MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Vertauschung von Grenzübergängen"

verfasst von / submitted by

Tek Wei Chung, BA, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	UA 199 511 520 02
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Geschichte und Politische Bildung UF Mathematik
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Mag. Mag. Dr. Michael Kunzinger

Danksagung

Ich möchte mich herzlichst bei meinem Betreuer Dr. Michael Kunzinger für seine bemühte und hilfreiche Betreuung bei der Erstellung meiner Masterarbeit bedanken.
Ich danke meinen Eltern Ying Ying und Fen Ken und meinem Bruder Tek Shung für ihre jahrelange Unterstützung in jeder Hinsicht.
Ganz besonderer Dank gilt meiner Gattin Ruo Chih, die mich in den letzten Jahren stets erdulden musste, aber trotzdem die Energie und Kraft besaß mich in allen möglichen Lebensbereichen geduldig zu unterstützen.
Zu guter letzt geht mein besonderer Dank an Andreas Stauffer. Es wäre zu viel alles zu nennen, dennoch möchte ich nur ein Wort sagen. Das Wort heißt DANKE, und es kommt vom Herzen.

Zusammenfassung

Im Zentrum dieser Masterarbeit steht die Vertauschung von Grenzprozessen. Diese Arbeit basiert weitgehend auf Literaturrecherchen, wobei sich ein großer Teil dieser Masterarbeit auf die Erkenntnissen von [BF00], [For], [Heu09] und [Rol18] bezieht. Beispiele und Ergänzungen wurden aus [Dei21], [FK], [Fri], [Fri13], [GRS], und [Las12] verwendet, sowie vom Vorlesungsskript „Analysis in einer Variable für das Lehramt (2017)“ von Dr. Franz Embacher. An Vorkenntnissen werden die Grundlagen der Analysis und die Vollständigkeit von der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vorausgesetzt.

Das Ziel der Arbeit ist zu zeigen, ob bei der Vertauschung von Folgengrenzwert und Funktionengrenzwert bzw. bei der Vertauschung von Integration bzw. Differentiation und Grenzübergang die gleichen Resultate liefern.
Zur Beantwortung dieser Fragen wird die Arbeit in vier Teile gegliedert, wobei die ersten drei Kapitel das Gerüst bilden. Diese Kapitel behandeln hauptsächlich wichtige Begriffe aus den Bereichen „Folgen und Reihen“, „Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen“ und „Differentiation und Integration von Funktionen“, die für den Hauptteil der Arbeit relevant sind. Im ersten Kapitel werden grundlegende Begriffe und Eigenschaften von Folgen und Grenzwerte bearbeitet. Im zweiten Kapitel werden kurz Funktioneneigenschaften eingeführt, allerdings liegt der Schwerpunkt auf Grenzwerte von Funktionen, gleichmäßige Stetigkeit und Stetigkeitssätze. Im dritten Kapitel werden die Themen „Differentiation und Integration von Funktionen“ und “der Hauptsatz der Analysis“ behandelt, wobei die ausgewählten Inhalte sich auf den Schwerpunkt der Arbeit beziehen.

Der letzte Teil ist der Hauptteil dieser Arbeit, welcher sich mit der Vertauschung von Grenzprozessen auseinandersetzt. Anfänglich werden die Probleme beim Vertauschen von Grenzprozessen gezeigt, anschließend werden die Themen Funktionenfolgen, Funktionenreihen, punktweise und gleichmäßige Konvergenz behandelt. Der letzte Abschnitt zeigt unter welchen Bedingungen die Vertauschung von Grenzwertbildung und Differentiation; Grenzwertbildung und Integration und die Vertauschung von Folgengrenzwert und Funktionengrenzwert stattfinden können.

Abstract

In this thesis we give an insight into the interchange of limiting operations. This work is largely based on literature review, whereby a large part of this master's thesis is based on the work of [BF00], [For], [Heu09] and [Rol18]. Examples and supplements were used from [Dei21], [FK], [Fri], [Fri13], [GRS], and [Las12], as well as from the lecture notes „Analysis in einer Variable für das Lehramt (2017)" by Dr. Franz Embacher. This work assumes prior knowledge of basics of analysis and the completeness of the real numbers $\mathbb{R}$.

The main focus of this thesis is whether the same result can be achieved by interchanging the limit and differentiation, the limit and integration as well the limit of a sequence and a function.

To answer this question, this work is divided into four parts, with the first three chapters forming the framework. Those chapters mainly deal with important terms from the areas „sequences and series", „limit and continuity of functions" and „differentiation and integration of functions", which are relevant to the main part of the work. The first chapter deals with fundamental terms and properties of sequences and limits. The second chapter introduces function properties, however the main focus lies on limits of function, uniform continuity and continuity theorems. The third chapter covers the topics of differentiation and integration of functions and the fundamental theorem of calculus, whereby the selected content is related to the main focus of the thesis.

The last part deals with the interchange of limiting operations. Initially the problems of interchanging limiting operations are highlighted and then the topics of function sequences, function series, pointwise and uniform convergence are discussed. The final section depicts under which condition the interchange of the limit and the differentiation or the integration, or the interchange of limits of a sequence and a function takes place.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen und Reihen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den grundlegenden Eigenschaften von Folgen und Reihen und deren Grenzwertbegriffe. Der folgende Text bezieht sich auf die Quellen [Rol18], [FK], [BF00] und [Heu09].
Folgen modellieren in der Analysis eine Annäherung an eine Zahl. Man möchte untersuchen, wie sich Funktionswerte schrittweise an eine vorgegebene Stelle nähern. Der Begriff **Grenzwert** einer reellen Zahlenfolge ist der Schlüsselbegriff. In diesem Kapitel möchten wir nur die wichtigsten Eigenschaften von Folgen reeller Zahlen betrachten, bevor wir mit dem Konvergenzbegriff beginnen. Anschließend werden wir uns noch wesentlich Punkte der (unendlichen) Reihen anschauen, die für den Schwerpunkt dieser Arbeit relevant sind.

1.1 Folgen und Grenzwertbegriff

Definition 1.1 (Folge)**.** Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \longmapsto a_n.$$

Insgesamt wird die Folge mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. a_n bezeichnet.

Definition 1.2 (Grenzwert/Limes)**.** Sei eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** (oder **Limes**) dieser Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Definition 1.3 (Konvergenz und Divergenz von Folgen)**.** Besitzt eine reelle Zahlenfolge einen Grenzwert a, so nennen wir die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, andernfalls nennen wir sie divergent.

Bemerkung 1.4. Ist $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann sagen wir, dass die Folge a_n gegen a konvergiert oder gegen a strebt und schreiben:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a; \qquad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a; \qquad a_n \to a$$

Beispiel 1.5 (Harmonische Folge)**.** Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen $a = 0$, denn zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon = \frac{1}{n_0}$$

Bemerkung 1.6. Je kleiner die Abweichung $\varepsilon > 0$ vom Grenzwert a gefordert wird, desto größer muss n_0 gewählt werden, denn n_0 hängt von ε mit $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ab.

Beispiel 1.7 (Konstante Folge)**.** Ist die Folge $a_n = a$, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon.$$

Beispiel 1.8 (Geometrische Folge)**.** Sei $q \in \mathbb{R}$ und $|q| < 1$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Wenn $q = 0$ ist, dann ist nichts mehr zu zeigen.
Sei $q \neq 0$ vorausgesetzt mit $0 < |q| < 1$, dann ist $\frac{1}{|q|} > 1$, also gilt $\frac{1}{|q|} = 1 + x$ für ein $x > 0$. Nach Anwendung der Bernoulli-Ungleichung folgt:

$$|q^n - 0| = |q^n| = \frac{1}{(1+x)^n} \underset{Bernoulli}{\leq} \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon$$

für alle $n > \frac{1}{(\varepsilon x)}$. Wir können also $n_0 = \frac{1}{(\varepsilon x)}$ wählen.

Definition 1.9 (Nullfolge)**.** Gilt für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Definition 1.10 (Beschränktheit einer Folge)**.** Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist:

- nach oben beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke der Folge
- nach unten beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \geq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}$ heißt untere Schranke der Folge
- beschränkt, wenn sie nach unten und nach oben beschränkt ist.

Definition 1.11 (Monotonie von Folgen)**.** Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist

- monoton wachsend/steigend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- streng monoton wachsend/steigend, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$.
- streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} < a_n$.
- (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Definition 1.12 (ε-Umgebung)**.** Die ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}.$$

Die Folge konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, ab diesem alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a liegen, unabhängig davon, wie klein $\varepsilon > 0$ gewählt wird.

Satz 1.13 (Rechenregeln für konvergente Folgen)**.** *Seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann sind die Summenfolge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Produktfolge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Quotientenfolge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$, falls $b_n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ebenfalls konvergent, und es gilt:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$*;* $k \in \mathbb{R}$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$*;* *mit* $b_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Beweis. Ein Beweis des Satzes (1.13) ist in [BF00] §3.3 zu finden. □

Satz 1.14. *Jede konvergente reelle Zahlenfolge ist beschränkt.*

Beweis. Sei der Grenwzert $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Da die Folge gegen a konvergiert gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, ab dem alle Folgenglieder im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen. Es können endlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen. Wenn alle Folgenglieder in diesem Intervall liegen, dann ist $a-\varepsilon$ eine untere Schranke und $a+\varepsilon$ eine obere Schranke dieser Folge. Wenn es Folgenglieder gibt, die außerhalb des Intervalls liegen, dann sind es nur endlich viele und wir wählen ein Intervall $[m,n]$, in dem alle Folgenglieder liegen. In diesem Fall ist $\min(m, a-\varepsilon)$ eine untere Schranke und $\max(a+\varepsilon, n)$ eine obere Schranke der Folge. □

Satz 1.15. *Jede reelle Zahlenfolge, die beschränkt und monoton ist, ist konvergent.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, dann gilt $a_{n+1} \geq a_n$. Nach dem Vollständigkeitssaxiom gibt es ein Supremum der Folge a_n und bezeichnen es mit a. Zu zeigen ist, dass a Grenzwert der Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen es liegt kein Folgenglied a_k in $U_\varepsilon(a)$. Dann wäre $a-\varepsilon$ eine kleinere obere Schranke, was der Eigenschaft von a als Supremum, die kleinste obere Schranke, widerspräche, d.h. es gibt ein a_k mit $a-\varepsilon < a_k$. Wegen der Monotonie liegen auch alle andere Folgenglieder in $U_\varepsilon(a)$ und nur endlich viele Folgenglieder liegen außerhalb vom $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Also ist gezeigt, dass a Grenzwert dieser Folge ist. □

Satz 1.16. *Wenn* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$ *und für die Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt:* $a_n \le b_n \le c_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$*, so konvergiert auch die Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen den Grenzwert a:*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. In der beliebig vorgegebenen Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a liegen fast alle Folgenglieder von a_n und c_n. Da $a_n \le b_n \le c_n$ ist, liegen auch die Glieder von b_n in $U_\varepsilon(a)$ und daher $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. □

Definition 1.17 (Teilfolge)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge. Eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge der Form $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen ist.

Definition 1.18 (Häufungspunkt)**.** Eine reelle Zahl a heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge a_n mit $k \to \infty$ gegen a konvergiert.
Eine reelle Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn jede ihrer Teilfolge gegen denselben Limes konvergiert.

Beispielsweise hat die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2}$ keinen Grenzwert, denn es gibt keinen eindeutigen Wert, gegen den sie strebt, aber ein gewisses Grenzverhalten ist erkennbar, denn ein Teil der Folge konvergiert gegen 1 und der andere Teil gegen -1.

Bemerkung 1.19. Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist stets auch ein Häufungspunkt (aber nicht umgekehrt).

Satz 1.20 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**.** *Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Für einen Beweis von Satz 1.20 siehe [Rol18] oder [GRS]. □

Definition 1.21 (Cauchyfolge)**.** Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt eine Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m \ge n_0$ gilt:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Satz 1.22. *Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \ge n_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Nun wählen wir $n, m \ge n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ und es folgt:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \underset{\textit{Dreiecksungleichung}}{\le} |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Für $\varepsilon = 1$ gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n,m \geq N$ gilt: $|a_n - a_m| < 1$. Dann gilt auch $|a_n - a_N| < 1$ für alle $n \geq N$. Aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt stets $|a_n| - |a_N| < |a_n - a_N|$. Daraus folgt für alle $n \geq N$: $|a_n| - |a_N| < 1$ und somit $|a_n| < 1 + |a_N|$. Der Betrag aller Folgenglieder ist kleiner als $1 + |a_N|$, somit ist a_n beschränkt durch $\max\{|a_1|, ..., 1 + |a_N|\}$.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 1.20 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, deren Limes wir mit $a \in \mathbb{R}$ bezeichnen. Zu zeigen ist, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Definitionsgemäß gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n,m \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, die gegen a konvergiert, gibt es einen Index $n_k \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ (aufgrund der streng wachsenden Monotonie von n_k), für den $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Für alle Indizes $n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt daher:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. □

1.2 Unendliche Summen ("Reihen")

Definition 1.23 (Folge der Partialsummen)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Dann heißt die Zahlenfolge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + ... + a_k$$

die Folge der Partialsummen von a_n.

Definition 1.24 (Unendliche Reihe)**.** Eine (unendliche) Reihe ist ein geordnetes Paar aus einer Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ihrer Partialsummen $s_k := \sum\limits_{n=0}^{k} a_n$. Die Glieder der Folge a_n bezeichnet man als Glieder der Reihe und die Glieder von s_k als Partialsummen der Reihe. Die Glieder der Reihe werden mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$$

bezeichnet.

Bemerkung 1.25. Eine Reihe ist entweder durch ihre Glieder oder durch die Glieder der Partialsummen bestimmt. Wir können aus den Partialsummen die Glieder der Reihe bestimmen.

$$a_0 = s_0; \qquad a_{n+1} = s_{n+1} - s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definition 1.26 (Konvergenz und Divergenz von Reihen)**.** Eine Reihe ist konvergent, falls $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$ existiert und wir bezeichnen den Grenzwert s als die Summe oder den Grenzwert der

Reihe

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Ansonsten ist die Reihe divergent.

Satz 1.27 (Cauchysches Kriterium für Reihen)**.** *Das Cauchysche Kriterium für Reihen besagt, dass die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *genau dann konvergiert, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass für alle* $n, m \geq n_0$ *mit* $n > m$ *gilt:*

$$|a_m + a_{m+1} + ...a_n| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Beweis. Dieser Beweis ist eine triviale Folgerung von Satz (1.22). Zu zeigen ist nur, dass die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge ist. Sei $|s_n - s_{m-1}| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|$. Ziehen wir die Beweistechnik vom Satz (1.22) heran, so sind wir mit dem Beweis fertig. □

Satz 1.28. *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ *und die Folge* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *der Partialsummen beschränkt, so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent und* ≥ 0.

Beweis. Die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, weil $s_k - s_{k-1} = a_k \geq 0$, für alle $k \geq 1$. Da sie beschränkt ist, ist sie nach Satz 1.15 konvergent. Daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Da die erste Partialsumme $s_0 = a_0 \geq 0$ nicht negativ ist, ist der Grenzwert der Reihe ≥ 0. □

Beispiel 1.29 (Geometrische Reihe)**.** Eine geometrische Reihe schreiben wir in der Form

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^1 + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Ist $|q| < 1$, so gilt für die Folge der Partialsummen

$$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Ist $|q| > 1$, so liegt keine Konvergenz vor, denn $q^n \nrightarrow 0$ für $n \to \infty$.

Beispiel 1.30 (Harmonische Reihe)**.** Die Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist nicht hinreichend für die Konvergenz für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Die harmonische Reihe ist ein Beispiel dafür:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Klarerweise gilt $a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, aber wegen

$$s_{2m} - s_m = \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n} = \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{2m} > \underbrace{\frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m}}_{m-mal} = \frac{1}{2}$$

erfüllt es nicht das Cauchysches Kriterium, daher ist die harmonische Reihe nicht konvergent.

Satz 1.31. *Ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent, so gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Beweis. Es gilt $a_n = s_n - s_{n-1}$, dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Definition 1.32 (Absolute und bedingte Konvergenz)**.** Wir nennen eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Eine Reihe ist **bedingt konvergent**, wenn sie konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

Satz 1.33. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{1.1}$$

Beweis. Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang (IA):

$$\begin{aligned} n = 1 &: |a_1| \leq |a_1| \\ n = 2 &: |a_1 + a_2| \underset{Dreiecksungl.(Du.)}{\leq} |a_1| + |a_2| \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte (1.1) für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Induktionsschritt (IS):

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right| \\ &\underset{Du.}{\leq} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \\ &\underset{IV.}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| \\ &= \sum_{k+1}^{n+1} |a_k|. \end{aligned}$$

□

1.3 Konvergenzkriterien von Reihen

Da die Konvergenzkriterien unendlicher Reihen für diese Arbeit nebensächlich sind, jedoch ein wichtiger Bestandteil der Analysis ist, werden wir nur ein Schema zur Untersuchung unendlicher Reihen auf Konvergenz und Divergenz als Abbildung darstellen. Die Beweise der Konvergenzkriterieren, die in der unten dargestellten Abbildung zu sehen sind, sind in jedem Buch bzw. Vorlesungsskript zur Analysis auffindbar. (*vgl.*,[Las12] oder [Rol18])

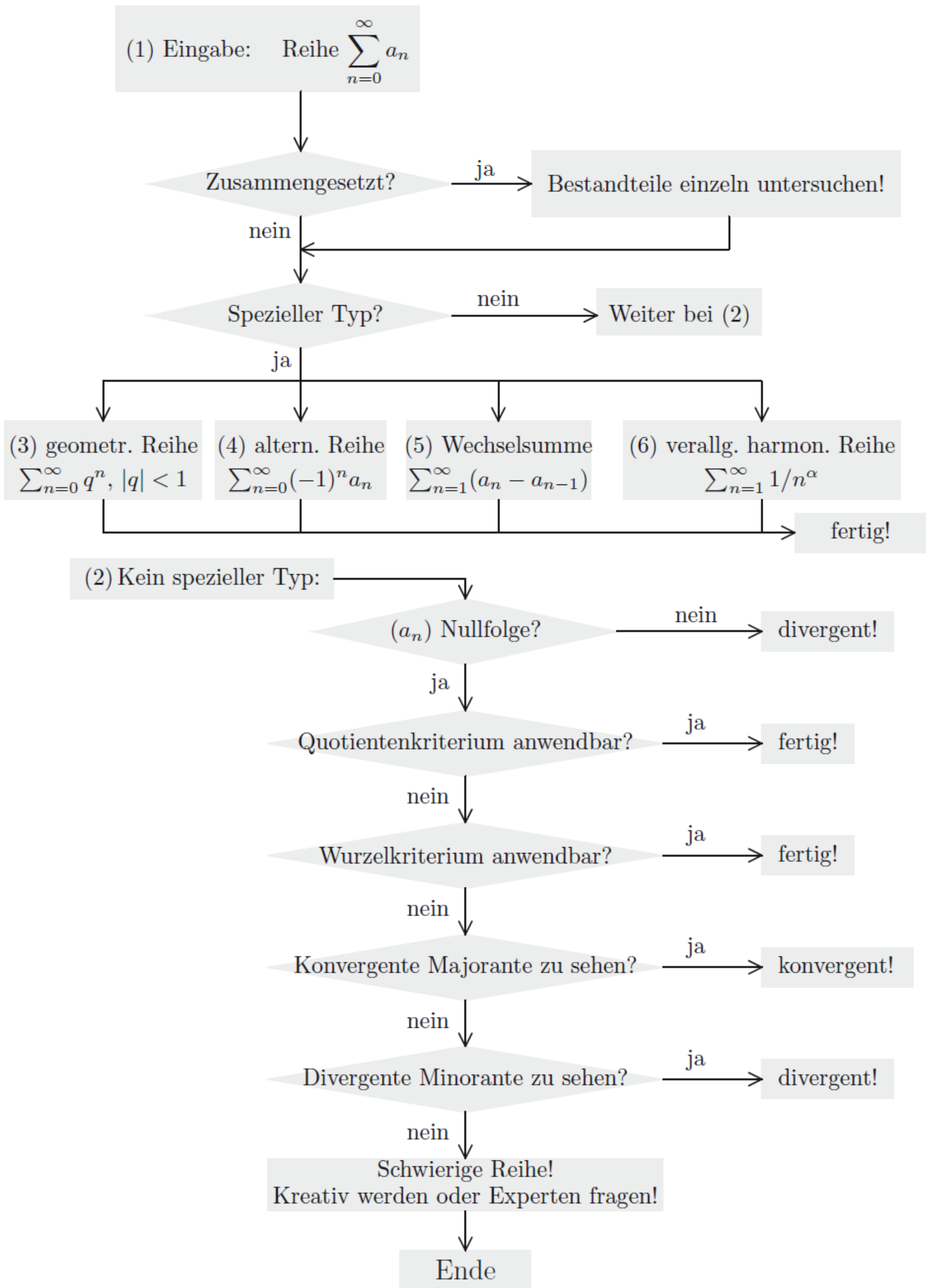

Abbildung 1.1: Schema: Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen
Quelle: Fritzsche, 2013, S. 67

Kapitel 2

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Die Inhalte dieses Kapitels beziehen sich auf die Bücher [BF00], [FK], [For], [GRS] und [Rol18], wobei die Idee für den Aufbau dieses Abschnitts vom Letzteren entnommen wurde. Funktionen werden kontextabhängig auch Abbildungen genannt. Beide Begriffe sind synonym, wobei in der Analysis stets der Begriff *Funktion* verwendet wird. Wir haben uns schon im vorherigen Kapitel mit Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ beschäftigt, die sogenannten Folgen. In diesem Kapitel möchten wir grundlegende Eigenschaften von Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen betrachten.

2.1 Allgemeine Funktioneneigenschaften

Definition 2.1 (Funktion). Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wird durch eine Vorschrift jeder $x \in D$ eindeutig eine Zahl $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so bezeichnen wir mit

$$f : D \to B$$

eine Funktion von x mit der Definitionsmenge D und der Zielmenge B von f.
$B = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in D : y = f(x)\}$.
Die Definitionsbereiche sind Vereinigungen von Intervallen oder selbst Intervalle. Sind Anfangs- und Endpunkte für D mit $-\infty < a \leq b < \infty$ vorgegeben, dann bedeutet:

- $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ („abgeschlossenes “ Intervall)
- $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ („offenes “ Intervall)
- $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ („nach rechts halboffenes“ Intervall)
- $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ („nach links halboffenes “ Intervall).

Diese Intervalle sind alle „beschränkt“ bzw. „endlich“, aber auch „unendliche “ Intervalle der Form $[a,\infty), (a,\infty), (-\infty,b], (-\infty,b)$ und $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ können vorkommen.

Jede (eindeutige) reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt einen Graphen:

$$G(f) := \{x, f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Definition 2.2. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $D' \subseteq D$, dann bezeichnen wir die Funktion $f : D' \to \mathbb{R}$ als die **Einschränkung von** f auf D'.

Definition 2.3. Sind f und g Funktionen mit $f, g : D \to \mathbb{R}$, so sind die Paare dieser beiden Funktionen Summe, Produkt und der Quotient mit $g(x) \neq 0$ und $x \in D$ definiert durch:

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x); \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x); \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

.

Definition 2.4. Wir nennen $\xi \in D$ eine **Nullstelle** der Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn $f(\xi) = 0$ ist. Eine Funktion f nennen wir „**identisch Null**“, wenn für alle $x \in D$ gilt: $f(x) = 0$.

Definition 2.5. Eine Funktion f heißt **surjektiv**, wenn jedes Element $y \in B$ ein Bildelement ist, d.h. wenn es für jedes $y \in B$ (mindestens) ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt.

Definition 2.6. Eine Funktion f heißt **injektiv**, wenn es für jedes Element $y \in B$ „höchstens “ ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$, d.h. wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$ ist. Die Abbildung f ist auch injektiv, wenn aus $x_1 \neq x_2$ folgt, dass $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zu einer injektiven Funktion $f : D \to B$ ist die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : B \to D$ definiert durch $f^{-1}(y) = x$.

Bemerkung 2.7. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ nicht mit der reziproken Funktion $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ verwechselt werden darf.

Definition 2.8. Eine Funktion f heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist, und das ist genau dann der Fall, wenn für jedes $y \in B$ genau ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$.

Definition 2.9. Sind zwei Funktion $g : D \to B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist die **Komposition** (oder Verknüpfung) $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in D.$$

2.2 Elementare Funktionen

Wir wollen uns in diesem Abschnitt einige häufig auftretende Funktionen anschauen.

Definition 2.10 (Potenzfunktion)**.** Eine Potenzfunktion ist eine Funktion der Form

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$f : x \mapsto x^p,$$

wobei $p \in \mathbb{R}$ vorgegeben ist.
Spezialfälle der Potenzfunktionen sind:

1. Ist $p = 0$, dann ist f eine konstante Funktion $f(x) = c$ mit $x \in D$ und ein $c \in \mathbb{R}$.

2. Ist $p = 1$, dann ist f eine identische Funktion $f(x) = x$.

3. Ist $p = \frac{1}{2}$, dann ist f eine Wurzelfunktion $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

4. Ist $p = -1$, dann bilden wir den Kehrwert der Funktion $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Definition 2.11 (Polynomfunktion)**.** Eine Polynomfunktion ist eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f : x &\mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

Definition 2.12 (Rationale Funktion)**.** Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ f : x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ und $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$

Definition 2.13 (Betragsfunktion)**.** Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Definition 2.14 (Exponentialfunktion)**.** Eine Exponentialfunktion ist eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f : x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

mit $a \in \mathbb{R}^+$ als Basis.
Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f : x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

heißt **natürliche Exponentialfunktion** mit der Eulerschen Zahl e als Basis. Ihre Umkehrfunktion ist der **natürliche Logarithmus** $f^{-1}(x) = \ln(x)$.

Definition 2.15 (Treppenfunktion)**.** Eine Treppenfunktion ist eine Funktion der Form

$$\tau(x) : [a, b] \to \mathbb{R},$$

wobei es Zahlen $t_0, t_1, ..., t_n$ mit $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ und Zahlen $k_1, ...k_n$ gibt, sodass gilt:

$$\tau(x) = k_i, \qquad \forall x \in (t_{j-1}, t_j),\ i = 1, ..., n.$$

Definition 2.16 (Winkelfunktion)**.** Sei P ein Punkt am Einheitskreis eines kartesischen Koordinatensystems mit Koordinatenursprung O. Wir bezeichnen x den Winkel von der positiven 1. Achse aus im Gegenuhrzeigersinn bis zur Strecke $\overline{OP}$. Zusätzlich gilt für $x = x + 360°$ bzw. $x = x + 2\pi$ (im Bogenmaß). Dann bezeichnen wir die 1. Koordinate vom Punkt P mit $\cos x$ und die 2. Koordinate vom Punkt P mit $\sin x$.
Sinus und **Cosinus** sind Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zusätzlich definieren wir zwei weitere Funktionen:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} == \frac{1}{\tan x}.$$

Wir wollen uns wichtige Eigenschaften der Winkelfunktionen anschauen:

(i) Da Punkt P am Einheitskreis liegt, gilt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{2.1}$$

wobei $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ für $\sin(x)^2$ und $\cos(x)^2$ stehen. (**Satz von Pythagoras**)
Folglich gilt:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1 \\ -1 &\leq \cos x \leq 1. \end{aligned}$$

(ii) Des Weiteren gelten folgende Bedingungen für $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{2.2}$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{2.3}$$
$$\sin(x - \pi) = -\sin(x) \tag{2.4}$$
$$\cos(x - \pi) = -\cos(x). \tag{2.5}$$

(iii) Da x und $x + 2\pi$ den gleichen Punkt darstellen, gilt

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x); \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad (\textbf{Periodizität}).$$

(iv) Eine wichtige Ungleichung, die für trigonometrische Funktionen gilt, ist:

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x), \qquad \text{für} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \tag{2.6}$$

welche am Einheitskreis offensichtlich ist.

(v) Zum Abschluss wollen wir noch die **Additionstheoreme** (Summensätze) für Sinus und Cosinus, den wir ohne Beweis machen, vorstellen:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \tag{2.7}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \tag{2.8}$$

Definition 2.17 (Monotonie von Funktionen)**.** Eine reelle Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt „monoton wachsend/steigend " bzw. „monoton fallend ", wenn für $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \qquad bzw. \qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Wenn f „streng monoton wachsend/steigend " bzw. „streng monoton fallend " ist, dann gilt für $x_1, x_2 \in D$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Satz 2.18 (Monotonie und Umkehrfunktion)**.** *Ist f streng monoton, so ist f injektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} ist ebenfalls streng monoton.*

Beweis. Angenommen f ist streng monoton steigend/wachsend, dann gilt $x_1 \neq x_2$, so muss $x_1 < x_2$, also $f(x_1) < f(x_2)$ gelten , somit folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$ und f ist daher injektiv, d.h. es existiert die Umkehrfunktion f^{-1}.
Aufgrund der Definition der Umkehrfunktion ist $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Aus $x_1 < x_2$ folgt $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, daraus folgt, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.
Der Beweis für die streng monoton fallende Monotonie wird analog ausgeführt. □

2.3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Definition 2.19 (Grenzwert einer reellen Funktion)**.** Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in D$ einen Limes $a \in \mathbb{R}$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a.$$

Ist a der Grenzwert von f an der Stelle x_0, so schreiben wir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a; \qquad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a; \qquad f(x) \to a.$$

Satz 2.20. *Existieren die Grenzwerte der in D definierten Funktionen f und g an der Stelle x_0 und ist $k \in \mathbb{R}$, so gilt:*

(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to x_0} kf(x) = k \lim_{x\to x_0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$; *mit* $g(x), \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$

Beweis. Der Beweis folgt aus der Definition und Rechenregeln für konvergente Folgen (Siehe: Satz 1.13). □

Satz 2.21. *Seien g, f und h reelle Funktionen mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a$ und $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in D$ gilt, so ist auch $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$.*

Beweis. Das ist eine triviale Folgerung aus Satz 1.16. □

Definition 2.22 (Stetigkeit an einer Stelle)**.** Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definition 2.23 (Stetigkeit einer Funktion)**.** Eine reelle Funktion f ist genau dann stetig, wenn sie an jedem Punkt im Definitionsbereich D stetig ist.

Beispiel 2.24 (Stetigkeit von Sinus und Cosinus)**.** Wir möchten zeigen, dass Sinus und Cosinus auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Es gilt wegen (2.2) und (2.6):

$$|\sin(x)| = \sin(|x|) \leq |x| \qquad \text{für} \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Zunächst zeigen wir die Stetigkeit im Nullpunkt. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, so folgt aus Satz 2.21:

$$|\sin(x_n)| \leq |x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

dass $\sin(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \sin(0)$. Somit ist die Sinusfunktion an der Stelle 0 stetig.
Für die Cosinusfunktion gilt wegen (2.1) und (2.3):

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \qquad \text{für} \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Es folgt für $\cos(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{1-0} = 1 = \cos(0)$. Somt ist die Cosinusfunktion an der Stelle 0 stetig.

Wir zeigen noch die Stetigkeit an jeder beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge, die gegen x_0 konvergiert und bezeichnen (x_n)

$$x_n = x_0 + y_n \tag{2.9}$$

mit der Nullfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mit Hilfe der Additionstheoremen (2.7) und (2.8) gilt dann für jede Nullfolge (y_n):

$$\begin{aligned}
\sin(x_n) &\overset{(2.9)}{=} \sin(x_0 + y_n) \\
&\overset{(2.7)}{=} \sin(x_0)\underbrace{\cos(y_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1} + \cos(x_0)\underbrace{\sin(y_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \sin(x_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(x_n) &\overset{(2.9)}{=} \cos(x_0 + y_n) \\
&\overset{(2.8)}{=} \cos(x_0)\underbrace{\cos(y_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1} - \sin(x_0)\underbrace{\sin(y_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \cos(x_0)
\end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit an jeder beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ für die Sinusfunktion und Cosinusfunktion gezeigt.

Satz 2.25 ($\varepsilon - \delta$- Kriterium der Stetigkeit)**.** *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in D$. Sie ist genau dann stetig an der Stelle $\xi \in D$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta_\varepsilon$ gilt:*

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Es gebe zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$, sodass für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta_\varepsilon$ gilt:

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Zu zeigen ist, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$, $x_n \neq \xi$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi).$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta_\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|x_n - \xi| < \delta_\varepsilon.$$

Folglich gilt: $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, daher gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$.
($\Leftarrow$) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ gelte $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$. Angenommen die $\varepsilon - \delta$ Eigenschaft ist nicht wahr. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass kein solches $\delta_\varepsilon > 0$ gibt mit $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta_\varepsilon$.
Also gibt es zu jedem $\delta > 0$ zumindest ein $x \in D$ mit $|x - \xi| < \delta$, aber $|f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon$.
Nun sei $\delta = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und wähle ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - \xi| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(\xi)| \geq \varepsilon.$$

Folglich ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ und nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$. Dies steht aber im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(\xi)| \geq \varepsilon$, daher kann die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in D$ nicht gegen $f(\xi)$ konvergieren. $\square$

Bemerkung 2.26. Der Stetigkeitsnachweis erfolgt, wenn man zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein passendes $\delta > 0$ (deswegen die Notation $\delta(\varepsilon)$ oder δ_ε) mit der formulierten Eigenschaft findet. Da wir auf Anhieb ein solches δ_ε nicht nennen können, geht man folgendermaßen vor: Wir versuchen die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ durch Umformung eine Bedingung für $|x - x_0|$ zu finden, um dann ein $\delta_\varepsilon > 0$ passend zu wählen.

Beispiel 2.27. Zu untersuchen ist, ob die Funktion $f(x) := 5x + 13$ an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist. Wir möchten dieses Beispiel, wie in der Bemerkung beschrieben ist, rechnen:

$$|f(x) - f(x_0)| = |5x + 13 - 23| = |5x - 10| = 5|x - 2| = 5|x - x_0|$$

Daraus folgt: Ist $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{5}$, dann ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Wir haben also gezeigt, dass:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{5} \, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2.4 Sätze zur Stetigkeit

Satz 2.28 (Zwischenwertsatz)**.** *Für jede auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei $f(a) \neq f(b)$, dann nimmt f jeden Wert ζ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, sodass es mindestens eine reelle Zahl $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \zeta$ gibt.*

Beweis. Für einen Beweis des Satzes 2.28 siehe [For] § 11. $\square$

Bevor wir mit dem nächsten Satz beginnen, möchten wir kurz die Supremum- und Infinumseigenschaft wiederholen.

Definition 2.29 (Supremum und Infinum)**.** Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (oder kleinste obere Schranke) einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, wenn gilt:

(i) $x \leq s$, für alle $x \in A$ und

(ii) für jede obere Schranke t von A ist $s \leq t$.

Analog ist das Infinum (oder größte obere Schranke) definiert.

Bemerkung 2.30. Wir möchten kurz den Zusammenhang zwischen den Begriffen Maximum und Supremum bzw. Minimum und Infinum zusammenfassen: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Wenn eine Menge A ein Maximum besitzt, so besitzt sie auch ein Supremum, welches gleich dem Maximum von A ist.
- Besitzt die Menge A ein Supremum, dann muss sie nicht unbedingt ein Maximum besitzen. Sei $[-2,3)$, so besitzt dieses Intervall ein Supremum $s = 3$, aber kein Maximum. Daher gilt die Umkehrung nicht.
- Wenn die Menge A ein Supremum besitzt, welches ein Element von A ist, dann besitzt A auch ein Maximum und ist gleich dem Supremum von A.

Analog gilt der Zusammenhang für die Begriffe Minimum und Infinum.

Satz 2.31 (Satz von Maximum)**.** *Jede auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, und sie besitzt ein Maximum und ein Minimum, d.h. es gibt ein Punkt $\xi \in [a,b]$, sodass*

$$f(\xi) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

und einen Punkt $\mu \in [a,b]$, sodass

$$f(\mu) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen den Beweis für das Maximum. Sei $a := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$. Wenn $a = \infty$, dann ist f nicht nach oben beschränkt, daher gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \tag{2.10}$$

gilt. Da die Folge x_n beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (siehe: Satz 1.20) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit dem Limes $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a,b].$$

Aufgrund der Stetigkeit von f folgt:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi). \tag{2.11}$$

Da jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert, und den gleichen Limes hat, folgt aus den Gleichungen (2.10) und (2.11)

$$f(\xi) = a.$$

Daraus folgt auch, dass $a < \infty$ sein muss, also ist f nach oben beschränkt. Klar ist, dass $f(x) \leq \sup(f)$, und da f nach oben beschränkt ist, sind Supremum und Maximum nach Bemerkung 2.30 gleich: $\max(f) = \sup(f)$, d.h. f nimmt an der Stelle ξ ihr Maximum an.
Der Beweis für das Minimum erfolgt analog. □

Definition 2.32 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennen wir gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\delta_\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x, \xi \in D$ mit $|x - \xi| < \delta_\varepsilon$ gilt:

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 2.33. Vergleichen wir die gleichmäßige Stetigkeit mit dem ε-δ-Kriterium der Stetigkeit, so erkennen wir bei der Notation einen Unterschied:

(i) ε-δ Kriterium: $\forall \varepsilon > 0\, \forall \xi \in D\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$

(ii) Gleichmäßige Stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \xi \in D\, \forall x \in D : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

In (i) gibt es zu jedem $\xi \in D$ ein $\delta > 0$ (und im Allgemeinen für jedes ξ ein anderes δ).
In (ii) gibt es ein $\delta > 0$ für alle $\xi \in D$, d.h. die gleichmäßige Stetigkeit ist eine stärkere Form der Stetigkeit, und wir können die ε-δ Kriterium der Stetigkeit als punktweise Stetigkeit bezeichnen.

Satz 2.34. *Jede auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen f sei nicht gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ Stellen $x, \xi \in [a,b]$ mit

$$|x - \xi| < \delta, \text{ aber } \quad |f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon.$$

Nun sei $\delta := \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und wähle $(x_n, \xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a,b]$, sodass gilt:

$$|x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}, \text{ aber } \quad |f(x_n) - f(\xi_n)| \geq \varepsilon.$$

Da die Glieder der beiden Folgen $(x_n), (\xi_n)$ in $[a,b]$ liegen, sind sie daher beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die beschränkte Folge x_n eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wir mit $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichnen. Wegen $|x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$

$$|x_n - \xi_n| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und

$$\xi_n = \underbrace{x_n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha} + \underbrace{\xi_n - x_n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$$

folgt $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \alpha$. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt daraus:

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(\xi_n)| = f(\alpha) - f(\alpha) = 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(\xi_n)| \geq \varepsilon$, daher ist die Annahme falsch und f ist gleichmäßig stetig. $\square$

Satz 2.35. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es Treppenfunktionen $\tau^+, \tau^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften:*

(i) $\tau^-(x) \leq f(x) \leq \tau^+(x), \quad \forall x \in [a,b],$

(ii) $|\tau^+(x) - \tau^-(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b].$

Beweis. Nach Satz 2.34 ist f gleichmäßig stetig, d.h., dass zu jedem ε ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x, \xi \in [a,b]$ gilt:

$$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Sei nun n so groß, sodass $\frac{b-a}{n} < \delta$ und sei $t_j = a + j \cdot \frac{(b-a)}{n}$ mit $j = 0, ..., n$, dann erhalten wir eine Intervallteilung

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

mit $t_j - t_{j-1} < \delta$, für $j = 1, ..., n$. Wir setzen für $j = 1, ..., n$

$$c_j = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$
$$d_j = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Nach Satz von Maximum (siehe Satz 2.31) gilt $f(c_j) = f(\xi_j)$ und $f(d_j) = f(\mu_j)$, für $\xi_j, \mu_j \in [t_{j-1}, t_j]$ und mit $|\xi_j - \mu_j| < \delta$ folgt:

$$|f(\xi_j) - f(\mu_j)| < \varepsilon, \quad \forall j = 1, ..., n.$$

Wir definieren nun die Treppenfunktion $\tau^+, \tau^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit:

$$\tau^+(a) = \tau^-(a) = f(a)$$
$$\tau^-(x) = f(\mu_j);\ \tau^+(x) = f(\xi_j), \quad \textit{für} \quad t_{j-1} \leq x \leq t_j\ (j = 1, ..., n).$$

Damit sind die beiden Bedingungen erfüllt. $\square$

Kapitel 3

Differentiation und Integration von Funktionen

In diesem Kapitel möchten wir uns mit wichtigen Inhalten der Differentiation und Integration von Funktionen beschäftigen. Wir haben die Auswahl von Definition, Sätzen, etc. so eingeschränkt, dass sie für den Schwerpunkt der Arbeit relevant ist.
Der Inhalt dieses Kapitels bezieht sich auf die Quellen [BF00], [GRS], [For], [Heu09], [Rol18], [FK] und [Las12].

3.1 Differentiation von reellen Funktionen

Definition 3.1 (Differenzierbarkeit und Ableitung)**.** Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert der zu x_0 gehörenden Differenzenquotientenfunktion

$$\begin{aligned} \phi : D \setminus \{x_0\} &\to \mathbb{R} \\ \phi(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

an der Stelle $x_0 \in D$ existiert. Den Grenzwert nennen wir dann die **Ableitung** von f an der Stelle x_0 und bezeichnen ihn mit

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{3.1}$$

Setzt man für $h = x - x_0$, so erhalten wir

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

oder für x statt x_0 mit

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{3.2}$$

Die Funktion f heißt differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

Definition 3.2 (Höhere Ableitungen)**.** Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Ist f' differenzierbar, so nennen wir die Ableitung von f' die zweite Ableitung von f und bezeichnen ihn f''.
Die n-te Ableitung definieren wir rekursiv mit:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), \quad n \geq 3.$$

Satz 3.3. *Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $k : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} = 0$$

gibt, sodass für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) - f(x_0) = k(x) + c(x - x_0).$$

In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei f an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) = c$. Wir definieren die Funktion $k(x)$ mit

$$k(x) = f(x) - f(x_0) - c(x - x_0). \tag{3.3}$$

Aufgrund der Differenzierbarkeit von f ergibt sich mit (3.1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \\
&= f'(x_0) - c \\
&= 0.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Sei umgekehrt

$$f(x) - f(x_0) = k(x) + c(x - x_0) \tag{3.4}$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dividieren wir (3.4) durch $x - x_0$ und bilden den Grenzwert an der Stelle $x_0 \in D$, so folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} + c = c.$$

Somit ist f an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = c$. □

Satz 3.4. *Ist $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist sie an dieser Stelle stetig.*

Beweis. Sei f an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar. Nach Satz 3.3 gilt:

$$k(x) = f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

mit $k : D \to \mathbb{R}$ und ihre Eigenschaft:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Zu zeigen ist:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0,$$

also folgt aus Satz 3.3 und Satz 2.20 (i):

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} (k(x) + c(x - x_0)) \\
&= \lim_{x \to x_0} k(x) + \lim_{x \to x_0} c \underbrace{(x - x_0)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0} \\
&= \lim_{x \to x_0} k(x) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{k(x)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Wir möchten jetzt einige einfache differenzierbare Funktionen in der Form (3.2) besprechen.

Beispiel 3.5. Eine konstante Funktion $f(x) = k$, für ein $k \in \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = 0.$$

Beispiel 3.6. Eine lineare Funktion $f(x) = kx$ ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k(x + h) - kx}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{hk}{h} = k.$$

Beispiel 3.7. Die rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$ ist stetig differenzierbar mit der Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-h}{(x+h)x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x^2+hx} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Satz 3.8. *Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten folgende Rechenregeln für die Ableitungen:*

(i) Linearkombination differenzierbarer Funktion: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind af und bg differenzierbar und es gilt:

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

(ii) Produktregel fg ist differenzierbar und es gilt:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(iii) Quotientenregel: $\frac{f}{g}$ ist differenzierbar mit $g(x) \neq 0$, für alle $x \in D$ und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Beweis. Ein Beweis des Satzes 3.8 ist in [Rol18] §5 zu finden. □

Satz 3.9 (Kettenregel)**.** *Seien $g : D \to B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Funktion g sei an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, und f sei an der Stelle $f(x_0) = y_0$ differenzierbar. Dann ist die Komposition $f \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt:*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Beweis. Für den Beweis dieses Satzes siehe [Rol18] §5. □

Beispiel 3.10 (Anwendung der Kettenregel)**.** Die allgemeine Potenzfunktion

$$\begin{aligned} x^a = e^{a\ln x} &= f(g(x)), \quad a \in \mathbb{R}, \\ f(y) = e^y \quad &\text{und} \quad g(x) = a\ln x \end{aligned}$$

differenzieren wir mit Hilfe der Kettenregel

$$(x^a)' = f'(g(x))g'(x) = e^{a\ln x} \cdot ax^{-1} = ax^{a-1}$$

Satz 3.11. *Seien D und B abgeschlossene Intervalle, sei $f : D \to B \subseteq \mathbb{R}$ eine stetig invertierbare Funktion mit der Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to D$. Ist f an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch f^{-1} in $f(x_0) = y_0$ differenzierbar und es gilt:*

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad y_0 = f(x_0).$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist in [Rol18] §5 zu finden. □

Beispiel 3.12. Der natürliche Logarithmus $\ln x$ ist im Intervall $(0,\infty)$ stetig differenzierbar mit der Ableitung:

$$\ln' y = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}, \quad y = e^x.$$

3.2 Integration von reellen Funktionen

Definition 3.13 (Zerlegung oder Partition)**.** Sei $[a,b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Wir verstehen unter einer **Zerlegung** (oder **Partition**) $\mathscr{Z}$ die Unterteilung

$$\mathscr{Z} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$$

des Intervalls $[a,b]$ in Teilintervalle $I_j = [t_{j-1}, t_j]$ mit $j = 1,...,n$. Wir bezeichnen die Länge $t_j - t_{j-1}$ mit l_j und bezeichnen die größte auftretende Intervalllänge mit $|\mathscr{Z}| := \max\{l_1,...,l_n\}$ und nennen sie die Feinheit der Zerlegung $\mathscr{Z}$.

Definition 3.14 (Treppenfunktion)**.** Wir haben bereits im Kapitel §3 eine Treppenfunktion definiert, aber möchten sie jetzt mit Hilfe des Begriffes **Zerlegung** neu definieren. Eine Treppenfunktion ist eine Funktion $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$, für die es eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ von $[a,b]$ gibt, sodass τ innerhalb jedes offenen Teilintervalls (t_{j-1}, t_j) konstant ist. Den Funktionswert von τ in diesem Intervall bezeichnen wir mit τ_j. $\mathscr{T}[a,b]$ sei die Menge aller Treppenfunktion auf $[a,b]$.

Definition 3.15 (Ober- und Untersumme von f)**.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann nennen wir eine Treppenfunktion τ^-, für die $\tau^-(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, eine untere Treppenfunktion τ^-. Eine Treppenfunktion τ^+, für die $f(x) \leq \tau^+(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, nennen wir eine obere Treppenfunktion τ^+. Das bestimmte Integral einer unteren Treppenfunktion τ^- bezeichnen wir mit Untersumme von f und das bestimmte Integral einer oberen Treppenfunktion τ^+ mit Obersumme von f.

Definition 3.16 (Bestimmtes Integral der Treppenfunktion)**.** Sei $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Das bestimmte Integral von τ definieren wir mit

$$\int_a^b \tau(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \tau_j l_j.$$

Definition 3.17 (Riemann-Integral)**.** Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar (kurz: integrierbar), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\tau^+, \tau^- \in \mathscr{T}[a,b]$ mit $\tau^- \leq f \leq \tau^+$ und

$$\int_a^b \tau^+(x)dx - \int_a^b \tau^-(x)dx \leq \varepsilon \tag{3.5}$$

gibt. In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von f mit

$$\int_a^b f(x)dx := \sup_{\substack{\tau^- \in \mathscr{T}[a,b] \\ \tau^- \leq f}} \int_a^b \tau^-(x)dx = \inf_{\substack{\tau^+ \in \mathscr{T}[a,b] \\ \tau^+ \geq f}} \int_a^b \tau^+(x)dx.$$

Satz 3.18. *[Eigenschaften des bestimmten Integrals] Wir möchten einige wichtige Eigenschaften des bestimmten Integrals aufzählen:*

(i) Wenn $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind, dann ist $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ auch integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ auch integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

(iii) Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, dann ist auch $|f| : x \mapsto |f(x)|$ integrierbar.

(iv) Wenn $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f \leq g$ integrierbar sind, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Für einen Beweis des Satzes 3.18 siehe [For] §18. □

Satz 3.19. *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ nach Satz 2.35 Treppenfunktion $\tau^+, \tau^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\tau^- \leq f \leq \tau^+$ und

$$|\tau^+(x) - \tau^-(x)| < \varepsilon := \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall x \in [a,b].$$

Dann folgt aus Satz 3.18 (i):

$$\begin{aligned} \int_a^b \tau^+(x)dx - \int_a^b \tau^-(x)dx &= \int_a^b (\tau^+(x) - \tau^-(x))dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon \end{aligned}$$

und definitionsgemäß integrierbar. (Siehe Definition 3.17) $\square$

Satz 3.20 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $\zeta\in[a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)(b-a) \tag{3.6}$$

Beweis. Nach Satz 2.31 gibt es Stellen $\xi,\mu\in[a,b]$, sodass $f(\mu)\le f(x)\le f(\xi)$ gilt. $f(\mu)$ und $f(\xi)$ sind konstante Funktionen, also folgt aus Satz 3.18 (iv):

$$f(\mu)(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le f(\xi)(b-a),$$

also

$$f(\mu)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le f(\xi).$$

Daraus folgt, dass $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ zwischen $f(\mu)$ und $f(\xi)$ liegt. Wegen Satz 2.28 (Zwischenwertsatz) nimmt f jeden Wert zwischen $f(\mu)$ und $f(\xi)$ an. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es nach Satz 2.28 ein $\zeta\in[a,b]$ mit

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\zeta),$$

damit ist (3.6) gezeigt. $\square$

Satz 3.21. *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt:*

$$(b-a)\inf(f)\le\int_a^b f(x)dx\le(b-a)\sup(f).$$

Beweis. Diese Behauptung folgt aus $\inf(f)\le f\le\sup(f)$ mit Hilfe von Satz 3.18 (iv). $\square$

Satz 3.22 (Dreiecksungleichung für Integrale)**.** *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt:*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx.$$

Beweis. Wenn f integrierbar ist, dann ist nach Satz 3.18 (iii) auch $|f|$ integrierbar. Da $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$ für alle $x\in[a,b]$ gilt, folgt aus Satz 3.18 (iv):

$$-\int_a^b |f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b |f(x)|dx.$$

$\square$

Satz 3.23. *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt für jedes $c\in[a,b]$:*

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx. \tag{3.7}$$

Beweis. Für einen Beweis siehe [Rol18] §6 oder [Las12] §8. □

Definition 3.24. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann definieren wir für $a < b$:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{3.8}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{3.9}$$

3.3 Hauptsatz der Analysis

Satz 3.25 (Hauptsatz der Analysis)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist die auf $[a,b]$*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in [a,b] \tag{3.10}$$

definierte Funktion differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten von $F(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)\\ &\overset{(3.8),(3.7)}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.\end{aligned}$$

Nach Satz 3.20 gibt es ein $\xi_h \in [x, x+h]$ mit

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi_h),$$

daraus folgt:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi_h). \tag{3.11}$$

Wenn wir den Grenzwert $h \to 0$ bilden, dann konvergiert ξ_h gegen x und aufgrund der Stetigkeit von f existiert der Grenzwert von (3.11), sodass folgt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x) = \lim_{h\to 0} f(\xi_h),$$

für alle $x \in [a,b]$. □

Definition 3.26 (Unbestimmtes Integral)**.** Wir bezeichnen die Menge aller Stammfunktionen von f als das **unbestimmte Integral** von f, wenn f eine Stammfunktion besitzt. Wir bezeichnen es mit dem Symbol

$$\int f(x)dx.$$

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, dann schreiben wir

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \qquad \text{für ein } c \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.27. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Beweis. Wir verwenden die definierte Funktion (3.10) und verwenden statt F das Symbol F_0. Für $x \in [a,b]$ sei:

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)dt. \tag{3.12}$$

Für (3.12) gilt: $F_0(a) = 0$ wegen (3.9) und $F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$.
Ist F eine beliebige Funktion von f, so ist definitionsgemäß $F = F_0 + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Deshalb ist:

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= F_0(b) + c - (F_0(a) + c) \\
&= F_0(b) - F_0(a) \\
&= F_0(b) \\
&= \int_a^b f(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.28. Der Satz 3.25 besagt, dass Integration und Differentiation zueinander inverse Prozesse sind. Bilden wir die Ableitungsfunktion von der Integralfunktion, so erhalten wir:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Bilden wir jedoch die Integralfunktion der Ableitungsfunktion, so erhalten wir nicht zwangsläufig die ursprüngliche Funktion. Dennoch erhalten wir eine Funktion, die sich um eine Konstante von f unterscheidet. Diese Konstante ist gleich dem Funktionswert $f(a)$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \int_a^x \left(\frac{d}{dx} f(t)\right) dt \\
&= f(a) + \int_a^x f'(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Kapitel 4

Vertauschung von Grenzübergängen

In diesem Kapitel werden [Heu09],[BF00] und [FK] verwendet. Die Beispiele zur Vertauschung von Grenzwerten beziehen sich hauptsächlich auf [GRS] und [Heu09]. Als ergänzende Quellen dienen in diesem Kapitel [Fri],[Las12],[Fri13] und [For]. Die Idee für die Strukturierung dieses Kapitels wurde von [Heu09] entnommen. Da dieses Kapitel den Schwerpunkt dieser Arbeit darstellt, werden alle vorgestellten Sätze bewiesen.

Häufig begegnen wir in der Mathematik auf Folgen und Reihen von Funktionen. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beispielsweise so eine Folge von Funktionen, dann interessiert uns, ob für ein festes x die entstandene Zahlenfolge $f_n(x)$ konvergiert oder nicht. Was versteht man eigentlich unter einem Grenzwert einer Funktionenfolge? Eine Funktionenfolge ist für ein festes x immer eine Zahlenfolge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = f_n(x).$$

Sei für $x \in \mathbb{R}$ die Funktionenfolge $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die entstandene Zahlenfolge gegen e^x. Ebenso kann gezeigt werden, dass für ein festes $x \in \mathbb{R}$ die Zahlenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ die Summe e^x hat. Eine Besonderheit von Funktionenfolgen bzw. Funktionenreihen ist, dass es mehrere wichtige Konvergenzbegriffe gibt. Wir möchten uns mit dem ersten Konvergenzbegriff für Folgen und Reihen von Funktionen beschäftigen, doch bevor wir mit den Konvergenzbegriffen beginnen, wollen wir erstmals eine Funktionenfolge definieren.

Definition 4.1 (Funktionenfolge)**.** Sind die Glieder einer unendlichen Folge keine Zahlen, sondern Funktionen, die von einem Parameter x abhängen und in einem Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind, so spricht man von einer Funktionenfolge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Für jedes $x_0 \in D$ ist dann $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge.

Definition 4.2 (Funktionenreihe)**.** Das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ bedeutet die Funktionenfolge der Partialsummen $s_n = f_1 + ... + f_n$ und wird als Funktionenreihe auf D bezeichnet. Statt $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ schreibt man auch häufig $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.

Strebt $s_n \to s$ auf D, so sagen wir, die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiere punktweise auf D gegen s und schreiben

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = s(x) \quad \text{auf } D.$$

4.1 Punktweise Konvergenz

Definition 4.3 (Punktweise Konvergenz & Grenzfunktion)**.** Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt im Punkt $x_0 \in D$ konvergent, falls die Zahlenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent für jedes $x \in D$, so heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf D konvergent. Es existiert damit eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, sodass für jedes $x \in D$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

gilt. Die Funktion $f(x)$ heißt Grenzfunktion oder punktweiser Grenzwert der Folge f_n. Man schreibt auch:

- $f_n(x) \to f(x)$, für $n \to \infty$
- $f_n \to f$ auf D
- $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ auf D.

Bemerkung 4.4. Die Funktionenfolge $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen $f(x)$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x \in D$ eine natürliche Zahl n_0 existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{4.1}$$

Wir möchten mit einigen Beispielen zeigen, was man sich unter einer punktweisen Konvergenz genauer vorstellen kann.

Beispiel 4.5. Sei $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Für jedes $x \in [0,1)$ konvergiert x^n für $n \to \infty$ gegen 0, daher

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Demzufolge ist die Grenzfunktion f stetig.

Beispiel 4.6. Wir nehmen die gleiche Funktionenfolge, wie im letzten Beispiel, aber ändern den Definitionsbereich. Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Für jedes $x \in [0,1)$ gilt $x^n \to 0$, für $n \to \infty$.

Für $x = 1$ ist jedoch $1^n = 1$, für alle n. Die Grenzfunktion f ist daher:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Man beachte, dass die Grenzfunktion f bei $x = 1$ unstetig ist, aber jede Funktion f_n stetig ist.

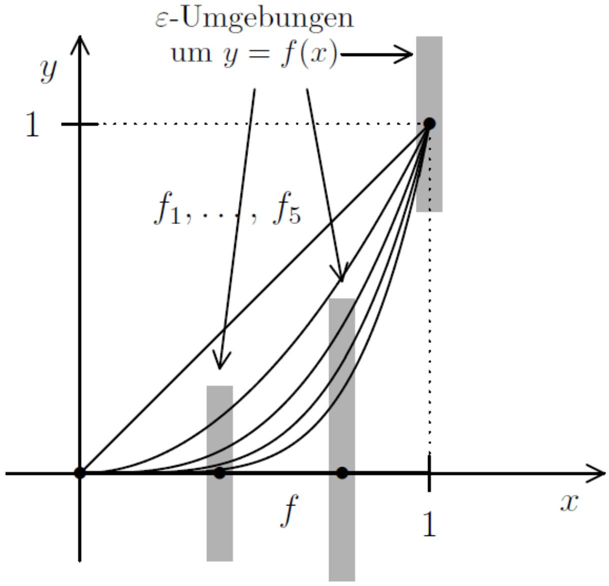

Abbildung 4.1: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$
Quelle: Fritzschke, 2020, S. 284

Beispiel 4.7. Sei $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Die Funktionenfolge ist nicht punktweise konvergent, da $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ keinen Grenzwert hat.

Das Beispiel (4.6) zeigt uns, dass bei der punktweisen Konvergenz das Verhalten der Funktionenfolge in jedem einzelnen Punkt $x \in D$ gesondert untersucht wird. Das Verhalten der gesamten Funktionenfolge spielt bei der punktweisen Konvergenz keine Rolle.
Wir haben bereits gesehen, dass die Grenzfunktion f einer Folge von stetigen Funktionen nicht notwendig eine stetige Funktion ist.
Wir möchten uns weitere "Nachteile"der punktweisen Konvergenz an folgenden Beispielen anschauen.

Beispiel 4.8 (Problem zur Vertauschung von Grenzwerten)**.** Beschränkt man sich auf das Beispiel ,$f_n : [0,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$, so ist

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty} x^n = 0, \text{aber} \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1} x^n = 1.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass man Folgengrenzwerte und Funktionsgrenzwerte im Allgemeinen nicht vertauschen kann.

Beispiel 4.9 (Problem der Vertauschung von Grenzwert und Differentiation)**.** Sei $D = \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Diese Funktionen sind für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ differenzierbar. Ihre Ableitungen sind $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$. Für alle n und alle x ist die Funktion $\sin(nx)$ durch 1 beschränkt und die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ und sicherlich ist $f'(x) = 0$. Der Grenzwert der Ableitungen

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cos nx \neq 0 = f'(x)$$

existiert hingegen an keinem Punkt x!
Das Beispiel zeigt, dass Differentiation und Grenzwertbildung im Allgemeinen nicht vertauscht werden können.

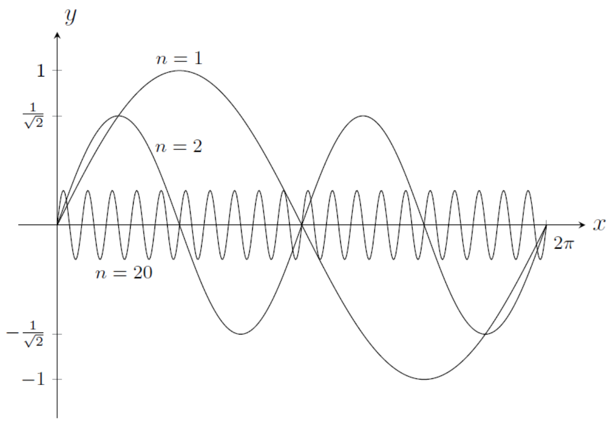

Abbildung 4.2: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$
Quelle: Glaubnitz, 2019, S. 214

Beispiel 4.10 (Problem der Vertauschung von Grenzwert und Integration)**.** Wir betrachten eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch die Hutfunktion definiert ist:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ -2n(nx-1), & \text{für } x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{für } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Der Flächeninhalt unter jeder Hutfunktion ist $\frac{1}{2}$. Die Spitzen der Hutfunktionen steigen mit wachsendem n, jedoch geht gleichzeitig das Intervall gegen 0. Die Grenzfunktion ist daher sicher

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

und der Flächeninhalt der Grenzfunktion ist

$$\int_0^1 f(x)dx = 0,$$

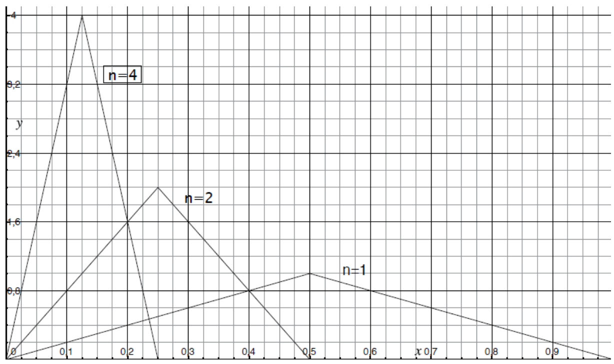

Abbildung 4.3: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Hutfunktionen
Quelle: Glaubnitz, 2019, S. 215

aber der Grenzwert der Flächeninhalte ist:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq 0 = f(x).$$

Daraus folgt, dass wir Integration und Grenzwertbildung im Allgemeinen nicht vertauschen können.

Die dargestellten Beispiele zeigen, dass die Grenzfunktion einer (konvergenten) Folge differenzierbarer bzw. integrierbarer Funktionen nicht mehr differenzierbar bzw. integrierbar zu sein braucht. Demzufolge ist das Verhalten der Grenzfunktion unter dem Begriff der punktweisen Konvergenz sehr unbefriedigend.
Wie schon oben erwähnt, untersucht man bei der punktweisen Konvergenz das Verhalten der Funktionenfolgen in jedem einzelnen Punkt $x \in D$. Wir bräuchten einen besseren Konvergenzbegriff der Funktionenfolge, damit wir das Verhalten der Funktionenfolgen für alle $x \in D$ untersuchen können. Die Idee wäre statt zu jedem einzelnen $f(x)$ eine ε-Umgebung vorzugeben, einen ε-Schlauch um den Graphen der Grenzfunktion f zu legen. Diese Idee der Konvergenz wird auch gleichzeitig die dargestellten Probleme der Vertauschung von Grenzprozessen bei der punktweisen Konvergenz beheben.

4.2 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 4.11 (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen)**.** Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f auf D, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in D$ gilt.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

(b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen s auf D, wenn es zu jedem ε ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in D$ gilt.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in D : \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - s(x) \right| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Bemerkung 4.12. Die Definition der gleichmäßigen Konvergenz besagt, dass zu einem beliebig gewählten $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ unabhängig von $x \in D$ existieren muss, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$ gilt.

Grafisch gesehen, bedeutet es, dass die Funktionenfolge f_n im gesamten Definitionsbereich annähernd auf f liegen muss, denn sobald an einer Stelle $x_0 \in D$ die Zahlenfolge $f_n(x_0)$ außerhalb des ε-Streifens liegt, so kann f_n keine ε-Approximation auf f sein.

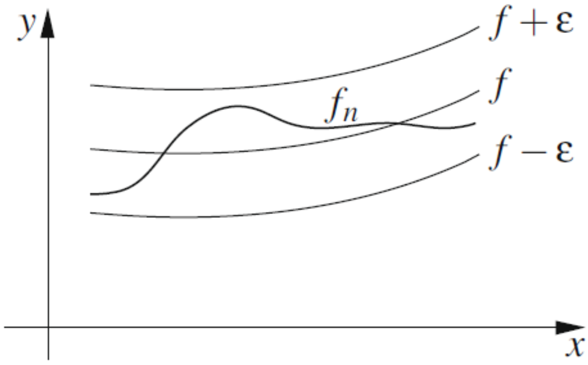

Abbildung 4.4: Gleichmäßige Konvergenz: ε-Approximation
Quelle: Forster, S. 263

Bemerkung 4.13 (Notation von punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz)**.** Die Aussagen von (4.1) und (4.2) enthalten die exakt gleichen Terme, nur in einer anderen Reihenfolge. Es ist unbedingt klar zu machen, dass es im Fall der punktweisen Konvergenz für jedes $x \in D$ einen Index n_0 gibt (und im Allgemeinen für jedes $x \in D$ ein anderes n_0), während bei der gleichmäßigen Konvergenz einen Index n_0 gibt, der für alle $x \in D$ gültig ist.

f_n konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn in jedem ε-Schlauch um f fast alle Graphen der Funktionenfolge f_n liegen.
Wir zeigen gleich, dass wir den richtigen Konvergenzbegriff gefunden haben:

Satz 4.14 (Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktion, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch die Grenzfunktion f auf D stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in D$. Zu zeigen ist, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Da die Folge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $\xi \in D$ gilt. Da f_n im Punkt x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Daher gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.15. Die gleichmäßige Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen zieht die Stetigkeit der Grenzfunktion nach sich. Bei punktweiser Konvergenz kann die Grenzfunktion f sowohl stetig als auch unstetig sein. (Siehe Beispiel (4.6))

Beispiel 4.16 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)**.** Sei $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$ und sei $f(x) := 0$ für alle $x \in D$. Dann gilt.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot x = 0 = f(x),$$

daher ist die Funktionenfolge punktweise konvergent. Zu zeigen ist noch die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| \to \text{Nullfolge}.$$

Daher ist sie punktweise und gleichmäßig konvergent.

Beispiel 4.17. Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Aus Beispiel (4.16) wissen wir bereits, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. Betrachtet man die gleichmäßige Konvergenz, so bemerkt man, dass

$$|f_n(n) - f(n)| = \left|\frac{n}{n} - 0\right| = \frac{n}{n} = 1 > \varepsilon$$

ist. Man findet ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f_n(n) - f(n)| \geq \varepsilon$, daher ist die Funktionenfolge nicht gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$.

Statt für jedes x ein kleinstmögliches n_0 zu suchen, kann man ein Supremum der Wertemenge der Funktion $\{|f_n(x) - f(x)|\}$ bei festem n bestimmen, sodass man eine Folge ε_n nicht negativer Zahlen mit den Eigenschaften

$$\varepsilon_n := \sup|f_n(x) - f(x)| : x \in D \to |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n,\ \forall x \in D$$

erhält. Wenn ε_n eine Nullfolge ist, so konvergiert $f_n(x)$ gleichmäßig. Mit dieser Überlegung wollen wir den Begriff Norm einer beschränkten Funktion erklären.

Definition 4.18 (Supremumsnorm)**.** Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die nicht-negative reelle Zahl

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D}|f(x)|$$

heißt Norm von f.

Satz 4.19. *Es seien f und g in D beschränkt, dann gilt:*

(i) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in D$

(ii) $\|cf\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$

(iii) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

(iv) $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$

Beweis. Die ausgeführten Beweise folgen aus der Definition der Supremumsnorm

(i)

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in D}|f(x)| = 0 \to \forall x : \|f(x)\|_D = 0 \to \forall x : f(x) = 0 \to f = 0.$$

(ii)

$$\|cf\|_\infty = \sup_{x\in D}|cf(x)| = \sup_{x\in D}(|c| \cdot |f(x)|) = |c| \sup_{x\in D}|f(x)| = |c|\|f\|_\infty.$$

(iii) Die Dreiecksungleichung ist für die Supremumsnorm auch erfüllt, denn für jedes $x \in D$ gilt nämlich:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

also ist auch

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in D}|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

(iv)

$$|(f\cdot g)(x)| = |f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

□

Mit Hilfe der Supremumsnorm kann die gleichmäßige Konvergenz nun in einfacher Weise beschrieben werden:

Satz 4.20. *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf D genau dann gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x)$, wenn*

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|) = \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Beweis. ($\rightarrow$) Die Funktionenfolge $f_n(x)$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$. Damit ist ε eine obere Schranke der Menge $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\}$. Da die Supremumsnorm die kleinste obere Schranke ist, folgt:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und $n \geq n_0$. Damit folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| = 0.$$

($\Leftarrow$) Gelte $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| = 0$. Dann findet man für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$. □

Bemerkung 4.21. Existiert für alle n sogar $\max|f_n(x)-f(x)|$, so ist es ausreichend zu zeigen, dass $\max|f_n(x)-f(x)| \to 0$ für $n \to 0$.

Bemerkung 4.22. f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\|f_n - f\|_\infty$ keine Nullfolge ist. Das bedeutet, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass

$$\|f_n - f\|_\infty \geq \varepsilon$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Folgerung 4.23. *Wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für unendlich viele n eine Stelle $x \in D$ gefunden werden kann, sodass $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$ gilt, dann konvergiert $f_n(x)$ nicht gleichmäßig gegen $f(x)$.*

Satz 4.24. *Sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D definiert. Es existiere eine Zahlenfolge $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $|f_n(x)| < M_n$ für alle $n \geq n_0$ und mit $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig gegen $f(x) = 0$.*

Beweis. Aus der Nullfolgeneigenschaft von $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ folgt, dass für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $0 \leq M_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Daraus ergibt sich sofort:

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq M_n < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 \wedge \forall x \in D.$$

□

Bemerkung 4.25. Wenn man eine beliebige Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzfunktion f betrachtet, so kann man das Majorantenkriterium auf $\{f_n - f\}_{n=1}^{\infty}$ anwenden, um die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu überprüfen.

Satz 4.26 (Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz)**.** *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq m}$ konvergiert auf D genau dann gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ und für alle $x \in D$ gilt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Die Folge f_n konvergiere gleichmäßig gegen f, dann gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$\forall n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ und $\forall x \in D$. Nach der Definition der Supremumsnorm folgt für alle $n, m \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$:

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f_m - f\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Für jedes $x \in D$ ist $f_n(x)$ eine reelle Cauchyfolge und gemäß Cauchykriterium konvergent, sodass mit

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ihr Grenzwert $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben ist. Wir zeigen jetzt, dass f_n gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$ und alle $x \in D$.

Für ein festes $n \geq n_0$ und ein beliebiges $x \in D$ folgt:

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

dann muss aber auch

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gelten. $\square$

Satz 4.27. *Auf D konvergieren f_n gleichmäßig auf f und g_n gleichmäßig auf g. Sei a eine beliebige Zahl. Dann konvergieren*

$$f_n + g_n \to f + g \quad \textit{und} \quad af_n \to f \quad \textit{auf}\, D$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \quad \text{und} \\ \|af_n - af\|_\infty &\leq |a| \|f_n - f\|_\infty \end{aligned}$$

Zieht man nun Satz (4.20) heran, dann ist der Beweis beendet. $\square$

4.3 Kriterien für gleichmäßige Konvergenz: Funktionenreihen

Dieser Abschnitt wurde mit Hilfe der Bücher [Heu09] und [BF00] zusammengestellt.
In diesem Kapitel betrachten wir die Konvergenzkriterien für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen.

Satz 4.28 (Cauchysches Konvergenzkriterium für Funktionenreihen)**.** *Sei $(f_n)_{n\geq m}$ auf D definiert. Dann gilt: Die Funktionenreihe $\sum_{k=m}^{\infty} f_k$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m \geq n_0, n > m$ stets*

$$\|f_m + f_{m+1} + \ldots + f_n\|_\infty < \varepsilon$$

Beweis. Aus der Definition der Supremumsnorm wissen wir, dass

$$\begin{aligned} \|f_m + f_{m+1} \ldots + f_n\|_\infty &= \sup_{x\in D} |f_m(x) + \ldots + f_n(x)| \\ &= \sup_{x\in D} \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right|, \end{aligned}$$

gilt. Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ die Folge der Partialsummen. dann ist diese genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist. Es gilt

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \tag{4.4}$$

Sei s der Grenzwert , so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_{\frac{\varepsilon}{2}}$, sodass $\|s_n - s\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Wir wählen $n, m \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ und schätzen ab:

$$\|s_n - s_{m-1}\|_\infty = \|s_n - s - (s_{m-1} - s)\|_\infty \leq \|s_n - s\|_\infty + \|s_{m-1} - s\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

daher ist $(s_n)_{n \geq m}$ eine Cauchyfolge. Die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} f_k$ ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn die Folge $(s_n)_{n \geq m}$ gleichmäßig konvergent ist. Dieses ist nach Satz (4.26) genau dann der Fall, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|f_m + f_{m+1} + \ldots + f_n\|_\infty = \|s_n - s_{m-1}\|_\infty < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$. □

Satz 4.29 (Weierstraß'sches Majorantenkriterium)**.** *Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig auf D, wenn sie eine Majorante besitzt, sodass*

$$|f_k(x)| < a_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$ gilt und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

Beweis. Für jedes $x \in D$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ nach dem Majorantenkriterium. Wir nennen den Grenzwert $s(x)$.
Für $n, m \in \mathbb{N}, n > m$ gilt:

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

Nach dem Cauchykriterium für Reihen gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Nach dem Cauchykriterium für die gleichmäßige Konvergenz gilt dann für alle $n, m \geq n_0$ und alle $x \in D$:

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon.$$

Für ein festes $n \geq n_0$ und ein beliebiges $x \in D$ folgt

$$\lim_{m\to\infty} |s_n(x) - s_m(x)| = |s_n(x) - s(x)| \leq \varepsilon.$$

Dann muss aber auch

$$\sup_{x\in D} |s_n(x) - s(x)| = \|s_n - s\|_\infty \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gelten.

□

Für das nächste Konvergenzkriterium für Funktionenreihen, das Abelsche Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz, wollen wir zuerst die Abelsche partielle Summation heranziehen.

Satz 4.30 (Abelsche partielle Summation)**.** *Seien $a_1, .., a_n$ und $b_1, .., b_n$ reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

wobei $A_0 := 0$, $A_k := \sum_{l=1}^{k} a_l$ für $k \geq 1$ und beliebigige b_{n+1}.

Beweis. Es ist $a_k = A_k - A_{k-1}$ für $k = 1, ..., n$, also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} - A_n b_{n+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Satz 4.31 (Abelsches Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz)**.** *Die Funktionenreihe $\sum f_k g_k$ ist immer dann gleichmäßig konvergent, wenn die folgenden Bedingungen gelten:*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konvergiert gleichmäßig*

(ii) Für alle $x \in D$ ist $(g_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge reeller Zahlen

(iii) Es gibt eine obere Schranke $M > 0$, sodass $|g_k(x)| < M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$.

Beweis. Es wird das Cauchykriterium angewendet, um die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$, $F_k := \sum\limits_{j=1}^{k} f_j$ und $F := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Wir erhalten mit dem Satz (4.30) für $n, m \in \mathbb{N}$ und $n > m$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} f_k g_k &= \sum_{k=1}^{n} f_k g_k - \sum_{k=1}^{m} f_k g_k \\ &= F_n g_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} F_k(g_k - g_{k+1}) - (F_m g_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} F_k(g_k - g_{k+1})) \\ &= F_n g_{n+1} - F_m g_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n} F_k(g_k - g_{k+1}).\end{aligned}$$

Subtrahiert man rechts noch

$$0 = F \cdot \left(g_{n+1} - g_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n} (g_k - g_{k+1}) \right),$$

so erhält man

$$\sum_{k=m+1}^{n} f_k g_k = (F_n - F) g_{n+1} - (F_m - F) g_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n} (F_k - F)(g_k - g_{k+1}).$$

Da $|g_k(x)|$ nach Voraussetzung (iii) für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in D$ beschränkt ist, gibt es eine obere Schranke $M > 0$ mit $|g_k(x)| < M$. Aufgrund der Voraussetzung (i) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\|F_k - F\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4M}$$

für alle $k \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ und für alle $x \in D$ erhalten wir die Abschätzung:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) g_k(x) \right| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4M} M + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot \sum_{k=m+1}^{n} (g_k(x) - g_{k+1}(x)). \tag{4.5}$$

Da $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung (ii) monoton ist, hat man für alle $n, m \in \mathbb{N}, n > m$ und alle $x \in D$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |g_k(x) - g_{k+1}(x)| = |g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)| \leq 2M. \tag{4.6}$$

Aus (4.5) und (4.6) erhalten wir dann

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) g_k(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dann muss aber auch

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} f_k g_k \right\|_\infty \leq \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$ gelten, womit alles gezeigt ist. □

Satz 4.32 (Dirchletsches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)**.** *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ *ist immer dann gleichmäßig konvergent, wenn die folgenden Bedingungen gelten:*

(i) Für alle $x \in D$ *ist* $(g_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge reeller Zahlen*

(ii) $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* 0

(iii) Es existiert eine obere Schranke $M > 0$ *mit*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k\right| < M.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ *gleichmäßig auf D.*

Beweis. Es wird das Cauchykriterium angewendet, um die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen. Sei $F_k := \sum_{j=1}^{k} f_j$. Es gilt zunächst $n, m \in \mathbb{N}, n > m$ aus dem Satz (4.30) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m+1}^{n} f_k g_k &= \sum_{k=1}^{n} f_k g_k - \sum_{k=1}^{m} f_k g_k \\
&= F_n g_n + \sum_{k=1}^{n-1} F_k(g_k - g_{k+1}) - (F_m g_m + \sum_{k=1}^{m-1} F_k(g_k - g_{k+1}) \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} F_k(g_k - g_{k+1}) + F_n g_n - F_m g_m.
\end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) folgt $g_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit $g_k - g_{k+1} \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n-1} f_k g_k\right| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |F_k||g_k - g_{k+1}| + |F_n||g_n| + |F_m||g_m| \\
&\overset{(iii)}{=} M \sum_{k=m}^{n-1} |g_k - g_{k+1}| + M(g_n + g_m) \qquad (4.7) \\
&= M \sum_{k=m}^{n-1} (g_k - g_{k+1}) + M(g_n + g_m) \\
&= M(g_m - g_n) + M(g_n + g_m) \\
&= 2M g_m.
\end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|g_m\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall m \geq n_0.$$

Aus (4.7) folgt für alle $n,m \in \mathbb{N}, n > m$ und alle $x \in D$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)g_k(x)\right| \leq 2Mg_m(x) \leq 2M\|g_m\|_\infty \leq 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

womit alles gezeigt ist. □

4.4 Vertauschung von Grenzprozessen

Wir halten uns bei diesem Abschnitt an die Quellen [Las12], [FK], [Fri] und [For].

Satz 4.33 (Stetigkeit der Grenzfunktion und Vertauschung von Grenzwerten)**.** *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei auf $D \subseteq \mathbb{R}$ definiert, jedes f_n sei stetig und konvergiert gleichmäßig gegen $f(x)$. Dann ist die Grenzfunktion $f(x)$ stetig und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0)$$

für alle $x_0 \in D$. Mit anderen Worten. Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge ist stetig.

Beweis. Dass f stetig ist, wenn eine Folge stetiger Funktion f_n, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert, wurde bereits im Satz (4.14) gezeigt. Wir zeigen noch die zweite Aussage dieses Satzes.
Da $f_n(x)$ stetig ist, gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$ für alle $x_0 \in D$. Mit der Konvergenz von $f_n(x_0)$ folgt:

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x)).$$

Andererseits folgt aus der Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$. Mit der Stetigkeit der Grenzfunktion ergibt sich:

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)).$$

Damit ist die zweite Aussage des Satzes bewiesen. □

Folgerung 4.34. *Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine unstetige Funktion, so kann die Konvergenz nur punktweise und nicht gleichmäßig sein.*

Am Anfang dieses Kapitels wurden bereits einfache Beispiele verwendet, welche die Probleme bei der Vertauschung von Integration bzw. Differentiation und Grenzübergang bei punktweiser Konvergenz darstellte. (Siehe: Beispiele (4.9),(4.10))
Die gleichmäßige Konvergenz liefert eine vernünftige hinreichende Bedingung dafür, dass man Differentiation bzw. Integration und Grenzübergang vertauschen kann.

Satz 4.35 (Vertauschung von Grenzwertbildung und Integration)**.** *Es sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n = [a,b] \to \mathbb{R}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, die auf* $[a,b]$ *gleichmäßig gegen die Grenzfunktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konvergiert. Dann ist* $f(x)$ *ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Beweis. Dieser Satz sagt aus, dass man bei gleichmäßiger Konvergenz Integration und Limesbildung vertauschen darf. Aus Satz 4.14 wissen wir, dass f stetig ist, daher nach Satz 3.19 in $[a,b]$ integrierbar. Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 3.21) und der Dreiecksungleichung für Integrale (Satz 3.22) folgt:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)dx| \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} |(f - f_n)|(x)(b-a) \\ &= \|f - f_n\|_\infty (b-a)\end{aligned}$$

und nach (4.20) konvergiert $\|f - f_n\|_\infty$ für $n \to \infty$ gegen 0. □

Satz 4.36 (Vertauschung von Grenzwertbildung und Differentiation)**.** *Die Folge* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbarer Funktionen konvergiere gleichmäßig gegen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Weiters konvergiere die Folge* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *der Ableitungen gleichmäßig. Dann ist* f *stetig differenzierbar und es gilt für alle* $x \in D$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x). \tag{4.8}$$

Beweis. Sei $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ für $x \in [a,b]$. Die dadurch definierte Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist nach Satz (4.14) stetig. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Siehe: Satz 3.25 bzw. Bemerkung 3.28) angewandt auf f_n folgt:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt. \tag{4.9}$$

Nach Satz(4.35) konvergiert

$$\int_a^x f_n'(t)dt \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \int_a^x g(t)dt. \tag{4.10}$$

Dann erhält man für f:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \underset{(4.9)}{=} f_n(a) + \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt \underset{(4.10)}{=} f(a) + \int_a^x g(t)dt. \tag{4.11}$$

Differenzieren wir f, so erhalten wir:

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

□

Literatur

[BF00] Martin Barner und Friedrich Flohr. *Analysis I*. ger. Berlin/Boston: De Gruyter, Inc, 2000. ISBN: 9783110167788.

[Dei21] Anton Deitmar. *Analysis*. Hrsg. von 3. Aufl. 2021. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2021.

[FK] Helmut Fischer und Helmut Kaul. *Mathematik für Physiker Band 1: Analysis, Lineare Algebra, Vektoranalysis, Funktionentheorie*. ger. 8. Aufl. 2018. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 3662565609.

[For] Otto Forster. *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. ger. 12. Aufl. 2016. Grundkurs Mathematik. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. ISBN: 3658115440.

[Fri] Klaus Fritzsche. *Grundkurs Analysis 1: Differentiation und Integration in einer Veränderlichen*. ger. 3. Aufl. 2020. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 366260812X.

[Fri13] Klaus Fritzsche. *Trainingsbuch zur Analysis 1 : Tutorium, Aufgaben und Lösungen /*. ger. 1st ed. 2013.. Berlin, Heidelberg : 2013. ISBN: 3-642-37796-3.

[GRS] Jan Glaubitz, Daniel Rademacher und Thomas Sonar. *Lernbuch Analysis 1: Das Wichtigste ausführlich für Bachelor und Lehramt*. ger. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. ISBN: 9783658269364.

[Heu09] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis. 1, Mit 811 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen*. ger. 17., aktualisierte Aufl.. Studium. Stuttgart: Teubner, 2009. ISBN: 9783834807779.

[Las12] Rupert Lasser. *Analysis 1 + 2 : Ein Wegweiser zum Studienbeginn*. ger. Springer-Lehrbuch 5044. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 9783642286445.

[Rol18] Rannacher Rolf. *Analysis 1 / Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen*. Heidelberg University Publishing, 2018.

Abbildungsverzeichnis