

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Modellierung wechselwirkender Galaxien mit triaxialem Halo

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Verfasser:	Armin Liebhart
Matrikelnummer:	a9909472
Studienrichtung:	Astronomie A413
Betreuer:	Dr. Christian Theis

Wien, November 2009

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die aus anderen Quellen entnommen Stellen als solche gekennzeichnet habe.

Wien, am 11. November 2009

Armin Liebhart

Kurzzusammenfassung

Diese Diplomarbeit befasst sich mit dem Einfluss triaxialer Halos auf Wechselwirkungen von Galaxien. Nach dem gängigen Paradigma sind Galaxien von Hüllen aus unsichtbarer Materie, den sogenannten Dunkle Materie Halos, umgeben. Diese Halos beinhalten den Großteil der Gesamtmasse einer Galaxie. Aus diesem Grund sind sie maßgeblich für den Verlauf einer Wechselwirkung, die vorrangig durch die Masse der Wechselwirkungspartner definiert wird. Weiters bestimmt die Dichteverteilung der Halos hauptsächlich das Potential in dem sich die Sterne bewegen. Deswegen ist die Form der Halos ausschlaggebend für die Orbits auf denen sich die Sterne bewegen. In den meisten Fällen werden die Halos in sphärischer Konfiguration angenommen, allerdings mehren sich die Anzeichen für eine Abplattung, oder gar eine Triaxialität derselbigen. Triaxiale Halos werden zur Erklärung von Warps oder zur Erklärung der Bewegung des Sagittariusstroms herangezogen. Unter der Annahme, dass triaxiale Halos nicht so selten vorkommen, wie früher vermutet, stellt sich die Frage, welchen Einfluss sie auf Galaxienwechselwirkungen nehmen können. Zu diesem Zweck wurde ein bereits bestehender eingeschränkter N-Körper Code erweitert, um Simulationen von Wechselwirkungen mit Halos unterschiedlichster Form durchführen zu können. Zum Abschluss wurden einige Testrechnungen vorgenommen um die Genauigkeit des Codes zu überprüfen, sowie eine morphologische Studie zur Auswirkung der Änderung einiger Parameter durchgeführt.

Abstract

This thesis addresses the impact of triaxial halos on interacting galaxies. It is well known that galaxies are enveloped by a halo of invisible matter, i.e. the dark matter halo. These halos comprise most part of the total mass of a galaxy. Hence, they are controlling the course of an interaction. In addition, the density profile of a halo is mainly responsible for the potential, in which the stars are orbiting. For that reason the shape of the dark matter halo is influencing the orbits, significantly. Most often, halos are assumed to be spherical symmetric, although, evidence suggests a flattened or even triaxial halo. For example, triaxial halos can explain observations like a warp or the Sagittarius stream. The assumption, that triaxial halos are not as seldom as previously thought, leads to the question of its impact on interacting galaxies. To approach this issue, a restricted N-body code was adapted in order to account for different halo shapes during interactions of galaxies. The accuracy of the modified code was thoroughly examined and last but not least a parameter study was conducted in order to review morphological distinctions as a result of the halo shape.

Inhaltsverzeichnis

1. Galaxien	1
1.1. Einführung	1
1.2. Spiralgalaxien	2
1.2.1. Einteilung	2
1.2.2. Aufbau einer Spiralgalaxie	4
2. Galaxienwechselwirkung	7
2.1. Beobachtungen	7
2.2. Physikalischer Hintergrund	9
2.3. Numerische Methoden	11
2.3.1. Historische Methoden	12
2.3.2. N-Körper Simulationen	12
3. Dunkler Materiehalo	18
3.1. Beobachtungen	19
3.2. Dunkle Materie	21
3.3. Dichteverteilung	21
3.4. Form der Halos	23
4. Triaxiale Systeme	25
4.1. Einleitung	25
4.2. Darstellung	25
4.3. Numerische Implementierung	26
4.3.1. Aufsetzen der Galaxien	26
4.3.2. Berechnung der Kraft	27
4.3.3. Berechnung des Drehmoments	27
4.3.4. Lösung der Bewegungsgleichung	28
4.4. Der Potenzreihenalgorithmus	29
5. MINGA	31
5.1. Funktionsweise von Minga	31
5.2. Restricted N-body code	32
5.3. Implementation der sphärischen Halos	35
5.4. Frühere Resultate	36
5.5. Erweiterungen	36

6. Einbau des triaxialen Halos in MINGA	37
7. Ergebnisse	39
7.1. Testrechnungen	39
7.2. Parameterstudie	45
7.2.1. Veränderung eines Halos bei sonst gleichbleibender Wechselwirkung	45
7.2.2. Drehung des triaxialen Halos	57
8. Zusammenfassung	67
A. Programmcode	68
B. Herleitung der Schnittellipse einer Ebene und eines Ellipsoids	73
C. Quaternionen	75
C.1. Rechengesetze:	75
C.1.1. Interpolation zwischen zwei Quaternionen	76
C.2. Drehung mittels Quaternionen:	76
C.3. Herleitung der Differentialgleichung für die Körperposition	77
D. Eulerwinkel	79
E. Herleitung der Potenzreihenentwicklung	81
E.1. Reihenentwicklung	81
E.2. Generalized products of inertia	83

1. Galaxien

1.1. Einführung

Was sind Galaxien? Diese Frage konnte lange Zeit nicht beantwortet werden. Weniger wegen der Tatsache, dass sie so schwer beobachtet werden konnten, sondern mehr auf Grund unserer Betrachtungsweise des Universums. In den präinstrumentalen Zeiten bestand das Universum aus der Sicht der Menschen nur aus unserer Galaxie und alles, was wir beobachten konnten, befand sich darin. Mit der Erfindung der ersten Teleskope änderte sich an dieser Ansicht wenig, aber die Erkenntnisse über die nähere Umgebung unserer Sonne nahmen zu. Zugegebenermaßen war es sicherlich nicht einfach mit den damaligen Teleskopen den Himmel zu erforschen, zumal die Beobachtungsinstrumente erst im zwanzigsten Jahrhundert zu ihren heutigen Größen entwickelt wurden und immer noch größere hergestellt werden. Auch die Position unseres Sonnensystems innerhalb unserer Galaxie, der Milchstraße, erschwerte den Vergleich mit bereits bekannten Systemen, wie dem Andromedanebel, daher ist es nicht verwunderlich, dass lange Zeit nicht festgestellt werden konnte, wie ähnlich sich die beiden Systeme sind. Naturgemäß ist es nicht allzu einfach festzustellen, wie ein Objekt geformt und gestaltet ist, wenn man sich innerhalb desselben befindet. Bis heute ist nicht endgültig geklärt, ob unsere Galaxis einen Balken besitzt oder nicht, wenngleich in den letzten Jahren die Hinweise auf einen Balken drastisch zunahm, weswegen die Milchstraße zumeist als Balkenspirale bezeichnet wird (Binney & Merrifield, 1998). Anlässlich all dieser Punkte ist es verständlich, dass die Entdeckung der Galaxien als eigenständige Objekte erst vor nicht allzu langer Zeit stattgefunden hat.

Ursprünglich wurden Galaxien als Ansammlung von Sternen betrachtet. Später folgte die Einsicht, dass es sich hier um gravitativ gebundene Systeme, bestehend aus Sternen, Gas, Staub und Dunkler Materie, handelt. Erst Edwin Hubble (1925) konnte klar nachweisen, dass es sich bei Galaxien um extragalaktische Objekte handelt, indem er ihre Entfernung zu uns mittels Cepheiden bestimmte. Davor gab es jahrelang die große Debatte, auch Shapley-Curtis-Debatte genannt (siehe Hoskin (1976) für eine Übersicht). Shapley und Kollegen waren der Ansicht, dass unsere Galaxie weitaus größer sei, als von den meisten Astronomen angenommen, womit sie schlußendlich auch Recht behielten. Allerdings waren sie auch der Ansicht, dass die Spiralnebel, wie beispielsweise der Andromedanebel, Gaswolken innerhalb unserer Galaxis seien. Eine Annahme, die sich als falsch herausstellte. Curtis und seine Anhänger schätzten die Milchstraße wesentlich kleiner ein, als sie ist. Allerdings waren sie davon überzeugt, dass diese Spiralnebel sich außerhalb unserer Galaxis befinden, was Hubble (1925) schlußendlich auch bestä-

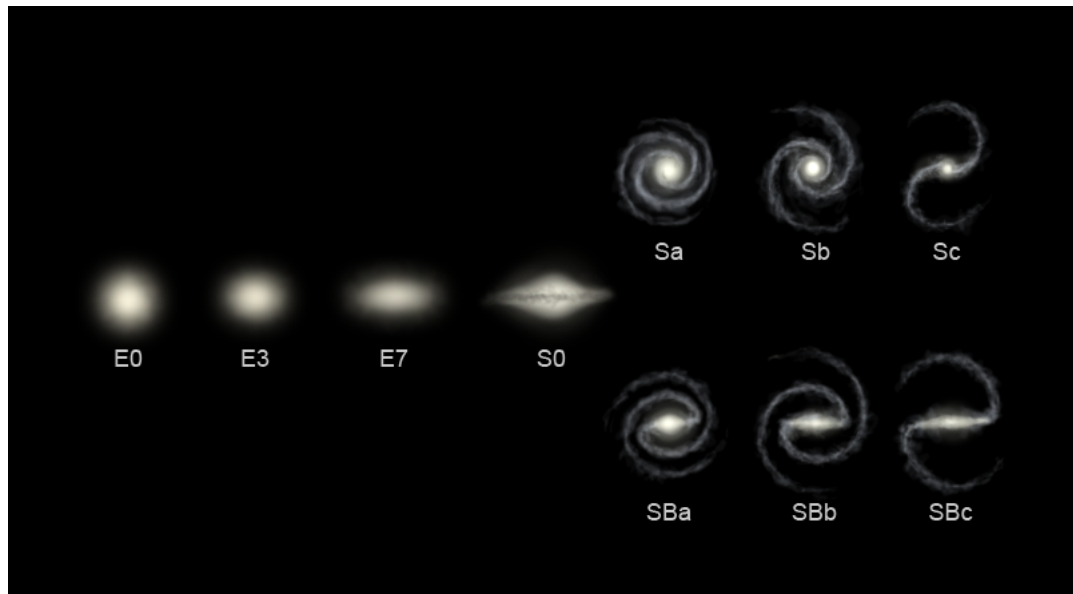


Abbildung 1.1.: Hubble-Sequenz der Galaxien. (Autor: Ville Koistinen)

tigen konnte. Anhand dieser Debatte wird klar ersichtlich, wie groß das Universum zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts noch eingeschätzt wurde und wieviel Wissen wir seit damals dazugewonnen haben. Dennoch befinden wir uns erst im Anfangsstadium der Erkundung des extragalaktischen Raumes, wie die fortdauernden Diskussionen über die Größe und das Alter des Universums deutlich machen. Wir wissen einfach noch zu wenig, um diese Punkte endgültig festzulegen. Daher liegt noch viel Arbeit vor uns.

1.2. Spiralgalaxien

Im folgenden Kapitel werden die Spiralgalaxien genauer vorgestellt. Zuerst muß aber klargestellt werden, dass die Spiralgalaxien nicht die gesamte Klasse der Galaxien repräsentieren, sondern nur einen Teil davon. Weitere Galaxientypen sind die elliptischen, die linsenförmigen, sowie die irregulären Galaxien. Zu den irregulären Galaxien gehören vor allem Zwerggalaxien, die zumeist in elliptischer oder linsenförmiger Form vorkommen. Spiralgalaxien treten eher seltener in Zwergform in Erscheinung.

1.2.1. Einteilung

Die Einteilung der Spiralgalaxien erfolgt auch heute noch nach der von Hubble eingeführten Klassifikation (siehe Abbildung 1.1). Diese Einteilung umfasst allerdings nicht nur die Spiralgalaxien, sondern auch die oben angesprochenen elliptischen, sowie die linsenförmigen Galaxien. Jede dieser Gruppen erhält einen Großbuchstaben als Symbol. Die Spiralgalaxien werden mit S gekennzeichnet, die elliptischen Galaxien mit E, sowie

die linsenförmigen Galaxien mit S0. Der Ast auf dem die Spiralen liegen, ist zweigeteilt. Die Unterscheidung der Spiralen in den einen Zweig, oder den anderen, basiert auf der Frage, ob sie einen Balken aufweisen oder nicht. In jedem dieser Zweige gibt es außerdem drei Untergruppen, welche sich nach der Windungszahl, oder dem Anstellwinkel der Spiralarme richtet. So erhalten Spiralgalaxien mit sehr engen Spiralarmlen den Buchstaben a, diejenigen mit sehr weiten Armen den Buchstaben c. Die Dritte Gruppe, erhält den Buchstaben b und wird von den Galaxien gebildet, die weder ausgesprochen enge, noch weite Spiralarme aufweisen. Spiralgalaxien mit einem Balken erhalten ein großes B hinter dem S. Unsere Milchstraße beispielsweise hat die Kennung SBb oder SBc.

1.2.2. Aufbau einer Spiralgalaxie

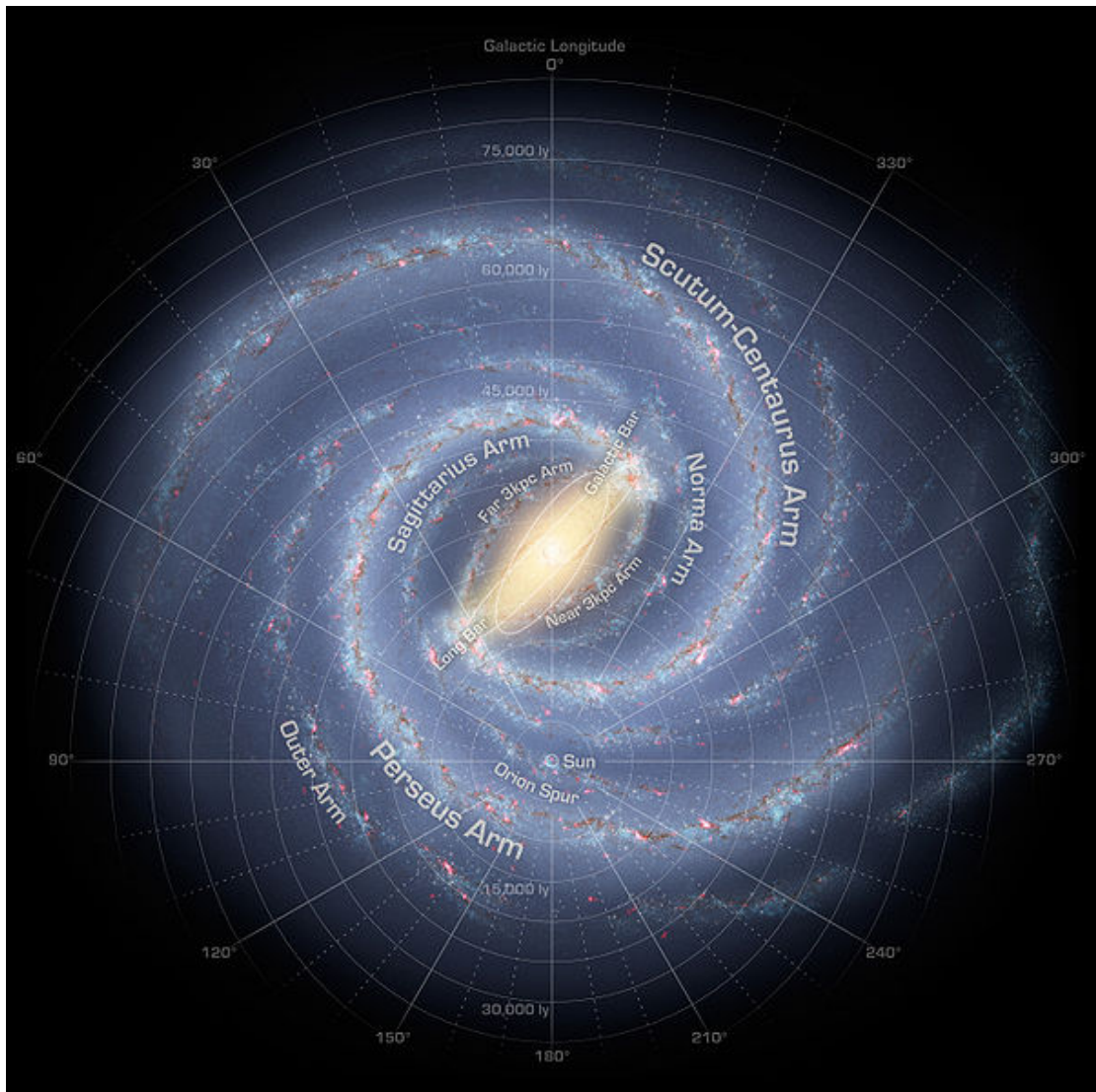


Abbildung 1.2.: Milchstraße von außen betrachtet. (Bild zur Verfügung gestellt von NASA/JPL-Caltech/R. Hurt)

Der Aufbau von Spiralgalaxien ist recht einfach. Sie bestehen aus einer Scheibe, die zumeist in eine dicke und eine dünne Scheibe unterteilt ist, sowie einer Zentralregion, häufig *bulge* genannt (siehe Abbildung 1.3). Desweiteren gibt es einen ausgedehnten Halo, der das innere System, bestehend aus Scheibe und Zentralregion, umfasst. Dieser Halo wird ebenfalls in zwei Teile gegliedert. Es gibt den stellaren Halo, welcher aus einzelnen Sternen, sowie aus Kugelsternhaufen besteht. Daneben existiert ein sogenannter dunkler Halo, der wie der Name andeutet, nicht beobachtet werden kann. Genauer ausgedrückt entsendet er keine elektromagnetischen Wellen, weshalb er nicht durch optische Sensoren

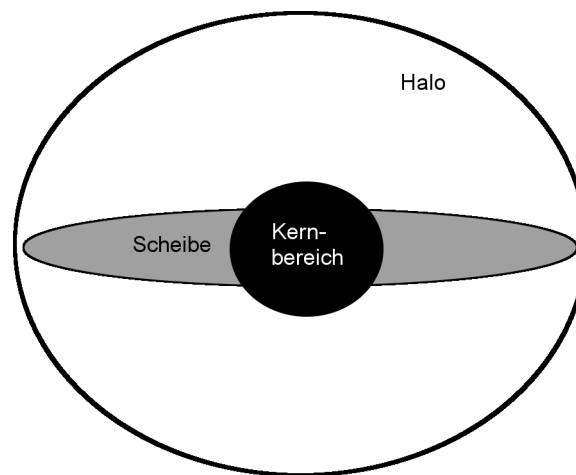


Abbildung 1.3.: Skizze einer Spiralgalaxie, bestehend aus einer Scheibe, einem Kernbereich und einem Halo

erfasst werden kann. Es besteht allerdings die Möglichkeit diesen dunklen Halo durch seine Wirkung auf die sichtbaren Teile der Galaxie nachzuweisen, wenn auch noch sehr begrenzt.

Aus diesem Grund sind die dunklen Materiehalos, wie sie zumeist genannt werden, heutzutage eines der wichtigsten Forschungsgebiete in der Astronomie.

Scheibenkomponente

In der Scheibenkomponente einer Spiralgalaxie spielen sich die grundlegenden Prozesse der Galaxienentwicklung ab, von der Sternentstehung angefangen, bis hin zu den Supernovae, von denen einige weitreichende Blasen (engl. *bubbles*) erzeugen, die einen starken Einfluss auf das galaktische Geschehen nehmen. Für den Fall mehrerer Supernovae in einem begrenzten räumlichen Volumen bildet sich eine Superblase (engl. *superbubble*), die bis weit hinaus in den Halo reichen kann. Die Scheiben weisen zumeist verschieden stark gewundene Spiralarme auf, aufgrunddessen sie in verschiedene Klassen eingeteilt werden (siehe Kapitel 1.2.1). In Abbildung 1.2 erkennt man deutlich, wie unsere eigene Galaxie aufgebaut ist, wobei den neueren Erkenntnissen entsprechend im Zentrum ein Balken zu sehen ist. Die Spiralarme bestehen aus den verschiedenen Materialien der Scheibe, daher hauptsächlich aus Sternen, Gas und Staub. Die Entstehung der Spiralen ist schwierig zu erklären, da es sich hierbei anscheinend um kein statisches, sondern ein hochgradig dynamisches System handelt. Die Spiralen sind keine starren Gebilde, sonst würden sie sich aufwickeln (Binney & Tremaine, 1987). Eine mögliche Erklärung für die Entstehung dieses Phänomens ist die Dichtewellentheorie (Lin & Shu, 1964), welche besagt, dass sich im globalen gravitativen Potential lokale Vertiefungen bilden, bildlich vorstellbar als gravitatives Waschbrett, worin das Gas und die Sterne einströmen können, sich verdichten und somit die Spiralen bilden. Obwohl sie nicht den Hauptanteil der Gesamtmasse tragen, senden die Scheiben doch den Großteil des Lichtes aus, wel-

1. Galaxien

ches wir beobachten können. In den Scheiben befinden sich Sterne aller Größen, sowie eine Menge Gas, aus welchem weitere Sterne entstehen können. Die Scheiben sind jener Teil der Galaxien, welcher durch eine Wechselwirkung am stärksten beeinflusst wird. Die Beobachtungen von wechselwirkenden Galaxien, wie im Kapitel 2.1 zu sehen, zeigen deutliche Spuren der durch Wechselwirkungen zu Stande kommenden Auswirkungen, wobei die auf den Bildern zu sehenden Details hauptsächlich durch Scheibenmaterial zustande kommen. Die Halos sind, wie Kapitel 3 verdeutlicht, großteils unsichtbar und die Kernbereiche zu stabil, um durch eine Wechselwirkung nennenswert beeinflusst zu werden.

Kernbereich - Bulge

Der Kernbereich einer Galaxie (engl. *bulge*) besteht zum Großteil aus alten Sternen (Minniti & Zoccali, 2008). Diese zentralen Bereiche sind zumeist sphärische, oder auch abgeplattete Systeme, die kinematisch unabhängig von der Scheibenkomponente existieren. Während der letzten Jahre wurde das Wissen über diese Kernbereiche kontinuierlich erweitert. Dennoch ist bisher recht wenig über diese Teile der Galaxien bekannt, vor allem die Entstehungsgeschichte ist bis dato ein Rätsel geblieben. Kürzlich wurde die starre Rotation des Milchstraßenzentralgebiets nachgewiesen, wobei dieses Gebiet de facto wie ein Zylinder rotiert (Howard et al., 2009). Aufgrund dieser Rotation sind einige Kerngebiete abgeplattet, so etwa auch der Kernbereich der Milchstraße, der ein Achsenverhältnis von $b/a \sim 0.6$ aufweist (Kent et al., 1991). Weiters sind die Balken, wie sie in Kapitel 1.2.1 erwähnt wurden, Teil der Kernbereiche.

Dunkler Materiehalo

Dieser Teil einer Spiralgalaxie beinhaltet den größten Teil der Gesamtmasse. Laut Binney & Tremaine (1987) hat beispielsweise die Scheibe unserer Milchstraße eine ungefähre Masse von 7×10^{10} Sonnenmassen. Der Halo hat basierend auf der beobachteten Rotationsgeschwindigkeit eine Masse von ungefähr 10^{12} Sonnenmassen. Die Halos sind der für diese Diplomarbeit relevanteste Teil der Galaxien und werden deshalb in Kapitel 3 ausführlicher besprochen. Hervorzuheben ist die Tatsache, dass Halos einen großen Einfluss auf die Galaxiendynamik haben, angefangen von der Rotation der Scheibe, welche aufgrund des Einflusses des Halos eine flache Rotationskurve aufweist, bis hin zu der Entstehung von Warps. Da es sich bei den Halos um die massereichsten Teile der Galaxien handelt, haben sie auch einen großen Einfluss auf den Verlauf einer Wechselwirkung, nicht zuletzt, als sie aufgrund ihrer Masse großteils die Bahnen der beteiligten Galaxien festlegen. Wie eine Wechselwirkung verläuft wird im folgenden Kapitel erläutert.

2. Galaxienwechselwirkung

2.1. Beobachtungen



Abbildung 2.1.: Die Antennae-Galaxien (NGC 4038/39) sind das bekannteste Beispiel für verschmelzende Galaxien. (Aufnahme des Hubble Space Telescopes, freundlicherweise zur Verfügung gestellt von ESA und NASA)

Wie im vorigen Kapitel angesprochen, können Galaxien in verschiedene Gruppen eingeteilt werden. Hubble hat eine einfache morphologische Einteilung anhand von Beobachtungen vorgenommen. Allerdings wurde schon damals festgestellt, dass sich manche Galaxien nicht auf diese Weise einteilen lassen. Im Jahre 1966 veröffentlichte Halton Arp einen Atlas pekuliärer Galaxien, dazu zählten alle Galaxien, die nicht nach dem herkömmlichen Schema von Hubble klassifiziert werden konnten. Im Laufe der Jahre erhöhte sich die Anzahl der Beobachtungen pekuliärer Galaxien. Es wurden stark verformte Galaxien gefunden, einige mit zwei Kernen (siehe Abbildung 2.1), andere mit riesigen langgezogenen Spiralarmlen, wie in Abbildung 2.2.

2. Galaxienwechselwirkung



Abbildung 2.2.: Die Mäuse (IC 820 und IC 819) - Ein klassisches Beispiel einer Wechselwirkung mit weit ausladenden Armen (Aufnahme des Hubble Space Telescopes, freundlicherweise zur Verfügung gestellt von NASA und ESA)

Weiters gibt es noch welche mit zwei aufeinander normal stehenden Scheiben (siehe Abbildung 2.3), sowie einige die einen äußeren Ring aufweisen, aber keine Spiralarmstruktur (siehe Abbildungen 2.4 und 2.5). All diese Beispiele konnten erst später interpretiert werden. Mit der Zeit entwickelte sich die Idee, dass Galaxien untereinander wechselwirken können. Ursprünglich wurde das als ein seltenes Ereignis eingestuft. Wie wir allerdings heute wissen, sind Wechselwirkungen eher die Regel und isolierte Galaxien die Ausnahme. Das liegt daran, dass Galaxien, im Verhältnis zu ihrer Größe, recht nahe beieinander stehen und daher im Gegensatz zu Sternen einander häufig beeinflussen. Ab und zu kommt es sogar vor, dass mehrere Galaxien miteinander wechselwirken, siehe Abbildung 2.6. Kaum eine Galaxie im Universum ist davon bisher verschont geblieben.



Abbildung 2.3.: NGC 4650A - Ein schönes Beispiel eines Polarring (Aufnahme des HST, freundlicherweise zu Verfügung gestellt von ESA und NASA)



Abbildung 2.4.: AM 0644-741 - Vertreter einer Ringgalaxie
(Aufnahme vom Hubble Space Telescope, freundlicherweise zur Verfügung gestellt von NASA und ESA)

2.2. Physikalischer Hintergrund

Die Physik, welche zur Beschreibung einer Galaxienwechselwirkung herangezogen wird, ist großteils die Gravitation. Wenngleich auch viele andere Prozesse bei einer Wechselwirkung mitspielen, liefert doch die Gravitation das Grundgerüst. Nach dem gegenwärtigen Paradigma wird der Einfluss einer Masse auf seine Umwelt durch die Allgemeine Relativitätstheorie, entwickelt von Albert Einstein (1916), beschrieben. Für die meisten Anwendungen wird allerdings die ältere Methode der newtonschen Gravitation, benutzt, da diese wesentlich weniger Rechenaufwand bedingt und daher vor allem in numerischen Verfahren einfacher anzuwenden ist. Die newtonsche Gravitationstheorie ist für Galaxienwechselwirkungen gut geeignet, da sie bis auf wenige Ausnahmen, wie den supermassiven Schwarzen Löchern im Zentrum der Galaxien (Sargent et al., 1978), die Gravitationskraft in einer ausreichenden Genauigkeit wiedergibt. Für den Fall, dass starke Gravitationsfelder beschrieben werden müssen, zieht man zumeist eine sogenannte postnewtonsche Beschreibung heran (siehe Blanchet (2006) für eine Zusammenfassung), welche eine Approximation an die Relativitätstheorie darstellt. Weitere wichtige Teilge-

2. Galaxienwechselwirkung

biete der Physik, die bei einer Wechselwirkung relevant sind, sind die Gasphysik und die Magnetfelder. Aufgrund der Tatsache, dass die meisten Scheibengalaxien eine große Menge Gas beinhalten, welche bei einer Wechselwirkung eine Vielzahl an Prozessen durchläuft, ist es oft notwendig die Gasphysik in die Beschreibung von Wechselwirkungen zu inkludieren. Solche Beschreibungen finden in vielen Varianten statt, beispielsweise mittels SPH (Gingold & Monaghan, 1977) oder *sticky-particles* (Larson, 1969), und verdeutlichen zunehmend, welchen Einfluss die Gaskomponente einer Galaxie auf die Wechselwirkung hat.

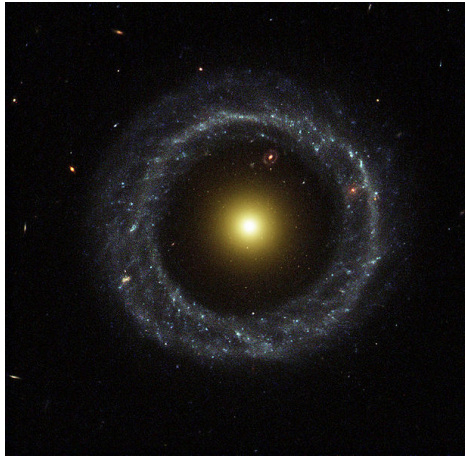


Abbildung 2.5.: Hoags Objekt - Ein schönes Beispiel einer Ringgalaxie. Im Innenbereich des Ringes ist sogar eine zweite Ringgalaxie zu sehen. (Aufnahme des Hubble Space Telescopes, freundlicherweise zur Verfügung gestellt von ESA und NASA)

Die Beschreibung der Magnetfelder, meist im Zuge der Magnetohydrodynamik, ist eine recht junge Disziplin, da sie mathematisch aufwendig ist und daher einigen Aufwand zur Implementierung in die bereits vorhandenen Modelle mit sich bringt. Beobachtungen zeigen allerdings, dass ein großer Teil des Gases in Galaxien ionisiert ist und daher anfällig für den Einfluss von Magnetfeldern. Die Existenz von globalen galaktischen Magnetfeldern wurde von Fermi im Jahre 1949 vorgeschlagen, wobei vorhergehende Arbeiten von Alfvén auf dessen Existenz hindeuteten (Fermi, 1949). In den letzten Jahren gab es immer mehr Beobachtungen zu den Magnetfeldern einzelner Galaxien, darunter auch unserer Milchstraße, was zu der Erkenntnis führte, Magnetfelder als wichtigen Teil der Galaxiendynamik zu begreifen. Für eine Zusammenfassung über den gegenwärtigen

Wissensstand über die galaktischen Magnetfelder wird auf Han (2008) verwiesen. Zurückkommend auf den wichtigsten Bestandteil einer Wechselwirkung, die gegenseitige gravitative Anziehungskraft, ist vor allem der Aufbau der Galaxien entscheidend. Nach dem gängigen Paradigma bestehen Spiralgalaxien (siehe 1.2.2) aus einer Scheibe, einem Zentralbereich (auch Bulge genannt), sowie einem umgebenden Halo, der wiederum aus einem stellaren Teil, hauptsächlich alte Kugelsternhaufen, sowie aus einem nicht sichtbaren Teil, dem sogenannten dunklen Materiehalo, besteht. Diese dunklen Halos sind der massereichste Teil einer Galaxie und beeinflussen daher die Wechselwirkung wesentlich.



Abbildung 2.6.: Infrarotaufnahme von Stephans Quintett, einer Wechselwirkung von 5 Galaxien.

2.3. Numerische Methoden

Es gibt verschiedene numerische Methoden, um eine Galaxienwechselwirkung zu simulieren. Angefangen von den einfachen eingeschränkten Varianten, bis hin zu den hochauflösenden Simulationen der Gegenwart, in welche viele verschiedene physikalische Prozesse eingebaut werden.

2.3.1. Historische Methoden

Aufgrund der Tatsache, dass Computer erst ab der Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts ihren Siegeszug begannen, mussten die früheren Astronomen etliche Vereinfachungen und Tricks in Kauf nehmen, um die ersten Simulationen zweier wechselwirkender Galaxien durchführen zu können. In diesem Sinne besonders hervorzuheben ist Erik Holmberg, der im Jahre 1941 mit Hilfe von Glühbirnen eine Galaxienwechselwirkung simulierte. In seiner Simulation nutzte er die Tatsache, dass der Strahlungsfluss von Glühbirnen, ebenso wie die Gravitation, mit r^{-2} abnimmt. Durch die Messung des Strahlungsflusses bei jeder Lampe, die jede für sich eine große Anzahl von Sternen repräsentierte, konnte er die Kraft berechnen, die durch die anderen Lampen ausgeübt wurde. Auf diese Weise konnte er zu jedem Zeitschritt die Beschleunigung bestimmen, mit welcher die Glühbirnen weiterbewegt wurden. Im Laufe der Zeit wurden die Computer weiterentwickelt und bereits recht bald konnten diese neuen Geräte für wissenschaftliche Simulationen genutzt werden. Im Jahre 1961 veröffentlichten Pfeiderer & Siedentopf die erste numerische Simulation einer Galaxienwechselwirkung. Ein sehr wichtiger Beitrag entstammt der Publikation von Toomre & Toomre im Jahre 1972, worin erstmals eine Parameterstudie zu Wechselwirkungen durchgeführt wurde. In dieser Publikation wurde ausführlich beschrieben, wie die Gravitation viele der beobachteten Strukturen erzeugen kann. In den Jahren zuvor gab es viele Diskussionen, ob die Gravitation alleine derartige Strukturen zu bilden vermag. Toomre & Toomre bewiesen, dass Brücken und Schweife durch eine gravitative Wechselwirkung zustandekommen können. Nach dieser Veröffentlichung begann der Siegeszug der numerischen Simulationen auf dem Gebiet der Extragalaktik, da durch diese Simulation anschaulich erklärt werden konnte, was die Beobachtungen zeigten. Da die Dauer einer Wechselwirkung einige hundert Millionen Jahre benötigt, ist mit einer vollständigen Beobachtung einer solchen innerhalb eines Menschenlebens, oder selbst vieler Generationen von Menschen, nicht zu rechnen. Aus diesem Grund stellen die Simulationen einen wesentlichen Beitrag zur Wissensfindung auf diesem Gebiet dar.

2.3.2. N-Körper Simulationen

Eine Galaxie besteht aus vielen verschiedenen Sternen. Im Falle der Milchstraße gehen wir derzeit von circa 200 Milliarden Sternen aus. Diese Zahl verdeutlicht, dass es selbst unter Nichtberücksichtigung der anderen Komponenten der Scheibe einer Spiralgalaxie, wie Staub und Gas, ein immenser Rechenaufwand wäre, die Bewegungen eines einzelnen Sternes aufgrund der Anziehungskraft aller anderen Sterne zu berechnen. Diese Menge an Rechnungen können selbst die heutigen Supercomputer nur mühsam bewältigen, daher werden Approximationen benutzt. Eine davon ist die Darstellung ganzer Sternhaufen als ein Sternteilchen. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden einzelne Spezialfälle besprochen.

1-Körper-Problem

Das 1-Körper-Problem beschränkt sich auf die Bewegung eines Körpers in einem äußeren Kraftfeld. Nach Newton (1687) gilt in diesem Fall das zweite newtonsche Axiom:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich die Beschleunigung, die der Körper durch ein gegebenes Kraftfeld erfährt. Im Falle konservativer Kräfte, darunter fällt auch die Gravitation, kann die Beschleunigung allerdings auch als Gradient des Potentials bestimmt werden:

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla\Phi(\vec{r})$$

Hierdurch vereinfacht sich die Berechnung der Beschleunigung, da die Beschleunigung ausschließlich von der Position des betrachteten Teilchens abhängt.

2-Körper-Problem

Dieses Problem kann vereinfacht werden, indem es in das Schwerpunktsystem transformiert und mit Hilfe der reduzierten Masse $\mu = (m_1 * m_2)/(m_1 + m_2)$ in ein 1-Körper-Problem umgewandelt wird, wobei die Massen m_1 und m_2 die Massen der beiden beteiligten Körper sind. In diesem Fall wird das Problem auf ein *reduziertes* Teilchen vereinfacht, das sich in einem Keplerpotential bewegt.

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

Aus diesem Grund wird dieses Problem mithin auch Keplerproblem genannt. Die Bewegungsgleichung des reduzierten Teilchens ergibt sich zu $\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\vec{e}_r$, und wird zur weiteren Vereinfachung des Problems in Polarkoordinaten umgeschrieben.

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F(r) \quad (2.1)$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0 \quad (2.2)$$

Mit Hilfe des spezifischen Drehimpulses

$$L = r^2\dot{\phi}$$

der, wie aus Gleichung (2.2) ersichtlich ist, zeitlich konstant ist, wird Gleichung (2.1) umgeformt in

$$\frac{L^2}{r^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L^2}{r^3} = \frac{F(r)}{\mu} \quad (2.3)$$

Durch die Einführung der neuen Variable $\omega = 1/r$ kann die obige Gleichung vereinfacht werden zu

$$\frac{d^2\omega}{d\phi^2} + \omega = \frac{GM}{L^2}.$$

2. Galaxienwechselwirkung

Diese Gleichung ist zeitunabhängig und liefert als Lösung einen Kegelschnitt.

$$r(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}$$

mit

$$\begin{aligned} a & \dots \text{ große Halbachse} \\ e & \dots \text{ Exzentrizität} \\ \phi_0 & \dots \text{ Lage des Kegelschnitts} \end{aligned}$$

Die Art des Kegelschnitts hängt von der Exzentrizität ab, wobei

- $e = 0$ kreisförmig
- $e < 1$ elliptisch
- $e = 1$ parabolisch
- $e > 1$ hyperbolisch.

Kreisförmige und elliptische Bahnen sind gebundene Systeme, das heißt die beiden Körper umkreisen einander. Parabolische und hyperbolische Bahnen sind hingegen ungebundene Systeme, was dazu führt, dass sich die beiden Körper nach der Begegnung immer weiter voneinander entfernen.

N-Körper-Problem

Ab einer Teilchenzahl von drei ist das System im Allgemeinen nicht mehr analytisch lösbar. Dieses Problem muss daher numerisch gelöst werden, wobei sich das bereits zu Beginn diskutierte Problem ergibt, dass eine steigende Teilchenanzahl zu einem stark steigenden Rechenbedarf führt. Im Prinzip muß für das gravitative N-Körper Problem folgende Gleichung gelöst werden:

$$\vec{F}_i = - \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \quad (2.4)$$

Diese Gleichung beschreibt die Kraft auf ein Teilchen mit dem Index i , hervorgerufen durch alle anderen Teilchen (Summe über Index j), wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ die Gravitationskonstante bezeichnet.

Methoden zur Lösung des N-Körper-Problems

Es gibt viele verschiedene Methoden um gravitative Wechselwirkungen zu simulieren. Die größte Schwierigkeit liegt darin, die Rechenzeit so gering wie möglich zu halten und dennoch eine adäquate physikalische Aussage zu erhalten. Hier folgt eine kurze Beschreibung der verschiedenen Methoden.

- Direktes Verfahren: exaktes Verfahren - Bewegungsgleichung wird ohne Näherung gelöst, hoher Rechenaufwand
- eingeschränktes N-Körper Verfahren: geringer Rechenaufwand, geringste Genauigkeit aller Verfahren
- Tree-Code: gute Approximation, wesentlich geringerer Rechenaufwand als direkte Methode, aber etwas größere Ungenauigkeit
- Particle-Mesh: Rechenaufwand linear abhängig von Teilchenzahl, große Ungenauigkeit bei nahe zueinanderstehenden Teilchen
- P³M & PM-Tree: verbesserte Particle-Mesh-Methode, Alternative zu Tree-Code

Die **direkte Methode** ist die aufwändigste, aber auch die exakteste. Dabei wird die Kraft auf jedes Teilchen direkt berechnet, das bedeutet, die Gleichung 2.4 wird ohne Approximation gelöst. In diesem Fall erhöht sich die benötigte Zeit zur Berechnung quadratisch mit jedem hinzugefügten Teilchen. Eines der besten derzeit verfügbaren Programme zur Berechnung des N-Körper-Problems auf die direkte Art ist NBODY6 (Aarseth, 2003), geschrieben von Sverre Aarseth. Allerdings ist dieses Programm für hohe Teilchenzahlen umgeschrieben worden, indem die Berechnung der Kraft zwischen weit entfernten Teilchen vereinfacht wurde. Daher ist es nur noch bedingt als direkter Code anzusehen. Dieses Programm benötigt für 10^2 Partikel ungefähr 1000 Stunden reine Rechenzeit. Für eine komplette Simulation mit 10^6 Teilchen wären rund 10^8 Stunden notwendig. Alleine anhand dieser Beispiele lässt sich erkennen wie groß der Aufwand für eine direkte Berechnung der Bewegungsgleichungen der Teilchen ist.

Das **eingeschränkte Verfahren** (engl. *restricted n-body*) eignet sich hervorragend um schnell und einfach die Bewegungen in einem Vielkörpersystem zu simulieren. Allerdings ist es von allen Verfahren, das mit Abstand ungenaueste, da die Position eines einzelnen Teilchens keinerlei Auswirkungen auf die Bewegung eines anderen hat, was zur Folge hat, dass sich die Teilchen nicht an die lokalen Gegebenheiten anpassen, sondern sich entsprechend dem globalen Gravitationspotential fortbewegen. Das eingeschränkte Verfahren benutzt die Tatsache, dass einzelne Sterne relativ geringe Auswirkungen auf das Gesamtpotential aufweisen. Daher lässt sich das N-Körper-Problem in N 1-Körper-Probleme aufspalten, wobei jedes einzelne Teilchen sich im Gesamtpotential der Galaxie bewegt. In den ersten Simulationen wurden die Galaxien noch als Punktmassen betrachtet, siehe (Toomre & Toomre, 1972). Neuere Programme tauschen die Punktmassen durch verschiedene Haloprofile aus, wie auch das für diese Diplomarbeit relevante

2. Galaxienwechselwirkung

Programm MINGA, siehe Kapitel 5.

Die Methode des **Treecodes** wurde von Barnes & Hut entwickelt um die quadratische Abhängigkeit des direkten Verfahrens zu mildern (Barnes & Hut, 1986). Bei diesem Verfahren wird nur zwischen nahen Teilchen direkt aufsummiert, weiter entfernte Teilchen werden zu Gruppen zusammengefasst, wobei der Massenschwerpunkt dieser Gruppe als neuer Bezugspunkt für entfernte Teilchen fungiert. Aus diesem Grund gibt es natürlich einen gewissen Fehler bei der Kraftberechnung, der aber in den meisten Fällen gering genug ist, um die Simulation realistisch sein zu lassen. Der Name kommt von der Struktur dieser Berechnungsart, da vor der eigentlichen Kraftberechnung die Teilchen in eine Baumstruktur eingeordnet werden. Hierbei wird das gesamte System in einen Würfel gefasst, dieser dann in Unterwürfel unterteilt und diese Prozedur solange wiederholt, bis in jedem Würfel nur noch ein Teilchen vorhanden ist (siehe Abbildung 2.7).

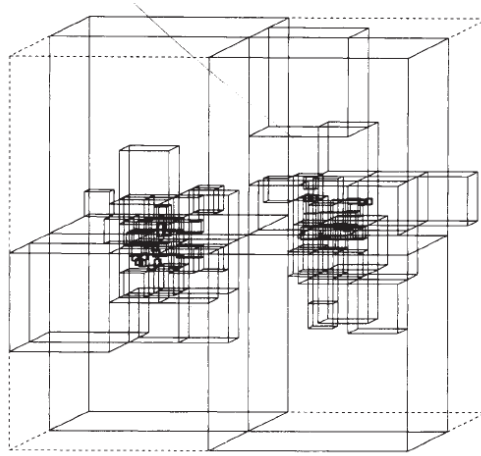


Abbildung 2.7.: Schema des Treecodes. Das gesamte System wird von einem Würfel umgeben und dieser dann solange geteilt, bis in jedem Unterwürfel nur noch ein Teilchen vorhanden ist. (Grafik entnommen aus Barnes & Hut, 1986)

Der Treecode ist wesentlich ressourcenschonender als das direkte Verfahren, da die Rechenzeit nur noch in der Ordnung $N \log(N)$ von der Teilchenzahl abhängt, anstatt wie beim direkten Verfahren quadratisch. Indem nicht nur die Quellen der Kraft, sondern auch die Senken der Kraft zusammengefasst werden lässt sich dieses Verfahren weiter beschleunigen und zwar durch eine weitere Verringerung der Rechenzeit von $\mathcal{O}(N \log(N))$ auf $\mathcal{O}(N)$. Dieses Verfahren wird auch schnelle Multipolmethode genannt. Ein heutzutage häufig genutzter Tree-Code ist GyrfaLON (Dehnen, 2000).

Etwas andere Verfahren sind die Gittercodes, beispielsweise **Particle-Mesh**. Hierbei wird die Massendichte eines Systems auf ein Gitter aufgetragen und die dazugehörige Poisson-Gleichung über eine schnelle Fouriertransformation (FFT - *Fast Fourier Transform*) gelöst. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist die ungenaue Kraftberechnung zwischen eng benachbarten Teilchen, da die Massen auf dem Gitter verteilt werden und deswegen die Positionen der Teilchen *verschmiert* sind. Mittlerweile gibt es einige Weiterentwicklungen dieser Variante, sei es durch AMR (anpassungsfähiges Gitter), P³M (Kräfte zwi-

schen nahe beieinander stehenden Teilchen werden direkt berechnet) oder PM-Tree (Ein Tree Code wird für die nahen Begegnungen verwendet). Ein sehr häufig verwendeter Gittercode ist Gadget2 (Springel, 2005).

3. Dunkler Materiehalo

Die Dunklen Halos sind, wie der Name schon sagt, dunkel. Woher wissen wir dann, dass sie existieren? Aus direkten Beobachtungen können wir das tatsächlich nicht feststellen, aber Materie hat nicht nur die Eigenschaft elektromagnetische Wellen auszusenden, oder zu reflektieren, sondern beeinflusst den Rest des Alls auch auf eine weitere Weise. Dabei handelt es sich um die Gravitation, welche sich für eine gegenseitige Anziehung jedes Materiepartikels verantwortlich zeigt. Die Effekte der Gravitation wurden seit langem mittels der newtonschen Gravitation berechnet, welche Newton im Jahre 1687 in seinem berühmtesten Werk "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" dargelegt hatte. Mithilfe dieser Methode konnte man die Bewegung der Planeten um die Sonne beschreiben, sowie begründen warum die Menschen auf der Erde stehen anstatt von ihr herunterzufallen. In der extragalaktischen Astronomie ergaben sich im Lauf der Zeit für die newtonsche Theorie allerdings Probleme. Bereits im Jahre 1937 entdeckte Horace Babcock, dass die Andromedagalaxie in den äußeren Bereichen mit einer ungewöhnlich hohen Geschwindigkeit rotiert (siehe Abbildung 3.1).

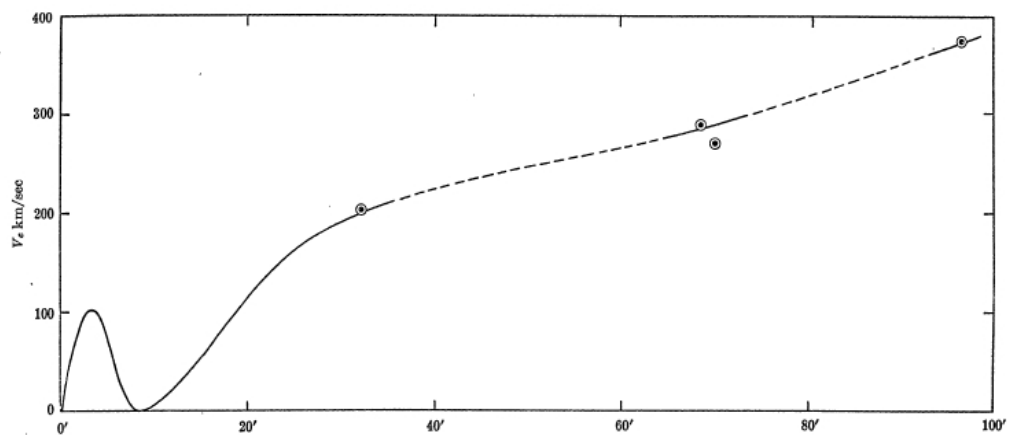


Abbildung 3.1.: Mittlere Geschwindigkeit in der Rotationsebene der Andromedagalaxie. Bild entnommen aus (Babcock, 1939)

Im Jahre 1970 wurde schließlich mit weit größerer Genauigkeit von den beiden Astronomen Vera Rubin und Kent Ford bestätigt, dass die Rotationsgeschwindigkeit der Galaxie M31 (Andromedagalaxie) keinem Keplerabfall gehorcht, sondern stattdessen bei größeren Radien recht konstant verläuft (Rubin & Ford, 1970).

Das widerspricht allerdings den Voraussagen, welche anhand der Berechnungen mittels

der newtonschen Gravitation getroffen wurden. Demzufolge muss die Rotationskurve nach aussen hin abfallen, wie es zum Beispiel in unserem Planetensystem der Fall ist. Die Tatsache, dass dies bei Galaxien nicht zutrifft, hat zu Veränderungen in der Vorstellung, welche wir von Galaxien haben, geführt. Naturgemäß gab es ursprünglich verschiedene Vorschläge dieses Problem zu lösen, angefangen von einer kompletten Neuformulierung der Gravitation, wie sie beispielsweise Milgrom im Jahre 1983 mit der Postulation der MOND-Theorie vorgeschlagen hat, bis zu einer Hülle aus nicht sichtbarem Material, welche die sichtbaren Gebiete umgibt. Auch heute noch gibt es diese verschiedenen Ansätze, wobei die komplette Neuformulierung eher einer geringen Abänderung gewichen ist, da die newtonschen Regeln bis dato gute Voraussagen geliefert haben und demnach nicht allzu falsch sein sollten. Die meistverwendete Theorie ist allerdings jene von der umgebenden Hülle, welcher der Name "dunkler Materiehalo" gegeben wurde. Dieser Halo unterschied sich von dem bis dato bekannten stellaren Halo, der vor allem als Sammelplatz der alten Kugelsternhaufen bekannt war. Dieser Dunkle Halo wurde benötigt, um die Rotationskurven der Galaxien zu erklären. Aufgrund der im Halo vorhandenen zusätzlichen Masse, ließen sich die Rotationskurven erklären, da genügend Masse bis in die äußeren Gebiete der Galaxien vorhanden war, um eine hohe Rotationsgeschwindigkeit aufrecht zu halten.

3.1. Beobachtungen

Dunkle Materie kann bisher nur indirekt nachgewiesen werden. Sie offenbart sich in ihrem gravitativen Einfluss auf die baryonische Materie. Dieser Einfluss manifestiert sich in einer flachen Rotationskurve in den äußeren Bereichen von Spiralgalaxien, oder in hohen Geschwindigkeitsdispersionen in den äußeren Bereichen von Galaxienhaufen. Natürlich sind das nicht die beiden einzigen Einflüsse dunkler Materie, aber es sind die beiden ersten, die entdeckt wurden. Im Jahre 1933 hat Fritz Zwicky erstmals eine erhöhte Geschwindigkeitsdispersion aufgrund von dunkler Materie nachgewiesen, als er die Bewegungen der Galaxien im Comahaufen, einem nahen Galaxienhaufen, analysierte. Laut der Analyse von Zwicky musste die mittlere Dichte innerhalb des Comahaufens um den Faktor 400 größer sein, als die leuchtende Materie implizieren würde. Eine kurze Zeit später gelang Babcock (1939) die Bestimmung der Rotationskurve der Andromedagalaxie M31. Im Laufe der Zeit wurden diese beiden Erkenntnisse bestätigt und durch neue ergänzt. So fanden Kahn & Woltjer im Jahre 1959, dass das System Milchstraße-Andromeda nur dann ein gebundenes System sein kann, wenn dunkle Materie vorhanden ist. Ausgehend von der Tatsache, dass die Andromedagalaxie im Gegensatz zu den meisten anderen Galaxien eine negative Rotverschiebung von ungefähr 120 km/s aufweist, nahmen sie an, dass es sich um ein gebundenes System handelt. Kahn & Woltjer berechneten die Masse, die benötigt wird, um die gemessenen Geschwindigkeiten zu erreichen. Die errechnete Masse war größer als $1.8 \times 10^{12} M_{\odot}$ und übertrifft damit die sichtbare Masse, welche im Bereich von $2 \times 10^{11} M_{\odot}$ liegt, um das zehnfache. Dieses Ergebnis wurde im Jahre 1982 durch Einasto & Lynden-Bell bestätigt, die mit Hilfe besserer Daten

3. Dunkler Materiehalo

die Gesamtmasse des Systems Milchstraße-Andromeda zu $4.5 \pm 0.5 \times 10^{12} M_{\odot}$ bestimmen konnten. Ein weiterer Hinweis auf die Existenz eines dunklen Halos um unsere Milchstraße wurde durch kinematische Untersuchungen des magellanschen Stroms gefunden (Einasto et al., 1976). Mit dem Zeitalter der Satellitenastronomie begann der Durchbruch der Dunklen Materie. Bis zu dieser Zeit beschränkte sich die Beobachtung des Universums auf das sichtbare Spektrum, sowie auf Radiowellen und Teile des Infrarotbereichs. Satelliten ermöglichten Messungen in anderen Wellenlängenbereichen, wie etwa Röntgenstrahlen. Auf Basis von Haufenbeobachtungen im Röntgenspektrum wurde die Masse dieser Haufen bestimmt. Die ersten Massenbestimmungen wurden bereits Ende der siebziger Jahre mit Daten des Röntgensatellits Einstein gemacht, allerdings waren die Ergebnisse noch ziemlich ungenau, da das Temperaturprofil des Gases nicht ausreichend gut bestimmt werden konnte (Bahcall & Sarazin, 1977). In den neunziger Jahren wurden neue, weit bessere Satelliten für den Röntgenanteil des Spektrums ins All geschossen, angefangen von ROSAT, über XMM-Newton bis zu Chandra. Aus den Daten von ROSAT wurden mehr als 1000 Cluster katalogisiert, wobei in einigen Fällen Profile der Massenverteilung erstellt wurden, die auf eine große Menge an nicht sichtbarer Materie hinweisen (Humphrey et al., 2006).

Ein sehr bedeutender Fund im Bezug auf Dunkle Materie war die Entdeckung des "Bullet-Clusters" (Markevitch et al., 2004). Daten des Satelliten Chandra brachten einen heißen Subhaufen zum Vorschein, den "Bullet-Cluster", der nicht mit der Position der wechselwirkenden Galaxien übereinstimmt (siehe Abbildung 3.2). Zur Bestimmung der Massenverteilung der Galaxien wurde eine Methode entwickelt, die auf der Tatsache beruht, dass Massen Lichtstrahlen beeinflussen. Diese Methode wird *weak lensing* genannt und seit einigen Jahren erfolgreich zur Bestimmung der Massenverteilung in Galaxienhaufen und Superhaufen angewendet (siehe beispielsweise Massey et al., 2007). All diese Beobachtungen führen zu dem Schluss, dass neben der leuchtenden baryonischen Materie noch eine nichtleuchtende Masse vorhanden ist, welche den Beobachtungen zufolge wesentlich häufiger vorhanden ist, als die leuchtende Materie. Die wichtigste Entdeckung, nämlich die direkte Bestätigung der Existenz Dunkler Materie ist bis dato nicht gelungen, ebensowenig konnte eruiert werden, woraus Dunkle Materie besteht.

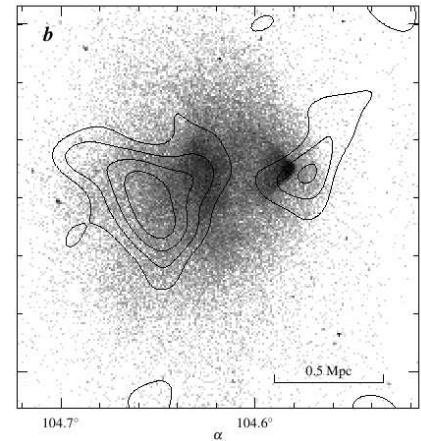


Abbildung 3.2.: Röntgenaufnahme des Bullet-Clusters mit einer Überlagerung der Massenkonturen (Grafik übernommen aus Markevitch et al., 2004)

3.2. Dunkle Materie

Die Frage nach der Zusammensetzung dieser Dunklen Materie ist allerdings schwierig zu beantworten. Ursprünglich wurde die Annahme getroffen, es handle sich dabei lediglich um nichtleuchtende baryonische Materie. Mit dieser Definition ergeben sich allerdings zahlreiche Probleme. Eines davon war die Frage, warum diese Materie nicht durch die Störungen, denen sie bei einer Wechselwirkung ausgesetzt wäre, zur Emission angeregt werden sollte. Da eine Emission nicht beobachtet werden konnte, ist eine rein baryonische dunkle Materie auszuschließen. Wohlgedenkt bedeutet das nicht, dass keine nichtleuchtende baryonische Materie existiert, aber sie macht einen verschwindend geringen Anteil an der gesamten dunklen Materie aus. Schlussendlich wurde die nichtbaryonische Materie eingeführt, welche nur über die Gravitation mit der baryonischen Materie wechselwirken kann. Im weiteren Verlauf wurden verschiedene Modelle für diese Teilchen entwickelt. Es wurden hypothetische Teilchen vorgeschlagen, wie etwa Axionen (Preskill et al., 1983) oder Gravitinos (Pagels & Primack, 1982), aber es wurden auch bereits bekannte Teilchen dafür vorgesehen, wie etwa Neutrinos (Zeldovich et al., 1982). Neutrinos wurden bereits ziemlich früh als mögliche Kandidaten für diese ominöse Dunkle Materie gehandelt, obwohl sie genaugenommen nicht die Bedingung erfüllen, nur über die Gravitation an die Baryonen gekoppelt zu sein. Ihre Entdeckung entstammt der Teilchenphysik, wo sie zuerst von Wolfgang Pauli, sowie später von Enrico Fermi (Fermi, 1934) postuliert und schließlich als Produkt von Kernspaltungen nachgewiesen wurden (Cowan et al., 1956). Ein Problem bei der Beschreibung der Materiehalos mittels Neutrinos war ihre hohe Geschwindigkeit, weswegen ihnen später das Attribut "heiße dunkle Materie" verliehen wurde. Diese Geschwindigkeit, normalerweise weit im relativistischen Bereich, verhindert nämlich, dass die Neutrinos sich um eine Galaxie gruppieren und dadurch einen stabilen Halo erzeugen (White et al., 1983). Um einen stabilen Potentialtopf zu erzeugen, in dem sich die Sterne einer Galaxie ohne allzugroße Änderungen bewegen können, war daher eine weniger energiereiche Variante der dunklen Materie erforderlich. Daher wurde im Laufe der Zeit die kalte dunkle Materie, CDM (engl. *Cold Dark Matter*), zum erfolgreichsten Modell für die Galaxien, sowie für die größeren Strukturen, die Galaxienhaufen.

3.3. Dichteverteilung

Eine weitere Frage besteht darin, welche Form und Dichteverteilung diese Halos aufweisen. Die Dichteverteilung erstreckt sich über viele verschiedene Varianten, von denen das sogenannte NFW-Profil, benannt nach den Autoren Navarro, Frenk und White (Navarro et al., 1997), ein sehr häufig genutztes ist. Dieses Profil wurde mittels kosmologischer Simulationen gefunden und sieht folgendermaßen aus:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_s^3}{r(r + r_s)^2}$$

3. Dunkler Materiehalo

Ein Profil, das vor allem für Zwerggalaxien verwendet wird ist jenes von Andreas Burkert (Burkert, 1995). Dieses Profil wurde im Gegensatz zum NFW-Profil auf rein phänomenologische Weise gefunden. Es weist ähnliche Charakteristika wie das NFW-Profil auf, da es diesem auch einigermaßen ähnlich sieht, wie folgende Formel zeigt:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_s^3}{(r + r_s)(r^2 + r_s^2)}$$

Allerdings hat es im Gegensatz zum NFW-Profil keine Singularität im Zentrum, einen sogenannten *Cusp*, sondern eine zentrale Dichte, einen sogenannten *Core*. In letzter Zeit gibt es allerdings bedenken bezüglich einer zweiparametrischen Beschreibung, da in so einem Fall die Form der Halos universell sein müsste (siehe Navarro et al. (2004) für einen Überblick). Aus diesem Grund wird auf dreiparametrische Beschreibungen zurückgegriffen, wie beispielsweise das Einasto-Profil.

$$\ln\left(\frac{\rho(r)}{\rho_{-2}}\right) = \left(\frac{-2}{\alpha}\right)\left[\left(\frac{r}{r_{-2}}\right)^\alpha - 1\right]$$

Dieses Profil ist wesentlich besser auf einzelne Beobachtungen anwendbar, wie Navarro et al. (2004) gezeigt haben. Häufig wird auch das Profil der singulären isothermen Kugel, mit der Dichteverteilung

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{r^2}$$

verwendet. Dieses Profil erzeugt eine flache Rotationskurve und hat eine wesentliche Eigenschaft. Die Masse steigt linear mit dem Radius an, weswegen eine Berechnung der Kraft, die von einem isothermen Halo ausgeht, stark vereinfacht wird.

Ein weiteres etwas älteres Profil ist jenes von Lars Hernquist (Hernquist, 1990), das ursprünglich für die Kernbereiche, oder auch für die elliptischen Galaxien entwickelt wurde, danach teilweise auch für Halos herangezogen wurde und schlussendlich wieder eher zur Beschreibung der Kernbereiche benutzt wird, da es den Beobachtungen der Halos nicht gänzlich entspricht. Der Vollständigkeit halber wird es hier noch erwähnt:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_s}{r(r + r_s)^3}$$

In all den obigen Formeln bezeichnen r_s und r_{-2} Skalenlängen.

Der Dichteverlauf eines dunklen Materiehalos ist nicht das einzige Detail, welches es zu klären gilt. Ein weiterer wichtiger Punkt betrifft die Symmetrie und damit die Form der Halos. Halos werden bis dato am häufigsten in sphärischer Symmetrie angenommen, wie auch die oben beschriebenen Profile verdeutlichen, allerdings mehren sich die Anzeichen für eine davon abweichende Form. Halos tendieren zur Abplattung und in vielen Fällen sogar zu einer Triaxialität (Springel et al., 2005). Diesen neuen Erkenntnissen muß natürlich auch in den Simulationen Rechnung getragen werden, was schlussendlich zu dieser Diplomarbeit führte.

3.4. Form der Halos

Viele kosmologische Simulationen weisen darauf hin, dass Halos triaxial sind, mit typischen Achsenverhältnissen von $a : b : c = 5 : 4 : 3$ (Kasun & Evrard, 2005). Ein Maß für die Triaxialität eines Halos ist das Verhältnis $(a^2 - b^2)/(a^2 - c^2) = T$, wobei immer $a > b > c$ gilt. Als Grenzfälle werden oblate Halos mit dem Achsenverhältnis $a = b > c$ und prolate Halos mit dem Achsenverhältnis $a > b = c$ betrachtet. Oblate Halos haben einen Triaxialitätswert von 0 und prolate Halos einen von 1, während das obig angeführte Achsenverhältnis den Wert 0.56 liefert. Das bedeutet die simulierten Galaxien sind stark triaxial. Beobachtungen hingegen deuten eher auf achsensymmetrische Profile, beziehungsweise nur geringe triaxiale Abweichungen der Halos (Rix & Zaritsky, 1995). Rix und Zaritsky benutzen in ihrer Schlussfolgerung die Elliptizität von Galaxienscheiben um auf die Form der Halos zurückzuschließen und erhielten auf diese Weise eine obere Grenze für die Triaxialität. Triaxiale Halos werden vor allem zur Erklärung herangezogen, wenn beobachtete Phänomene asymmetrisch erscheinen. Ein solches Phänomen sind die sogenannten *Warps*. Dabei handelt es sich um Abweichungen der äußeren Scheibe in die Richtung, die normal zur Scheibenebene steht. In den meisten Spiralgalaxien kann ein *Warp* beobachtet werden, selbst in isolierten Galaxien ist das der Fall (Ann & Park, 2006). Bereits im Jahre 1983 haben Dekel & Shlosman die Vermutung geäußert, dass eine unterschiedliche Ausrichtung der Scheibenebene und des Halos der Grund für diese Verzerrung sein könnte. Jeon et al. (2009) haben mittels numerischer Simulationen untersucht, welche Auswirkungen ein triaxialer Halo auf eine Scheibe hat, falls die Scheibe zur Hauptachse des Halos gekippt ist. Das Ergebnis einer solchen Simulation ist in Abbildung (3.3) zu sehen. Ideta et al. (2000) haben in numerischen Simulationen festgestellt, dass es große Unterschiede in der Entwicklung der *Warps* gibt, wenn oblate und prolate Halos verglichen werden. Sie simulierten den Effekt der beiden Halos auf eine zu den Halos geneigte Scheibe. In beiden Fällen wurde zu Beginn der Simulation ein *Warp* erzeugt. Bei den Simulationen mit oblaten Halos zeigte sich allerdings, dass die *Warps* sich mit der Zeit auflösten, wohingegen bei prolaten Halos die *Warps* bestehen blieben. Weitere numerische Simulationen zeigten allerdings, dass dynamische Reibung die Dispersion von *Warps* herbeiführt, wodurch sich diese nach kurzer Zeit, wesentlich kürzer als die Hubblezeit, wieder auflösen (siehe beispielsweise Binney et al., 1998). Neuere Untersuchungen gehen daher von einem Einfall an intergalaktischer Materie, einhergehend mit einem dadurch ausgelösten Drehmoment auf die Scheibe, aus, um die *Warps* zu erklären (Shen & Sellwood, 2006).

Neue Beobachtungsdaten weisen darauf hin, dass unsere Milchstraße einen triaxialen Halo besitzt. Law et al. (2009) haben den stellaren Sagittariusstrom, das sind Gezeitenarme, die durch die Wechselwirkung der Milchstraße mit der Zwerggalaxie Sagittarius entstanden sind, benutzt, um das Gravitationspotential der Milchstraße nachzuzeichnen. Frühere Studien lieferten für verschiedene Beobachtungsdaten unterschiedliche Ergebnisse (siehe Law et al. (2005) für eine detaillierte Beschreibung dieses Halorätsels). Die radiale Geschwindigkeit der im Strom vorhandenen Sterne lies sich nur mit Hilfe eines prolaten Halos, die Kreisbewegung des voranlaufenden Arms hingegen nur mit einem sphäri-

3. Dunkler Materiehalo

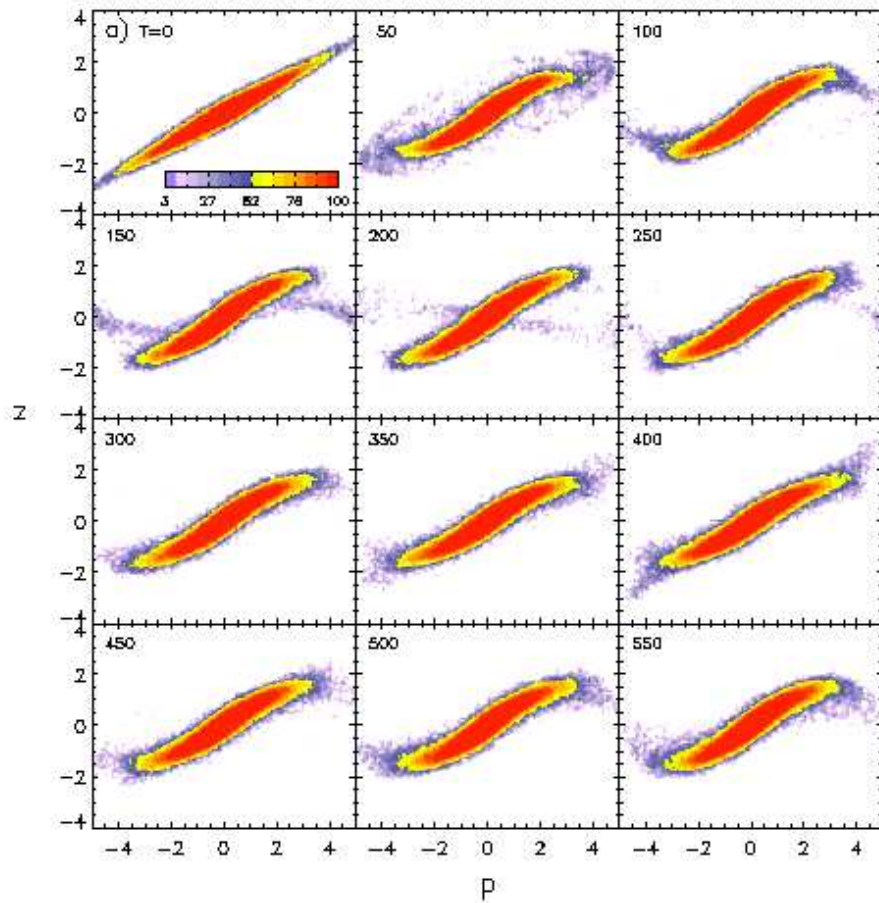


Abbildung 3.3.: Simulation der Entstehung eines Warps. (Entnommen aus Jeon et al., 2009)

schen, bis leicht oblaten Halo erklären. Law et al. (2009) vermögen beide Beobachtungen zu erklären, wenn ein triaxialer Halo mit dem Achsenverhältnis $a : b : c = 1 : 0.83 : 0.67$ angenommen wird, was einem Triaxialitätswert von ~ 0.56 entspricht. Die galaktische Scheibe liegt in diesem Fall in der Ebene, die von der größten und der kleinsten Achse aufgespannt wird, wobei unsere Sonne auf der kleinen Achse liegt. All diese Beobachtungen liefern Gründe, die für die Existenz von triaxialen Systeme sprechen. Den Aufbau und die Eigenschaften triaxialer Systeme werden im nächsten Kapitel besprochen.

4. Triaxiale Systeme

4.1. Einleitung

Triaxiale Systeme sind Körper mit drei unterschiedlichen Hauptträgheitsachsen. Solche Systeme weisen nur mehr geringe Symmetrien auf, ganz im Gegensatz zu den sphäroidalen Systemen, wie oblate und prolate Körper, oder den Sphären, die natürlich die meisten Symmetrien aufweisen.

4.2. Darstellung

Triaxiale Systeme werden zumeist mit Hilfe ellipsoider Koordinaten dargestellt. Für die Darstellung von Ellipsoiden wird in dieser Arbeit die ellipsoide Koordinate m benutzt. Diese Koordinate beschreibt analog zu der Kugelkoordinate r Ellipsoidenschalen. Gemeinsam mit zwei Winkelkoordinaten wird ein zu den Kugelkoordinaten analoges Koordinatensystem erstellt (siehe de Zeeuw & Pfenniger, 1988).

$$\begin{aligned}x &= m a \sin \varphi \cos \vartheta \\y &= m b \sin \varphi \sin \vartheta \\z &= m c \cos \varphi\end{aligned}\tag{4.1}$$

Womit sich dann für m folgendes ergibt:

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

wobei $a \geq b \geq c \geq 0$ gilt.

Innerhalb dieser Diplomarbeit wird ein einfaches Dichteprofil verwendet und zwar das einer singulären isothermen Kugel, welche mittels obiger ellipsoidaler Koordinaten zu einem triaxialen Körper umgewandelt wird. Hierbei wird für den Dichteverlauf aus

$$\rho(r) = \frac{\rho_o}{r^2}$$

durch den Austausch der Koordinate $r \rightarrow m$ ein neues Profil erzeugt:

$$\rho(m) = \frac{\rho_o}{m^2}$$

4. Triaxiale Systeme

Für einen analytischen Versuch innerhalb dieser Arbeit wurde das in de Zeeuw & Pfenniger (1988) vorgestellte Set von inhomogenen ellipsoidalen Dichteverteilungen

$$\rho_p(x, y, z) = \rho_p(m^2) = \frac{\rho_0}{(1 + m^2)^p}$$

verwendet. Dieses Set kam nur bei der Variante einer Exponentialentwicklung zur Anwendung (siehe Kapitel 4.4), wobei der Faktor $p \geq 0$ eine Konstante ist.

4.3. Numerische Implementierung

Bei einem asphärischen System kommt bei einer gravitativen Wechselwirkung ein Term hinzu, der bei sphärischen Systemen aufgrund der Symmetrien wegfällt. Es wirkt ein Drehmoment auf das System und zwingt es zur Rotation. Dies führt dazu, dass diese Körper sich wie Kreisel verhalten und dementsprechend behandelt werden müssen. Zur Bestimmung der Kreiselbewegung müssen die eulerschen Gleichungen gelöst werden (Landau & Lifschitz, 1962).

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= N_3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Größen I_i, ω_i, N_i sind die Trägheitsmomente der Körper, die Winkelgeschwindigkeit beziehungsweise das auf die Körper wirkende Drehmoment. Bei Gleichung 4.2 handelt es sich um ein gekoppeltes, nichtlineares Gleichungssystem, weswegen dieses Problem numerisch behandelt wird, wobei es mittlerweile recht viele Routinen zum Lösen nichtlinearer Differentialgleichungen gibt, welche zufriedenstellende Resultate liefern. Indem die Koordinatenachsen in die Hauptträgheitsachsen des Körpers gelegt werden, wird die Bestimmung des Trägheitstensors vereinfacht (siehe dazu Anhang A). Mit Hilfe des Trägheitstensors, sowie des Drehmoments, lässt sich über die obig angesprochenen eulerschen Gleichungen, die Winkelgeschwindigkeit ω ausrechnen. Über ω gelangt man zur Lage des Körpers im inertialen Koordinatensystem (Herleitung in Anhang C.3). Zur Darstellung der Lage eines Körpers im Raum gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die in dieser Arbeit verwendete Methode benutzt die Quaternionen, welche in Anhang C im Detail beschrieben werden. Wie die Quaternionen benutzt werden, um einen Körper in eine bestimmte Lage zu bringen, wird in Anhang C.3 erläutert. Eine alternative Methode wäre die Benutzung von Eulerwinkeln. Diese Methode ist bis dato die meistgenutzte für die Beschreibung sich im Raum bewegendender Körper. Deshalb wird ihre Verwendung in Anhang D kurz erläutert.

4.3.1. Aufsetzen der Galaxien

Da es nicht gelungen ist, eine analytische Methode zur Berechnung der gravitativen Anziehungskraft zweier sich überlappender triaxialer starrer Körper zu finden (siehe

Kapitel 4.4), muss eine numerische Methode benutzt werden. Bei einer numerischen Methode wird der starre Körper als Gruppe mehrerer Massenpunkte dargestellt und die Kraft auf den zweiten Körper mittels direkter Berechnung der Einzelkräfte je zweier Massenpunkte erhalten, die schließlich addiert werden. Eine neue Subroutine wurde daher in das Programm eingefügt, die einen triaxialen, aus Massenpunkten bestehenden Körper erstellt.

4.3.2. Berechnung der Kraft

Die Kraftberechnung entspricht einer direkten Berechnung, wie sie in Kapitel 2.3.2 vorgestellt wurde. Allerdings werden hier nur die Kräfte berücksichtigt, die durch die Massenpunkte des anderen Körpers ausgeübt werden. Die Massenpunkte innerhalb eines Körpers üben keine Anziehungskraft aufeinander aus, da bei einem starren Körper keine Veränderung der Form möglich ist. Da die einzelnen Massenpunkte unverändert innerhalb eines Körpers bleiben, wird mittels der Summe der Kräfte auf jedes Massenteilchen die Gesamtkraft eines Körpers auf den anderen berechnet. Die Kräfte, welche auf jeden einzelnen Massenpunkt wirken, werden gespeichert, da bei triaxialen Körpern auch ein Drehmoment wirkt und dieses ebenso berechnet werden muss.

4.3.3. Berechnung des Drehmoments

Das Drehmoment wird mit Hilfe der Kräfte auf die einzelnen Massenpunkte berechnet, wobei folgende Formel zur Anwendung gelangt:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.3)$$

In Gleichung 4.3 notiert $\vec{N}$ den Drehmomentvektor, $\vec{r}$ den Ortsvektor eines Massenpunkts, sowie $\vec{F}$ die auf den Massenpunkt wirkende Kraft. Auf diese Weise wird das Drehmoment jedes einzelnen Teilchens berechnet. Das Gesamtdrehmoment ergibt sich als die Summe über alle Einzeldrehmomente. Ohne äußere Kräfte bewegt sich ein Körper, unabhängig von seiner Form, gemäß des ersten newtonschen Theorems auf einer geraden Linie fort (Newton, 1687). Sobald eine äußere Kraft vorhanden ist, hängt die Reaktion des Körpers nicht nur von der Stärke der externen Kraft ab, sondern auch von seiner eigenen Beschaffenheit. Die Bewegung durch den Raum wird weiterhin nach den newtonschen Gesetzen verlaufen. Ein unsymmetrischer Körper wird durch eine externe Kraft weiters in Rotation versetzt und verhält sich damit, wie ein Kreisel. Das Drehmoment ändert die Lage eines Körpers im Raum, indem es den Körper zur Rotation zwingt, oder falls eine solche bereits vorhanden ist, indem es die Rotation abändert.

4.3.4. Lösung der Bewegungsgleichung

Im Normalfall besteht das System der Bewegungsgleichungen aus 6 Gleichungen pro Körper.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a}\end{aligned}$$

Aber diesfalls wird nicht nur die Bewegung der Körper beschrieben, sondern auch deren Rotation. Aus diesem Grund erhöht sich die Anzahl der zu lösenden Differentialgleichungen pro Körper auf 13. Ausser der Berechnung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, sind dementsprechend auch noch die Winkelgeschwindigkeiten, sowie die Lage der Körper zu berechnen. Die Winkelgeschwindigkeiten ergeben sich aus den eulerschen Gleichungen (4.2) und die Lage der Körper aus der in Anhang C.3 hergeleiteten Formel. Die folgenden 13 Formeln müssen schließlich gelöst werden.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a} \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{N_1 + (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3}{I_1} \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{N_2 + (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1}{I_2} \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= \frac{N_3 + (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2}{I_3} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\omega_i(t)q_i(t)}{2}\end{aligned}$$

Masse innerhalb einer Ellipsoidenschale Zur Bestimmung der Beschleunigung, die ein Teilchen aufgrund der Anziehung durch einen Halo erfährt, ist die Bestimmung der vorhandenen Masse notwendig. Laut Binney & Tremaine (1987) kann Newtons Theorem über sphärische Körper auf sphäroide und ellipsoide Körper verallgemeinert werden. Das hat zur Folge, dass die gesamte Masse, die sich innerhalb einer Ellipsoidenschale befindet, für einen Körper der sich außerhalb dieser Schale befindet, betrachten lässt, als ob die gesamte Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre. Um also die Kraft auf einen Massenpunkt zu bestimmen, ist es notwendig die Position des Massenpunktes in ellipsoiden Koordinaten zu errechnen. Dies geschieht mittels Gleichung (4.1). Die eingeschlossene Masse ergibt sich im Falle eines isothermen Halos schließlich zu:

$$M(< m) = \int_0^m 4\pi abc m \rho_0 dm \quad (4.4)$$

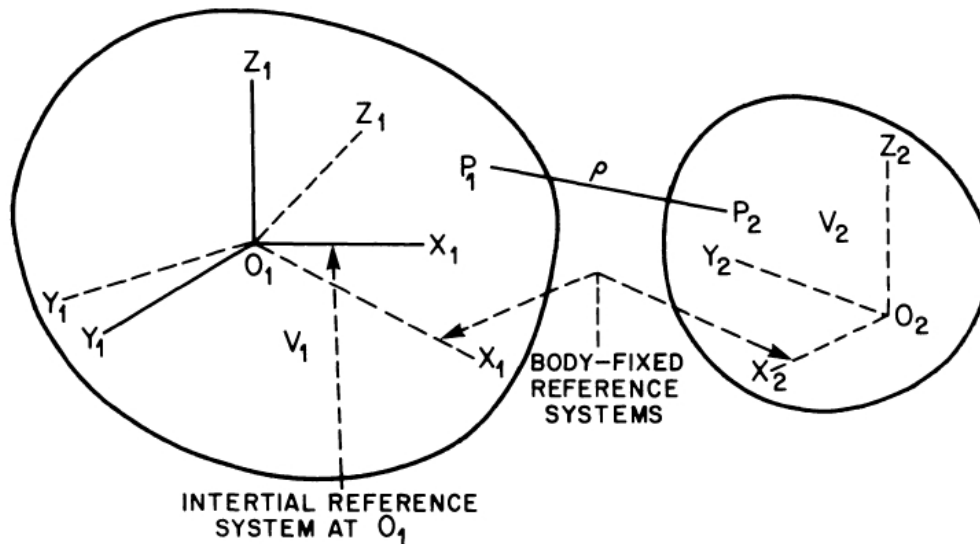


Abbildung 4.1.: Zwei gravitierende Körper. (Abbildung aus Paul, 1988)

4.4. Der Potenzreihenalgorithmus

Dieser Algorithmus wurde als analytische Alternative angedacht, allerdings wäre eine Verwendung nur auf sehr beschränkte Modelle anwendbar, da eine Überlappung der Halos nicht gestattet ist. Der hier verwendete Algorithmus zur Berechnung der Kraft und des Drehmoments zwischen zwei Körpern beliebiger Gestalt wurde von M.K.Paul entwickelt (1988) und von Pasquale Tricarico (2008) erweitert. Im folgenden wird der Algorithmus kurz beschrieben. Die Herleitung befindet sich in Anhang E.

Wie in Abbildung 4.1 ersichtlich, ist der Algorithmus auf zwei beliebige gravitierende Körper anwendbar. Die Punkte O_1 und O_2 beschreiben die jeweiligen Massenzentren, V_1 und V_2 die jeweiligen Volumina. Die Punkte P_1 und P_2 sind die Positionen der beiden Massenelemente dM_1 und dM_2 . Mit Hilfe dieser Punkte lässt sich das Potential schreiben als:

$$U = \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{dM_1 dM_2}{\rho}$$

wobei ρ den Abstand zwischen den Massenelementen angibt. $1/\rho$ wird nun in einer Taylorreihe entwickelt und die Integrale durch unendliche Summen ersetzt. Anschließend wird diese Reihe in die Formeln für das Potential U , die Kraft F , sowie das Drehmoment τ eingesetzt. Diese Prozedur ist grundsätzlich auf jede beliebige Dichteverteilung anwendbar, allerdings ergibt sich dessen ungeachtet immer das Problem, dass die Reihe für den Fall sich überlappender Körper nicht konvergiert. Außerdem ergibt sich noch ein weiteres Problem durch die Tatsache, dass es sich bei diesem Algorithmus um eine Potenzreihe handelt, daher kommen sehr rasch große Zahlen zustande, welche einerseits ein Problem für den Speicherplatz darstellen und andererseits die Rechnung zunehmend

4. Triaxiale Systeme

verlangsamen. Wegen dieser Gründe wurde das Problem der Implementierung triaxialer Halos in den Code MINGA mittels Teilchenhalos gelöst.

5. MINGA

MINGA ist ein Programm zur Modellierung interaktiver Galaxien. Es ist ein Komposit aus einem *restricted n-body code* und einem genetischen Algorithmus, sowie einem *fitness landscape* Algorithmus. Zusammen ermöglichen diese drei Komponenten ein schnelles Auffinden möglicher Startkonfigurationen für detaillierte N-Körper-Rechnungen.

5.1. Funktionsweise von Minga

Wie bereits erwähnt besteht MINGA aus mehreren Teilen. Diese einzelnen Programme, das N-Körper-Programm, der genetische Algorithmus, sowie der *fitness landscape* Modus, können einzeln oder zusammen benutzt werden. Das einzelne N-Körper Programm führt eine einzige *restricted N-body* Simulation mit vorgegebenen Anfangsparametern durch. In diesem Fall werden zwei oder mehrere Galaxien in einem vorgegebenen Abstand und mit vorgegeben Haloprofilen aufgesetzt und deren Wechselwirkung berechnet. Im folgenden wird nur die Prozedur für eine Wechselwirkung zweier Galaxien erläutert. Das Verfahren für mehrere Galaxien ist äquivalent. Die Kraft zwischen zwei Halos wird, wie in Kapitel (5.3) beschrieben, berechnet und anschließend die Bahn der beiden Galaxien bestimmt. Danach werden die Bahnen tabelliert. Am Ende wird das Testteilchensystem aufgesetzt, in die anfänglichen Galaxienpositionen verschoben und mit diesen Startpositionen als Randwerten das Differentialgleichungssystem der Bewegungsgleichungen gelöst.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{a}\end{aligned}$$

Der genetische Algorithmus ist ein Optimierungs- und Suchalgorithmus. Dieser Algorithmus hat die natürliche Evolution zum Vorbild, daher stammt auch der Name. Für den Fall, dass vorgegebene Beobachtungsdaten approximiert werden sollen, ist es nützlich zu wissen, wie die Anfangsparameter zu wählen sind. Eine mögliche Variante wäre alle möglichen Anfangsbedingungen auszuprobieren und danach das beste Ergebnis herauszufiltern. Da diese Prozedur in einem hochdimensionalen Parameterraum erfolgt, ist der Rechenaufwand enorm. Deshalb ist es vorteilhafter, das Aufsuchen der besten Anfangsbedingungen zu automatisieren. Hier setzt der genetische Algorithmus an. Der Algorithmus wird wie von Charbonneau (1995) beschrieben verwendet. Zu Beginn wird

per Zufallsgenerator eine Generation erzeugt. Eine Generation besteht aus Punkten im Parameterraum, den sogenannten Individuen. Diese Individuen bilden die Anfangswerte für die ersten Simulationen. Nachdem mit diesen Anfangswerten eine Simulation durchgeführt wurde, werden die einzelnen Ergebnisse mit dem Referenzmodell verglichen. Die einzelnen Individuen werden nach der besten Übereinstimmung mit dem Referenzmodell gereiht. Anschließend werden neue Individuen erstellt und zwar entweder mittels Vererbung, hierbei werden zwei beliebig ausgewählte Individuen miteinander gekreuzt (die Wahrscheinlichkeit nach der die zur Reproduktion verwendeten Individuen ausgesucht werden, hängt allerdings von der vorhin durchgeführten Reihung ab, so dass Individuen, die eine bessere Übereinstimmung mit dem Referenzmodell vorweisen, mit größerer Wahrscheinlichkeit zur Erstellung eines neuen Individuums herangezogen werden), oder mittels Mutation, hierbei wird ein zufällig gewähltes altes Individuum mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit mutiert (siehe Abbildung 5.1). Nach endgültiger Erstellung einer neuen Generation wird der Vorgang so lange wiederholt, bis die Modelle eine gewissen Genauigkeit erreicht haben.

Der *fitness-landscape*-Modus dient zur Erstellung einer "Landkarte" rund um eine Lösung. Indem um die Lösung eine genauere Untersuchung des Parameterraums vorgenommen wird, kann die Gestalt des Maximums erkundet werden. Eine weiterführende Erklärung liefert Harfst (2000).

5.2. Restricted N-body code

Unter einem restricted N-body code versteht man ein Programm, welches ein N-Körper-Problem berechnet, indem das Problem auf N 3-Körper-Probleme zurückgeführt wird. Dies geschieht indem die Annahme getroffen wird, dass die gegenseitige Anziehung der Sterne vernachlässigbar ist und die Sterne sich daher nur im Gravitationspotential der gesamten Galaxie bewegen. Durch Nutzung dieser Tatsache wurden die ersten *restricted n-body codes* entwickelt. Galaxiensimulationen wurden in dem Sinne vereinfacht, dass die gesamte Masse einer Galaxie ins Zentrum verlegt wird und diese daher durch eine Punktmasse beschrieben wird. Die Teilchen, welche als Repräsentanten der Sterne fungieren, werden als sogenannte Testteilchen implementiert. Diese Testteilchen werden als masselos vorausgesetzt und haben daher keine Wirkung aufeinander. Wird nun ein solches System für eine Galaxienwechselwirkungssimulation herangezogen, hat man ein eingeschränktes 3-Körper System, dargestellt durch die beiden Galaxienzentren und jeweils ein Testteilchen. Da die einzelnen Teilchen nicht untereinander wechselwirken, wird für die Berechnung der Gesamtwechselwirkung nur ein fortlaufendes Berechnen der einzelnen 3-Körper Wechselwirkungen benötigt. Dadurch hat man ein kompliziertes Problem in viele, einfacher zu lösende, kleinere Probleme zerlegt. Später ist man dazu übergegangen die Galaxien als ausgedehnte Körper aufzufassen, um den Effekt des Halos zu berücksichtigen. In MINGA sind derzeit fünf verschiedene sphärische Haloprofile, sowie die klassische Variante mittels Punktmassen, eingebaut. Es existieren einfache Profile, wie das einer isothermen singulären Sphäre, sowie ein Profil für die Verwirklichung von

linearen-flachen Rotationskurven. Die komplizierteren implementierten Profile sind das NFW-Profil, sowie das Burkert-Profil, welche beide bereits eine sehr gute Annäherung an Beobachtungen darstellen. Diese Profile sind durch ihren Dichteverlauf definiert, welche bei einem gegebenen Radius abgeschnitten werden. Weiters gilt, dass jeder Halo die vom Benutzer des Programms eingegebene Gesamtmasse aufweist. Um dies zu erreichen werden die Skalenfaktoren ρ_0 dementsprechend angepasstgewichtet. Die folgende Liste gibt einen Überblick über die derzeit implementierten Profile (siehe Kapitel 3 für weitere Details).

1. Punktmasse:

Die Punktmasse ist die einfachste Darstellung, allerdings handelt es sich hierbei nicht um einen Halo per se.

$$\rho(r) = M_{\text{halo}} \delta(r)$$

2. homogenes Dichteprofil:

Das homogene Profil entspricht keinem realistischen System, sondern dient nur zur Überprüfung der Funktionsweise des Codes

$$\rho(r) = \rho_0$$

3. singuläre isotherme Kugel:

Die singuläre isotherme Kugel ist die einfachste Methode einen Halo zu beschreiben. Sie ermöglicht schnell und effizient angenäherte Ergebnisse zu erzielen.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{r^2}$$

4. lineare flache Rotationskurve:

Hier wird spezifisch darauf geachtet eine lineare flache Rotationskurve herzustellen, indem ein homogener innerer Teil mit einem isothermen äußeren Teil verbunden wird.

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < r_{\text{flat}} \\ \frac{\rho_0}{(\frac{r}{r_{\text{flat}}})^2} & r > r_{\text{flat}} \end{cases}$$

5. NFW-Profil

Dieses ist eines der derzeit am häufigsten genutzten Profile, da es die Beobachtungen gut wiedergibt.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_s^3}{r(r + r_s)^2}$$

6. Burkert-Profil

Das Burkert Profil ähnelt sehr dem NFW-Profil, allerdings hat es im Gegensatz zu diesem einen *Core* und keinen *Cusp*.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_s^3}{(r + r_s)(r^2 + r_s^2)}$$

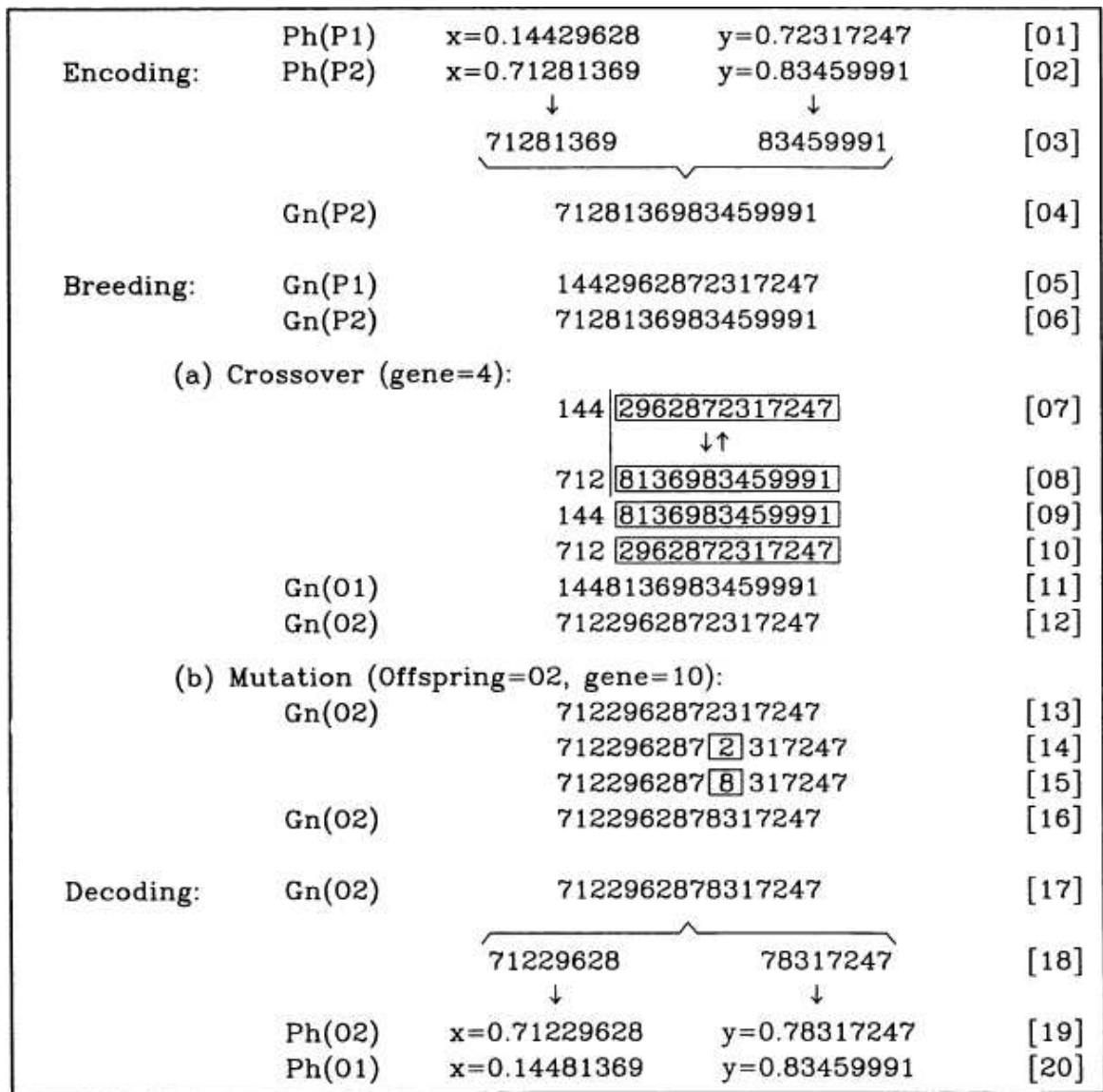


Abbildung 5.1.: Codieren, Fortpflanzen und Decodieren im genetischen Algorithmus (entnommen aus Charbonneau, 1995)

5.3. Implementation der sphärischen Halos

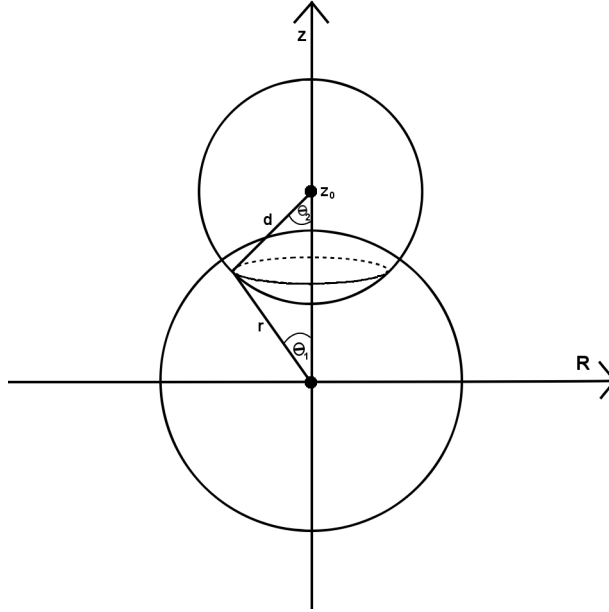


Abbildung 5.2.: Skizze der Kraftberechnung bei zwei sich überlappenden Halos. Der Überlappungsbereich wird in einzelne Ringe zerlegt, deren Masse berechnet und die Kraftwirkung auf den Halo berechnet.

In MINGA werden die sphärischen Halos als starre Körper betrachtet. Ihre Form ist damit unveränderlich. Bei sphärischen Halos wird deren Symmetrie zur Berechnung der Anziehungskraft ausgenützt. Für den Fall, dass die Halos sich nicht überlappen, erfolgt nach dem newtonschen Theorem eine Anziehung so als wäre die jeweilige Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt und die Halos verhalten sich dementsprechend wie zwei Punktmassen. Sobald sich die beiden Halos überlappen ist diese Form der Kraftberechnung nicht mehr anwendbar. Wie in Abbildung (5.2) gezeigt, lässt sich die Schnittmenge zweier Kugeln in eine Reihe von Massenringen zerlegen, wobei diese Ringe vom Abstand r_1 zum Massenzentrum des ersten Halos, sowie vom Betrachtungswinkel θ_1 abhängen. Die Masse eines Ringes wird in Gleichung (5.1) dargestellt. Da alle Ringe aufgrund der Symmetrie der Halos ihren Mittelpunkt auf der z-Achse haben, die als Verbindungslinie zwischen den beiden Massenzentren gewählt wurde, verläuft der resultierende Kraftvektor ebenfalls parallel zur Verbindungslinie. Die Kraft eines Ringes auf den ersten Halo entlang dieser Verbindungslinie ist gegeben durch Gleichung (5.2).

$$dM_1(r_1, \theta_1) = 2\pi\rho_1(r_1)r_1^2 \sin\theta_1 d\theta_1 dr_1 \quad (5.1)$$

$$dF_z = dF \cos\theta_2 = \frac{GM_2(< d)}{d^2} dM_1 \cos\theta_2 \quad (5.2)$$

Die Gesamtkraft resultiert anschließend aus einem Integral über alle Einzelringe. Das bedeutet Gleichung (5.2) wird über alle θ_1 , sowie alle r_1 integriert. Somit ergibt sich die

Gesamtkraft, die ein Halo am Ort z_0 auf einen Halo im Ursprung ausübt zu:

$$F_z(z_0) = \int_{\theta_1} \int_{r_1} dF_z(r_1, \theta_1)$$

5.4. Frühere Resultate

Das Programm MINGA wurde bereits genutzt, um einige Galaxienwechselwirkungen genauer zu untersuchen, darunter sehr bekannte, wie das klassische Beispiel von M51 (Theis & Spinnaker, 2003). M51 gilt als Prototyp der sogenannten *grand design* Spiralen. So werden Galaxien bezeichnet, die zwei klar hervorgehobene Spiralarme aufweisen. Diese Strukturen werden durch kleine Störungen, wie etwa Satellitengalaxien, hervorgerufen. Im Falle von M51 handelt es sich um die kleine benachbarte Galaxie NGC 5195. Ein gelungenes Beispiel für die Verwendung des Codes MINGA zur Bestimmung der Ausgangsposition von Simulationen unter Einbeziehung der Gasphysik, ist die Simulation der Galaxie NGC 4449, die ebenfalls mit einer kleinen Satellitengalaxie (DDO 125) wechselwirkt (Theis, 1999). Dieses Beispiel wurde später mit einer verbesserten Version nochmals überprüft, wobei bestätigt wurde, dass die HI-Verteilung durch gravitative Wechselwirkung zustandekommen kann (Theis & Kohle, 2001).

5.5. Erweiterungen

Eine andere Erweiterung dieses Codes wird derzeit von Hanns Petsch vorangetrieben. Hierbei handelt es sich um die Implementierung der dynamischen Reibung, die dafür sorgen soll, dass MINGA für eine Verschmelzungssimulation genutzt werden kann (Petsch & Theis, 2008). Bei einem klassischen eingeschränkten N-Körper Verfahren kann keine Verschmelzung zweier Galaxien zustande kommen, da der Energie- und Drehimpulsverlust, der dazu benötigt wird, in einem eingeschränkten Verfahren nicht konsistent behandelt werden kann. Für die dynamische Reibung wird eine Formel genutzt, die bereits im Jahre 1943 von Chandrasekhar gefunden wurde und welche, wie obiges Paper von Hanns Petsch zeigt, gute Ergebnisse liefert (Chandrasekhar, 1943). In den folgenden Jahren wird die Methode der dynamischen Reibung weiter verbessert, um die Genauigkeit der Simulationen zu erhöhen, speziell im Hinblick auf *major merger*.

6. Einbau des triaxialen Halos in MINGA

In Anhang A sind die einzelnen Programmteile beschrieben, die für das Aufsetzen eines triaxialen Halos, sowie für die Durchführung einer Simulation benötigt werden. Der Ablauf einer Simulation in MINGA funktioniert folgendermaßen:

1. Aufsetzen der Halos
2. Bestimmung der Anfangspositionen und -geschwindigkeiten
3. Berechnung der Galaxienbahn
4. Tabellierung der Galaxienbahn
5. Aufsetzen der Scheibe in Anfangsposition der Halos
6. Berechnung der Bewegung der Scheibenteilchen
7. Output der Ergebnisse

Die wichtigsten Punkte sind das Aufsetzen der Halos, die Berechnung der Galaxienbahn, sowie das Aufsetzen der Scheibe und die Lösung der Bewegungsgleichung für die Scheibenteilchen. Diese vier Punkte sind maßgeblich für das Funktionieren der Simulation. Die Halos werden in Teilchenform aufgesetzt. Das bedeutet, dass die Körper aus vielen Massenpunkten bestehen. Ziel dieses Verfahrens muss eine gute Approximation an reale Halos sein. Es wurden zwei Varianten untersucht die Halos zu erstellen. Die erste basiert auf einem regulären Gitter, worin jeder Gitterpunkt mit einem Haloteilchen besetzt wird. Die zweite Variante setzt den Halo mittels zufällig verteilter Teilchen auf, deren Position skaliert wird um die vorgegebene Dichteverteilung zu erhalten. In Kapitel 7.1 werden diese beiden Varianten in den Testrechnungen ausgiebig analysiert. Die Berechnung der Galaxienbahn ist der zweite wichtige Punkt. Die Teilchenhalos sollten derart aufgesetzt sein, dass für den Fall sphärischer Konfigurationen die entstehende Bahn nur eine geringe Abweichung im Vergleich zu der mittels semi-analytischer Verfahren bestimmten Bahn aufweist (siehe Kapitel 5.3). Da die direkte Kraftberechnung mittels Teilchen einen hohen Rechenaufwand bedingt (vergleiche Kapitel 2.3.2), werden ein paar Tricks benutzt um die Berechnung zu beschleunigen. Die Teilchen eines Halos ziehen sich untereinander nicht an, da die Halos als starre Körper implementiert sind

und sich deren Form daher nicht ändern darf. Die Kraft eines Halos auf ein Teilchen des anderen Halos wird nicht über eine direkte Summation der Einzelkräfte aller Teilchen, sondern semi-analytisch über die innerhalb der Position des Teilchens eingeschlossenen Masse errechnet (Gleichung 4.4). Dazu werden die Halos in das jeweilige Koordinatensystem des anderen Halos transformiert, um den ellipsoidalen Abstand m (siehe Kapitel 4.2) vom Schwerpunkt zu bestimmen. Die auf diese Weise errechnete Kraft auf jedes Halopartikel wird addiert um die Gesamtkraft zu errechnen, die ein Halo auf den anderen ausübt. Weiters wird, wie in Kapitel 4.3.3 beschrieben, das Drehmoment jedes Teilchens bestimmt, um ebenfalls durch Summierung das Gesamtdrehmoment erhalten. Der Gesamtdrehmoment wird benötigt um die Drehung der Halos berechnen zu können. Dies geschieht mit Hilfe der eulerschen Gleichungen (4.2). Nach der Tabellierung der Galaxienbahn, mitsamt der jeweiligen Lage der beiden Halos zu jedem Zeitschritt, werden die Scheiben aufgesetzt und auf die Anfangspositionen der Halos positioniert. Wichtig ist in diesem Fall die Berücksichtigung des asphärischen Potentials, sofern der Halo nicht sphäroider Natur ist und die Scheibe in der Ebene der beiden Hauptachsen gleicher Länge zu liegen kommt. Im allgemeinen Fall werden die Equipotentiallinien in Scheibenebene elliptisch sein. Dies folgt aus der Tatsache, dass ein Schnitt einer Ebene und eines Ellipsoids eine Schnittellipse erzeugt. Die Herleitung dieser Schnittellipse wird in Anhang B durchgeführt. Dieser Algorithmus ist für jede Lage der Scheibe zu den Halos geeignet. Die Scheibenteilchen werden anschließend auf konzentrischen Ellipsen aufgesetzt, analog zu den konzentrischen Kreisen im Falle sphärische Halos. Die Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit erfolgt allerdings nicht vollständig analog zum sphärischen Fall. Die Analogie zum sphärischen Fall endet mit der Tatsache, dass der Geschwindigkeitsvektor tangential zur Equipotentiallinie verläuft. Da die Equipotentiallinien allerdings Ellipsen sind, steht die Tangente nicht normal auf den Ortsvektor eines Punktes auf der Ellipse. Zur Bestimmung des Tangentenvektors wird die Tangentengleichung der Ellipse gelöst.

$$y = \frac{1^2 - b^2 x x_0}{a^2 y_0}$$

y und x sind die Koordinaten der Punkte auf der Tangente. x_0 und y_0 sind die Koordinaten des Punktes auf der Ellipse an dem die Tangente anliegt und a und b sind die große, beziehungsweise kleine Halbachse der Ellipse. Durch das Einsetzen zweier Punkte mit anschließender Normierung des Verbindungsvektors dieser Punkte wird der Richtungsvektor der Anfangsgeschwindigkeit bestimmt.

7. Ergebnisse

In sämtlichen Simulationen wurden die Einheiten der Länge, der Masse, sowie der Zeit ident gelassen. Die Gravitationskonstante G wurde auf den Wert 1 gesetzt. Durch die Festlegung der Längeneinheit auf 1 kpc, sowie der Masseneinheit auf $10^{11} M_{\odot}$ ergibt sich die Zeiteinheit zu 1.49×10^6 Jahren. Dies folgt aus der Verwendung des tatsächlichen Wertes von G .

$$G = 6.6732 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$$

7.1. Testrechnungen

Da die Kräfte zwischen zwei Halos im Falle triaxialer Systeme nicht mehr analytisch, sondern numerisch bestimmt werden, ergibt sich ein nicht vernachlässigbarer Fehler. Aufgrund der Teilchenstruktur der Halos, die nicht immer vollkommen symmetrisch angeordnet sein kann, kommt es zu einer Abweichung und zwar sowohl in der Bahnebene, als auch in der dazu normal stehenden Richtung. Um die Abweichung in der Bahnebene zu bestimmen wurde ein Vergleich mit einem bisher implementierten Verfahren durchgeführt. Als Maß für die Genauigkeit eines Modells wurde der relative Fehler verwendet:

$$f = \frac{F}{x_r} = \frac{x - x_r}{x_r}$$

Hierbei ist $F = x - x_r$ die absolute Abweichung, bzw. der absolute Fehler, x der gemessene Wert und x_r der Referenzwert. Der relative Fehler gibt die prozentuelle Abweichung vom Referenzwert an. Für die Abweichung in die normal zur Bahnebene stehende Richtung wurde der absolute Fehler herangezogen, da es bei einer perfekten Symmetrie keine Abweichung geben dürfte und daher der Referenzwert 0 beträgt. Es wurden zwei Studien zur Bestimmung der Genauigkeit des Verfahrens durchgeführt, je eines davon mit einem Halo, der auf einem regulären Gitter aufgesetzt wurde und eines mit zufällig verteilten Halopartikeln (siehe Kapitel 6 für eine genauere Beschreibung). Die Wechselwirkung wird mit zwei Galaxien gleicher Masse durchgeführt. Die Anfangsposition und die Startgeschwindigkeiten der Galaxien wurden so gewählt, dass sie einen parabolischen Orbit mit der minimalen Entfernung von 10 kpc durchlaufen. Für beide Halos wurde ein Radius von 20 kpc gewählt. Es wurde untersucht, ob sich bei kleinen Änderungen der Teilchenzahlen große Änderungen in den Fehlern ergeben. Hierzu wurde die Teilchenzahl, von fünfhundert bis dreitausend, schrittweise um hundert erhöht. Das Ergebnis ist in den Abbildungen (7.1) und (7.2) zu sehen.

7. Ergebnisse

In diesen Abbildungen werden die relativen, beziehungsweise die absoluten Fehler der einzelnen Rechnungen dargestellt. Auffallend ist, dass schon bei recht geringen Teilchenzahlen der relative Fehler der Galaxienbahn unter einem Prozent liegt. Beide Varianten weisen nur geringe Unterschiede bei Halos mit unterschiedlichen Teilchenzahlen auf. Mit steigender Teilchenzahl nimmt außerdem die Schwankung des relativen Fehlers ab. Mit Ausnahme der nächsten Begegnung der beiden Halos, die immer zum Zeitpunkt 0 Myr stattfindet, verläuft der Graph des relativen Fehlers bei allen Teilchenzahlen ähnlich. Wie vor allem bei den Abbildungen des regulären Gitters ersichtlich ist, korreliert der genaue Verlauf des relativen Fehlers um den Zeitpunkt 0 Myr nicht mit der Teilchenzahl und zwar weder das Vorzeichen, noch die Größe des Fehlers. Die Vermutung liegt nahe, dass die tatsächliche Verteilung der Partikel im Halo, speziell im Hinblick auf mögliche Symmetrien, von entscheidender Bedeutung ist. Die Variante auf dem regulären Gitter zeigt diesbezüglich wesentlich größere Schwankungen im Bereich der nächsten Begegnung, als die Halos mit zufällig verteilten Teilchen. Das liegt daran, dass bei einer äusserst symmetrischen Konfiguration eine kleine Änderung genügt um die Richtung des Halos zu beeinflussen. Abhängig von der Position der wenigen Teilchen, die aufgrund kleiner Ungenauigkeiten bei der Erstellung der Halos die Symmetrie brechen, richtet sich der Kraftvektor in die eine oder andere Richtung. Abgesehen davon zeigen beide Varianten, dass die Abweichung in der Bahnebene klein genug ist um aussagekräftige Ergebnisse zu liefern. Etwas anders sieht die Sache bei Betrachtung der Abweichung in der z-Achse, welche normal auf die Bahnebene steht, aus. In diesem Fall ist deutlich zu sehen, dass die Konfiguration auf dem regulären Gitter wesentlich bessere Ergebnisse erzielt. Während bei den zufällig auf dem Gitter verteilten Konfigurationen eine Abweichung von 0.5 kpc keine Seltenheit ist, bleiben die Abweichungen bei der mittels regulärem Gitters erstellten Verteilung deutlich darunter. Die Graphen des absoluten Fehlers in der z-Achse zeigen, im Gegensatz zu jenen des relativen Fehlers auch eine deutlich Abhängigkeit von der Teilchenzahl. Vor allem die Graphen für die Konstellation auf dem regulären Gitter ergeben für die größeren Teilchenzahlen nur noch Abweichungen von maximal 30 pc in der z-Achse. Eine weitergehende Untersuchung wurde für größere Teilchenzahlen, bis zu 20000, durchgeführt. Diese Untersuchung bestätigte den Trend, dass bei höheren Teilchenzahlen die Schwankungen des relativen Fehlers in der Bahnebene abnehmen. Der relative Fehler nimmt allerdings kaum mehr ab, sondern bleibt im Bereich einiger weniger Promille. Die Abweichung aus der Bahnebene heraus nimmt bei den Halos mit zufälliger Verteilung mit steigender Teilchenzahl sukzessive ab, wohingegen bei den Halos basierend auf regulären Gittern keine weitere Verbesserung zu bemerken ist. Die Ergebnisse für höhere Teilchenzahlen sind in den beiden Abbildungen (7.3) und (7.4) dargestellt. Da wie bereits angesprochen die tatsächliche Verteilung der Haloteilchen möglicherweise eine größere Auswirkung auf die Fehler in der Bahnebene, beziehungsweise in der normal auf die Bahnebene stehende Richtung haben könnte, wurde auch dieser Fall genauer untersucht. Zu diesem Zweck wurden die vorhin bereits verwendeten Halos um einen Winkel von 45° um die Drehachse $\vec{d} = (1, 1, 1)$ gedreht. Da die Haloteilchen eine andere Position erhalten, könnte der resultierende Kraftvektor eine andere Richtung aufweisen. Das Ergebnis dieser Untersuchung findet sich in Abbildung (7.5). Die generellen Unterschiede zwischen den beiden Varianten, reguläre gegenüber zufällige

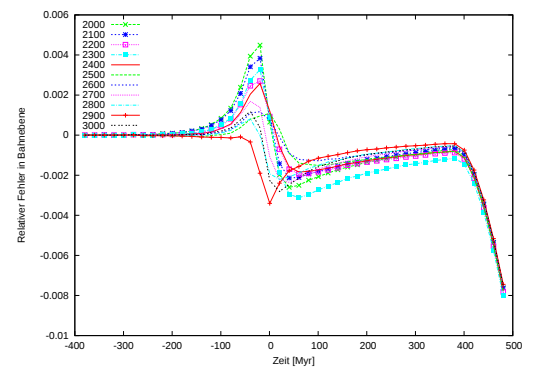
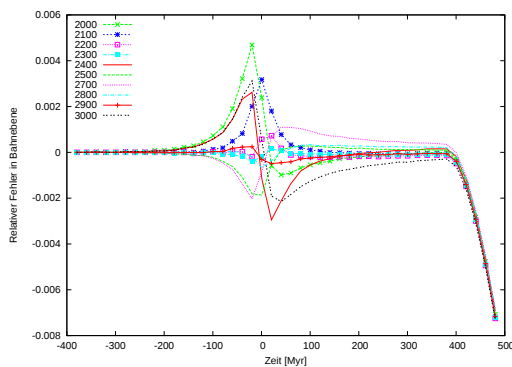
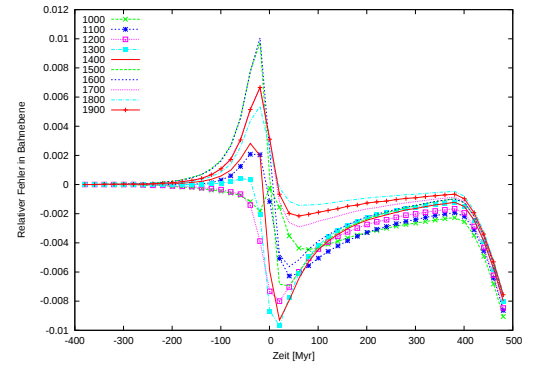
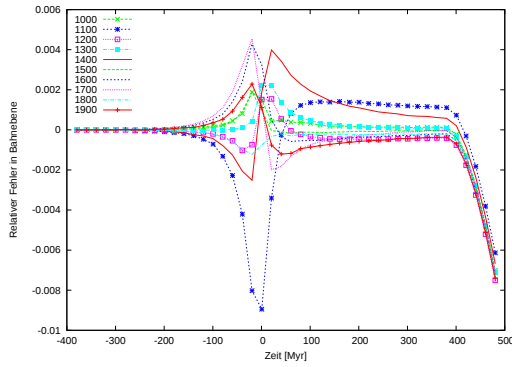
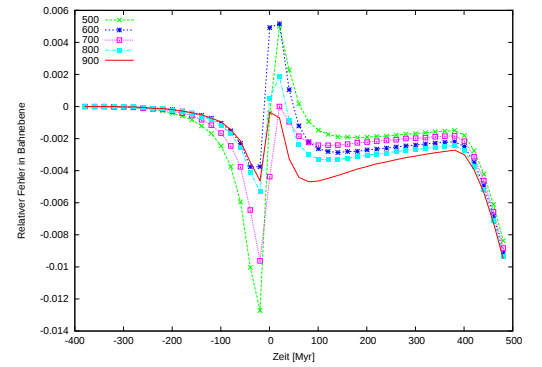
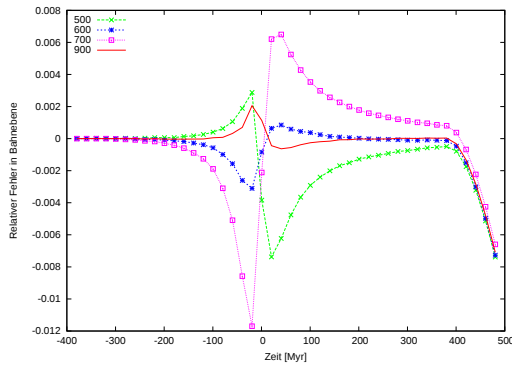


Abbildung 7.1.: Relativer Fehler einer Simulation. links: Haloteilchen auf regulärem Gitter aufgesetzt. rechts: Haloteilchen zufällig verteilt. In beiden Fällen ist der relative Fehler für jede Teilchenzahl geringer als 1%.

7. Ergebnisse

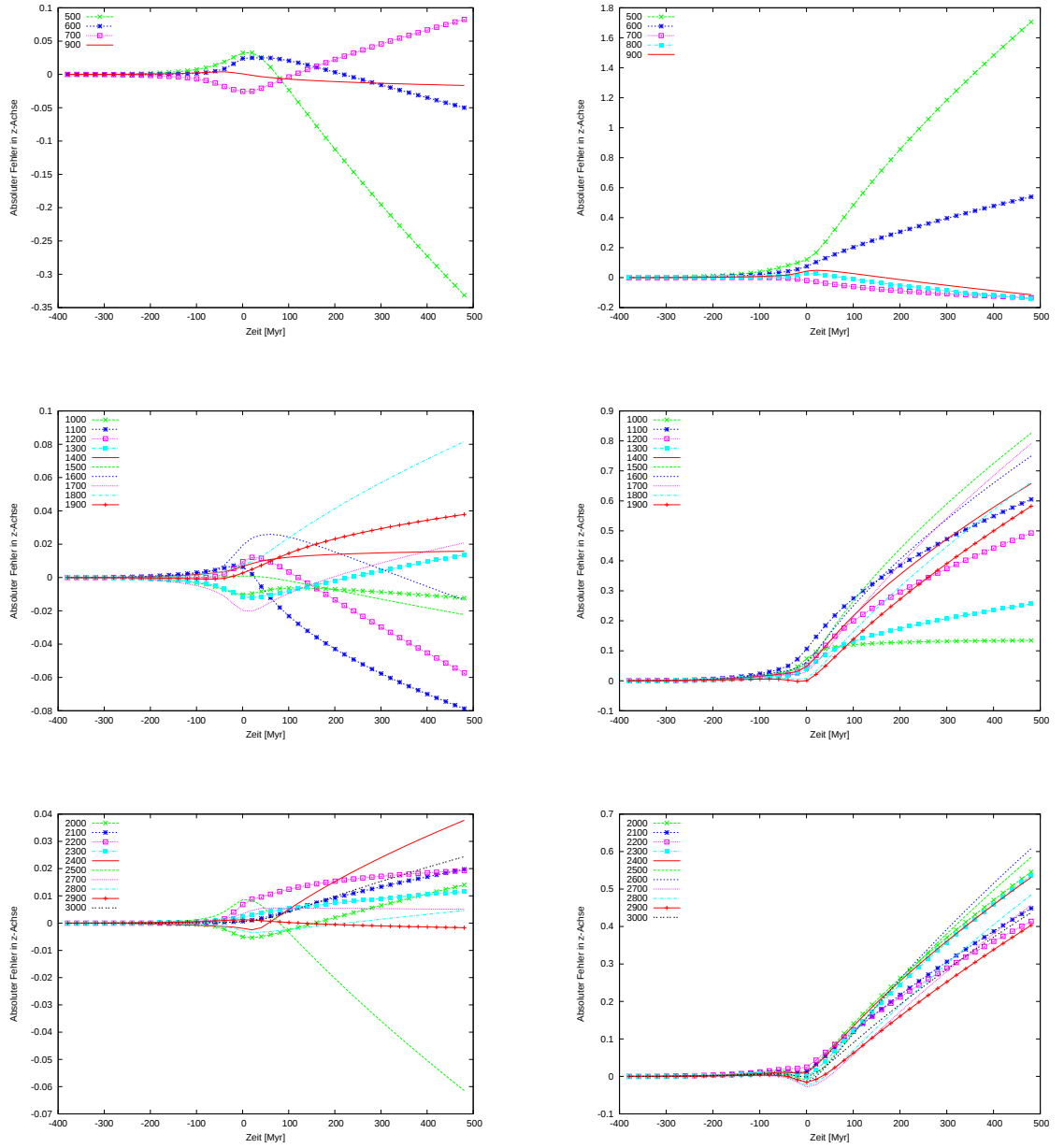


Abbildung 7.2.: Absoluter Fehler einer Simulation. links: Haloteilchen auf regulärem Gitter verteilt. rechts: Haloteilchen zufällig verteilt.

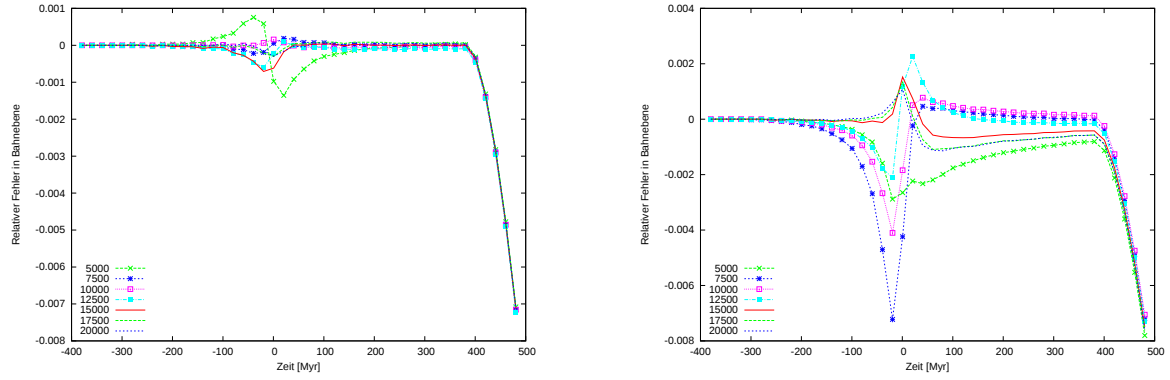


Abbildung 7.3.: Relativer Fehler. links: reguläres Gitter. rechts: zufällige Verteilung

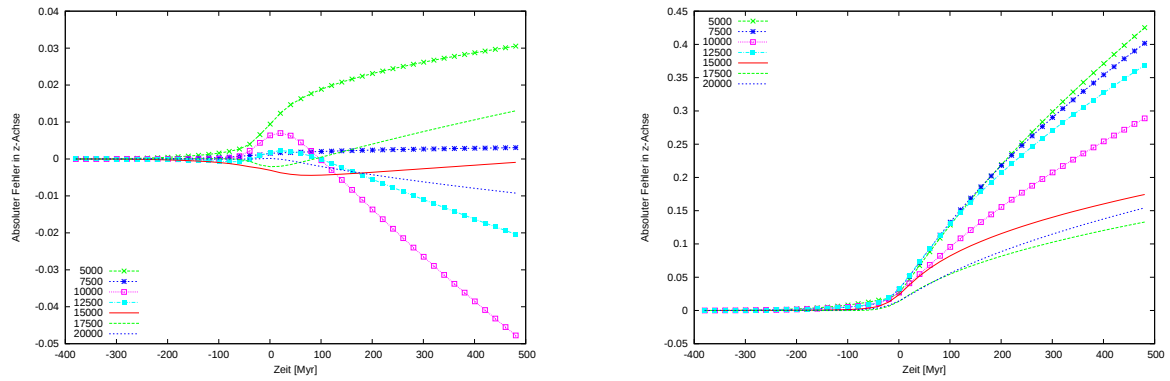


Abbildung 7.4.: Absoluter Fehler. links: reguläres Gitter. rechts: zufällige Verteilung

7. Ergebnisse

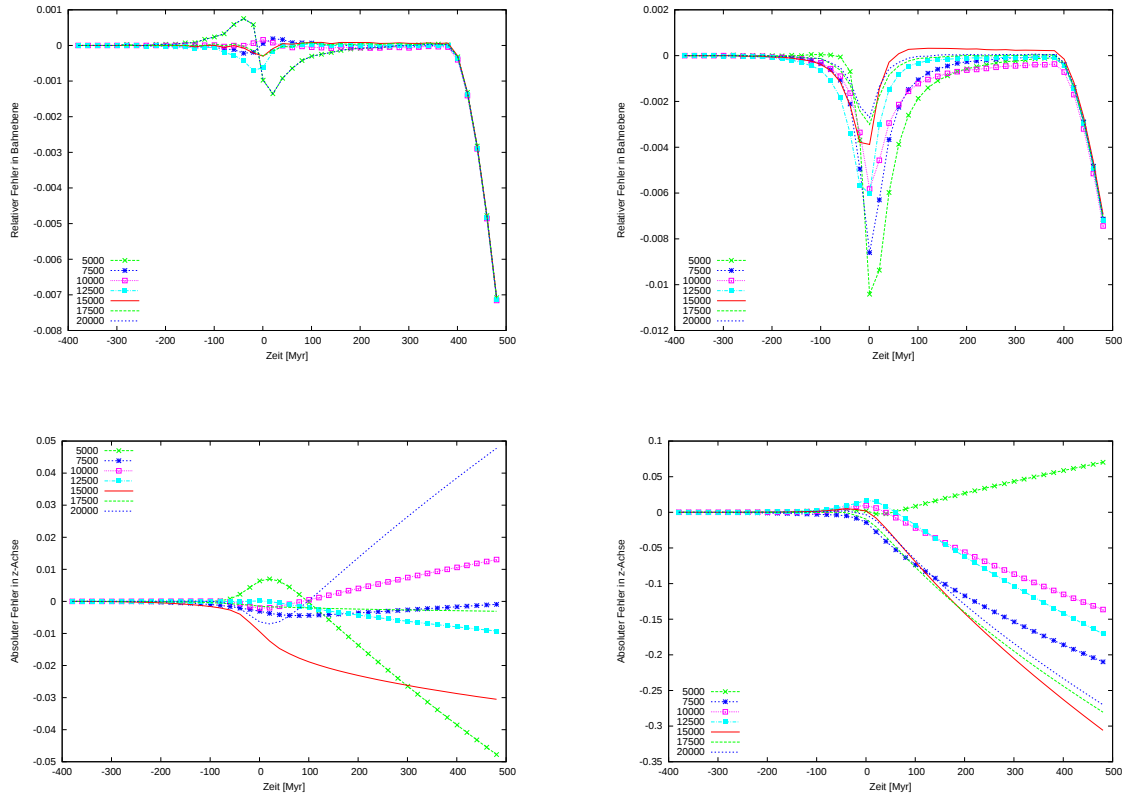


Abbildung 7.5.: Fehler bei gedrehten Halos. oben: Relative Fehler in der Bahnebene, unten: Absoluter Fehler normal auf die Bahnebene (links: reguläres Gitter, rechts: zufällige Verteilung)

Verteilung, bleiben gleich. Weiterhin sind die Modelle auf dem regulären Gitter etwas exakter, vor allem in z -Richtung. Wie vermutet wird vor allem die Richtung der beiden Fehler beeinflusst. Klar ersichtlich ist das bei den Modellen mit zufälliger Verteilung. Bei den Modellen auf dem regulären Gitter zeigt der Verlauf des regulären Fehlers in der Bahnebene kaum eine Abweichung gegenüber den nicht gedrehten Modell, was darauf hindeutet, dass dieses Modelle im großen und ganzen eine einigermaßen gute Rotations-symmetrie aufweisen. Der Verlauf des absoluten Fehlers aus der Bahnebene heraus zeigt allerdings, dass geringe Abweichungen der Teilchen eine Richtungsänderung bewirken können.

Zusammenfassend darf davon ausgegangen werden, dass die verwendeten Modelle einer ausreichend guten Genauigkeit unterliegen und damit zur Modellierung herangezogen werden können. Im Bezug auf den absoluten Fehler ist noch zu bemerken, dass das verwendete Softening auf einen Wert von 100 pc gesetzt wurde und die Fehler sich daher noch innerhalb akzeptabler Grenzen befinden.

7.2. Parameterstudie

Für die folgende Parameterstudie werden ausnahmslos auf einem regulärem Gitter basierende Halos mit einer Teilchenzahl von 2900 verwendet. Dies geschieht zu dem Zweck die Rechenzeit bei guter Genauigkeit gering zu halten. Der erste Teil der Parameterstudie untersucht die Auswirkungen unterschiedlicher Triaxialität auf eine Wechselwirkung, wobei die Scheiben in die Hauptachse gelegt werden.

7.2.1. Veränderung eines Halos bei sonst gleichbleibender Wechselwirkung

In der folgenden Studie wird die Form eines der beiden Halos abgewandelt. Die Wechselwirkung wird analog zu den Testrechnungen (siehe Kapitel 7.1) aufgesetzt, und zwar auf einer anfänglich parabolischen Bahn mit einem Anfangsabstand von 100 kpc, sowie einem minimalen Abstand von 10 kpc. Der sphärische Halo weist in all den folgenden Simulationen einen Radius von 20 kpc auf und die Scheibe desselbigen ist auf 10 kpc beschränkt. Die abgeplatteten Halos weisen entlang der großen Halbachse dieselbe Relation auf, die anderen Halbachsen werden entsprechend der Werte von b und c skaliert. Beide Halos haben die gleiche Masse und die Rotation der beiden Scheiben ist prograd. Die Scheibengröße variiert ebenfalls entsprechend der Lage in den Halos. Die dafür erforderliche Prozedur wird in Kapitel 6 beschrieben. Weiters ist zu erwähnen, dass die Zeit in den Abbildungen in Megajahren und die Längeneinheiten in kpc gegeben sind.

Oblate Halos Zu Beginn wird der veränderliche Halo oblat gewählt und die Abplattung variiert, wobei die Scheibe entlang der beiden Hauptachsen liegt. Wie in Abbil-

7. Ergebnisse

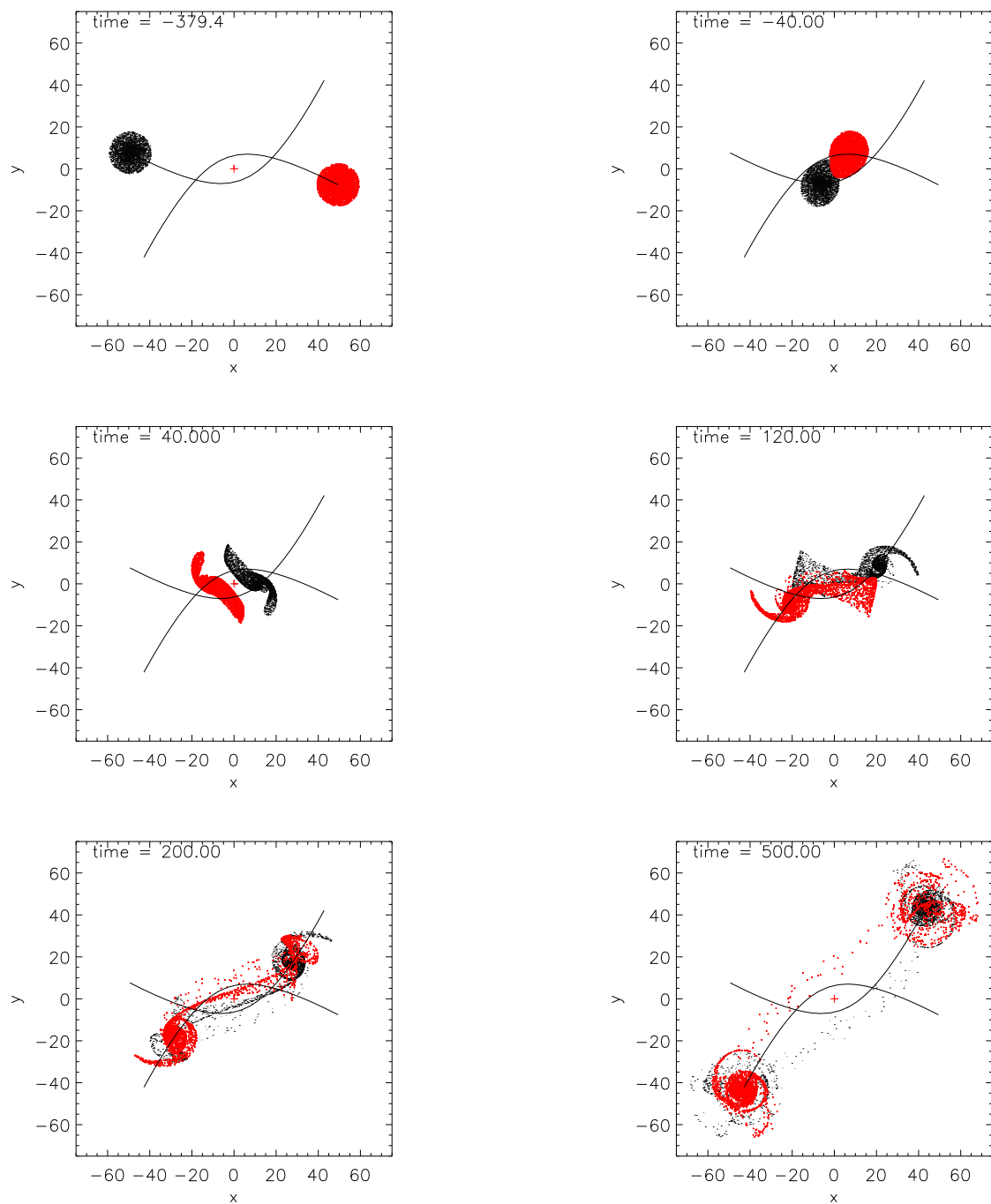


Abbildung 7.6.: Verlauf einer Wechselwirkung. 1.Halo (schwarz) hat eine oblaten Halo mit einer Exzentrizität von 0.9, während der 2. Halo (rot) sphärischer Natur ist

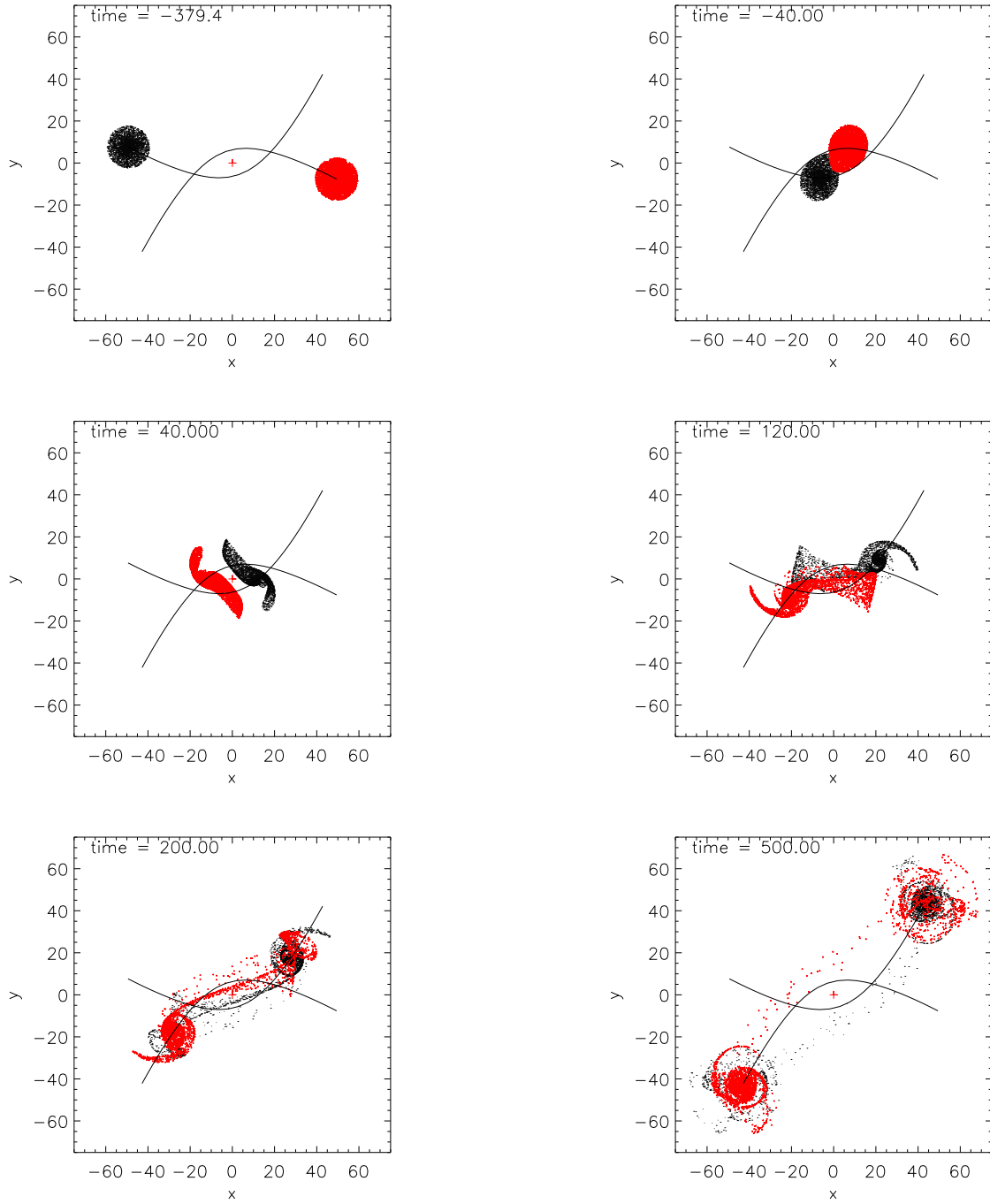


Abbildung 7.7.: Verlauf einer Wechselwirkung. 1.Halo (schwarz) hat eine oblaten Halo mit einer Exzentrizität von 0.3, während der 2. Halo (rot) sphärischer Natur ist

dungen (7.6) und (7.7) ersichtlich ist, erzeugt ein nicht zur Bahnebene geneigter oblater Halo keine Änderung im Verlauf der Wechselwirkung und das unabhängig von der verwendeten Abplattung. Beide Simulation liefern die gleichen Resultate, was sich dadurch erklären lässt, dass die Symmetrie in der z-Achse gegeben ist und daher nur das Potential in der Scheibenebene eine Auswirkung auf die Teilchen hat, da sich die Kräfte in z-Richtung gegenseitig aufheben. Da das Potential in der Scheibenebene bei einem oblaten Halo radialsymmetrisch ist und durch die Abplattung nicht beeinflusst wird, sind die resultierenden Kräfte auf die Teilchen in allen oblaten, und außerdem auch in den sphärischen, Halos ident.

Prolate Halos Analog zu der Auswirkung eines oblaten Halos wird die Simulation mit einem prolaten Halo gehandhabt. In diesem Fall liegt die Scheibe in der Ebene, die von den beiden kleineren Achsen aufgespannt wird. Durch die Skalierung über die Halbachsen des Halos ist die Scheibe kleiner als im oblaten Fall. Da auch der Halo in der Scheibenebene kleiner ist, ergibt sich ein anderes Bild als bei den Simulationen mit oblaten Halos. Aufgrund der erhöhten Masse in einem kleineren radialen Bereich zeigt sich eine deutlich höhere Stabilität der Scheibe während der Wechselwirkung. In den Abbildungen (7.8) und (7.9) wird dieser Effekt deutlich sichtbar. Durch die höhere Dichte des prolaten Halos in der Scheibenebene erfolgt auch eine stärkere Anziehung der Scheibenteilchen der zweiten Galaxie, da die Masse innerhalb deren Position verhältnismäßig größer wird.

Triaxiale Halos Die Halbachsen des Ellipsoiden werden von 1 bis 0.1 variiert, wobei immer $a > b > c$ gegeben ist. Die Ellipsoiden werden nicht gedreht, das bedeutet, dass in jeder nun folgenden Simulation die große Halbachse zu Beginn entlang der x-Achse liegt. Die mittlere und die kleine Halbachse liegen dementsprechend entlang der y- beziehungsweise z-Achse. Anzumerken ist, dass weiterhin nur ein Halo verändert wird. Der Wechselwirkungspartner bleibt weiterhin sphärisch. Die Scheiben werden auf die Equipotentiallinien skaliert, was zur Folge hat, dass die Startkonfiguration der Scheibe einer Ellipse entspricht, im Gegensatz zu einem Kreis, wie es bei sphärischen und sphäroidalen Halos der Fall ist. Die Prozedur zur Bestimmung der Scheibenabplattung ist in Kapitel 6 erklärt. Das nunmehr asymmetrische Potential in der Scheibenebene hat drastische Auswirkungen auf die Teilchenbewegungen, während die Abplattung in z-Richtung weiterhin keinen Einfluss darauf hat. Da die Scheibe nicht mehr in einem radialsymmetrischen Potential liegt, folgt die Bewegung der Teilchen nicht mehr Kreisbahnen.

Wie in den Abbildungen (7.10) bis (7.14) ersichtlich ist, erzeugt das asymmetrische Potential eine Störung in der Scheibe. Diese Störung erzeugt je nach Zeitpunkt ausgeprägte Spiralarme, oder Ringe. Wie in den Abbildungen (7.10) bis (7.13) zu sehen ist erzeugen Verhältnisse der mittleren zur großen Achse, also der beiden Achsen die in der Scheibenebene liegen, mit einem Wert von mehr als $1/2$ ein sehr ähnliches Bild. Es stellt sich heraus, dass der Rückfall des durch die Wechselwirkung herausgeschleuderten Materials länger dauert, je kleiner das Verhältnis der beiden Achsen ist. Abgesehen davon sind die Unterschiede der einzelnen Modelle minimal. Je geringer das Verhältnis

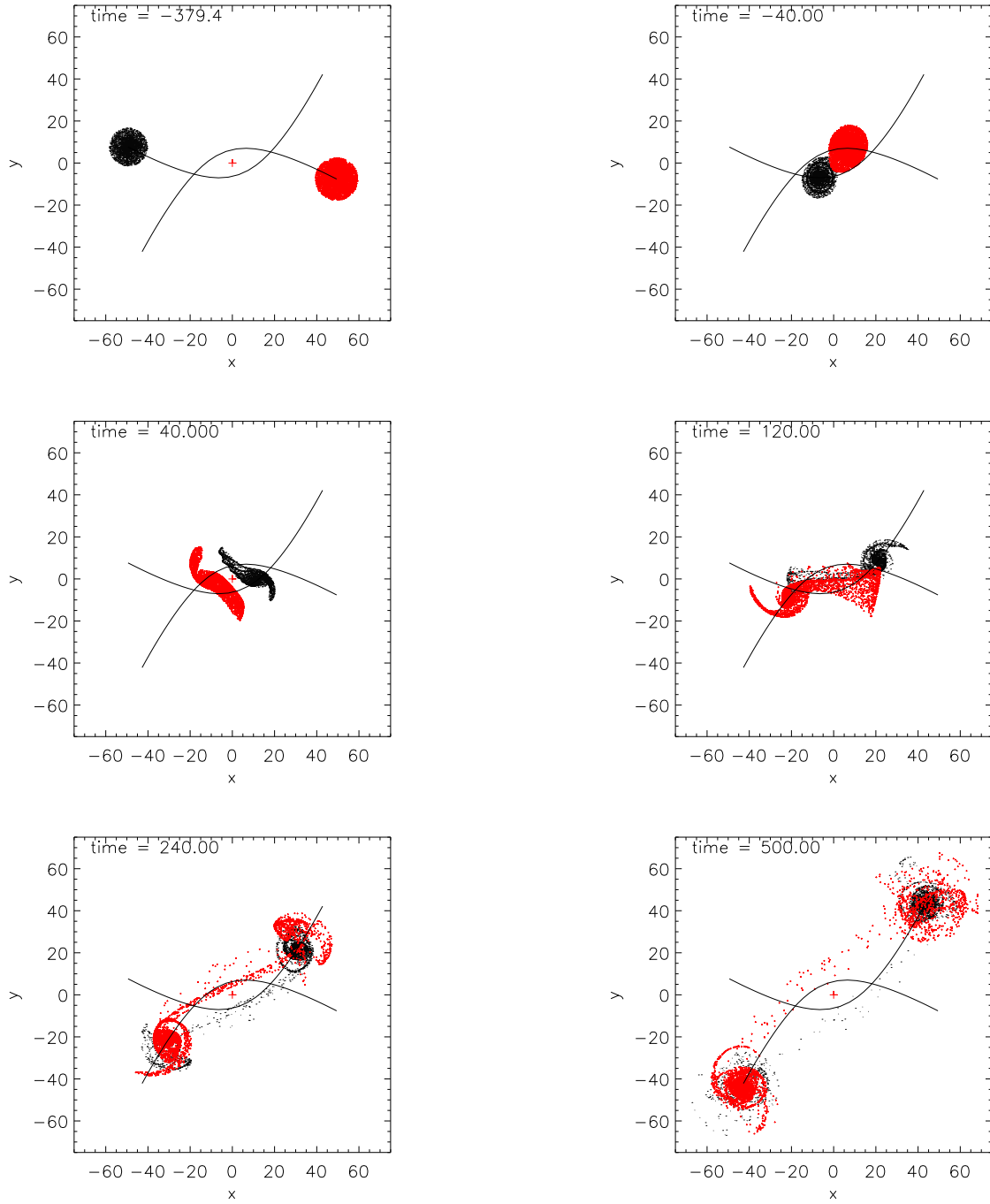


Abbildung 7.8.: Wechselwirkungssimulation mit einem prolaten Halo (schwarz) (Achsenverhältnis 0.9-0.9-1) und einem sphärischem Halo (rot).

7. Ergebnisse

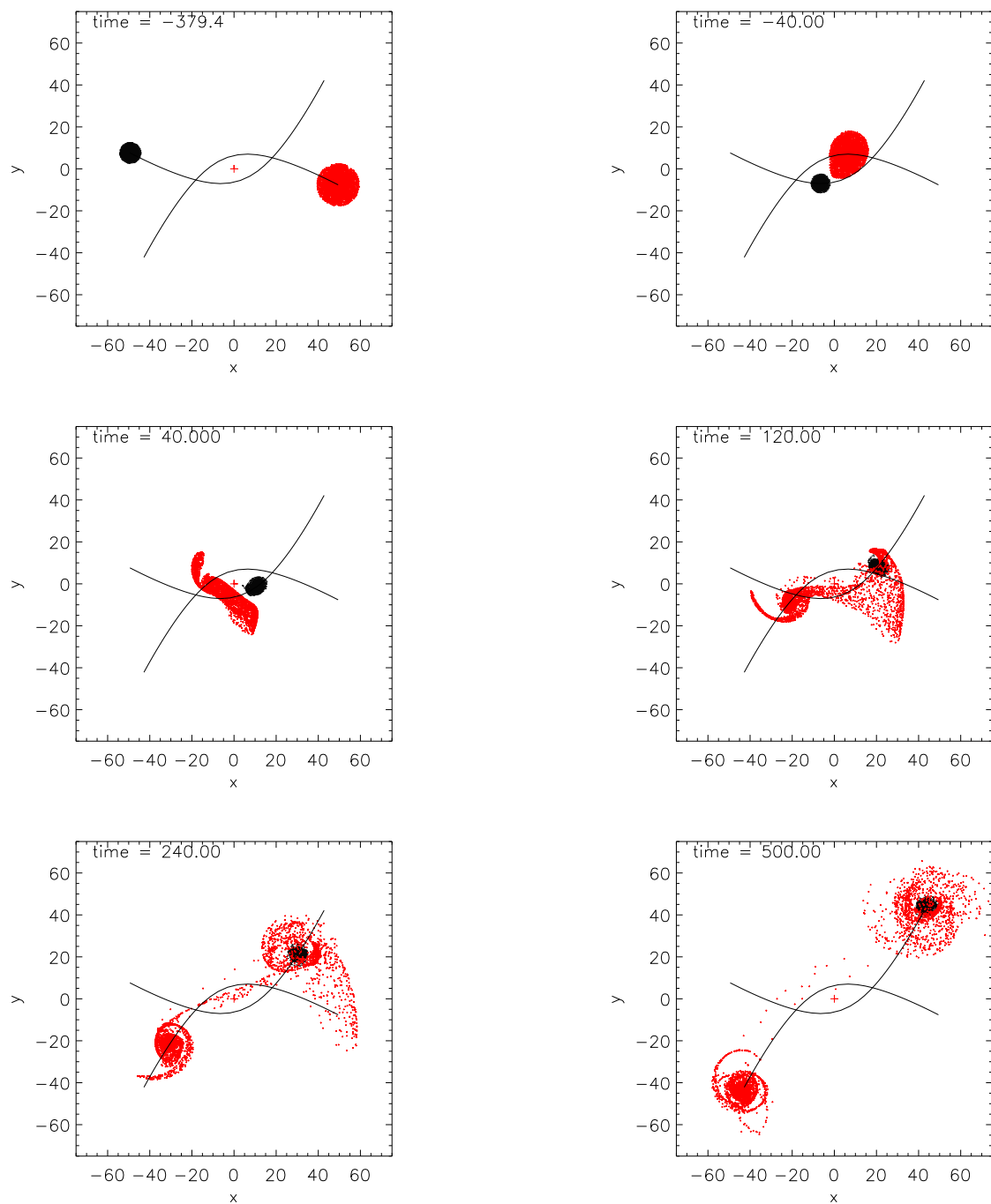


Abbildung 7.9.: Wechselwirkungssimulation mit einem prolaten Halo (schwarz) (Achsenverhältnis 0.5-0.5-1) und einem sphärischem Halo (rot).

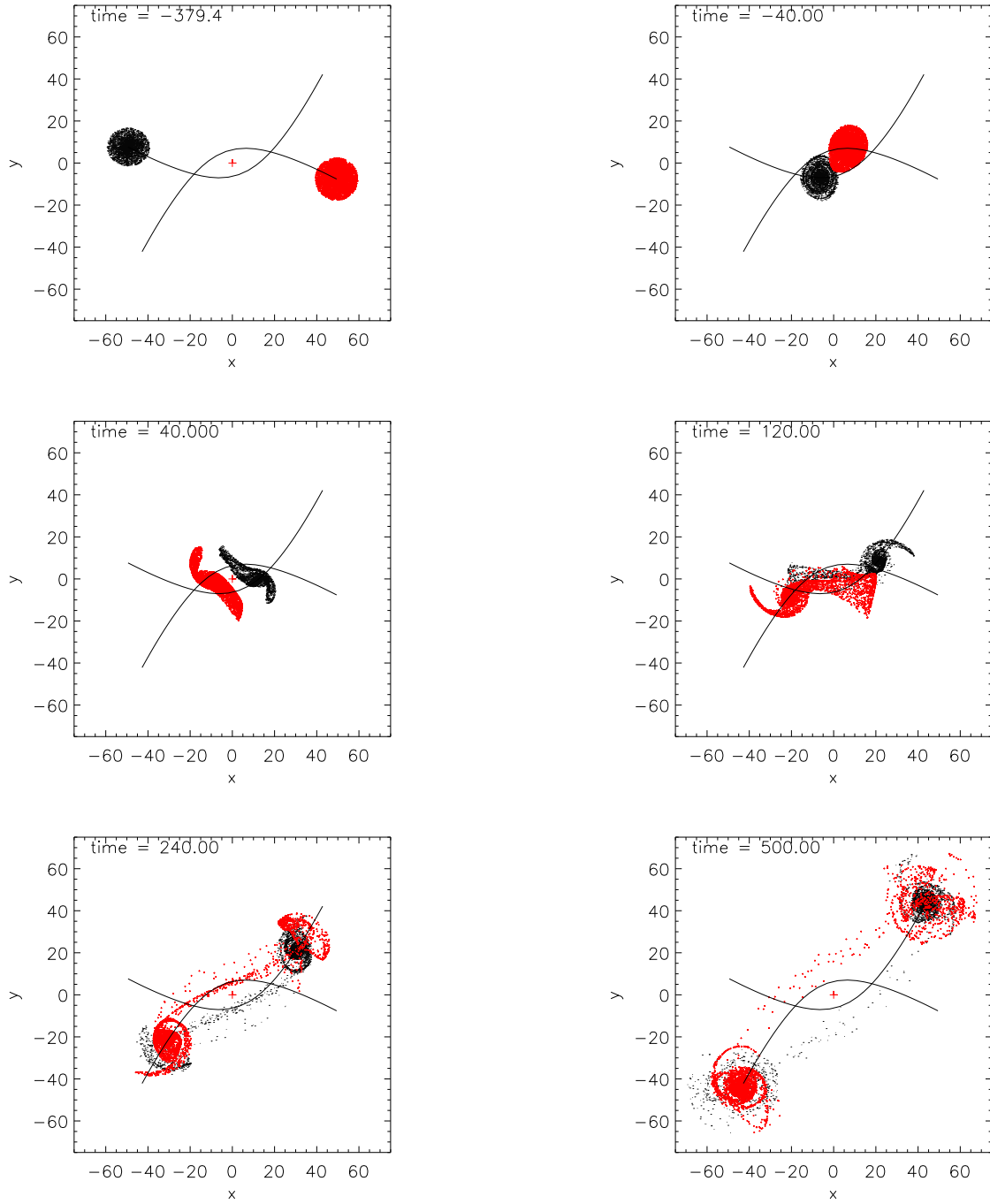


Abbildung 7.10.: Wechselwirkungssimulation mit einem triaxialen Halo (schwarz) (Achsenverhältnis 1-0.9-0.8) und einem sphärischen Halo (rot).

7. Ergebnisse

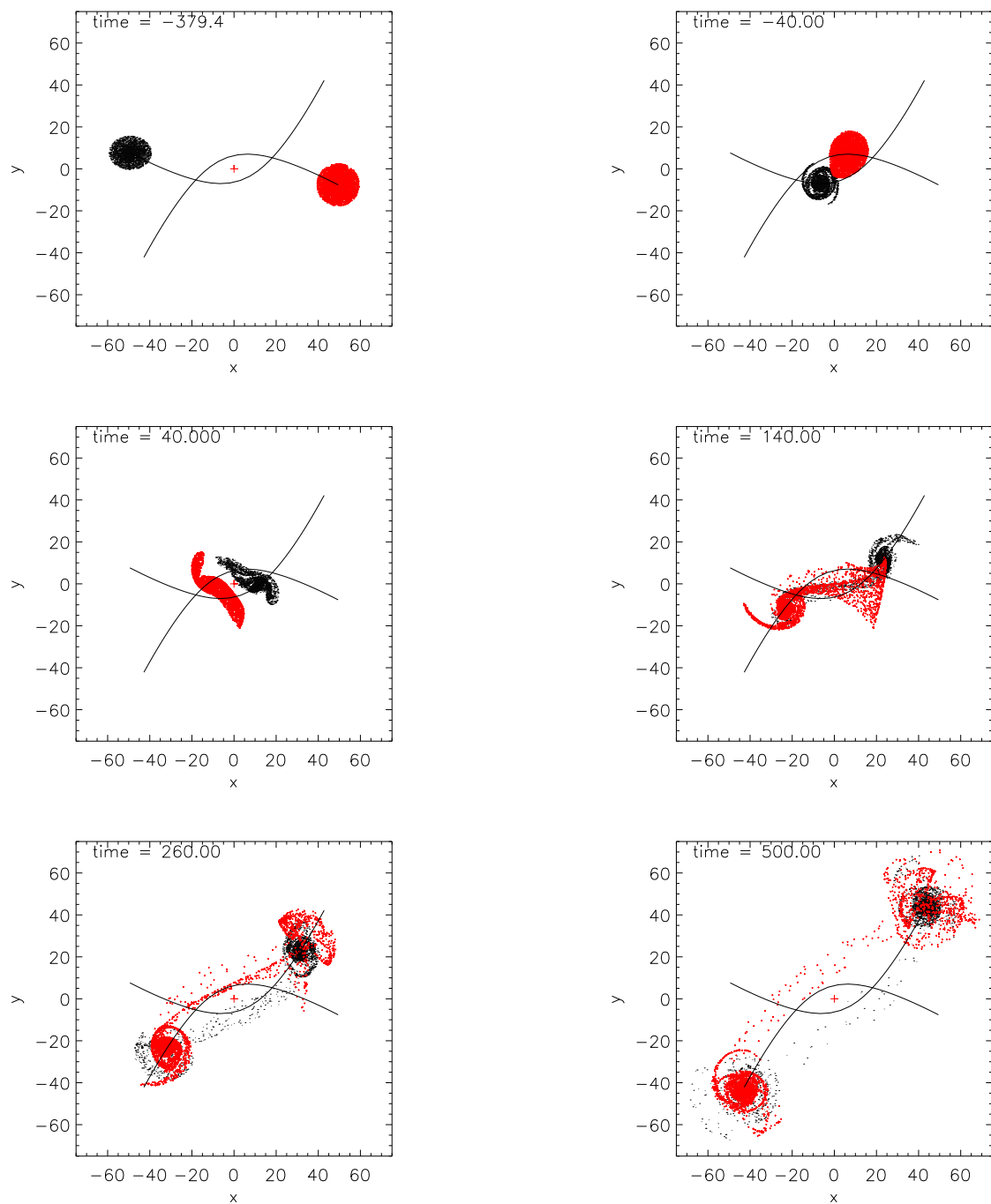


Abbildung 7.11.: Wechselwirkungssimulation mit einem triaxialen Halo (schwarz) (Achsenverhältnis 1-0.8-0.3) und einem sphärischen Halo (rot).

der Achsen ist, desto diffuser erscheint die Scheibe der Galaxie mit dem triaxialen Halo während der Wechselwirkung. Das lässt sich dadurch erklären, dass aufgrund der gedehnten Massenverteilung entlang der großen Halbachse eine Art Zerstäubung erfolgt. Durch die unterschiedlichen Kräfte, die der triaxiale Halo entlang der beiden Achsen erzeugt, wird die Scheibe bei der nächsten Begegnung durch den Wechselwirkungspartner entlang der großen Halbachse stärker beeinflusst, als entlang der mittleren, da die Anziehungskraft von der eingeschlossenen Masse abhängig ist, die bei gleichem Abstand zum Massenmittelpunkt entlang der großen Halbachse geringer ist, als entlang der mittleren. Andererseits werden aufgrund dieser Tatsache weniger Teilchen von der Galaxie mit dem triaxialen Halo an den Wechselwirkungspartner abgegeben, da viele Teilchen sich entlang der mittleren Halbachse aufhalten und daher stärker an die ursprüngliche Galaxie gebunden sind. Aus diesem Grund ergibt sich für die Scheibenteilchen eine geringere Wahrscheinlichkeit bei der Wechselwirkung aus der ursprünglichen Galaxie gerissen zu werden. Ab einem Achsenverhältnis von weniger als $1/2$ verstärkt sich dieser Effekt. Durch die geringe Ausdehnung des triaxialen Halos in Richtung der mittleren Halbachse, ergibt sich für den Fall einer Überschneidung der Halos, eine weit höhere Anziehungskraft entlang dieser Achse für den triaxialen Halo. Da viele Scheibenteilchen der Galaxie mit dem sphärischen Halo zum Zeitpunkt der nächsten Begegnung eine wesentlich geringere Beschleunigung durch den sphärischen Halo erfahren, als durch den triaxialen Halo, werden viele Scheibenteilchen des sphärischen Halos hinausgeschleudert. Dieser Effekt ist selbstverständlich auch bei höheren Achsenverhältnissen vorhanden, aber noch nicht so ausgeprägt. In Abbildung (7.14) ist dieser Effekt deutlich zu erkennen.

7. Ergebnisse

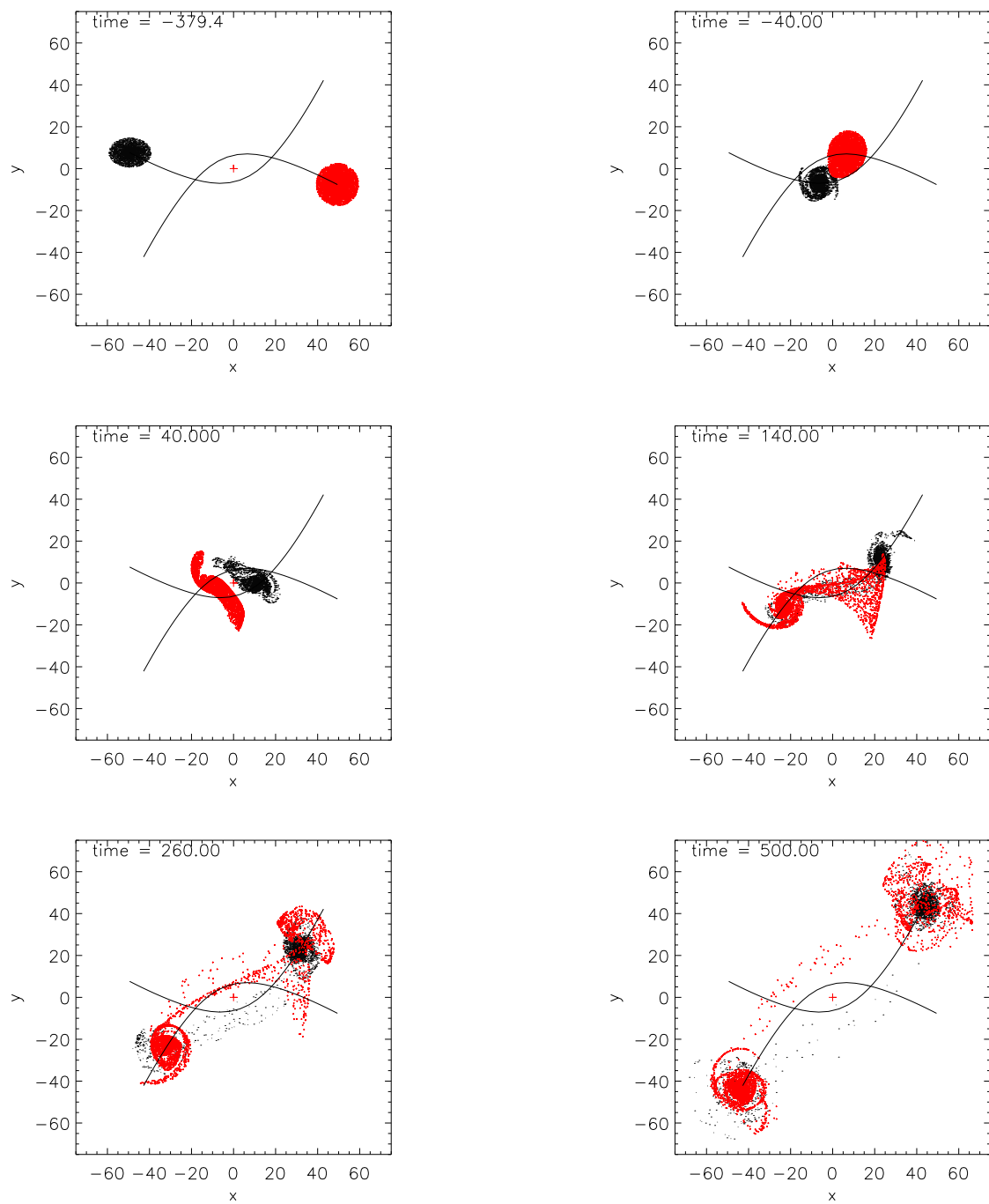


Abbildung 7.12.: Wechselwirkungssimulation mit einem triaxialen Halo (schwarz) (Achsenverhältnis 1-0.7-0.5) und einem sphärischen Halo (rot).

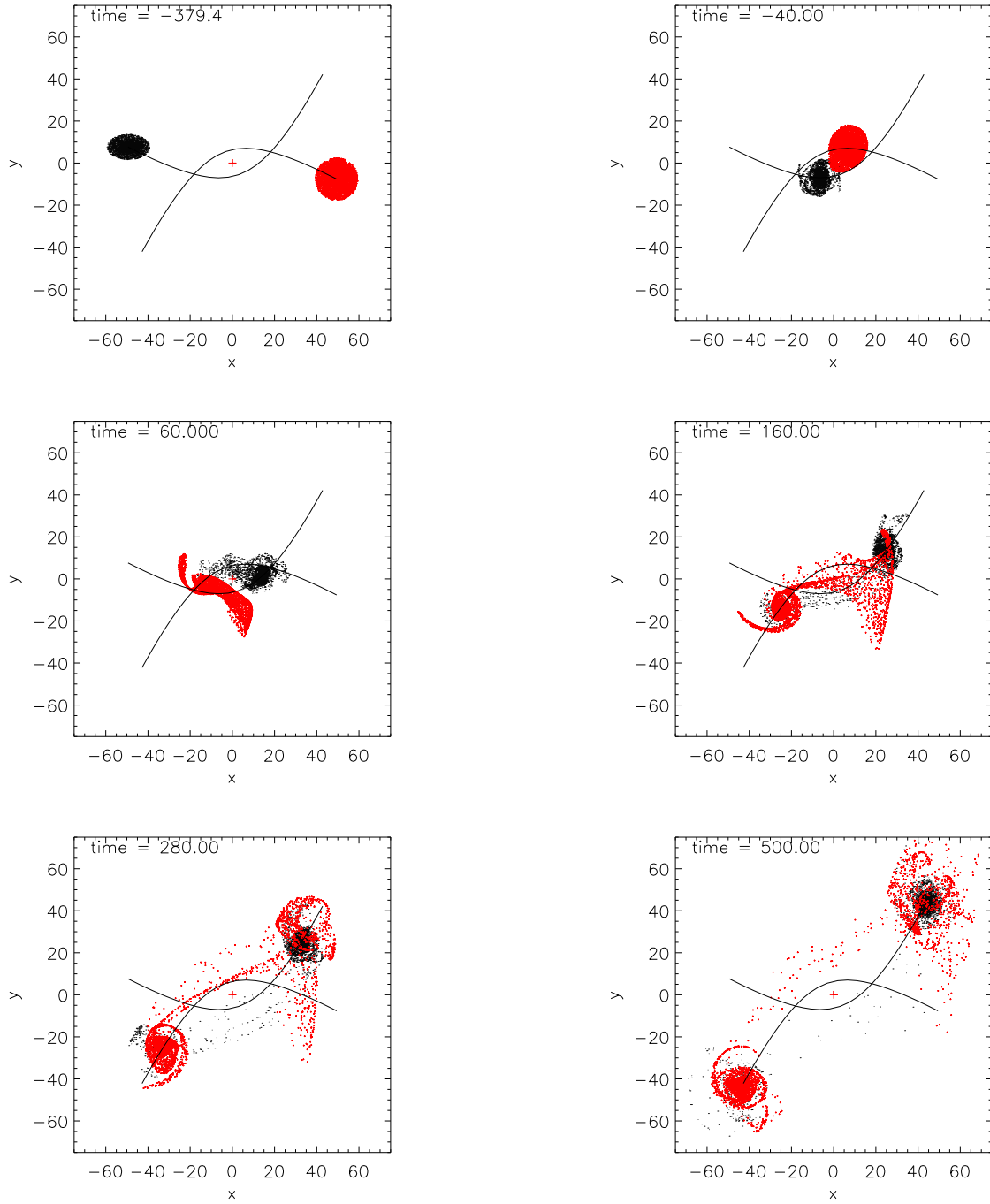


Abbildung 7.13.: Wechselwirkungssimulation mit einem triaxialen Halo (schwarz) (Achsenverhältnis 1-0.6-0.4) und einem sphärischen Halo (rot).

7. Ergebnisse

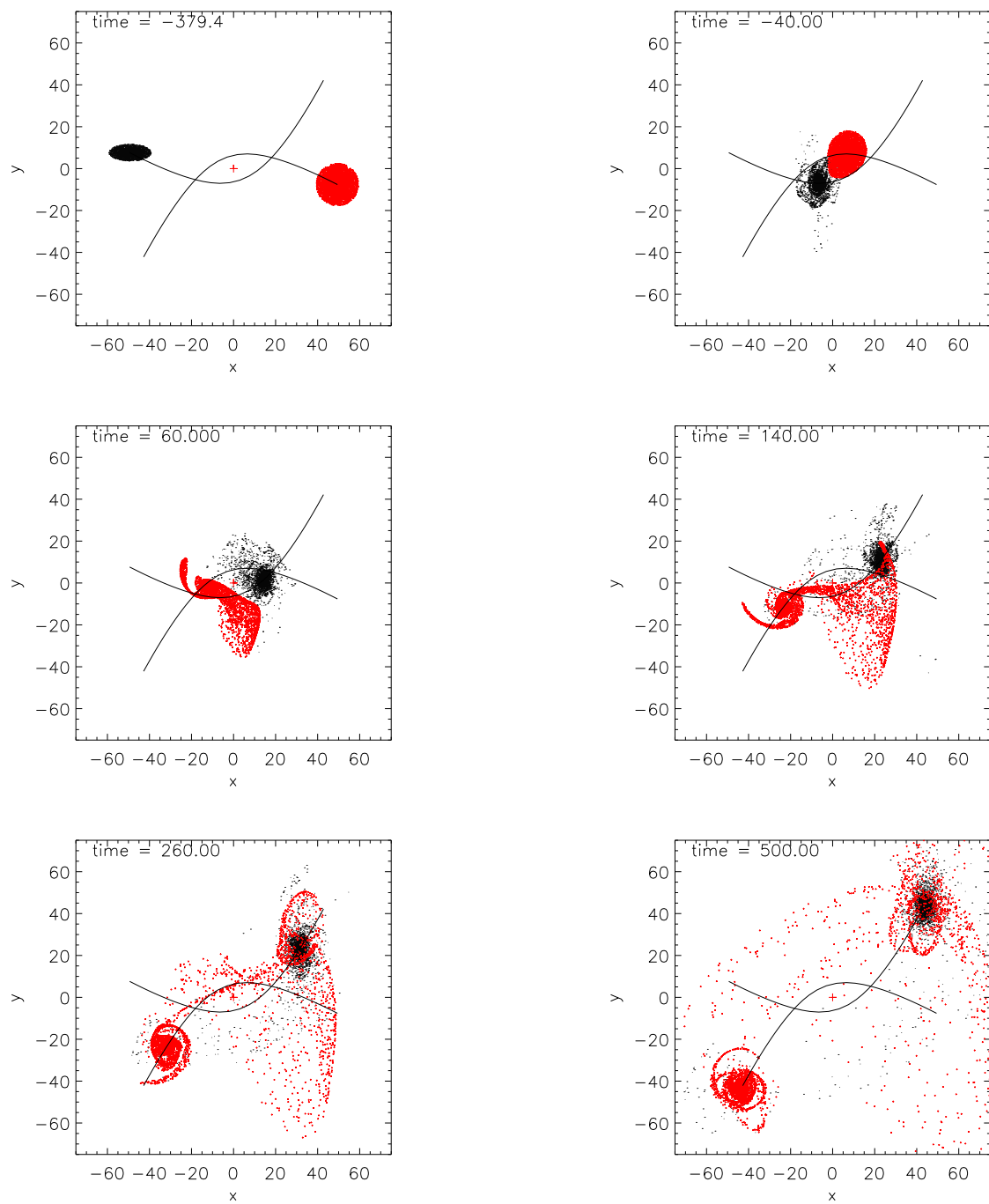


Abbildung 7.14.: Wechselwirkungssimulation mit einem triaxialen Halo (schwarz) (Achsenverhältnis 1-0.4-0.2) und einem sphärischen Halo (rot).

7.2.2. Drehung des triaxialen Halos

In diesem Teil der Studie wird untersucht, wie sich ein triaxialer Halo auf eine Wechselwirkung auswirkt, dessen Hauptachsen sich nicht in der Orbitebene befinden.

Oblater Halo Ein oblater Halo wurde auf verschiedenste Weise gedreht, angefangen mit Drehungen um die x-Achse, über Drehungen um die y-Achse, bis zu Drehungen um eine beliebige Achse. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen (7.15) bis (7.20) dargestellt. Je nach Drehung und Abplattung ist das Gravitationspotential in der Scheibenebene entweder kaum elliptisch oder stark elliptisch ausgeprägt. Eine geringe Drehung bei gleichzeitig geringer Abplattung des Halos, wie in Abbildung (7.15) dargestellt, ergibt ein ähnliches Bild wie ein nicht gedrehter Halo mit geringer Triaxialität, wie er in Abbildung (7.11) gegeben ist. Eine stärkere Abplattung erzeugt bei gleichzeitiger Drehung naturgemäß ein elliptischeres Potential in der Scheibenebene. Aus diesem Grund wird die Galaxie mit dem oblaten Halo bei der Wechselwirkung stärker zerzaust. In den Abbildungen (7.16) und (7.18) ist ein stark abgeplatteter Halo mit einem Achsenverhältnis von 0.3 einmal um die x-Achse und einmal um die y-Achse gedreht, sodass das Gravitationspotential in der Scheibenebene jeweils um 90° gedreht ist. Der Wechselwirkungspartner mit dem sphärischen Halo entwickelt sich erstaunlicherweise in beiden Fällen sehr ähnlich. Am stärksten beeinflusst wird das Material, dass den beiden Galaxien entrissen wird, wobei im Falle der Drehung um die y-Achse die Galaxie mit dem gedrehten oblaten Halo wesentlich mehr von dem Auswurfmaterial wieder einsammelt, als in dem Fall der Drehung um die x-Achse. Das kann durch die Galaxienbahn begründet werden. Aufgrund der Form der Halos ergibt sich eine unterschiedliche Anziehungskraft. Da die Bahn in einer Weise verläuft, dass die Galaxien sich eine Zeit lang stärker entlang der x-Achse, als entlang der y-Achse bewegen, liegt die Vermutung nahe, dass die Form der Halos entlang dieser beiden Achsen die Richtung und Stärke des Kraftvektors beeinflusst. Aus diesem Grund wurde eine Analyse der entstehenden Kräfte in einem Raumgebiet durchgeführt. Das Raumgebiet umfasst einen Durchmesser von 40 kpc und ist zentriert auf den Schwerpunkt der beiden Wechselwirkungspartner. In den Abbildungen (7.21) und (7.22) sind die Kraftvektoren für zwei verschiedene Zeitpunkte aus den Simulationen, die in Abbildung (7.16) und Abbildung (7.18) dargestellt wurden, zu sehen. In den Simulationen ist ersichtlich, dass das Auswurfmaterial, das von der Galaxie mit dem sphärischen Halo stammt, stärker zerstreut wird für den Fall, dass der Halo um die x-Achse gedreht wird. In Abbildung (7.21) werden die Kraftvektoren zum Zeitpunkt von zwanzig Millionen Jahren nach der engsten Begegnung darstellen. Durch den Vergleich der beiden Bilder kann festgestellt werden, dass die Kraft im nahen Bereich der Galaxie mit dem gedrehten oblaten Halo (in beiden Abbildungen links) je nach Rotation des Halos unterschiedlich ist. Die Abbildung (7.22), dabei handelt es sich um die Kraftvektoren zum Zeitpunkt von 60 Millionen Jahren nach der engsten Begegnung, bestätigt dieses Erkenntnis. Da bei einer Drehung eines oblaten Halos um die x-Achse das Potential in der Scheibenebene elliptisch wird, mit der großen Halbachse entlang der x-Achse und der kleinen Halbachse entlang der y-Achse, ist die Anziehungskraft dementsprechend bei

7. Ergebnisse

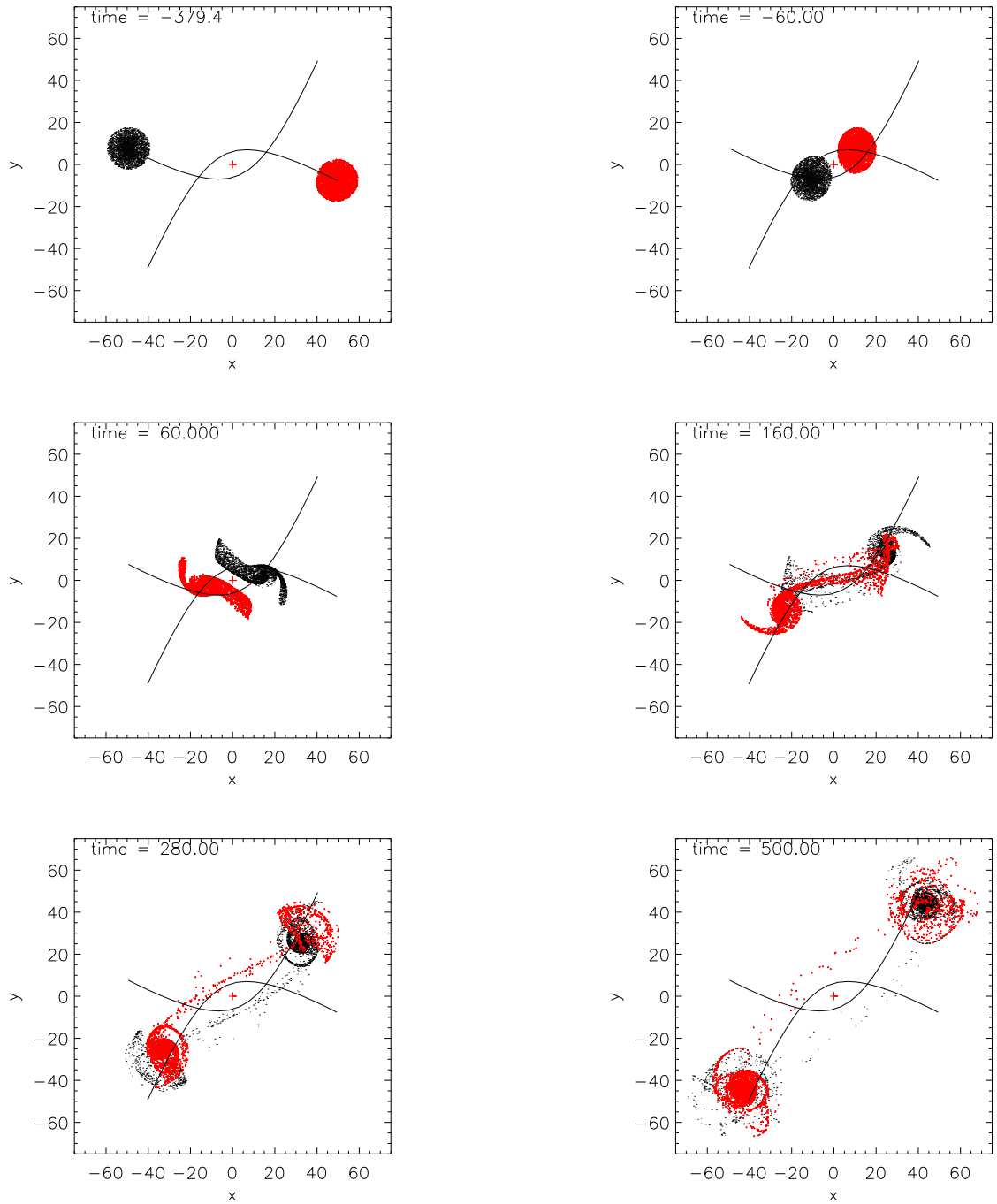


Abbildung 7.15.: Wechselwirkungssimulation mit einem gedrehten oblaten Halo (rot) und einem sphärischen Halo (schwarz). Die Abplattung des oblaten Halo beträgt 0.9. Der Halo wurde mit einem Winkel von 30° um die x-Achse gedreht.

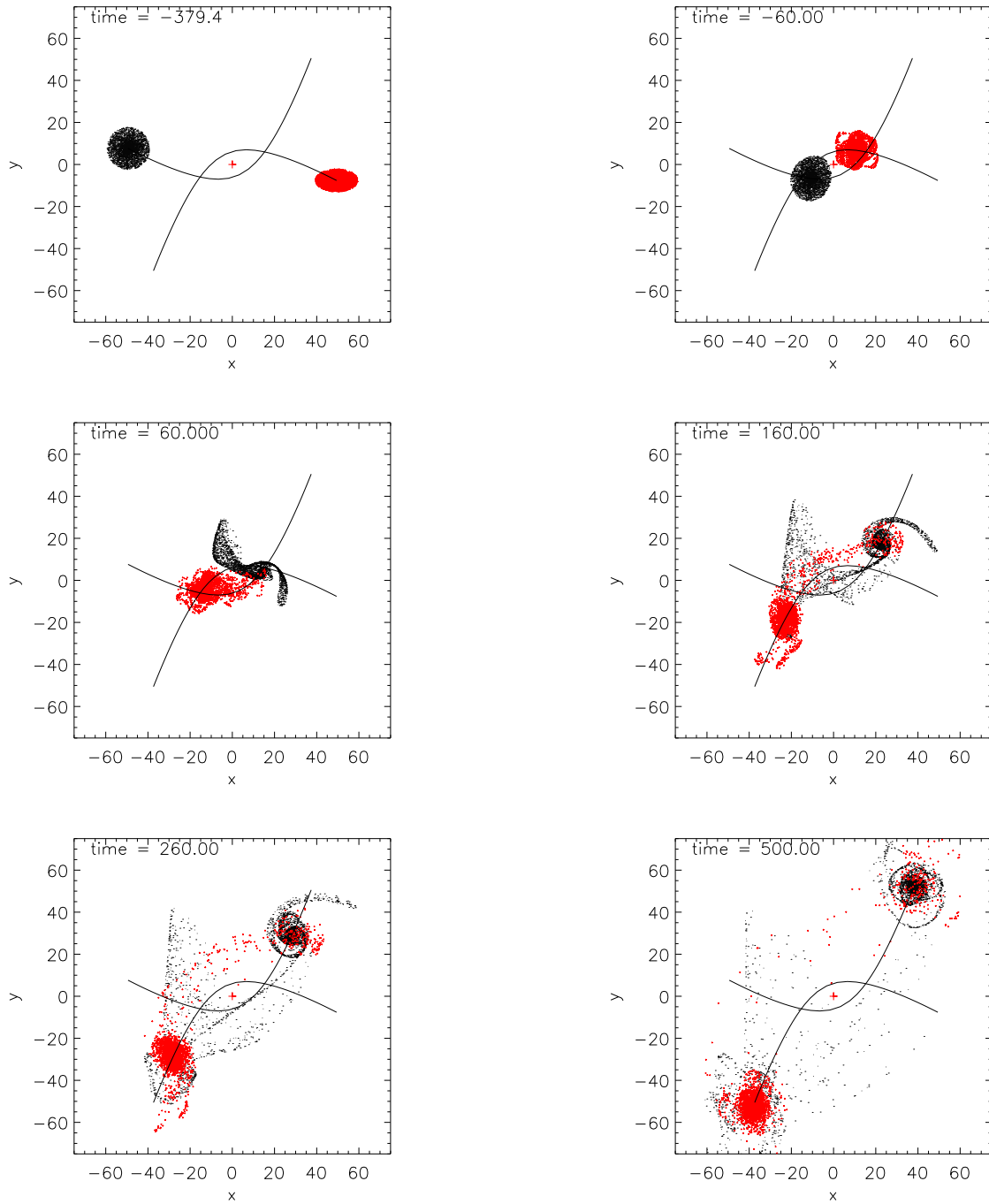


Abbildung 7.16.: Wechselwirkungssimulation mit einem gedrehten oblaten Halo (rot) und einem sphärischen Halo (schwarz). Die Abplattung des oblaten Halo beträgt 0.3. Der Halo wurde mit einem Winkel von 30° um die x -Achse gedreht.

7. Ergebnisse

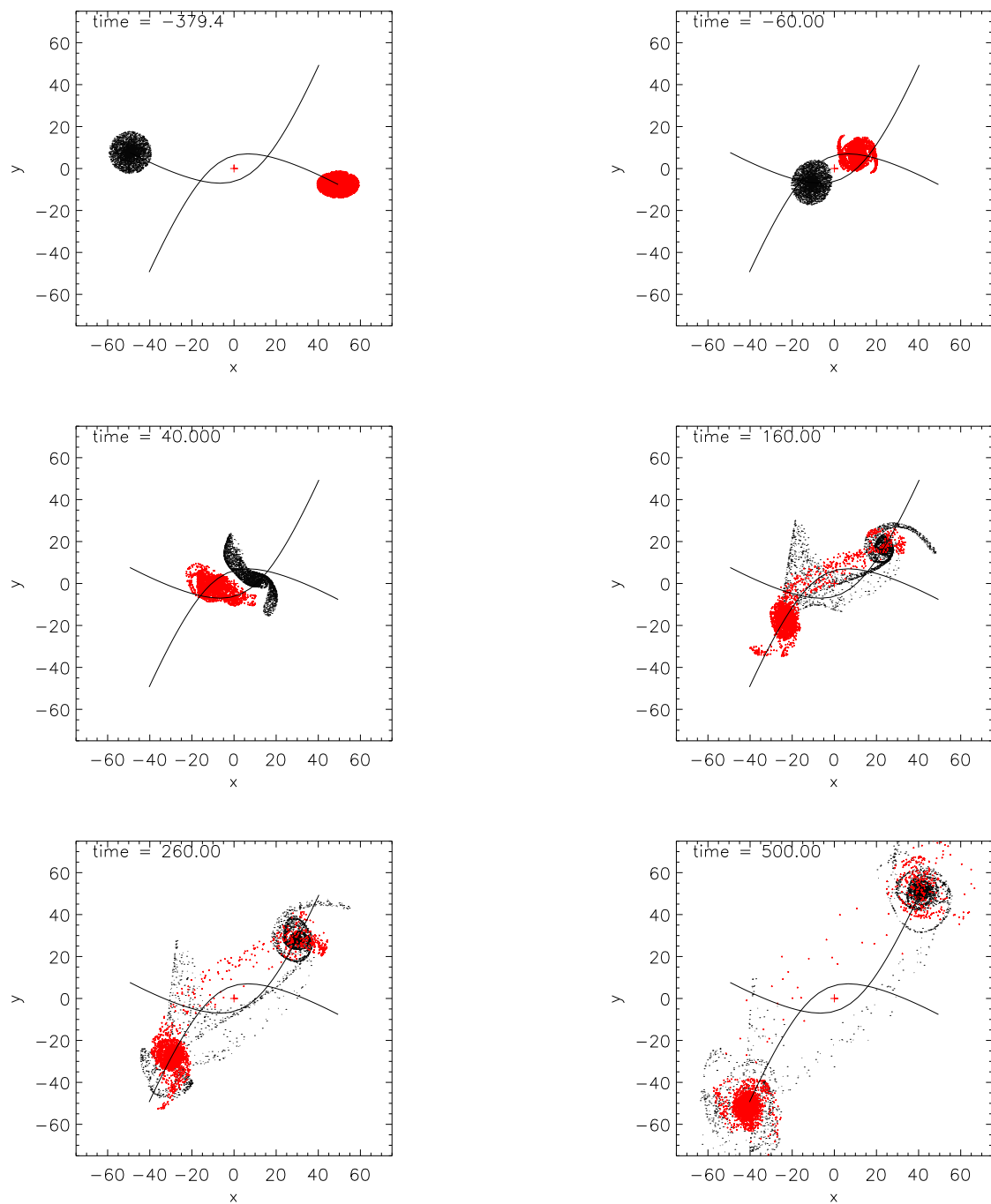


Abbildung 7.17.: Wechselwirkungssimulation mit einem gedrehten oblaten Halo (rot) und einem sphärischen Halo (schwarz). Die Abplattung des oblaten Halo beträgt 0.5. Der Halo wurde mit einem Winkel von 45° um die x-Achse gedreht.

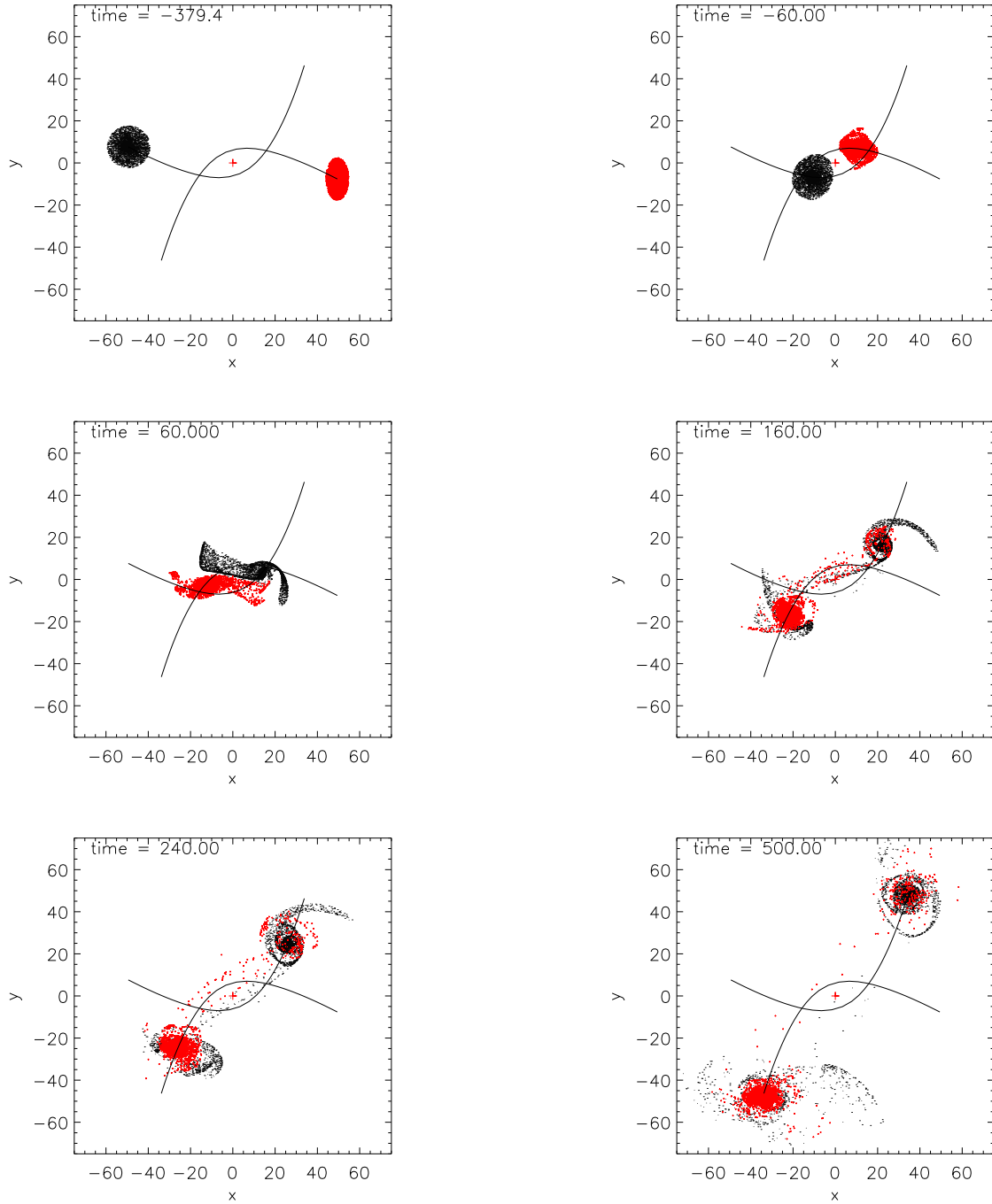


Abbildung 7.18.: Wechselwirkungssimulation mit einem gedrehten oblaten Halo (rot) und einem sphärischen Halo (schwarz). Die Abplattung des oblaten Halo beträgt 0.3. Der Halo wurde mit einem Winkel von 30° um die y-Achse gedreht.

gleichem Abstand zu Massenzentrum in y-Richtung größer. Da die entstehende Potentialellipse bei Rotation um die y-Achse im Vergleich dazu um 90° gedreht liegt, wird für einen Punkt an einer bestimmten Stelle in den beiden Fällen eine unterschiedliche Kraft wirken. Wie man in den Abbildungen (7.21) und (7.22) erkennen kann, ist der resultierende Kraftvektor an einer bestimmten Position im Falle des um die x-Achse gedrehten Halos in y-Richtung größer, als im Fall des um die y-Achse gedrehten Halos. Aus diesem Grund werden die Scheibenteilchen in einem Fall, nämlich in dem Fall der Drehung des Halos um die x-Achse (Abb. 7.16), stärker aus dem Gesamtsystem hinausgeschleudert, weswegen sie nicht mehr von der zweiten Galaxie aufgesammelt werden können.

Ein weiterer Fall wird in Abbildung (7.20) dargestellt, indem es aufgrund der Potentiale in der Scheibenebene zu starken Störungen in der Scheibe kommt, was zur Ausbildung von Ringen führt, noch bevor die Wechselwirkung beginnt. In diesem Fall wird der oblate Halo 70° um die x-Achse gedreht und erzeugt auf diese Weise ein extrem elliptisches Potential in der Scheibenebene. All diese Beispiele zeigen, welchen Einfluss die Abplattung, beziehungsweise die Triaxialität eines Halos auf eine Wechselwirkung haben kann. Eine genauere Untersuchung des Parameterraumes würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen, allerdings darf abschließend noch hinzugefügt werden, dass mit dem nun zur Verfügung stehenden Programm, jede mögliche Variante eines triaxialen Halos untersucht werden kann. Der Parameterraum enthält noch viele Möglichkeiten den Einfluss von asphärischen Systemen auf Wechselwirkungen zu untersuchen, darunter verschiedene Positionierungen der Halos zu den Scheiben, sowie zur Orbitebene. Desweiteren wurden in dieser Arbeit nur Wechselwirkungen von Galaxien gleicher Größe untersucht, womit eine weitere Parameterstudie unterschiedliche Massenverhältnisse beinhalten kann, oder auch unterschiedliche Größenverhältnisse.

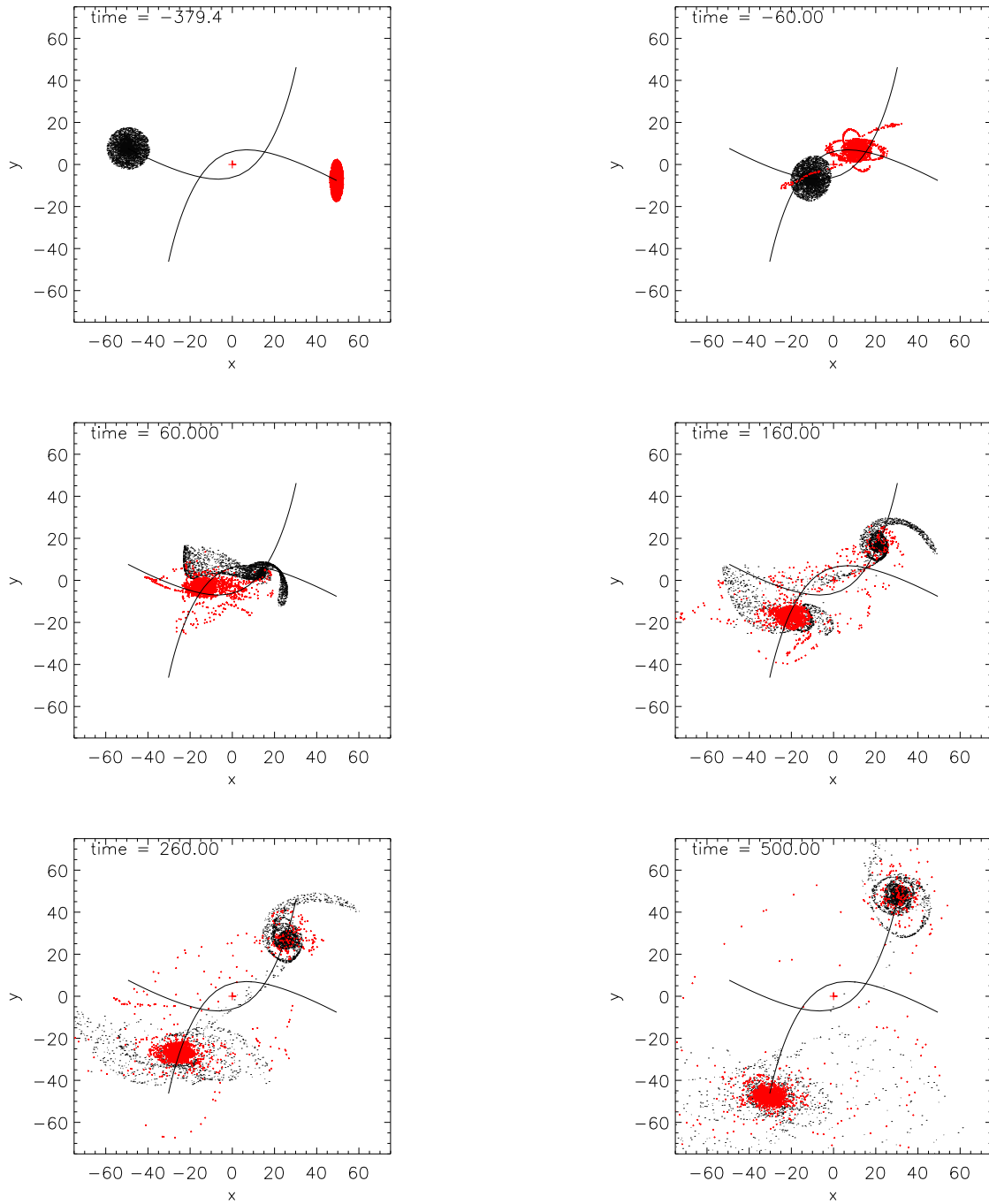


Abbildung 7.19.: Wechselwirkungssimulation mit einem gedrehten oblaten Halo (rot) und einem sphärischen Halo (schwarz). Die Abplattung des oblaten Halo beträgt 0.3. Der Halo wurde mit einem Winkel von 70° um die x-Achse gedreht.

7. Ergebnisse

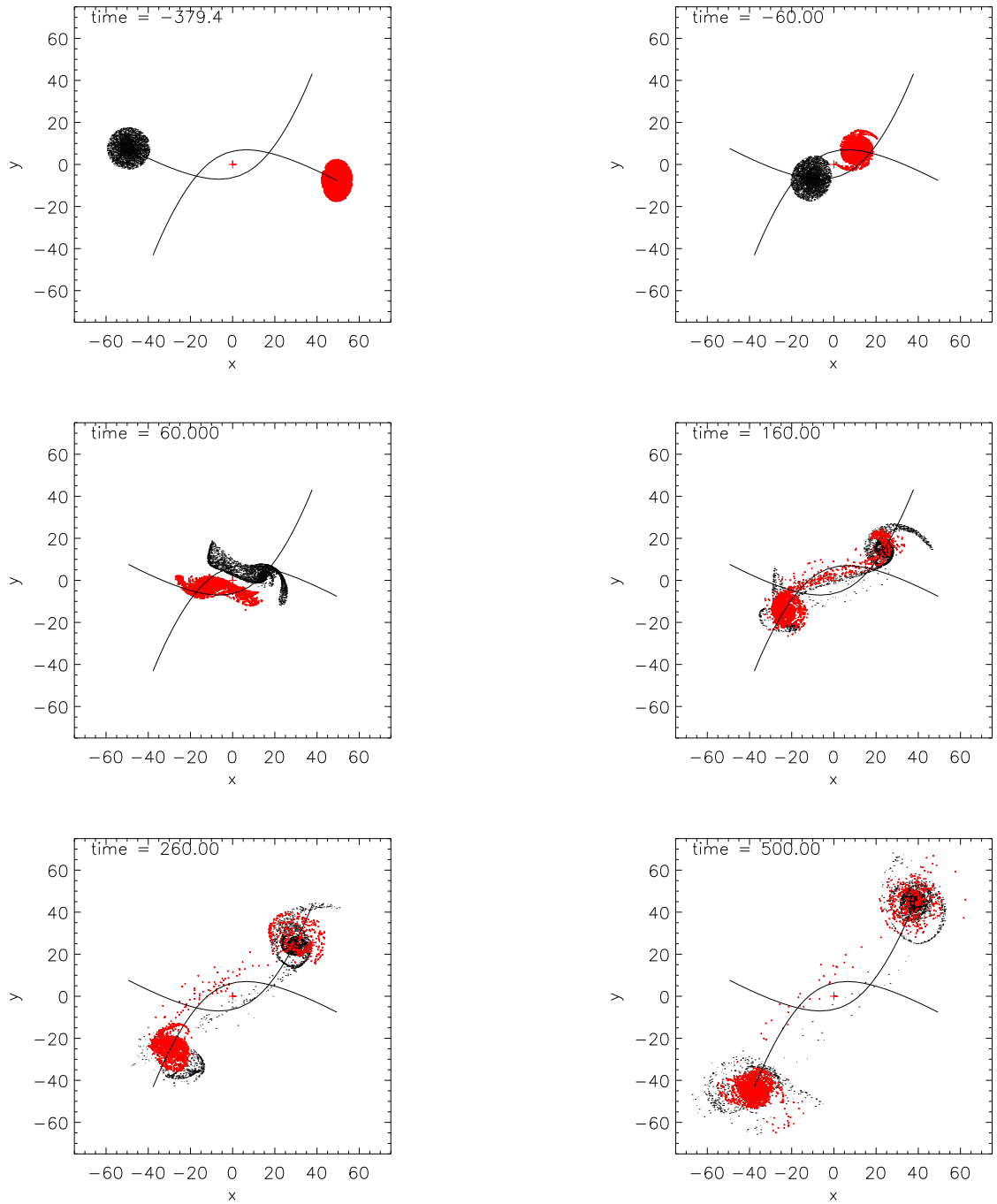


Abbildung 7.20.: Wechselwirkungssimulation mit einem gedrehten oblaten Halo (rot) und einem sphärischen Halo (schwarz). Die Abplattung des oblaten Halo beträgt 0.7. Der Halo wurde mit einem Winkel von 70° um die x-Achse gedreht.

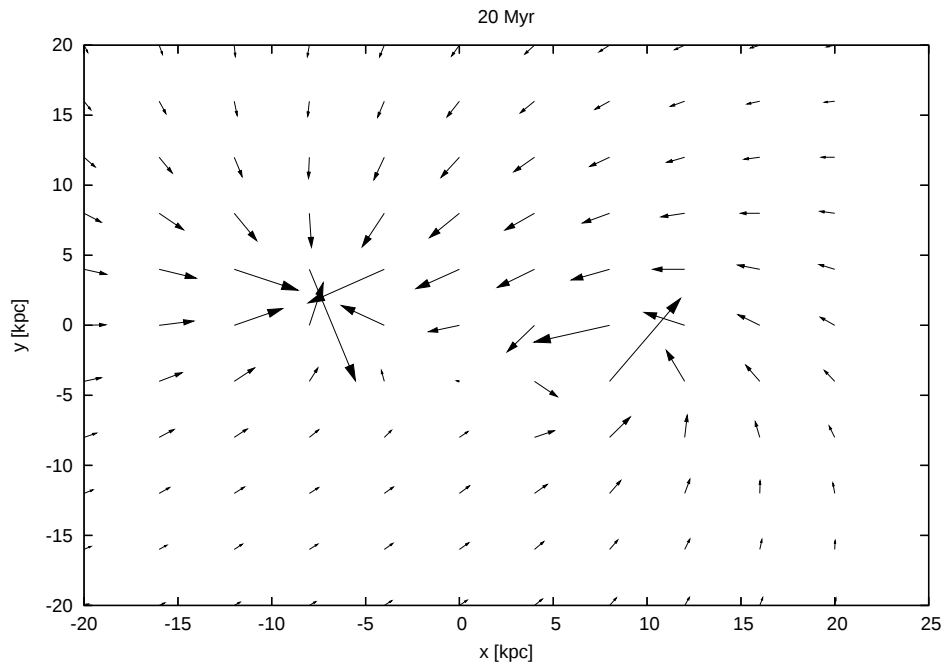
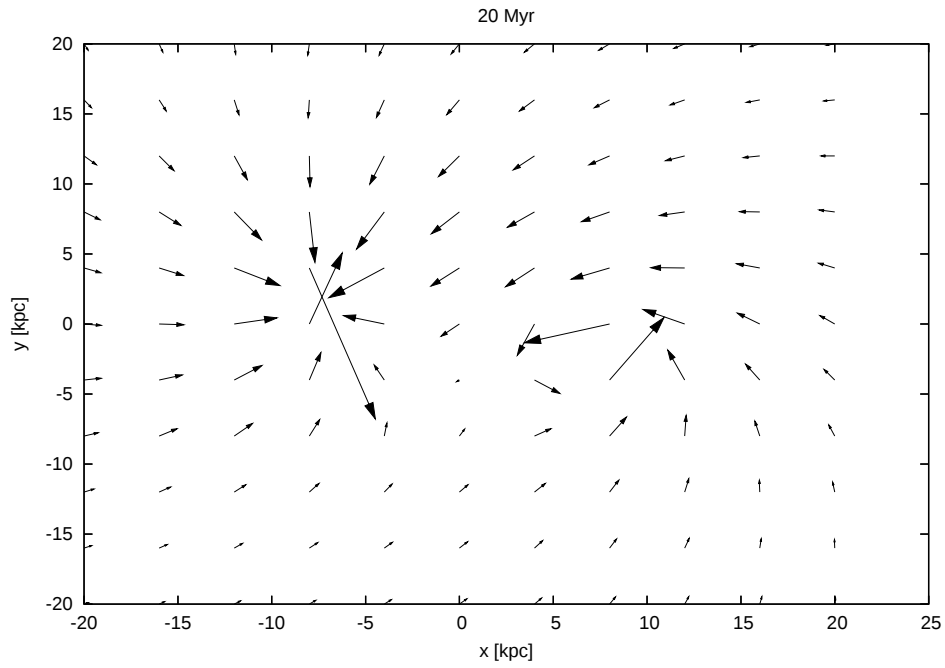


Abbildung 7.21.: Darstellung der Kraftvektoren zum Zeitpunkt von 20 Megajahren nach der engsten Begegnung. Die obige Grafik stellt die Situation aus Abbildung (7.16) dar und die untere aus Abbildung (7.18) .

7. Ergebnisse

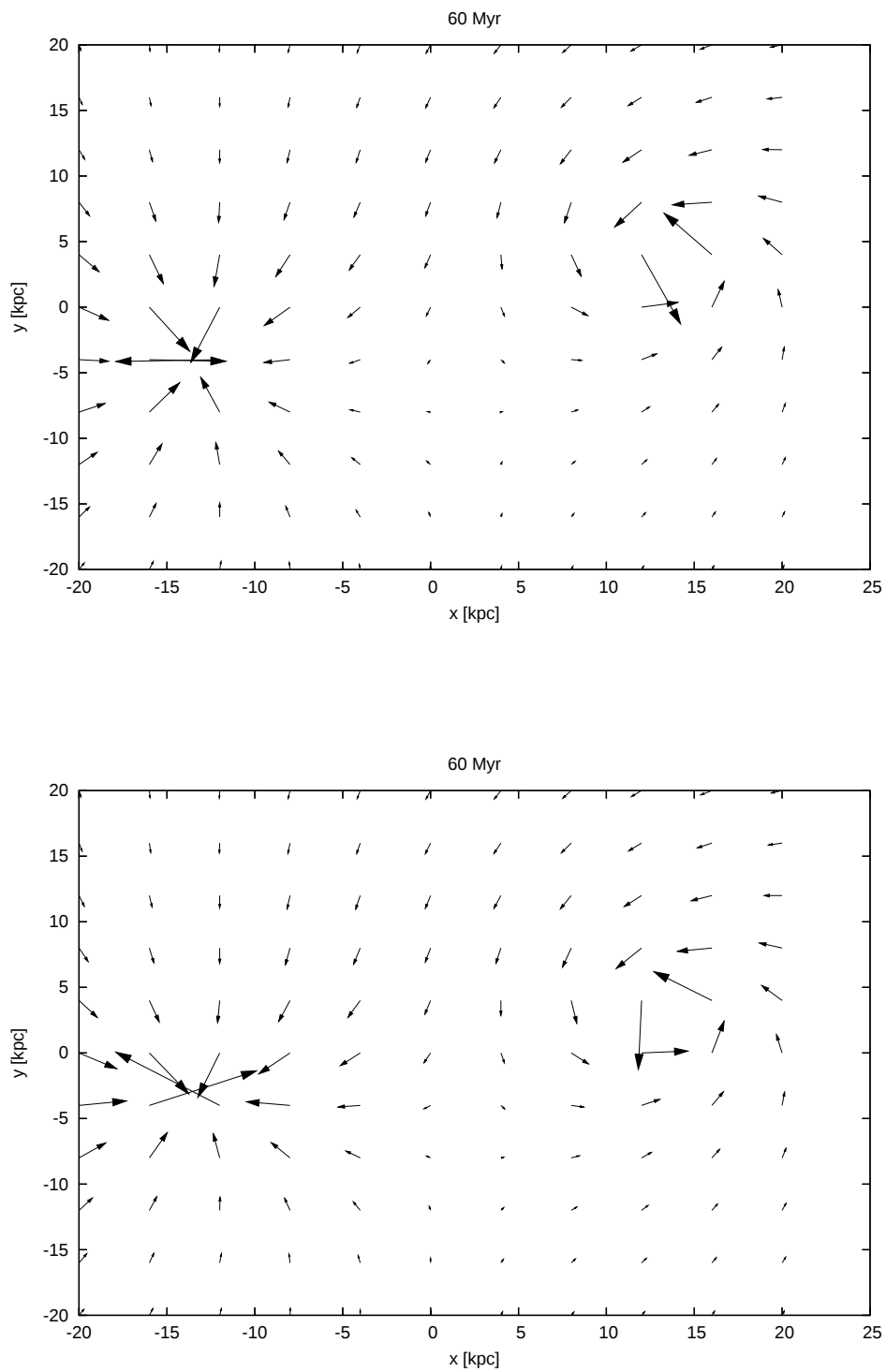


Abbildung 7.22.: Darstellung der Kraftvektoren zum Zeitpunkt von 60 Megajahren nach der engsten Begegnung. Die obige Grafik stellt die Situation aus Abbildung (7.16) dar und die untere aus Abbildung (7.18).

8. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es die Auswirkungen triaxialer Halos auf Wechselwirkungen zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurde ein bereits bestehendes eingeschränktes N-Körper Programm erweitert. In diesem Programm mit dem Namen MINGA - *Modelling Interacting Galaxies* - werden die Halos als starre Körper aufgefasst und definieren so das Potential in dem sich die Scheibenteilchen bewegen. Die neu hinzugefügten triaxialen Halos werden als aus einzelnen Massenpunkten bestehende Körper aufgefasst. Durch Summierung der einzelnen Kräfte auf jeden Massenpunkt wird die Gesamtkraft zwischen den beiden interagierenden Halos berechnet. Der Großteil der Arbeit bestand deshalb darin, Routinen in das bestehende Programm zu integrieren. Die Routinen behandeln das Aufsetzen der Halos, die Bewegung zweier Halos auf Grund der gegenseitigen gravitativen Anziehung, das Aufsetzen der Scheibenteilchen, sowie die Bewegung der Teilchen in den triaxialen Potentialen. Außerdem wurden viele weitere Routinen eingefügt, die zur Berechnung der Simulation notwendig waren, unter anderem Subroutinen zur Berechnung von Rotationen mittels Quaternionen, Routinen zur Bestimmung der Masse innerhalb einer Ellipsoidenschale, und Routinen zur Bestimmung der Schnittellipse einer Ebene mit einem Ellipsoiden. Zum Abschluss dieser Arbeit wurde eine Parameterstudie zur Auswirkung abgeplatteter und triaxialer Halos auf eine Wechselwirkung durchgeführt und eine morphologische Untersuchung der Ergebnisse vorgenommen. Für spezielle Ergebnisse wurde eine genauere Analyse durchgeführt. So konnte gezeigt werden, dass für das Verhalten zweier Scheiben in der Orbitebene nur das Potential in derselben Auswirkungen hat. Das Gravitationspotential in der Orbitebene verläuft entlang der elliptischen Koordinate m nach aussen, analog zum radialen Verlauf sphärisch symmetrischer Potentiale, und wirkt dann am stärksten, wenn die Verbindungslinie eines Teilchens zum Galaxienzentrum entlang der kleinen Halbachse dieses Scheibenpotentials liegt. Das Resümee dieser Diplomarbeit ist, dass es gelungen ist eine Erweiterung eines bestehenden Programms zu vollenden, wodurch in Zukunft Wechselwirkungssimulationen unter Berücksichtigung triaxialer Halos möglich sind.

A. Programmcode

Beschreibung der veränderten, beziehungsweise hinzugefügten, ProgrammROUTINEN von MINGA:

galinter.f: Diese Subroutine führt die Berechnung des N-Körper-Problems durch. Für die Implementation eines triaxialen Halos wurden hier einige Initialisierungsroutinen hinzugefügt, welche die ursprünglichen Routinen ersetzen.

- `setrho0halo_triax.f` ersetzt `setrho0halo.f`
- `first_step.f` ersetzen `setforcehalo.f`
- `setgal_triax.f` ersetzt `setgal_int.f`
- `setup_triax.f` ersetzt `setup.f`

setrho0halo_triax.f: Berechnet die Normalisierungskonstante ρ_0 für eine triaxiale Konfiguration.

first_step.f: Benutzt die Subroutine *direct_setup.f* zum Aufsetzen des Teilchenhalos, sowie zur Berechnung dessen Trägheitstensors.

direct_setup.f: Ruft die Subroutine *distri* auf, welche die Teilchen eines Halos entweder auf einem regulären Gitter, oder mit einer Zufallsverteilung aufsetzt. Anschließend wird *traegheit* aufgerufen und der zu den Halos gehörige Trägheitstensor berechnet.

distri.f: Setzt die Teilchenhalos in der gewünschten Form auf. Die Variable *ireg* bestimmt welche Art der Verteilung verwendet wird. Für den Wert 0 wird eine zufällig verteilte Konfiguration gewählt und für den Wert 1 ergibt sich eine regelmäßige Konfiguration.

traegheit.f: Berechnet den Trägheitstensor der Halos unter der Annahme eines in die Hauptachsen gelegten Koordinatensystems. Unter der Voraussetzung, dass

die Haloteilchen alle die gleichen Masse aufweisen, hat der Trägheitstensor folgende Form:

$$T_{ij} = M_{\text{galaxie}} \sum_k \begin{pmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -x_k y_k & x_k^2 + z_k^2 & -y_k z_k \\ -x_k z_k & -y_k z_k & x_k^2 + y_k^2 \end{pmatrix}$$

wobei die Indices k die einzelnen Haloteilchen bezeichnen über die summiert wird und die Indices i, j die Zeile, bzw. Spalte der Ellipse kennzeichnen.

init_lage (in first_step.f): Die Halos werden mittels Quaternionen gedreht. Die Ausgangslage des Halos wird über eine in der Inputdatei vorgegebene Drehachse und einen ebenso vorgegebenen Winkel bestimmt. Daraus ergibt sich folgende Anfangslage:

Für einen gegebenen Winkel θ und eine gegebene Drehachse $\vec{r} = (a, b, c)$ ergibt sich die zur Drehung benutzte Quaternion zu (siehe auch Anhang C):

$$\begin{aligned} q_s &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ q_v &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{r} \end{aligned}$$

setgal_triax.f: Diese Routine bestimmt die Orbits der Galaxien. Zu diesem Zweck werden Differentialgleichungen, die in dgl_triax.f bestimmt werden, gelöst. Die Positionen, sowie die jeweilige Lage im Raum, der Halos werden tabelliert und später mittels Interpolation ausgelesen.

dgl_triax.f: Hier befinden sich die zu lösenden Differentialgleichungen, die zur Bestimmung der Galaxienbahn vonnöten sind. Die Differentialgleichungen wurden in Kapitel 4.3.4 beschrieben. Diese Routine ruft nacheinander folgende Subroutinen auf:

- galvec.f: Liest die momentanen Galaxienpositionen aus und gibt sie in den körpereigenen Koordinaten des ersten Halos aus.
- bodyposition.f: Liest die momentane Lage der beiden Halos aus und berechnet die Positionen der Haloteilchen in den jeweiligen Koordinatensystemen des anderen Körpers. Diese Information wird für die Berechnung der Drehmomente benötigt, sowie für die Routine setflag.
- setflag.f: Testet, ob sich ein Haloteilchen innerhalb des anderen Halos befindet und falls ja wird die Masse innerhalb der Ellipsoidenschale berechnet.
- forcetorque.f: Errechnet die Kraft zwischen den Halos, sowie die Drehmomente, die auf beide wirken.

A. Programmcode

- `quat_accel` (in `quaternionen.f`): Dreht den errechneten Kraftvektor in das inertielle Koordinatensystem.

galvec.f: siehe `dgl_triax.f`

bodyposition.f: Diese Routine liest die Variable *lage* ein. Diese Variable enthält eine Drehquaternion, mit der der Halo in die momentane Lage gedreht wird. Für die Drehung werden mehrere Subroutinen benutzt, die in *quaternionen.f* beschrieben werden: *quatnorm*, *quat_fullrotation*, *quat_position*

setflag.f: Die Entfernung der Teilchen wird mit den ellipsoidalen Koordinaten (siehe Kapitel 4.3) bestimmt. Für den Fall, dass das Teilchen sich innerhalb des anderen Halos befindet, wird die Masse, die sich innerhalb der Teilchenposition befindet, mit der Funktion *masshalo_triax.f* bestimmt.

masshalo_triax.f: In dieser Funktion wird die Masse berechnet, die sich innerhalb einer bestimmten Position befindet. Die Masse wird nach Gleichung (4.4) berechnet.

forcetorque.f: Die Kräfte auf jedes einzelne Teilchen werden bestimmt und dann aufsummiert. Da auch die Drehmomente bestimmt werden, müssen die Einzelkräfte für die Teilchen beider Körper bestimmt werden. Die Kraftberechnung nutzt die in der Routine *setflag.f* tabellierte Masse, welche sich innerhalb der jeweiligen Position befindet.

quaternionen.f: In dieser Datei befinden sich sämtliche für die Quaternionen relevanten Subroutinen. Die Quaternionen werden in Anhang C beschrieben. Die einzelnen Subroutinen in dieser Datei gliedern sich wie folgt:

- `quat_position`: Diese Subroutine führt eine Drehung eines Körpers durch. Es werden die Anzahl der Teilchen, die die Rotation bestimmende Quaternion, sowie die Teilchenpositionen übergeben. Die Drehung wird wie in Anhang C.2 beschrieben durchgeführt. Zu diesem Zweck werden die weiteren Subroutinen *quatnorm*, *quatmul* und *quatinv* aufgerufen.
- `quat_fullrotation`: Diese Routine wird genutzt um zwei Drehungen hintereinander durchzuführen und zwar im speziellen Fall eine Drehung aus einem körpereigenen System ins Inertialsystem und danach ins körpereigene System des anderen Körpers. Die Routinen *quatinv* und *quatmul* werden hierfür aufgerufen.
- `quat_accel`: Diese Routine dient der Rotation des berechneten Kraftvektors in das Inertialsystem. Dazu werden die Routinen *quatinv* und *quat_position* benutzt.
- `quatinv`: Errechnet die Inverse einer Quaternion.

- **quatmul:** Errechnet das Ergebnis einer Quaternionenmultiplikation.
- **quatnorm:** Normiert eine Quaternion.

orbint.f: Diese Subroutine wurde geändert um die Bewegung der Teilchen innerhalb eines triaxialen Körpers zu berechnen. Zu diesem Zweck wird hier statt der Routine `dgl_testpart` die Routine `dgl_testpart_tri` aufgerufen.

dgl_testpart_tri.f: Hier wird die Bewegungsgleichung der Teilchen gelöst, falls ein triaxialer Halo vorgegeben ist. Diese Routine ruft die Subroutinen *galpos* (wird nicht beschrieben, da sie bereits vorhanden war - sie liest die derzeitigen Galaxienpositionen aus), *slerp*, *quat_position*, *quatinv*, sowie die Funktion *masshalo_tri* auf. Der Ablauf funktioniert folgendermaßen: Die aktuellen Galaxienpositionen, sowie die aktuelle Lage der Halos wird aus den in *setgal_tri* erstellten Tabellen entnommen. Anschließend wird die Position der Teilchen bezüglich der Halos eruiert und die sich innerhalb der Teilchenposition befindliche Halomasse (Masse des Ellipsoiden) bestimmt. Damit wird die Kraft, die ein Halo auf das Teilchen ausübt berechnet. Die beiden resultierenden Kraftvektoren werden in das Inertialsystem gedreht und danach summiert.

slerp.f: Berechnet die derzeitige Lage der Körper mittels einer sphärisch linearen Interpolation zwischen zwei Quaternionen. Die dafür nötige Prozedur wird in Anhang C.1.1 beschrieben.

setup_tri.f: Da die Teilchen sich in einem triaxialen Potential befinden, sind die Equipotentiallinien auf denen sie sich bewegen Ellipsen. Diese Ellipsen müssen berechnet werden um die Teilchen aufsetzen zu können. Zu diesem Zweck wird die Routine *planeellipsoid* aufgerufen. Übergeben werden die Achsen des Ellipsoids, sowie der Normalvektor der Scheibenebene, der zuvor in das Koordinatensystem des Ellipsoiden transformiert wird. Aus den erhaltenen Halbachsen wird nun die Ellipse konstruiert auf die die Teilchen aufgesetzt werden. Anschließend wird an jedem Punkt die Tangente angelegt um die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zu bestimmen. Dies erledigt die Subroutine *tangente*.

tangente (in setup_tri.f): Diese Routine berechnet den Einheitsvektor in Richtung der Tangente. Der Einheitsvektor wird so angelegt, dass die Richtung immer gegen den Uhrzeigersinn verläuft.

planeellipsoid.f: Hier wird die Schnittellipse berechnet, die aus einem Ellipsoiden und einer Ebene entsteht. Die Formel für die Berechnung der Schnittellipse wird

A. Programmcode

in Anhang B hergeleitet. Falls die Ebene in einer der Hauptachsen des Ellipsoiden liegt, ergibt sich die Schnittellipse sofort aus den Achsen des Ellipsoiden, ansonst müssen die Halbachsen gemäß der Formel aus Anhang B berechnet werden.

B. Herleitung der Schnittellipse einer Ebene und eines Ellipsoiden

Gleichung des Ellipsoiden:

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad (\text{B.1})$$

Gleichung der Ebene:

$$dx + ey + fz = 0 \quad (\text{B.2})$$

Die beiden Gleichungen (B.1) und (B.2) ergeben als Schnitt eine Ellipse. Die Bedingung

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{B.3})$$

muss maximal werden, um die Lage der Hauptachse der Schnittellipse bestimmen zu können. Aus der Ebenengleichung (B.2) wird z ausgedrückt und in die Ellipsoidengleichung (B.1), sowie in (B.3) eingesetzt. Danach wird aus der entstandenen Ellipsoidengleichung y ausgedrückt und wiederum in (B.3) eingesetzt. Das Ergebnis ist eine Funktion, die nur noch von x abhängig ist.

$$g(x) = x^2 + \frac{b^2(abdex - cfK(x))^2}{L^2} + \frac{c^2(acdfx - beK(x))^2}{L^2} \quad (\text{B.4})$$

mit

$$\begin{aligned} K(x) &= \sqrt{Bx^2 + C} \\ B &= -a^2 d^2 - b^2 e^2 - c^2 f^2 \\ C &= am^2 L \\ L &= a(b^2 e^2 + c^2 f^2) \end{aligned}$$

Da $g(x)$ maximal werden muss, wird die Ableitung gebildet:

$$\frac{dg}{dx} = Ax + K(x)E + \frac{x^2 BE}{K(x)} \quad (\text{B.5})$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 2 + \frac{2}{L^2}(b^2 c^2 B(e^2 + f^2) + a^2 d^2 (b^4 e^2 + c^4 f^2)) \\ E &= \frac{2abcdef(c^2 - b^2)}{L^2} \end{aligned}$$

B. Herleitung der Schnittellipse einer Ebene und eines Ellipsoiden

Abschließend wird Gleichung B.5 mit 0 gleich gesetzt und nach x aufgelöst. Die vier Lösungen für x ergeben sich zu:

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{P - R}$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{P + R}$$

mit

$$P = -\frac{C}{B}$$

$$R = \frac{AC}{B\sqrt{A^2 - 4BE^2}}$$

Durch einsetzen dieser 4 Lösungen in $g(x)$ ergeben sich die große und kleine Halbachse der Ellipse (die zwei anderen Lösungen sind die Wendepunkte):

$$x_{1,2} \rightarrow g(x_{1,2}) = \frac{\pm G_1 + H_1}{2L^2}$$

$$x_{3,4} \rightarrow g(x_{3,4}) = \frac{\pm G_2 + H_2}{2L^2}$$

mit

$$G_{1,2} = EL^2 \sqrt{P \mp R} \sqrt{BP + 2C \mp BR}$$

$$H_{1,2} = L^2 (P \mp R) + (f^2 + e^2) b^2 c^2 (2C + B(P \mp R)) + a^2 d^2 (b^4 e^2 + c^4 f^2) (P \mp R)$$

Mit diesen Werten werden unter zuhelfenahme der Anfangsgleichungen die Endpunkte in y und z errechnet.

C. Quaternionen

Quaternionen sind, ähnlich den komplexen Zahlen, eine Erweiterung der reellen Zahlen. Im Gegensatz zu den komplexen Zahlen haben wir es hier nicht nur mit einer imaginären Zahl zu tun, sondern mit deren drei. Dies ermöglicht es unter anderem komplexe Vorgänge im dreidimensionalen Raum zu beschreiben. Hier ein paar Eigenschaften der Quaternionen:

1. $q = \omega + ix + jy + kz$
2. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
3. $q' = \omega - ix - jy - kz \dots$ ist die konjugierte Quaternion
4. $\|q\| = \sqrt{qq'} = \sqrt{\omega^2 + x^2 + y^2 + z^2} \dots$ ist die Norm
5. $q^{-1} = q'/qq' \dots$ ist der Kehrwert

Quaternionen sind auffassbar als ein Konglomerat bestehend aus einem Skalar und einem Vektor $q = (s, \vec{v})$ mit $s = \omega$ und $\vec{v} = (x, y, z)$

C.1. Recheneigenschaften:

Quaternionen können addiert, sowie multipliziert werden. Die folgenden Regeln sind dabei zu beachten.

1. $q_1 + q_2 = (\omega_1 + \omega_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$
2. $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3 \dots$ assoziative Addition
3. $q_1 q_2 = (\omega_1 \omega_2 + \vec{v}_1 \vec{v}_2, \omega_1 \vec{v}_2 + \omega_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$
4. $q_1 q_2 \neq q_2 q_1 \dots$ keine multiplikative Kommutation

C.1.1. Interpolation zwischen zwei Quaternionen

Diese Prozedur wurde in Shoemake (1985) vorgestellt und wird hier kurz erläutert. Einheitsquaternionen bilden eine Sphäre im vierdimensionalen Raum. Daraus folgt, dass eine Interpolation zwischen zwei Quaternionen auf dem Großkreis, welcher die beiden Punkte auf der Sphäre verbindet, stattfinden muss. Das Ergebnis ist eine sphärische lineare Interpolation, in Kurzform *Slerp*. Die Interpolationsformel ergibt sich zu:

$$\text{Slerp}(q_1, q_2; u) = \frac{\sin((1-u)\theta)}{\sin \theta} q_1 + \frac{\sin(u\theta)}{\sin \theta} q_2$$

wobei q_1, q_2 die Anfangs-, beziehungsweise die Endquaternion, zwischen denen interpoliert wird, bezeichnet und u den Parameter darstellt, der im Intervall $[0, 1]$ läuft. Der Winkel θ ergibt sich aus dem Skalarprodukt der beiden Quaternionen: $\langle q_1 q_2 \rangle / 2 = \cos \theta$.

C.2. Drehung mittels Quaternionen:

Quaternionen erleichtern die mathematische Prozedur der Drehung eines Vektors im dreidimensionalen Raum. Der große Vorteil in der Verwendung der Quaternionen zur Darstellung einer Drehung liegt in der Vermeidung des "gimbal-locks" begründet. Bei einer Darstellung mittels Eulerwinkeln (siehe Kapitel D), oder einer ähnlichen Form, ist eine eindeutige Abbildung nicht möglich, deswegen kann es bei verschiedenen Winkeln zu Problemen bei der Berechnung der Lage eines Körpers kommen. Weiters besteht bei der Rechnung mit Quaternionen die Möglichkeit um eine beliebige Achse zu drehen.

Prozedur der Drehung mittels Quaternionen: Sei der Einheitsvektor $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ die Drehachse und Φ der Winkel, um den gedreht werden soll, dann wird ein beliebiger Vektor $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ wie folgt gedreht:

Zuerst wird das für die Drehung benötigte Quaternion bestimmt:

$$q = (q_s, \vec{q}_v)$$

mit

$$q_s = \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right)$$

und

$$\vec{q}_v = \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) * \vec{d}$$

Weiters wird $\vec{r}$ auf ein Quaternion erweitert, indem der Skalarteil 0 gesetzt wird, d.h. $r_q = (0, \vec{r})$. Dann ergibt sich die Drehung zu:

$$r_{q,\text{rot}} = q r_q q'$$

mit Quaternionenmultiplikation wie oben beschrieben.

C.3. Herleitung der Differentialgleichung für die Körperposition

Diese Herleitung basiert auf der Arbeit von David Baraff (1997) und wurde von Mark Ioffe freundlicherweise in einer eleganten Schreibweise zur Verfügung gestellt¹.

Nehmen wir einen zeitabhängigen Ortsvektor $R(t)$, der sich wie folgt darstellen lässt:

$$R(t) = q(t)R_0q^{-1}(t) \quad (C.1)$$

Hierbei wird der zeitabhängige Vektor in einen zeitunabhängigen Ausgangsvektor R_0 und die ihn drehenden Quaternionen zerlegt.

$$q(t)R_0 = R(t)q(t) \quad (C.2)$$

$$q^{-1}(t)R(t) = R_0q^{-1}(t) \quad (C.3)$$

Mit Hilfe der letzten beiden Relationen wird die Ableitung von Gleichung C.1 umgeformt zu:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt}R_0q^{-1}(t) + q(t)R_0\frac{dq^{-1}(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt}q^{-1}(t)R(t) + R(t)q(t)\frac{dq^{-1}(t)}{dt} \quad (C.4)$$

Desweiteren bedienen wir uns der Norm von Quaternionen,

$$q(t)q^{-1}(t) = 1 \quad (C.5)$$

welche nach der Zeit abgeleitet wird

$$\frac{dq(t)}{dt}q^{-1}(t) + q(t)\frac{dq^{-1}(t)}{dt} = 0. \quad (C.6)$$

Nach Einsetzen von (C.6) ändert sich die Gleichung (C.4) auf

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{dq(t)}{dt}q^{-1}(t)R(t) + R(t)\frac{dq(t)}{dt}q^{-1} \quad (C.7)$$

und lässt sich mit Hilfe der Relation $p(t) = dq(t)/dt * q^{-1}(t)$ und den Regeln der Quaternionenalgebra weiter vereinfachen.

$$p(t)R(t) - R(t)p(t) = 2(\vec{p}_v \times \vec{R}_v) \quad (C.8)$$

Desweiteren gilt für die Geschwindigkeit eines Körpers

$$\frac{dR_v(t)}{dt} = \vec{\omega}_v(t) \times \vec{R}_v(t) \quad (C.9)$$

¹<http://www.euclideanspace.com/physics/kinematics/angularvelocity/QuaternionDifferentiation2.pdf>

C. Quaternionen

was wiederum zu

$$\vec{\omega}_v = 2\vec{p}_v \quad (\text{C.10})$$

führt. Schlussendlich ergibt sich die Differentialgleichung C.12 zur Bestimmung der Rotation der Körper im Raum.

$$\omega(t) = 2 \frac{dq(t)}{dt} q^{-1}(t) \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{2} \omega(t) q(t) \quad (\text{C.12})$$

D. Eulerwinkel

Der Vollständigkeit halber wird hier noch die traditionelle Methode mittels der Eulerwinkel gezeigt (für eine genauere Beschreibung siehe beispielsweise Landau & Lifschitz, 1962). Drehungen basierend auf den Eulerwinkeln werden mit Rotationsmatrizen durchgeführt. Jede beliebige Lage eines Körpers kann als das Ergebnis dreier hintereinander durchgeführter Rotationen betrachtet werden, wobei die Eulerwinkel die jeweiligen Winkel einer einzelnen Rotation sind. Problematischerweise gibt es unter den Wissenschaftlern bis dato keine Einigung auf eine allgemein gültige Konvention, welche Reihenfolge angewendet wird. Gleichung (D.1) ist zum Beispiel das Ergebnis einer Drehung um die z-Achse, gefolgt von einer Drehung um die neu geschaffene y-Achse, sowie abgeschlossen durch eine Drehung um die wiederum neue z-Achse. Allerdings ist die Reihung yzy willkürlich gewählt. Andere mögliche Kombinationen sind zxz (siehe Abb. D.1), xyz, xyx usw... . Insgesamt gibt es 12 gleichwertige Möglichkeiten.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \Psi \cos \Theta \cos \Phi - \sin \Psi \sin \Phi & \cos \Psi \cos \Theta \sin \Phi + \sin \Psi \cos \Phi & -\cos \Psi \sin \Theta \\ -\sin \Psi \cos \Theta \cos \Phi - \cos \Psi \sin \Phi & -\sin \Psi \cos \Theta \sin \Phi + \cos \Psi \cos \Phi & \sin \Psi \sin \Theta \\ \sin \Theta \cos \Phi & \sin \Theta \sin \Phi & \cos \Theta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Es besteht die Möglichkeit die Winkelgeschwindigkeit ω mittels der Eulerwinkel darzustellen, was der Darstellung der Winkelgeschwindigkeit eines Körpers in einem gedrehten Koordinatensystem entspricht. Hierfür werden die einzelnen Komponenten der Winkelgeschwindigkeit transformiert und schlussendlich addiert.

$$\begin{aligned}
 \omega_\Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Theta & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Theta & 0 & \cos \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -\dot{\Phi} \cos \Psi \sin \Theta \\ \dot{\Phi} \sin \Psi \cos \Theta \\ \dot{\Phi} \cos \Theta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\omega_\Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\Theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \sin \Psi \\ \dot{\Theta} \cos \Psi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

$$\omega_\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix}$$

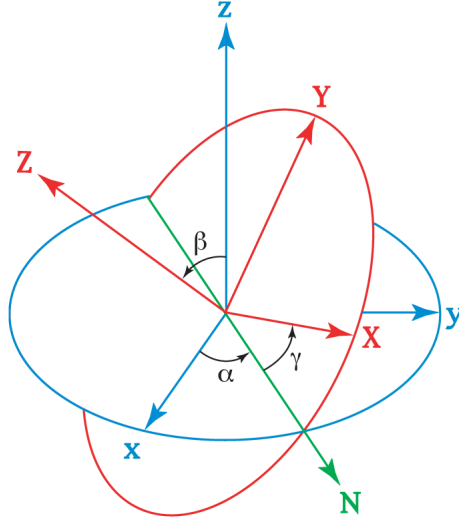


Abbildung D.1.: Euler-Winkel in zxz-Konvention (Autor Timofei Shatrov)

Zusammengesetzt ergibt das

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \sin \Psi - \dot{\Phi} \cos \Psi \sin \Theta \\ \dot{\Theta} \cos \Psi + \dot{\Phi} \sin \Psi \sin \Theta \\ \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

Daraus lassen sich die Ableitungen der Eulerwinkel ausdrücken:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{1}{\sin \Theta} (\omega_2 \sin \Psi - \omega_1 \cos \Psi) \\ \dot{\Theta} &= \omega_1 \sin \Psi + \omega_2 \cos \Psi \\ \dot{\Psi} &= \omega_3 - \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} (\omega_2 \sin \Psi - \omega_1 \cos \Psi) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Die Differentialgleichungen D.5 beschreiben die Rotation eines Körpers im Raum. Für den Fall, dass die zweite Drehung ausfällt, also um den Winkel $\theta = 0$ gedreht wird, sind die Differentialgleichungen nicht definiert. Dies folgt aus der Tatsache, dass in so einem Fall die Transformation nicht mehr eindeutig ist und daher die Rücktransformation fehlschlägt. Dieses Problem wird als *Gimbal Lock* bezeichnet. Es tritt bei Quaternionen nicht auf, da keine Kombination aus mehreren Drehungen stattfindet, sondern nur eine um eine beliebig gewählte Achse.

E. Herleitung der Potenzreihenentwicklung

Die folgende Ableitung wurde aus Tricarico (2008) entnommen. Es werden drei verschiedene Koordinatensysteme verwendet, zwei Körperfeste, sowie ein Inertiales. Die Koordinaten im körperfesten System werden durch kleine Buchstaben x_i, y_i, z_i dargestellt und im inertialen System kommen Großbuchstaben zur Anwendung X_i, Y_i, Z_i . Weiters werden die Koordinaten des Massenzentrums des zweiten Körpers O_2 mit ξ, η, ζ angegeben, wobei diese in den körperfesten Systemen jeweils wieder Indices erhalten. Für diese Koordinatentransformationen werden Eulerwinkel benutzt, und zwar in jener Form, die in Gleichung (D.1 auf Seite 79) gegeben ist. Diese Matrix wird wie folgt vereinfacht dargestellt:

$$Q_b = \begin{pmatrix} l_{1b} & l_{2b} & l_{3b} \\ m_{1b} & m_{2b} & m_{3b} \\ n_{1b} & n_{2b} & n_{3b} \end{pmatrix}$$

Wenn eine Drehung vom zweiten körperfesten Koordinatensystem ins erste erfolgt, schaut die endgültige Drehmatrix wie folgt aus:

$$D(\Psi_1, \Theta_1, \Phi_1) * D(\Psi_2, \Theta_2, \Phi_2)^T = \begin{pmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

E.1. Reihenentwicklung

Mit Hilfe der in Gleichung E.1 dargestellten Matrix, lässt sich der Faktor $1/\rho$ als Taylorreihe aufschreiben.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{R} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{i_1+j_1+k_1} \frac{x_1^{i_1} y_1^{j_1} z_1^{k_1} x_2^{i_2} y_2^{j_2} z_2^{k_2}}{i_1! j_1! k_1! i_2! j_2! k_2!} \times \\ &\times \sum_{i_3=0}^{i_2} \sum_{j_3=0}^{j_2} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{i_4=0}^{i_3} \sum_{j_4=0}^{j_3} \sum_{k_4=0}^{k_3} \binom{i_2}{i_3} \binom{j_2}{j_3} \binom{k_2}{k_3} \binom{i_3}{i_4} \binom{j_3}{j_4} \binom{k_3}{k_4} \times \\ &\times l_x^{i_4} m_x^{i_3-i_4} n_x^{i_2-i_3} l_y^{j_4} m_y^{j_3-j_4} n_y^{j_2-j_3} l_z^{k_4} m_z^{k_3-k_4} n_z^{k_2-k_3} \times \\ &\times \sum_{L=0}^{i_5} \sum_{M=0}^{j_5} \sum_{N=0}^{k_5} t_{i_5 j_5 k_5 L M N} \frac{\xi_1^L \eta_1^M \zeta_1^N}{R^{i_1+j_1+k_1+i_2+j_2+k_2+L+M+N}} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

E. Herleitung der Potenzreihenentwicklung

wobei

$$\begin{aligned} i_5 &= i_1 + i_4 + j_4 + k_4 \\ j_5 &= j_1 + i_3 - i_4 + j_3 - j_4 + k_3 - k_4 \\ k_5 &= k_1 + i_2 - i_3 + j_2 - j_3 + k_2 - k_3 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten t_{lmnLMN} wurden über die partiellen Ableitungen von $1/R$ hergeleitet, näheres findet sich in Tricarico, 2008. Die Berechnung dieser Koeffizienten geschieht über eine rekursive Formel.

$$\begin{aligned} t_{lmnLMN} &= \left\{ (2l - C_{lmn}) t_{(l-1)mn(L-1)MN} + \right. \\ &\quad \left. + (l-1)(l - C_{lmn}) t_{(l-2)mnLMN} \right\} (\delta_{l0} - 1) + \\ &\quad + \left\{ (2m - C_{lmn}) t_{l(m-1)nL(M-1)N} + \right. \\ &\quad \left. + (m-1)(m - C_{lmn}) t_{l(m-2)nLMN} \right\} (\delta_{m0} - 1) + \\ &\quad + \left\{ (2n - C_{lmn}) t_{lm(n-1)LM(N-1)} + \right. \\ &\quad \left. + (n-1)(n - C_{lmn}) t_{lm(n-2)LMN} \right\} (\delta_{n0} - 1) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

wobei

$$C_{lmn} = \frac{1}{(3 - \delta_{l0} - \delta_{m0} - \delta_{n0})}$$

und $t_{000000} = 1$. Diese Koeffizienten verschwinden wenn einer der Terme $(l+L)$, $(m+M)$, $(n+N)$ eine ungerade Zahl ergibt, sowie wenn ein Index negativ wird. Die Taylorreihe (E.2) wird nun in die Formeln für das Potential U , die Kraft F und das Drehmoment τ eingesetzt.

$$\begin{aligned} U_{12} &= G \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2}{R} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{i_1+j_1+k_1} \times \\ &\quad \times \frac{\mathcal{N}_{1,i_1j_1k_1}}{i_1!j_1!k_1!} \frac{\mathcal{N}_{2,i_2j_2k_2}}{i_2!j_2!k_2!} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{i_1+j_1+k_1+i_2+j_2+k_2} \times \\ &\quad \times \sum_{i_3=0}^{i_2} \sum_{j_3=0}^{j_2} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{i_4=0}^{i_3} \sum_{j_4=0}^{j_3} \sum_{k_4=0}^{k_3} \binom{i_2}{i_3} \binom{j_2}{j_3} \binom{k_2}{k_3} \binom{i_3}{i_4} \binom{j_3}{j_4} \binom{k_3}{k_4} \times \\ &\quad \times l_x^{i_4} m_x^{i_3-i_4} n_x^{i_2-i_3} l_y^{j_4} m_y^{j_3-j_4} n_y^{j_2-j_3} l_z^{k_4} m_z^{k_3-k_4} n_z^{k_2-k_3} \times \\ &\quad \times \sum_{L=0}^{i_5} \sum_{M=0}^{j_5} \sum_{N=0}^{k_5} t_{i_5j_5k_5LMN} \frac{\xi_1^L \eta_1^M \zeta_1^N}{R^{L+M+N}} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned}
 F_{12} = & G \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2}{R} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{i_1+j_1+k_1} \times \\
 & \times \frac{\mathcal{N}_{1,i_1 j_1 k_1}}{i_1! j_1! k_1!} \frac{\mathcal{N}_{2,i_2 j_2 k_2}}{i_2! j_2! k_2!} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{i_1+j_1+k_1+i_2+j_2+k_2} \times \\
 & \times \sum_{i_3=0}^{i_2} \sum_{j_3=0}^{j_2} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{i_4=0}^{i_3} \sum_{j_4=0}^{j_3} \sum_{k_4=0}^{k_3} \binom{i_2}{i_3} \binom{j_2}{j_3} \binom{k_2}{k_3} \binom{i_3}{i_4} \binom{j_3}{j_4} \binom{k_3}{k_4} \times \\
 & \times l_x^{i_4} m_x^{i_3-i_4} n_x^{i_2-i_3} l_y^{j_4} m_y^{j_3-j_4} n_y^{j_2-j_3} l_z^{k_4} m_z^{k_3-k_4} n_z^{k_2-k_3} \times \\
 & \times \sum_{L=0}^{i_5} \sum_{M=0}^{j_5} \sum_{N=0}^{k_5} t_{i_5 j_5 k_5 L M N} \frac{\xi_1^L \eta_1^M \zeta_1^N}{R^{L+M+N}} \left\{ \frac{\wp + 1}{R^2} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L/\xi_1 \\ M/\eta_1 \\ N/\zeta_1 \end{bmatrix} \right\} \quad (E.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{12} = & G \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2}{R} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{i_1+j_1+k_1} \times \\
 & \times \frac{1}{i_1! j_1! k_1!} \frac{\mathcal{N}_{2,i_2 j_2 k_2}}{i_2! j_2! k_2!} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{i_1+j_1+k_1+i_2+j_2+k_2} \times \\
 & \times \sum_{i_3=0}^{i_2} \sum_{j_3=0}^{j_2} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{i_4=0}^{i_3} \sum_{j_4=0}^{j_3} \sum_{k_4=0}^{k_3} \binom{i_2}{i_3} \binom{j_2}{j_3} \binom{k_2}{k_3} \binom{i_3}{i_4} \binom{j_3}{j_4} \binom{k_3}{k_4} \times \\
 & \times l_x^{i_4} m_x^{i_3-i_4} n_x^{i_2-i_3} l_y^{j_4} m_y^{j_3-j_4} n_y^{j_2-j_3} l_z^{k_4} m_z^{k_3-k_4} n_z^{k_2-k_3} \times \\
 & \times \sum_{L=0}^{i_5} \sum_{M=0}^{j_5} \sum_{N=0}^{k_5} t_{i_5 j_5 k_5 L M N} \frac{\xi_1^L \eta_1^M \zeta_1^N}{R^{L+M+N}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{\wp + 1}{R^2} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{1,i_1,j_1+1,k_1} \zeta_1 - \mathcal{N}_{1,i_1,j_1,k_1+1} \eta_1 \\ \mathcal{N}_{1,i_1,j_1,k_1+1} \xi_1 - \mathcal{N}_{1,i_1+1,j_1,k_1} \zeta_1 \\ \mathcal{N}_{1,i_1+1,j_1,k_1} \eta_1 - \mathcal{N}_{1,i_1,j_1+1,k_1} \xi_1 \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. - \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{1,i_1,j_1+1,k_1} N/\zeta_1 - \mathcal{N}_{1,i_1,j_1,k_1+1} M/\eta_1 \\ \mathcal{N}_{1,i_1,j_1,k_1+1} L/\xi_1 - \mathcal{N}_{1,i_1+1,j_1,k_1} N/\zeta_1 \\ \mathcal{N}_{1,i_1+1,j_1,k_1} M/\eta_1 - \mathcal{N}_{1,i_1,j_1+1,k_1} L/\xi_1 \end{bmatrix} \right\} \quad (E.6)
 \end{aligned}$$

Die in den Formeln vorkommenden Koeffizienten $N_{1,ijk}$ und $N_{2,ijk}$ sind die *normalized products of inertia*, welche im folgenden Kapitel genauer beschrieben werden.

E.2. Generalized products of inertia

Die *generalized products of inertia* sind folgendermaßen definiert (siehe Tricarico, 2008):

$$M_{b,ijk} = \int_{V_b} x_b^i y_b^j z_b^k \delta_b(x_b, y_b, z_b) dV_b$$

E. Herleitung der Potenzreihenentwicklung

mit $\delta_b(x_b, y_b, z_b)$ als Dichteverteilung des Körpers.

Die für die Berechnung verwendeten *normalized products of inertia* ergeben sich durch $N_{b,ijk} = M_{b,ijk}/M_{b,000}$. Grundsätzlich ist jede beliebige Dichteverteilung in diesem Algorithmus anwendbar, auch so abstrakte wie Zylinder oder Tori. In dieser Diplomarbeit wird mit triaxialen Ellipsoiden gearbeitet, welche auf die vereinfachte Form aus de Zeeuw & Pfenniger 1988 (de Zeeuw & Pfenniger, 1988) beschränkt werden:

$$\rho_p(x, y, z) = \rho_p(m^2) = \frac{\rho_0}{(1 + m^2)^p}$$

mit $m^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ $a \geq b \geq c > 0$. Mithilfe dieses Koordinatensystems, das in Kapitel 4.2 genauer beschrieben wird, vereinfacht sich das obige Integral für die $M_{b,ijk}$ erheblich.

$$M_{b,ijk} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^m \frac{\rho_0}{(1 + m^2)^p} a^i b^j c^k m^{2+i+j+k} \sin^{1+i+j} \psi \cos^k \psi \sin^j \theta \cos^i \theta dm d\psi d\theta$$

Da die Dichteverteilung nur noch von der Koordinate m abhängt, sowie sonst keine Terme vorliegen, welche von mehreren Koordinaten abhängen, lässt sich dieses Integral leicht lösen.

$$M_{b,ijk} = a^i b^j c^k \rho_0 \int_0^m \frac{m^{2+i+j+k}}{(1 + m^2)^p} dm \int_0^\pi \sin^{1+i+j} \psi \cos^k \psi d\psi \int_0^{2\pi} \sin^j \theta \cos^i \theta d\theta$$

Alle drei Integrale lassen sich auf rekursive Funktionen umformen.

Literaturverzeichnis

- Aarseth S. J., 2003, Gravitational N-Body Simulations, Aarseth S. J., ed.
- Ann H. B., Park J., 2006, *New Astronomy*, 11, 293
- Arp H., 1966, *ApJS*, 14, 1
- Babcock H. W., 1939, *Lick Observatory Bulletin*, 19, 41
- Bahcall J. N., Sarazin C. L., 1977, *ApJL*, 213, L99
- Baraff D., 1997, An Introduction to Physically Based Modelling: Rigid Body Simulation II-Nonpenetration Constraints. Tech. rep., Robotics Inst., Carnegie Mellon Univ.
- Barnes J., Hut P., 1986, *Nature*, 324, 446
- Binney J., Jiang I., Dutta S., 1998, *MNRAS*, 297, 1237
- Binney J., Merrifield M., 1998, *Galactic astronomy*, Binney J. & Merrifield M., ed.
- Binney J., Tremaine S., 1987, *Galactic dynamics*, Binney J. & Tremaine S., ed.
- Blanchet L., 2006, in *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 861, Albert Einstein Century International Conference, pp. 145–160
- Burkert A., 1995, *ApJL*, 447, L25
- Chandrasekhar S., 1943, *ApJ*, 97, 255
- Charbonneau P., 1995, *ApJS*, 101, 309
- Cowan Jr. C. L., Reines F., Harrison F. B., Kruse H. W., McGuire A. D., 1956, *Science*, 124, 103
- de Zeeuw T., Pfenniger D., 1988, *MNRAS*, 235, 949
- Dehnen W., 2000, *ApJL*, 536, L39
- Dekel A., Shlosman I., 1983, in *IAU Symposium*, Vol. 100, Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies, E. Athanassoula, ed., p. 187
- Einasto J., Haud U., Foeveer M., Kaasik A., 1976, *MNRAS*, 177, 357

- Einasto J., Lynden-Bell D., 1982, MNRAS, 199, 67
- Einstein A., 1916, Annalen der Physik, 354, 769
- Fermi E., 1934, Zeitschrift für Physik, 88, 161
- , 1949, Physical Review, 75, 1169
- Gingold R. A., Monaghan J. J., 1977, MNRAS, 181, 375
- Han J. L., 2008, Nuclear Physics B Proceedings Supplements, 175, 62
- Harfst S., 2000, Master's thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
- Hernquist L., 1990, ApJ, 356, 359
- Holmberg E., 1941, ApJ, 94, 385
- Hoskin M. A., 1976, Journal for the History of Astronomy, 7, 169
- Howard C. D., Rich R. M., Clarkson W., Mallery R., Kormendy J., De Propriis R., Robin A. C., Fux R., Reitzel D. B., Zhao H. S., Kuijken K., Koch A., 2009, ApJL, 702, L153
- Hubble E., 1925, Contributions from the Mount Wilson Observatory / Carnegie Institution of Washington, 304, 1
- Humphrey P. J., Buote D. A., Gastaldello F., Zappacosta L., Bullock J. S., Brighenti F., Mathews W. G., 2006, ApJ, 646, 899
- Ideta M., Hozumi S., Tsuchiya T., Takizawa M., 2000, MNRAS, 311, 733
- Jeon M., Kim S. S., Ann H. B., 2009, ApJ, 696, 1899
- Kahn F. D., Woltjer L., 1959, ApJ, 130, 705
- Kasun S. F., Evrard A. E., 2005, ApJ, 629, 781
- Kent S. M., Dame T. M., Fazio G., 1991, ApJ, 378, 131
- Landau L. D., Lifschitz E. M., 1962, Lehrbuch der theoretischen Physik I: Mechanik
- Larson R., 1969, MNRAS, 145, 405
- Law D. R., Johnston K. V., Majewski S. R., 2005, ApJ, 619, 807
- Law D. R., Majewski S. R., Johnston K. V., 2009, ApJL, 703, L67
- Lin C. C., Shu F. H., 1964, ApJ, 140, 646
- Markevitch M., Gonzalez A. H., Clowe D., Vikhlinin A., Forman W., Jones C., Murray S., Tucker W., 2004, ApJ, 606, 819

- Massey R., Rhodes J., Ellis R., Scoville N., Leauthaud A., Finoguenov A., Capak P., Bacon D., Aussel H., Kneib J., Koekemoer A., McCracken H., Mobasher B., Pires S., Refregier A., Sasaki S., Starck J., Taniguchi Y., Taylor A., Taylor J., 2007, *Nature*, 445, 286
- Milgrom M., 1983, *ApJ*, 270, 365
- Minniti D., Zoccali M., 2008, in *IAU Symposium*, Vol. 245, *IAU Symposium*, M. Bureau, E. Athanassoula, & B. Barbuy, ed., pp. 323–332
- Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1997, *ApJ*, 490, 493
- Navarro J. F., Hayashi E., Power C., Jenkins A. R., Frenk C. S., White S. D. M., Springel V., Stadel J., Quinn T. R., 2004, *MNRAS*, 349, 1039
- Newton I., 1687, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Hally E., ed. p. 510
- Pagels H., Primack J. R., 1982, *Physical Review Letters*, 48, 223
- Paul M. K., 1988, *Celestial Mechanics*, 44, 49
- Petsch H. P., Theis C., 2008, *Astronomische Nachrichten*, 329, 1046
- Pfleiderer J., Siedentopf H., 1961, *Zeitschrift fur Astrophysik*, 51, 201
- Preskill J., Wise M. B., Wilczek F., 1983, *Physics Letters B*, 120, 127
- Rix H., Zaritsky D., 1995, *ApJ*, 447, 82
- Rubin V. C., Ford W. K. J., 1970, *ApJ*, 159, 379
- Sargent W. L. W., Young P. J., Lynds C. R., Boksenberg A., Shortridge K., Hartwick F. D. A., 1978, *ApJ*, 221, 731
- Shen J., Sellwood J. A., 2006, *MNRAS*, 370, 2
- Shoemake K., 1985, in *SIGGRAPH '85: Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM, New York, NY, USA, pp. 245–254
- Springel V., 2005, *MNRAS*, 364, 1105
- Springel V., White S. D. M., Jenkins A., Frenk C. S., Yoshida N., Gao L., Navarro J., Thacker R., Croton D., Helly J., Peacock J. A., Cole S., Thomas P., Couchman H., Evrard A., Colberg J., Pearce F., 2005, *Nature*, 435, 629
- Theis C., 1999, in *Reviews in Modern Astronomy*, Vol. 12, *Reviews in Modern Astronomy*, R. E. Schielicke, ed., p. 309
- Theis C., Kohle S., 2001, *A&A*, 370, 365

Literaturverzeichnis

Theis C., Spinneker C., 2003, Ap&SS, 284, 495

Toomre A., Toomre J., 1972, ApJ, 178, 623

Tricarico P., 2008, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 100, 319

White S. D. M., Frenk C. S., Davis M., 1983, ApJL, 274, L1

Zeldovich I. B., Einasto J., Shandarin S. F., 1982, Nature, 300, 407

Zwicky F., 1933, Helvetica Physica Acta, 6, 110

Danksagung

Ich bedanke mich bei allen, die mir bei der Erstellung dieser Diplomarbeit direkt oder indirekt beigestanden haben.

Mein besonderer Dank gilt dabei:

Meinem Betreuer Christian Theis, der es mir erst ermöglichte, dieses interessante Thema zu untersuchen. Ausserdem bedanke ich mich dafür, dass er mir immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden ist. Einen besseren Betreuer hätte ich nicht finden können.

Meiner Freundin, Julia Weniger, die mich fortlaufend unterstützte und diese Arbeit korrigiert hat.

Meinen Kollegen Alexander Bindeus, Christian Göschl, Gerald Jungwirth, Harald Leiblinger, Hanns Petsch, Florent Renaud, Adam Ruzicka & Christoph Saulder, die immer bereit waren auf meine Fragen einzugehen.

Meiner Großmutter, die mir durch ihre finanzielle Unterstützung den Abschluss dieses Studiums überhaupt erst ermöglicht hat.

Meinen Eltern, für ihre moralische Unterstützung.

Lebenslauf

Name: Armin Liebhart
Geburt: 6.11.1979, Wien
Staatsbürgerschaft: Österreich

Ausbildung

- * 9.2008: Mitwirkung an der Konferenz JENAM
- * 9.2006: Teilnahme an der Sommerschule für Astronomie an der Universität Wien
- * 2002: erste Diplomprüfung in Astronomie bestanden
- * seit 1999: Studium an der Universität Wien (Astronomie, Physik & Mathematik)
- * Okt. 1999: Matura
- * 1990 - 1999: BRG XIX Billrothstrasse 73
- * 1986 - 1990: Volksschule Neulandgasse, 1190 Wien

Berufliche Erfahrung

- * 2008 - 2009: Zivildienst im Verein der Wiener Jugendzentren
- * 2006 - 2008: Sicherheitsdienst in Museen (Fa. Artex)
- * 8.2004 - 10.2004: Österreichische Post AG (Schalterdienst)
- * 7.2001 - 8.2001: Fundraising für BUND (Fa. Wesser)