

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Titel of the Master's Thesis

„Strategien zur Vermeidung beziehungsweise Verminderung
von Fehlern und Fehlvorstellungen beim Satz von
Pythagoras“

verfasst von / submitted by

Marlene Raimer, BEd BSc.

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 500 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Lehrverbund
Unterrichtsfach Bewegung und Sport Lehrverbund
Unterrichtsfach Mathematik Lehrverbund

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen Menschen bedanken, die mich sowohl bei der Erstellung dieser Masterarbeit als auch im Laufe meines Studiums unterstützt haben.

Einen wichtigen Beitrag leistete mein Betreuer Herr Mag. Dr. Andreas Ulovec, welcher stets ein Verständnis für meine Fragestellungen zeigte. Für seine Unterstützung und großartige Betreuung dieser Arbeit möchte ich mich bedanken.

Ein herzliches Dankeschön geht auch an alle Expertinnen und Experten meiner Interviews und ihrer Informationsbereitschaft sowie interessanten Beiträge und Antworten auf meine Fragen. Ohne sie hätte diese Arbeit nicht entstehen können.

Nicht zu vernachlässigen sind auch meine Studienkolleginnen, mit denen ich auf viele gemeinsame Prüfungen hinarbeitete und zahlreiche schöne Stunden in der Freizeit verbringen durfte, danke dafür.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner ganzen Familie insbesondere meinen Eltern bedanken, die mir mein Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht haben und mich dazu motivierten dieses Studium bis zum Ende, den diese Masterarbeit verkörpert, durchzuziehen. Mein besonderer Dank gilt meinem Freund und Nadine Schauermann, die mir mit Interesse und Hilfsbereitschaft sowie Ideen zur Seite gestanden sind.

Marlene Raimer

Scharnstein 24.08.2022

Kurzfassung

Basierend auf der nachstehenden Masterarbeit werden den Fragen, welche Fehlvorstellungen und Knackpunkte beim Lehrsatz von Pythagoras auftreten und welche Strategien zur Verminderung dieser angewendet werden können, nachgegangen. Mit Hilfe einer theoretischen Ausarbeitung werden allgemeine Faktoren wie der geschichtliche Hintergrund der Formel, der pythagoräische Lehrsatz in der Schule, die Grundvorstellungen zum Satz, die nötige Kompetenzen, Repräsentationsformen des Satzes, Knackpunkte und Fehlvorstellungen, die auftreten können, passende Beweise für die Schule sowie alltagsbezogene Aufgaben aufgelistet. Anhand einer qualitativen Untersuchung werden die subjektive Wahrnehmung und Erfahrungen von Lehrkräften zum Lehrsatz von Pythagoras erforscht. Dafür wird mit sechs Expertinnen und Experten ein Leitfadeninterview mit selbst entworfenen Fragen durchgeführt. Durch die anschließende Transkription inklusive Auswertung der Interviews wurde ersichtlich, dass es noch weitere häufige Fehler beziehungsweise Fehlvorstellungen seitens der Schülerinnen und Schüler gibt. Der häufigste Fehler ist dabei das Verwechseln der Hypotenuse mit einen der beiden Katheten. Durch geeignete Strategien kann diesen Problemen jedoch entgegengewirkt werden. Entscheidende Knackpunkte sind dabei das anschauliche Arbeiten in Form von Skizzen und ordentlichen Anschreiben der Formel sowie das richtige Beschriften beziehungsweise Wissen der Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks. Nicht zu vernachlässigen ist darüber hinaus die Durchführung eines Beweises.

Abstract

Based on the master thesis below, the questions of what misconceptions and sticking points occur with the Pythagorean Theorem and what strategies can be used to mitigate them are explored. With the help of a theoretical elaboration, general factors such as the historical background of the formula, the Pythagorean theorem in school, the basic ideas about the theorem, the necessary competencies, forms of representation of the theorem, sticking points and misconceptions that can occur, suitable proofs for school as well as tasks related to everyday life are listed. A qualitative investigation is used to explore teachers' subjective perceptions and experiences of the Pythagorean Theorem. For this purpose, a guided interview with self-designed questions is conducted with six experts. Through the subsequent transcription including the analysis of the interviews, it became apparent that there are other common errors or misconceptions on the part of the students. The most frequent error is the confusion of the hypotenuse with one of the two cathetuses. However, these problems can be counteracted by appropriate strategies. Crucial points are the descriptive work in the form of sketches and proper writing of the formula as well as the correct labeling or knowledge of the properties of the right triangle. Furthermore, the execution of a proof is not to be neglected.

Inhalt

Danksagung	iii
Kurzfassung.....	iv
Abstract	v
1. Einleitung	1
I Theoretischer Teil	4
2. Geschichtlicher Hintergrund	4
2.1. Der Mann hinter der Formel	4
2.2. Die Pythagoreer	5
2.3. Die Entstehung des Satzes	5
3. Der pythagoräische Lehrsatz in der Schule.....	6
3.1. Allgemeine Informationen zum Lehrplan.....	6
3.2. Der Satz von Pythagoras im Lehrplan	10
4. Grundvorstellungen zum Lehrsatz	11
5. Nötige Kompetenzen zum Erlernen des Satzes von Pythagoras.....	13
5.1. Bildungsstandards und Kompetenzen	13
5.2. Nötige Kompetenzen für das Erlernen des Lehrsatzes	16
6. Repräsentationsformen des Satzes	20
6.1. Repräsentationsebenen.....	20
6.2. Handelnde Repräsentation	21
6.3. Bildliche Repräsentation	21
6.4. Sprachliche Repräsentation.....	22
6.5. Formale Repräsentation	22
6.6. Zusammenfassung der Repräsentationsformen	23
7. Knackpunkte und Fehlvorstellungen beim Erlernen des Satzes von Pythagoras und mögliche Lösungswege dazu.....	23
8. Passende Beweise für die Schule	27
9. Einige alltagsbezogene Beispiele/Anwendungen des Satzes	30
II Empirischer Teil	34

10. Methodik	34
10.1. Forschungsfragen und Zielsetzung.....	34
10.2. Methode.....	35
11. Forschungsdesign.....	36
11.1. Fragen des Interviews.....	36
11.2. Durchführung der Interviews	37
11.3. Auswertung der Interviews	38
11.4. Schlussfolgerungen und Ergebnisse.....	42
11.5. Diskussion	47
III Schlussteil.....	51
12. Zusammenfassung.....	51
13. Offene Fragen.....	53
14. Resümee	53
Literaturverzeichnis	55
Abbildungsverzeichnis	58
Tabellenverzeichnis.....	59
Anhang	60

1. Einleitung

Der Lehrsatz des Pythagoras beschäftigte die Menschen bereits im 6. Jahrhundert vor Christus und ist noch heute ein zentrales Thema im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Da viele mathematische Mitschriften im Zuge von Kriegen verbrannt wurden, liegen die Ursprünge der Mathematik im Dunkeln und es lassen sich darüber nur Theorien aufstellen. Klar ist jedoch, dass Pythagoras und die Pythagoreer sich viel mit mathematischen Erkenntnissen und der Suche nach den Ursachen und Beweisen dieser, beschäftigt haben. Diverse geschichtliche Funde deuten jedoch daraufhin, dass den Babyloniern und Ägyptern der Lehrsatz von Pythagoras bereits geläufig war. Weitere Untersuchungen hinsichtlich der Ursache dahinter, machten sie keine (vgl. Gerwig, 2021, S. 1-17).

Da es zahlreichen verschiedenen Erweiterungen sowie Verallgemeinerungen für den Lehrsatz gibt, lässt sich seine Wichtigkeit kaum verbergen. Darüber hinaus weist der Satz typische mathematische Denk- und Arbeitsweisen auf und ist der Ausgangspunkt für weitere mathematische Problemstellungen (vgl. Weigand et al., 2018, S.7f). Beispielsweise kann der Satz auch bei Berechnungen in diversen Körpern hilfreich sein. Dazu wird ein rechtwinkeliges Dreieck in den Körper gelegt, um die fehlende Seite für die Volumsberechnung zu ermitteln (vgl. Weigand et al., 2018, S.81).

Im Mathematik Lehrplan sowohl für die Mittelschule als auch für die AHS findet der Lehrsatz des Pythagoras erstmals in der dritten Klasse im Teilgebiet „3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ mit der Anforderung „den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können“ seine Anwendung. Die Themengebiete der Klassen davor dienen zur Vorbereitung und sind Grundbausteine für die Erarbeitung des Satzes. Weiters wird der Lehrsatz in der vierten Klasse nochmals aufgegriffen und vertieft. Ebenfalls unter dem Teilgebiet „4.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ mit den Anforderungen „den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren und in Körpern nutzen können“ und „eine Begründung des Lehrsatzes des Pythagoras verstehen“ (vgl. ris.bka.gv.at, 2022).

Grundsätzlich sollten die Schülerinnen und Schüler zwei verschiedene Grundvorstellungen zum Satz des Pythagoras kennen lernen. Einerseits, dass die Formel Auskunft zu den Seiten in einem Dreieck und andererseits zu den Flächeninhalten der entsprechenden Quadrate gibt. In der Fachmathematik sind diese beiden Ansichten streng genommen identisch, jedoch ist

vielen Kindern und Jugendlichen dieser Zusammenhang nicht klar (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 162).

Damit der Lehrsatz überhaupt erlernt werden kann, benötigen die Schülerinnen und Schüler einige Grundkompetenzen beziehungsweise ein Vorwissen über bereits gelernte Themengebiete. Hierbei ist wichtig zu erwähnen, dass ein grundlegendes Verständnis von mathematischen Sachverhalten immer im Alltagsleben auftritt. Sei es beispielsweise beim Einkaufen, beim Bedienen von Handys oder beim Ablesen der Uhrzeit (vgl. Apfler, 2020, S. 1). Das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung sieht dabei als großes Jugendziel, dass alle Schülerinnen und Schüler nach dem Verlassen des Bildungssystems, ohne Ausnahmen, zentrale Grundkompetenzen in den drei Hauptfächern Deutsch, Mathematik und Englisch besitzen (vgl. bmbwf.gv.at, 2022d).

Heutzutage gibt es zahlreiche verschiedene Repräsentationsformen für den Lehrsatz des Pythagoras. In der Mathematikdidaktik wird zwischen sprachlichen, bildlichen, formalen und handelnden Repräsentationen unterschieden (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 157-166). Drollinger-Vetter Barbara (2011, S. 157-166) bringt darüber hinaus in ihrem Buch „Verstehenselemente und strukturelle Klarheit. Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht“ Beispiele zu diesen vier Repräsentationsformen.

Beim Erlernen des Lehrsatzes von Pythagoras kann es zu vielen verschiedenen Fehlvorstellungen und Fehlern seitens der Lernenden kommen. Beispielsweise wird a^2 als „Zahl mal Zahl“ anstatt einer Fläche interpretiert (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 162) oder es kommt zu zahlreichen Fehlvorstellungen aus der Kategorie Winkel. Hierbei vernachlässigen Kinder oft, dass die Formel nur in einem rechtwinkligen Dreieck gilt. Beziehungsweise erkennen sie das Dreieck nicht als rechtwinkliges Dreieck oder interpretieren den Winkel als „rechten Winkel“, obwohl es sich gar nicht um einen handelt. Grund für falsche Interpretationen sind häufig, dass beim Messen die Skalen verwechselt oder die Größe des Winkels über die Schenkellänge beziehungsweise Kreisbogenlänge ermittelt wird (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2012, S. 68ff).

Mithilfe der Dissertation von Wildhirt (2007, S.44) lässt sich daraus schließen, dass es auch sinnvoll ist einen Beweis des Satzes im Unterricht durchzuarbeiten, da somit zahlreiche Erschließungsprozesse in Gang gesetzt werden. In weiterer Folge kommt es dadurch zur Förderung von aktualgenetischen und historisch-genetischen Kompetenzen. Gerwig Mario

(2021) zeigt mit seinem Buch „Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen – Mathematische, kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik“ wie vielseitig die Beweise zum Lehrsatz sind und greift dabei sowohl auf algebraische als auch auf geometrische Beweise zurück. In der Schule kann der Satz durch einfaches Quadrate Vereinen und Entzweien erarbeitet und im Anschluss dazu sogar bewiesen werden. Hierbei bekommen die Schüler beispielsweise die Aufgabe zwei 2×2 -Quadrate zu einem Quadrat zu vereinigen. Im Anschluss dazu soll aus einem 2×2 -Quadrat und einem 4×4 -Quadrat ein einziges Quadrat erzeugt werden. Gelingt dies so kann durch geeignetes Umlegen der Lehrsatz des Pythagoras erzeugt werden (vgl. Gerwig, 2021, S. 305-307).

Aus der Studie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“ von Rakoczy und Pauli (2006, S. 213) wird ersichtlich, dass im Unterricht eine Herstellung zum Alltag von großer Wichtigkeit ist. So eine Verknüpfung wird durch einen geschichtlichen Bezug geschaffen oder indem die Lehrperson zur Vermittlung des mathematischen Stoffgebiets geläufige Geschehnisse, Phänomene und Exempel heranzieht. Für den Satz des Pythagoras gibt es zahlreiche verschiedene Anwendungsbeispiele, die auch alltagsbezogen sind. Sei es die Berechnung einer Bildschirmdiagonale oder die Länge einer an einer Wand oder an einem Baum lehrenden Leiter (vgl. Beer, 2019, S. 182; Humenberger, 2019, S.216; Müller & Varelija, 2019a, S. 92f; Müller & Varelija, 2019b, S. 38).

I Theoretischer Teil

Da zu diesem Thema in der Theorie schon vieles an Literatur vorhanden ist, wird die für diese Forschungsarbeit relevante Literatur vorerst im theoretischen Teil aufgearbeitet. Ziel dabei ist es, dass die bereits relevanten und bekannten Tatsachen, Gesetze und Geschehnisse ermittelt und zusammengefasst werden.

2. Geschichtlicher Hintergrund

Bevor auf konkrete schulische Unterpunkte genauer eingegangen werden kann, gilt zunächst einmal zu klären, wer überhaupt hinter dieser Formel steckt. Dazu wird anhand eines geschichtlichen Abrisses, der bereits vor Christus beginnt, auf Pythagoras selbst (vgl. Gerwig, 2021, S. 1) und in weiterer Folge auf die Pythagoreer (vgl. Herrmann, 2020, S. 42ff; Herrmann, 2014, S. 26f) sowie Babylonier und Ägypter (vgl. Gerwig, 2021, S. 16f) genauer eingegangen.

2.1. Der Mann hinter der Formel

Auch wenn eine Vielzahl an Literatur zum Leben von Pythagoras vorhanden ist, ist diese mit Vorsicht zu genießen. Denn diese Quellen entstanden nicht während seiner Lebenszeit, sondern wurden erst einige Jahrzehnte nach seinem Dasein erstellt. Berichte stammen darüber hinaus von Herodot und Aristoteles (vgl. Strick, 2020, S. 17). Pythagoras von Samos wurde um 570 vor Christus geboren und war sowohl ein antiker griechischer Philosoph als auch Mathematiker. Bereits in jungen Jahren begab er sich auf Reisen und erkundete die griechischen Kolonien sowie auch Ägypten. Polykrates der Sohn des Tyrannen wurde von Pythagoras nach der Rückkehr von seinen Reisen unterrichtet. Mit etwa 40 Jahren zog er jedoch in die Stadt Kroton, einer der wichtigsten griechischen Kolonien in Süditalien. Dort sorgte er mit seinem Aufruf zu einer Lebensweise mit „Moral, Tugend, Treue und Götterverehrung“ (Herrmann, 2020, S. 43) für Aufmerksamkeit und bekam dadurch auch eine Vielzahl von Anhängern, die sich Pythagoreer nannten (vgl. Herrmann, 2020, S. 43). Pythagoras setzte sich in Kroton auch für asylsuchende Menschen aus Sybaris ein. Daraufhin brach ein Krieg aus, den Sybaris verlor. Aufgrund von politischen Unruhen bei der Verteilung der Kriegsbeute, mussten die Pythagoreer fliehen. Nach einem Aufenthalt in Tarent setzten sich Pythagoras und seine Anhänger in Metapont nieder. (vgl. Herrmann, 2014, S. 26f). Dort verstarb Pythagoras im Jahr um 500 vor Christus. Dies bedeutete jedoch

nicht das Ende der Pythagoreer, im Gegenteil, denn es verbreitete sich seine Lehre in den Jahrzehnten nach seinem Tod im ganzen Mittelmeerraum (vgl. Gerwig, 2021, S. 3).

2.2. Die Pythagoreer

Um Teil der Genossen von Pythagoras zu werden, mussten strengen Regeln wie beispielsweise kein Fleisch zu verzehren und keinen Alkohol zu trinken, einen weißen Philosophentaler, welcher nicht aus Wolle sein durfte, als Bekleidung zu tragen und noch vieles mehr eingehalten werden. Um Teil der Anhängerschaft zu werden, mussten die werdenden Mitglieder eine fünfjährige Probezeit, Noviziat genannt, durchlaufen und in Zahlenkunde, Musik und Himmelsbeobachtungen unterrichtet werden (vgl. Herrmann, 2020 S.42f). Bekannte Pythagoreer sind unter anderem Hippasos von Metapont, Philolaos von Kroton und Archytas von Tarent. Im Laufe der Zeit befassten sich die Pythagoreer mit vielen mathematischen Erkenntnissen wie zum Beispiel die Umkehrung des Lehrsatzes von Pythagoras oder mit den Winkelgesetzen an Parallelen, womit sie in weiterer Folge bewiesen, dass die Winkelsumme in Dreiecken zwei rechten Winkeln entspricht (vgl. Herrmann, 2014, S. 26f). Das Universum der Pythagoreer ordnete sich nach Zahlen. Wobei sie sich besonders für die Eigenschaften von Zahlen interessierten und die Arithmetik als die Lehre von Zahlen anstatt einer Rechenkunst ansahen. Die Interessen an Gesetzmäßigkeiten und Rechentechniken entstand erst zu einem späteren Zeitpunkt. Darüber hinaus verknüpften die Pythagoreer jede ihrer Angelegenheiten, sei es von der Astronomie und Astrologie über die Arithmetik bis hin zur Musiktheorie, mit Zahlen beziehungsweise Zahlenverhältnissen (vgl. Strick, 2020, S. 18). Gegen Ende des 4. Jahrhunderts vor Christus löste sich die Anhängerschaft, die nach der Lehre nach Pythagoras lebte, auf. Gründe dafür waren zum einen die politischen und ökonomischen Existenzänderungen aufgrund des Sieges der Demokratie über die Aristokratie und zum anderen die Entdeckung der Inkommensurabilität (d.h. etwas ist nicht durch ein Verhältnis rationaler Zahlen darstellbar). (vgl. Gerwig, 2021, S. 3ff; Herrmann, 2020, S.173f).

2.3. Die Entstehung des Satzes

Pythagoras wurde zwei Jahrtausende lang als der Entdecker des wahrscheinlich berühmtesten Satzes angesehen. Durch die Entzifferung der babylonischen Keilschrift sowie Steintafeln zeigte sich jedoch, dass der bekannte Sachverhalt den Babyloniern bereits 1800 vor Christus geläufig war. Auch wenn sich rechtwinkelige Dreiecke in ägyptischen Bauten wie zum Beispiel den Pyramiden von Gizeh wieder finden lassen, konnten die Babylonier

über eine längere Zeitspanne hinweg weniger mathematische Fortschritte machen als die Pythagoreer. Demnach kann mit großer Wahrscheinlichkeit daraus geschlossen werden, dass die Babylonier und Ägypter keine Zeit in die Suche nach den Ursachen und Beweisen solcher Sachverhalte steckten, denn ansonsten wären weitere Entdeckungen auf sie zurückzuführen (vgl. Gerwig, 2021, S. 16f).

3. Der pythagoräische Lehrsatz in der Schule

Ein weiterer wichtiger Gegenstand der geplanten Arbeit sind die aktuellen Lehrpläne, die eine konkrete Auskunft darüber geben, wann und in welcher Form der Lehrsatz in der Schule zu unterrichten ist (vgl. ris.bka.gv.at, 2022). Darüber hinaus wird in diesem Kapitel auch darauf eingegangen, warum der Satz im Schulstoff eine so besondere Rolle einnimmt (vgl. Weigand, 2018, S.7f; Wittmann, 2018, S.81; Drollinger-Vetter, 2011, S. 158).

3.1. Allgemeine Informationen zum Lehrplan

Um herauszufinden in welcher Schulstufe welches Themengebiet zu unterrichten ist, hilft es einen Blick in die entsprechenden Lehrpläne zu werfen. Bevor konkret auf den Lehrsatz von Pythagoras im Lehrplan eingegangen wird, werden allgemeine Informationen zum Lehrplan angeführt. Nur so kann eine Vorstellung zum Begriff Lehrplan aufgebaut werden. Dazu wird in diesem Unterkapitel zunächst die Entwicklung in Österreich, die Funktionen sowie die Wirkungen des Lehrplans untersucht.

Entwicklung in Österreich

In Österreich verordnete das Bundesministerium für Unterricht im Jahr 1955 neue Lehrpläne. Diese sollten die ersten, aus den Jahren 1946 beziehungsweise 1928, vorläufigen Pläne ersetzen. Darin blieben zwar die Rahmenbedingungen Großteils unverändert, jedoch gab es Änderungen in den Gebieten Unterrichtsführung und Lehrziele (vgl. Müllner, 2011, S. 120). Die aktuellen Lehrpläne sind im Schulorganisationsgesetz, kurz SchOG, zu finden und auf das Jahr 1963 zurückzuführen. Jedoch kam es im Laufe der Jahre immer wieder zu mehr oder weniger kleinen Änderungen und Erneuerungen (vgl. ris.bka.gv.at, 1963, S. 691 – 834). Darüber hinaus gibt das Schulorganisationsgesetz im Paragraphen §6 Abs. 2 Eckpunkte vor, die ein Lehrplan gesetzlich beinhalten muss (vgl. ris.bka.gv.at, 1962, S. 4):

- allgemeine Bildungsziele,

- Bildungs- und Lehraufgaben der einzelnen Unterrichtsgegenstände und didaktische Grundsätze,
- Lehrstoff,
- Lehrstoffaufteilung auf die jeweiligen Schullevels je nach notwendigen Anforderungen der Bildungsaufgaben der entsprechenden Schulart (Schulform, Fachrichtung) und den Übertrittschancen,
- Gesamtstundenzahl und Stundenausmaß der einzelnen Unterrichtsgegenstände (Studentafel),
- Kernanliegen sind in den Bildungs- und Lehraufgaben, den didaktischen Grundsätzen oder im Lehrstoff darzulegen, solange es die schulautonome Lehrplanbestimmung verlangt.

Funktionen des Lehrplans

Neben den Studentafeln und Prüfungsrichtlinien zählen die Lehrpläne zu den bedeutsamsten staatlichen Steuerungsmaßnahmen für Schule und Unterricht. Wobei darin zumeist sowohl Bildungs- und Erziehungsziele als auch Unterrichtsziele sowie -inhalte zu finden sind (vgl. Vollstädt, 1999, S.13). Anhand der staatlichen Lehrpläne soll zum einen das kulturelle Erbe gesichert und zum anderen auf Künftiges vorbereitet werden. Demnach gibt er über jene Inhalte, die für die folgende Generation und ihre Zukunft von Bedeutung sind, Auskunft (vgl. Hopmann & Künzli, 1994, S. 165-176).

Hopmann und Künzli (1994, S. 162) unterteilen die Funktionen des Lehrplans dabei in eine politische, praktische und programmatische Ebene mit folgenden Funktionen auf:

- Durch die **politische Funktion** kommt es durch einen öffentlichen Diskurs zu Rechtfertigungen der Unterrichtsinhalte.
- Die **programmatische Funktion** versucht durch eine geeignete Auswahl beziehungsweise Anordnung der Unterrichtsinhalte ein Lehrprogramm zu entwerfen und schließen.
- Mithilfe der **praktischen Funktion** wird die schulische Unterrichtsplanung eingegrenzt und unterstützt.

Santini und Trier (vgl. 1978, S. 428f) gliedern hingegen die möglichen Funktionen von Lehrplänen in folgende Kategorien:

- Die **Legitimationsfunktion** dient zur Rechtfertigung von schulpolitischen Entscheidungen beziehungsweise des Unterrichts der Lehrpersonen.
- Anhand der **Planungs- und Innovationsfunktion** oder **Stabilisierungsfunktion** soll der Lehrplan zur Schul- und Unterrichtsplanung sowie Umgestaltung beziehungsweise Beibehaltung des Schulzustandes herangezogen werden.
- Außerdem kann der Lehrplan sowohl auf horizontaler als auch vertikaler Ebene als **Koordinator** funktionieren.
- Da der Lehrplan unter anderem für die Unterrichtsvorbereitung herangezogen werden kann, besitzt er auch eine **Unterrichtspraktische Funktion**.
- Durch **Evaluations- und Selektionsfunktion** können Schülerleistungen und bearbeitete beziehungsweise nicht bearbeitete Inhalt überprüft werden sowie die Bewertung der Schulumgebung gewährleistet und für die Auswahl des Lehrpersonals herangezogen werden.
- Die **Ausbildungsfunktion** dient sowohl der Lehrergrundausbildung sowie der Lehrerfortbildung.
- Zu guter Letzt kann der Lehrplan Auskunft über die Ziele des Unterrichts geben und hat somit auch eine **Informationsfunktion** an alle interessierten Personen.

Dabei ist die Legitimationsfunktion nur dann gültig, wenn die Planungs- und Innovationsfunktion auch wirklich umgesetzt wird. Ob und wie die Umsetzung der Lehrpläne erfolgt, wird jedoch meist kaum kontrolliert. Bei der Studie von Vollstädt gaben nur 41 Prozent der Befragten an, dass sie ihre Lehrpläne gut oder sehr gut kennen. Grund dafür ist unter anderem, dass die Haupteinflussfaktoren für die Planung des Unterrichts die Schulbücher, eigenen Erfahrungen und an der Schule vorhandenen Materialien sind (vgl. Vollstädt, 2003, S. 194-208). Zurückzuführen sind diese Ergebnisse auf die mehrfache Veränderung des Lehrplans bei seiner Umsetzung. Jede Lehrperson wendet eine persönliche Unterrichtsstrategie, welche aufgrund eigener Erfahrungen und den schulischen Unterrichtsgegebenheiten entsteht, an. Dadurch entwickelt sich der offizielle Lehrplan zu einem individuellen. Durch die subjektive Umsetzung der Vorgaben läuft der „individuelle“ Lehrplan zu einem „tatsächlichen“ Lehrplan über. Dabei kommen die Kinder und Jugendlichen zu unterschiedlichen Lernergebnissen, wodurch zu guter Letzt der „realisierte“ Lehrplan stehen bleibt (vgl. Vollstädt, 1999, 15f).

Wirkungen des Lehrplans

Nicht in allen Ländern ist es üblich das öffentliche Schulwesen mit Hilfe eines Lehrplans zu messen. Jedoch stützen sich solche Länder zur Steuerung der öffentlichen Bildung auf andere Muster, die gleichwertig zu den Modellen mit Lehrplan wirken. Die Anordnungen der Unterrichtsplanungen sind auch dort auf Rahmenbeschlüsse, Strukturbestimmungen, Resultatsüberprüfungen oder anderen schriftlichen Vorgaben zurückzuführen. Den Lehrpersonen und Schulen ist dabei weniger überlassen. Grundsätzlich kann zwischen folgenden vier Modellen unterschieden werden (vgl. Hopmann, 1998, S. 180ff):

Eines der ältesten Formen für die Steuerung staatliche Lehrplanarbeit ist das **philanthropische Modell**. Dabei hat der Staat (oder Schulträger) die Befugnis Unterrichtsvorstellungen zum Beispiel durch Lehrpläne, Schulordnungen etc. verpflichtend zu bestimmen. Außerdem soll von ihm eine Aufklärung von Unterrichtsinhalten und -methoden gewährleistet werden. Ein zentrales Kennzeichen von diesem Modell ist, dass die Initiative und Verantwortung vorrangig auf die Lehrplanverwaltung zurückzuführen sind. Meist ist solch ein Modell in nordeuropäischen Ländern wie Schweden oder Norwegen zu finden (vgl. Hopmann, 1998, S. 181).

Beim **klassischen Modell** beziehungsweise **Lizenzmodell** werden vom Staat „stoffliche“ Rahmenbedingungen in Form von Lehrplänen beziehungsweise Richtlinien vorgegeben. Die Umsetzung dieser ist den Schulen beziehungsweise den Lehrpersonen selbst überlassen. Somit bekommen die betroffenen Pädagogen eine Art „Lizenz“ für die selbstständige Umsetzung im Hinblick auf die Methode und Durchführung. Solch Modelle haben sich vor allem in den deutschsprachigen Ländern durchgesetzt (vgl. Hopmann, 1998, S. 181).

In den USA hat sich vor allem das **Examen-artium Modell** durchgesetzt. Im Gegensatz zu den anderen beiden Modellen gibt es hier keinen, verpflichtenden staatlichen Lehrplan und auch keine staatlichen Vorgaben. Stattdessen gibt es für die jeweils nachfolgenden Bildungsinstitutionen Zugangskontrollen beispielsweise Aufnahmenormen der führenden Colleges. Wobei die vorbereitenden Unterrichtsangebote die Lernenden bestmöglich darauf vorbereiten sollen (vgl. Hopmann, 1998, S. 181).

Auch das **Assessment-Modell** stammt aus den USA und ist besonders an der Westküste wie zum Beispiel in Kalifornien vertreten. Wie beim Examen-artium Modell gibt es hier keinen verpflichtenden staatlichen Lehrplan. Anhand von zeitlich vorgegebenen standardisierten Schulleistungstest gibt es für die Lernenden bestimmte zu erreichende, messbare Ziele.

Durch die öffentlich zugänglichen Ergebnislisten vieler US-Bundesstaaten, wird der Druck, welcher auf die schlecht abscheidenden Schulen entsteht, ersichtlich (vgl. Hopmann, 1998, S. 182).

Abschließend ist jedoch noch wichtig anzumerken, dass in der Realität kaum reine Modelle auftauchen, meist kommt es zu Mischformen aus mehreren (zum Beispiel Schweiz, Norwegen oder Dänemark). Weiters wird aus den obenstehenden Modellen ersichtlich, dass Modelle, die den Lehrplan beinhalten, auf den Verlauf des Unterrichts achten. Modelle ohne Lehrpläne setzen hingegen mehr auf Unterrichtsergebnisse (vgl. Hopmann, 1998, S. 182).

3.2. Der Satz von Pythagoras im Lehrplan

In den ersten beiden Schulstufen der Sekundarstufe I lernen die Schülerinnen und Schüler wichtige, unerlässliche Vorkenntnisse, um den Lehrsatz von Pythagoras verstehen zu können. Dabei werden über beide Klassen hinweg immer wieder entscheidende Unterthemen aus den drei der vier Hauptbereichen „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“, „Arbeiten mit Variablen“ sowie „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ behandelt (vgl. ris.bka.gv.at, 2022, S.83ff).

3. Klasse

Der Lehrsatz von Pythagoras wird erstmals in der dritten Klasse (siebte Schulstufe) aufgegriffen. Im Themenbereich „3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ sollen die Schülerinnen und Schüler „den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können.“ (vgl. ris.bka.gv.at, 2022, S.85).

4. Klasse

In der vierten Klasse (achten Schulstufe) sollen die Lernenden wieder als Teilbereich des Themas „4.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern“ „den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren und Körper nutzen können.“ sowie „eine Begründung des Lehrsatzes des Pythagoras verstehen.“ (vgl. ris.bka.gv.at, 2022, S. 86).

Demnach soll in der vierten Klasse das Gelernte von der dritten Klasse nochmals aufgegriffen werden und mit den Schülerinnen und Schüler wiederholt, vertieft und gefestigt werden.

Gymnasium Oberstufe 2. Semester

Als Unterpunkt der „Geometrie“ sollen die Schülerinnen und Schüler auch in der Oberstufe „Den pythagoräischen Lehrsatz wissen und für Berechnungen nutzen“ (vgl. ris.bka.gv.at, 2022, S.540).

Doch warum nimmt der Satz des Pythagoras so eine besondere Rolle im Schulstoff ein?

Auf die Frage, warum der Lehrsatz in der Schule eine so besondere Rolle einnimmt, gibt es einige wichtige Gründe. Weigand (2018, S.7f) erwähnt im Zusammenhang mit der kulturellen Bedeutung, dass der pythagoräische Lehrsatz durch dieselbe beziehungsweise ähnliche Entwicklung in den verschiedenen geschichtlichen Kulturen, einen universellen Charakter aufweist. Außerdem gibt es zahlreiche diverse Erweiterungen beziehungsweise Verallgemeinerungen des Theorems, er bringt klassische mathematische Denk- und Arbeitsweisen mit sich und dient als Ausgangslage für weitere mathematische, problematische Ausgangslagen. Als Beispiel für den letzteren Aspekt, kann der Lehrsatz für Berechnungen in unterschiedlichen Körpern herangezogen werden. Um die fehlende Seite für die Berechnung des Volumens ermitteln zu können, werden dazu entsprechende rechtwinkelige Dreiecke in den Körper gelegt (vgl. Wittmann, 2018, S.81).

Da die Schülerinnen und Schüler meist keinerlei Vorwissen zum Satz von Pythagoras haben beziehungsweise ihnen seine Bedeutung nicht bekannt ist, fehlen ihnen auch repräsentative Anwendungsbeispiele aus dem Alltag. Fachliche Repräsentationsformen kommen demnach wahrscheinlich früher vor als bei manch anderen mathematischen Themen in der Schule. Weiters handelt es sich beim Lehrsatz von Pythagoras um den ersten nicht ersichtlichen korrekten Satz, den die Lernenden im Geometrieunterricht studieren. Infolgedessen nimmt die Thematik Beweise für die Schülerinnen und Schüler eine wichtige Rolle ein. Außerdem kann der Satz von Pythagoras als Verbindung zwischen der Geometrie und Algebra gesehen werden. Denn anhand einer Formel können die geometrischen Inhalte des Satzes beschrieben werden. Zu guter Letzt findet der Lehrsatz auch in vielen anderen mathematischen Sätzen beziehungsweise Themenbereichen seine Anwendung wieder (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 158).

4. Grundvorstellungen zum Lehrsatz

Ein wesentlicher Punkt für das Verstehen des Lehrsatzes von Pythagoras spielen die dazugehörigen Grundvorstellungen. Dabei kann zwischen der Berechnung der Strecken

sowie dem Addieren von Quadraten unterschieden werden (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 162). Bevor auf die beiden Grundvorstellungen zum Lehrsatz von Pythagoras genauer eingegangen wird, ist es sinnvoll ein paar allgemeine Informationen über Grundvorstellungen zu wissen.

Allgemeine Informationen zu Grundvorstellungen

Im Mathematikunterricht spielt die Entwicklung von Grundvorstellungen für die Schülerinnen und Schüler eine zentrale Rolle. Grund dafür ist, dass sie eine wichtige Verbindung zwischen der realen und der mathematischen Welt bilden. Denn durch sie wird eine mathematische Interpretation von Alltagssituationen und umgekehrt gewährleistet. Dem Grundvorstellungskonzept nach, sind mehrere Grundvorstellungen für das Begreifen eines mathematischen Begriffs nötig. Dabei werden die primären Grundvorstellungen selbstständig und aus bestimmten Handlungen in der Vorschulzeit entwickelt. Die sekundären entstehen hingegen im Mathematikunterricht und ergänzen die primären. Durch geeignete mathematische Darstellungsmethoden lassen sie sich dann repräsentieren (vgl. Hock, 2021, S. 115f).

Weiters gehen Grundvorstellungen aus einer aufbauenden, persönlichen Entwicklung, die sich aus drei verschiedenen Gesichtspunkten zusammensetzt, hervor und nicht direkt beobachtbar sind. Der normative Blickwinkel gibt dabei die mathematische Kernidee wieder. Durch den deskriptiven Aspekt soll der Mittelpunkt auf die momentanen mathematischen Gedanken und Vorstellungen der Lernenden gelenkt und beschrieben werden. Wobei der Vergleich zu den normativen Aspekten von zentraler Bedeutung ist. Zu guter Letzt sollen die Schülerinnen und Schüler beim konstruktiven Aspekt ihre bisherigen Vorstellungen weiterentwickeln. Dazu sollen sie durch neue Lernsituationen neue Annahmen aufstellen und verfeinern (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 38f).

Grundvorstellungen zum Lehrsatz von Pythagoras

Grundsätzlich kann der Satz von Pythagoras aus zwei verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden und demnach zwischen zwei Grundvorstellungen unterschieden werden:

Wird der Lehrsatz aus Schülerinnen und Schüler Sicht betrachtet kann anhand des Satzes einerseits eine der drei fehlenden Seitenlängen im Dreieck berechnet werden. Demnach gibt der Lehrsatz eine Auskunft über die Seitenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck.

Andererseits gibt er eine Auskunft über die Flächeninhalte der Kathetenquadrate und des Hypotenusenquadrats (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S.162).

Fachlich betrachtet sind die beiden obenstehenden Blickwinkel äquivalent. Der Zusammenhang der zwei Vorstellungen ist auf die geometrische Bedeutung von a^2 zurückzuführen. Denn bezeichnet a eine Seitenlänge, so wird mit a^2 der Flächeninhalt des entsprechenden dazu passenden Quadrats bestimmt (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 162).

Dieser Zusammenhang ist für die Lernenden leider nicht immer ganz so deutlich und sie interpretieren a^2 einfach als „Zahl mal Zahl“. Die geometrische Deutung geht verloren und der Term wird nicht als Fläche erkannt. Demnach ist es in der Schule von großer Bedeutung, dass beide Grundvorstellungen einmal im Mittelpunkt stehen (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 162).

5. Nötige Kompetenzen zum Erlernen des Satzes von Pythagoras

Apfler (2020, S.1) betont im Zusammenhang mit mathematischen Kompetenzen, dass unabhängig vom Alter immer wieder ein grundlegendes Verständnis von mathematischen Sachverhalten im Alltag auftritt. Beim Einkaufen, Bedienen von Handys oder Ablesen der Uhrzeit sind nur wenige Beispiele dafür. Demnach handelt es sich dabei um mathematische Kompetenzen, welche das Verständnis von Zahlen und Operationen sowie das Wissen von diversen Darstellungsformen voraussetzen.

Weiters sollten die Schülerinnen und Schüler in ihrer bisherigen Schullaufbahn schon einige mathematische Grundkompetenzen, die zum Erarbeiten des Lehrsatzes entscheidend sind, erlernt haben (vgl. bmbwf.gv.at, 2022c). Bevor jedoch die entsprechenden Kompetenzen genauer behandelt werden, wird auf die Bildungsstandards, das System in Österreich, eingegangen.

5.1. Bildungsstandards und Kompetenzen

Wird ein Blick in die Vergangenheit geworfen, wird klar ersichtlich, dass sich die Ziele des Lehrens und Lernens im Laufe der Zeit verändert haben. Vor wenigen Jahren sollten Inhalte und Faktenwissen beispielsweise an die Lernenden weitergegeben werden. Aktuell wird überall von dem Erwerb von Kompetenzen berichtet und nachgegangen. In diesem Zusammenhang wurden die Bildungsstandards, welche die zentralen Lernergebnisse und Kompetenzen in den drei Hauptfächern darlegen, entwickelt (vgl. bmbwf.gv.at, 2022a).

Bildungsstandards

Die Bildungsstandards sind seit 2009 ein bedeutendes Fundament des Unterrichts, wobei anhand einer Verordnung eine systematische Auswahl entsprechender Bildungsstandards getroffen wurde (vgl. bmbwf.gv.at, 2022a).

Die Schülerinnen und Schüler erwerben in einem individuellen, aktiven Prozess die diversen Kompetenzen. Dabei starten die Lernenden mit unterschiedlichen Ausgangsbedingungen, gehen ihren eigenen Weg und machen unterschiedliche Lernerfolge sowie Lernergebnisse. Demnach werden sie als aktive mitgestaltende Personen ihres Lernprozesses bemerkt und gefördert (vgl. bmbwf.gv.at, 2022b).

Weiters können die Funktionen der Bildungsstandards in drei Kategorien aufgespalten werden (vgl. bmbwf.gv.at, 2022b):

- **Orientierungsfunktion:** Die Bildungsstandards geben darüber Auskunft welche Kompetenzen am Ende der vierten beziehungsweise achten Schulstufe erreicht werden sollen. Sie dienen daher als Orientierung bei der Planung sowie der Bewertung eines dauerhaften Kompetenzaufbaus in der Schulstunde.
- **Förderungsfunktion:** Anhand des erhobenen Leistungsniveaus des Lernstandes aus den periodischen Kontrollen, können die Bildungsstandards als individuelle Förderung des einzelnen herangezogen werden. Dabei sind ihre Wirkungen sowohl punktuell, sowie auf gewisse Schulstufen, als auch kontinuierlich. Denn durch das Planen und Gestalten des Unterrichts sowie der Förderung wird der planmäßige Aufbau der entsprechenden Kompetenzen der Verordnung nach über alle Schulstufen hinweg nachgegangen.
- **Evaluationsfunktion:** Die erworbenen Kompetenzen bis zur dritten und vierten sowie siebten und achten Schulstufe der Lernenden werden mit Hilfe von regelmäßigen landesweiten Kompetenzüberprüfungen der Bildungsstandards erhoben sowie mit den vorausgesetzten Lernergebnissen gegenübergestellt.

Kompetenzen

Im Bundesgesetzblatt für Österreich (vgl. ris.bka.gv.at, 2009, S.2) werden zu erreichende Bildungsstandards in Form von Kompetenzen dargelegt. Dabei wird zwischen den „grundlegenden Kompetenzen“ und den „Kompetenzen“ differenziert. Mit Hilfe der „grundlegenden Kompetenzen“ sollen die wichtigsten, inhaltlichen Bereiche eines Themas

abgedeckt werden, um den Aufbau von Kompetenzen zu gewährleisten. Die längerfristigen Fähigkeiten und Fertigkeiten, welche die Schülerinnen und Schüler im Unterricht erarbeiten werden, sind dann unter „Kompetenzen“ einzuordnen. Diese sollen in unterschiedlichen Situationen einsetzbar sein sowie beim Lösen von diversen Aufgaben in veränderlichen Gegebenheiten hilfreich sein.

In der Sekundarstufe I spaltet sich das mathematische dreidimensionale Kompetenzmodell in „Inhaltsbereich“, also die mathematischen Inhalte, den „Handlungsbereich“ mathematische Tätigkeiten sowie den „Komplexitätsbereich“ die Art und Komplexität und deren Vernetzung auf (siehe Abbildung 1). Dabei unterteilt sich die „Inhaltsdimension“ und „Handlungsdimension“ in jeweils vier Kategorien und die „Komplexitätsdimension“ in drei (vgl. iqs.gv.at, 2022).

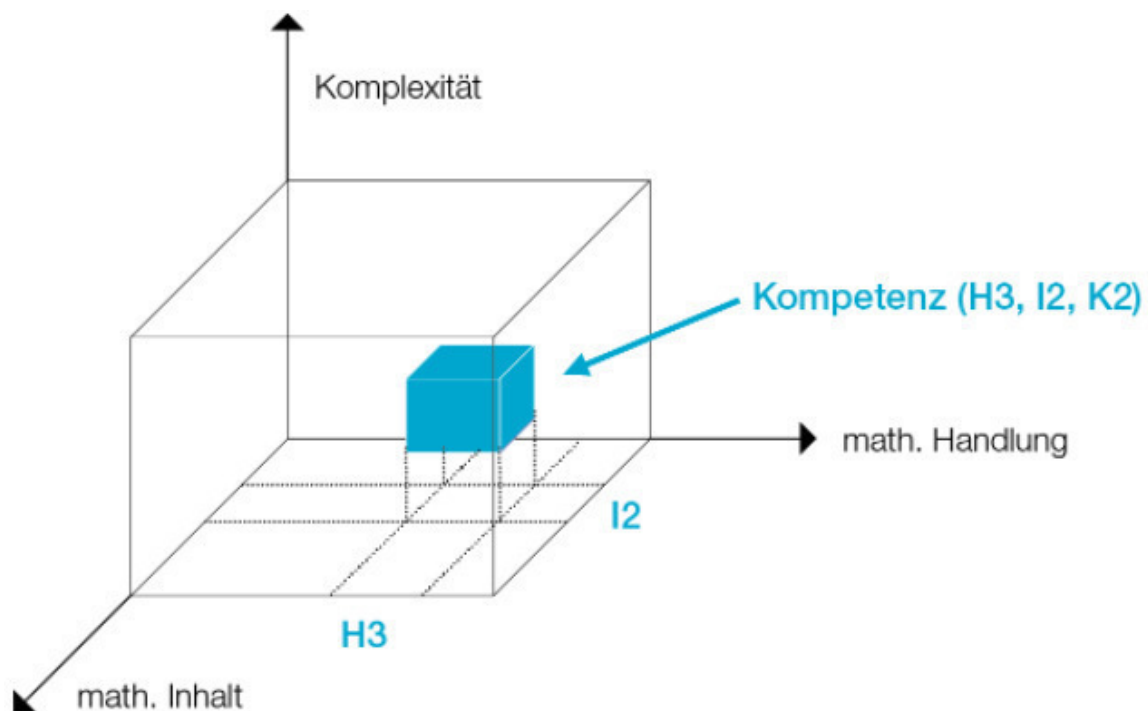


Abbildung 1: M8-Kompetenzmodell Sekundarstufe I Mathematik (vgl. iqs.gv.at, 2022).

In der nachstehenden Tabelle 1 sind die verschiedenen Bereiche des Kompetenzmodells übersichtlich aufgelistet. Im Mathematikunterricht setzten sich demnach die Kompetenzen aus je einen der drei Bereiche zusammen. Am Ende der achten Schulstufe sollen die Schülerinnen und Schüler alle Kompetenzen aus dem Modell erreicht haben, das entspricht 48 Kompetenzen (vgl. iqs.gv.at, 2022).

Inhaltsbereich	Handlungsbereich	Komplexitätsbereich
I1: Zahlen und Maße	H1: Darstellen, Modellbilden	K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und - fertigkeiten
I2: Variablen, funktionale Abhängigkeiten	H2: Rechnen, Operieren	K2: Herstellen von Verbindungen
I3: Geometrische Figuren und Körper	H3: Interpretieren	K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren
I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen	H4: Argumentieren, Begründen	

Tabelle 1: Kompetenzbereiche (vgl. iqs.gv.at, 2022).

5.2. Nötige Kompetenzen für das Erlernen des Lehrsatzes

Anhand der obenstehenden Kompetenzbereiche und des Lehrplans geht klar hervor, dass der Lehrsatz von Pythagoras in den Inhaltsbereich „I3 Geometrische Figuren und Körper“ einzuordnen ist. Die Kompetenzen entstehen durch die Kombination mit diversen anderen Ebenen aus dem Handlungs- sowie Komplexitätsbereich. Damit der Lehrsatz von Pythagoras überhaupt erlernt werden kann, müssen die Schülerinnen und Schüler bereits einige Kompetenzen aus den Schulstufen zuvor erworben haben. Durch einen genaueren Blick in andere Themenbereiche des Mathematiklehrplans, wird ersichtlich, dass die Lernenden auch einiges an Vorwissen aus diesen Bereichen beherrschen müssen. Im nachstehenden Kapitel sind selbst formulierte Lernziele, die mit Hilfe des Lehrplans und den Kompetenzbereichen erstellt wurden und für das Erlernen des pythagoräischen Lehrsatzes beherrscht werden müssen beziehungsweise erreicht werden sollen, zu finden. Dabei wurde jedoch nur auf den Inhaltsbereich eingegangen, damit der Rahmen der Arbeit nicht gesprengt wird. Da viele der Themengebiete aufbauend sind, wiederholen sich manche der Lernziele in den entsprechenden Schulstufen und werden daher in den Tabellen öfter angeführt. Darüber hinaus gibt es auch Aufgaben, bei denen das Vorwissen von weiteren Inhaltsbereichen herangezogen werden muss, jedoch sind diese nicht ausschlaggebend, um

den Lehrsatz von Pythagoras zu verstehen und wurden daher ebenfalls in der untenstehenden Auslistung vernachlässigt (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.83-86).

Lernziel: Die Schülerinnen und Schüler...	Kompetenzbereich
... können das Arbeiten mit natürlichen Zahlen sichern und erweitern.	I1
... können mit Maßen rechnen und operieren sowie Umwandlungen durchführen sowohl in Textaufgaben als auch im Zusammenhang mit geometrischen Themen.	I1
... können die positiven rationalen Zahlen mit ihren eigenen Ansichten verknüpfen.	I1
... können die Schreibweise von Dezimalzahlen und Brüchen darstellen.	I1
... können mit positiven rationalen Zahlen rechnen und operieren.	I1
... können elektronische Rechenhilfsmittel heranziehen.	I1
... können ihr Wissen über Umkehroperationen ausbauen.	I1
... können beim Rechnen mit den entsprechenden Rechenregeln arbeiten (Reihenfolge von Rechenoperationen, Klammerregel).	I1
... können allgemeine Gegebenheiten mit Variablen ausdrücken.	I2
... können Gleichungen sowie Formeln bestimmen.	I2
... können einfache lineare Gleichungen lösen.	I2
... können Formeln einsetzen und deuten.	I2
... können geometrische Figuren sowie Körper inklusiver Merkmale erfassen und wiedergeben.	I3
... können die grundlegende geometrische Begriffe basierend auf dem Vorwissen aus der Volksschule erweitern.	I3
... können von diversen Figuren Skizzen zeichnen.	I3
... können den Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken (inklusive Quadrat) berechnen.	I3

... können für die Berechnung von Umfängen, Flächeninhalte sowie Volumen Formeln aufstellen.	I3
... können Winkel nach ihren Grad einteilen.	I3
... können mit Hilfe eines Winkelmessers Winkel konstruieren.	I3

Tabelle 2: Lernziele aus der 5. Schulstufe (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.83f).

Lernziel: Die Schülerinnen und Schüler...	Kompetenzbereich
... können den Umgang mit positiven rationalen Zahlen sichern und erweitern.	I1
... können Maße einsetzen und Umwandlungen ausführen.	I1
... können einfache Gegebenheiten mit Unbekannten darstellen.	I2
... können Gleichungen sowie Formeln bestimmen.	I2
... können Formeln deuten.	I2
... können die Eigenschaften von Dreiecken, Vierecken sowie regelmäßigen Vielecken nennen.	I3
... können Figuren konstruieren und eine entsprechende Skizze dazu anfertigen.	I3
... können von Figuren den Flächeninhalt ermitteln.	I3

Tabelle 3: Lernziele aus der 6. Schulstufe (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.84f).

Lernziel: Die Schülerinnen und Schüler...	Kompetenzbereich
... können die vier Grundrechnungsarten verbinden und mit Hilfe von elektronischen Rechenhilfsmittel daraus entstehende Terme lösen.	I1
... können sich mit der Potenzschreibweise vertraut machen und umgehen.	I1

... können mit Hilfe von Rechenregeln Formeln beziehungsweise Terme umformen und belegen.	I2
... können mit einfachen Potenzen umgehen.	I2
... können für Sachgegebenheiten und geometrische Situationen Formeln finden.	I2
... können Beispiele, in denen Terme beziehungsweise Formeln aus Einsatzbereichen oder der geometrischen Themen zu bearbeiten sind, durch Umformungen bewältigen.	I2
... können lineare Gleichungen, in welchen eine Variable vorkommt, bewältigen.	I2
... können von Dreiecken beziehungsweise Vierecken die Flächeninhaltsformeln belegen und mit deren Hilfe den Flächeninhalt bestimmen.	I3
... können Umkehraufgaben bewältigen.	I3
... können diverse Prismen und Pyramiden zeichnerisch darstellen.	I3
... können von Objekten in der Form eines Prismas beziehungsweise einer Pyramide sowohl die Oberfläche als auch den Rauminhalt sowie das Gewicht bestimmen.	I3
... können in zweidimensionalen Figuren den pythagoräischen Lehrsatz für Berechnungen anwenden.	I3

Tabelle 4: Lernziele aus der 7. Schulstufe (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.85).

Lernziel: Die Schülerinnen und Schüler...	Kompetenzbereich
... können in zweidimensionalen Figuren sowie in Körpern den pythagoräischen Lehrsatz für Berechnungen anwenden.	I3
... können einen Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras nachvollziehen.	I3

... können mit Hilfe von Unbekannten die verschiedene Berechnungsarten wiedergeben.	I3
---	----

Tabelle 5: Lernziele aus der 8. Schulstufe (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.85f).

6. Repräsentationsformen des Satzes

Für den Lehrsatz von Pythagoras können in der Schule verschiedene Repräsentationsformen verwendet werden. Ein sehr bekanntes didaktisches Konzept, welches auf Jerome Brunner zurückzuführen ist, ist das „EIS-Prinzip“ (vgl. Dillinger, 2019, S. 6). Auf Grundlage dieses Prinzips wird in der Arbeit zwischen den sprachlichen, bildlichen, formalen und handelnden Veranschaulichungen differenziert und im nachstehenden Kapitel Beispiele angeführt.

6.1. Repräsentationsebenen

Laut Kuhnke (2013, S. 7f) dienen im Mathematikunterricht Repräsentationen den Lernenden als Lernhilfe und Veranschaulichung von mathematischen Begriffen. Dabei kann für den Begriff „Repräsentation“ ebenso die Wörter Darstellung, Visualisierung, Veranschaulichung oder Rekonstruktion herangezogen werden. Je nach Hintergrundtheorie der Autorin oder des Autors werden die Repräsentationen unterschiedlich kategorisiert. In dieser Arbeit wird auf folgende zwei Klassifikationen genauer eingegangen:

Mithilfe des bekannten „EIS-Prinzips“ von Jerome Bruner können (mathematische) Inhalte beziehungsweise Problemstellungen auf drei verschiedenen Ebenen dargestellt werden. Der Name des Prinzips setzt sich aus den Anfangsbuchstaben der drei Repräsentationsformen „enaktiv“, „ikonisch“ und „symbolisch“ zusammen. „Enaktiv“ steht dabei für das physische Handeln, „ikonisch“ für die bildliche Darstellung und „symbolisch“ für die sprachliche sowie formale Repräsentation (vgl. Dillinger, 2019, S. 6).

Aus mathematischer Sicht ist es nach Drollinger-Vetter & Lipowsky (2006, S. 192) sowie Kuhnke (2013, S.9) weiters sinnvoll die „symbolische“ Ebene in die „sprachliche“ und „formale“ Darstellung aufzusplitten.

Dies Arbeit bezieht sich auf die Einteilung von Bruner, wobei die „symbolisch“ Ebene aus oben genannten Gründen noch weiter unterteilt wird. Demnach gibt es vier Repräsentationsebenen, welche sich gegenseitig beeinflussen und ergänzen.

6.2. Handelnde Repräsentation

Lernende können durch physisches Handeln bestimmte Sachverhalten erfahren beziehungsweise sehen. In Bezug auf den Lehrsatz könnte mithilfe von Papierfiguren ein Zerlegungs- beziehungsweise Ergänzungsbeweis herangezogen werden, um die Flächengleichheit der Quadrate zu zeigen. Ein großer Vorteil darin liegt, dass handelndes Erleben für die Beteiligten sehr einprägsam ist. Jedoch kann es dabei auch zu, für das Auge, kaum ersichtliche Überlappungen oder Lücken kommen und infolgedessen werden die Quadrate als Flächengleich interpretiert, obwohl dies gar nicht der Fall ist. Es kommt demnach zu falschen Schlussfolgerungen, die rechnerisch leicht belegbar sind (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 159f).

6.3. Bildliche Repräsentation

Bei der bildlichen Repräsentation werden die mathematischen Sachverhalte anhand von Abbildungen dargestellt (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 159f). Die in der Abbildung 2 sichtbare Skizze ist die wahrscheinlich geläufigste Pythagoras-Figur und die Ausgangslage von diversesten Beweisen und bildlichen Repräsentationen (vgl. Gerwig, 2021, S.117).

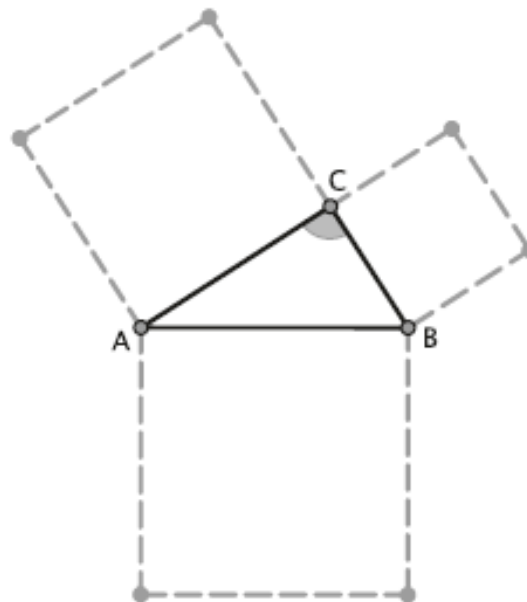


Abbildung 2: Bildliche Darstellung des Lehrsatzes von Pythagoras (vgl. Gerwig, 2021, S. 117).

Der Satz von Pythagoras könnte, beziehungsweise wie in Abbildung 3, durch Quadrate verkörpert werden. Darin wird ersichtlich, dass die oberen beiden Quadrate kleiner als das untere Quadrat ist und gemeinsam ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Ohne weitere

Beschreibung kann der eigentliche Satz jedoch kaum hergeleitet werden. Grund dafür ist, dass die Flächengleichheit des unteren Quadrats und der Summe beider oberen Quadrate mit freiem Auge schwer ersichtlich ist (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 159f).

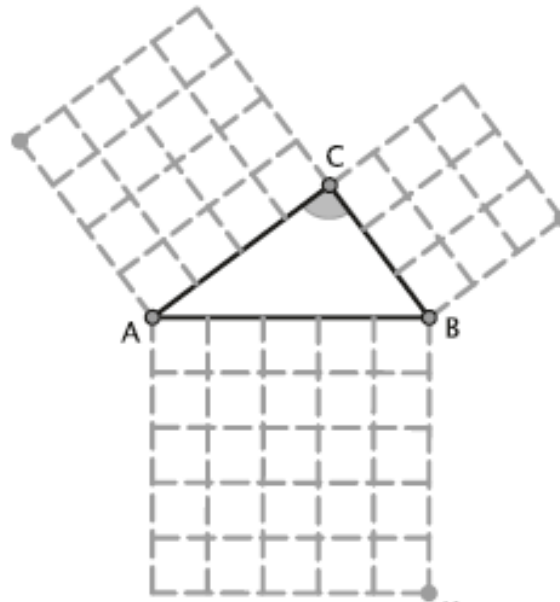


Abbildung 3: Bildliche Darstellungen des Lehrsatzes von Pythagoras 2 (vgl. Gerwig, 2021, S. 113).

6.4. Sprachliche Repräsentation

Für die sprachliche Repräsentationsform gibt es viele verschiedene Variationen, in welchen mit zahlreichen Fachbegriffen der Sachverhalt beschrieben wird. Sind bestimmte Begriffe den Schülerinnen oder Schülern nicht bekannt, so hilft ihnen solch eine Formulierung nur wenig. Ein Beispiel für eine sprachliche Repräsentation des Lehrsatzes von Pythagoras lautet (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 159f):

„In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.“ (Drollinger-Vetter, 2011, S. 159).

6.5. Formale Repräsentation

Eine formale Repräsentation des Lehrsatzes wäre:

„a, b, c sind Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\gamma = 90^\circ$ dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$ “ (Drollinger-Vetter, 2011, S. 159).

Die Formeln $a^2 + b^2 = c^2$ allein wäre nicht ausreichend, da diese den Satz noch nicht darstellt. Sie stellt nur eine Gleichung dar, die durch das Einsetzen von Zahlen eine wahre oder falsche

Aussage liefert. Daher muss die Formel, wie im obenstehenden Beispiel, durch eine Formulierung, welche die geometrische Bedeutung der Variablen a , b und c hervorhebt, oder durch eine passende Skizze eines rechtwinkligen Dreiecks inklusive Beschriftung ergänzt werden. Erst dann wird die geometrische Bedeutung des Satzes erkennbar (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 159f).

6.6. Zusammenfassung der Repräsentationsformen

Aus den obenstehenden Beispielen wird klar ersichtlich, dass es sinnvoll ist mehrere Repräsentationsformen zu behandeln. Denn die einzelnen fachlichen Darstellungen zeigen in den meisten Fällen nur einen kleinen Ausschnitt des entsprechenden Sachverhalts. Darüber hinaus sind für das Lösen von diversen Aufgaben verschiedene Repräsentationsformen entscheidend. Je mehr Darstellungsformen der lernenden Person bekannt sind, desto leichter fällt ihr das Lösen der Aufgaben. (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 161).

Drollinger-Vetter und Lipowsky (2006, S. 189-1922) betonen darüber hinaus, dass durch das Kennenlernen von unterschiedlichen Repräsentationsformen und in weiterer Folge die Verknüpfung dieser, ein vertieftes Verständnis mathematischer Konzepte fördert. Dabei ist es entscheidend, ob beziehungsweise wie die einzelnen Ebenen miteinander verknüpft sind.

Außerdem soll durch das Wechseln zwischen den einzelnen Darstellungsformen den Lernenden zunächst klar werden, dass mathematische Begriffe auf viele verschiedene Weisen dargestellt werden können. Das Wesentliche an den diversen Repräsentationsebenen ist, dass diese unterschiedliche Eigenschaften besitzen. Demnach muss den Lernenden die strukturelle und mathematische Gleichheit und das ineinander Überführen, die Austauschbarkeit und Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Darstellungen bewusst werden (vgl. Kuhnke, 2012, S. 31f).

7. Knackpunkte und Fehlvorstellungen beim Erlernen des Satzes von Pythagoras und mögliche Lösungswege dazu

Anhand der obenstehenden Kapitel geht klar hervor, dass das Kennenlernen von verschiedenen Repräsentationsformen und das Verstehen deren Zusammenhänge für die Lernenden eine zentrale Bedeutung spielt. Darüber hinaus können durch eine Analyse der Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern, Schwierigkeiten beim Verstehen eines

Konzepts erkannt werden (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 157-166). Eine zentrale Fehlvorstellung von Kindern und Jugendlichen beim Satz von Pythagoras ist, dass a^2 als „Zahl mal Zahl“ anstatt einer Fläche interpretiert wird (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 162). Weiters treten darüber hinaus zahlreiche Fehl beziehungsweise Fehlvorstellungen aus dem Themengebiet „Winkel“ auf (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2012, S. 68ff).

Zahl mal Zahl anstatt Fläche

Wie bereits oben erwähnt wird bei dieser Fehlvorstellung der Term a^2 ausschließlich als „Zahl mal Zahl“ interpretiert und die geometrische Bedeutung als Fläche völlig außer Acht gelassen. Demnach kann daraus geschlossen werden, dass der Sinn hinter der Formel nicht verstanden wurde. In diesem Zusammenhang spielt das Kennenlernen von diversen fachlichen Repräsentationsformen von Sachverhalten eine entscheidende Rolle. Jedoch sollen die einzelnen Darstellungsmöglichkeiten nicht alle gleichzeitig erlernt werden und der Lehrperson bewusst sein, dass sich dies als schwieriger erweist, wie es scheinen mag (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 162-166).

Anwendung auch in nicht rechtwinkligen Dreiecken

Der Lehrsatz von Pythagoras ist nur in rechtwinkligen Dreiecken gültig. Es kommt jedoch immer wieder vor, dass die Schülerinnen und Schüler, die Formel auch in allgemeine Dreiecke anwenden. (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 163).

Nicht erkennen eines rechtwinkligen Dreiecks

Wird der rechte Winkel im Dreieck nicht erkannt und somit das Dreieck nicht als rechtwinkliges interpretiert, so können die Lernenden den Lehrsatz auch nicht anwenden (vgl. Drollinger-Vetter, 2011, S. 163). Damit dieser Fehler nicht auftritt, ist es wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler ein gewisses Vorwissen zum Thema Winkel von den Vorstufen mit sich bringen (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 44). Infolgedessen lassen sich jedoch noch vier weitere Fehlvorstellungen beziehungsweise Knackpunkte unterscheiden:

- **Winkelvergleich erfolgt über die Schenkellängen oder Kreisbogenlängen**

Schülerinnen und Schüler machen beim Vergleichen von Winkel immer wieder den Fehler, dass sie die Schenkellänge oder die Kreisbogenlänge heranziehen und gegenüberstellen (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 37).

- **Winkel als „rechte Winkel“ interpretiert**

Da in der Volksschule häufig nur der rechte Winkel als einzige Winkelart erlernt wird und dieser bei den Kindern meist sehr eingeprägt ist, interpretieren die Lernenden fälschlicher Weise beliebige Winkel primär als rechte (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 37).

- **Winkelaspekt Rotation beziehungsweise Drehung nicht wahrgenommen**

Damit die Kinder und Jugendlichen ein breites Wissen besseres Verständnis zum Thema Winkeln aufbauen können, sollten sie unter anderem auch mehrere Messmethoden zum Winkel messen kennenlernen. Ansonsten sind sich die Lernenden über den Winkelaspekt der Rotation beziehungsweise Drehung nicht bewusst (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 34-37).

Bei der „Drehwinkelmethode“ handelt es sich um einen dynamischen Vorgang. Dabei wird die Nulllinie des Geodreiecks an den Scheitelpunkt angelegt und anschließend bis zu den gewünschten Grad weitergedreht (siehe Abbildung 4). Vorteile dieser Methode sind, dass die Lernenden den Aspekt der Rotation beziehungsweise Drehung beim eigenen Handeln ersichtlich wird und dem Verwechseln der entgegengesetzten Skalen entgegengewirkt werden kann. Jedoch entpuppen sich dabei oft motorische Schwierigkeiten beim Fixieren der Nulllinie, wodurch wiederum Mess- und Zeichenfehlern die Folge davon sind (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2012, S. 68).

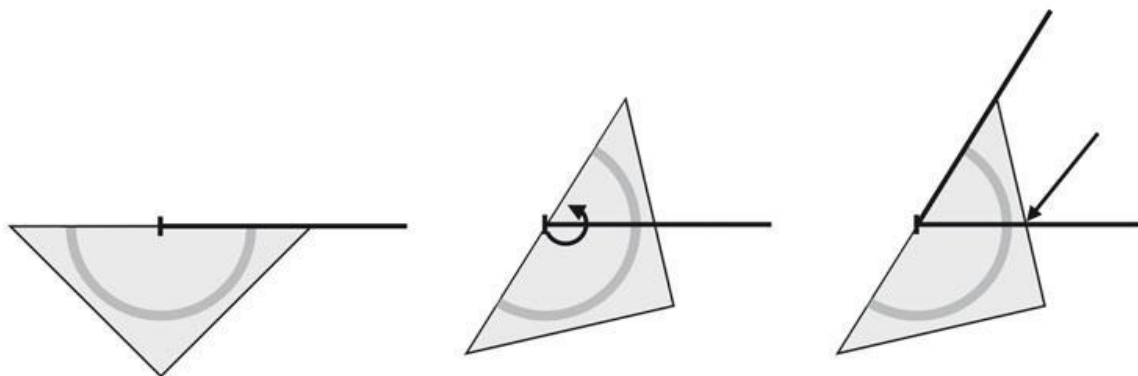


Abbildung 4: "Drehwinkelmethode" (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 34).

Die statische Methode zum Winkel Messen erfolgt durch Anlegen der Nulllinie des Geodreieckes an den Scheitelpunkt und anschließendem Abmessen der gewünschten Grad. Durch einen kleinen „Hilfspunkt“ beziehungsweise „Hilfsstrich“ kann dann der zweite Schenkel gezogen werden (siehe Abbildung 5). Vorteilhaft ist, dass dabei der Schenkel, an

dem das Geodreieck angelegt wird, nicht verlängert werden muss und beim Zeichnen des zweiten Schenkels die Nulllinie nicht am Scheitelpunkt liegen muss. Jedoch erweisen sich die beiden nötigen Arbeitsschritte sowie die Gefahr der Verwechslung der beiden gegenläufigen Skalen als negativ (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2012, S. 68f).

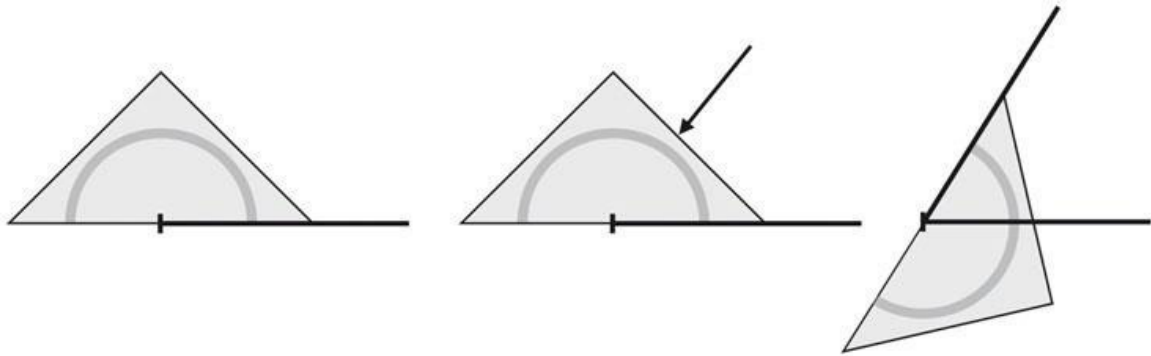


Abbildung 5: "Anlegen und Abmessen"-Methode (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 34).

- **Winkel als Figur interpretiert**

Bei der letzten Fehlvorstellung werden Winkel als Figuren, die sich aus zwei aneinanderstoßenden Strecken beziehungsweise Kanten zusammensetzen, wahrgenommen. Anhand von entsprechenden Alltagsbeispielen, wie in Abbildung 6 zu sehen sind, kann dieser Problematik entgegengewirkt werden. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler alle erkennbaren Winkel aufzählen und notieren, ob und wie sich diese in bestimmten Situationen verändern können. Weiters spielt dabei das Erlernen der „Drehwinkelmethode“ eine entscheidende Rolle, denn hier steht die Drehung und das Winkelfeld und nicht der statische Aspekt im Vordergrund (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 34-37).

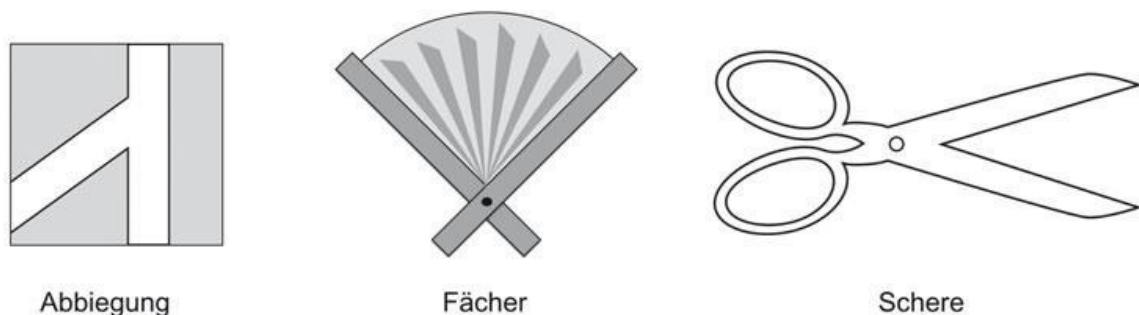


Abbildung 6: Beispiele für anwendungsorientierte Winkelsituationen (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 36).

8. Passende Beweise für die Schule

Wildhirt (2007, S.44) erläutert in seiner Dissertation, dass durch das Heranziehen eines Beweises im Unterricht viele Erschließungsprozesse in die Wege geleitet werden. Dadurch kommt es weiters zur Förderung von aktualgenetischen und historisch-genetischen Kompetenzen. Daraus lässt sich schließen, dass es durchaus sinnvoll ist auch einen Beweis zum Thema Lehrsatz von Pythagoras durchzuführen. Mit Hilfe des Buches von Gerwig Mario (2021), in welchen 365 Beweise zum Satz angeführt sind, sollen passende Beweise zum Lehrsatz des Pythagoras für die Schule gefunden werden.

Illustrationsbeweise

Bei sogenannten Zerlegungsbeweisen werden die beiden Kathetenquadrate sowie das Hypotenusenquadrat in entsprechende Teilflächen unterteilt, sodass anhand dieser sowohl die beiden Quadrate über den Katheten als auch das Quadrat über der Hypotenuse ausgefüllt werden können (vgl. Strick, 2019, S. 341).

In der Schule bieten sich Illustrationsbeweise mit Schere und Papier, aufgrund des schlichten und bildlichen Zugangs, gut an. Dabei werden Papierquadrate gefaltet, zerschnitten und umgeordnet und somit der Lehrsatz veranschaulicht. Vorteile dieser haptischen Herangehensweise ist zum einen die Verständnisförderung für die Formel und zum anderen das Training des räumlichen Vorstellungsvermögens. Jedoch muss im Anschluss noch ein formal-deduktiver Beweis erfolgen. Faltbeweise bieten sich darüber hinaus zum Beispiel auch bei der Einführung von Flächenformeln von Dreieck, Parallelogramm, Trapez, Raute und Drach bestens an (vgl. Gerig, 2021, S.110).

Beweis 1:

Ein Beispiel für einen Illustrationsbeweis kann mit Hilfe der Abbildung 7 erarbeitet werden, wobei die Seiten des Dreiecks ABC im Verhältnis 3:4:5 stehen. Das Hypotenusenquadrat besteht dabei aus 25 kleinen Quadraten, das kleine Kathetenquadrat aus 9 und das große Kathetenquadrat aus 16 kleinen Quadraten. Wird die Anzahl der kleinen Quadrate der beiden Kathetenquadrate addiert, so wird ersichtlich, dass die Anzahl an kleinen Quadraten gleich der Anzahl der kleinen Quadrate des Hypotenusenquadrats ist. Woraus sich die Formel $c^2 = a^2 + b^2$ also der Lehrsatz von Pythagoras ableiten lässt (vgl. Gerwig, 2021, S.113f).

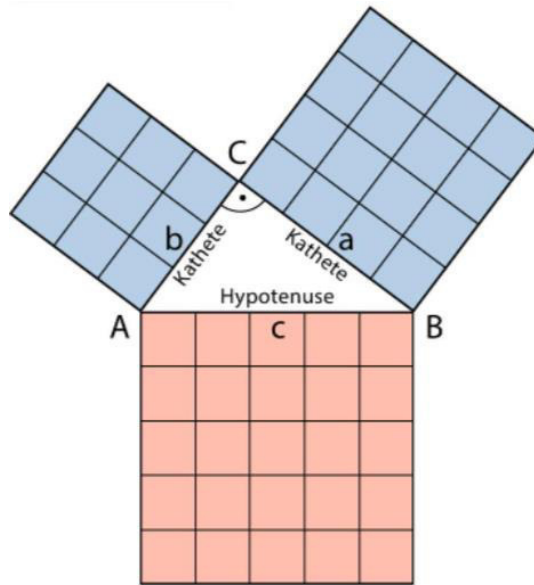


Abbildung 7: Illustrationsbeweis: Lehrsatz von Pythagoras (vgl. Beer, 2019, S. 177).

Beweis 2:

Henry Perigal war ein französischer Hobby-Mathematiker, der einen Zerlegungsbeweis mit fünf Puzzleteilen, entdeckte. Hierbei bleibt das kleine Kathetenquadrat unverändert und ist eines der fünf Puzzlestücke. Das Quadrat über der längeren Kathete wird anhand einer waagrechten und senkrechten Linie, in vier Teile zerlegt, wobei es dafür unendlich viele Möglichkeiten gibt. Wichtig ist jedoch, dass diese beiden Linien durch die Eckpunkte der beiden Kathetenquadrate verlaufen. Dabei müssen die jeweiligen Teile nur verschoben und nicht gedreht oder umgekehrt werden. In Abbildung 8a ist das Dreieck symmetrisch gewählt, so dass alle vier Vierecke des großen Kathetenquadrats zueinander kongruent sind. Abbildung 8b bis e stellen Extrembeispiele dar. Bei der letzten Darstellung Abbildung 8f handelt es sich um einen Sonderfall, denn das rechtwinkelige Dreieck ist gleichschenkelig und die beiden Kathetenquadrate sind demnach gleichgroß. Die Zerlegung kann dabei nur auf eine Variante erfolgen, und zwar durch Einzeichnen der beiden Diagonalen in eines der beiden kleinen Quadraten. (vgl. Strick, 2019, S. 341f).

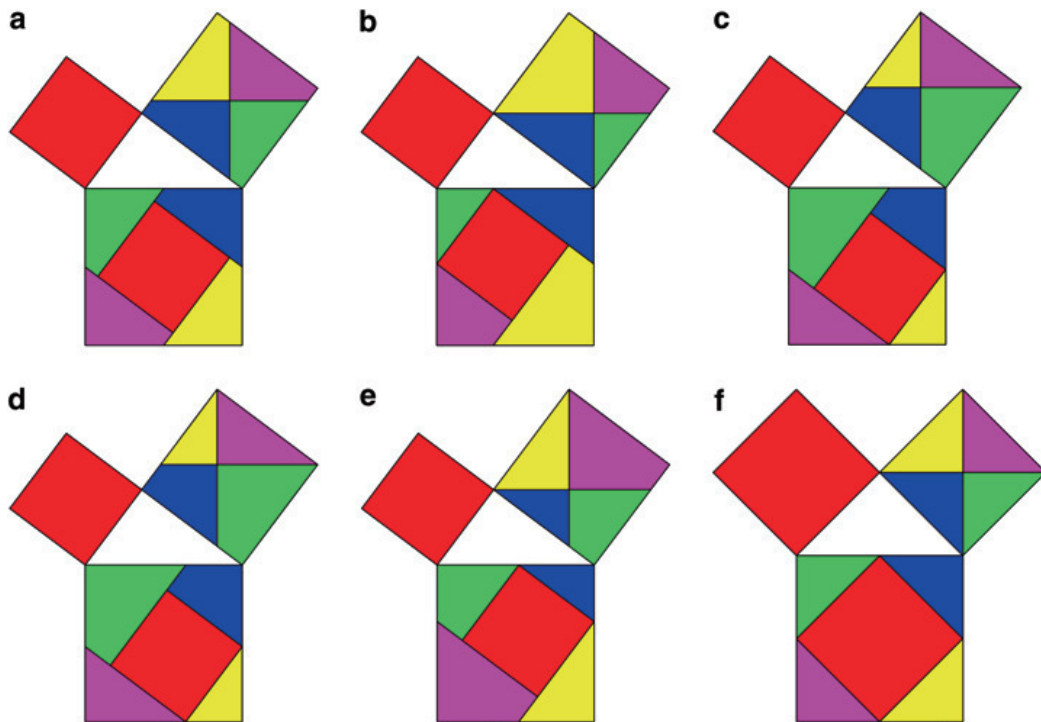


Abbildung 8: Zerlegung nach Perigal (vgl. Strick, 2019, S.341).

Beweis 3:

Adolph Göpel war ein deutscher Mathematiker und kreierte einen Zerlegungsbeweis mit Hilfe von fünf Puzzlestücken auch ohne, dass die einzelnen Teile umgekehrt werden müssen. Dabei wird das kleine Kathetenquadrat durch eine Linie, die normal auf die Hypotenuse steht und durch den Eckpunkt, indem die Hypotenuse und die kürzere Kathete zusammentreffen, geht, in zwei Teile unterteilt. Das andere Kathetenquadrat besteht aus drei Puzzleteilen, die durch eine waagerechte und senkrechte Linie entstehen. Durch Verhältnisvergleiche kann dann die Formel hergeleitet werden. In Abbildung 9 ganz links stehen die Seiten in einem Verhältnis $a:b = 4:3$, in der Mitte $a = 2 \cdot b$ und rechts $a = b$ (vgl. Strick, 2019, S. 342).

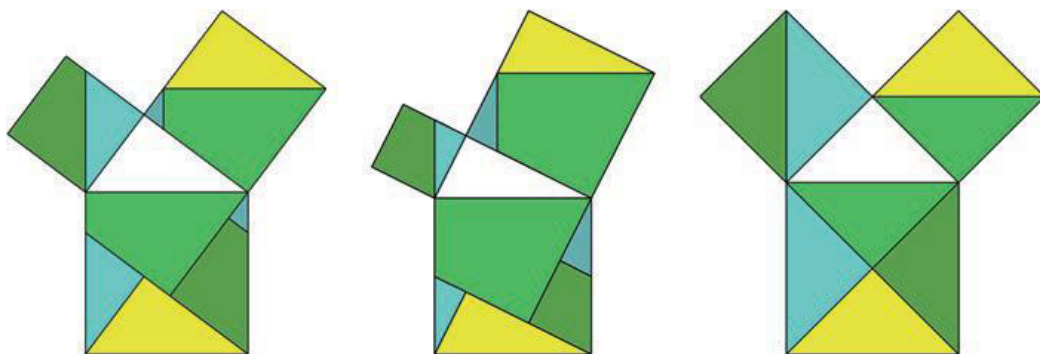


Abbildung 9: Zerlegung nach Göpel (vgl. Strick, 2019, S.342).

9. Einige alltagsbezogene Beispiele/Anwendungen des Satzes

Zu guter Letzt soll der theoretische Teil noch mit alltagsbezogenen Anwendungsbeispielen, wie zum Beispiel der Berechnung einer Bildschirmdiagonale, abgerundet werden (vgl. Humenberger, 2020, S.187).

Doch warum ist es überhaupt wichtig alltagsbezogene Beispiele in der Schule anzuwenden?

Rakoczy, K. & Pauli, C. (2006, S.213f) beschäftigten sich unter anderem mit diesem Thema in ihrer Studie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“. Durch das Heranziehen von bereits bekannten Abläufen, Phänomenen und Exempels werden die mathematischen Lerninhalte für die Lernenden klarer und greifbarer. Weiters öffnet sich durch einen persönlichen Anwendungsbezug des Themas im Leben der Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit die Mathematik als Werkzeug für den Alltag anzusehen und die Abstraktion in den Hintergrund zu rücken. Darüber hinaus kann durch einen geschichtlichen Bezug an den Alltag der Kinder und Jugendlichen angeknüpft werden. Hierbei muss jedoch eine starke Verknüpfung hergestellt werden beispielsweise durch eine exaktere Auseinandersetzung mit dem Leben von Pythagoras oder durch das Anknüpfen an Urlaubsreisen der Lernenden. Hierbei ist es jedoch nicht ausreichend nebenbei zu erwähnen, dass Pythagoras ein Grieche gewesen sei.

Weglänge, Luftlinie und Höhenunterschiede berechnen:

Mit Hilfe des Lehrsatzes von Pythagoras können unter anderem Weglängen, Luftlinien und Höhenunterschiede berechnet werden.

Beispiel 1: „Jürgen möchte mit einem Boot den Fluss überqueren, um ins gegenüberliegende Strandbad zu gelangen. Er fährt los, kommt jedoch 304 m vom Strandbad entfernt an, da er nicht an die Strömung gedacht hatte. Welche Strecke hat er tatsächlich zurückgelegt?“ (Müller & Varelja, 2019a, S. 92)

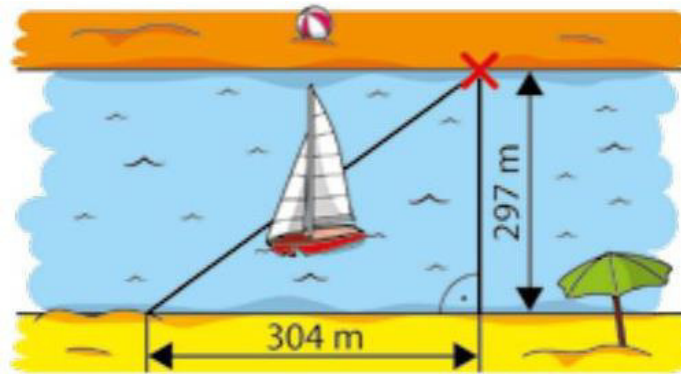


Abbildung 10: Beispiel 1: Weglänge berechnen (vgl. Müller & Varelija, 2019a, S. 92).

Beispiel 2: „Die Genialis-Seilbahn ist 2 060 m lang. Sie startet in der Höhe von 850 m und ihr Ausstieg ist bei 1 265 m über dem Meeresspiegel. Der Luftwart fragt sich: „Welche Strecke legt die Seilbahn eigentlich als Luftlinie zurück?“ (Müller & Varelija, 2019a, S. 93).

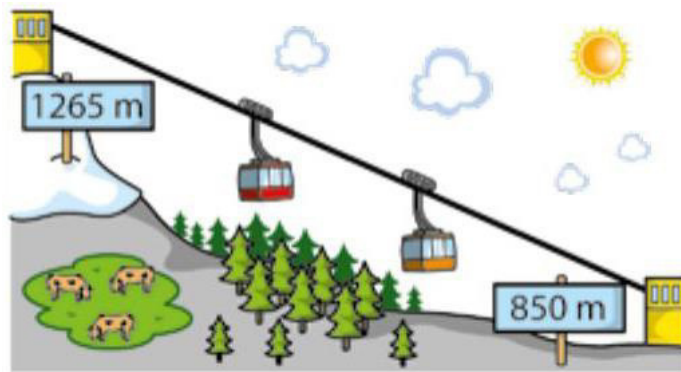


Abbildung 11: Beispiel 2: Luftlinie berechnen (vgl. Müller & Varelija, 2019a, S.93).

Beispiel 3: „Auf die Rutsche führt eine Leiter hinauf. Tamara möchte wissen, von welcher Höhe man hinunterrutscht.“ (Müller & Varelija, 2019a, S. 92)

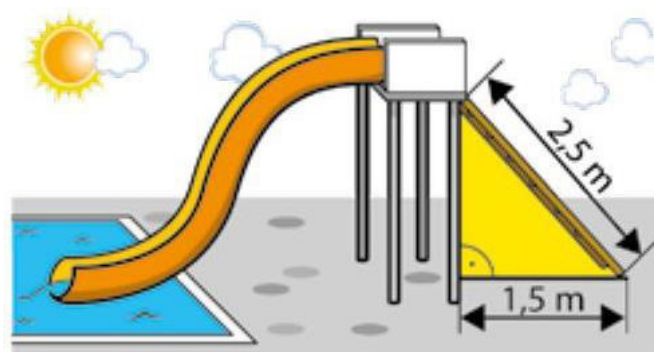


Abbildung 12: Beispiel 3: Höhenunterschied berechnen (vgl. Müller & Varelija, 2019a, S. 92).

Berechnung der Leiterlänge:

Weiters können mit dem pythagoräischen Lehrsatz auch Leiterlängen berechnet werden.

Beispiel 4: „Eine Leiter wird an eine Hauswand gelehnt. Mit dem Fußende ist sie 3 Meter von der Wand entfernt. Sie reicht 4 Meter in die Höhe. a) Wie lang ist die Leiter? [...]“ (Beer, 2019, S. 182).

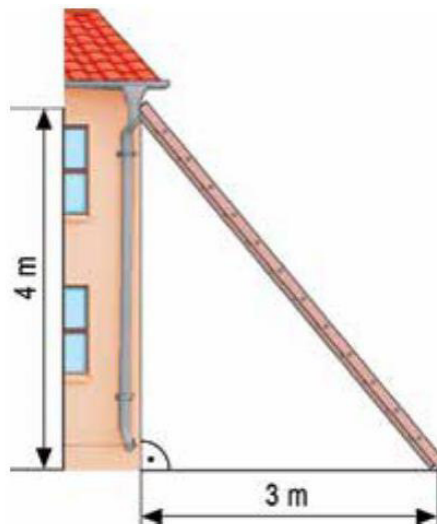


Abbildung 13: Beispiel 4: Leiterlänge berechnen (vgl. Beer, 2019, S. 182).

Berechnung der Bildschirmdiagonale:

Ein klassisches, alltagsbezogenes Beispiel aus der heutigen Zeit, ist die Berechnung einer Bildschirmdiagonale.

Beispiel 5: „Die Größe von Bildschirmen z.B. eines Smartphones wird in Zoll angegeben. Gib die Diagonale in Zoll (1 Zoll = 2,54 cm) an! a) Smartphone: 150 mm x 69 mm [...]“ (Humenberger, 2020, S. 187).

Berechnungen einer Seitenkante im Körper:

Außerdem gibt es auch noch zahlreiche Aufgaben, bei welchen der Lehrsatz von Pythagoras in Körpern angewendet werden kann.

Beispiel 6: „Die Cheopspyramide ist die größte Pyramide von Gizeh. Die Kante ihrer quadratischen Grundfläche waren ursprünglich 230m lang und sie war fast 147m hoch. Berechne 1) die Länge der Seitenkante [...]“ (Humenberger, 2020, S. 210).

Berechnung über die Möglichkeit von Warentransport:

Abschließend kann mit Hilfe des Satzes ermittelt werden, ob diverse Gegenstände beispielsweise mit einem Lift transportabel sind, beziehungsweise durch eine Türe passen.

Beispiel 7: „Herr Richter möchte eine Vorhangstange mit dem Lift in seine Wohnung im 5. Stock transportieren. Der Lift hat die Abmessungen 200 cm x 110 cm x 220 cm. Passt die 3 m lange Vorhangstange in die Liftkabine?“ (Müller & Varelija, 2019b, S. 38).

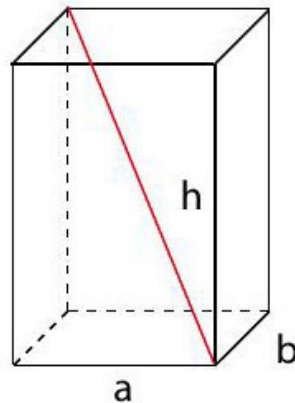


Abbildung 14: Beispiel 7: Warentransport mit Lift berechnen (vgl. Müller & Varelija, 2019b, S. 38).

II Empirischer Teil

Aktuell ist noch nicht viel über die subjektive Wahrnehmung und Erfahrung von Lehrkräften zum Lehrsatz von Pythagoras bekannt und erforscht worden. Daher soll im zweiten Teil der Arbeit mit Hilfe von Interviews eine qualitative Auswertung erfolgen. Die Ergebnisse aus den Befragungen soll dann mit den Ergebnissen aus der bekannten Literatur verglichen werden.

10. Methodik

In diesem Kapitel werden zur Verdeutlichung des methodischen Prozedere dieser Arbeit die untersuchten Forschungsfragen und die dafür verwendete Methoden angeführt.

10.1. Forschungsfragen und Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist es den nachstehenden zentralen Fragen nachzugehen und diese zu beantworten:

- Welche Fehler treten beim Erlernen des Satzes von Pythagoras häufig auf und welche Fehlvorstellungen liegen dahinter?
- Welche konkreten Lösungswege beziehungsweise Strategien gibt es, um häufige Fehler beziehungsweise Fehlvorstellungen zu vermeiden beziehungsweise zu vermindern?
- Wie bewerten aktuell tätige Lehrkräfte den Satz von Pythagoras im Vergleich zu der gegebenen Literatur?

Daraus spalten sich einige Unterfragen, die wie folgt lauten und mit dieser Arbeit ebenfalls beantwortet werden sollen, ab:

- Welche Knackpunkte beziehungsweise Grundvorstellungen sind beim Erlernen des Lehrsatzes von Pythagoras entscheidend?
- Welche Grundkompetenzen sind für die Erarbeitung des Satzes von Pythagoras nötig?
- Welche Repräsentationsformen für den Lehrsatz des Pythagoras für die Schule gibt es?

10.2. Methode

Durch eine theoretische Aufarbeitung mit Hilfe von Literatur, sollen bereits allgemein bekannte Informationen, wie zum Beispiel der geschichtliche Hintergrund des Lehrsatzes von Pythagoras oder der Lehrplanbezug, aufgelistet und zusammengefasst werden (vgl. Kipman, Leopold-Wildburger & Reiter, 2018, S. 40f). Um die weiteren Forschungsfragen beantworten zu können, werden für die weitere methodische Vorgehensweise qualitative Interviews herangezogen. Ausschlaggebend dafür ist, dass anhand von Interviews konkrete Aussagen erhoben sowie verschiedene Erfahrungen von Experten aus der Praxis zum Thema „Lehrsatz von Pythagoras“ ermittelt werden können. Die Befragten bekommen offene Fragen in Form eines Leitfadeninterviews gestellt. Die Unterfragen spalten sich dabei in vier verschiedene Teilbereiche auf und ermöglichen eine völlig freie Beantwortung. Wie bei solch einer Methode üblich dienen die Fragen nur zur Orientierung und Gewährleistung von zentralen Aspekten, wodurch eine Vergleichbarkeit der Interviews ermöglicht wird. Dabei kann es auch zu detaillierteren Fragen, welche über den Leitfaden hinausgehen und situationsabhängig sind, kommen (vgl. Mayer, 2013, S.37). Weiters gibt es für die Expertinnen und Experten auf die offenen Fragen keine standardisierten Antworten und sie haben genug Flexibilität ihre eigenen Standpunkte und Sichtweisen zu erläutern (vgl. Jandura, Quandt & Vogelgesang, 2011, S. 224f).

Die Interviewten sollen eine Gruppe darstellen, die beruflich als Lehrkräfte in einer Mittelschule oder einem Gymnasium tätig sind und die bereits genug Erfahrungen im Hinblick auf das Unterrichten des Lehrsatzes von Pythagoras sammeln konnten. Die Themenkomplexe im Interview sollen themenleitende Fragen, Fragen zu den Fehlvorstellungen und häufigen Fehlern, Fragen zu Knackpunkten und Strategien sowie Fragen zum eigenen Empfinden sein (vgl. Mayer, 2013, S.39).

Durch die Auswertung der Experteninterviews sollen typische Handlungs- und Deutungsmuster herausgefiltert werden. Um dieses Ziel zu erreichen, muss zuvor mit Hilfe von Audiomaterialien der durchgeführten Interviews eine Transkription verfasst werden (vgl. Jandura, Quandt & Vogelgesang, 2011, S. 231f). Dabei wird für die Transkription die Regel von Dittmar herangezogen. Wichtig zu berücksichtigen sind hier die drei Teilregeln „inhaltlich-semantische“ und „erweiterte-inhaltlich-semantische“ Transkription sowie die „Hinweise zur einheitlichen Schreibweise“ (vgl. Dresing & Pehl, 2018, S.20-25).

Für die weitere Auswertung gibt es diverse Strategien. Eine Herangehensweise nach Lamnek wäre zum Beispiel die „Vier-Schritt-Methode“. Die einzelnen Arbeitsschritte teilen sich dabei in die Erstellung der Transkription, die Durchführung einer Einzelanalyse jedes Interviews, die abstrahierende Analyse sowie die abschließende Kontrollphase zur Fehlerfindung auf (vgl. Jandura, Quandt & Vogelgesang, 2011, S. 231f). Die Auswertung der Interviews, die in der vorliegenden Arbeit herangezogen wurde, basiert auf der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring. Analog zu Lamnek wird, wenn eine zusammenfassende Inhaltsanalyse verfasst werden soll, im ersten Schritt eine Transkription des Interviews erstellt. Danach kommt es zu einer Reduzierung der Transkription auf seine Kernaussagen. Diese Zusammenfassung wird anschließend paraphrasiert und diese Paraphrasen abstrahiert. Abschließend wird dann die erste und im Anschluss daran die zweite Reduktion durchgeführt. Bei der ersten wird die Streichung von jenen Paraphrasen mit denselben beziehungsweise unwichtigen Inhalten veranlasst. Hingegen kommt es bei der zweiten Reduktion zur Bündelung, Konstruktion und Integration der Paraphrasen. Im Anschluss dazu werden diverse Kategorien aufgestellt, welche dieselben Ziele der Analyse darlegen. Im letzten Schritt erfolgt eine Rücküberprüfung dieses Kategoriensystems (vgl. Mayring, 2010, S.67ff).

11. Forschungsdesign

Das Forschungsdesign setzt sich aus den folgenden Punkten zusammen: die Fragen des Interviews, die Durchführung der Interviews, die Auswertung der Interviews, die Schlussfolgerungen und Ergebnisse sowie die Diskussion.

11.1. Fragen des Interviews

Beim Leitfadeninterview dienen die Fragen nur zur Orientierung und Gewährleistung von konkreten Standpunkten und lassen sich in vier Unterthemen unterteilen.

Hinführung zum Thema:

- Name, Alter, Geschlecht, Schule?
- Wie lange sind Sie als Lehrperson tätig?
- Wie oft hatten Sie in etwa schon die Möglichkeit den Lehrsatz des Pythagoras zu unterrichten?

- Was trägt Ihrer Erfahrung nach zu einem gelingenden Erlernen des pythagoräischen Lehrsatzes bei?
- Gehen Sie beim Unterrichten des Lehrsatzes immer auf dieselbe Art und Weise vor, wenn ja warum beziehungsweise warum nicht?

Fehlvorstellungen und häufige Fehler:

- Welche Fehler treten Ihrer Erfahrung nach beim Erlernen des Satzes am häufigsten auf?
- Welche Fehlvorstellungen liegen Ihrer Erfahrung nach hinter diesen Fehlern?
- Ist es in Ihren Augen sinnvoll auch einen Beweis zur Veranschaulichung des Satzes im Unterricht durchzunehmen, wenn ja wie und zu welchem Zeitpunkt?

Knackpunkte und Strategien:

- Welche Grundvorstellungen sind Ihrer Meinung am ausschlaggebendsten beim Erlernen des Satzes von Pythagoras?
- Auf welche Knackpunkte sollte Ihrer Meinung nach besonders viel Wert gelegt werden?
- Haben Sie eine konkrete Strategie zur Verminderung solcher Fehlvorstellungen und häufigen Fehlern, wenn ja welche?
- Möchten Sie abschließend noch etwas zu diesem Thema loswerden?

11.2. Durchführung der Interviews

Die Interviews wurden mit den jeweiligen Befragten einzeln durchgeführt. Dabei fanden drei vor Ort und zwei aus organisatorischen Gründen über Videochat statt. Bevor die eigentliche Befragung los ging, stellte sich die Interviewerin vor, gab den Expertinnen und Experten die entsprechenden Informationen über die vorliegende Arbeit, versicherte einen geschützten und vertraulichen Umgang mit den erhobenen Daten und klärte Fragen seitens der interviewten Personen, falls welche vorhanden waren. Die Aufnahme der Audiodatei wurde zeitgleich mit der ersten Interviewfrage gestartet. Zuallererst wurden jene Fragen aus der Kategorie „Hinführung zum Thema“ gestellt, um allgemeine Informationen der Befragten zu ermitteln. Im Anschluss kam es dann zur Diskussion der beiden anderen angeführten Kategorien. Dabei legte die Interviewerin besonders viel Wert darauf, dass die Expertinnen und Experten über jene Themen und Punkte, welche sie selbst als wichtig ansehen, erzählten. Kam es dabei zu Unklarheiten oder wurde auf bestimmte, relevante

Dinge noch nicht eingegangen, stellte die leitende Person entsprechende, Fragen dazu. Die Dauer der sechs Interviews lag zwischen sieben und 13 Minuten.

11.3. Auswertung der Interviews

In den nachstehenden Tabellen ist die Auswertung der Interviews in entsprechende Kategorien zu finden, wobei die einzelnen Transkriptionen der Interviews im Anhang angeführt sind.

Hinführung zum Thema	
Anzahl der Befragten:	5 Personen
Alter:	40 bis 49 Jahre: 2 Personen 50 bis 60 Jahre: 3 Personen
Geschlechterverteilung:	weiblich: 4 Personen männlich: eine Person
Schule:	Mittelschule: 3 Personen AHS: 2 Personen
Dauer der LehrerInnentätigkeit:	
15 bis 20 Jahre: eine Person 21 bis 25 Jahre: eine Person 26 bis 30 Jahre: eine Person 31 bis 35 Jahre: 0 Personen 36 bis 40 Jahre: zwei Personen	
Wie oft Lehrsatz unterrichtet	
5- bis 9-mal: 2 Personen 10- bis 14-mal: eine Person 15- bis 19-mal: 0 Personen 20- bis 25-mal: zwei Personen	

Punkte für ein gelingendes Lernen des pythagoräischen Lehrsatzes	
• Geschichtlichen Hintergrund mit einbeziehen (eine Person) • Beweise mit einbeziehen/Flächengleichheit erkennen/Vorstellen können (vier Personen) • Einfache Zahlen zu Beginn (eine Person) • Verschiedene Buchstaben verwenden (eine Person) • Pythagoras/rechtwinkelige Dreiecke auch in anderen Figuren erkennen (eine Person) • Nötige Grundlagen beherrschen (eine Person) • Anschauliches Arbeiten (zwei Personen)	
Vorgehensweise beim Unterrichten des Lehrsatzes	
Auf dieselbe Art und Weise: 4 Personen	Auf unterschiedliche Art und Weise: eine Person
Auf dieselbe Art und Weise, außer es funktioniert nicht: eine Person	

Tabelle 6: Auswertung – Hinführung zum Thema (eigene Darstellung).

Fehler und Fehlvorstellungen
Häufige Fehler
• Vertauschen der Hypotenuse und Katheten (vier Personen) • Falsches Wurzelziehen/Formel falsch umformen (zwei Personen) • Formel falsch anschreiben (eine Person) • Wird die Seite oder Quadratfläche über den Seiten berechnet (eine Person) • Formel wird in nicht rechtwinkligen Dreiecken auch angewendet (eine Person)

Fehlvorstellungen hinter den Fehlern	
• Nicht bewusst, was die Fläche über der Kathete ist und dass die Kathete eine Länge ist/was der Unterschied zwischen einer Fläche und Länge ist (eine Person) • Zu späte Einführung der Begriffe Hypotenuse und Kathete (eine Person) • Nicht beherrschen des nötigen Vorwissens (zwei Personen) • Formale Methoden werden nicht beherrscht (eine Person) • Weglassen eines Beweises (eine Person) • Keine Ahnung (eine Person)	
Beweise zur Veranschaulichung	
Ja: 5 Personen	Nein: 0 Personen
Zum Beginn: 5 Personen	

Tabelle 7: Auswertung – Fehlvorstellung und häufige Fehler (eigene Darstellung).

Knackpunkte und Strategien
Ausschlaggebende Grundvorstellungen
• Bezeichnung/Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks (zwei Person) • Erkennen des rechtwinkligen Dreiecks (eine Person) • Vorstellungsvermögen in der Ebene und im Raum (eine Person) • Anschauliche und Verstehen (eine Person) • Wurde zuvor bereits genannt (eine Person)
Entscheidende Knackpunkte
• Veranschaulichung durch Skizzen (zwei Personen) • Logisches Denken/Verstehen des Satzes (eine Person)

• Nicht nur Lehrsatz auswendig lernen, Begriffe (Hypotenusenquadrat und Kathetenquadrat) verwenden. (eine Person) • Andere Buchstaben verwenden und den rechten Winkel nicht immer bei Gamma einsetzen (eine Person) • Formel anschreiben und umformen (eine Person) • Gibt es keine (eine Person)
Strategien zur Verminderung von Fehlvorstellungen und Fehlern
• Ordentliches Anschreiben (zwei Personen) • Systematische, gleiche Vorgehensweise (zwei Personen) • Veranschaulichen (eine Person) • Andere Buchstaben verwenden und den rechten Winkel nicht immer bei Gamma einsetzen (eine Person) • Viel Üben (eine Person) • Nicht ständiges Wechseln von leichten zu schweren Beispielen (eine Person)
Keine Strategien: eine Person
Abschließende Worte
• Zeitdruck macht es schwer aufwendigere Sachen durchzuführen (eine Person) • Cooles Thema (eine Person) • Leicht zu unterrichten (eine Person) • Für die Schülerinnen und Schüler leicht, wenn sie es einmal verstanden haben (eine Person) • Bevor der Pythagoras erlernt wird, soll Terme, Potenzen und die Handhabung mit dem Taschenrechner bereits behandelt worden sein (eine Person) • Eine gewisse Ordnung ist in der Mathematik notwendig (eine Person) • Wichtiges Thema, auch im Alltag (eine Person)

Tabelle 8: Auswertung – Knackpunkte und Strategien (eigene Darstellung).

11.4. Schlussfolgerungen und Ergebnisse

Im nachstehenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Interviews dargelegt, wobei sich diese aus den erhobenen im Unterkapitel zuvor ausgewerteten Daten beziehen.

Hinführung zum Thema:

Die Interviews wurden mit fünf Expertinnen und Experten, wie aus der bisherigen Arbeit bereits entnommen werden kann, durchgeführt. Demnach lag die Geschlechterverteilung bei vier befragten Lehrerinnen zu einem befragten Lehrer. Dabei waren zwei im Alter zwischen 40 und 49 Jahren (zwei weibliche) und drei im Alter zwischen 50 und 59 Jahren (zwei weibliche, eine männliche). Im Hinblick auf den Schultyp, unterrichteten zum Zeitpunkt der Befragung eine weibliche und eine männliche Lehrkraft in einem Gymnasium und die anderen drei interviewten Expertinnen in einer Mittelschule. Die Dauer der Unterrichtstätigkeit lag bei jeweils einer Lehrkraft zwischen 15 und 20 Jahren (eine weibliche), zwischen 21 und 25 Jahren (eine weibliche) und zwischen 26 und 30 Jahren (eine männliche). Bei zwei Lehrerinnen betrugen die bisher absolvierten Unterrichtsjahre zwischen 36 und 40 Jahren. Zwei der befragten Personen hatten die Möglichkeit den Lehrsatz von Pythagoras 5-mal bis 9-mal zu unterrichten (zwei weibliche), ein Experte 10-mal bis 14-mal und zwei Expertinnen 20-mal bis 25-mal.

Bei der Unterfrage, welche Aspekte zu einem gelingenden Lernen des pythagoräischen Lehrsatzes beitragen, kamen zahlreiche verschiedene Antworten seitens der Expertinnen und Experten. Dabei wurden zum einen Gesichtspunkte, welche sich auf das Theorem selbst beziehen, genannt. Zum Beispiel soll ein Bezug zum geschichtlichen Hintergrund hergestellt werden, damit die Schülerinnen und Schüler auch verstehen „[...] was hat sich der Herr Pythagoras dabei gedacht“ (Interview 2, Position 14) (eine weibliche). Weiters waren vier der befragten Lehrkräfte (drei weibliche, eine männliche) der Meinung, dass auch das Beweisen beziehungsweise das Verstehen des Lehrsatzes eine entscheidende Rolle spielt. Die Lernenden sollen „[...] den Lehrsatz von Pythagoras praktisch schon einmal verstanden haben, auch mit einem Beweis“ (Interview 5, Position 13). Entscheidend ist dabei, dass die Schülerinnen und Schüler sehen „[...] dass die Flächen gleich sind“ (Interview 4, Position 21). Darüber hinaus sollen im Unterricht laut einer Expertin „einfache Zahlen zu Beginn“ (Interview 1, Position 24) sowie „[...] verschiedene Buchstaben [...], damit sie sich nicht nur an die Buchstaben a, b, c [...] gewöhnen“ (Interview 4, Position 19), verwendet werden. Außerdem sollen die Schülerinnen und Schüler so weit in der Lage sein, dass sie ein

rechtwinkeliges Dreieck und in weiterer Folge „[...] den Pythagoras auch in anderen Figuren erkennen [...]“ (Interview 5, Position 20) (eine männliche) können. Andererseits wurden von den befragten Lehrerinnen und Lehrer auch Punkte, welche sich auf nötige bereits zuvor erlernte Themen beziehen, aufgelistet. Die Schülerinnen und Schüler sollen, bevor sie den Lehrsatz von Pythagoras überhaupt erlernen, „[...] zuerst einmal mit [...] Quadrate und Wurzeln [...] und [...] mit rechtwinkligen Dreiecken“ (Interview 5, Position 11) (eine männliche) umgehen können. Und natürlich sollen sie auch „[...] Formeln umformen können, damit sie eben, je nachdem ob die Hypotenuse oder Kathete zum Ausrechnen ist, die Formel richtig hinschreiben können.“ (Interview 5, Position 15) (eine männliche). Zu guter Letzt wurde von zwei der befragten Lehrkräfte (zwei weibliche) der Aspekt des anschaulichen Arbeitens, welcher sich auf das Unterrichten im Allgemeinen beziehen lässt, erwähnt. „Also, wenn sie es anschaulich sehen, [...] dann funktioniert es.“ (Interview 4, Position 18).

Drei von den Expertinnen und Experten (zwei weibliche, eine männliche) gaben an, dass sie den Lehrsatz von Pythagoras immer auf dieselbe Art und Weise unterrichten. Eine Lehrkraft meinte dazu „[...] ,wenn etwas funktioniert, ja sicher schaut man immer wieder gibt es etwas anderes, aber manche Einführungen sind halt dann komplizierter, wo ich mir dann denke, nein muss nicht sein“ (Interview 2, Position 32). Und eine andere äußerte dazu „[...] ich habe schon einige Zeit ein bisschen andere Einstiege probiert, einfach weil man als Junger das öfter probiert und habe dann [...] einfach eine gewisse Erfahrung gehabt [...] die sich bewährt hat [...] nach mehreren Versuchen“ (Interview 5, Position 25). Interessant bei dieser Frage war auch jene Lehrerin, die meinte „Ich probiere es eben auf eine Art und Weise und wenn es mir nicht gelingt, dann steige ich um.“ (Interview 3, Position 26). Die restlichen der befragten Personen (eine weibliche) nahmen die Gegenposition ein und führen den Lehrsatz von Pythagoras nicht immer auf dieselbe Art und Weise ein. Als Begründung wurden diesbezüglich folgende Aspekte aufgezählt: „[...] Ich bin nicht so der Typ, der sich das aufschreibt und so eine Vorbereitung schreibt. Und daher mache ich das immer, wenn ich eine dritte Klasse habe, immer wieder neu. Außerdem wechseln wir auch die Bücher, die sind dann anders aufgebaut. Also ich halte mich schon an die Bücher auch [...]. Je nach Lust und Laune mache ich das dann.“ (Interview 4, Position 25).

Fehlvorstellungen und häufige Fehler:

Auf die Frage, welche Fehler beim Erlernen des Satzes von Pythagoras am häufigsten auftreten, antworteten vier der Expertinnen und Experten (drei weibliche, eine männliche), dass die Hypotenuse mit einer der beiden Katheten vertauscht wird und infolgedessen die Formel falsch angeschrieben wird. „Vielleicht macht man das beim Dreieck zu wenig, dass man diese Bezeichnungen besser oder mehr übt. [...] Man macht immer die Ecken und Kanten und die Seiten, aber dass man vielleicht wirklich auf die Hypotenuse und Katheten noch [...] mehr eingeht, dass man so mehr Vorwissen hat.“ (Interview 3, Position 40) wurde als Grund, warum solch ein Fehler passieren kann, beziehungsweise als Verbesserungsvorschlag erläutert. Eine andere Lehrkraft war jedoch etwas planlos und meinte hingegen: „Also das [...] weiß ich nicht, warum sich da manche einfach schwerer tun, bis sie das drauf haben, dass die lange Seite die Hypotenuse ist und die zwei kurzen die Katheten sind [...]“ (Interview 2, Position 71).

Außerdem gaben zwei der befragten Personen (eine weibliche, eine männliche) an, dass die Schülerinnen und Schüler häufig das Wurzelziehen nicht intuitiv haben beziehungsweise die Wurzel falsch ziehen oder die Formel falsch umformen. Gründe dafür sind, dass „[...] formale [...] Methoden nicht beherrscht werden, [...] Umformungen und solche Geschichten [...]“ (Interview 5, Position 47) und die Lernenden „die Vorstellung vom Rechnen mit Termen und Potenzen noch nicht so integriert haben. Also was Potenzen sind und [...], dass man [...] Wurzel nur aus Produkten oder [...] Quotienten ziehen kann. Und warum das so ist, also die Rechenregeln dahinter, das ist das Problem“ (Interview 4, Position 42).

Da die Lernenden „[...] oft nicht verstehen, rechnen sie sich die Seite aus oder die Quadratfläche über dieser Seite“ (Interview 1, Position 38), kommt es dazu, dass die Formel falsch angeschrieben wird. Die Fehlvorstellung dahinter könnte sein, dass den Kindern beziehungsweise Jugendlichen nicht klar ist, „was wirklich auch die Fläche ist über [...] der Kathete zum Beispiel und die Kathete, dass dies eine Länge ist“ (Interview 1, Position 50) beziehungsweise sie zu wenig Bedenken, „[...] was ist eine Fläche und eine Länge [...] und wenn sie den Schritt immer wieder verwechseln oder nicht klar erkennen, passieren dann diese Fehler“ (Interview 1, Position 52).

Zu guter Letzt kommt es laut einer der befragten Personen (eine männliche) auch dazu, dass die Schülerinnen und Schüler den Lehrsatz von Pythagoras in nicht rechtwinkligen

Dreiecken anwenden. Ausschlaggebend für diesen Fehler könnte sein, „[...]“, dass man [...] den Beweis nie gemacht hat, dass das nur in einem rechtwinkligen Dreieck [...]“ (Interview 5, Position 51) gilt.

Alle fünf der Expertinnen und Experten (vier weibliche, eine männliche) sehen es als sinnvoll an, auch einen Beweis zur Veranschaulichung des Satzes im Unterricht durchzunehmen. Darüber hinaus soll dies ziemlich rasch zu Beginn der Einführung passieren. „Relativ bald. Nicht direkt zum Einstieg, aber spätestens in der zweiten, dritten Stunde.“ (Interview 5, Position 57).

Knackpunkte und Strategien:

Auf die Frage welche Grundvorstellungen in Bezug auf den Lehrsatz von Pythagoras ausschlaggebend sind, kamen zahlreiche verschiedene Antworten. Einige davon bezogen sich dabei auf das rechtwinklige Dreieck. Zum Beispiel gaben zwei weiblich befragte Lehrpersonen an, dass die Bezeichnungen beziehungsweise Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks entscheidend sind. Als Begründung dazu wurde folgendes genannt: „Damit sie es nicht bei allen anderen Dreiecken auch probieren, es anzuwenden.“ (Interview 4, Position 77). Außerdem müssen die Schülerinnen und Schüler laut einer Expertin das rechtwinklige Dreieck in den diversen Aufgabenstellungen überhaupt einmal erkennen. „Weil in den Textaufgaben oder bei so Anwendungsaufgaben, erkennt man es oft nicht, dass das jetzt ein rechtwinkliges Dreieck ist, wo man dann den Satz von Pythagoras anwenden könnte.“ (Interview 3, Position 67). Andererseits wurde als wichtige Grundvorstellung das Vorstellungsvermögen in der Ebene sowie im Raum genannt. Denn „da ist dann eher die Schwierigkeit, [...] bei der Pyramide [...], dass sie halt dann unterscheiden, ja welches rechtwinklige Dreieck brauche ich jetzt, dass ich meine Unbekannte ausrechnen kann. Und dazu brauche ich eben eine 3D Vorstellung.“ (Interview 2, Position 114). Eine Lehrerin nannte dazu auch noch das Veranschaulichen. „Ich finde, in der Unterstufe ist noch weniger das Beweisen mit Termen, sondern mehr das Anschauliche, dass sie es verstehen.“ (Interview 4, Position 79). Eine Person (männlich) meinte, dass sie die nötigen Grundvorstellungen bereits zu Beginn, bei den eigene Erfahrungen für ein gelingendes Lernen des Satzes, erwähnt habe.

Als entscheidenden Knackpunkt gaben zwei der Expertinnen und Experten (eine weibliche, eine männliche) an, dass eine Veranschaulichung durch Skizzen unumgänglich sei, denn „Zeichnungen helfen einfach am besten.“ (Interview 3, Position 78). Weiters spielt das

logische Denken beziehungsweise das Verstehen des Satzes nach einer weiblichen Lehrkraft eine wichtige Rolle. Damit „sie das kapieren. Warum? Und [...] was bringt mir das, wenn ich den Pythagoras anwenden kann?“ (Interview 1, Position 97). Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler nicht nur den Lehrsatz auswendig lernen, sondern auch Begriffe wie „Hypotenusenquadrat“ und „Kathetenquadrat“ sachgemäß einsetzen können, „sonst machen sie das immer so, egal wo der rechte Winkel ist“ (Interview 4, Position 90). Demnach sollten auch andere Buchstaben verwendet werden beziehungsweise der rechte Winkel nicht immer bei Gamma liegt (eine weibliche). Entscheidend ist außerdem noch, dass die Formel ordentlich angeschrieben und umgeformt wird, damit „[...] das von Anfang an richtig dasteht“ (Interview 5, Position 84) (eine männliche). Eine Person (weibliche) meinte zu der Fragestellung, ob es noch weitere entscheidenden Knackpunkte gäbe: „Also find ich nicht. Das Pythagoras Kapitel ist eigentlich eines, dass die Kinder eher Spaß macht, weil es [...] nicht so schwer ist.“ (Interview 2, Position 133).

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass es sich beim Lehrsatz von Pythagoras laut einer Lehrerin um „ein cooles Kapitel, das im Prinzip leicht zum Unterrichten ist“ (Interview 2, Position 159), beziehungsweise für die Schülerinnen und Schüler um ein leicht verständliches Thema handelt. „Sobald sie es verstanden haben, dann läuft es. Und manche, ja gibt es halt immer, die nie lernen. Egal wie man es macht.“ (Interview 3, Position 103). Wobei es eine Expertin als wichtig ansieht, dass bevor dieses Thema überhaupt unterrichtet wird, bereits Terme, Potenzen und die Handhabung mit dem Taschenrechner behandelt worden ist. „Das sollte man auf alle Fälle vorher machen, weil sonst ist das zu viel auf einmal.“ (Interview 4, Position 113) Dabei ist, wie es „[...] in Mathematik notwendig ist [...] so wie auch in allen anderen mathematischen Themen“ (Interview 5, Position 112) eine gewisse Ordnung unumgänglich (eine männliche). Beim Lehrsatz von Pythagoras handelt es sich nach einer der weiblich befragten Lehrpersonen um ein sehr wichtiges Thema, welches auch im Alltag immer wieder auftritt. „[...] Gerade im technischen Bereich, die Berufe [...], die brauchen das, dass ist unglaublich, wo man den überall braucht und der kommt immer wieder“ (Interview 3, Position 99). Jedoch macht es der Zeitdruck in der Schule laut einer Expertin oft nicht so leicht, auch aufwendige Sachen durchzuführen. „[...] Leider haben wir oft den Zeitdruck, (.) dass man dann eben sagt, [...] da geht zu viel Zeit drauf, machen wir es halt nur mit Zeichnung.“ (Interview 1, Position 116).

11.5. Diskussion

Die Ergebnisse und Schlussfolgerungen lassen noch einiges an Diskussion, welche im nachstehenden Abschnitt angeführt ist, zu. Dabei werden unter anderem auch die erhobenen Aussagen der Expertinnen und Experten mit dem vorab ausgearbeiteten theoretischen Teil genauer unter die Lupe genommen.

Auch wenn der Lehrsatz von Pythagoras in den Inhaltsbereich „I3 Geometrische Figuren und Körper“ einzuordnen ist, sind enorm viele Kompetenzen aus den Inhaltsbereichen „I1 Zahlen und Maßen“ und „I2 Variable, funktionale Abhängigkeiten“ für das Arbeiten mit diesem Themengebiet wichtig. Denn haben die Schülerinnen und Schüler beispielsweise vorab noch kein Wissen über Potenzen und Wurzeln aufgebaut, so können sie nur schwer die Umformungsschritte zur Berechnung einer Seitenlänge im rechtwinkligen Dreieck nachvollziehen. Diese Erkenntnis ist sowohl in der Literatur zu finden als auch aus den Interviews ableitbar. Vielleicht wird gerade deshalb der Lehrsatz von Pythagoras von vielen Personen als spannendes Thema angesehen.

Eine der befragten Lehrpersonen gab an, auch einen kurzen und knappen geschichtlichen Bezug zu Beginn des Themas mit in den Unterricht einzubauen. Der pythagoräische Lehrsatz öffnet somit auch die Möglichkeit für einen fächerübergreifenden Unterricht. Hierbei könnte jedoch auch mit Absprache und Zusammenarbeit der Geschichtelehrkraft das Thema noch intensiver behandelt und somit den Schülerinnen und Schüler nähergebracht werden. Denn wie aus der Literatur hervorgeht, kann durch eine genauere Beschäftigung mit dem historischen Hintergrund am Alltag der Lernenden angeknüpft werden.

Während den Interviews wurde seitens der Expertinnen und Experten immer wieder erwähnt, dass es wichtig sei eine Skizze für die entsprechende Aufgabe anzufertigen. Im Vergleich dazu hinterlegen zahlreiche Schulbücher viele Aufgaben mit kleinen Bildern in dem das rechtwinklige Dreieck ersichtlich wird (siehe Kapitel 9). Somit können sich die Schülerinnen und Schüler mehr darunter vorstellen und das rechtwinklige Dreieck schneller finden.

Außerdem geht sowohl aus der Theorie als auch aus den Interviews klar hervor, dass mit dem Lehrsatz von Pythagoras auch das Beweisen zum ersten Mal Teil des Mathematikunterrichts wird und daher dieses Thema eine so zentrale Position in der Mathematik einnimmt. Interessant dabei ist auch noch, dass, obwohl laut Lehrplan ein Beweis des Lehrsatzes erst in der achten Schulstufe abverlangt wird, alle fünf der befragten Expertinnen und Experten,

einen oder auch mehrere Beweise bereits relativ früh zu Beginn des Themas, also in der siebten Schulstufe, mit den Schülerinnen und Schülern durcharbeiten. In der achten Schulstufe wird demnach gar kein Beweis mehr behandelt und nur in seltenen Fällen darauf verwiesen. Grund dafür könnte sein, dass einfache Beweise, so wie sie in der Schule gemacht werden, den Kindern beziehungsweise Jugendlichen dabei helfen das Thema beziehungsweise die Entstehung der Formel besser zu verstehen. Eine zusätzliche Möglichkeit wäre auch noch, wenn die Grundlagen des pythagoräischen Lehrsatzes in der achten Schulstufe noch einmal kurz wiederholt wird, einen Illustrationsbeweis auf eine etwas andere Art und Weise durchzuführen. Dies könnte sowohl am Jahresanfang, wenn der Stoff der dritten Klasse kurz wiederholt wird, als auch vor dem Behandeln des Themas Lehrsatz von Pythagoras in Körper, passieren. Dazu bekommen die Schülerinnen und Schüler insgesamt 50 gleichgroße Quadrate. Mit diesen sollen sie selbstständig das Hypotenusenquadrat und die beiden Kathetenquadrate auflegen und dann durch Nachzählen auf den Lehrsatz von Pythagoras schließen (siehe Abbildung 7). Verpackt in einem Stationenbetrieb, wäre eine spannende Unterrichtssequenz für die Lernenden geschaffen. An dieser Stelle ist jedoch auch noch anzuführen, dass vor einigen Jahren der Lehrsatz von Pythagoras generell nur in der achten Schulstufe vorgesehen war. Mit der Umstellung, die Einführung bereits in der siebten Schulstufe einzuführen, konnten sich nicht alle der befragten Lehrkräfte so wirklich anfreunden. Ausschlaggebend dafür könnte eine gewisse Routine, welche sich die betroffenen Personen in Laufe der Unterrichtsjahre angeeignet haben, sein.

Laut Literatur gibt es zwei verschiedene Grundvorstellungen zum Lehrsatz von Pythagoras. Einerseits kann mit Hilfe des Satzes eine Aussage über die Seitenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck und andererseits eine Aussage über die Flächeninhalte der Kathetenquadrate und des Hypotenusenquadrates getroffen werden. Die befragten Lehrpersonen gaben diesbezüglich jedoch sehr abweichende Antworten zur Theorie an und zählten eher jenes Wissen auf, welches die Schülerinnen und Schüler bereits mitbringen sollten. Grund dafür könnte sein, dass die entsprechende Fragestellung nicht klar genug formuliert wurde, beziehungsweise hätte die Interviewerin den Begriff „Grundvorstellungen“ den Lehrkräften auch kurz und prägnant vorab noch erklären können. Weiters wurde solch eine Unterteilung der Grundvorstellungen nur in einer Literatur gefunden, wobei fachlich betrachtet beide Gesichtspunkte äquivalent sind, weshalb auch dies der Auslöser für eine Verwirrung seitens der Fachkräfte sein könnte. An dieser Stelle

ist jedoch noch anzuführen, dass alle von den Expertinnen und Experten, im Laufe des Interviews, auf beiden Blickrichtungen eingegangen sind. Darüber hinaus wird viel Wert draufgelegt, dass die Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang dahinter verstehen und a^2 nicht als „Zahl mal Zahl“ interpretieren, sondern auch als Fläche erkennen, so wie es laut Literatur als wichtig angesehen wird. Demnach gehen die Lehrpersonen insgeheim auch auf beide Grundvorstellungen ein.

Im Hinblick auf die häufigen Fehler und deren Fehlvorstellungen dahinter, gab es im Vergleich zur Literatur mit den Interviews einige Überschneidungen. Ein Fehler, welcher auch immer wieder auftritt, ist, dass die Schülerinnen und Schüler den Lehrsatz von Pythagoras auch in nicht rechtwinkligen Dreiecken anwenden. In der Literatur sind diesbezüglich jedoch keine Strategie zur Vermeidung von solchen Fehlern aufzufinden. Im entsprechenden Interview wurde als Auslöser dafür das nicht Durchführen eines Beweises angeführt. Als weitere Möglichkeit zur Verminderung von solchen Fehlern macht es durch aus Sinn die Schülerinnen und Schüler überprüfen zu lassen, ob der Satz von Pythagoras auch in nicht rechtwinkligen Dreiecken gültig ist. Dazu sind ganz einfache Gegenbeispiele völlig ausreichend. Generell wurden die genannten Fehler von den befragten Personen nicht auf das fehlende Vorwissen zu den Winkeln zurückgeführt. Jedoch können solche Probleme sogar bis zur Volksschule zurückzuführen sein. Der Literatur zu Folge werden Winkel auch primär als „rechte Winkel“ interpretiert, obwohl dies gar nicht der Fall ist. Solch eine Fehlvorstellung, ist jedoch von außenstehenden nicht so eindeutig zu diagnostizieren. Bei diesem Problem ist es sinnvoll bereits in der Volksschule entgegenzuwirken, indem die Schülerinnen und Schüler zumindest zwei weitere Winkelarten (beispielweise spitzer und stumpfer Winkel) kennen lernen. Tritt der Fehler auf, dass der Winkelvergleich über die Schenkellänge oder Kreisbogenlänge erfolgt, beziehungsweise damit solche Fehler vermieden werden können, ist es hilfreich den Lernenden die Schenkel und den Kreisbogen immer gleichlang zeichnen zu lassen. Beispielsweise Sieben Zentimeter lange Schenkel und einen mit Zirkel gezeichneten Winkelbogen mit Zwei Zentimeter Radius. Über den häufigsten Fehler, das Vertauschen der Hypotenuse mit einen der beiden Katheten, ist in der Literatur nichts auffindbar. Auch die Expertinnen und Experten können sich nicht einheitlich erklären, wie es zu diesem Fehler kommt. Eine Strategie dagegen, wie sie auch in einem Interview erwähnt wurde, könnte sein, dass die Bezeichnungen der Hypotenuse und Kathete bereits bei den Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks mit behandelt werden, damit sich die Lernenden bereits früher mit den Begrifflichkeiten anfreunden können.

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass einerseits die Fragen nach den Aspekten für ein gelingendes Erlernen des pythagoräischen Lehrsatzes und jene Knackpunkte, auf welche besonders viel Wert gelegt werden sollte zu einer zusammengefasst hätte werden können. Einige der befragten Personen wirkten anfangs etwas verwirrt, da die beiden Fragen sehr ähnlich sind. Andererseits konnte nach kurzer Bedenkzeit durch eine zusätzliche Frage den Expertinnen und Experten noch mehr Informationen ausfindig gemacht werden.

III Schlussteil

Abschließend soll im letzten Teil der Arbeit ein Fazit darüber gezogen werden, welche Knackpunkte beim Lehrsatz von Pythagoras entscheidend sind und eine mögliche Strategie für häufige Fehler und Fehlvorstellungen sowie eventuell noch offene Fragen angeführt werden.

12. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde zum einen der Frage nach dem Mann hinter der Formel, den Pythagoreern und der geschichtlichen Entstehung des Lehrsatzes von Pythagoras und zum anderen dem Bezug im Lehrplan allgemein sowie in Bezug auf das mathematische Thema selbst nachgegangen.

Grundsätzlich können beim pythagoräischen Lehrsatz zwei Grundvorstellungen unterschieden werden. Zum einen gibt der Lehrsatz Auskunft über die Seiten im rechtwinkligen Dreieck und zum anderen über das Hypotenusenquadrat und die beiden Kathetenquadrate. Die Schülerinnen und Schüler sollen dabei beide Blickwinkel verstehen, um ein Rundumwissen aufzubauen. Damit das Fachgebiet überhaupt erlernt werden kann, müssen die Lernenden bereits ein breites Vorwissen aufgebaut haben beziehungsweise einige nötige Kompetenzen beherrschen. Mit Hilfe des Lehrplans und der festgelegten Kompetenzen der Bildungsstandards können die Lehrkräfte konkrete Lernziele, welche einerseits bereits gekannt und andererseits erlernt werden sollen, für ihren Unterricht formulieren und festlegen.

Eine der zentralsten Aspekte beim Unterrichten des Lehrsatzes ist der Zugang über verschiedene Repräsentationsformen. Durch die diversen Herangehensweisen lernen die Schülerinnen und Schüler das Thema aus verschiedenen Blickrichtungen kennen und verstehen. Entscheidende Knackpunkte spielen den Expertinnen und Experten nach vor allem das Anschauliche Arbeiten, im Hinblick auf ein systematisches, organisiertes Anschreiben von Formeln, das Machen von Skizzen sowie das Verwenden von Begriffen wie Hypotenusenquadrat und Kathetenquadrat. Darüber hinaus können so auch Fehlvorstellungen und häufige Fehler vermieden werden. Die Lernenden sollen den Lehrsatz dabei auch logisch verstehen und nicht einfach stur auswendig lernen. Einige der Fehlvorstellungen, welche trotz all dem beim Lehrsatz von Pythagoras auftreten können, sind oft bis in die Volksschule beziehungsweise auf das nicht Beherrschen von nötigem

Vorwissen beziehungsweise Kompetenzen zurückzuführen. Der mitunter am häufigsten auftretende Fehler ist das Vertauschen der Hypotenuse mit einer der beiden Katheten. Eine einheitliche, konkrete Fehlvorstellung beziehungsweise Auslöser hinter diesem Fehler können sich die befragten Personen jedoch nicht erklären. Eventuell könnte hier eine frühere Einführung der Begriffe Hypotenuse und Katheten helfen den Fehler zu vermeiden. Außerdem wenden die Lernenden den Lehrsatz von Pythagoras auch immer wieder in nicht rechtwinkligen Dreiecken an, formen die Formel falsch um beziehungsweise vernachlässigen das Wurzelziehen oder sind sich nicht darüber im Klaren, ob sie sich die Fläche über der Dreiecksseite oder die Seite selbst ausrechnen müssen. Weitere Strategien zur Fehlervermeidung beziehungsweise -verringern sind zum einen viel Üben, wobei nicht immer ständig zwischen leichten und schweren Beispielen hin und her gesprungen werden soll, und zum anderen das Verwenden von verschiedenen Buchstaben im Dreieck beziehungsweise den rechten Winkel nicht immer mit Gamma zu bezeichnen.

Im Hinblick auf das Unterrichten selbst gehen die Lehrkräfte, sobald sie eine passende Methode gefunden haben, größten Teils auf dieselbe Art und Weise vor. Nur einzelne Fachkräfte unterrichten flexibler beziehungsweise ändern ihre Vorgehensweise ab, falls sie nicht so funktioniert wie gewünscht.

Weiters ist den Lehrkräften wichtig, dass auch ein Beweis zur Veranschaulichung und für das Verstehen des Satzes mit in den Unterricht eingebaut wird. Hierbei sind zahlreiche verschiedene, passende Beweise für die Schule in der Literatur auffindbar. Beim Standardbeweis, der so gut wie von allen Lehrkräften durchgeführt wird, handelt es sich um einen Illustrationsbeweis. Dabei wird beim Addieren der Anzahl der kleinen Quadrate der beiden Kathetenquadrate ersichtlich, dass die Anzahl an kleinen Quadraten gleich der Anzahl der kleinen Quadrate des Hypotenusenquadrats ist.

Abschließend ist zu erwähnen, dass der Lehrsatz als wichtiges Thema, welches einerseits leicht zu unterrichten ist und andererseits von den Schülerinnen und Schüler leicht verstanden wird sowie immer wieder im alltäglichen Leben auftritt, eingeordnet wird. Und so wie in allen anderen mathematischen Themengebieten ist eine gewisse Ordnung bei der Umsetzung unumgänglich.

13. Offene Fragen

Auch wenn die Forschungsfrage relativ gut beantwortet werden konnte, sind während dem Arbeitsprozess noch ein paar weitere, offene Fragen aufgetaucht. Diese könnten in einer weiteren Forschungsarbeit behandelt werden und wie folgt lauten:

- Können Lehrkräfte, welche in der Mittelschule tätig sind, präziser auf die entsprechenden Probleme reagieren, da sie leistungsschwächerer Schülerinnen und Schüler zu unterrichten haben?
- Wie unterrichten jüngere Lehrkräfte im Vergleich zu älteren den Lehrsatz von Pythagoras im Hinblick auf die Unterrichtsmethoden?
- Gibt es Unterschiede, wenn eine weibliche oder männliche Lehrperson den Lehrsatz von Pythagoras unterrichtet beziehungsweise welche Reaktionen gibt es seitens der Schülerinnen und Schüler?

14. Resümee

Zu guter Letzt ist zu erwähnen, dass der Lehrsatz von Pythagoras eine sehr wichtige Rolle im Schulwesen einnimmt, da durch ihm auch das Beweisen von Sätzen zum ersten Mal eine zentrale Rolle in der Mathematik einnimmt. Grundsätzlich erfolgt die Umsetzung des Lehrsatzes nicht immer exakt so, wie es im Lehrplan vorgesehen ist. Dazu tragen vor allem auch die eigenen Erfahrungen der Lehrkräfte bei. Bevor der Lehrsatz überhaupt eingeführt werden kann, müssen die Schülerinnen und Schüler bereits ein breites nötiges Vorwissen beziehungsweise Kompetenzen aufweisen. Entscheidend ist außerdem, dass die Lernenden den pythagoräischen Lehrsatz aus beide Blickwinkeln, einerseits in Bezug auf die Seiten und andererseits in Bezug auf die beiden Kathetenquadrate und das Hypothenusenquadrat, betrachten und verstehen können und darüber hinaus auch mehrere verschiedene Repräsentationsformen des Satzes kennen lernen. Eine wichtige Rolle spielt dabei natürlich auch das Niveau der Schülerinnen und Schüler sowie der zeitliche Rahmen. Treten trotz gewählter Unterrichtsstrategie Fehler wie zum Beispiel das Verwechseln der Hypotenuse mit einen der beiden Katheten seitens der Lernenden auf, ist es als Lehrperson entscheiden diese genauer zu betrachten und zu hinterfragen, um die Fehlvorstellung dahinter aufzulösen. Wie in allen anderen Themengebieten der Mathematik, ist es auch beim pythagoräischen Lehrsatz unumgänglich anschaulich zu arbeiten, dazu zählen unter anderem das Machen von Skizzen inklusive färbiges markieren sowie systematisches und ordentliches Anschreiben

der Formel. Weiters sollen die gewählten Aufgaben auch immer Alltagsbezogen sein, damit die Kinder beziehungsweise Jugendlichen einen besseren Bezug zum Thema herstellen können.

Zusammenfassend kann aus den erhobenen Daten gefolgt werden, dass der Lehrsatz von Pythagoras zwar einige Fehlvorstellungen und entscheidende Knackpunkte mit sich bringt, jedoch können diese mit geeigneten Strategien bestmöglich verhindert beziehungsweise entgegengewirkt werden.

Literaturverzeichnis

- Apfler, S. (2020). Mathematische Grundkompetenzen handlungsorientiert und spielerisch fördern. *Open Online Journal for Research and Education*. 19, Seiten 1-5.
- Beer, R., Chelly, A., Illias, P., Steffan, C. & Varelija, G. (2019). *Genial! Mathematik 3. Schulbuch mit E-Book PLUS + Mathe-Trainer* (2. Aufl.). Wien: Bildungsv Verlag Lemberger.
- bmbwf.gv.at. (2022). Bildungsstandards [Bericht]. Zugriff am 14. Mai 2022 unter <https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/bef/bist.html>
- bmbwf.gv.at. (2022). Bildungsstandards in der Allgemeinbildung [Bericht]. Zugriff am 14. Mai 2022 unter <https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/bef/bist/bildungsstandards.html>
- bmbwf.gv.at. (2022). Grundlagen der Bildungsstandards [Bericht]. Zugriff am 23. Mai 2022 unter <https://www.iqs.gv.at/themen/nationale-kompetenzerhebung/grundlagen-der-nationalen-kompetenzerhebung/grundlagen-der-bildungsstandards>
- bmbwf.gv.at. (2022). Sicherung von Grundkompetenzen [Bericht]. Zugriff am 12. März 2022 unter https://www.bmbwf.gv.at/Themen/oesterr_jugendstrategie/grundkompetenzen.html
- Dillinger, F. (2019). *Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Dresing, T. & Pehl, T. (2018). *Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Anleitung und Regelsystem für qualitativ Forschende* (8. Aufl.). Marburg: Eigenverlag.
- Dohrmann, C. & Kuzle, A. (2012). Begriffsbildung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I zum Thema Winkel. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.). *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 63-72). Hildesheim: Franzbecker.
- Dohrmann, C. & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.). *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 13-28). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit. Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Münster: Waxmann.
- Gerwig, M. (2021). *Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen. Mathematische, kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Herrmann, D. (2014). *Die antike Mathematik. Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Herrmann, D. (2020). *Die antike Mathematik. Geschichte der Mathematik in Alt-Griechenland und im Hellenismus* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

- Hock, N. (2021). *Förderung von diagnostischen Kompetenzen. Eine empirische Untersuchung mit Mathematik-Lehramtsstudierenden*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Hopmann, S. (1998). Der Lehrplan als Maßstab öffentlicher Bildung. *Zeitschrift für Pädagogik*, 38. 165-188.
- Hopmann, S. & Künzli, R. (1994). Topik der Lehrplanung. das Aarauer Lehrplannormal. *Bildungsforschung und Bildungspraxis = Education et recherche*, 16(2), 161–184.
- Humenberger, H. (Hrsg.). (2020). *Das ist Mathematik 4* (1.Aufl.). Horn: Ferdinand Berger & Söhne Ges.m.bH.
- iqs.gv.at. (2022). Sicherung von Grundkompetenzen [Bericht]. Zugriff am 12. März 2022 unter https://www.bmbwf.gv.at/Themen/oesterr_jugendstrategie/grundkompetenzen.html
- Jandura, O., Quandt, T. & Vogelgesang, J. (2011). *Methoden der Journalismusforschung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Kipman, U., Leopold-Wildburger, U. & Reiter, T. (2018). *Wissenschaftliches Arbeiten 4.0. Vortragen und Verfassen leicht gemacht* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Kuhnke, K. (2013). Zur Rolle von Darstellungen und Darstellungswechseln für das Lernen von Mathematik. In S. Hußmann, M. Nührenböcker, S. Prediger, & C. Selzer (Hrsg.), *Vorgehensweise von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel* (S. 7-34). Dortmund: Springer.
- Mayer, H. O. (2013). *Interview und Schriftliche Befragung. Grundlagen und Methoden Empirischer Sozialforschung* (6., überarb. Aufl.). München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. (11., aktualisierte und überarb. Aufl.). Weinheim: Beltz.
- Müllner, R. (2011). *Perspektiven der historischen Sport- und Bewegungskulturforschung*. Wien: Literatur-Verlag.
- Müller, U. & Varelija, G. (2019). *Genial! Mathematik 3. Übungsteil mit Aufgabenmanager* (2. Aufl.) Wien: Bildungsverlag Lemberger.
- Müller, U. & Varelija, G. (2019). *Genial! Mathematik 4. Übungsteil mit Aufgabenmanager* (2. Aufl.) Wien: Bildungsverlag Lemberger.
- Rakoczy, K. & Pauli, C. (2006). Hoch inferentes Rating: Beurteilung der Qualität unterrichtlicher Prozesse. In I. Hugener, C. Pauli, C. & K. Reusser, (Hrsg.). *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie: Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis* (S. 206-233). Frankfurt, Main: GFPPF.
- ris.bka.gv.at. (1963, Juni 28). Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich. [Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich]. Zugriff am 21. März 2020 unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/1963_134_0/1963_134_0.pdf
- ris.bka.gv.at. (2022, März 10). Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 10.03.2022. [Bericht]. Zugriff am 10. März 2022 unter

- <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>
- ris.bka.gv.at (1962, Juli 25.). Gesamte Rechtsvorschrift für Schulorganisation, Fassung vom 01.05.2022. [Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich]. Zugriff am 1. Mai 2022 unter <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10009265/SchOG%2c%20Fassung%20vom%2001.05.2022.pdf>
- ris.bka.gv.at (2009). Gesamte Rechtsvorschrift für Bildungsstandards im Schulwesen, Fassung vom 22.05.2022. [Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich]. Zugriff am 22. Mai 2022 unter <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/20006166/Bildungsstandards%20im%20Schulwesen%2c%20Fassung%20vom%2022.05.2022.pdf>
- Santini, B. & Trier, U. (1978). Funktionen von Lehrplänen. *Schweizer Schule*, 65(12), 427-433.
- Strick, H. K. (2020). *Mathematik – einfach genial! Bemerkenswerte Ideen und Geschichten von Pythagoras bis Cantor*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Strick, H. K. (2019). *Mathematik ist schön. Anregung zum Anschauen und Erforschen* (2. Aufl.). Springer Berlin.
- Vollstädt, W. (1999). *Lehrpläne im Schulalltag: eine empirische Studie zur Akzeptanz und Wirkung von Lehrplänen in der Sekundarstufe I*. Opladen: Leske + Budrich.
- Weigand, H. (2018). Ziele des Geometrieunterrichts. In H. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann, (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Wildhirt, S. (2007). *Lehrstückunterricht gestalten: Exemplarische Studien zur lehrkundedidaktischen Kompositionslehre*. Universität Marburg/Lahn.
- Wittmann, G. (2018). Problemlösen. In H. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann, (Hrsg.). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: M8-Kompetenzmodell Sekundarstufe I Mathematik (vgl. iqs.gv.at, 2022)..	15
Abbildung 2: Bildliche Darstellung des Lehrsatzes von Pythagoras (vgl. Gerwig, 2021, S. 117).....	21
Abbildung 3: Bildliche Darstellungen des Lehrsatzes von Pythagoras 2 (vgl. Gerwig, 2021, S. 113).....	22
Abbildung 4: "Drehwinkelmethode" (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 34).	25
Abbildung 5: "Anlegen und Abmessen"-Methode (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 34).	26
Abbildung 6: Beispiele für anwendungsorientierte Winkelsituationen (vgl. Dohrmann & Kuzle, 2015, S. 36).	26
Abbildung 7: Illustrationsbeweis: Lehrsatz von Pythagoras (vgl. Beer, 2019, S. 177).....	28
Abbildung 8: Zerlegung nach Perigal (vgl. Strick, 2019, S.341).	29
Abbildung 9: Zerlegung nach Göpel (vgl. Strick, 2019, S.342).	29
Abbildung 10: Beispiel 1: Weglänge berechnen (vgl. Müller & Varelija, 2019a, S. 92). ..	31
Abbildung 11: Beispiel 2: Luftlinie berechnen (vgl. Müller & Varelija, 2019a, S.93).....	31
Abbildung 12: Beispiel 3: Höhenunterschied berechnen (vgl. Müller & Varelija, 2019a, S. 92).....	31
Abbildung 13: Beispiel 4: Leiterlänge berechnen (vgl. Beer, 2019, S. 182).....	32
Abbildung 14: Beispiel 7: Warentransport mit Lift berechnen (vgl. Müller & Varelija, 2019b, S. 38).....	33

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Kompetenzbereiche (vgl. iqs.gv.at, 2022).	16
Tabelle 2: Lernziele aus der 5. Schulstufe (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.83f).	18
Tabelle 3: Lernziele aus der 6. Schulstufe (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.84f).	18
Tabelle 4: Lernziele aus der 7. Schulstufe (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.85).	19
Tabelle 5: Lernziele aus der 8. Schulstufe (vgl. iqs.gv.at, 2022; ris.bka.gv.at, 2022, S.85f).	20
Tabelle 6: Auswertung – Hinführung zum Thema (eigene Darstellung).	39
Tabelle 7: Auswertung – Fehlvorstellung und häufige Fehler (eigene Darstellung).	40
Tabelle 8: Auswertung – Knackpunkte und Strategien (eigene Darstellung).	41

Anhang

Interview 1 durchgeführt am 24. Mai 2022

- 1 I: Zu Beginn benötige ich bitte Eckdaten zu Ihrer Person Name, Alter, Geschlecht und
2 Schule. #00:00:05#
- 3 B1: M. M., (..) 58 Jahre, (..) weiblich, (..) Mittelschule Laakirchen. #00:00:13#
- 4 I: Okay. (..) Wie lang sind Sie schon als Lehrperson tätig. #00:00:16#
- 5 B2: Seit 1982 #00:00:19#
- 6 I: Und wie oft hatten Sie in etwa schon die Möglichkeit, den Lehrsatz von Pythagoras
7 einzuführen? #00:00:25#
- 8 B1: Boah (...) #00:00:29#
- 9 I: Sie dürfen natürlich ein bisschen überlegen. (...) #00:00:35#
- 10 B1: (Seufzer) Naja ich habe 90 Mathematik Prüfung gehabt (..) 30 Jahre, 20 Jahre (..) jedes
11 Jahr hast du ihn nicht. (...) Ma, schwer zu sagen. (..) Aber da habe ich Parallelklassen gehabt
12 (..) 20, 30-mal schätze ich #00:00:57#
- 13 I1: Also (..) im Schnitt etwa so 25. #00:00:59#
- 14 B1: Mal als Richtwert. #00:01:00#
- 15 I: Okay. (...) Und was trägt Ihren Erfahrungen nach zu einem gelingenden Lernen des
16 Pythagoras Lehrsatz bei? #00:01:10#
- 17 B1: Anschaulich zu arbeiten (..) #00:01:12#
- 18 I: Mhm #00:01:13#
- 19 B1: Das heißt unbedingt (..) ahm einmal ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren lassen und
20 die darüberliegenden Quadratflächen, (..) einzuzeichnen, (..) anzufärben (..) abzählen lassen.
21 (..) Und dann (..) diese Um- (..) Berechnungen und Umkehrungen, (...) dass sie es
22 anschaulich sehen und, und (..) so leichter verstehen können. #00:01:37#
- 23 I: Mhm (..) Sonst noch irgendetwas. #00:01:41#
- 24 B1: (...) Einfache Zahlen am Beginn. (..) #00:01:49#
- 25 I: Okay. (..) Ähm (..) Und gehen Sie beim Unterrichten von dem Lehrsatz immer auf dieselbe
26 Art und Weise vor? Wenn ja, warum beziehungsweise Warum nicht? (..) #00:02:00#
- 27 B1: Beim Unterrichten dann, also nicht beim Einführen, sondern beim Anwenden. (..) Ähm
28 (..) schon immer ganz wichtig (..) Hinweis zu geben. Immer gegenüber dem rechten Winkel
29 die Hypotenuse, egal (..) auch mit anderen Variablen bezeichnen das schon, (..) aber diese
30 Kernsachen, dass die gegenüber dem rechten Winkel liegen muss (..) und wie die berechnet
31 wird, (..) das muss man immer gleich aufbauen. (..) Mhm. #00:02:26#
- 32 I: Und bei der Einführung auch immer gleich? #00:02:28#
- 33 B1: Mhm (..) Immer sagen gegenüber dem rechten Winkel liegt immer die Hypotenuse. (..
34 Längste Seite und so. #00:02:34#

35 I: Ah. (..) Und welche Fehler treten deine Erfahrungen noch beim Erlernen des Satzes am
36 häufigsten auf? #00:02:43#

37 B1: Dass sie oft trotz dem anschaulichen (..) Erklären am Beginn und, und mit anfärben und
38 dann oft nicht verstehen, rechnen sie sich die Seite aus oder die Quadratfläche über dieser
39 Seite. (..) Und dann passieren eben die Fehler, dass Sie schreiben, was weiß ich (..) a ist gleich
40 c Quadrat minus b Quadrat und vergessen die Wurzel zu ziehen oder (..) und auch teilweise
41 Schlampigkeitsfehler, dass sie das nicht anschreiben (..) die Umkehrungen das dann wieder
42 Hypotenuse Katheten (..) falsch anschreiben (..) kommen sie dann oft drauf beim Rechnen,
43 das kann nicht stimmen, lassen aber die Formel falsch stehen und rechnet es dann anders,
44 das passiert auch öfter. Es passieren da immer wieder die gleichen (..) eigentlich. #00:03:26#

45 I: Und die beiden Fehler, welche sie jetzt genannt haben, finden Sie fallen am häufigsten.
46 #00:03:32#

47 B1: Mhm. (..) Ja, eigentlich schon okay. #00:03:35#

48 I: (..) Und welche Fehlervorstellungen liegen Ihrer Erfahrungen nach hinter diesen Fehlern?
49 (..) Also welche Denkfehler. #00:03:44#

50 B1: (..) Weil ihnen nicht bewusst ist, was oder (..) ja, was wirklich auch die Fläche ist über
51 (..) die, der Kathete zum Beispiel (..) und die Kathete, dass dies eine Länge ist. (..) Da scheitert
52 es schon wieder, weil sie (...) oft auch nicht wirklich wissen, was ist eine Fläche und eine
53 Länge (..) und das Bedenken sie zu wenig (..) und wenn sie den Schritt immer wieder
54 verwechseln (..) oder nicht klar erkennen, passieren dann diese Fehler. #00:04:15#

55 I: (..) Ahm (..) und ist es in Ihren Augen sinnvoll, auch einen Beweis zur Veranschaulichung
56 des Satzes im Unterricht durchzunehmen und wenn ja, zu welchen Zeitpunkt würden sie ihn
57 machen? #00:04:27#

58 B1: (..) (Lachen) Einen Beweis, ja (..) Ich glaube, diese Schüler haben wir nicht. #00:04:32#

59 I: (..) Grundsätzlich ist ja auch das mit dem Viereck, also Quadrate #00:04:35#

60 B1: Also mit die Quadrate mit dem Abzählen (..) ist ein Beweis. #00:04:39#

61 I: Genau. #00:04:40#

62 B1: Aber (..) dies ist Beweis genug für unsere Schüler, sag ich einmal. #00:04:44#

63 I: Aber würden Sie schon solche Sachen auch machen oder ausschneiden lassen, wo sie es
64 dann auflegen müssen? (..) Also die zwei kleinen Kathetenquadrate auf das große (..) Quadrat.
65 #00:04:52#

66 B1: Die Flächen (..) Ich lasse da immer verschiedenfarbige an (..) malen. Und zwar
67 Quadratfläche über erste Kathete in einer Farbe, (..) zweite Kathete (..) die Fläche in einer
68 zweiten Farbe (..) und dann die (..) über der Hypotenuse in den zwei Farben die Anzahl der
69 Quadrat- (..) kästchen (..) einfärben und dann kommen sie schon darauf. #00:05:15#

70 I: Zählt ja eigentlich so gesehen auch schon als Beweis. #00:05:18#

71 B1: Dann kann man es zählen (..) ja. #00:05:19#

72 I: Also so ganz einfache abgespeckte Beweise sind es. #00:05:22#

73 B1: Mehr braucht man nicht. #00:05:24#

74 I: Und machen Sie dies dann eher am Anfang oder #00:05:26#

75 B1: Ja gleich am Anfang. #00:05:28#

76 I: Okay. Und (..) in der vierten kommt er ja dann auch noch einmal vor. Das werden sie ja
77 dann in der dritten mache, dass mit dem Anmalen, machen Sie dann auch noch einmal so
78 etwas oder #00:05:37#

79 B1: Eher nicht mehr. #00:05:38#

80 I: Okay. #00:05:39#

81 B1: Anfärben nicht mehr. (.) Man weißt vielleicht nur mal daraufhin (.) und man kann ihnen
82 das vielleicht (.) bildlich zeigen oder (..) Jetzt am Smart Board kannst du es (..) schön
83 veranschaulichen aber (..) Zeichnen ein zweites Mal (.) eher nicht. #00:05:55#

84 I: Ahm. (...) Welche Grundvorstellungen sind deiner Meinung nach am ausschlaggebenden
85 beim Erlernen des Satzes von Pythagoras? (...) Also welche (..) wo sollen sie sich darüber
86 unbedingt im Klaren sei, über das (.) das Vorwissen, was sie vorher schon haben. #00:06:16#

87 B1: ja (..) Einfach die wichtigsten Schritte (..) gilt (.) überall dort, wo ein rechtwinkliges
88 Dreieck vorhanden ist. #00:06:24#

89 I: Also sollen sie natürlich das vom rechtwinkligen Dreieck alles können? #00:06:29#

90 B1: Ja und, dass sie dann Hypotenuse und Kathete richtig bezeichnen können und dann
91 können sie ihn erst anwenden, (.) dass dies die notwendigen Schritte sind und dann in
92 weiterer Folge Anwendung im gleichschenkeligen Dreieck (.) Trapez (.) was auch immer.
93 #00:06:45#

94 I: Ah (.) und auf welche Knackpunkte (..) es überschneidet sich teilweise ein bisschen (..) welche Knackpunkte sollen deiner Meinung nach besonders viel Wert gelegt werden.
95 #00:06:56#

97 B1: (..) Auf das logische Verständnis, (lachen) dass sie das kapieren. (.) Warum? Und, und
98 was? (.) Was bringt mir das, wenn ich den Pythagoras anwenden kann? (.) Sie lernen
99 auswendig $a^2 + b^2 = c^2$ aber haben null Ahnung was heißt das
100 a^2 , dass dies eine Quadratfläche ist. (.) Und das kann man veranschaulichen mit
101 dem (.) graphischen darstellen. #00:07:18#

102 I: Okay. (.) Also, dass dies eben auch hängen bleibt und sie sich das merken. (..) Und haben
103 Sie irgendwelche konkreten Strategien zur Verminderung von solche Fehlvorstellungen oder
104 dass die häufigen Fehler eben vermindert werden? #00:07:34#

105 B1: Ein wichtiger Punkt ist einfach ein ordentliches Anschreiben immer von den Formeln
106 (.) und immer nach gleicher übersichtlicher Form (..) des anzuschreiben und wirklich, (..) ahm wirklich ganz gleich bei jedem Beispiel vorgehen. (.) Wie wir das eh machen, (..) Formeln umformen, einsetzen. (.) Gerade die schwachen Schüler brauchen das unbedingt.
109 (..) Das man mit ihnen ein System durchgeht. #00:08:03#

110 I: Möchten Sie abschließend noch irgendetwas loswerden? (.) Etwas interessantes oder
111 Wichtiges? (.) Wo Sie sagen, das wäre vielleicht noch (.) gut zu erwähnen. #00:08:14#

112 B1: (.) So Ad hoc fällt mir jetzt nix ein, (.) aber. (...) Ja, (.) es ist faszinierend. (.) Äh, ich
113 habe es auch schon einmal gemacht, dass ich (..) zum Beispiel mit einem Seil (.) Knoten
114 hinein gemacht habe (.) Pythagoras (.) das Dreieck (.) das rechtwinklige einmal legen lassen
115 habe. (.) Aber das ist halt (.) es ist eine tolle Sache, (.) taugt den Kindern. Aber du brauchst
116 einfach sehr, sehr, sehr viel Zeit. Und leider haben wir oft den Zeitdruck, (.) dass man dann

117 eben sagt, (.) Ah das (.) da geht zu viel Zeit drauf, (.) machen wir es halt nur mit Zeichnung.
118 (..) Es gäbe schon da und dort Sachen, wo man sagt, (.) na vielleicht bleibt es ihnen leichter
119 oder besser hängen. #00:08:59#

120 I: Mhm, ja sehr interessantes Gespräch (..) dann bedanke ich mich bei Ihnen #00:09:03#

121 B1: Ja (.) gerne (.) gerne. #00:09:05#

Interview 2 durchgeführt am 02.06.2022

- 1 I: Zu Beginn des Interviews benötige ich bitten Ihren Namen (...) Ihr Alter, (...), Ihr
2 Geschlecht (.) und die Schule (.) in der Sie unterrichten. #00:00:11#
- 3 B2: Also (.) N. H. (..) 4 (.) nein noch nicht 44 (.) 43 (..) ahm (.) Geschlecht (.) weiblich und
4 Mittelschule Steinerkirchen. #00:00:22#
- 5 I: Okay (.) Dankeschön (.) Und wie lange sind Sie schon als Lehrperson tätig? #00:00:29#
- 6 B2: (..) Na jetzt das zweiundzwanzigste Jahr #00:00:32#
- 7 I: Mhm (..) Und (..) Das wird jetzt wahrscheinlich etwas zu rechnen (..) wie oft hattest du (.)
8 in etwa schon die Möglichkeit den Lehrsatz von Pythagoras Einzuführen (.)
9 beziehungsweise zu unterrichten? (..) #00:00:45#
- 10 B2: Mh (...) Sechsmal sicher (...) mhm (...) Sechsmal (.) Ja #00:00:54#
- 11 I: Okay (.) Was trägt Ihren Erfahrungen nach (.) zu einem Gelingenden Erlernen des
12 pythagoräischen Lehrsatzes bei? (..) #00:01:01#
- 13 B2: (Lachen) Ja (...) Wir haben es eben auf der PÄDAK auch so gelernt (.) ein bisschen (..)
14 äh was hat sich der Herr Pythagoras dabei gedacht (.) eben das Dreieck aufzeichnen und
15 dann (..) und dann halt (.) was ich schon immer mach (.) ein oder zwei einfachere Beweise
16 zeig ich ihnen dann schon auch, (.) weil ich auch finde eine Mittelschule kann das ein
17 bisschen verstehen (.) aber sie verstehen das relativ schnell (.) also (...) so (...) gibt es andere
18 Kapitel die schwieriger sind. #00:01:36#
- 19 I: Okay (.) Und gehen Sie beim Unterrichten des Lehrsatzes immer auf dieselbe Art und
20 Weise vor und ja warum (.) beziehungsweise warum nicht? #00:01:48#
- 21 B2: (Lachen) (..) Ahm boah (.) Ich habe jetzt (.) Wann habe ich den denn das letzte Mal
22 unterrichtet? Ist schon wieder ein bisschen her. (.) Ja im Prinzip gehe ich immer gleich vor.
23 (.) Also ich habe mir das (..) erben damals in der PÄDAK eben gelernt und (.) und dann habe
24 ich ihn einmal so unterrichtet (.) da ist es recht gut gelaufen und dann (..) dann habe ich das
25 immer gleich gemacht. Ich habe mir damals auch das (..) das (..) das pythago (.) also das
26 Pythagoras Seil gemacht mit den Knoten (..) das große (.) ich weiß nicht, ob Sie das kennen?
27 #00:02:16#
- 28 I: Ja das kenn ich #00:02:18#
- 29 B2: Und dann lass ich die Schüler dann auch immer (..) aufstellen, dass sie dann auch sehen,
30 okay das wird dann ein rechter Winkel (..) und dann hast du ja schon die Einteilungen mit
31 dem 3, 4, 5 (..) und (.) ja (.) und das funktioniert von dem hier eigentlich ganz gut und (.)
32 und wenn etwas funktioniert, (.) ja sicher schaut man immer wieder gibt es etwas anderes,
33 (.) aber manche Einführungen sind halt dann (.) komplizierter, wo ich mir dann denke (.)
34 nein muss nicht sein. (..) 00:02:40#
- 35 I: Mhm (...) Und sonst noch irgendetwas (.) ein Kennzeichen wie du vorgehst im Groben?
36 #00:02:48#
- 37 B2: (...) Puh (.) wenn der mal erarbeitet ist, dann geht es einfach darum, dass man ihn
38 anwendet, das ist das entscheidende für mich dann (..) da sie eben bei den
39 Anwendungsbeispielen halt dann (.) das rechtwinkelige Dreieck erkennen (...) das ist das
40 schwierige eigentlich daran, dass sie eben das Dreieck sehen (..) und wann sie das Dreieck
41 dann einmal gesehen haben, (.) dann haben sie eh nicht so das Problem, (.) dass sie sagen

42 (.) okay das ist die Hypotenuse, das ist die Kathete und dann stellen wir ihn auf (..) das haben
 43 sie eigentlich relativ schnell drauf #00:03:17#

44 I: Mhm (.) Okay (.) Und #00:03:20#

45 B2: Aber ich habe halt auch immer nur die besseren Gruppen bis jetzt gehabt (.) wie es den
 46 schwächeren (.) wissen Sie eh Mittelschule, (.) gibt es ja bessere und schlechtere Gruppen,
 47 (.) da kann ich es natürlich nicht sagen, die werden wahrscheinlich ein bisschen länger
 48 brauchen (.) bis sie den drauf haben, nämlich auch dann (.) das Umformen dann (.) dass sie
 49 die unterschiedlichen Seiten halt dann ausrechnen können #00:03:03#

50 I: Das heißt ihr seid dann auch bei der Einführung des Pythagoras immer komplett getrennt
 51 (.) das macht dann die AHS Gruppe und die Standardgruppe allein? #00:03:46#

52 B2: Getrennt ja (.) Bei uns an der Schule ist es so, dass wir gesagt haben wir trennen wieder
 53 (.) weil wir einfach gemerkt haben (.) wie die Neue Mittelschule war, (.) dass das Niveau
 54 total sinkt, weil du orientierst (.) du musst dich an die Schwächeren orientieren, weil du
 55 kannst ja nicht die Schwächeren nebenbei liegen lassen (.) und dadurch bringst du einfach
 56 viel weniger weiter, weil einfach mehr Zeit drauf geht und (.) und dann ist es eigentlich
 57 schade für die Besseren, weil die fadisieren sich. (..) Auch, wenn es dann immer heißt (.) ja
 58 (.) differenziert unterrichten hin und her (.) es geht aber nicht immer. (...) Und darum haben
 59 wir als Schule dann beschlossen, sobald das eben wieder möglich war (.) wir trennen fix. (..) Also
 60 ab der zweiten Klasse, in der ersten Klasse sind sie noch gemeinsam (.) da ist ja das
 61 noch nicht. #00:04:29#

62 I: Genau, so ist es eh bei uns eigentlich auch (..) Welche Fehler treten Ihren Erfahrungen
 63 nach beim Erlernen des Satzes am häufigsten auf? #00:04:40#

64 B2: (...) Ja (Seufzer) (.) Das (.) Ein Kind kann halt die Schwierigkeit haben, dass sie die
 65 Kathete und Hypotenuse nicht voneinander unterscheiden kann. (..) Und dann stellt sie
 66 natürlich den Pythagoras Satz falsch auf (..) Aber (.) das ist das einzige. #00:04:59#

67 I: Okay (.) Sonst daweil noch nichts (...) aufgefallen? (...) Und welche Fehlvorstellungen
 68 liegen Ihren Erfahrungen nach hinter diesen Fehlern (.) beziehungsweise diesem Fehler?
 69 #00:05:13#

70 B2: (...) (Seufzer) Wäre ja nicht so schwer, sie bräuchten ja nur die lange Seite zu suchen
 71 (.) keine Ahnung (..) Also das, das weiß ich nicht, warum sich da manche einfach schwerer
 72 tun, bis sie das drauf haben, dass die lange Seite die Hypotenuse ist und die zwei kurzen die
 73 Katheten sind (..) (Lachen) keine Ahnung. #00:05:34#

74 I: Okay (.) Ahm (.) Sie haben vorhin schon erwähnt, dass Sie auch immer ein bis zwei
 75 Beweise mit ihnen machst (.) zu welchen Zeitpunkt machen Sie das mit ihnen und (.)
 76 vielleicht können sie mir grob erklären welchen Sie da mit Ihnen machen? #00:05:51#

77 B2: Ah (.) das ist jetzt eine plötzliche Frage (.) Ich mach (.) ah den Beweis mach ich (.) also
 78 zuerst erarbeite ich den Pythagoras (..) und dann sag ich ihnen aber (.) ah (.) also dann mach
 79 ich den Beweis (.) bevor wir die Anwendungen machen, bevor wir rechnen, (.) da mach ich
 80 das einfach, dass ich ihnen zeige (.) da schaut her, die Mathematiker haben sich das und das
 81 überlegt und so kann man das Beweisen. (.) Das eine ist der (.) mit dem (.) mit dem
 82 Verschieben da (.) wo du (.) wo du auf Parallelogramme (.) verschiebst und runter schiebst
 83 (.) also (..) (Seufzer) Weiß ich jetzt nicht mehr (.) du hats die kleinen Quadrate (..) und dann
 84 verschiebst du das so (.) das des zwei Parallelogramme sind und dann schiebst du es hinunter,

85 das heißt, (.) das c Quadrat wird dann aufgeteilt dann (.) ich weiß nicht ob du den kennst?
86 #00:06:35#

87 I: Hm, (.) kenne ich nicht, aber es gibt ganz viele mit solchen Verschiebungen und
88 auseinanderschneiden. #00:06:42#

89 B2: Ja, nein (..) das (..) mit auseinanderschneiden (...) das sind andere Sachen, aber das ist
90 einer (..) den kannst du eben mit, mit (.) ja (..) wir haben halt früher noch mit Overheadfolien
91 gearbeitet (.) mit bunte Overheadfolienfelder und da (.) da kannst du halt (.) da kannst du es
92 auch recht gut zeigen, dass halt das dann, (.) aber das können sie sich auch vorstellen, dass
93 dann die Unterteilung dann hier ist und das ist dann Fläche und das geht halt dann hinunter
94 (..) und (.) ja. Das andere (..) die Standard (..) die Standard Geschichte ist eh diese, dass du
95 diese kleinen Quadrate einzeichnest #00:07:12#

96 I: Genau ja. #00:07:13#

97 B2: Und dann (.) lässt du die Quadrate zählen, lässt unten zählen und dann haben sie es (.)
98 das ist (.) das ist die Standardgeschichte. Ich mein die macht ein jeder, (.) aber ich habe noch
99 einen gemacht, aber der fällt mir jetzt nicht ein (...) das weißt ich jetzt (.) den (.) das habe
100 ich oben (.) im anderen Raum, da hätte ich den, den ich noch mache (.) aber den (.) das mach
101 ich dann nur mit (.) mit, wo ich jetzt sage, da sind wirklich ganz Geschickte halt dann dabei.
102 (..) Ja, (.) dass sie halt ein bisschen mehr (.) mehr halt sehen. #00:07:38#

103 I: Okay, das macht jetzt nichts, wenn Sie das nicht mehr im Detail jetzt wissen. Das heißt
104 Sie machen die Beweise ziemlich zu Beginn (.) vom Satz, denn der Satz von Pythagoras
105 kommt ja in der vierten Klasse auch noch einmal und da machen Sie dann #00:07:55#

106 B2: Ja, aber da tu ich dann nicht mehr lang herum (.) da ist es dann schon so, (.) dass ich nur
107 mehr wiederhole, weil da kommt es ja dann relativ schnell im Raum. (.) Also (.) Quader,
108 Würfel, Pyramide, und so (.) und da hat man die Zeit nicht, dass man da lange herumtut, (.)
109 da muss der schon sitzen, die Aufstellung muss schon funktionieren (.) und dann wird es
110 eben (..) auf 3D umgelegt. #00:08:15#

111 I: Mhm. (.) Und welche Grundvorstellungen sind Ihrer Meinung nach am
112 ausschlaggebendsten beim Erlernen des Satzes von Pythagoras? #00:08:25#

113 B2: (...) Ja sie müssen (.) Zuerst einmal in der Ebene ein Vorstellungsvermögen und dann
114 später halt in der vierten Klasse eben im Raum. (..) Da ist dann eher die Schwierigkeit, dass
115 (.) gerade jetzt, sag ich einmal, bei der Pyramide, (.) da gibt es ja drei Möglichkeiten, (.) da
116 gibt es drei rechtwinkelige Dreiecke, dass sie halt dann unterscheiden, ja welches
117 rechtwinkelige Dreieck brauche ich jetzt, dass ich meine Unbekannte ausrechnen kann. Und
118 dazu brauche ich eben eine 3D Vorstellung. (..) Nur da mache ich es immer so, ich weiß es
119 gibt (.) ich weiß es gibt GeoGebra, (.) aber ich mach es halt nach wie vor so, dass ich ihnen
120 ein Netz gebe (.) zum Beispiel jetzt eben von der Pyramide (...) und die drei Dreiecke extra
121 in einer anderen Farbe dazugebe und die werden dann direkt 3D mäßig eingeklebt in das
122 Schulübungsheft. Das heißt (.) mit einer Lasche, (.) das Schulübungsheft können sie dann zu
123 machen, aber wenn sie das Schulübungsheft aufmachen, können sie drei (.) können sie die
124 Pyramide 3D aufbauen und noch einmal nachschauen (..) welches Dreieck ist das jetzt,
125 welche Seite brauche ich dazu, (.) dass sie dadurch halt dann das 3D Verständnis ein bisschen
126 verbessert. (...) Weil es ist trotzdem (.) GeoGebra (.) ja sie sehen es trotzdem ja nur auf dem
127 Bildschirm (..) Aber wenn sie es im Heft 3D drinnen haben ist es ein anderes haptisches
128 Gefühl (...) Finde halt ich, aber das ist halt der alte Schlag. (Lachen) #00:09:42#

129 I: (.) Und auf welche Knackpunkte (.) oder weitere wichtige Punkte sollte Ihrer Meinung
130 nach auch noch besonders viel Wert gelegt werden? #00:09:53#

131 B2: (...) Beim Pythagoras? #00:09:55#

132 I: Ja, oder ob es noch etwas gibt zu ergänzen quasi. #00:09:59#

133 B2: (..) Also find ich nicht. (.) Das Pythagoras Kapitel ist eigentlich eines, dass die Kinder
134 eher Spaß macht, (.) weil es eben (.) ja weil es nicht so schwer ist. Ich sag jetzt im Vergleich
135 zu (.) ja Wurzelziehen oder Algebra irgendetwas, da tun sie sich halt schwerer. (.) Also von
136 dem her, ist es eher ein lustigeres Kapitel, wo (.) wo es nicht so viele Schwierigkeiten gibt.
137 #00:10:24#

138 I: Mhm (.) Und haben Sie noch irgendwelche konkreten Strategien zur Verminderung von
139 den Fehlvorstellungen oder Fehlern, die auftreten? #00:10:34#

140 B2: (...) Naja, das ist eh das das ich vorhin schon gesagt habe, gerade beim, (.) wenn es jetzt
141 um das 3D mäßige geht, dass ich halt Modelle ihnen machen lasse oder einkleben lasse, wo
142 sie halt dann (.) sich das noch einmal anschauen können. (..) Bis sie sich das halt
143 verinnerlichen. (.) Mit dem fahre ich eigentlich recht gut, (.) das funktioniert (.) das
144 funktioniert recht gut. #00:10:54#

145 I: Das heißt viel veranschaulichen? #00:10:57#

146 B2: Ja genau (.) klar (.) Und halt auch Skizzen machen lassen, also (.) wann sie (.) wann sie
147 die Aufgaben dann halt selbstständig lösen sollen, dass sie sich halt Skizzen machen, das
148 Dreieck einzeichnen, das (.) das rechtwinkelige Dreieck, eben ordentlich Beschriften (..) das
149 ist das um und auf beim Pythagoras (..) #00:11:15#

150 I: Okay (.) und gibt es abschließend noch irgendetwas, das sie gerne los werden möchten
151 zum Thema oder etwas, das noch interessant sein könnte? #00:11:25#

152 B2: (...) Hm, glaube ich nicht, (lachen) dass noch etwas interessant sein könnte. #00:11:31#

153 I: (Lachen) Okay, also alles wichtige genannt? #00:11:34#

154 B2. Ja ich denke schon. (.) Ich weiß jetzt nicht (..) welche Schwerpunkte Sie jetzt bei Ihrer
155 Masterarbeit setzen. (..) #00:11:41#

156 I: Das waren jetzt eigentlich eh schon die Punkte in den vorherergehenden Fragen (..) Diese
157 sollte nur als offene Fragen dienen, falls es noch etwas Interessantes oder Spezielles zum
158 Loswerden gibt. #00:11:51#

159 B2: Nein (.) Wie gesagt es ist ein cooles Kapitel, (.) das im Prinzip leicht zum Unterrichten
160 ist. (...) Aber das hilft dir bei deiner Masterarbeit jetzt nicht weiter (Lachen) (.) Aber Sie
161 werden es sehen, wenn Sie es selbst einmal unterrichten, (.) dass das super geht. #00:12:09#

162 I: Ja, ich habe es eh schon einmal unterrichten dürfen. #00:12:12#

163 B2: Ja dann wissen Sie eh schon, dass es andere Themen gibt, die blöder zu unterrichten
164 sind, wo man sich mehr Gedanken machen muss, wie bringe ich ihnen das jetzt bei
165 #00:12:20#

166 I: Genau, dass stimmt. (..) Okay, dann sage ich danke für das Interview. #00:12:25#

167 B2: Ja bitte gern geschehen. #00:12:28#

Interview 3 durchgeführt am 06.06.2022

- 1 I: Zuallererst brauchte ich bitte Ihren Namen, Ihr Alter, Ihr Geschlecht und die Schule, in
2 der Sie unterrichten. #00:00:08#
- 3 B3: S. A., (.) unterrichte in der Mittelschule in Scharnstein, (.) bin weiblich und (..) ja die
4 Schüler, die ich unterrichte, sind zwischen elf und 15 Jahre alt. #00:00:17#
- 5 I: Ah, ich hätte Ihr alter gemeint. #00:00:19#
- 6 B3: Aso mein Alter (.) Ok da muss ich rechnen 43. (lachen) #00:00:23#
- 7 I: Okay. (..) Und wie lange sind Sie schon als Lehrperson tätig? #00:00:28#
- 8 B3: Hm? Gute Frage, warte kurz. (...) Ja circa 15 Jahre mit Unterbrechung einmal (.) Kinder.
9 (lachen) #00:00:39#
- 10 I: Okay. (.) Und wie oft hatten Sie in etwa die Möglichkeit gehabt, den Lehrsatz von
11 Pythagoras zu unterrichten? #00:00:47#
- 12 B3: Boah, sicher schon fünf Mal. (.) Meistens in der vierten Klasse. #00:00:51#
- 13 I: In der dritten Klasse nie? #00:00:52#
- 14 B3: Ende dritte Klassen, wenn es sich ausgegangen ist und sonst in der vierten Klasse,
15 Intensiv. (lachen) #00:00:57#
- 16 I: Das heißt, die Einführung wurde dann in die vierte Klasse verlegt? #00:01:00#
- 17 B3: Ja, genau. Wann wir es in der dritten nicht mehr geschafft haben, dann haben wir sie in
18 der vierten Klasse verlegt. #00:01:05#
- 19 I: Okay. (.) Und was trägt deinen Erfahrungen nach zu einem gelingenden Lernen des
20 Pythagoras Lehrsatzes bei? #00:01:15#
- 21 B3: Ja, sie Kinder müssen sich das vorstellen können. (.) Also ich mach es eben immer mit
22 den Quadraten über den Dreiecksseiten (..) und lass es zeichnen, schneiden, messen. (.) So
23 klassisch halt. (lachen) #00:01:27#
- 24 I: Okay. (.) Und gehen Sie dann beim Unterrichten des Lehrsatzes immer auf dieselbe Art
25 und Weise vor? Wenn ja, warum? Beziehungsweise Warum nicht? #00:01:41#
- 26 B3: Ahm (...) Ich probiere es eben auf eine Art und Weise und wenn es mir nicht gelingt,
27 dann steige ich um. (.) Also ich versuche immer das (.) Also ich mache es immer mit dem
28 Dreieck, mit den Quadraten einzeichnen und zählen. (.) Das gelingt mir am meisten halt.
29 Und wenn es nicht funktioniert, dann zeige ich auch gerne vielleicht einmal ein Video oder
30 irgendwas anderes. Aber meistens (.) funktioniert es. #00:02:02#
- 31 I: Okay, sehr gut. (.) Und welche Fehler treten Ihrer Erfahrung nach am meisten auf beim
32 Erlernen des Satzes. #00:02:11#
- 33 B3: Das sie (.) Weil sie die Katheten und Hypotenuse immer wieder verwechseln, (..) dass
34 sie einfach nicht wissen, müssen sie jetzt Plus oder Minus rechnen. Das ist immer der
35 Hauptgrund eigentlich für die Schüler. a Quadrat plus b Quadrat ist c Quadrat, das Wissen
36 (.) manche in der Volksschule (lachen), weil sie es wo gehört haben, (.) aber das sie wissen,
37 wo ist a wo ist b, was ist c, das ist immer das Schwierigste. #00:02:36#

38 I: Und welche Fehlvorstellungen liegen Ihrer Erfahrung nach hinter diesen Fehlern?
39 #00:02:42#

40 B3: (..) Vielleicht macht man das beim Dreieck zu wenig, (.) dass man diese Bezeichnungen
41 besser oder mehr übt, vielleicht. (.) Man macht immer die Ecken und Kanten und die Seiten,
42 aber dass man vielleicht wirklich auf die Hypotenuse und Katheten noch (..) auf das ein
43 bisschen mehr eingeht, dass man so mehr Vorwissen hat. #00:03:01#

44 I: Dass man es also früher einführt, quasi. #00:03:04#

45 B3: Ja genau Also nicht den Pythagoras, aber einfach vom (.) vom Dreieck her, dass Sie jetzt
46 wissen, ok da gibt es jetzt beim rechtwinkligen Dreieck, (.) die lange Seite ist gegenüber
47 vom rechten Winkel. (.) Sagen tut man es eh immer, aber vielleicht (Seufzer) bewusster.
48 #00:03:18#

49 I: Wenn sie es nicht lernen, dann merken sie sich es so oft nicht. (lachen) #00:03:23#

50 B3: Genau. (lachen) #00:03:25#

51 I: Okay und ist es Ihrer Meinung nach sinnvoll, auch am Beweis zur Veranschaulichung des
52 Satzes im Unterricht durchzunehmen? Wenn ja, wie und zu welchem Zeitpunkt? #00:03:36#

53 B3: (.) Ja, der Beweis ist für mich eh, dass (.) die Kästchen zählen. Ich sage immer Kästchen
54 zählen, ich mache halt 3, 4, 5 das rechtwinklige Dreieck klassisch (.) und da, da sehen sie es
55 eigentlich am besten, dass man einfach dann (.) die Neun und die 16 zusammenzählt und
56 dann sind es 25. (.) Und das ist für mich der Beweis genug, sag ich einmal. #00:03:57#

57 I: Zählt, aber eigentlich auch als Beweis (.) ist auch in den Büchern drinnen, welche ich bei
58 der Literaturrecherche gefunden habe. #00:04:05#

59 B3: Ist auch bei uns immer so drinnen und ja (.) ich fahr mit dem am besten wie gesagt.
60 #00:04:10#

61 I: Das heißt, das ist dann der einzige Beweis und den machen Sie zu Beginn der Einführung?
62 #00:04:13#

63 B3: Ja eigentliche schon. #00:04:15#

64 I: Okay. (.) Gut. Und welche Grundvorstellungen sind Ihrer Meinung nach am
65 ausschlaggebenden beim Erlernen des Satzes von Pythagoras? (..) Kann auch sein, dass sich
66 die Antworten jetzt auch ein bisschen überschneidet mit den Fragen zuvor. #00:04:31#

67 B3: Ja. (.) Na eh, wie gesagt, einfach, (.) dass sie das Dreieck sehen. Weil (.) in den
68 Textaufgaben oder bei so Anwendungsaufgaben, erkennt man es oft nicht, dass das jetzt ein
69 rechtwinkliges Dreieck ist, wo man dann den Satz von Pythagoras anwenden könnte. Ich
70 glaube, dass dies oft der größte, das größte Problem ist bei den Kindern. Weil an und für
71 sich mögen sie ihn ja. (.) Satz von Pythagoras ist ihnen ja an und für sich lustig, aber (..) es
72 ist oft schwierig, dass sie ihn sehen, gerade in der Pyramide oder so, das ist immer so
73 versteckt (.) irgendwo da drinnen (.) und da werden (.) die meisten Fehler eigentlich gemacht.
74 #00:05:11#

75 I: Mhm, gibt es sonst nur irgendwelche Knackpunkte Ihrer Meinung nach, auf die man
76 besonders viel Wert legen sollte? #00:05:22#

77 B3: (...) Nein, (.) nicht wirklich. (.) Ich find es immer gut an einer Zeichnung halt (.)
78 Zeichnungen helfen (.) einfach am besten. Also wirklich geschwind das Dreieck heraus zu

79 zeichnen, auf der Seite noch geschwind dazu zu malen, eine Skizze geschwind. Und dies ist
80 dann für die meisten schon so am anschaulichsten. Sag ich jetzt einmal #00:05:42#

81 I: Also viel Veranschaulichung, quasi. #00:05:45#

82 B3: Ja, tu ich schon viel eigentlich. Ich tu viel zeichnen und herummalen und
83 herumschmieren. (lachen) #00:05:51#

84 I: (lachen) Und haben Sie sonst noch konkrete Strategien zur Verminderung solcher
85 Fehlstellungen oder von den häufigen Fehlern? #00:05:59#

86 B3: Ahm (.) Ich bin jetzt immer mehr draufgekommen, dass viel Übung einfach das
87 wichtigste ist und wiederholte Übungen (.) also oft dasselbe. (.) Je mehr ich wechsele von
88 schweren Beispielen zu leichten Beispielen, desto mehr verwirre ich sie. Also, ich bin jetzt
89 gerade bisschen am Umstellen, ich tu jetzt viel mehr. (..) Immer dasselbe üben, (.) 100-mal
90 dasselbe, und dann sitzt es. (.) Bin ich gerade (.) ja, wir tun immer ein wenig probieren, man
91 versucht es halt einmal wieder. In einer Klasse funktioniert das wieder besser in einer
92 anderen Klasse das. Aber ja, in meiner Klasse, die ich jetzt habe, da tu ich wirklich üben,
93 üben, üben. (..) Und dann (.) Dann haben sie es verinnerlicht finde ich halt. (.) Ja. #00:06:42#

94 I: Und möchten Sie zum Schluss noch irgendwas zum Thema loswerden, wo Sie sagen das
95 könnte noch interessant sein oder ist noch wichtig zu wissen? #00:06:51#

96 B3: Ja, ich bin jetzt gerade in der dritten Klasse, ich habe nur (..) ich wird es noch machen
97 heute, das weiß ich, aber (.) ich habe jetzt vorheriges Jahr keine vierte Klasse gehabt. (..)
98 Hm. (.) Nein, eigentlich nicht wirklich. (.) Ich finde es voll wichtig, den Pythagoras, also der
99 ist gerade im technischen Bereich, die Berufe (..) ich habe auch Nachhilfe gegeben mit HTL-
100 Schülern oder Berufsschüler, die einfach (.), die brauchen das, dass ist unglaublich, wo man
101 den überall braucht und der kommt immer wieder, ich finde den eigentlich schon sehr
102 wichtig und ja. (..) Nein, darf man nicht vernachlässigen und ist sicher (...) Für Kinder
103 eigentlich gar nicht so schwer, finde ich, (.) wenn sie es verstehen. Sobald sie es (.)
104 verstanden haben, dann läuft es. Und manche, (.) ja gibt es halt immer, die nie lernen.
105 (lachen) Egal wie man es macht. #00:07:49#

106 I: Das stimmt. (lachen) Gut, dann sage ich Vielen Dank, wir sind schon fertig. #00:07:54#

107 B3: Ja gerne, das ist ja schnell gegangen. #00:07:56#

Interview 4 durchgeführt am 08.06.2022

- 1 I: Okay, (.) zu Beginn des Interviews bräuchte bitte Ihren Namen, Ihr Alter, Ihr Geschlecht
2 und die Schule, in der Sie unterrichten. #00:00:12#
- 3 B4: Also mein Name ist A. H.. (.) Ich bin 59, also im 60. Lebensjahr. Ich gehe bald in Pension
4 und äh (.) ich unterrichte in der Bella Saal Schule Strebersdorf. (..) Das ist im (.) 21. Bezirk
5 eine Privatschule. #00:00:29#
- 6 I: Und wie lange sind Sie schon als Lehrperson tätig? #00:00:33#
- 7 B4: Seit 1986. (..) Also lang (lachen). #00:00:39#
- 8 I: Und, das wird jetzt wahrscheinlich ein bisschen zum Rechnen, wie oft hatten Sie in etwa
9 schon die Möglichkeit, den Lehrsatz von Pythagoras einzuführen beziehungsweise zu
10 unterrichten? #00:00:53#
- 11 B4: Also wie oft ich schon eine, in der dritten Klasse ist, das glaube ich, weil früher war es
12 in der vierten Klasse, dann ist es in die dritte gekommen. (.) Also ich schätze einmal schon
13 öfter. Hm. (.) 20 Mal. (.) Ja #00:01:11#
- 14 I: Okay. (.) Und was trägt Ihren Erfahrungen nach zu einem gelingenden Lernen des
15 Pythagoras Lehrsatz bei? #00:01:21#
- 16 B4: Also ich habe das meistens so eingeführt mit (.) Puzzels, also wo man das so legen kann,
17 dass eben die zwei Quadrate quasi dann flächengleich sind, also ein großes Quadrat und ein
18 kleines Quadrat. (.) Also, wenn sie es anschaulich sehen, dass das gleich ist, also (.) a Quadrat
19 plus b ist c Quadrat oder halt verschiedene Buchstaben verwenden, so mache ich es gerne.
20 Also, damit sie sich nicht nur an die Buchstaben a, b, c (.) ah gewöhnen. Äh ja, dann
21 funktioniert es. Aber sie müssen halt das irgendwie auch sehen, dass die Flächen gleich sind.
22 #00:01:57#
- 23 I: Mhm, und gehen Sie beim Unterrichten immer auf dieselbe Art und Weise vor? Wenn ja,
24 warum beziehungsweise warum nicht? #00:02:07#
- 25 B4: Nein, eigentlich nicht, weil ich bin nicht so der Typ, der sich das aufschreibt und so eine
26 Vorbereitung schreibt. Und daher mache ich das immer, wenn ich eine dritte Klasse habe,
27 immer wieder neu. (..) Außerdem wechseln wir auch die Bücher, die sind dann anders
28 aufgebaut. (.) Also ich halte mich schon an die Bücher auch, aber. (..) Je nach Lust und
29 Laune mache ich das dann. (lachen) #00:02:29#
- 30 I: Das heißt, Sie probieren auch einmal etwas Neues aus? #00:02:31#
- 31 B4: Ja genau, ich mache es nicht immer gleich. #00:02:34#
- 32 I: Okay. (..) Und welche Fehler treten Ihren Erfahrungen nach beim Erlernen des Satzes am
33 häufigsten auf? #00:02:43#
- 34 B4: Also das häufigste ist (.) dadurch, dass der Pythagoras in der dritten Klasse schon
35 eingeführt worden ist, die Wurzeln aber so richtig erst in der vierten Klasse kommen, (.)
36 verstehen sie das noch nicht so richtig. Und dann wird halt oft gemacht, dass die Wurzel aus
37 (.) a Quadrat plus b Quadrat a plus b ist und solche Dinge. (.) Also, dass einfach aus Summen
38 oder Differenzen die Wurzeln quasi gezogen wird. (.) Ahm ja, das ist eigentlich das häufigste
39 bei diesen Umkehrungen, dass die Seite dann berechnet wird, ja. #00:03:17#

40 I: Mhm (.) und welche Fehlstellungen liegen Ihrer Erfahrung nach hinter diesen Fehlern
 41 oder hinter diesem Fehler? #00:03:26#

42 B4: Na, weil sie die ahm die Vorstellung vom Rechnen mit Termen und Potenzen noch nicht
 43 so integriert haben. (.) Also was Potenzen sind und ähm ja, dass man halt Wurzel nur aus
 44 Produkten oder Summen ah Produkten und (.) ah Quotienten ziehen kann. Und warum das
 45 so ist, also die Rechenregeln dahinter, das ist das Problem. #00:03:48#

46 I: Also die Übung. #00:03:51#

47 B4: Genau. Und dass zum Beispiel ein Binom, das Quadrat eines Binoms, also $a + b$ zum
 48 Quadrat, nicht das gleiche ist wie a Quadrat plus b Quadrat. Und das ist ja auch dann da der
 49 Fehler, dass dann die Wurzel quasi $a + b$ bei ihnen ist und ja. #00:04:07#

50 I: Mhm (.) Ist es in Ihren Augen sinnvoll auch einen Beweis zur Veranschaulichung des
 51 Satzes im Unterricht durchzunehmen? Wenn ja, zu welchen Zeitpunkt? #00:04:18#

52 B4: Also den Beweis mache ich schon, aber geometrisch halt immer. (.) Man. (.) Man kann
 53 natürlich den Lehrsatz auch mit Termen (.) machen, also beweisen. Aber das, ah, fällt ihnen
 54 in der dritten Klasse noch schwer. Also früher war es besser in der vierten Klasse, als der
 55 Pythagoras eingeführt worden ist. Dadurch, dass er jetzt in der dritten ist, ich finde es ein
 56 bisschen zu früh, weil da die Terme erst kommen, und dann ist es schwer ihnen, dass nur
 57 mit, ah, Termen zu zeigen und halt mit Binomen quadrieren und so weiter. Und darum mache
 58 ich es eher anschaulich, eben mit so Puzzles, dass sie das halt legen (.) und sehen, dass die
 59 Quadrate gleich sind. #00:04:56#

60 I: Da müssen sie dann danach ausschneiden, oder? #00:04:59#

61 B4: Genau. Sie kriegen dann was zum Ausschneiden, wo sie halt das dann so legen können,
 62 dass dann zwei große Quadrate entstehen und in dem einen ist dann, hier eben sind die zwei
 63 kleineren Quadrate drin, in anderen das große und der Rest sind so Rechtecke und dadurch
 64 sehen sie dann, dass das gleich ist. #00:05:16#

65 I: Mhm (.) und machen Sie das zum Beginn oder mittendrin einmal oder eher zum Schluss?
 66 #00:05:22#

67 B4: Nein, das mach ich gleich am Anfang. (.) Nur so, ohne dass das überhaupt noch was mit
 68 dem Pythagoras zu tun hat. Also so, auf (.) kriegen sie die Aufgabe, dass sie halt aus diesen
 69 Puzzleteilen zwei gleich große Quadrate legen sollen, und dann ergibt es sich, dass dann in
 70 diesen zwei gleichgroßen Quadraten eben ein, äh, Quadrat mit der Seitenlänge sage ich jetzt
 71 mal, ich nehme das klassische c ist und zwei kleinere Quadrate mit den Seitenlänge a und b ,
 72 und dann sehen sie, dass die gleich sein müssen, die Flächeninhalt, und dann legen wir es
 73 erst an das Dreieck an. (.) Ja. #00:05:55#

74 I: Okay (.) und welche Grundvorstellungen sind Ihrer Meinung nach am ausschlaggebenden
 75 bei man lernen des Satzes von Pythagoras? #00:06:07#

76 B4: Vorstellungen, hm (..) Ja. (.) Ich glaube, sie müssen auf alle Fälle wissen, was ein
 77 rechtwinkliges Dreieck ist, was die Eigenschaften sind. (.) Damit sie es nicht bei allen
 78 anderen Dreiecken auch probieren, es anzuwenden. (lachen) Und dann natürlich das
 79 Anschauliche. Ich finde, in der Unterstufe ist noch weniger das Beweisen mit Termen,
 80 sondern mehr das Anschauliche, das sie es verstehen. (.) Ja. #00:06:37#

81 I: Sonst noch irgendwelche Knackpunkte, auf die Ihrer Meinung nach besonders viel Wert
 82 gelegt werden sollte. #00:06:45#

83 B4: Also ich finde besonders viel Wert gelegt werden sollte, dass man nicht ihnen einlernt a
84 Quadrat plus b Quadrat ist c Quadrat, (.) sondern dass man die Begriffe verwendet. Also das
85 Hypotenusenquadrat ist gleich der Summe der Kathetenquadrate und dass man immer
86 wieder andere Buchstaben verwendet. Also dass sie immer wieder am (.) am rechtwinkligen
87 Dreieck zu, ah, ah, (.) zählen oder es zeigen sollen, wo ist die Hypotenuse, wo befinden sich
88 die Katheten. Also, das muss man zuerst üben mit verschiedenen Buchstaben und dann eben
89 (.) den Satz als, ah, die Summe der Kathetenquadrat ist, dass Hypotenusenquadrat und nicht
90 a Quadrat plus b Quadrat ist c Quadrat. (.) Sonst machen sie das immer so, egal wo der rechte
91 Winkel ist. (.) Ja, also dass der rechte Winkel, der nicht immer im Gamma, beim normal
92 beschrifteten Dreieck, und daher ist es ganz, ganz wichtig, dass man ihnen auch den rechten
93 Winkel in Alpha legt, in Beta legt, das dann auch einmal c Quadrat plus b Quadrat gleich a
94 Quadrat sein kann und solche Sachen. Damit sie sich das nicht ein Lernen als Formel und
95 dann immer auf die gleiche Weise machen, egal wo, der rechte Winkel ist. (.) Das ist ganz
96 wichtig. #00:07:54#

97 I: (.) Ahm, das überschneidet sich jetzt vielleicht ein bisschen mit der nächsten Frage, ob Sie
98 konkrete Strategien zur Vermeidung solcher Fehlvorstellungen und häufigen Fehlern haben
99 und wenn ja, welche? #00:08:07#

100 B4: Ja eben, und diese Strategien sind eben, dass ich Dreiecke verschieden beschriften
101 lassen, so dass ich den rechten Winkel auch einmal in Alpha, in Beta lege, nicht nur in mein
102 Gamma (.) ah und ah dann die Seiten auch verschieden beschriftet sind und sie dann halt die
103 (.) den Pythagoras der Beschriftung dann vom Dreieck so anwenden müssen. Und dann
104 lernen sie eben (.) den Satz nicht als a Quadrat plus b Quadrat ist c Quadrat, sondern eben
105 auf diese Art und Weise, dass dem eben das Hypotenusenquadrat gleich die Summe der
106 Kathetenquadrate ist. #00:08:39#

107 I: Okay gut, dann haben wir eigentlich schon fast am Ende. (.) Möchten Sie noch irgendwas
108 abschließend loswerden, wo Sie sagen, das könnte noch interessant sein für das Thema oder
109 ist noch wichtig, wo sie (.) was zu sagen ist? #00:08:53#

110 B4: Also auf alle Fälle sollte man, bevor man den Pythagoras gemacht hat, schon ein
111 bisschen mit Termen was gemacht haben. (.) Ah und Potenzen vorher schon, (.) also was
112 überhaupt Quadrate oder hoch drei bedeutet. Also (.) mit ihnen solche Übungen machen und
113 dann das die Umkehrung im Wurzel ziehen ist. Das sollte man auf alle Fälle vorher machen,
114 weil sonst, wenn man das mittendrin als vermischt, dann ist das zu viel auf einmal. (.) Und
115 natürlich die Handhabung von Taschenrechner. (...) Ja, (.) also außer man macht halt so
116 ganz einfache Beispiele, wo man die (.) die Wurzel auch erraten kann. Ahm aber (.) der
117 Taschenrechner, den müssten sie halt vorher (.) dann auch schon beherrschen. (.) Sonst geht
118 das nicht das Thema. #00:09:37#

119 I: Okay, dann sage ich vielen, vielen Dank für das Interview. #00:09:41#

120 B4: Bitteschön. #00:09:42#

Interview 5 durchgeführt am 27.06.2022

- 1 I: Bevor wir auf die eigentlichen Fragen eingehen, brauchte ich bitte Ihren Namen, Ihr Alter
2 und Geschlecht und die Schule, in der Sie unterrichten. #00:00:09#
- 3 B5: T. W., 51, männlich und im BRG Kirchdorf an der Krems. #00:00:15#
- 4 I: Okay. (.) Und wie lange sind Sie schon als Lehrperson tätig? #00:00:19#
- 5 B5: Seit (..) 26 Jahren. #00:00:24#
- 6 I: Wie oft hatten Sie in etwa schon die Möglichkeit, den Lehrsatz des Pythagoras zu
7 unterrichten? #00:00:34#
- 8 B5: (...) Puh, circa 10-mal, (.) aber ganz sicher weiß ich es nicht. #00:00:38#
- 9 I: Ein ungefährender Richtwert das reicht. (.) Und was trägt Ihren Erfahrungen nach zu einem
10 gelingenden Lernen des Pythagoras Lehrsatz bei? #00:00:50#
- 11 B5: (.) Also als Grundlage müssen sie zuerst einmal mit (.) ah (.) Quadrate und Wurzeln
12 umgehen können und auch von der Geometrie mit rechtwinkligen Dreiecken. Das sind
13 einmal die Grundlagen. Dann (.) ist wichtig, (..) dass sie den Lehrsatz von Pythagoras
14 praktisch schon einmal verstanden haben, (.) auch mit einem Beweis. (..) Ah, dann müssen
15 sie es natürlich, das habe ich bei den Grundlagen vergessen, Formeln umformen können,
16 damit sie eben je nachdem ob die Hypotenuse oder Kathete zum Ausrechnen ist, die Formel
17 richtig hinschreiben können. (.) Und es ist sicher wichtig, dass sie sowohl das in der Form $a^2 + b^2 = c^2$
18 Quadrat plus b Quadrat gleich c Quadrat als auch $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ Wurzel aus c Quadrat
19 minus b Quadrat hinschreiben können. (.) Ja, und außerdem, dass sie den Pythagoras auch
20 in andere Figuren erkennen, wo man rechtwinklige Dreiecke (..) sucht. (.) Und (..) Ja, (.) das
21 war es eigentlich. #00:01:55#
- 22 I: Und gehen Sie beim Unterrichten des Lehrsatzes immer auf dieselbe Art und Weise vor?
23 Wenn ja, warum beziehungsweise warum nicht? #00:02:04#
- 24 B5: Da muss ich dazu sagen, dass ich jetzt durch meine andere Tätigkeit das schon einige
25 Jahre nicht mehr gemacht habe. (..) Aber ich habe schon (.) einige Zeit ein bisschen andere
26 Einstiege probiert, einfach weil man als Junger das öfter probiert und habe dann, (.) habe ich
27 einfach eine gewisse Erfahrung gehabt und (.) die sich bewährt hat, (.) weil man macht (.)
28 jetzt ist er so in der dritten Klasse (..) praktisch der Einführung. In der vierten Klasse (.)
29 kommt er dann noch einmal, auch im Körper, also in Raumanwendung (.) und jetzt habe ich
30 dann eigentlich immer die gleiche (.) ah gleiche Vorgangsweise, die sich einfach bewährt
31 hat (.) nach mehreren Versuchen. Wobei nachdem es jetzt schon einige Jahre nicht mehr
32 gemacht und nicht ganz sicher bin, (.) ah, wie genau der Ablauf jetzt ist, (.) das weiß ich
33 nicht auswendig. #00:02:54#
- 34 I: Und welche Fehler treten Ihren Erfahrungen nach beim Erlernen des Satzes am häufigsten
35 auf? #00:03:03#
- 36 B5: (.) Dass sie einfach zum Beispiel nur die Formel wissen, aber nicht (.) ah, nicht klar ist,
37 dass das nur für das rechtwinklige Dreiecke, ah, gilt. Dass Hypotenuse und Kathete
38 verwechselt werden. Da es bei anderen Bezeichnungen, wenn es zum Beispiel eine
39 Diagonale, welche in einem Rechteck ist, (.) ah, dass eben falsch formuliert wird. (.) Ja und
40 dann eben natürlich, wie ich es vorhin schon gesagt habe, Formeln falsch umgeformt werden
41 (.) und dadurch Fehler passieren. Oder eben, dass sie das nicht können mit Wurzeln und
42 Quadraten umgehen. (.) Also, dass sie im Prinzip oft in die Richtung geht, dass statt $a^2 + b^2 = c^2$

43 Quadrat plus b Quadrat gleich c Quadrat letztlich durch falsche Umformungen a plus b gleich
44 c (.) in die Richtung rauskommt. #00:03:48#

45 I: Okay (.) und (..) Ahm (..) Und welche Fehlvorstellungen liegen Ihrer Erfahrung noch
46 hinter diesen Fehlern? Also die Gründe dahinter. #00:04:03#

47 B5: Einerseits das sie formale (.) ah Methoden nicht beherrscht werden, (.) so Umformungen
48 und solche Geschichten. Ah, (..) dann eben der Fehler, der ist, dass man eben zum Beispiel
49 aus Wurzel aus (.) c Quadrat minus b Quadrat nur als Beispiel einfach (.) ah c minus b macht.
50 (.) Also, dass man praktisch diese, (.) diese Rechenregeln für Wurzeln und Quadrieren
51 verwechselt. Ja, (.) und, dass man eben, weil man den Beweis nie gemacht hat, dass das nur
52 in einem rechtwinkligen Dreieck ist, dass man einfach den Satz anwendet, ohne dass man
53 schaut, ob das ein rechtwinklige Dreieck ist, also von der Geometrie Seite her. #00:04:48#

54 I: Mhm (.) Okay, da sind wir eigentlich eh schon beim nächsten Thema Beweise. Das heißt
55 Sie machen auch immer einen Beweis zur Veranschaulichung des Satzes. Und was machen
56 Sie da, beziehungsweise zu welchem Zeitpunkt machen Sie ihn? #00:05:00#

57 B5: Ah (.) Relativ bald. Nicht direkt zum Einstieg, aber spätestens in der (.) zweiten, dritten
58 Stunde. (.) Und (.) ah (.) ich mache (..) einerseits geometrisch mit (.) mit den Flächen von
59 den Quadraten. (.) Andererseits aber auch diese (..) ah, (.) dass weiß ich jetzt nicht ganz
60 sicher. (.) Aber ich, ich habe teilweise auch zwei verschiedene Beweisarten gemacht, aber
61 die einfach die Flächenvergleiche die habe ich immer gemacht. #00:05:38#

62 I: Ja okay, das ist eh so der Standardbeweis. #00:05:42#

63 B5: Ja da hätte ich mich etwas besser vorbereiten müssen. (lachen) #00:05:45#

64 I: Nein, das ist eh ganz normal. Es gibt auch noch Beweise, bei denen man etwas
65 ausschneiden muss und so. #00:05:49#

66 B5: Ja genau das habe ich eh auch gemacht. Aber da kann ich mich jetzt nicht mehr genau
67 erinnern. #00:05:52#

68 I: Das ist nicht so tragisch. Es geht nur darum, ob eben einer gemacht worden ist. #00:05:56#

69 B5: Grundsätzlich schon ja. #00:05:58#

70 I: Und welche Grundvorstellungen sind Ihrer Meinung nach ausschlaggebend beim Erlernen
71 des Satzes von Pythagoras? Das ist eh schon einiges genannt worden, das überschneidet sich
72 ein bisschen. #00:06:11#

73 B5: (.) Ja (..) Grundvorstellungen. Ist eigentlich eh das, dass ich schon gesagt habe.
74 #00:06:15#

75 I: Meinen Sie das zu Beginn? #00:06:17#

76 B5: Ja #00:06:18#

77 I: Also haben Sie nichts mehr zu ergänzen? #00:06:20#

78 B5: Nein. #00:06:21#

79 I: Okay. (.) Und (.) Auf welche Knackpunkt Punkte sollten Ihrer Meinung nach besonders
80 viel Wert gelegt werden? #00:06:29#

81 B5: Eben Formeln umformen, dass man. (.) Also mir ist wichtig, dass zum Beispiel entweder
82 gleich steht. (.) Ah wenn eine Kathete zum Ausrechnen ist in der richtigen Form. a Quadrat

83 ist gleich c^2 minus b^2 oder gleich a^2 ist gleich die Wurzel aus c^2 minus
84 b^2 , dass das von Anfang an richtig dasteht. (.) Dass, wenn (.) ah in komplexeren
85 Figuren das gemacht wird, (.) dass man dann eine Skizze macht, und das rechtwinklige
86 Dreieck (.) ah irgendwie farbig markiert. (.) Ja, also einerseits vom geometrischen Aspekt,
87 (.) dass man das wirklich gut sieht, was wirklich (.) wo das rechtwinklige Dreieck ist,
88 andererseits vom (.) vom algebraischen her (.) Diese, diese Umformungen. (.) Das sind die
89 entscheidenden Aspekte. #00:07:21#

90 I: Okay. (.) Haben Sie konkrete Strategien zur Verminderung von den Fehlvorstellungen,
91 Stellungen und häufigen Fehler, die Sie vorhin genannt haben? #00:07:30#

92 B5: Eben, dass immer vorher die Formel dort stehen muss und das immer eine Skizze
93 gemacht werden muss und dass ich zum Beispiel nicht akzeptieren, wenn sie gleich
94 hinschreiben (.) ah drei a^2 plus vier a^2 gleich oder so, sondern da muss zuerst die
95 Formel dort stehen. (.) Aber das muss natürlich Jahre vorher immer sowieso geübt worden
96 sein. #00:07:49#

97 I: Das machen Sie dann bei anderen Themen also genauso? #00:07:52#

98 B5: Genau, wenn ich vorhin Flächenberechnung gemacht habe, muss vorher die Formel dort
99 stehen. Da muss, wenn ich eine gewisse Größe ausdrücken möchte, in der Formel, muss das
100 schon vorher in der Formel gemacht werden. Ah (.) und dann sollte das beim Lehrsatz vom
101 Pythagoras schon eigentlich klar sein, genauso vom Geometrischen her (.) wenn eine
102 Geometrieaufgabe da ist, dann sollte eine Skizze da sein. #00:08:12#

103 I: Also eine gewisse Ordnung sollte quasi vorhanden sein. #00:08:14#

104 B5: Erstens eine gewisse Ordnung, aber auch die Routine, dass das immer schon so gemacht
105 worden ist. #00:08:18#

106 I: Okay. (.) Und möchten Sie abschließend noch irgendetwas zum Thema loswerden, wo Sie
107 sagen, dass könnte vielleicht noch interessant sein oder wäre noch wichtig zu erwähnen?
108 #00:08:29#

109 B5: (Lachen) Da kommen sicher ganz viele Antworten. (Lachen) Nein ah (.) ich glaube, dass
110 beim Lehrsatz von Pythagoras, wie bei allen anderen Themen, dass man es, dass man es in
111 einer geordneten Struktur aufbaut, ah (.) mit ein paar verschiedene Aufgabenstellungen
112 zuerst einführt, dann Beweise macht und dann einfach eine gewisse Ordnung, wie sie in
113 Mathematik notwendig ist so wie in allen anderen Themen halt. (.) Ja. #00:08:53#

114 I: Gut dann sage ich Dankeschön, dass Sie sich für dieses Interview Zeit genommen haben.
115 #00:08:59#

116 B5: Kein Problem. #00:09:01#