

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff
Eine empirische Studie unter Lehramtsstudierenden

verfasst von / submitted by

Michaela Achleitner, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna, 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 506 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB)
UF Deutsch
UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Roland Steinbauer

Zusammenfassung

Die vorliegende Masterarbeit erforscht die qualitative und quantitative Ausprägung von Aspekten und Grundvorstellungen des Integralbegriffs bei Studierenden des Unterrichtsfaches Mathematik vor und nach einer fachdidaktischen Lehrveranstaltung. Durch eine schriftliche Datenerhebung zu beiden Zeitpunkten wurden mit offenen Schreibimpulsen Antworten gesammelt, diese den Grundvorstellungen und Aspekten zugeordnet und schließlich die Ergebnisse der beiden Erhebungszeitpunkte miteinander verglichen. Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass bezüglich des unbestimmten Integrals hauptsächlich der Stammfunktionsaspekt und die damit verbundenen Rekonstruktionsgrundvorstellung auftreten. Die Flächeninhaltsgrundvorstellung prägt die Äußerungen zum bestimmten Integral. Außerdem konnte bei allen auftretenden Aspekten und Grundvorstellungen eine quantitative und qualitative Steigerung der Ausprägung ausgemacht werden.

Abstract

This master thesis investigates the qualitative and quantitative occurrence of *Aspekte* and *Grundvorstellungen* of the integral among BEd students before and after taking a mathematics didactic course. Answers from both dates were collected through a written survey with open questions which were assigned to *Aspekte* and *Grundvorstellungen* and compared. The results show that the *Stammfunktionsaspekt* and the strongly associated *Rekonstruktionsgrundvorstellung* are dominant in most answers concerning the indefinite integral (*unbestimmtes Integral*). Regarding the definite integral (*bestimmtes Integral*) most answers refer to the *Flächeninhaltsgrundvorstellung*. Additionally, a qualitative and quantitative increase in all *Aspekte* and *Grundvorstellungen* was found.

Danksagung

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um einige dankende Worte an diejenigen zu richten, die mich beim Schreiben dieser Masterarbeit unterstützt und so einen Teil zu meinem Studienabschluss beigetragen haben.

Ein großer Dank gilt Herrn ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Roland Steinbauer, der mich sehr hilfsbereit, geduldig und engagiert unterstützt hat, mir durch seine ausführlichen Feedbacks und Korrekturen zur Seite gestanden ist und mir in vielen langen Meetings Mut gemacht hat. Für die tolle Zusammenarbeit möchte ich mich herzlich bedanken!

Außerdem möchte ich mich beim gesamten Team des BELLA-Projektes für die Möglichkeit bedanken, an der Auswertung der Studie mitzuwirken.

Meinen Eltern und meinem Lebenspartner gilt mein größter Dank. Sie haben mir dieses Studium ermöglicht, mich im Laufe meines Studiums immer unterstützt, mir Mut gemacht und in mich mehr Vertrauen gesetzt als ich je aufbringen hätte können. Die vielen Gespräche und der Rückhalt, den ich erhalten habe, haben mir zum Abschluss meines Studiums verholfen.

Schließlich danke ich auch meiner Familie und meinen Freunden für die offenen Ohren, die emotionale Unterstützung und die Freude, die sie bei Erfolgen immer mit mir geteilt haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
A Theoretischer Hintergrund	2
1 Die Fachmathematik des Integralbegriffs	2
1.1 Grundlegendes zur Integralfunktion	2
1.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	9
1.3 Der analytische Integralbegriff	16
1.4 Das Integral als Mittelwert	25
1.5 Fazit	33
2 Die Fachdidaktik des Integralbegriffs	34
2.1 Aspekte und Grundvorstellungen mathematischer Begriffe	34
2.2 Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff	37
2.3 Zusammenhänge zwischen Aspekten und Grundvorstellungen	43
B Empirischer Teil	45
1 Hypothesen	46
1.1 Hypothesen zum unbestimmten Integral	46
1.2 Hypothesen zum bestimmten Integral	47
2 Datenerhebung	48
2.1 Datengrundlage	48
2.2 Stichprobe	48
2.3 Erhebungsinstrument	49
2.4 Durchführung der Datenerhebung	50
3 Datenauswertung und -verarbeitung	52
3.1 Codierung der Fragebögen	52
3.2 Kategorisierung und Codierung der Äußerungen	52
4 Ergebnisdarstellung	57
4.1 Ergebnisse zum unbestimmten Integral	57
4.2 Ergebnisse zum bestimmten Integral	68
5 Conclusio und Ausblick	75
Literaturverzeichnis	78
Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	80
Anhang	82

Einleitung

Die Integralrechnung stellt eines der großen Teilgebiete der Analysis dar und besitzt dementsprechend in der Sekundarstufe II einen großen Stellenwert. Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit Aspekten und Grundvorstellungen des Integralbegriffs und ihren Ausprägungen bei Lehramtsstudierenden des Faches Mathematik.

Im ersten Abschnitt A erfolgt eine kurze Darstellung fachmathematischer Inhalte der Integralrechnung. Dabei wird ausgehend von der anfänglichen Vorstellung des Integrals als Fläche schließlich ein rein analytischer Integralbegriff erarbeitet. Anschließend werden die fachdidaktischen Begriffe *Aspekt* und *Grundvorstellung* eingeführt. Es folgt eine didaktische Betrachtung der dargestellten fachmathematischen Inhalte, indem deren Aspekte herausgearbeitet und Verbindungen zu den Grundvorstellungen geschaffen werden.

Der zweite Teil dieser Arbeit, Abschnitt B, handelt von einer Studie zu Aspekten und Grundvorstellungen des Integralbegriffs bei Lehramtsstudierenden des Faches Mathematik. Diese Studie fand im Zuge des Projektes “BELLA - Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis“ statt, die an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien im Studienjahr 2018/19 durchgeführt wurde. Es wurden dabei eine verbundene Stichprobe erstellt und zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten, nämlich zu Beginn und am Ende einer fachdidaktischen Lehrveranstaltung, Daten erhoben und anschließend verglichen. Die Fragebögen, die als Erhebungsinstrument verwendet wurden, befinden sich im Anhang dieser Arbeit. Im Zuge dieses Abschnittes B werden zuvor die angenommenen Hypothesen, die Datenerhebung sowie die Datenauswertung genau erläutert. Schließlich werden die Ergebnisse der Studie dargestellt und analysiert. In einem abschließenden Kapitel B.5 erfolgen eine Zusammenfassung und eine Interpretation der Ergebnisse sowie ein Ausblick auf zukünftige Forschungen in diesem Bereich.

Ziel dieser Masterarbeit ist es, herauszufinden, welche Aspekte und Grundvorstellungen bei Lehramtsstudierenden des Unterrichtsfaches Mathematik zum Integralbegriff wie stark ausgeprägt sind und welche Veränderungen in der Ausprägung durch die theoretische Beschäftigung mit Aspekten und Grundvorstellungen beobachtet werden können. Die Ergebnisse dieser Arbeit sollen vor allem dazu dienen, Impulse zur Verbesserung der fachlichen und fachdidaktischen Lehre sowie zu deren Verzahnung zu geben, indem den jeweiligen Inhalten mehr oder weniger Zeit im Zuge der Ausbildung gewidmet wird.

A Theoretischer Hintergrund

Die Integralrechnung stellt neben der Differentialrechnung den Kern eines klassischen Teilbereichs der Mathematik, der Analysis, dar. Sie entwickelte sich aus der Frage, wie Flächen und Volumina von krummlinig berandeten Figuren berechnet werden können. Da diese krummlinigen Figuren durch Funktionen beschrieben werden können, ist es die Grundaufgabe der Integralrechnung, die von der x-Achse und der Funktion eingeschlossene Fläche zu ermitteln. Die Berechnung von Integralen wird dabei als Integration bezeichnet [Glaubitz, Rademacher & Sonar: 2019, S. 229].

Der Integralbegriff ist jedoch weitreichender und umfasst neben der Flächeninhalts- bzw. Volumsberechnung auch andere Aspekte. So kann das Integral beispielsweise dafür verwendet werden, Mittelwerte zu bilden, Rückschlüsse vom Änderungsverhalten auf die ursprüngliche Funktion zu ziehen und im Zuge dessen Summen zu berechnen [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 206].

Diese Themen stellen die Grundlage des ersten Teils dieser Masterarbeit dar, in dem sowohl eine fachmathematische als auch eine fachdidaktische Übersicht über die Integralrechnung gegeben wird.

1 Die Fachmathematik des Integralbegriffs

In diesem Abschnitt der Arbeit besprechen wir die fachlichen Grundlagen des Integralbegriffs und beschäftigen uns insbesondere mit einer genauen Abgrenzung der Begriffe *Berandung* und *Integralfunktion* sowie mit der Bedeutungen des Rekonstruierens für das Integrieren. Außerdem wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung der wichtige Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren ersichtlich. Schließlich soll hier neben der Auffassung des Integrals als Flächeninhalt auch die Bedeutung des Integrals als Mittel sowie als Summe herausgearbeitet werden.

1.1 Grundlegendes zur Integralfunktion

Eine Möglichkeit, die Integralfunktion zu motivieren, ist zum Beispiel die Fragestellung, wie von der Geschwindigkeit eines Autos, die man zu jedem Zeitpunkt kennt, dessen zurückgelegter Weg rekonstruiert werden kann. Dies führt uns zu der grundlegenden Idee des Integralbegriffs. Diesem nähern wir uns, indem wir ein ähnliches Beispiel heranziehen und so eine genaue Definition der Begriffe *Berandung* und *Integralfunktion* vornehmen. Wir betrachten also die folgende weit verbreitete, motivierende Aufgabe, siehe auch [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 206].

Beispiel 1. Eine leere Badewanne wird eine Zeitlang gleichmäßig mit Wasser befüllt, bis zu einem gewissen Zeitpunkt die Wasserzufuhr gestoppt wird und gleichzeitig der Abfluss geöffnet und nach einiger Zeit wieder geschlossen wird.

Als Graph dargestellt ergibt sich für die Zuflussgeschwindigkeit die Abbildung A.1

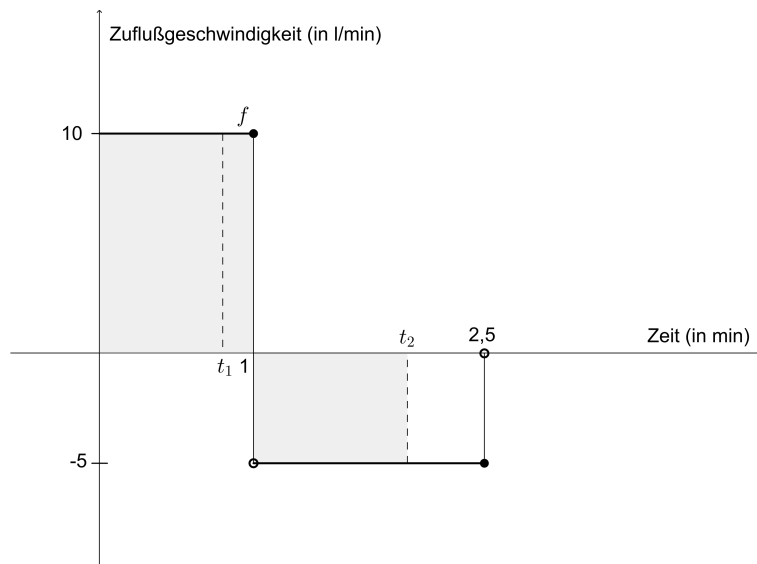


Abbildung A.1: Zuflussgeschwindigkeit angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 206]

Die Aufgabe lautet nun, die Wassermenge der Wanne zu jedem Zeitpunkt t zu berechnen. Hierfür bezeichnen wir die Funktion in Abbildung A.1 als *Berandung*, die die Zuflussgeschwindigkeit in jedem Zeitpunkt darstellt.¹ Von dieser Berandung ausgehend soll nun also laut obiger Aufgabenstellung die Wassermenge der Wanne zu jedem Zeitpunkt rekonstruiert werden.

Um diese Rekonstruktion vornehmen zu können, betrachten wir im nächsten Schritt zuerst die Wassermenge für einen Zeitpunkt t_1 während der Zuflussphase und dann für einen Zeitpunkt t_2 während der Abflussphase. Wir berechnen nun das Wasservolumen zum Zeitpunkt t_1 , indem wir die bis zum Zeitpunkt t_1 vergangene Zeit mit der Zuflussmenge multiplizieren. Aus elementargeometrischen Überlegungen ergibt sich, dass es sich bei den daraus hervorgehenden mathematischen Ausdrücken um Produkte, also um Flächeninhalte, handelt:

Das Produkt

$$10 \frac{1}{\text{min}} \cdot t_1 \text{ min} = 10 \cdot t_1 \text{ l}$$

¹Die Terminologie *Berandung* spielt auf die Auffassung der Integralfunktion als Flächenfunktion unter eben jener Kurve an, welche den 'Rand' dieser Fläche darstellt. Die *Berandung* ist daher vereinfacht ausgedrückt der 'Rand' der Flächen- bzw. Integralfunktion.

beschreibt die Wassermenge in der Wanne für einen Zeitpunkt t_1 während der Zuflussphase, die in Abbildung A.1 zu sehen ist. In diesem Produkt wird die Zuflussgeschwindigkeit, die in Liter pro Minute gemessen wird, mit der bis zum Zeitpunkt t_1 bereits vergangenen Zeit multipliziert. Das Ergebnis dieser Rechenoperation ist dann das Volumen in der Wanne zum Zeitpunkt t_1 , angegeben in der Maßeinheit Liter. Die beiden Faktoren des Produkts können als Länge und Breite eines Rechtecks aufgefasst werden. In dieser Gleichung handelt es sich also um die Fläche unter der Berandung f von 0 bis t_1 .

Zur Berechnung der Wassermenge zum Zeitpunkt t_2 , der sich in der Abflussphase befindet, muss nun die abgeflossene Wassermenge bis zum Zeitpunkt t_2 von der bis zu diesem Zeitpunkt eingeflossenen Wassermenge abgezogen werden. Also wird von den bis zum Zeitpunkt $t = 1$ eingefüllten 10 l genau jene Menge subtrahiert, die bis zum Zeitpunkt t_2 wieder abgeflossen ist

$$10 - 5(t_2 - 1) \text{ l}.$$

Im Kontext von Abbildung A.1 bedeutet das, dass die Fläche des Rechtecks unterhalb der Zeitachse bis zu t_2 von der Rechteckfläche oberhalb subtrahiert wird. Das daraus hervorgehende Volumen V ist schließlich in Abhängigkeit von der Zeit t wie folgt gegeben:

$$V(t) = \begin{cases} 10 t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5(t - 1) & \text{für } 1 < t \leq 2,5 \\ 2,5 & \text{für } t > 2,5 \end{cases}$$

In der folgenden Abbildung ist nun das Wasservolumen in Abhängigkeit von der Zeit, d.h. der Graph von V , dargestellt:

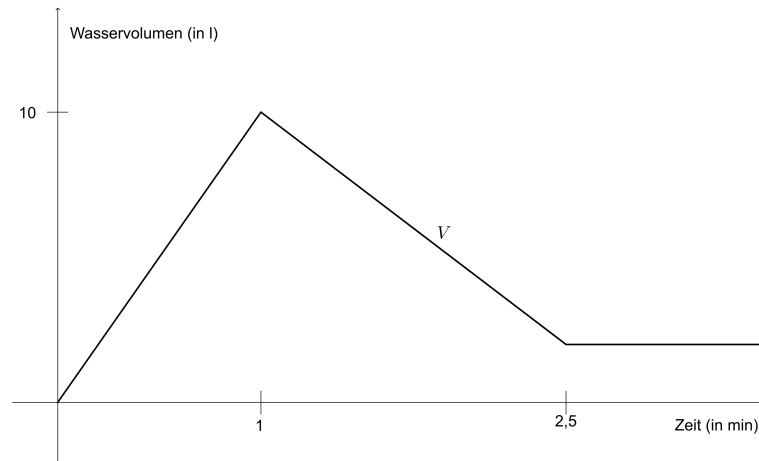


Abbildung A.2: Wasservolumen angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 207]

Blicken wir nun zurück auf die bisherigen Überlegungen, so kann man erkennen, dass für die Berechnung des Wasservolumens zwei Produkte verwendet wurden, die eine wichtige geometrische Bedeutung tragen: $10 \cdot t_1$ und $5 \cdot (t_2 - 1)$ sind offensichtlich Rechteckflächen, wobei zur Bestimmung des Wasservolumens zu einem allgemeinen Zeitpunkt t die oberhalb der horizontalen Achse gelegenen Flächeninhalte positiv und die unterhalb liegenden negativ gezählt werden. So kann die Funktion $V(t)$, die das Wasservolumen in Abhängigkeit von der Zeit darstellt, als eine Summe von an ihre Vorzeichen gebundene Rechteckflächen interpretiert werden. Man spricht hier von einem *orientierten Flächeninhalt*.

Bisher haben wir also aus den gegebenen Zuflussgeschwindigkeiten auf das Wasservolumen zu jedem Zeitpunkt zurückgeschlossen, was nichts anderes bedeutet, als dass wir aus $V'(t)$, also der momentanen Änderungsrate des Wasservolumens, das Wasservolumen $V(t)$ rekonstruiert bzw. wiederhergestellt haben. *Wiederherstellen* wird im Lateinischen mit *integrare* übersetzt, was uns bereits zu einer bekannten Bezeichnung für diesen Rekonstruktionsprozess führt, nämlich dem *Integrieren* [Danckwerts & Vogel: 2006, S. 98].

Wir können nun also vermuten, dass das Berechnen der Fläche zwischen einer Kurve und der horizontalen Achse ein Rekonstruktionsprozess ist, der uns in weiterer Folge zum Integralbegriff führen wird. Die Details dieses Zusammenhangs werden im Folgenden durch schrittweises Variieren des obigen Beispiels verdeutlicht. Wir verändern also die Voraussetzungen des Beispiels so, dass es sich dann bei der Berandung um eine krummlinige Funktion handelt und finden eine Möglichkeit, auch hier die Fläche ermitteln zu können.

In Beispiel 1 könnte eine erste Änderung hin zu einer krummlinigen Volumsfunktion darin bestehen, dass die Zuflussgeschwindigkeit zunächst nicht mehr stückweise konstant ist. Eine solche erste Veränderung der ursprünglichen Funktion ist in Abbildung A.3 dargestellt. In Abbildung A.3 wurde die Zuflussgeschwindigkeit $V'(t)$ des Wassers so verändert, dass sie nicht mehr stückweise konstant ist. Im Kontext von Beispiel 1 könnte der Wasserhahn etwa gleichmäßig immer weiter geöffnet worden sein. Den orientierten Flächeninhalt kann man nun wieder elementargeometrisch folgendermaßen berechnen:

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 5(t - 1) & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

Bis zum Zeitpunkt $t = 1$ ergibt sich die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den beiden Kathetenlängen t und $f(t)$. Die Funktion $f(t)$ ist bis zum Zeitpunkt $t = 1$ eine lineare Funktion mit Steigung 10. Daraus ergibt sich für die Fläche bis zum Zeitpunkt $t = 1$ das obige Produkt. Für $t > 1$ betrachten wir eine Rechteckfläche mit den Seitenlängen 5 und $t - 1$. Um das Wasservolumen in der Wanne zu berechnen, wird nun diese Fläche von der zuvor ermittelten Dreiecksfläche bis zum Zeitpunkt $t = 1$ abgezogen.

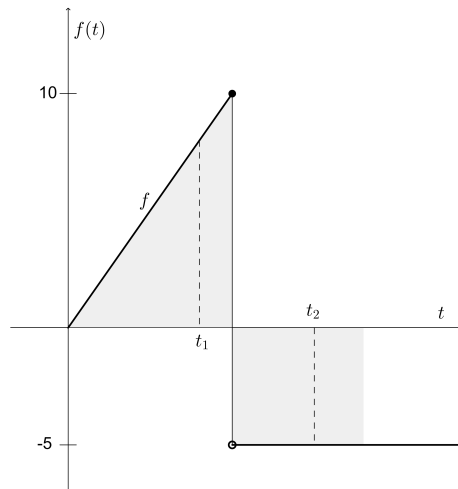


Abbildung A.3: Zuflussgeschwindigkeit Variation 1 angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 208]

Mit dieser Flächeninhaltsformel haben wir nun das Wasservolumen zu jedem Zeitpunkt rekonstruiert, dessen Graph in Abbildung A.4 dargestellt ist:

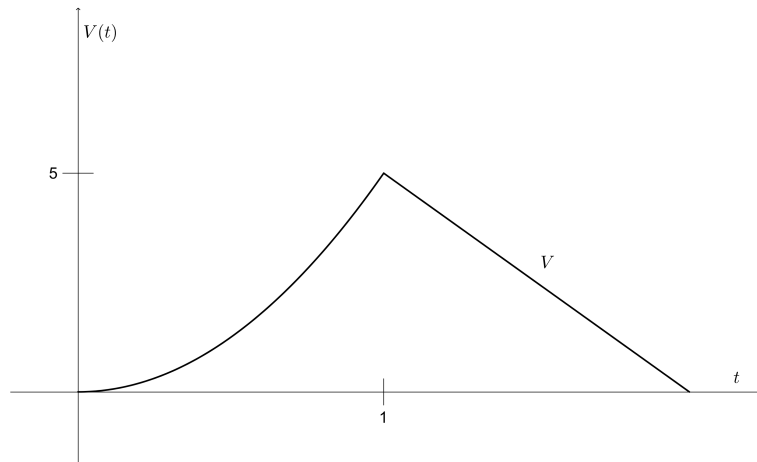


Abbildung A.4: Wasservolumen Variation 1 angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 208]

Für stückweise lineare Verläufe der Zuflussgeschwindigkeit kann also die Fläche relativ simpel berechnet werden. Nun stellt sich jedoch die entscheidende Frage, wie die Fläche ermittelt werden kann, sollte die Funktion f beispielsweise wie in Abbildung A.5 aussehen. Ein solcher Graph für die Zuflussgeschwindigkeit könnte etwa entstehen, wenn jemand sowohl beim Einlassen als auch beim Auslassen der Badewanne den Wasserhahn

mit nicht konstantem Kraftaufwand dreht [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 208].

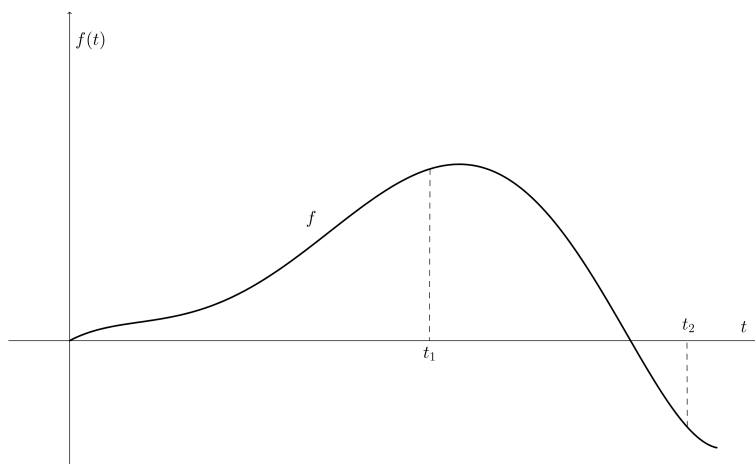


Abbildung A.5: Zuflussgeschwindigkeit Variation 2 angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 209]

Wie auch in den bereits besprochenen Situationen, kann hier durch das Berechnen der von f begrenzten Fläche von der Zuflussgeschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt t auf das Wasservolumen zu jedem Zeitpunkt t geschlossen werden.

Bevor wir uns jedoch der Frage widmen, wie dieses Flächenstück berechnet werden kann, versuchen wir, unser konkretes Beispiel in einen allgemeineren, theoretischen Kontext zu rücken. Wir machen hier also einen Schritt zurück zum Beginn dieses Kapitels und erinnern uns an die Bezeichnung *Berandung* für die Funktion f der Zuflussgeschwindigkeit.

Bisher haben wir von der Zuflussgeschwindigkeit $V'(t)$ auf das Wasservolumen $V(t)$ geschlossen. Allgemein formuliert bedeutet das, dass wir aus der Berandung f eine Funktion, die wir von nun an I nennen, rekonstruiert haben. Mit dem Auffinden der Funktion I soll also nun nicht ein konkretes Wasservolumen, sondern der allgemeine *Gesamteffekt*² einer Berandung f gemessen werden [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 209].

Aus unseren bisherigen Überlegungen kann also, wie bereits angedeutet, geschlossen werden, dass sich die Funktionswerte $I(x)$ der gesuchten Funktion I aus dem orientierten Flächeninhalt der von f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche bis zur Stelle x ergeben. Das bedeutet, dass die über der horizontalen Achse gelegenen Flächenstücke positiv, und die darunter gelegenen negativ gezählt werden. Dieses Vorgehen ist in Abbildung A.6 dargestellt.

Als Ergebnis dieser theoretischen Betrachtung definieren wir die Funktion $I(x)$ als die Rekonstruktion einer Berandung f folgendermaßen:

²Der Überbegriff *Gesamteffekt* soll alle rekonstruierbaren Größen, wie den zurückgelegten Weg, das Wasservolumen in einer Badewanne, etc., umfassen, die innerhalb einer solchen Aufgabenstellung vorkommen können.

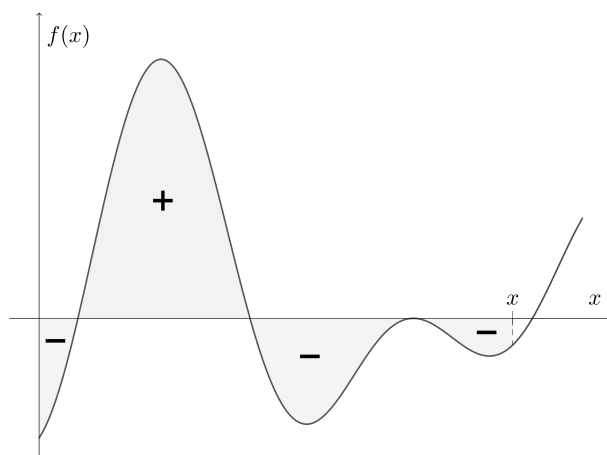


Abbildung A.6: Orientierter Flächeninhalt einer Berandung angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 209]

Definition 1. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine vorgegebene Funktion. Wir definieren die Integralfunktion $I_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$I(x) := \begin{array}{l} \text{Summe aller Flächenstücke oberhalb der x-Achse} \\ \text{minus} \\ \text{Summe aller Flächenstücke unterhalb der x-Achse} \\ \text{(jeweils bis zur Stelle } x\text{).} \end{array}$$

Die so definierte Funktion I heißt *Integralfunktion* von f .

In diesem Abschnitt haben wir durch die Variation eines konkreten Beispiels plausibel gemacht, dass die Rekonstruktion einer Berandung f zum Begriff Integralfunktion I führt, indem man den orientierten Flächeninhalt zwischen der Funktion f und der horizontalen Achse berechnet. Dabei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die betrachteten Flächen überhaupt existieren und berechnet werden können. Wie eine solche Flächenberechnung gelingen kann, wird im Folgenden thematisiert. Hierfür wird ein Verfahren vorgestellt, das für viele, jedoch nicht alle, Berandungen anwendbar ist.

1.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Kapitel stellen wir uns vorwiegend die Frage, wie der orientierte Flächeninhalt einer Kurve berechnet werden kann, und entwickeln ein Verfahren, das uns diese Berechnung möglich macht. Hierfür untersuchen wir zunächst genauer den Zusammenhang von Integralfunktion und Berandung, um schließlich zu erkennen, dass genau der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung diesen Zusammenhang herstellt und die wechselseitigen Beziehung des Differenzierens und Integrierens begründet. Dieser hält schließlich auch eine Lösung für die bisher aufgeworfene Frage bereit, wie der orientierte Flächeninhalt einer krummlinigen Funktion berechnet werden kann.

Zu Beginn dieses Kapitels versuchen wir nun also herauszufinden, was Integralfunktion und Berandung miteinander zu tun haben. Hierfür blicken wir noch einmal zurück zu unserem Anfangsbeispiel, der Badewanne, und vergleichen in den beiden Entwicklungsschritten jeweils die Funktionsgleichungen für die Zuflussgeschwindigkeit f mit jenen für das Wasservolumen V :

$$f(t) = \begin{cases} 10 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -5 & \text{für } 1 < t \leq 2,5 \\ 0 & \text{für } t > 2,5 \end{cases} \quad V(t) = \begin{cases} 10t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -5t + 15 & \text{für } 1 < t \leq 2,5 \\ 2,5 & \text{für } t > 2,5 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 10t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -5 & \text{für } t > 1 \end{cases} \quad V(t) = \begin{cases} 5t^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -5t + 10 & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

Ein Zusammenhang, der aus diesen Beispielen ersichtlich wird, ist: Die Integralfunktion ist differenzierbar und ihre Ableitung ist gleich ihrer Berandung. Im Folgenden versuchen wir, die allgemeine Gültigkeit dieser Behauptung zu beweisen.

Dafür sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und I_f sei die zu f gehörende Integralfunktion. Zunächst untersuchen wir die Differenzierbarkeit von I_f an einer Stelle $x_0 (> a)$, also das Verhalten des Differenzenquotienten

$$\frac{I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)}{h}.$$

Ist nun f monoton wachsend und h positiv, so kann der Zähler dieses Bruchs als Flächenzuwachs interpretiert werden. Dies ist graphisch in Abbildung A.7 dargestellt.

Wir schätzen nun den Inhalt des eingezeichneten Flächenstücks $I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)$ ab, indem wir die Rechteckflächen $f(x_0) \cdot h$ und $f(x_0 + h) \cdot h$ betrachten. Dann ist nämlich

$$f(x_0) \cdot h \leq I_f(x_0 + h) - I_f(x_0) \leq f(x_0 + h) \cdot h.$$

Daraus folgt durch Umformung

$$f(x_0) \leq \frac{I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h). \quad (1)$$

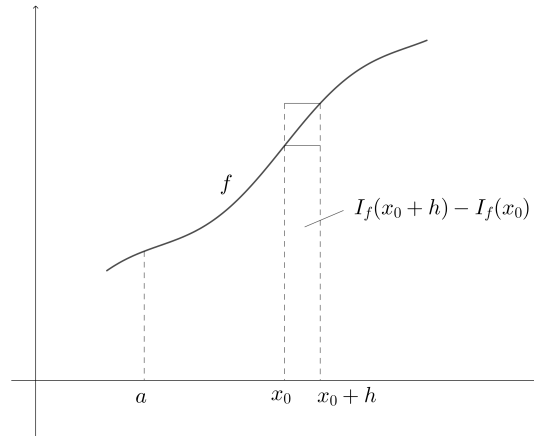


Abbildung A.7: Flächenzuwachs angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 212]

Sollte nun f an der Stelle x_0 stetig sein, also $f(x_0 + h)$ gegen $f(x_0)$ streben für $h \rightarrow 0$, das heißt

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0), \quad (2)$$

dann folgt aus (1), dass

$$f(x_0) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)}{h} \leq f(x_0).$$

Dies bedeutet, dass I_f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, da

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)}{h}$$

existiert und endlich ist. Es gilt ja dann

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_f(x_0 + h) - I_f(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Und damit gilt auch, wie bereits angedeutet,

$$I'_f(x_0) = f(x_0). \quad (3)$$

Wir sind also durch unsere Überlegungen zu dem Schluss gekommen, dass die Integralfunktion I_f an der Stelle x_0 dann differenzierbar ist und die vermutete Gleichung (3) gilt, wenn die Berandung f an dieser Stelle stetig ist. Gleichung (3) zeigt sogar, dass I'_f stetig ist, also I_f stetig differenzierbar ist.

Daraus können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 1. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in [a, b]$ stetig, so ist die zugehörige Integralfunktion I_f in x_0 stetig differenzierbar und es gilt

$$I'_f(x_0) = f(x_0).$$

Wenn f nun auf ganz $[a, b]$, also an jeder Stelle im Intervall, stetig ist, dann handelt es sich bei der Integralfunktion I_f um eine stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung mit der Berandung f übereinstimmt. Es gilt also

$$I'_f = f. \quad (4)$$

Dies führt uns zum *ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung*:

Satz 2. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (erster Teil))

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Integralfunktion I_f stetig differenzierbar, und es gilt

$$I'_f(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Wir haben bisher in diesem Abschnitt den Kern eines an der Geometrie orientierten Beweisarguments für den ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung diskutiert. Dieser besagt in Worte gefasst, dass jedes f als lokale Änderungsrate einer Funktion interpretiert werden kann, da jedes f die Ableitung ihrer Integralfunktion ist. Die Gleichung legt folgende Terminologie nahe:

Definition 2. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann nennt man eine Funktion F eine *Stammfunktion von f* , wenn gilt:

$$F' = f.$$

Der Ursprung des Begriffs *Stammfunktion* liegt darin, dass f aus I_f durch Ableiten entsteht, also von I_f abstammt.

Den ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kann man mithilfe dieser Definition nun so ausdrücken:

Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Berandung.

Wir haben unsere Überlegungen im vorangehenden Kapitel damit begonnen, aus einer Berandung f , also aus der lokalen Änderungsrate, die Integralfunktion I_f zu rekonstruieren. In diesem Abschnitt wurde nun die umgekehrte Richtung dieses Zusammenhangs besprochen, indem wir mittels des ersten Teils des Hauptsatzes von der Integralfunktion zurück auf die Berandung geschlossen und im Zuge dessen den Begriff *Stammfunktion*

eingeführt haben.

Kommen wir nun zurück zur anfänglichen Fragestellung dieses Kapitels, wie der orientierten Flächeninhalt einer krummlinigen Funktion berechnet werden kann. Das bedeutet, es gilt eine Vorgehensweise zu entwickeln, die zu einer stetigen Berandung f die Integralfunktion I_f ermittelt. Hierfür leistet der eben hergeleitete erste Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung einen großen Beitrag.

Beispiel 2. Betrachten wir als Beispiel einer Berandung die stetige (und differenzierbare) Normalparabel, die in Abbildung A.8 zu sehen ist.

Aus (4) wissen wir, dass für die gesuchte Integralfunktion I_1 (die Schreibweise I_1 leitet sich von $f : [1, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ab und wird in Folge nach demselben Prinzip weiterverwendet) all jene Funktionen zur Auswahl stehen, die abgeleitet mit der Funktion f identisch sind, also Stammfunktionen von f sind. Eine Stammfunktion zu f könnte beispielsweise wie folgt aussehen:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3.$$

Aber auch

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$$

und

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

sind Stammfunktionen der Funktion $f(x) = x^2$ und die Liste könnte noch fortgesetzt werden, indem zu $\frac{1}{3}x^3$ andere (positive oder negative) Konstanten addiert werden.

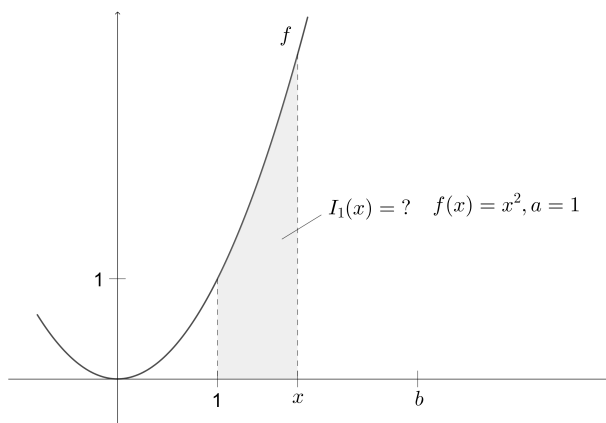


Abbildung A.8: Normalparabel angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 214]

Es gilt nun herauszufinden, bei welcher dieser vielen Stammfunktionen es sich um das gesuchte I_1 handelt. Zuvor muss jedoch die Frage geklärt werden, ob wir mit Sicherheit

davon ausgehen können, dass I_1 in jedem Fall die oben vermutete Form

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

besitzt.

Dies würde bedeuten, dass Stammfunktionen bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind, also müsste gelten:

Satz 3. (Hilfssatz zur Eindeutigkeit von Stammfunktionen)

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f auf einem Intervall, dann besitzt jede weitere Stammfunktion von f die Form $F + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Beweis: Seien G und F zwei Stammfunktionen von f , das bedeutet, es gilt, dass sowohl $G' = f$ als auch $F' = f$. Wir wollen nun zeigen, dass $G - F$ konstant ist, um zur gewünschten und zu beweisenden Aussage $G = F + C$ des Satzes 3 zu gelangen.

Wir können für die beiden Stammfunktionen G und F von f schreiben:

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

Nun verwenden wir die Tatsache, dass eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung an jeder Stelle in einem Intervall 0 ist, dort konstant ist.³ Dann können wir nämlich schließen, dass $G - F$ konstant ist, das heißt es gilt

$$G - F = C$$

und nach Umformung erhalten wir die zu beweisende Aussage

$$G = F + C.$$

Dieser eben gezeigte Satz gilt allerdings nicht ohne die Voraussetzung, dass f in einem Intervall betrachtet wird [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 220, 221].

Nachdem nun geklärt ist, dass I_1 sicher die gewünschte oben genannte Form besitzt, können wir uns wieder dem Ziel widmen, diejenige Stammfunktion zu finden, die dem I_1 aus Abbildung A.8 entspricht. Es gilt aufgrund des bewiesenen Hilfssatzes nämlich mit Sicherheit

$$I_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

mit einer Konstante C . Diese ist so zu bestimmen, dass

$$I_1(1) = 0$$

³Auf den Beweis dieser Aussage wird hier nicht näher eingegangen. In [Danckwerts & Vogel: 2005] kann dieser in Kapitel 4.3 nachgelesen werden.

gilt, da der Flächeninhalt unter f an der Stelle 1, also von 1 bis 1, ja 0 ist. Es folgt dann also für die Integralfunktion an der Stelle $x = 1$

$$0 = I_1(1) = \frac{1}{3}1^3 + C = \frac{1}{3} + C$$

und daraus ergibt sich für die Konstante C nach Umformung

$$C = -\frac{1}{3}.$$

In unserem Beispiel erhalten wir für die gesuchte Integralfunktion I_1 also folgendes Ergebnis:

$$I_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, \quad x \in [1, b].$$

Setzen wir nun $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, da es sich dabei ja um die verwendete Stammfunktion handelt, so erkennen wir, dass $F(1) = \frac{1}{3}$ gilt. Wir erhalten so das allgemein formulierte Resultat

$$I_1(x) = F(x) - F(1).$$

Der Beweis für den allgemeinen Fall funktioniert auf ähnliche Art und Weise und führt uns zum *zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung*, der auch als Hauptsatz zur Bestimmung von Integralfunktionen gilt.

Satz 4. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (zweiter Teil))

Die Integralfunktion I_f einer stetigen Berandung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kann gefunden werden, indem eine beliebige Stammfunktion F von f ermittelt wird. Denn dann gilt

$$I_f(x) = F(x) - F(a), \quad x \in [a, b].$$

Beweis: Nach Satz 2 handelt es sich bei I_f um eine Stammfunktion von f . Wenn F eine beliebige Stammfunktion von f ist, so kann sie sich aufgrund des oben genannten Hilfssatzes 3 von I_f lediglich um eine additive Konstante unterscheiden, das heißt:

$$I_f(x) = F(x) + C \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Weil der Flächeninhalt unter f an der Stelle a , also von a bis a , gleich 0 ist, gilt

$$I_f(a) = 0.$$

Ähnlich wie in Beispiel 2 ergibt sich nun die Gleichung

$$0 = I_f(a) = F(a) + C$$

und es folgt durch Umformung

$$C = -F(a).$$

Schließlich gelangen wir dadurch zu der gewünschten Aussage

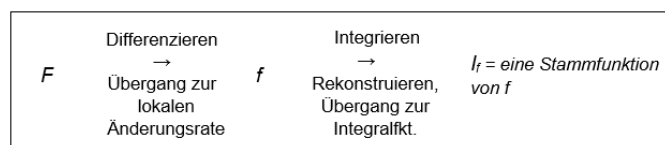
$$I_f(x) = F(x) - F(a), \quad x \in [a, b].$$

Wir haben uns bisher ausführlich mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beschäftigt und im ersten Teil seine Bedeutung für das Verständnis, dass Integrieren heißt, von der Berandung auf die Integralfunktion überzugehen, hervorgehoben. Bei diesem Übergang handelt es sich um einen Rekonstruktionsprozess, den wir schrittweise erarbeitet haben: Ausgehend von einer lokalen Änderungsrate, also einer Berandung f , haben wir (im Zuge des Badewannenbeispiels) die ursprüngliche Funktion, die wir dann als Integralfunktion I_f definiert haben, wiederhergestellt. Der erste Teil des Hauptsatzes hat uns dann gezeigt, dass jede Berandung f als lokale Änderungsrate aufgefasst werden kann, da f immer die Ableitung ihrer Integralfunktion I_f ist: $I_f' = f$.

Noch einen Schritt weiter gedacht bedeutet das, dass es zu jeder Funktion f Stammfunktionen F geben muss, die als Rekonstruierte interpretiert werden können und I_f ist damit eine solche Stammfunktion von f . Im zweiten Teil des Hauptsatzes wurde dieses Erkenntnis benutzt, um ein Verfahren zu entwickeln, das die Berechnung von Integralfunktionen für stetige Berandungen ermöglicht. Dabei ist das Auffinden von Stammfunktionen der entscheidende Schritt. Im weiteren Verlauf werden wir uns damit beschäftigen, wie dieser Schritt praktisch durchgeführt werden kann.

Insgesamt erhalten wir durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine wichtige Erkenntnis bezüglich der Beziehung zwischen Differenzieren, das bedeutet, die lokale Änderungsrate zu bilden, und Integrieren, das ja die Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer lokalen Änderungsrate ist: Integrieren und Differenzieren sind im Wesentlichen Umkehroperationen. In Abbildung A.9 ist dieses Verhältnis übersichtlich dargestellt.

Einerseits:



Und andererseits:

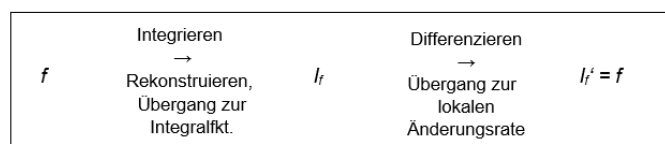


Abbildung A.9: Differenzieren und Integrieren als Umkehroperationen angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2006, S. 109]

1.3 Der analytische Integralbegriff

Wir haben im letzten Abschnitt durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ein Verfahren zur Bestimmung von Integralfunktionen von stetigen Berandungen kennengelernt, das auf der Suche nach Stammfunktionen beruht. Es gibt jedoch Berandungen, bei denen sich eine solche Suche als sehr schwierig herausstellt, wenn nicht sogar als unmöglich. Aus diesem Grund widmet sich das nächste Kapitel der Entwicklung eines Verfahrens, mit dem Integralfunktionen von stetigen Funktionen berechnet werden können, ohne auf Stammfunktionen zurückgreifen zu müssen. Diese Herangehensweise steht jedoch nicht als Konkurrenz dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gegenüber, sondern wird das Verständnis von Integrieren erweitern, indem ohne Rückgriff auf die Geometrie ein rein analytisch definierter Integralbegriff entstehen wird. Ziel dieses Kapitels ist es also, den Integralbegriff von der naiven Flächeninhaltsvorstellung zu lösen und rein analytisch zu definieren.

Bereits in den vorangehenden Kapiteln haben wir festgestellt, dass die Funktionswerte $I_f(x)$ der Integralfunktion I_f orientierte Flächeninhalte sind. Das zu entwickelnde Verfahren beruht nun auf der Vorstellung, dass die Flächenstücke unter bzw. über der Kurve durch Rechteckflächen eingeschachtelt werden, wie in Abbildung A.10 dargestellt ist.

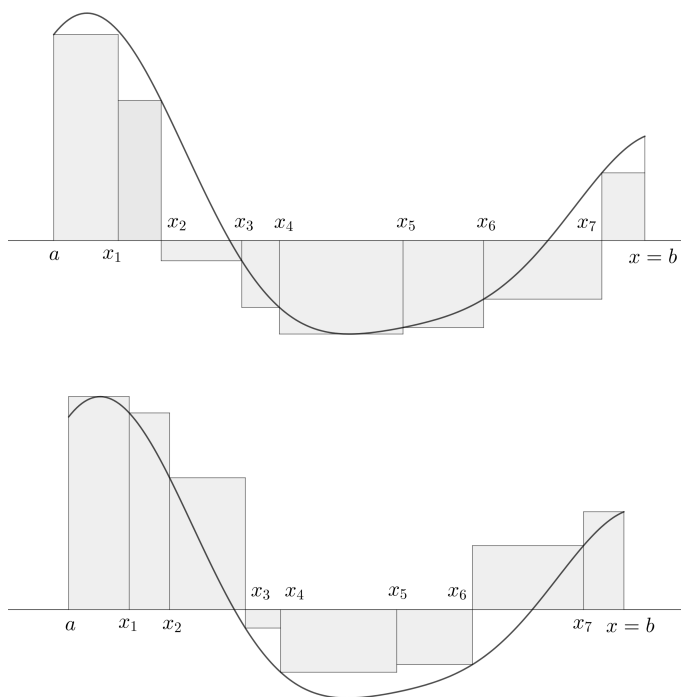


Abbildung A.10: Flächenstücke als Rechteckflächen angelehnt an
[Danckwerts & Vogel: 2005, S. 232]

Wie die Darstellung zeigt, kann diese Annäherung auf zwei verschiedene Arten geschehen:

In der ersten Darstellung werden die Rechtecke gebildet, indem jeweils der minimale Funktionswert als Höhe eines jeden Rechtecks angenommen wird. Im zweiten Fall wird hierfür der maximale Funktionswert als Höhe angenommen.

Die Annäherung der Flächenstücke an die Kurve führt uns schließlich zur n -ten Ober- bzw. Untersumme, deren formale Definition in Kürze folgt.

Zuvor setzen wir jedoch unsere Überlegung fort, indem wir versuchen, eine näherungsweise Berechnung von $I_f(x)$ bis zur Stelle $x = b$ durchzuführen. Hierfür wird zunächst das Intervall $[a, b]$ durch endlich viele Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

in (nicht unbedingt gleich große) Teilintervalle zerlegt. Nun seien

$$m_i \text{ das Minimum von } f \text{ im Intervall } [x_{i-1}, x_i], \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

und

$$M_i \text{ das Maximum von } f \text{ im Intervall } [x_{i-1}, x_i], \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Dann kann man den durch $I_f(x_i) - I_f(x_{i-1})$ gegebenen orientierten Flächeninhalt zwischen x_{i-1} und x_i durch die Rechteckinhalte $m_i(x_i - x_{i-1})$ und $M_i(x_i - x_{i-1})$ abschätzen, das heißt den gewünschten orientierten Flächeninhalt in den Bereich zwischen diesen Rechteckinhalten eingrenzen:

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq I_f(x_i) - I_f(x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Um dieses Verfahren auf die gesamte orientierte Fläche zwischen a und b anzuwenden, also die gesamte Fläche abzuschätzen, müssen wir nun diese n Ungleichungen ($i = 1, \dots, n$) aufsummieren:

$$\left. \begin{array}{cccc} m_1(x_1 - x_0) & \leq I_f(x_1) & -I_f(x_0) & \leq M_1(x_1 - x_0) \\ m_2(x_2 - x_1) & \leq I_f(x_2) & -I_f(x_1) & \leq M_2(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) & \leq I_f(x_{n-1}) & -I_f(x_{n-2}) & \leq M_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ m_n(x_n - x_{n-1}) & \leq I_f(x_n) & -I_f(x_{n-1}) & \leq M_n(x_n - x_{n-1}) \end{array} \right\} +$$

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq I_f(x_n) - I_f(x_0) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

Diese Summe bedeutet nichts anderes, als die Addition aller Rechteckflächen, die einerseits mit dem Minimum gebildet wurden, und andererseits all jener Rechteckflächen, die mit dem Maximum gebildet wurden.

Aufgrund der oben angeführten Aufteilung des Intervalls $[a, b]$ wird ersichtlich, dass $a = x_0$ und $b = x_n$ sind. Außerdem ist in einem Intervall, das bei a beginnt, $I_f(a) = 0$. Daraus folgt nun einerseits, dass

$$I_f(x_n) - I_f(x_0) = I_f(b) - I_f(a) = I_f(b) - 0 = I_f(b). \quad (1)$$

Andererseits verwenden wir zur Abkürzung die oben bereits eingeführten Begriffe Ober- und Untersumme, die wir nun formal definieren:

Definition 3. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und seien $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ endlich viele Teilpunkte des Intervalls $[a, b]$. Außerdem sei für alle $1 \leq i \leq n$

$$m_i \text{ das Minimum von } f \text{ im Intervall } [x_{i-1}, x_i]$$

und

$$M_i \text{ das Maximum von } f \text{ im Intervall } [x_{i-1}, x_i].$$

Dann wird die Summe

$$U_n := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

der Flächenstücke zwischen x-Achse und Kurve, die von *unten* angenähert werden, *n-te Untersumme* genannt.

Die Summe

$$O_n := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

der Flächenstücke zwischen x-Achse und Kurve, die von *oben* angenähert werden, wird dann *n-te Obersumme* genannt.

Die aus der Summe entstandene obige Ungleichung kann nun mithilfe von Gleichung (1) und Definition 3 abgekürzt formuliert werden als

$$U_n \leq I_f(b) \leq O_n. \quad (2)$$

Dass eine Verfeinerung der Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ eine bessere Abschätzung für $I_f(b)$ zur Folge hat, ist plausibel, denn es wird ja der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme immer geringer, wenn nur die Funktion schön genug ist. Deutlich wird dies, wenn man die frühere Abbildung A.10 mit der unten stehenden Abbildung A.11 vergleicht.

Bisher haben wir ausgehend von der Vorstellung eines existierenden Flächeninhalts unter der Funktion f ebendiese Fläche durch Rechteckflächen abgeschätzt, deren Unterschied

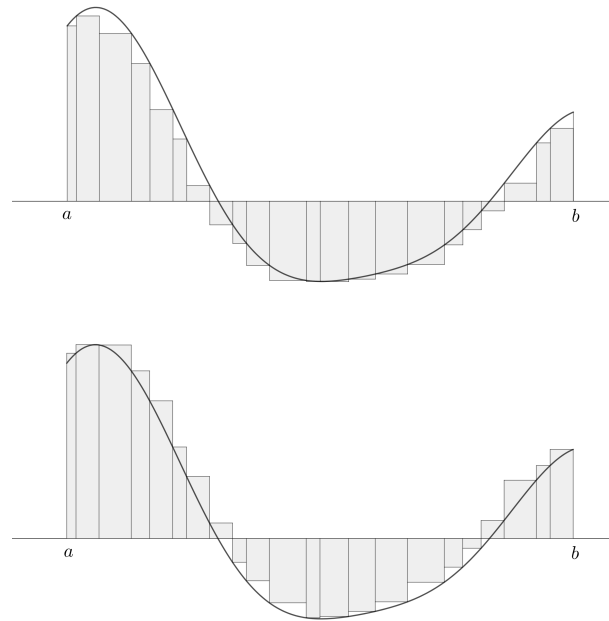


Abbildung A.11: Verfeinerung der Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 234]

zur Integralfunktion I_f immer geringer wird.

Dies wird in weiterer Folge dazu führen, dass wir den Integralbegriff völlig neu und unabhängig von der naiven Flächeninhaltsvorstellung definieren können. Das heißt, es wird uns gelingen, eine rein analytische Definition der Integralfunktion vorzunehmen. Prüfen wir jedoch zunächst die bisher getroffenen Annahmen und Schlussfolgerungen an einem Beispiel:

Beispiel 3. Wir wollen mit diesem Beispiel die Annahme bestätigen, dass wir für 'schöne' f den Wert $I_f(b)$ beliebig nahe durch Ober- und Untersummen annähern können.

Hierfür benutzen wir eine Funktion, deren Integralfunktion wir durch den Hauptsatz an der Stelle b bereits kennen, deren Stammfunktion wir also leicht berechnen können:

Für die Berandung $f = e^x$ im Intervall $[0, 2]$ ist f selbst Stammfunktion und deshalb gilt nach dem Verfahren zur Berechnung von Integralfunktionen aus dem zweiten Teil des Hauptsatzes

$$I_0(2) = e^2 - e^0 = e^2 - 1.$$

Wir berechnen nun $I_0(2)$ mit dem oben entwickelten Verfahren und zerlegen das Intervall $[0, 2]$ in n gleich große Teile, jedes mit der Länge $\frac{2}{n}$ und den folgenden Teilungspunkten:

$$x_i = \frac{2}{n} \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

siehe Abbildung A.12.

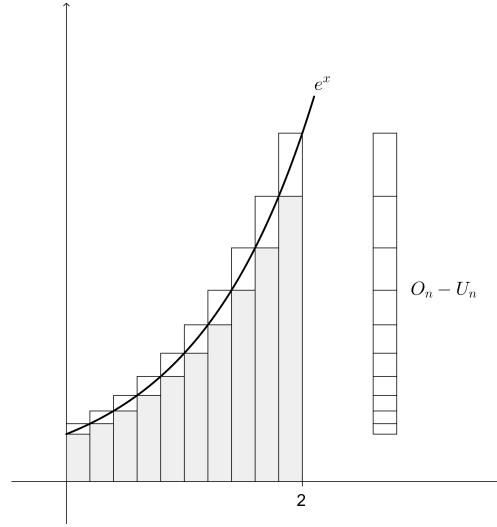


Abbildung A.12: Zerlegung des Intervalls $[0, 2]$ angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 235]

Wir wissen, dass $f = e^x$ monoton steigt, deshalb können wir schließen, dass das Minimum m_i immer am Beginn eines jeden Teilstücks liegt, also an der Stelle x_{i-1} . Das heißt, es gilt aufgrund der obigen Wahl der Teilungspunkte

$$m_i = f(x_{i-1}) = e^{x_{i-1}} = e^{\frac{2}{n}(i-1)} = (e^{\frac{2}{n}})^{i-1}.$$

Analog verfahren wir bezüglich der Maxima M_i , die je am Ende eines Teilstücks zu finden sind, also an der Stelle x_i . Daher ist

$$M_i = f(x_i) = e^{x_i} = e^{\frac{2}{n} \cdot i} = (e^{\frac{2}{n}})^i.$$

Zur Berechnung der Summe der Rechteckflächen, die die Integralfunktion abschätzen soll, bilden wir nun die Untersumme mit den eben ermittelten m_i und setzen dann $q = e^{\frac{2}{n}}$. Dann folgt nach der Definition 3 für Ober- und Untersumme:

$$U_n = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n q^{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n q^{i-1} \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n q^{i-1}. \quad (*)$$

Dies gilt, da die Länge jedes Teilstücks $x_i - x_{i-1}$ in unserem Beispiel $\frac{2}{n}$ entspricht. Wir verwenden nun die Summenformel für die geometrische Reihe, die besagt, dass

$$\sum_{i=1}^n q^{i-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

gilt, erweitern mit -1 , formen in einen Doppelbruch um und setzen $e^{\frac{2}{n}}$ für q ein. Dann erhält man den folgenden Ausdruck:

$$U_n = \frac{2}{n} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{2}{n} \frac{q^n - 1}{q - 1} = (q^n - 1) \frac{\frac{2}{n}}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{\frac{q-1}{\frac{2}{n}}} = \frac{e^2 - 1}{\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}}}.$$

Nun gilt wegen der Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion für den Limes des Differenzenquotienten an der Stelle 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n} - 0} = \exp'(0) = 1,$$

woraus sich insgesamt ergibt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = e^2 - 1$$

gilt. Das heißt, die Untersummen U_n kommen dem Wert $e^2 - 1$ mit wachsendem n beliebig nahe. Für die Obersumme O_n verfährt man analog zur Untersumme und es ergibt sich hier nach Ersetzen von $e^{\frac{2}{n}}$ mit q

$$O_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n q^i.$$

Wir können jetzt, da wir sowohl U_n als auch O_n in dieser Form gegeben haben, die folgende Differenz berechnen

$$\begin{aligned} O_n - U_n &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n q^i - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n q^{i-1} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n q^i - q^{i-1} = \\ &= \frac{2}{n} (q^1 - q^0 + q^2 - q^1 + q^3 - q^2 + \cdots + q^n - q^{n-1}) = \\ &= \frac{2}{n} (-q^0 + q^n) = \frac{2}{n} (-e^{\frac{2}{n} \cdot 0} + e^{\frac{2}{n} \cdot n}) = \frac{2}{n} (e^2 - e^0) = \\ &= \frac{2}{n} (e^2 - 1) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

die für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Das heißt, die eben berechnete Differenz $O_n - U_n$ wird beliebig klein, also können wir schließen, dass sich auch die Obersummen O_n dem Wert $e^2 - 1$ annähern. Schließlich erhalten wir in diesem Beispiel wie vermutet

$$I_0(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = e^2 - 1.$$

Nachdem wir die Vermutung, dass die Integralfunktion mithilfe der Ober- und Untersummen berechnet werden kann, mit diesem Beispiel bestätigt haben, stellt sich nun automatisch die Frage, ob die gewonnene Aussage auch für den allgemeinen Fall gültig ist, ob also der folgende Satz gilt.

Satz 5. (Die Integralfunktion als Grenzwert von Ober- und Untersummen)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und O_n und U_n die n -te Ober- bzw. Untersumme von f , dann gilt

$$I_f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n.$$

Der Beweis für diese Behauptung verläuft nach einem ähnlichen Prinzip, das wir in unserem Beispiel 3 angewandt haben, ist jedoch für diese Arbeit zu umfangreich und kann in [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 301, 302, 303] nachgelesen werden.

Aufgrund von Satz 5 und der Definition 3 von Ober- und Untersumme ergibt sich

$$I_f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}). \quad (4)$$

Damit haben wir unser Verständnis von Integrieren wieder ein Stück erweitert. In diesem Kontext bedeutet Integrieren nämlich Summieren, da es sich bei der Berechnung der Funktionswerte der Integralfunktion hier um Grenzwerte von Summen (orientierter Rechteckflächen) handelt.

Weil bei stetigen Berandungen f sowohl m_i als auch M_i Funktionswerte von f an einer Stelle ξ_i zwischen x_{i-1} und x_i sind, kann man den Ausdruck (4) auch wie folgt schreiben:

$$I_f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Diese Darstellung erinnert an die von Gottfried Wilhelm Leibniz eingeführte Schreibweise

$$\int_a^b f(x)dx,$$

die bis heute verwendet wird. Dabei soll das Zeichen $\int$ an die Summen- und Grenzwertbildung erinnern und dx für die Differenz $x_i - x_{i-1}$, also die Streifenbreite, stehen. Mit dieser Schreibweise von Leibniz wird die Gleichung (4) zu

$$I_f(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Daraus kann die folgende Schreibweise motiviert werden:

Als *Integrale* bezeichnet man die Funktionswerte der Integralfunktion und man schreibt

$$\int_a^b f(x)dx \text{ oder } \int_a^b f.$$

Der 2. Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus dem vorangehenden Kapitel kann nun mit der Leibniz'schen Schreibweise neu formuliert werden:

Satz 6. (2. Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung in Leibniz'scher Schreibweise)

Es gilt für stetige $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und für eine beliebige Stammfunktion F von f , dass

$$\int_a^x f = F(x) - F(a) \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Insbesondere gilt für den Wert der Integralfunktion an der Stelle b

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Wir haben bisher stets von der Vorstellung Gebrauch gemacht, dass die Integralfunktion $I_f(b)$ als orientierter Flächeninhalt existiert und sie durch Rechteckflächen approximierbar ist. Nun ist es uns, wie am Anfang des Kapitels angekündigt, möglich, das Integrieren von diesen Annahmen zu lösen und eine rein analytische Begriffsbestimmung vorzunehmen, da der folgende Satz gilt (o.B.):

Satz 7. (Existenz der Zerlegungsfolge)

Für stetige $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt, dass immer eine Zerlegungsfolge existiert, sodass die zugehörigen Ober- und Untersummenfolgen gegen denselben Grenzwert konvergieren [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 304].

Das heißt, wir definieren das Integral nun über die Ober- und Untersummen, also ohne von der Vorstellung eines Flächeninhalts Gebrauch zu machen, wie folgt:

Definition 4. Für stetiges $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt der Ausdruck

$$\int_a^b f := \lim U_n \quad (= \lim O_n)$$

das *Integral von f auf $[a, b]$* .

Ausgehend von der (naiven) Vorstellung des Integrals als orientierter Flächeninhalt unter einer Berandung f haben wir zu Beginn dieses Kapitels Integrieren als Approximation von Summen orientierter Rechteckinhalte (Ober- und Untersummen) aufgefasst. So haben wir eine Möglichkeit entwickelt, Integrale, also die Funktionswerte der Integralfunktion I_f , für stetige Berandungen f zu berechnen, indem wir sie mit Unter- und Obersummen beliebig gut abgeschätzt haben. Dies gelang im Zuge eines Beispiels, durch das die Beweisidee für die allgemeine Gültigkeit dieses Verfahrens bei stetigen Funktionen skizziert wurde. Damit wurde unsere Vorstellung des Integralbegriffs erneut erweitert: Zur Berechnung der Funktionswerte der Integralfunktion wurden Grenzwerte von Summen (orientierter Rechteckflächen) gebildet, das heißt Integrieren bedeutet in diesem Kontext Summieren. Die im Zuge dieser Auseinandersetzung gewonnene Erkenntnis, dass das Integral der Grenzwert von Ober- und Untersummen ist, hatte weitreichende Folgen: Sie ermöglichte uns, die umgekehrte Perspektive einzunehmen und das Integral rein analytisch (ohne Rückgriff auf die Voraussetzung der Existenz eines orientierten Flächeninhalts unter einer Berandung) zu definieren. Einen Schritt weiter gedacht bedeutet das, dass nun im Gegensatz zu bisher die orientierte Fläche unter einer stetigen Berandung f ohne Bezugnahme auf die Anschauung definiert werden kann. Diese bedeutende Einsicht bildet den Grundstein einer Integrationstheorie, die sich gänzlich von der Anschauung gelöst hat. Insgesamt wurden in diesem Kapitel zwei wichtige Erkenntnisse gewonnen: Einerseits die erweiterte Vorstellung des Integrierens als Summieren, andererseits wurde das Ziel erreicht, die Definition des Integrals von der naiven Flächeninhaltsvorstellung loszulösen und es stattdessen rein analytisch zu definieren.

1.4 Das Integral als Mittelwert

Über die vergangenen Kapitel hinweg haben wir unser Verständnis der Integralrechnung laufend erweitert. Ausgehend vom geometrischen Aspekt des orientierten Flächeninhalts erreichten wir durch die Loslösung des Integralbegriffs von dieser Vorstellung eine rein analytische Perspektive. Dieser Prozess der immer abstrakter werdenden Vorstellung vom Integrieren wird im Folgenden noch einmal weitergeführt, indem das Integral in Zusammenhang mit dem Mittelwert, einem bereits mit Vorerfahrungen aus der Stochastik behafteten Begriff, gebracht wird.

Die Verbindung des Integrals mit dem Begriff des Mittelwerts wird zunächst durch die folgende Beobachtung deutlich:

Bei einem gleichmäßigen (linearen) Anstieg einer Größe in einem Intervall wird der Mittelwert, also der mittlere Wert einer Größe, in der Mitte angenommen, also in diesem Fall in der Mitte des Intervalls $[a, b]$ bei x_0 (siehe Abbildung A.13).

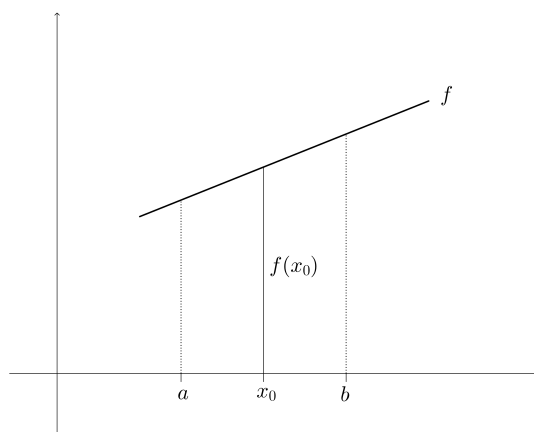


Abbildung A.13: Mittlerer Funktionswert in $[a, b]$ angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2006, S. 111]

Um das Integral in Zusammenhang mit dem Mittelwert einer Funktion zu bringen, betrachten wir nun, wie in Abbildung A.14 dargestellt, die vom Mittelwert $f(x_0)$ und der Intervalllänge $b-a$ aufgespannte Rechteckfläche. Bei dieser Fläche handelt es sich nämlich um das Integral der Berandung f im Intervall $[a, b]$, da nach Kapitel 1.2 das Integral der orientierte Flächeninhalt einer Berandung f ist. Demnach kann der folgende Ausdruck angeschrieben werden:

$$\int_a^b f(x) = (b-a) \cdot f(x_0).$$

Formt man nun um, so ergibt sich ein offensichtlicher Zusammenhang zwischen Integral und Mittelwert einer Funktion, denn man erhält für den Mittelwert $f(x_0)$ die folgende

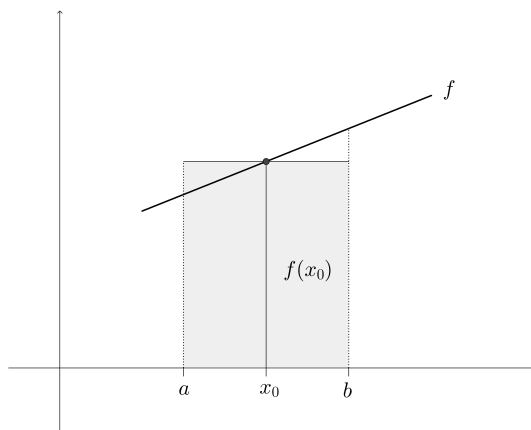


Abbildung A.14: Flächeninhalt unter f bei Verwendung des mittleren Funktionswertes
angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2006, S. 111]

Darstellung:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x).$$

Damit ist zumindest in einem einfachen Beispiel der Zusammenhang zwischen Integrieren und Mitteln anschaulich gerechtfertigt. Eine analytisch fundierte Begründung folgt nun, indem wir zunächst das folgende komplexere Beispiel betrachten:

Beispiel 4. [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 249, 250] Ein Thermometer hat zwischen $a = 6$ Uhr Früh und $b = 6$ Uhr abends laufend und in verschiedenen Abständen die Außentemperatur ϑ in $^{\circ}\text{C}$ gemessen und aufgezeichnet.

Es seien nun

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

die Zeitpunkte, zu denen die Temperatur abgelesen wurde und

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$$

die daraus hervorgegangenen Ergebnisse.

Die bekannteste Herangehensweise bei der Beantwortung der Frage nach der mittleren Temperatur ist das Benutzen des arithmetischen Mittels:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vartheta_i. \tag{1}$$

Das Problem bei dieser Berechnungsmethode ist jedoch, dass in (1) davon ausgegangen wird, dass die Temperatur in den Teilintervallen konstant ist, was nicht notwendigerweise so sein muss (es könnte zu Temperaturschwankungen innerhalb eines Zeitintervalls kommen). Außerdem wird nicht berücksichtigt, dass es sich bei den Teilintervallen um verschieden große Intervalle handeln könnte, wie in Abbildung A.15 dargestellt ist. Das hat zur Folge, dass die gemessenen Temperaturen ϑ_i nicht richtig gewichtet werden, da ja zum Beispiel ϑ_3 mit einem solchen Anteil gewichtet werden müsste, den das Intervall $[t_2, t_3]$ im Gesamtintervall $[a, b]$ ausmacht.

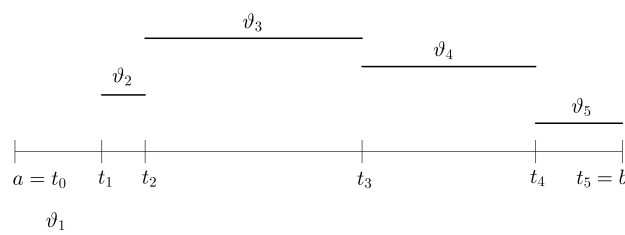


Abbildung A.15: Unterschiedlich lange Teilintervalle des Intervalls $[a, b]$ angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 250]

Diese Gewichtung kann jedoch hergestellt werden, indem in diesem Beispiel mit dem Faktor $\frac{t_3 - t_2}{b - a}$ multipliziert wird und man somit das gewichtete arithmetische Mittel benutzt. Für ein beliebiges Intervall ergibt sich daraus die Formel

$$\sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{b - a} \cdot \vartheta_i. \quad (2)$$

Bei äquidistanten Messpunkten, also gleich langen Intervallen, geht diese Gleichung wieder in (1) über.

Das zweite Problem ist damit gelöst, jedoch gilt es noch zu berücksichtigen, dass, wie bereits erwähnt, die Temperatur in einem Intervall Schwankungen aufweisen kann, also nicht unbedingt konstant sein muss. Nun werden die Werte der mittleren Temperatur, die mit dem gewichteten arithmetischen Mittel in (2) berechnet werden, immer genauer, je größer die Anzahl an Messpunkten ist, also je größer n wird. Das bedeutet auch, dass die möglichen Schwankungen der Temperatur in einem Intervall immer besser erfasst werden, weil das Intervall immer kleiner wird.

Stellen wir uns nun also vor, es handle sich im Beispiel um ein Messgerät, das die Temperatur so genau wie möglich aufzeichnet. Die genauesten Werte erhält man dann, wenn ein (stetiger) Temperaturverlauf ϑ über dem Zeitintervall $[a, b]$ gemessen wird, es sich also um einen automatischen Temperaturschreiber handelt, der kontinuierlich Werte für die Temperatur festhält. Dann stellt sich die Frage, wie die Summe (2) bei größer werdenden n ermittelt werden kann.

Nachdem wir nun von einem kontinuierlich aufzeichnenden Temperaturschreiber ausgehen, handelt es sich bei den Werten für die aufgezeichnete Temperatur um Funktionswerte

$\vartheta(t_i)$. Wir formen also zunächst (2) folgendermaßen um:

$$\sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{b - a} \cdot \vartheta_i = \frac{1}{b - a} \sum_{i=1}^n \vartheta(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}). \quad (3)$$

Jetzt erinnert der Ausdruck an die bereits aus dem vorangehenden Abschnitt bekannte Definition 3 von Ober- und Untersummen zur Berandung ϑ . Dieser vermutete Zusammenhang ist tatsächlich gegeben, da jede zur Berechnung des Mittelwerts herangezogene Temperatur mit Sicherheit zwischen der minimalen Temperatur m_i und der maximalen Temperatur M_i eines jeden Intervalls liegt und daher

$$m_i \leq \vartheta(t_i) \leq M_i$$

gilt. Aus diesen Überlegungen folgt also insgesamt, dass

$$U_n = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \vartheta(t_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) = O_n.$$

Ist nun die Berandung ϑ stetig, dann streben U_n und O_n nach Kapitel 1.3 gegen

$$\int_a^b \vartheta(t) dt$$

und deshalb auch die mittlere Summe. Das bedeutet, dass die Summe (3) mit größer werdendem n dem Wert

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b \vartheta(t) dt \quad (4)$$

beliebig nahe kommt. Es kann also (4) als *Mittelwert* $\mu(\vartheta)$ einer stetigen Temperaturfunktion ϑ verstanden werden:

$$\mu(\vartheta) = \frac{1}{b - a} \int_a^b \vartheta(t) dt. \quad (5)$$

Mit diesem Beispiel hat sich das Verständnis davon, was Integrieren bedeutet, erneut erweitert, denn in diesem Kontext heißt Integrieren Mitteln. Wir haben nämlich eben festgestellt, dass das Integral bis auf einen Faktor ein verallgemeinertes arithmetisches Mittel ist, da wir in unseren Überlegungen vom arithmetischen Mittel ausgegangen sind und dieses sich bei immer größer werdenden n schließlich zum Ausdruck in Gleichung 5, also zum Integral mit einem Faktor, gewandelt hat.

Wir ändern die Richtung unserer Herangehensweise mithilfe dieser Erkenntnis und folgern daraus die untenstehende Definition:

Definition 5. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, für die das Integral von a bis b existiert, dann heißt

$$\mu(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

der *Mittelwert* von f im Intervall $[a, b]$ [Danckwerts & Vogel: 2005, S.251].

Beispiel 5. [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 251, 252] Sehen wir uns den so definierten Mittelwert einer Funktion nun anhand zweier Beispiele 1 und 2 mit den Funktionen f_1 und f_2 genauer an. Diese sind in den Abbildungen A.16 und A.17 graphisch dargestellt:

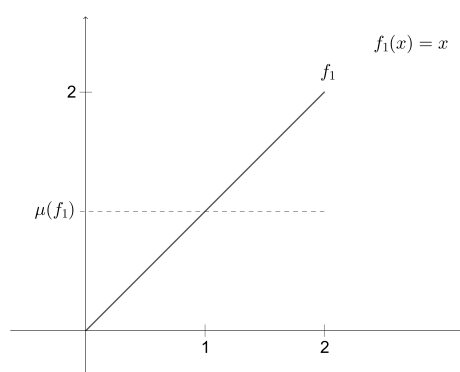


Abbildung A.16: Beispiel 1 angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 251]

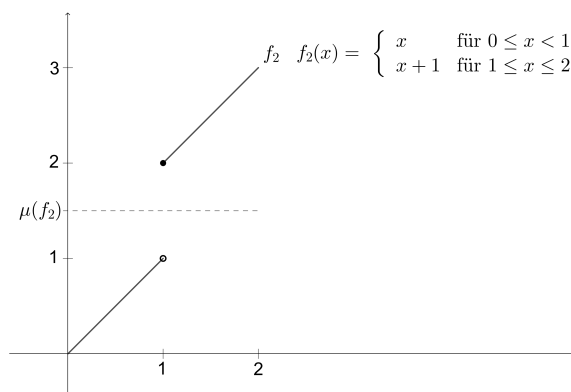


Abbildung A.17: Beispiel 2 angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 251]

Für die erste Funktion f_1 gilt laut Hauptsatz

$$\mu(f_1) = \frac{1}{2} \int_0^2 f_1(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 1$$

und für die Funktion f_2 aus elementargeometrischen Überlegungen

$$\mu(f_2) = \frac{1}{2} \int_0^2 f_2(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 2 \frac{1}{2} \right) = 1,5.$$

Offensichtlich spielt die Stetigkeit von f eine große Rolle, wenn es darum geht, ob der Mittelwert $\mu(f)$ als Funktionswert von f angenommen wird. Das heißt, ob es eine Stelle x_0 gibt, für die gilt $\mu(f) = f(x_0)$. Es entspricht im zweiten Beispiel nämlich die Lösung 1,5 für den Mittelwert keinem Funktionswert der Funktion f_2 .

Es gilt der folgende Satz:

Satz 8. (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit der Eigenschaft

$$\mu(f) = f(x_0).$$

Beweis: Betrachten wir zunächst die Abschätzung des Integrals von f über $[a, b]$ durch Ober- und Untersummen aus dem vorangehenden Kapitel 1.3 für $n = 1$ neu:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Aus dieser Ungleichung und der Definition 5, die besagt, dass

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

gilt, folgt nämlich mittels Division durch $(b-a)$ direkt

$$m \leq \mu(f) \leq M,$$

was bedeutet, dass der Mittelwert immer im Bereich zwischen dem kleinsten und dem größten Funktionswert der Funktion f auf $[a, b]$ liegt. Würde nun mit Sicherheit f jeden Wert zwischen m und M als Funktionswert im Intervall $[a, b]$ annehmen, wäre man fertig. Das ist aber tatsächlich der Fall, wie aus dem Zwischenwertsatz folgt, der hier angeführt ist (o.B.):

Satz 9. (Zwischenwertsatz)

Ist f eine auf einem Intervall stetige Funktion, so ist jede Zahl zwischen zwei Funktionswerten selbst ein Funktionswert.

Wie die Abbildungen A.18 und A.19 zeigen, sind sowohl die Stetigkeit als auch der Zusammenhang des Definitionsbereichs (d.h. der Definitionsbereich muss ein Intervall sein) Voraussetzungen für die Gültigkeit des Satzes, da ansonsten Werte zwischen zwei Funktionswerten existieren, die selbst nicht einem Funktionswert entsprechen und der Mittelwertsatz somit offensichtlich nicht gilt.

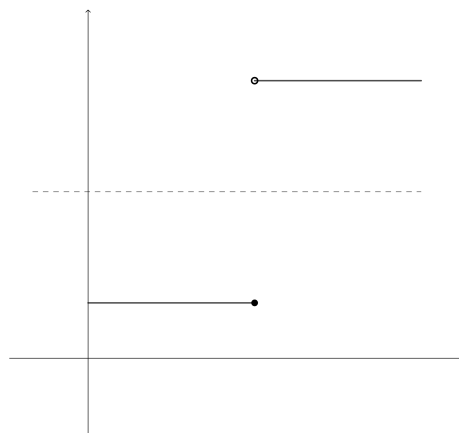


Abbildung A.18: Funktion mit Unstetigkeitsstelle angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 298]

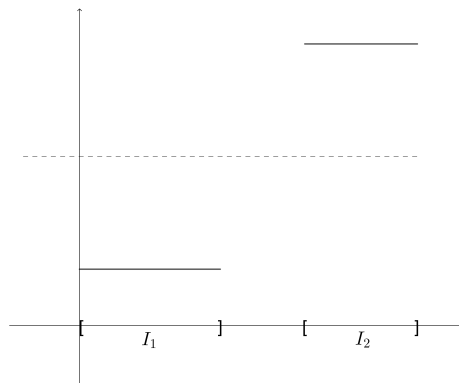


Abbildung A.19: Funktion mit getrenntem Definitionsbereich angelehnt an [Danckwerts & Vogel: 2005, S. 298]

Beim Mittelwertsatz der Integralrechnung handelt es sich um einen reinen Existenzsatz. Das bedeutet, er erlaubt es nicht, die Stelle x_0 explizit anzugeben, wir haben lediglich bewiesen, dass der Mittelwert in dieser Form existiert. In unserem Beispiel heißt das also, dass die mittlere Temperatur als gemessener Temperaturwert eines automatischen Temperaturschreibers tatsächlich auftritt. Das ist selbstverständlich, weshalb die Bedeutung dieses Satzes für die Praxis eine relativ geringe ist. Die Wichtigkeit liegt vielmehr im theoretischen Ausbau der Analysis und der Erweiterung des Verständnisses zum Begriff des Integrierens.

1.5 Fazit

In diesem Abschnitt der Arbeit haben wir eine fachliche Auseinandersetzung mit den für das weitere Vorgehen relevanten Begriffen durchgeführt und einen Überblick darüber gegeben, welche mathematischen Vorstellungen sich hinter dem Integralbegriff verbergen. Zu Beginn haben wir global den Weg von der Berandung zur Integralfunktion beschritten und so eine genaue Abgrenzung dieser beiden Begriffe durchgeführt. Dies hat schließlich zu einer ersten Definition des Integralbegriffs geführt, die auf der Existenz des orientierten Flächeninhalts einer Kurve beruht.

Die Bedeutung von Integrieren als Rekonstruktionsprozess ist im darauffolgenden Kapitel in den Fokus gerückt, wodurch der wichtige Zusammenhang zwischen Integrieren und Differenzieren herausgearbeitet wurde: Integrieren und Differenzieren sind im Wesentlichen Umkehroperationen. Diese wechselseitige Beziehung begründet auch der erste Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, der besagt, dass jede Berandung als lokale Änderungsrate interpretiert werden kann. Im Zuge dieser Erkenntnis haben wir den Begriff Stammfunktion eingeführt, der die Herleitung des zweiten Teils des Hauptsatzes ermöglicht hat. So konnte ein Verfahren zur Berechnung von Integralfunktionen mittels Stammfunktionen entwickelt werden. In diesem Kapitel wurden also drei wichtige Erkenntnisse gewonnen: 1. Integrieren bedeutet Rekonstruieren, 2. Integrieren und Differenzieren sind im Wesentlichen Umkehroperationen und 3. konnte ein Verfahren zur Berechnung von Integralfunktionen erarbeitet werden.

Als nächstes haben wir uns der Vorstellung gewidmet, dass die Integralfunktion als eine Approximation von Rechteckflächen aufgefasst werden kann und haben so die Begriffe Ober- und Untersumme eingeführt. In diesem Kontext haben wir erkannt, dass Integrieren auch Summieren bedeutet, was uns zu Leibniz und seiner noch heute üblichen Schreibweise für Integrale geführt hat. Schließlich haben wir die Perspektive umgekehrt und einen von der Flächenvorstellung gelösten und damit rein analytischen Integralbegriff erhalten, von dem ausgehend wir das Integral neu definiert haben. Die beiden wichtigsten Schlussfolgerungen sind daher hier einerseits 'Integrieren heißt Summieren' und andererseits die rein analytische Definition des Integralbegriffs.

Schließlich haben wir unser Verständnis von dem, was Integrieren heißt, ein weiteres Mal erweitert und die Beziehung zwischen der Mittelwertbildung und der Integralrechnung beleuchtet. Wir sind zu dem Schluss gekommen, dass das Integral als Mittelwert einer Funktion interpretiert werden kann.

Insgesamt wurde durch diese Betrachtungen der Integralbegriff in seiner Tiefe und Vielseitigkeit dargestellt, gleichzeitig wurden viele unterschiedliche Vorstellungen zu ein und demselben Terminus herausgearbeitet. Genau diese Vielfalt ist einerseits eine große Bereicherung, andererseits stellt sie eine Herausforderung für den Schulunterricht und die Hochschullehre dar, die zwischen der Komplexität und der praktischen Verwendbarkeit eine Brücke zu schlagen hat. Im Verlauf der Arbeit wird dieses Spannungsfeld eine zentrale Rolle einnehmen. Es folgt nun eine didaktische Einbettung der diskutierten fachlichen Begriffe und Vorstellungen. Im Zuge dessen werden die Bezeichnungen *Aspekt* und *Grundvorstellung* genau definiert und in Zusammenhang mit der bisherigen mathematischen Auseinandersetzung gebracht.

2 Die Fachdidaktik des Integralbegriffs

Die Aufgabe dieses Abschnitts ist eine fachdidaktische Erörterung des in Kapitel A.1 erarbeiteten mathematischen Zugangs über die Integralrechnung. Hierfür werden zunächst die zwei Grundbegriffe *Aspekt* und *Grundvorstellung* der Mathematikdidaktik eingeführt und für den Integralbegriff speziell herausgearbeitet. Anhand dieser Grundbegriffe werden dann Schritt für Schritt die gewonnenen Erkenntnisse aus Abschnitt A.1 geordnet und didaktisch analysiert. Schließlich folgt eine Vernetzung von Aspekten und Grundvorstellungen, die die didaktische Betrachtung des Integralbegriffs zu einem Abschluss bringt.

2.1 Aspekte und Grundvorstellungen mathematischer Begriffe

Die im vergangenen Kapitel diskutierten fachlichen Hintergründe dieser Arbeit stellen ein wichtiges theoretisches Grundwissen zur Analysis dar. Für eine didaktische Auseinandersetzung ist es nun notwendig, das erarbeitete Wissen in Beziehung zur Didaktik der Analysis zu setzen. Hierfür benutzen wir die zwei Begriffe *Aspekt* und *Grundvorstellung*, deren Abgrenzung und Zusammenspiel im Spezialfall des Integrals zentrale Themen dieser Arbeit darstellen.

Ziel des Mathematikunterrichts im Allgemeinen und somit auch des Analysisunterrichts ist es, dass Schülerinnen und Schüler zuverlässige Vorstellungen zu mathematischen Begriffen aufbauen und so verschiedene fachliche Facetten eines Begriffs erkennen und mit inhaltlichen Bedeutungen versehen. Dadurch wird ein breites Verständnis eines solchen Begriffs ermöglicht. Aus dieser Formulierung allgemeiner Ziele des Mathematikunterrichts führen wir nun die Terminologie *Aspekt* und *Grundvorstellung* eines mathematischen Begriffs ein [Greefrath et al.: 2016, S. 16, 17, 18, 19].

Dann gelten die folgenden Definitionen:

Definition 6. Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine Facette des Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben werden kann.

Definition 7. Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

Diese beiden Begriffe unterscheiden sich vor allem dadurch voneinander, dass es sich bei Aspekten um Ergebnisse fachwissenschaftlicher Analysen handelt, also um fachliche Kerne eines mathematischen Begriffs, wohingegen Grundvorstellungen von fachdidaktischer Natur sind und Bezüge zu sinnhaften Kontexten herstellen, wodurch ein verständlicher Umgang mit einem Begriff ermöglicht wird.

Die Wechselwirkung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen vollzieht sich darin, dass Grundvorstellungen beispielsweise dann entwickelt werden, wenn Aspekte eines Begriffs erfahrbar werden. So kann ein bestimmter Aspekt Basis für unterschiedliche Grundvorstellungen sein. Es kann jedoch auch umgekehrt eine bestimmte Grundvorstellung entwickelt werden, die Bezüge zu mehreren verschiedenen Aspekten eines Begriffs aufweist. Im

allgemeinen wird ein mathematischer Begriff sowohl mehrere Aspekte wie auch Grundvorstellungen aufweisen.

Die Beziehung, die zwischen jeweiligen Grundvorstellungen und Aspekten besteht, kann wie in Abbildung A.20 dargestellt werden. Dadurch ergibt sich mithilfe von stärker oder schwächer gezeichneten Verbindungspfeilen ein Bild davon, aus welchen Aspekten sich welche Grundvorstellungen herausarbeiten lassen und wie stark diese jeweilige Verbindung ist. Ziel dieser Arbeit ist es, diese Zusammenhänge und zentralen Strukturen bezüglich des Integrierens im Analysisunterricht herauszuarbeiten und zu diskutieren und eine vertiefte Analyse etwaiger Verbindungen, wie [Greefrath et al.: 2016] sie im Ansatz begonnen hat, durchzuführen.

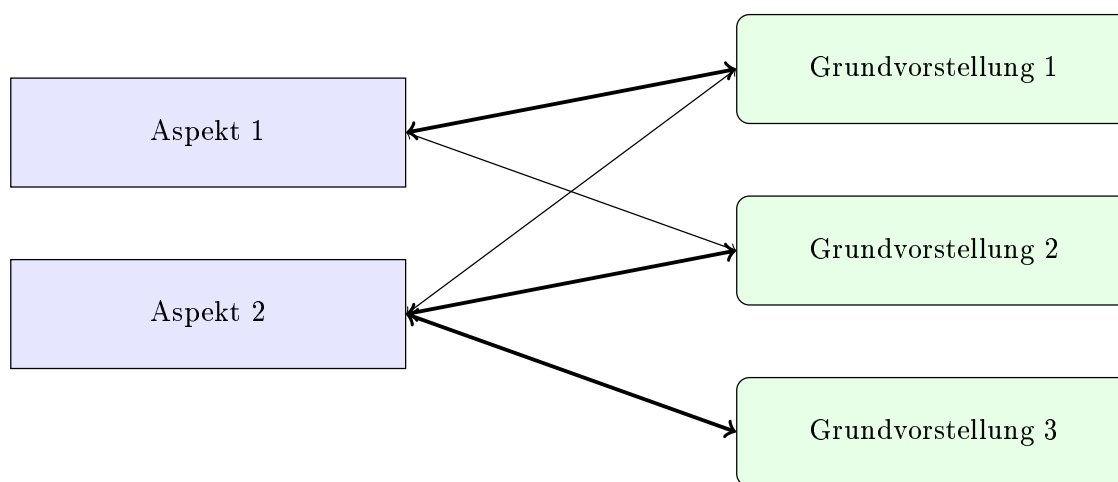


Abbildung A.20: Allgemeine Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen angelehnt an [Greefrath et al.: 2016, S. 18]

Im vorangehenden Kapitel haben wir uns eingehend mit den verschiedenen Aspekten des Integralbegriffs beschäftigt, indem wir eine fachwissenschaftliche Analyse des Integralbegriffs unternommen haben. In unserer Terminologie können wir nun von Aspekten und Grundvorstellungen des Integrals sprechen. Welche Facetten, also Aspekte, herausgefiltert werden konnten, welche Grundvorstellungen sich hinter dem Integralbegriff verbergen und in welcher Beziehung diese Aspekte und Grundvorstellungen zueinander stehen wird in den Kapiteln 2.2 und 2.3 diskutiert. Zuvor soll jedoch der Fokus auf die Didaktik der Analysis und auf die Bedeutung von Grundvorstellungen für den Analysisunterricht gelegt werden.

Grundvorstellungen stellen einen wichtigen Bestandteil im verständnisvollen Erlernen neuer mathematischer Begriffe dar, denn sie verknüpfen diese mit bereits bekannten Sach- und Handlungszusammenhängen. Dadurch erhalten neue Begriffe einen Sinn und eine inhaltliche Bedeutung, was individuellen Prozessen der Begriffsbildung nützt. Grundvorstellungen tragen also einen Teil dazu bei, dass nicht nur ein rezeptives Wissen aufgebaut wird, das nur schwer auf neue Situationen übertragen werden kann, sondern dass

ein grundlegendes Verständnis zu verschiedenen Begriffen ermöglicht wird, das transferfähig ist. Außerdem vernetzen Grundvorstellungen durch ihre sinnstiftende Wirkung mathematische Begriffe und Vorstellungen miteinander und bauen eine Verbindung zur realen Welt auf. So können mathematische Strukturen erkannt und das bereits erworbene Wissen auf neue Situationen angewandt werden. Schließlich dienen Grundvorstellungen dazu, Fehlvorstellungen zu diagnostizieren und entsprechende Fördermaßnahmen oder Verbesserungen des Unterrichts vorzunehmen [Greefrath et al.: 2016, S. 20].

Es kann zwischen verschiedenen Arten von Grundvorstellungen differenziert werden, nämlich zwischen *universellen* und *individuellen* Grundvorstellungen. Erstere sind eng verknüpft mit den Zielen des Mathematikunterrichts, da es sich dabei um jene Vorstellungen handelt, die Schülerinnen und Schüler von einem mathematischen Begriff idealerweise erhalten sollten. Diese universellen Grundvorstellungen entstehen aus fachdidaktischen Analysen eines mathematischen Begriffs heraus und können bzw. sollten Lehrpersonen als Orientierung für ihren Unterricht dienen, besitzen also einen normativen Charakter. Individuelle Grundvorstellungen haben jedoch einen deskriptiven Charakter, denn es handelt sich hierbei um Vorstellungen, die ein/e konkret betrachtete/e Lernende/r von einem mathematischen Begriff besitzt. Es spielen also persönliche Lernprozesse eine wesentliche Rolle, wodurch die Analyse solcher Grundvorstellungen erschwert wird. Durch die Analyse von schriftlichen oder mündlichen Äußerungen von Lernenden können jedoch auch hier Schlüsse auf vorhandene Grundvorstellungen gezogen werden.

Eine weitere wichtige Unterscheidung wird bezüglich der Bildung von Grundvorstellungen getroffen. So verbinden *primäre* Grundvorstellungen einen mathematischen Begriff mit Handlungserfahrungen an konkreten Materialien, also durch haptisches Arbeiten. Dies geschieht vor allem im Schulkontext, insbesondere in der Primarstufe und der Sekundarstufe I. Dem gegenüber stehen *sekundäre* Grundvorstellungen, die verschiedene bereits bestehende Vorstellungen und Darstellungen von anderen mathematischen Begriffen mit den neu erworbenen verbinden, was vor allem in der Sekundarstufe II geschieht. Für die Entwicklung von wichtigen Begriffen der Analysis, wie dem Integral, sind sowohl handlungsorientierte, also primäre Grundvorstellungen, als auch sekundäre Grundvorstellungen von Nöten, da nur dann ein präzises Erfassen des Begriffs möglich ist.

Im Weiteren folgen eine genaue Aufschlüsselung sowie Erläuterung der Aspekte aus Kapitel A.1 und der Grundvorstellungen des Integralbegriffs. Anschließend werden Verbindungen und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Aspekten und Grundvorstellungen thematisiert. Dies ermöglicht es, eine didaktische Analyse mathematischer Inhalte der Integralrechnung durchzuführen.

2.2 Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff

Im Zuge unserer fachlichen Auseinandersetzung mit dem Integralbegriff traten zwei Aspekte besonders hervor. Zum einen der *Stammfunktionsaspekt*, der eng mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in Verbindung steht und sowohl einen Beitrag zu einer möglichen Definition als auch einer Berechnungsmethode der Integralfunktion leistet. Zum anderen der *Produktsummenaspekt*, mit dem schließlich ein rein analytischer Integralbegriff geschaffen wurde. Der dritte Aspekt taucht in Zusammenhang mit dem Lebesgue-Integral und dem Lebesgue-Maß auf, die jedoch beide in dieser Arbeit fachlich nicht bearbeitet wurden. Diese Begriffe heben die Bedeutung des Integrals als Maß hervor, daher steht der *Maßaspekt* als dritter Aspekt der Integralrechnung neben dem Stammfunktionsaspekt und dem Produktsummenaspekt.

Aus didaktischer Sicht ergibt sich als eine von vier Grundvorstellungen der Integralrechnung die *Rekonstruktionsgrundvorstellung*, die sowohl die Rekonstruktion einer Größe aus gegebenen Änderungsraten, als auch die Rekonstruktion einer Stammfunktion aus einer Berandung meint. Die *Flächeninhaltsgrundvorstellung* ist eine zweite Grundvorstellung, der eine Auffassung des Integrals als orientierter Flächeninhalt zu Grunde liegt. Zuletzt werden hier die *Mittelwertsgrundvorstellung*, bei der das Integral als verallgemeinertes arithmetisches Mittel aufgefasst wird, und die *Kumulationsgrundvorstellung* genannt, die eine abstrakte Vorstellung hinter dem Produktsummenaspekt liefert. Im Folgenden werden die genannten Aspekte und Grundvorstellungen genau aufgeschlüsselt, für mehr Details siehe [Greefrath et al.: 2016, Abschnitt 5.4].

2.2.1 Stammfunktionsaspekt

Die Auseinandersetzung mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in Kapitel 1.2 führte uns zum Begriff *Stammfunktion*, der seinen Ursprung darin findet, dass eine Funktion f aus ihrer Integralfunktion I_f durch Ableiten entsteht, also dass f von I_f abstammt. So wurde die Terminologie in Kapitel 1.1, wo es galt, aus einer beliebigen Berandung die ursprüngliche Funktion, also die Integralfunktion, zu rekonstruieren, in einen allgemeinen Kontext gesetzt und ein Zusammenhang zwischen den drei Begriffen Integralfunktion, Stammfunktion und Berandung hergestellt. Es gilt nämlich nach dem ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Berandung.

Durch die Einführung des Begriffes Stammfunktion wurde also eine Möglichkeit geschaffen, die Integralfunktion zu definieren.

Darüber hinaus können, wie der zweite Teil des Hauptsatzes zeigt, Stammfunktionen dazu dienen, Integralfunktionen zu berechnen, wenn man eine beliebige Stammfunktion gefunden hat:

$$I_f(x) = F(x) - F(a).$$

Man ist dazu geneigt, die Verwendung des zweiten Teils des Hauptsatzes als Definition des Integrals zu verwenden, was jedoch sowohl fachdidaktisch als auch fachlich Probleme

aufweist, wie auch [Greefrath et al.: 2016, S. 271, 272] betont. Diese beiden Eigenschaften machen den Begriff Stammfunktion zu einem wesentlichen Aspekt der Integralrechnung.

Eine der wichtigsten Bedeutungen des Stammfunktionsaspektes ist die durch diesen Begriff geschaffene Verbindung zwischen Differenzieren und Integrieren, die in Abbildung A.9 in Kapitel 1.2 veranschaulicht wird. Das Auffinden einer Stammfunktion interpretiert als Rekonstruierte, wie es der Hauptsatz nahelegt, stellt in diesem Sinne nämlich eine Umkehrung des Ableitens dar. Somit sind Differenzieren und Integrieren im Wesentlichen Umkehroperationen. Der Stammfunktionsaspekt ist daher untrennbar mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verbunden.

Zusammenfassend lässt sich festhalten:

Der Aspekt des Integrals als Stammfunktion stellt den Zusammenhang zwischen dem Integrieren und dem Differenzieren heraus, indem die Stammfunktion als Rekonstruierte aufgefasst wird. Außerdem bezieht er sich auf die Rolle der Stammfunktion bei der Berechnung der Integralfunktion. Somit ist der Stammfunktionsaspekt untrennbar mit dem ersten und zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung verbunden [Greefrath et al.: 2016, S. 239].

2.2.2 Produktsummenaspekt

In Kapitel 1.3 wurde das Ziel verfolgt, Integrale berechnen zu können, ohne eine Stammfunktion zu ermitteln, da dies nicht in allen Fällen einfach oder möglich ist. So stießen wir auf Ober- und Untersummen, bei denen es sich bezüglich einer bestimmten Zerlegung um Produktsummen handelt, denn als Produktsumme bezeichnet man einen Ausdruck der Art

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

und genau von dieser Form ist die Gleichung (*) auf Seite 21. Schließlich wurde das Integral von der Vorstellung eines Flächeninhalts unter einer Kurve gelöst und es blieb eine Produktsumme, die eine rein analytische Definition des Integrals ermöglichte.

$$\int_a^b f := \lim U_n \quad (= \lim O_n)$$

Bei dieser Definition des Integrals über Produktsummen, handelt es sich um einen zentralen Zugang zum Integralbegriff und somit um einen Aspekt. Der Produktsummenaspekt spielt demnach dann eine tragende Rolle, wenn das Integral als Grenzwert von Ober- und Untersummen berechnet oder auf diese Weise definiert wird.

Im Rahmen dieses Aspekts sind zwei verschiedene Bedeutungen der Produktsummen zu unterscheiden. Einerseits kann der Fokus auf die Produktsumme als verallgemeinertes Produkt gelegt werden, das die Abhängigkeit zweier Faktoren beschreibt. Hierbei steht eher das Ergebnis der Berechnung im Vordergrund. Liegt die Betonung andererseits auf

der verallgemeinerten Summe, so geht es hauptsächlich um den Prozess des Aufsummierens oder Aufsammelns, der eng mit der Kumulationsgrundvorstellung zusammenhängt. So kann also Integrieren als verallgemeinertes Produkt oder als verallgemeinerte Summe gedeutet werden.

Kurz gesagt:

Der Produktsummenaspekt spielt eine tragende Rolle für die Loslösung des Integralbegriffs von der naiven Flächeninhaltsvorstellung und ist somit der Kern der analytischen Präzisierung des Integrals [Greefrath et al.: 2016, S. 239].

2.2.3 Maßaspekt

Die fachliche Diskussion im ersten Abschnitt dieser Arbeit hat sich mit einem bestimmten Aspekt des Integralbegriffs nicht beschäftigt, da dieser im Rahmen der empirischen Untersuchung nicht aufgetaucht ist. Setzt man sich jedoch mit dem in der Mathematik viel gebräuchlicheren Lebesgue-Integral auseinander, wird eine fachliche Brücke zur Maßtheorie geschlagen.

Diese versteht unter einem Maß eine Abbildung, die gewissen Teilmengen einer Grundmenge jeweils reelle Zahlen zuordnet und die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\eta(\emptyset) = 0 \quad (\text{nichtnegativ}),$$

$$\eta(A) \leq \eta(B) \text{ für } A \subset B \quad (\text{monoton}),$$

$$\text{Für disjunkte Mengen } A, B \text{ gilt, dass } \eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) \quad (\text{additiv})$$

(und analog für abzählbare Mengen)

Insbesondere das sogenannte Lebesgue-Maß ist eine Verallgemeinerung des Längen- bzw. Volumsbegriffs und es liefert für 'schöne' Mengen das übliche Resultat, das heißt zum Beispiel für das Intervall $[a, b]$ gilt $\eta([a, b]) = b - a$. Damit kann nun das Lebesgue-Integral von reellen Funktionen definiert werden:

Sei also A eine 'schöne' Menge, dann ist das Lebesgue-Maß von A definiert durch die Abbildung $A \mapsto \int_A 1 d\eta$. Das Integral über eine geeignet 'schöne' Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über A ist dann definiert als das gewichtete Maß $A \mapsto \int_A f d\eta$. Das Lebesgue-Integral stellt eine Erweiterung des Riemann-Integrals dar, denn es gilt zwar, dass jede Riemannintegrierbare Funktion auch Lebesgue-integriert werden kann, die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Der Maßaspekt ist ein wichtiger Aspekt des Integralbegriffs, der jedoch erst bei einer weiterführenden Beschäftigung mit dem Integralbegriff zu tragen kommt.

Wir halten fest:

Der Maßaspekt bezieht sich auf das in dieser Arbeit nicht näher erläuterte Lebesgue-Maß, das bei einer weiterführenden Beschäftigung mit dem Integralbegriff von Bedeutung ist.

Nach dieser Auseinandersetzung mit den Aspekten folgt nun eine fachdidaktische Analyse der Grundvorstellungen des Integralbegriffs.

2.2.4 Rekonstruktionsgrundvorstellung

Die Grundvorstellung des Rekonstruierens spielt bereits in Beispiel 1 zu Beginn der Arbeit eine tragende Rolle. Dort haben wir eine Größe aus gegebenen Änderungsraten rekonstruiert, also konkret aus der Zuflussgeschwindigkeit des Wassers in einer Badewanne auf das Wasservolumen zu einem bestimmten Zeitpunkt t geschlossen. Wir haben also allgemein betrachtet aus einer Berandung f die Integralfunktion I_f rekonstruiert. Im Zuge der Herleitung des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung beschränkten wir dann die umgekehrte Richtung und kamen zu dem Schluss, dass jede Berandung f als lokale Änderungsrate aufgefasst werden kann, was uns schließlich zum Begriff Stammfunktion führte. Demnach gilt

$$I'_f(x) = f(x) \text{ und } F' = f.$$

Insgesamt lassen sich aus dieser Herangehensweise zwei Sichtweisen auf die Rekonstruktionsgrundvorstellung herausfiltern. Einerseits die Rekonstruktion einer Größe aus gegebenen Änderungsraten und andererseits die Rekonstruktion einer Stammfunktion einer gegebenen Berandung.

Im Zuge dieser Überlegungen ist die Unterscheidung zwischen Konstruieren und Rekonstruieren von Bedeutung. Von einer Konstruktion spricht man dann, wenn die Werte der Ausgangsfunktion als Werte einer gegebenen Größe aufgefasst werden. Dann bedeutet Integrieren eine (Neu-)Konstruktion. Werden die Werte der Ausgangsfunktion jedoch als Änderungsraten aufgefasst, so handelt es sich um eine Rekonstruktion, wie im Badewannenbeispiel. Der Hauptsatz führt beide Sichtweisen zusammen, denn er besagt, dass jede Berandung f als lokale Änderungsrate aufgefasst werden kann.

Zusammenfassend lässt sich sagen:

Die Rekonstruktionsgrundvorstellung in Zusammenhang mit dem Integralbegriff meint sowohl die Rekonstruktion einer Größe aus gegebenen Änderungsraten, als auch die Rekonstruktion einer Stammfunktion aus einer Berandung [Greefrath et al.: 2016, S. 247].

2.2.5 Flächeninhaltsgrundvorstellung

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung betont einen Zugang zur Integralrechnung, bei dem es das Ziel ist, die Fläche unter einer Berandung zu bestimmen.

Auch diese Grundvorstellung wurde bereits zu Beginn in Kapitel 1.1 verwendet, als aus dem Badewannenbeispiel hervorging, dass zur Rekonstruktion des Wasservolumens aus der gegebenen Zuflussgeschwindigkeit eine Fläche unter einer krummlinigen Kurve möglichst genau zu berechnen ist. Hierfür ermittelt man den sogenannten *orientierten Flächeninhalt*, indem alle Flächen oberhalb der x-Achse positiv, und alle unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden. Die Abbildung A.6 in Kapitel 1.1 stellt diesen Sachverhalt anschaulich dar.

Auch bei der Herleitung eines rein analytischen Integralbegriffs in Kapitel 1.3 haben wir uns dieser Vorstellung bedient. Dort wurden die Flächenstücke unter und über der Kurve

durch Rechteckflächen 'eingeschachtelt' und diese Einschachtelung anschließend so weit verfeinert, dass sich die Rechteckflächen beliebig genau der Fläche unter der Kurve annähern. Erst im letzten Schritt haben wir den Integralbegriff durch die Definition von Ober- und Untersummen von der Flächeninhaltsgrundvorstellung gelöst und so rein analytisch definiert.

Zuletzt haben wir diese Grundvorstellung beim Integral als Mittel verwendet, um das Integral als verallgemeinertes arithmetisches Mittel herzuleiten, siehe dazu Kapitel 1.4.

Die Vorstellung des Integrals als Flächeninhalt bedarf einer erweiterten Sichtweise, denn es ist wesentlich, den Wert des Integrals von einem herkömmlichen Flächeninhalt zu unterscheiden. Zur Berechnung des Integrals kann der Flächeninhalt nämlich nicht immer positiv gezählt werden. Es muss ja der orientierte Flächeninhalt berechnet werden. Die Flächeninhaltsgrundvorstellung hat also Grenzen.

Kurz gesagt:

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung macht den Integralbegriff am naiven Flächeninhaltsbegriff fest. Sie betont also den 'klassischen' Zugang zur Integralrechnung, bei dem es das Ziel ist, die orientierte Fläche einer (beliebigen, aber 'schönen') Berandung zu bestimmen [Greefrath et al.: 2016, S. 244].

2.2.6 Mittelwertsgrundvorstellung

In Kapitel 1.4 haben wir an einem einfachen Beispiel erkannt, dass der Mittelwert einer Funktion in einem Zusammenhang mit dem Integral steht. Betrachtet man nämlich die Rechteckfläche, die vom Mittelwert einer linearen Funktion und der Intervalllänge $[b - a]$ aufgespannt wird, so kann man erkennen, dass es sich hierbei um einen orientierten Flächeninhalt, also ein Integral, handelt. Auch im allgemeinen Fall gilt dieser Zusammenhang, wie in Beispiel 4 in Kapitel 1.4 anhand eines Temperatursensors erarbeitet wurde. Demnach gilt, dass das Integral bis auf einen Faktor ein verallgemeinertes arithmetisches Mittel ist:

$$\mu(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Mithilfe des Integrals einer gegebenen Funktion über einem bestimmten Intervall kann also durch Division mit der Länge des Intervalls ein Mittelwert berechnet werden.

Insgesamt können wir festhalten:

Die Mittelwertsgrundvorstellung bringt zum Ausdruck, dass mithilfe des Integrals einer gegebenen Funktion über einem bestimmten Intervall, dividiert durch die Länge des Intervalls, ein Mittelwert berechnet werden kann [Greefrath et al.: 2016, S. 251].

2.2.7 Kumulationsgrundvorstellung

Die Kumulationsgrundvorstellung ist eine abstrakte Vorstellung hinter dem Produktsummenaspekt. Eine Kumulation im Allgemeinen ist eine Anhäufung oder Sammlung, in diesem Kontext ist hier jedoch speziell die Ansammlung bzw. das Aufsummieren von Teilprodukten zu einer Produktsumme gemeint. Diese Perspektive auf das Aufsummieren legt den Fokus auf den Prozess und weniger auf das Ergebnis des Integrierens. Geometrisch betrachtet ist durch den Zusammenhang mit der Produktsumme die Veranschaulichung des Integrals als Grenzwert einer Summe von Rechteckflächen auch bei dieser Grundvorstellung gegeben. Dies ähnelt zwar der Flächeninhaltsgrundvorstellung, geht aber auch darüber hinaus, wie das folgende physikalische Beispiel zeigt.

Betrachtet man ein Teilchen, das sich entlang eines Weges in einem Kraftfeld fortbewegt, so wird von diesem Teilchen Arbeit verrichtet. Diese Arbeit W setzt sich an einem bestimmten Zeitpunkt zusammen aus der Richtung $\vec{s}$, in die das Teilchen sich bewegt und der Kraft $\vec{F}$, die zu diesem Zeitpunkt auf das Teilchen wirkt. Es handelt sich bei der verrichteten Arbeit also um ein Skalarprodukt aus einem Kraft- und einem Richtungsvektor: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Möchte man nun die Arbeit, die das Teilchen bis zum Ende des Weges verrichtet, ermitteln, gilt es, die Summe aller Skalarprodukte zu berechnen:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{s}_2 + \cdots + \vec{F}_n \cdot \vec{s}_n.$$

So sind wir wieder beim Integral angelangt und haben die Produktsumme um eine abstraktere Vorstellung eines Kraft-Weg-Integrals erweitert:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s}.$$

Kurz zusammengefasst kann man sagen:

Mit der Kumulationsgrundvorstellung in Bezug auf das Integral ist der Prozess des Sammelns bzw. des Aufsummierens von Teilprodukten zu einer Produktsumme gemeint [Greefrath et al.: 2016, S. 253].

2.3 Zusammenhänge zwischen Aspekten und Grundvorstellungen

In diesem abschließenden Abschnitt sollen die Zusammenhänge zwischen einzelnen Grundvorstellungen und Aspekten diskutiert und beschrieben werden. Die Überlegungen fußen auf den didaktischen Kommentaren in den Büchern [Danckwerts & Vogel: 2006] und [Greefrath et al.: 2016]. Veranschaulicht wird die Vernetzung in der untenstehenden Abbildung A.21. In dieser haben wir die unten diskutierte Stärke der jeweiligen Beziehungen, in Erweiterung der Diskussion in [Greefrath et al.: 2016, Kapitel 5.3], graphisch angedeutet.

Ein starker Zusammenhang besteht zwischen der Rekonstruktionsgrundvorstellung und dem Stammfunktionsaspekt, da die Stammfunktion nach dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als eine Rekonstruierte einer Berandung aufgefasst werden kann. Weitere Bezüge zu dieser Grundvorstellung ergeben sich beim Produktsummenaspekt, da das Rekonstruieren einer Größe oft mit dem Aufsummieren von Teilprodukten einhergeht, und beim Maßaspekt, wenn das Berechnen von Flächen im Vordergrund steht. Diese Verbindungen sind jedoch weniger stark ausgeprägt.

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung ist eine der zentralsten Vorstellungen der Integralrechnung und auch im Unterricht ein häufig verwendeter erster Zugang. Von der Flächeninhaltsvorstellung ausgehend wurde auch in dieser Arbeit das Integral als Grenzwert von Produktsummen (Ober- und Untersummen) definiert, wodurch ein starker Zusammenhang zum Produktsummenaspekt gegeben ist. Das Integral als orientierter Flächeninhalt einer Berandung schlägt auch eine Brücke zum Stammfunktionsaspekt und schließlich kann der Maßaspekt als eine Erweiterung der Flächeninhaltsvorstellung auf Volumina und Längenmaße interpretiert werden. So können auch bei dieser Grundvorstellung Verbindungen zu allen drei Aspekten festgehalten werden.

Im Gegensatz zu den bisher angeführten Vorstellungen weist die Mittelwertsgrundvorstellung lediglich einen Bezug zum Produktsummenaspekt auf, da das Integral hier als verallgemeinertes arithmetisches Mittel aufgefasst wird.

Schließlich liegt der fachliche Kern der Kumulationsgrundvorstellung im Produktsummenaspekt, weshalb hier eine enge Verknüpfung vorliegt. Der Unterschied zwischen Grundvorstellung und Aspekt ergibt sich hier als Perspektivenwechsel vom Prozess des Summierens hin zum Ergebnis Produktsumme. Zudem ist das Bilden von Summen von Produkten sowie deren Grenzwerten die Umkehroperation zum Bilden von Änderungsraten, wodurch eine Verbindung zum Stammfunktionsaspekt besteht.

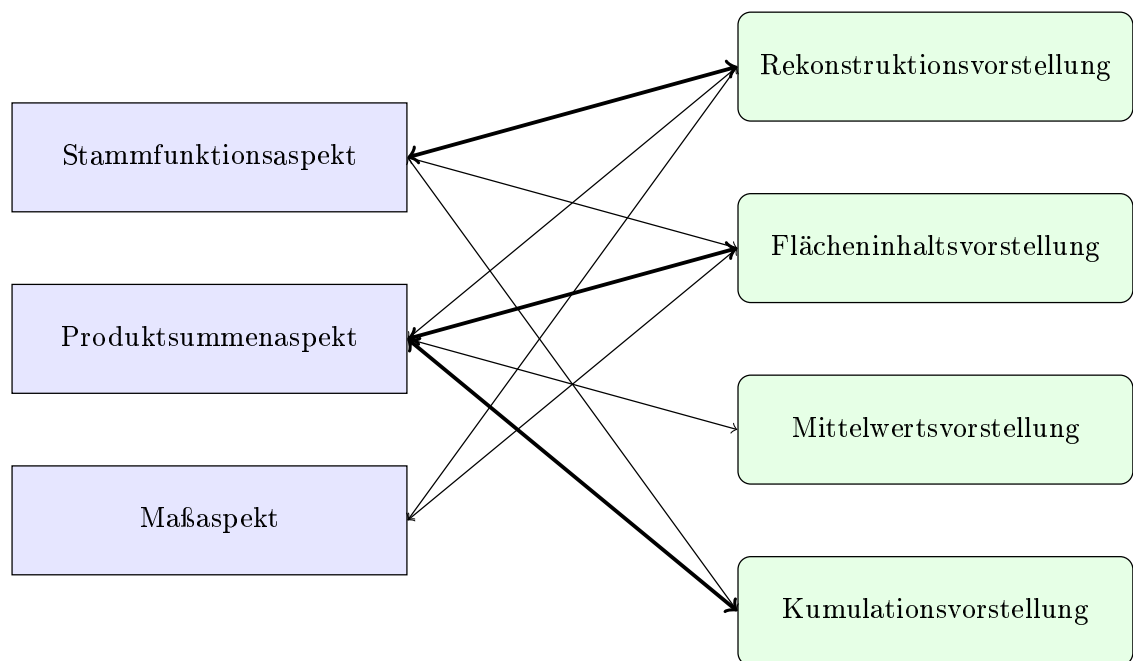


Abbildung A.21: Beziehungen zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Integralbegriff angelehnt an [Greefrath et al.: 2016, S. 238]

B Empirischer Teil

Der zweite Teil dieser Masterarbeit handelt von einem Teil der Ergebnisse einer Befragung zur Ausprägung von Grundvorstellungen der Analysis bei Studierenden des Lehramts Mathematik.

Die Befragung fand als verbundene Stichprobe, also zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten, nämlich zu Beginn bzw. am Ende einer universitären Lehrveranstaltung mit dem Titel “Schulmathematik Analysis“, statt. Die beiden als Erhebungsinstrument verwendeten Fragebögen beinhalteten unter anderem zwei Schreibimpulse zum Integralbegriff, welche als Grundlage für die im Zuge dieser Masterarbeit durchgeführte Auswertung dienen. Diese beiden Schreibimpulse lauteten zum einen “Ein *unbestimmtes* Integral ist ...“ und zum anderen “Ein *bestimmtes* Integral ist ...“. Für den gesamten Fragebogen wird hier auf den Anhang dieser Arbeit verwiesen.

Die Schreibimpulse zum Thema Integralrechnung zielen nicht explizit auf Grundvorstellungen des Integralbegriffs ab. Im Zuge der Auswertung der Studie wurden daher neben den Grundvorstellungen auch Aspekte der Integralrechnung in den Äußerungen der Studierenden gesucht und gefunden, weshalb die Fragestellung, die dieser Arbeit zu Grunde liegt, wie folgt lautet: “Welche Aspekte und Grundvorstellungen sind bei Lehramtsstudierenden des Unterrichtsfaches Mathematik zu den Begriffen *unbestimmtes* Integral und *bestimmtes* Integral ausgeprägt und welche Veränderungen in der Ausprägung können durch die theoretische Beschäftigung mit Aspekten und Grundvorstellungen beobachtet werden“.

Ziel dieses Abschnittes ist es daher, zu erforschen, welche Grundvorstellungen und Aspekte zur Integralrechnung bei Lehramtsstudierenden vorhanden sind und in welcher Häufigkeit und Qualität diese ausgeprägt sind. Auch Fehlvorstellungen und Mängel im Wissen zu den verschiedenen Grundvorstellungen und Aspekten sollen durch die Studie aufgedeckt werden. Außerdem werden die Veränderung der Ergebnisse vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt analysiert und so die Wirkung des Besuchs der Vorlesung “Schulmathematik Analysis“ gemessen, in der Grundvorstellungen und Aspekte zu allen Teilgebieten der Analysis erklärt wurden.

1 Hypothesen

In diesem Abschnitt werden einige Vermutungen und Hypothesen aufgestellt, die sowohl die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Grundvorstellungen und Aspekte und deren qualitative Ausprägung als auch die Veränderung der Äußerungen zwischen den beiden Zeitpunkten der Befragung betreffen. Die Hypothesen wurden aus theoretischen Überlegungen und einer ersten Sichtung des Auftretens der einzelnen Aspekte und Grundvorstellungen abgeleitet. So wurde versucht, die relevanten Erkenntnisse der Befragung bezüglich der Aspekte und Grundvorstellungen des Integralbegriffs abzubilden.

1.1 Hypothesen zum unbestimmten Integral

Folgende Hypothesen beziehen sich auf die Auswertung des Schreibimpulses “Ein *unbestimmtes* Integral ist ...“ und bilden die eben genannten Themengebiete ab. Da es sich beim unbestimmten Integral um eine oder die Menge aller Stammfunktion(en) handelt, kann man vermuten, dass in den Äußerungen der Studierenden hauptsächlich der Stammfunktionsaspekt und die damit eng in Verbindung stehende Rekonstruktionsgrundvorstellung aufgefunden werden.

H1 Die Rekonstruktionsgrundvorstellung und der Stammfunktionsaspekt treten häufiger auf als alle anderen Grundvorstellungen und Aspekte.

Außerdem ist zu erwarten, dass sowohl die Quantität als auch die Qualität des Auftretens dieses Aspekts bzw. dieser Grundvorstellung sich vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt verbessern.

H2 Die Häufigkeit des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung und des Stammfunktionsaspekts erhöht sich vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt.

H3 Die qualitative Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung und des Stammfunktionsaspekts erhöht sich vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt.

Weil das unbestimmte Integral nicht als orientierter Flächeninhalt aufgefasst werden kann, wird vermutet, dass die Flächeninhaltsvorstellung in den Antworten nicht aufgefunden wird. Sollte diese doch auftreten, dann handelt es sich dabei um eine Fehlvorstellung.

H4 Die Flächeninhaltsgrundvorstellung tritt nur als Fehlvorstellung auf.

H5 Die Anzahl an Fehlvorstellungen verringert sich in ihrer Häufigkeit vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt.

Aufgrund dessen, dass es sich bei der Stammfunktion um eine Rekonstruierte handelt, wie unter anderem in Kapitel 2.2.1 beschrieben wird, ist anzunehmen, dass der Stammfunktionsaspekt und die Rekonstruktionsgrundvorstellung häufig gemeinsam auftreten.

H6 Die Rekonstruktionsgrundvorstellung und der Stammfunktionsaspekt treten großteils gemeinsam auf.

Zuletzt liegt die Vermutung nahe, dass keine Schlüsse von der Note der Fachvorlesung, die die Studierenden zum Zeitpunkt der Befragung laut Studienplan bereits absolviert haben, auf die Ausprägungsqualität der Rekonstruktionsgrundvorstellung gezogen werden können, da Grundvorstellungen und Aspekte dort nicht gelehrt werden.

H7 Die Vorlesungsnote korreliert nicht mit der Ausprägungsqualität der Rekonstruktionsgrundvorstellung.

1.2 Hypothesen zum bestimmten Integral

Die nun folgenden Hypothesen betreffen die Ergebnisse zum Schreibimpuls “Ein *bestimmtes* Integral ist . . . “ und beziehen sich wiederum auf die oben genannten Inhalte. Aufgrund der langen schulischen Gewohnheit, das Integral als Fläche unter einer Kurve zu veranschaulichen und so die Integralrechnung in der Schule einzuführen, liegt die Vermutung nahe, dass die Flächeninhaltsgrundvorstellung in den Äußerungen der Proband*innen überwiegt und kaum eine andere Grundvorstellung gefunden wird.

H8 Die am häufigsten genannte Grundvorstellung ist die Flächeninhaltsgrundvorstellung.

Weiters wird wieder vermutet, dass sich sowohl die Qualität als auch die Quantität der auftretenden Grundvorstellungen und Aspekte erhöhen.

H9 Alle Grundvorstellungen und Aspekte, die in den Antworten der Befragten genannt werden, treten im Zuge des zweiten Erhebungszeitpunkts häufiger auf als im Zuge des ersten.

H10 Die qualitative Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung erhöht sich vom ersten zum zweiten Erhebungszeitraum.

Es wird außerdem erwartet, dass sich aufgrund des Besuchs der Vorlesung die Anzahl an Fehlvorstellungen verringert.

H11 Die Anzahl an Fehlvorstellungen verringert sich vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt.

Schließlich steht wieder zu vermuten, dass die Note der Fachvorlesung keine Schlüsse auf die Ausprägungsqualität der Grundvorstellungen zulässt, da Grundvorstellungen und Aspekte dort nicht gelehrt werden.

H12 Die Vorlesungsnote korreliert nicht mit der Ausprägungsqualität der Flächeninhaltsgrundvorstellungen.

2 Datenerhebung

In diesem Kapitel wird beschrieben, auf welcher Datengrundlage die Studie beruht, wie sich die Stichprobe zusammensetzt, welches Erhebungsinstrument verwendet wurde und wie die Erhebung schließlich durchgeführt wurde. Da meine Kollegin, Antonia Spannagl, bereits eine Masterarbeit [Spannagl: 2020] verfasst hat, die teilweise auf derselben Datengrundlage beruht, orientiert sich die Beschreibung des Forschungsdesigns an dieser.

2.1 Datengrundlage

Die Daten für diese Masterarbeit stammen aus der im Zuge des Projekts “BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis“ durchgeführten Befragung. Im Projekt wird unter der Leitung von Christoph Ableitinger, Stefan Götz, Roland Steinbauer und Evelyn Süss-Stepancik das “Zusammenwirken der fachlichen und fachdidaktischen Lehre im Gebiet der Analysis im Rahmen des Unterrichtsfaches Mathematik im Verbund Nord-Ost [...] qualitativ und quantitativ empirisch untersucht, um theoretische Grundlagen und Absichten mit den tatsächlichen Wirkungen vergleichen zu können“ [PH NÖ Homepage: zuletzt abgerufen am 21.03.2022]. Finanziert wird das Projekt von der Fakultät für Mathematik von der Universität Wien. Im Zuge der Befragung wurden von den Proband*innen unter anderem Fragen und Schreibimpulse zu Grundvorstellungen zu neun Begriffen aus dem Bereich der Analysis beantwortet. Diese Arbeit beschäftigt sich mit den Äußerungen zu den Schreibimpulsen “Ein *unbestimmtes* Integral ist ...“ und “Ein *bestimmtes* Integral ist ...“.

2.2 Stichprobe

Die Stichprobe besteht aus Studierenden der Universität Wien, die zum Zeitpunkt der Durchführung für das Studium des Bachelor Lehramt Mathematik oder das Diplomlehramtsstudium Mathematik inskribiert waren. Aus dem Studienplan geht hervor, dass Studierende des Bachelorstudiums die StEOP bereits erfolgreich abgeschlossen und sich im fünften Semester ihres Bachelorstudiums befunden haben und Diplomstudent*innen die Analysis-Fachvorlesung besucht haben. Bei den Teilnehmer*innen der Studie handelt es sich um Besucher*innen der ersten und letzten Vorlesungseinheit “Schulmathematik Analysis“.

Es handelt sich daher um eine verbundene Stichprobe, bei der es das Ziel ist, einen Vergleich der Äußerungen der Proband*innen vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt anzustellen. Aus diesem Grund wurden in der Auswertung nur jene Fragebögen berücksichtigt, von denen zum zweiten Befragungszeitpunkt ein Gegenstück existiert. So wurden denselben Proband*innen zu zwei unterschiedlichen Erhebungszeitpunkten dieselben Schreibaufträge gestellt. Durch personalisierte Codes, die in Kapitel 3.1 genau beschrieben werden, konnten die zusammengehörigen Fragebögen ausfindig gemacht werden. Insgesamt handelt es sich dabei um 59 Fragebogenpaare, die für die Studie verwendet wurden.

2.3 Erhebungsinstrument

Die Daten für diese Studie wurden durch eine verbundene Stichprobe schriftlich mithilfe von zwei Fragebögen erhoben, die zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten ausgefüllt wurden. Diese Fragebögen enthielten unter anderem die für diese Arbeit relevanten Schreibimpulse zur Integralrechnung, aber auch noch weitere Fragestellungen. Im Folgenden werden beide Fragebögen einzeln besprochen. Eine exemplarische Abbildung eines Fragebogens befindet sich im Anhang dieser Arbeit.

Der erste Fragebogen 1A setzt sich aus drei Teilen zusammen. Im ersten Teil werden das Thema der Studie, deren Ziele und die Durchführung beschrieben. Beim zweiten Teil handelt es sich um eine Anleitung zur Eintragung eines persönlichen sechststelligen Codes auf dem Fragebogen, der die Anonymität der Teilnehmenden gewährt und trotzdem ermöglicht, den ersten mit dem zweiten Fragebogen derselben Person zu vergleichen. In Kapitel 3.1 wird darauf näher eingegangen. Der dritte Teil enthält Schreibimpulse zu Themen der Analysis und den damit verbundenen Grundvorstellungen. Die Aufgabenstellung zum Ausfüllen des Fragebogens lautet wie folgt: “Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z.B. formal, verbal und/oder bildlich.“

Diese zu ergänzenden Sätze sind unterschiedlich formuliert:

“Unter ... stelle ich mir vor, ...“

“... ist wichtig, weil ...“

“Ein ... ist ...“

“Welches Bild verbinden Sie mit ...?“

“In ... geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...“

Der zweite Fragebogen 1B besteht aus vier Teilen, wobei die ersten drei Teile identisch mit dem ersten Fragebogen sind. Im zusätzlichen vierten Teil werden Fragen gestellt, die individuelle Daten der Studierenden betreffen.

Bei der Frage 10. geht es um die unterrichtlichen Erfahrungen der Proband*innen, also ob diese bereits Mathematik an einer Schule unterrichtet haben. Für die Antwort ist “Ja“ oder “Nein“ anzukreuzen. Die weiterführende Frage 12. bezieht sich auf die Lehrumgebung dieser unterrichtlichen Erfahrung. Zur Wahl stehen die Möglichkeiten “Orientierungspraktikum (PÄP)“, “Schulpraktikum (FAP)“ und “Sondervertragslehrer*in“.

Die Frage 11. lautet, ob regelmäßig Nachhilfe gegeben wird oder wurde und ist abermals mit Ja oder Nein in Form von Ankreuzen zu beantworten.

Es folgt in Punkt 13. eine Aufforderung zur Nennung des Schultyps, an dem die Teilnehmer*innen gerne in Zukunft unterrichten würden. Hier gibt es die Antwortmöglichkeiten “NMS“, “AHS-Unterstufe“, “AHS-Oberstufe“ und “BHS“, wobei eine Mehrfachantwort möglich ist.

Schließlich wird gefragt, ob die Vorlesung und Übung “Analysis in einer Variable für das Lehramt“ bereits positiv absolviert wurde. Falls ja, wird auch nach der Note gefragt.

2.4 Durchführung der Datenerhebung

Die eben beschriebenen Fragebögen wurden im Zuge der Didaktikvorlesung “Schulmathematik Analysis“ an die anwesenden Studierenden ausgeteilt. In der ersten Vorlesungseinheit, die Anfang Oktober 2018 stattfand, wurden das Projekt erklärt und anschließend die Befragung in 15 – 25 Minuten schriftlich durchgeführt. Es wird davon ausgegangen, dass die Studierenden bereits die Fachvorlesung zu Analysis besucht haben, da diese als empfohlene Voraussetzung für die “Schulmathematik Analysis“ Vorlesung gilt. Aus diesem Grund ist anzunehmen, dass die im Fragebogen auftretenden Begriffe der Analysis bereits bekannt sind und ein gewisses Verständnis für diese Begriffe besteht. Der zweite Erhebungszeitpunkt folgte am Ende der Vorlesung, also Ende Jänner 2019, wobei die Befragung gleich erfolgte wie zum ersten Erhebungszeitpunkt.

In der Zeit zwischen den beiden Befragungen wurden in der Vorlesung das Konzept der Grundvorstellungen und Aspekte der Mathematik vorgestellt und die einzelnen Themen der Analysis spezifisch erarbeitet. Erst am Ende der Vorlesung wurde aufgrund zeitlichen Mangels die Didaktik der Integralrechnung behandelt, weshalb die Grundvorstellungen und Aspekte dieses Teilbereichs der Analysis kürzer gehalten wurden. Im Folgenden werden die Inhalte der Vorlesung zusammengefasst wiedergegeben.

Spezifika der Intervention

In diesem Abschnitt wird kurz beschrieben, welches Wissen den Studierenden im Zuge der Vorlesung “Schulmathematik Analysis“ zur Didaktik des Integralbegriffs näher gebracht wurde. So kann ein Verständnis dafür aufgebaut werden, welche Verbesserungen im zweiten Fragebogen erwartet werden können. Die folgenden Informationen zur Vorlesung stammen aus dem Skript zur Vorlesung “Schulmathematik Analysis“ im Wintersemester 2018/19 [Steinbauer & Süß-Stepancik: 2019b] und orientieren sich an der Masterarbeit meiner Kollegin Antonia Spannagl [Spannagl: 2020].

Die Begriffe *Aspekt* und *Grundvorstellung* wurden in der Vorlesung wie folgt eingeführt und erklärt:

“Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist eine Facette dieses Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben wird (werden kann).“ [Steinbauer & Süß-Stepancik: 2019b, S. 12]

“Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.“ [Greefrath et al.: 2016, S. 17]

Erwähnt wurde auch die Möglichkeit, dass mehrere Grundvorstellung zu einem Aspekt bestehen können, umgekehrt eine Grundvorstellung auch mehreren Aspekten zu Grunde liegen kann. Außerdem wurde eine Unterscheidung der Begriffe *universelle* und *individuelle* sowie *primäre* und *sekundäre* Grundvorstellungen vorgenommen. Weiters wurden drei Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen, die Vom Hofe beschreibt [Vom Hofe: 1995, 97, 98], in der Vorlesung besprochen. Dazu gehört das Anknüpfen an bekannte Sachzusammenhänge oder Handlungsvorstellungen, das Aufbauen von mentalen Repräsentationen und das Anwenden des jeweiligen Begriffs in neuen Situationen, wobei Sachzu-

sammenhänge erkannt und Phänomene mithilfe mathematischer Strukturen modelliert werden sollen.

Die Vorlesung behandelte Aspekte und Grundvorstellungen zu allen Teilbereichen der Analysis, wobei jene zur Integralrechnung am Ende der Vorlesung und aufgrund eines Mangels an Zeit nur grob angeschnitten wurden. Genannt und kurz besprochen wurden der Stammfunktionsaspekt, der Produktsummenaspekt, die Flächeninhaltsgrundvorstellung, die Rekonstruktionsgrundvorstellung und die Mittelwertsgrundvorstellung, wie in Abschnitt A.1 beschrieben ist.

Ähnlich wie in Abschnitt A dieser Arbeit wurde auch in der Vorlesung eine fachmathematische Betrachtung durchgeführt. Im Zuge dessen wurde die Bedeutung von Integrieren als Rekonstruieren mithilfe des Badewannenbeispiels herausgearbeitet und verbildlicht. Darauf folgt auch in der Vorlesung eine genaue Abgrenzung der Begriffe *Berandung*, *Integralfunktion* und *Stammfunktion*. Weiters wurden die beiden Aussagen des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung erklärt und Integrieren als Umkehroperation des Differenzierens herausgearbeitet. Schließlich geschah, wie auch in dieser Arbeit in Abschnitt 1.3, eine analytische Präzisierung des Integralbegriffs über Produktsummen, was in der Vorlesung zur Definition des Riemann Integrals führte.

Nähere Informationen zu den Inhalten der Vorlesung können einerseits dem Skript zur Vorlesung [Steinbauer & Süss-Stepancik: 2019b] und andererseits den dazugehörigen Vortragsfolien [Steinbauer & Süss-Stepancik: 2019a] entnommen werden.

3 Datenauswertung und -verarbeitung

In diesem Kapitel wird das Vorgehen im Zuge der Datenauswertung und -verarbeitung genau beschrieben. Das heißt, es werden die Codierung der Fragebögen kurz geschildert und anschließend die Kategorisierung der Äußerungen und die dafür erstellten Skalen genau beschrieben.

3.1 Codierung der Fragebögen

Da es sich bei der Befragung um eine verbundene Stichprobe handelt, bei der zu zwei Befragungszeitpunkten dieselben Proband*innen befragt wurden, wurden als ersten Schritt in der Auswertung die Fragebögen mithilfe ihres sechsstelligen Codes, den die Teilnehmer*innen auf ihren Fragebögen auszufüllen hatten, ihren Gegenstücken zugeordnet. Diese Codes setzten sich zusammen aus den ersten beiden Buchstaben des Vornamens der Mutter, den zwei Ziffern des Geburtstages der Mutter und schließlich den beiden Ziffern des eigenen Geburtstages. Für Geburtstage, die zwischen dem Ersten und Neunten eines Monats stattfinden, wurde eine Null vor die Ziffer geschrieben. So entstanden 59 Fragebogenpaare, die unter anderem Äußerungen zum Integral enthielten. Diese wurden schließlich in eine Excel Tabelle eingetragen [Spannagl: 2020].

3.2 Kategorisierung und Codierung der Äußerungen

Die Auswertung und Verarbeitung der Antworten erfolgten in mehreren Schritten. Zunächst wurden die Daten in je eine Excel Tabelle zum unbestimmten und zum bestimmten Integral eingetragen und den eben beschriebenen individuellen Codes der Studierenden zugeordnet. Dann folgte eine Aufschlüsselung der Inhalte pro Antwort, indem für jeden Inhalt eine Spalte erstellt wurde, in die das Auftreten des jeweiligen Inhalts vermerkt werden konnte. So entstand ein Überblick über die gefundenen Inhalte der Antworten der Proband*innen.

Dadurch wurde das Material gesichtet und häufig auftretende Grundvorstellungen oder Aspekte grob überblickt. Schließlich wurden die Inhalte der Antworten, die sich auf Grundvorstellungen oder Aspekte bezogen, qualitativ unterschieden. Hierfür wurde ein Kategoriensystem durch ein induktives und normatives Wechselspiel entwickelt, das verschiedene Ausprägungskategorien der jeweiligen Grundvorstellung oder des jeweiligen Aspekts abbildet. Im Zuge dessen entstanden Skalen, die die verschiedenen Qualitäten der Ausprägungen darstellen. Im Folgenden werden diese Skalen für jede Grundvorstellung und für jeden Aspekt erläutert.

3.2.1 Skalen zum unbestimmten Integral

Die Äußerungen, die sich auf das unbestimmte Integral beziehen, konnten ausschließlich der Rekonstruktionsgrundvorstellung, dem Stammfunktionsaspekt und der Flächeninhaltsgrundvorstellung zugeordnet werden. Für diese Aspekte und Grundvorstellungen werden im Folgenden die erstellten Skalen genau aufgeschlüsselt.

Rekonstruktionsgrundvorstellung:

Die hier abgebildete Skala ordnet die Einteilung der Äußerungen, die die Rekonstruktionsgrundvorstellung beinhalten, in Ausprägungskategorien. Diese Grundvorstellung tritt in drei Kategorien mit den folgenden Codes auf, siehe Tabelle B.1: U für unspezifische Äußerungen, die keinen direkten Zugriff auf die Grundvorstellung zulassen, 1 für Äußerungen, die sich auf die Grundvorstellung beziehen, jedoch ungenau formuliert sind und 2 für Äußerungen, die sich auf die Grundvorstellung beziehen und adäquat formuliert sind. Der Code 1a stellt eine Besonderheit, eine Unterkategorie von 1 dar. Er bezieht sich auf all jene Äußerungen, die 'formale' Fehler beim Stammfunktionsaspekt aufweisen. Beim Code F handelt es sich um eine Fehlvorstellung, bei der das unbestimmte Integral als Methode zur Berechnung der Stammfunktion aufgefasst wird. Die dritte Spalte beinhaltet Beispielformulierungen, wie sie in den Antworten der Studierenden tatsächlich zu finden waren, wohingegen in der Spalte "Bereinigt" Zusammenfassungen der Formulierungen der Proband*innen eingetragen sind.

Code	Qualität der Ausprägung	Beispielformulierungen der Äußerungen zum Schreibimpuls 'Ein unbestimmtes Integral ist...'	Bereinigt
U	Grundvorstellung erkennbar, Formulierung ermöglicht jedoch keinen spezifischen Zugriff auf die Grundvorstellung	„eine Stammfunktion einer Funktion“	eine Stammfunktion
1	Grundvorstellung klar erkennbar, Formulierung ungenau	„Die Gegenoperation zum Differenzieren“; „[...] Stammfunktion, durch deren Ableitung man die Funktion, die integriert wird, erhält [...]“	Umkehroperation zum Differenzieren; Stammfunktion - Ableitung erwähnt;
1a	Grundvorstellung erkennbar, formaler Fehler beim Stammfunktionsbegriff	„Ist die Stammfunktion einer differenzierbaren Funktion“	die Stammfunktion einer (differenzierbaren, ...) Funktion
2	GV klar ausgeprägt und adäquat formuliert	„die Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Änderungsraten“	Rekonstruktion einer Funktion
F	Fehlvorstellung erkennbar	„eine Operation, um die Stammfunktion zu ermitteln“	Methode zur Berechnung der Stammfunktion

Tabelle B.1: Codierung zur Rekonstruktionsgrundvorstellung zum unbestimmten Integral

Manche der Äußerungen von Studierenden stellten eine Herausforderung in der Zuteilung dar. So etwa das folgende Beispiel: „das 'allgemeine' Integral der Funktion, ohne Grenzen, *man sucht nicht nach der Fläche, sondern nach der Stammfunktion im Allgemeinen*“. Einerseits ist die kursiv dargestellte Aussage richtig, jedoch beantwortet sie den Schreibimpuls „Ein *unbestimmtes* Integral ist ...“ rein operational. Trotzdem wurde diese Antwort dem Code 1 zugeordnet, da die Rekonstruktionsgrundvorstellung in der Formulierung „sucht nach der Stammfunktion“ durchaus erkennbar ist.

Stammfunktionsaspekt:

Die Äußerungen, die sich auf den Stammfunktionsaspekt beziehen, wurden in eine dreistufige Skala gegliedert. Der Code 1 umfasst alle Äußerungen, die den Aspekt benennen, jedoch eine fehlerhafte Formulierung aufweisen. Code 2 enthält jene Äußerungen, die den Aspekt ansprechen und adäquat formuliert sind. Schließlich besteht Code F(HS II) aus jenen Äußerungen, die die Stammfunktion ausschließlich mithilfe des zweiten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung definieren. Der Begriff Stammfunktion wird also rein funktional verstanden, das heißt als Werkzeug, um mit dem zweiten Teil des Hauptsatzes die Fläche unter (Ableitungs-)Funktionen zu berechnen. Die definitorischen Eigenschaften einer Stammfunktion finden sich nicht, weshalb auch kein Zusammenhang zur Rekonstruktionsgrundvorstellung besteht. Alle aufgefundenen Fehlerformulierungen fallen in diese Qualitätskategorie.

Code	Qualität der Ausprägung	Beispielformulierungen der Äußerungen zum Schreibimpuls „Ein unbestimmtes Integral ist...“	Bereinigt
1	Aspekt genannt, Formulierung fehlerhaft (z.B. operational missverstanden oder Eindeutigkeit der Stammfunktion vorausgesetzt)	„man sucht nicht nach der Fläche, sondern nach der Stammfunktion im Allgemeinen“ „Methode zur Berechnung der Stammfunktion“ „ $\int f(x) = F(x)$ “ „die Stammfunktion einer Funktion“ „die Stammfunktion einer stetigen Funktion“	sucht nach Stammfunktion; Methode/Möglichkeit/Operation/Funktion zur Berechnung der Stammfunktion; Formel aufgeschrieben („+c“); die Stammfunktion; die Stammfunktion einer (stetigen /...) Funktion
2	Aspekt genannt und adäquat formuliert	„eine Stammfunktion“	(eine) Stammfunktion (der ursprünglichen Funktion)
F (HS II)	Aspekt genannt, allerdings ausschließlich in Zusammenhang mit HS II und daher hier nicht adäquat.	„ein Term zur Berechnung der Fläche unter einer Funktion“	Term zur Berechnung der Fläche; Flächeninhaltsformel

Tabelle B.2: Codierung zum Stammfunktionsaspekt zum unbestimmten Integral

Die folgende Antwort wurde wie folgt in der obigen Skala zugeordnet: Die Antwort „die Stammfunktion einer stetigen Funktion“ ist zwar grundsätzlich als richtig zu werten, trotzdem fällt dieser Satz in Kategorie 1, da die Bezeichnung „*die* Stammfunktion“ ausdrückt, dass es genau eine Stammfunktion zu jeder Funktion gibt, was falsch ist. Korrekte Formulierungen wären zum Beispiel 'eine mögliche Stammfunktion' oder 'eine Stammfunktion'.

Flächeninhaltsgrundvorstellung:

Diese Grundvorstellung tritt in Zusammenhang mit dem Schreibimpuls zum unbestimmten Integral in den Antworten lediglich als Fehlvorstellung auf, weshalb keine Skala entwickelt wurde. Das folgende Beispiel steht stellvertretend für alle Äußerungen, die sich

auf diese Grundvorstellung beziehen: “eine Fläche unter einer Kurve, die man nicht ausrechnen kann, da man die Grenzwerte nicht kennt“. Dabei handelt es sich um eine Fehlvorstellung, da das unbestimmte Integral nicht die Fläche unter der Kurve ist, sondern die Menge aller Stammfunktionen oder eine mögliche Stammfunktion einer Funktion. Formulierungen, wie die im Folgenden aufgelisteten, wurden nicht zur Flächeninhaltsvorstellung gezählt, da sie sich hauptsächlich auf den Stammfunktionsaspekt beziehen und die Fläche unter der Kurve nicht im Bezug zum unbestimmten Integral erwähnen: “das ‘allgemeine’ Integral der Funktion, ohne Grenzen, *man sucht nicht nach der Fläche, sondern nach der Stammfunktion im Allgemeinen*“, “der Term zur Berechnung der Fläche unter einer Funktion“.

3.2.2 Skalen zum bestimmten Integral

Zum bestimmten Integral konnten die Flächeninhaltsgrundvorstellung, der Stammfunktionsaspekt und in einem Einzelfall die Kumulationsgrundvorstellung und der Produktsummenaspekt gefunden werden. Die für diese Aspekte und Grundvorstellungen erstellten Skalen werden nun erläutert.

Flächeninhaltsgrundvorstellung:

Wie bereits bei der Rekonstruktionsgrundvorstellung beim unbestimmten Integral wurden hier drei Ausprägungskategorien geschaffen. Wiederum steht U für die unspezifischen Äußerungen, die keinen Zugriff auf die Grundvorstellung zulassen. In Abbildung B.3 steht Code 1 für jene Äußerungen, bei denen die Grundvorstellung erkennbar ist, jedoch ungenau formuliert, wohingegen 2 adäquate Formulierungen einer klar ausgeprägten Grundvorstellung aufweist. Der Code 1a stellt wieder eine Unterkategorie von 1 dar, in diesem Fall handelt es sich dabei um jene Äußerungen, die eine fehlerhafte Formulierung bezüglich des orientierten Flächeninhalts aufweisen. Fehlvorstellungen bezüglich der Flächeninhaltsvorstellung konnten in den Antworten nicht ausgemacht werden, weshalb keine Äußerungen dem Code F zugeteilt wurden. Die in Tabelle B.3 kursiv geschriebenen Eintragungen sind hier nachträglich formulierte Musterantworten, die so jedoch nicht in den Daten vorkommen.

Kumulationsgrundvorstellung und Produktsummenaspekt:

Die folgende Antwort stellt das einzige Beispiel dar, das die Kumulationsgrundvorstellung und den Produktsummenaspekt aufweist, weshalb auch hier keine Kategorisierung vorgenommen wurde. Es wird von einer “Verallgemeinerung von Summe“ gesprochen, wobei es sich um eine ungenaue Formulierung einer Produktsumme handelt und somit um den Kern der Kumulationsgrundvorstellung: “Eine Zahl - Fläche unter Graph; *Verallgemeinerung von Summe*, statt über diskrete Glieder über Intervall“. Wie auch [Greefrath et al.: 2016, S. 254] betont, zeigt das Beispiel, dass die Kumulationsgrundvorstellung eng mit dem Produktsummenaspekt zusammenhängt und die beiden häufig gleichzeitig auftreten.

Code	Qualität der Ausprägung	Beispielformulierungen der Äußerungen zum Schreibimpuls „Ein bestimmtes Integral ist...“	Bereinigt
U	Grundvorstellung erkennbar, Formulierung ermöglicht jedoch keinen spezifischen Zugriff auf die Grundvorstellung	Skizze ¹  „Eine Operation um die Fläche unter /über (bei $f(x) < 0$) zu ermitteln“	Skizze; Möglichkeit/Operation zur Flächenberechnung
1	Grundvorstellung erkennbar, Formulierung ungenau	„z.B. der orientierte Flächeninhalt in dem Intervall der integrierten Funktion“	orientierte Fläche im Intervall der integrierten Funktion;
1a	Grundvorstellung vorhanden, nur Orientierung fehlerhaft ausgedrückt	„Fläche unter dem Graphen d. Funktion in dem Intervall“	Fläche unter Kurve (in Intervall);
2	GV klar ausgeprägt und adäquat formuliert	„[...] der orientierte Flächeninhalt zwischen zwei Grenzen a und b“	eine orientierte Fläche (in Intervall)
F	Fehlvorstellung erkennbar	<i>Eine Rechteckfläche (nicht vorgekommen)</i>	

¹ Es wurden die y- und die x-Achse gezeichnet und in etwa eine umgekehrte Parabel auf der rechten Seite der y-Achse eingezeichnet. Die Fläche unter der Kurve

oberhalb der x-Achse wurde schraffiert und zwei vertikale Striche wurden bei den Nullstellen für die Grenzen eingezeichnet.

Tabelle B.3: Skala zur Flächeninhaltsgrundvorstellung zum bestimmten Integral

Stammfunktionsaspekt:

Schließlich tritt im Zuge des Schreibimpulses zum bestimmten Integral der Stammfunktionsaspekt auf, jedoch nur in Einzelfällen oder nicht korrekt formuliert, weshalb auch hier keine Kategorisierung vorgenommen wurde. Der Großteil der Äußerungen, die sich auf diesen Aspekt beziehen, nennen nur die Formel

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Hier finden sich aufgrund der Uneindeutigkeit der Äußerung die definatorischen Eigenschaften einer Stammfunktion nicht, weshalb auch hier nicht auf ein tiefgreifendes Verständnis des Stammfunktionsaspekts geschlossen werden kann.

Die Antwort „die Fläche zwischen Funktion und x-Achse zwischen den Grenzen. Oder besser $F(b) - F(a)$. Also eigentlich die Absolute Änderungsrate einer Stammfunktion im Intervall“ ist ein Einzelfall und stellt eine Verbindung zum Stammfunktionsaspekt her, indem eine Brücke zum zweiten Teil des Hauptsatzes geschlagen wird.

Dahingegen handelt es sich bei der Antwort „Die best. Stammfunktion mit best. Grenzen“ um eine falsche Aussage, die wiederum als Einzelfall in den Antworten der Proband*innen auftaucht.

4 Ergebnisdarstellung

In diesem Abschnitt stellen wir die quantitativen Ergebnisse bezüglich der Häufigkeit und der Ausprägungsqualität sowie deren Veränderung des Auftretens von Aspekten und Grundvorstellungen vom Prätest (Befragung zu Beginn der Vorlesung) zum Posttest (zweiter Befragungszeitpunkt am Ende der Vorlesung) dar. Im Zuge dessen wird die Gültigkeit der Hypothesen aus Abschnitt B.1 geprüft.

Es werden im Folgenden Abkürzungen für die jeweiligen Grundvorstellungen und Aspekte verwendet, die sich wie folgt darstellen:

FV ... Flächeninhaltsgrundvorstellung

RV ... Rekonstruktionsgrundvorstellung

KV ... Kumulationsgrundvorstellung

SA ... Stammfunktionsaspekt

PA ... Produktsummenaspekt

4.1 Ergebnisse zum unbestimmten Integral

Dieser Abschnitt stellt die Ergebnisse der Auswertung dar, die sich auf den Schreibimpuls "Ein *unbestimmtes* Integral ist ..." beziehen. Sie werden den Hypothesen H1 bis H7 gegenübergestellt.

4.1.1 Allgemeines Auftreten von Aspekten und Grundvorstellungen

In der Tabelle und den untenstehenden Grafiken B.1 und B.2 sind die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten zum Auftreten von Aspekten und Grundvorstellungen abgebildet.

	RV		SA		FV		keine	
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
prätest	14	24	16	27	5	8	24	41
posttest	23	39	24	41	5	8	7	12

Tabelle B.4: Absolute und relative Häufigkeit von Aspekten und Grundvorstellungen zum unbestimmten Integral

Dabei ist auffallend, dass von allen Aspekten lediglich der Stammfunktionsaspekt in den Antworten gefunden wurde. Von allen Grundvorstellungen wurde hauptsächlich die Rekonstruktionsgrundvorstellung genannt, wobei die Flächeninhaltsgrundvorstellung als einzige andere Grundvorstellung lediglich als Fehlvorstellung auftritt. Dies bestätigt die

erste Hypothese H1: “Die Rekonstruktionsgrundvorstellung und der Stammfunktionsaspekt treten häufiger auf als alle anderen Grundvorstellungen und Aspekte.“

Dass die Rekonstruktionsgrundvorstellung, wie die Hypothese H6 besagt, in ähnlicher Häufigkeit wie der Stammfunktionsaspekt auftritt, ist ebenso herauszulesen, genauer wird diese Auffälligkeit in Abschnitt 4.1.5 aufgeschlüsselt. Außerdem ist zu erwähnen, dass vom Prätest zum Posttest keine neuen Aspekte oder Grundvorstellungen hinzukommen.

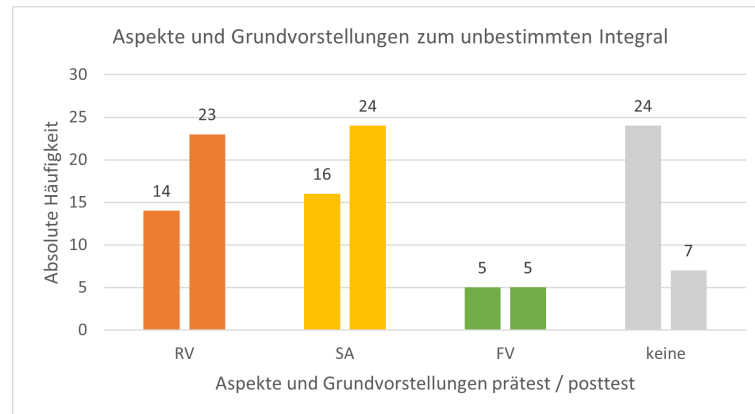


Abbildung B.1: Absolute Häufigkeiten von Aspekten und Grundvorstellungen zum unbestimmten Integral

Vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt steigen sowohl die Nennungen des Stammfunktionsaspekts als auch jene der Rekonstruktionsgrundvorstellung um 50% bzw. 64%. Dies bestätigt die Hypothese H2, die wie folgt lautet: “Die Häufigkeit des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung und des Stammfunktionsaspekts erhöht sich vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt“. Dahingegen nimmt die Flächeninhaltsgrund-

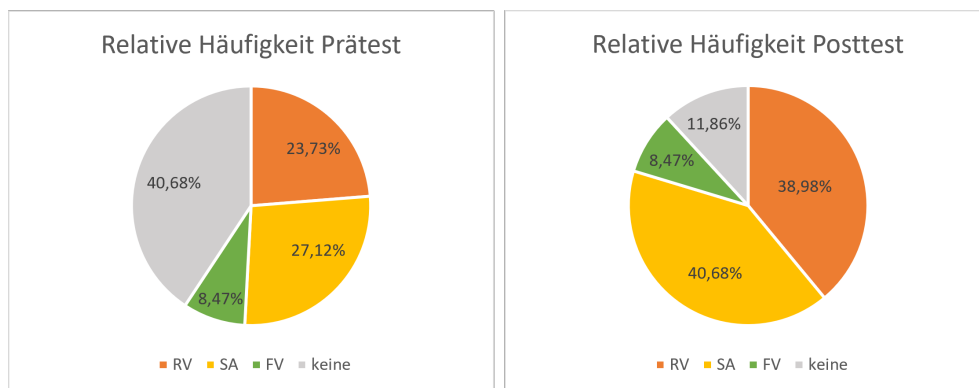


Abbildung B.2: Relative Häufigkeiten von Aspekten und Grundvorstellungen zum unbestimmten Integral

vorstellung, die nur als Fehlvorstellung auftritt, weder zu- noch ab. Sie bleibt bei fünf

Nennungen. Betrachtet man jedoch die Fehlvorstellungen bezüglich der Rekonstruktionsgrundvorstellung, so steigt hier die Zahl des Auftretens vom Prätest zum Posttest von eins auf drei an. Allerdings ist anzumerken, dass es sich hierbei um sehr kleine Zahlen handelt. Nachdem im Zuge des Stammfunktionsaspekts keine weitere Fehlvorstellung auftritt, kann die Hypothese H5 bereits widerlegt werden: “Die Anzahl an Fehlvorstellungen verringert sich in ihrer Häufigkeit vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt“. Schließlich ist festzuhalten, dass im Posttest nur mehr in sieben Antworten keine Grundvorstellung und kein Aspekt gefunden wurden, wohingegen im Prätest noch in 24 Antworten keine Grundvorstellung und kein Aspekt gefunden wurden. Auch wenn die Zahl der Äußerungen, die keiner Grundvorstellung und keinem Aspekt zugeordnet werden konnten, hoch ist, konnte aufgrund der hohen Diversität keine Zusammenfassung in Kategorien erfolgen. Folgende bereinigte Formulierungen sind unter anderem im Prätest bzw. im Posttest aufgetaucht:

- ‘Integral ohne (bestimmte/eindeutige/...)Grenzen’
- ‘unbegrenzt’
- ‘eine Zahl’
- unmöglich zuzuordnen, wie zum Beispiel leere Zeilen, ‘nicht definiert auf $\mathbb{R}$ ’, etc.

Bezüglich der Rekonstruktionsgrundvorstellung kann festgehalten werden, dass im Prätest noch in 76% aller Äußerungen diese Grundvorstellung nicht gefunden wurde, im Posttest nunmehr in 61%. Insgesamt bleibt der prozentuelle Anteil der Antworten, die die Rekonstruktionsgrundvorstellung nicht beinhalten, sowohl im Prätest als auch im Posttest also weit über der Hälfte. Die Anzahl an jenen Äußerungen, die den Stammfunktionsaspekt nicht beinhalten, sinkt um rund 19%. Anzumerken ist hier, dass es sich bei den absoluten Zahlen durchwegs um sehr niedrige Zahlen handelt.

Wie sich die qualitative Ausprägung der Aspekte und Grundvorstellungen vom Prätest zum Posttest verändert, stellen wir in den folgenden Abschnitten dar.

4.1.2 Rekonstruktionsgrundvorstellung

Die Rekonstruktionsgrundvorstellung tritt in den jeweiligen Ausprägungskategorien unseres Kategoriensystems aus Abschnitt 3.2.1 auf. Wie die Tabelle und die weiter unten stehenden Grafiken zeigen, ist die am häufigsten ausgeprägte Kategorie die Kategorie 1 gesamt, die auch den Code 1a umfasst. Sie wird dicht gefolgt von Code U, also den unspezifischen Äußerungen. Die höchste Qualitätskategorie 2 wurde nur in einer Antwort im zweiten Fragebogen gefunden. Ebenso ist zu erkennen, dass die Fehlvorstellungen vom Prätest zum Posttest zunehmen.

In allen Ausprägungskategorien ist eine Steigerung vom ersten zum zweiten Fragebogen zu erkennen. Kategorie U und 1 gesamt steigen um 60% bzw. 38%, Kategorie 2 wird im Prätest gar nicht und im Posttest einmal genannt. Insgesamt steigt die Zahl der Äußerungen zur Rekonstruktionsgrundvorstellung von 14 auf 23, womit sich, wie bereits im

			1 gesamt								Summe	
	U		1		1a		2		F			
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
prätest	5	36	5	36	3	21	0	0	1	7	14	100
posttest	8	35	6	26	5	22	1	4	3	13	23	100

Tabelle B.5: Qualitative Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung in Kategorien

vorangehenden Kapitel beschrieben, die Hypothese H2 für die Rekonstruktionsgrundvorstellung als wahr herausstellt.

Der Anteil der Kategorie 2 steigt von 0% auf 4%, jener von Kategorie F von 7% auf 13% wohingegen der Anteil von Kategorie 1 gesamt im Posttest nur mehr 48% statt wie zuvor 57% aller Äußerungen ausmacht. Der Anteil der Fehlvorstellungen steigt um 83%.

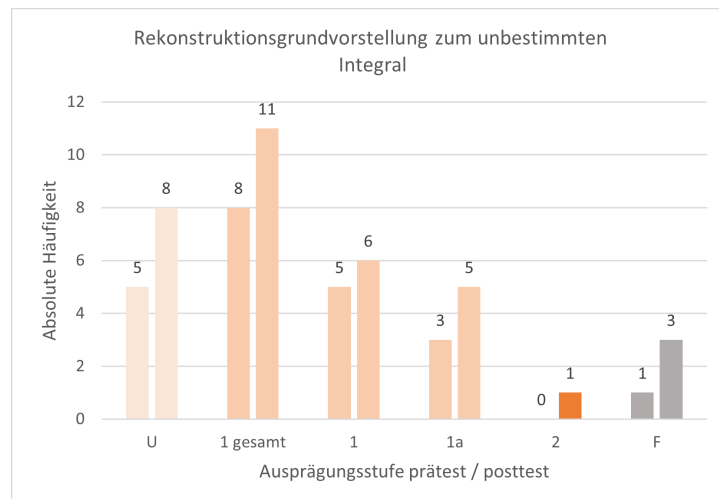


Abbildung B.3: Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung zum unbestimmten Integral in absoluten Häufigkeiten

Auch die Hypothese H3 wird mit diesen Ergebnissen zum Teil bereits verifiziert: “Die qualitative Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung und des Stammfunktionsaspekts erhöht sich vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt.“ Die Aussage ist laut obigen Darstellungen für die Rekonstruktionsgrundvorstellung richtig. Wie im vorangehenden Kapitel bereits erwähnt, stimmt die Hypothese H5 für die Rekonstruktionsgrundvorstellung nicht, da sich die Häufigkeit an Fehlvorstellungen vom ersten zum zweiten Fragebogen von eins auf drei erhöht.

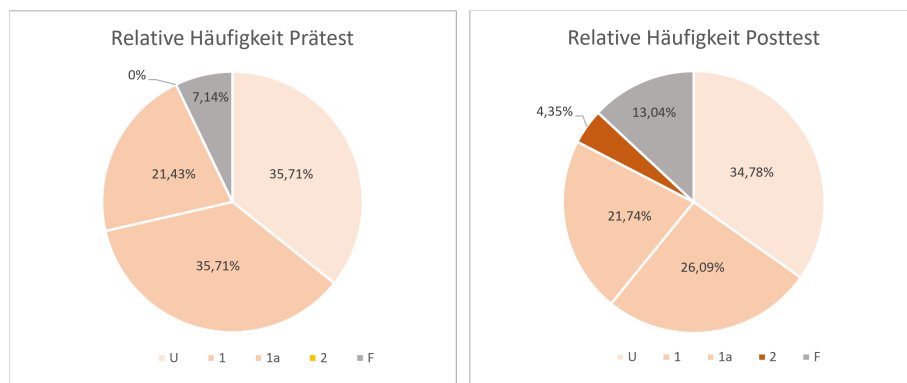


Abbildung B.4: Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung zum unbestimmten Integral in relativen Häufigkeiten

4.1.3 Stammfunktionsaspekt

In der Tabelle und den untenstehenden Grafiken ist dargestellt, wie sich die absoluten und relativen Häufigkeiten bemessen und vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt verändern.

	1		2		F (HS II)		Summe	
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
prätest	11	69	3	19	2	12	16	100
posttest	13	54	8	33	3	13	24	100

Tabelle B.6: Qualitative Ausprägung des Stammfunktionsaspekts in Kategorien

Der Stammfunktionsaspekt tritt in den jeweiligen Ausprägungskategorien unseres Kategoriensystems aus Abschnitt 3.2.1 auf, wobei Code 1 zu beiden Befragungszeitpunkten häufiger auftritt als Kategorie 2. Insgesamt steigen die Nennungen des Stammfunktionsaspekts von 16 auf 24, was, wie bereits in Kapitel 4.1.1 beschrieben, die Hypothese H2 für den Stammfunktionsaspekt bestätigt. Die Kategorie F (HS II) bezieht sich auf jene Äußerungen, die lediglich eine Verbindung zum zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufweisen und so eine nicht adäquate Antwort auf den Schreibimpuls „Ein *unbestimmtes* Integral ist ...“ liefern. Alle Fehlformulierungen dieses Aspekts sind von dieser Art. Die Häufigkeit dieser Äußerungen beschränkt sich auf zwei im Prätest bzw. drei im Posttest.

Vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt ist in allen Kategorien eine Steigerung zu vermerken, wobei die größte Erhöhung in Code 2 mit beinahe einer Verdreifung auftritt. Die Qualitätskategorie 1 steigt hingegen nur um 18%. Damit ist die Hypothese H3

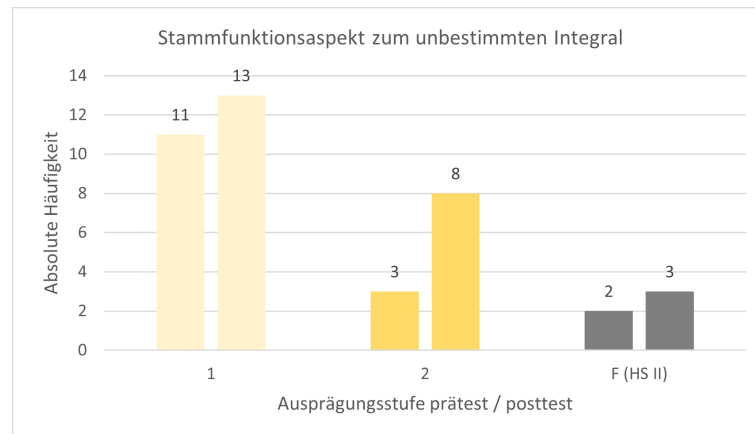


Abbildung B.5: Ausprägung des Stammfunktionsaspekts zum unbestimmten Integral in absoluten Häufigkeiten

auch für den Stammfunktionsaspekt korrekt, denn diese lautet: "Die qualitative Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung und des Stammfunktionsaspekts erhöht sich vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt". Auch in der Kategorie F (HS II) ist eine Steigung um 50% erkennbar, wobei hier die absoluten Zahlen sehr niedrig ausfallen. Betrachtet man die prozentuelle Verteilung der Kategorien, so bleibt der Anteil der Fehlvorstellungen auch im Prätest bei ca. 12%. Dahingegen sinkt der Anteil der Kategorie 1 von 69% auf 54%. Der Anteil von Kategorie 2 steigt als einziges und zwar um rund 78%.

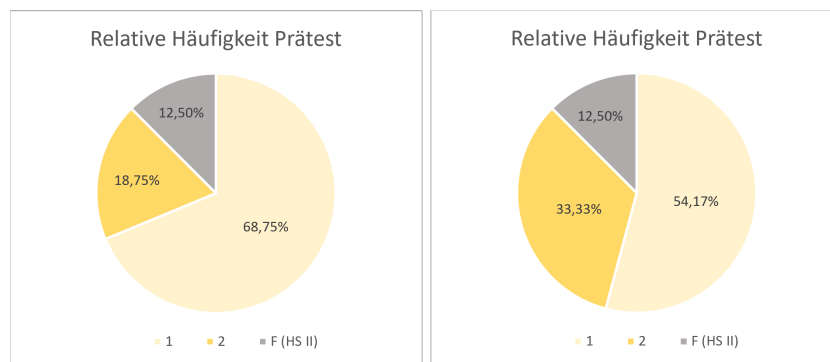


Abbildung B.6: Ausprägung des Stammfunktionsaspekts zum unbestimmten Integral in relativen Häufigkeiten

4.1.4 Flächeninhaltsgrundvorstellung

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung tritt in den Antworten auf den Schreibimpuls „Ein *unbestimmtes* Integral ist ...“ sowohl im Prätest als auch im Posttest nur als Fehlvorstellung und in beiden Fällen genau fünf Mal auf. Dabei wurde die sinngemäße Antwort 'Fläche unter der (ganzen) Kurve' in zwei Fällen sowohl zum ersten als auch zum zweiten Befragungszeitpunkt genannt. Drei der Proband*innen verwendeten diese Formulierung bereits zum ersten Befragungszeitpunkt, wiederum drei erwähnten sie erst zum zweiten. Jene letzten drei bezogen sich im Prätest auf gar keine Grundvorstellung, im Posttest taucht dann die Fehlvorstellung bezüglich der Flächeninhaltsgrundvorstellung auf.

In diesem Fall kann die Hypothese H4 „Die Flächeninhaltsgrundvorstellung tritt nur als Fehlvorstellung auf“ bestätigt werden, da die Flächeninhaltsgrundvorstellung tatsächlich nur als Fehlvorstellung auftritt. Wie bereits in Kapitel 4.1.1 beschrieben, kann die Hypothese H5 bezüglich der Flächeninhaltsgrundvorstellung weder bestätigt noch widerlegt werden, da die Häufigkeit der Nennungen vom Prätest zum Posttest keine Veränderung aufweist.

4.1.5 Übereinstimmung des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit dem Stammfunktionsaspekt

Die in diesem Abschnitt dargestellten Grafiken stellen das Auftreten des Stammfunktionsaspekts und der Rekonstruktionsgrundvorstellung gegenüber.

	RV + SA		nur RV		nur SA		Summe	
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
prätest	12	67	2	11	4	22	18	100
posttest	18	62	5	17	6	21	29	100

Tabelle B.7: Übereinstimmung des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit dem Stammfunktionsaspekt

Auffällig ist dabei, dass die Anzahl des gemeinsamen Auftretens sowohl im Prätest als auch im Posttest mehr als doppelt so hoch ist als das Auftreten der Rekonstruktionsgrundvorstellung oder des Stammfunktionsaspekts alleine. Die Kombination tritt im Prätest demzufolge sechs Mal so häufig auf wie die Rekonstruktionsgrundvorstellung alleine und drei Mal so oft wie der Stammfunktionsaspekt alleine. Der Stammfunktionsaspekt wird insgesamt sowohl zum ersten als auch zum zweiten Befragungszeitpunkt häufiger genannt als die Rekonstruktionsgrundvorstellung. Im Posttest ist eine Steigerung aller Werte zu erkennen, wobei wieder die Kombination häufiger auftritt als die Grundvorstellung bzw. der Aspekt alleine und zwar hier um das 3,6- bzw. dreifache öfter.

Betrachtet man die relativen Anteile, so ist zu erkennen, dass sowohl im Prätest als

auch im Posttest beinahe in zwei Drittel der Fälle der Aspekt und die Grundvorstellung gemeinsam auftreten. Nur in 11% bzw. 17% der Fälle im Prätest bzw. Posttest wurde ausschließlich die Rekonstruktionsgrundvorstellung aufgefunden. Der Anteil des Stammfunktionsaspekts alleine liegt bei 22% im Prätest und 21% im Posttest. Somit steigt als einziges der Anteil der Rekonstruktionsgrundvorstellung alleine vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt, während die Anteile des Stammfunktionsaspekts allein und der gemeinsamen Nennungen leicht sinken.

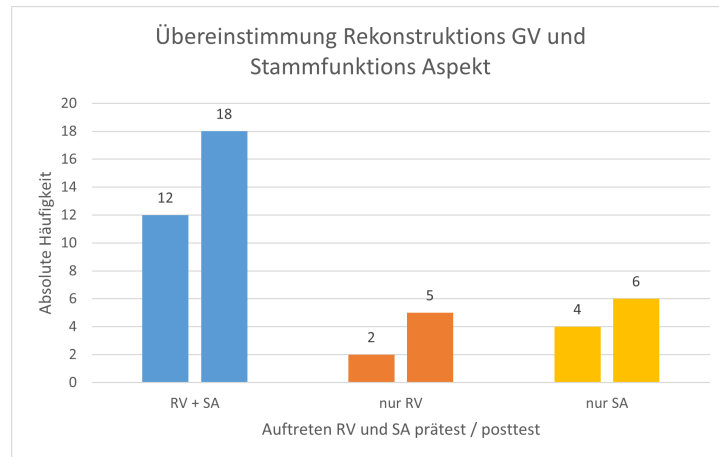


Abbildung B.7: Übereinstimmung des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit dem Stammfunktionsaspekt in absoluten Häufigkeiten

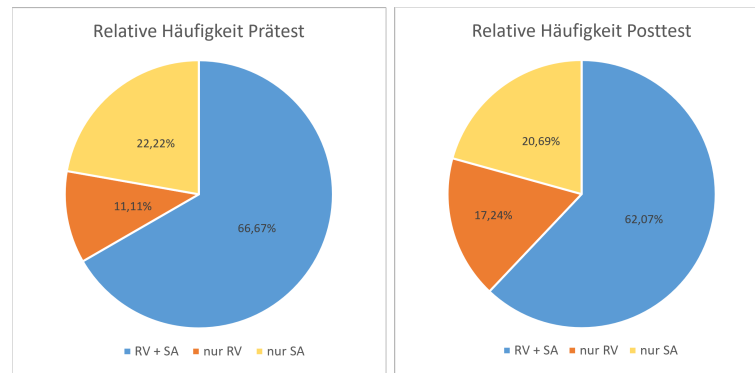


Abbildung B.8: Prozentuelle Darstellung der Übereinstimmung des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit dem Stammfunktionsaspekt

Diese Ergebnisse verifizieren die Hypothese H6, die folgendes besagt: "Die Rekonstruktionsgrundvorstellung und der Stammfunktionsaspekt treten großteils gemeinsam auf".

4.1.6 Einzelfallbetrachtung

In diesem Kapitel werden einerseits gehäuft festgestellte Veränderungen vom ersten zum zweiten Fragebogen und andererseits interessante Einzelfälle bezüglich der Rekonstruktionsgrundvorstellung und des Stammfunktionsaspekts diskutiert. Im Zuge dessen wird die Hypothese H3 zum Teil beantwortet.

Bezüglich der Rekonstruktionsgrundvorstellung konnte insgesamt bei 12 Proband*innen eine Veränderung festgestellt werden. Davon wurde in acht Fällen diese Grundvorstellung erst im Posttest aufgefunden, wobei dort fünf Äußerungen in die Kategorie 1 gesamt, zwei in die Kategorie U und eine in die höchste Qualitätskategorie 2 fallen. Letztere Äußerung der Proband*in KA1903 im Posttest ist in Abbildung B.9 im Original dargestellt. Im Prätest lautete die Äußerung dieser/s Studierenden auf den Schreibimpuls „ein *unbestimmtes* Integral ist ...“ noch: „ein Integral ohne Angabe oberer/unterer Grenzen“, worin kein Bezug zur Rekonstruktionsgrundvorstellung aufgefunden wurde. Bei einer/m Proband*in konnte eine Steigerung einer bereits vorhandenen Rekonstruktionsgrundvorstellung festgestellt werden. In einem Fall wurde jedoch auch eine Veränderung von 1 gesamt zu

6. Ein *unbestimmtes* Integral ist ...

Ein Integral
die Rekonstruktion einer Funktion aus
ihren Änderungsgraten

Abbildung B.9: Proband*in KA1903, Posttest

U, also hin zu einer niedrigeren Ausprägungsstufe verzeichnet. Außerdem wurde in zwei Fällen erst im Posttest eine Fehlvorstellung aufgefunden, wohingegen im Prätest noch Kategorie 1 gesamt nachgewiesen wurde bzw. kein Bezug zur Vorstellung entdeckt werden konnte.

Bezüglich des Stammfunktionsaspekts wurden 16 Veränderungen gefunden. Bei neun Proband*innen konnte erst im Posttest der Stammfunktionsaspekt aufgefunden werden, fünfmal in Kategorie 1 und viermal in der höchsten Qualitätskategorie 2. Prototypisch für eine solche Steigerung ist die der Kategorie 2 zugeordnete Äußerung der/des Proband*in AD0609 im Posttest, wie sie in Abbildung B.10 dargestellt ist. Ein/e Proband*in wies eine Steigerung von Kategorie 1 zu Kategorie 2 auf. In drei Fällen konnte jedoch auch eine Verringerung der Qualitätsstufe bzw. eine erst im Posttest auftretende fehlerhafte Äußerung ausgemacht werden. Einmal wurde der Aspekt ausschließlich im Prätest nachgewiesen. Insgesamt kann die Hypothese H3 auch auf individueller Ebene verifiziert

6. Ein *unbestimmtes* Integral ist ...

Eine mögliche Stammf., ohne fixen Grenzen

Abbildung B.10: Proband*in AD0609, Posttest

werden, da meistens eine höhere Ausprägungsqualität im Posttest aufgefunden wurde.

4.1.7 Korrelation der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit der Fachvorlesung

Dieser Abschnitt beschreibt den Zusammenhang der qualitativen Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit der Vorlesungsnote der Fachvorlesung “Analysis in einer Variable für das Lehramt“. In Kapitel 2.3 wurde beschrieben, wie im Zuge des zweiten Erhebungszeitpunktes gefragt wurde, ob diese Vorlesung bereits positiv absolviert wurde und wenn ja, mit welcher Note. Die Daten der Antworten wurden von meiner Kollegin Antonia Spannagl aufbereitet und mir für diese Arbeit dankenswerterweise zur Verfügung gestellt. Da die Vorlesung von einigen Proband*innen erst im Zeitraum zwischen den beiden Befragungszeitpunkten absolviert wurde, wurden ausschließlich die Ergebnisse des Posttests herangezogen. In der Auswertung wurden nur jene Fragebögen verwendet, die sowohl eine Angabe zur Vorlesungsnote als auch eine Äußerung zur Rekonstruktionsgrundvorstellung enthielten. In der Grafik B.18 ist auf der x-Achse die Klausurnote aufgetragen und auf der y-Achse die Ausprägungsqualität in den bekannten Kategorien F bis 2, wobei die Qualitätskategorien 1 und 1a hier kurz zu 1 zusammengefasst sind. Die Größe der Blasen entspricht der Anzahl des gemeinsamen Auftretens der entsprechenden VO Note und Ausprägungskategorie.

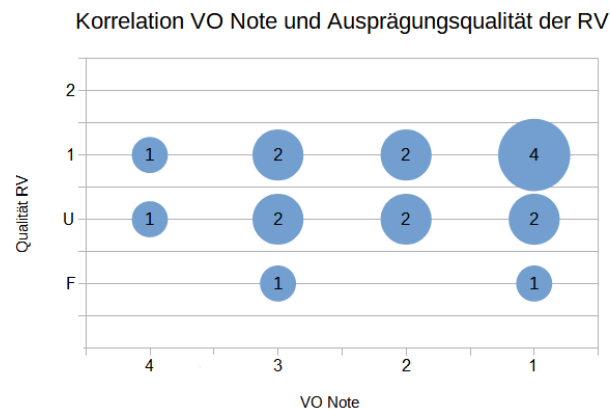


Abbildung B.11: Korrelation der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit der Note der Fachvorlesung

In Abbildung B.18 ist also dargestellt, wie die Vorlesungsnote mit der qualitativen Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung zusammenhängt. Auffallend ist dabei, dass eine gute Vorlesungsnote in vier Fällen auch mit einer gut ausgeprägten Vorstellung, nämlich Kategorie 1 gesamt, einhergeht. Außerdem bewegen sich die meisten guten oder befriedigenden Leistungsbeurteilungen der Vorlesung auch in den Bereichen 1 gesamt und U bezüglich der Qualitätskategorie der Grundvorstellung. Jedoch tritt in einem Fall eine sehr gute Vorlesungsnote gemeinsam mit einer Fehlvorstellung auf, wohingegen ein Genügend in der Vorlesung auch einmal in Kombination mit einer auf Stufe 1 gesamt ausgeprägten Grundvorstellung vorkommt. Insgesamt ist anzumerken, dass sich die Fälle, in denen sowohl eine Vorlesungsnote angegeben wurde als auch die Rekonstruktionsgrund-

vorstellung in den Äußerungen aufgefunden wurde, auf eine Anzahl von 18 beschränkt. Die Hypothese H7 “Die Vorlesungsnote korreliert nicht mit der Ausprägungsqualität der Rekonstruktionsgrundvorstellung“ kann also zum Teil widerlegt werden, da eine Tendenz eines Zusammenhangs durchaus erkennbar ist. Jedoch ist die Datengrundlage gering, weshalb Einzelfällen, die der Hypothese widersprechen, eine relativ hohe Gewichtung beigemessen wird.

4.2 Ergebnisse zum bestimmten Integral

Dieser Abschnitt stellt die Ergebnisse der Befragung dar, die sich auf den Schreibimpuls “Ein *bestimmtes* Integral ist ...“ beziehen. Im Zuge der Ergebnisdarstellung werden die Hypothesen H8 bis H12 behandelt.

4.2.1 Allgemeines Auftreten von Aspekten und Grundvorstellungen

Die Tabelle und die untenstehenden Grafiken zeigen die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Aspekte und Grundvorstellungen sowie die Veränderungen vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt.

	FV		KV		SA		PA		keine	
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
prätest	28	47	0	0	3	5	0	0	28	47
posttest	34	58	1	2	6	10	1	2	17	29

Tabelle B.8: Absolute und relative Häufigkeit von Aspekten und Grundvorstellungen zum bestimmten Integral

Auffallend ist, dass Die Flächeninhaltsgrundvorstellung am häufigsten auftritt, sowohl im Prätest als auch im Posttest. Dies bestätigt die Hypothese H8 bezüglich des bestimmten Integrals, die wie folgt lautet: “Die am häufigsten genannte Grundvorstellung ist die Flächeninhaltsgrundvorstellung“.

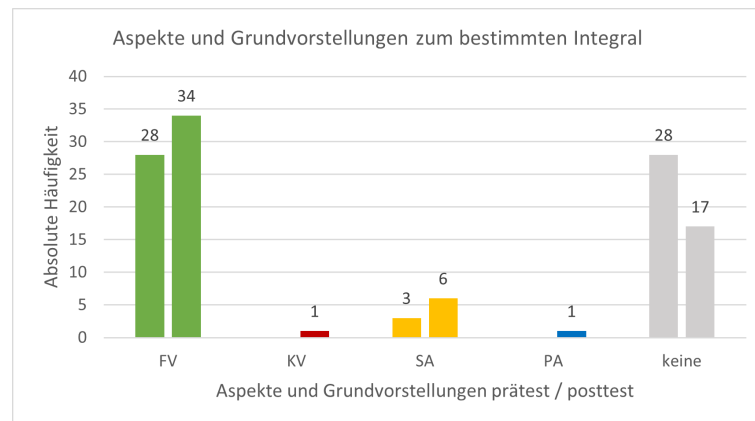


Abbildung B.12: Absolute Häufigkeiten von Aspekten und Grundvorstellungen zum bestimmten Integral

Neben dieser Vorstellung konnten der Stammfunktionsaspekt und in einer einzigen Antwort im Posttest die Kumulationsgrundvorstellung und der Produktsummenaspekt gefunden werden. Die absoluten Zahlen sind hier jedoch bis auf die Flächeninhaltsgrundvorstellung sehr gering. Es ist hier anzumerken, dass sich die Anzahl an verschiedenen Grundvorstellungen und Aspekten vom ersten zum zweiten Erhebungszeitpunkt erhöht, da die Kumulationsgrundvorstellung und der Produktsummenaspekt erst im Posttest genannt werden.

Im Vergleich von Prätest und Posttest ist zu erkennen, dass sich die Häufigkeiten aller Grundvorstellungen und Aspekte erhöht. Die Flächeninhaltsgrundvorstellung wird um rund 21% häufiger genannt, der Stammfunktionsaspekt doppelt so oft. Die Kumulationsgrundvorstellung und der Produktsummenaspekt werden hingegen das erste Mal mit einer Nennung im Posttest erwähnt. Auch die zweite Hypothese H9 kann also durch die Ergebnisse verifiziert werden, denn vermutet wird hier: "Alle Grundvorstellungen und Aspekte, die in den Antworten der Befragten genannt werden, treten im Zuge des zweiten Erhebungszeitpunkts häufiger auf als im Zuge des ersten". Anzumerken ist an dieser Stelle, dass bezüglich des bestimmten Integrals keine Fehlvorstellungen in den Äußerungen der Proband*innen gefunden wurden.

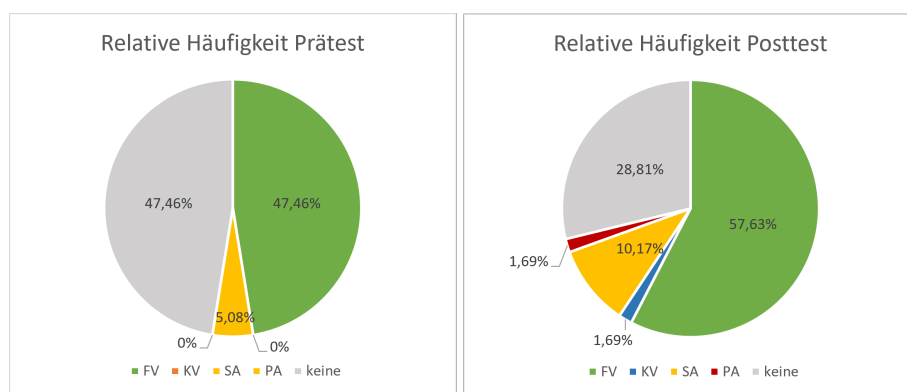


Abbildung B.13: Relative Häufigkeiten von Aspekten und Grundvorstellungen zum bestimmten Integral

Im Posttest fällt schließlich auf, dass nur mehr in 17 Antworten keine Grundvorstellung und kein Aspekt gefunden wurden, wohingegen im Prätest noch in 28 Antworten keine Grundvorstellung und kein Aspekt gefunden wurden. Die Zahl der Äußerungen, die keiner Grundvorstellung und keinem Aspekt zugeordnet werden konnten, ist auch hier hoch, jedoch war ebenfalls ein weiteres Zusammenfassen in Kategorien aufgrund der hohen Diversität nicht möglich. Die Flächeninhaltsgrundvorstellung betreffend kann festgehalten werden, dass die Anzahl an Antworten, in denen diese Vorstellung nicht gefunden wurde, vom Prätest zum Posttest von 53% auf 42% sinkt. Aus den folgenden bereinigten Formulierungen bestehen jene häufig auftretenden Äußerungen der Studierenden, die keiner Grundvorstellung und keinem Aspekt zugeordnet werden konnten.

- 'ein Integral mit (eindeutigen/bestimmten/...) Grenzen'

- 'kann berechnet werden'
- 'Gegenteil zum unbestimmten Integral'
- 'eine Zahl'
- unmöglich zuzuordnen, wie zum Beispiel leere Zeilen, 'wenn es Riemann-integrierbar ist', etc.

4.2.2 Flächeninhaltsgrundvorstellung

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung tritt in den jeweiligen Ausprägungskategorien unseres Kategoriensystems aus Abschnitt 3.2.2 auf. Wie die Tabelle und die weiter unten stehenden Grafiken zeigen, ist die am häufigsten ausgeprägte Kategorie die Kategorie 1 gesamt, die die beiden Unterkategorien 1 und 1a umfasst.

			1 gesamt								Summe	
	U		1		1a		2		F			
	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%	abs.	%
prätest	5	18	7	25	12	43	4	14	0	0	28	100
posttest	6	17	3	9	23	68	2	6	0	0	34	100

Tabelle B.9: Qualitative Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung in Kategorien

Dabei tritt die Kategorie 1a am häufigsten auf. Sie wird gefolgt von Code 1, also den restlichen Aussagen, die Kategorie 1 gesamt zugeordnet wurden, und U, also den unspezifischen Äußerungen und schließlich der höchsten Qualitätskategorie 2. Ebenso ist zu erkennen, dass im Zuge dieser Grundvorstellung weder im Prätest noch im Posttest eine Fehlvorstellung vorkommt. Eine solche Fehlvorstellung könnte zum Beispiel das Integral als die Fläche unter der gesamten Kurve sein oder die Vorstellung des Integrals als eine Rechteckfläche.

Im Posttest weisen alle Ausprägungskategorien bis auf die höchste Kategorie 2 eine höhere Häufigkeit an Nennungen auf, wobei auch hier die größte Steigerung von 37% in Kategorie 1 gesamt und vor allem in der Unterkategorie 1a mit beinahe einer Verdoppelung zu erkennen ist. Insgesamt werden jedoch nur halb so viele Nennungen in Kategorie 2 verzeichnet, wobei die Zahlen hier sehr gering ausfallen. Aus diesem Grund kann die Hypothese H10 "Die qualitative Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung erhöht sich vom ersten zum zweiten Erhebungszeitraum" nur zum Teil verifiziert werden.

Betrachtet man die prozentuelle Aufteilung der Kategorien, so bleibt Kategorie U sowohl im Prätest als auch im Posttest bei rund 18%. Dahingegen sinkt der relative Anteil von Kategorie 1 um 65% und auch Kategorie 2 fällt von 14% auf 6%. In diesen beiden

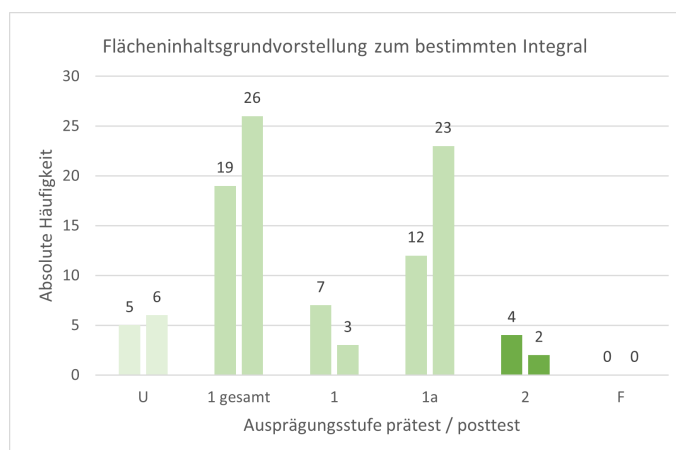


Abbildung B.14: Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung zum bestimmten Integral in absoluten Häufigkeiten

Kategorien und vor allem in Code 2 sind die absoluten Häufigkeiten jedoch niedrig. Die größte und einzige Steigerung von 25% ist bezüglich des Anteils von Kategorie 1a zu verzeichnen.

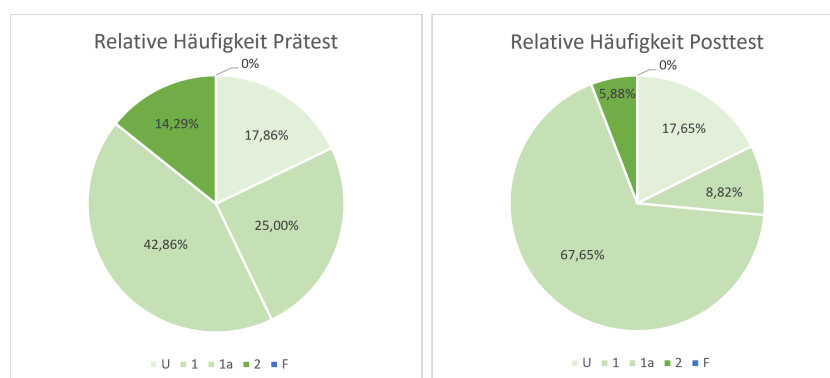


Abbildung B.15: Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung zum bestimmten Integral in relativen Häufigkeiten

4.2.3 Stammfunktionsaspekt

Das Auftreten des Stammfunktionsaspekts beschränkt sich hauptsächlich auf eine Bezugnahme zum zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung durch die Gleichung $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Dies stellt jedoch keine explizite Antwort auf den Schreibimpuls „Ein *bestimmtes* Integral ist ...“ dar und wurde somit nicht als Fehlvorstellung, jedoch ebenfalls nicht als adäquate Antwort eingeordnet. In dieser Form tritt der

Stammfunktionsaspekt zum ersten Befragungszeitpunkt drei Mal auf, zum zweiten vier Mal. Die Formulierung “[...] also eigentlich die Absolute Änderungsrate einer Stammfunktion im Intervall“ tritt einmalig und nur zum zweiten Befragungszeitpunkt auf und ist hier die einzige adäquate Äußerung zum Stammfunktionsaspekt. Die Antwort “Die best. Stammfunktion mit best. Grenzen“ wurde einmal und zwar zum zweiten Befragungszeitpunkt genannt und stellt eine falsche Bezugnahme zum Hauptsatz dar.

Es steigt also die Anzahl an Äußerungen, die sich auf den Stammfunktionsaspekt beziehen, jedoch sind diese hauptsächlich nicht adäquat oder sogar falsch, wie in der dritten genannten Antwort. Die einzig richtige Äußerung “[...] also eigentlich die Absolute Änderungsrate einer Stammfunktion im Intervall“ tritt im Posttest auf, weshalb von einer Steigerung gesprochen werden kann. Die Hypothese H11 “Die Anzahl an Fehlvorstellungen verringert sich vom ersten zum zweiten Befragungszeitpunkt“ kann demnach nicht bestätigt werden, da die Anzahl an Fehlvorstellungen beim Stammfunktionsaspekt um eine Antwort steigt, während bei der Flächeninhaltsvorstellung keine Fehlvorstellungen auftauchen.

4.2.4 Einzelfallbetrachtung

In diesem Kapitel werden, ähnlich wie in Abschnitt 4.1.6, sowohl gehäuft festgestellte Veränderungen vom ersten zum zweiten Fragebogen als auch interessante Einzelfälle bezüglich der Flächeninhaltsgrundvorstellung dargestellt. Im Zuge dessen wird die Hypothese H10 zum Teil beantwortet.

Insgesamt treten bezüglich der Flächeninhaltsgrundvorstellung 24 Veränderungen auf. In 13 Fällen tritt die Vorstellung erst im Posttest auf, und zwar dreimal in Kategorie U und zehnmal in Kategorie 1 gesamt. Nur einmal konnte eine Steigerung einer bereits vorhandenen Grundvorstellung festgestellt werden, nämlich von Kategorie 1 gesamt zur höchsten Qualitätskategorie 2. Wie die Abbildungen B.16 und B.17 zeigen, wurde dort der Fehler in der Formulierung im Posttest nicht mehr gemacht. Schließlich wurde in

7. Ein bestimmtes Integral ist ...
 die (orientierte) Fläche in einem Intervall, die zwischen Funktionsgraph und Vertikalachse eingeschlossen wird

Abbildung B.16: Proband*in EV2427, Prätest

7. Ein bestimmtes Integral ist ...
 Eine Fläche (orientiert), genau die Fläche zwischen horizontaler Achse und Funktion.

Abbildung B.17: Proband*in EV2427, Posttest

sieben Äußerungen diese Grundvorstellung lediglich im Prätest aufgefunden und zwei

Proband*innen wiesen im Posttest eine geringere Ausprägungsqualität auf als zum ersten Befragungszeitpunkt. Insgesamt kann die Hypothese H10 jedoch auf individueller Ebene verifiziert werden, da die meisten Proband*innen im Posttest eine höhere Ausprägungsqualität aufweisen.

4.2.5 Korrelation der Flächeninhaltsgrundvorstellung mit der Fachvorlesung

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang der qualitativen Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung mit der Vorlesungsnote der Fachvorlesung “Analysis in einer Variable für das Lehramt“ dargestellt. Wie in Kapitel 2.3 beschrieben, wurde im Zuge des zweiten Erhebungszeitpunktes gefragt, ob diese Vorlesung bereits positiv absolviert wurde und wenn ja, mit welcher Note. Wie bereits in einem vorangehenden Kapitel erklärt, wurden mir die Daten der Antworten von meiner Kollegin Antonia Spannagl zur Verfügung gestellt. Wie auch bei der Rekonstruktionsgrundvorstellung wurden für diese Arbeit ausschließlich die Ergebnisse des Posttests und nur jene Fragebögen herangezogen, die sowohl eine Angabe zur Vorlesungsnote als auch eine Äußerung zur Flächeninhaltsgrundvorstellung enthielten.

In der Grafik B.18 ist, wie auch bei der Rekonstruktionsgrundvorstellung, auf der x-Achse die Klausurnote und auf der y-Achse die Ausprägungsqualität in den bekannten Kategorien F bis 2 aufgetragen, wobei die Qualitätskategorien 1 und 1a hier kurz zu 1 zusammengefasst sind. Die Größe der Blasen entspricht der Anzahl des gemeinsamen Auftretens der entsprechenden VO Note und Ausprägungskategorie. Es ist also dargestellt,

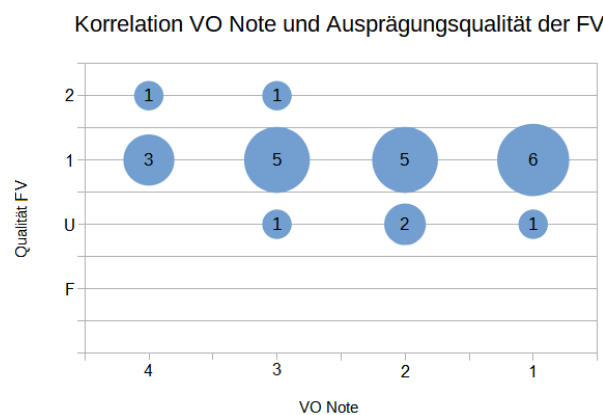


Abbildung B.18: Korrelation der Flächeninhaltsgrundvorstellung mit der Note der Fachvorlesung

wie die Vorlesungsnote mit der qualitativen Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung zusammenhängt. Ein Blick auf diese Grafik zeigt, dass jede Vorlesungsnote am häufigsten mit der Qualitätskategorie 1 gesamt auftritt. Nur in wenigen Fällen tritt eine andere Kategorie auf. Auffallend ist hier, dass Kategorie 2 nur mit den Noten Befriedigend und Genügend auftritt, wohingegen Kategorie U mit den Noten Sehr gut, Gut und

Befriedigend vorkommt. Dies bestätigt Hypothese H12, die keine Korrelation zwischen Vorlesungsnote und qualitativer Ausprägung der Grundvorstellung vermutet. Zum Teil wird sie jedoch auch widerlegt, denn die Anzahl des Auftretens der Kategorie 1 gesamt steigt, je besser die Vorlesungsnote ist.

5 Conclusio und Ausblick

In diesem letzten Kapitel werden die Ergebnisse der Studie kurz zusammengefasst und interpretiert. Im Zuge dessen werden auch etwaige Limitationen der Studie diskutiert.

Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass das explizite Behandeln einer Grundvorstellung im Zuge eines Vortrages durchaus eine Verbesserung in der Ausbildung der Grundvorstellung bewirken kann. Dies gilt scheinbar sowohl für den Neuerwerb einer Grundvorstellung als auch für eine qualitative Verbesserung einer bereits bestehenden.

Dies zeigt sich bezüglich des unbestimmten Integrals im Auftreten des Stammfunktionsaspekts sowie der damit eng verknüpften Rekonstruktionsgrundvorstellung. Sowohl die Grundvorstellung als auch der Aspekt treten im Posttest bemerkenswert häufiger auf, die Äußerungen, die keinen Aspekt und keine Grundvorstellung ansprechen, nehmen stark ab. Auch qualitativ ist eine Verbesserung sowohl beim Aspekt als auch bei der Grundvorstellung zu verzeichnen. Bezüglich der Rekonstruktionsgrundvorstellung tritt beispielsweise die höchste Ausprägungskategorie 2 erst im Posttest auf. Der Stammfunktionsaspekt tritt häufig erst im Posttest, dann jedoch sofort in der höchsten Ausprägungskategorie auf, wie das exemplarische Fallbeispiel in Abschnitt 4.1.6 zeigt. Diese Beobachtungen lassen vermuten, dass die Vorlesung in manchen Fällen das Repertoire an verschiedenen Grundvorstellungen erhöhen und eine qualitative Verbesserung von bereits bestehenden Grundvorstellungen und Aspekten begünstigen konnte.

Dem gegenüber steht jedoch die Erkenntnis, dass auch die Fehlvorstellungen sowohl bezüglich des Aspekts als auch der Grundvorstellung gestiegen sind. Es handelt sich jedoch dabei um sehr wenige Einzelfälle. Die Fehlvorstellung des unbestimmten Integrals als Fläche unter der 'ganzen' Kurve tritt in gleichem Ausmaß sowohl im Prätest als auch im Posttest auf, jedoch ebenfalls in sehr geringer Zahl.

Interessant bezüglich des Stammfunktionsaspektes ist die Tendenz, den Schreibimpuls operational zu beantworten. Häufig wird, wie in Kapitel 3.2.1 beschrieben, als Äußerung ein Zusammenhang zum zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung hergestellt. Dies beantwortet den Schreibimpuls nicht, da der Hauptsatz als Erklärung verwendet wird, wozu das unbestimmte Integral dienen kann, jedoch keine Aussage darüber liefert, worum es sich beim unbestimmten Integral handelt. Das unbestimmte Integral wird hier fälschlicherweise also ausschließlich als Mittel zum Operieren verstanden.

Wie in Kapitel 2.2.4 erläutert, hängt die Rekonstruktionsgrundvorstellung eng mit dem Stammfunktionsaspekt zusammen. Aus diesem Grund ist die Beobachtung, dass diese Grundvorstellung in den Äußerungen der Proband*innen häufig mit dem Stammfunktionsaspekt zusammenhängend auftritt, wenig überraschend. Gemeinsam treten sie sowohl im Prätest als auch im Posttest mehr als doppelt so häufig auf als einzeln.

Die Note der Fachvorlesung, im Zuge derer die Grundvorstellungen des Integralbegriffs nicht behandelt werden, korreliert nicht mit der qualitativen Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung. Jedoch kann in den Ergebnissen dieser Studie eine Qualitätsverbesserung dieser Grundvorstellung zwischen Prätest und Posttest beobachtet werden.

Dies lässt vermuten, dass Grundvorstellungen dann verbessert oder erstmals ausgeprägt werden können, wenn sie explizit im Vortrag angesprochen und diskutiert werden. Das Aneignen von Fachwissen alleine führt scheinbar nicht zwingend zum Entstehen einer Grundvorstellung.

Auch bezüglich des bestimmten Integrals trifft die obige Beobachtung zu, denn die hauptsächlich auftretende Flächeninhaltsgrundvorstellung weist sowohl quantitativ als auch qualitativ eine Steigerung vom Prätest zum Posttest auf.

Bei dieser Grundvorstellung ist auffallend, dass die Kategorie 1a stark zunimmt, wohingegen die Häufigkeit der Kategorie 1 sinkt. Das heißt, im Posttest treten vermehrt jene fehlerhaften Formulierungen auf, die sich auf den orientierten Flächeninhalt einer Kurve beziehen. Zu vermuten steht also, dass über den Befragungszeitraum hinweg bezüglich dieses Begriffes Unsicherheiten bei den Proband*innen entstanden sind.

Neben der Flächeninhaltsgrundvorstellung treten die Kumulationsgrundvorstellung, der damit eng verknüpfte Produktsummenaspekt und der Stammfunktionsaspekt jeweils in einer Antwort im Posttest korrekt auf, was bei diesen wenigen Studierenden eine Verbesserung des Repertoires an Grundvorstellungen und Aspekten bedeutet.

Wie auch beim unbestimmten Integral ist auch hier keine eindeutige Korrelation zwischen der Note der Fachvorlesung und der Ausprägungsqualität der Flächeninhaltsgrundvorstellung auszumachen. Diese geringe Korrelation könnte unter anderem darin begründet sein, dass die Flächeninhaltsgrundvorstellung in der Fachvorlesung nicht im Fokus steht, sondern der Integralbegriff dort analytisch hergeleitet wird. Da diese Grundvorstellung in den Ergebnissen dieser Studie sehr häufig auftritt, ist anzunehmen, dass sie bereits zuvor, zum Beispiel in der Schule, ausgeprägt wurde.

Betrachtet man die durchgeführte Studie kritisch, so lassen sich einige Punkte anmerken, die verbessert werden können.

Bereits im Zuge der ersten Sichtung der Ergebnisse fiel auf, dass die Schreibimpulse zur Integralrechnung nicht im intendierten Ausmaß einen Zugriff auf die Grundvorstellungen der Studierenden ermöglichen. Durch die Formulierung „Ein *unbestimmtes* Integral ist ...“ bzw. „Ein *bestimmtes* Integral ist ...“ und die direkte Aneinanderreihung der beiden Schreibimpulse wurde der Fokus nicht direkt auf die Grundvorstellungen hinter diesen Begriffen gelenkt. Stattdessen konnte die Aufgabe so aufgefasst werden, dass Unterscheidungsmerkmale dieser beiden Begriffe angeführt werden sollten. Aus vermutlich diesem Grund bezogen sich viele Äußerungen auf das Vorhandensein bzw. Fehlen von Grenzüngaben oder auf die (nicht) gegebene Möglichkeit, ein Integral berechnen zu können, also einen Zahlenwert zu erhalten. Diese Äußerungen ermöglichen keinen Zugriff auf eine Grundvorstellung, es kann jedoch auch nicht mit Sicherheit davon ausgegangen werden, dass der bzw. die jeweilige Proband*in tatsächlich keine Grundvorstellung besitzt. Die Möglichkeit besteht, dass diese durch das alternative Auffassen des Schreibimpulses lediglich nicht abgerufen wurden. Eine eindeutig auf die Grundvorstellungen abzielende Formulierung der Schreibimpulse, wie zum Beispiel 'Unter einem unbestimmten Integral

stelle ich mir vor ...' bzw. 'Unter einem bestimmten Integral stelle ich mir vor ...' hätte eventuell eine größere Vielfalt und Anzahl an auffindbaren Grundvorstellungen zur Folge.

Weiters ist anzumerken, dass der Begriff *unbestimmtes Integral* irreführend sein kann, wie [Steinbauer: 2013, S. 106] in seinem Skript zur Vorlesung "Analysis in einer Variable für LAK" beschreibt. In den Ergebnissen der Studie ist diesbezüglich auffällig, dass das unbestimmte Integral oft mit dem uneigentlichen Integral verwechselt wird, was die Problematik mit dem vagen Ausdruck *unbestimmt* verdeutlicht. Verhindert werden könnte diese terminologische Schwierigkeit mit der Verwendung der Bezeichnung 'Integral von f zwischen a und b ' für den Ausdruck

$$\int_a^b f(x)dx$$

und 'eine oder alle Stammfunktion(en) von f ' für den Ausdruck F mit $F' = f$.

Schließlich stellte die geringe Zahl an bereits bestehenden Studien und Werken zu den Aspekten und Grundvorstellungen der Integralrechnung eine Herausforderung dar. Als Grundlage der Auswertung wurde [Greefrath et al.: 2016] verwendet, da dort Grundvorstellungen und Aspekte des Integralbegriffs beschrieben werden. Betrachtet man diese Aufschlüsselung jedoch näher, so stellt sich die Frage, ob hier alle Aspekte und Grundvorstellungen adäquat abgebildet werden, die der Integralrechnung zu Grunde liegen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird in den Aspekten beispielsweise nie explizit, sondern lediglich im Zuge des Stammfunktionsaspekts beiläufig erwähnt.

Für zukünftige Studien zu den Aspekten und Grundvorstellungen des Integralbegriffs würde sich diesen abschließenden Beobachtungen zufolge anbieten, die Fragestellung, wie oben beschrieben, abzuändern und die Formulierung *unbestimmtes Integral* zu vermeiden, siehe auch [Steinbauer: 2013]. Außerdem wäre eine groß angelegte Studie mit einer höheren Stichprobenanzahl erstrebenswert. Darüber hinaus könnte die Befragung über einen längeren Zeitraum hinweg geschehen. So ließe sich die erste Erhebung zum Beispiel zu Beginn des Studiums und die zweite kurz vor dem Studienabschluss durchführen. Ein Nachteil dieser Veränderung wäre jedoch, dass dann nicht genau ausgemacht werden könnte, in welcher Studienphase oder Lehrveranstaltung ein Wissenszuwachs erfolgt ist. Jedoch könnte möglicherweise eine größere Veränderung beobachtet werden als nach nur einer Vorlesung.

Literaturverzeichnis

- [Danckwerts & Vogel: 2005] Danckwerts, Rainer. Vogel, Dankwart. (2005). Elementare Analysis. Books on Demand GmbH: Norderstedt.
- [Danckwerts & Vogel: 2006] Danckwerts, Rainer. Vogel, Dankwart. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Elsevier Spektrum Akad. Verl.: München.
- [Glaubitz, Rademacher & Sonar: 2019] Glaubitz, Jan. Rademacher, Daniel. Sonar, Thomas. (2019). Lernbuch Analysis 1. Das Wichtigste ausführlich für Bachelor und Lehramt. Springer Spektrum: Wiesbaden.
- [Greefrath et al.: 2016] Greefrath, Gilbert et al. (2016). Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Springer Spektrum: Berlin Heidelberg.
- [PH NÖ Homepage: zuletzt abgerufen am 21.03.2022] online: <https://www.ph-noe.ac.at/de/forschung/projekte/aktuelle-projekte/bella-beliefs-zum-lernen-und-lehren-von-analysis.html> (zuletzt abgerufen am 16.03.2022).
- [Spannagl: 2020] Spannagl, Antonia (2020). Grundvorstellungen zu den Konzepten “Stetigkeit“ und “Differenzierbarkeit“ von angehenden Mathematiklehrer*innen. Masterarbeit Universität Wien. online: <https://theses.univie.ac.at/detail/57818/> (zuletzt abgerufen am 22.03.2022).
- [Steinbauer: 2013] Steinbauer, Roland (2013). Analysis in einer Variable für LAK. Wintersemester 2012/13. Februar 2013. online: <https://www.mat.univie.ac.at/stein/teaching/SoSem20/ana.html> (zuletzt abgerufen am 27.04.2022).
- [Steinbauer & Süss-Stepancik: 2019a] Steinbauer, Roland. Süss-Stepancik, Evelin (2019a). aspekte_grundvorstellungen_diffrechnung20190124. online: <https://www.mat.univie.ac.at/stein/teaching/WS1819/sma.html> (zuletzt abgerufen am 21.03.2022).
- [Steinbauer & Süss-Stepancik: 2019b] Steinbauer, Roland. Süss-Stepancik, Evelin (2019b). Schulmathematik Analysis. Wintersemester 2018/19. 14. Februar 2019. online: <https://www.mat.univie.ac.at/stein/teaching/WS1819/sma.html> (zuletzt abgerufen am 21.03.2022).
- [Vom Hofe: 1995] Vom Hofe, Rudolf (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg-Berlin-Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Abbildungsverzeichnis

A.1	Zuflussgeschwindigkeit	3
A.2	Wasservolumen	4
A.3	Zuflussgeschwindigkeit Variation 1	6
A.4	Wasservolumen Variation 1	6
A.5	Zuflussgeschwindigkeit Variation 2	7
A.6	Orientierter Flächeninhalt einer Berandung	8
A.7	Flächenzuwachs	10
A.8	Normalparabel	12
A.9	Differenzieren und Integrieren als Umkehroperationen	15
A.10	Flächenstücke als Rechteckflächen	16
A.11	Verfeinerung der Zerlegung des Intervalls $[a, b]$	19
A.12	Zerlegung des Intervalls $[0, 2]$	20
A.13	Mittlerer Funktionswert in $[a, b]$	25
A.14	Flächeninhalt unter f bei Verwendung des mittleren Funktionswertes	26
A.15	Unterschiedlich lange Teilintervalle des Intervalls $[a, b]$	27
A.16	Beispiel 1	29
A.17	Beispiel 2	29
A.18	Funktion mit Unstetigkeitsstelle	31
A.19	Funktion mit getrenntem Definitionsbereich	31
A.20	Allgemeine Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen	35
A.21	Beziehungen zwischen Aspekten und Grundvorstellungen zum Integralbegriff	44
B.1	Absolute Häufigkeiten von Aspekten und Grundvorstellungen zum unbestimmten Integral	58
B.2	Relative Häufigkeiten von Aspekten und Grundvorstellungen zum unbestimmten Integral	58
B.3	Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung zum unbestimmten Integral in absoluten Häufigkeiten	60
B.4	Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung zum unbestimmten Integral in relativen Häufigkeiten	61
B.5	Ausprägung des Stammfunktionsaspekts zum unbestimmten Integral in absoluten Häufigkeiten	62
B.6	Ausprägung des Stammfunktionsaspekts zum unbestimmten Integral in relativen Häufigkeiten	62
B.7	Übereinstimmung des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit dem Stammfunktionsaspekt in absoluten Häufigkeiten	64

B.8	Prozentuelle Darstellung der Übereinstimmung des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit dem Stammfunktionsaspekt	64
B.9	Proband*in KA1903, Posttest	65
B.10	Proband*in AD0609, Posttest	65
B.11	Korrelation der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit der Note der Fachvorlesung	66
B.12	Absolute Häufigkeiten von Aspekten und Grundvorstellungen zum bestimmten Integral	68
B.13	Relative Häufigkeiten von Aspekten und Grundvorstellungen zum bestimmten Integral	69
B.14	Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung zum bestimmten Integral in absoluten Häufigkeiten	71
B.15	Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung zum bestimmten Integral in relativen Häufigkeiten	71
B.16	Proband*in EV2427, Prätest	72
B.17	Proband*in EV2427, Posttest	72
B.18	Korrelation der Flächeninhaltsgrundvorstellung mit der Note der Fachvorlesung	73

Tabellenverzeichnis

B.1	Codierung zur Rekonstruktionsgrundvorstellung zum unbestimmten Integral	53
B.2	Codierung zum Stammfunktionsaspekt zum unbestimmten Integral	54
B.3	Skala zur Flächeninhaltsgrundvorstellung zum bestimmten Integral	56
B.4	Absolute und relative Häufigkeit von Aspekten und Grundvorstellungen zum unbestimmten Integral	57
B.5	Qualitative Ausprägung der Rekonstruktionsgrundvorstellung in Kategorien	60
B.6	Qualitative Ausprägung des Stammfunktionsaspekts in Kategorien	61
B.7	Übereinstimmung des Auftretens der Rekonstruktionsgrundvorstellung mit dem Stammfunktionsaspekt	63
B.8	Absolute und relative Häufigkeit von Aspekten und Grundvorstellungen zum bestimmten Integral	68
B.9	Qualitative Ausprägung der Flächeninhaltsgrundvorstellung in Kategorien	70

Anhang

Im Anhang befinden sich die Erhebungsinstrumente der Studie. Fragebogen 1A wurde beim ersten Erhebungszeitpunkt verwendet, Fragebogen 1B beim zweiten.

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist laut aktuellen Forschungsbefunden die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind; es geht also um die „Bilder im Kopf“.

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern. Daher ersuchen wir Sie, den folgenden Fragebogen auszufüllen. Die Auswertung erfolgt *ausschließlich anonym!*

Wir möchten diese Befragung am Ende des Wintersemesters in dieser Lehrveranstaltung wiederholen (Fragebogen 1B) und die Ergebnisse abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen mit einem Code zu versehen. Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!

Der persönliche Code setzt sich aus folgenden sechs Zeichen zusammen:

- Bitte geben Sie die ersten zwei Buchstaben des Vornamens Ihrer Mutter an.
- Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern des Geburtstags Ihrer Mutter an (Bitte zweistellig als z.B. „05“ für „5“).
- Bitte geben Sie die ersten zwei Ziffern Ihres eigenen Geburtstags an.

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtsstag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtsstag: erste zwei Ziffern	
Code	A	D	0	6	0	9

Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

- Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Eine beliebig Wert, der eine gewisse Grenze bzw. Zahl annähert sich eine Folge annähert. Ein Wert bei dem nur endlich viele Folgenglieder drunter bzw. drüber liegen.

- Unter einer *Reihe* stelle ich mir vor ...

Σ eine Summe von Folgen

3. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist wichtig, weil ...

~~es sonst Sprungstellen gäbe.~~

4. Unter einer stetigen Funktion stelle ich mir vor ...

eine Funktion die überall differenzierbar ist.
keine "Knicke" od. Sprungstellen hat.

5. Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor ...

eine stetige Funktion.

6. Ein unbestimmtes Integral ist ...

ein Integral ohne best. Grenzen. also mit einer Zusatzkonstante

7. Ein bestimmtes Integral ist ...

ein Integral m. Grenzen.

8. Welches Bild verbinden Sie mit dem Nullstellensatz/Zwischenwertsatz?

wenn eine Folge negative u. positive Werte hat
muss es eine Nullstelle geben

9. In der Analysis geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...

BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Wir möchten diese Befragung mit der identischen zu Beginn des Wintersemesters durchgeführten Befragung (Fragebogen 1A) abgleichen. Daher ersuchen wir Sie, Ihren Fragebogen wieder mit demselben Code zu versehen. *Die Anonymität bleibt selbstverständlich gewahrt!*

	Vorname Mutter: erste zwei Buchstaben		Geburtsdag Mutter: erste zwei Ziffern		Eigener Geburtsdag: erste zwei Ziffern	
Code	A	D	0	6	0	9

Die Fragen sind fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

Vielen Dank für Ihre Mitarbeit!

Fragebogen 1B: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Ein Wert, an den sich alle bis auf endlich viele Folgenglieder annähern
~~Abgrenzung~~
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > n_\varepsilon : |A - a_n| < \varepsilon$



2. Unter einer *Reihe* stelle ich mir vor ...

Die Partialsumme d. Folgenglieder

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

3. Die *Vollständigkeit von $\mathbb{R}$* ist wichtig, weil ...

es keine Sprungstellen gibt.

4. Unter einer *stetigen Funktion* stelle ich mir vor ...

Eine Fkt., die keine Sprungstellen besitzt.
 $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x \in D: |A - x| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(A) - f(x)| < \varepsilon$

5. Unter einer differenzierbaren Funktion stelle ich mir vor ...

eine stetige Fkt, ^{bei der} die an jede Stelle der Grenzwert gleich dem Funktionswert

6. Ein unbestimmtes Integral ist ...

Eine mögliche Stammfkt, ohne fixen Grenzen

7. Ein bestimmtes Integral ist ...

Die best. Stammfkt. mit best. Grenzen

8. Welches Bild verbinden Sie mit dem Nullstellensatz/Zwischenwertsatz?

Wenn auf einem Intervall $[a,b]$ $f(a) \leq 0$ und $f(b) > 0$, dann muss es eine Stelle $f(x) = 0$ im $[a,b]$ geben.

9. In der Analysis geht es meiner Meinung nach vorwiegend um ...

Funktionen, Zuordnungen, Funktionen, Regeln, Folgen, Schlüsse ziehen.

10. Ich habe selbst schon in der Schule Mathematik unterrichtet: ☒ Ja ☐ Nein

Wenn ja, wo und in welchem Rahmen

☒ Orientierungspraktikum (PÄP) ☐ Schulpraxis (FAP)

☐ Sondervertragslehrer/in

11. Ich gebe/gab regelmäßig Mathematik-Nachhilfe: ☒ Ja ☐ Nein

12. Ich plane in der ☐ NMS ☒ AHS-Unterstufe ☒ AHS-Oberstufe
☒ BHMS zu unterrichten (Mehrfachnennungen möglich).

13. Ich habe die „Analysis in einer Variable für das LA“ oder eine entsprechende andere Analysis-LVA positiv absolviert:

Vorlesung ☒ Ja Note ☐ Nein

Übungen ☒ Ja Note ☐ Nein