



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Exchange Orbits

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin:	Vera Steinecker
Matrikel-Nummer:	0104399
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Astronomie
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Dr. Rudolf Dvorak

Wien, im Oktober 2009

EXCHANGE ORBITS

Abstract	5
A. Allgemeines über Exchange Orbits	7
1. Was sind Exchange Orbits?	7
2. Ein Beispiel für Exchange Orbits: Janus und Epimetheus.....	8
3. Wie funktioniert der Bahnwechsel?	10
4. Horseshoe Orbits	11
5. Bewegungsgleichung	13
6. Wie stabil sind Exchange Orbits?.....	16
6a. Das ebene kreisförmige Problem.....	17
6b. Das ebene Problem mit verschiedenen Exzentrizitäten.....	20
6c. Das kreisförmige Problem mit verschiedenen Inklinationen....	22
6d. Störung durch einen weiteren Körper	25
7. Zusammenfassung allgemeiner Teil.....	27
B. Die Stabilität von Exchange Orbits.....	29
1. Aufgabenstellung.....	29
2. Die Rechenarbeit – verwendete Programme	30
3. Systembeschreibung und Resultate.....	31
3.1 Stabilitätsgrenzen	31
3.2 Störung der Exchange-Bahnen durch einen zusätzlichen Planeten	46
4. Abhängigkeit von der Integrationszeit	52
5. Zusammenfassung der Diplomarbeit.....	54
C. Programmcodes	57
D. Literaturverzeichnis	61

ABBILDUNGEN

Abb. 1 ... Janus ^[4a]	9
Abb. 2 ... Epimetheus ^[4b]	9
Abb. 3 ... Typischer Exchange Orbit; Kräfte wirken auf m_2 ^[2]	10
Abb. 4 ... Horseshoe Orbits der Trojaner um L_4 und L_5 ^[1]	11
Abb. 5 ... Exchange Orbits von Janus und Epimetheus ^[5]	12
Abb. 6 ... Beispiel für Exchange Orbits für $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-4}$: regelmässiger Bahnwechsel ca. alle 125 Jahre	17
Abb. 7 ... Regelmässiger Wechsel der Exzentrizitäten (für $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-4}$)	18
Abb. 8 ... $\varepsilon > 6 \cdot 10^{-4}$: instabil nach 32 Bahnwechsel in ca. 700 Jahren	18
Abb. 9 ... Exzentrizität (für $\varepsilon > 6 \cdot 10^{-4}$)	19
Abb. 10 ... etwas seltener: wechselnde Exzentrizitäten	21
Abb. 11 ... Exchange Orbits: eben, aber mit unterschiedlichen Exzentrizitäten für m_1 und m_2	21
Abb. 12 ... viel seltener: wechselnde Inklinationen	23
Abb. 13 ... Exzentrizität	23
Abb. 14 ... Exchange Orbits: kreisförmig, aber mit unterschiedl. Inklinationen für m_1 und m_2	24
Abb. 15 ... Ausschnitt aus Abb. 13	24
Abb. 16 ... Jupiter befindet sich bei $a_3 = 1.5$, das System bleibt stabil	25
Abb. 17 ... Jupiter befindet sich bei $a_3 = 1.2$, das System wird nach nur 2 Jahren instabil	26
Abb. 18 ... Ausschnitt aus Abb. 17 (die ersten 100 Jahre)	26
Abb. 19 ... $\Delta a_{\max}$ der μ für $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$	34
Abb. 20 ... Vergleich: Erde-Erde zu Jupiter-Jupiter	35
Abb. 21 ... Verhältnis 2 : 1 (wie zweifache Erde zu Erde)	35
Abb. 22 ... Verhältnis 14 : 1 (wie Uranus zu Erde)	36
Abb. 23 ... Verhältnis 94 : 1 (wie Saturn zu Erde)	36
Abb. 24 ... Verhältnis 314 : 1 (wie Jupiter zu Erde)	37
Abb. 25 ... Stabilitätsgrenzen $\Delta a_{\max}$ für verschiedene μ	38
Abb. 26 ... $\Delta a_{\min}$ für verschiedene μ	39
Abb. 27 ... Vergleich μ zu $\Delta a_{\min}$ für $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$	40
Abb. 28 ... $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 1$	42
Abb. 29 ... $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 2$	42
Abb. 30 ... $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 3$	43
Abb. 31 ... $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 5$	43
Abb. 32 ... $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 9$	44
Abb. 33 ... Mindestabstand des Störkörpers m_3 (hier Jupiter) um Exchange- Systeme nicht zu destabilisieren	47
Abb. 34 ... Abhängigkeit zwischen a_3 -Grenze und m_3	49
Abb. 35 ... genauere Untersuchung von Position 2	50
Abb. 36 ... Vergleich Rechenzeit für $\mu = 14$	52

TABELLEN

Tabelle 1 ... Parameter der Monde Janus & Epimetheus ^{[7][8a][8b]}	9
Tabelle 2 ... 65 untersuchte Systeme	33
Tabelle 3 ... $\Delta a_{\max}$ für verschiedene ε und μ	37
Tabelle 4 ... $\Delta a_{\min}$ für verschiedene ε und μ	40
Tabelle 5 ... Grenzen für a_3	47
Tabelle 6 ... genauere Untersuchung von Position 2	49
Tabelle 7 ... Durchschnittl. Änderung von $\Delta a_{\max}$ bei längerer Rechenzeit (2 Mio. Jahre)	53
Tabelle 8 ... $\Delta a_{\max}$ für verschiedene ε und μ bei 2 Mio J. Integrationszeit	53

Abstract

Searching for the stability limits respectively the maximal distance $\Delta a_{\max}$ between the exchange bodies m_1 and m_2 for which the system is still stable, various ratios $\mu = m_1/m_2$ with $m_1 = m_2$ and $m_1 \neq m_2$ were examined. The aim was to obtain the dependency between $\Delta a_{\max}$ and the two mass-ratios $\mu = m_1/m_2$ und $\varepsilon = (m_1+m_2)/m_0$.

Therefore the following systems were tested: $1 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-2}$, $3.16 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 3.16 \cdot 10^{-3}$, as well as $6.32 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 6.32 \cdot 10^{-3}$, each with $\Delta \varepsilon = 10^{-1}$ and $\mu = 1, 2, 14, 94$ and 314 .

Systems were considered stable when their orbital elements suffer only from insignificant little change after an integration period of one million years. Thus parameters like the excentricity e , inclination i and semi-major axis a should not show notable changes.

With the mass m_0 in the center of the system the initial conditions for m_1 and m_2 were given with $m_0 \gg m_1 \approx m_2$, $a_1 = 1\text{AU}$, $a_2 = a_1 + \Delta a \approx 1\text{AU}$, $e_1 = e_2 = 1 \cdot 10^{-6}$, $\Delta \omega = 90^\circ$ and the above mentioned conditions for ε and μ .

- The results for mass ratios $\varepsilon \leq 3.16 \cdot 10^{-4}$ with $\varepsilon = (m_1+m_2)/m_0$ show a stability limit or maximal distance $\Delta a_{\max}$ between m_1 and m_2 up to which the exchange systems are stable. This distance $\Delta a_{\max}$ is independent of $\mu = m_1/m_2$ and increases with ε .
- For $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$ there were only some islands of stability found, but no definite stable interval. Instead of a $\Delta a_{\max}$ there exists a minimal distance $\Delta a_{\min}$ (also independent of μ). For this minimal distance the system was stable at least once for 1 million years.
- For $\varepsilon \geq 1 \cdot 10^{-3}$ neither minimal ($\Delta a_{\min}$) nor maximal ($\Delta a_{\max}$) distances were found. Moving m_1 and m_2 further away from m_0 (to $a = 2, 3, 5, 9$ instead of $a = 1$) didn't bring any result for either $\Delta a_{\max}$ or $\Delta a_{\min}$.

Furthermore the exchange systems stability when perturbed by an additional body m_3 was examined.

Therefore bodies m_3 of different masses and different distances were positioned outside (Position 1) and inside the exchange system (Position 2, between m_0 and $m_{1,2}$).

The parameters were chosen in a way that the undisturbed system was stable with $m_1 = m_2$ and corresponding two earth-like masses. The masses for m_3 were chosen according to the mass of Earth, double the mass of earth, the mass of Uranus, Saturn and Jupiter.

- As expected a linear correlation between m_3 and the minimal distance $\Delta a_{\min}$ to the masses $m_{1,2}$ was observed for Position 1. For increasing mass of m_3 the body had to be positioned further away from m_1 and m_2 for the exchange system to stay stable.
- For a body m_3 with the mass of Uranus on Position 2 the system showed an interesting behavior. This body had to be positioned further away from $m_{1,2}$ than heavier masses (corresponding for example to the masses of Jupiter and Saturn).
- Further investigations of the inner position (Position 2) with additional 13 different masses showed that the behavior of Uranus (14 times the mass of Earth) is no exception. This as well happens for masses up to 27.24 times the mass of Earth.
- Generally (with the exception described above) it does apply that $\Delta a_{\min_outside} > \Delta a_{\min_inside}$.

The two moons Janus and Epimetheus of Saturn are the only known example for the surprising phenomenon of the exchange orbits.

Even so there is the possibility for the existence of other exchange systems in extrasolar planetary systems.

A. Allgemeines über Exchange Orbits

1. Was sind Exchange Orbits?

Bei Exchange Orbits handelt es sich um Bahnen zweier kleiner Himmelskörper um einen Zentralstern. Diese Bahnen liegen so dicht bei einander, dass die Körper rein von ihrer Grösse her zusammenstossen könnten. Doch statt zusammenzustossen tauschen sie in regelmässigen Abständen die Plätze, das heisst der innere Körper bewegt sich auf die äussere Bahn und der äussere Körper kommt auf die innere Bahn. [1]

Genau genommen spricht man nur dann von Exchange Orbits, wenn ausser der Entfernung zum Zentralobjekt alle Parameter der beiden Platz tauschenden Körper gleich sind. Denn nur wenn die Exzentrizitäten, Inklinationen und Massen der beiden kleinen Körper übereinstimmen, wechseln sie wirklich auf genau die Bahn des jeweils anderen.

Dies funktioniert nur bis zu einem bestimmten Verhältnis ε der beiden kleinen Massen gegenüber der grossen Zentralmasse. [1]

Ebenfalls bis zu einer gewissen Grenze funktioniert dieses Phänomen der regelmässigen Bahnwechsel allerdings auch für Objekte von unterschiedlichen Massen, Exzentrizitäten oder Inklinationen.

Da später auch solche Systeme untersucht werden, wird im Rahmen dieser Arbeit die Definition der Exchange Orbits der Einfachheit halber nicht so streng genommen und somit auch Bahnwechsel, die eigentlich eher nur Platzwechsel sind, als Exchange Orbits bezeichnet.

2. Ein Beispiel für Exchange Orbits: Janus und Epimetheus

Die Saturnmonde X und XI, mit Namen Janus und Epimetheus, sind bis jetzt das einzige bekannte Beispiel für das überraschende Phänomen der Exchange Orbits.

Am 15. Dezember 1966 entdeckte Audouin Dollfus den Mond Janus und nur drei Tage später wurde von Richard L. Walker Epimetheus beobachtet.

Damals ging man aber davon aus, dass es sich um ein und den selben Mond handelte, da niemand auf die Idee kam, dass zwei Monde auf so eng nebeneinander liegenden Bahnen existieren könnten.

Allerdings hatte dieser Mond seltsame Bahneigenschaften, was viele Fragen aufwarf und für Rätsel sorgte, bis im Oktober 1978 Stephen M. Larson und John W. Fountain dies mit der Anwesenheit von zwei verschiedenen Körpern erklärten [8a][8b] und damit das Problem der seltsamen Bahneigenschaften lösten. Daher wird die Entdeckung von Epimetheus oft auf 1978 datiert und Larson und Fountain zugeschrieben.

Die Bestätigung dass es sich wirklich um zwei Monde handelte kam 1980, als sie von der Sonde Voyager 1 eindeutig identifiziert wurden.

Ihre Namen bekamen die beiden Monde aus der römischen und griechischen Mythologie. So wurde Janus nach dem römischen zweigesichtigen Gott benannt. Der Name Epimetheus stammt aus der griechischen Mythologie. Der Mond bekam den Namen des Bruders von Prometheus, bzw. dem Mann von Pandora.

Parameter der Monde

Saturnmond X: Janus	Saturnmond XI: Epimetheus
	
Abb. 1 ... Janus ^[4a]	Abb. 2 ... Epimetheus ^[4b]
aufgenommen von Cassini-Huygens am 26. Juli 2009 aus einer Entfernung von ca. 98 000 km [4a]	aufgenommen von Cassini am 3. Dez. 2007 aus einer Entfernung von ca. 37 400 km [4b]
Eigenschaften des Orbits grosse Halbachse 151 472 km Periapsis 150 412 km Apoapsis 152 532 km Exzentrizität 0.007 Inklination 0.14° Umlaufzeit 0.695 Tage mittl. Bahngeschw. 15.8 km/s	Eigenschaften des Orbits grosse Halbachse 151 422 km Periapsis 150 059 km Apoapsis 152 785 km Exzentrizität 0.009 Inklination 0.34° Umlaufzeit 0.694 Tage mittl. Bahngeschw. 15.8 km/s
Physikalische Eigenschaften Albedo 0.6 scheinb. Helligkeit 14.0 mag mittl. Durchmesser 194x190x154 km Masse 1.98·10 ¹⁸ kg Oberfläche 100 000 km ² mittl. Dichte 0.65 g/cm ³ siderische Rotation 0.695 Tage Achsneigung 0.015° Fluchtgeschwindig. 55 m/s	Physikalische Eigenschaften Albedo 0.5 scheinb. Helligkeit 15.6 mag mittl. Durchmesser 138x110x110 km Masse 5.35·10 ¹⁷ kg Oberfläche ca. 50 000 km ² mittl. Dichte 0.65 g/cm ³ siderische Rotation 0.694 Tage Achsneigung 0° Fluchtgeschwindig. 35 m/s
Entdeckung Entdecker Audouin Dollfus Entdeckungsdatum 15. Dez. 1966	Entdeckung Entdecker Richard L. Walker Entdeckungsdatum 18. Dez. 1966

Tabelle 1 ... Parameter der Monde Janus & Epimetheus ^{[7][8a][8b]}

3. Wie funktioniert der Bahnwechsel?

Da der Mond, oder Planet, bzw. der Körper, der sich auf der inneren Bahn befindet, immer etwas schneller ist als der, der auf der äusseren Bahn ist, holt der Innere den Äusseren langsam ein. Trotzdem überholen sie sich nie, auch dann nicht, wenn sie theoretisch aneinander vorbei könnten.

Denn je näher sich die zwei Monde kommen, um so mehr beeinflussen sie sich gegenseitig, ausschlaggebend ist hier die gravitative Wechselwirkung der beiden Monde im Moment des geringsten Abstandes zwischen ihnen. Der äussere Mond m_2 wird etwas abgebremst, verursacht durch die Gravitationskraft f_1 von m_1 , und der innere Mond m_1 wird durch f_2 beschleunigt. Durch die so entstehende Änderung der Zentrifugalkräfte wird der äussere Mond m_2 vor den inneren Mond m_1 auf die innere Bahn gezogen. Der Mond m_1 wird auf die äussere Bahn gedrückt.

Sobald das geschehen ist, bewegen sich die beiden Monde normal auf ihren Bahnen weiter, bis sie sich nach einer gewissen Zeit wieder einholen und erneut ihre Plätze tauschen. [1]

Der Austausch der Umlaufbahnen passiert auf diese Weise immer bevor ein Mond am anderen vorbei will. So ist der kleinste Abstand zwischen m_1 und m_2 immer grösser als die Differenz ihrer Bahnradien. Dadurch können auch Körper deren Radien grösser als die Differenz ihrer Bahnradien sind, stabile ExchangeSysteme bilden, ohne einen Zusammenstoss zu riskieren. [2]

Abbildung 3 zeigt den Bahnwechsel aus der Sicht von m_1 :

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Mond m_1 . Mond m_2 befindet sich auf der äusseren Umlaufbahn. Die nach innen wirkende Kraft auf m_2 überlagert dessen Zentrifugalkraft, wodurch m_2 auf die innere Bahn vor m_1 „fällt“. Umgekehrt wird m_1 auf die äussere Bahn gehoben. [2]

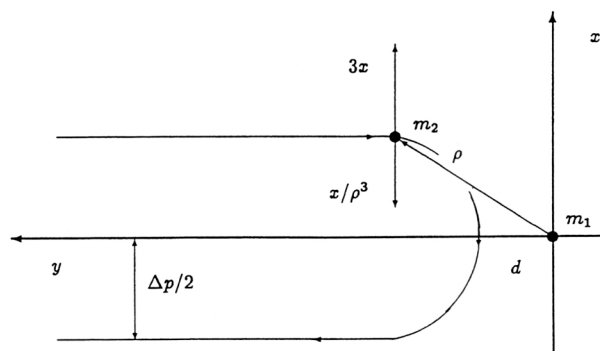


Abb. 3 ... Typischer Exchange Orbit; Kräfte wirken auf m_2 [2]

4. Horseshoe Orbits

Die Bewegung der Exchange Orbits ist verwandt mit der Trojanerbewegung um die Lagrangepunkte L_4 und L_5 (Horseshoe Orbits). Mathematisch lassen sich die Horseshoe Orbits mit dem Eingeschränkten-drei-Körper-Problem (E3KP) beschreiben, wobei die Masse m_2 des kleinsten Körpers (Trojaner) dabei als 0 angenommen wird. [3]

Basierend auf dieser Theorie des E3KP für die Dynamik der Horseshoe Orbits lassen sich laut Spirig und Waldvogel [3] auch die Exchange Orbits beschreiben, allerdings mit dem Unterschied dass im Falle der Exchange Orbits $m_2 \approx m_1$, also $m_2 \neq 0$ ist. Damit gilt statt $\varepsilon = m_1/m_0$ hier $\varepsilon = (m_1 + m_2)/m_0$. [1][3] Mehr dazu in Kapitel A5.

Der Unterschied zwischen den Exchange Orbits und den Horseshoe Orbits liegt also darin, dass bei den Exchange Bahnen die beiden kleinen Massen von gleicher Grössenordnung sind. Daher beeinflusst die eine die andere Masse und der Abstand zum Zentralkörper bleibt nicht konstant.

Bei den Horseshoe Orbits, bzw. der Trojanerbewegung, ist der Massenunterschied zwischen den Massen so gross, dass die grössere von beiden (zum Beispiel Jupiter) von der kleineren Masse (Trojaner) nicht beeinflusst wird und sich daher ihre Bahn nicht verändert, das heisst der Abstand der grösseren Masse zum Zentralkörper ändert sich nicht. [1]

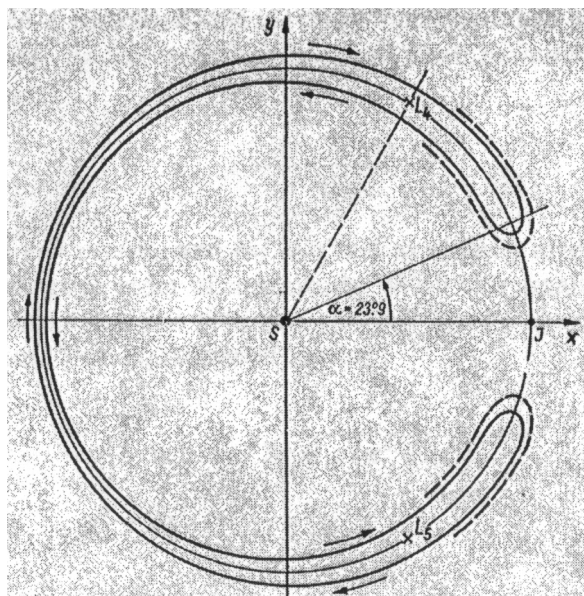


Abb. 4 ... Horseshoe Orbits der Trojaner um L_4 und L_5 [1]

Abbildung 4 zeigt die schematische Darstellung von Horseshoe Orbits, bzw. die Trojanerbewegung um die Lagrangepunkte L_4 und L_5 im rotierenden Koordinatensystem ... Sonne S und Jupiter J befinden sich auf einer festen Achse in konstantem Abstand. Die Bewegung der Trojaner ähnelt dann der Form eines Hufeisens. Die Trojaner nähern sich um L_4 etwas ausserhalb der Jupiterbahn an Jupiter an, bremsen ab, „drehen um“, bzw. bewegen sich nach innerhalb der Jupiterbahn und laufen dort zurück bis sie L_5 erreichen, wo sie wieder nach aussen gehen. [1]

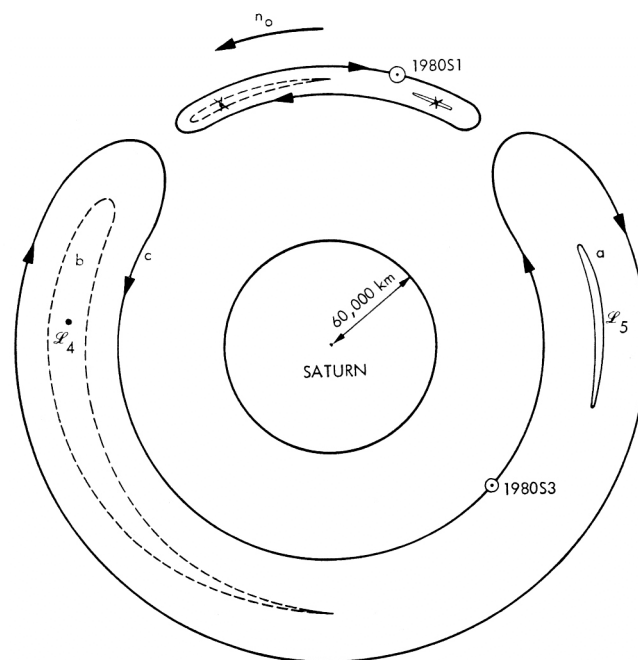


Abb. 5 ... Exchange Orbits von Janus und Epimetheus [5]

Abbildung 5 stellt die Schematische Darstellung von Exchange Orbits dar. Der Unterschied zu den Horseshoe Orbits liegt hier darin, dass der massereichere Mond (Janus) von dem nicht viel kleineren Mond (Epimetheus) gestört wird. Daher bleibt Janus, im Gegensatz zu Jupiter (bei den Horseshoe Orbits), nicht konstant an Ort und Stelle, bezogen auf den Saturn, sondern beschreibt ebenfalls eine kleine, in der obigen Zeichnung wurstförmige Bahn. Der masseärmere Epimetheus beschreibt dagegen wieder eine Bahn, die den Horseshoe Orbits ähnlich sieht. [1]

5. Bewegungsgleichung

Das System entspricht einem 3-Körper-Problem, bei dem es einen Zentralkörper m_0 und zwei kleine Himmelskörper m_1 und m_2 , zum Beispiel Planeten oder Monde (viel kleiner als m_0) gibt, die sich in einer Ebene befinden.

x_j gibt die Position der drei Körper m_j ($j = 0, 1, 2$) relativ zum Massenmittelpunkt an. Damit gelten für das Gravitationspotential V und die kinetische Energie T

$$V = k^2 \left(m_0 \frac{m_1}{r_1} + m_0 \frac{m_2}{r_2} + m_1 \frac{m_2}{d} \right) \quad (1)$$

und

$$T = \frac{1}{2M} [m_1 (m_0 + m_1) \dot{r}_1^2 + m_2 (m_0 + m_1) \dot{r}_2^2 - 2m_1 m_2 \dot{r}_1 \dot{r}_2] \quad (2)$$

wobei $r_1 = x_1 - x_0$, $r_2 = x_2 - x_0$, $d = x_2 - x_1$ (relative Position der Körper untereinander) und Massenparameter $\mu_j = m_j/(m_1+m_2)$, $j = 1, 2$ mit $\mu_1 + \mu_2 = 1$ und $\varepsilon = (m_1+m_2)/m_0$ gilt.

Mit der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_j} \right) = \frac{\partial V}{\partial r_j} \quad (3)$$

erhält man die erste Form der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{r}_2 &= k^2 \left[\frac{1 + \varepsilon\mu_2}{r_2^3} r_2 + \frac{\varepsilon\mu_1 r_1}{r_1^3} + \frac{\varepsilon\mu_1 d}{d^3} \right] \\ \ddot{r}_1 &= k^2 \left[\frac{1 + \varepsilon\mu_1}{r_1^3} r_1 + \frac{\varepsilon\mu_2 r_2}{r_2^3} - \frac{\varepsilon\mu_2 d}{d^3} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Ersetzen von $[r_1, r_2]$ durch Jacobi-Koordinaten $[R, d]$ mit

$$\vec{R} = \mu_1 \vec{r}_1 + \mu_2 \vec{r}_2$$

und $r_1 = r_2 - d$ und $r_2 = d + r_1$ bringt die Jacobi-Form der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= -k^2 m_0 (1 + \varepsilon) \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{\mu_2}{r_2^3} \vec{r}_2 \right) \\ \ddot{\vec{d}} &= k^2 m_0 \left(\frac{1}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{1}{r_2^3} \vec{r}_2 - \frac{\varepsilon}{d^3} \vec{d} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Weil ε sehr klein ist, ist die Lösung 1. Ordnung ausreichend. Mit der Definition „skalierter Vektor“ $\vec{r}$ mit $d = \alpha r$ und $\alpha = \varepsilon^{1/3}$, der Entwicklung um α und der Normalisierung $k = 1$, $m_0 = 1$ und $\alpha \rightarrow 0$ erhält man eine weitere Form der Bewegungsgleichung, die „*inner solution*“, nur gültig in kleiner Region wenn die Monde nahe beieinander sind

$$\ddot{\vec{R}} = -R^{-3} \vec{R} + O(\alpha)$$

... Bewegung des Massenzentrums c

(6)

$$\ddot{\vec{r}} = -\left(R^{-3} + r^{-3}\right) \vec{r} + 3(\vec{r} \cdot \vec{R}) R^{-5} \vec{R} + O(\alpha)$$

... Bewegung eines Mondes relativ zum anderen

(7)

Für weitere Vereinfachung: die Bewegung findet nur in einer Ebene statt. Die zweidimensionalen Vektoren $\vec{R}$ und $\vec{r}$ lassen sich durch entsprechende komplexe Variablen R und r ersetzen.

Als nächstes folgt der Übergang zu den Hill-Koordinaten, wobei hier der Koordinatenursprung in einer der kleinen Massen liegt, mit $r = Rz$.

Aus $r = Rz$ wird mit r und r'' aus Gleichung (7) die zweidimensionale Bewegungsgleichung in der komplexen Ebene. Mit weiteren Vereinfachungen gelangt man letztendlich zu den bekannten Hill-Gleichungen, dem Hill'schen Mondproblem:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= 3x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \end{aligned}$$

(8)

Durch Erweiterung der ersten Gleichung mit x' und der zweiten mit y' und der anschliessenden Addition der beiden Gleichungen erhält man das Jacobi-Integral

$$\frac{1}{2} \left(\dot{y}^2 + \dot{x}^2 \right) - \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = h \quad (9)$$

Dieses entspricht der Energieerhaltung des Hill-Systems. Ist die Konstante h positiv, so handelt es sich um eine gebundene Bewegung, ist h negativ liegt eine ungebundene Bewegung von m_2 vor.

Gebundene Bahnen entsprechen einem Satelliten-Planeten-System, die ungebundenen lassen sich unterscheiden in P- und E-Orbits: Passing- und Exchange-Orbits. [2]

** alle Formeln in diesem Kapitel aus [2]*

6. Wie stabil sind Exchange Orbits?

Zur Stabilität der Exchange Orbits wurden von G. Auner [1] verschiedene numerische Untersuchungen angestellt.

Ziel war es die Stabilitätsgrenzen bei Abweichungen vom idealisierten System zu finden.

Das idealisierte System besteht aus ebenen und kreisförmigen Orbits, auf denen zwei vergleichbare, bzw. zwei gleiche kleine Massen, einen viel grösseren Zentralkörper umkreisen. Weiters müssen diese Systeme als Bedingung für ihre Stabilität mindestens eine Million Jahre, ohne gröbere Veränderungen im System, überdauern.

Für die Berechnungen aller Modelle wurde dabei das Drei-Körper-Problem angenommen und für die Rechenarbeit der Lie-Integrator [6] verwendet.

Untersucht wurden dazu folgende Modelle, bestehend jeweils aus einem grossen und zwei kleinen Körpern:

- a. Eben und kreisförmig, mit verschiedenen Massen der Monde
- b. Eben, mit unterschiedlichen Exzentrizitäten der Bahnen aber gleichen Mondmassen
- c. Kreisförmig, mit verschiedenen Inklinationen der Bahnen aber gleichen Mondmassen
- d. Störung durch einen weiteren Körper

Für die Massen gelten dabei folgende Annahmen:

- die Zentralmasse m_0 ist normiert auf $m_0 = 1$
- und $m_1 = m_2 \ll m_0 = 1$

6a. Das ebene kreisförmige Problem

In diesem Teil der Untersuchung war es Ziel herauszufinden wie weit die Stabilität des Systems mit dem Massenverhältnis $\varepsilon = (m_1 + m_2)/m_0$ zusammenhängt, wobei sich die Bahnen von m_1 und m_2 hier nur um ein kleines Δa unterscheiden.

Im Laufe der Untersuchung wurden also die Massen von m_1 und m_2 erhöht.

Dabei stellte sich heraus, dass es für $\varepsilon > 6 \cdot 10^{-4}$ keine stabilen Bereiche mehr gibt. m_0 wird dann von den Monden (bzw. Planeten) m_1 und m_2 schon gestört und beginnt sich mit wachsender Amplitude um den Massenmittelpunkt zu bewegen. Diese zusätzlichen oszillierenden Zentralkräfte destabilisieren darauf hin das gesamte Exchange-System und m_1 und m_2 werden aus ihren Bahnen geworfen.

Die gesuchte Stabilitätsgrenze bezogen auf die Massen (m_1+m_2) im Verhältnis zur Zentralmasse m_0 liegt also bei $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-4}$. [1]

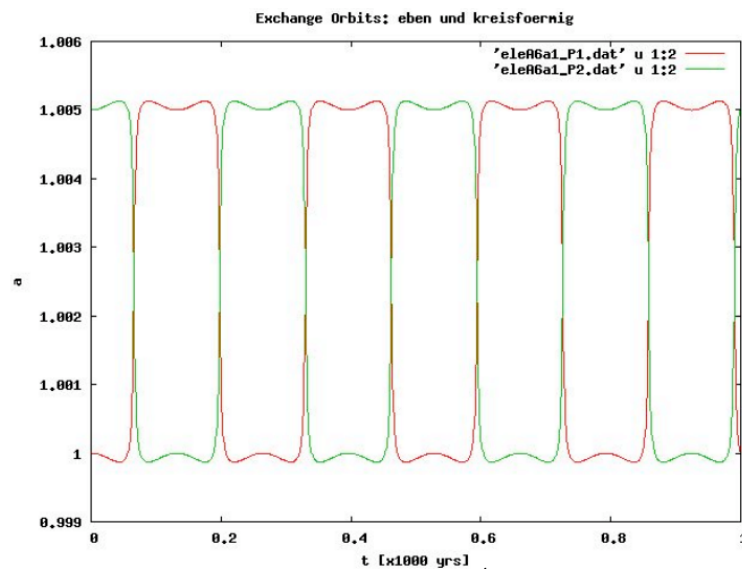


Abb. 6 ... Beispiel für Exchange Orbits für $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-4}$: regelmässiger Bahnwechsel ca. alle 125 Jahre

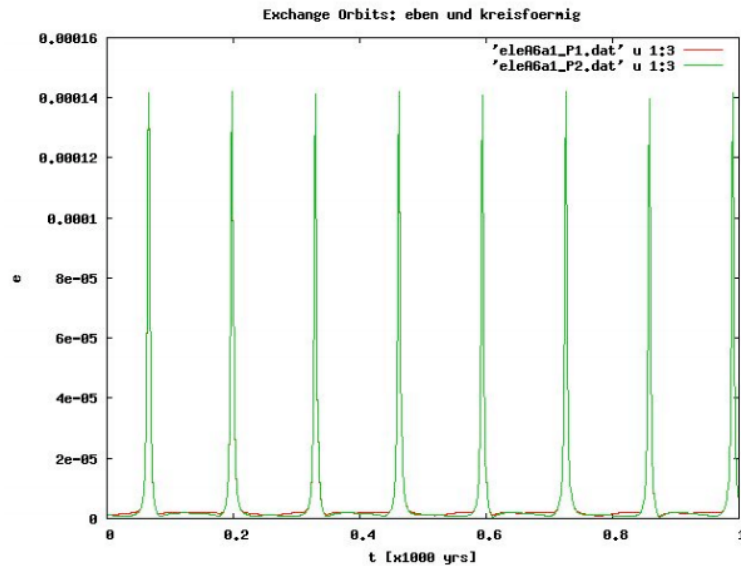


Abb. 7 ... Regelmässiger Wechsel der Exzentrizitäten (für $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-4}$)

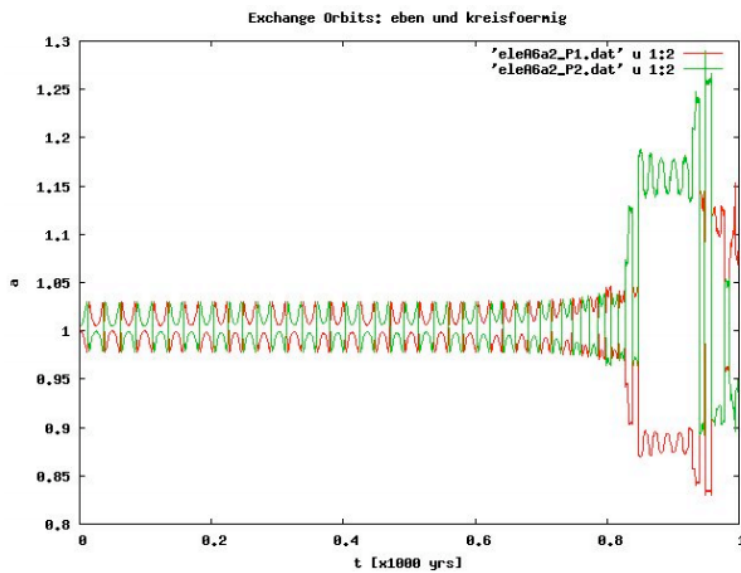


Abb. 8 ... $\varepsilon > 6 \cdot 10^{-4}$: instabil nach 32 Bahnwechsel in ca. 700 Jahren

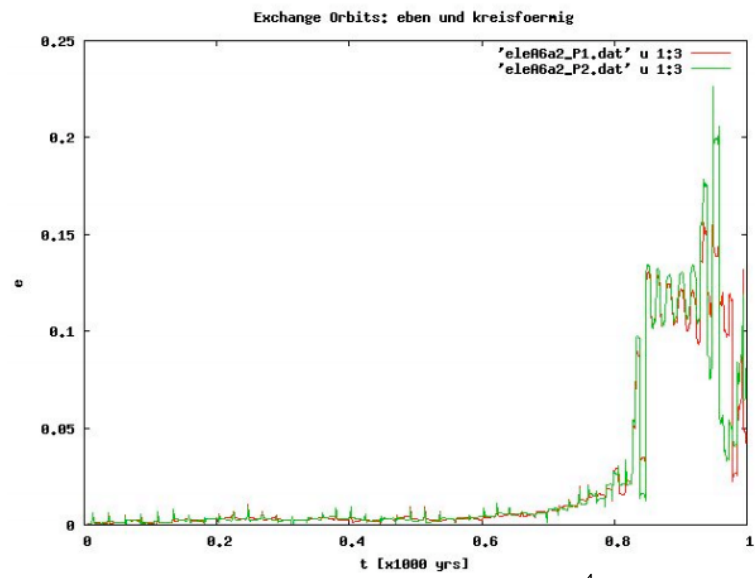


Abb. 9 ... Exzentrizität (für $\varepsilon > 6 \cdot 10^{-4}$)

6b. Das ebene Problem mit verschiedenen Exzentrizitäten

In diesem Teil der Untersuchung war es Ziel herauszufinden ob und wie weit e_2 (die Exzentrizität von m_2) von Null abweichen kann, sodass das System trotzdem stabil bleibt und regelmässige Bahnwechsel statt finden.

Hier waren die Massen von m_1 und m_2 gleich, sodass auf jeden Fall $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-4}$ galt. Die Bahnen unterschieden sich auch wieder nur, jetzt abgesehen von den Exzentrizitäten, um ein kleines Δa .

Dabei stellte sich heraus, dass e_2 , bzw. Δe (da $e_1 = 0$), nicht grösser als 0.027 sein darf, um die Stabilität des Systems nicht zu gefährden.

Ausserdem zeigte sich, dass die Monde nicht nur ihre Bahnen wechseln, sondern auch ihre Exzentrizitäten. Zwar geschieht dies nicht so häufig wie der Bahnwechsel, aber doch auch regelmässig.

Rechnerisch lässt sich zeigen, dass die Oszillation der Exzentrizitäten nur im Bereich von 0 bis $e_{2,0}$ (= Anfangswert e_2) stattfindet:

Unter Vernachlässigung der Störung I_0 der Bewegung von m_0 um das Massenzentrum folgt

$$\vec{I}_{\text{tot}} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$$

und mit Laplace:

$$e_{1,k}^2 + e_{2,k}^2 - 2e_{1,k} e_{2,k} \cos \Delta \omega = e_{2,0}^2 \quad (10)$$

mit k = Anzahl der Bahnwechsel ($k = 0$ bei $t = 0$). Weiters folgt mit $\Delta \omega = 90^\circ$ und $a_1 \approx a_2$

$$e_{1,k}^2 + e_{2,k}^2 = e_{2,0}^2 \quad (11)$$

woraus zu sehen ist, dass sich die Oszillation im Bereich zwischen Null und dem Anfangswert von e_2 bewegt. [1]

Die gesuchte Stabilitätsgrenze bezogen auf die Exzentrizität e liegt also bei 0.027. [1]

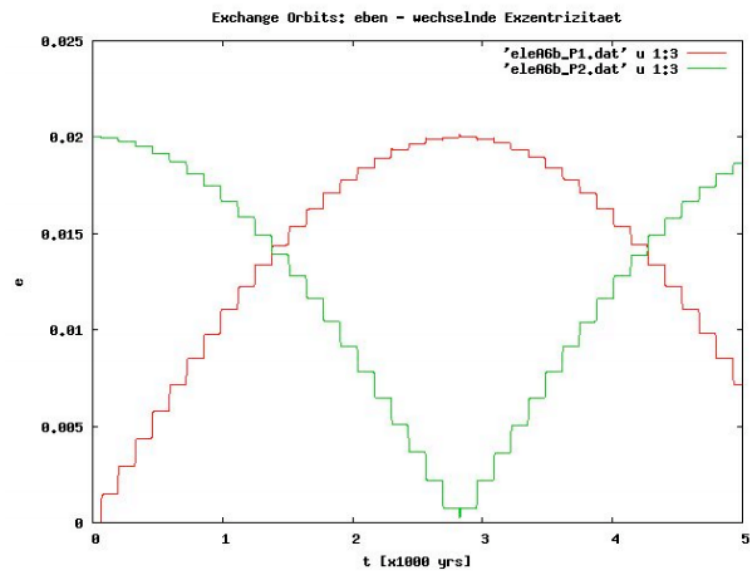


Abb. 10 ... etwas seltener: wechselnde Exzentrizitäten

In diesem Beispiel wechseln die Monde ihre Exzentrizität (Abbildung 10) nur zwei mal in der selben Zeit (hier 5000 Jahre) in der sie 38 mal ihre Bahnen (Abbildung 11) tauschen:

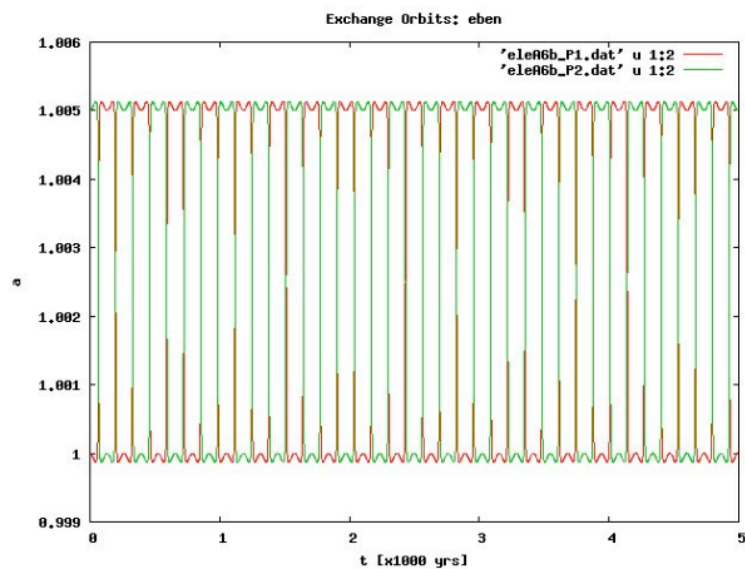


Abb. 11 ... Exchange Orbits: eben, aber mit unterschiedlichen Exzentrizitäten für m_1 und m_2

6c. Das kreisförmige Problem mit verschiedenen Inklinationen

In diesem Teil der Untersuchung war es Ziel herauszufinden ob und wie weit i_2 (die Inklination von m_2) von Null abweichen kann, ohne den stabilen Bahnwechsel des Systems zu stören.

Dafür bleiben auch hier die Massen von m_1 und m_2 konstant, sodass wieder $\varepsilon < 6 \cdot 10^{-4}$ garantiert war. Die Bahnen unterschieden sich weiter nur, diesmal abgesehen von der Inklination, um ein kleines Δa . Die Exzentrizität e ist hier für beide Monde wieder gleich Null.

Dabei ergab sich, dass i_2 , bzw. Δi (da $i_1 = 0$), nicht grösser als 8.6° sein darf, um die Stabilität des Systems nicht zu stören.

Ausserdem stellte sich heraus, dass die Monde nicht nur ihre Bahnen und Exzentrizitäten wechseln, sondern auch ihre Inklinationen. Zwar geschieht dies noch seltener als der Wechsel der Exzentrizitäten und damit viel seltener als der Wechsel der Halbachsen, aber auch hier weiterhin regelmässig.

Wie schon bei dem Wechsel der Exzentrizitäten lässt sich rechnerisch zeigen, dass die Oszillation der Inklination nur im Bereich von 0 bis $i_{2,0}$ (= Anfangswert i_2) stattfindet:

Mit Laplace, $e_i = 0$ und $a_1 \approx a_2$:

$$\sin \left[i_{1,k}^2 \right] + \sin \left[i_{2,k}^2 \right] = \sin \left[i_{2,0}^2 \right] \quad (12)$$

und für kleine i folgt

$$i_{1,k}^2 + i_{2,k}^2 = i_{2,0}^2 \quad (13)$$

woraus zu sehen ist, dass sich die Oszillation im Bereich zwischen Null und dem Anfangswert von i_2 bewegt. [1]

Die gesuchte Stabilitätsgrenze bezogen auf die Inklination i liegt also bei 8.6° . [1]

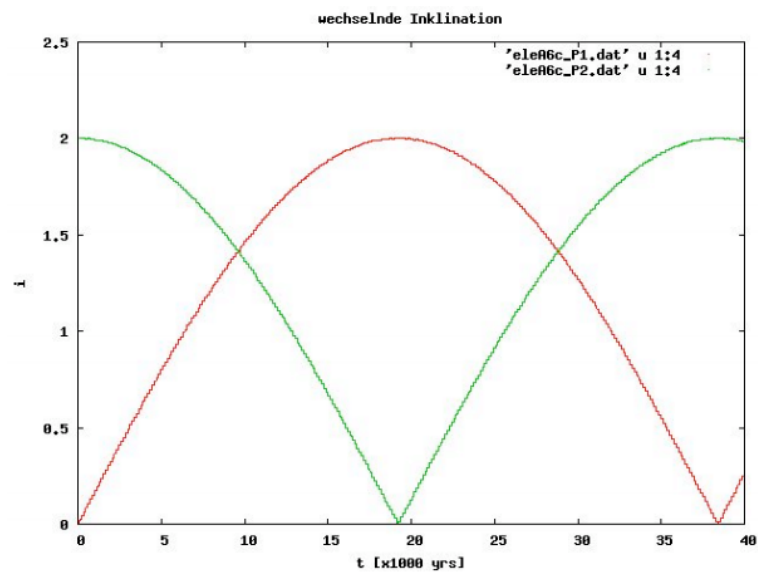


Abb. 12 ... viel seltener: wechselnde Inklinationen

In diesem Beispiel wechseln die Monde ihre Inklinationen (Abbildung 12) nur zwei mal in der selben Zeit (hier in 40000 Jahren) in der sie 307 mal ihre Bahnen (Abbildung 14 und 15) tauschen und 16 mal ihre Exzentrizitäten (Abbildung 13) wechseln:

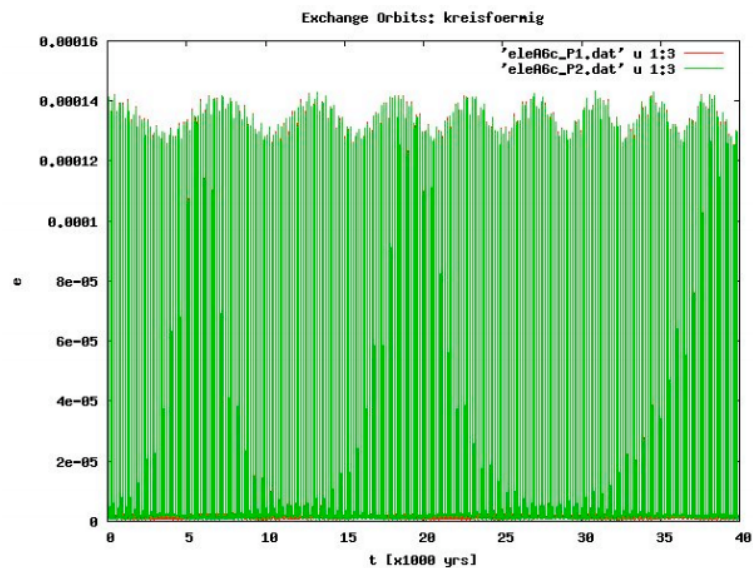


Abb. 13 ... Exzentrizität

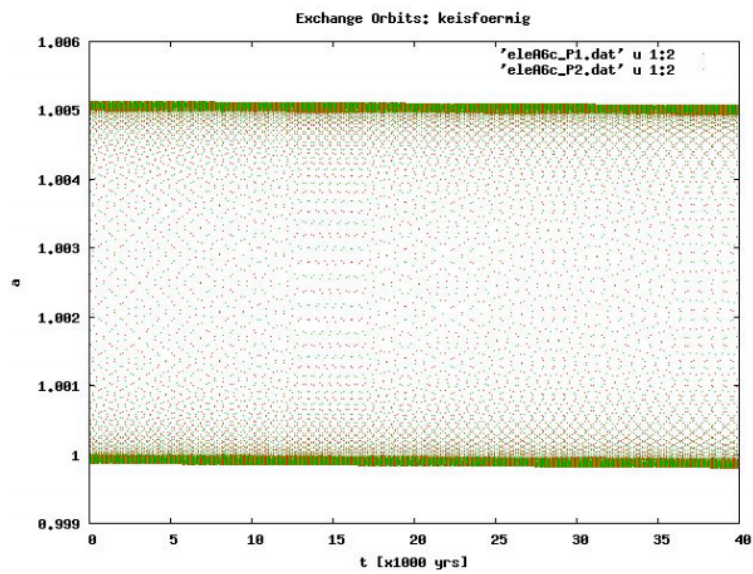


Abb. 14 ... Exchange Orbits: kreisförmig, aber mit unterschiedl. Inklinationen für m_1 und m_2

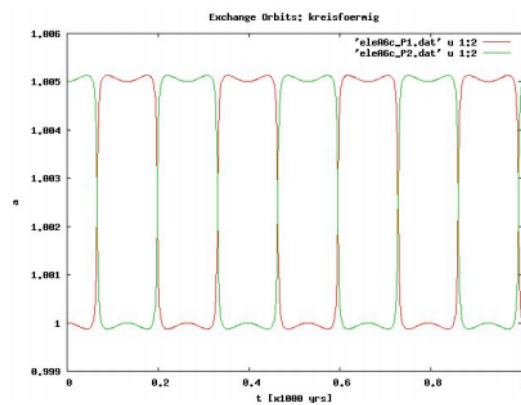


Abb. 15 ... Ausschnitt aus Abb. 13

6d. Störung durch einen weiteren Körper

Des Weiteren wurde untersucht, wie nahe sich eine weitere Masse, in diesem Falle von der Grösse eines Jupiters, an das Exchange-System annähern kann, ohne dieses zu destabilisieren.

Dazu galten folgende Anfangsbedingungen:

- $m_0 = 1 M_{\text{Sonne}}$, $m_1 = m_2 = \frac{1}{2} M_{\text{Erde}}$ und $m_3 = 1 M_{\text{Jupiter}}$
- die Bahnen von m_1 , m_2 und m_3 waren eben und kreisförmig und m_1 und m_2 wieder nur durch ein kleines Δa von einander getrennt.

Die gesuchte Stabilitätsgrenze bezogen auf die Störung durch eine weitere Masse liegt für diese Anfangsbedingungen bei einem $\Delta a_{\text{ExO},m_3}$ von 0.1 AU, was für die Erhaltung der Stabilität dem mindestens notwendigen Abstand zwischen dem Exchange-System $m_{1,2}$ und dem Störkörper m_3 entspricht. [1]

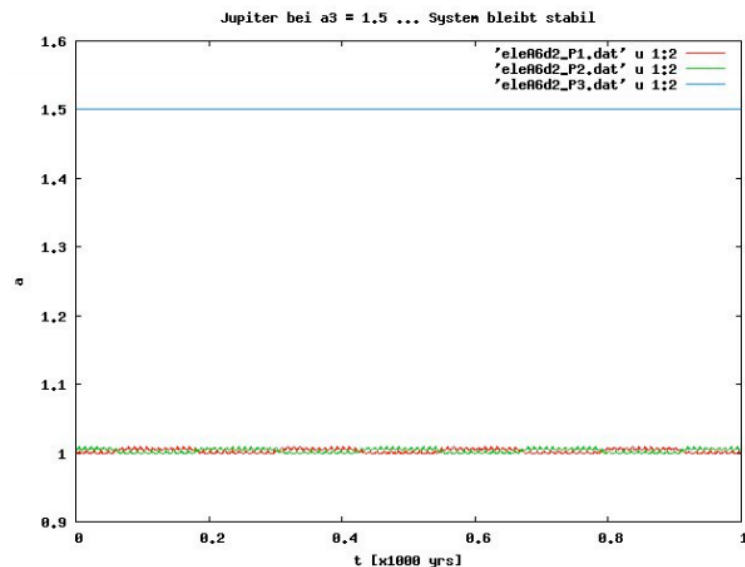


Abb. 16 ... Jupiter befindet sich bei $a_3 = 1.5$, das System bleibt stabil

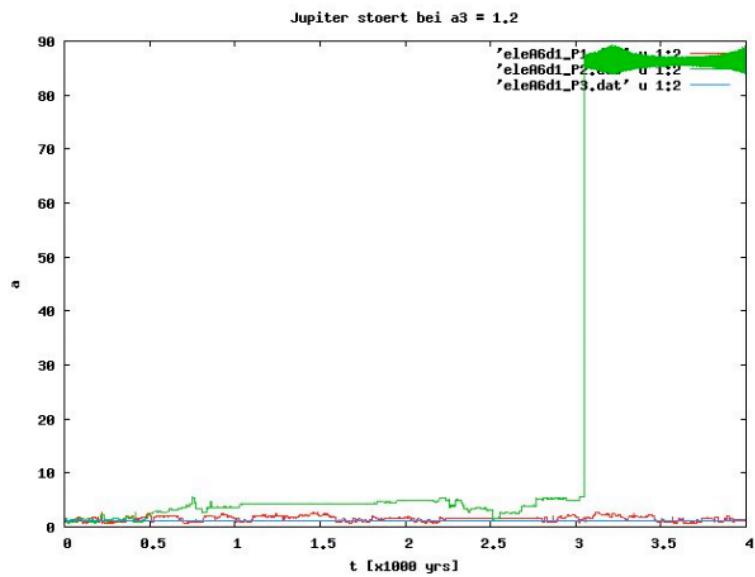


Abb. 17 ... Jupiter befindet sich bei $a_3 = 1.2$, das System wird nach nur 2 Jahren instabil

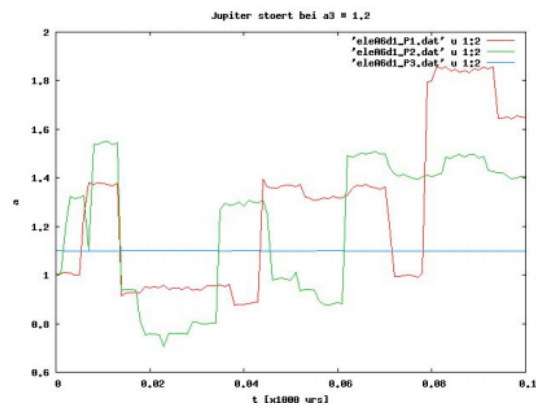


Abb. 18 ... Ausschnitt aus Abb. 17 (die ersten 100 Jahre)

7. Zusammenfassung allgemeiner Teil

Die Saturnmonde Janus und Epimetheus wurden im Dezember 1966 entdeckt und vorerst fälschlicher Weise für ein und das selbe Objekt gehalten, da das Phänomen der Exchange Orbits bis dahin unbekannt und unvorstellbar war. Niemand rechnete mit einer solchen Überraschung.

Erst 1978 wurden die „seltsamen“ Bahneigenschaften dieses Objekts mit der Existenz eines zweiten Objekts erklärt und 1980 durch die Sonde Voyager 1 bestätigt.

Die Bewegung der Exchange-Körper ähnelt der, der Trojaner um die Lagrangepunkte L_4 und L_5 und lässt sich mit Hilfe des Hill'schen Mondproblems, bzw. des Jacobi-Integrals beschreiben.

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = 3x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

(8) Hill'sches Mondproblem

und

$$\frac{1}{2} (\dot{y}^2 + \dot{x}^2) - \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = h$$

(9) Jacobi Integral

Numerische Untersuchungen zur Stabilität möglicher Exchange-Systeme haben folgende Grenzwerte ergeben:

- ein maximales Massenverhältnis $\varepsilon = (m_1 + m_2)/m_0 < 6 \cdot 10^{-4}$
- eine maximale Exzentrizität $e_2 = 0.027$ bei $e_1 = 0$
- eine maximale Inklination $i_2 = 8.6^\circ$ bei $i_1 = 0$
- ein Mindestabstand eines Jupiters zum ExchangeSystem der Grösse zweier halber Erden von $\Delta a_{\text{ExO},m3} = 0.1 \text{ AU}$

Bis heute sind die Saturnmonde Janus und Epimetheus das einzige bekannte Beispiel für Exchange Orbits.

B. Die Stabilität von Exchange Orbits

1. Aufgabenstellung

Zum Einen war die Stabilitätsgrenze, bzw. der maximale Abstand $\Delta a_{\max}$ zwischen den beiden Exchange-Körpern (für $m_1 = m_2$ und $m_1 \neq m_2$) und die Abhängigkeit von $\Delta a_{\max}$ zum Massenverhältnis ε gesucht.

Zum Anderen war die Frage wie nahe sich Störkörper verschiedener Massen annähern dürfen, ohne das Exchange-System zu destabilisieren.

Im Unterschied zu der in Abschnitt A.6 zusammengefassten Arbeit „Exchange Orbits“ [1] von G. Auner, konzentriert sich meine Arbeit im Folgenden auf den Fall des ebenen und kreisförmigen Problems mit unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 . Dies geschieht im Anschluss an die Arbeit „Close Planetary Orbits and their Cosmogonic Importance“ [2] von G. Auner und R. Dvorak, in der es am Ende heisst: „... we plan to determine with more precision the maximum initial separation for the two orbits where they still stay for very long times in the state of being E-orbits.“. Auf der Suche nach dem maximalen Abstand $\Delta a_{\max}$ zwischen m_1 und m_2 , werden in meiner Arbeit (anders als bei G. Auner in [1]) verschiedene Verhältnisse μ von m_1 und m_2 verwendet und die Abhängigkeit zwischen μ , ε und $\Delta a_{\max}$ untersucht.

Im Falle des störenden Körpers m_3 testet meine Arbeit nicht nur ein System, dass von einem Jupiter ausserhalb der beiden kleinen Massen m_1 und m_2 gestört wird (wie in [1]), sondern untersucht eine mögliche Abhängigkeit zwischen dem Mindestabstand $\Delta a_{\min}$ (von m_3 zu $m_{1,2}$) und m_3 . Dies wird sowohl für ein m_3 ausserhalb, wie auch für ein m_3 innerhalb des Exchange Systems $m_{1,2}$ gezeigt.

2. Die Rechenarbeit – verwendete Programme

Die Berechnungen zu dieser Arbeit wurden mit dem Lie-Integrator [6] gemacht, alle weiteren Untersuchungen mit dem „ExchangeScanner“. Der ExchangeScanner ist ein Programm (angepasst an die jeweilige Aufgabe) in Python das ich dazu konstruiert habe dem Lie-Integrator nacheinander die Anfangswerte der (un-)endlich vielen Rechnungen zu füttern und gleich nach jeder dieser Rechnung aus der entsprechenden Ergebnisdatei die für diese Arbeit interessanten Werte heraus zu filtern, bzw. die Stabilität des Systems zu überprüfen.

Die Programmcodes zum ExchangeScanner finden sich im Abschnitt C auf Seite 57 dieser Arbeit.

3. Systembeschreibung und Resultate

Für die Massenverhältnisse μ und ε gelten folgende Relationen:

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}$$

und

$$\varepsilon = \frac{m_1 + m_2}{m_0}$$

mit m_0 als Zentralmasse, die von den viel kleineren Massen m_1 und m_2 umkreist wird. Im Idealfall bilden m_1 und m_2 ein stabiles Exchange System und wechseln in regelmässigen Abständen ihre Bahnen.

3.1 Stabilitätsgrenzen

Zuerst war die Frage nach der Abhängigkeit zwischen den Massenverhältnissen μ und ε zu beantworten. Dazu galt es den maximalen Abstand $\Delta a_{\max}$ zwischen den beiden Exchange-Körpern m_1 und m_2 für die Fälle $m_1 = m_2$ und $m_1 \neq m_2$ zu finden.

Systembeschreibung

Die untersuchten Systeme bestehen immer aus einem Zentralkörper m_0 und zwei kleineren Körpern m_1 und m_2 , die diesen Zentralkörper auf fast identischen Bahnen umkreisen. m_1 und m_2 müssen dabei nicht gleich sein.

Folgende Verhältnisse $\mu = m_1/m_2$ wurden untersucht:

1	: 1	($m_1 = m_2$)
2	: 1	(entspricht ... doppelteErde : Erde)
14	: 1	(entspricht ... Uranus : Erde)
94	: 1	(entspricht ... Saturn : Erde)
314	: 1	(entspricht ... Jupiter : Erde)

Stabilitätsdefinition: Als stabil habe ich ein System angenommen, wenn m_1 und m_2 mindestens eine Million Jahre regelmäßig Platz tauschten und sich ihre Bahnen dabei nicht oder nur vernachlässigbar gering verformt haben. Das heisst alle anderen Parameter wie die Exzentrizität e oder die Inklination i durften sich im Verlauf einer Rechnung nur minimal ändern.

Aufgabe war es nun herauszufinden, wie weit m_1 und m_2 von einander entfernt sein können, um trotzdem noch stabil und regelmäßig Platz zu tauschen. Dazu befand sich m_1 zu Beginn jeder Rechnung im Abstand von 1AU ($a_1 = 1$) zum Zentralkörper und m_2 ein kleines Stück weiter weg ($a_2 = a_1 + \Delta a$). Dieses Δa wurde nun mit jeder Rechnung um den Faktor 0.0001 vergrößert, so lange bis das System instabil wurde, das heisst m_1 und m_2 auseinander flogen.

Die Anfangswerte für die Systeme sahen also wie folgt aus:

	a	e	i	ω	Ω	M	m
m_0	0	0	0	0	0	0	1
m_1	1	$1 \cdot 10^{-6}$	0	275	0	0	vari
m_2	$1 + \Delta a$	$1 \cdot 10^{-6}$	0	95	0	0	vari

Gesucht war ausserdem die Abhängigkeit von $\Delta a_{\max}$ Massenverhältnis $\varepsilon = (m_1 + m_2)/m_0$, bzw. ob das Verhältnis $\mu = m_1/m_2$ dabei eine Rolle spielt oder nicht.

Folgende ε wurden untersucht:

$$1 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-2} \quad \text{mit } \Delta \varepsilon = 10^{-1}$$

$$3.16 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 3.16 \cdot 10^{-3} \quad \text{mit } \Delta \varepsilon = 10^{-1}$$

$$6.32 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 6.32 \cdot 10^{-3} \quad \text{mit } \Delta \varepsilon = 10^{-1}$$

Daraus (ε -Liste und μ -Verhältnisse) ergeben sich 65 Systeme, die jeweils auf ihre Stabilität untersucht wurden:

ε	μ	m_1	m_2	ε	μ	m_1	m_2
$1.00 \cdot 10^{-6}$	1	$5.00 \cdot 10^{-7}$	$5.00 \cdot 10^{-7}$	$3.16 \cdot 10^{-4}$	1	$1.58 \cdot 10^{-4}$	$1.58 \cdot 10^{-4}$
	2	$6.67 \cdot 10^{-7}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$		2	$2.11 \cdot 10^{-4}$	$1.05 \cdot 10^{-4}$
	14	$9.33 \cdot 10^{-7}$	$6.67 \cdot 10^{-8}$		14	$2.95 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$
	94	$9.89 \cdot 10^{-7}$	$1.05 \cdot 10^{-8}$		94	$3.13 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$
	314	$9.97 \cdot 10^{-7}$	$3.17 \cdot 10^{-9}$		314	$3.15 \cdot 10^{-4}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
$3.16 \cdot 10^{-6}$	1	$1.58 \cdot 10^{-6}$	$1.58 \cdot 10^{-6}$	$6.32 \cdot 10^{-4}$	1	$3.16 \cdot 10^{-4}$	$3.16 \cdot 10^{-4}$
	2	$2.11 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$		2	$4.21 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-4}$
	14	$2.95 \cdot 10^{-6}$	$2.11 \cdot 10^{-7}$		14	$5.90 \cdot 10^{-4}$	$4.21 \cdot 10^{-5}$
	94	$3.13 \cdot 10^{-6}$	$3.33 \cdot 10^{-8}$		94	$6.25 \cdot 10^{-4}$	$6.65 \cdot 10^{-6}$
	314	$3.15 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-8}$		314	$6.30 \cdot 10^{-4}$	$2.01 \cdot 10^{-6}$
$6.32 \cdot 10^{-6}$	1	$3.16 \cdot 10^{-6}$	$3.16 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-3}$	1	$5.00 \cdot 10^{-4}$	$5.00 \cdot 10^{-4}$
	2	$4.21 \cdot 10^{-6}$	$2.11 \cdot 10^{-6}$		2	$6.67 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-4}$
	14	$5.90 \cdot 10^{-6}$	$4.21 \cdot 10^{-7}$		14	$9.33 \cdot 10^{-4}$	$6.67 \cdot 10^{-5}$
	94	$6.25 \cdot 10^{-6}$	$6.65 \cdot 10^{-8}$		94	$9.89 \cdot 10^{-4}$	$1.05 \cdot 10^{-5}$
	314	$6.30 \cdot 10^{-6}$	$2.01 \cdot 10^{-8}$		314	$9.97 \cdot 10^{-4}$	$3.17 \cdot 10^{-6}$
$1.00 \cdot 10^{-5}$	1	$5.00 \cdot 10^{-6}$	$5.00 \cdot 10^{-6}$	$3.16 \cdot 10^{-3}$	1	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$
	2	$6.67 \cdot 10^{-6}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$		2	$2.11 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$
	14	$9.33 \cdot 10^{-6}$	$6.67 \cdot 10^{-7}$		14	$2.95 \cdot 10^{-3}$	$2.11 \cdot 10^{-4}$
	94	$9.89 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-7}$		94	$3.13 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-5}$
	314	$9.97 \cdot 10^{-6}$	$3.17 \cdot 10^{-8}$		314	$3.15 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-5}$
$3.16 \cdot 10^{-5}$	1	$1.58 \cdot 10^{-5}$	$1.58 \cdot 10^{-5}$	$6.32 \cdot 10^{-3}$	1	$3.16 \cdot 10^{-3}$	$3.16 \cdot 10^{-3}$
	2	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^{-5}$		2	$4.21 \cdot 10^{-3}$	$2.11 \cdot 10^{-3}$
	14	$2.95 \cdot 10^{-5}$	$2.11 \cdot 10^{-6}$		14	$5.90 \cdot 10^{-3}$	$4.21 \cdot 10^{-4}$
	94	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$		94	$6.25 \cdot 10^{-3}$	$6.65 \cdot 10^{-5}$
	314	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-7}$		314	$6.30 \cdot 10^{-3}$	$2.01 \cdot 10^{-5}$
$6.32 \cdot 10^{-5}$	1	$3.16 \cdot 10^{-5}$	$3.16 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	1	$5.00 \cdot 10^{-3}$	$5.00 \cdot 10^{-3}$
	2	$4.21 \cdot 10^{-5}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$		2	$6.67 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-3}$
	14	$5.90 \cdot 10^{-5}$	$4.21 \cdot 10^{-6}$		14	$9.33 \cdot 10^{-3}$	$6.67 \cdot 10^{-4}$
	94	$6.25 \cdot 10^{-5}$	$6.65 \cdot 10^{-7}$		94	$9.89 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-4}$
	314	$6.30 \cdot 10^{-5}$	$2.01 \cdot 10^{-7}$		314	$9.97 \cdot 10^{-3}$	$3.17 \cdot 10^{-5}$
$1.00 \cdot 10^{-4}$	1	$5.00 \cdot 10^{-5}$	$5.00 \cdot 10^{-5}$				
	2	$6.67 \cdot 10^{-5}$	$3.33 \cdot 10^{-5}$				
	14	$9.33 \cdot 10^{-5}$	$6.67 \cdot 10^{-6}$				
	94	$9.89 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$				
	314	$9.97 \cdot 10^{-5}$	$3.17 \cdot 10^{-7}$				

Tabelle 2 ... 65 untersuchte Systeme

Resultate

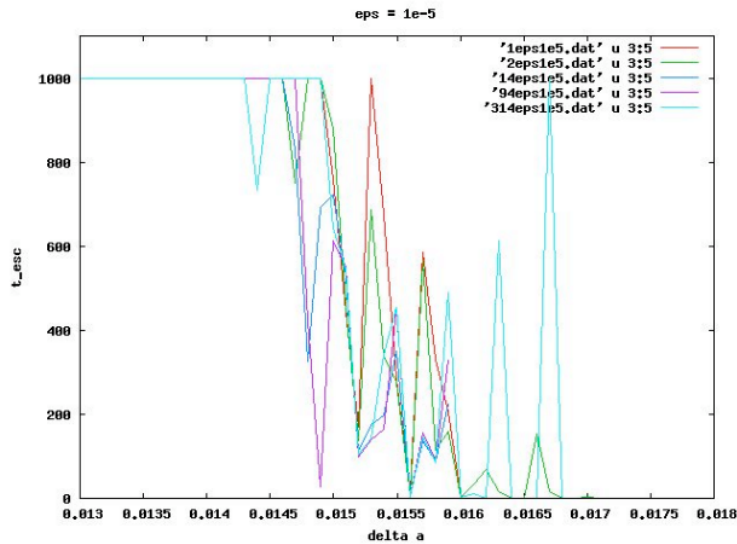


Abb. 19 ... $\Delta a_{\max}$ der μ für $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$

Abbildung 19 zeigt am Beispiel von $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ für alle μ den Übergang vom stabilen zum instabilen Bereich, mit einigen, manchmal stabilen „Inseln“ für wachsendes Δa .

Zu sehen ist, dass das System für $\mu = 314$ (entspricht einem Verhältnis wie Jupiter zu Erde) mit einem Δa von 0.0143 als erstes instabil wird (hellblaue Linie). Zuletzt wird das System für $\mu = 1$ (das heisst $m_1 = m_2$) mit einem Δa von 0.0149 instabil (rote Linie).

Wie schon weiter oben erwähnt, gilt ein System als stabil, wenn sich – unter anderem – die Exzentrizitäten e_1 und e_2 im Laufe der Integrationszeit (eine Million Jahre) nicht ändern. Das heisst, die Stabilität eines Systems lässt sich auch an der Veränderung der Exzentrizitäten erkennen.

Ist ein System instabil (zum Beispiel weil Δa zu gross ist) steigen die Exzentrizitäten e_1 und e_2 der kleinen Massen m_1 und m_2 an.

Sind m_1 und m_2 gleich gross (also $\mu = 1$), so steigen die Exzentrizitäten mit wachsendem Δa gleichermaßen an; siehe Abbildung 20. Sind m_1 und m_2 unterschiedlich (also $\mu \neq 1$), so verändert sich die Exzentrizität des kleineren der beiden Körper stärker, als die Exzentrizität des grösseren; siehe Abbildungen 21 bis 24.

Für folgende Graphiken wurden die Anfangspositionen a_1 und a_2 von m_1 und m_2 leicht verschoben, sodass sie sich im gleichen Abstand zu 1 befinden. An den Ergebnissen für $\Delta a_{\max}$ ändert dies nichts.

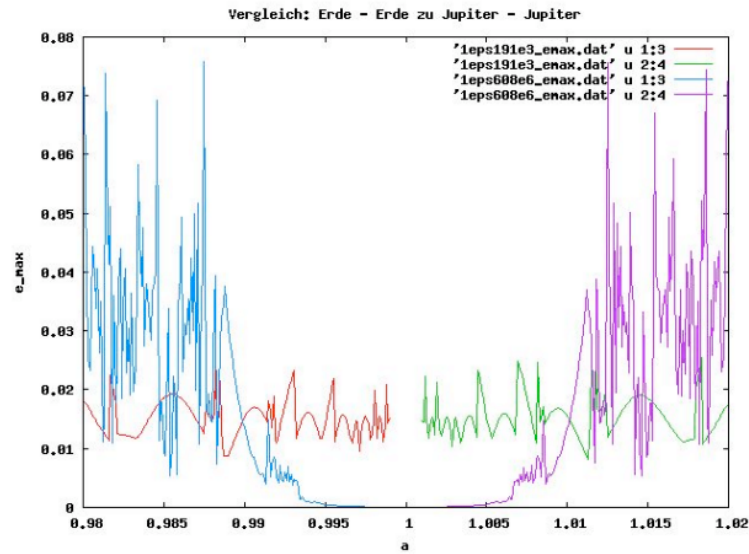


Abb. 20 ... Vergleich: Erde-Erde zu Jupiter-Jupiter

Abb. 20 zeigt im Vergleich zwei Systeme für $\mu = 1$, bei denen einmal m_1 und m_2 im Verhältnis zu m_0 zwei Erden und einmal zwei Jupiters entsprechen. Wobei das System mit den beiden Erden die weit grösseren Veränderungen in den Exzentrizitäten e_1 und e_2 erlebt.

Am Beispiel für $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ sehen die Veränderungen der Exzentrizitäten e für grössere μ , wie $\mu = 2, 14, 94$ und 314 wie folgt aus (Abbildung 21 bis 24):

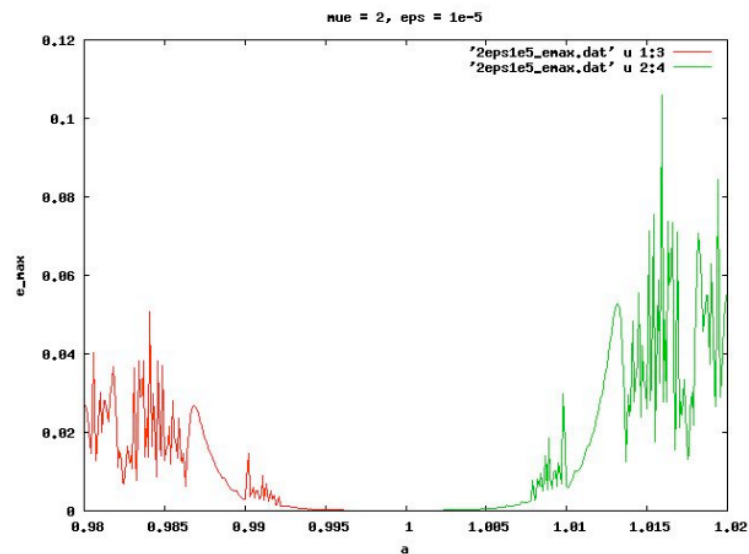


Abb. 21 ... Verhältnis 2 : 1 (wie zweifache Erde zu Erde)

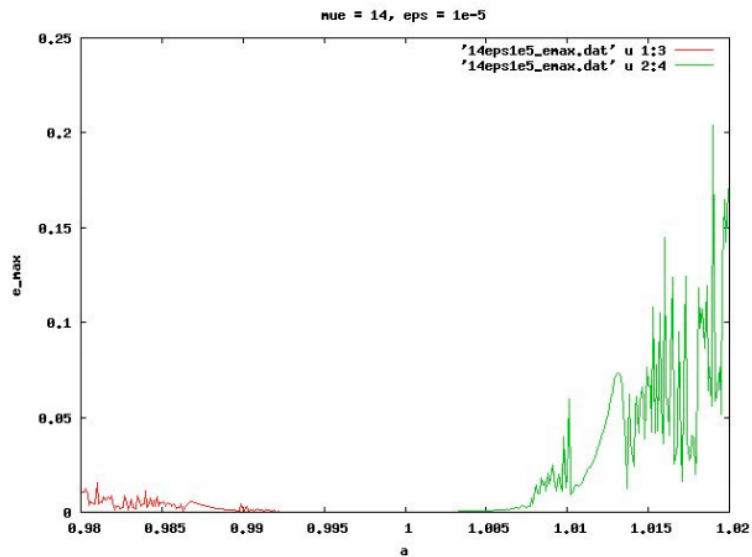


Abb. 22 ... Verhältnis 14 : 1 (wie Uranus zu Erde)

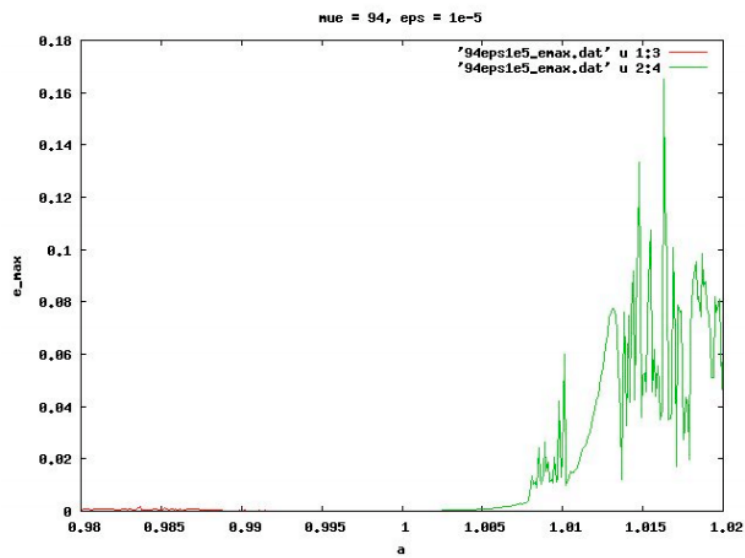


Abb. 23 ... Verhältnis 94 : 1 (wie Saturn zu Erde)

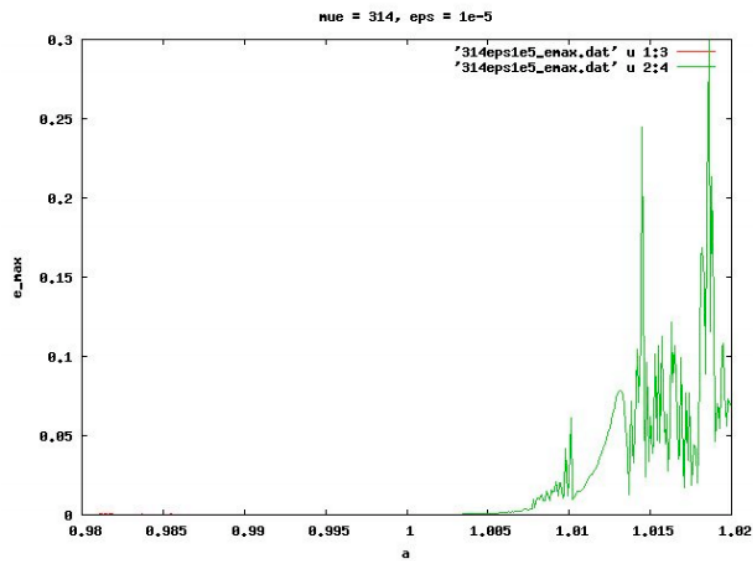


Abb. 24 ... Verhältnis 314 : 1 (wie Jupiter zu Erde)

Vergleicht man die Abbildungen 21 bis 24 sieht man, dass mit steigendem μ die Veränderung der Exzentrizität e_2 von m_2 (dem kleineren Körper) immer stärker wird, die Änderung der Exzentrizität e_1 von m_1 wird dagegen schwächer.

Folgende Tabelle fast alle Grenzwerte $\Delta a_{\max}$ für jedes μ und ε zusammen.

$\Delta a_{\max}$

$\varepsilon \backslash \mu$	1	2	14	94	314
$1.00 \cdot 10^{-6}$	0.0069	0.0069	0.0070	0.0070	0.0069
$3.16 \cdot 10^{-6}$	0.0103	0.0102	0.0101	0.0103	0.0102
$6.32 \cdot 10^{-6}$	0.0129	0.0128	0.0126	0.0125	0.0127
$1.00 \cdot 10^{-5}$	0.0149	0.0146	0.0146	0.0147	0.0143
$3.16 \cdot 10^{-5}$	0.0204	0.0203	0.0203	0.0201	0.0201
$6.32 \cdot 10^{-5}$	0.0246	0.0245	0.0236	0.0242	0.0243
$1.00 \cdot 10^{-4}$	0.0272	0.0272	0.0259	0.0268	0.0258
$3.16 \cdot 10^{-4}$	0.0314	0.0287	0.0287	0.0283	0.0284
$6.32 \cdot 10^{-4}$	-	-	-	-	-
$1.00 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	-
$3.16 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	-
$6.32 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	-
$1.00 \cdot 10^{-2}$	-	-	-	-	-

Tabelle 3 ... $\Delta a_{\max}$ für verschiedene ε und μ

* Werte der markierten Zeile gehören zu Abbildung 19

In dieser Tabelle ist gut sichtbar, dass die Werte für $\Delta a_{\max}$ bei einem kleinen ε , wie zum Beispiel $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-6}$, unabhängig von μ sind. Dies ändert sich auch für grösser werdende ε eigentlich nicht, oder nur kaum.

Graphisch sieht dieses Ergebnis wie folgt aus (Abbildung 25) – die Unabhängigkeit von $\Delta a_{\max}$ zu μ ist besonders für $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$ deutlich sichtbar.

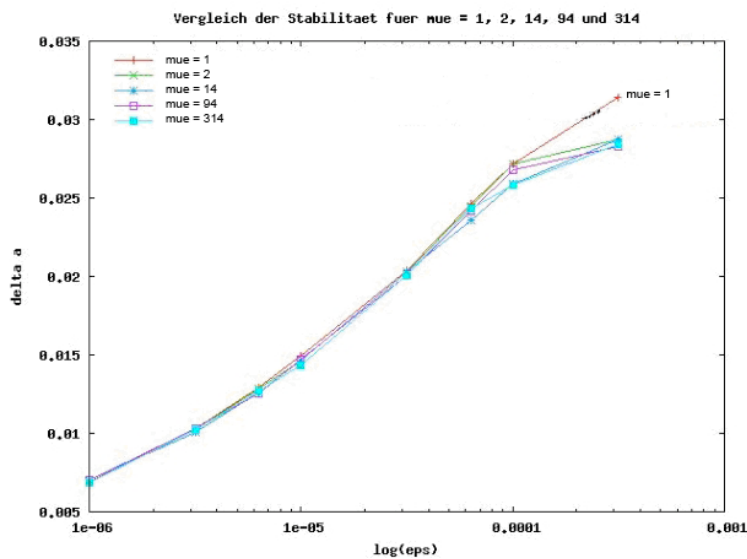


Abb. 25 ... Stabilitätsgrenzen $\Delta a_{\max}$ für verschiedene μ

Somit ist die Frage nach der Abhängigkeit von $\Delta a_{\max}$ zu ε beantwortet: das Verhältnis $\mu = m_1/m_2$ hat nicht wirklich eine Auswirkung auf $\Delta a_{\max}$. Dies trifft um so genauer zu, je kleiner ε ist.

Überschreitet ε den Wert $3.16 \cdot 10^{-4}$, das heisst für $\varepsilon \geq 6.32 \cdot 10^{-4}$ gibt es keine stabilen Bahnen mehr; siehe Tabelle 3. Hier wurden keine $\Delta a_{\max}$ gefunden, da nicht einmal stabile Bereiche vorhanden sind (mit Ausnahme kleinerer stabiler „Inseln“). Im Folgenden dazu mehr.

Der kritische Wert $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$

Auf der Suche nach dem $\Delta a_{\max}$ für $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$ konnten (unabhängig von μ) zwar immer wieder stabile „Inseln“ gefunden werden, das heisst verschiedene Δa für welche die Systeme eine Million Jahre stabil waren, aber da kein eindeutig stabiler Bereich zu finden war, konnte auch keine wirkliche Grenze festgelegt werden.

Stattdessen hat sich herausgestellt, dass es – im Gegensatz zu den Systemen für $\varepsilon < 6.32 \cdot 10^{-4}$ – einen Mindestabstand $\Delta a_{\min}$ gibt, damit das System zumindest einmal stabil ist, und zwar für jedes μ . Das heisst, wenn die Summe der beiden Massen m_1 und m_2 mehr als 0.06% der Zentralmasse m_0 ausmacht und damit nicht mehr sehr viel kleiner ist als die Zentralmasse, dürfen die Bahnen der beiden kleinen Massen nicht zu nahe beieinander liegen.

$\Delta a_{\min}$ für $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$

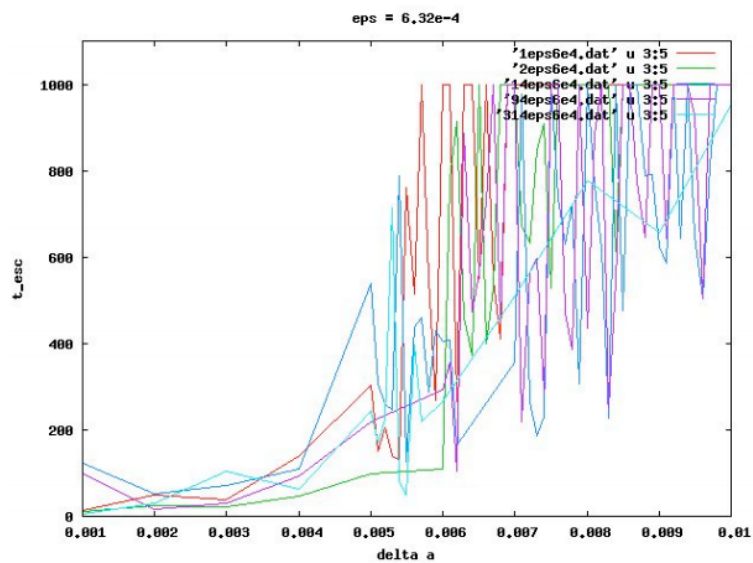


Abb. 26 ... $\Delta a_{\min}$ für verschiedene μ

Abbildung 26 zeigt für $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$ für alle μ den Übergang vom Bereich wo m_1 und m_2 zu nahe bei einander sind um stabil zu sein, zu dem Bereich wo sie zum ersten Mal für eine Million Jahre ein stabiles ExchangeSystem bilden.

Erkennbar ist, dass im Falle von $\mu = 1$ ein deutlich kleinerer Abstand $\Delta a_{\min} = 0.0057$ zwischen m_1 und m_2 ausreicht, als bei $\mu = 314$ ($\Delta a_{\min} = 0.0102$).

$\Delta a_{\min}$

$\epsilon \backslash \mu$	1	2	14	94	314
$6.32 \cdot 10^{-4}$	0.0057	0.0065	0.0075	0.0067	0.0102

Tabelle 4 ... $\Delta a_{\min}$ für verschiedene ϵ und μ

Diese Tabelle zeigt den Mindestabstand $\Delta a_{\min}$ von m_1 zu m_2 für alle μ bei $\epsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$.

Für $\epsilon < 6.32 \cdot 10^{-4}$ und $\epsilon > 6.32 \cdot 10^{-4}$ konnte kein Mindestabstand $\Delta a_{\min}$ gefunden werden.

Graphisch sieht dieses Ergebnis wie folgt aus (Abbildung 27).

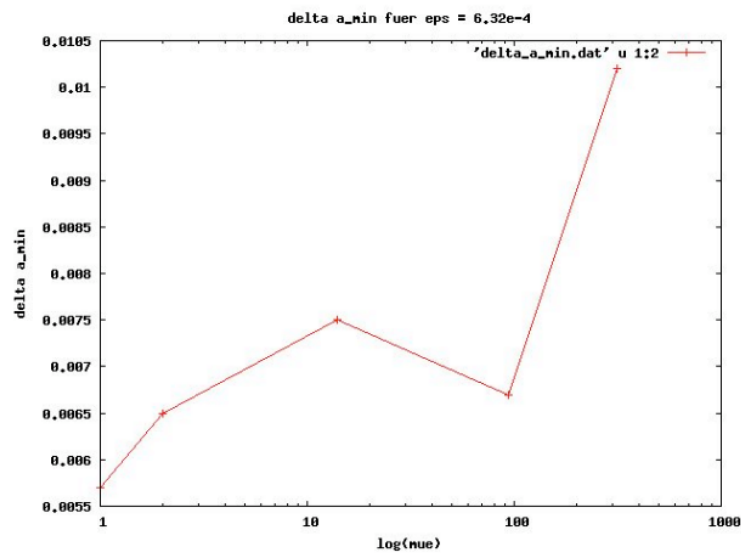


Abb. 27 ... Vergleich μ zu $\Delta a_{\min}$ für $\epsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$

Was passiert für $1 \cdot 10^{-3} < \varepsilon < 1 \cdot 10^{-2}$?

Nachdem es schon bei $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$ kein $\Delta a_{\max}$ gibt, war zu erwarten, dass auch bei noch grösseren ε , wie $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon = 3.16 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-3}$ und $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-2}$, die Suche nach einem $\Delta a_{\max}$ erfolglos bleibt.

Bei diesen Massenverhältnissen ε konnten sogar nicht einmal mehr minimale Abstände $\Delta a_{\min}$ gefunden werden. Zwar lassen sich vereinzelt Abstände Δa zwischen m_1 und m_2 finden, für die das System zumindest einmal eine Million Jahre stabil bleibt, doch sind nicht wirklich stabile Bereiche vorhanden.

Die nicht-vorhandenen Stabilitätsbereiche für $\varepsilon \geq 1 \cdot 10^{-3}$ lassen sich dadurch erklären, dass m_1 und m_2 in einer Entfernung von 1 AU, bzw. $1 + \Delta a$, durch ihre höhere Gesamtmasse und dadurch geringeren Unterschied zu m_0 , die Zentralmasse m_0 schon zu stark beeinflussen und diese sich um den gemeinsamen Massenmittelpunkt zu bewegen beginnt. Dadurch wird das gesamte System destabilisiert.

Es stellte sich die Frage ob es ausreichen würde das Exchange-System weiter von m_0 zu entfernen, um stabile Exchange Orbits zu ermöglichen. Aber auch dieser Versuch hat keine stabilen Bereiche gebracht.

Untersucht habe ich dabei Entfernungen für m_1 zu m_0 von 2, 3, 5 und 9 AU (bei allen vorherigen Rechnungen war der Abstand von m_1 zu m_0 immer 1 AU) und jeweils Δa -Bereiche von 0.001 bis zu dem Punkt wo m_1 und m_2 so weit von einander getrennt waren, dass es zu keinem einzigen Tausch der Bahnen mehr gekommen ist.

Doch auffällig ist, dass je weiter das Exchange-System von m_0 entfernt ist, um so weniger stabile Positionen scheint es zu geben. Bei Abstand 9 waren zum Beispiel überhaupt keine Positionen mehr zu finden für die das System länger als 1000 Jahre stabil blieb. Siehe Abbildungen 28 bis 32.

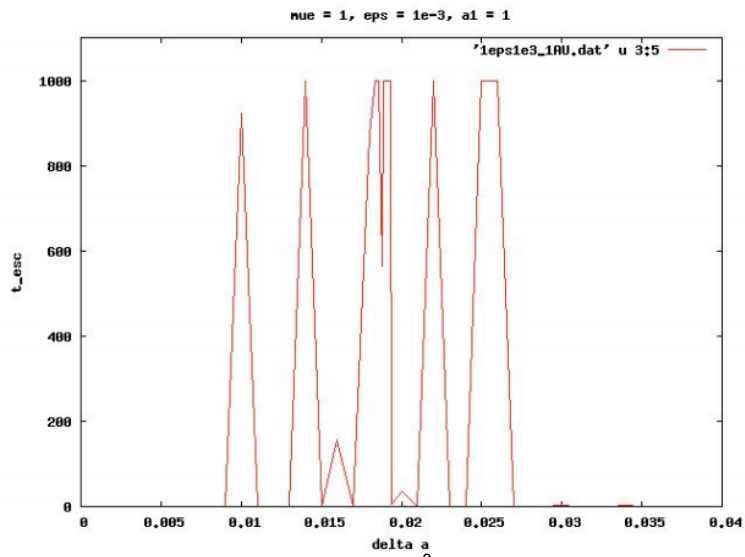


Abb. 28 ... $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 1$

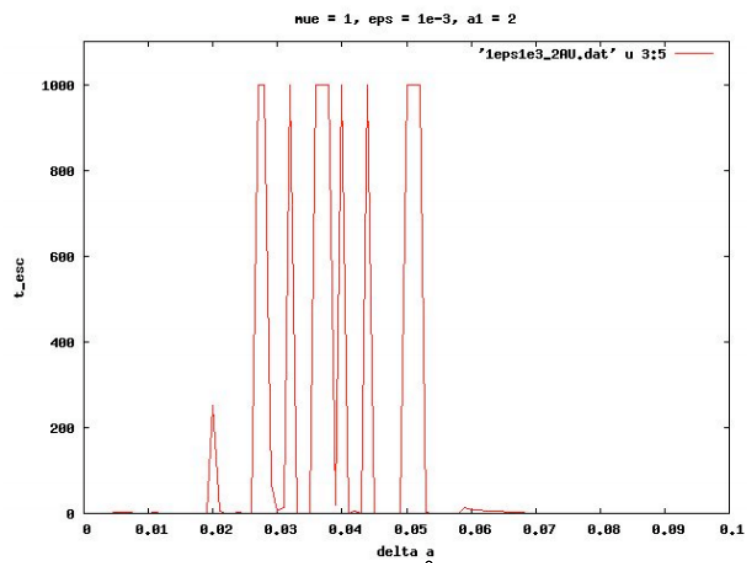


Abb. 29 ... $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 2$

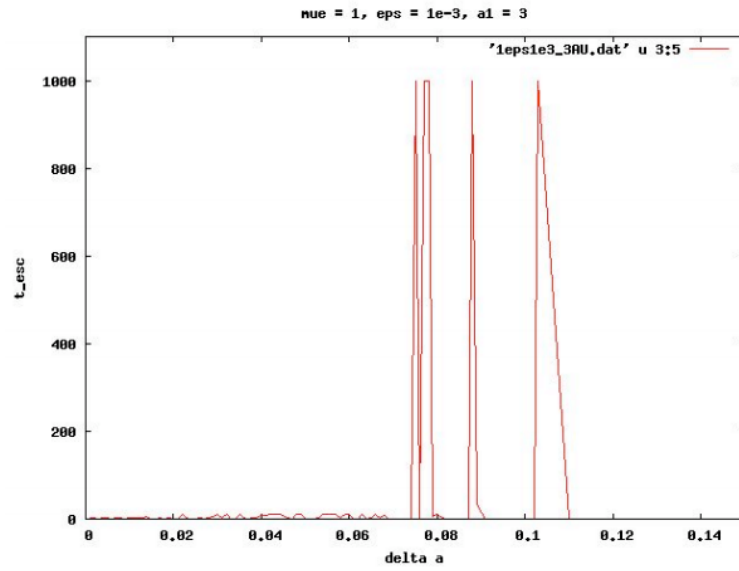


Abb. 30 ... $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 3$

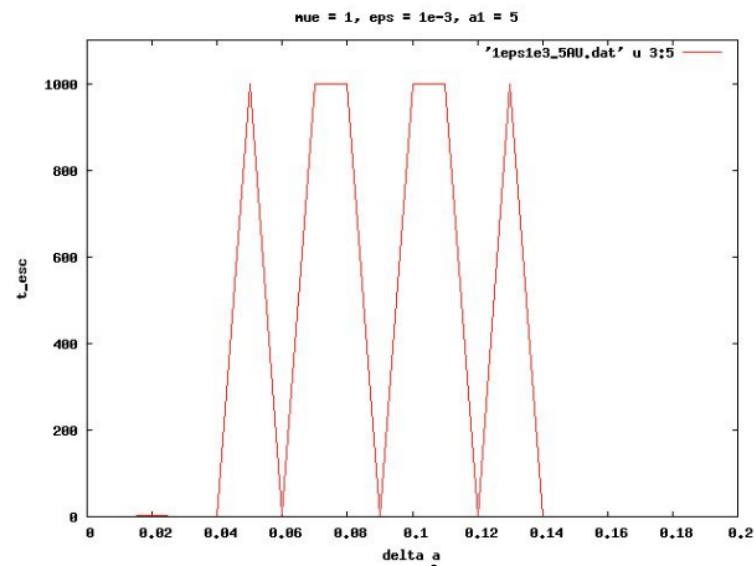


Abb. 31 ... $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 5$

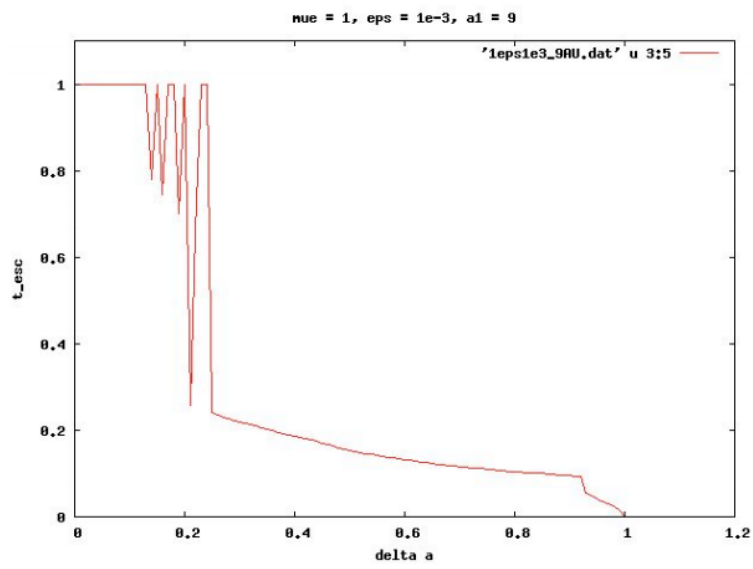


Abb. 32 ... $\epsilon = 1 \cdot 10^{-3}$ und $a_1 = 9$

Zusammenfassung 3.1

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass für die Massenverhältnisse $\varepsilon \leq 3.16 \cdot 10^{-4}$ mit $\varepsilon = (m_1 + m_2)/m_0$ der maximale Abstand $\Delta a_{\max}$ zwischen m_1 und m_2 vom Verhältnis $\mu = m_1/m_2$ unabhängig ist.

Für $\varepsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$ existiert dagegen (auch hier unabhängig von μ) ein Mindestabstand $\Delta a_{\min}$, damit das System zumindest ein Mal über eine Million Jahre stabil ist.

Ein $\Delta a_{\max}$ konnte jedoch nicht gefunden werden, da es ausser einiger stabiler Inseln keinen eindeutigen stabilen Bereich gibt.

Für $\varepsilon \geq 1 \cdot 10^{-3}$ waren weder ein minimaler noch ein maximaler Abstand $\Delta a_{\min}$ bzw. $\Delta a_{\max}$ zu finden. Auch der Versuch m_1 und m_2 weiter von m_0 zu entfernen hat zu keinem Ergebnis für ein $\Delta a_{\max}$ oder zumindest ein $\Delta a_{\min}$ geführt. Es zeigt jedoch, dass je weiter m_1 und m_2 von m_0 entfernt sind, um so instabiler wird das Exchange System.

3.2 Störung der Exchange-Bahnen durch einen zusätzlichen Planeten

Systembeschreibung

Die untersuchten Systeme bestehen immer aus einem Zentralkörper m_0 , zwei kleineren Körpern m_1 und m_2 im Abstand $a_1 = 1$ und $a_2 = a_1 + \Delta a$ zu m_0 und einem Körper m_3 der mindestens von gleicher Masse wie m_1 und m_2 , aber masseärmer als m_0 ist.

Variiert werden hier die Masse und Position von m_3 : dieser Körper entspricht im Verhältnis zu m_0 entweder der Erde ($3 \cdot 10^{-6}$), einer zweifachen Erde ($6.1 \cdot 10^{-6}$), Uranus ($4.4 \cdot 10^{-5}$), Saturn ($2.8 \cdot 10^{-4}$) oder Jupiter ($9.5 \cdot 10^{-4}$) und befindet sich jeweils einmal ausserhalb und einmal innerhalb von m_1 und m_2 .

Das Exchange-System selbst bleibt in diesem Fall immer gleich und gilt auch hier als stabil, wenn es nach mindestens einer Million Jahre nicht auffallend vom Anfangssystem abweicht.

Für diese Untersuchung habe ich folgende Parameter für m_1 und m_2 ausgesucht, die (ohne m_3) tief im stabilen Bereich sind, also ein stabiles System bilden:

	a	e	i	ω	Ω	M	m
m_1	1	$1 \cdot 10^{-6}$	0	275	0	0	$3 \cdot 10^{-6}$
m_2	1.002	$1 \cdot 10^{-6}$	0	95	0	0	$3 \cdot 10^{-6}$

Für m_3 gilt:

	a	e	i	ω	Ω	M	m
m^3	> 1.002 bzw. < 1	$1 \cdot 10^{-6}$	0	185	0	0	$3.0 \cdot 10^{-6}$ $6.1 \cdot 10^{-6}$ $4.4 \cdot 10^{-5}$ $2.8 \cdot 10^{-4}$ $9.5 \cdot 10^{-4}$

Resultate

Am Beispiel von Jupiter sehen die Ergebnisse wie folgt aus:

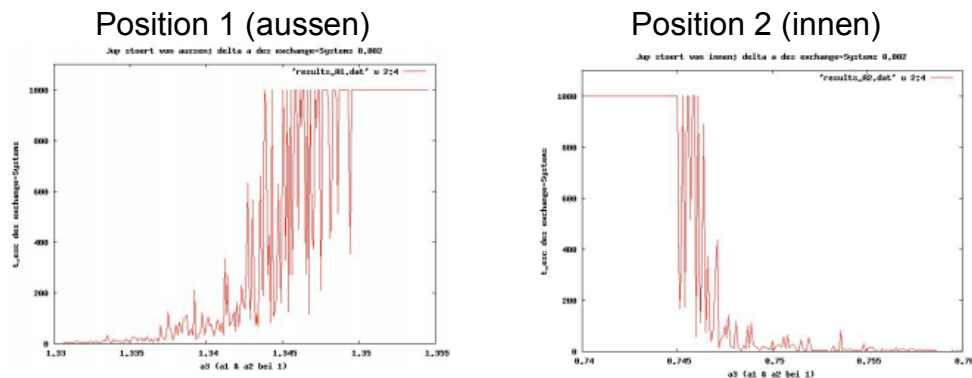


Abb. 33 ... Mindestabstand des Störkörpers m3 (hier Jupiter) um Exchange-Systeme nicht zu destabilisieren

Folgende Tabelle fasst die Grenzwerte für die verschiedenen Positionen und Massen von m_3 zusammen.

		a_3 -Grenze	
m_3	entspricht	Position 1 (aussen)	Position 2 (innen)
$0.30 \cdot 10^{-5}$	Erde	1.1283	0.8879
$0.61 \cdot 10^{-5}$	2xErde	1.1284	0.8880
$0.44 \cdot 10^{-4}$	Uranus	1.2083	0.6331
$0.28 \cdot 10^{-3}$	Saturn	1.3140	0.7610
$0.95 \cdot 10^{-3}$	Jupiter	1.3495	0.7450

Tabelle 5 ... Grenzen für a_3

Der Mindestabstand $\Delta a_{\min}$ vom störenden Körper m_3 zum Exchange System muss tendenziell grösser sein, wenn m_3 sich ausserhalb befindet (also auf Position 1), als wie wenn m_3 innerhalb (Position 2) liegt.

Es gilt also $\Delta a_{\min_aussen} > \Delta a_{\min_innen}$, wobei da der Fall von $m_3 = 0.44 \cdot 10^{-5}$ (was der Masse eines Uranus entspricht) eine Ausnahme bildet.

M_3	$\Delta a_{\min_ausser}$	$\Delta a_{\min_innen}$	Differenz [%]
Erde	0.1283	0.1121	12.63
2fache Erde	0.1284	0.1120	12.77
Uranus	0.2083	0.3669	43.23
Saturn	0.3140	0.2390	23.89
Jupiter	0.3495	0.2550	27.04

Mit m_3 von der Masse eines Jupiters, Saturns, einer Erde oder einer doppelten Erde, kann sich m_3 also auf Position 2 (innen) näher an das Exchange System m_1 und m_2 heranwagen. Dabei handelt es sich bei Erde und doppelter Erde um etwa 13 % und bei Saturn und Jupiter um etwa 24 bzw. 27 %.

Uranus muss auf Position 2 (innen) einen grösseren Abstand zu m_1 und m_2 halten, als auf Position 1 (ausser), wobei hier das Verhältnis zwischen $\Delta a_{\min_innen}$ und $\Delta a_{\min_ausser}$ nicht nur umgekehrt ist als bei den anderen getesteten m_3 , sondern der Unterschied mit etwa 43 % auch um einiges grösser ist.

Grafisch (siehe Abbildung 34) lässt sich erkennen, dass sich für Position 1 (die störende Masse befindet sich ausserhalb des Exchange Systems) eine Abhängigkeit zwischen m_3 und der Entfernung zum Exchange System ergibt: wie zu erwarten zeigt sich, je masseärmer m_3 ist um so näher kann sie sich am Exchange System befinden, bzw. je massereicher um so weiter weg muss m_3 sein um das Exchange System nicht zu destabilisieren.

Für Position 2 (die störende Masse befindet sich zwischen dem Exchange System und der Zentralmasse) zeigt sich dagegen eine Abweichung (siehe Abbildung 34): Eine Masse, die im Verhältnis einem Uranus entspricht, muss scheinbar vom Exchange System weiter weg bleiben um dieses nicht zu destabilisieren, als eine grössere Masse wie beispielsweise Saturn oder Jupiter.

Um zu sehen ob das ein Einzelfall ist, wurde Position 2 mit 13 weiteren Massen der Grösse zwischen einer doppelten Erde und einem Saturn untersucht. Tabelle 6 listet die zusätzlichen Massen und die dazugehörigen Ergebnisse auf.

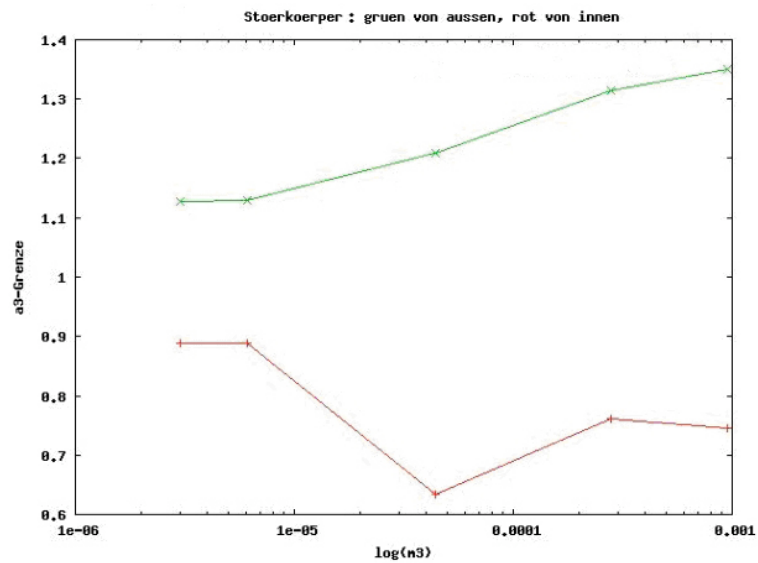


Abb. 34 ... Abhängigkeit zwischen a_3 -Grenze und m_3

oberer Graph ... Störkörper befindet sich ausserhalb des ExchangeSystems
 unterer Graph ... Störkörper befindet sich zwischen m_0 und dem ExchangeSystem

Verhältnis zur Erde (μ)	m_3	entspricht	a_3 -Grenze Position 2 (innen)
1	$0.300 \cdot 10^{-5}$	Erde	0.8879
1.5	$0.450 \cdot 10^{-5}$		0.8881
2	$0.610 \cdot 10^{-5}$	2xErde	0.8880
2.24	$0.672 \cdot 10^{-5}$		0.8879
3	$0.900 \cdot 10^{-5}$		0.8657
5	$0.150 \cdot 10^{-4}$		0.7676
8	$0.240 \cdot 10^{-4}$		0.7672
11	$0.330 \cdot 10^{-4}$		0.7668
12.41	$0.380 \cdot 10^{-4}$		0.7667
14	$0.440 \cdot 10^{-4}$	Uranus	0.6331
21.82	$0.670 \cdot 10^{-4}$		0.6330
27.24	$0.830 \cdot 10^{-4}$		0.6329
34	$0.102 \cdot 10^{-3}$		0.7654
54	$0.162 \cdot 10^{-3}$		0.7639
74	$0.222 \cdot 10^{-3}$		0.7624
94	$0.280 \cdot 10^{-3}$	Saturn	0.7610
110	$0.330 \cdot 10^{-3}$		0.7592
314	$0.950 \cdot 10^{-3}$	Jupiter	0.7450

Tabelle 6 ... genauere Untersuchung von Position 2

Wie die genaueren Untersuchungen mit weiteren Massen m_3 auf der inneren Position ergeben, handelt es sich bei dem „Ausreisser“ Uranus um keine Ausnahme.

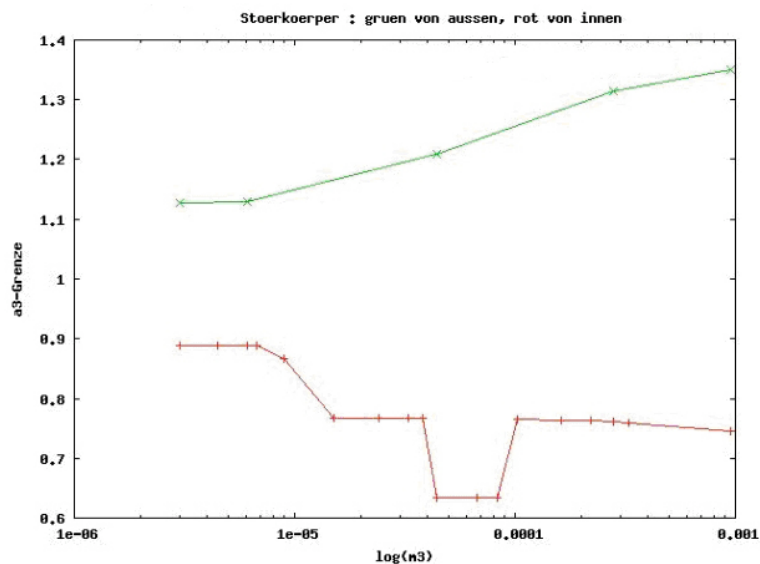


Abb. 35 ... genauere Untersuchung von Position 2

oberer Graph ... Störkörper befindet sich ausserhalb des ExchangeSystems
 unterer Graph ... Störkörper befindet sich zwischen m_0 und dem ExchangeSystem

Die genauere Untersuchung von Position 2 zeigt schon zwischen $\mu = 3$ und $\mu = 5$ einen starken Abfall des Graphen. Für die Verhältnisse $\mu = 5, 8, 11, 12.41$ und ab $\mu = 34$ bis 314 (Jupiter) ist die Tendenz wie zu erwarten fallend, zwar nicht stark, aber doch kontinuierlich. Bei $\mu = 14$, was dem Uranus entspricht, bricht der Graph noch einmal stark ein. Auch $\mu = 21.82$ und 27.24 liefern (fast) gleiche Ergebnisse wie Uranus.

Zusammenfassung 3.2

Die Untersuchung der Stabilität der Exchange Orbits unter dem Einfluss eines störenden Körpers m_3 hat ergeben, dass m_3 um so weiter weg vom Exchange System $m_{1,2}$ sein muss, je massereicher m_3 ist.

Ein Vergleich der Grenzwerte (Mindestabstände $\Delta a_{\min}$) für die innere (m_3 befindet sich zwischen m_0 und $m_{1,2}$) und äussere (m_3 befindet sich von m_0 weiter weg als $m_{1,2}$) Position, so muss eine Masse m_3 ausserhalb von $m_{1,2}$ weiter weg sein, als die gleiche Masse innerhalb des Exchange Systems: $\Delta a_{\min_ausser} > \Delta a_{\min_innen}$.

Eine Ausnahme bildet dabei ein m_3 der Grösse zwischen einem Uranus ($\mu = 14$) und $\mu = 27.24$. Diese müssen sich auf der inneren Position vom Exchange System weiter weg befinden, als beispielsweise $\mu = 94$ (Saturn) oder $\mu = 314$ (Jupiter). Für $\mu = 14$ gilt ausserdem $\Delta a_{\min_ausser} < \Delta a_{\min_innen}$.

4. Abhängigkeit von der Integrationszeit

Für die bisherigen Untersuchungen war eines der Stabilitätskriterien, dass das untersuchte Exchange-System mindestens eine Million Jahre stabil bleibt.

Da eine Million Jahre im Vergleich zum Alter eines Planetensystems eher eine sehr kurze Zeitspanne darstellt, hat sich die Frage gestellt, ob – und wenn ja: wie – sich meine Rechenergebnisse ändern würden, wenn man als Stabilitätskriterium mehr als eine Million Jahre annimmt. Darum habe ich einige Systeme auch auf ihre Stabilität während zwei Millionen Jahren getestet. Die Ergebnisse haben sich dabei fast gar nicht verändert.

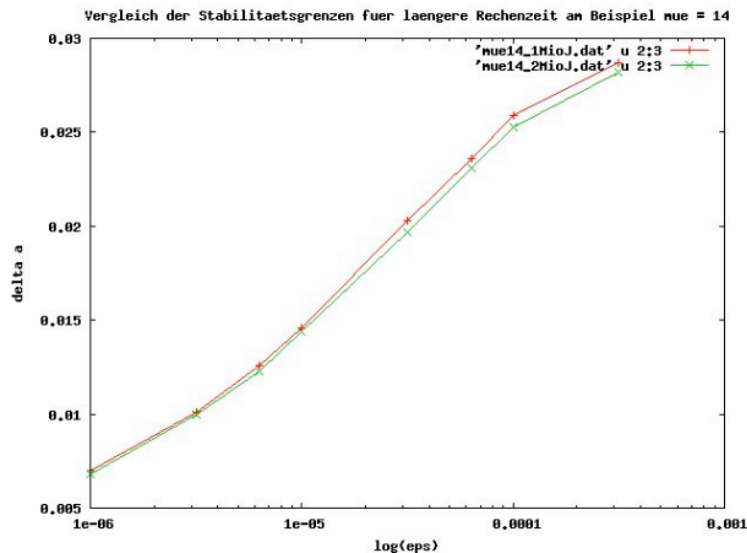


Abb. 36 ... Vergleich Rechenzeit für $\mu = 14$

In Abbildung 36 ist am Beispiel für $\mu = 14$ (was Systemen mit m_1 zu m_2 wie Uranus zu Erde entspricht) für alle ϵ (wie in den bisherigen Rechnungen) der Vergleich zwischen den Ergebnissen für $\Delta a_{\max}$ für eine Million Jahre zu zwei Millionen Jahre zu sehen. Die Ergebnisse für $\Delta a_{\max}$ mit Integrationszeit $t = 2$ Millionen Jahre (unterer Graph) haben sich gegenüber denen mit Integrationszeit $t = 1$ Million Jahre (oberer Graph) im Durchschnitt um nur 2.09 % geändert, was sehr wenig ist.

Die Änderungen bei Systemen mit $\mu = 1, 2, 94$ und 314 liegen ähnlich:

μ	durchschnittl. Änderung in %
1	0.95
2	0.84
94	3.29
314	2.70

Tabelle 7 ... Durchschnittl. Änderung von $\Delta a_{\max}$ bei längerer Rechenzeit (2 Mio. Jahre)

$\Delta a_{\max}$ für Stabilität 2 Millionen Jahre

$\epsilon \backslash \mu$	E : E 1	2E : E 2	U : E 14	S : E 94	J : E 314
$1.00 \cdot 10^{-6}$	0.0068	0.0069	0.0068	0.0069	0.0069
$3.16 \cdot 10^{-6}$	0.0101	0.0100	0.0100	0.0100	0.0099
$6.32 \cdot 10^{-6}$	0.0125	0.0125	0.0123	0.0124	0.0124
$1.00 \cdot 10^{-5}$	0.0148	0.0146	0.0144	0.0139	0.0139
$3.16 \cdot 10^{-5}$	0.0204	0.0201	0.0197	0.0197	0.0195
$6.32 \cdot 10^{-5}$	0.0245	0.0245	0.0231	0.0230	0.0230
$1.00 \cdot 10^{-4}$	0.0272	0.0272	0.0253	0.0267	0.0252
$3.16 \cdot 10^{-4}$	0.0314	0.0283	0.0282	0.0275	0.0276

Tabelle 8 ... $\Delta a_{\max}$ für verschiedene ϵ und μ bei 2 Mio Jahren Integrationszeit

Da sich also die Ergebnisse nach doppelter Integrationszeit nur geringfügig ändern, lässt sich sagen, dass die Bedingung der Stabilität eines Systems über mindestens eine Million Jahre für die Parameter $a_1 = 1\text{AU}$, bzw. $a_2 = a_1 + \Delta a \approx 1\text{AU}$ (und für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit) ausreichend ist.

5. Zusammenfassung der Diplomarbeit

Im ersten Teil meiner Arbeit war die Stabilitätsgrenze, bzw. der maximale Abstand $\Delta a_{\max}$ zwischen den beiden ExchangeKörpern m_1 und m_2 gesucht. Dabei wurden verschiedene Verhältnisse $\mu = m_1/m_2$ mit $m_1 = m_2$ und $m_1 \neq m_2$ untersucht.

Weiters galt es herauszufinden, wie die Abhängigkeiten zwischen $\Delta a_{\max}$ und den Relationen $\mu = m_1/m_2$ und $\varepsilon = (m_1+m_2)/m_0$ aussehen.

Dafür wurden insgesamt 65 Systeme in folgenden Verhältnissen getestet:

$$1 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-2} \quad \text{mit } \Delta \varepsilon = 10^{-1}$$

$$3.16 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 3.16 \cdot 10^{-3} \quad \text{mit } \Delta \varepsilon = 10^{-1}$$

$$6.32 \cdot 10^{-6} \leq \varepsilon \leq 6.32 \cdot 10^{-3} \quad \text{mit } \Delta \varepsilon = 10^{-1}$$

mit jeweils $\mu = 1, 2, 14, 94$ und 314 .

Als stabil galten diese Systeme, wenn sich ihre Anfangsbedingungen nach einer Integrationszeit von einer Million Jahren nicht oder nur vernachlässigbar gering verändert haben. Das heisst Parameter wie die Exzentrizität e , die Inklination i und die Halbachse a durften keine groben Veränderungen erleben.

Die Anfangsbedingungen waren:

	a	e	i	ω	Ω	M	m
m_0	0	0	0	0	0	0	1
m_1	1	$1 \cdot 10^{-6}$	0	275	0	0	vari
m_2	$1 + \Delta a$	$1 \cdot 10^{-6}$	0	95	0	0	vari

Die Resultate $\Delta a_{\max}$:

$\epsilon \backslash \mu$	1	2	14	94	314
$1.00 \cdot 10^{-6}$	0.0069	0.0069	0.0070	0.0070	0.0069
$3.16 \cdot 10^{-6}$	0.0103	0.0102	0.0101	0.0103	0.0102
$6.32 \cdot 10^{-6}$	0.0129	0.0128	0.0126	0.0125	0.0127
$1.00 \cdot 10^{-5}$	0.0149	0.0146	0.0146	0.0147	0.0143
$3.16 \cdot 10^{-5}$	0.0204	0.0203	0.0203	0.0201	0.0201
$6.32 \cdot 10^{-5}$	0.0246	0.0245	0.0236	0.0242	0.0243
$1.00 \cdot 10^{-4}$	0.0272	0.0272	0.0259	0.0268	0.0258
$3.16 \cdot 10^{-4}$	0.0314	0.0287	0.0287	0.0283	0.0284

- Aus den Resultaten zusammengefasst, lässt sich sagen, dass für die Massenverhältnisse $\epsilon \leq 3.16 \cdot 10^{-4}$ mit $\epsilon = (m_1 + m_2)/m_0$ ein maximaler Abstand $\Delta a_{\max}$ zwischen m_1 und m_2 existiert, um ein stabiles Exchange System zu ermöglichen.
Der maximale Abstand $\Delta a_{\max}$ ist dabei vom Verhältnis $\mu = m_1/m_2$ unabhängig und nimmt somit mit wachsendem ϵ zu.
- Für $\epsilon = 6.32 \cdot 10^{-4}$ konnte jedoch kein $\Delta a_{\max}$ gefunden werden, da es ausser einiger stabiler Inseln keinen eindeutigen stabilen Bereich gibt.
Dafür existiert dagegen (auch hier unabhängig von μ) ein Mindestabstand $\Delta a_{\min}$, damit das System zumindest ein Mal über eine Million Jahre stabil ist.
- Für $\epsilon \geq 1 \cdot 10^{-3}$ waren weder ein minimaler noch ein maximaler Abstand $\Delta a_{\min}$ bzw. $\Delta a_{\max}$ zu finden. Auch der Versuch m_1 und m_2 weiter von m_0 zu entfernen (von $a = 1$ auf $a = 2, 3, 5$ und 9) hat zu keinem Ergebnis für ein $\Delta a_{\max}$ oder zumindest ein $\Delta a_{\min}$ geführt. Es zeigt jedoch, dass je weiter m_1 und m_2 von m_0 entfernt sind, um so instabiler wird das Exchange System.

Im zweiten Teil meiner Arbeit ging es darum herauszufinden, wie nahe sich ein zusätzlicher Körper m_3 an dem Exchange System befinden kann, ohne dieses System zu destabilisieren.

Dazu wurden verschiedene Massen m_3 gewählt, die alle nacheinander jeweils einmal ausserhalb (Position 1) des Exchange Systems und einmal innerhalb (Position 2; also zwischen m_0 und $m_{1,2}$) des Systems gesetzt wurden.

Für m_1 und m_2 wurde ein System gewählt, das ohne störenden Körper ein schön stabiles Exchange System bildet, wobei m_1 und m_2 gleich waren und zweier Erden entsprachen. Für m_3 wurden Massen gewählt, die einer Erde, einer doppelten Erde, einem Uranus, Saturn und Jupiter entsprechen.

- Wie erwartet hat sich herausgestellt, dass sich für Position 1 (aussen) eine Abhängigkeit zwischen der Masse m_3 und Mindestabstand $\Delta a_{\min}$ zum Exchange System $m_{1,2}$ ergibt. Je massereicher m_3 war, um so weiter weg musste das Objekt bleiben, um den stabilen Bahnwechsel von m_1 und m_2 nicht zu stören.
- Im Falle von Position 2 (innen) gab es allerdings eine Abweichung. Ein Körper der Masse eines Uranus muss demnach um einiges weiter weg bleiben als beispielsweise die beiden massereicheren Objekte, die einem Saturn oder einem Jupiter entsprechen würden.
- Genauere Untersuchungen der inneren Position mit weiteren 13 Massen verschiedener Grössen haben ergeben, dass der Fall Uranus (entspricht 14-facher Erdmasse) keine Ausnahme bildet. Auch Objekte von bis zu 27.24-facher Erdmasse müssen von $m_{1,2}$ weiter weg sein, als Saturn und Jupiter.
- Ausserdem gilt (mit Ausnahme für gerade beschriebenen Fall):
 $\Delta a_{\min_aussen} > \Delta a_{\min_innen}$.

Für dieses überraschende Phänomen der Exchange Orbits ist bislang nur ein einziges Beispiel bekannt: Saturn und seine beiden Monde Janus und Epimetheus. Diese befinden sich in etwa 151400 km Entfernung zu Saturn, auf fast gleichen Bahnen und wechseln alle vier Jahre ihre Plätze.

Auch wenn es noch keine weiteren Beispiele für die Exchange Orbits gibt, so besteht durchaus die Möglichkeit dass in extrasolaren Planetensystemen weitere Exchange Systeme existieren.

C. Programmcodes

ExchangeScanner 1 (in Python)

```
# Veras interdimensionales ExchangeOrbits-Labor
# Aufgabe 1 ... Stabilitaet in Abhaengigkeit von delta a
# 19.3.08
```

```
import sys
import csv
import os
# Bibliothekenimport
```

```
def main():
```

```
    # Parameter:
```

```
    da_schritt = 0.0001
    # Schrittweite
```

```
    eps = [1E-06, 3.16E-06, 6.32E-06,\
            1E-05, 3.16E-05, 6.32E-05,\
            1E-04, 3.16E-04, 6.32E-04,\
            1E-03, 3.16E-03, 6.32E-03]
```

```
    # Massenverhältnis epsilon=(m1+m2)/m0 mit m0 = 1
```

```
    aBereich=(1E-06,(0.0068,0.0083), 3.16E-06,(0.0101,0.0122), 6.32E-06,(0.0125,0.0152),\
              1E-05,(0.0142,0.0172), 3.16E-05,(0.0196,0.0232), 6.32E-05,(0.0241,0.0287),\
              1E-04,(0.0256,0.0312), 3.16E-04,(0.0305,0.0372), 6.32E-04,(0.0225,0.0352),\
              1E-03,(0.0050,0.0102), 3.16E-03,(0.0050,0.0102), 6.32E-03,(0.0100,0.0250))
```

```
    mue = 314
```

```
    # Massenverhältnis mue = m1/m2 mit mue =
```

```
    # 314:1 für Jupiter:Erde,
    # 94:1 für Saturn:Erde,
    # 14:1 Uranus:Erde,
    # 2:1 doppelteErde:Erde,
    # 1:1 m1 = m2
```

```
    abw= 0.002 # threshold fürerkennung von escape
```

```
    for e in eps:
```

```
        da_start,da_ende = aBereich[e]
        na = int((da_ende-da_start)/da_schritt)
        m2 = e/(mue+1)
```

```
        m1 = m2*mue
        # Massen ausrechnen
        for n in range(na):
            a = da_start+(n)*da_schritt
            superWrite(m1,m2,a)
            lieStart()
            N, t = zaehlen(abw)
            ergebnis(mue, e, a, N, t, m1, m2)

def superWrite(m1,m2,a):
    # erster Wert = Integrationszeit, hier änderbar
    s1=""439.30d6 365.25d0 /STP,PRT      Saturnsystem
    0 /NI [0=EL,1=HEL,2=BAR]
    12 /N [Anzahl der Lie-Terme]
    3 0 /N_masse,N_masselos
    -09 /logeps
    1D-11 /SWMINI = minimale Schrittweite
    0d0 0 /swsum(t0[age]), nstep
    ""
    0.d0, 0.d0, 0.d0, 0.d0, 0.d0, 1.d0 / SATURN
    ""
    s2=""1.d0 0.000001 0.d0 275.d0 0.d0 0.d0"" # nach s2: m1
    s3=""0.000001 0.d0 95.d0 0.d0 0.d0"" # vor s3: a+1; nach s3: m2
    a2 = a+1
```

```
    alt = sys.stdout
```

```
    try:
```

```
        sys.stdout = open("super.in","w+")
```

```
    except:
```

```
        print "file-fehler"
```

```
        return
```

```
    print s1,
```

```
        print s2, "%1.2e" % m1
```

```
        print "%1.4f" % a2, s3, "%1.2e" % m2
```

```
        sys.stdout.close()
```

```
        sys.stdout = alt
```

```
    # schreibt für jeden durchlauf ein neues super.in
```

```

def lieStart():
    print "lie ...",
    os.spawnl(os.P_WAIT, "a_ohne.out")
    print "ist fertig"
    # startet das lie-programm (a_ohne.out) und wartet bis es fertig ist

def zaehlen(abw):
    # abw ...maximale Abweichung in a (Halbachse) - Stabilitätsbedingung

    reader = csv.reader(open("ele.dat", "rb"))
    # Def des "reader-Objekts" (Tabelle)

    for i in range(1,5):
        reader.next()
    # erste 4 zeilen überlesen

    mina=float(str(reader.next())[26:35])
    # Startwert von Planet 1 (normalerweise = 1)

    maxa=float(str(reader.next())[26:35])
    print "Startwert von P2:", maxa

    Zaehler=0
    # Jetzt gibts den Zähler, der - wenn er einmal gross ist - die Wechsel zählen wird

    gemerkt=1
    # merkt sich vorherigen Zustand (1 fuer a2 > a1, -1 fuer a1>a2)

    for row in reader:
        a1=float(str(row)[26:35])    # a-Wert von Planet 1
        t=float(str(row)[6:17])
        try:
            a2=float(str(reader.next())[26:35]) # a-Wert von Planet 2
        except:
            print "ACHTUNG! zu frueh abgebrochen?"
            break

        if (a2-a1)>0:
            sig = 1
        else:
            sig = -1

        if sig!=gemerkt:
            Zaehler=Zaehler+1
            gemerkt = sig

        if Zaehler<2:
            # sucht Maximum und Minimum von a
            if (a2>maxa): maxa=a2
            if (a1<mina): mina=a1
            diff = maxa-mina

```

```

if abs(a2-a1) > (diff+abw):
    print "ESCAPE!!", "t=", t, "#=", Zaehler
    break

return Zaehler,t
# zählt die anzahl der exchanges (N) und escape time (t)

def ergebnis(mue, e, a, N, t, m1, m2):
    alt = sys.stdout
    try:
        sys.stdout = open("results.dat", "a")
    except:
        print "file-fehler"
    return

    print "%i %1.2e %1.4f %i %4.3f %1.2e %1.2e" % (mue, e, a, N, t, m1, m2)

    sys.stdout.close()
    sys.stdout = alt
    print mue, e, a, N, t
    # schreibt ein file mit den ergebniswerten

main()

```

ExchangeScanner 2 (in Python)

```

# Veras interdimensionales ExchangeOrbits-Labor
#
# Aufgabe 2 ... Stabilitaet bei stoerendem Koerper
# 01.05.08

import sys
import csv
import os
# Bibliothekenimport

def main():
    # Parameter:

    pos = [2]
    # Position von Jupiter: 1 ... ausserhalb; 2 ... innerhalb

    aBereich={1:(1.2093, 1.2135),2:(0.6332,0.6337)}
    # a3

    da_schritt = 0.0001
    # Schrittweite fuer a-Bereich

    abw= 0.015 # threshold für erkennung von escape

    for p in pos:
        da_start,da_ende = aBereich[p]
        na = int(((da_ende-da_start)/da_schritt)

        for n in range(na):
            a = da_start+(n)*da_schritt
            superlin(a)
            lieStart()
            N, t = zaehlen(abw)
            ergebnis(p, a, N, t)
            os.system("mv ele.dat ele"+str(p)+"_"+str(a)+".dat")

def superlin(a):
    # erster Wert = Integrationszeit, hier änderbar
    s1 = ""365.25d6 365.25d1 /STP.PRT
    0
    12 /N1[0=EL,1=HEL,2=BAR]
    4 0 /N [Anzahl der Lie-Terme]
    -11 /N_masse,N_masse/os
    1D-11 /SWMINI = minimale Schrittweite

```

```

0d0 0 /swsum(t0[tag]), nstep

0d0, 0d0, 0d0, 0d0, 0d0, 0d0, 1.d0 / STERN
1d0 0.000001 0d0 275.d0 0d0 0d0 0d0 3E-06 / P1
1.002 0.000001 0d0 95.d0 0d0 0d0 0d0 3E-06 / P2
""
s4="" 0.000001 0d0 185.d0 0d0 0d0 0.44E-04/ P_stoer"" # vor s4: a

alt = sys.stdout
try:
    sys.stdout = open("super.in","w+")
except:
    print "file-fehler"
    return

print s1,
print "%1.4f" % a, s4
sys.stdout.close()
sys.stdout = alt
# schreibt für jeden durchlauf ein neues super.in

def lieStart():
    print "lie ...",
    os.spawn(os.P_WAIT, "a_ohne.out")
    print "ist fertig!"
    # startet das lie-programm (a_ohne.out) und wartet bis es fertig ist

def zaehlen(abw):
    # abw ...maximale Abweichung in a (Halbachse) - Stabilitätsbedingung

    reader = csv.reader(open("ele.dat", "rb"))
    # Der des "reader-Objekts" (Tabelle)

    for i in range(1,5):
        reader.next()
    # erste 4 zeilen überlesen

    mina=float(str(reader.next())[26:35])
    # Startwert von Planet 1 (hier = 1)

    maxa=float(str(reader.next())[26:35])
    # Startwert von Planet 2 (hier = 1,002)

```

```

reader.next()
# Werte von Planet 3 werden ausgelassen, da uninteressant

Zaehler=0
# jetzt gibts den Zaehler, der - wenn er einmal gross ist - die Wechsel zählen
# wird

gemerkt=1
# merkt sich vorherigen Zustand (1 fuer a2 > a1, -1 fuer a1>a2)

for row in reader:
    a1=float(str(row)[26:35])      # a-Wert von Planet 1
    t=float(str(row)[6:17])
    try:
        a2=float(str(reader.next())[26:35]) # a-Wert von Planet 2
    except:
        print "ACHTUNG! zu frueh abgebrochen?"
        break

    try:
        reader.next() # Planet 3 auslassen
    except:
        print "ACHTUNG! zu frueh abgebrochen?"
        break

# "try", als Fehlerabfang nach manuellem Abbruch von Lie, fuer den Fall dass Zeilen fehlen

if (a2-a1)>0:
    sig = 1
else:
    sig = -1

if sig!=gemerkt:
    Zaehler=Zaehler+1
    gemerkt = sig

if Zaehler<2:
    # sucht Maximum und Minimum von a
    if (a2>maxa): maxa=a2
    if (a1<mina): mina=a1
    diff = maxa-mina

if abs(a2-a1) > (diff+abw):
    print "ESCAPE!!!", "t=", t, "#=", Zaehler
    break

return Zaehler,
# zählt die anzahl der exchanges (N) und escape time (t)

def ergebnis(p, a, N, t):
    alt = sys.stdout
    try:
        sys.stdout = open("results.dat", "a")

```

```

except:
    print "file-fehler"
    return

print "%i %1.4f %i %4.3f" % (p, a, N, t)

sys.stdout.close()
sys.stdout = alt
print p, a, N, t
# schreibt ein file mit den ergebniswerten

main()

```

D. Literaturverzeichnis

- [1] Auner, G.: 2001, „Exchange Orbits“, in F. Freistetter, R. Dvorak and B. Erdi (eds.), 2nd Austrian Hungarian Workshop on Trojans and related Topics, *Eötvös University Press* p.49
- [2] Auner, G., Dvorak, R.: 1995, „Close Planetary Orbits and their Cosmogonic Importance“, in J. Hagel, M. Cunha, R. Dvorak (eds.), *Perturbation Theory and Chaos in Nonlinear Dynamics with Emphasis to Celestial Mechanics*, Universität Wien, p.1 - 17
- [3] Spirig, F., Waldvogel, J.: 1985, „The three-body problem with two small masses: A singular-perturbation approach to the problem of Saturn's coorbiting satellites“, in V.G. Szebehely (ed.), *Stability of the Solar System and its minor natural and artificial bodies*, D. Reidel Publishing Company, p.53 - 63
- [4a] Wikipedia: „Janus (Mond)“, [http://de.wikipedia.org/wiki/Janus_\(Mond\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Janus_(Mond)), (26.09.2009)
- [4b] Wikipedia: „Epimetheus (Mond)“, [http://de.wikipedia.org/wiki/Epimetheus_\(Mond\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Epimetheus_(Mond)), (26.09.2009)
- [5] Yoder, C.F., Colombo, G., Synott, S.P., Yoder, K.A.: 1983, „Theory of motion of Saturn's coorbiting satellites“, *Icarus* **53**, pp. 431 - 443
- [6] Hanslmeier, A., Dvorak, R.: 1984, „Numerical integration with Lie-series“, *Astron. Astrophys.* **132**, pp. 203 - 207
- [7] Buratti, B.J., Thomas, P.C.: 2007, „Planetary Satellites“, in L.A. McFadden, P.R. Weissman, T.V. Johnson (eds.), *Encyclopedia of the Solar System*, Second Edition, pp. 365 - 382
- [8a] NASA JPL: „Saturn: Moons: Janus“, http://sse.jpl.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Sat_Janus (26.09.2009)
- [8b] NASA JPL: „Saturn: Moons: Epimetheus“, http://sse.jpl.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Sat_Epimetheus (26.09.2009)

LEBENS LAUF

Vera Steinecker

Jahngasse 39/43
A-1050 Wien
Email: veramst@gmx.net

Persönliche Daten

Geburtsdatum	07.01.1982 in Wien
Familienstand	verlobt, 1 Kind (geb. 05.01.2009)

Ausbildung

seit März 2008	Diplomarbeit: Exchange Orbits
Apr. 2005	erste Diplomprüfung
Okt. 2001 – dato	Studium der Astronomie Universität Wien
Mai 2000	Schulabschluss mit Abitur Deutsche Schule Barcelona, Spanien

Studienbegleitende Tätigkeiten

Wintersemester 2004	Mitarbeit am Blazhko-Projekt: photometrische Beobachtung und Datenreduktion des Sterns OV And
---------------------	---

Sprachen

Deutsch	Muttersprache
Englisch	fließend
Spanisch	fließend

Erfahrungen, Kenntnisse

Jul. – Aug. 2001	Praktikum in Werbeagentur Klasan
Aug. 2000 – März 2001	Australienaufenthalt aus eigenem Interesse (Arbeit als AuPair)
Aug. 1982 – Aug. 2000 (1991-94 ausgenommen)	Auslandsaufenthalte in Bulgarien (3 Jahre), Spanien (4+6 Jahre) und Saudi Arabien (2,5 Jahre), bedingt durch den Beruf meines Vaters

Wien im Oktober 2009