



universität
wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Diagonalisierbarkeit von linearen Abbildungen und
Matrizen und die Jordan-Matrix“

verfasst von / submitted by

Sophie Rosa Pfeiffer, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2023 / Vienna, 2023

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 519 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Latein Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Hörmann

Abstract

Die lineare Algebra hat zahlreiche Anwendungen in mehreren Bereichen, insbesondere in den Naturwissenschaften und Ingenieurwissenschaften. Unter anderem können lineare Gleichungs- und Differentialgleichungssysteme auf lineare Abbildungen und Matrizen zurückgeführt werden. Um lineare Abbildungen effizient zur Berechnung in den Anwendungsbereichen nutzen zu können, sucht man eine Matrixdarstellung, mit der möglichst einfach gerechnet werden kann. Die Suche nach einer solchen Darstellungsmatrix ist der zentrale Aspekt der vorliegenden Arbeit. Ausgehend von einem Anwendungsbeispiel aus der Biologie werden wichtige Begriffe und Anwendungsbereiche der Matrizenrechnung vorgestellt. Zunächst wird gezeigt, dass Diagonalmatrizen gegenüber allgemeinen Matrizen große Vorteile bieten. Doch nicht alle Matrizen erfüllen die Kriterien der Diagonalisierbarkeit. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die Jordan-Normalform erarbeitet. In diese kann jede Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, transformiert werden. Schlussendlich wird eine Anwendung in der Biologie exemplarisch vorgestellt.

Linear algebra has numerous applications in different fields, especially in natural sciences and in engineering sciences. Amongst other things, linear equation and differential equation systems can be traced to linear mappings and matrices. In order to be able to use linear mappings efficiently for calculations in the application areas, one has to search a matrix representation which can be calculated as efficiently as possible. The search for such a display matrix is the central aspect of this work. Based on an application example from biology, important terms and areas of application will be introduced. First, it will be shown, that diagonal matrices provide great advantages compared to general matrices. However, not all matrices meet the criteria of diagonalizability. Subsequently, the Jordan normal form will be introduced. It can be transformed into any display matrix of a linear mapping, whose characteristic polynomial can be factored into linear factors. Finally, an application in biology is presented as an example.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Diagonalisierbarkeit	3
2.1	Ein Beispiel zur Einführung	3
2.2	Diagonalisierbare Matrizen	4
2.3	Minimalpolynom einer Matrix	10
2.4	Fortsetzung des Einführungsbeispiels	14
3	Die Jordan-Normalform	17
3.1	Existenz einer Jordan-Normalform	19
3.2	Satz von der Jordanschen Normalform	26
3.3	Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis	30
3.3.1	Allgemeines Verfahren	30
3.3.2	Hilfsmittel zum Bestimmen einer Jordan-Normalform	32
3.3.3	Potenzen einer Jordan - Normalform	41
4	Die rationale Normalform	43
5	Jordan-Normalform bei dynamischen Systemen	47
5.1	Exponentialfunktion einer nicht diagonalisierbaren Matrix	47
5.2	Räuber-Beute-Modell	49
	Literaturverzeichnis	53

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit wurde als Skript für eine fiktive Vorlesung aus dem Modul „Höhere Mathematik“ für das Lehramt konzipiert. Diese fiktive Vorlesung richtet sich an Studierende im Master. Die Kenntnis der grundlegenden Begriffe der linearen Algebra wird also vorausgesetzt, etwa wie in den Modulen UF MA 03 (Geometrie) im Bachelorstudium und UF MA MA 01 (Mathematik im $\mathbb{R}^n$) im Masterstudium. In der Mathematik dient die lineare Algebra als Grundlage für viele weitere Kerngebiete der Mathematik. Auch in der Physik, Biologie und Informatik ist sie ein unverzichtbares Werkzeug. Sie beschäftigt sich vor allem mit linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen. Jede lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraums V in einen endlichdimensionalen Vektorraum W lässt sich durch eine Matrix darstellen. Die Darstellungsmatrix A hängt von der Wahl einer Basis von V und einer von W ab. Somit stellt sich die Frage, ob man durch geeignete Wahl dieser Basen eine Darstellungsmatrix finden kann, mit der man möglichst gut rechnen kann. Diese Arbeit widmet sich speziell der Suche nach einer möglichst einfachen Matrixdarstellung, mit der viele Rechenoperationen vereinfacht werden können. Vor allem die Multiplikation von Matrizen, die Berechnung einer Inversen oder die Bestimmung des Ranges sollen effizient ausführbar sein. Am einfachsten ist es Matrizen zu multiplizieren, die außerhalb ihrer Diagonalen nur Nullen als Einträge haben. Eine solche Matrix heißt Diagonalmatrix. Doch nicht jede lineare Abbildung ist diagonalisierbar.

Die fiktive Vorlesung beginnt mit einem Anwendungsbeispiel aus der Biologie. Mit Hilfe dieses Beispiels soll das Thema der Lehrveranstaltung motiviert werden und es soll aufgezeigt werden, welche Vorteile Matrizen in Diagonalgestalt gegenüber anderen Matrizen haben. Daraufhin werden Kriterien für die Diagonalisierbarkeit von Matrizen vorgestellt. Das Hauptaugenmerk dieser fiktiven Vorlesung soll allerdings auf nicht diagonalisierbaren Matrizen liegen. In Kapitel 3 wird die Existenz einer sogenannten Jordan-Basis gezeigt. Es wird ein Verfahren zur Konstruktion einer Jordan-Normalform vorgestellt. Dieses wird zunächst allgemein geschildert und in weiterer Folge anhand von Beispielen illustriert. Jordan-Normalformen stellen den Kern der Arbeit dar, da sie ebenfalls Vorteile gegenüber allgemeinen Matrizen bieten.

In Kapitel 4 wird eine Normalform vorgestellt, die über beliebigen Grundkörpern definiert werden kann, die rationale Normalform.

Zum Abschluss widmet sich das letzte Kapitel der Anwendung einer Jordan-Normalform bei dynamischen Systemen. Die fiktive Vorlesung endet, wie sie begonnen hat, mit einem Beispiel aus der Biologie. In diesem sollen die gelernten Inhalte angewendet und gefestigt werden. Die Definitionen und Beweise wurden diverser Fachliteratur entnommen. Neben den theoretischen Ausführungen werden die Inhalte der einzelnen Kapitel durch selbsterstellte und vorgerechnete Beispiele ergänzt und anschaulicher gemacht.

2 Diagonalisierbarkeit

Sei f eine lineare Abbildung des n -dimensionalen K -Vektorraums V in sich, dann heißt f diagonalisierbar, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass in der Darstellungsmatrix ${}_B M_B(f)$ außerhalb der Diagonalen nur Nullen stehen. Die lineare Abbildung f ist also diagonalisierbar, wenn die Darstellungsmatrix bezüglich einer geeignet gewählten Basis B folgende Gestalt hat:

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

In diesem Kapitel wird der Frage nachgegangen, welche linearen Abbildungen $V \rightarrow V$ durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden können.

2.1 Ein Beispiel zur Einführung

In der Matrizenrechnung müssen oft hohe Potenzen einer quadratischen Matrix berechnet werden. Das folgende Beispiel soll die Beschäftigung mit Diagonalmatrizen motivieren. In dem Beispiel wird das Populationsmodell eines Organismus beschrieben:

Ein Organismus, der sich durch Zellteilung verdoppelt, wird betrachtet. Es gibt zwei verschiedene Typen B und C dieses Organismus, die sich pro Tag einmal teilen. Von beiden Typen werden zu Beginn 100 Individuen gezählt. Aus Typ B entstehen nach einem Tag weitere 60 Individuen des Typs B und 40 Individuen des Typs C. Aus den 100 Individuen von Typ C entstehen 60 neue Individuen des Typs B und 40 neue des Typs C. Es gelten somit folgende Rekursionsvorschriften:

$$\begin{aligned} b_t &= \frac{8}{5}b_{t-1} + \frac{3}{5}c_{t-1} \\ c_t &= \frac{2}{5}b_{t-1} + \frac{7}{5}c_{t-1} \end{aligned}$$

b_t ... Anzahl der Individuen von Typ B nach t Tagen

c_t ... Anzahl der Individuen von Typ C nach t Tagen

Dieses Gleichungssystem kann auch in Matrixschreibweise angeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} b_t \\ c_t \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} b_{t-1} \\ c_{t-1} \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 8/5 & 3/5 \\ 2/5 & 7/5 \end{pmatrix}$$

2 Diagonalisierbarkeit

Um direkt aus der Anfangspopulation den Bestand der Population nach t Zeiteinheiten zu berechnen, gilt:

$$\begin{pmatrix} b_t \\ c_t \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Für diese Berechnung ist das Potenzieren der Matrix A erforderlich. Da das Berechnen von hohen Matrixpotenzen rechnerisch sehr aufwendig ist, will man die Matrix A in eine Form bringen, von der sich ganz einfach beliebig hohe Potenzen bilden lassen, nämlich in Diagonalgestalt.

2.2 Diagonalisierbare Matrizen

Für dieses Unterkapitel wurden Martin Wohlgemuth [20], Gerd Fischer [7], Tino Arens et al. [1], Albrecht Beutelspacher [3], Christian Bär [2] sowie Jörg Liesen und Volker Mehrmann [15] herangezogen. Die lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ auf einem Vektorraum V heißt diagonalisierbar, wenn es eine geordnete Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ von V gibt, bezüglich der die Darstellungsmatrix ${}_B M_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist. Für den Fall $V = K^n$ und einer $(n \times n)$ -Matrix A gilt: Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, d.h. wenn es eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D gibt, so dass $A = SDS^{-1}$. Ein erstes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit lautet also:

Lemma 2.2.1. *Eine quadratische $(n \times n)$ -Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine geordnete Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ des Vektorraums K^n und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit der Eigenschaft*

$$Ab_1 = \lambda_1 b_1, Ab_2 = \lambda_2 b_2, \dots, Ab_n = \lambda_n b_n$$

gibt. Die Matrix $D = S^{-1}AS$ mit $S = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ist eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Beweis. 1. Teil: Wenn B wie angegeben existiert, dann folgt direkt $AS = SD$ und S invertierbar.

2. Teil: Aus der Gleichung $D = S^{-1}AS$ mit der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und einer invertierbaren Matrix $S = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ folgt durch Multiplikation mit S die Gleichung $SD = AS$, also

$$(\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n) = (Ab_1, \dots, Ab_n)$$

und somit $Ab_1 = \lambda_1 b_1, Ab_2 = \lambda_2 b_2, \dots, Ab_n = \lambda_n b_n$. $\square$

Bemerkung 2.2.2. Die geordnete Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ des K^n besteht also aus Eigenvektoren. Somit ist die Matrix $D = S^{-1}AS$ mit $S = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ als Diagonalelemente.

Mithilfe des eben formulierten Kriteriums für Diagonalisierbarkeit kann man eine Basis B mit ${}_B M_B(f) = D$ und eine Matrix S bestimmen. Bevor im folgenden Satz viele notwendige und hinreichende Kriterien für die Diagonalisierbarkeit einer linearen Abbildung f auf einem Vektorraum V zusammengefasst werden, führen wir noch folgende wichtige Begriffe ein.

Definition 2.2.3. Es sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $\lambda_i \in K$ ein Eigenwert von f . Dann ist λ_i eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_f(\lambda) := \det(A - \lambda)$ von f , deren Ordnung algebraische Vielfachheit m_a des Eigenwerts λ_i genannt wird. Darüber hinaus nennt man die Dimension des zugehörigen Eigenraums $\text{Eig}_f(\lambda_i)$ geometrische Vielfachheit m_g des Eigenwerts. Für den Eigenwert λ_i gilt stets $1 \leq m_g \leq m_a$.

Beweis. Sei $\lambda_i \in K$ ein Eigenwert der linearen Abbildung f mit der algebraischen Vielfachheit m_a und der geometrischen Vielfachheit m_g . Sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}_f(\lambda_i)$ der Dimension $r = m_g$. Wir ergänzen diese durch die Vektoren $v_{r+1}, \dots, v_n$ zu einer Basis G von V . Somit hat die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f : V \rightarrow V$ bezüglich der Basis G folgende Form

$${}_G M_G(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & C \end{array} \right)$$

mit den Matrizen $B \in K^{r \times (n-r)}$, $C \in K^{(n-r) \times (n-r)}$ und $0 \in K^{(n-r) \times r}$. Zueinander ähnliche Matrizen haben das selbe charakteristische Polynom. Daher folgt wegen der Dreiecksgestalt von ${}_G M_G(f)$

$$\chi_f = \chi_{{}_G M_G(f)} = (\lambda - X)^{m_g} \cdot \chi_C.$$

Somit ist die algebraische Vielfachheit m_a gleich m_g oder, wenn χ_C auch durch $(\lambda - X)$ teilbar ist, größer. $\square$

Definition 2.2.4. Ein Vektorraum V wird direkte Summe von Untervektorräumen $W_1, \dots, W_k$ genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Für alle $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $w_1 \in W_1, \dots, w_k \in W_k$ mit $w_1 + \dots + w_k = v$
- ii) Sind $w_1 \in W_1, \dots, w_k \in W_k$ gegeben mit $w_1 + \dots + w_k = 0$, so folgt $w_1 = \dots = w_k = 0$. Man schreibt

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k.$$

2 Diagonalisierbarkeit

Satz 2.2.5. Sei $f: V \rightarrow V$ auf dem Vektorraum V eine lineare Abbildung. Ist A eine quadratische $(n \times n)$ Matrix über K , dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist diagonalisierbar.
- (ii) Es gibt eine Basis B von V bestehend aus Eigenvektoren von f .
- (iii) Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt in $n = \dim(V)$ Linearfaktoren:

$$\chi_f = (\lambda_1 - X)^{m_a(\lambda_1)} \cdot \dots \cdot (\lambda_n - X)^{m_a(\lambda_n)},$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und für jeden Eigenwert λ_i ist die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit:

$$m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1), \dots, m_a(\lambda_n) = m_g(\lambda_n).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist $f: V \rightarrow V$ diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ von V und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dies ist gleichwertig mit $f(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, f(b_n) = \lambda_n b_n$. Die Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind somit Eigenwerte von f und die Vektoren $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ der Basis B sind die zugehörigen Eigenvektoren.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Gibt es eine Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ von V aus Eigenvektoren von f , so gilt $f(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, f(b_n) = \lambda_n b_n$ für die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und es folgt, dass

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von f und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann ist

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und für das charakteristische Polynom gilt:

$$\chi_f = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - X & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n - X \end{pmatrix} = (\lambda_1 - X) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - X)$$

Somit zerfällt das charakteristische Polynom χ_f in Linearfaktoren über K .

Es gilt noch zu zeigen, dass für jeden Eigenwert λ_i die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist. Kommt der Eigenwert λ_i genau m_i -mal auf der Diagonalen der Diagonalmatrix ${}_B M_B(f) = D$ vor, dann hat er die algebraische Vielfachheit $m_a(\lambda_i) = m_i$. Dies ist genau dann der Fall, wenn m_i Vektoren der Basis B Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ_i sind. Diese linear unabhängigen Vektoren sind Elemente des Eigenraums $\text{Eig}_f(\lambda_i)$ und somit ist

$$m_g(\lambda_i) = \dim \text{Eig}_f(\lambda_i) \geq m_a(\lambda_i).$$

Da aber $m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ gilt, folgt $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Es seien $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte der linearen Abbildung f mit ihren jeweiligen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten $m_a(\hat{\lambda}_i)$ und $m_g(\hat{\lambda}_i)$. Da das charakteristische Polynom in n verschiedene Linearfaktoren zerfällt, gilt

$$\sum_{i=1}^k m_a(\hat{\lambda}_i) = n = \dim(V).$$

Da $m_a(\hat{\lambda}_i) = m_g(\hat{\lambda}_i)$ folgt

$$\sum_{i=1}^k m_g(\hat{\lambda}_i) = n = \dim(V).$$

Aus $\text{Eig}_f(\lambda_j) \cap \bigoplus_{i=1}^k \text{Eig}_f(\lambda_i) = \{0\}$ für alle $j = 1, \dots, k$ und weil die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, folgt

$$\text{Eig}_f(\hat{\lambda}_1) \oplus \text{Eig}_f(\hat{\lambda}_2) \oplus \dots \oplus \text{Eig}_f(\hat{\lambda}_k) = V.$$

Wählt man für die jeweiligen Eigenräume $\text{Eig}_f(\hat{\lambda}_i)$, $i = 1, \dots, k$ eine Basis, so bekommt man insgesamt eine Basis von V , die sich aus Eigenvektoren von f zusammensetzt. $\square$

Aus dem Satz kann man folgern, dass eine $(n \times n)$ -Matrix, die n verschiedene Eigenwerte hat, diagonalisierbar ist, da das charakteristische Polynom zerfällt und für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit, die in diesem Fall gleich 1 ist, mit der geometrischen Vielfachheit, die nach Definition größer gleich 1 ist, übereinstimmt.

2 Diagonalisierbarkeit

Beispiel 2.2.6. Wir bestimmen, falls vorhanden, die Diagonalmatrix zur quadratischen (3×3) Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Als ersten Schritt bestimmt man das charakteristische Polynom χ_A von A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 6 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 6 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 6 \\ 6 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) \cdot ((3 - \lambda)^2 - 36) = -(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda - 27) = \\ &= -(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 3) \cdot (\lambda - 9) = 0 \end{aligned}$$

Somit hat die Matrix A drei verschiedene Eigenwerte:

1. $\lambda_1 = 1$
2. $\lambda_2 = -3$
3. $\lambda_3 = 9$

Als nächstes bestimmt man für jeden Eigenwert zugehörige Eigenvektoren:

1. $\lambda_1 = 1$

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Als Lösung für $A - \lambda_1 E$, erhält man $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert 1.

2. $\lambda_2 = -3$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Als Eigenvektor zum Eigenwert -3 erhält man also $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $\lambda_3 = 9$

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & 0 \\ 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 9.

Da bei jedem Eigenwert die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen, ist die Matrix A diagonalisierbar mit der Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Einträge der Diagonalmatrix D sind die Eigenwerte der Matrix A. Somit gilt:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.2.7. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

hat das charakteristische Polynom $\chi_A = -(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)$. Die Matrix A hat also den zweifachen Eigenwert 1 und den einfachen Eigenwert 2. Als Eigenräume erhalten wir

$$\text{Eig}_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{Eig}_A(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Somit hat der Eigenwert 1 die algebraische Vielfachheit 2 und die geometrische Vielfachheit 1 und $m_a(1) \neq m_g(1)$. Die Matrix A ist also nicht diagonalisierbar.

Auch mithilfe des Minimalpolynoms einer Matrix kann man erkennen, ob eine Matrix diagonalisierbar ist.

2.3 Minimalpolynom einer Matrix

Dieses Unterkapitel stützt sich auf Stefan Waldmann [19] und Tino Arens et al. [1], Christian Bär [2] sowie Christian Karpfinger und Hellmuth Stachel [11]. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist eine quadratische Matrix A eine Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms χ_A . Viele weitere Polynome haben die Matrix A als Nullstelle. Gesucht ist allerdings ein ganz bestimmtes Polynom.

Definition 2.3.1. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Dann wird μ_A Minimalpolynom von A genannt, falls

- (i) $\mu_A(A) = 0$,
- (ii) μ_A minimalen Grad unter allen Polynomen $p \in K[X]$ mit $p(A) = 0$ hat,
- (iii) der führende Koeffizient von μ_A auf 1 normiert ist.

Proposition 2.3.2. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$.

- (i) Es existiert genau ein Minimalpolynom μ_A von A .
- (ii) Ist $p \in K[X]$ mit $p(A) = 0$, so gibt es ein $q \in K[X]$ mit

$$p = \mu_A \cdot q.$$

Beweis. Man betrachte die Menge aller Polynome p über dem Körper K , die die Matrix A als Nullstelle haben:

$$I = \{p \in K[X] \mid p(A) = 0\}.$$

Existenz: Nach dem Satz von Cayley-Hamilton liegt das vom Nullpolynom 0 verschiedene charakteristische Polynom χ_A in I , sodass die Menge $I \setminus \{0\}$ nichtleer ist. Weiters gibt es Polynome $p \in K[X]$ mit führendem Koeffizienten 1, für die $p(A) = 0$ gilt. Unter diesen wählt man eines von minimalem Grad und bezeichnet es mit μ_A , womit die Existenz gezeigt ist.

Ist $p \in K[X]$ beliebig, dann gibt es $r, q \in K[X]$ mit

$$p = q \cdot \mu_A + r \text{ und } \deg r < \deg \mu_A,$$

die man mittels Polynomdivision mit Rest findet. Gilt $p(A) = 0$, folgt

$$0 = p(A) = q(A) \cdot \mu_A(A) + r(A).$$

Da $\mu_A(A) = 0$, folgt sofort, dass $r(A) = 0$. Wäre r ein nichtkonstantes Polynom, so könnte man den führenden Koeffizienten wieder auf 1 normieren und man hätte ein Polynom mit den Eigenschaften des Minimalpolynoms von echt kleinerem Grad gefunden. Da dies aber der Minimalität von μ_A widerspricht, gilt $r = 0$. Somit gilt (ii).

Eindeutigkeit: Seien μ_A und η_A zwei Minimalpolynome. Dann gibt es $q, s \in K[X]$ mit

$$\mu_A = q \cdot \eta_A \text{ und } \eta_A = s \cdot \mu_A.$$

Somit gilt $\mu_A = q \cdot s \cdot \mu_A$. Das Polynom μ_A hat den führenden Koeffizienten 1, woraus $\deg(q \cdot s)$ und $q \cdot s = 1$ folgt. Daher ist $q = \frac{1}{s} \in K$ ein konstantes Polynom. Da beide Minimalpolynome denselben führenden Koeffizienten 1 haben, muss $q = s = 1$ gelten und damit auch $\mu_A = \eta_A$. $\square$

2.3 Minimalpolynom einer Matrix

Somit kann man zu jeder quadratischen Matrix dieses eindeutig bestimmte Minimalpolynom finden. Die folgenden Eigenschaften des Minimalpolynoms führen zu einer einfachen Methode, das Minimalpolynom zu bestimmen, sofern das charakteristische Polynom bereits bestimmt wurde.

Proposition 2.3.3. *Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit dem charakteristischen Polynom χ_A und dem Minimalpolynom μ_A . Dann gilt:*

- (i) χ_A ist ein Vielfaches von μ_A
- (ii) besitzt χ_A die Nullstelle λ , so ist λ auch eine Nullstelle von μ_A .

Beweis. (i) Es sei P ein Polynom ungleich dem Nullpolynom, das die Gleichung $P(A) = 0$ erfüllt. Dividiert man das Polynom P mittels Polynomdivision mit Rest durch μ_A , erhält man die Polynome Q und R mit

$$P = Q \cdot \mu_A + R, \text{ wobei } R = 0 \text{ oder } \deg(R) < \deg \mu_A.$$

Ist das Polynom $R = P - Q \cdot \mu_A$ nicht das Nullpolynom, dann gilt

$$R(A) = P(A) - Q(A) \cdot \mu_A(A) = 0 - Q(A) \cdot 0 = 0$$

und das Polynom R ist von kleinerem Grad als das Minimalpolynom μ_A und besitzt die Matrix A als Nullstelle. Aus diesem Widerspruch folgt, dass $R = 0$ gelten muss. Somit erhält man $P = Q \cdot \mu_A$. Folglich ist also P ein Vielfaches von μ_A . Nach dem Satz von Cayley - Hamilton erfüllt das charakteristische Polynom $\chi_A(A) = 0$. Somit ist χ_A ein Vielfaches von μ_A .

(ii) Ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A , so ist λ ein Eigenwert der Matrix A . Es gibt also ein $v \in K^n$, $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$. Daher gilt $A^k v = \lambda^k v$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und auch für jedes Polynom $P = a_r X^r + \dots + a_1 X + a_0 \in K[X]$:

$$\begin{aligned} P(A)v &= (a_r A^r + \dots + a_1 A + a_0 E_n)v \\ &= a_r A^r v + \dots + a_1 A v + a_0 E_n v \\ &= a_r \lambda^r v + \dots + a_1 \lambda v + a_0 v \\ &= (a_r \lambda^r + \dots + a_1 \lambda + a_0)v \\ &= P(\lambda)v. \end{aligned}$$

Für $P = \mu_A$ erhält man aus $\mu_A(A) = 0$ somit $\mu_A(\lambda) = 0$, da $v \neq 0$ gilt. □

Das Minimalpolynom ist somit ein Teiler des charakteristischen Polynoms, bei dem jeder Linearfaktor des charakteristischen Polynoms auch vorkommt.

Beim Bestimmen des Minimalpolynoms, ohne vorher das charakteristische Polynom zu ermitteln, bildet man sukzessive die Potenzen $A^0, A^1, A^2, \dots$. Das kleinste k , für das die Matrizen $A^0, A^1, A^2, \dots, A^k$ linear abhängig sind, für das also

$$\lambda_0 A^0 + \lambda_1 A^1 + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_k A^k = 0$$

2 Diagonalisierbarkeit

mit $\lambda_i \in K$ gilt, liefert das Minimalpolynom

$$\mu_A = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \dots + \lambda_k X^k \in K[X].$$

Da nun klar ist, wie man das Minimalpolynom μ_A finden kann, kann nun ein weiteres Kriterium für Diagonalisierbarkeit angegeben werden.

Satz 2.3.4. *Die quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom μ_A in Linearfaktoren zerfällt und keine mehrfachen Nullstellen besitzt.*

Beweis. Die Matrix A sei diagonalisierbar und besitze die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Jedes Element $v \in K^n$ ist darstellbar als Summe

$$v = v_1 + \dots + v_r,$$

wobei $v_i \in \text{Eig}_A(\lambda_i)$ gilt, weil es eine Basis des K^n aus Eigenvektoren der Matrix A gibt. Man betrachte das Polynom

$$P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r).$$

Mit der Darstellung eines beliebigen Vektors $v \in K^n$ wie oben als Summe ergibt sich für das Polynom P

$$\begin{aligned} P(A)v &= P(A)v_1 + \dots + P(A)v_r \\ &= P(\lambda_1)v_1 + \dots + P(\lambda_r)v_r = 0, \end{aligned}$$

da $P(\lambda_i) = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$. Daher muss $P(A) = 0$ die Nullmatrix sein und die Matrix A ist somit Nullstelle des Polynoms P . Da P normiert ist und nach Proposition 2.3.3 ein Polynom minimalen Grades mit diesen Nullstellen ist, muss P das Minimalpolynom μ_A von A sein. Es gilt also

$$\mu_A = P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r).$$

Für die Umkehrung wird nun mit Induktion nach der Dimension $n = \dim(K^n)$ gezeigt, dass die quadratische $(n \times n)$ -Matrix A diagonalisierbar ist, wenn das Minimalpolynom μ_A der Matrix A in Linearfaktoren zerfällt und keine mehrfache Nullstelle besitzt. Die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des Minimalpolynoms sind hierbei verschieden.

Wenn $n = 1$, dann ist die Matrix $A = (\lambda_a)$ bereits in Diagonalgestalt.

Es sei also $n > 1$:

1. Fall ($r = 1$): Weil für $r = 1$ das Minimalpolynom $\mu_A = X - \lambda_1$ ist, folgt $A - \lambda_1 E_n = 0$, sodass A schon Diagonalform hat und somit auch diagonalisierbar ist.

2. Fall ($r > 1$): Man betrachte die beiden folgenden Untervektorräume U und W des K^n zum Eigenwert λ_1 von A :

$$\begin{aligned} U &= \ker(A - \lambda_1) = \{v \in K^n \mid Av - \lambda_1 v = 0\} \text{ und} \\ W &= \text{Bild}(A - \lambda_1) = \{w \in K^n \mid w = Av - \lambda_1 v, v \in K^n\}, \end{aligned}$$

2.3 Minimalpolynom einer Matrix

d.h. U ist der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_1 und W das Bild der linearen Abbildung $v \mapsto (A - \lambda_1 E_n)v$. Wir zeigen nun, dass

$$K^n = U \oplus W$$

gilt. Wir dividieren das Polynom $S = (X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_r)$, das vom Grad mindestens 1 ist, durch das Polynom $X - \lambda_1$ vom Grad 1 mit Rest. Man erhält also einen Rest vom Grad kleiner als 1, also

$$S = (X - \lambda_1) \cdot Q + R \text{ mit } Q \in K[X] \text{ und } R \in K[X], \deg R < 1.$$

Die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind alle verschieden, weswegen R nicht null ist, d.h. $R \in K \setminus \{0\}$.

Setzt man nun in die Gleichung die Matrix A ein und wendet die Matrizen auf ein beliebiges $v \in K^n$ an, erhält man

$$(A)v = (A - \lambda_1 E_n) \cdot Q(A)v + Rv \text{ mit } R \in K \setminus \{0\}.$$

Nach dem Kürzen von $R \neq 0$ kommt man auf folgende Gleichung für $v \in K^n$:

$$v = R^{-1}[S(A)v] - R^{-1}[(A - \lambda_1 E_n) \cdot Q(A)v] \text{ mit } R \in K \setminus \{0\}.$$

Aus

$$(A - \lambda_1 E_n)S(A)v = \mu_A(A)v = 0v = 0$$

folgt, dass $S(A)v$ ein Element von U ist.

Wegen $Q(A)v \in K^n$ ist $(A - \lambda_1 E_n) \cdot Q(A)v$ ein Element von W . Folglich gilt:

$$K^n = U + W.$$

Wegen der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt außerdem

$$n = \dim(K^n) = \dim(U) + \dim(W).$$

Aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgt schließlich, dass die Summe direkt ist.

Sei $w \in W$, dann gibt es ein $v \in K^n$ mit $w = (A - \lambda_1 E_n)v$. Weil

$$Aw = A(A - \lambda_1 E_n)v = (A - \lambda_1 E_n)Av \in W,$$

gilt

$$\{Aw | w \in W\} \subseteq W.$$

Zu einer geordneten Basis $(u_1, \dots, u_r)$ von U ergänzt man linear unabhängige Vektoren aus W , so dass man eine Basis

$$B = (u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_n)$$

2 Diagonalisierbarkeit

des K^n erhält. Für die Darstellungsmatrix $\hat{A}$ der lineare Abbildung $f_A : v \mapsto Av$ bezüglich der Basis B gilt

$$\hat{A} = {}_B M_B(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \lambda_1 & \\ \hline & 0 & & C \end{array} \right).$$

Da die Matrizen A und $\hat{A}$ ähnlich sind, haben sie dasselbe Minimalpolynom. Die Matrix C hat also das Minimalpolynom

$$\mu_C = (X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$$

Wegen $m = n - r = \dim(W) < n$ ist die $(m \times m)$ -Matrix C nach Induktionsvoraussetzung diagonalisierbar und somit auch A . $\square$

2.4 Fortsetzung des Einführungsbeispiels

Das Wissen zur Diagonalisierbarkeit von Matrizen können wir nun auch auf das Anfangsbeispiel anwenden: Eine der wichtigsten Eigenschaften von Diagonalmatrizen ist es nämlich, dass man Potenzen davon auf sehr einfache Art berechnen kann.

Ist $A \in K^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix, existiert eine invertierbare Matrix $S \in K^{n \times n}$ mit

$$D = S^{-1}AS.$$

Aus der Gleichung folgt durch Umformungen

$$A = SDS^{-1}$$

also gilt für jedes $t \in \mathbb{N}$:

$$A^t = (SDS^{-1})^t = \underbrace{SDS^{-1}SDS^{-1} \dots SDS^{-1}}_{t\text{-mal}} = SD^tS^{-1}$$

Somit erhält man die t -te Potenz der Matrix A durch bilden der t -ten Potenz einer Matrix in Diagonalgestalt und dem Bilden des Produkts aus drei Matrizen.

Um nun eine explizite Formel für den Bestand der Population nach t Zeiteinheiten herzuleiten, muss man zuerst ermitteln, ob die Matrix A diagonalisierbar ist. Die Matrix A besitzt den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 2$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 lautet $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.4 Fortsetzung des Einführungsbeispiels

Da die Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte hat, ist sie diagonalisierbar mit der Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix D ist somit:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Bestand der Population nach t Zeiteinheiten lässt sich also folgendermaßen berechnen:

$$\begin{pmatrix} b_t \\ c_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

Nach den Regeln der Matrixmultiplikation kann man die explizite Formel noch vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} b_t \\ c_t \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^t + 2 & 3 \cdot 2^t - 3 \\ 2 \cdot 2^t - 2 & 2 \cdot 2^t + 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

3 Die Jordan-Normalform

Dieses Kapitel basiert auf Gerd Fischer und Boris Springborn [6], Tino Arens et al. [1], Jörg Liesen und Volker Mehrmann [15], Gerd Fischer [7], Laurenz Göllmann [8], Christian Bär [2] sowie Christian Karpfinger und Hellmuth Stachel [11].

Wie das Einführungsbeispiel bereits gezeigt hat, lassen sich von diagonalisierbaren Matrizen im Vergleich zu allgemeinen und Dreiecksmatrizen beliebige Potenzen auf einfache Art und Weise berechnen. Allerdings kann nicht jede Matrix diagonalisiert werden. Ziel dieses Kapitels ist es, eine Basis B von V zu finden, so dass ${}_B M_B(f)$ eine obere Dreiecksform hat, die möglichst nahe an einer Diagonalmatrix ist. Denn den Vorteil, beliebige Potenzen von Matrizen leicht zu berechnen, hat auch ein weiterer Typ von Matrizen. Auch beliebige Potenzen von Matrizen, zu denen eine Jordan-Normalform existiert, können effizient berechnet werden. Unter der Annahme, dass das charakteristische Polynom χ_f in Linearfaktoren zerfällt, wird in weiterer Folge eine Basis B von V konstruiert werden, für die ${}_B M_B(f)$ eine Blockdiagonalgestalt hat

$${}_B M_B(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix},$$

wobei jeder Diagonalblock von der Form

$$J_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda_i \in K$ ist. Die quadratische Matrix J_i ist eine spezielle obere Dreiecksmatrix mit den Eintragungen λ_i auf der Hauptdiagonalen. In der oberen Nebendiagonalen befinden sich Einsen und die restlichen Eintragungen sind Nullen. Eine Matrix dieser Form nennt man Jordan-Block zum Eigenwert λ_i . Die Jordan-Normalform ist ein einfacher Vertreter der Äquivalenzklasse der zu einer trigonalisierbaren Matrix ähnlichen Matrix. Eine Matrix ist trigonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Definition 3.0.1. Existiert zu einer linearen Abbildung eines n -dimensionalen K -Vektorraums V eine geordnete Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ von V , sodass

3 Die Jordan-Normalform

$${}_B M_B(f) = J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix}$$

eine Jordan-Normalform mit Jordan-Kästchen $J_1, \dots, J_l$ ist, so heißt B Jordan-Basis von V zu f und die Matrix J Jordan-Normalform von f .

Als erstes wird ein wesentliches Hilfsmittel für die Potenzbildung mithilfe einer Jordan-matrix eingeführt.

Bemerkung 3.0.2. Für Matrizen $D, N \in K^{n \times n}$ mit $DN = ND$ und jede natürliche Zahl k gilt:

$$(D + N)^n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^{k-i} N^i.$$

Diese Binomialformel wird unten benutzt, um beliebige Potenzen zu bilden.

Definition 3.0.3. Eine quadratische Matrix N heißt nilpotent, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$N^r = 0.$$

Eine Matrix nennt man also nilpotent, wenn eine gewisse Potenz dieser Matrix die Nullmatrix ergibt. Die kleinste natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die $N^k = 0$ gilt, wird Nilpotenzindex genannt.

Bemerkung 3.0.4. Ist J eine Jordan-Normalform, so gibt es eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N mit

$$J = D + N \text{ und } DN = ND.$$

Die Darstellung der Matrix J als Summe wird Jordan-Zerlegung von J genannt.

Bemerkung 3.0.5. Kann man eine Matrix A in eine Summe einer Diagonalmatrix D und einer nilpotenten Matrix N mit dem Nilpotenzindex k aufspalten, also

$$A = D + N,$$

so gilt falls $DN = ND$:

$$A^r = D^r + rD^{r-1}N + \dots + \binom{r}{k-1} D^{r-k+1} N^{k-1}.$$

Für jede lineare Abbildung eines endlichdimensionalen Vektorraums, deren charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, kann eine Basis gewählt werden, so dass die Darstellungsmatrix eine Jordan-Normalform besitzt. Dies gilt speziell für jede nilpotente Matrix. Im folgenden Abschnitt wird der Satz von der Jordanschen Normalform vorgestellt.

Bevor der Existenzsatz für die Jordan-Normalform bewiesen werden kann, werden vier Lemmata, die als Hilfsmittel für den Beweis dienen, behandelt.

3.1 Existenz einer Jordan-Normalform

Lemma 3.1.1. *Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Ist $V = U \oplus W$ die direkte Summe zweier f -invarianter Untervektorräume U und W , so gilt:*

- (i) $\varphi = f|_U$ und $\psi = f|_W$ sind lineare Abbildungen von U und W in sich.
- (ii) Für $U, W \neq \{0\}$ gilt $\chi_f = \chi_\varphi \chi_\psi$
- (iii) Sind B_U und B_W Jordan-Basen von φ und ψ , so ist $B_U \cup B_W$ eine Jordan-Basis von f .

Beweis. (i) Da U und W invariant sind unter f , gilt $\varphi(U) \subseteq U$ und $\psi(W) \subseteq W$. Somit sind φ und ψ lineare Abbildungen auf U und W .

(ii) Das charakteristische Polynom einer linearen Abbildung ist zugleich auch das charakteristische Polynom einer Darstellungsmatrix bezüglich einer beliebigen Basis. Es seien B_U und B_W beliebige Basen von U und W . Aufgrund der direkten Summe ist die Vereinigung $B = B_U \cup B_W$ eine Basis von V . Sind ${}_{B_U}M_{B_U}(\varphi)$ und ${}_{B_W}M_{B_W}(\psi)$ die Darstellungsmatrizen der linearen Abbildungen φ und ψ , erhält man einfach als Darstellungsmatrix ${}_BM_B(f)$ von f bezüglich der Basis B von V

$${}_BM_B(f) = \begin{pmatrix} {}_{B_U}M_{B_U}(\varphi) & 0 \\ 0 & {}_{B_W}M_{B_W}(\psi) \end{pmatrix}.$$

Bildet man das charakteristische Polynom von ${}_BM_B(f)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \begin{vmatrix} {}_{B_U}M_{B_U}(\varphi) - XE & 0 \\ 0 & {}_{B_W}M_{B_W}(\psi) - XE \end{vmatrix} = \\ &= |{}_{B_U}M_{B_U}(\varphi) - XE| \cdot |{}_{B_W}M_{B_W}(\psi) - XE| = \chi_\varphi(X) \cdot \chi_\psi(X) \end{aligned}$$

(iii) Diese Aussage folgt mittels Darstellungsmatrix ${}_BM_B(f)$ aus dem Beweis von Aussage (ii). Denn, wenn ${}_{B_U}M_{B_U}(\varphi)$ und ${}_{B_W}M_{B_W}(\psi)$ Jordan-Normalformen sind, ist auch ${}_BM_B(f)$ eine. $\square$

Lemma 3.1.2. *Sei $U \subseteq V$ ein f -invarianter Untervektorraum eines K -Vektorraums V . Dann gilt:*

- (i) U ist ein Untervektorraum von $f^{-1}(U)$, also $U \subseteq f^{-1}(U)$.
- (ii) Jeder Untervektorraum W von V mit der Eigenschaft $U \subseteq W \subseteq f^{-1}(U)$ ist f -invariant, d.h. $f(W) \subseteq W$.

3 Die Jordan-Normalform

(iii) Jeder Untervektorraum W von V mit der Eigenschaft $W \subseteq \ker(f)$ ist f -invariant, also $f(W) \subseteq W$.

(iv) Jeder Untervektorraum W von V mit der Eigenschaft $\text{Bild}(f) \subseteq W$ ist f -invariant, d.h. $f(W) \subseteq W$.

Beweis. (i) Da U f -invariant ist, gilt $f(u) \in U$ für alle $u \in U$. Daraus folgt $u \in f^{-1}(U)$ für alle $u \in U$ und somit $U \subseteq f^{-1}(U)$.

(ii) Da $W \subseteq f^{-1}(U)$ gilt $w \in f^{-1}(u)$ für alle $w \in W$. Daraus folgt $f(w) \in U$. Wegen $U \subseteq W$ gilt also $f(w) \in W$ für alle $w \in W$, d.h. $f(W) \subseteq W$.

(iii) Diese Aussage folgt aus (ii) mit dem f -invarianten Untervektorraum $U = \{0\}$ von V .

(iv) Aus $f(W) \subseteq \text{Bild}(f)$ folgt die Behauptung direkt aus $\text{Bild}(f) \subseteq W$. $\square$

Lemma 3.1.3. Sei f eine lineare Abbildung eines n -dimensionalen K -Vektorraums V mit $n \geq 2$.

Es gilt $V = U \oplus W$, wobei U und W echte f -invariante Unterräume von V sind, d.h. $U, W \subsetneq V$, $f(U) \subseteq U$, $f(W) \subseteq W$, falls das Bild von f den Kern von f nicht enthält, d.h. $\ker(f) \not\subseteq \text{Bild}(f)$.

Beweis. Für den Beweis unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $\ker f = V$, das bedeutet die lineare Abbildung f ist die Nullabbildung. In diesem Fall ist jeder Untervektorraum f -invariant und daher wähle man für U einen beliebigen eindimensionalen Untervektorraum und für W das Komplement zu U in V . So sind dann U und W zwei echte f -invariante Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$.

2. Fall: $\ker f \subsetneq V$. Man wähle eine Basis B_0 von $\ker(f) \cap \text{Bild}(f)$,

$$\ker(f) \cap \text{Bild}(f) = \langle B_0 \rangle$$

,
und erweitere sie zu einer Basis $B_0 \cup B_1$ von $\ker(f)$,

$$\ker(f) = \langle B_0 \cup B_1 \rangle,$$

und zu einer Basis $B_0 \cup B_2$ von $\text{Bild}(f)$,

$$\text{Bild}(f) = \langle B_0 \cup B_2 \rangle.$$

Die Menge $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ ist linear unabhängig und man erweitert sie mit weiteren Vektoren aus einer Menge B_3 zu einer Basis

$$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

von V . Man wähle zwei Untervektorräume U und W von V in der Form

$$U = \langle B_1 \rangle \text{ und } W = \langle B_0 \cup B_2 \cup B_3 \rangle.$$

3.1 Existenz einer Jordan-Normalform

Nach Lemma 3.1.2 (iii) und (iv) sind die Untervektorräume U und W f -invariant. Ebenso gilt $V = U \oplus W$, da $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \subseteq U + W$.

Wegen $\ker(f) \not\subseteq \text{Bild}(f)$ gilt $B_1 \neq 0$, also $U \neq \{0\}$. Somit folgt $W \neq V$.

Wegen $\ker(f) \neq V$ folgt $B_1 \subsetneq B$, und daher gilt auch $U \neq V$. $\square$

Lemma 3.1.4. *Sei f eine lineare Abbildung eines n -dimensionalen K -Vektorraums V . Falls $\text{Bild}(f) = U' \oplus W'$ mit f -invarianten Untervektorräumen U' und W' von V gilt, gibt es Untervektorräume U und W von V mit*

- (i) $V = U \oplus W$,
- (ii) $U' \subseteq U$ und $W' \subseteq W$,
- (iii) U und W sind f -invariant.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $v \in V$ ein $u' \in U'$ und ein $w' \in W'$ mit $f(v) = u' + w'$. Da $U' \subseteq f(V)$, gibt es ein $u \in V$ mit $u' = f(u)$, d.h. $u \in f^{-1}(U')$.

Für die Differenz $w = v - u$ folgt also

$$f(w) = f(v) - f(u) = f(v) - u' = w' \in W',$$

also $v = u + w \in f^{-1}(U') + f^{-1}(W')$. Es gilt also $V = f^{-1}(U') + f^{-1}(W')$.

Nach Lemma 3.1.2 (i) gilt $U' \subseteq f^{-1}(U')$. Es gibt einen Untervektorraum C von V mit

$$((f^{-1}(U') \cap f^{-1}(W')) + U') \oplus C = f^{-1}(U'). \quad *$$

Ebenso gilt wegen Lemma 3.1.2 (i) $W' \subseteq f^{-1}(W')$ und $U' \cap W' = \{0\}$. Daher gibt es einen Untervektorraum F von V mit

$$((U' \cap f^{-1}(W')) \oplus \underbrace{W'}_W) \oplus F = f^{-1}(W').$$

Die Untervektorräume U und W werden nun wie folgt definiert:

$$U = U' \oplus C \text{ und } W = W' \oplus F.$$

Daraus folgt $U' \subseteq U$, $W' \subseteq W$ sowie

$$U \subseteq f^{-1}(U') \text{ und } W \subseteq f^{-1}(W').$$

3 Die Jordan-Normalform

Dies bedeutet, dass U und W beide f -invariant sind.
Es gelten die Inklusionen

$$\begin{aligned} f^{-1}(U') &\subseteq f^{-1}(W') + U' + C \\ f^{-1}(W') &\subseteq U' + W' + F, \\ \text{sowie } U' &\subseteq U, W' \subseteq W, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} V &= f^{-1}(U') + f^{-1}(W') \subseteq U + W + C + F \\ &= U + W \end{aligned}$$

folgt.

Sei $v \in U \cap f^{-1}(W')$. Dann gilt $v = u' + c$ mit eindeutigen $u' \in U'$ und $c \in C$, da $U = U' \oplus C$. Es gilt $U \subseteq f^{-1}(U')$, d.h., dass $v \in f^{-1}(U') \cap f^{-1}(W')$. Somit gilt

$$c = v - u' \in (f^{-1}(U') \cap f^{-1}(W')) + U'.$$

Aus * folgt $c = 0$ und daher $v = u' \in U' \cap f^{-1}(W')$. Also gilt $U \cap f^{-1}(W') = U' \cap f^{-1}(W')$.

Wegen $W \subseteq f^{-1}(W')$ und $W = W' + F$ erhalten wir

$$\begin{aligned} U \cap W &= U \cap (f^{-1}(W') \cap W) \\ &= (U \cap f^{-1}(W')) \cap W \\ &= (U' \cap f^{-1}(W')) \cap (W' + F) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Somit gilt $U \cap W = \{0\}$. □

Nun stehen alle Hilfsmittel für den Existenzsatz einer Jordan-Normalform bereit.

Satz 3.1.5. *Für eine lineare Abbildung f eines n -dimensionalen K -Vektorraums V , $n \in \mathbb{N}$, sind äquivalent:*

- (i) *f besitzt eine Jordan-Normalform*
- (ii) *Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt über K in Linearfaktoren.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Besitzt die lineare Abbildung f eine Jordan-Normalform, so ist sie eine obere Dreiecksmatrix und f ist trigonalisierbar. Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt also über K in Linearfaktoren.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Zerfalle das charakteristische Polynom χ_f der linearen Abbildung eines n -dimensionalen K -Vektorraums V über K in Linearfaktoren. Die Existenz einer Jordan-Normalform kann mittels Induktion nach der Dimension n des Vektorraums V bewiesen

3.1 Existenz einer Jordan-Normalform

werden.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ stimmt die Behauptung, da die Darstellungsmatrix ${}_B M_B(f) = (\lambda) \in K^{1 \times 1}$ für jede beliebige Basis B bereits Jordan-Normalform hat.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für alle Vektorräume V mit $1 \leq \dim V \leq n-1$ und alle linearen Abbildungen f von V in sich, deren charakteristisches Polynom χ_f in Linearfaktoren zerfällt, richtig.

Induktionsschritt: Sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von χ_f , also $\chi_f(\lambda) = 0$. Dann gilt

$$\ker(f - \lambda \operatorname{id}_V) \neq \{0\},$$

sodass

$$\dim \operatorname{Bild}(f - \lambda \operatorname{id}_V) < n$$

sein muss.

Hier muss eine Fallunterscheidung getroffen werden:

1. *Fall:* $\ker(f - \lambda \operatorname{id}_V) \not\subseteq \operatorname{Bild}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$: Nach Lemma 3.1.3 gibt es $(f - \lambda \operatorname{id}_V)$ -invariante Unterräume U und W von V mit $\dim U, \dim W < n$ und $V = U \oplus W$. Weil für jedes $u \in U$ und $w \in W$ gilt:

$$\begin{aligned} (f - \lambda \operatorname{id}_V)(u) &= f(u) - \lambda u \in U \text{ und} \\ (f - \lambda \operatorname{id}_V)(w) &= f(w) - \lambda w \in W, \end{aligned}$$

sind die Unterräume U und W auch f -invariant.

Nach Lemma 3.1.1 (ii) ist das charakteristische Polynom von f das Produkt der charakteristischen Polynome von $\varphi = f|_U$ und $\psi = f|_W$, d.h.

$$\chi_f = \chi_\varphi \chi_\psi.$$

Auch die charakteristischen Polynome χ_φ und χ_ψ zerfallen in Linearfaktoren. Aufgrund der Induktionsannahme gibt es Jordan-Basen B_U und B_W bezüglich φ und ψ . Nach Lemma 3.1.1 (iii) ist die Vereinigung dieser Basen $B = B_U \cup B_W$ eine Jordan-Basis bezüglich f von V .

2. *Fall:* $\ker(f - \lambda \operatorname{id}_V) \subseteq \operatorname{Bild}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$: Nach Lemma 3.1.2 (iv) ist der Untervektorraum $S = \operatorname{Bild}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$ invariant unter $f - \lambda \operatorname{id}_V$ und somit auch unter f , es gilt also $f(S) \subseteq S$. Die lineare Abbildung $f|_S$ besitzt ein charakteristisches Polynom $\chi_{f|_S}$, das in Linearfaktoren zerfällt.

Da $\dim \operatorname{Bild}(f - \lambda \operatorname{id}_V) < n$, besitzt S nach der Induktionsvoraussetzung eine Jordan-Basis $B_S = (b_1, \dots, b_k)$ bezüglich $f|_S$. Die Darstellungsmatrix

$$A_S = {}_{B_S} M_{B_S}(f|_S)$$

3 Die Jordan-Normalform

ist eine Jordan- Normalform von $f|_S$.

An dieser Stelle muss eine weitere Fallunterscheidung getroffen werden.

Fall 2a: Die Matrix A_S enthält mindestens zwei Jordan-Kästchen, d.h.

$$A_S = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Das Jordan- Kästchen A_1 bestehe genau aus i Zeilen, $1 \leq i < k$. Die beiden zueinander komplementären Untervektorräume

$$U' = \langle b_1, \dots, b_i \rangle \text{ und } W' = \langle b_{i+1}, \dots, b_k \rangle$$

von S sind $f|_S$ -invariant. Somit sind sie auch f -invariant und auch $(f - \lambda \text{id}_V)$ -invariant. So ist also S die direkte Summe zweier $(f - \lambda \text{id}_V)$ -invarianter Untervektorräume U' und W' :

$$U' \oplus W' = S = \text{Bild}(f - \lambda \text{id}_V).$$

Lemma 3.1.4 besagt also, dass es Untervektorräume U und W von V mit $U' \subseteq U$ und $W' \subseteq W$, die unter $f - \lambda \text{id}_V$ invariant sind und $V = U \oplus W$ erfüllen, gibt. Weil $U', W' \neq \{0\}$ gilt, folgt auch $U, W \neq \{0\}$. Nach Lemma 3.1.1 (ii) gilt

$$\chi_f = \chi_{f|_U} \cdot \chi_{f|_W}.$$

Daraus folgt, dass $\chi_{f|_U}$ und $\chi_{f|_W}$ in Linearfaktoren zerfallen. Wegen $U, W \neq \{0\}$ gilt $\dim U, \dim W < n$. Aus der Induktionsvoraussetzung und dem Lemma 3.1.1 (iii) folgt die Behauptung somit in diesem Fall.

Fall 2b: Die Jordan-Matrix A_S ist ein Jordan-Kästchen, d. h.

$$A_S =_{B_S} M_{B_S}(f|_S) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \mu \end{pmatrix}.$$

Weil λ ein Eigenwert von f ist und $\ker(f - \lambda \text{id}_V) \subseteq \text{Bild}(f - \lambda \text{id}_V) = S$ nach Voraussetzung ist, erhält man

$$\begin{aligned} \{0\} \neq \ker(f - \lambda \text{id}_V) &= \ker((f - \lambda \text{id}_V)|_S) \\ &= \ker(f|_S - \lambda \text{id}_S). \end{aligned}$$

3.1 Existenz einer Jordan-Normalform

Da A_S die Darstellungsmatrix von $f|_S$ bezüglich der Basis B_S ist, muss also $\mu = \lambda$ gelten. Denn sonst wäre $\ker(f|_S - \lambda \operatorname{id}_S) = \{0\}$.

Es gilt also:

$$\begin{aligned} 1 &= \dim \ker (f|_S - \lambda \operatorname{id}_S) \\ &= \dim \ker (f - \lambda \operatorname{id}_V) \\ &= n - \dim \operatorname{Bild} (f - \lambda \operatorname{id}_V), \end{aligned}$$

das bedeutet, dass

$$\dim S = \dim \operatorname{Bild} (f - \lambda \operatorname{id}_V) = n - 1.$$

Wegen der Form der Darstellungsmatrix A_S gilt für die erzeugenden Vektoren von $S = \langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$:

$$\begin{aligned} (f - \lambda \operatorname{id}_V)(b_1) &= 0 \\ (f - \lambda \operatorname{id}_V)(b_j) &= b_{j-1}, \quad 1 < j < n. \end{aligned}$$

Wegen $(f - \lambda \operatorname{id}_V)(V) = S$ gibt es ein $b_n \in V \setminus S$ mit

$$(f - \lambda \operatorname{id}_V)(b_n) = b_{n-1}.$$

Da b_n nicht aus S , ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V . Schließlich ist

$${}_B M_B(f) = J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

somit eine Jordan-Basis von V bezüglich f . □

Jedes Polynom zerfällt über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Daher gilt diese Schlussfolgerung:

Korollar 3.1.6. *Jede lineare Abbildung f eines endlichdimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraums V besitzt eine Jordan-Normalform. Jede komplexe Matrix ist zu einer Jordan-Matrix ähnlich.*

Nachdem die Existenz einer Jordan-Normalform bewiesen wurde, wird im nächsten Abschnitt der Satz von der Jordanschen Normalform formuliert.

3.2 Satz von der Jordanschen Normalform

Satz 3.2.1. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist A zu einer Matrix J in Jordan-Normalform ähnlich. Es gibt also eine invertierbare Matrix $R \in K^{n \times n}$, sodass $J = RAR^{-1}$ eine Jordan-Matrix ist. Diese Jordan-Matrix J ist bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke durch die Matrix A eindeutig bestimmt. Man sagt auch: Die Matrix A hat die Jordansche Normalform J .*

Zunächst wird ein Spezialfall bewiesen, nämlich der Satz von der Normalform eines nilpotenten Endomorphismus. In weiterer Folge wird schließlich der allgemeine Fall auf den Spezialfall zurückgeführt.

Ist eine lineare Abbildung nilpotent, so besitzt sie als einzigen Eigenwert Null. Somit kommen in der Jordanschen Normalform nur Jordan-Blöcke zum Eigenwert $\lambda = 0$ vor. Man definiert daher:

$$J_r := J_r(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \in K^{r \times r}.$$

Bemerkung 3.2.2. *Die Matrizen J_r sind nilpotent. Es gilt $(J^r)^r = 0$, für jede positive Zahl $t < r$ gilt allerdings $(J^r)^t \neq 0$.*

Für eine nilpotente lineare Abbildung f kann der Satz von der Jordanschen Normalform folgendermaßen formuliert werden.

Satz 3.2.3. *(Normalform einer nilpotenten linearen Abbildung)*

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K , sei $A \in L(V)$ nilpotent und sei r die kleinste positive ganze Zahl mit $A^r = 0$.

(i) Dann gibt es eine Basis B von V , so dass

$${}_B M_B(A) = \begin{pmatrix} J_r & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & J_r & & & & & & & \\ & & & J_{r-1} & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & J_{r-1} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & J_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & J_1 \\ 0 & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

3.2 Satz von der Jordanschen Normalform

Die Matrix ${}_B M_B(A)$ enthält mindestens einen Jordan-Block mit der Größe r . Für $m < r$ kann die Anzahl der Jordan-Blöcke J_m auch null sein.

(ii) Für $1 \leq m \leq r$ ist die Anzahl der Jordan-Blöcke J_m der Matrix ${}_B M_B(A)$ durch die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt.

Beweis. (i) Die Kerne der Potenzen von A bilden eine wachsende Kette von Unterräumen,

$$\{0\} = \ker A^0 \subset \ker A^1 \subset \ker A^2 \subset \dots \subset \ker A^{r-1} \subset \ker A^r = V,$$

da aus $A^n(v) = 0$ folgt, dass $A^{n+1}(v) = A(A^n(v)) = 0$. Ebenso gilt: $\ker A^{r-1} \neq \ker A^r$ und für $1 \leq m \leq r$ ist $\ker A^{m-1} \neq \ker A^m$ und $A(\ker A^m) \subseteq \ker A^{m-1}$.

Als nächstes gilt es schrittweise eine direkte Summenzerlegung von V zu konstruieren. Dafür wird zuerst ein zu $\ker A^{r-1}$ komplementärer Unterraum W_r in $V = \ker A^r$ gewählt, sodass

$$\ker A^{r-1} \oplus W_r = \ker A^r = V.$$

Als nächstes wählt man einen zu $\ker A^{r-2}$ komplementären Unterraum W_{r-1} in $\ker A^{r-1}$, sodass

$$\ker A^{r-2} \oplus W_{r-1} = \ker A^{r-1}.$$

Der Unterraum W_{r-1} wird so gewählt, dass

$$A(W_r) \subset W_{r-1}.$$

Da aus $A(\ker A^m) \subset \ker A^{m-1}$ für $1 \leq m \leq r$ folgt, dass $A(W_r) \subset \ker A^{r-1}$ und weiters $A(W_r) \cap \ker A^{r-2} = \{0\}$ wegen

$$\begin{aligned} x \in A(W_r) \cap \ker A^{r-2} &\Rightarrow \exists y \in W_r : x = Ay \text{ und } A^{r-2}x = 0 \\ &\Rightarrow A^{r-1}y = A^{r-2}x = 0, y \in W_r \\ &\Rightarrow y \in W_r \cap \ker A^{r-1} \\ &\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

gilt, erweitert man also $A(W_r)$ zu einem komplementären Unterraum von $\ker A^{r-2}$ in $\ker A^{r-1}$. Führt man so fort, erhält man schließlich für $1 \leq m \leq r$ jeweils eine Zerlegung

$$\ker A^m = \ker A^{m-1} \oplus W_m \text{ mit } A(W_m) \subset W_{m-1}.$$

Die Einschränkung $A|_{W_m}$ ist injektiv, da aus $\ker A^{m-1} \cap W_m = \{0\}$ und $\ker A \subset \ker A^{m-1}$ folgt $\ker A \cap W_m = \{0\}$. Folgendes Schema stellt die Iteration des Verfahrens

3 Die Jordan-Normalform

dar, wobei die Pfeile die Wirkung der linearen Abbildung A zeigen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 V & = & \ker A^r & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 V & = & \ker A^{r-1} & \oplus & W_r & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 V & = & \ker A^{r-2} & \oplus & W_{r-1} & \oplus & W_r \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 V & = & \ker A^1 & \oplus & W_2 & \oplus & W_3 \oplus \dots \oplus W_r \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 V & = & \ker A^0 & \oplus & W_1 & \oplus & W_2 \oplus \dots \oplus W_{r-1} \oplus W_r
 \end{array}$$

Da $\ker A^0 = \{0\}$ erhält man in der letzten Zeile die Zerlegung

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r.$$

Aufgrund der Injektivität aller Einschränkungen von A in der Kette

$$W_r \rightarrow W_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow W_1$$

können die Bilder einer Basis von W_m zu einer Basis von W_{m-1} ergänzt werden. So entstehen initiierend mit W_r schrittweise Basen aller W_m und somit insgesamt eine Basis von V nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
 w_1^{(r)}, & \dots, & w_{s_r}^{(r)}, & & & & \\
 A(w_1^{(r)}), & \dots, & A(w_{s_r}^{(r)}), & w_1^{(r-1)}, & \dots, & w_{s_{r-1}}^{(r-1)}, & \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 A^{r-1}(w_1^{(r)}), & \dots, & A^{r-1}(w_{s_r}^{(r)}), & A^{r-2}(w_1^{(r-1)}), & \dots, & A^{r-2}(w_{s_{r-1}}^{(r-1)}), & \dots, w_1^{(1)}, \dots, w_{s_1}^1
 \end{array}$$

Die erste Zeile ist eine Basis von W_r , die zweite Zeile eine Basis von W_{r-1} und die letzte eine Basis von $W_1 = \ker(A)$. Die Jordan-Ketten zum Eigenwert 0 sind die Spalten von unten nach oben gelesen. Geht man in jeder Spalte der Basis B von unten nach oben und liest die Zeilen von links nach rechts, dann hat nun die Matrix ${}_B M_B(A)$ die gewünschte Form.

(ii) Sei B irgendeine Basis von V, für die ${}_B M_B(A)$ die angegebene Form hat. Zu zeigen ist nun, dass die Anzahlen $s_1, \dots, s_r$ der Jordan-Blöcke entsprechender Größe ausschließlich durch A bestimmt sind. Diese Anzahlen müssen folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{array}{rcl}
 s_r & = & \dim \ker A^r - \dim \ker A^{r-1} \\
 s_r + s_{r-1} & = & \dim \ker A^{r-1} - \dim \ker A^{r-2} \\
 \vdots & & \\
 s_r + s_{r-1} + \dots + s_2 & = & \dim \ker A^2 - \dim \ker A \\
 s_r + s_{r-1} + \dots + s_2 + s_1 & = & \dim \ker A
 \end{array}$$

□

3.2 Satz von der Jordanschen Normalform

Mit diesem Spezialfall und den Lemmata von Abschnitt 3.1 kann nun der Satz von der Jordanschen Normalform bewiesen werden.

Beweis. (des Satzes von der Jordanschen Normalform) Es sei $p \in K[X]$ das charakteristische Polynom mit $p(f) = 0$. Da angenommen wird, dass der Körper K algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt das charakteristische Polynom p in Linearfaktoren

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Nullstellen von p sind. V ist die direkte Summe

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$$

der f -invarianten Unterräume

$$U_j := \ker (f - \lambda_j \operatorname{id}_V)^{n_j}.$$

Die Einschränkungen

$$A_j := (f - \lambda_j \operatorname{id}_V)|_{U_j}$$

sind nilpotent, denn $A_j^{n_j} = 0$. Wenn jeweils r_j die kleinste positive ganze Zahl ist, die $(A_j)^{r_j} = 0$ erfüllt, dann gibt es Basen B_j , sodass gilt:

$${}_B M_{B_j}(A_j) = \begin{pmatrix} J_{r_j}(0) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_{r_j}(0) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_1(0) & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & J_1(0) \end{pmatrix},$$

wobei die Jordan-Blöcke J_{r_j} in der Matrix $s_r^{(j)}$ - mal vorkommen. Für die Einschränkungen

$$f_j := f|_{U_j} = A_j + \lambda_j \operatorname{id}_{U_j}$$

gilt dann

$${}_B M_{B_j}(f_j) = \begin{pmatrix} J_{r_j}(\lambda_j) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_{r_j}(\lambda_j) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_1(\lambda_j) & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & J_1(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

3 Die Jordan-Normalform

Setzt man nun aus den Basen $B_1, \dots, B_k$ eine Basis für V zusammen, dann hat die Matrix ${}_B M_{B_j}(f)$ Jordansche Normalform.

Um nun noch die Eindeutigkeit zu beweisen, nimmt man an, dass B irgendeine Jordan-Basis von f ist und $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte der linearen Abbildung f sind. Der größte Jordan-Block der Matrix ${}_B M_{B_j}(f)$ zum Eigenwert λ_j habe die Größe r_j . Die Anzahl der Jordan-Blöcke der Größe m zum Eigenwert λ_j sei $s_m^{(j)}$. Somit ist

$$\begin{aligned} s_{r_j}^{(j)} &= \dim \ker(f - \lambda_j \text{id})^{r_j} - \dim \ker(f - \lambda_j \text{id})^{r_j-1} \\ s_{r_j}^{(j)} + s_{r_j-1}^{(j)} &= \dim \ker(f - \lambda_j \text{id})^{r_j-1} - \dim \ker(f - \lambda_j \text{id})^{r_j-2} \\ &\vdots \\ s_{r_j}^{(j)} + s_{r_j-1}^{(j)} + \dots + s_2^{(j)} &= \dim \ker(f - \lambda_j \text{id})^2 - \dim \ker(f - \lambda_j \text{id}) \\ s_{r_j}^{(j)} + s_{r_j-1}^{(j)} + \dots + s_2^{(j)} + s_1^{(j)} &= \dim \ker(f - \lambda_j \text{id}). \end{aligned}$$

Die Anzahlen $s_m^{(j)}$ und dadurch auch die Matrix ${}_B M_{B_j}(f)$ sind also bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke durch f eindeutig bestimmt. $\square$

3.3 Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis

Die Jordan-Normalform einer linearen Abbildung f erhält man aus der Jordan-Normalform einer und somit jeder Darstellungsmatrix von f . Zunächst wird das allgemeine Verfahren der Konstruktion einer Jordan-Basis und in weiterer Folge einer Jordan-Normalform erläutert, bevor das Verfahren an Beispielen geschildert wird. Weiters werden Hilfsmittel beschrieben, mit denen man in bestimmten Fällen eine Jordan-Normalform einer Matrix erhält, ohne eine Jordan-Basis angeben zu müssen.

3.3.1 Allgemeines Verfahren

Wir betrachten eine Matrix $A \in K^{n \times n}$, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Unter Transformation einer Matrix A auf Jordan-Normalform versteht man das Bestimmen einer invertierbaren Matrix R mit der Eigenschaft, dass $J = R^{-1}AR$ eine Jordan-Matrix ist. Die Vektoren einer Jordan-Basis des K^n von A bilden dabei die Spalten der Matrix R .

Im Folgenden wird beschrieben, wie man vorgeht, um die Matrix A zu transformieren: Das charakteristische Polynom von A sei

$$\chi_A = (\lambda_1 - X)^{m_a(\lambda_1)} \dots (\lambda_s - X)^{m_a(\lambda_s)}$$

mit den s verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Für jeden Eigenwert λ von A setzt man $N = A - \lambda E_n$. Eine Jordan-Basis des Hauptraums

3.3 Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis

Haupt_A(λ) erhält man folgendermaßen:

Als ersten Schritt bestimmt man

$$\ker N, \dots, \ker N^r.$$

Es gilt $\dim \ker N^r = m_a(\lambda)$. Man setzt $t_k = \dim \ker N^k - \dim \ker N^{k-1}$ für $k = r, \dots, 1$. Im nächsten Schritt bestimmt man linear unabhängige Vektoren $b_{r,i}$ für $i = 1, \dots, t_r$. Für sie soll gelten:

$$\ker N^r = \ker N^{r-1} \oplus \langle b_{r,1}, \dots, b_{r,t_r} \rangle.$$

Die Vektoren $b_{r,i}$ berechnet man für $i = 1, \dots, t_r$ folgendermaßen:

$$b_{l,i} = N^{r-l} b_{r,i} \text{ für } l = r-1, \dots, 1.$$

Die geordnete linear unabhängige Menge $B_i = (b_{1,i}, \dots, b_{r,i})$ liefert ein $(r \times r)$ -Jordan-Kästchen.

Wegen

$$b_{r,i} \notin N^{r-1} \oplus \langle \{b_{r,1}, \dots, b_{r,t_r}\} \setminus \{b_{r,i}\} \rangle$$

folgt, dass die Menge

$$\bigcup_{i=1}^{t_r} B_i$$

linear unabhängig ist.

Die Vektoren

$$b_{k,i} \in \ker N^k \setminus \ker N^{k-1}$$

sind für $i = 1, \dots, t_{k+1} =: t'$ bereits bestimmt, sodass $(b_{k,1}, \dots, b_{k,t'})$ eine geordnete linear unabhängige Menge ist. Man setzt:

$$T_{k-1} = \ker N^{k-1} \oplus \langle b_{k,1}, \dots, b_{k,t'} \rangle.$$

Im Falle von $t_k > t_{k+1}$ bestimmt man linear unabhängige Vektoren $b_{k,i}$ mit $i = t' + 1, \dots, t_k$, sodass

$$\ker N^k = T_{k-1} \oplus \langle b_{k,t'+1}, \dots, b_{k,t_k} \rangle$$

und für $i = t' + 1, \dots, t_k$

$$b_{l,i} = N^{k-l} b_{k,i} \text{ für } l = k-1, \dots, 1.$$

Für $i = t' + 1, \dots, t_k$ ist dann

$$B_i = (b_{1,i}, \dots, b_{k,i})$$

linear unabhängig. Die Menge B_i liefert ein $(k \times k)$ -Jordan-Kästchen.

Im Falle von $t^k = t^{k+1}$ geht man zu $k-1$ über.

Die geordnete Menge

$$B_\lambda = (B_{t_1}, \dots, B_2, B_1)$$

ist eine geordnete Jordan-Basis des Hauptraums Haupt_A(λ).

Durch die Vereinigung und Anordnung der Jordan-Basen aller Haupträume erhält man eine Jordan-Basis zur Matrix A.

3.3.2 Hilfsmittel zum Bestimmen einer Jordan-Normalform

Zunächst wird der Fall behandelt, dass die Matrix $A \in K^{n \times n}$ nur einen Eigenwert besitzt.

Sie besitzt also das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - X)^n$, das in Linearfaktoren zerfällt, wobei λ der einzige Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit $m_g(\lambda)$ ist. Von der geometrischen Vielfachheit weiß man lediglich, dass

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq n$$

gilt. Da das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, existiert zu A eine Jordan-Normalform J . Es gibt also eine invertierbare Matrix $R \in K^{n \times n}$ mit

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix} = R^{-1}AR,$$

wobei $J_1, \dots, J_l$ Jordan-Kästchen sind. Die Matrizen A und J haben aufgrund ihrer Ähnlichkeit dasselbe charakteristische Polynom und somit auch denselben Eigenwert λ mit der selben algebraischen und geometrischen Vielfachheit. Daher stehen bei allen Jordan-Blöcken $J_1, \dots, J_l$ nur λ auf der Hauptdiagonalen,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \dots, l$. Da

$$\begin{aligned} m_g(\lambda) &= \dim(\ker(J - \lambda E_n)) \\ &= \text{Anzahl der Jordan-Kästchen von } J, \end{aligned}$$

ist die Jordan-Normalform der Matrix A genau dann eine Diagonalmatrix, wenn die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit von λ übereinstimmt.

Bemerkung 3.3.1. Die geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$ des Eigenwerts λ von A ist gleich der Anzahl der Jordan-Blöcke einer Jordan-Normalform J zu einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ zu dem Eigenwert λ .

Nun wird nach der Anzahl der Zeilen und Spalten des größten Jordan-Blocks der Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix}$$

3.3 Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis

zur Matrix A mit dem charakteristischen Polynom $\chi_A = (\lambda - X)^n$ gesucht.
Die Matrix

$$J - \lambda E_n = \begin{pmatrix} J_1 - \lambda E_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_l - \lambda E_{n_l} \end{pmatrix}$$

ist nilpotent, da für jeden Block

$$J_j - \lambda E_{n_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit n_j Zeilen die Gleichung

$$(J_j - \lambda E_{n_j})^{n_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^{n_j} = 0$$

erfüllt ist. Bei jeder Multiplikation des Jordan-Blocks mit sich selbst wandert die Diagonale mit den Einsen als Einträgen eine weitere Reihe hoch. Der Block $J_j - \lambda E_{n_j}$ ist also nilpotent mit dem Nilpotenzindex n_j . Somit ist auch die ganze Matrix $J - \lambda E_n$ nilpotent. Das Maximum der Nilpotenzindizes der Jordan-Blöcke ist der Nilpotenzindex r von $J - \lambda E_n$. Es gilt also $r = \max\{n_1, \dots, n_l\}$.

Da $J = R^{-1}AR$, ist

$$\begin{aligned} J - \lambda E_n &= R^{-1}AR - \lambda R^{-1}R \\ &= R^{-1}(A - \lambda E_n)R. \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} (J - \lambda E_n)^k &= 0 \Leftrightarrow R^{-1}(A - \lambda E_n)^k R = 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda E_n)^k = 0 \end{aligned}$$

Daher ist auch $A - \lambda E_n$ nilpotent mit Nilpotenzindex r . Somit kann man auf folgende Bemerkung schließen.

Bemerkung 3.3.2. Die Zeilenanzahl des größten Jordan-Blocks J_j einer Jordan-Normalform von A ist gleich dem Nilpotenzindex r der Matrix $A - \lambda E_n$.

Nun zur Konstruktion einer Jordan-Basis für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit nur einem Eigenwert, deren charakteristisches Polynom von der Form $\chi_A = (\lambda - X)^n$ ist. Die

3 Die Jordan-Normalform

Jordan-Matrix J zu A besitzt die Transformationsmatrix R , so dass $J = R^{-1}AR$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$(J - \lambda E_n)^k = R^{-1}(A - \lambda E_n)^k R.$$

Da die Transformationsmatrix R invertierbar ist, gilt:

$$\dim \ker(J - \lambda E_n)^k = \dim \ker(A - \lambda E_n)^k.$$

Wegen der besonderen Form der Matrix $J - \lambda E_n$ erhält man eine Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker(A - \lambda E_n) \subsetneq \ker(A - \lambda E_n)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A - \lambda E_n)^r = K^n.$$

Es ist r sowohl der Nilpotenzindex von $A - \lambda E_n$ als auch von $J - \lambda E_n$. Weiters gilt $m_g(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda E_n)$ und $m_a(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda E_n)^r$. Mithilfe des Nilpotenzindex und der Dimension des Eigenraums, kann eine Jordan-Normalform in manchen Fällen, wie im folgenden Beispiel, schon direkt bestimmt werden.

Beispiel 3.3.3. Man betrachte die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit dem charakteristischen Polynom $-(\lambda - 4)^3$. Die Matrix besitzt ausschließlich den Eigenwert $\lambda = 4$. Da das Polynom in Linearfaktoren zerfällt, existiert zu A auf jeden Fall eine Jordan-Normalform J . Um herauszufinden, ob die Matrix A auch diagonalisierbar ist, bestimmt man zunächst die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 4$. Dafür löst man das Gleichungssystem $(A - 4E_3)v = 0$. Aus

$$A - 4E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man:

$$\text{Eig}_A(4) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } (A - 4E_3)^3 = 0$$

Da die Dimension des Eigenraums 1 ist und die algebraische Vielfachheit 4, ist die Matrix A nicht diagonalisierbar. Wir bilden also die Jordan-Normalform zur Matrix A . Die Jordan-Normalform J hat einen Jordan-Block zum Eigenwert 4. Der Nilpotenzindex der Matrix $A - 4E_3$ ist 3. Daher ist der Jordan-Block ein (3×3) Kästchen. Daher sieht die Jordan-Normalform zur Matrix A folgendermaßen aus:

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3.3 Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis

Im folgenden Beispiel wird ein Verfahren zur Bestimmung einer Jordan-Basis, ohne dass man die Jordan-Normalform der Matrix A bereits kennt, vorgestellt.

Beispiel 3.3.4. Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}.$$

Der einzige Eigenwert dieser Matrix ist 2 mit der algebraischen Vielfachheit 2. Man setze

$$N = A - 2E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Jordan-Basis zur Matrix A zu bestimmen, betrachtet man folgende Kette:

$$\begin{aligned} \{0\} \subsetneq \underbrace{\ker N^1} &\subsetneq \underbrace{\ker N^2} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Hierbei ist $\ker N^1$ der Eigenraum zum Eigenwert 2 von A . Der Vektor

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker N^2 \setminus \ker N^1$$

ist der Basisvektor, den man zu einer Basis von $\ker N^1$ ergänzen muss, um auf eine Basis von $\ker N^2$ zu kommen. Der Vektor b_2 ist kein Eigenvektor der Matrix A und es gilt $Nb_2 \in \ker N^1 \setminus \{0\}$, da $0 = N^2b_2$.

Man setze nun

$$b_1 = Nb_2 = (A - 2E_2)b_2 = Ab_2 - 2b_2.$$

Somit gilt nun, dass b_1 und b_2 linear unabhängig sind, da $b_2 \in \ker N^2 \setminus \langle b_1 \rangle$. Weil $b_1 \in \ker N = \text{Eig}_A(2)$, ist außerdem $Ab_1 = 2b_1$. Weiters gilt, wenn man $b_1 = Ab_2 - 2b_2$ umformt, dass $Ab_2 = 1b_1 + 2b_2$. Somit ist $B = (b_1, b_2)$ eine Jordan-Basis mit der Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zu A . Mit der Matrix $R = (b_1, b_2)$ gilt $J = R^{-1}AR$.

Bei diesem Beispiel wurde ein Verfahren angewandt, das bei beliebigen nicht diagonalisierbaren (2×2) -Matrizen, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, beim Bestimmen einer Jordan-Basis zu A verwendet werden kann.

Bemerkung 3.3.5. Ist $A \in K^{2 \times 2}$ nicht diagonalisierbar und zerfällt das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren, so hat A den zweifachen Eigenwert λ und es ist $B = (b_1, b_2)$ mit

$$b_2 \in \ker N^2 \setminus \ker N^1 \text{ und } b_1 = Nb_2,$$

mit $N = A - \lambda E_2$, eine Jordan-Basis zu A .

3 Die Jordan-Normalform

Bei dem vorgeführten Verfahren entstehen automatisch die größten Jordan-Blöcke im unteren Bereich der Jordan-Normalform, wobei der größte Jordan-Block genauso viele Zeilen hat, wie die Kette $\{0\} \subsetneq \ker N^1 \subsetneq \ker N^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker N^r$ echte Inklusionen. Die Anzahl der Inklusionen ist gerade der Nilpotenzindex r von $N = A - \lambda E_3$. Dieses Verfahren kann auch auf größere Matrizen angewendet werden.

Beispiel 3.3.6. Zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

soll eine Jordan-Normalform und eine Jordan-Basis bestimmt werden. Zur Matrix A existiert eine Jordan-Normalform, da das charakteristische Polynom $\chi_A = (X - 3)^6$ in Linearfaktoren zerfällt. Im nächsten Schritt berechnet man für

$$N = A - 3E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker N^1 \subsetneq \ker N^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker N^r = \mathbb{R}^6.$$

Es gilt:

$$\ker N^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$\ker N^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3.3 Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis

Weiters gilt

$$\ker N^3 = \mathbb{R}^6.$$

Somit gibt es drei Jordan-Blöcke und der größte ist ein (3×3) -Block. Mithilfe der Kette mit den zugehörigen Dimensionen

$$\dim \ker N^1 = 3 < \dim \ker N^2 = 5 < \dim \ker N^3 = 6 = \mathbb{R}^6$$

konstruiert man folgendermaßen eine Jordan-Basis $(b_1, \dots, b_6)$.

Man wähle einen Vektor $b_6 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \in \ker N^3 \setminus \ker N^2$ und setze $b_5 = N b_6 = (0, 2, 0, 1, 0, 1)^T \in \ker N^2$ und $b_4 = N b_5 = (4, 0, 0, 0, -1, 0)^T \in \ker N$. Wenn man die Kette von hinten nach vorne durchgeht, erhält man einen (3×3) -Block.

Also nächstes wähle man einen von b_5 linear unabhängigen Vektor $b_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \in \ker N^2 \setminus \ker N^1$. Die Dimensionskette zeigt, dass dies noch möglich ist. Nun setzt man $b_2 = N b_3 = (0, 0, 0, 0, -1, 0)^T \in \ker N$. Dieser Durchlauf der Kette von hinten nach vorne liefert einen (2×2) -Jordan-Block.

Schließlich wählt man einen Vektor $b_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \in \ker N^1 \setminus \{0\}$, der zu den Vektoren b_2 und b_4 linear unabhängig ist. Auch hier zeigt die Dimensionskette, dass dies noch möglich ist. Dieser Durchlauf der Kette von hinten nach vorne liefert einen (1×1) -Jordan-Block. Somit ist $B = (b_1, \dots, b_6)$ eine Jordan-Basis zu A und es ist

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine Jordan-Normalform von A .

Nachdem ein Verfahren vorgestellt wurde, wie man zu einer Matrix A , die lediglich den vielfachen Eigenwert λ besitzt, eine Jordan-Normalform und eine Jordan-Basis bestimmen kann, wird nun das Vorgehen illustriert, wenn die Matrix A die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ besitzt. In diesem Fall muss man die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ nacheinander untersuchen. Dafür setzt man

$$N_1 = A - \lambda_1 E_n, \dots, N_s = A - \lambda_s E_n$$

und betrachtet die zu den Matrizen zugehörigen Ketten

$$\{0\} \subsetneq \ker N_i \subsetneq \ker N_i^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker N_i^{r_i} = \ker N_i^{r_i+1}.$$

Die Unterräume $\ker N_i^j$ werden verallgemeinerte Eigenräume zum Eigenwert λ_i genannt. Dabei wird der größte verallgemeinerte Eigenraum $\ker N_i^{r_i}$ als Hauptraum zum Eigenwert λ_i bezeichnet und seine Elemente als Hauptvektoren. Wie im Fall eines einzigen Eigenwerts ist auch hier die Dimension des Hauptraums zum Eigenwert λ die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ .

3 Die Jordan-Normalform

Bemerkung 3.3.7. Zerfällt das charakteristische Polynom χ_A der Matrix $A \in K^{n \times n}$ in Linearfaktoren

$$\chi_A = (\lambda_1 - X)^{m_a(\lambda_1)} \dots (\lambda_s - X)^{m_a(\lambda_s)},$$

so gibt es zu jedem Eigenwert λ_i , $i = 1, \dots, s$, und $N_i = A - \lambda_i E_n$ eine natürliche Zahl r_i mit $1 \leq r_i \leq n$ und

$$\{0\} \subsetneq \ker N_i \subsetneq \ker N_i^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker N_i^{r_i},$$

wobei $\dim \ker N_i^{r_i} = m_a(\lambda_i)$. Die Dimension des Hauptraums zum Eigenwert λ ist also die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ .

Daraus kann man auf Folgendes schließen:

Bemerkung 3.3.8. Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom χ_A in Linearfaktoren zerfällt. Wenn $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A mit der Kette der verallgemeinerten Eigenräume

$$\underbrace{\ker N}_{\dim=m_g(\lambda)} \subsetneq \ker N^2 \subsetneq \dots \subsetneq \underbrace{\ker N^r}_{\dim=m_a(\lambda)} = \ker N^{r+1},$$

mit $N = A - \lambda E_n$, dann ist die Dimension des Hauptraums $\ker N_r$ zum Eigenwert λ die algebraische Vielfachheit $m_a(\lambda)$ des Eigenwerts λ . Ebenso gilt, dass die Dimension des Eigenraums $\ker N$ die Anzahl der Jordan-Blöcke zum Eigenwert λ ist. Die Zahl r ist dann die Länge des größten Jordan-Blocks zum Eigenwert λ .

Folgendes Beispiel soll das eben geschilderte Verfahren demonstrieren:

Beispiel 3.3.9. Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}.$$

Zur Matrix A existiert eine Jordan-Normalform, da $\chi_A = (5 - X)^3(2 - X)^2(1 - X)$. Zum Bestimmen der Jordan-Basis wird das Verfahren aus den vorherigen Beispielen nun für die einzelnen Eigenwerte angewandt. Beginnend mit dem Eigenwert 5 berechnet man die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker (A - 5E_6)^1 \subsetneq \dots \subsetneq \ker (A - 5E_6)^r.$$

Hierbei gilt:

$$\ker (A - 5E_6)^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3.3 Berechnung einer Jordan-Normalform und Jordan-Basis

und

$$\ker (A - 5E_6)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$\ker (A - 5E_6)^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 4 \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nun ist man ans Ende der Kette gelangt, da der Eigenwert 5 die algebraische Vielfachheit $m_a(5) = 3$ hat. Zum Eigenwert 5 gehören also drei Jordan-Basisvektoren. Mithilfe der Kette sieht man auch, dass es zu diesem Eigenwert einen (3×3) -Jordan-Block gibt. Es sei

$$b_6 = (0, -\frac{4}{3}, 4, 0, -\frac{5}{3}, 1)^T \in \ker (A - 5E_6)^3 \setminus \ker (A - 5E_6)^2$$

dann setzt man

$$b_5 = (A - 5E_6) b_6 = (\frac{8}{3}, 4, 0, -\frac{4}{3}, 0, 0)^T \in \ker (A - 5E_6)^2 \setminus \ker (A - 5E_6)^1$$

$$\text{und } b_4 = (A - 5E_6) b_5 = (4, 0, 0, 0, 0, 0)^T \in \ker (A - 5E_6)^1 \setminus \{0\}.$$

Durch die drei Jordan-Basisvektoren b_6, b_5, b_4 entsteht ein (3×3) -Jordan-Block. Jetzt wird dasselbe Verfahren auf den Eigenwert 2 angewandt und man berechnet die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker (A - 2E_6)^1 \subsetneq \dots \subsetneq \ker (A - 2E_6)^r.$$

Es gilt:

$$\ker (A - 2E_6)^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3 Die Jordan-Normalform

und

$$\ker (A - 2E_6)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da der Eigenwert 2 die algebraische Vielfachheit $m_a(2) = 2$ hat, bricht die Kette hier ab. Somit gibt es zwei Jordan-Basisvektoren zum Eigenwert 2. Anhand der Kette sieht man, dass es genau einen (2×2) -Jordan-Block zu diesem Eigenwert gibt.

Es sei

$$b_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \in \ker (A - 2E_6)^2 \setminus \ker (A - 2E_6)^1$$

und man setzt

$$b_2 = (A - 2E_6) b_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \in \ker (A - 2E_6)^1 \setminus \{0\}.$$

Die Jordan-Basisvektoren b_3, b_2 liefern einen (2×2) -Jordan-Block. Als letztes wird das Verfahren auf den Eigenwert 1 angewandt. Da 1 ein einfacher Eigenwert ist, bricht die Kette bereits nach dem Eigenraum ab:

$$\{0\} \subsetneq \ker (A - 1E_6)^1.$$

Lediglich ein Jordan-Basisvektor gehört zu diesem Eigenwert. Es gilt:

$$\ker (A - 1E_6)^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Jordan-Basisvektor $b_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 1)^T$ liefert einen (1×1) -Jordan-Block. Durch die Jordan-Basis $(b_1, \dots, b_6)$ erhält man die Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

zu A .

3.3.3 Potenzen einer Jordan - Normalform

Ein großer Vorteil, den eine Jordan-Normalform gegenüber allgemeinen Matrizen besitzt, ist das Bilden ihrer Potenzen. Das Berechnen von beliebigen Matrixpotenzen ist im Allgemeinen rechenaufwendig. Bei diagonalisierbaren Matrizen und bei Matrizen in Jordan-Normalform ist das Verfahren einfacher. Dafür kann nämlich die Binomialformel aus Bemerkung 3.0.2 verwendet werden.

Voraussetzung, dass zu einer quadratischen Matrix A eine Jordan-Normalform gefunden werden kann, ist, dass das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Doch dies wird nicht von jeder Matrix in einem beliebigen Körper K erfüllt. Die rationale Normalform liefert für jede beliebige Matrix, auch wenn sie nicht trigonalisierbar ist, einen standardisierten Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse der Matrix A .

4 Die rationale Normalform

Für dieses Kapitel wurden Hans-Joachim Kowalsky und Gerhard O. Michler [13], Rainer Schulze-Pillot [17] und das Skript von Klaus Bongartz [4] herangezogen. Im Vergleich zur Jordan-Normalform ist die rationale Normalform über beliebigen Grundkörpern definiert und man kann sie explizit in endlich vielen Schritten nur durch rationale Rechenoperationen aus den Koeffizienten der Ausgangsmatrix berechnen.

Definition 4.0.1. Sei f eine lineare Abbildung des n -dimensionalen Vektorraums V . Das Minimalpolynom μ_f von f habe die eindeutige Primfaktorzerlegung $\mu_f = \rho_1^{e_1} \rho_2^{e_2} \cdots \rho_k^{e_k}$, wobei $\rho_i = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ ein normiertes und irreduzibles Polynom vom Grad $n \geq 1$ sei. Dann gibt es eine Basis B von V , bezüglich derer die Matrix R von folgender Gestalt ist

$$R = \begin{pmatrix} B_{\rho_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{\rho_r} \end{pmatrix}$$

Die Blockdiagonalmatrix R mit den Begleitmatrizen $B_{\rho_1}, B_{\rho_2}, \dots, B_{\rho_r}$ auf der Hauptdiagonalen ist die rationale Normalform zu einer Matrix $A \in K^{n \times n}$. Die $(n \times n)$ -Matrix

$$B_{\rho_i} = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

heißt die Begleitmatrix zum Polynom ρ_i . Alle Polynome $\rho_1, \dots, \rho_r$ haben Koeffizienten aus K und ρ_{i+1} ist jeweils ein Teiler von ρ_i für $1 \leq i \leq r-1$.

Satz 4.0.2. Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist zu genau einer rationalen Normalform R ähnlich. Dabei kann man sowohl die Matrix R und eine konjugierte Matrix T durch endlich viele rationale Rechenoperationen aus den Koeffizienten von A bestimmen.

Beweis. Eindeutigkeit: Seien

$$R = \begin{pmatrix} B_{\rho_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{\rho_r} \end{pmatrix} \text{ und } R' = \begin{pmatrix} B_{q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{q_s} \end{pmatrix}$$

4 Die rationale Normalform

ähnliche rationale Normalformen über K . Dann gibt es eine invertierbare Matrix T , so dass $T^{-1}RT = R'$ gilt.

Mittels Induktion wird gezeigt, dass $\rho_i = q_i$ und $r = s$. Da ρ_1 das Minimalpolynom von R und q_1 das von R' ist und ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom haben, ist der Induktionsanfang klar. Es sei für $i \geq j$ bereits $\rho_j = q_j$ gezeigt. Wenn $i = r$ oder $i = s$, dann gilt auch $r = s$, da die Summe der Grade aller Polynome jeweils n ergeben muss. Bei der Blockdiagonalmatrix $\rho_{i+1}(R)$ sind höchstens die ersten i Diagonalblöcke ungleich Null. Nach Induktionsvoraussetzung stimmen die ersten i Diagonalblöcke von $\rho_{i+1}(R')$ mit diesen überein. Somit sind von $\rho_{i+1}(R')$ alle anderen Blöcke gleich Null. Weiters gilt $\rho_{i+1}(B(q_{i+1})) = 0$. Also ist q_{i+1} ein Teiler von ρ_{i+1} . Aus Symmetriegründen folgt $\rho_i = q_i$ und $r = s$.

Existenz: Setzt man $A_0 = A$ voraus, werden nacheinander für $i = 1, 2, 3$ drei invertierbare Matrizen T_i angegeben, so dass $A_i = T_i^{-1}A_{i-1}T_i$ sich immer mehr der rationalen Normalform annähert und A_3 die gesuchte rationale Normalform ist.

Zunächst werden das Minimalpolynom μ_1 von A und ein Vektor v mit $\rho_1 = \rho_{A,v}$ berechnet. Um die erste Transformationsmatrix T_1 zu bestimmen, gibt man den zugehörigen Spaltenvektor an, indem die linear unabhängigen Spalten $v, Av, \dots, A^{p_1-1}v$ zu einer Basis von K^n ergänzt werden. Hierbei ist p_i der Grad von ρ_i . Die konjugierte Matrix $A_1 = T_1^{-1}A_0T_1$ ist somit die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung bezüglich der Spalten von T_1 , die durch A_0 definiert wird. Sie hat also folgende Blocktriagonalgestalt:

$$\begin{pmatrix} B_{\rho_1} & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Setzt man diese Blocktriagonalmatrix in χ_1 ein, erhält man die Nullmatrix, weshalb das Minimalpolynom χ_2 von B_4 ein Teiler von χ_1 ist.

Mittels Induktion wurde bereits eine zu B_4 invertierbare Matrix T'_2 mit $n - p_1$ Zeilen gefunden, sodass $T'^{-1}_2 B_4 T'_2$ eine rationale Normalform der Form

$$\begin{pmatrix} B_{\rho_2} & & & \\ & B_{\rho_3} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{\rho_r} \end{pmatrix}.$$

Setzt man nun $T_2 = \begin{pmatrix} E_{p_1} & \\ & T'_2 \end{pmatrix}$, wobei E_{p_1} die Einheitsmatrix in $K^{p_1 \times p_1}$ ist, dann ist $A_2 = T_2^{-1}A_1T_2$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} B_{\rho_1} & C_2 & \dots & C_r \\ & B_{\rho_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{\rho_r} \end{pmatrix}.$$

Durch einen Koordinatenwechsel werden im nächsten Schritt die Matrizen C_i zum Verschwinden gebracht. Es sei v_i für jeden Index $i \geq 2$ der kanonische Basisvektor mit dem

Index $p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + 1$ und es sei $v_1 = e_1$. Dann gilt für $p_1 > j$, dass $A_2^j v_1 = e_{j+1}$. Weiters ist $P_i(A_2)v_i$ die Spalte von $P_i(A_2)$ mit dem Index $p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + 1$. Bis auf die ersten p_1 Koeffizienten sind alle gleich Null. Somit hat $P_i(A_2)v_i = H_i(A_2)v_i$ für ein eindeutig bestimmtes Polynom H_i höchstens den Grad $p_1 - 1$. Da alle P_i Teiler des Minimalpolynoms P_1 sind, findet man Polynome R_i , für die $P_1 = P_i R_i$ gilt. Daraus folgt

$$0 = P_1(A_2)v_i = (R_i P_i)(A_2)v_i = (R_i H_i)(A_2)v_1.$$

Da $P_1 = \rho_{A_2, v_1}$ ein Teiler von $R_i H_i$ ist, gilt $H_i = P_i S_i$. Setzt man nun $w_i = v_i - S_i(A_2)v_i$ für $i = 2, 3, \dots, r$, so ist jeweils $P_i(A_2)w_i = 0$. Weiters besitzt die Matrix T_3 die Spalten

$$v_1, A_2 v_1, \dots, A_2^{p_1-1} v_1, w_2, A_2 w_2, \dots, A_2^{p_2-1} w_2, \dots, w_r, A_2 w_r, \dots, A_2^{p_r-1} w_r.$$

Sie ist eine invertierbare obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Somit ist dann $T_3^{-1} A_2 T_3$ die gesuchte rationale Normalform

$$\begin{pmatrix} B_{\rho_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{\rho_r} \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel 4.0.3. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 10 & -4 & -50 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 108 = -(\lambda + 3) \cdot (\lambda^2 - 12\lambda + 36) = -(\lambda + 3) \cdot (\lambda - 6)^2.$$

Da

$$(A + 3E_3) \cdot (A - 6E_3)^2 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -5 \\ 10 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 10 & -10 & -50 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ist $\mu = (\lambda + 3)(\lambda - 6)$ das Minimalpolynom. Somit ist dann

$$R = \begin{pmatrix} B_{\lambda-6} & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

die rationale Normalform R von A .

Obwohl die rationale Normalform über jedem Körper bestimmt werden kann und absolut eindeutig ist, ist sie nicht immer die „einfachste“ Form. Für das Berechnen hoher Potenzen einer Matrix A ist also die Jordan-Normalform, wenn sie angegeben werden kann, besser geeignet.

5 Jordan-Normalform bei dynamischen Systemen

Für dieses Kapitel wurden Informationen von Ulrich Krause und Tim Neumann [14], Theodor Bröcker [5], Reinhard Schuster [18], Lars Grüne und Oliver Junge [10], Jörg Liesen und Volker Mehrmann [15], Peter Knabner und Wolf Barth [12] sowie aus dem Vorlesungsskript von Rainer Mitz [16] entnommen.

Die Differentialgleichung mit der skalaren Form

$$\dot{x} = ax,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, modelliert die Eigenschaft, dass das aktuelle Wachstum von x proportional zur aktuellen Größe von x ist. Derartige Differentialgleichungen begegnen einem beim Beschreiben der Entwicklung einer Population. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$x(t) = e^{at}x_0.$$

Hierbei gibt x_0 den Anfangswert an. Für $a > 0$ wachsen die Lösungen exponentiell und für $a < 0$ fallen die Lösungen exponentiell.

Eine autonome lineare Differentialgleichung mit einer $(n \times n)$ -Matrix A hat die Form

$$\dot{x} = Ax.$$

Die Lösungen kann man formal so darstellen, wie die der skalaren Form:

$$x(t) = e^{At}x_0$$

mit dem Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und einer von t abhängigen Matrix $e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ist eine $(n \times n)$ -Matrix A diagonalisierbar, kann eine Koordinatentransformation in eine Basis aus Eigenvektoren durchgeführt werden. Für nicht diagonalisierbare Matrizen kann die Jordan-Normalform von A verwendet werden.

5.1 Exponentialfunktion einer nicht diagonalisierbaren Matrix

Zu jeder nicht diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lässt sich eine Matrix R finden, so dass die Matrix

$$J = R^{-1}AR$$

von folgender Gestalt ist:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}.$$

5 Jordan-Normalform bei dynamischen Systemen

Der einfachste nicht diagonalisierbare Fall liegt also dann vor, wenn A die Form

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

hat und somit die Differentialgleichung folgendermaßen lautet:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} x = Ax, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Zerlegt man nun die Matrix A in eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N , so dass

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N,$$

dann gilt, da $DN = ND$, $e^{D+N} = e^D e^N$ und somit auch

$$e^{At} = e^{(D+N)t} = e^{Dt} e^{Nt}.$$

Die Exponentialfunktion der Diagonalmatrix D ist leicht zu bestimmen. Nun gilt es e^N zu bestimmen. Da $N^k = 0$ für $k \geq 2$, folgt

$$e^{Nt} = E + Nt.$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{Dt} e^{Nt} \\ &= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die erste Komponente der Lösung $x(t) = e^{At}x_0$ lautet

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{at}x_0 + e^{at}tx_2 \\ &= e^{at}(x_0 + tx_2). \end{aligned}$$

Dieser Anteil kann durchaus einen signifikanten Effekt auf das qualitative Verhalten der Lösung haben.

Im Folgenden wird der allgemeine Fall

$$\dot{x} = J_i x,$$

betrachtet. Die Matrix J_i kann folgendermaßen in eine Diagonalmatrix $L = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ und eine nilpotente Matrix N zerlegt werden:

$$J_i = L + N = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $LN = NL$ gilt, ist $e^{L+N} = e^L \cdot e^N$. Wenn N eine $(k \times k)$ -Matrix ist, dann gilt $N^k = N^{k+1} = \dots = 0$ und somit auch

$$e^N = E + N + \frac{1}{2}N^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}.$$

Somit bekommt man also

$$e^{J_i t} = e^{L t} \cdot e^{N t} = \begin{pmatrix} e^\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & e^\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \dots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \vdots \\ & & 1 & t & \dots & \vdots \\ & & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Lösung einer linearen autonomen Differentialgleichung zu erhalten, kann man also folgendermaßen vorgehen:

Im ersten Schritt berechnet man die Jordan-Normalform zur Matrix A und die beiden Transformationsmatrizen R und R^{-1} .

Daraufhin bestimmt man die Matrix-Exponentialfunktion $e^{J_i t}$ für $i = 1, \dots, r$.

Die Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ ist schließlich gegeben durch $x(t) = R e^{J(t-t_0)} R^{-1} x_0$.

5.2 Räuber-Beute-Modell

Für dieses Kapitel wurden Reinhard Schuster [18] und das Vorlesungsskript von Lars Grüne [9] herangezogen.

Ist die genaue Dynamik eines Systems bestehend aus mehreren Populationen interessant, greift man zu kontinuierlichen Modellen und somit zu Differentialgleichungen. Wenn unterschiedliche Tierspezies in einem Lebensraum zusammen leben und interagieren, beeinflusst das die Dynamik der Populationen. Gewisse Modelle kann man mithilfe eines Systems zweier oder mehrerer gekoppelter linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten darstellen. Dieses ist von folgender Form:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) + cz(t) \\ y'(t) &= dx(t) + ey(t) + fz(t) \\ z'(t) &= gx(t) + hy(t) + iz(t) \end{aligned}$$

Exemplarisch wird in weiterer Folge die Populationsdynamik von Haien, Fischen und Menschen betrachtet. Ein mögliches lineares Differentialgleichungssystem, das diesen Zusammenhang beschreibt, könnte derartig aussehen:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1,5f(t) - 0,4h(t) - 0,02m(t) \\ h'(t) &= -0,1f(t) + 1,2h(t) - 0,01m(t) \\ m'(t) &= 1,1m(t) \end{aligned}$$

5 Jordan-Normalform bei dynamischen Systemen

Hierbei sei $h(t)$ die Anzahl der Haie, $f(t)$ die Anzahl der Fische und $m(t)$ die Anzahl der Menschen zum Zeitpunkt t . Für dieses Beispiel wird angenommen, dass die Wachstumsrate der Haie, wenn keine Fische und Menschen vorhanden sind, 1,2 pro Monat und die Rate, mit der die Fischpopulation wächst, wenn keine Haie und Menschen vorhanden sind, 1,5 pro Monat beträgt. Der Wert - 0,4 gibt an, wie schnell die Haipopulation den Fischbestand reduziert, wohingegen - 0,1 angibt, wie stark der Einfluss der Fischpopulation auf die Haipopulation ist. Die Werte - 0,02 und - 0,01 stellen den Einfluss der Menschen auf die Meereslebewesen dar. Die Wachstumsrate der Menschen wurde bei dem Beispiel mit 1,1 bemessen. Da der Bestand der Hai- und Fischpopulationen einen so geringen Einfluss auf die Menschenpopulation haben, wurde hierfür 0 eingesetzt. Dieses Differenzialgleichungssystem kann man mithilfe von Matrizen folgendermaßen anschreiben:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ h'(t) \\ m'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f(t) \\ h(t) \\ m(t) \end{pmatrix}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,4 & -0,02 \\ -0,1 & 1,2 & -0,01 \\ 0 & 0 & 1,1 \end{pmatrix}$.

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems lautet:

$$\gamma = e^{At} \gamma_0.$$

Um die Exponentialfunktion der Matrix A leicht berechnen zu können, sollte man sie auf Diagonalgestalt bringen. Die Matrix A besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{8}{5}$ und $\lambda_2 = \frac{11}{10}$. Da der Eigenwert λ_2 allerdings die algebraische Vielfachheit 2 und die geometrische Vielfachheit 1 aufweist, ist die Matrix A nicht diagonalisierbar. Um die Matrix-Exponentialfunktion zu bilden, muss man also auf die Jordan-Normalform der Matrix A zurückgreifen. Da das charakteristische Polynom in $\chi_A = (X - \frac{8}{5})(X - \frac{11}{10})^2$ in Linearfaktoren zerfällt, existiert zur Matrix A eine Jordan-Normalform. Im ersten Schritt berechnet man für

$$N = A - \frac{8}{5}E_3 = \begin{pmatrix} -0,1 & -0,4 & -0,02 \\ -0,1 & -0,4 & -0,01 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$$

die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker N^1 \subsetneq \ker N^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker N^r.$$

Da $\frac{8}{5}$ ein einfacher Eigenwert ist, bricht die Kette bereits nach dem Eigenraum ab. Nur ein Jordan-Basisvektor gehört zu diesem Eigenwert. Es gilt:

$$\ker(A - \frac{8}{5}E_3)^1 = \langle \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Im nächsten Schritt wird für

$$N = A - \frac{11}{10}E_3 = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,4 & -0,02 \\ -0,1 & 0,1 & -0,01 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker N^1 \subsetneq \ker N^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker N^r$$

gebildet. Hierbei gilt:

$$\ker(A - \frac{11}{10}E_3)^1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$\ker(A - \frac{11}{10}E_3)^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{50} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Da der Eigenwert $\frac{11}{10}$ die algebraische Vielfachheit $m_a(\frac{11}{10}) = 2$ hat, bricht hier die Kette ab. Durch die zwei Jordan-Basisvektoren entsteht ein (2×2) -Block. Durch die Jordan-Basis $(b_1, \dots, b_3)$ erhält man die Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{10} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{10} \end{pmatrix}$$

zu A . Die Matrix J kann nun in eine Diagonalmatrix L und eine nilpotente Matrix N zerlegt werden:

$$J = L + N = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixexponentialfunktion der Jordan-Normalform lautet also folgendermaßen:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\frac{8}{5}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{11}{10}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{11}{10}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{200} & \frac{1}{250} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{3}{250} & \frac{1}{50} \\ 1 & -\frac{3}{250} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Jordan-Normalform bei dynamischen Systemen

ist schließlich die Lösung $\gamma(t)$ mit $\gamma(t_0) = \gamma_0$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \gamma(t) &= \\
 &= \begin{pmatrix} -4 & -\frac{3}{250} & \frac{1}{50} \\ 1 & -\frac{3}{250} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{8}{5}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{11}{10}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{11}{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{250} \\ -\frac{50}{3} & -\frac{200}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{8}{5}}(12+500t)+3e^{\frac{11}{10}}}{15} & \frac{e^{\frac{8}{5}}(-12+4000t)+12e^{\frac{11}{10}}}{15} & \frac{e^{\frac{8}{5}}(12-1000t-1500t^2)+e^{\frac{11}{10}}12-9t}{15} \\ \frac{e^{\frac{8}{5}}(-3-250t)+75e^{\frac{11}{10}}}{15} & \frac{e^{\frac{8}{5}}(3-1000t)+12e^{\frac{11}{10}}}{15} & \frac{e^{\frac{8}{5}}+e^{\frac{11}{10}}}{255} \\ 0 & 0 & e^{\frac{11}{10}} \end{pmatrix} \cdot \gamma_0.
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger, H. Stachel: *Grundwissen Mathematikstudium, Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2022.
- [2] C. Bär: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Springer Spektrum Wiesbaden, Wiesbaden, 1. Auflage, 2018.
- [3] A. Beutelspacher: *Lineare Algebra, Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 8. Auflage, 2014.
- [4] K. Bongartz: *Normalformen von Matrizen*. Bergische Universität Wuppertal (2006), bezogen unter: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~bongartz/Normalformen.pdf>.
- [5] T. Bröcker: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker*. Springer Basel AG, Basel, 2. Auflage, 2004.
- [6] G. Fischer, B. Springborn: *Lineare Algebra, Eine Einführung für Studienanfänger*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin Heidelberg, 19. Auflage, 2020.
- [7] G. Fischer: *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium*. Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 1. Auflage, 2011.
- [8] L. Göllmann: *Lineare Algebra, im algebraischen Kontext*. Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2020.
- [9] L. Grüne: *Modellierung mit Differentialgleichungen*. Universität Bayreuth (2008), bezogen unter: https://num.math.uni-bayreuth.de/de/team/lars-gruene/skripten/mod/mod_dgl_3.pdf.
- [10] L. Grüne, O. Junge: *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*. Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2. Auflage, 2009.
- [11] C. Karpfinger, H. Stachel : *Lineare Algebra*. Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 1. Auflage, 2020.
- [12] P. Knabner, W. Barth: *Lineare Algebra, Grundlagen und Anwendungen*. Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2.Auflage, 2018.

- [13] H.J. Kowalsky, G.O. Michler: *Lineare Algebra*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 12. Auflage, 2003.
- [14] U. Krause, T. Neumann: *Differenzengleichungen und diskrete dynamische Systeme, Eine Einführung in Theorie und Anwendungen*. Walter de Gruyter GmbH Co.KG, Berlin Boston, 1. Auflage, 2012.
- [15] J. Liesen, V. Mehrmann: *Lineare Algebra, Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis*. Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2021.
- [16] R. Mitz: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. TU Wien (2004), bezogen unter: https://www.asc.tuwien.ac.at/arnold/lehre/pdgl/GEWDIF_A+B.pdf.
- [17] R. Schulze-Pillot: *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2008.
- [18] R. Schuster: *Biomathematik, Mathematische Modelle in der Medizinischen Informatik und in den Computational Life Sciences mit Computerlösungen in Mathematica*. Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 1. Auflage, 2009.
- [19] S. Waldmann: *Lineare Algebra 1, Grundlagen für Studierende der Mathematik und Physik*. Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2. Auflage, 2021.
- [20] M. Wohlgemuth: *Mathematisch für Anfänger, Beiträge zum Studienbeginn von Matroids Matheplanet*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2. Auflage, 2011.