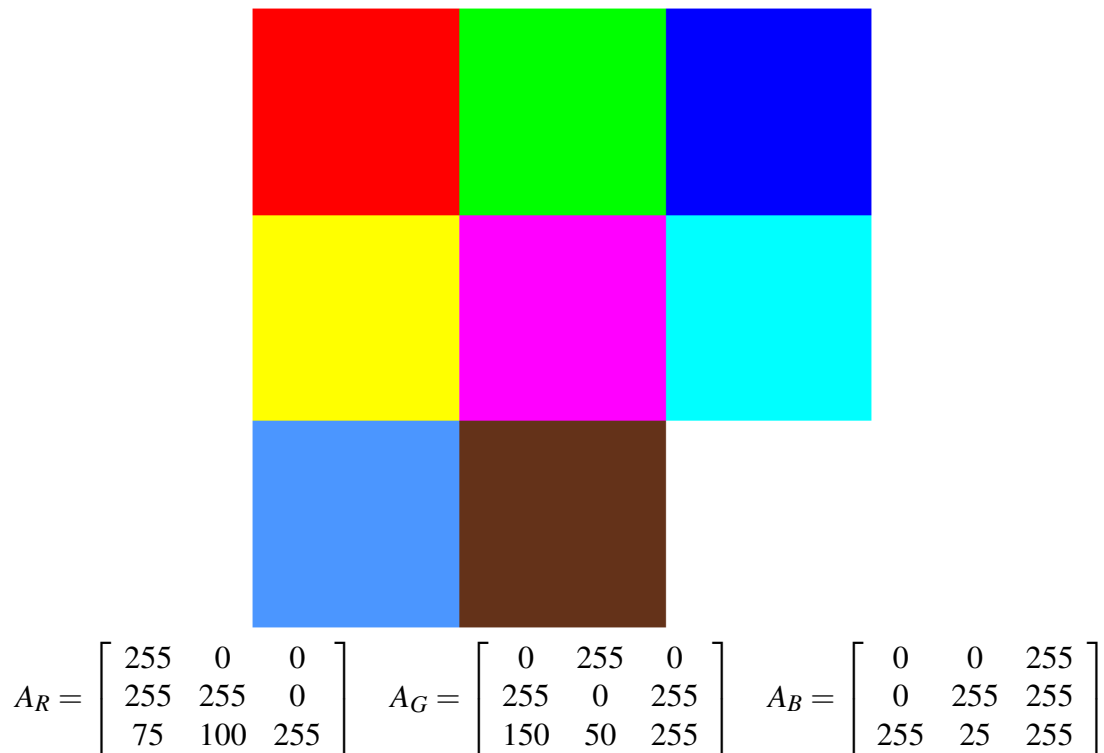


Abbildung 3.3: RGB-Bild mit den dazugehörigen Bildmatrizen

3.1.3 Anwendungen für Bilder in der Schule

In den folgenden Anwendungen werden die in Definition 2, Definition 3, sowie den Beispielen 1,2 und 3 ausgeführten Inhalte für den Unterricht in der Sekundarstufe II implementiert. Dabei werden Hinweise und Anregungen für eine Durchführung im Unterricht gegeben. Ziel der Anwendungen in der Schule sollen Grunderfahrungen am digitalen Bild und die Grundvorstellungen zu den mathematischen Objekten der *Matrix* und der *Bildmatrix* sein (vgl. [6]).

Schwarz-Weiß-Bilder Die erste Erfahrung mit dem Zusammenhang zwischen digitalem Bild und einer Bildmatrix lässt sich durch das Erstellen von Schwarz-Weiß-Bildern mit Zettel und Stift erleben.

Dafür werden zuvor die grundlegenden Begriffe zur Matrix und eines mathematischen Bildes veranschaulicht (vgl. Definition 2 und Definition 3).

Zur Anknüpfung an Vorwissen bietet es sich an, eine Matrix auch als rechteckige Tabelle mit Zahleneinträgen darzustellen und zu erheben, in welchen Fächern Tabellen bisher von Belang waren. Es kann erwähnt werden, dass es viele Anwendungsgebiete von Matrizen gibt, insbesondere in der Informatik.

Jetzt können die Schülerinnen und Schüler selbst auf dem Papier ein Schwarz-Weiß-Bild gestalten und dabei kreativ sein. Dieses wird dann in MATLAB® als Matrix eingegeben und wie in Abbildung 3.4 ersichtlich zu einem Bild übersetzt. Es ist zu empfehlen mit der Klasse gemeinsam

für alle Schülerinnen und Schüler einen Probeaccount für die Onlineversion von MATLAB® abzuschließen (vgl. [8]).

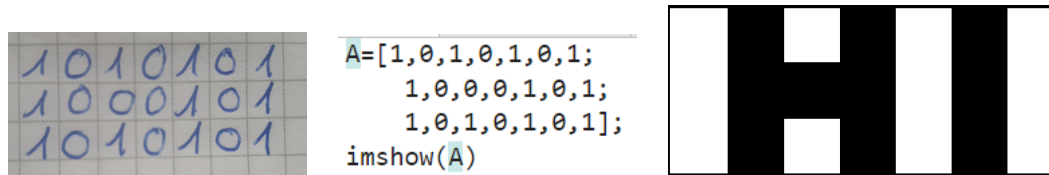


Abbildung 3.4: Schwarz-Weiß-Bild: Von der Idee bis zum digitalen Bild

RGB- und Graustufenbilder lassen sich ebenfalls als Matrizen auf dem Papier gestalten und dann in MATLAB® zu einem digitalen Bild umwandeln. Durch die Komplexität der vielen Möglichkeiten Graustufen oder Farben zu erstellen, ist es hier sinnvoller in heuristischer Herangehensweise Matrizen direkt im Programm zu gestalten.

RGB-Bilder einlesen Alternativ kann auch mit einem eigenen Bild oder Foto gearbeitet werden, um Farb- und Graustufenbilder besser zu verstehen. Um ein Bild in MATLAB® zu bearbeiten, müssen zuerst die drei Matrizen A_R , A_G und A_B für Rot, Grün und Blau mit Hilfe des Befehls „`imread()`“ erstellt werden. Dafür wird ein digitales Bild in einem gängigen Format, z.B. JPEG oder PNG, in einem Zugriffsverzeichnis gespeichert und danach durch den Befehl ausgelesen.

Durch den Befehl „`imshow()`“ werden die Matrizen als digitales Bild auf dem Bildschirm angezeigt. Mit Hilfe des Zusatzes „`impixelinfo`“ können einzelne Intensitätswerte mit dem Mauszeiger abgetastet werden. In Abbildung 3.5 kann man das Resultat am Beispiel der Photographie einer Weinbergschnecke betrachten. Das Bild trägt den Namen „Schnecke.jpg“ und hat eine Größe von 2448x2448 Pixeln, wie man auch in Abbildung 3.6 nachsehen kann. Darunter erkennt man die Position des vom Mauszeiger gewählten Pixels und die Intensitätswerte aus den zugrundeliegenden Matrizen für Rot, Grün und Blau. Um ein Anzeigen der drei Matrizen zu unterdrücken, wird nach dem Definieren einer Matrix ein Strichpunkt gesetzt. Durch den Befehl „`figure`“ wird ein neues Fenster geöffnet. Dies ist hilfreich, wenn mehrere Bilder produziert werden sollen.

Quellcode:

```
A=imread("Schnecke","jpg");
figure, imshow(A), impixelinfo
```



Pixel info: (1603, 1458) [145 118 109]

Abbildung 3.5: Beispielbild einer Weinbergschnecke

Im Quellcode ist A eine 2448×2448 -Matrix mit Einträgen aus $F = \{1, 2, 3, \dots, 255\}^3$ (vgl. Beispiel 3). Ist die Anzahl der Pixel oder der zugrundeliegenden Matrizen nicht bekannt, hilft folgender Befehl:

Quellcode:

`size(A)`

`ans =`

`2448`

`2448`

`3`

Abbildung 3.6: Größeninformation zu den Bildmatrizen von „Schnecke.jpg“

Umwandlung in Graustufenbilder Das so gespeicherte N Pixel breite und M Pixel hohe Farbbild kann nun zu einem Graustufenbild umgewandelt werden.

$$\tilde{B} = 0,2989 \cdot A_R + 0,5870 \cdot A_G + 0,1140 \cdot A_B \quad (3.1)$$

Durch den Befehl „`rgb2gray()`“ werden die drei Matrizen A_R , A_G und A_B anteilmäßig wie in Gleichung 3.1 zu einer neuen Matrix $\tilde{B}$ addiert. Anschließend werden die Werte von $\tilde{B}$ zur neuen Graustufenmatrix B gerundet, sodass diese im Raum $F = \{0, 1, 2, \dots, 255\}^{M \times N}$ liegt. In der Gleichung bezeichnen A_R , A_G und A_B die Matrizen der jeweiligen Farbkanäle. Die Koeffizienten, die den Grünanteil klar hervorheben, entstammen aus der Fotoentwicklung (vgl. [32]).

Quellcode:

`B=rgb2gray(A);`



Abbildung 3.7: Umwandlung des Beispielbildes in ein Graustufenbild

Farbkanäle Um sich einzelne Farbkanäle eines importierten RGB-Bildes anzuschauen, ist es möglich die Einträge der Matrizen, die die anderen Farbkanäle repräsentieren, gleich 0 zu setzen. Hier ein Beispiel, um nur den blauen Kanal anzuzeigen:

Quellcode:

```
A1=A;
A1(:, :, 1)=0;
A1(:, :, 2)=0;
figure, imshow(A1)
```

Hierbei werden drei neue Matrizen erzeugt, wobei die ersten beiden, die den roten und den grünen Kanal repräsentieren, nur mit Nullen ausgefüllt werden.

Andererseits können auch einzelne Kanäle ausgeschaltet werden. Hier ein Beispiel, wenn nur der blaue Kanal ausgeschaltet wird und dadurch die Sekundärfarbe Gelb entsteht:

Quellcode:

```
A6=A;
A6(:, :, 3)=0;
figure, imshow(A6)
```

Dies lässt sich, wie man in Abbildung 3.8 sehen kann, mit allen Farbkanälen durchführen. Die Ergebnisse sind ein guter Augenfang und daraus lässt sich leicht eine Ausstellung für das Schulhaus zusammenstellen.

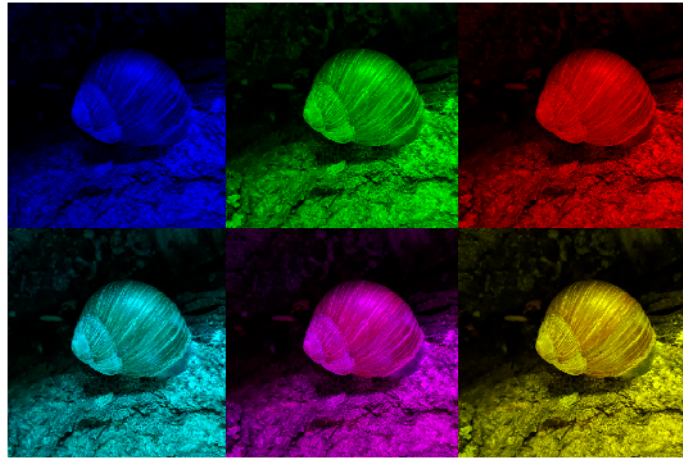
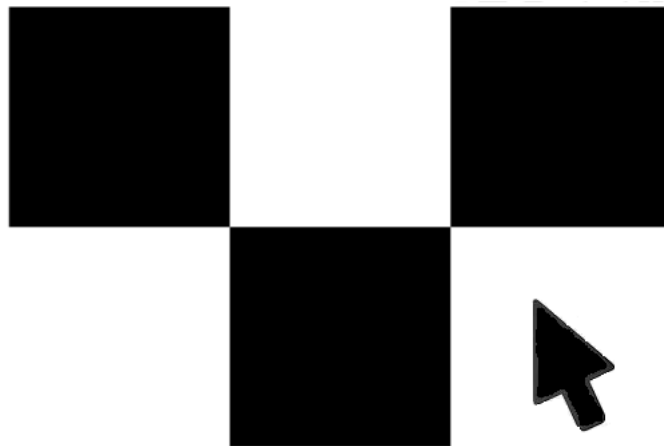


Abbildung 3.8: Ausblendung von Farbkanälen im Beispielbild

Auswahl von Bildelementen Beim Bestimmen von Pixelpositionen eines Bildes in MATLAB® tritt eine besondere Schreibweise auf. Die allgemeine Matrixnotation und die vom Programm angebotene Pixelinformation werden beide benötigt, stehen sich jedoch mit unterschiedlichen Reihenfolgen in der Schreibweise gegenüber. Um den Eintrag in einer Matrix zu beschreiben, wird als erstes seine Zeilenposition und als zweites die Spaltenposition angegeben, so z.B. $a_{2,3}$. In der Pixelinformation wird jedoch zuerst die Spaltenposition und dann die Zeilenposition angegeben: (3,2).

In Abbildung 3.9 zeigt der Mauszeiger auf die Position eines bestimmten Pixels. In einer Bildmatrix A steht der dazugehörige Farbwert 1 für weiß im Eintrag $a_{2,3}$. Hier wird die Position mit dem Punkt (3,2) beschrieben.



Pixel info: (3, 2) 1

Abbildung 3.9: Angabe der Position eines Pixels

Ausschneiden von Bildteilen Eine Bearbeitung, bei der die richtige Schreibweise für die Position eines Pixels beachtet werden muss, ist das Ausschneiden bestimmter Bildteile.

Die Pixelinformation, die durch den Befehl „`impixelinfo`“ über den Mauszeiger abgerufen werden kann, wird ähnlich der Koordinatenschreibweise mit (x,y) angegeben. Das Abrufen eines

bestimmten Ausschnitts des Bildes muss über die zugrundeliegende Bildmatrix in Matrixschreibweise durchgeführt werden. Hierbei wird zuerst die Zeile (y) und dann die Spalte (x) genannt. Im Folgenden wird das Schneckenhaus aus dem Bild „B“ in einem rechteckigen Ausschnitt herausgelöst und als eigenes Bild gespeichert. Dafür werden die Koordinaten zweier Eckpunkte P_1 , oben links, und P_2 , unten rechts, mit Hilfe der Pixelinformation abgelesen und notiert:

$$P_1 = (700, 500),$$

$$P_2 = (2150, 1850).$$

Im Anschluss werden durch die y -Koordinaten in der Bildmatrix die gewünschten Zeilen ausgewählt und über die x -Koordinaten die Spalten:

Quellcode:
 $C=B(500:1850, 700:2150);$
 $figure, imshow(C)$

In der resultierenden Matrix C sind nur noch die spezifizierten Zeilen und Spalten enthalten. Daraus ergibt sich Abbildung 3.10, ein Ausschnitt des Schneckenhauses.



Abbildung 3.10: Ausschnitt aus dem Beispielbild

3.2 Einfache Matrixoperationen

Um Bilder zu verändern, müssen wir die zugrundeliegenden Bildmatrizen verändern. Dafür brauchen wir mathematische Operationen, die wir auf Matrizen anwenden können. Grundlegende Operationen, die für uns von Belang sind, werden durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division der einzelnen Einträge mit einer Zahl erreicht.

3.2.1 Grundlegende Definitionen zu Matrizen

Definition 4. Grundrechenarten einer $M \times N$ -Matrix mit einem Skalar

Eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M \times N}$ wird mit einem Skalar $b \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem jeder Eintrag der Matrix A mit b multipliziert wird.

Addition, Subtraktion und Division werden analog durchgeführt. Es gilt damit:

$$b \cdot A + c = \begin{bmatrix} b \cdot a_{11} + c & \dots & b \cdot a_{1N} + c \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b \cdot a_{M1} + c & \dots & b \cdot a_{MN} + c \end{bmatrix} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{M \times N}, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Definition 5. *Transponierte einer Matrix*

Ist $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M \times N}$, so heißt die durch

$$a_{i,j}^t = a_{j,i}$$

definierte Matrix $A^t = (a_{i,j}^t) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ die transponierte Matrix von A (vgl. [31]).

Definition 6. *Hadamard-Produkt*

Zwei Matrizen mit gleicher Größe können punktweise miteinander multipliziert werden. Seien

$$A, B \in \mathbb{R}^{M \times N}.$$

Das Produkt

$$A \circ B = B \circ A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & \dots & a_{1N} \cdot b_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} \cdot b_{M1} & \dots & a_{MN} \cdot b_{MN} \end{bmatrix}$$

wird Hadamard-Produkt genannt.

3.2.2 Anwendung einfacher Operationen auf Bildmatrizen

Bei einfachen Operationen mit einem Skalar ist zu berücksichtigen, dass Werte aus dem Wertebereich herausfallen können. Wird der Wertebereich des Graustufenbildes auf $F = \{0, \dots, 255\}$ beschränkt, werden jene Werte, die 0 unterschreiten auf 0 gesetzt und jene, die 255 übertreffen, auf 255. Möchte man Kontrast und Helligkeit ohne diese Probleme verändern, muss auf andere Methoden zurückgegriffen werden.

Beispiel 4. *Addition und Subtraktion*

Durch die Addition oder Subtraktion einer positiven Konstante von den Werten einer Bildmatrix kann deren Helligkeit manipuliert werden. Wie man in Abbildung 3.11 sehen kann, wird bei der Addition von 50 zu allen Werten das Bild heller und bei der Subtraktion von 50 dunkler.

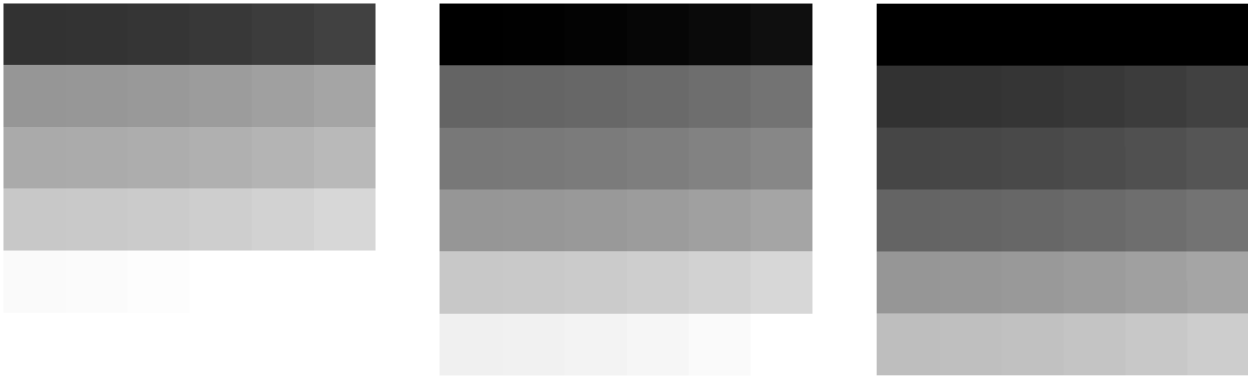


Abbildung 3.11: Aufhellen (links) oder Verdunkeln (rechts) des Originals (Mitte)

Beispiel 5. Multiplikation

Multipliziert man die Bildmatrix mit einer Zahl, die größer als 1 ist, so erhöht sich der Kontrast in Teilen des Bildes, da die Intensitätswerte nun weiter auseinanderliegen. Ist die Zahl kleiner als 1, verringert sich der Kontrast. Wie man in Abbildung 3.12 und auch in Abbildung 3.11 sehen kann, werden Werte, die größer als 255 sind, weiß. Zur Erhöhung wurde der Faktor 1,2 gewählt und zur Verringerung der Faktor 0,7.



Abbildung 3.12: Erhöhung (links) oder Verringerung (rechts) des Kontrasts des Originals (mitte)

Drehungen lassen sich mit vielen Bildbearbeitungsprogrammen per Mausklick durchführen. Die Implementierung einer beliebigen Drehung in einer Matrix ist jedoch nicht einfach. Es beginnt damit, dass Matrizen rechteckige Bilder repräsentieren. Drehen wir nun ein rechteckiges Bild um einen Winkel zwischen 0 und 90°, so muss dies mit einer Matrix repräsentiert werden, die größere Maße hat als die Ursprungsmatrix. Dies lässt sich reparieren, indem fehlende Einträge einer gedrehten Matrix wie in Abbildung 3.16 durch Nullen, also schwarze Pixel, ersetzt werden. Diese Vorgehensweise wird auch *Zero-Padding* genannt.

Beispiel 6. Drehung um 90°

Die Drehung eines diskreten, quadratischen Bildes

$$v: \{1, 2, 3, \dots, N\}^2 \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 255\}$$

um 90° gegen den Uhrzeigersinn lässt sich durch die Abbildung f mit

$$f(i, j) = v(j, N + 1 - i)$$

erreichen. In der entsprechenden Bildmatrix $A = (a_{i,j})$ werden die Indizes der Einträge zur gedrehten Matrix $B = (b_{i,j})$ mit

$$b_{i,j} = a_{j, N+1-i}$$

verändert. Das Resultat ist in Abbildung 3.13 zu sehen.

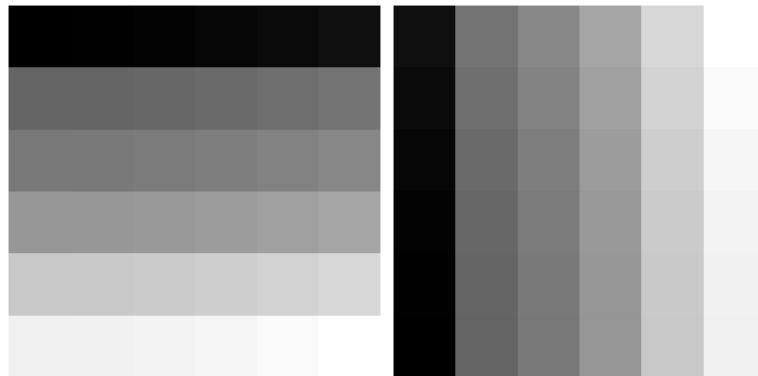


Abbildung 3.13: Drehung des Originals (links) um 90° (rechts)

Beispiel 7. Diagonale Spiegelung

Durch das Transponieren von Matrizen können Bilder entlang der diagonalen Bildachse von links oben nach rechts unten gespiegelt werden. Bei den hellen Bildpunkten kann man erkennen, dass sich die Drehung um 90° in Abbildung 3.13 und die Transposition in Abbildung 3.14 unterscheiden.

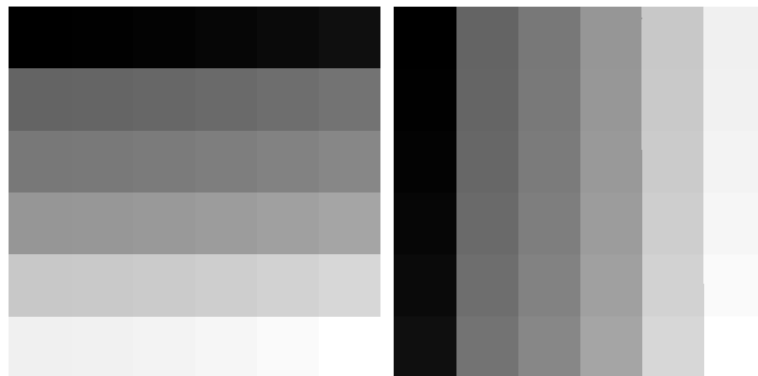


Abbildung 3.14: Diagonale Spiegelung des Originals (links) durch Transposition der Bildmatrix (rechts)

Beispiel 8. Rechenbeispiel Hadamard-Produkt

Als einfaches Beispiel eines Hadamard-Produktes, das bei Faltungen eine Rolle spielen wird, können im Unterricht zwei Matrizen händisch multipliziert werden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 48 \\ 8 & 20 & 48 \\ 7 & 16 & 36 \end{bmatrix}.$$

3.2.3 Einfache Operationen auf der Bildmatrix für die Anwendung in der Schule

Die Addition einer Konstante und die Multiplikation mit einem Skalar werden im Folgenden wie in den Beispielen 4 und 5 am Bild „Schnecke.jpg“ angewendet. Das Ergebnis kann in Abbildung 3.15 betrachtet werden.

Quellcode:

$B = A + 75;$

$C = A * 1.5;$



Abbildung 3.15: Aufhellung (links) und Kontrasterhöhung (rechts) im Beispielbild

Die Rotation eines Bildes kann in MATLAB® mit dem Befehl „*imrotate*()“ durchgeführt werden. Wie man in Abbildung 3.16 sehen kann, müssen dafür Werte in einer größeren Matrix durch Zero-Padding erfunden werden. Das Bild aus Abbildung 3.7 wurde in Abbildung 3.16 um 60° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

Quellcode:

$A8 = \text{imrotate}(B, 60)$



Abbildung 3.16: Rotation des Beispielbildes

Es empfiehlt sich daher bei einfachen Drehungen um ein Vielfaches von 90° zu bleiben.

Durch das Transponieren der Bildmatrix werden die Indizes vertauscht und das Bild an einer Diagonalen von links oben nach rechts unten gespiegelt. In Abbildung 3.17 wurde die Bildmatrix von Abbildung 3.7 mit dem Befehl „.'“ transponiert.

Quellcode:

```
A7=B. ';
```



Abbildung 3.17: Diagonalspiegelung des Beispielbildes

3.3 Rangordnungsfiler und Schwellenwertverfahren

Rangordnungsfiler werden mit Hilfe bestimmter Umgebungen, sogenannter *Nachbarschaften*, von Bildpunkten angewendet. Alle Intensitätswerte in einer vordefinierten Nachbarschaftsrelation eines Bildpunktes werden der Größe nach geordnet und dementsprechend mit einem Rang belegt. Ein Rang wie beispielsweise das Maximum, Minimum oder der Median wird ausgewählt. Dieser wird für alle Bildpunkte durch deren Nachbarschaft bestimmt und eingesetzt.

3.3.1 Ordnung von Intensitätswerten

Das Filtern nach Rangordnung impliziert die Möglichkeit, die Elemente einer Matrix zu ordnen. Dies ist bei Matrizen mit reellen Einträgen der Fall. Weiters beschränken wir uns auf Matrizen $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$. Der Begriff *Rang* bezieht sich in diesem Fall nicht auf den Rang einer Matrix, sondern auf die Position in der Reihenfolge der geordneten Elemente der Nachbarschaft eines Bildpunktes. Dieser wird durch eine vorherige Ordnung einer Zahlenliste festgelegt.

Definition 7. *Minimum, Maximum und Median einer Matrix*

Sei die Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{M \times N}$ mit $i \in \{1, 2, 3, \dots, M\} = I$ und $j \in \{1, 2, 3, \dots, N\} = J$ gegeben. Dann gibt es einen Eintrag $a_{k,l}$ mit $k \in I$ und $l \in J$, für den gilt:

$$a_{k,l} \leq a_{i,j} \quad \forall i \in I, j \in J.$$

Für das Minimum der Matrix A gilt:

$$\min(A) = a_{k,l}.$$

Das Maximum einer Matrix, $\max(A)$, wird analog definiert.

Der Median der Matrix A ist der Eintrag in der Mitte der geordneten Matrixeinträge. Bei einer geraden Anzahl an Werten wird er durch das arithmetische Mittel der beiden Werte in der Mitte bestimmt.

Definition 8. Minimum-, Maximum- und Medianfilter

Gegeben sei der Eintrag $a_{i,j}$ einer Matrix A . Sei weiters

$$A_{i,j} = (a_{i+k,j+l})_{\substack{k=-n_1,\dots,n_2 \\ l=-m_1,\dots,m_2}} \in \mathbb{R}^{(n_1 \times n_2 + 1) \times (m_1 + m_2 + 1)}$$

mit $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsmatrix um $a_{i,j}$.

Für den Minimumfilter bzw. Maximumfilter wird jeder Eintrag $a_{i,j}$ der Matrix A durch $\min(A_{i,j})$ bzw. $\max(A_{i,j})$ ersetzt. Für den Medianfilter wird jeder Eintrag $a_{i,j}$ der Matrix A durch den Median der Einträge in $A_{i,j}$ ersetzt.

Am Rand der Matrix A werden dabei fehlende Einträge durch Zero-Padding erzeugt.

Definition 9. Binarisierendes Schwellenwertverfahren

Sei $U \in F \subseteq \mathbb{R}$ ein Schwellenwert als Untergrenze in einem Graustufenbild $v(i, j) \in F$. Dann wird ein neues Bild $f_U(i, j) \in \{0, 1\}$ mit

$$f_U(i, j) = \begin{cases} 0, & v(i, j) \leq U \\ 1, & v(i, j) > U \end{cases}$$

definiert.

Ein Schwellenwert O als Obergrenze definiert das Bild

$$f_O(i, j) = \begin{cases} 0, & v(i, j) \geq O \\ 1, & v(i, j) < O \end{cases}.$$

Der Schwellenwert kann auch dafür verwendet werden nur einen Teil des Bildes durch 0 oder 1 zu ersetzen und den Rest in Graustufen beizubehalten. Das Resultat ist dementsprechend wieder ein Graustufenbild und kein Schwarz-Weiß-Bild.

Um einen geeigneten Schwellenwert zu finden, kann ein Histogramm erstellt werden, welches die absoluten oder relativen Häufigkeiten der Intensitätswerte eines Bildes abbildet.

Ein Histogramm bildet auf der vertikalen Achse die absoluten Häufigkeiten, abhängig von den Intensitätswerten auf der horizontalen Achse, ab. Dabei werden Balken verwendet, welche eine Breite von 1 haben, sodass die Fläche der Balken in der Anzahl der Intensitätswerte $M \cdot N$ resultiert. Alternativ lassen sich auch relative Häufigkeiten abbilden, sodass die Fläche auf die Größe 1 normiert ist.

Definition 10. Histogramm

Sei $v(i, j)$ ein diskretes Bild mit $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ sowie $F = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$.

Die Funktion

$$a(\omega) = |\{(i, j) : v(i, j) = \omega\}|, \quad \omega \in F$$

beschreibt die absoluten Häufigkeiten der Intensitätswerte.

Die Funktion

$$h(\omega) = \frac{|\{(i, j) : v(i, j) = \omega\}|}{M \cdot N}, \quad \omega \in F$$

beschreibt die relativen Häufigkeiten der Intensitätswerte.

In einem Histogramm werden $a(\omega)$ oder $h(\omega)$ mit Säulen abgebildet.

3.3.2 Beispiele für Rangordnungsfiler, Schwellenwerte und Histogramme

Je nach Größe des Bildes und Stärke von Störungen im Bild können verschieden große Pixelumgebungen für die Anwendung der Rangordnungsfiler gewählt werden. Je größer eine Nachbarschaft gewählt wird, umso stärker setzen sich einzelne Werte durch. Dadurch verstärkt sich der Effekt. Bei Medianfiltern kommt es zur Weichzeichnung, bei Maximumfiltern zur Aufhellung und bei Minimumfiltern zur Verdunkelung.

Beispiel 9. Minimum-, Maximum- und Medianfilter

Um die Wirkungsweise von Rangordnungsfilern auf Pixelebene betrachten zu können, werden im Folgenden 2×2 -Umgebungsmatrizen angewendet. Hierbei werden die in Definition 8 verwendeten Parameter der Umgebungsmatrix $A_{i,j}$ folgendermaßen bestimmt: $n_1 = 0 = m_1$ und $n_2 = 1 = m_2$.

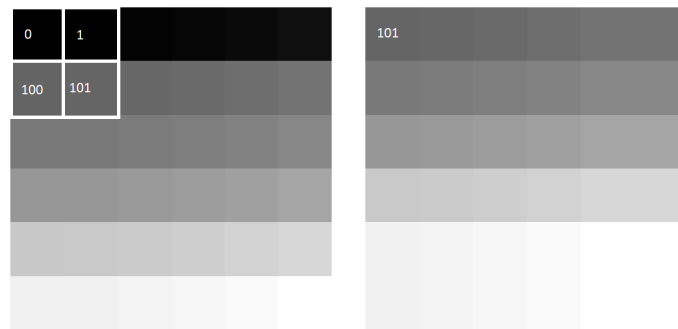


Abbildung 3.18: Original (links) und Maximumfilter (rechts)

In Abbildung 3.18 ist die Vorgehensweise exemplarisch für den Maximumfilter dargestellt. Der Farbwert an der Position $(1,1)$ der neuen Bildmatrix (rechts) entsteht durch die Auswahl des Maximums der Farbwerte an den Positionen $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ der Bildmatrix des Originals (links, vgl. Beispiel 2). Die Einträge in der Umgebungsmatrix $A_{1,1}$ von $a_{1,1}$ lauten

$$a_{1,1} = 0, \quad a_{1,2} = 1, \quad a_{2,1} = 100, \quad a_{2,2} = 101.$$

Somit bekommt das neue Bild an der Position $(1,1)$ den Intensitätswert

$$\max(0, 1, 100, 101) = 101.$$

Dieses Verfahren wird für jede Position im Bild wiederholt. Minimum- und Median-Filter werden analog angewendet.

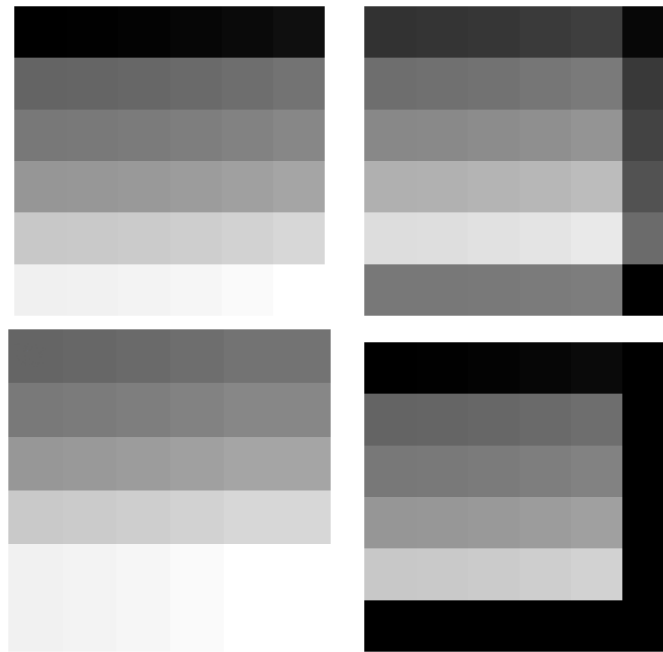


Abbildung 3.19: Medianfilter (o. r.), Maximumfilter (u. l.) und Minimumfilter (u. r.) des Originals (o. l.)

In Abbildung 3.19 werden die Effekte der verschiedenen Rangordnungsfiler demonstriert. An den Rändern lässt sich beim Medianfilter (oben rechts) und beim Minimumfilter (unten rechts) erkennen, dass fehlende Einträge am Rand der Bildmatrix des Originals durch Nullen ersetzt werden. Dies schwärzt den Rand des resultierenden Bildes. Je größer die Nachbarschaft gewählt wird, desto mehr Pixel betrifft dieser Effekt des Zero-Paddings. In diesem Beispiel wird die 2×2 -Umgebung nach rechts und unten gelegt. Nachkommastellen bei der Berechnung des Medians werden ignoriert. Je nach Anwendung muss auf diese Besonderheiten Rücksicht genommen werden.

Beispiel 10. Normierung des Wertebereichs

Für manche Anwendungen ist es von Vorteil, wenn die Intensitätswerte in den Matrizen nicht zwischen 0 und 255 liegen, sondern im Intervall $[0;1]$. Dies wird in MATLAB[®] durch den Befehl „mat2gray()“ ausgeführt. Der kleinste Wert der Graustufenmatrix wird von allen Intensitätswerten abgezogen. Die resultierenden Werte werden durch die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Intensitätswert geteilt, wie in Gleichung 3.2 für die Bildmatrix A eines Graustufenbildes durchgeführt:

$$f(a_{ij}) = \frac{a_{ij} - \min(A)}{\max(A) - \min(A)} \quad \text{mit } A = (a_{i,j}) \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}^{M \times N}. \quad (3.2)$$

Alle reellen Werte im Intervall $[0;1]$ sind dabei durch Rundung interpretierbar.

Beispiel 11. Schwellenwertverfahren

Bei der Segmentierung werden Teile eines Bildes auf Grund gewisser Kriterien der Intensitätswerte

gruppiert. Daraufhin färbt man diese Pixel gleich ein, um deren Gemeinsamkeit hervorzuheben. Eine einfache Form der Segmentierung ist das Thresholding. Hierbei wird ein Wert, der sogenannte Threshold oder auch Schwellenwert, im Wertebereich ausgewählt, der als Grenze zwischen einer Einfärbung in schwarze und weiße Pixel herangezogen wird (vgl. Definition 9).

In Abbildung 3.20 links wurde der Schwellenwert 156 als Obergrenze festgelegt, sodass alle Werte, die kleiner sind, weiß angezeigt werden. Auf der rechten Seite wurde der Wert als Untergrenze festgelegt, sodass alle größeren Werte weiß gefärbt wurden (vgl. Abbildung 3.2).

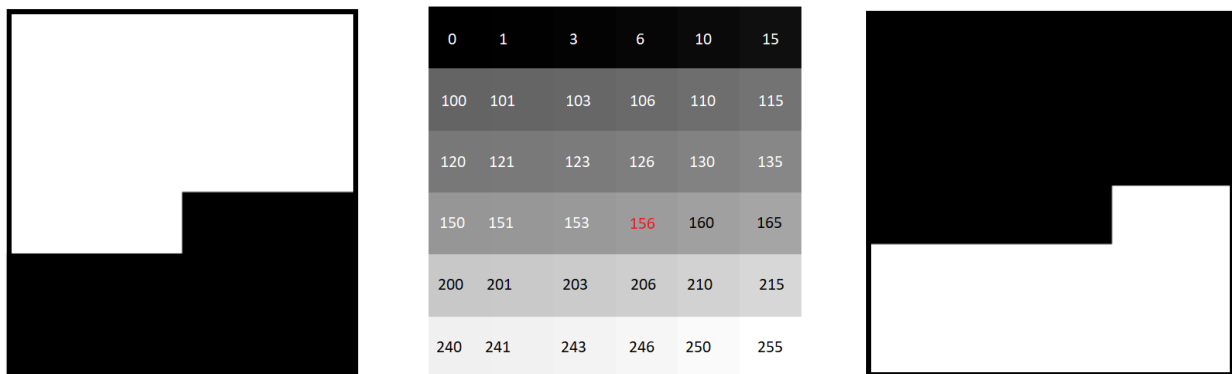


Abbildung 3.20: Das Schwellenwertverfahren

Beispiel 12. Histogramm

Das Schwarz-Weiß-Bild aus Abbildung 3.1 besitzt zwei Intensitätswerte und kann somit durch Histogramme mit zwei Säulen dargestellt werden. In Abbildung 3.21 sind im mittleren Histogramm absolute und im rechten Histogramm relative Häufigkeiten abgebildet.

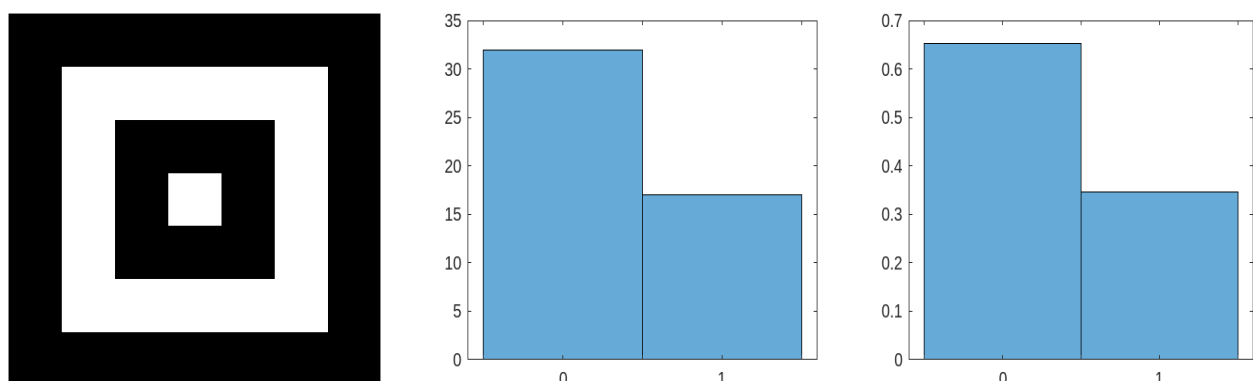


Abbildung 3.21: Histogramme eines Schwarz-Weiß-Bildes

3.3.3 Anwendung von Rangordnungsfiltern in der Schule

Ein Histogramm gibt die Verteilung der Intensitätswerte eines Bildes an. Somit hat man einen Überblick, wie bestimmte Schwellenwerte des Schwellenwertverfahrens die Schwarz-Weiß-Partitionen gewichten. In Abbildung 3.22 sind auf der horizontalen Achse die Grauwerte 0 bis 255 abgebildet. Eine hohe Anzahl dunkler und eine geringe Anzahl sehr heller Bildelemente ist erkennbar.

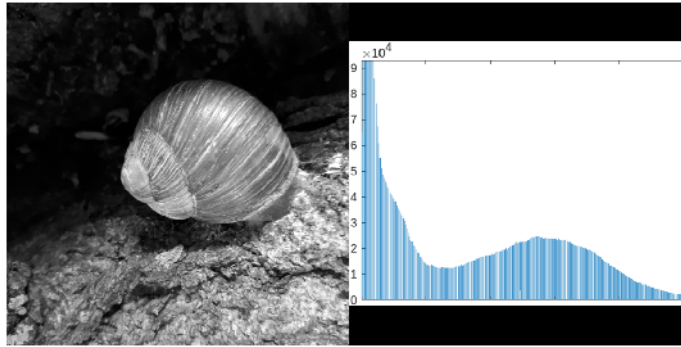


Abbildung 3.22: Histogramm des Beispielbildes

Schwellenwertverfahren In den folgenden Schwarz-Weiß-Bildern wurden die Pixel des Ausschnitts aus Abbildung 3.10 mit der Bezeichnung C auf Grund eines festgelegten Schwellenwertes in zwei Gruppen eingeteilt. Dabei wird das Schwellenwertverfahren aus Beispiel 11 angewendet. Um die Schwellenwerte in Prozenten wählen zu können, bietet es sich an dieser Stelle an, den Farbraum auf das Intervall $[0; 1]$ zu normieren (vgl. Beispiel 10).

Wie in Definition 9 wird eine Grenze U definiert, welche nun zwischen 0 und 1 liegt. Alle Werte der normierten Bildmatrix M , die höher als U sind, werden weiß angezeigt und alle anderen schwarz. Der Befehl lautet „ $M > U$ “. Durch Umkehrung des Größer-Kleiner-Zeichens lässt sich dieser Prozess einfach zu einem Negativ verwandeln (siehe Abbildungen 3.23 und 3.24). Auf diesem Wege lassen sich Muster besser erkennen oder Objekte leichter abzählen. Durch den „montage()“-Befehl können in MATLAB®, wie in den Abbildungen 3.23 und 3.24 dargestellt, mehrere Bilder zu einem Bild zusammengesetzt werden.

Quellcode:

```
M=mat2gray(C);
figure, montage(M > 0.1, M > 0.2, M > 0.3, M > 0.4, M > 0.5, M > 0.6, M > 0.7, M >
0.8, M > 0.9)
figure, montage(M < 0.1, M < 0.2, M < 0.3, M < 0.4, M < 0.5, M < 0.6, M < 0.7, M <
0.8, M < 0.9)
```

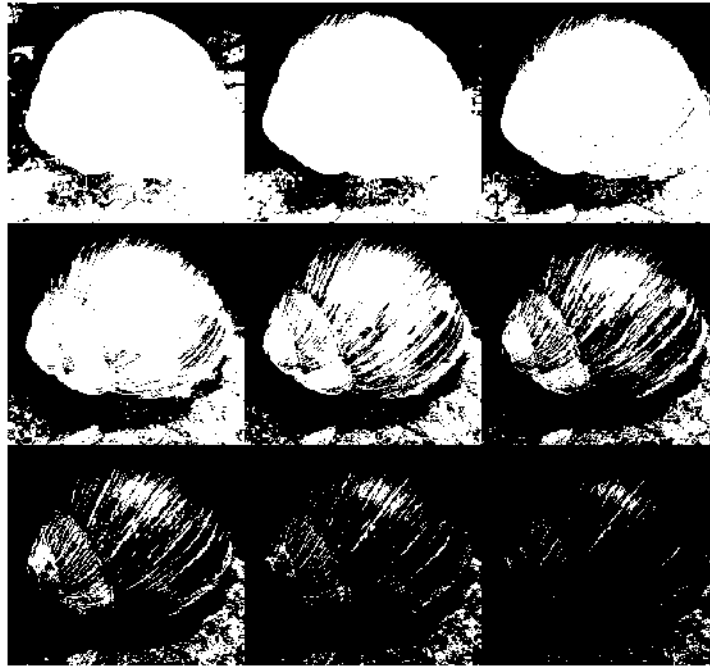


Abbildung 3.23: Schwellenwertverfahren mit steigender Untergrenze

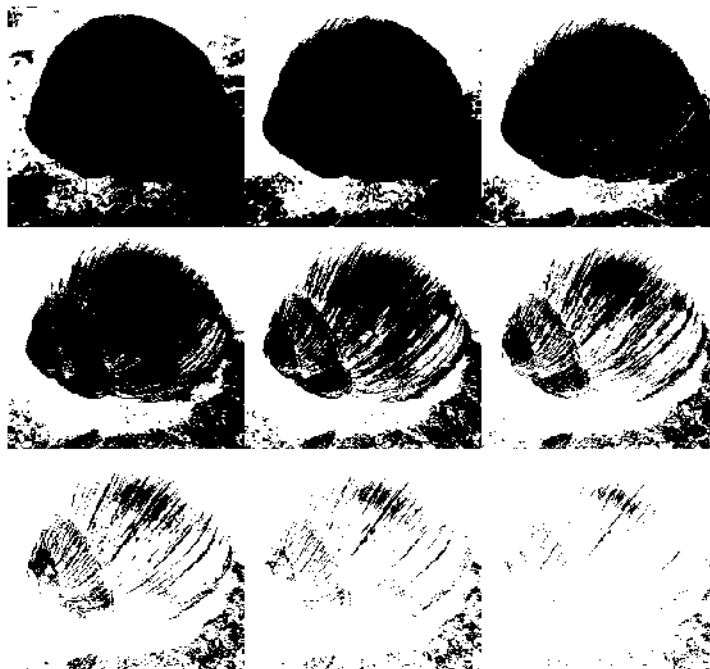


Abbildung 3.24: Schwellenwertverfahren mit steigender Obergrenze

Medianfilter Ein Medianfilter kann dabei helfen unangenehme Störeffekte zu bereinigen, indem über eine bestimmte Pixelumgebung der Median der Intensitätswerte ermittelt und statt dem ursprünglichen Pixelwert eingesetzt wird (vgl. Definition 8). Dadurch wird das Bild etwas unscharf, jedoch nicht zwangsmäßig in einem Ausmaß, dass der Zweck des Bildes nicht mehr erfüllt wird. Je größer die Störung, umso unschärfer wird das Resultat. Sogenannte *Salt and Pepper*-Störungen wie in Abbildung 3.25 lassen sich besonders gut mit diesem Verfahren beseitigen.

In Abbildung 3.25 wurden zuerst über den Befehl „imnoise()“ Störgeräusche erzeugt und dann mit dem Befehl „medfilt2()“ wieder beseitigt. Dabei wird standardmäßig, wenn nicht anders angegeben, eine 3×3 -Umgebung für den Filter gewählt.

Quellcode:

```
E1=imnoise(M, 'salt & pepper' , 0.02);  
E2=medfilt2(E1);
```

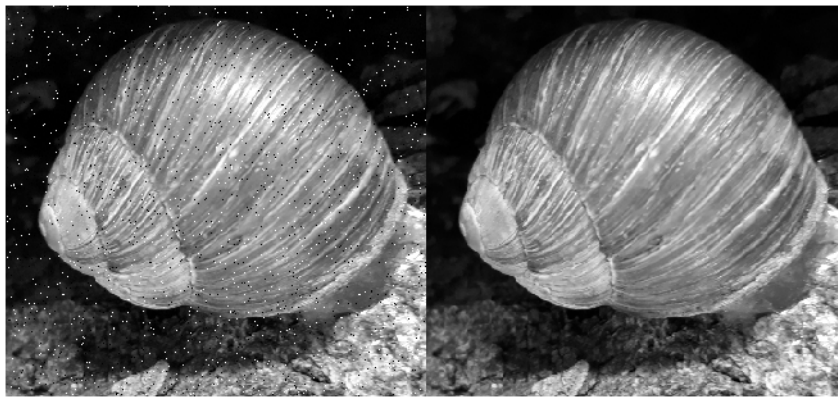


Abbildung 3.25: Behebung von Störungen im Beispielbild durch einen Medianfilter

Maximum- und Minimumfilter Maximum- und Minimumfilter ordnen jedem Pixel im Bild das Maximum bzw. das Minimum der Intensitätswerte einer Nachbarschaft (z.B. 3×3 -Nachbarschaft) zu. Dadurch kann Rauschen verschwinden, die Bilder werden aber auch heller, bzw. dunkler. Ist die Nachbarschaft sehr groß gewählt, wird das Bild sehr pixelig.

Beim Befehl „ordfilt2()“ wird im zweiten Argument die Rangnummer des einzusetzenden Elements angegeben. Dies ist beim Maximumfilter die Anzahl der Pixel in der Nachbarschaft und beim Minimumfilter immer 1. „ones()“ oder „true()“ erzeugt Matrizen mit Einsen, wodurch alle Pixel der Nachbarschaft gleich gewichtet werden. Über diese Option lassen sich auch spezielle Nachbarschaften realisieren. In Abbildung 3.26 können die Effekte verschiedener Nachbarschaftsgrößen für Maximum- und Minimumfilter betrachtet werden.

```
Quellcode: C100=ordfilt2(B, 10000, ones(100));  
D100=ordfilt2(B, 1, true(100));
```

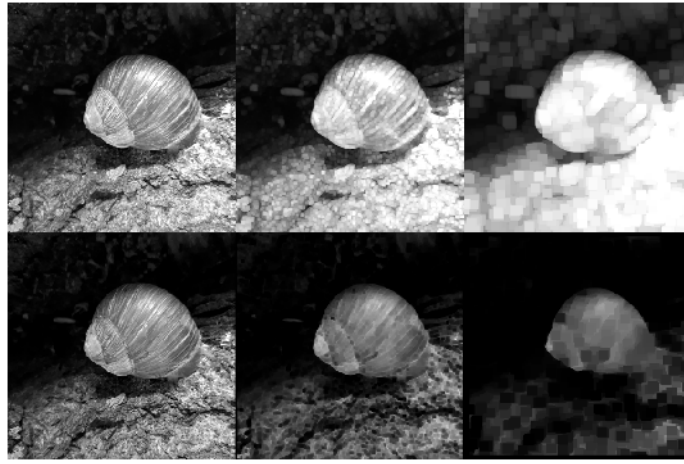


Abbildung 3.26: Maximumfilter (oben) und Minimumfilter (unten) auf dem Beispielbild mit den Nachbarschaftsgrößen 5×5 , 25×25 und 100×100 .

3.4 Filtern durch Faltung

Die Faltung ist eine grundlegende Operation, die in der Signalverarbeitung häufig verwendet wird. Durch eine zweidimensionale, diskrete Faltung wird eine Linearkombination der Intensitätswerte einer Umgebung eines Bildpunktes festgelegt.

3.4.1 Definition der Faltung

Definition 11. *Faltung für diskrete Bildfunktionen*

Sei $v(i, j) \in F = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$ ein diskretes Bild mit $\Omega = \{1, 2, \dots, M\} \times \{1, 2, \dots, N\}$ wie in Definition 3. Für die Funktion $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gelte:

$$f(i, j) = \begin{cases} v(i, j), & (i, j) \in \Omega \\ 0, & (i, j) \notin \Omega \end{cases}$$

Weiters sei die Funktion $h: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Faltungskern genannt, ebenfalls mit nur endlich vielen Funktionswerten ungleich 0 ausgestattet. Dann gilt für die diskrete Faltung $f * h$ an der Stelle $m \in \mathbb{Z}^2$

$$(f * h)(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} f(n) \cdot h(m - n) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^2. \quad (3.3)$$

Im diskreten, zweidimensionalen Raum lässt sich die Faltung mit Hilfe einer Bildmatrix und einer als *Filtermaske* bezeichneten Matrix realisieren. In den folgenden Beispielen werden ungerade quadratische Filtermasken verwendet, sodass deren Zentrum, der zeilen- und spaltenweise mittlere Eintrag, $h(0, 0)$ repräsentiert (vgl. Gleichung (3.4)). Um anzudeuten, dass die folgenden Matrizen und Filtermasken Ausschnitte aus $\mathbb{Z}^2$ repräsentieren, wird dies an deren rechter Klammer angedeutet.

Das Einfügen von Nullen in Definition 11, um den Definitionsbereich $\mathbb{Z}^2$ auszufüllen, wird *Zero-Padding* genannt (vgl. Beispiel 5).

Beispiel 13. Diskrete Faltung mit Hilfe von Matrizen

Um das Prinzip in der Anwendung besser nachvollziehen zu können, lohnt es sich ein Beispiel einer Faltung selbst zu berechnen.

In diesem Beispiel soll die Funktion $f(i, j)$ mit endlich vielen Funktionswerten $f(i, j) = v(i, j)$ ungleich 0 eines 4×4 -Bildes v mit einem 3×3 -Faltungskern h gefaltet werden. Das heißt, $h(i, j)$ hat nur neun Funktionswerte, die ungleich 0 sein können. Der Rest des Definitionsbereiches $\mathbb{Z}^2$ wird durch Zero-Padding mit Nullen aufgefüllt. Die einzelnen Funktionswerte von f und h sind frei erfunden und in den folgenden Matrizen abzulesen. Die Funktionswerte von f , welche von v stammen, werden in eine Matrix A geschrieben:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 3 & 12 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(1,1) & f(1,2) & f(1,3) & f(1,4) \\ f(2,1) & f(2,2) & f(2,3) & f(2,4) \\ f(3,1) & f(3,2) & f(3,3) & f(3,4) \\ f(4,1) & f(4,2) & f(4,3) & f(4,4) \end{bmatrix}.$$

Auch die neun Funktionswerte von h werden in eine Matrix B gegeben:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}^2} = \begin{bmatrix} h(-1,-1) & h(-1,0) & h(-1,1) \\ h(0,-1) & h(0,0) & h(0,1) \\ h(1,-1) & h(1,0) & h(1,1) \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}^2}. \quad (3.4)$$

Jetzt werden die einzelnen Werte der Faltung berechnet (vgl. Gleichung (3.3)):

$$(f * h)(0,0) = \dots + f(1,1) \cdot h((0,0) - (1,1)) + \dots = f(1,1) \cdot h(-1,-1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Alle weiteren Summanden für $n \neq (1,1)$ ergeben 0 wie man im Folgenden an den Beispielen für $n = (0,0)$ und $n = (2,2)$ sehen kann:

$$f(0,0) \cdot h((0,0) - (0,0)) = f(0,0) \cdot h(0,0) = 0 \cdot 4 = 0.$$

Der Wert $f(0,0)$ ist auf Grund des Zero-Paddings 0. Das gleiche tritt bei $h(-2,-2)$ auf:

$$f(2,2) \cdot h((0,0) - (2,2)) = f(2,2) \cdot h(-2,-2) = 5 \cdot 0 = 0.$$

Versucht man beliebige andere Werte für n , so stellt man fest, dass für f oder h der Wert 0 auftritt.

Da für die Werte $m \in \{(i, j) : i \leq -1 \vee j \leq -1\}$ alle Summanden auf Grund des Zero-Paddings 0 ergeben, fahren wir mit den Stellen $m = (0,1)$ und $m = (1,0)$ fort:

$$\begin{aligned} (f * h)(0,1) &= f(1,1) \cdot h((0,1) - (1,1)) + f(1,2) \cdot h((0,1) - (1,2)) \\ &= f(1,1) \cdot h(-1,0) + f(1,2) \cdot h(-1,-1) \\ &= 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f * h)(1,0) &= f(1,1) \cdot h((1,0) - (1,1)) + f(2,1) \cdot h((1,0) - (2,1)) \\
&= f(1,1) \cdot h(0,-1) + f(2,1) \cdot h(-1,-1) \\
&= 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\
&= 6
\end{aligned}$$

Nur jeweils zwei Summanden dieser Rechnungen liegen außerhalb des Zero-Paddings. Insgesamt können auf Grund der Beschaffenheit von h maximal neun Summanden ungleich 0 sein. Dies sehen wir an der Stelle $m = (2,2)$:

$$\begin{aligned}
(f * h)(2,2) &= f(1,1) \cdot h((2,2) - (1,1)) + f(2,1) \cdot h((2,2) - (2,1)) + f(3,1) \cdot h((2,2) - (3,1)) \\
&\quad + f(1,2) \cdot h((2,2) - (1,2)) + f(2,2) \cdot h((2,2) - (2,2)) + f(3,2) \cdot h((2,2) - (3,2)) \\
&\quad + f(1,3) \cdot h((2,2) - (1,3)) + f(2,3) \cdot h((2,2) - (2,3)) + f(3,3) \cdot h((2,2) - (3,3)) \\
&= f(1,1) \cdot h(1,1) + f(2,1) \cdot h(0,1) + f(3,1) \cdot h(-1,1) \\
&\quad + f(1,2) \cdot h(1,0) + f(2,2) \cdot h(0,0) + f(3,2) \cdot h(-1,0) \\
&\quad + f(1,3) \cdot h(1,-1) + f(2,3) \cdot h(0,-1) + f(3,3) \cdot h(-1,-1) \\
&= 1 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\
&= 65
\end{aligned}$$

Die weiteren Stellen werden analog berechnet. Die Ergebnisse stellen wir in einer kleinstmöglichen quadratischen Matrix C dar, die alle Werte umfasst, die ungleich Null sind:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 17 & 25 & 14 & 0 \\ 6 & 27 & 56 & 75 & 52 & 0 \\ 11 & 40 & 65 & 121 & 137 & 42 \\ 8 & 40 & 67 & 59 & 90 & 72 \\ 6 & 21 & 36 & 52 & 36 & 0 \\ 0 & 10 & 17 & 6 & 30 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f * h)(0,0) & \dots & (f * h)(0,5) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f * h)(5,0) & \dots & (f * h)(5,5) \end{bmatrix}.$$

Bei genauerem Betrachten der Rechnungen lässt sich folgende praktische Regelmäßigkeit erkennen: Wird die Matrix B einmal in vertikaler und einmal in horizontaler Richtung gespiegelt und dann sukzessive von oben links über die Bildmatrix A geschoben, wobei alle überlappenden Elemente multipliziert und dann aufsummiert werden, so ergeben sich die Einträge der Matrix C (vgl. [1], [27]):

$$\begin{array}{ccc}
 6 & 5 & 0 \\
 0 & 4 & 3 \\
 0 & 2 & 1
 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc}
 1 & 4 & 9 & 7 \\
 3 & 5 & 3 & 12 \\
 2 & 4 & 2 & 0 \\
 2 & 1 & 0 & 6
 \end{array}$$

Diese zuletzt erwähnte Art der Multiplikation ist das Hadamard-Produkt (vgl. Definition 6). Der Eintrag $(f * h)(2,2)$ entsteht dabei so:

$$\begin{array}{cccc}
 1 \cdot 6 & +4 \cdot 5 & +9 \cdot 0 & +7 \cdot 0 \\
 +3 \cdot 0 & +5 \cdot 4 & +3 \cdot 3 & +12 \cdot 0 \\
 +2 \cdot 0 & +4 \cdot 2 & +2 \cdot 1 & +0 \cdot 0 \\
 +2 \cdot 0 & +1 \cdot 0 & +0 \cdot 0 & +6 \cdot 0
 \end{array}$$

Es bietet sich an, diese diskrete Faltung in Matrixschreibweise in MATLAB[®] durchzuführen und die Ergebnisse zu vergleichen. „conv2()“ steht im folgenden Befehl für die Faltung (convolution) in zwei Dimensionen:

Quellcode:

$A=[1, 4, 9, 7; 3, 5, 3, 12; 2, 4, 2, 0; 2, 1, 0, 6];$

$B=[1, 2, 0; 3, 4, 0; 0, 5, 6];$

$\text{conv2}(A,B)$

3.4.2 Beispiele für Filter, die Faltung verwenden

Die Faltung ist in verschiedenen Bereichen wie beispielsweise der Kantendetektion oder der Glättung von Bildern einsetzbar.

Beispiel 14. Kantendetektion

Zwei häufig verwendete Filter zur Kantendetektion sind der Sobel-Filter und der Prewitt-Filter. Durch die in den Abbildungen 3.27 und 3.28 abgebildeten Matrizen werden Faltungskerne repräsentiert, die das Vorhandensein einer Kante in einem Bild markieren (vgl. [33] S.68). Diese Filter sind also in der Lage Kanten in Graustufenbildern ohne manuelle menschliche Hilfe nachzuzeichnen. Die Faltungskerne P_x und S_x finden dabei vertikale Kanten und P_y und S_y horizontale Kanten.

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}^2} \quad P_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}^2}$$

Abbildung 3.27: Filterkerne des Prewitt-Filters

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}^2} \quad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}_{\mathbb{Z}^2}$$

Abbildung 3.28: Filterkerne des Sobel-Filters

Dabei gewichtet der Sobel-Filter Bildpunkte mehr, die direkt und nicht diagonal am betrachteten Bildpunkt anliegen.

Beispiel 15. Gaußfilter

Mit Gaußfiltern können durch Faltung Glättungen erzeugt werden. Dafür werden die Einträge der Filtermaske aus Stützstellen von Dichtefunktionen der Normalverteilung, auch Gauß-Funktionen genannt, zusammengesetzt.

Für eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ gilt die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.5)$$

Die Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ist durch die Dichtefunktion

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.6)$$

gegeben und wird Standardnormalverteilung genannt.

Für Bildfunktionen wird die Dichtefunktion einer zweidimensionalen Normalverteilung verwendet. Bei der Vorgehensweise wird eine Eigenschaft der e -Funktionen verwendet, die den Aufbau der zweidimensionalen Gauß-Funktionen definiert. Denn für die Multiplikation zweier Gauß-Funktionen mit $\mu = 0$ und gleicher Standardabweichung gilt:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = g(x,y), \quad (3.7)$$

wobei $g(x,y)$ die zweidimensionale Dichtefunktion der Normalverteilung darstellt (vgl. Gleichung 3.5).

Um aus der zweidimensionalen Gauß-Funktion einen Filter zu machen, werden Funktionswerte dieser Funktion als Stützstellen festgelegt, beispielsweise 9 Stützstellen für eine 3×3 – Filtermaske oder 25 Stützstellen für eine 5×5 – Filtermaske. Umso kleiner die Standardabweichung σ gewählt wird, umso spitzer wird der Graph der Funktion und umso weniger stark werden die Werte der Umgebung eines Bildelements mit einbezogen.

Um eine solche ungerade quadratische Gauß-Filtermaske der Größe n zu bestimmen, werden Stützstellen der Gauß-Funktion mit Standardabweichung σ (vgl. Gleichung (3.5)) und Mittelwert $\mu = 0$ aus den ganzen Zahlen verwendet, welche um den Wert 0 zentriert sind:

$$s = \left(f\left(\frac{-(n-1)}{2}\right), \dots, f(0), \dots, f\left(\frac{n-1}{2}\right) \right). \quad (3.8)$$

Durch das Matrixprodukt des transponierten Vektors s^t mit s aus (3.8) wird eine $n \times n$ -Matrix

S erstellt mit den gewünschten Stützstellen der zweidimensionalen Gauß-Funktion mit der Standardabweichung σ (vgl. Gleichung (3.7)).

$$\begin{aligned}
 S = s^t \cdot s &= \begin{pmatrix} f(\frac{-(n-1)}{2}) \\ \vdots \\ f(0) \\ \vdots \\ f(\frac{n-1}{2}) \end{pmatrix} \cdot \left(f(\frac{-(n-1)}{2}), \dots, f(0), \dots, f(\frac{n-1}{2}) \right) \\
 &= \begin{bmatrix} f(\frac{-(n-1)}{2})^2 & \dots & f(\frac{-(n-1)}{2}) \cdot f(\frac{n-1}{2}) \\ & \ddots & \\ \vdots & f(0)^2 & \vdots \\ & \ddots & \\ f(\frac{n-1}{2}) \cdot f(\frac{-(n-1)}{2}) & \dots & f(\frac{n-1}{2})^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Um nun die Filtermaske B zu erstellen, werden alle Einträge der Matrix S durch die Summe all ihrer Einträge geteilt:

$$B = \left(\sum_{i=\frac{-(n-1)}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=\frac{-(n-1)}{2}}^{\frac{n-1}{2}} f(i) \cdot f(j) \right)^{-1} \cdot S. \quad (3.10)$$

Auf diese Weise summieren sich alle Einträge von S zu 1.

3.4.3 Anwendungen diskreter Faltung in der Schule

Zur zweidimensionalen Faltung bietet MATLAB[®] je nach Anwendungsgebiet noch drei Optionen an, die an den Befehl „conv2()“ angehängt werden können. Der Befehl „conv2(A,B, full)“ liefert eine Matrix mit allen Einträgen, die, wie in Definition 11 und Beispiel 13 beschrieben, bestimmt werden. Der Zusatz „valid“ liefert nur jene Einträge, die durch ein Hadamard-Produkt entstanden sind, für das keine künstlichen Nullen durch Zero-Padding erzeugt wurden. Der Zusatz „same“ schneidet genau so viele Einträge am Rand ab, dass eine Matrix von derselben Größe entsteht wie die zuvor gefaltete Matrix.

Kantendetektion Um Kanten in einem Bild hervorzuheben, kann eine Faltung verwendet werden. Dafür wird ein Graustufenbild mit Hilfe zweier 3×3 -Filtermasken gefaltet. Dabei sind die Masken so gestaltet, dass hohe Differenzen unter benachbarten Intensitätswerten, die im Bild auf einem 3×3 -Ausschnitt auftreten, durch hohe Werte hervorgehoben werden (vgl. Beispiel 14). Danach wird ein Schwellenwert definiert, über den der Farbraum binarisiert wird und Kanten dadurch sichtbar werden.

An einem Schwarz-Weiß-Bild lässt sich die Idee des Sobel-Filters durch eine händische Rechnung wie in Beispiel 13 nachvollziehen.

Dafür wird ein binäres Bild mit einer vertikalen Kante erstellt, das mit einer Sobel-Filtermaske für vertikale Kanten gefaltet wird.

$$\begin{array}{ccc}
 -1 & 0 & 1 \\
 -2 & 0 & 2 \\
 -1 & 0 & 1
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Im Ergebnis der Faltung betrachten wir nur die Einträge, die im Inneren liegen, also ohne die Zuhilfenahme von Zero-Padding am Rand entstanden sind. Das Ergebnis der Faltung in Matrixschreibweise sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & 3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Nach der Streichung aller nicht zum Inneren gehörenden Randwerte, entsteht die Bildmatrix, die die Kante anzeigen soll:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Werden nun alle Werte, die von 0 abweichen, weiß angezeigt, so erhält man Abbildung 3.29 (rechts), wo ein weißer Balken die Kante repräsentiert. Im Originalbild (links) sieht man die Kante ebenfalls. Die Bilder wurden zur besseren Sichtbarkeit nachträglich schwarz umrahmt.



Abbildung 3.29: Kantendetektion

Für horizontale Kanten wird das Verfahren analog durchgeführt.

Bei der Faltung können für die Matrixeinträge verschiedene Werte herauskommen, die mehr oder weniger von 0 abweichen. Es entsteht ein Graustufenbild, wie in Abbildung 3.30 zu sehen.

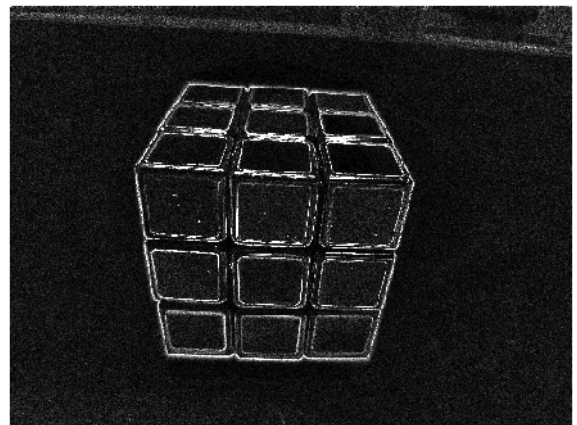


Abbildung 3.30: Anwendung des Sobel-Filters vor dem binarisierenden Schwellenwertverfahren

Häufig verwendete Filtermasken sind die von Prewitt und von Sobel (vgl. Beispiel 14). In Abbildung 3.31 werden beide Verfahren zum Vergleich gegenübergestellt.

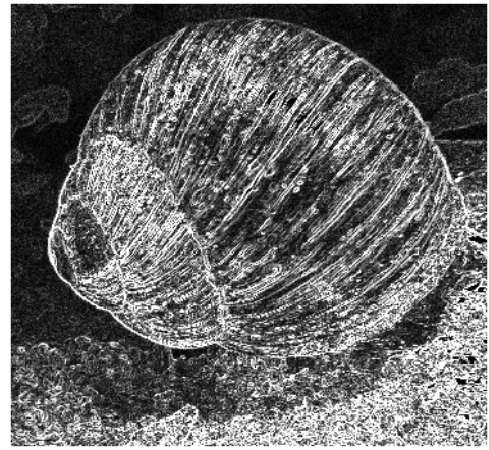
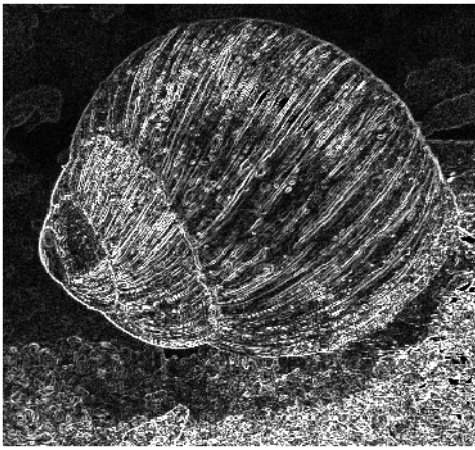


Abbildung 3.31: Prewitt- (links) und Sobel-Filter (rechts)

Um eine bessere Sichtbarkeit zu gewährleisten, wurden die gefilterten Bildmatrizen in Abbildung 3.30 und Abbildung 3.32 mit dem Faktor drei multipliziert. Es ist zu erkennen, dass die höheren Koeffizienten im Sobel-Filter zu leicht höheren Intensitätswerten bei den Kanten führen. Je homogener das Ausgangsbild ist, umso übersichtlicher ist das Resultat.

In der Praxis werden die gefilterten Bilder mit Hilfe eines Schwellenwertes binarisiert. Der Schwellenwert gibt an, ob ein Pixel zu einer Kante gezählt wird oder nicht.

Durch die Variation des Schwellenwertes lässt sich das Ergebnis durch heuristische Herangehensweise verbessern. In Abbildung 3.32 sieht man links das Ergebnis eines Sobel-Filters bei einem Schwellenwert von 25. Rechts wurde ein Schwellenwert von 10 angewendet.

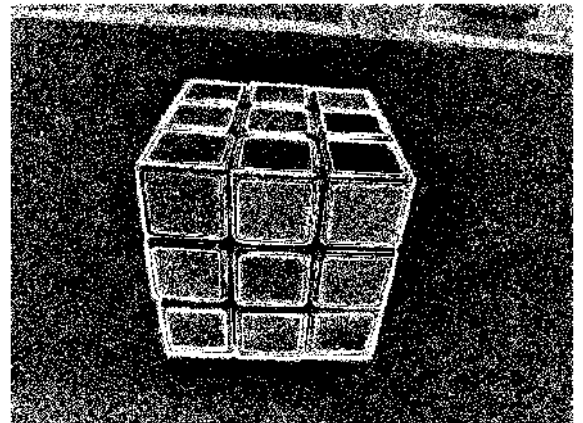
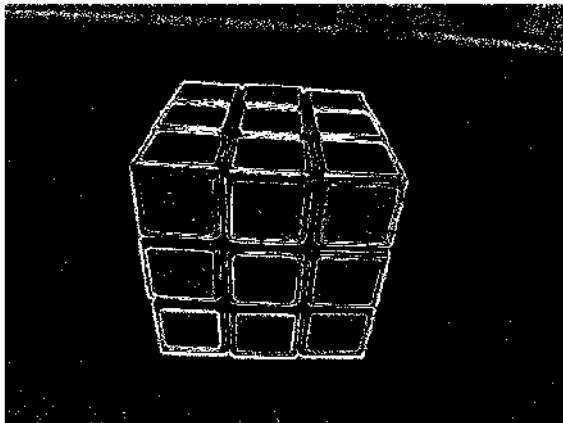


Abbildung 3.32: Variation des Schwellenwertes beim Sobelfilter: 25 (links) und 10 (rechts)

Bei der Wahl des Schwellenwertes sollte man nicht zu weit nach unten gehen, sonst werden, wie in Abbildung 3.32 sichtbar, zu viele Bildelemente mit einbezogen.

Ein kommentiertes Programm, das die Sobel-Methode durch Faltung mit den jeweiligen Filtermasken durchführt, befindet sich im Appendix B.

MATLAB® bietet mit dem Befehl „edge()“ eine eigene Lösung zur Kantendetektion an, bei der verschiedene Methoden, wie auch die von Prewitt und Sobel, zum Einsatz kommen können.

Glättung Die Glättung eines Bildes kann durch die Faltung mit einem Faltungskern erreicht werden, dessen Einträge mit Stützstellen zweidimensionaler Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

berechnet werden (vgl. Beispiel 15). Die im Folgenden verwendeten Gauß'schen Glockenkurven bilden die Dichtefunktionen der Normalverteilung.

Mit dem Befehl „`fspecial( )`“ kann die Filtermaske einer solchen Faltung erstellt werden. Um die Normalverteilung zu verwenden, wird das Argument „`gaussian`“ eingefügt. Das zweite und dritte Argument bestimmen die Filtermaskengröße und die verwendete Standardabweichung der Normalverteilung.

Quellcode:

```
fspecial('gaussian',3,sqrt(0.2));
```

Die Erstellung der Filtermaske für $\sigma = \sqrt{0,2}$ wird im folgenden nach dem in Beispiel 15 ausgeführten Weg vorgerechnet.

Für eine 3×3 -Matrix werden drei Stützstellen der eindimensionalen Gauß-Funktion benötigt (vgl. Gleichung 3.5):

$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.2}} e^{-\frac{(-1)^2}{2 \cdot \sqrt{0.2^2}}}, \quad f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.2}}, \quad f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.2}} e^{-\frac{(1)^2}{2 \cdot \sqrt{0.2^2}}}. \quad (3.11)$$

Diese werden in eine 1×3 -Matrix s geschrieben. Wie in Gleichung (3.9) wird die transponierte Matrix s^t mit s multipliziert.

Das Ergebnis lautet:

$$\begin{bmatrix} f(-1)^2 & f(-1) \cdot f(0) & f(-1) \cdot f(1) \\ f(0) \cdot f(-1) & f(0)^2 & f(0) \cdot f(1) \\ f(1) \cdot f(-1) & f(1) \cdot f(0) & f(1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0054 & 0.0653 & 0.0054 \\ 0.0653 & 0.7958 & 0.0653 \\ 0.0054 & 0.0653 & 0.0054 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Jetzt wird die Matrix aus Gleichung (3.12) normiert, indem durch die Summe aller Einträge $z = 1,0785$ dividiert wird:

$$\begin{bmatrix} 0.0054 & 0.0653 & 0.0054 \\ 0.0653 & 0.7958 & 0.0653 \\ 0.0054 & 0.0653 & 0.0054 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1,0785} = \begin{bmatrix} 0,005 & 0,0606 & 0,005 \\ 0,0606 & 0,7378 & 0,0606 \\ 0,005 & 0,0606 & 0,005 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

In Abbildung 3.33 können die verwendeten Stützstellen als Funktionswerte der zweidimensionalen Gauß-Funktion mit Standardabweichung $\sigma = \sqrt{0.2}$ betrachtet werden. Die z-Koordinaten der Punkte P_1 bis P_9 entsprechen dabei den Einträgen der Matrix aus Gleichung 3.12.

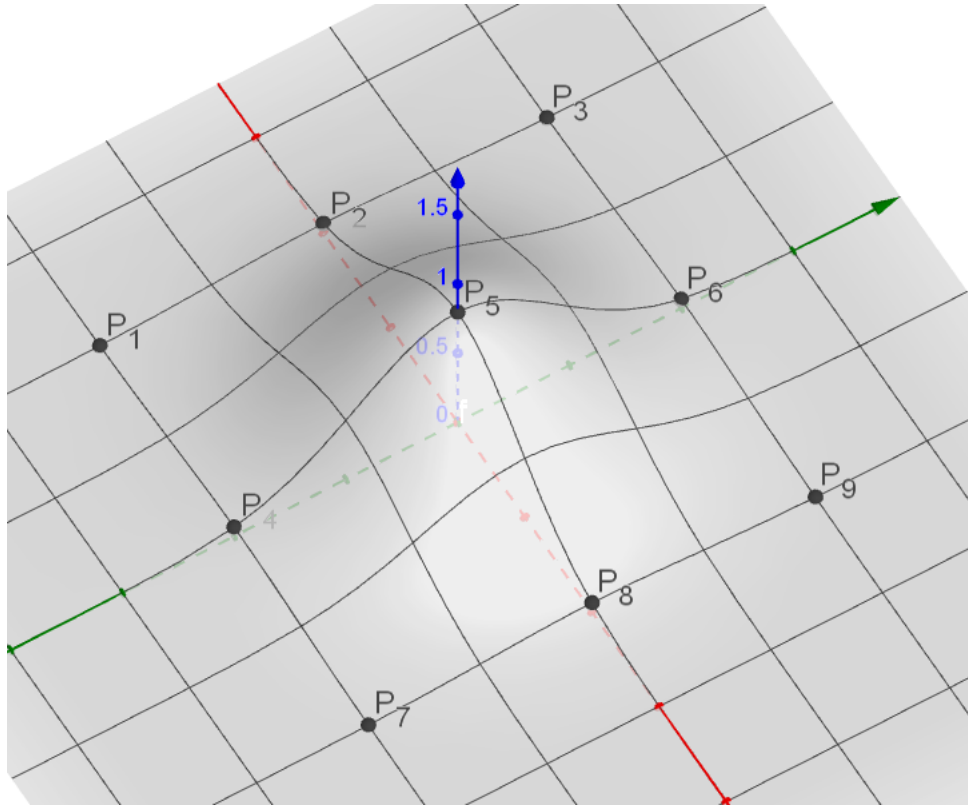


Abbildung 3.33: Stützstellen eines Gauß-Filters von der Größe 3×3 und einer Standardabweichung von $\sigma = \sqrt{0.2}$

Mit dem folgenden Quellcode lässt sich durch MATLAB[®] eine Probe für das obige Beispiel durchführen:

Quellcode:

```
sigma=sqrt(0.2)
v=[ 1/(sigma*sqrt(2*pi))*exp(-1/(2*sigma^2));
1/(sigma*sqrt(2*pi))*1;
1/(sigma*sqrt(2*pi))*exp(-1/(2*sigma^2))];
V=v*v'
s=sum(sum(V))
V/s
```

Der Einfachheit halber empfiehlt es sich händisch mit der Berechnung einer 3×3 -Filtermaske der Standardnormalverteilung zu beginnen (siehe Gleichung 3.6).

Im Folgenden wird der Befehl „imgaussfilt()“ verwendet, welcher das Bild und die Standardabweichung als Argumente hat. Ein Vorteil dieses Befehls ist, dass die Größe n der angewendeten $n \times n$ -Filtermaske hierbei von der Standardabweichung abhängt. Sie wird durch die Formel

$$n = 2 \cdot \lceil 2\sigma \rceil + 1$$

berechnet. Dabei wird 2σ durch $\lceil 2\sigma \rceil$ auf die nächstgrößere natürliche Zahl gerundet. Während der Effekt bei wenigen Pixeln mit geringer Standardabweichung groß ist, sieht man bei einem

größeren Bild kaum einen Unterschied. Um bei Bildern mit mehr Pixeln einen Effekt zu erzielen, muss auch die Standardabweichung erhöht werden. Wählt man beispielsweise die Standardabweichung $\sigma = 1$, so wird eine Filtermaske der Größe 5×5 erstellt, da $n = 2 \cdot \lceil 2 \cdot 1 \rceil + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Bei $\sigma = 100$ hat die Matrix die Größe 401×401 und zeichnet dadurch ziemlich weich. Die Wahl der Standardabweichung muss auf die Größe des Bildes angepasst werden. Daher kann die gleiche Wahl einer Standardabweichung, abhängig von der Pixelanzahl, zu unterschiedlich starker Weichzeichnung führen.

In Abbildung 3.34 wurde mit Standardabweichungen von 1, 5, 10, 50 und 100 geglättet. Oben links befindet sich der originale Ausschnitt des Schneckenhauses.

Quellcode:

```
GA1=imgaussfilt(M, 1);
GA5=imgaussfilt(M, 5);
GA10=imgaussfilt(M, 10);
GA50=imgaussfilt(M, 50);
GA100=imgaussfilt(M, 100);
figure, montage(M, GA1, GA5, GA10, GA50, GA100)
```

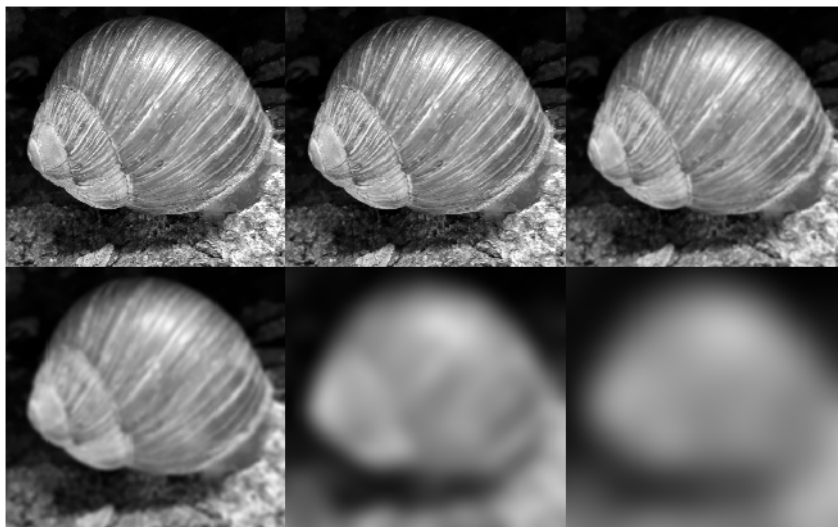


Abbildung 3.34: von links nach rechts: Original, Anwendung von Gaußfiltern mit den Standardabweichungen 1, 5, 10, 50 und 100

4 Auswertung der Anwendungen in der Schule

Auf Basis der im vorigen Kapitel erarbeiteten Gegenstände wurden mehrere Unterrichtseinheiten zum Thema „Mathematik und Bildbearbeitung“ durchgeführt.

Im Juni 2021 wurde eine Unterrichtssequenz, welche aus sieben Unterrichtsstunden zu je 50 Minuten bestand, mit einer 7. Klasse (11.Schulstufe) des Gymnasiums und Realgymnasiums des zweiten Bezirks in Wien (GRG2) durchgeführt. Im Jänner 2023 wurde diese Sequenz mit einer weiteren 7.Klasse in der gleichen Schule wiederholt.

Einführungsstunden, in denen Schülerinnen und Schüler mit Zettel und Stift durch binäre Matrizen Schwarz-Weiß-Bilder erstellten und in MATLAB® digitalisierten, wurden 2023 für etwa 100 Schülerinnen und Schüler des GRG2 aus den Schulstufen 8, 10, 11 und 12 abgehalten.

Für die Anwendung in MATLAB® wurden in den siebenstündigen Unterrichtssequenzen für die 7. Klassen Probeaccounts abgeschlossen, sodass alle Schülerinnen und Schüler an den von der Schule bereitgestellten Laptops und PCs partizipieren konnten. Theoretische Hintergründe wurden dabei von der Lehrkraft an der Tafel erörtert und Beispiele mit Hilfe eines Beamers an die Wand projiziert. Einzelne Beispiele zu Matrizen und Operationen auf Matrizen wurden von Schülerinnen und Schülern in vorbereiteten Referaten präsentiert. Waren die theoretischen Grundlagen klar und einige Beispiele gezeigt, konnten die Schülerinnen und Schüler anhand vorgefertigter Codeblöcke in MATLAB® ihre eigenen Bilder bearbeiten. Bei diesem letzten Schritt wurden auch immer die einzelnen Codebausteine und ihre Bedeutung thematisiert.

Nicht nur für die Schülerinnen und Schüler, sondern auch für die Lehrkraft war das Verwenden eigener Bilder besonders spannend. Je nach Art des verwendeten digitalen Bildes, bargen die einzelnen Bearbeitungsschritte kreatives Potential und unterschiedliche Ergebnisse. Unterrichtsplanungsmatrizen sowie der dafür notwendige MATLAB®-Code sind in den Appendizes A und B zu finden.

4.1 Ausgewählte Lernprodukte

In den verschiedenen Unterrichtssequenzen haben die Schülerinnen und Schüler bemerkenswerte Bearbeitungen hergestellt. Eine Auswahl dieser Lernergebnisse wird an dieser Stelle mit dem Einverständnis der beteiligten Schülerinnen und Schüler abgebildet (siehe Appendix C).

Die Erstellung von Schwarz-Weiß-Bildern wurde von Schülerinnen und Schülern der 8. bis 12. Schulstufe durchgeführt. Hierbei konnten die Schülerinnen und Schüler mit Stift und kariertem Zettel kreativ werden. Anschließend wurden die Matrizen vor der Klasse in MATLAB® eingegeben und an die Wand projiziert, siehe Abbildung 4.1. Während die Teilnehmenden sich überlegten,

wie sie ihr Bild gestalten sollten, wurde die Grundvorstellung eines digitalen Bildes verinnerlicht.

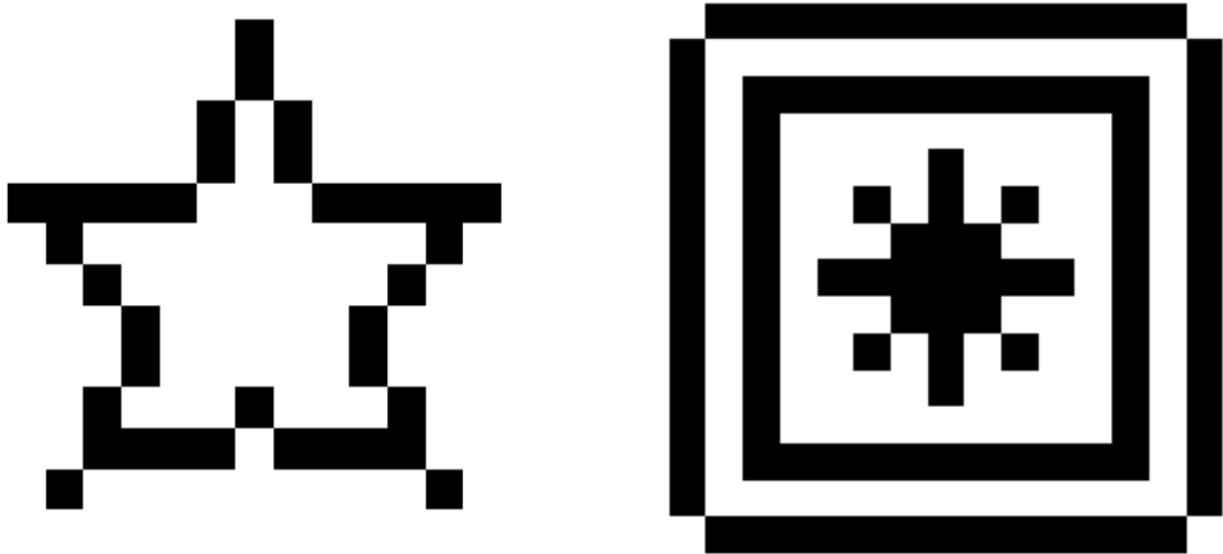


Abbildung 4.1: Links: Stern von Lilli-Panna Czeriaki-Kiss aus der 6.Klasse Rechts: Eingehramte Schneeflocke von Vanesa Babesko aus der 6.Klasse

Das Ausblenden verschiedener Farbkanäle bei RGB-Bildern liefert andere, farbenfrohe Blickwinkel auf das Bild. Die Schülerinnen und Schüler lernten dabei spielerisch, dass RGB-Bilder aus den drei Farbkanälen für Rot, Grün und Blau zusammengesetzt werden, siehe Abbildung 4.2. Auch die Kombination von zwei Farben zu den Sekundärfarben wurde dabei, wie in Abbildung 4.3 ersichtlich, angewendet.



Abbildung 4.2: Anzeigen der Primärfarben Blau, Grün und Rot, Maria Schindegger, 7.Klasse



Abbildung 4.3: Anzeigen der Sekundärfarben Cyan, Magenta und Gelb, Maria Schindegger, 7.Klasse

Beim Ausschneiden von einzelnen, rechteckigen Bildelementen können Dinge sichtbar gemacht werden, die im Gesamtbild untergehen. Die Schülerinnen und Schüler wurden an dieser Stelle detektivisch aktiv und suchten nach versteckten Informationen in den Bildern. In Abbildung 4.4 zeigt uns die Bearbeitung von Maximilian Schwarz, dass zusätzlich durch Veränderungen von Helligkeit und Kontrast die Lesbarkeit von Schrift verbessert werden kann.



Abbildung 4.4: Ausschneiden und anschließende Aufhellung eines Bildteils, Bild und Bearbeitung von Maximilian Schwarz, 7.Klasse

Sowohl das Umwandeln von RGB-Bildern in Graustufenbilder, als auch von Graustufenbildern in Schwarz-Weiß-Bilder wurde von den Schülerinnen und Schülern umgesetzt. In der Bearbeitung von Alessio Rovny in Abbildung 4.5 ist neben dem Original der Ausschnitt einer Katze als Schwarz-Weiß-Bild zu sehen.



Abbildung 4.5: Bildteile ausschneiden und schwärzen, Erstellen eines Schwarz-Weiß- und eines Grauwertbildes, Verwendung von Edge-Filtern, Bild und Bearbeitung von Alessio Rovny, 7.Klasse

Durch das Ersetzen eines bestimmten, rechteckigen Bereiches in der Bildmatrix durch Nullen wurden die Augen der Katze geschwärzt. Mit einem Kantenfilter wurden Ränder in dem Bild hervorgehoben.

Die Anwendung eines Sobel-Filters zur Kantendetektion ist in der Bearbeitung von Franka Fayadh in Abbildung 4.6 zu sehen.



Abbildung 4.6: Anwenden eines Sobel-Filters, Bild und Bearbeitung von Franka Fayadh, 7.Klasse

Das Entfernen von Rauschen aus Bildern kann mit einem Medianfilter erreicht werden. In der Bearbeitung von Ida Stiepanofsky in Abbildung 4.7 wurde ein Graustufenbild erzeugt, von welchem sie dann einen Bildteil ausschneidet und künstlich mit Rauschen versetzte. Danach wurde das Rauschen mit einem passenden Medianfilter wieder entfernt.



Abbildung 4.7: Ausschneiden und Vergrößern von Bildelementen, Beseitigung von Störelementen, Bild und Bearbeitung von Ida Stiepanofsky, 7.Klasse

Die Größe der Filtermaske steuert dabei die Menge der miteinbezogenen Pixel. Je mehr Störungen jedoch im Bild vorkommen und je großflächiger der Filter angewendet wird, umso schwammiger wird das resultierende Bild, wie man in der Bearbeitung von Alessio Rovny in Abbildung 4.8 sehen kann.

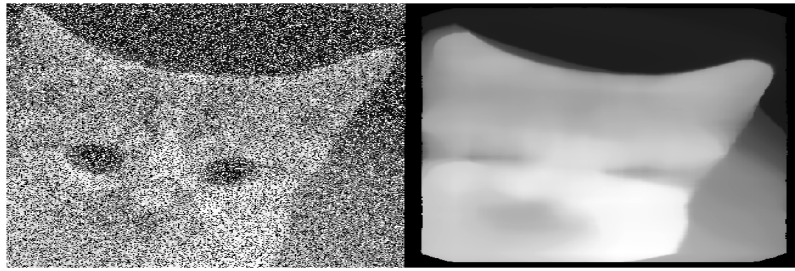


Abbildung 4.8: Beseitigung von Störelementen, Bild und Bearbeitung von Alessio Rovny, 7.Klasse

Die Anwendung der vorgestellten Bildoperationen an verschiedenen von den Schülerinnen und Schülern ausgewählten Bildern bringt automatisch immer neue Ideen und Erkenntnisse mit sich. Sowohl für die Schülerinnen und Schüler als auch für die Lehrkraft führt die individuelle Einsetzbarkeit der in der Unterrichtssequenz verwendeten Werkzeuge zu einem Überraschungseffekt.

4.2 Umgang mit privatem und fremdem Bildmaterial

Die Bearbeitung von Bildern im Rahmen des Schulunterrichts bietet einen geeigneten Rahmen, um einerseits die Verwendung von privatem Bildmaterial in sozialen Medien, aber auch die Nutzungsrechte fremder Bilder zu thematisieren.

Durch Workshops von Anbietern wie „Saferinternet.at“ wird in den österreichischen Schulen in Bezug auf das Teilen privater Bilder in sozialen Medien schon eine gewisse Aufklärungsarbeit geleistet (vgl. [34]). Erfahrungsgemäß können diese Workshops jedoch nicht früh genug und auch nicht oft genug stattfinden, da viele Kinder in der 1.Klasse des Gymnasiums schon ein Smartphone besitzen. Darum ist es wichtig, insbesondere anlassbezogen, die Rolle von Bildern in der sozialen Onlineinteraktion zu thematisieren und zu reflektieren.

Durch das Bearbeiten der Bilder am Computer, beispielsweise beim Ausschneiden und Hervorheben einzelner Bildteile, kann noch einmal verdeutlicht werden, welche Informationen auch aus dem Hintergrund eines Bildes abgelesen werden können. Oft verrät ein Foto mehr über eine Person, als bei der Veröffentlichung intendiert wurde. Der Übergang zwischen privatem und beruflichem oder, wie in diesem Fall, privatem und schulischem Umfeld kann dabei eine spannende Diskussionsgrundlage für Gespräche mit den Schülerinnen und Schülern sein.

Für die Nutzung von fremden Bildern gibt es verschiedene Kriterien, nach denen Bilder von anderen Personen genutzt werden können. Grundlage dafür bildet das Urheberrecht (vgl. [35]). Laut §3(2) unterliegen

„... durch ein photographisches oder durch ein der Photographie ähnliches Verfahren hergestellte Werke ...“ ([35], S.487)

dem Urheberrecht. Um die Photographie, die durch eine andere Person hergestellt wurde, verwenden und der Öffentlichkeit zugänglich machen zu dürfen, braucht es nach §16(1) des Urheberrechts deren Einwilligung. Einige Bilder, die im Internet zu finden sind, wurden durch die Urheberinnen und Urheber schon für die Allgemeinheit zur Verwendung unter gewissen Umständen freigegeben.

Beispielsweise können zu diesem Zeitpunkt mit der Google-Bildsuche Bilder nach Kategorien von Nutzungsrechten gefiltert werden, siehe [36].

Die in dieser Arbeit dargestellten Bilder wurden mir mit dem schriftlichen Einverständnis der genannten Schülerinnen und Schüler zur Veröffentlichung in dieser Arbeit zur Verfügung gestellt (vgl. Appendix C).

4.3 Befragungen

Eine Unterrichtsvorbereitung für eine 7.Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS) wurde in den Jahren 2021 und 2023 im Gymnasium und Realgymnasium des 2.Bezirks (GRG2) angewendet. Die Schülerinnen und Schüler haben vor und nach ihren Unterrichtssequenzen mit MATLAB® Fragebögen bekommen. Diese Fragebögen zielten zum einen darauf ab, Informationen zu den Vorkenntnissen und den Erfahrungen mit Bildbearbeitung zu erhalten. Zum anderen wurde erhoben, ob das Verständnis zu digitalen Bildern gestiegen ist und sich das Verhalten oder die Einstellung in Bezug auf die Bearbeitung von Bildern dadurch verändert hat.

Im Fragebogen von 2023 wurden dabei einige Fragen angepasst, um zielgerichteter auf das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zuzugreifen. Hauptsächlich wurde der Begriff der „Bildverarbeitung“ durch den passenderen Begriff der „Bildbearbeitung“ ersetzt und weniger Fokus auf die in der Unterrichtssequenz gewählte Software gelegt. Zusätzlich wurden Fragen ergänzt, die auf das Nutzungsverhalten an PCs und Smartphones gerichtet sind und die Verwertung von Bildern auf Sozialen Netzwerken ansprechen. Zwischen den 7.Klassen, die 2021 und 2023 an der inhaltsgleichen Unterrichtssequenz teilgenommen haben, wird in Kapitel 4.3.2 ein Vergleich gezogen.

Zusätzlich wurde für Kapitel 4.3.3 im Jahr 2023 mit 94 Schülerinnen und Schülern der 8. bis 12. Schulstufe eine Erhebung über Vorwissen zur Bildbearbeitung und deren mathematische Grundlagen, sowie über die Verwendung von digitalen Bildern in sozialen Netzwerken durchgeführt, um einen jahrgangsübergreifenden und größeren Überblick über die Themen zu gewinnen.

4.3.1 Evaluation und Befragung einer 7. Klasse der AHS im Jahr 2021

An der siebenstündigen Unterrichtssequenz haben 17 Jugendliche einer 7.Klasse (11.Schulstufe) im gymnasialen Zweig des GRG2 teilgenommen. Davon haben 10 ein weibliches, 6 ein männliches und 1 Person ein anderes Geschlecht angegeben. Der Workshop fand im Juni des Schuljahres 2020/2021 in Präsenz statt. Dieses Schuljahr war durch die Corona-Pandemie vielfach durch Homeschooling und vereinfachte Aufstiegsmöglichkeiten geprägt.

Die ersten beiden Fragen 2021 zielten auf das Vorwissen zu den mathematischen Hintergründen und die Entstehung von digitalen Bildern ab:

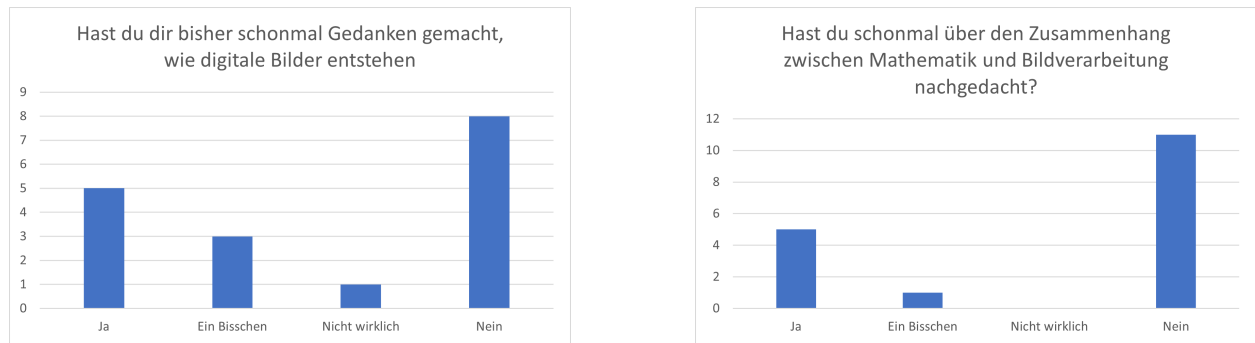


Abbildung 4.9: Vorwissen zu Bildverarbeitung in einer 7. Klasse 2021

Während, wie in Abbildung 4.9 ersichtlich, fünf Jugendliche auf die Frage, ob sie sich schon einmal Gedanken gemacht haben, wie digitale Bilder entstehen, mit „Ja“ antworteten, verneinten acht Befragte. Drei gaben an sich zumindest ein bisschen Gedanken gemacht zu haben. Bei der Frage, ob sie schon einmal über den Zusammenhang zwischen Mathematik und Bildverarbeitung nachgedacht haben, verneinten sogar elf Befragte. Es lässt sich also sagen, dass die Hälfte der Befragten sich noch nie Gedanken darüber gemacht hat, wie digitale Bilder eigentlich entstehen. Etwa zwei Drittel haben noch nicht darüber nachgedacht, dass die Verarbeitung von Bilddaten etwas mit Mathematik zu tun haben könnte. Auf der anderen Seite hat sich die andere Hälfte zumindest schon einmal ein Bisschen mit der Entstehung digitaler Bilder auseinander gesetzt.

Die folgenden beiden Fragen in Abbildung 4.10 wurden zu Bildbearbeitungsprogrammen gestellt:

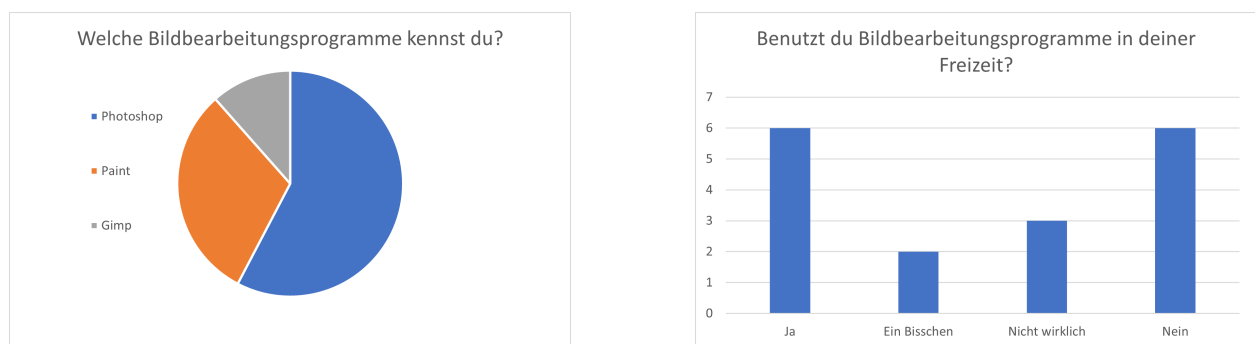


Abbildung 4.10: Nutzungsverhalten in einer 7. Klasse 2021

Bei den bekannten Bildbearbeitungsprogrammen wurde eine Vielzahl an Software genannt. Am häufigsten, insgesamt vierzehn mal, ist der Name *Photoshop* gefallen. Mit acht Nennungen folgte *Paint* und mit drei Erwähnungen *GIMP*. Weitere genannte Programme waren *Picsart*, *Sketchup*, *Picsbay*, *Picasa*, *Adobe Illustrator*, *Affinity Photo*, *Canvall*, *Bazaart*, *Vegas Pro*, *Krita*, und *Uritz*. Dass zumindest die Hälfte der Beteiligten in der Freizeit Bildbearbeitungsprogramme benutzt, hebt die Relevanz des Themas hervor. Die Veränderung von Bilddaten findet inmitten der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler statt.

Wissend, dass alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer regelmäßig ein Smartphone benutzen, zielten die letzten drei Fragen in Abbildung 4.11 auf die Bildbearbeitung am Handy ab:

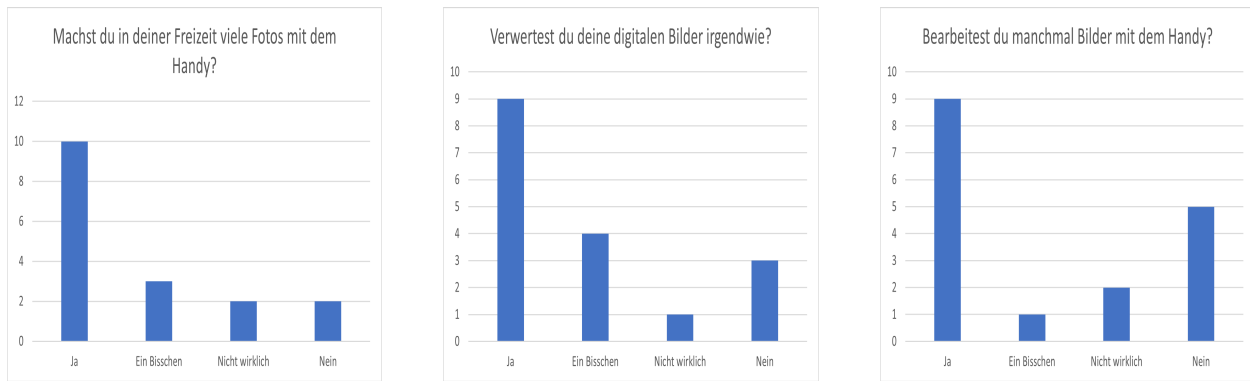


Abbildung 4.11: Handynutzung in einer 7. Klasse 2021

Mehr als die Hälfte der Befragten behaupteten, viele Fotos mit dem Handy zu machen. Ebenso mehr als die Hälfte gaben an, die gemachten Handyfotos weiter zu verwenden. Es ist also nicht so, dass bei den meisten Befragten viele Bilder geschossen werden, die dann ausschließlich auf dem Speichermedium liegen ohne wieder genutzt zu werden. Viel mehr werden die Bilder als Interessensobjekte weiter benutzt.

Auch knapp mehr als die Hälfte gab an, Bilder mit dem Handy zu bearbeiten. Das heißt, die Bearbeitung der Bilder soll schnell und auf dem selben Gerät stattfinden, mit dem sie aufgenommen werden.

Nach dem Workshop wurde wieder ein Fragebogen ausgeteilt, der von denselben Teilnehmenden beantwortet wurde. Das Hauptziel war, zu evaluieren, ob der Workshop nachvollziehbar und verständlich war, sowie, ob der Zusammenhang zwischen digitalen Bildern und Matrizen klar geworden ist. Weiters ist interessant, ob ein Programm wie MATLAB[®] für Schülerinnen und Schüler attraktiv oder eher überfordernd wirkt, bzw. ob sie in der Nutzung des Programms irgendeinen Vorteil sehen, sodass sie es auch außerhalb der Schule benutzen würden. Die erste Frage lautete:

Wie war deine Erfahrung mit MATLAB?

Alle Beteiligten meldeten zurück, dass sie mit der Unterrichtssequenz eine positive Erfahrung gemacht haben. Dies lag laut den Antworten insbesondere an der Bearbeitung der selbst mitgebrachten Bilder. Durch das Ausschneiden und Vergrößern einzelner Bildteile kamen lustige Informationen zum Vorschein, wie beispielsweise die Markenplakette auf einer Trinkflasche. Diese Vorkommnisse trugen zur allgemeinen Erheiterung bei, weckten aber auch die Erinnerung daran, dass der Umgang mit privaten Fotos verantwortungsvoll sein sollte. Denn Fotos können mehr über die abgebildeten Personen verraten, als es im ersten Augenblick intendiert war.

Fast alle Befragten nutzten das Wort „spannend“ in der Beschreibung ihrer Erfahrung. Eine Person fand es explizit „nicht spannend“, aber die Ergebnisse „witzig“. Weiter wurde vereinzelt genannt, dass die Erfahrung „informativ“ war. Die positive Annahme der Unterrichtssequenz hat zur Folge gehabt, dass alle Beteiligten erfolgreich Bilder mit mathematischen Methoden bearbeitet haben. Allein das führte dazu, dass die Jugendlichen etwas über die Umgangsweise mit dem Programm und die Zusammenhänge zwischen Mathematik, Algorithmus und digitalem Bild gelernt haben.

Die Fragen in Abbildung 4.12 bezogen sich auf die technische Umsetzbarkeit und den Lernerfolg der Jugendlichen.

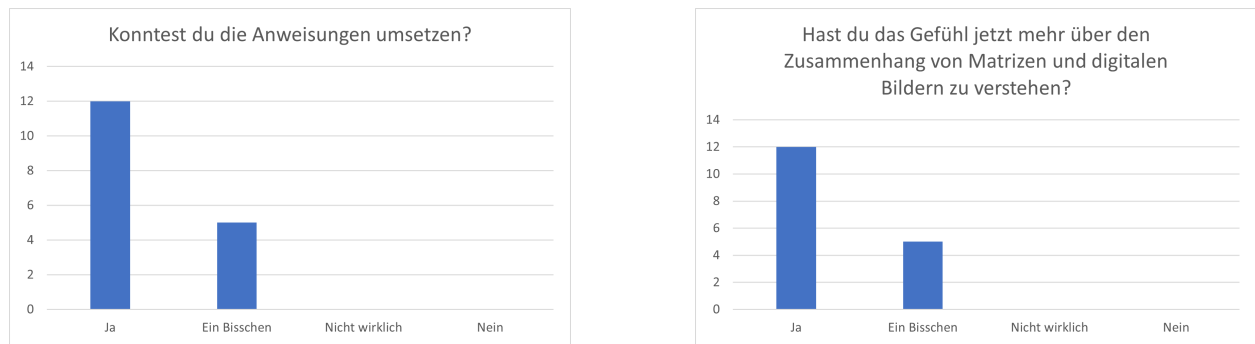


Abbildung 4.12: Feedback zu den Unterrichtseinheiten in einer 7. Klasse 2021

Zwölf der siebzehn Teilnehmenden kamen mit den Anweisungen gut zurecht und die restlichen fünf mit den meisten Anweisungen. Dieses Ergebnis war positiv überraschend, auch, wenn es auf Grund der vorgeschriebenen Codebausteine schon während der Unterrichtssequenz merkbar gut lief. Auch die Anleitung zur Erstellung eines MATLAB[®]-Probeaccounts konnte gemeinsam Schritt für Schritt befolgt werden, was zur einfachen Umsetzbarkeit beigetragen hat. Das selbe Antwortverhältnis ergab sich bei der Frage zum gesteigerten Verständnis des Zusammenhangs zwischen Matrizen und digitalen Bildern. Zwölf hatten das Gefühl hinterher „mehr“ über den Zusammenhang zwischen Matrizen und digitalen Bildern zu verstehen. Fünf hatten das Gefühl nun „eher mehr“ zu verstehen.

Das Konzept des digitalen Bildes kann stark vereinfacht unterrichtet werden, sodass es leicht verstanden wird. Dieses zu vermitteln kann man als einen „minimalen Output“ einer solchen Unterrichtssequenz ansehen (vgl. [5]). Diese Fragen aus Abbildung 4.13 sollten erheben, ob durch den Workshop die Häufigkeit der Bildbearbeitung beeinflusst wird.

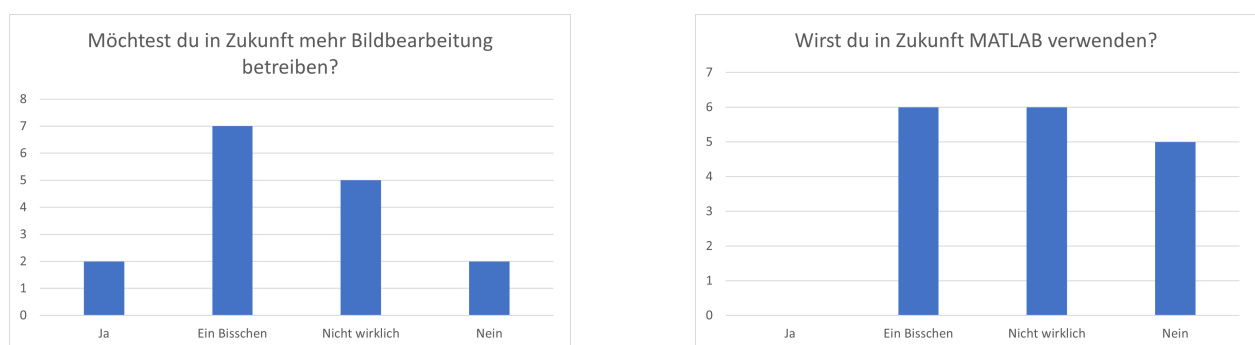


Abbildung 4.13: Änderung des Bildbearbeitungsverhaltens in einer 7. Klasse 2021

Nur zwei beantworteten die Frage, ob sie in Zukunft mehr Bildbearbeitung betrieben möchten, mit einem klaren „Ja“, sieben unentschlossen in positiver Richtung, fünf unentschlossen in negativer Richtung und zwei ganz klar mit „Nein“. Daraus lässt sich ablesen, dass trotz des Interesses an den Inhalten eine bewusste Übertragbarkeit auf das eigene Nutzungsverhalten begrenzt ist.

Die Antworten auf die Frage, ob MATLAB[®] in Zukunft verwendet wird, sind hauptsächlich negativ ausgefallen. Hier antworteten sechs mit „Ein Bisschen“ und der Rest mit „Nicht wirklich“.

oder „Nein“. Niemand beantwortete diese Frage mit „Ja“. MATLAB® ist ein hervorragendes Programm um mit Matrizen zu arbeiten. Das Programmieren wird in der AHS wenig gelehrt und sieht daher optisch vergleichsweise kompliziert aus. Viele Endanwenderprogramme der Bildbearbeitung haben mittlerweile eine benutzerfreundliche Oberfläche, bei der Buttons geklickt werden können und weniger programmiert werden muss. Daher ist der Anreiz, zur Bildbearbeitung auf MATLAB® umzusteigen, eher gering.

4.3.2 Evaluation und Befragung einer 7. Klasse der AHS im Jahr 2023

An der siebenstündigen Unterrichtssequenz der 7.Klasse im Jänner 2023 haben 14 Schülerinnen und 8 Schüler, also insgesamt 22 Personen in Präsenz teilgenommen. Alle Schülerinnen und Schüler haben vor der ersten und nach der letzten Einheit einen Erhebungsfragebogen bekommen. Krankheitsbedingt konnten nur 18 der 22 Teilnehmenden an der gesamten Unterrichtssequenz und beiden Fragebögen teilnehmen. Die ersten beiden Fragen in Abbildung 4.14 beleuchteten das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu digitalen Bildern und Bildbearbeitung.

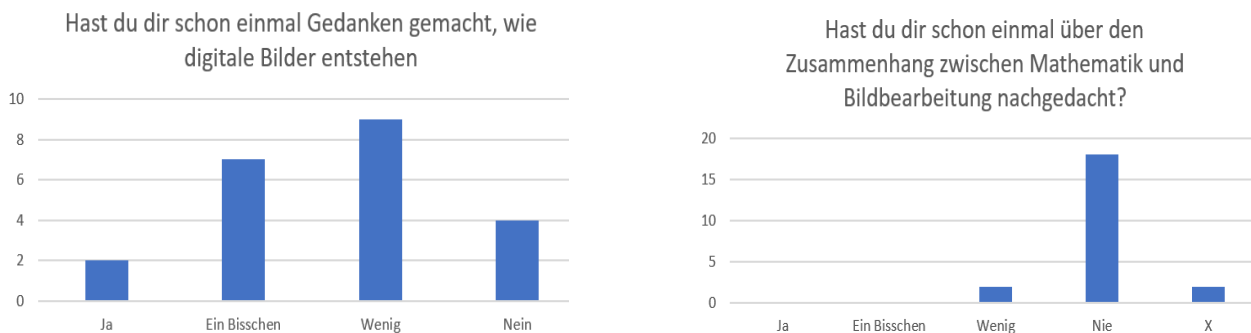


Abbildung 4.14: Fragen zu Überlegungen über digitale Bilder, Mathematik und Bildbearbeitung in einer 7.Klasse 2023

Während einige auf die Frage, ob sie sich schon einmal darüber Gedanken gemacht haben, wie digitale Bilder entstehen, mit „Ja“ oder „Ein Bisschen“ antworteten, gaben mehr als die Hälfte die Antwort „Wenig“ oder „Nein“ an. Auf die Frage, ob schon einmal über den Zusammenhang zwischen Mathematik und Bildbearbeitung nachgedacht wurde, gab die große Mehrheit „Nie“ an. Dies deckt sich mit den Ergebnissen aus dem Jahr 2021 und unterstreicht, dass wenig bis kein Grundwissen zum Zusammenhang von Mathematik und der Bearbeitung von Bildern vorhanden ist.

Die Befragten hatten im Folgenden die Möglichkeit ihre Vorstellungen über die Entstehung von digitalen Bildern in einem offenen Frageformat darzulegen. Die Antworten legten nahe, dass die Befragten ihr Vorwissen zu dem Thema hauptsächlich aus dem Internet bezogen. Fünf Teilnehmende gaben an, schon einmal ein *Youtube*-Video zu dem Thema gesehen zu haben. Wenige haben selbst Erfahrungen mit dem bewussten Bearbeiten von Bildern gesammelt. Nur eine Person gab an, im schulischen Kontext des Informatikunterrichts etwas über Bilder gehört zu haben. Sieben Schülerinnen und Schüler gaben bezüglich der Mathematik hinter der Bildbearbeitung an, die Entstehung digitaler Bilder habe mit dem Auffangen von Licht zu tun. Fünf mal ist das Wort „Pixel“ gefallen und bei vier Antworten wurde angegeben, dass die Speicherung eines Bildes etwas

mit Zahlen zu tun habe. Fünf der Teilnehmenden vermuteten hinter der Bildbearbeitung „Codes“, für die Mathematik benötigt wird. Zwei nannten „Programme“, die Mathematik beinhalten, ebenfalls zweimal wurde Binärcode erwähnt. Dreimal kamen Ideen, welche Koordinaten bzw. ein Raster beinhalteten.

Zwar schien bei einigen Schülerinnen und Schülern eine wage Grundvorstellung von einem Bild als Zusammensetzung vieler Pixel zu bestehen, was dies jedoch genau mit Mathematik zu tun hat, war den meisten unbekannt.

In Abbildung 4.15 wurden Fragen zum Bekanntheitsgrad und zur Nutzungshäufigkeit von Bildbearbeitungsprogrammen gestellt. Bei der Erhebung waren Mehrfachnennungen möglich und alle Programme, die mehr als einmal genannt wurden, sind in den Kreisdiagrammen erfasst.

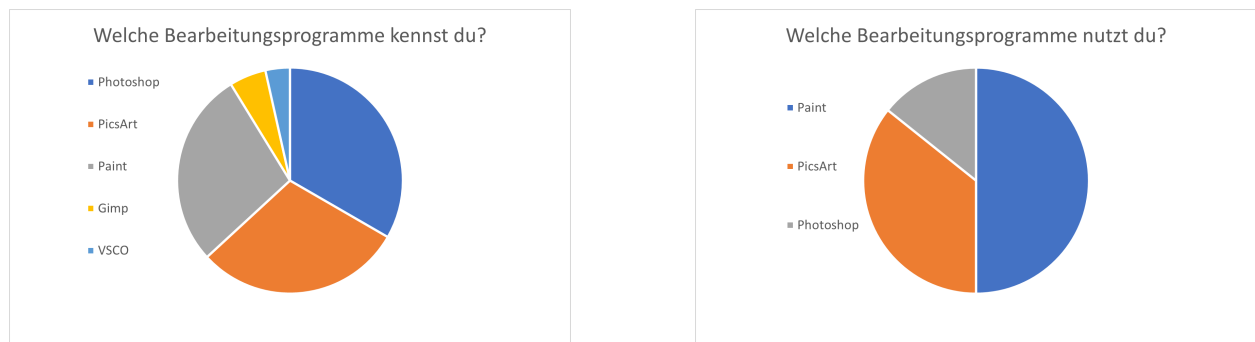


Abbildung 4.15: Bekanntheitsgrad und Nutzungshäufigkeit von Bildbearbeitungsprogrammen in einer 7.Klasse 2023

Während es knapp 60 Nennungen bei Programmen gab, die die Teilnehmenden kannten und nur zwei Befragte kein Programm kannten, wurden nur 14 mal konkret Programme genannt, die genutzt werden. Acht Personen, also über ein Drittel, gaben an, keine Programme zur Bearbeitung von Bildern zu nutzen. Während *Paint* beim Bekanntheitsgrad den dritten Platz einnimmt, ist es das am häufigsten von den Schülerinnen und Schülern genutzte Programm zur Bildbearbeitung. Dass *Photoshop* einen hohen Bekanntheitsgrad besitzt deckt sich auch mit den Antworten von 2021. Welche Programme dann wirklich genutzt wurden, ist aus den Antworten von 2021 nicht abzulesen, weshalb diese Frage 2023 ergänzt wurde.

In Abbildung 4.16 wird die Bearbeitungshäufigkeit von aufgenommenen Bildern auf dem Smartphone dargestellt. Außerdem wurde erhoben, in welchen sozialen Medien die digitalen Bilder verwertet werden.

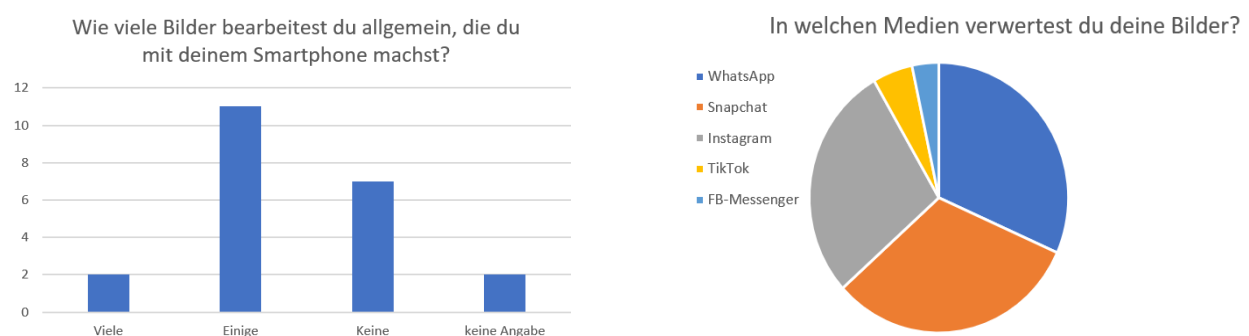


Abbildung 4.16: Bearbeitungshäufigkeit und Mediennutzung in der 7.Klasse 2023

Die am häufigsten am Smartphone genutzte App um Bilder zu bearbeiten ist eindeutig die vorinstallierte Kamera-App. Mit insgesamt 60 Nennungen von sozialen Medien ist eine breitflächige Weiterverwertung der Bilder augenscheinlich. Keine Person gab an, ihre Bilder nirgends zu verwenden. Fast alle Teilnehmenden nutzen *WhatsApp*, *Snapchat* und *Instagram*. Daraus lässt sich schließen, dass das regelmäßige Teilen von eigenen Bildern relativ normal unter den Jugendlichen ist.

Nur sieben gaben an, Bilder auch am PC oder am Laptop zu bearbeiten. Von diesen gibt es nur eine Person, die alle Bilder auf dem PC bearbeitet und eine, die „Viele“ dort bearbeitet. Die restlichen fünf gaben an „Einige“ dort zu bearbeiten. Aus den Angaben lässt sich schließen, dass die Mehrheit der Teilnehmenden Bilder auf *Instagram* oder *Snapchat* teilt und diese dort möglicherweise auch durch verschiedene Filter bearbeitet ohne dies als Bildbearbeitung wahrzunehmen. Die aktive eigene Bildbearbeitung beschränkt sich hauptsächlich auf leicht zugängliche und vorinstallierte Programme wie *Paint* auf dem PC oder die Kamera-App auf dem Smartphone.

Nach der Unterrichtssequenz wurden die Teilnehmenden gebeten ihre Erfahrungen zu beschreiben (vgl. Appendix C):

Beschreibe kurz in eigenen Worten deine Erfahrungen mit MATLAB! In wie weit konntest du die Anweisungen umsetzen?

Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler erwähnten, dass ihnen die Unterrichtssequenz „Spaß“ gemacht hat und sie die Anweisungen gut umsetzen konnten. Wie auch schon 2021 hat sich bewährt die vorgefertigten Codebausteine Stück für Stück einzufügen. Diese Vorgehensweise wurde in diesem Feedback als vorteilhaft bewertet, insbesondere in Anbetracht einer beschriebenen vorherigen Skepsis zur Nutzung von MATLAB®. Im Vergleich zu 2021 schien die Unterrichtssequenz 2023 für einige wenige zu Beginn Verwirrung gestiftet zu haben, da so viel Neues auf einmal eingeführt wurde. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass das Programm vor dem eigenen Einstieg der Schülerinnen und Schüler nur einmal kurz präsentiert wurde, während es 2021 vorher öfter im Unterricht zu sehen war. Denn 2021 gab es keine vergleichbaren Rückmeldungen diesbezüglich.

Eine Person schrieb, dass sie sich „...sehr wichtig gefühlt ...“ hat, als es nach anfänglichen Schwierigkeiten dann geklappt hat. Dies wirft Licht auf einen weiteren Aspekt dieser Unterrichtssequenz: Die Überwindung und Auslotung eigener Grenzen. Das Benutzen verschiedener anspruchsvoll erscheinender Programme scheint manchen unerreichbar oder sehr unattraktiv. Wird jedoch eine geleitete Einführung in die Materie angeboten, kann auf einer fundierten Ebene evaluiert werden, ob die Tätigkeit interessant oder erstrebenswert ist. Dabei wird durch das Erkennen der eigenen Möglichkeiten das Selbstbewusstsein gestärkt.

Um zu überprüfen, ob sich die Grundvorstellung zum digitalen Bild und zu den mathematischen Grundlagen verändert hat, wurden noch zwei Fragen gestellt. Auf die Frage, durch welche mathematischen Objekte Bilder repräsentiert werden, nannten nach der Unterrichtssequenz 12 der 18 Befragten, dass diese durch Matrizen repräsentiert werden. Auf die Frage, durch welche mathematische Operation eine Aufhellung eines Bildes erreicht werden kann, antworteten 14, dass

dies durch Addition erreicht werden kann. Vergleicht man diese Antworten mit den Vorstellungen vor der Unterrichtssequenz, so stellt man eine Veränderung hin zu einer mathematischen Grundvorstellung des digitalen Bildes und seiner Bearbeitung fest.

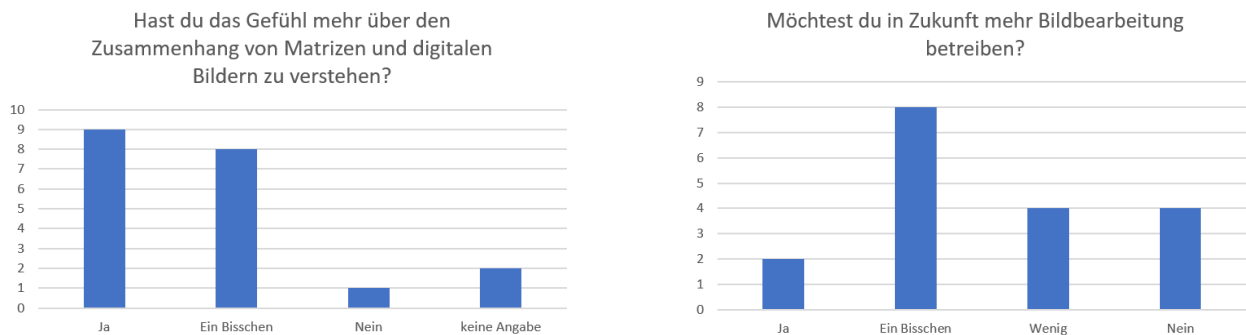


Abbildung 4.17: Auswirkungen der Unterrichtseinheiten auf das Verständnis und das zukünftige Bildbearbeitungsverhalten in der 7.Klasse 2023

Die Selbsteinschätzung bezüglich eines besseren Verständnisses des Zusammenhangs zwischen Matrizen und digitalen Bildern ist klar erkennbar und deckt sich auch mit den Einschätzungen von 2021. Genauso deckt sich die Einschätzung, dass die neuen Erkenntnisse nur bedingt einen Einfluss auf das zukünftige Betreiben von Bildbearbeitung haben. MATLAB® ist von der Nutzungsart doch sehr weit von den Programmen entfernt, die die Schülerinnen und Schüler bevorzugt verwenden. Die Bequemlichkeit bei „Point and click“ und „Drag and drop“, sowie die unmittelbare Zugänglichkeit haben einen nicht zu unterschätzenden Einfluss auf die Massentauglichkeit eines Bearbeitungsprogramms. Die Schülerinnen und Schüler sind jetzt aber in der Lage die Zusammenhänge und Hintergründe der „bequemen“ Programme zu verstehen.

4.3.3 Allgemeine Befragung zu Erfahrungen mit Bildbearbeitung und Bildnutzungsverhalten in sozialen Medien 2023

Zusätzlich zu den Evaluierungen der Unterrichtssequenzen wurden 2023 das Bildnutzungsverhalten in sozialen Medien und Vorerfahrungen zur Bildbearbeitung bei 94 Schülerinnen und Schülern der 8. bis 12. Schulstufe erhoben. Dies ermöglicht einen allgemeineren und größeren Überblick über die Vorkenntnisse von Jugendlichen zu digitaler Bildbearbeitung und die aktuell für die Verwendung digitaler Bilder genutzten Medien. Die Teilnehmenden gaben 54 weibliche, 39 männliche und eine andere Geschlechtszugehörigkeit an.

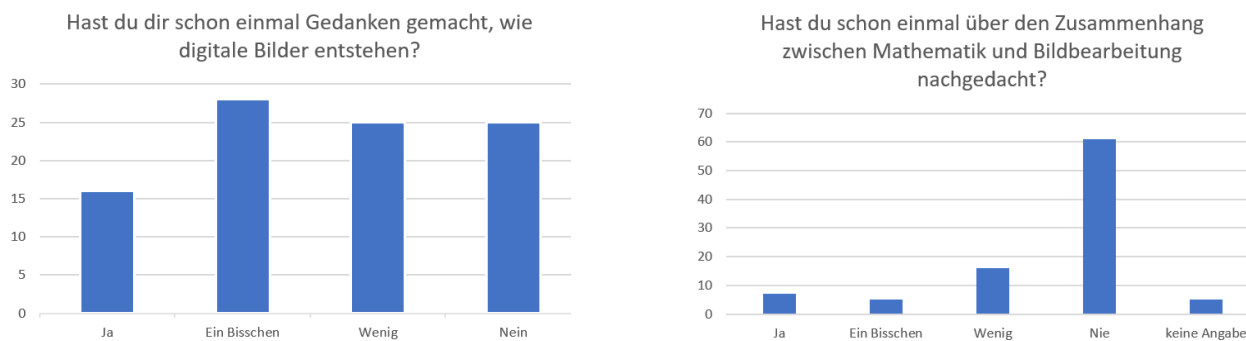


Abbildung 4.18: Fragen zu Überlegungen über digitale Bilder und Mathematik in verschiedenen Schulstufen 2023

Die Antworten in Abbildung 4.18 legen nahe, dass sich einige schon einmal Gedanken über digitale Bilder gemacht haben, die mathematischen Hintergründe digitaler Bilder jedoch größtenteils im Ungewissen liegen. Etwa zwei Drittel der Befragten haben sich noch nie Gedanken zu dem Zusammenhang zwischen Mathematik und Bildbearbeitung gemacht.

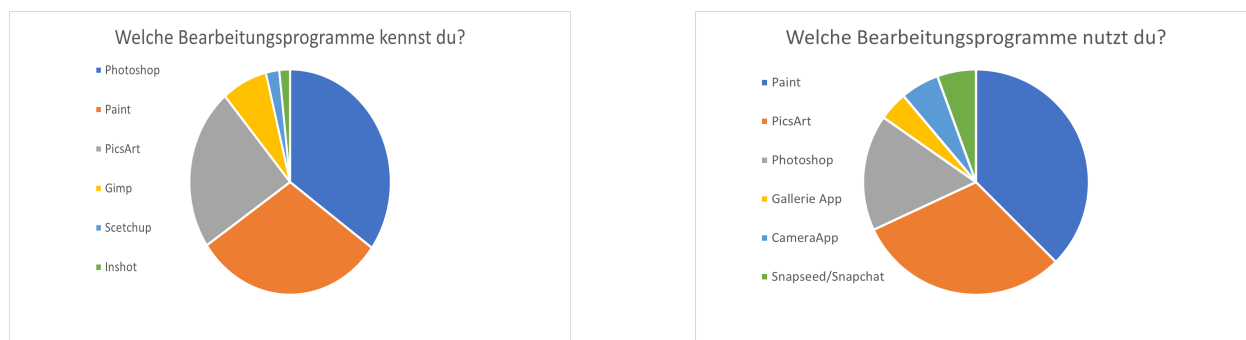


Abbildung 4.19: Befragung über Bekanntheitsgrad und Nutzungshäufigkeit von Bildbearbeitungsprogrammen in verschiedenen Schulstufen 2023

Etwa ein Drittel der Befragten benutzt kein Programm zur Bildbearbeitung. Wie in Abbildung 4.19 zu sehen, ist *Photoshop* das bekannteste und *Paint* bei denen, die Bildbearbeitung betreiben, das meistgenutzte Programm. Hauptsächlich wird die Kamera-App am Smartphone zur Bildbearbeitung verwendet.

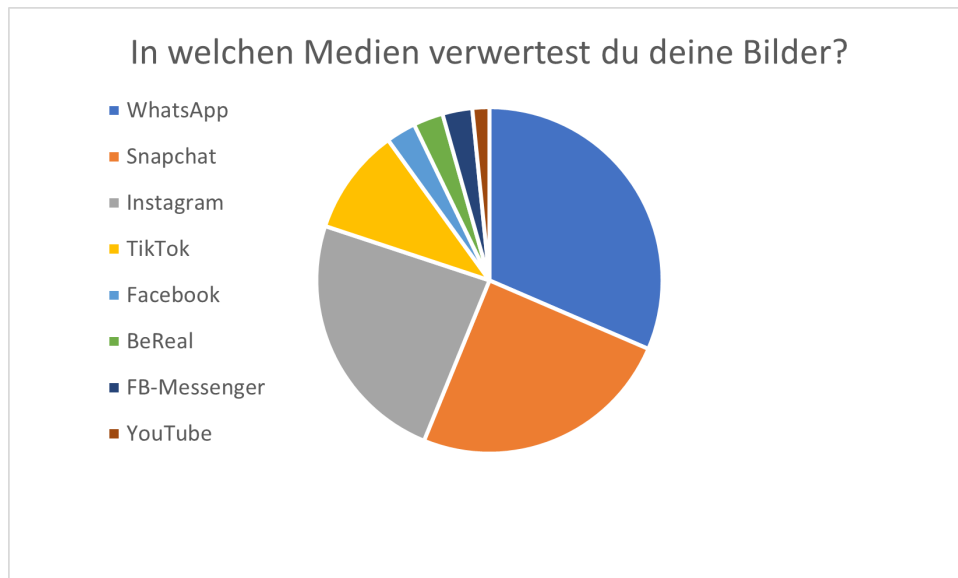


Abbildung 4.20: Befragung über Mediennutzung in verschiedenen Schulstufen 2023

Auch wenn, wie in Abbildung 4.20 zu sehen ist, die führenden Plattformen *WhatsApp*, *Snapchat* und *Instagram* sind, erkennt man an 25 Nennungen von *TikTok* und 7 Nennungen von *BeReal*, dass die sozialen Medien, auf denen Bilder genutzt werden in den verschiedenen Schulstufen wechseln. Etwa drei Viertel der Nutzerinnen und Nutzer von *TikTok* sind jünger als das Durchschnittsalter der Befragten, welches bei 15,8 Jahren liegt. Nur eine Person, die älter als der Durchschnitt ist, benutzt *BeReal*.

5 Conclusio

Die mathematischen Grundlagen der Bildbearbeitung stellen eine spannende Anwendung im Unterrichtsfach Mathematik dar, die sich stark mit der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler überschneidet und im Rahmen des Lehrplans für Mathematik der AHS-Oberstufe eingesetzt werden kann.

Digitale Bilder und ihre Bearbeitung spielen bei den Schülerinnen und Schülern eine sehr große Rolle. Die Evaluation der Unterrichtssequenzen hat gezeigt, dass wenig Wissen über die Herkunft digitaler Bilder vorhanden ist, der Konsum und die Gewinnung von digitalen Bildern aber in hohem Maße stattfinden. Auch das Bearbeiten von Bildern wurde von der Hälfte der Schülerinnen und Schüler als Vorerfahrung angegeben. Es ist zu beobachten, dass Jugendliche häufig soziale Netzwerke nutzen, auf denen Bilder eine wichtige Rolle spielen. Die gesellschaftliche Relevanz des Umgangs mit digitalem Bildmaterial ist auf Grund der steigenden Bedeutung automatisierter Bearbeitung von Bildern und einer stetigen Weiterentwicklung der Qualität von digitalen Bildern hoch einzuschätzen.

Das Wissen über mathematische und technische Hintergründe von digitalen Bildern kann die politische und persönliche Reife der Schülerinnen und Schüler stark erhöhen. Der Auftrag der Schule einer Förderung der Entwicklung der Jugendlichen zu mündigen Bürgerinnen und Bürgern wird durch das Arbeiten mit mathematischen Grundlagen der Bildbearbeitung auf mehrere Arten erfüllt. Durch technische Betrachtungsweisen und deren Grenzen wird der nüchterne Blick für Bildinhalte geschult. Durch die eigenständige Veränderung von Bildern werden deren Inhalte unter verschiedenen Aspekten reflektiert. Diese Reflexion kann dann auf Inhalte anderer Bilder übertragen werden.

Die mathematische Grundvorstellung eines digitalen Bildes kann in vereinfachter Form, beispielsweise mit Schwarz-Weiß-Bildern, schon in der Unterstufe spielerisch und kreativ vermittelt werden. Verschiedene im Lehrplan verankerte Konzepte unterstützen die in dieser Arbeit beschriebenen Methoden, Anwendungen und Inhalte.

In der Oberstufe passt die Bildbearbeitung auf Grund des breiten Spektrums an möglichen mathematischen Anwendungen gut in die 11. Schulstufe. Die verwendeten mathematischen Definitionen und Operationen sind einfacher, intuitiver Natur und kommen in der großen Mehrheit im Lehrstoff des Lehrplans für Oberstufenmathematik der allgemeinbildenden höheren Schulen vor. Matrizen und der Umgang mit diesen ist jedoch nicht AHS-Lehrstoff. Dies sollte unbedingt in einer Überarbeitung der Lehrpläne bedacht werden. Matrizen sind die mathematischen Objekte, auf denen die digitale Bildbearbeitung und viele weitere Anwendungen beruhen. Sie sind aus unserem näheren Alltag nicht wegzudenken. Der Lehrplan für Mathematik sieht keine Bildbearbeitung vor, was die

große Präsenz des digitalen Bildes in unserer Gesellschaft nicht widerspiegelt. Auch wenn an vielen Stellen genug Anknüpfungspunkte gefunden werden können um eine Durchführung mathematischer Bildbearbeitung zu rechtfertigen, fehlt eine explizite Anweisung, in welcher Schulstufe und in welchem Kontext des vorgeschriebenen Unterrichtsstoffes Bildbearbeitung stattfinden kann.

Um die mathematischen Grundlagen der Bildbearbeitung besser zu verstehen, sind noch einige wenige Lehrstoffergänzungen vorzunehmen. So sollte die zweidimensionale Analysis, sowie der Umgang mit Matrizen und einfachen Matrixoperationen thematisiert werden. Eine Schwierigkeit der mathematischen Bildbearbeitung und den mit ihr verbundenen Werkzeugen ist die Faltung, deren tieferes Verständnis weit über den Schulstoff hinausgeht. Filter, die mit diskreter Faltung arbeiten, lassen sich wie in dieser Arbeit beschrieben erklären. Es stellt jedoch für die Lehrperson eine Herausforderung dar, zum einen sich selbst diese Materie anzueignen, als auch diese dann didaktisch so zu reduzieren, dass sie in der Schule Sinn ergibt. Hier ist ein hohes Feingefühl der Lehrkraft für die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler gefordert.

Der Bezug zum visuellen System des eigenen Körpers kann im Rahmen der Bildbearbeitung thematisiert werden. Neben dieser Schnittmenge mit dem Fach Biologie finden sich einige Kooperationsmöglichkeiten zwischen der mathematischen Bildbearbeitung und Fächern wie Geschichte und politische Bildung, Geometrisches Zeichnen, Darstellende Geometrie, Geographie und wirtschaftliche Bildung, Bildnerische Erziehung, Informatik und digitale Grundbildung.

Die Anwendungsmöglichkeiten für Bildbearbeitung mit MATLAB[®] in der Schule sind so vielfältig, dass die Beispiele in dieser Arbeit als eine kleine Auswahl wahrgenommen werden muss. Die Befehlsstruktur und Bedienung von MATLAB[®] ist bei einmaligem Gebrauch für die Schülerinnen und Schüler zu umfangreich und ungewohnt in der Anwendung. Daher ergibt eine klare Vorgabe von Codebausteinen als Instruktion Sinn. Auf diese Weise können die starken, greifbaren Resultate ohne große Mühen mit den mathematischen Grundbausteinen im Quellcode direkt in Verbindung gebracht und technische Grundvorstellungen erzeugt werden.

Verschiedene Bearbeitungen von Bildern benötigen mathematische Grundlagen aus den unterschiedlichsten Teilen des Lehrplanes. Dabei ist von der Stärke eines Effekts der Bearbeitung nicht auf die Komplexität der Mathematik dahinter zu schließen. So reicht beispielsweise das Addieren von natürlichen Zahlen dafür aus, Bilder heller zu machen. Eine leichte Glättung lässt sich mitunter durch die Anwendung der Gauß'schen Glockenkurve in einer Filtermaske erreichen. Dabei tauchen immer wieder Bausteine aus dem Lehrplan auf, die, wenn man mit der Mathematik der Bildbearbeitung nicht vertraut ist, überraschen. Beispielsweise wird der Median als Mittel auf Intensitätswerte einer Pixelnachbarschaft angewendet, um Störelemente zu beseitigen.

Die durch die Schülerinnen und Schüler erzeugten Bildbearbeitungen sind beachtenswert. Auch die in dieser Arbeit abgebildeten Lernprodukte sind nur eine kleine Menge von vielen individuellen Resultaten. Die schon digitalisierte Form der Lernprodukte eignet sich für eine Weiterverarbeitung oder Nachbearbeitung in Jahres- oder Homepage-Berichten.

Die Auswertung der Fragebögen, die vor den Unterrichtssequenzen ausgefüllt wurden, legt nahe, dass kaum Schülerinnen und Schüler die Nutzung von Bildbearbeitungsprogrammen erlernt haben. Die Einführung in ein Programm wie MATLAB[®] ermöglicht einen Blick auf eine Software, die viele Möglichkeiten für Modellierungen und Berechnungen anbietet und über den Zweck

des Lernens in der Schule hinausgeht. Eine Veränderung der Grundvorstellung eines digitalen Bildes von wagen Ideen hin zu einer mathematischen Repräsentation durch Matrizen ist nach den Unterrichtssequenzen feststellbar. Die Antworten belegen, dass die Jugendlichen ihre Bilder zu einem hohen Anteil in sozialen Netzwerken verwerthen und auch bearbeiten. Trotz eines hohen Bekanntheitsgrades verschiedener Bildbearbeitungsprogramme, benutzt die Hälfte der Befragten zur Bearbeitung *Microsoft Paint*. Dies könnte auf den niederschweligen Zugang und die leichte Verfügbarkeit des Programms zurückzuführen sein. Eine weitere Verfolgung der Thematik erscheint als äußerst sinnvoll.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Beispiele zur Bildbearbeitung mit MATLAB® eröffnen eine große Fülle an Kombinationsmöglichkeiten, die insbesondere durch die Individualität verschiedener Bilder zu immer neuen Herausforderungen, Überraschungen und Erkenntnissen führt. Ein weiterer Schritt für eine Behandlung im Unterricht könnte sein, genauer darauf einzugehen, welche Effekte und Bearbeitungsschritte in Bildbearbeitungsprogrammen häufig verwendet werden und diese im Besonderen zu erklären. Dies wäre noch näher an der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler orientiert. Im Rückblick auf die durchgeführten Stunden, die nach eigener Einschätzung gut funktioniert haben und von den Schülerinnen und Schülern sehr positiv entgegengenommen wurden, sehe ich eine Durchführbarkeit als gegeben und empfehlenswert.

Literatur

- [1] M. Werner, *Digitale Bildverarbeitung: Grundkurs mit neuronalen Netzen und MATLAB®-Praktikum*, 1. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2021.
- [2] N. D. Lange, *Geoinformatik in Theorie und Praxis*, 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
- [3] D. Shen, G. Wu und H.-I. Suk, „Deep Learning in Medical Image Analysis“, *Annual Review of Biomedical Engineering*, Jg. 19, S. 221–248, 2017.
- [4] K. Anding, D. Garten und E. Linß, „Application of intelligent image processing in the construction material industry“, *ACTA IMECO*, Jg. 2, Nr. 1, S. 61–73, 2013.
- [5] Rechtsinformationssystem des Bundes, *BGBI. II Nr. 219/2016, Verordnung der Bundesministerin für Bildung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen geändert wird; Bekanntmachung, mit der die Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen geändert wird*, 2016. Adresse: <https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgb1/II/2016/219/20160809> (besucht am 15.11.2023).
- [6] H. Winter, „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“, *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Nr. 61, 1995.
- [7] K. Lengnink, W. Meyerhöfer und A. Vohns, „Mathematische Bildung als staatsbürgerliche Erziehung?“, *Der Mathematikunterricht*, Nr. 4, 2013.
- [8] The MathWorks. Inc. „MATLAB®“. (2022), Adresse: <https://de.mathworks.com/products/matlab.html> (besucht am 10.10.2022).
- [9] C. Brezinka und H. Steiner, „Entwicklung des Ultraschallscreenings“, in *Ultraschalldiagnostik in Geburtshilfe und Gynäkologie*, U. Gembruch, K. Hecher und H. Steiner, Hrsg., 2. Auflage, Berlin Heidelberg: Springer, 2018.
- [10] Saferinternet.at. „Jugend-Internet-Monitor 2022“. (2022), Adresse: <https://www.saferinternet.at/services/jugend-internet-monitor/> (besucht am 10.01.2023).
- [11] C. D. Witt, *Mobile Learning: Potenziale, Einsatzszenarien und Perspektiven des Lernens mit mobilen Endgeräten*, 1. Auflage. Wiesbaden: Springer VS, 2013.
- [12] S. Feierabend, T. Rathgeb, H. Kheredmand und S. Glöckler, „JIM Studie 2020“, Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest, Basisuntersuchung zum Medienumgang 12- bis 19-Jähriger, 2020.

- [13] S. Feierabend, T. Rathgeb, H. Kheredmand und S. Glöckler, „JIM Studie 2022“, Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest, Basisuntersuchung zum Medienumgang 12- bis 19-Jähriger, 2022.
- [14] A. Breger, F. Goldbach, B. Gerendas, U. Schmidt-Erfurth und M. Ehler, *Blood Vessel Segmentation In En-face OCTA Images: A Frequency Based Method*, 2021.
- [15] NASA. „James Webb Space Telescope“. (2022), Adresse: <https://www.jwst.nasa.gov/content/about/faqs/facts.html> (besucht am 19.07.2023).
- [16] Y. Mirsky und W. Lee, „The Creation and Detection of Deepfakes: A Survey“, *ACM Computing Surveys*, Jg. 54, Nr. 7, 2021.
- [17] S. Hong, M. R. Jahng, N. Lee und K. R. Wise, „Do you filter who you are?: Excessive self-presentation, social cues, and user evaluations of Instagram selfies“, *Computers in Human Behavior*, Jg. 104, S. 106–159, 2020.
- [18] R. Rodriguez, „The surveillance industry in europe“, in *Surveillance in Europe*, R. K. David Wright, Hrsg. London, New York: Routledge, 2015, S. 101–149.
- [19] L. Hilty, B. Oertel, M. Wölk und K. Pärli, *Lokalisiert und identifiziert, Wie Ortungstechnologien unser Leben verändern*. Zürich: vdf, 2012.
- [20] G. S. Freyermuth und L. Gotto, *Bildwerte, Visualität in der digitalen Medienkultur*. Bielefeld: transcript-Verlag, 2012.
- [21] TUForMath. „Statistik - Alles eine Lüge?“ (2023), Adresse: <https://tuformath.at/statistik-alles-nur-eine-luege/> (besucht am 19.07.2023).
- [22] C. Zanker, „Ämter ohne Aktenordner?, E-Government und Gute Arbeit in der digitalisierten Verwaltung“, *WISO Diskurs*, Nr. 6, 2019.
- [23] Rechtsinformationssystem des Bundes, *BGBI. II Nr. 133/2000, Verordnung des Bundesministers für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen geändert wird; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen*, 2000. Adresse: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/2000_133_2/2000_133_2.pdf (besucht am 15.11.2023).
- [24] K. Bredies und D. Lorenz, *Mathematische Bildverarbeitung, Einführung in Grundlagen und moderne Theorie*, 1. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011.
- [25] N. A. Campbell und J. B. Reece, *Biologie*, 6. Auflage, J. Markl, Hrsg. Heidelberg: Pearson Studium, 2005.
- [26] S. Karberg und P. D. J. Kremers. „Von Stäbchen und Zapfen“. (2022), Adresse: <https://www.dasgehirn.info/wahrnehmen/sehen/von-staebchen-und-zapfen> (besucht am 19.07.2023).
- [27] A. Breger, *Basiswissen der mathematischen Bildbearbeitung - Zwischen Theorie und Anwendung*, 1. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2023.

- [28] W. Burger und M. J. Burge, *Digitale Bildverarbeitung: Eine algorithmische Einführung mit Java*, 3. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2015.
- [29] T. Butz, *Fouriertransformation für Fußgänger*, 6. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.
- [30] B. Jähne, *Digitale Bildverarbeitung*, 6. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005.
- [31] K. Jänich, *Lineare Algebra*, 11. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.
- [32] The MathWorks, Inc. „MATLAB® Graphics - Creating Plots“. (2023), Adresse: https://de.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/creating_plots.pdf (besucht am 10.10.2022).
- [33] Rashmi, M. Kumar und R. Saxena, „Algorithm And Technique On Various Edge Detection: A Survey“, *Signal and Image Processing: An International Journal*, Jg. 4, Nr. 3, S. 65–75, 2013.
- [34] Saferinternet.at. „Veranstaltungsservice“. (2023), Adresse: <https://www.saferinternet.at/services/veranstaltungsservice> (besucht am 20.07.2023).
- [35] Rechtsinformationssystem des Bundes. „BGBl. Nr. 106/1953, 106 . Bundesgesetz vom 8. Juli 1953, womit das Urheberrechtsgesetz geändert wird (Urheberrechtsgesetznovelle 1953)“. (1953), Adresse: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/1953_106_0/1953_106_0.pdf (besucht am 15.11.2023).
- [36] Google LLC. „Google Such-Hilfe“. (2023), Adresse: <https://support.google.com/websearch/answer/29508?hl=de&co=GENIE.Platform%3DAndroid> (besucht am 05.03.2023).

Abbildungsverzeichnis

2.1	Seitlicher Querschnitt eines menschlichen Auges	23
2.2	Lichtaufnahme durch das Sensoriksystem des Auges	24
3.1	Schwarz-Weiß-Bild mit Bildmatrix	27
3.2	8-Bit-Graustufenbild mit Bildmatrix	28
3.3	RGB-Bild mit den dazugehörigen Bildmatrizen	29
3.4	Schwarz-Weiß-Bild: Von der Idee bis zum digitalen Bild	30
3.5	Beispielbild einer Weinbergschnecke	31
3.6	Größeninformation zu den Bildmatrizen von „Schnecke.jpg“	31
3.7	Umwandlung des Beispielbildes in ein Graustufenbild	32
3.8	Ausblendung von Farbkanälen im Beispielbild	33
3.9	Angabe der Position eines Pixels	33
3.10	Ausschnitt aus dem Beispielbild	34
3.11	Aufhellung und Verdunkelung durch Addition und Subtraktion	36
3.12	Veränderung des Kontrasts	36
3.13	Drehung um 90°	37
3.14	Diagonale Spiegelung durch Transposition der Bildmatrix	37
3.15	Aufhellung und Kontrasterhöhung im Beispielbild	38
3.16	Rotation des Beispielbildes	38
3.17	Diagonalspiegelung des Beispielbildes	39
3.18	Ausführung eines Maximumfilters	41
3.19	Median-, Maximum-, und Minimumfilter	42
3.20	Das Schwellenwertverfahren	43
3.21	Histogramme eines Schwarz-Weiß-Bildes	43
3.22	Histogramm des Beispielbildes	44
3.23	Schwellenwertverfahren mit steigender Untergrenze	45
3.24	Schwellenwertverfahren mit steigender Obergrenze	45
3.25	Behebung von Störungen im Beispielbild durch einen Medianfilter	46
3.26	Maximum- und Minimumfilter auf dem Beispielbild	47
3.27	Filterkerne des Prewitt-Filters	50
3.28	Filterkerne des Sobel-Filters	51
3.29	Kantendetektion	54
3.30	Anwendung des Sobel-Filters vor dem binarisierenden Schwellenwertverfahren . .	54

3.31	Sobel-und Prewitt-Filter	55
3.32	Variation des Schwellenwertes beim Sobelfilter	55
3.33	Stützstellen eines Gauß-Filters	57
3.34	Glättung des Beispielbildes durch verschiedene Gauß-Filter	58
4.1	Auf dem Papier kreierte Schwarz-Weiß-Bilder von Schülerinnen einer 6. Klasse .	60
4.2	Anzeigen der Primärfarben Blau, Grün und Rot durch eine Schülerin der 7.Klasse	60
4.3	Anzeigen der Sekundärfarben Cyan, Magenta und Gelb durch eine Schülerin der 7.Klasse	61
4.4	Bearbeitung eines Bildes der Karlskirche durch einen Schüler der 7.Klasse	61
4.5	Bearbeitung des Bildes einer Hauskatze durch einen Schüler der 7.Klasse	61
4.6	Anwenden eines Sobel-Filters durch eine Schülerin der 7.Klasse	62
4.7	Ausschneiden und Vergrößern von Bildelementen, Beseitigung von Störelementen durch eine Schülerin der 7.Klasse	62
4.8	Beseitigung von Störelementen durch einen Schüler der 7.Klasse	63
4.9	Vorwissen zu Bildverarbeitung in einer 7. Klasse 2021	65
4.10	Nutzungsverhalten in einer 7. Klasse 2021	65
4.11	Handynutzung in einer 7. Klasse 2021	66
4.12	Feedback zu den Unterrichtseinheiten in einer 7. Klasse 2021	67
4.13	Änderung des Bildbearbeitungsverhaltens in einer 7. Klasse 2021	67
4.14	Fragen zu Überlegungen über digitale Bilder, Mathematik und Bildbearbeitung in einer 7.Klasse 2023	68
4.15	Bekanntheitsgrad und Nutzungshäufigkeit von Bildbearbeitungsprogrammen in einer 7.Klasse 2023	69
4.16	Bearbeitungshäufigkeit und Mediennutzung in der 7.Klasse 2023	69
4.17	Auswirkungen der Unterrichtseinheiten auf das Verständnis und das zukünftige Bildbearbeitungsverhalten in der 7.Klasse 2023	71
4.18	Fragen zu Überlegungen über digitale Bilder und Mathematik in verschiedenen Schulstufen 2023	72
4.19	Befragung über Bekanntheitsgrad und Nutzungshäufigkeit von Bildbearbeitungsprogrammen in verschiedenen Schulstufen 2023	72
4.20	Befragung über Mediennutzung in verschiedenen Schulstufen 2023	73

A Planungsmatrizen zur Unterrichtsvorbereitung

Mathematik und Bildbearbeitung

1. Unterrichtseinheit

7.Klasse
Thema der Unterrichtsstunde: Bildmatrizen von Schwarz-Weiß-Bildern

ZEIT	INHALT	LEHR/- LERNMETHODE	MEDIENEINSATZ	GROBZIELE
10 MIN	Begrüßung, Vorstellung der Unterrichtssequenzen zum Thema „Mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung“	L-S-Gespräch	-	Bewusstsein für das Thema „Bildbearbeitung“ im Alltag schaffen
10 MIN	Vorzeigen der Erstellung eines Schwarz-Weiß-Bildes in MATLAB® durch eine binäre Matrix, Einführende Worte zu MATLAB®	L-S-Gespräch	Computer und Beamer	Eine Idee vom Zusammenhang zwischen einer Matrix und einem digitalen Bild bekommen
10 MIN	Umsetzung eigener Ideen von Schwarz-Weiß-Bildern in Form von Matrizen auf Papier	Einzelarbeit/ Partnerarbeit	Schulübungshefte	Erste Erfahrungen mit Intensitätswerten
20 MIN	Eingeben der Matrizen durch die Schülerinnen und Schüler in MATLAB® und Präsentation vor der Klasse	Praktische Übung, Präsentation	Computer und Beamer	Die Realisierung eines digitalen Bildes durch das Darstellen selbst erstellter Matrizen erfahren

Mathematik und Bildbearbeitung

2. Unterrichtseinheit

7.Klasse
Thema der Unterrichtsstunde: Matrizen, einfache Operationen auf Matrizen

ZEIT	INHALT	LEHR/- LERNMETHODE	MEDIENEINSATZ	GROBZIELE
5 MIN	Begrüßung der Klasse; Einleitende Worte zu den Themen Bildbearbeitung, MATLAB® und Matrizen, Vorwissen der SuS	L-S-Gespräch	-	Differenziertes Einleiten der Stunde → Interesse der SuS wecken
10 MIN	Definitionen und Beispiele zu den Begriffen Matrix, Zeile, Spalte, quadratische Matrix; Interpretation von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als $n \times 1$ -Matrizen; Addition und Subtraktion von Matrizen, Multiplikation mit einem Skalar, inhaltliche Verbindung mit digitalen Bildern	L-S-Gespräch	Tafel	Hinführung zum Begriff „Matrix“; Erkennen, was Matrizen mit digitalen Bildern zu tun haben
10 MIN	Addition und Subtraktion von Matrizen; Multiplikation mit einem Skalar	Einzelarbeit	Schulübungshefte	Erste Erfahrungen mit dem Rechnen mit Matrizen
15 MIN	Produkte von Matrizen vorstellen: Hadamard-Produkt, Matrixprodukt	L-S-Gespräch	Tafel	Hinführung zu einer sinnvollen Definition von Matrizenmultiplikation
10 MIN	Multiplikation von quadratischen Matrizen, Vergleich von $(3 \times 1) \cdot (1 \times 3)$ und $(1 \times 3) \cdot (3 \times 1)$, Hausübung: „.jpg“ mitbringen	Einzelarbeit	Schulübungshefte	Erste Erfahrungen mit der Multiplikation von Matrizen

Mathematik und Bildbearbeitung

3. Unterrichtseinheit

7.Klasse

Thema der Unterrichtsstunde: Hadamard-Produkt, Bild und Bildmatrix

ZEIT	INHALT	LEHR/- LERNMETHODE	MEDIENEINSATZ	GROBZIELE
10 MIN	Begrüßung der Klasse; Wiederholende Worte zu den Themen Matrix, Operationen mit Matrizen	L-S-Gespräch	-	Differenziertes Einleiten der Stunde → Interesse der SuS wecken
10 MIN	Das Hadamard-Produkt von Matrizen	L-S-Gespräch	Tafel oder Beamer	Hinführung zu einer sinnvollen Definition des Hadamard-Produktes
10 MIN	Beispiel eines Hadamard-Produktes rechnen	Einzelarbeit	Schulübungshefte	Erste Erfahrungen mit dem Hadamard-Produkt
10 MIN	Einführung und Definition des diskreten Bildes	L-S-Gespräch	Tafel oder Beamer	Wahrnehmen der Bildfunktion als Funktion mit mehreren Variablen
10 MIN	Verbinden der diskreten Bildfunktion mit der Repräsentation als Bildmatrix	L-S-Gespräch	Tafel oder Beamer	Die Konzepte „Bildfunktion“ und „Bildmatrix“ verbinden

Mathematik und Bildbearbeitung

4. Unterrichtseinheit

7.Klasse
Thema der Unterrichtsstunde: MATLAB®-Probeaccount und die Anzeige von Bildern

ZEIT	INHALT	LEHR/- LERNMETHODE	MEDIENEINSATZ	GROBZIELE
5 MIN	Begrüßung der Klasse; Hochfahren der Computer	L-S-Gespräch	Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Allen Kindern sollen funktionierende Rechner zur Verfügung stehen
15 MIN	MATLAB® Probeaccount anlegen: https://de.mathworks.com/products/matlab.html	L-S-Gespräch	Computer und Internet	Schrittweises Durchführen der Anlegung eines Probeaccounts
15 MIN	Erste Schritte mit MATLAB®; Importieren eines Bildes, Metadaten und Bild anzeigen lassen	Einzelarbeit oder Partnerarbeit	Computer und Internet	Den Zusammenhang zwischen Bildmatrix und digitalem Bild erfahren
10 MIN	Verschiedene Arten von digitalen Bildern: Schwarz-Weiß, Grauwert, RGB; Wertebereiche, die Bilder annehmen können; Realisierung in MATLAB®	Frontalunterricht	Tafel/Beamer	Erste Differenzierungen zwischen Bildarten, insb. bzgl. des Farbraumes, kennenlernen
5 MIN	Stunde beenden: Speichern, Computer herunterfahren	Einzelarbeit oder Partnerarbeit	Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Umgang mit digitalen Endgeräten, Sichern eines mehrstündigen Projektes

Mathematik und Bildbearbeitung

5. Unterrichtseinheit

7.Klasse

Thema der Unterrichtsstunde: Bilder anzeigen und den Farbraum manipulieren

ZEIT	INHALT	LEHR/- LERNMETHODE	MEDIENEINSATZ	GROBZIELE
5 MIN	Begrüßung der Klasse; Öffnen von MATLAB®	L-S-Gespräch	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	MATLAB® routiniert öffnen
10 MIN	Erstellen eines Scripts; Ausführung einzelner Script-Teile; Anzeigen der Bilder in verschiedenen Tabs oder Fenstern; Montagen	L-S-Gespräch, praktische Übung	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Aufbau einer wiederabrufbaren Dokumentation der Arbeitsschritte der SuS
35 MIN	Erzeugen einer Grauwertmatrix aus einer RGB-Matrix; Anzeigen einzelner Farbkanäle einer RGB-Matrix durch Ausschalten der anderen Kanäle; Umwandeln des Farbraumes einer Grauwertmatrix von $\{0,1,2, \dots, 255\}$ in das Intervall $[0; 1]$; Unterschiedliche Schreibweisen von Pixelpositionen: Bildfunktion vs Matrixeintrag	L-S-Gespräch, praktische Übung	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Erkennen, welche Auswirkungen Veränderungen der zugrundeliegenden Matrizen auf die digitalen Bilder haben

Mathematik und Bildbearbeitung

6. Unterrichtseinheit

7.Klasse
Thema der Unterrichtsstunde: Bildteile ausschneiden, Schwellenwertverfahren

ZEIT	INHALT	LEHR/- LERNMETHODE	MEDIENEINSATZ	GROBZIELE
5 MIN	Begrüßung der Klasse; Öffnen des Scripts	L-S-Gespräch	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Routiniert mit den Aufzeichnungen arbeiten
30 MIN	Wiederholung von Schreibweisen der Pixelpositionen, Ausschneiden von Bildteilen	L-S-Gespräch, praktische Übung	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Pixelpositionen anhand von Metadaten ablesen und beschreiben können
10 MIN	Helligkeits- und Kontrastveränderung durch Addition bzw. Multiplikation von Skalaren	L-S-Gespräch	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Auswirkungen von Matrixoperationen mit einem Skalar auf das digitale Bild erkennen
5 MIN	Umwandlung in Schwarz-Weiß-Bild; Schwellenwertverfahren; Histogramm	Einzelarbeit oder Partnerarbeit	Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Untersuchen von Bildern mit Hilfe von Histogrammen

Mathematik und Bildbearbeitung

7. Unterrichtseinheit

7.Klasse
Thema der Unterrichtsstunde: Filter

ZEIT	INHALT	LEHR/- LERNMETHODE	MEDIENEINSATZ	GROBZIELE
5 MIN	Begrüßung der Klasse; Öffnen des Scripts	L-S-Gespräch	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Routiniert mit den Aufzeichnungen arbeiten
30 MIN	Gauß-Filter, Medianfilter, Edge-filter; Kontrasterhöhung; Schwarz-Weiß-Umwandlung	L-S-Gespräch, praktische Übung	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Erkennen von mathematischen Hintergründen und Funktionsweisen von Filtern
10 MIN	Abschließendes Gespräch; Ausblicke; Sammlung der bearbeiteten Bilder	L-S-Gespräch	Beamer, Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Die Unterrichtsreihe mental und dokumentativ abschließen
5 MIN	Stunde beenden: Speichern, Computer herunterfahren	Einzelarbeit oder Partnerarbeit	Computerraum/ LapTop- Wagen/Eigengeräte	Umgang mit Schuleigentum und digitalen Endgeräten

B MATLAB®-Skript

```
%% Dieses Skript beinhaltet den benötigten Code für die in der Arbeit
%% beschriebenen Anwendungen der mathematischen Bildbearbeitung.
```

```
%% Einlesen eines Bildes
```

```
% In A sind die drei Matrizen für Rot, Grün und Blau gespeichert.
% Durch imread() werden die Intensitätswerte der drei Matrizen aus dem
% Dateiformat herausgelesen.
% Der Befehl ; unterdrückt das Anzeigen von A.
% Durch den Zusatz figure, wird bei der Anzeige durch imshow() ein neues
% Fenster geöffnet.
% impixelinfo ermöglicht die Abfragung einzelner Pixelpositionen mit dem
% Mauszeiger und size() fragt die Größe und Anzahl der Matrizen ab, hier 3
% für RGB. Durch rgb2gray() wird aus dem RGB-Bild ein Graustufenbild
% erzeugt.
```

```
A=imread("Schnecke.jpg");
figure, imshow(A), impixelinfo
size(A)
B=rgb2gray(A);
figure, imshow(B), impixelinfo
```

```
%% Einzelne Farbkanäle im RGB-Bild ausschalten
```

```
% Kanäle Rot und Grün werden ausgeschaltet.
% A wird kopiert. In der Kopie A1 werden in der ersten Matrix mit den Rotwerten
% alle Einträge
% gleich Null gesetzt und das gleiche für die Grünwerte wiederholt.
% Die anderen Beispiele werden analog durchgeführt.
```

```
A1=A;
A1(:,:,1)=0;
A1(:,:,2)=0;
```

```
% Kanäle Rot und Blau werden ausgeschaltet.
```

```
A2=A;
A2(:,:,1)=0;
A2(:,:,3)=0;
```

```
% Kanäle Blau und Grün werden ausgeschaltet.
```

```
A3=A;
A3(:,:,2)=0;
A3(:,:,3)=0;
```

```
% Kanal Rot wird ausgeschaltet.
```

```
A4=A;
A4(:,:,1)=0;
```

```
% Kanal Grün wird ausgeschaltet.
```

```
A5=A;
A5(:,:,2)=0;
```

```
% Kanal Blau wird ausgeschaltet.
```

```
A6=A;
A6(:,:,3)=0;
```

```

% Eine Fotomontage der Bilder wird erstellt.

figure, montage({A1, A2, A3, A4, A5, A6})

%% Ebene Kongruenzabbildungen

% Spiegelung durch Transposition

% Durch den Befehl .' wird eine Matrix transponiert.

A7=B.';
figure, montage({B, A7})

% Rotation

% Mit imrotate(Matrix, Winkel) kann eine Matrix gedreht werden.
% Durch Nullen wird auf eine rechteckige Form ergänzt.

A8=imrotate(B, 60);
figure, imshow(A8)

%% Segmentierung

% Bildsegmente ausschneiden

% Die Matrix C wird über Zeilen- und Spaltenangaben zur Matrix B definiert.
% Dadurch wird der beschriebene Bereich als eine eigene Bildmatrix
% gespeichert.

C=B(500:1850, 700:2150);
figure, imshow(C)

% Thresholding

% Die Einträge in C werden durch mat2gray auf das Intervall [0,1] normiert.
% So kann ein Schwellenwert gewählt werden, der in Prozent angegeben wird.

M=mat2gray(C);
figure, montage({M>0.1, M>0.2, M>0.3, M>0.4, M>0.5, M>0.6, M>0.7, M>0.8, M>0.9})
figure, montage({M<0.1, M<0.2, M<0.3, M<0.4, M<0.5, M<0.6, M<0.7, M<0.8, M<0.9})

%% Filter

%Medianfilter

% Durch imnoise() kann eine Bildmatrix auf verschiedene Arten mit
% Störelementen versetzt werden. Die Stärke der Störung kann zwischen 0 und
% 1 gewählt werden. Durch medfilt2() wird jedes Bildelement durch den
% Median einer 3x3-Umgebungsmatrix ersetzt.

E1=imnoise(M, 'salt & pepper' , 0.02);
E2=medfilt2(E1);
figure, imshowpair(E1, E2, 'montage')

% Maximum- und Minimumfilter

% Durch ordfilt2 kann aus einer Umgebung ein Wert ausgewählt werden, der
% nach Ordnung der Elemente der Umgebung auf einer bestimmten Stelle steht.
% Beim Maximumfilter ist dies der höchste Wert. Dieser hängt von der Größe der
% Umgebungsmatrix ab.
% Im folgenden Beispiel einer 100x100-Umgebungsmatrix ergibt das 10000.

```

```

% Beim Minimumfilter ist es immer 1.

C100=ordfilt2(B, 10000, ones(100));
D100=ordfilt2(B, 1, true(100));
figure, imshowpair(C100, D100, 'montage')

%%Sobel-Filter Schritt für Schritt

% Das zu filternde Bild wird eingelesen und angezeigt.

S = imread("Wuerfel1.jpg");
figure, imshow(S)

% Das RGB-Bild wird in ein Graustufenbild umgewandelt.

S = rgb2gray(S);

% Die Einträge werden in das Double-Format umgewandelt, um Berechnungen
% außerhalb der Zahlen 0-255 zu ermöglichen.

S = double(S);

% Eine Ergebnismatrix wird angelegt, die nur Nullen enthält und die Größe der
% eingelesenen Matrix besitzt.

Asobel = zeros(size(S));

% Die Sobel-Filtermasken werden definiert. Mx und My sind so zu verstehen,
% dass Mx Änderungen in x-Richtung (vertikale Kanten) erfasst und My Änderungen in
% y-Richtung (horizontale Kanten).

Mx = [-1 0 1; -2 0 2; -1 0 1];
My = [-1 -2 -1; 0 0 0; 1 2 1];

% Mittels zweier for-Schleifen werden alle Einträge der neuen Matrix
% berechnet.

for i = 1:size(S, 1) - 2
    for j = 1:size(S, 2) - 2

% Im folgenden Schritt werden die Summen der Einträge der Ergebnismatrizen des
% Hadamard-Produktes (.* ) berechnet.

        Gx = sum(sum(Mx.*S(i:i+2, j:j+2)));
        Gy = sum(sum(My.*S(i:i+2, j:j+2)));

% Da ein 3x3-Filter angewendet wird und nur Einträge erzeugt werden, die kein
% Zero-Padding am Rand der Bildmatrix A benötigen, entstehen
% in jeder Richtung zwei Zeilen bzw. Spalten weniger. Damit das
% Ausgabeformat wieder dieselbe Größe hat, sind die Ränder auf Grund der
% vordefinierten Null-Matrix schwarz. Wenn i = 1 und j = 1, wird in der
% Ausgabematrix die Position Asobel(2, 2) erzeugt.
% Die Vorzeichen der Einträge verschwinden durch die folgende Berechnung des Be-
% trages.

        Asobel(i+1, j+1) = sqrt(Gx.^2 + Gy.^2);

    end
end

% Die resultierenden Intensitätswerte werden auf die Zahlen 0 bis 255

```

```

% gerundet. Anschließend wird das neue Bild angezeigt.

Asobel = uint8(Asobel);
figure, imshow(Asobel);

% Durch das Anwenden des Schwellenwertverfahrens können Kanten weiter
% hervorgehoben werden.

figure, montage({Asobel>20, Asobel>30, Asobel>40, Asobel>50})
figure, imshow(Asobel>10)

%% Gauß-Filter

% Für die folgenden Gauß-Filter wurden verschieden große
% Standardabweichungen der Gauß-Funktion gewählt.

GA1=imgaussfilt(M, 1);
GA5=imgaussfilt(M, 5);
GA10=imgaussfilt(M, 10);
GA50=imgaussfilt(M, 50);
GA100=imgaussfilt(M, 100);
figure, montage({M, GA1, GA5, GA10, GA50, GA100})

% Durch den Befehl fspecial() lässt sich eine Filtermaske des Gauß-Filters
% mit gewünschter Größe und Standardabweichung erstellen.

fspecial("gaussian", 3, sqrt(0.2))

% Alternativ kann die Filtermaske Schritt für Schritt berechnet werden:

sigma=sqrt(0.2);
v=[ 1/(sigma*sqrt(2*pi))*exp(-1/(2*sigma^2));
1/(sigma*sqrt(2*pi))*1;
1/(sigma*sqrt(2*pi))*exp(-1/(2*sigma^2))];
V=v*v';
s=sum(sum(V));
V/s

% Mit conv2() kann die zweidimensionale diskrete Faltung in Matrixform
% durchgeführt werden.

GA40= conv2(M, fspecial("gaussian", 20, 40));
figure, imshow(GA40)

```


C Fragebögen und Einverständniserklärung

Fragebogen vor dem Bildverarbeitungsworkshop mit MATLAB

Geschlecht: männlich ☐ weiblich ☐ andere: _____

Hast du dir bisher schonmal Gedanken darüber gemacht, wie digitale Bilder entstehen?

Hast du schon einmal über den Zusammenhang zwischen Mathematik und Bildverarbeitung nachgedacht?

Welche Bildbearbeitungsprogramme kennst du?

Benutzt du Bildbearbeitungsprogramme in deiner Freizeit? (Z.B. Photoshop, Paint, ...)

Machst du in deiner Freizeit viele Fotos mit dem Handy?

Verwertest du deine digitalen Bilder irgendwie (z.B. in Fotoalben, auf sozialen Netzwerken o.Ä.)?

Bearbeitest du manchmal Bilder mit dem Handy?

Fragebogen vor dem Bildverarbeitungsworkshop mit MATLAB

Geschlecht: männlich ☐ weiblich ☐ andere: _____

Wie war deine Erfahrung mit MATLAB?

Konntest du die Anweisungen umsetzen?

Hast du das Gefühl ab jetzt mehr über den Zusammenhang von Matrizen und digitalen Bildern zu verstehen?

Möchtest du in Zukunft mehr Bildbearbeitung betreiben?

Wirst du in Zukunft MATLAB verwenden?

Fragebogen zur Erhebung: Mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung in der Schule

Identifikationscode _ _ _ _ _

Die ersten 2 Buchstaben des Vornamens der Mutter, die letzten zwei Buchstaben des Vornamens des Vaters, der letzte Buchstabe Deines Vornamens und der zweite Buchstabe des Nachnamens.

Geschlecht: männlich ☐ weiblich ☐ andere: _____

Alter: _____

Thema: Mathematische Bildbearbeitung am Smartphone:

Hast du dir bisher schon einmal Gedanken darüber gemacht, wie digitale Bilder entstehen?

Ja ☐ Ein Bisschen ☐ Wenig ☐ Nein ☐

Falls Du ja /ein bisschen / wenig angekreuzt hast, gib bitte an, woher Du dieses Wissen hast:

Falls Du ja /ein bisschen / wenig angekreuzt hast, formuliere bitte, wie Du die Entstehung eines digitalen Bildes erklären würdest.

Falls Du Nein angekreuzt hast, stelle eine Vermutung auf, wie digitale Bilder entstehen können.

Hast du schon einmal über den Zusammenhang zwischen Mathematik und Bildbearbeitung nachgedacht?

Ja ☐

Ein Bisschen ☐

Wenig ☐

Nie ☐

Falls Du ja /ein bisschen / wenig angekreuzt hast, erläutere bitte, welche Zusammenhänge Du siehst.

Falls Du Nein angekreuzt hast, formuliere eine Vermutung für einen Zusammenhang zwischen Mathematik und Bildbearbeitung.

Welche Bildbearbeitungsprogramme kennst bzw. nutzt du?

Kennen:

☐ Photoshop

☐ Paint

☐ Gimp

☐ PicsArt

☐ Scetchup

☐ andere:

Nutzen:

☐ Photoshop

☐ Paint

☐ Gimp

☐ Picsart

☐ Sketchup

☐ andere:

Wie häufig / Wie viele Bilder bearbeitest Du allgemein, die Du mit Deinem Smartphone machst?

Alle Bilder ☐

Viele ☐

Einige ☐

Keine ☐

Wenn Du Bilder am Smartphone bearbeitest, mit welcher App bearbeitest du sie?

☐ CameraApp

☐ VSCO

☐ Adobe Lightroom

☐ Enlight

☐ Photoshop Express

☐ Prisma

☐ Google Snapseed

☐ Photomate R3

☐ andere:

In welchen Medien verwertest Du Deine Bilder, die du mit dem Smartphone gemacht hast?

- ☐ Snapchat
- ☐ TikTok
- ☐ Facebook
- ☐ Instagram
- ☐ YouTube
- ☐ WhatsApp
- ☐ FB-Messenger
- ☐ Twitch
- ☐ andere:

Bearbeitest Du Fotos auch auf Deinem Laptop oder PC?

Alle Bilder ☐ Viele ☐ Einige ☐ Keine ☐

Falls ja, welche Programme nutzt Du dafür?

Kennen:

- ☐ Photoshop
- ☐ Paint
- ☐ Gimp
- ☐ PicsArt
- ☐ Scetchup
- ☐ andere:

Nutzen:

Falls ja, wie viele Bilder bearbeitest Du am PC im Vergleich zum Smartphone?

Alle Bilder ☐ Viele ☐ Einige ☐ Keine ☐

Danke für deine Mitarbeit!

Fragebogen zur Erhebung: Mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung in der Schule

Identifikationscode _ _ _ _ _

Die ersten 2 Buchstaben des Vornamens der Mutter, die letzten zwei Buchstaben des Vornamens des Vaters, der letzte Buchstabe Deines Vornamens und der zweite Buchstabe des Nachnamens.

Beschreibe kurz in eigenen Worten deine Erfahrungen mit MATLAB! In wie weit konntest du die Anweisungen umsetzen?

Hast du das Gefühl jetzt mehr über den Zusammenhang von Matrizen und digitalen Bildern zu verstehen?

Ja ☐

Ein Bisschen ☐

Wenig ☐

Nein ☐

Erkläre, durch welche mathematischen Objekte Bilder repräsentiert werden!

Durch welche mathematische Operation kann eine Aufhellung eines Bildes erreicht werden?

Möchtest du in Zukunft mehr Bildbearbeitung betreiben?

Ja ☐

Ein Bisschen ☐

Wenig ☐

Nein ☐

Findest du, dass Bildbearbeitung im Mathematikunterricht generell vorgestellt werden sollte?

Viel mehr ☐

Mehr ☐

Weniger ☐

Viel weniger ☐

Danke für die Mitarbeit!

Einverständniserklärung

Ich bin damit einverstanden, dass die von mir im Rahmen der Unterrichtseinheiten zu „Mathematische Grundlagen der Bildbearbeitung in der Schule“ bearbeiteten Bilder zu wissenschaftlichen Zwecken verarbeitet und veröffentlicht werden dürfen.

Vor- und Zuname:

Unterschrift: _____