

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Verständnis von Schüler:innen zur Thematik der
Bruchrechnung. Eine jahrgangs- und
schultypenübergreifende Analyse.“

verfasst von / submitted by

Katharina Payer, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Betreut von / Supervisor:

UA 199 502 520 02

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Lehrverbund
UF Biologie und Umweltkunde Lehrverbund
UF Mathematik Lehrverbund

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Abstract Deutsch

Die Thematik der Bruchrechnung stellt für viele Schüler:innen eine besondere Hürde im Mathematikunterricht dar. Eine Vielzahl an Wissenschaftler:innen beschäftigte sich vor allem in den letzten 40 Jahren, sowohl im angloamerikanischen als auch im deutschsprachigen Raum, mit diesem mathematischen Themenfeld. Dabei konnte beispielsweise bestätigt werden, dass Probleme sowohl bei der Behandlung der Bruchrechnung gemeiner Brüche als auch bei Dezimalbrüchen bestehen. Als Ursachen für die festgestellten Schüler:innenschwierigkeiten nennen Autor:innen neben den fehlenden bzw. in einem unzureichenden Ausmaß vorhandenen Grundvorstellungen auch Defizite im tatsächlichen Verständnis auf Seiten der Schüler:innen. Manche Wissenschaftler:innen stellen auch das momentane Vorgehen im Mathematikunterricht in Frage und sehen einen möglichen Grund für die vorhandenen Schwierigkeiten bei den Lehrpersonen. Die Ergebnisse des sogenannten PALMA-Projekts in Deutschland waren unter anderem Anlass dafür, Änderungen im Bereich der Lehrer:innenaus- und fortbildung anzustreben, auch wurden Unterrichtsmaterialien überarbeitet.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Einblick darin zu erhalten, wie Schüler:innen verschiedener Schulstufen und Schultypen in Österreich mit diversen Aufgaben zur Thematik der Bruchrechnung umgehen, welche Lösungsstrategien, Fehlvorstellungen und Fehlermuster erkennbar sind. Auch ist es von Interesse, welche Unterschiede in den Ergebnissen zwischen den beiden Schulstufen (6. und 8. Schulstufe) und den beiden Schultypen – Mittelschule und AHS-Unterstufe – bestehen. Als Grundlage zur Erhebung dieser Daten diente ein Fragebogen, welcher an drei Schulen in Niederösterreich von insgesamt 194 Schüler:innen bearbeitet wurde.

Im Rahmen der Datenauswertung zeigten sich, unter Verwendung des t-Testes, vier der fünf formulierten Hypothesen als bestätigt. Beispielsweise erreichten Schüler:innen der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe bessere Ergebnisse als Schüler:innen der 6. Schulstufe der Mittelschulen. Auch die Teilnehmer:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe erzielten bessere Ergebnisse als Schüler:innen der 8. Schulstufe der Mittelschulen. Zudem konnten Vergleiche zu früheren Studienergebnissen angestellt werden, welche sich je nach Aufgabentyp überschneiden bzw. doch deutlich unterscheiden.

Schlagwörter: Bruchrechnung, Grundvorstellungen, Lösungshäufigkeiten, Fehlerstrategien, Fehlermuster und Fehlertypen, Mittelschule, AHS-Unterstufe

Abstract English

In mathematics classes, the topic of fractions presents a great difficulty for numerous students. Therefore, a great number of researchers in both the Anglo-American and the German-speaking world have dealt with this mathematical and pedagogical issue over the last 40 years. It has been confirmed, for example, that problems exist in the treatment of both common fractions and decimal fractions. Common sources for these difficulties identified in the literature are not only a lack of basic knowledge but also deficits in the actual understanding on the part of the students. Some researchers have also questioned the current approach to teaching mathematics and suggested that teachers themselves are a possible reason for the current difficulties. The results of the so-called PALMA project in Germany were, among other aspects, a reason to strive for changes in teacher training and further education, and for revision to the teaching materials.

The aim of this thesis is to provide an insight into how students in different Austrian school types and at different levels deal with various tasks on the topic of fractions as well as which solution strategies, misconceptions and error patterns are recognisable. It is also of interest to figure out what differences can be found in the results between two school levels (6th and 8th grade) and two school types – *Mittelschule* and the lower-secondary grammar (AHS) school. A questionnaire was used which was completed by a total of 194 people at three schools in Lower Austria.

In the course of the data evaluation, four of the five formulated hypotheses were confirmed using the t-test. For example, students in the 6th grade of lower secondary schools achieved better results than students in the 6th grade of *Mittelschulen*. The participants in the 8th grade of lower-secondary grammar school also scored better than students in the 8th grade of *Mittelschulen*. In addition, comparisons with earlier studies could be drawn, which, however, yielded similar or significantly different results depending on the task type.

Keywords: Fractions, basic concepts, solution frequencies, error strategies, error patterns and error types, *Mittelschulen*, lower-secondary AHS

Danksagung

Mit dem Verfassen dieser Arbeit neigt sich meine Zeit an der Universität Wien dem Ende zu. An dieser Stelle ist es mir daher ein besonderes Anliegen, meinen Wegbegleiter:innen und meiner Familie ein herzliches Dankeschön auszusprechen:

Zunächst möchte ich mich bei den Mitwirkenden an meiner empirischen Studie bedanken. Mein Dank richtet sich sowohl an die Direktor:innen der drei Schulen als auch an die Kolleg:innen, welche mich dankenswerterweise bei der Durchführung des Fragebogens in den jeweiligen Klassen unterstützt haben. Nicht zuletzt gebührt auch den Schüler:innen ein großer Dank, da ohne sie meine Arbeit nicht umzusetzen gewesen wäre. Auch wenn die Motivation am Ende des Schuljahres bei manchen Lernenden möglicherweise nachließ, weiß ich die Bemühungen zu schätzen.

Ein weiterer Dank gilt meinem ehemaligen Direktor, Herrn Karl Wimmer. Da ich bereits während meines Lehramtsstudiums an der Universität Wien zu unterrichten begonnen habe, musste ich sowohl meinen schulischen als auch meinen universitären Verpflichtungen nachkommen. Ohne die Rücksichtnahme deinerseits wäre dies nicht so reibungslos verlaufen. Deinem Verständnis und deinem Entgegenkommen bin ich sehr verbunden.

„Zwei Dinge sollen Kinder von ihren Eltern bekommen: Wurzeln und Flügel.“
(Johann Wolfgang von Goethe)

Mama und Papa – Danke, dass ihr mich während meiner Ausbildung so tatkräftig unterstützt habt. Ohne euren Zuspruch, euren Glauben an mich und euer Vertrauen in mich würde ich heute nicht als Professorin in der Klasse stehen. Auch meiner Schwester Sandra möchte ich für ihre großartige Unterstützung während des Arbeitsprozesses danken. Ich bewundere dein Wissen und schätze dein Engagement.

Oma – In Gedanken an dich. Leider war es dir nicht mehr vergönnt, diesen Moment mit mir zu teilen.

Zuletzt ist es mir ein ganz besonderes Anliegen meinem Betreuer, Herrn Mag. Dr. Andreas Ulovec zu danken. Sie haben mich während des Verfassens dieser Arbeit stets unterstützt, mir Ratschläge gegeben und alle Fragen beantwortet. Vielen Dank dafür!

Inhaltsverzeichnis

Abstract Deutsch	I
Abstract English	II
Danksagung	III
Inhaltsverzeichnis.....	IV
Abbildungsverzeichnis.....	VI
Tabellenverzeichnis.....	VI
1 Einleitung	1
1.1 Aufbau und Struktur der Arbeit	1
2 Theoretischer Hintergrund	2
2.1 Begriffsklärung der Bruchrechnung.....	2
2.1.1 Brucharten im schulischen Kontext	3
2.2 Grundvorstellungen zur Bruchrechnung.....	3
2.2.1 Verwendungssituationen von Brüchen	4
2.2.2 Schreibweisen und Repräsentanten von Brüchen.....	5
2.2.3 Häufige Schüler:innenfehler im Kontext der Bruchrechnung	6
2.3 Die vier Grundrechnungsarten.....	6
2.3.1 Addition von Bruchzahlen	7
2.3.1.1 Rechenregeln zur Addition von Bruchzahlen.....	7
2.3.1.2 Fehlerstrategien zur Addition.....	8
2.3.2 Subtraktion von Bruchzahlen	9
2.3.2.1 Rechenregeln zur Subtraktion von Bruchzahlen.....	10
2.3.2.2 Fehlerstrategien zur Subtraktion	10
2.3.3 Multiplikation von Bruchzahlen.....	12
2.3.3.1 Rechenregeln zur Multiplikation von Bruchzahlen	13
2.3.3.2 Fehlerstrategien zur Multiplikation	14
2.3.4 Division von Bruchzahlen.....	15
2.3.4.1 Rechenregeln zur Division von Bruchzahlen	16
2.3.4.2 Fehlerstrategien zur Division	17
2.4 Österreichischer Lehrplan.....	18
2.4.1 Unterrichtsfach Mathematik	18
2.4.2 Bildungsstandards und Individuelle Kompetenzmessung PLUS (IKM ^{PLUS}).....	19
2.5 Auszug bisheriger Forschungsergebnisse	20
3 Forschungsfrage und Hypothesen.....	22
4 Material und Methoden.....	23
4.1 Studiendesign.....	24
4.2 Datenanalyse	25

5	Auswertung	26
5.1	Beschreibende Statistik	26
5.2	Hypothesentestende Statistik	42
5.3	Weitere Ergebnisse der Fragebogenstudie	44
6	Diskussion	45
	Literaturverzeichnis	48
Anhang 1	[Fragebogen Teil A]	52
Anhang 2	[Fragebogen Teil B]	56

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Bruchanteile Berechnen (nach Padberg & Wartha, 2017).....	12
Abbildung 2: Geschlechterverteilung der teilnehmenden Schulen	27
Abbildung 3: Geschlechterverteilung Gesamt.....	27
Abbildung 4: Lösungshäufigkeiten der beiden Schulstufen der Mittelschule A.....	28
Abbildung 5: Lösungshäufigkeiten der beiden Schulstufen der Mittelschule B.....	28
Abbildung 6: Lösungshäufigkeiten der beiden Schulstufen der AHS-Unterstufe	29
Abbildung 7: Lösungshäufigkeiten beider Mittelschulen für beide Schulstufen	29
Abbildung 8: Darstellung von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ anhand von verschiedenen Ganzen.....	31
Abbildung 9: Darstellung von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ anhand von Kreisen und Rechtecken.....	31
Abbildung 10: Darstellung von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ anhand eines Zahlenstrahles	31
Abbildung 11: Lösungsquoten der 6. Schulstufen im Vergleich (Addition)	32
Abbildung 12: Lösungsquoten der 8. Schulstufen im Vergleich (Addition)	32
Abbildung 13: Lösungsquoten der 6. Schulstufen im Vergleich (Subtraktion)	34
Abbildung 14: Lösungsquoten der 8. Schulstufen im Vergleich (Subtraktion)	35
Abbildung 15: Lösungsquoten der 6. Schulstufen im Vergleich (Multiplikation).....	37
Abbildung 16: Lösungsquoten der 8. Schulstufen im Vergleich (Multiplikation).....	37
Abbildung 17: Lösungsquoten der 6. Schulstufen im Vergleich (Division).....	39
Abbildung 18: Lösungsquoten der 8. Schulstufen im Vergleich (Division).....	39

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Vergleich der Fehlertypen im Bereich der Multiplikation von Bruchzahlen.....	38
Tabelle 2: Vergleich der Fehlertypen im Bereich der Division von Bruchzahlen.....	40
Tabelle 3: Übersicht der Lösungshäufigkeiten im Teil 2 des Fragebogens	42

1 Einleitung

Das mathematische Themenfeld der Bruchrechnung stellt für viele Schüler:innen eine große Herausforderung dar. Diese Tatsache wird sowohl in diversen Studien im deutschsprachigen (Padberg, 1986; Padberg, 1991; Padberg & Wartha, 2017; Heckmann, 2006) und angloamerikanischen Raum (z.B. Hart, 1989) als auch von Kolleg:innen berichtet, welche im schulischen Kontext, sei es im Zuge als Lehrkraft oder als Nachhilfelehrperson, beschäftigt sind. Die Thematik der Bruchrechnung war in den letzten vier Jahrzehnten immer wieder ein wichtiger Forschungsgegenstand, wobei sich der Schwerpunkt der empirischen Untersuchungen nicht ausschließlich auf den deutschsprachigen Raum fokussierte (Reinhold, 2019). Die Forschung in Österreich ist jedoch nicht so ausgeprägt wie beispielsweise in Deutschland. Schwierigkeiten bereiten dabei nicht nur die Bruchrechnung, sondern auch die Dezimalbruchrechnung. Aufgrund des enormen Umfangs des in dieser Arbeit behandelten Themenbereiches fokussiert sich die Autorin in ihren theoretischen und empirischen Ausführungen auf die Bruchrechnung. Zu erwähnen ist jedoch, dass das Themenfeld der Dezimalbrüche selbstverständlich nicht von geringerer Bedeutung und Wichtigkeit ist.

1.1 Aufbau und Struktur der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in einen theoretischen und einen empirischen Teil. Im Zuge der theoretischen Ausführungen werden die fundamentalen Grundlagen bezüglich der Bruchrechnung dargestellt. Den Anfang bildet die Klärung des Begriffs der Bruchrechnung bzw. eine Definition der Worte Bruch und Bruchzahl, welche in dieser Arbeit synonym verwendet werden. Auf mathematische Beweise wird verzichtet. Der Fokus dieses Abschnittes liegt sowohl auf der Behandlung zentraler Grundvorstellungen und Fehlerstrategien als auch auf den vier Grundrechnungsarten – Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Das Kürzen und Erweitern von Brüchen wird, aufgrund der Breite der behandelten Thematik nicht näher erläutert, dies gilt, wie bereits in Kapitel 1 kurz angesprochen, auch für die Dezimalbrüche. Da sich diese Arbeit auf die Bruchrechnung im schulischen Kontext bezieht, kommt dem österreichischen Lehrplan inklusive den Bildungsstandards für die AHS-Unterstufe bzw. die Mittelschule ebenfalls ein Unterkapitel zu. An dieser Stelle werden sowohl die allgemeinen Inhalte zum mathematischen Lehrplan als auch die detaillierten Angaben zur Behandlung der Bruchrechnung angeführt. Somit kann ein Bezug zwischen dieser Arbeit und dem rechtlichen Aspekt im schulischen Kontext hergestellt werden.

Der zweite Teil konzentriert sich auf die empirische Untersuchung, welche im Zuge dieser wissenschaftlichen Arbeit an drei niederösterreichischen Schulen im Juni 2022 durchgeführt wurde. Dabei werden unter anderem die grundlegenden Überlegungen zur Gestaltung des Fragebogens erläutert, sowie die Forschungsfrage und die Hypothesen formuliert. Das Hauptaugenmerk liegt in weiterer Folge auf der Auswertung und der Darstellung der Ergebnisse. An dieser Stelle ist die Überprüfung der Hypothesen möglich. Den Abschluss des empirischen Teiles bildet eine Diskussion zu den gewonnenen Ergebnissen und ein möglicher Ausblick für zukünftige Arbeiten bzw. Studien.

2 Theoretischer Hintergrund

In den folgenden Kapiteln werden, die unter 1.1 angesprochenen Punkte bezüglich des theoretischen Teiles dieser Arbeit beschrieben. Da die Thematik der Bruchrechnung für viele Schüler:innen eine große Herausforderung darstellt, ist der Wichtigkeit der Einführung dieses Themenfeldes im Mathematikunterricht ebenfalls Beachtung zu schenken. Somit werden im Zuge dieses Abschnittes auch dahingehend verschiedene Wege und Möglichkeiten angeführt. Wie bereits in der Einführung geschildert, beziehen sich die meisten Erkenntnisse auf empirische Untersuchungen und wissenschaftliche Studien aus Deutschland. Dennoch dienen sie als Grundlage für diese Masterarbeit.

2.1 Begriffsklärung der Bruchrechnung

Die Bruchrechnung entspricht innerhalb der Zahlenmenge den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, welche die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ umfassen. Die Darstellung der Bruchzahl bzw. der rationalen Zahl ist entweder als gemeiner Bruch der Form $q = \frac{a}{b}$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$ gilt, oder als Dezimalbruch möglich (Schichl & Steinbauer, 2012). Die Schreibweise für eine bestimmte Bruchzahl wird als Bruch beschrieben. Der Begriff der Bruchzahl zeichnet sich dadurch aus, dass gleichartige Bruchzahlen anhand von unendlich vielen Brüchen durch Erweitern bzw. Kürzen dargestellt werden können. So kann beispielsweise die Bruchzahl „ein Achtel“ mithilfe gemeiner Brüche als $\frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{24}$, etc. oder mithilfe der Dezimalbruchschreibweise als 0,125, 0,1250, etc. angeführt werden. Die beiden Begriffe Bruchzahl und Bruch werden im Zuge dieser Arbeit synonym verwendet. Da in Anbetracht der zugrundeliegenden empirischen Untersuchung lediglich positive rationale Zahlen vorkommen, ist bei der Verwendung der Begriffe Bruchzahl und Bruch nur der positive Zahlenraum zu beachten (Pilchner, 2010).

2.1.1 Brucharten im schulischen Kontext

Der Ausdruck $q = \frac{a}{b}$ setzt sich zusammen aus der Variable a , welche den Zähler repräsentiert, dem Bruchstrich, welcher dem Rechenzeichen der Division entspricht und der Variable b , welche den Nenner darstellt. In diversen Schulbüchern (z.B. Genial! Mathematik) wird innerhalb der gemeinen Brüche zwischen verschiedenen Brucharten unterschieden. Der Stammbruch beschreibt alle Bruchzahlen, welche als Zähler die Zahl 1 besitzen. Bei den echten Brüchen ist der Zähler stets kleiner als der Nenner (z.B.: $\frac{2}{5}$), bei den unechten Brüchen ist der Zähler stets größer als der Nenner (z.B.: $\frac{6}{5}$). Entspricht der Zähler gleich dem Nenner bzw. ist der Zähler ein Vielfaches des Nenners, so bilden dies die uneigentlichen Brüche. Eine weitere Schreibweise von Bruchzahlen ist die gemischte Zahl (z.B.: $1\frac{2}{5}$). Zu beachten ist hierbei, dass jede gemischte Zahl in einen unechten Bruch umgewandelt werden kann und dies auch in umgekehrter Weise Gültigkeit besitzt (z.B.: $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$) (Beer, et al., 2019).

2.2 Grundvorstellungen zur Bruchrechnung

„Grundvorstellungen sind tragfähige flexible mentale Modelle zu mathematischen Inhalten. [...] Ein mentales Modell zu einem mathematischen Begriff oder Verfahren ist ein Denkmodell mithilfe von Analogien zu einem realen Modell [...]“ (Padberg & Wartha, 2017). Die Aufgabe liegt demnach im Mathematikunterricht darin, dass den Schüler:innen die Möglichkeit gegeben wird, diese Denkmodelle zu entwickeln. Die Kinder sollen sich beispielsweise gedanklich vorstellen können, wie eine Torte in acht gleich große Teile geteilt und davon drei Stück entfernt werden. Dabei muss ihnen bewusst werden, dass es nicht auf die Größe der Torte ankommt. Der Kern besteht darin, dass den Schüler:innen mithilfe des Modells der mathematische Aufbau klar wird (wie im Beispiel zuvor – drei Achtel). Um den Aufbau von Grundvorstellungen zu ermöglichen, muss auf hilfreiche Veranschaulichungsmittel zurückgegriffen werden. Darunter fällt sowohl das symbolische Arbeiten mit Zahlen als auch die Verwendung von Abbildungen und Anschauungsmitteln (Padberg & Wartha, 2017). Laut Heckmann (2007) ist es dabei jedoch nicht sinnvoll, sich auf einen der beiden Aspekte zu fokussieren. Wichtig ist die Idee der permanenten Übersetzung zwischen den verschiedenen Darstellungsformen. Lediglich in Situationen, wo es den Schüler:innen gelingt, zwischen symbolischen (bestimmter Rechenausdruck), ikonischen (Bilder) und handelnden (kann auch als enaktiv bezeichnet werden, z.B.

Rechengeschichten) Repräsentationsebenen zu übersetzen, kann von einem tatsächlichen Verständnis gesprochen werden. Voraussetzung dafür ist demnach die Aktivierung der Grundvorstellungen.

Entscheidend für die Bedeutung ausgebildeter Grundvorstellungen ist die Art der Aufgabenstellung. Handelt es sich um rein formale Rechenaufgaben, bei welchen Schüler:innen auswendig gelernte Rechenregeln anwenden können, oder müssen zur Lösung von Fragestellungen Grundvorstellungen aktiviert werden, beispielsweise durch einen Wechsel zwischen der ikonischen und der symbolischen Ebene (Reinhold, 2019).

Dass die Bildung von Grundvorstellungen ein schwieriges und komplexes Unterfangen darstellt, zeigen diverse Studienergebnisse, welche auszugsweise von Reinhold (2019) geschildert werden. Demnach sind bei Schüler:innen die fehlerhaften Vorstellungen präsent, wonach „Multiplizieren vergrößert“ und „Dividieren verkleinert“ in sämtlichen Situationen zutreffen. Auch erscheinen Textaufgaben zur Multiplikation für Lernende schwieriger, bei welchen der erste Faktor keine natürliche Zahl, sondern eine Bruchzahl bildet. Fehlt die Grundvorstellung zur Multiplikation von Bruchzahlen, wird Schüler:innen nicht bewusst, dass das Prinzip „Multiplizieren als wiederholtes Addieren“ nicht greift. Dieser Umstand wird im Unterkapitel 2.3.3 eigens besprochen.

Padberg & Wartha (2017) berichten davon, dass Brüche viele verschiedene Gesichter aufweisen. Deshalb ist es von enormer Bedeutung, die Schüler:innen in dieses Themengebiet so gut als möglich einzuführen. Hierbei ist besonders auf eine anschauliche und verständliche Herangehensweise zu achten. Problematisch wird es in jenen Situationen, wo Schüler:innen ausschließlich auf auswendig gelernte Rechenregeln zurückgreifen und ihnen jegliches Verständnis fehlt. Daher sollte den Kindern genügend Zeit zur Verfügung gestellt werden, um sich der Komplexität der Bruchrechnung bewusst werden zu können. Zu den schulischen Rahmenbedingungen wird in Kapitel 2.4 noch näher eingegangen.

2.2.1 Verwendungssituationen von Brüchen

Im fachdidaktischen Werk „Didaktik der Bruchrechnung“ (2017) zeigen Padberg & Wartha vielfältige Kontexte und Situationen auf, in welchen Brüche zur Anwendung kommen können. Sei es eine Pizza, die zu gleichen Teilen auf drei Freunde aufgeteilt wird. Die Bestimmung des Anteiles von Kindern in einer Klasse mit blauen Augen oder ein Preisgeld, welches gerecht verteilt werden soll. Bei näherer Betrachtung können verschiedene Verwendungssituationen von Brüchen beschrieben werden. Sehr häufig vertreten ist die

Vorstellung „Bruch als Anteil“. Ziel ist es, den Anteil vom Ganzen herauszufinden. Dabei beschreibt der Nenner des Bruches, in wie viele gleich große Teile das jeweilige Ganze geteilt werden soll und der Zähler gibt an, wie viele Teile davon zu entnehmen sind. Ein Spezialfall bildet der Umstand, wenn das Ganze aus mehreren Ganzen besteht, also der Anteil von mehreren Ganzen bestimmt werden soll. Kommen Brüche in Verbindung mit Maßeinheiten vor, so wird von der Verwendungssituation „Bruch als Maßzahl“ gesprochen (z.B.: $\frac{1}{2}$ m). Besteht die Aufgabe beispielsweise darin $\frac{2}{3}$ von 30 € zu berechnen, so wird diese Situation als „Bruch als Operator“ bezeichnet. Padberg & Wartha (2017) führen weitere fünf Verwendungssituationen an, welche an dieser Stelle jedoch nicht näher erläutert werden. Für das Arbeiten mit Kindern im Bereich der Bruchrechnung ist das Bewusstsein darüber, dass sich die verschiedenen Bruchzahlaspekte überlappen können, von großer Bedeutung.

Die beiden Verwendungssituationen – „Bruch als Anteil“ (eines Ganzen oder mehrerer Ganzer) und „Bruch als Operator“ – bilden zugleich die beiden wichtigsten Grundvorstellungen im Verständnis der Bruchrechnung auf Seiten der Schüler:innen. Alternative Zugänge und Konzepte zur Erarbeitung des Themenfeldes der Bruchrechnung im schulischen Setting werden in der Literatur ebenfalls erwähnt, da jedoch die beiden angesprochenen Grundvorstellungen in der praktischen Umsetzung am häufigsten vertreten sind, werden sie nicht genauer betrachtet (Padberg & Wartha, 2017).

2.2.2 Schreibweisen und Repräsentanten von Brüchen

Im Unterkapitel 2.1.1 wurde bereits auf die verschiedenen Brucharten Bezug genommen. Bruchzahlen unterscheiden sich weiters in ihren Schreibweisen und ihren Repräsentanten bzw. Darstellungsformen. Innerhalb der Kategorie der Schreibweisen kann der Bruch unter anderem als Prozent, Verhältnis, Maßstab oder als Quotient angegeben werden. Padberg & Wartha (2017) dokumentieren zusätzlich zu den geschriebenen Varianten von Bruchzahlen verschiedene anschauliche Repräsentanten. Im Unterricht kommen dabei geometrische Figuren, wie Rechtecke, Quadrate oder Kreise, häufig zur Anwendung, entweder in Form von Bildern oder als physisches Material. Eine weitere Möglichkeit Brüche allgemeinverständlich darzustellen, ist die Verwendung von Rechengeschichten oder alltäglichen Situationen, in welchen beispielsweise ein Stück Pizza oder eine Torte auf vier Kinder verteilt werden soll.

Für die Einführung bzw. Erarbeitung der Bruchrechnung im Mathematikunterricht ist die Rücksichtnahme auf etwaige Vorkenntnisse von Seiten der Schüler:innen zur Thematik enorm wichtig. Da sich die dieser Arbeit zugrundeliegende empirische Untersuchung jedoch

auf das Verständnis von Schüler:innen nach dem Erarbeitungsprozess bezieht, kann auf die ausführliche Thematisierung dieses Aspekts verzichtet werden.

2.2.3 Häufige Schüler:innenfehler im Kontext der Bruchrechnung

Schwerpunkt vieler empirischer Untersuchungen im mathematikdidaktischen Bereich bildet die Kategorisierung und Analyse von häufigen Fehlermustern. Im Zuge dessen werden neben Kenntnissen über die Schwierigkeitsgrade von Aufgabenstellungen auch die Ursprünge typischer Schüler:innenfehler gewonnen. Darüber hinaus soll anhand der Fehleranalysen Klarheit über die Denkprozesse von Schüler:innen geschaffen werden (Reinhold, 2019).

Reinhold (2019) fasst unter Bezugnahme auf weitere Autoren drei typische Kategorien von Fehlern zusammen:

- Flüchtigkeitsfehler
- systematische Fehler
- typische Fehler

Die sogenannten Flüchtigkeitsfehler werden von Seiten der Kinder aufgrund von Unaufmerksamkeit getätigt. Werden sie auf Fehler dieser Art hingewiesen, können sie meist ohne große Schwierigkeiten ausgebessert werden. Passieren einem Kind beispielsweise bei einem Test zu einem bestimmten mathematischen Themenbereich dieselben Fehler öfter, so wird von sogenannten systematischen Fehlern gesprochen. Möglicherweise hat das Kind dabei den mathematischen Inhalt unzureichend verstanden. Typische Fehler beschreiben hingegen das Auftreten von Fehlern bei unterschiedlichen Personen in unterschiedlichen Kontexten. Diese sind ein Hinweis für grundlegende Verständnisschwierigkeiten innerhalb eines mathematischen Themenbereiches.

Auf die spezifische Kategorisierung von Fehlerstrategien im Hinblick auf die vier Grundrechnungsarten der Bruchrechnung wird im nächsten Kapitel näher eingegangen.

2.3 Die vier Grundrechnungsarten

In den folgenden Unterkapiteln werden die wesentlichen Grundlagen und Rechenregeln in Bezug auf die vier Grundrechnungsarten von Brüchen erläutert. Ebenfalls erwähnt werden die für die Auswertung der empirischen Untersuchung wichtigen Fehlerstrategien.

2.3.1 Addition von Bruchzahlen

Studien zufolge sind bei Schüler:innen vor der gezielten Behandlung der Addition von Bruchzahlen im Zuge des Mathematikunterrichtes in der 6. Schulstufe kaum Vorkenntnisse vorhanden (Padberg & Wartha, 2017). Aufgrund des bereits bestehenden Wissens im Umgang mit den natürlichen Zahlen bleibt bei der Addition von Bruchzahlen die Grundvorstellung des Zusammenfassens bzw. des Hinzufügens bestehen. Dieser Umstand wird von vielen Kindern bei der Einführung der Addition von gleichnamigen Bruchzahlen zumeist problemlos verstanden. Beispielsweise kann die Fragestellung, wie viel Pizzastücke insgesamt gegessen wurden, wenn von der Salamipizza $\frac{3}{8}$ Stück und von der Schinkenpizza $\frac{2}{8}$ Stück fehlen, mit der Vorstellung $3 + 2$ mühelos beantwortet werden. Mehr Schwierigkeiten bereiten hingegen Situationen, in welchen die Brüche unterschiedliche Nenner aufweisen, im Falle des Pizzabeispiels nun eine Pizza in acht Teile und die andere Pizza in 16 Teile geteilt wird. Erst wenn die Schüler:innen erkennen, dass jedes Stück der achteiligen Pizza erneut halbiert werden muss, um ebenso viele Teile wie bei der sechzehnteiligen Pizza zu erhalten, kann wie in der Situation oben vorgegangen werden. Der Schwierigkeitsgrad von Aufgabenstellungen erhöht sich, wenn die Pizzateile keine Vielfachen voneinander sind, die Unterteilung somit komplizierter ausfällt. Für den Mathematikunterricht sollte anhand dieser Ausführungen verdeutlicht werden, dass das Lösen dieser Aufgabentypen nur dann möglich ist, wenn den Schüler:innen bewusst wird, dass eine gemeinsame Unterteilung der Schlüssel zur Lösung ist. Die eben beschriebene Veranschaulichung anhand des Pizzabeispiels weist seine Grenzen auf, da eine zu kleine Unterteilung nicht sinnvoll erscheint. Infolgedessen sollte im Mathematikunterricht beispielsweise auf Rechtecke oder Strecken zurückgegriffen werden (Padberg, 2009; Padberg & Wartha, 2017). Sind die Schüler:innen im Anschluss an die anschauliche Behandlung der Addition von Bruchzahlen soweit, diese auch systematisch zu betrachten, kann anhand der Erkenntnis des gemeinsamen Unterteilens auf die rechnerisch-formale Ebene übergeleitet werden, indem Rechenregeln formuliert werden.

2.3.1.1 Rechenregeln zur Addition von Bruchzahlen

Im Falle gleichnamiger Bruchzahlen (die Nenner der Brüche sind gleich) erfolgt die Addition durch Addieren der Zähler, die Nenner bleiben unverändert.

Formal entspricht dies für die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{n}$, wobei $n \neq 0$ gilt, dem Ausdruck (Kemnitz, 2019):

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}.$$

Werden ungleichnamige Bruchzahlen (die Nenner der Brüche sind verschieden) addiert, müssen diese zunächst gleichnamig gemacht werden. Dies erfolgt durch das Auffinden eines gemeinsamen Hauptnenners. Formal ergibt sich für die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{o}{p}$, wobei $n, p \neq 0$ gilt der Ausdruck (Kemnitz, 2019):

$$\frac{m}{n} + \frac{o}{p} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p} + \frac{o \cdot n}{p \cdot n} = \frac{mp + no}{np}.$$

Studienergebnisse zeigen, dass Schüler:innen Aufgabenstellungen zur Addition entweder aufgrund der reinen Anwendung der Rechenregeln richtig lösen können, jedoch das Verständnis durch Übersetzung der Aufgabe beispielsweise in ikonische Vorstellungen fehlt, oder durch fehlerhaftes Anwenden der Rechenregeln die Aufgaben falsch gelöst werden. In den seltensten Fällen liegt auf Seiten der Schüler:innen die Ausbildung von Grundvorstellungen inklusive einem tieferen Verständnis vor (Padberg & Wartha, 2017).

Demnach wäre es wünschenswert, dass sich die Unterrichtsstunden in Mathematik im Zuge der Behandlung der Bruchrechnung nicht ausschließlich mit dem stupiden Auswendiglernen von Rechenregeln beschäftigen, sondern ein inhaltliches Verständnis durch variationsreiches Üben angestrebt wird. Dies gilt für alle vier Grundrechnungsarten der Bruchzahlen gleichermaßen.

2.3.1.2 Fehlerstrategien zur Addition

Padberg & Wartha (2017) beziehen die folglich angeführten Fehlerstrategien auf die in das PALMA-Projekt inkludierte Untersuchung von Sebastian Wartha und auf ein Studie von Friedhelm Padberg. Auch Ergebnisse aus empirischen Untersuchungen im englischsprachigen Raum untermauern die vorliegenden Befunde.

Im Bereich der Addition von Bruchzahlen liegt folgende Fehlerstrategie am häufigsten vor (Padberg & Wartha, 2017):

$$\mathbf{A1:} \quad \frac{m}{n} + \frac{o}{p} = \frac{m+o}{n+p}.$$

Dabei wird kein Hauptnenner gefunden, sondern es werden fälschlicherweise sowohl die Zähler als auch die Nenner addiert. Als mögliche Ursache für diesen Fehlertyp ist ein mangelndes Bruchzahlverständnis zu nennen. Eine weitere Fehlerstrategie im Bereich der Bruchzahladdition zeigt sich im Fall „natürliche Zahl plus Bruchzahl“ bzw. „Bruchzahl plus natürliche Zahl“ (Padberg & Wartha, 2017):

$$\text{A2: } a + \frac{m}{n} = \frac{a+m}{n} \text{ bzw. } \frac{m}{n} + a = \frac{m+a}{n}.$$

Dieser eher triviale Aufgabentyp lässt laut Padberg & Wartha (2017) auf erhebliche Defizite in den anschaulichen Bruchzahlvorstellungen und einem Mangel an Flexibilität auf Seiten der Schüler:innen schließen. Zu oft wird auf das formale und somit auch kompliziertere Schema zurückgegriffen. Dies zeigt das folgende Beispiel:

$$2 + \frac{3}{7} = \frac{2}{1} + \frac{3}{7} = \frac{14}{7} + \frac{3}{7} = \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}.$$

Ebenfalls beschrieben wird der Fall, indem der Hauptnenner korrekt gebildet, die Zähler jedoch unverändert addiert werden, wie nachfolgendes Beispiel verdeutlicht:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3+2}{20} = \frac{5}{20}.$$

2.3.2 Subtraktion von Bruchzahlen

Ebenso wie bei der Addition von Bruchzahlen kann auch bei der Subtraktion von Bruchzahlen auf eine Grundvorstellung zurückgegriffen werden, welche bereits von den natürlichen Zahlen bekannt ist. Gemeint ist dabei die Vorstellung des Wegnehmens oder Vergleichens. Das Arbeiten mit gleichnamigen Brüchen fällt Schüler:innen bei der Subtraktion ebenfalls leichter als der Umgang mit ungleichnamigen Brüchen. Betrachten wir erneut das Pizzabeispiel aus dem Kapitel der Addition, so ist bei der Fragestellung, wie viele Pizzastücke übrig bleiben, wenn von der Salamipizza $\frac{5}{8}$ Stück und von der Schinkenpizza $\frac{7}{8}$ Stück weggenommen werden, die Lösung leicht zu finden, da auf das Prinzip der Subtraktion natürlicher Zahlen zurückgegriffen werden kann, nämlich $8 - 5 = 3$ für die Salamipizza und $8 - 7 = 1$ für die Schinkenpizza. Insgesamt bleiben also $\frac{4}{8}$ der beiden Pizen übrig. Dies entspricht einer Anzahl von vier Pizzastücken. Die Fragestellung wird hingegen anspruchsvoller, wenn die Unterteilung der beiden Pizzasorten verschieden ausfällt. Wird die Salamipizza in 8 gleich große Teile geschnitten und die Schinkenpizza in 16 gleich große Teile, so muss von den Schüler:innen zunächst eine gleiche Unterteilung

gefunden werden. Nochmals schwieriger wird die Aufgabenstellung, wenn der eine Nenner kein unmittelbares Vielfaches des anderen Nenners ist (Padberg & Wartha, 2017).

Da das Arbeiten mit den Pizza- oder Tortenbeispielen seine Grenzen aufweist, sollte im Mathematikunterricht, wie bereits im Kapitel der Addition von Bruchzahlen erwähnt, mit Rechtecken gearbeitet werden, damit den Schüler:innen das Prinzip der gemeinsamen Unterteilung auf anschaulichem Weg bewusst wird. Das Auffinden des Hauptnenners entspricht auf der rechnerischen Ebene dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) (Padberg & Wartha, 2017). Padberg (2009) ergänzt die Einführung der Subtraktion um den Weg der Umkehroperation der Addition. Dies ist den Schüler:innen ebenso aus dem Arbeiten mit den natürlichen Zahlen bekannt. Die Lösung der Aufgabenstellung $\frac{3}{5} + x = \frac{9}{5}$ kann mithilfe der Subtraktion $\frac{9}{5} - \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ gefunden werden. Im Falle ungleichnamiger Brüche muss in einem ersten Schritt ein gleichnamiger Nenner gefunden werden.

2.3.2.1 Rechenregeln zur Subtraktion von Bruchzahlen

Die Rechenregeln zur Subtraktion werden im Folgenden analog zu jenen der Addition formuliert. Dabei ist die Subtraktion gleichnamiger Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{n}$, wobei $n \neq 0$ gilt, definiert als (Kemnitz, 2019):

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m - p}{n}.$$

Erfolgt die Operation mit ungleichnamigen Brüchen, so ist zunächst ein gemeinsamer Hauptnenner zu finden. Formal ergibt sich für die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{o}{p}$, wobei $n, p \neq 0$ gilt der Ausdruck (Kemnitz, 2019):

$$\frac{m}{n} - \frac{o}{p} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p} - \frac{o \cdot n}{p \cdot n} = \frac{mp - no}{np}.$$

Zu beachten ist hierbei, dass die uneingeschränkte Subtraktion von Bruchzahlen erst im Bereich der rationalen Zahlen möglich wird. Die entsprechende Erweiterung des Zahlenraumes erfolgt laut österreichischem Lehrplan in der 7. Schulstufe.

2.3.2.2 Fehlerstrategien zur Subtraktion

Auch im Bereich der Subtraktion von Bruchzahlen lassen sich im Zuge von empirischen Untersuchungen und entsprechenden Forschungsschwerpunkten typische Fehlerstrategien beschreiben.

Somit ergibt sich entsprechend dem Fehlertyp A1 (siehe 2.3.1.2) die Fehlerstrategie (Padberg & Wartha, 2017):

$$\text{S1: } \frac{m}{n} - \frac{o}{p} = \frac{m - o}{n - p}.$$

Hierbei werden anstelle der Bildung eines Hauptnenners fälschlicherweise sowohl die beiden Zähler als auch die beiden Nenner subtrahiert.

Studienergebnisse zeigen, dass Schüler:innen diesen Fehlertyp nicht anwenden, wenn für n und p gilt $n < p$, wie es im Beispiel $\frac{3}{8} - \frac{1}{10}$ der Fall ist. Als Ursache für das Verwenden von S1 lässt sich ebenso wie bei A1 ein Mangel im Verständnis der Bruchzahlen feststellen (Padberg & Wartha, 2017).

Besteht die Aufgabenstellung in der Subtraktion einer natürlichen Zahl und einer Bruchzahl, so lässt sich folgende Fehlerstrategie erkennen (Padberg & Wartha, 2017):

$$\text{S2: } a - \frac{m}{n} = \frac{a - m}{n} \text{ (bzw. } a - \frac{m}{n} = \frac{|a - m|}{n} \text{)}.$$

Als Ursache für diesen Fehlertyp sind dieselben Gründe zu nennen, welche bereits im Unterkapitel 2.3.1.2 angeführt sind. Auch der formale Lösungsweg zeigt sich als mögliche Fehlerquelle, da im Erweitern bzw. Kürzen und im abschließenden Umwandeln Fehler möglich sind. So wird das Beispiel $4 - \frac{3}{10}$ formal gelöst als:

$$4 - \frac{3}{10} = \frac{4}{1} - \frac{3}{10} = \frac{40}{10} - \frac{3}{10} = \frac{37}{10} = 3\frac{7}{10}.$$

Abschließend ist analog zur Addition von Bruchzahlen jener Fehlertyp zu nennen, welcher statistisch weniger häufig auftritt, im Hinblick auf die Auswertung der dieser Arbeit zugrundeliegenden empirischen Untersuchung jedoch angeführt wird. Die Rede ist vom Fall, indem ein Hauptnenner gefunden, die Zähler jedoch unverändert subtrahiert werden. Das folgende Beispiel zeigt dieses Fehlermuster symbolhaft (Padberg & Wartha, 2017):

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{2} = \frac{4 - 1}{14} = \frac{3}{14}.$$

Zur Vermeidung dieser Fehler auf Seiten der Schüler:innen erscheint es im Mathematikunterricht unerlässlich, ein variationsreiches Üben anzubieten, wodurch auch ein präventives Arbeiten möglich wird. Ziel sollte sein, dass ein gewisses Maß an Sensibilisierung gegenüber der erwähnten Fehlerstrategien stattfindet (Padberg & Wartha, 2017).

2.3.3 Multiplikation von Bruchzahlen

Untersuchungen zeigen, dass Schüler:innen vor der systematischen Behandlung der Multiplikation von Bruchzahlen über äußerst geringe Vorkenntnisse verfügen (Padberg, 2009). Padberg & Wartha (2017) unterscheiden drei Fälle: „Natürliche Zahl mal Bruch“, „Bruch mal natürliche Zahl“ und „Bruch mal Bruch“. Anhand des letzten Falles werden im Folgenden mögliche anschauliche Wege präsentiert, wie die Multiplikation von Bruchzahlen im Mathematikunterricht behandelt werden kann, um den Schüler:innen eine breite Basis für das Lösen entsprechender Aufgaben vermitteln zu können. Das Bilden von Anteilen von Anteilen ist dabei von ebenso großer Bedeutung wie das Arbeiten mit Flächeninhalten von Rechtecken mit Bruchzahlen. Im Unterricht sollte daher mit Sachsituationen bzw. Textaufgaben, Materialien (Papier) und Bildern bzw. Zeichnungen (Rechtecke) gearbeitet werden. So wird sowohl auf enaktiver als auch auf ikonischer Ebene die Thematik behandelt.

Im Fall „Natürliche Zahl mal Bruch“ erweist sich die Grundvorstellung der Multiplikation mit natürlichen Zahlen als hilfreich. Hierbei wird sie als wiederholte Addition gedeutet, wie das Beispiel $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2+2}{5} = \frac{6}{5}$ zeigt. Der Faktor 3 gibt demnach an, wie oft die Zahl zwei zu addieren ist.

Bei näherer Betrachtung des Falles „Bruch mal natürliche Zahl“ lässt sich erkennen, dass die Grundvorstellung der wiederholten Addition hier nicht mehr anwendbar ist. Aus diesem Grund ist auf die Grundvorstellung Bruch als Operator zurückzugreifen. Die beispielhafte Aufgabenstellung $\frac{1}{7} \cdot 4$ wird sogleich aufgefasst als $\frac{1}{7}$ von 4. Diese Aufgabe lässt sich sehr gut anhand einer grafischen Illustration zeigen:

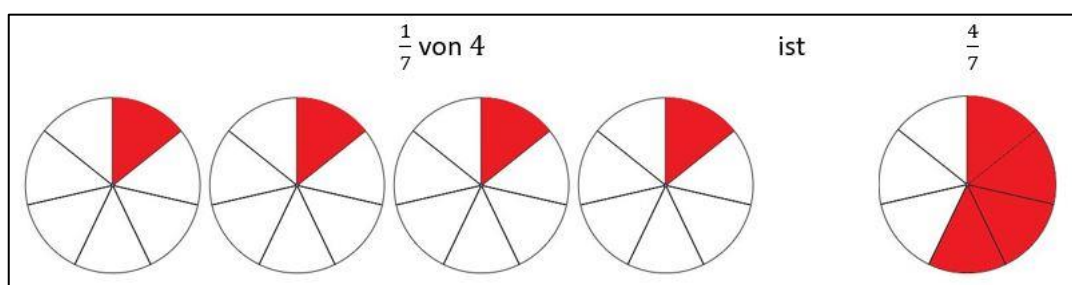


Abbildung 1: Bruchanteile Berechnen (nach Padberg & Wartha, 2017)

Quelle: eigene Darstellung

Dabei gibt der Faktor vier an, wie viele Ganze dargestellt werden. Die Bruchzahl dient zur Feststellung, wie viele Teile vom jeweiligen Ganzen zu markieren sind. Die Lösungen vom

Operatoransatz und dem Vervielfachen unterscheiden sich bei genauerer Betrachtung nicht. Die formale Ausformulierung der Rechenregel findet sich im Unterkapitel 2.3.3.1.

Schlussendlich betrachten wir den Fall der Multiplikation von zwei Bruchzahlen. Hierbei liegt die Herausforderung weniger in der Anwendung der entsprechenden Rechenregel, sondern vielmehr im Aufbau bzw. in der Verankerung geeigneter Grundvorstellungen. Studien belegen, dass Schüler:innen sowohl bei Fragestellungen hinsichtlich der Anteil von Anteil Bildung als auch bei Aufgabenstellungen zu Flächeninhalten mit Bruchzahlen als Maßzahlen Probleme aufweisen. Wieder ist im Zuge des Mathematikunterrichts darauf zu achten, sowohl auf der anschaulichen als auch auf der ikonischen, enaktiven und schlussendlich der rechnerischen Ebene zu arbeiten. Auch hier wäre es ratsam mit verschiedenen Anschauungsmaterialien zu hantieren, wie im Unterkapitel 2.2.2 beschrieben (Padberg & Wartha, 2017).

2.3.3.1 Rechenregeln zur Multiplikation von Bruchzahlen

Für die Multiplikation von Bruchzahlen, werden sowohl Zähler als auch Nenner miteinander multipliziert. Somit ergibt sich formal für die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{o}{p}$, wobei $n, p \neq 0$ der Ausdruck (Kemnitz, 2019):

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{o}{p} = \frac{m \cdot o}{n \cdot p}.$$

Hierbei gibt es, im Gegensatz zur Addition und Subtraktion von Bruchzahlen, keine Unterscheidung zwischen den Rechenregeln von gleichnamigen und ungleichnamigen Brüchen.

Wird ein Bruch mit einer natürlichen Zahl bzw. eine natürliche Zahl mit einem Bruch multipliziert, so erhalten wir für den Bruch $\frac{m}{n}$, wobei $n \neq 0$ gilt und die natürliche Zahl a unter Verwendung des Kommutativgesetzes der Multiplikation den Ausdruck (Kemnitz, 2019):

$$\frac{m}{n} \cdot a = \frac{m \cdot a}{n} = \frac{a \cdot m}{n} = a \cdot \frac{m}{n}.$$

Wie bereits erwähnt, sollte im Mathematikunterricht keinesfalls mit diesen beiden Rechenregeln in die Thematik eingestiegen werden. Ansonsten kommt es von Seiten der Schüler:innen zu einem Auswendiglernen der Regeln. Ein tieferes Verständnis wird ihnen jedoch verwehrt.

2.3.3.2 Fehlerstrategien zur Multiplikation

Im Zuge der Multiplikation von Bruchzahlen lässt sich Studienergebnissen zufolge die Fehlerstrategie erkennen, bei welcher irrtümlich auf die Strategie der Addition bzw. Subtraktion von gleichnamigen Brüchen rückgeschlossen wird. Diese hat folgende Form (Padberg & Wartha, 2017):

$$\mathbf{M1:} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{o}{n} = \frac{m \cdot o}{n}.$$

Der Rechenweg $\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{7} = \frac{8}{7}$ soll dieses Fehlermuster beispielhaft darstellen.

Ebenso häufig lässt sich im Zuge von empirischen Untersuchungen folgende Fehlerstrategie formulieren (Padberg & Wartha, 2017):

$$\mathbf{M2:} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{o}{n} = \frac{m \cdot o}{n + n}.$$

Autor:innen sehen den Fehler in der Verwechslung von $n \cdot n = 2n$ anstelle von $n \cdot n = n^2$. Zusätzlich lässt sich an Studienergebnissen erkennen, dass in wenigen Fällen dividiert statt multipliziert wird. Bei der Multiplikation ungleichnamiger Brüche kommt es statistisch gesehen deutlich seltener zu typischen Fehlermustern. Lediglich bei Aufgabenstellungen mit gleichwertigen Zählern kommt es, analog zu M2 zur Fehlerstrategie $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$, welche sich formal durch folgenden Ausdruck beschreiben lässt (Padberg & Wartha, 2017):

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{p} = \frac{m + m}{n \cdot p}.$$

Überraschenderweise weisen Schüler:innen die häufigsten Fehler im Fall der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl bzw. einer Bruchzahl mit einer natürlichen Zahl auf. Folgendes Fehlermuster ist deutlich zu erkennen (Padberg & Wartha, 2017):

$$\mathbf{M3:} \quad a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{a \cdot n} \text{ bzw. } \frac{m}{n} \cdot a = \frac{m \cdot a}{n \cdot a}.$$

Somit wird von Seiten der Schüler:innen das Prinzip des Erweiterns anstelle der Multiplikation von Bruchzahlen verwendet. Als Ursache für den Fehlertyp M3 ist die mögliche Fehlvorstellung von $a = \frac{a}{a}$ anstelle von $a = \frac{a}{1}$ zu nennen. Ein unzureichendes Verständnis im Unterschied des Erweiterns und Multiplizierens kann ebenfalls als Grund angeführt werden (Padberg & Wartha, 2017).

Bei Aufgabenstellungen mit gemischten Zahlen missachten Schüler:innen häufig, dass diese vor der Multiplikation in einen unechten Bruch umgewandelt werden müssen. Demzufolge konnten von Lankford (1972) und Gerster & Grevsmühl (1983) im Zuge ihrer Studienergebnisse einige Fehlermuster festgestellt werden. Besteht die Aufgabe darin, eine gemischte Zahl mit einem Bruch zu multiplizieren, wird häufig lediglich die Bruchzahl multipliziert, die natürliche Zahl bleibt unverändert, wie das folgende Beispiel verdeutlicht:

$$4\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = 4\frac{6}{35}.$$

Im Fall der Multiplikation einer gemischten Zahl mit einer natürlichen Zahl, werden von Seiten der Schüler:innen oftmals nur die natürlichen Zahlen multipliziert, die Bruchzahl wird nicht verändert. Dies zeigt das Beispiel:

$$1\frac{1}{3} \cdot 7 = 7\frac{1}{3}.$$

Bei der Multiplikation gemischter Zahlen zeigt sich die Fehlerstrategie, dass sowohl die natürlichen Zahlen als auch die Bruchzahlen multipliziert werden:

$$2\frac{4}{5} \cdot 3\frac{2}{3} = 6\frac{8}{15}.$$

In der eben beschriebenen Aufgabenstruktur zeigt sich zudem folgendes Fehlermuster:

$$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{3}{7} = \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{7}.$$

Padberg & Wartha (2017) sehen die Ursache der Fehlerstrategien darin begründet, dass Schüler:innen nach dem Konzept vorgehen, Gleichartiges zu verknüpfen. Zur Vermeidung dieser Fehler bei Aufgabenstellungen mit gemischten Zahlen sollte den Lernenden bewusst werden, dass diese vor der Durchführung der Multiplikation in einen unechten Bruch umzuwandeln sind. Zur generellen Vermeidung aller in diesem Unterkapitel beschriebenen Fehlermuster ist auch hier der unterrichtliche Schwerpunkt auf eine ausreichende Verankerung von Grundvorstellungen bezüglich der Multiplikation zu legen. Dies kann von Seiten der Lehrkräfte durch ein variationsreiches Üben realisiert werden.

2.3.4 Division von Bruchzahlen

Studienergebnissen zufolge sind die anschaulichen Vorkenntnisse von Schüler:innen vor der systematischen Behandlung der Division von Bruchzahlen im Mathematikunterricht eher gering. Die Schüler:innen kennen jedoch aus der Division mit natürlichen Zahlen

Verteil- und Aufteilsituationen. Im geometrischen Sinne ist Letztere auch als Messen zu deuten. Auch bei der Division von Bruchzahlen ist zwischen verschiedenen Aufgabentypen und Schwierigkeitsgraden zu unterscheiden. Empirische Untersuchungen belegen demnach, dass Schüler:innen bei der Division einer Bruchzahl durch eine natürliche Zahl am wenigsten Fehler zeigen. Hier können sie das Prinzip des Verteilens gut anwenden. Ein Unterschied ist dabei der Umstand, dass Aufgabenstellungen wie $\frac{2}{7}:2$ (Divisor teilt den Zähler) einfacher zu lösen sind als beispielsweise $\frac{4}{7}:5$ (Divisor teilt den Zähler nicht). Die Division einer Bruchzahl durch eine Bruchzahl (im Sinnes des Messens) bereitet den Lernenden hingegen mehr Probleme. Dieser Fall kann sowohl anhand der Grundvorstellung des Messens als auch mithilfe der Grundvorstellung der Umkehroperation der Multiplikation behandelt werden. Zudem sollte den Schüler:innen im Zuge der Division von Bruchzahlen die Tatsache bewusst werden, dass die schriftliche Division ebenso als Bruchzahl angeschrieben werden kann. Beispielsweise gilt demnach $4:5 = \frac{4}{5}$. Im Mathematikunterricht ist somit auf die Ausbildung konkreter Grundvorstellungen zu achten (Padberg & Wartha, 2017). Dieser Umstand wurde bereits in den vorigen Unterkapiteln der Addition, Subtraktion und Multiplikation verdeutlicht.

2.3.4.1 Rechenregeln zur Division von Bruchzahlen

Die Division von Bruchzahlen stellt für viele Schüler:innen eine besondere Herausforderung im Zuge der Thematik der Bruchrechnung dar (Padberg & Wartha, 2017). Im Fall der Division einer Bruchzahl durch eine natürliche Zahl ergibt sich für den Bruch $\frac{m}{n}$, wobei $n \neq 0$ gilt und die natürliche Zahl a formal (Kemnitz, 2019):

$$\frac{m}{n}:a = \frac{m}{n \cdot a}.$$

Dabei wird der Nenner mit der natürlichen Zahl multipliziert. Teilt hingegen die natürliche Zahl den Zähler des Bruches, so kann die Rechenregel für den Bruch $\frac{m}{n}$, wobei $n \neq 0$ gilt und die natürliche Zahl a , wobei m ein Vielfaches von a ist, ebenfalls formuliert werden als:

$$\frac{m}{n}:a = \frac{m:a}{n}.$$

Die für Schüler:innen oftmals nur sehr schwer zu verstehende Rechenregel zur Division einer Bruchzahl durch eine Bruchzahl formuliert Kemnitz (2019) mit den Worten „Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert“.

Formal erhalten wir für die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{o}{p}$, wobei $n, p \neq 0$ den Ausdruck (Kemnitz, 2019):

$$\frac{m}{n} : \frac{o}{p} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{o} = \frac{m \cdot p}{n \cdot o}.$$

Vor allem die zweite Rechenregel sollte den Lernenden nicht zu Beginn der Behandlung dieser Thematik vorgelegt werden. Das Verständnis beruht auf der wichtigen Ausbildung von Grundvorstellungen und ist lediglich durch eine umfangreiche Auseinandersetzung mit vielen verschiedenen Aufgabenstellungen möglich.

2.3.4.2 Fehlerstrategien zur Division

Wie bereits in den Unterkapiteln zur Addition, Subtraktion und Multiplikation zeigen Studienergebnisse auch im Bereich der Division typische Fehlermuster auf. So kann im Falle gleichnamiger Brüche folgende Fehlerstrategie beschrieben werden (Padberg & Wartha, 2017):

$$\text{D1: } \frac{m}{n} : \frac{o}{n} = \frac{m: o}{n}.$$

Diese fehlerhafte Strategie kann jedoch nur in jenen Fällen benutzt werden, in welchen der Zähler des Dividenden ein Vielfaches des Zählers des Divisors ist.

Im Falle der Division einer Bruchzahl durch eine natürliche Zahl zeigt sich folgendes Fehlermuster (Padberg & Wartha, 2017):

$$\text{D2: } \frac{m}{n} : a = \frac{m \cdot a}{n \cdot a}.$$

An dieser Stelle wird deutlich, dass es zu einer fehlerhaften Anwendung des Erweiterns kommt. Außerdem unterläuft einem bestimmten Prozentsatz der Lernenden der Fehler, dass sie im oben beschriebenen Fall multiplizieren anstelle zu dividieren. Als mögliche Ursache sehen Padberg & Wartha (2017) den falschen Transfer der Multiplikation, sogenannte Einbettungsprobleme ($a = \frac{a}{a}$), das Ausbleiben der Kehrwertbildung bzw. eine fehlerhafte Anwendung des Kehrwertes.

Zur Häufigkeit aller beschriebenen Fehlerstrategien im Zuge der vier Grundrechnungsarten von Bruchzahlen wird im zweiten Teil dieser Arbeit näher eingegangen. Ein Vergleich mit den Ergebnissen der dieser Arbeit zugrundeliegenden empirischen Untersuchung wird ebenfalls dort gesetzt.

2.4 Österreichischer Lehrplan

Der österreichische Lehrplan bildet die gesetzliche Grundlage für all jene Inhalte, welche im Zuge des Schulunterrichts umzusetzen sind. Dies wird durch folgenden Auszug aus dem Lehrplan deutlich: „Die Vorgaben im Abschnitt „Kernbereich“ der Lehrpläne der einzelnen Unterrichtsgegenstände (5. bis 8. Schulstufe) sind verbindlich“ (BMDW, 2021). Dabei wird zwischen einem Kern- und einem Erweiterungsbereich unterschieden. Dem Kernbereich kommt dabei in den Pflichtgegenständen eine höhere Wochenstundenanzahl zugute. Die exakten Inhalte pro Schulstufe und Unterrichtsfach sind durch den Lehrplan eigens definiert.

2.4.1 Unterrichtsfach Mathematik

Die einleitenden Worte im Lehrplan für die allgemeinbildenden höheren Schulen und die Mittelschule beschäftigen sich mit verschiedenen Bildungs- und Lehraufgaben. Ohne Zweifel kommt allen angeführten Punkten ihre Berechtigung zu. Im Zuge dieser Arbeit wurde schon des Öfteren auf die Bedeutung der Ausbildung konkreter Grundvorstellungen hingewiesen. Daher ist folgende Bildungs- und Lehraufgabe besonders erwähnenswert: „Die Schülerinnen und Schüler sollen in den verschiedenen Bereichen des Mathematikunterrichts Handlungen und Begriffe nach Möglichkeit mit vielfältigen Vorstellungen verbinden und somit Mathematik als beziehungsreichen Tätigkeitsbereich erleben;“ (BMDW, 2021).

Der Lehrstoff verteilt sich für die AHS-Unterstufe und die Mittelschule auf vier Jahre. Die jeweiligen Themenbereiche werden mithilfe von Unterkategorisierungen benannt. Im Bereich der Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte wird einleitend darauf hingewiesen, dass Schüler:innen „[...] durch den Erwerb und Nutzung grundlegender Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten Einsichten in die Gebiete Arithmetik, elementare Algebra und Geometrie gewinnen [sollen]“ (BMDW, 2021). Die Thematik der Bruchrechnung ist in das mathematische Fachgebiet der Arithmetik einzuordnen.

In der 5. Schulstufe kommt der Begriff Bruch bereits erstmalig vor. Im Bereich des Lehrplanes unter 1.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen sollen Schüler:innen „[...] mit der Darstellung in Dezimal- und Bruchschreibweise vertraut sein [und] [...] Rechnen mit Brüchen, nur in einfachen Fällen, die anschaulich deutbar sind [...]“ (BMDW, 2021). Die Brucharten (echter Bruch, unechter Bruch und gemischte Zahl) und Umwandlung zwischen den verschiedenen Brucharten werden ebenso besprochen wie die Addition und

Subtraktion gleichnamiger Brüche bzw. gemischter Zahlen und die Multiplikation und Division von Brüchen mit einer natürlichen Zahl. Bereits eingeführt wird in die Thematik der Bruch- und Dezimalschreibweise. In der 6. Schulstufe wird die Bruchrechnung erneut als Themenbereich aufgenommen, nun jedoch mit einem höheren Schwierigkeitsgrad. Im Bereich des Lehrplanes unter 2.1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen des Lehrplanes steht „[...] Rechnen mit Brüchen (mit kleinen Zählern und Nennern), damit die Rechenregeln im Hinblick auf die Algebra sicher beherrscht werden, diese Rechenregeln für das Bruchrechnen begründen können [und] Bruchdarstellung in Dezimaldarstellung überführen und umgekehrt [...]“ (BMDW, 2021) am Programm. Den Hauptschwerpunkt nehmen hier die vier Grundrechnungsarten der Bruchzahlen ein, wobei mit verschiedenen Brucharten gearbeitet wird. Die Bruchrechnung als eigener Punkt kommt in der 7. Schulstufe nicht vor. Hier liegt der Fokus im Bereich Arbeiten mit Zahlen und Maßen auf den rationalen Zahlen. Es ist jedoch durchaus vorgesehen, auch hier die Bruchzahlen erneut zu thematisieren und in Aufgabenstellungen einzuarbeiten. Dies hat ebenso in der 8. Schulstufe seine Gültigkeit, wobei sich zu diesem Zeitpunkt die Aufgabenstellungen gegenüber der 7. Schulstufe durch den Schwierigkeitsgrad unterscheiden.

Sämtliche Ausführungen dieses Unterkapitels stimmen mit den Ausführungen des Lehrplanes für die Mittelschule überein (BMDW, Bundesrecht: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne der Mittelschulen, 2021).

2.4.2 Bildungsstandards und Individuelle Kompetenzmessung PLUS (iKM^{PLUS})

Die sogenannten Bildungsstandards sind ein Instrument des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung, welche seit mehr als zehn Jahren fundamental für die Entwicklung von Schule und Unterricht verantwortlich sind. Ihre Aufgabe besteht darin, Lernergebnisse und Kompetenzen aus den Fächern Mathematik, Deutsch und Englisch festzustellen. Diese Erkenntnisse werden mittels nationaler Kompetenzerhebungen erfasst, welche seit dem Schuljahr 2021/22 im Zuge der individuellen Kompetenzmessung PLUS (iKM^{PLUS}) erfolgen (BMBWF, 2022).

Im österreichischen Lehrplan wird der Begriff Kompetenz folgendermaßen definiert: „Kompetenz besteht aus dem Zusammenspiel von Wissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Haltungen, welche in Handlungssituationen durch die Disposition der Einzelnen zur Geltung kommen. Zur fachbezogenen Kompetenzentwicklung gehört als zentrale Aufgabe der Schule die Vermittlung fundierten Wissens“ (BMDW, 2021).

Im Unterrichtsfach Mathematik sind vier verschiedene Handlungsbereiche definiert. Dabei bilden Darstellen und Modellbilden (H1), Rechnen und Operieren (H2), Interpretieren (H3) und Argumentieren und Begründen (H4) die vier verschiedenen Handlungsbereiche. Zusammen mit den Kompetenzen der unterschiedlichen Inhaltsbereiche, welche im Lehrplan festgelegt sind (I1 – Zahlen und Maße, I2 – Variable, funktionale Abhängigkeiten, I3 – geometrische Figuren und Körper und I4 – statistische Darstellungen und Kenngrößen), ergeben sich damit umfassende Kompetenzen, welche im Unterricht zu beachten und vermitteln sind. Der Umstand, weshalb die Thematik der Bildungsstandards in dieser Arbeit angeführt wird, ist jener, dass sämtliche Anforderungen auch in Aufgabenstellungen zur Bruchrechnung vorkommen, welche dem Inhaltsbereich I1 zuzuordnen sind (IQS, 2022). Auch ist es möglich, dass in der jährlichen individuellen Kompetenzmessung PLUS Fragestellungen vorkommen, welche Rechenfähigkeiten und Vorstellungen aus dem Bereich der Bruchrechnung verlangen.

2.5 Auszug bisheriger Forschungsergebnisse

Wie bereits im Kapitel 1 erwähnt wurde, beschäftigten sich in den letzten vier Jahrzehnten zahlreiche Wissenschaftler:innen mit der Thematik der Bruchrechnung im Kontext der Schule. Die beiden Professoren Friedhelm Padberg und Sebastian Wartha sind dabei im deutschsprachigen Raum aufgrund ihrer Forschungstätigkeit hervorzuheben. In ihrem Werk „Didaktik der Bruchrechnung“ (2017) fassen sie nicht nur die wichtigen Grundlagen der Bruchrechnung zusammen, sie geben darüber hinaus einen Überblick zu diversen Studienergebnissen.

Padberg (1986) untersuchte in einer seiner Studien die typischen Schüler:innenschwierigkeiten in der Bruchrechnung. Dafür wurden schriftliche Aufgabenstellungen seitens der Schüler:innen beantwortet und anschließend ausgewertet. Ziel dieser Untersuchung war neben einer Bestandsaufnahme zum Wissensstand der Jugendlichen, die Entwicklung und Ableitung von Konsequenzen und Maßnahmen, wodurch Lehrkräfte im Unterricht angemessen auf die ermittelten Fehlerstrategien Bezug nehmen können. Es zeigte sich, dass viele Fehlermuster von Seiten der Schüler:innen kaum zufällig, sondern vielmehr systematisch verwendet wurden. Im Bereich der Addition von Bruchzahlen wurden im Durchschnitt weniger als 50% der Aufgaben bei Aufgabenstellungen „Bruch plus natürliche Zahl“ richtig gelöst. Der Aufgabentyp „Natürliche Zahl minus Bruch“ bereitete im Bereich der Subtraktion die meisten Schwierigkeiten und wurde lediglich von rund 45% der Schüler:innen richtig gelöst. Aufgaben zur

Bruchmultiplikation erreichten bei allen Aufgabentypen einen höheren Prozentsatz an richtig gelösten Aufgaben. Der Aufgabentyp „Bruch mal natürliche Zahl bzw. natürliche Zahl mal Bruch“ konnte von mehr als 55% aller Teilnehmer:innen korrekt gelöst werden. Die Aufgabentypen „Bruch mal Bruch (gleichnamig/ungleichnamig)“ erreichten höhere Lösungshäufigkeiten. Im Bereich der Division von Bruchzahlen konnte der Aufgabentyp „Natürliche Zahl durch Bruch“ lediglich von ca. 36% aller Schüler:innen richtig gelöst werden. Die meisten korrekten Lösungen erreichten Schüler:innen bei Aufgabenstellungen „Bruch durch Bruch (ungleichnamig)“ (Padberg, 1986). Genauere Informationen sind dem Kapitel 5.1 zu entnehmen.

Weiters veröffentlichte Padberg (1991) eine empirische Untersuchung, welche an Gymnasien in Deutschland durchgeführt wurde. Dabei lag sein Fokus jedoch nicht auf der Behandlung von gemeinen Brüchen. Er untersuchte die Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen. Seine Ergebnisse zeigten, dass die Schwierigkeiten der Schüler:innen im Umgang mit Dezimalbrüchen jene der gemeinen Brüche übersteigen. Anhand der Untersuchung konnte festgestellt werden, dass Schüler:innen in den meisten Fällen versuchen, eine Lösung zu erhalten, auch wenn diese auf falschen Lösungsstrategien beruhen. Diese werden oftmals systematisch bei ähnlichen Aufgabenstellungen angewendet (Padberg, 1991).

Wartha (2009) beschäftigte sich in seiner dreijährigen Analyse mit der Entwicklung des Bruchzahlbegriffes. Dabei zeigte sich, dass Schüler:innen große Schwierigkeiten beim Aufbau geeigneter Grundvorstellungen zur Thematik aufweisen. Die Ursachen für die dokumentierten Fehlertypen liegen vor allem darin, dass es den Teilnehmer:innen nicht möglich ist, Grundvorstellungen aufzubauen bzw. bestehende Grundvorstellungen angemessen zu erweitern (Wartha, 2009). Wartha wies bereits in seinem Beitrag „Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsumbrüche“ (2005) auf die Probleme beim Erweitern des Zahlenbereiches in den positiven rationalen Zahlen hin. Dabei kritisierte er jedoch, dass von Lehrer:innenseite zu schnell auf der formalen-regelorientierten Ebene gearbeitet wird und den Schüler:innen die Zeit fehlt, um Grundvorstellungen aufbauen zu können. Wartha schreibt dazu: „Es wird vermutet, dass in der mangelnden Erweiterung von Grundvorstellungen eine Hauptursache der Defizite im Umgang mit rationalen Zahlen, insbesondere in Anwendungskontexten, liegt“ (Wartha, 2005). Zudem sind die in der Volksschule aufgebauten Grundvorstellungen im Bereich der natürlichen Zahlen oftmals unzureichend für den Bereich der positiven rationalen Zahlen und müssen entsprechend erweitert und reorganisiert werden (Wartha, 2005).

Das sogenannte Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA) wurde in Deutschland mit dem Ziel ins Leben gerufen, mithilfe einer Längsschnittuntersuchung die Entwicklung von Kompetenzen im Bereich der Mathematik auf eine Großzahl von Schüler:innen über den gesamten Zeitraum der Sekundarstufe I zu erheben und zu verfolgen. Ein inhaltlicher Schwerpunkt dieses Projektes stellt die Thematik der Bruchrechnung dar. Im Zuge von Interviews konnte unter anderem festgestellt werden, dass Teilnehmer:innen über mentale Fehlvorstellungen im Bereich der Bruchrechnung verfügen. Im Zuge der Ergebnisse dieses Projektes konnten auch Veränderungen für die Praxis eingeleitet werden. Diese bezogen sich sowohl auf den Lehrplan, die Lehrer:innenausbildung und Lehrer:innenfortbildung als auch auf die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien. Ausführliche Informationen können beispielsweise dem Buchkapitel „Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I“ (Pekrun, et al., 2006) entnommen werden.

Padberg & Wartha (2017) zitieren in ihrem Werk einige Ergebnisse verschiedener Studien, darunter beispielsweise Resultate des zuvor erwähnten PALMA-Projektes, Untersuchungen von Malle & Huber (2004) oder Padberg (1986). Auf Ergebnisse einzelner Beispiele aus diversen Studien wird im zweiten Teil dieser Arbeit näher eingegangen.

3 Forschungsfrage und Hypothesen

Im Zuge der Auseinandersetzung und intensiven Literaturrecherche zur Thematik der Bruchrechnung und den häufig dokumentierten Schüler:innenschwierigkeiten in diesem Teilbereich der Mathematik, ist die Autorin dieser Masterarbeit zu folgenden zwei Forschungsfragen gelangt:

„Welche Fehlerstrategien nach Padberg & Wartha (2017) lassen sich im Zuge der empirischen Studie nachweisen?“

„Welche Unterschiede in den Lösungshäufigkeiten sind schultypenspezifisch und jahrgangsspezifisch bzw. schultypenübergreifend und jahrgangsübergreifend zu erkennen?“

Aufgrund der eben beschriebenen Forschungsfragen möchte die Autorin dieser Arbeit ebenfalls folgende Hypothesen mithilfe der dieser Arbeit zugrundeliegenden empirischen Untersuchung überprüfen:

- (1) „Schüler:innen der 8. Schulstufe der Mittelschule zeigen bessere Ergebnisse als Schüler:innen der 6. Schulstufe der Mittelschule.“
- (2) „Schüler:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe zeigen bessere Ergebnisse als Schüler:innen der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe.“
- (3) „Schüler:innen der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe zeigen bessere Ergebnisse als Schüler:innen der 6. Schulstufe der Mittelschule.“
- (4) „Schüler:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe zeigen bessere Ergebnisse als Schüler:innen der 8. Schulstufe der Mittelschule.“
- (5) „Die Forschungsergebnisse zeigen keine signifikanten Unterschiede zu früheren Studienergebnissen.“

4 Material und Methoden

Dieser originalen wissenschaftlichen Arbeit liegt eine empirische Untersuchung in Form eines Fragebogens zugrunde. Die abgebildeten Aufgabenstellungen orientieren sich an dem diagnostischen Test zur Bruchrechnung von Padberg & Wartha (2017). Da es sich um eine Wissensabfragung zur Thematik der Bruchrechnung handelt, ist die Mehrheit der Aufgabenstellungen als offene Frage formuliert. Berger-Grabner (2013) beschreibt in ihrem Werk sowohl Vorteile als auch Nachteile zu diesem Fragentyp. Im Zuge der Auswertung kann folgendes Argument bestätigt werden: „Die Verwendung offener Fragen hat aber den Nachteil, dass man dadurch individuelle und nur begrenzt vergleichbare Daten erhält. Außerdem hängt die Qualität der Antworten von der Artikulationsfähigkeit und dem Engagement der Befragten ab. Es entsteht ein relativ hoher Auswertungs- und Interpretationsaufwand [...]“ (Berger-Grabner, 2013).

Das geschlossene Fragenformat kommt lediglich in einer Aufgabenstellung zur Anwendung. Hierbei liegt der Vorteil vor allem in der leichteren Auswertung und dem fehlenden Interpretationsspielraum. Die Teilnehmer:innen sind durch die verwendeten Fragestellungen dazu aufgefordert, ihr Wissen zur Thematik der Bruchrechnung

anzuwenden. Somit sind die Beispiele im offenen Fragentyp für den Sinn und Zweck dieser empirischen Untersuchung zielführender.

Der Fragebogen wurde an die teilnehmenden Schulen weitergeleitet und von den Schüler:innen händisch ausgefüllt. Die Auswahl der drei Schulen erfolgte nach dem Schultyp und der unmittelbaren lokalen Erreichbarkeit. Da ein Ziel dieser Arbeit der Vergleich der Ergebnisse nach Schultyp ist, war die Auswahl mindestens einer AHS-Unterstufe und einer Mittelschule erforderlich. Aufgrund der besseren Vergleichbarkeit und der höheren Schüler:innenzahl in der AHS-Unterstufe konnte eine zweite Mittelschule für die Durchführung der empirischen Studie gewonnen werden. Die genaue Auswertungsstrategie und die Rahmenbedingungen zur empirischen Untersuchung werden in den nachfolgenden Unterkapiteln näher erläutert.

Da die Ergebnisse der einzelnen Fragebögen sowohl in diversen Excel-Listen als auch in SPSS dargestellt werden, können umfassende Daten erhoben und diese auch in verschiedenen grafischen Darstellungen präsentiert werden. Das Hauptaugenmerk bei der Auswertung mithilfe des Programmes SPSS liegt jedenfalls in der Verifizierung bzw. Falsifizierung der formulierten Hypothesen. Auch weitere Schlüsse können aus den gewonnenen Ergebnissen gezogen werden, diese sind im Kapitel 5.2 genauer angeführt.

4.1 Studiendesign

Wie bereits im Kapitel 4 erwähnt, wurde der Fragebogen an drei verschiedenen Schulen in Niederösterreich ausgegeben. Da es sich um eine empirische Untersuchung an Schulen handelt, musste im Vorhinein eine Genehmigung über die Bildungsdirektion für NÖ beantragt werden. Diesem Antrag war unter anderem eine kurze Projektbeschreibung, der Fragebogen, eine Bestätigung der Universität Wien, die Liste der ausgewählten Schulen und ein Elterninformationsblatt mit Einverständniserklärung beizulegen. Zu den Voraussetzungen und Bedingungen für eine Genehmigung war zu bestätigen, dass die Bearbeitungszeit der Testung nicht länger als eine Unterrichtsstunde (50 Minuten) andauert, die Schüler:innen freiwillig an der Testung teilnehmen, die Zustimmung der Schulleitung und der Erziehungsberechtigten im Vorfeld eingehoben wurde und die Anonymität der Teilnehmer:innen gewährleistet werden musste. Da alle Punkte von Seiten der Antragstellerin erfüllt werden konnten, erteilte die Bildungsdirektion für NÖ die Genehmigung. Die Professor:innen wurden vor Ort an den jeweiligen Schulen über die Durchführung und Rahmenbedingungen informiert. Um eine größtmögliche Objektivität gewährleisten zu können war es der Autorin ein großes Anliegen, dass die teilnehmenden

Schüler:innen im Vorfeld nicht über die Thematik des Fragebogens informiert wurden. Zudem wurde ein Teil A und ein Teil B ausgehändigt, um ein „Abschreiben beim Nachbarn“ zu unterbinden. Auch durften die zuständigen Lehrpersonen die Zeit von 50 Minuten nicht überschreiten, eine Hilfestellung bei Schwierigkeiten zu diversen Aufgabenstellungen war ebenso nicht erwünscht. Nach der Durchführung des Fragebogens an den jeweiligen Schulen wurden die ausgefüllten Bögen von der Autorin eingesammelt und die Auswertung der Ergebnisse angestrebt.

4.2 Datenanalyse

Da die Schüler:innen die Fragebögen händisch ausfüllten, erfolgte auch die Auswertung per Hand. Im Zuge dessen wurden von der Autorin sechs verschiedene Excel-Listen erstellt – zu jedem Schultyp und Jahrgang eine separate Liste. Der Teil 1 setzte sich aus insgesamt 41 Aufgaben zusammen, der Teil 2 aus vier Fragestellungen. Die einzelnen Aufgaben wurden in der Excel-Liste horizontal eingetragen, die Schüler:innenfragebögen durchnummeriert und vertikal aufgelistet. So war es der Autorin möglich, jedes Ergebnis inkl. Fehlertyp in die jeweiligen Zeilen und Spalten einzutragen. Mithilfe dieser Listen konnten die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Beispiele pro Jahrgang und Schultyp erhoben und dokumentiert werden. Genaue Ergebnisse hierzu finden sich im Kapitel 5.1. Um die zuvor beschriebenen Hypothesen überprüfen zu können, wurde das Statistikprogramm SPSS des US-amerikanischen IT- und Beratungsunternehmens IBM verwendet. Um zu eruieren, ob die Aufgabenstellungen des Fragebogens für Schüler:innen verständlich sind, erstellte die Autorin einen Pretest, welcher von Personen der jeweiligen Altersgruppe aus dem Bekanntenkreis bearbeitet wurde. Dadurch konnten Korrekturen bei einzelnen Fragestellungen vorgenommen werden. Die Ergebnisse der Pretests hatten keinen Einfluss auf die Auswertung der tatsächlich in den Schulen erhobenen Daten.

Da die Daten, so wie sie in die Excel-Listen eingetragen wurden, nicht in SPSS implementiert werden konnten, musste die Autorin eine Umbenennung einzelner Begriffe vornehmen. Beispiele, welche richtig gelöst und mit „r“ in der Excel-Liste notiert wurden, erhielten den Wert „1“. Die mit „f = falsch“ und „n.g. = nicht gemacht“ beschriebenen Aufgaben erhielten den Wert „0“. Somit wurden in SPSS numerische Daten erzeugt und mit der Auswertung für den ersten Teil des Fragebogens konnte begonnen werden.

Der zweite Teil des Fragebogens besteht aus vier Fragestellungen in Form von Textaufgaben, somit liegt auch hier der offene Fragentyp vor. Da es dem Statistikprogramm SPSS nicht möglich ist, mit Aussagen des offenen Fragenformates umzugehen, wurde

auch hier von Seiten der Autorin eine Auflistung an richtigen, falschen und nicht gemachten Aufgaben erstellt.

Durch den oben beschriebenen Vorgang der Auflistung und Aufbereitung der Daten in der Form, dass auch das Programm SPSS damit arbeiten kann, konnten diverse statistische Auswertungen durchgeführt werden. Mithilfe der beschreibenden Statistik zeigten sich Daten zum Geschlecht der teilnehmenden Personen, den absoluten Häufigkeiten diverser Fehlertypen und die verschiedenen Lösungshäufigkeiten der jeweiligen Schultypen und Jahrgänge. Zur Überprüfung der im Kapitel 3 formulierten Hypothesen eins bis vier wurde der sogenannte t-Test verwendet. Mithilfe dieses Tools ist es möglich, zwei Gruppen miteinander zu vergleichen und dabei darauf zu achten, ob sich das jeweilige Antwortverhalten unterscheidet.

5 Auswertung

Die folgenden beiden Unterkapitel stellen einen Überblick über die beschreibende und die hypothesentestende Statistik dar. Die notwendigen Daten konnten sowohl durch die Erstellung der Excel-Listen als auch durch die Implementierung der gewonnenen Daten in das Programm SPSS dargestellt werden.

5.1 Beschreibende Statistik

An der empirischen Untersuchung in Form eines Fragebogens nahmen an insgesamt drei Schulen in Niederösterreich 194 Schüler:innen teil. Aufgrund der Anonymität der Teilnehmer:innen und der Schulen werden die beiden Mittelschulen mit Mittelschule A und Mittelschule B bezeichnet, das Gymnasium mit AHS-Unterstufe. In der Mittelschule A konnten 38 Schüler:innen der 6. Schulstufe (27 Burschen und 11 Mädchen) und 18 Schüler:innen der 8. Schulstufe (11 Burschen und 7 Mädchen) den Fragebogen ausfüllen. Aus der Mittelschule B nahmen 27 Schüler:innen der 6. Schulstufe (15 Burschen und 12 Mädchen) und 37 Schüler:innen der 8. Schulstufe (13 Burschen und 24 Mädchen) an der empirischen Studie teil. In der AHS-Unterstufe beantworteten in der 6. Schulstufe 38 Schüler:innen (21 Burschen und 17 Mädchen) und in der 8. Schulstufe 36 Schüler:innen (22 Burschen und 14 Mädchen) den Fragebogen.

Insgesamt ergeben sich in den beiden Mittelschulen somit 120 Teilnehmer:innen und in der AHS-Unterstufe 74 teilnehmende Personen.

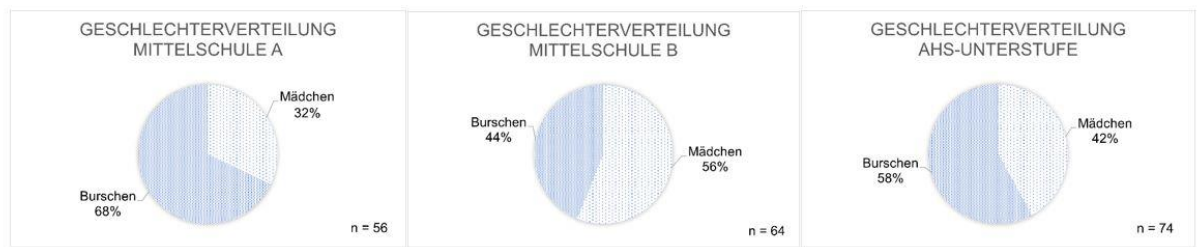


Abbildung 2: Geschlechterverteilung der teilnehmenden Schulen

Quelle: eigene Darstellung

Die Geschlechterverteilung liegt insgesamt bei 109 Burschen und 85 Mädchen.

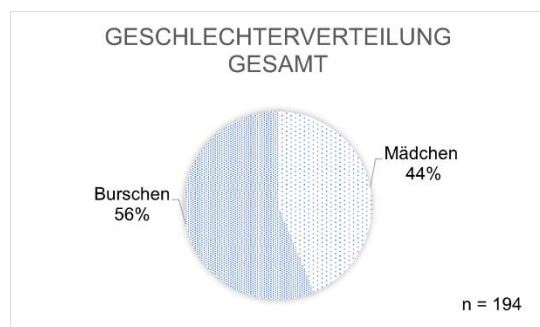


Abbildung 3: Geschlechterverteilung Gesamt

Quelle: eigene Darstellung

Bei der Auswertung der Lösungshäufigkeiten im Teil 1 des Fragebogens unterschied die Autorin zwischen richtig „r“ und falsch „f“ gelösten Aufgaben. Zur dritten Kategorie zählten die nicht gemachten „n.g.“ Aufgaben. Bei der Eintragung in die jeweiligen Excel-Listen wurden weitere Vermerke zu den verwendeten Fehlertypen notiert. In der Mittelschule A konnten in der 6. Schulstufe von insgesamt 1558 Aufgaben – die Zahl ergibt sich aus der Multiplikation der Schüler:innenzahl von 38 mit den jeweils 41 Aufgaben aus dem Teil 1 – 438 richtig und 627 falsch gelöst werden. Die restlichen 493 Aufgaben wurden nicht gemacht. In der 8. Schulstufe zeigten sich von insgesamt 738 Aufgaben – die Zahl ergibt sich aus dem Produkt der Teilnehmer:innenzahl von 18 mit den jeweils 41 Aufgaben – 393 als richtig und 260 als falsch bearbeitet. 85 Fragestellungen wurden nicht gemacht. In der folgenden Abbildung sind jene Lösungshäufigkeiten abgebildet, welche sich auf die zuvor beschriebenen Ausgänge der einzelnen Aufgaben („r“, „f“ und „n.g“) beziehen.



Abbildung 4: Lösungshäufigkeiten der beiden Schulstufen der Mittelschule A

Quelle: eigene Darstellung

In der Mittelschule B konnten die teilnehmenden Personen der 6. Schulstufe von insgesamt 1107 Aufgaben – die Zahl ergibt sich aus dem Produkt von 27 Schüler:innen mit den jeweils 41 Aufgaben aus dem Teil 1 des Fragebogens – 423 richtig und 333 falsch lösen. Die übrigen 493 Aufgaben wurden nicht gemacht. In der 8. Schulstufe der Mittelschule B bearbeiteten Schüler:innen von 1517 Aufgaben – die Zahl ergibt sich aus der Multiplikation von 37 Teilnehmer:innen mit den jeweils 41 Aufgaben – 654 Aufgaben richtig und 427 Aufgaben falsch. Nicht gemacht wurden die restlichen 436 Aufgaben. Die Abbildung 5 zeigt die grafische Darstellung der eben beschriebenen Daten.

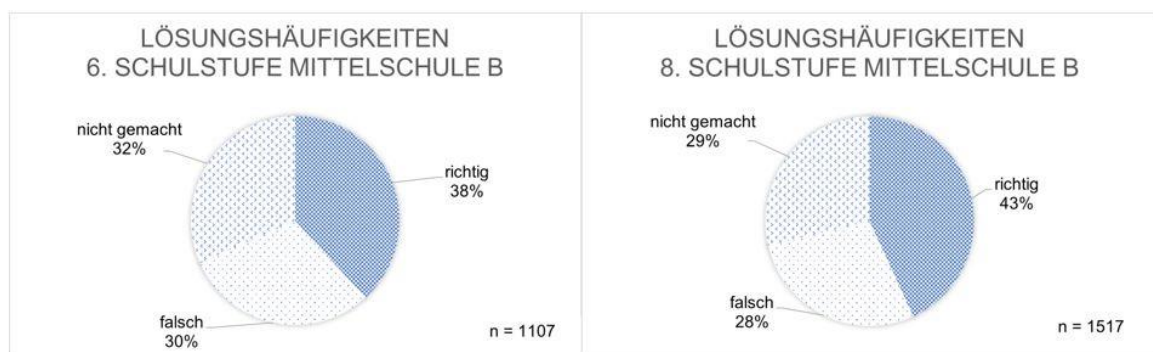


Abbildung 5: Lösungshäufigkeiten der beiden Schulstufen der Mittelschule B

Quelle: eigene Darstellung

Die Teilnehmer:innen der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe konnten von gesamt 1558 Aufgaben – die Zahl ergibt sich aus dem Produkt der 38 teilnehmenden Personen mit der Anzahl von 41 Aufgaben aus dem Teil 1 des Fragebogens – 813 korrekt und 389 nicht korrekt lösen. Nicht gemacht wurden 356 Aufgabenstellungen. Die Schüler:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe lösten von insgesamt 1476 Aufgaben – die Zahl ergibt sich aus der Multiplikation der Schüler:innenzahl von 36 mit den jeweils 41 Aufgaben aus dem Teil 1 – 1063 richtig und 256 falsch. Nicht bearbeitet wurden 156 Fragen. Die

Abbildung 6 zeigt die grafische Darstellung der schulstufenspezifischen Lösungshäufigkeiten der AHS-Unterstufe.



Abbildung 6: Lösungshäufigkeiten der beiden Schulstufen der AHS-Unterstufe

Quelle: eigene Darstellung

Werden nun die Lösungshäufigkeiten der 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen und jene der AHS-Unterstufe gegenübergestellt, so wird ersichtlich, dass Schüler:innen der AHS-Unterstufe ca. 52 % der Aufgabenstellungen richtig lösen konnten. Demgegenüber stehen ca. 32 % korrekt gelöste Fragestellungen der beiden Mittelschulen. Ca. 72 % der Aufgaben wurden in der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe korrekt gelöst. In den beiden Mittelschulen liegt der Prozentsatz an richtig gelösten Fragestellungen bei ca. 46 %. Weitere Daten können der Abbildung 7 entnommen werden.

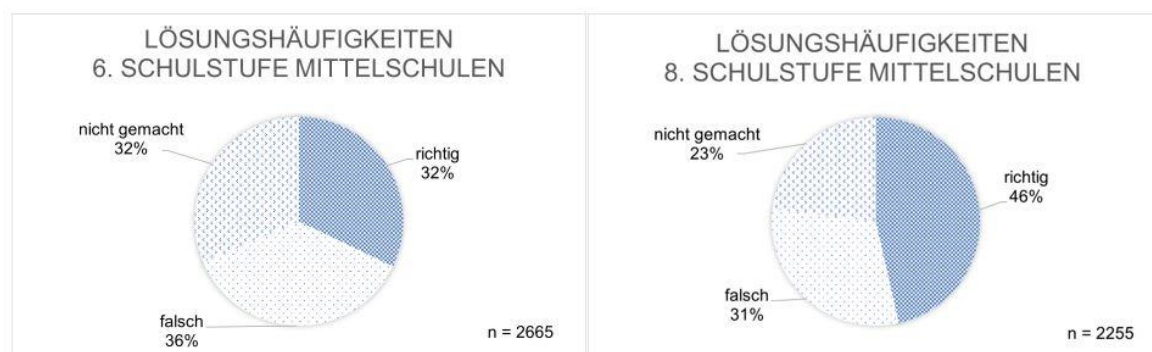


Abbildung 7: Lösungshäufigkeiten beider Mittelschulen für beide Schulstufen

Quelle: eigene Darstellung

Bei den präsentierten Zahlen und Daten handelt es sich jeweils um absolute Häufigkeiten. Die Verifizierung bzw. Falsifizierung der aufgestellten Hypothesen ist an dieser Stelle nicht möglich. Dafür wird auf das Kapitel 5.2 verwiesen.

Die Aufgabenstellung 6 aus dem ersten Teil des Fragebogens („Färbe zuerst die Hälfte des Rechtecks mit rot, dann anschließend noch ein Viertel des Rechtecks mit rot. Welchen

Bruchteil des Rechtecks hast du insgesamt gefärbt? Kannst Du diese Aufgabe auch rechnerisch lösen?“) erfragt sowohl das Verständnis auf ikonischer als auch auf der rein rechnerischen bzw. symbolischen Ebene. Dabei zeigten sich in der 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen und der AHS-Unterstufe folgende Lösungshäufigkeiten: In den beiden Mittelschulen konnten ca. 45 % der Schüler:innen die Aufgabenstellung auf ikonischer Ebene korrekt lösen. Demgegenüber stehen ca. 79 % an korrekten Antworten der AHS-Unterstufe. Der Aufforderung des Anschreibens der konkreten Rechnung $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ konnten in den beiden Mittelschulen 46 % und in der AHS-Unterstufe 47 % nachkommen. Zu beachten ist hierbei eine deutlich geringere Lösungshäufigkeit im Gegensatz zur ikonischen Ebene. Padberg & Wartha (2017) beschreiben in ihrem Werk, dass von einem tatsächlichen Verständnis nur in jenen Fällen gesprochen werden kann, in welchen die Übersetzungen in andere Darstellungsebenen vorhanden sind. Dies zeigt sich anhand der eben präsentierten Daten als nicht bestätigt. Im Vergleich zu den Ergebnissen von Wartha (2007), bei welchem rund 31 % der Realschüler:innen die Aufgabenstellung auf ikonischer Ebene richtig lösen konnten, besteht doch ein deutlicher Unterschied zu den hier präsentierten Lösungshäufigkeiten. Ein Vergleich auf der rein rechnerischen bzw. symbolischen Ebene ist zu den Daten von Wartha (2007) nicht möglich, da er in seiner Untersuchung die konkrete Rechnung bereits vorgab. Die Aufgabenstellung auf ikonischer Ebene konnte in der 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen von ca. 47 % der Schüler:innen korrekt gelöst werden. Demgegenüber stehen in etwa 56 % an richtigen Antworten auf Seiten der Teilnehmer:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe. Das Angeben eines korrekten Rechenausdruckes, die Anforderung auf symbolischer Ebene, gelang in den beiden Mittelschulen ca. 27 % der Schüler:innen. Im Vergleich dazu schafften es rund 52 % der teilnehmenden Personen der AHS-Unterstufe eine korrekte Antwort anzugeben. Zusammenfassend ist zu erkennen, dass die Ergebnisse der beiden Schulstufen der beiden Mittelschulen keine großen Unterschiede in den Lösungshäufigkeiten aufzeigen. Dahingehend ist der Prozentsatz an korrekt gelösten Aufgaben in der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe bei der Aufgabenstellung auf ikonischer Ebene deutlich höher als jener der 8. Schulstufe.

Mithilfe der Frage 13 aus dem ersten Teil des Fragebogens („Stelle $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ auf verschiedene Arten anschaulich (grafisch) dar.“) sollte ebenfalls überprüft werden, inwieweit Schüler:innen in der Lage sind, symbolische Rechenausdrücke auf ikonischer Ebene zu übersetzen. Somit war auch die Überprüfung der vorhandenen Grundvorstellungen ein Ziel. Bei den Ergebnissen zeigt sich, dass 80 % der Schüler:innen

der 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen diese Aufgabe nicht gemacht haben. Unter 65 Teilnehmer:innen konnten 11 Personen die Aufgabe korrekt lösen. Auch in der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe lösten 63 % der Schüler:innen diese Fragestellung nicht. Ca. 34 % waren in der Lage, eine richtige Antwort zu geben. In der 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen zeigt sich ein ähnliches Bild. Rund 70 % der Schüler:innen ließen diese Aufgabe aus, etwa 20 % konnten die Aufgabe korrekt lösen. In der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe ist ein ausgeglichener Wert zwischen korrekten und nicht gemachten Antworten zu erkennen. Unter den richtigen Antworten sind vor allem Darstellungen in Form von Kreisen und Rechtecken zu finden. Äußerst selten verwendeten Schüler:innen zur Darstellung einen Zahlenstrahl. Die folgenden Abbildungen zeigen einige Schwierigkeiten, welche im Zuge dieser Aufgabenstellung auf Seiten der Teilnehmer:innen auftraten:

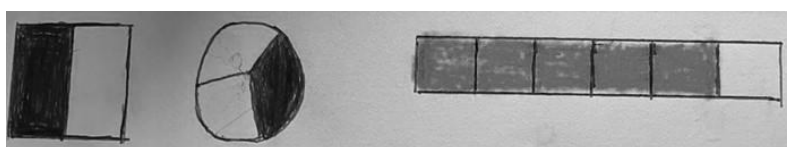


Abbildung 8: Darstellung von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ anhand von verschiedenen Ganzen

Quelle: eigene Darstellung



Abbildung 9: Darstellung von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ anhand von Kreisen und Rechtecken

Quelle: eigene Darstellung

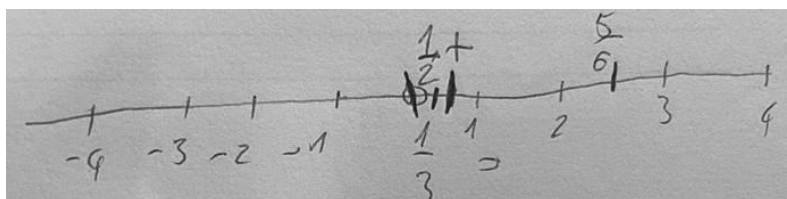


Abbildung 10: Darstellung von $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ anhand eines Zahlenstrahles

Quelle: eigene Darstellung

Die Abbildungen 8 bis 10 zeigen deutlich, dass bei der Addition von Bruchzahlen die notwendigen Grundvorstellungen in vielen Fällen lediglich in einem unzureichenden Ausmaß vorhanden sind.

Im Bereich der Addition der Bruchrechnung zeigt sich in den verschiedenen Schulstufen und Schultypen folgende Verteilung der Lösungshäufigkeiten, aufgelistet nach Art der Bruchtypen:

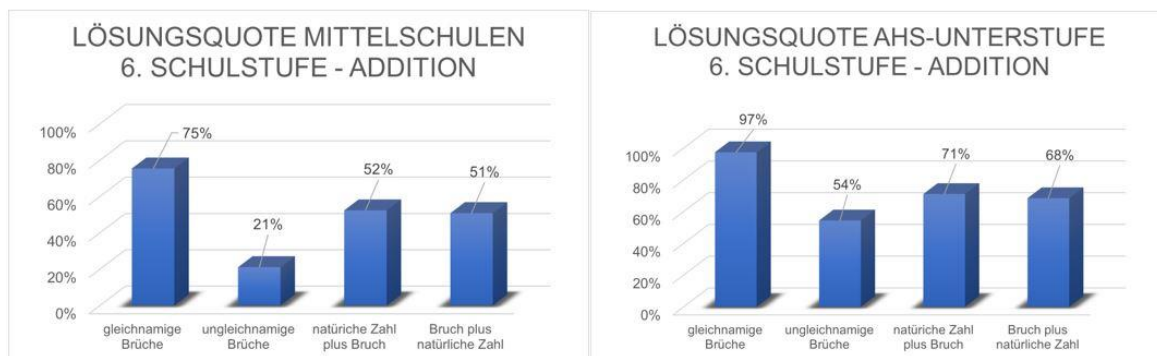


Abbildung 11: Lösungsquoten der 6. Schulstufen im Vergleich (Addition)

Quelle: eigene Darstellung

Die Schüler:innen zeigen erwartungsgemäß die größten Lösungshäufigkeiten bei der Addition gleichnamiger Brüche. Dabei erzielt die AHS-Unterstufe im Vergleich zu den beiden Mittelschulen deutlich bessere Ergebnisse. Die Teilnehmer:innen der beiden Mittelschulen erreichen bei der Addition ungleichnamiger Brüche die geringste Lösungshäufigkeit. Die Unterschiede zwischen den Aufgabentypen „Natürliche Zahl plus Bruch“ und „Bruch plus natürliche Zahl“ fallen eher gering aus.



Abbildung 12: Lösungsquoten der 8. Schulstufen im Vergleich (Addition)

Quelle: eigene Darstellung

Auch in den 8. Schulstufen der untersuchten Schultypen liegt die höchste Lösungsquote bei der Addition gleichnamiger Brüche. Sind ungleichnamige Brüche zu addieren, so fallen die Lösungshäufigkeiten am geringsten aus.

Padberg (1986) eruierte in seiner Studie zur Thematik der Bruchrechnung ebenfalls die Lösungsquoten bei der Addition verschiedener Bruchtypen. Er führte seine Studie in der

7. Schulstufe in verschiedenen Realschulklassen Deutschlands durch. Dabei konnte im Zuge seiner Untersuchung bei der Addition gleichnamiger Brüche eine Lösungshäufigkeit von rund 85 %, bei der Addition ungleichnamiger Brüche ca. 70 %, bei der Addition einer natürlichen Zahl plus einer Bruchzahl etwa 55 % und bei der Addition eines Bruches plus einer natürlichen Zahl ca. 50 % ermittelt werden. Die oben beschriebenen Ergebnisse der dieser Arbeit zugrundeliegenden empirischen Untersuchung unterscheiden sich je nach Schulstufe und Schultyp von den Ergebnissen Padbergs (1986). Wird der Durchschnitt aller Schultypen und Schulstufen je Aufgabentyp berechnet, so erhalten wir für den Aufgabentyp „gleichnamige Brüche“ eine Lösungsquote von 89 %, für die Addition ungleichnamiger Brüche ca. 47 %, für den Aufgabentyp „Natürliche Zahl plus Bruch“ 70 % und für die Addition einer Bruchzahl plus einer natürlichen Zahl 66 %. Im direkten Vergleich wird nun ersichtlich, dass die durchschnittliche Lösungshäufigkeit bei der Addition ungleichnamiger Brüche deutlich niedriger ausfällt als bei der Untersuchung von Padberg (1986). Die durchschnittliche Lösungsquote der drei anderen Aufgabentypen liegt über jener von Padberg (1986).

In der 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen tritt der im Unterkapitel 2.3.1.2 beschriebene Fehlertyp A1 bei der Addition ungleichnamiger Brüche bei ca. 35 % der Aufgabenstellungen auf. Bei Fragenstellungen zu gleichnamigen Brüchen ist er mit rund 12 % vertreten. Dabei muss festgestellt werden, dass Schüler:innen der Mittelschule A den Fehlertyp A1 deutlich häufiger verwendeten als Teilnehmer:innen der Mittelschule B. In der 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen kommt der beschriebene Fehlertyp bei ca. 22 % aller Aufgaben zur Addition ungleichnamiger Brüche vor. Mit etwa 17 % ist er bei Fragenstellungen zu gleichnamigen Brüchen vertreten. In der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe tritt der Fehlertyp A1 bei ca. 22 % aller Aufgaben zur Addition ungleichnamiger Brüche auf. Kein:e Teilnehmer:in dieser Schulstufe in der AHS-Unterstufe wendet den Fehlertyp A1 bei der Addition gleichnamiger Brüche an. Schüler:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe zeigen den Fehlertyp A1 bei ca. 10 % aller Fragenstellungen zur Addition ungleichnamiger Brüche. Lediglich eine Person wendet den Fehler bei der Addition gleichnamiger Brüche an. Die Studienergebnisse aus den USA (Post, 1981; Carpenter et al., 1976) und England (Hart, 1981), welche von Padberg & Wartha (2017) in ihrem Werk zitiert werden, sind mit den zuvor beschriebenen Daten vergleichbar.

Der ebenfalls im Kapitel 2.3.1.2 angeführte Fehlertyp A2 ist in den jeweiligen Schulstufen und Schultypen bei der Addition einer natürlichen Zahl plus einer Bruchzahl mit folgenden Häufigkeiten vertreten:

- 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen: ca. 4 %
- 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen: ca. 9 %
- 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe: ca. 8 %
- 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe: 0 %

Bei Aufgabenstellungen zur Addition einer Bruchzahl mit einer natürlichen Zahlen sind folgende Daten zu präsentieren:

- 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen: ca. 5 %
- 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen: ca. 5 %
- 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe: ca. 5 %
- 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe: 3 %

Die Ergebnisse, welche Padberg & Wartha (2017) anführen, liegen mit etwa 20 % für A2/S2 doch deutlich über den zuvor dargestellten Daten. Einzelne Schüler:innen verbinden mit einer natürlichen Zahl n die Bruchschreibweise $n = \frac{n}{n}$. Padberg & Wartha (2017) beschreiben diesen Fehler als Einbettungsfehler. Kommen die Fehlertypen A1 bzw. A2 vor, so werden sie von den Schüler:innen systematisch verwendet.

Die Aufgabenstellungen zur Subtraktion sind in drei verschiedene Kategorien zu unterteilen. Vertreten ist der Aufgabentyp der Subtraktion gleichnamiger und ungleichnamiger Brüche und die Subtraktion einer natürlichen Zahl minus einer Bruchzahl. Im Zuge der Auswertung des Fragebogens sind folgende Lösungshäufigkeiten festzustellen:



Abbildung 13: Lösungsquoten der 6. Schulstufen im Vergleich (Subtraktion)

Quelle: eigene Darstellung

Die höchste Lösungshäufigkeit ist in beiden Schultypen der 6. Schulstufe bei der Subtraktion gleichnamiger Brüche festzustellen. Die meisten Schwierigkeiten zeigen Schüler:innen bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche. In diesem Bereich schneidet die AHS-Unterstufe deutlich besser ab als die beiden Mittelschulen. Die höheren Lösungsquoten liegen im gesamten Gebiet der Subtraktion auf Seiten der AHS-Unterstufe.



Abbildung 14: Lösungsquoten der 8. Schulstufen im Vergleich (Subtraktion)

Quelle: eigene Darstellung

Die Teilnehmer:innen der 8. Schulstufen beider Schultypen verzeichnen ebenfalls die größten Lösungshäufigkeiten bei der Subtraktion gleichnamiger Brüche. Der Unterschied zwischen den Lösungsquoten bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche und dem Aufgabentyp „Natürliche Zahl minus Bruch“ sind geringer als jene in den 6. Schulstufen. Die absoluten Lösungshäufigkeiten der 8. Schulstufen liegen in allen Aufgabenformaten der Subtraktion über jenen der 6. Schulstufen.

Die Untersuchungsergebnisse von Padberg (1986) unterscheiden sich im Bereich der Subtraktionsaufgaben vor allem in den Daten zum Aufgabentyp „Subtraktion ungleichnamiger Brüche“. Hier liegt die Lösungsquote bei ca. 70 %. Die Studie wurde, wie bereits weiter oben im Text erwähnt, an Schüler:innen der 7. Schulstufe durchgeführt. Wird der Durchschnitt der 6. und 8. Schulstufe, der dieser Arbeit zugrundeliegenden empirischen Untersuchung zu diesem Aufgabentyp ermittelt, so zeigt sich ein Wert von rund 47 %. Die Subtraktion gleichnamiger Brüche konnte von etwa 80 % der Schüler:innen, das Aufgabenformat „Natürliche Zahl minus Bruchzahl“ von rund 45 % der Teilnehmer:innen korrekt beantwortet werden. Der durchschnittliche Wert der beiden Schulstufen der hier dargestellten Erhebung liegt bei ca. 88 % im Bereich der Aufgabenstellungen zur Subtraktion gleichnamiger Brüche und bei rund 57 % im Fragenformat „Natürliche Zahl minus Bruchzahl“.

Der häufigste Fehlertyp, welcher im Bereich der Subtraktion von Brüchen auftritt, ist der Typ S1, welcher im Unterkapitel 2.3.2.2 beschrieben wurde. Schüler:innen der 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen wenden ihn bei Aufgaben zur Subtraktion ungleichnamiger Brüche in 46 % aller Fragestellungen an. Im Vergleich dazu kommt der Fehlertyp bei der Subtraktion gleichnamiger Brüche lediglich zu 6 % vor. In der 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen ist dieser Fehlertyp bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche bei allen Aufgabenstellungen mit etwa 17 % vertreten. Derselbe Fehlertyp tritt bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche lediglich bei einer der 55 Personen auf. Die Anwendung des Fehlertypen S1 ist in den beiden Schulstufen der AHS-Unterstufe in geringerem Ausmaß vorhanden. Der Prozentsatz liegt in der 6. Schulstufe bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche bei rund 12 %, in der 8. Schulstufe bei etwa 10 %. Kein:e Teilnehmer:in der beiden Schulstufen in der AHS-Unterstufe wendet den Fehlertyp S1 bei der Subtraktion gleichnamiger Brüche an. Dass der Fehlertyp S1 bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche häufiger auftritt als bei der Subtraktion gleichnamiger Brüche, berichten auch Padberg & Wartha (2017).

Im Unterkapitel 2.3.2.2 wurde ebenfalls die Fehlerstrategie S2 angeführt. Die Prozentsätze der beiden Schulstufen und Schultypen bei Aufgabenstellungen zur Subtraktion einer natürlichen Zahl minus einer Bruchzahl verteilen sich wie folgt:

- 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen: ca. 2 %
- 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen: ca. 3 %
- 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe: ca. 4 %
- 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe: 0 %

Wie bereits weiter oben im Text angeführt, unterscheiden sich diese Ergebnisse eindeutig von jenen, welche Padberg & Wartha (2017) präsentieren. Der Einbettungsfehler $n = \frac{n}{n}$ tritt auch bei der dieser Arbeit zugrundeliegenden empirischen Untersuchung auf, jedoch nur in seltenen Fällen. Werden die Fehlertypen S1 bzw. S2 verwendet, so handelt es sich bei einer Vielzahl an Schüler:innen um systematische Fehler.

Bei der Grundrechnungsart der Multiplikation ist wiederum eine Einteilung in drei verschiedene Aufgabentypen möglich – zwischen der Multiplikation einer Bruchzahl mit einer natürlichen Zahl bzw. natürliche Zahl mal Bruchzahl wird an dieser Stelle nicht unterschieden.

Die folgenden beiden Abbildungen zeigen die Lösungshäufigkeiten der Mittelschulen und der AHS-Unterstufe:

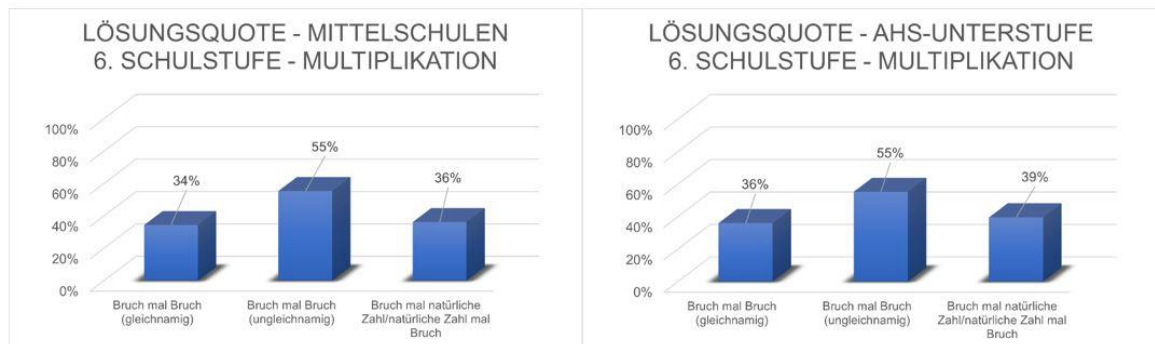


Abbildung 15: Lösungsquoten der 6. Schulstufen im Vergleich (Multiplikation)

Quelle: eigene Darstellung

Die Multiplikation zweier ungleichnamiger Brüche stellt für die Schüler:innen der 6. Schulstufe weniger Schwierigkeiten dar, als die Multiplikation zweier gleichnamiger Brüche bzw. der Aufgabentyp „Bruch mal natürliche Zahl/natürliche Zahl mal Bruch“.

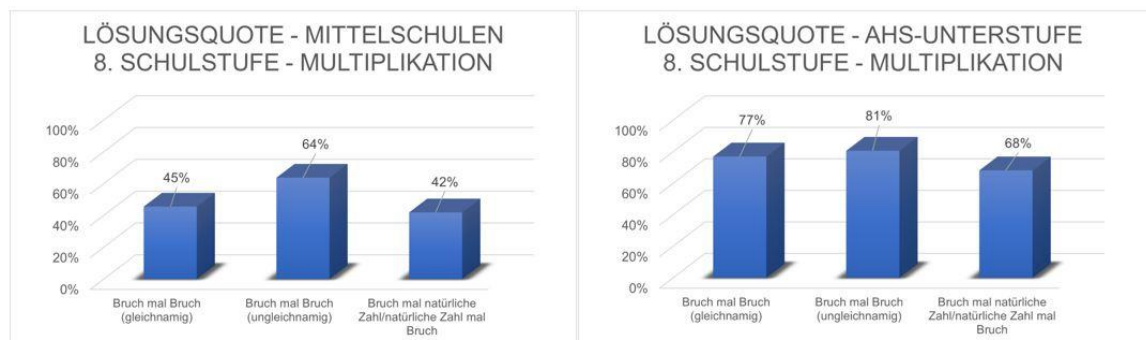


Abbildung 16: Lösungsquoten der 8. Schulstufen im Vergleich (Multiplikation)

Quelle: eigene Darstellung

Auch in der 8. Schulstufe zeigt sich ein ähnliches Bild bezüglich der Lösungshäufigkeiten. Die Multiplikation zweier ungleichnamiger Bruchzahlen erreicht eine höhere Lösungsquote als die Multiplikation zweier gleichnamiger Brüche. Auffallend ist, dass die 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe in allen drei Kategorien deutlich höhere Lösungshäufigkeiten aufweist als die 8. Schulstufe der Mittelschulen.

Die Lösungsquoten aus der Untersuchung von Padberg (1986) liegen im Bereich der Multiplikation zweier gleichnamiger Brüche bei 65 %, zweier ungleichnamiger Brüche bei 75 % und bei der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl bzw. Bruchzahl

mal einer natürlichen Zahl bei 60 %. Werden die durchschnittlichen Lösungsquoten der beiden Schulstufen betrachtet, so sind folgende Daten darstellbar:

- Bruch mal Bruch (gleichnamig): 49 % richtig
- Bruch mal Bruch (ungleichnamig): 64 % richtig
- Bruch mal natürliche Zahl/natürliche Zahl mal Bruch: 46 % richtig

Diese Lösungshäufigkeiten liegen in allen Aufgabentypen unter den Ergebnissen von Padberg (1986).

Für die im Unterkapitel 2.3.3.2 beschriebenen Fehlertypen M1 und M2 und M3 ergibt sich für die beiden Schulstufen und Schultypen folgendes Bild:

Tabelle 1: Vergleich der Fehlertypen im Bereich der Multiplikation von Bruchzahlen

Schulstufen und Schultypen	Fehlertypen inkl. Prozentangaben		
	M1	M2	M3
6. Schulstufe der beiden Mittelschulen	27	3	12
8. Schulstufe der beiden Mittelschulen	23	2	8
6. Schulstufe der AHS-Unterstufe	28	2	13
8. Schulstufe der AHS-Unterstufe	6	1	18

Quelle: eigene Darstellung

Der durchschnittliche Prozentsatz des Fehlertypen M1 liegt bei ca. 21 %. Dieser Wert deckt sich mit jenem, welcher Wittmann (2013) in seinen Studienergebnissen präsentiert. Er liegt bei minimal 15 % und maximal 30 %. Die Fehlerstrategie M3 ist in der dieser Arbeit zugrundeliegenden empirischen Untersuchung seltener vertreten als es bei Padberg & Wartha (2017) beschrieben wird. Diese Beobachtung ist auch für den sehr selten vorkommenden Fehlertyp M2 zutreffend. Die Fehlertypen sind meistens als systematisch einzustufen. Vereinzelt sind Rechenfehler zu erkennen, welche als sogenannte Flüchtigkeitsfehler bezeichnet werden können.

Im Bereich der Division sind, ähnlich der Addition von Bruchzahlen, erneut vier Aufgabentypen zu unterscheiden, welche mithilfe der folgenden beiden Abbildungen dargestellt werden.

Auch hier ist der direkte Vergleich der Schultypen zu sehen:



Abbildung 17: Lösungsquoten der 6. Schulstufen im Vergleich (Division)

Quelle: eigene Darstellung

Die Aufgabenstellung „natürliche Zahl durch Bruch“ bereitet den Schüler:innen in beiden Schultypen die größten Schwierigkeiten. Im Bereich der Division zweier ungleichnamiger Bruchzahlen ist die Lösungshäufigkeit deutlich höher.



Abbildung 18: Lösungsquoten der 8. Schulstufen im Vergleich (Division)

Quelle: eigene Darstellung

Die Abbildung 18 zeigt einen großen Unterschied zwischen den Lösungsquoten der beiden Schultypen. Die Schüler:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe erreichen in allen vier Aufgabenformaten deutlich höhere Lösungshäufigkeiten als jene der beiden Mittelschulen.

Die Teilnehmer:innen der Untersuchung von Padberg (1986) konnten 65 % der Aufgaben zur Division zweier ungleichnamiger Bruchzahlen richtig lösen. Etwa 60 % der Schüler:innen beantworteten Fragestellungen zur Division zweier gleichnamiger Bruchzahlen korrekt. Beim Aufgabentyp „Bruch durch natürliche Zahl“ wurden 40 % der Aufgaben richtig gelöst, beim Fragenformat „Natürliche Zahl durch Bruch“ konnten die Teilnehmer:innen 35 % der richtig angeben.

Im Zuge der durchschnittlichen Ergebnisse der 6. und 8. Schulstufen der beiden Schultypen zeigen sich folgende Lösungshäufigkeiten:

- Bruch durch Bruch (gleichnamig): 47 % richtig
- Bruch durch Bruch (ungleichnamig): 51 % richtig
- Bruch durch natürliche Zahl: 25 % richtig
- natürliche Zahl durch Bruch: 22 % richtig

Diese Lösungsquoten liegen im Vergleich zu den Ergebnissen aus der Studie von Padberg (1986) deutlich niedriger. Mit Ausnahme der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe sind die Lösungshäufigkeiten bei der Division einer natürlichen Zahl durch einen Bruch sehr gering. Diesem Trend folgt ebenfalls die Division eines Bruches durch eine natürliche Zahl.

Die im Unterkapitel 2.3.4.2 angeführten Fehlerstrategien D1 und D2 im Bereich der Division von Bruchzahlen kommen in den beiden Schulstufen und Schultypen mit folgenden Häufigkeiten vor:

Tabelle 2: Vergleich der Fehlertypen im Bereich der Division von Bruchzahlen

Schulstufen und Schultypen	Fehlertypen in Prozentangaben	
	D1	D2
6. Schulstufe der beiden Mittelschulen	0	0
8. Schulstufe der beiden Mittelschulen	2	4
6. Schulstufe der AHS-Unterstufe	0	0
8. Schulstufe der AHS-Unterstufe	0	0

Quelle: eigene Darstellung

Die Fehlertypen D1 und D2 kommen lediglich in der 8. Schulstufe der Mittelschule B vor. In allen anderen Schulstufen und Schultypen konnten diese Fehler nicht dokumentiert werden.

Die beiden Aufgabenstellungen 8a und 8b aus dem Fragebogen („Dividiere: 1 cm: 6 =; 5 kg: 6 =“) unterliegen prinzipiell der Grundvorstellung von Brüchen als Anteil mehrere Ganzer. Die Lösungshäufigkeiten unterscheiden sich hinsichtlich der beiden Schultypen doch deutlich. In der 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen können die Aufgaben 8a und 8b von ca. 19 % der Schüler:innen gelöst werden. Alle korrekten Antworten sind als Dezimalbruchnotation angegeben. In der 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen weisen dieselben Aufgabenstellungen eine Lösungshäufigkeit von rund 31 % auf. Davon sind 29 % in Dezimalbruch- und 2 % in Bruchnotation angeführt. In der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe schaffen rund 53 % der Schüler:innen eine korrekte Antwort. Alle Antworten sind

auch hier in Dezimalbruchnotation vorzufinden. In der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe liegt die Lösungsquote bei rund 78 %. Davon entfallen etwa 56 % auf die Dezimalbruchnotation und 22 % auf die Bruchnotation. Die durchschnittliche Lösungshäufigkeit der beiden Aufgabenstellungen in allen Schultypen und Schulstufen liegt bei rund 45 %. Padberg & Wartha (2017) dokumentieren einen Wert von ca. 40 % korrekt gelöster Aufgaben.

Wie bereits im Unterkapitel 4.2 erwähnt wurde, setzt sich der Fragebogen aus einem Teil 1 und einem Teil 2 zusammen. Die wesentlichen Ergebnisse aus dem ersten Teil wurden in den obenstehenden Zeilen bereits erläutert. Der Teil 2 des Fragebogens besteht aus vier Fragestellungen, welche in Form von Textaufgaben und als Verständnisfragen formuliert sind. Im Zuge der Auswertung zeigt sich, dass vor allem in den 6. Schulstufen der beiden Mittelschulen die Aufgaben 1-4 jeweils von mehr als 50 % der Schüler:innen nicht gemacht wurden. Die erste Fragestellung konnte lediglich von vier von insgesamt 65 Teilnehmer:innen korrekt und mit Begründung beantwortet werden. Die Aufgabe 2 („Was stellst du dir unter der Multiplikation $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ vor?“) zeigt, dass Schüler:innen in vielen Fällen mangelnde Grundvorstellungen besitzen. So war es keiner Person der 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen möglich, eine konkrete Vorstellung – wie z.B. die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechteckes mit den Seitenlängen $\frac{1}{3}$ m und $\frac{3}{4}$ m – zu nennen. Die Schüler:innen erklärten lediglich die Rechenregel der Bruchmultiplikation, dies trifft auf alle 194 Teilnehmer:innen zu, welche diese Fragestellung beantworteten. Hier besteht ein großer Unterschied zu den Studienergebnissen von Prediger (2006), bei welcher zumindest 20 % der Schüler:innen eine korrekte Antwort geben konnten. Bei den Aufgaben 3 und 4 schafften in der 6. Schulstufe der beiden Mittelschulen lediglich fünf Schüler:innen eine richtige Beantwortung der Fragestellungen. Drei korrekte Antworten entfallen auf die Aufgabe drei und zwei richtige Lösungen auf die Aufgabe 4. Der Rest der Antworten war entweder falsch oder blieb aus. Auch in der 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen konnten bei allen vier Aufgabenstellungen mehr als 70 % der Schüler:innen die Fragen nicht bzw. nicht korrekt beantworten. In der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe zeigt die Aufgabenstellung vier mit insgesamt 20 korrekten von 38 möglichen Antworten ein deutlich positiveres Bild. Diese Tendenz ist auch in der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe zu erkennen. Bei der dritten Fragestellung waren 21 von 36 Teilnehmer:innen in der Lage, eine korrekte Antwort zu geben, bei der vierten Aufgabe waren es 20 von insgesamt 36 Schüler:innen. Die nachfolgende Tabelle zeigt eine detaillierte Übersicht aller

Lösungshäufigkeiten der Aufgaben im Teil 2 des Fragebogens. Dabei haben die Abkürzungen folgende Bedeutungen:

- „r“ ... richtig
- „f“ ... falsch
- „n.g.“ ... nicht gemacht

Alle Zahlenwerte sind gerundet und in Prozent zu verstehen:

Tabelle 3: Übersicht der Lösungshäufigkeiten im Teil 2 des Fragebogens

Schulstufen und Schultypen	Aufgaben 1-4 aus dem Teil 2 des Fragebogens (Ergebnisse in Prozentangaben)											
	1			2			3			4		
	r	f	n.g.	r	f	n.g.	r	f	n.g.	r	f	n.g.
6. Schulstufe der beiden Mittelschulen	6	43	51	0	45	55	5	42	53	3	31	66
8. Schulstufe der beiden Mittelschulen	9	55	36	0	55	45	15	47	38	9	36	55
6. Schulstufe der AHS-Unterstufe	26	61	13	0	68	32	21	53	26	52	24	24
8. Schulstufe der AHS-Unterstufe	36	36	28	0	61	39	58	14	28	56	14	30

Quelle: eigene Darstellung

5.2 Hypothesentestende Statistik

Im Zuge der Auswertung des Fragebogens mithilfe des Statistikprogrammes SPSS ist es möglich, in diesem Kapitel Aussagen darüber zu treffen, ob die im Kapitel 3 angeführten Hypothesen verifiziert bzw. falsifiziert werden müssen. Zu beachten ist, dass sich die Überprüfung der Hypothesen ausschließlich auf den ersten Teil des Fragebogens bezieht, da einige Aufgaben des zweiten Teiles des Fragebogens von einer großen Anzahl an Schüler:innen nicht gemacht wurden. Zur Überprüfung der ersten vier Hypothesen wurde jeweils der t-Test verwendet. Dabei können zwei unterschiedliche Gruppen verglichen werden. Genau genommen handelt es sich um den t-Test bei unabhängigen Stichproben, da sich die jeweils untersuchten Gruppen nicht beeinflussen. Mathematisch betrachtet werden die jeweiligen Mittelwerte bestimmt und miteinander verglichen.

Um zu überprüfen, ob Schüler:innen der 8. Schulstufe der Mittelschule bessere Ergebnisse als Schüler:innen der 6. Schulstufe der Mittelschule zeigen, wurden sämtliche Ergebnisse der Aufgabenstellungen des ersten Teiles des Fragebogens der jeweiligen Schulstufen und beider Mittelschulen ermittelt und in das Programm SPSS übertragen. Für die 6. Schulstufe ergeben sich bei 41 Aufgaben und 65 teilnehmenden Schüler:innen 2665 Antworten, welche in SPSS jeweils mit „1 = richtig“ und „0 = falsch“ implementiert wurden. In der 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen haben insgesamt 55 Schüler:innen teilgenommen. Nach der Multiplikation der Teilnehmer:innenanzahl mit der Aufgabensumme von 41 ergibt sich ein Wert von 2255 Antworten. Im Zuge des t-Testes bei unabhängigen Stichproben wurde die jeweilige Schulstufe als Gruppierungsvariable ausgewählt. Als Testvariable dient der Ausgang der Antworten („richtig“ oder „falsch“). Für die 6. Schulstufe der beiden Mittelschule zeigt sich ein Mittelwert von ,32, für die 8. Schulstufe der beiden Mittelschulen ergibt sich ein Mittelwert von ,46. Diesen Daten ist zu entnehmen, dass Schüler:innen der 8. Schulstufe eine höhere Lösungshäufigkeit aufweisen als jene der 6. Schulstufe. Zur Verifizierung bzw. Falsifizierung der Hypothese ist, wie bereits obenstehend erwähnt, der t-Test notwendig. Der ermittelte Signifikanzwert p ist $p < ,001$. Hierbei handelt es sich demnach um einen hochsignifikanten Unterschied, wodurch die Hypothese verifiziert werden kann.

Die zweite Hypothese „Schüler:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe zeigen bessere Ergebnisse als Schüler:innen der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe.“ wird ebenfalls mithilfe des t-Testes bei unabhängigen Stichproben überprüft. Dabei wurde analog der Überprüfung der ersten Hypothese vorgegangen. In der 6. Schulstufe zeigt sich bei 38 Schüler:innen und 41 Aufgabenstellungen eine Anzahl von 1558 Antworten. Diese Zahl liegt in der 8. Schulstufe bei 1476 Antworten, da die Teilnehmer:innenanzahl 36 beträgt und die Summe der Fragenstellungen gleich ist. Als Gruppierungsvariable dient erneut die Schulstufe, als Testvariable der Ausgang der Antworten. In der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe ergibt sich ein Mittelwert von ,52, in der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe liegt der Mittelwert bei ,72. Die 8. Schulstufe zeigt somit eine tendenziell höhere Lösungshäufigkeit als die 6. Schulstufe. Um die Hypothese bestätigen bzw. widerlegen zu können, ist das Ergebnis des zuvor erwähnten t-Testes bei unabhängigen Stichproben relevant. Es zeigt sich ein Signifikanzwert p von $p < ,001$. Somit handelt es sich auch bei der zweiten Hypothese um einen hochsignifikanten Unterschied.

Um die Hypothese prüfen zu können, ob Schüler:innen der 6. Schulstufe der AHS-Unterstufe bessere Ergebnisse zeigen als Schüler:innen der 6. Schulstufe der Mittelschulen, wurde ebenso der t-Test herangezogen. Als Gruppierungsvariable dient der Schultyp, als Testvariable die richtigen bzw. falschen Antworten. Bei dieser Hypothese stehen sich 2665 Antworten der Mittelschule und 1558 Antworten der AHS-Unterstufe gegenüber. Der eruierte Mittelwert liegt in der AHS-Unterstufe bei ,52, in der Mittelschule bei ,32. Die Tendenz zu größeren Lösungshäufigkeiten liegt demnach in der AHS-Unterstufe. Zur Verifizierung bzw. Falsifizierung ist der Signifikanzwert p des t-Testes bei unabhängigen Stichproben verantwortlich. Der zugrundeliegende Wert liegt bei $p < ,001$. Auch diese Hypothese kann bestätigt werden, da ein hochsignifikanter Unterschied vorliegt.

Im Zuge der vierten Hypothese soll ermittelt werden, ob Schüler:innen der 8. Schulstufe der AHS-Unterstufe bessere Ergebnisse zeigen als Schüler:innen der 8. Schulstufe der Mittelschule. Auch an dieser Stelle kommt der t-Test zum Einsatz. Als Gruppierungsvariable dient erneut der Schultyp, als Testvariable der Ausgang der Antworten. In der AHS-Unterstufe sind 1476 Daten zu verarbeiten, in der Mittelschule 2255. Die Mittelwerte liegen in der AHS-Unterstufe bei ,72, in der Mittelschule bei ,46. Somit beantworten in der AHS-Unterstufe tendenziell mehr Schüler:innen die Fragen richtig, als Teilnehmer:innen der Mittelschule. Der zur Verifizierung bzw. Falsifizierung notwendige Signifikanzwert p liegt bei $p < ,001$. Auch hier ist von einem hochsignifikanten Unterschied zu sprechen und die Hypothese kann dementsprechend verifiziert werden.

Die fünfte Hypothese „Die Forschungsergebnisse zeigen keine signifikanten Unterschiede zu früheren Studienergebnissen“ kann aufgrund fehlender Daten zu den jeweiligen früher durchgeführten Studien nicht verifiziert bzw. falsifiziert werden. Im Kapitel 5.1 wurden jedoch an vielen Stellen Vergleiche zu diversen Studienergebnissen aus früheren Zeiten angestellt, jedoch basieren diese Ergebnisse auf den ermittelten absoluten Häufigkeiten.

5.3 Weitere Ergebnisse der Fragebogenstudie

Da die dieser Arbeit zugrundeliegende empirische Untersuchung an zwei Mittelschulen durchgeführt wurde, sind auch Aussagen zu den unterschiedlichen Ergebnissen der beiden Mittelschulen möglich.

In der 6. Schulstufe der Mittelschule A liegt der Mittelwert an korrekt gelösten Aufgaben bei ,28, jener der Mittelschule B bei ,38. Die Lösungshäufigkeit ist demnach in der Mittelschule B tendenziell höher. Wäre im Vorfeld die Hypothese formuliert worden, dass Schüler:innen

der 6. Schulstufe der Mittelschule B bessere Ergebnisse zeigen als Schüler:innen der Mittelschule A, so wäre sie an dieser Stelle aufgrund eines hochsignifikanten Unterschiedes zu verifizieren ($p < ,001$).

In der 8. Schulstufe der Mittelschule A zeigt sich im Zuge der Auswertung ein Mittelwert von ,53. Dieser Wert liegt in der Mittelschule B bei ,43. In dieser Schulstufe liegt die höhere Anzahl an korrekt gelösten Aufgabenstellungen im Gegensatz zur 6. Schulstufe, bei der Mittelschule A. Ähnlich wie oben angeführt wäre auch die Hypothese, dass Schüler:innen der 8. Schulstufe der Mittelschule A bessere Ergebnisse zeigen als Schüler:innen der Mittelschule B, zu bestätigen, da der Signifikanzwert p bei $p < ,001$ ist.

Die Aufgabe 10 im Teil A des Fragebogens („Wie oft sind $2\frac{1}{4}$ cm in $\frac{1}{2}$ m enthalten?“) und die Aufgabe 10 im Teil B des Fragebogens („Wie oft sind $2\frac{1}{2}$ mm in $\frac{1}{2}$ dm enthalten“) konnte keine Person der 120 Teilnehmer:innen aus den beiden Mittelschulen korrekt beantworten. In der AHS-Unterstufe waren im Gegensatz dazu 17 von 74 Schüler:innen in der Lage, die Frage richtig zu lösen.

6 Diskussion

Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass Schüler:innen am Ende der 8. Schulstufe mehr Aufgaben richtig lösen können, als Schüler:innen der 6. Schulstufe. Diese beiden Schulstufen wurden aus dem Grund ausgewählt, da die Thematik der Bruchrechnung in der 6. Schulstufe laut österreichischem Lehrplan einen großen Teil des Jahresstoffes einnimmt. In der 8. Schulstufe wurden die Schüler:innen seit der 6. Schulstufe, auch schon zuvor, mit dem Themenfeld der Bruchrechnung konfrontiert. Demzufolge wäre es wünschenswert, dass sie am Ende ihrer Schullaufbahn in der Mittelschule bzw. in der AHS-Unterstufe größere Lösungshäufigkeiten aufweisen, als Schüler:innen der 6. Schulstufe, welche weniger absolute Zeit mit der Thematik verbracht haben.

Ab der 6. Schulstufe werden Schüler:innen in den Gegenständen Deutsch, Mathematik und Englisch in zwei unterschiedliche Leistungsniveaus eingeteilt. Diese lauten „Standard-AHS“ und „Standard“ (BMDW, 2021). Somit werden auch Schüler:innen aus den Mittelschulen nach dem Niveau der AHS-Unterstufe unterrichtet. Die Formulierungen der Hypothesen drei und vier ergaben sich unter anderem auch aufgrund der unterschiedlichen Leistungsniveaus in den Mittelschulen. Diese konnten mithilfe des t-Testes bestätigt werden.

Wie bereits weiter oben im Text angeführt, war es der Autorin nicht möglich, die fünfte Hypothese zu verifizieren bzw. zu falsifizieren. Im Zuge der beschreibenden Statistik zeigte sich jedoch, dass sich die ermittelten Daten nur in wenigen Fällen von jenen früherer Studien stark unterscheiden. Manche Anforderungen wurden mit einem höheren Prozentsatz gelöst, andere mit einem geringeren. Allgemein kann jedoch nicht formuliert werden, dass die Ergebnisse dieser empirischen Untersuchung in allen untersuchten Bereichen deutlich besser bzw. deutlich schlechter als im Vergleich zu früheren Studien ausfielen.

Schwierigkeiten im Verlauf des Arbeitsprozesses

Das Genehmigungsverfahren der Bildungsdirektion für NÖ nahm mehr Zeit in Anspruch, als ursprünglich gedacht war. Aufgrund der Tatsache, dass der Fragebogen noch im Schuljahr 2021/22 durchgeführt werden sollte, war die Genehmigung innerhalb weniger Wochen erforderlich. Auch das Auffinden von teilnehmenden Schulen erwies sich als Schwierigkeit. Die Durchführung des Fragebogens an den jeweiligen Schulen konnte von der Autorin nicht beeinflusst werden. Nach Rücksprache mit den verantwortlichen Personen kann jedoch davon ausgegangen werden, dass die grundlegenden Anweisungen (Arbeitszeit von 50 Minuten, keine Hilfestellungen, etc.) befolgt wurden.

Im Zuge der Auswertung des Fragebogens musste festgestellt werden, dass manche Schüler:innen mit wenig Seriosität an die Sache herangegangen sind. Aus diesem Grund wurden vereinzelte Fragebögen ausgeschlossen und konnten nicht zur Auswertung herangezogen werden.

Die Tatsache, dass die Beantwortung und somit auch die Auswertung des Fragebogens auf händischer Basis verlief, stellte eine weitere Herausforderung im Arbeitsprozess dar. Der Gedanke, alle Ergebnisse in Excel-Listen einzutragen und auch die jeweiligen Fehlertypen zu notieren, stellte sich für die Implementierung der Daten in das Statistikprogramm SPSS als wenig brauchbar heraus. Daher mussten die gewonnenen Daten umgeschrieben werden, um die Verifizierung bzw. Falsifizierung der Hypothesen gewährleisten zu können.

Ausblick

Die empirische Untersuchung wurde in den letzten beiden Schulwochen des Schuljahres 2021/22 durchgeführt. Manche Schüler:innenkommentare lassen vermuten, dass die Motivation zur Beantwortung des Fragebogens zu diesem Zeitpunkt sehr gering war. Ob dieser Umstand die Studienergebnisse beeinflusst hat, darüber kann lediglich spekuliert

werden. Interessant wäre es, denselben Fragebogen, den zum Zeitpunkt der Durchführung in der 6. Schulstufe befindlichen Kindern, in der 8. Schulstufe erneut auszuhändigen. Somit könnte festgestellt werden, ob sich die Lösungshäufigkeiten verändern.

Von besonderem Interesse wäre es, diesen Fragebogen auch in der AHS-Oberstufe durchzuführen, bzw. an Personen auszuteilen, welche die Reife- und Diplomprüfung bereits absolviert haben. Hierbei wäre eine breitere Untersuchung in vielen Teilen des Landes wünschenswert.

Aufgrund der in dieser Arbeit vorgelegten Ergebnisse besteht in allen Bereichen der Thematik der Bruchrechnung Verbesserungspotential. Padberg & Wartha (2017) appellieren an Lehrkräfte, mehr Zeit in den Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen zu investieren, denn ohne diese stehen Schüler:innen später vor großen Herausforderungen. Die stupide Beschäftigung mit den jeweiligen Rechenregeln führt zu keinem höheren Verständnis der Bruchrechnung von Seiten der Schüler:innen. Lehrpersonen sehen den Lehrplan als ständigen zeitlichen Druck und argumentieren somit häufig, dass ihnen die nötige Zeit fehlt, um die Thematik der Bruchrechnung umfassend und auf einem ausreichenden Verständnis basierend zu behandeln. Um den Bedürfnissen der Schüler:innen gerecht werden zu können, muss eine Diskussion zum momentanen Handeln und Vorgehen angestrebt werden.

„An unmöglichen Dingen soll man selten verzweifeln, an schweren nie.“ (Johann Wolfgang von Goethe)

Literaturverzeichnis

- Beer, R., Chelly, A., Ilias, P., Jilka, S., Steffan, C., & Varelija, G. (2019). *Genial! Mathematik* 2. Wien: Bildungsv Verlag Lemberger.
- Berger-Grabner, D. (2013). *Wissenschaftliches Arbeiten in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften*. Wiesbaden: Springer Gabler Verlag.
- BMBWF. (2022). *Bildungsstandards*. Von Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung: <https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/bef/bist.html> abgerufen am 12.07.2022
- BMDW. (2021). *Bundesrecht - Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen*. Von Rechtsinformationssystem des Bundes: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> abgerufen am 12.07.2022
- BMDW. (23. März 2021). *Bundesrecht: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne der Mittelschulen*. Von Rechtsinformationssystem des Bundes: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850> abgerufen am 12.07.2022
- Carpenter, T., Coburn, T., Reys, R., & Wilson, J. (1976). Notes from National Assessment: addition and multiplication with fractions. *The Arithmetic Teacher*, 137-142.
- Gerster, H.-D., & Grevsmühl, U. (1983). Diagnose individueller Schülerfehler beim Rechnen mit Brüchen. *Pädagogische Welt*, S. 654-660.
- Hart, K. (1981). Fractions. *Mathematics in School*, 13-15.
- Hart, K. (1989). *Children's Mathematical Frameworks 8-13: A Study of Classroom Teaching*. Windsor: NERF-Nelson.
- Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern: Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos-Verlag.
- Heckmann, K. (2007). Von Zehnern und Zehnteln. Das Stellenwertverständnis auf Dezimalbrüche erweitern. *Mathematik kehren*, S. 45-51.
- IQS. (2022). *Mathematik in der iKMPLUS im Detail. Konstrukt und Kompetenzmodell - Sekundarstufe*.
- Kemnitz, A. (2019). *Mathematik zum Studienbeginn*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

- Lankford, F. G. (1972). *Some Computational Strategies of Seventh Grade Pupils: Final Report*. Charlottesville, Virginia: U.S. Department of Health, Education, and Welfare, Office of Education, National Center for Educational Research and Development.
- Malle, G., & Huber, S. (2004). Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen. *Mathematik lehren*, S. 20-22.
- Padberg, F. (1986). Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung - Bestandsaufnahme und Konsequenzen. *Der Mathematikunterricht*, S. 58-77.
- Padberg, F. (1991). Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen - eine empirische Untersuchung an Gymnasialschülern. *Der Mathematikunterricht*, (2), S. 39-69.
- Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Heidelberg: Springer.
- Pekrun, R., vom Hofe, R., Blum, W., Götz, T., Wartha, S., Frenzel, A., & Jullien, S. (2006). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I. In M. Prenzel, & L. Allolio-Näcke, *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 21-53). Münster: Waxmann.
- Pilchner, J. (2010). *Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Multiplikation: eine empirische Studie mit Siebtklässlern*. Hamburg: Diplomica.
- Post, T. (1981). Fractions: Results and Implications from National Assessment. *The Arithmetic Teacher*, 26-31.
- Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, S. 8-12.
- Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive: Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Schichl, H., & Steinbauer, R. (2012). *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

- Wartha, S. (2005). Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsumbrüche. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 593-596.
- Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.
- Wartha, S. (2009). Zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs - Didaktische Analysen und empirische Befunde. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 55-79.
- Wittmann, G. (2013). Die Zahlen sind entscheidend: Zur Konsistenz von Lösungswegen in der Bruchrechnung. In J. Sprenger, A. Wagner, & M. Zimmermann, *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen: Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule* (S. 227-238). Wiesbaden: Springer.

ANHANG

Anhang 1 [Fragebogen Teil A]

Bruchrechnung - Teil A

Datum:

Schulstufe:

Bitte kreuze dein Geschlecht an: ☐ weiblich ☐ männlich

1. Addiere:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 + \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{3}{4} + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{7} + \frac{3}{14} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{7}{13} + \frac{4}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Welcher Bruchteil des Kreises ist gefärbt?

 des Kreises ist gefärbt.

Kannst du diesen Bruchteil noch anders anschreiben?

 des Kreises ist gefärbt.

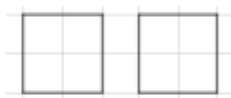


3. Beantworte folgende Aufgaben mithilfe der Abbildungen:

Wie oft passen $\frac{3}{5}$ in drei Ganze?



Wie oft passt $\frac{1}{4}$ in zwei Ganze?



4. Wurde richtig gerechnet? Kreuze an!

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = 1\frac{11}{20}$$

Ja

Nein

Weiß ich nicht

☐
☐
☐

$$2 + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

☐
☐
☐

$$\frac{6}{11} + \frac{4}{11} = \frac{10}{22}$$

☐
☐
☐

Bruchrechnung - Teil A

5. Subtrahiere:

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 - \frac{2}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 - \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{8}{9} - \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

6. Färbe zuerst die Hälfte des Rechtecks rot, dann anschließend noch ein Viertel des Rechtecks mit rot.



Welchen Bruchteil des Rechtecks hast Du insgesamt gefärbt?

Kannst Du diese Aufgabe auch rechnerisch durch Angabe eines Rechenweges lösen?

7. Multipliziere:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \cdot \frac{3}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{7} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{5} \cdot 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{12}{13} \cdot \frac{7}{13} = \underline{\hspace{2cm}}$$

8. Dividiere:

$$1 \text{ cm} : 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \text{ kg} : 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bruchrechnung - Teil A

9. Eine Schnur hat eine Länge von 3 m. In wie viele Stücke von jeweils $\frac{1}{4}$ m Länge kannst Du die Schnur teilen?

Anzahl der Stücke: _____

10. Beantworte folgende Fragen:

Wie oft ist $\frac{1}{8}$ m in $\frac{3}{4}$ m enthalten? _____

Wie oft ist $\frac{3}{4}$ kg in $2\frac{1}{2}$ kg enthalten? _____

Wie oft sind $2\frac{1}{2}$ mm in $\frac{1}{2}$ dm enthalten? _____

11. Vier Kinder teilen sich eine halbe Pizza. Wie viel von der halben Pizza bekommt jedes Kind, wenn sie gerecht teilen?

12. Dividiere:

$$\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 : \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{7} : \frac{1}{7} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{6}{7} : 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{15}{17} : \frac{30}{34} = \underline{\hspace{2cm}}$$

13. Stelle $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$ auf verschiedene Arten anschaulich (grafisch) dar.

Überprüfe alle bisher gerechneten Aufgabenstellungen!

Bruchrechnung - Teil A

1. Stimmt folgende Aussage? Begründe deine Antwort!

„Wird zum Zähler und zum Nenner eines Bruches die gleiche Zahl addiert, so erhält man einen größeren Bruch!“

2. Was stellst du dir unter der Multiplikation $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ vor?

3. Die Schrittlänge von Lisa ist $\frac{3}{5}$ m. Wie viele Schritte macht Lisa auf einer 15 m langen Strecke?

4. Maximilian füllt $4\frac{1}{2}$ kg Gummibärchen in Sackerl zu je einem viertel Kilogramm Gummibärchen. Wie viele Sackerl erhält Maximilian?

Anhang 2 [Fragebogen Teil B]

Bruchrechnung – Teil B

Datum:

Schulstufe:

Bitte kreuze dein Geschlecht an: ☐ weiblich ☐ männlich

1. Addiere:

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 + \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{3}{4} + 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{10} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{8}{13} + \frac{3}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Welcher Bruchteil des Kreises ist gefärbt?

 des Kreises ist gefärbt.

Kannst du diesen Bruchteil noch anders anschreiben?

 des Kreises ist gefärbt.

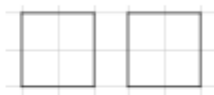


3. Beantworte folgende Aufgaben mithilfe der Abbildungen:

Wie oft passen $\frac{3}{5}$ in drei Ganze?



Wie oft passt $\frac{1}{4}$ in zwei Ganze?



4. Wurde richtig gerechnet? Kreuze an!

$$3 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Ja

Nein

Weiß ich nicht

☐
☐
☐

$$\frac{5}{13} + \frac{4}{13} = \frac{9}{26}$$

☐
☐
☐

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = 1\frac{7}{15}$$

☐
☐
☐

Bruchrechnung – Teil B

5. Subtrahiere:

$$\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 - \frac{1}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 - \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

6. Färbe zuerst die Hälfte des Rechtecks rot, dann anschließend noch ein Viertel des Rechtecks mit rot.



Welchen Bruchteil des Rechtecks hast Du insgesamt gefärbt?

Kannst Du diese Aufgabe auch rechnerisch durch Angabe eines Rechenweges lösen?

7. Multipliziere:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 \cdot \frac{3}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{5} \cdot 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{11}{13} \cdot \frac{6}{13} = \underline{\hspace{2cm}}$$

8. Dividiere:

$$1 \text{ cm} : 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 \text{ kg} : 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bruchrechnung – Teil B

9. Eine Schnur hat eine Länge von 4 m. In wie viele Stücke von jeweils $\frac{1}{4}$ m Länge kannst Du die Schnur teilen?

Anzahl der Stücke: _____

10. Beantworte folgende Fragen:

Wie oft ist $\frac{1}{8}$ m in $\frac{3}{4}$ m enthalten? _____

Wie oft ist $\frac{3}{4}$ kg in $2\frac{1}{2}$ kg enthalten? _____

Wie oft sind $2\frac{1}{2}$ mm in $\frac{1}{2}$ dm enthalten? _____

11. Vier Kinder teilen sich eine halbe Pizza. Wie viel von der halben Pizza bekommt jedes Kind, wenn sie gerecht teilen?

12. Dividiere:

$$\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 : \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{6}{7} : 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{3}{8} : \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{15}{16} : \frac{30}{32} = \underline{\hspace{2cm}}$$

13. Stelle $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ auf verschiedene Arten anschaulich (grafisch) dar.

Überprüfe alle bisher gerechneten Aufgabenstellungen!

Bruchrechnung – Teil B

1. Stimmt folgende Aussage? Begründe deine Antwort!

„Wird zum Zähler und zum Nenner eines Bruches die gleiche Zahl addiert, so erhält man einen größeren Bruch!“

2. Was stellst du dir unter der Multiplikation $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ vor?

3. Die Schrittlänge von Lisa ist $\frac{3}{5}$ m. Wie viele Schritte macht Lisa auf einer 12 m langen Strecke?

4. Maximilian füllt $3\frac{1}{2}$ kg Gummibärchen in Sackerl zu je einem viertel Kilogramm Gummibärchen. Wie viele Sackerl erhält Maximilian?
