

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

Warum man mit weniger Stimmen eine Wahl gewinnen kann -
die Mathematik hinter Wahlen

verfasst von / submitted by

Andrea Knapp, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna, 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 511 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) UF Geschichte,
Sozialkunde und Politische Bildung, UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen Menschen danken, die mich durch den Prozess der Masterarbeit begleitet und unterstützt haben.

Ich möchte meiner Familie, und vor allem meiner Mama danken. Sie hat mich durch mein ganzes Studium hindurch und vor allem durch die Zeit des Schreibens an der Masterarbeit unterstützt und bestärkt. Auch in schwierigen Phasen des Schreibens war sie motivierend an meiner Seite. Meinem Partner möchte ich ebenfalls danken, der mir emotionalen Rückhalt geboten hat und mich ermutigt hat, mein Studium abzuschließen.

Weiters möchte ich meinen Arbeitskolleginnen und Arbeitskollegen aus der Schule danken, die auf mein Studium Rücksicht genommen haben. Vor allem aber dafür, dass sie mit ihren Fähigkeiten, wie dem Korrekturlesen oder der Hilfe bei englischen Übersetzungen, eine Unterstützung für mich waren. Außerdem möchte ich auch meinen Freundinnen danken, welche aufbauende Gespräche mit mir geführt haben und mein Durchhaltevermögen gestärkt haben.

Natürlich möchte ich mich auch im Besonderen bei meinem Betreuer, ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith bedanken. Nach einer langen Zeit der Suche nach einem Betreuer hat sich Herr Univ.-Prof. Raith die Zeit genommen mich bei meinen letzten Schritten des Studiums zu begleiten. Er hatte immer ein offenes Ohr für meine Fragen. Ich möchte mich hiermit für sein Verständnis und für seine Unterstützung bedanken.

Zusammenfassung

Die vorliegende Masterarbeit befasst sich mit der Mathematik, die den politischen Wahlen zugrunde liegt. Wahlen spielen eine wichtige Rolle in der Gesellschaft. Die politischen Entscheidungen und die Regierungsarbeit haben aufgrund einiger Herausforderungen in den letzten Jahren an Bedeutung zugenommen. Das ist eine der Motivationen für diese Masterarbeit.

Besonders spannend ist es, die unterschiedlichen Manipulationen, Verzerrungen und Paradoxa aufgrund der Art der Wahlberechnung zu betrachten. Diese können bewusst, wie beim „Gerrymandering“ verwendet werden oder auch durch Zufall, wie bei den Paradoxa die bei Quotenverfahren im Laufe der Zeit entdeckt wurden, auftreten. Um diese betrachten zu können, wird zuerst auf die politischen Hintergründe eingegangen und allgemeines zum Wahlrecht und zu den Unterschieden zwischen der Mehrheitswahl und der Verhältniswahl dargelegt. Dabei werden beim Mehrheitswahlrecht auch alternative Wahlsysteme behandelt, die vor allem in anderen Ländern als Österreich verwendet werden. Beim Verhältniswahlrecht wird zu Beginn auf die historische Entwicklung der unterschiedlichen Berechnungsmethoden eingegangen. Dann werden auf die Quotenverfahren, wie das bekannte Hare Verfahren und die Divisorverfahren, wie dem d'Hondt Verfahren eingegangen. Im Zentrum dieses Abschnittes steht die Suche nach dem idealsten, gerechtesten Wahlsystem und dafür werden vor allem Paradoxa der einzelnen Methoden und die Vor- und Nachteile dieser betrachtet. Einen Hauptteil der Arbeit stellt der praxisnahe Anwendungsbezug dar. Bei den Berechnungsmethoden wurde vor allem versucht, reale Beispiele aus den unterschiedlichsten Ländern zu finden. Abgeschlossen wird dieser Teil mit der Berechnung der letzten Nationalratswahl 2019 in Österreich.

Neben den Berechnungen zur Wahl werden Prognosen dafür genauer betrachtet. Diese können ebenso Einfluss auf das Ergebnis einer Wahl ausüben, indem sie während des Wahlkampfes in den Medien präsent sind. Dabei wird auf den mathematischen Hintergrund eingegangen und Berechnungen aufgrund dessen durchgeführt. Schätzungen sind eine Möglichkeit, um Prognosewerte zu erstellen. Neben den Hochrechnungen aus Teilergebnissen und Wahlbörsen, werden die Punkt- und Intervallschätzungen sorgfältig untersucht.

Abstract

The presented master thesis deals with the mathematics, which political elections are based on. Elections play an important role in society. Due to the rise of certain challenges over the last few years, political decisions and the work done by governments has become more important. This is one of the motivations for this thesis.

It's exciting to observe the different possibilities of manipulations, distortions and paradoxa in regards to the chosen calculation for an election. These can be induced consciously, in form of „Gerrymandering“ or unconsciously, like the paradoxa at quota procedures, which were discovered over time. To be able to consider the paradoxa, it is necessary to have a look at the political background, the suffrage and the difference between majority and proportional election system. When dealing with the majority election system, alternative election systems which were used in other countries than Austria will also be considered. At the beginning of the proportional election system the historical development of the different calculation methods will be elaborated. Subsequently, the quota procedure, like the famous „Hare method“ and the prominent divisor method, the „d'Hondt method“ will be explained. The heart of this chapter is the search for the best and fairest electoral system. Against this background, the advantages and disadvantages of the different methods will be considered. Therefore, real-world examples from different countries will be given. The last section of the calculation methods is the calculation of the last „Nationalratswahl“ in Austria from 2019.

In addition to the calculations of the votes, election forecasts were considered. These can also effect the result of an election when presented in the media during the electoral campaign leading up to the election. The beginning will touch upon the mathematical background which is needed for the calculations. The extrapolation and the election stock market will be analyzed, as well as the point estimation and the interval estimation.

Für eine bessere Lesbarkeit dieser Arbeit wurde stets die grammatikalisch näher liegende Form verwendet, obwohl selbstverständlich alle Geschlechter (divers, männlich und weiblich) gemeint sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Wahlrecht	1
1.2	Wahlsysteme	3
2	Mehrheitswahlrecht	6
2.1	Gerrymandering	8
2.2	Alternative Wahlverfahren	10
2.2.1	Borda	11
2.2.2	Condorcet	13
2.2.3	Instant-Runoff-Voting oder Hare'sche Rangwahlmethode	15
2.2.4	Arrow-Paradoxon	17
3	Verhältniswahlrecht	21
3.1	Historische Entwicklung der Berechnungsverfahren	24
3.2	Quotenverfahren	27
3.2.1	Hare Verfahren	30
3.2.2	Hagenbach-Bischoff Verfahren	30
3.3	Paradoxa bei Quotenverfahren	32
3.3.1	Alabama Paradoxon	32
3.3.2	Parteienzuwachsparadoxon	34
3.3.3	Wählerzuwachsparadoxon	35
3.4	Divisorverfahren	36
3.4.1	Das Verfahren nach d'Hondt	39
3.4.2	Hagenbach-Bischoff Verfahren	42
3.4.3	Sainte-Laguë Verfahren	43
3.4.4	Weitere Divisorverfahren	46
3.5	Vor- und Nachteile von Quoten- und Divisorverfahren	48
3.6	Anwendungsbeispiele der Quoten- und Divisorverfahren	53
4	Wahlprognosen	60
4.1	Mathematische Grundlagen	60
4.2	Stichproben	68
4.2.1	Schätzen	71
4.3	Hochrechnungen	76
4.4	Wahlbörsen	77
5	Schluss	79

Inhaltsverzeichnis

6	Abbildungsverzeichnis	81
7	Tabellenverzeichnis	82
8	Literaturverzeichnis	84

1 Einleitung

Gegenwärtig sind, in einem entwickelten Land wie Österreich, Wahlen eine Selbstverständlichkeit. Da diese aber auch von autokratischen Regierungsformen genutzt wurden und weiterhin genutzt werden, wird hier eine begriffliche Unterscheidung und Präzisierung vorgenommen.

Demokratische Wahlen haben zentrale Funktionen, durch die sie sich von autokratischen Wahlen unterscheiden. Eine der wichtigsten Funktionen ist die Zuweisung von Herrschaft. Durch das Antreten unterschiedlicher Parteien und Kandidaten bei Wahlen, können diese vom Volk gewählt, oder auch wieder abgewählt werden. In Diktaturen gibt es die Möglichkeit der Abwahl der herrschenden Spitze nicht, auch die Wahlmöglichkeit zwischen mehreren Optionen ist hier nicht gegeben. Eine weitere Funktion demokratischer Wahlen besteht darin, dass die Interessen und Meinungen der Wählerschaft, besonders durch das Antreten unterschiedlicher Parteien oder Personen mit unterschiedlichen Ansichten, repräsentiert werden. Im Widerspruch dazu steht die autokratische Wahl, bei der nur die Interessen der Machtinhaber vertreten und akzeptiert werden. Weitere Funktionen von demokratischen Wahlen sind die Bekämpfung von Konflikten mit friedlichen, gewaltfreien Methoden und die Legitimierung der herrschenden Regierung. Durch diese Merkmale kann man demokratische Wahlen erkennen.

Dennoch gibt es Elemente, wie die Rekrutierung politischer Eliten, die bei jeder Form von Wahlen, obwohl sie unterschiedlich umgesetzt werden, wichtig sind. Jede Wahl nimmt eine große Rolle für die Karriere eines Politikers ein. In einem diktatorischen Regime können politische Personen, deren Gedankengut nicht mehr dem idealistischen Gedankengut des Machtinhabers entsprechen, ausgewechselt werden, im Gegensatz zu demokratischen Regierungen. So müssen Parteimitglieder nicht in allen Punkten dem Parteiprogramm folgen und können ihre eigene Meinung vertreten [11, S. 5-19].

1.1 Wahlrecht

Das Wahlrecht ermöglicht und garantiert die Teilnahme an Wahlen. Im Laufe der Geschichte haben sich die Wahlrechtsgrundsätze entwickelt. Diese werden in den meisten demokratischen Ländern der Welt umgesetzt und sind auch ein Zeichen für ein demokratisches Wahlrecht. Die allgemeine Wahl besagt, dass alle erwachsenen Menschen ihre Stimme abgeben und aktiv am politischen Geschehen teilnehmen dürfen. Hierzu gibt es eine Auflistung, aus welchen Gründen Menschen von einer allgemeinen Wahl nicht aus-

1 Einleitung

geschlossen werden dürfen, gleichwohl genau dies in den letzten Jahrhunderten in den unterschiedlichsten Ländern zu Diskriminierung geführt hat. Dazu gehört, dass Staatsbürgern aufgrund von Geschlecht, Rasse, ethnischer Zugehörigkeit, Sprache, Bildung oder Konfession das Wahlrecht nicht entzogen werden darf. Konkreter ist es Frauen in Österreich erst seit 1918 erlaubt, durch eine Wahl mitzubestimmen. International gesehen, wird immer wieder diskutiert, ob die USA den Grundsätzen entspricht [48]. In Amerika und vor allem der USA wurde der dunkelhäutigen Bevölkerung der Zugang zu Wahlen erschwert. Erst durch das Voting Rights Act, einem Wahlrechtsgesetz von 1965, wurde das allgemeine Wahlrecht für Afroamerikaner, niedergeschrieben [48].

In Österreich darf jede erwachsene Person, welche in Besitz der österreichischen Staatsbürgerschaft ist, wählen. Dies führt immer wieder zu kontroversen Diskussionen. Das beinhaltet den Gedanken, dass zugewanderte Menschen, die schon lange in Österreich arbeiten und leben nicht wählen und somit am politischen Geschehen nicht teilhaben dürfen.

Ein weiterer Wahlrechtsgrundsatz ist die Gleichheit. Jede Stimme hat die gleiche Wertigkeit. Dieser Gleichheitsgrundsatz hat sich durch die früheren Klassenunterschiede und den damit einhergehenden unterschiedlich gewichteten Stimmen, entwickelt.

Das geheime Wahlrecht besagt, dass die Stimmabgabe anonym stattfinden muss. Dieses Wahlrecht garantiert, dass der Staat dafür sorgt, dass die Wähler ihre Stimme unbeobachtet abgeben können. Dieses Wahlrecht war historisch gesehen für verheiratete Frauen von großer Bedeutung, da die Ehemänner sie bei der direkten Stimmabgabe nicht beeinflussen oder kontrollieren konnten.

Das vierte Wahlrechtsgrundgesetz besagt, dass die Wahl direkt sein muss. Es wird erfüllt, indem die Wähler die Funktionsträger oder die politischen Parteien direkt wählen können. Bei einem parlamentarischen Regierungssystem wird das Staatsoberhaupt indirekt durch die Mehrheit des Parlaments gewählt, wie beispielsweise im Vereinigten Königreich. Bei präsidentiellen Regierungssystemen wird die Spitzenposition, also der Präsident, direkt gewählt, wie in der Türkei. Die USA bildet eine Ausnahme, da der Präsident über die Wahlmänner, welche direkt gewählt werden, an die Spitze kommt [11, S. 22-28].

Sieht man sich zum Thema Wahlgrundgesetzte die Homepage der österreichischen Bundesverwaltung [55] an, werden dort, neben den vier bereits erwähnten Grundgesetzen noch weitere genannt. Das freie Wahlrecht gibt an, dass jeder Wähler seine Stimme frei von Zwang abgeben muss und dass jeder die Chance dazu haben muss. Somit ist es dem Staat nicht erlaubt, seine Wähler in eine bestimmte politische Richtung zu drängen. Das persönliche Wahlrecht stellt fest, dass jeder persönlich wählen muss. Die Stimme darf weder übertragen noch von einer anderen Person abgegeben werden. Menschen mit körperlichen Beeinträchtigungen dürfen sich jedoch eine Person ihrer Wahl, als Unter-

stützung zur Abgabe ihrer Stimme mitnehmen. Der Grundsatz der direkten Wahl wird auch als unmittelbares Wahlrecht bezeichnet.

1.2 Wahlsysteme

Ein Wahlsystem ist das Verfahren, dass die Stimmabgabe und die Umrechnung dieser in Mandate regelt. Im Grundlegenden unterscheidet man im deutschen Sprachgebiet zwischen Mehrheitswahl, Verhältniswahl und Mischwahlsysteme. Das Wahlsystem kann den Wählerwillen beeinflussen, da sich die Stimme je nach System anders auswirkt. Beim Mehrheitswahlsystem erhält die Person mit den meisten Stimmen, das Mandat. Das Prinzip wird „The Winner takes it all“ genannt, da nur die Person mit den meisten Stimmen an die Macht kommt, und die anderen leer ausgehen. Hierbei gibt es noch eine Unterscheidung zwischen absoluter und relativer Mehrheit. Bei dem absoluten System, gewinnt jener Kandidat, der mehr als die Hälfte der Stimmen erreicht. Wenn keiner über die Hälfte der Stimmen kommt, wird entweder noch einmal, zwischen den beiden Personen mit den meisten Stimmen abgestimmt oder der Wahlgang wird wiederholt, wobei sich auch neue Kandidaten aufstellen lassen können. Bei der relativen Mehrheitswahl gewinnt die Person mit den meisten Stimmen, auch ohne mehr als die Hälfte der Stimmen erreicht zu haben. Das Mehrheitswahlsystem ist ein klassisches Mittel zur Wahl eines Präsidenten [56].

Bei der Verhältniswahl werden die Mandate im Verhältnis zu den erhaltenen Stimmen aufgeteilt. Das Ziel davon ist es, das Verhältnis der abgegebenen Stimmen jeder Partei zur Gesamtstimmenanzahl soll dem Verhältnis der zugeteilten Mandate jeder Partei zur Gesamtmandatszahl entsprechen. Das Verhältniswahlsystem wird sowohl in Österreich als auch in Deutschland angewendet. Aufgrund der kommenden Anwendungsbeispiele werden im Folgenden das österreichische und deutsche Wahlsystem in Bezug auf die Berechnung der Mandatsverteilung näher erklärt.

In Österreich wurde zur Gründung der Republik in der Verfassung das Verhältniswahlsystem verankert. Es herrscht eine indirekte Demokratie, oder auch repräsentative Demokratie, da die Bürger in Form von Repräsentanten mitbestimmen können. Es finden fünf Arten von Wahlen statt. Die Europawahlen, die Bundespräsidentenwahl, die Nationalratswahl, die Landtagswahl und die Gemeinderatswahl. Die Europawahl findet alle 5 Jahre statt und ist eine Direktwahl, da die kandidierenden Parteien direkt vom Volk gewählt werden. Österreich hat aktuell 19 der 705 Abgeordnetensitze im Europäischen Parlament. Mittels Verhältniswahlrecht werden die Stimmen in Mandate umgerechnet. Dieses Wahlsystem wird bei allen Wahlen, außer der Bundespräsidentenwahl und der Bürgermeisterwahl angewandt. Bei der Europawahl wird mit Vorzugsstimmen, wie auch beim Nationalrat, gearbeitet. Der Nationalrat ist gemeinsam mit dem Bundesrat für die Gesetzgebung des Bundes verantwortlich. Die Bundespräsidentenwahl findet alle 6 Jahre statt und die Stimmberechnung erfolgt mithilfe der absoluten Mehrheit. Sollte keine absolute Mehrheit zustande kommen, wird eine Stichwahl zwischen den zwei

1 Einleitung

stimmenstärksten Kandidaten durchgeführt. Dieselbe Regelung gilt auch bei der Wahl des Bürgermeisters einer Gemeinde. Hierbei wird aber noch unterschieden, es gibt Gemeinden, bei denen der Gemeinderat den Bürgermeister einstellt, oder dieser wird direkt durch die Einwohner gewählt [55].

Im Laufe des 20. Jahrhunderts gab es Anpassungen des Wahlrechts. So durften 1907 nur Männer das allgemeine, gleiche und direkte Wahlrecht ausüben. Erst zur Beendigung des zweiten Weltkrieges wurde das Frauenwahlrecht in Österreich eingeführt. Bereits 1970 wurde in der Wahlrechtsreform die Zahl der Mandate im Nationalrat auf 183 festgelegt. Ebenso wurden die Wahlkreise auf 9 reduziert, die mit den Bundesländergrenzen gleichgezogen sind. Neben diesen Neuerungen, die bis heute gültig sind, wurden auch die Vorzugsstimmen eingeführt. Die Wahlrechtsreform von 1992 dient als Grundlage für das gegenwärtige Wahlrecht. Seither kam es noch zu Reformen, wie der Senkung des Wahlalters, der Einführung der Briefwahl und der Verlängerung der Legislaturperiode [33, S. 84-87].

In Deutschland ist der Bundesrat für die Gesetzgebung im Land verantwortlich, also gleichbedeutend mit dem österreichischen Nationalrat. Die Bundestagswahl findet als Verhältniswahl in Verbindung mit einer Personenwahl statt, deswegen nennt man sie auch personalisierte Verhältniswahl. Der Wähler hat zwei Stimmen. Mit der Erststimme wird mittels Direktwahl eine Person aus dem Wahlkreis als Abgeordnete gewählt, dazu wird das Mehrheitswahlsystem verwendet. Mittels relativer Mehrheit werden 299 der 598 Sitze verteilt [45]. Mit der Zweitstimme wählt man die Landeslisten der Parteien. Für die Teilnahme an der Sitzverteilung im Parlament müssen mindestens 5% der Zweitstimmen für eine Partei erreicht werden oder sie erhält drei oder mehr Direktmandate. Jede Partei soll circa gleich viele Stimmen für einen Sitz benötigen. Die Berechnung der Sitze ist in zwei Stufen eingeteilt. Im 1. Schritt soll die Sitzanzahl ermittelt werden, die eine Partei mindestens erhalten soll. Dazu wird zuerst das Sitzkontingent von 598 auf die einzelnen Bundesländer, im Verhältnis der Bevölkerungszahl aufgeteilt. Danach wird das Sitzkontingent des Bundeslandes auf die Parteien, im Verhältnis zu den Zweitstimmenanteilen verteilt. Sollte eine Partei mehr Direktmandate erreichen als dieser Sitze zustehen, kommt es zu Überhangsmandaten und die Mindestanzahl der Sitze erhöht sich. Dadurch entspricht die Verteilung nicht mehr einer genauen proportionellen Verteilung und diese Überhangsmandate werden durch Ausgleichsmandate für die anderen Parteien kompensiert. Davon wird der Mindestsitzanspruch der Parteien auf Bundesebene festgelegt. Im 2. Schritt wird die Gesamtzahl der Sitze einer Partei so lange erhöht, bis die Mindestanzahl der zustehenden Mandate auf Bundesebene vergeben wurde und bis zu drei Überhängen verbleiben, ohne ausgeglichen zu werden. Hierbei kommt es im Regelfall zu einer Vergrößerung der Sitzanzahl, wenn eine Partei in einem Bundesland mehr Erststimmen als Zweitstimmen erhält und dadurch viele Direktmandate erhält. Zum Abschluss wird berechnet, wie viele Sitze einer Partei jedem Bundesland zustehen. Das hängt mit den Zweitstimmen einer Partei im jeweiligen Land zusammen. Die Berechnung erfolgt mittels Divisorverfahren mit Standardrundung, also dem Sainte-Laguë Verfahren, welches

1 Einleitung

später genauer erklärt wird. Dieses ist seit 2009 die Berechnungsmethode, davor wurde in Deutschland das Hare Verfahren verwendet [47].

2 Mehrheitswahlrecht

Wenn man sich das Mehrheitswahlsystem genauer ansieht, muss man auch den Begriff Mehrheit genau betrachten. Bei der Wahl handelt es sich um eine iterative Ermittlung der Mehrheit. In jedem Wahlkreis wird ein Sieger gewählt und aus den Siegern wird der Gesamtsieger gekürt. Dabei kann es passieren, dass eine Partei insgesamt gewinnt, jedoch ohne die meisten Wählerstimmen erreicht zu haben. Diese Aussage wird mithilfe eines einfachen Beispiels dargestellt.

Wenn ein Staat aus nur neun Personen besteht und diese in drei Wahlkreisen zu je drei Personen eingeteilt sind und entweder Partei A oder Partei B wählen können, dann sieht das Wahlverhalten folgendermaßen aus:

Tabelle 2.1: Beispiel Wahlkreise

	Person 1	Person 2	Person 3	
1. Wahlkreis	A	A	B	Wahlsieger: A
2. Wahlkreis	A	B	A	Wahlsieger: A
3. Wahlkreis	B	B	B	Wahlsieger: B

Obwohl nur vier Personen für Partei A gestimmt haben und fünf Personen für Partei B gestimmt haben, gewinnt Partei A, da sie insgesamt in zwei Wahlkreisen gewonnen hat und Partei B in nur einem Wahlkreis. Wenn man diese Aufteilung wiederholt, sieht man, dass bereits weniger als 30% der Stimmen reichen, um als Sieger hervorzugehen. Dies ist in Tabelle 2.2, mit 27 Personen, wobei je drei Personen in einem Wahlkreis¹, also insgesamt neun Wahlkreisen wählen, erkennbar. Obwohl Partei A nur 8 von 27 Stimmen erhält, gewinnt sie die Wahl.

Dieses Dilemma, dass die Mehrheit nicht immer gleich die Mehrheit ist, lässt sich an dem Wahlsystem in England beobachten, bei dem Parteien die Wahl verloren haben, obwohl sie die meisten Stimmen hatten [21, S. 178-179]. Das Wahlsystem Großbritanniens hat sich vor mehreren Jahrhunderten entwickelt und ist in den Grundzügen gleichgeblieben. Das britische Parlament besteht aus dem Oberhaus, „House of Lords“ und dem Unterhaus, „House of Commons“. Im Laufe der Jahrhunderte hat das Oberhaus an Macht eingebüßt, und dem Unterhaus obliegt der größte Teil der Macht. Die Mitglieder des Unterhauses werden im Gegensatz zum Oberhaus mithilfe der Mehrheitswahl gewählt. Das Land ist in Wahlkreise eingeteilt und je Wahlkreis kann nur eine Partei gewinnen. Dieses „The Winner takes it all“ Prinzip hat für kleinere Parteien einen Nachteil, da sie

¹In der Tabelle wird Wahlkreis als WK abgekürzt.

2 Mehrheitswahlrecht

Tabelle 2.2: Wiederholung der Aufteilung der Wahlkreise

	Person 1	Person 2	Person 3	Gewinner		
				Je WK	Von drei WK	Gesamt
1.WK	A	A	B	A	A	
2.WK	A	B	A	A		
3.WK	B	B	B	B		
4. WK	A	A	B	A	A	A
5. WK	A	B	A	A		
6. WK	B	B	B	B		
7. WK	B	B	B	B	B	
8. WK	B	B	B	B		
9. WK	B	B	B	B		

weniger Sitze erhalten als bei einer Verhältniswahl. Sollte eine Partei in einem sicheren Wahlkreis, einer sogenannten Hochburg, zusätzliche Stimmen erhalten, so haben diese keinen Einfluss, da nur eine Person pro Wahlkreis, einen Sitz im Parlament erhält. Wesentlich wichtiger sind diese Stimmen in unsicheren Wahlkreisen. Ein weiterer Faktor für die Stimmendiskrepanz ist die unterschiedliche Größe der Wahlkreise. Eine Partei kann also mit weniger Stimmen mehr Sitze für sich gewinnen, wenn es sich dabei um kleine Wahlkreise handelt. Durch diese Wahlkreismodell geschah es bereits zwei Mal, 1951 und 1974, dass die Partei, die in absoluten Zahlen nur zweitstärkste Partei war, trotzdem als Wahlsieger mit den meisten Abgeordneten im Parlament hervorging [25, S. 552-556].

Diese ungleiche Repräsentation der Stimmen durch die Einteilung der Wahlkreise hat eine lange Tradition, besonders in Bezug auf die Einteilung für Städte und ländliche Bereiche. Beispielsweise wurde in Norwegen im 19. Jahrhundert durch die Bauernklausel, welche besagt, dass zwei Drittel der Mitglieder des Parlaments vom ländlichen Bereich und nur zu einem Drittel aus der Stadt kommen müssen. Dies zeigt die Ungleichbehandlung zulasten der Stadt deutlich. Die ungleiche Gewichtung der Stimmen widerspricht dem Gleichheitsgrundsatz, nach dem jede Stimme gleich viel wert sein soll. In vielen Ländern kam es aufgrund der Wahlkreise zu einer unterschiedlichen Wertigkeit der Stimmen. So kamen zum Beispiel 1973 in Frankreich, auf ein Mandat zwischen 9 520 und 60 000 Wahlberechtigte. Will man dem Gleichheitsgrundsatz entsprechen, so kann man einerseits die Wahlkreise bilden, indem man die Bevölkerung in proportional gleich große Kreise einteilt. Dies ist der Fall, wenn es nur ein Mandat im Wahlkreis zu vergeben gibt, den sogenannten Einerwahlkreisen. Dabei müssen die Grenzen immer wieder angepasst werden, wenn es zu Bevölkerungsverschiebungen kommt. Andererseits kann auch errechnet werden, wie viele Mandate einem Wahlkreis aufgrund seiner Bevölkerung proportional zusteht. Diese Methode wird bei Mehrpersonenwahlkreisen, wenn mehrere Mandate in einem Wahlkreis zu vergeben sind, angewandt [22, S. 93-96].

2.1 Gerrymandering

Das Gerrymandering ist eine bewusste Einteilung der Wahlkreise, um eine politische Zielsetzung zu erreichen. Es werden also die Grenzen der Wahlkreise bewusst politisch manipuliert. Der Begriff Gerrymandering setzt sich aus Gerry und Salamander zusammen. In seiner Rolle als Gouverneur von Massachusetts, unterschrieb Elbridge Gerry 1812 ein Gesetz, nachdem die Grenzen der Wahlkreise neu gezogen werden können. Um für sich selbst einen sicheren Wahlkreis zu erhalten, zog er die Wahlkreisgrenzen so, dass die Grenzen für seinen sicheren Wahlkreis der Form eines Salamanders glich [22, S.96-98].

Die USA nutzt, neben vielen anderen Ländern, die Wahlkreisverschiebung. Durch die Wahl mittels Wahlmänner und dem „The Winner takes it all“ Prinzip, sind die USA für Wahlmanipulationen anfällig. Es gibt zwei Strategien, auf die die regierende Macht durch Gerrymandering setzt:

- „Packing“: Einen Wahlkreis so zuzuschneiden, dass möglichst viele Stimmen des politischen Gegners in nur einem Wahlkreis sind. Auch wenn ein Kandidat mehr als 90% Stimmen in einem Wahlkreis erhält, bringt es nicht mehr, als würde dieser Kandidat genau 51% der Stimmen erreichen. Dahingegen fehlen ihm diese Stimmen dann in anderen Wahlkreisen, wo die Entscheidung knapper ist.
- „Cracking“: Bei dieser Strategie soll der Gegner durch das Verändern der Wahlkreise keinen dieser Wahlkreise für sich gewinnen. Diese Strategie haben die Republikaner bei der letzten Einteilung verwendet. Städte sind meist demokratisch geprägt und indem die Republikaner die Städte mit dem angrenzenden konservativen Land verbinden, erhalten die Demokraten keine Chance mehr auf einen dieser Mandate.

In den USA sind Wahlkreisverschiebungen alle zehn Jahre, nach einer Volkszählung, möglich. Dabei hat die regierende Partei einen Vorteil, da diese die Einteilung vornehmen darf und dafür mit Computern und dem Einsatz von Big Data arbeitet und das Wahlverhalten einzelner Haushalte herausfinden kann. Diese Grenzverschiebungen landeten zuletzt 2019 vor dem Supreme Court. Die Wahlkreise sind in den letzten Jahren zugunsten der Republikaner ausgefallen und Maryland und North Carolina wurden für ihr Gerrymandering kritisiert. Der Vorsitzende, Richter John Roberts, verkündete das Urteil, dass bei den Wahlkreisgrenzen zwar eine Parteilichkeit erkennbar ist, aber es dadurch zu keiner Verletzung der Verfassung kam. Es war eine fünf zu vier Entscheidung, wobei die linksliberalen Richter, die Wahlkreiseinteilung dennoch als verfassungswidrig ansahen [54].

Die Abbildung 2.1 verdeutlicht das Gerrymandering. Man sieht die Aufteilung der Stimmen zweier Konkurrenten. Dabei erhält Kandidat 1, im Folgenden Weiß markiert, 46 der insgesamt 91 Stimmen und 35 Stimmen gewinnt Kandidat 2, welcher im Folgenden Schwarz markiert ist. Wie zu erwarten, gewinnt Kandidat 1 bei vielen unterschiedlichen Einteilungen der Wahlkreise. Wenn man die Wahlkreise horizontal, vertikal oder in

2 Mehrheitswahlrecht

3x3-Quadrate einteilt, gewinnt Kandidat 1 immer in sechs der neun Wahlkreise. Die Abbildung 2.2 zeigt diese Einteilungen, bei denen Kandidat 1 als klarer Sieger hervortritt. Doch wenn man die Aufteilung mithilfe der oben genannten Gerrymandering Strategien vollführt, kann es zu überraschenden Ergebnissen kommen.

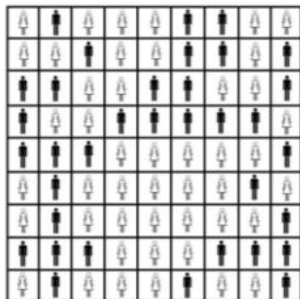


Abbildung 2.1: Stimmenausählung ohne Einteilung in Wahlkreise

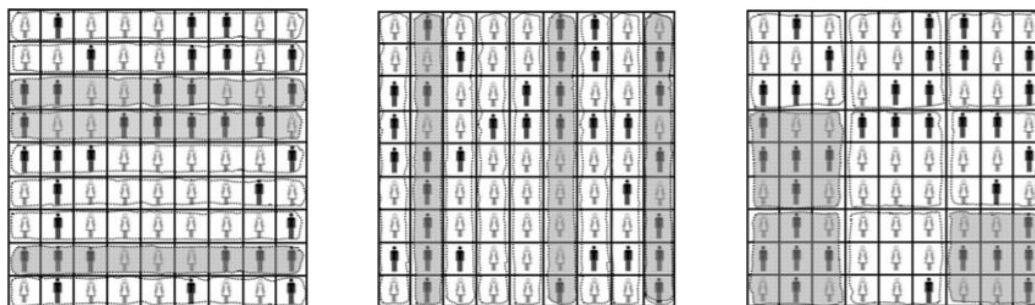


Abbildung 2.2: Einteilung in gleich große Wahlkreise mit Wahlgewinn für Kandidat 1

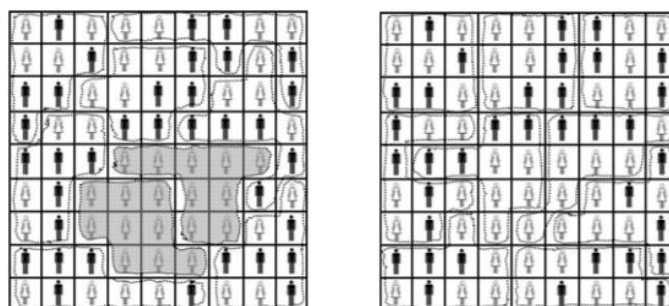


Abbildung 2.3: Zwei unterschiedliche Siege

Betrachtet man die Abbildung 2.3 kann man anhand der linken Grafik sehen, dass beide Strategien verwendet wurden. Durch das „packing“ wurden zwei Wahlkreise so eingeteilt, dass diese nur Wähler des Kandidaten 1 beinhalten und für die anderen Wahlkreise die Methode des „crackings“, damit der Wahlgegner dort keine weiteren Wahlkreise für sich

gewinnt. Durch diese Verschiebung der Grenzen konnte Kandidat 2 in sieben der neun Wahlkreise überzeugen und gewinnt somit, obwohl weniger Stimmen für ihn abgegeben wurden. Das andere Extrem kann man anhand der rechten Grafik sehen. Hier wurden die Grenzen zugunsten des Kandidaten 1 verschoben, welcher dadurch alle neun Wahlkreise für sich gewinnen konnte [7, S. 92-96, 192, 193].

2.2 Alternative Wahlverfahren

Die alternativen Wahlverfahren beziehen sich auf eine Wahlordnung mit Präferenzstimmabgabe. Dabei soll immer eine Person als Sieger, mithilfe einer Art von Mehrheit gewählt werden. Bei den folgenden Kapiteln wird davon ausgegangen, dass immer drei oder mehr Kandidaten gegeneinander antreten. Jean-Charles de Borda kam im 18. Jahrhundert zu dem Entschluss, dass die Stimmenauszählung mittels relativer Mehrheit nicht immer den Wählerwunsch ausdrückt. Anhand einer Klassensprecherwahl wird dies veranschaulicht. Es treten drei Schüler, Peter, Hans und Maria bei der Wahl gegeneinander an und sie werden von ihren 21 Klassenkollegen gewählt. Die Kinder schreiben ihren Wunschkandidaten auf einen Stimmzettel und das Ergebnis lautet acht Stimmen für Peter, sieben Stimmen für Hans und sechs Stimmen für Maria. Nach der relativen Mehrheitswahl wird Peter Klassensprecher und Maria erlangt nur den letzten Platz. Wenn man die Kinder aber nach einer Präferenzliste fragt, also eine Reihung bei denen alle drei Kandidaten vorkommen sollen, so bevorzugen acht Schüler Peter vor Maria und vor Hans, sieben Schüler setzten Hans an 1. Stelle, Maria an 2. Stelle und Peter an letzte Stelle und die restlichen sechs Kinder präferieren Maria vor Hans und vor Peter. Die Liste der Vorlieben lässt sich folgendermaßen ausdrücken, dabei steht das $>$ Zeichen für „wird bevorzugt vor“:

8 Stimmen	P	>	M	>	H
7 Stimmen	H	>	M	>	P
6 Stimmen	M	>	H	>	P

Vergleicht man nun jeweils zwei Kandidaten miteinander, kommt man zu folgendem Ergebnis.

Peter gegen Maria:	M	>	P	13 : 8
Peter gegen Hans:	H	>	P	13 : 8
Maria gegen Hans:	M	>	H	14 : 7

Dieser paarweise Vergleich, welcher beim Abschnitt über Condorcet 2.2.2 genauer betrachtet wird, bringt nun Maria als Wahlsiegerin hervor, da sie gegen alle Gegner im direkten Vergleich gewinnt. Nun ist die Verliererin laut dem relativen Mehrheitswahlrecht zur Gewinnerin geworden. Dieses Resultat wird als Borda Paradoxon bezeichnet. Aufgrund der paradoxen Wahlergebnisse, beschrieb Borda sein eigenes Wahlverfahren, welches im nächsten Abschnitt genau betrachtet wird [31, S. 59 - 60].

2 Mehrheitswahlrecht

Bei den französischen Parlaments- und Präsidentschaftswahlen wird auch mit dem Mehrheitswahlrecht, angelehnt an Pierre Simon Laplace, die Stimmenberechnung durchgeführt. Laplace sprach sich dafür aus, dass der Kandidat gewählt wird, welcher die absolute Mehrheit für sich erreichen kann. Das Problem daran ist, wenn kein Kandidat mehr als 50% der Stimmen erhält. Dann soll die Wahl wiederholt werden, bis ein Kandidat die Stimmenmehrheit erlangt. Ähnlich dazu finden die französischen Wahlen statt. Erreicht beim 1. Wahlgang kein Anwärter die meisten Stimmen, so findet eine Stichwahl zwischen den zwei führenden Kandidaten statt [31, S. 91-93]. In folgendem Beispiel treten vier Kandidaten gegeneinander an. Dabei entscheidet sich die Bevölkerung nach dem 1. Wahlgang wie folgt.

Präferenzen	Prozent	A	B	C	D
A > B > C > D	10	10			
A > C > D > B	9	9			
A > D > B > C	11	11			
B > C > D > A	22		22		
C > D > B > A	23			23	
D > B > C > A	25				25
Gesamt	100	30	22	23	25

Nach der Wahl kommt es zu keiner absoluten Mehrheit, die relative Mehrheit gewinnt Kandidat A für sich. Wenn man sich nun aber wieder paarweise Vergleiche ansieht, so verliert A gegen B mit 30% zu 70%, bei der Betrachtung von A gegen C, verliert A ebenfalls mit 70% gegen ihn und beim Vergleichen von A und D kommt man zum selben Ergebnis. Dementsprechend fällt es schwer A als Gesamtgewinner zu küren. Betrachtet man nun, wie es auch bei der französischen Wahl üblich ist, nur die zwei erstgereihten Kandidaten, also A und D, würde im 2. Wahlgang laut der Präferenzliste $D > A$ mit 70% der Stimmen gewinnen und D wäre der Gesamtsieger. Auch bei diesem Sieg lässt sich, in diesem Beispiel leider wieder ein unlogischer Schluss ziehen. Denn, betrachtet man wieder die gesamte Liste, kann man beim Vergleichen der Kandidaten C und D erkennen, dass $C > D$ mit 64% der Stimmen [13, S. 195 - 198]. Anhand des Beispiels lässt sich die Schwierigkeit erahnen, ein für jeden gerechtes Wahlverfahren zu finden.

2.2.1 Borda

Borda versuchte aufgrund der oben beschriebenen Problematiken der Mehrheitswahl ein anderes Wahlsystem aufzustellen. Bei dem Wahlsystem nach Borda, werden ebenfalls die Präferenzen von den Wählern der Reihe nach aufgelistet. Diese werden dann mit Punkten bewertet. Der erstgereichte Kandidat erhält n Punkte, der zweitgereichte Kandidat $n - 1$ Punkte, ... und der letztgereichte Kandidat erhält einen Punkt.² Betrachtet man die obige

²In manchen Literaturen [13] und [44] erhält der letztgereichte Kandidat auch 0 Punkte und man startet mit $n - 1$ Punkten. Dies ändert aber nichts am Endergebnis.

2 Mehrheitswahlrecht

Präferenzliste [13] mit der Borda Methode, so erhalten die Kandidaten folgende Punkte.

$$\begin{aligned}A &: 4 \cdot (10 + 9 + 11) + 1 \cdot (22 + 23 + 25) = 190 \\B &: 4 \cdot 22 + 3 \cdot (10 + 25) + 2 \cdot (11 + 23) + 1 \cdot 9 = 270, \\C &: 4 \cdot 23 + 3 \cdot (9 + 22) + 2 \cdot (10 + 25) + 1 \cdot 11 = 266 \\D &: 4 \cdot 25 + 3 \cdot (11 + 23) + 2 \cdot (9 + 22) + 1 \cdot 10 = 274\end{aligned}$$

Somit ist Kandidat D der Borda Gewinner, was auch dem Berechnungsverfahren nach der französischen Wahl entspricht.

Die Methode nach Borda scheint auf den ersten Blick fair zu sein. Es gibt jedoch auch Nachteile an diesem Verfahren. Durch hoffnungslose Kandidaten kann es zu einer Verfälschung des Ergebnisses kommen. Man nimmt an, dass 99 Personen bei einer Wahl abstimmen. Dabei entscheiden sich 50 für $A > B$ und 49 für $B > A$. Nach Borda würde Kandidat A 149 Punkte und Kandidat B 148 Punkte erhalten. Somit wäre A der Gewinner, das entspricht ebenfalls der relativen Mehrheitswahl. Kommt nun zusätzlich ein Kandidat C dazu, kommt es nun zu einer anderen Verteilung. Von den 99 Wählern entscheiden sich nun 49 für $A > B > C$, einer für $A > C > B$, 45 für $B > A > C$ und vier für $B > C > A$. Nun sehen die Ergebnisse wie folgt aus:

- Kandidat A erhält $3 \cdot 50 + 2 \cdot 45 + 1 \cdot 4 = 244$ Punkte
- Kandidat B erhält $3 \cdot 49 + 2 \cdot 49 + 1 \cdot 1 = 246$ Punkte
- Kandidat C erhält $2 \cdot 5 + 1 \cdot 94 = 104$ Punkte

Nun sieht das Ergebnis anders aus und Kandidat B gewinnt die Wahl. Die Präferenzverteilung der Wähler hat sich aber in Bezug auf A und B nicht verändert [3, S. 279]. Hesse beschreibt diesen Nachteil als „Sensitivität gegenüber irrelevanten Alternativen“ [13] da der unbeliebte Kandidat C das Wahlergebnis nicht verändern sollte. Ein weiterer Nachteil ist, dass dieses Wahlsystem nur bei ehrlichen Wählern angewandt werden kann, da es anfällig gegenüber Manipulationen ist. Wenn ein Wähler, dem Kandidaten, der seinem Wunschkandidaten am gefährlichsten werden kann an die letzte Stelle setzt, kann es zu Verzerrungen, wie bei dem obigen Beispiel kommen. Dieses Punktesystem nach Borda findet in leicht abgewandter Form Anwendung beim Eurovision Songcontest.

Zum Abschluss wird noch gezeigt wann der Borda Sieger gleich dem Sieger der Mehrheitswahl ist. Dabei wird das „worst case Szenario“, von den Kandidaten Peter und Maria betrachtet. Sei n die Anzahl der Kandidaten, W steht für die Anzahl der Wähler insgesamt und a steht für die Anzahl der Wähler, die Peter an die 1. Stelle setzten. Nun soll $\frac{a}{W} > 50\%$ sein, also mehr als die Hälfte der Wähler setzt Peter an die 1. Stelle, dann würde er laut Mehrheitswahl gewählt werden. Der schlimmste Fall für Peter ist es, wenn seine a Wähler Maria an die zweite Stelle setzen würden. Von seinen a Wählern wird er an die 1. Stelle der Präferenzliste gewählt und von Marias Wählern würde Peter an die letzte Stelle gesetzt werden.

2 Mehrheitswahlrecht

$$\begin{array}{rclcl} \text{a Stimmen:} & \text{Peter} & > & \text{Maria} & > & \dots \\ \text{W - a Stimmen:} & \text{Maria} & > & \dots & > & \text{Peter} \end{array}$$

Peter würde nach Borda

$$n \cdot a + 1 \cdot (W - a)$$

Punkte erhalten und Maria würde

$$n \cdot (W - a) + (n - 1) \cdot a$$

Punkte erhalten. Damit Peter sowohl als Mehrheitwahl Sieger als auch als Borda Sieger hervortreten kann, müsste folgende Ungleichung gelten:

$$\begin{array}{lcl} n \cdot a + 1 \cdot (W - a) > n \cdot (W - a) + (n - 1) \cdot a & & \\ n \cdot a + W - a > n \cdot W - n \cdot a + n \cdot a - a & & \\ n \cdot a + W - a > n \cdot W - a & & | + a \\ n \cdot a + W > n \cdot W & & | : W \\ \frac{n \cdot a}{W} + 1 > n & & | : n \\ \frac{n \cdot a}{n \cdot W} + \frac{1}{n} > 1 & & | - \frac{1}{n} \\ \frac{a}{W} > 1 - \frac{1}{n} & & \end{array}$$

Der Bruch auf der linken Seite gibt den Anteil der Wähler an, die Peter erstgereiht haben. Wenn der Anteil größer ist als der Ausdruck auf der rechten Seite, ist Peter sowohl nach der Mehrheitwahl, als auch nach Borda der Sieger. Auch wenn der für ihn schlechteste Fall, wie beschrieben, eintritt [31, S. 67 - 68].

2.2.2 Condorcet

Der Marquis de Condorcet beschäftigte sich ebenfalls, wie Borda mit der Mehrheitwahl. Dabei stieß er auf das Problem, dass Mehrheitsentscheidungen nicht transitiv sind.

Definition. Transitivität

Sei R eine Relation auf einer Menge M . R heißt transitiv, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt, dass $a R b$ und $b R c \Rightarrow a R c$ [27, S. 146].

2 Mehrheitswahlrecht

Intransitive Relationen, also nicht transitive Relationen, können ab einer Kandidatenzahl von 3 auftreten. Bei einer Wahl treten drei Kandidaten gegeneinander an, 100 Wähler wählen und die Wahlergebnisse lauten folgendermaßen:

- A gegen B: 80 Stimmen für A und 20 Stimmen für B
- A gegen C³: 40 Stimmen für A und 50 Stimmen für C
- B gegen C: 90 Stimmen für B und 10 Stimmen für C.

Der Wählerwille ist $A > B$ und $B > C$, aber $C > A$. Es ist eine nicht transitive Relation. Condorcet schlägt bei solchen Fällen vor, die Wahlergebnisse genauer zu untersuchen und jene wegzulassen, welche am unwichtigsten sind. In diesem Fall ist der Vergleich zwischen A und C am schwächsten, da die Mehrheit nur mit 10 Stimmen Unterschied erreicht wurde. So würde $A > B$ und $B > C$ am Ende bestehen und damit A als Wahlsieger hervorgehen [3, S. 280 - 281].

Condorcet hat neben diesem paradoxen Wählerverhalten, welches auch als Condorcet Paradoxon bezeichnet wird, bei Mehrheitswahlen auch ein eigenes Wahlverfahren entwickelt. Die Kandidaten werden wieder in eine Rangliste je nach Präferenz aufgereiht und alle Kandidaten treten in einen paarweisen Vergleich gegeneinander an. Der Condorcet Sieger ist derjenige, welcher im Zweikampf alle anderen Gegner besiegt. Als Condorcet Verlierer wird dementsprechend jener bezeichnet der im paarweisen Vergleich gegen alle anderen Kandidaten verliert. Dabei kann es passieren, dass bei einer Wahl kein Condorcet Sieger zustande kommt, wenn niemand gegen alle Gegner gewinnt. "Je mehr Bewerber es gibt, desto unwahrscheinlicher ist es, dass es einen Condorcet-Gewinner gibt" [31, S. 80]. Bei einer Wahl für den Vorsteher eines Klosters bewerben sich 11 Kandidaten für den Posten. Am besten schneidet Bruder Angelo ab, welcher alle außer einen Zweikampf gewinnt, also erhält er 9 Punkte für seine 9 Siege. Den einzigen Kandidaten, welcher nicht von ihm geschlagen wurde, ist Bruder Gulio. Dessen Ergebnis ist das zweitbeste, da er gegen 8 Mitstreiter im paarweisen Vergleich gewonnen hat, bekommt er 8 Punkte. Am dritten Platz steht Bruder Innocenzo, welcher gegen Angelo verliert, aber gegen Gulio gewinnt. Zusätzlich dazu kann er gegen weitere 6 Kandidaten den Sieg im Vergleich erlangen, deswegen erhält er 7 Punkte. Daraus ergibt sich der gleiche Zirkelschluss wie oben, aufgrund der Intransitivität: Angelo $>$ Innocenzo und Innocenzo $>$ Gulio, aber Gulio $>$ Angelo. Laut Condorcet muss man sich nun die Wahlergebnisse genauer ansehen.

	Angelo	Gulio	Innocenzo
Angelo		verliert 1 : 8	gewinnt
Gulio	gewinnt		verliert 4 : 5
Innocenzo	verliert 2 : 7	gewinnt	

Da Bruder Gulio gegen Bruder Innocenzo mit der geringsten Differenz an Stimmen verliert, wird diese von der Bewertung ausgenommen. Bei der Endbetrachtung würden

³Bei dieser Paarung haben nicht alle Wähler eine Meinung abgegeben.

nur mehr diese drei bestgereihten Kandidaten zur Auswahl stehen und Bruder Gulio würde aufgrund der Streichung gewinnen. Wenn es nötig ist, müssen auch mehr Wahlergebnisse aus der Bewertung genommen werden, damit eine transitive Relation zum Schluss herauskommt. Die praktische Umsetzung seiner Methode scheitert aber an der komplizierten Berechnung und genauen Analyse der Ergebnisse. So müssten bei 10 Kandidaten 45 paarweise Vergleiche durchgeführt werden, damit jeder Kandidat mit jedem anderen verglichen wird [31, S. 74-80]. Als Condorcet Sieger gilt streng genommen nur jener, welcher im paarweisen Vergleich gegen alle Gegner gewinnt.

Wenn man die Anwendung der Mehrheitswahl und den paarweisen Vergleich laut Condorcet nebeneinanderstellt, kann es dazu kommen, dass der Verlierer der Mehrheitswahl, der Gewinner laut Condorcet wird, wie bereits zu Beginn des Kapitels beschrieben. Vergleicht man nun das System nach Condorcet mit dem von Borda erkennt man, dass auch diese Sieger nicht übereinstimmen müssen. Dazu treten wieder drei Kandidaten gegeneinander an, Tom, Dick und Harry. Insgesamt 81 Wähler stimmen in einer Reihenfolge für ihre Wunschkandidaten ab. Das Wahlergebnis sieht folgendermaßen aus:

30 Wähler:	Tom >	Dick >	Harry
1 Wähler:	Tom >	Harry >	Dick
10 Wähler:	Harry >	Tom >	Dick
29 Wähler:	Dick >	Tom >	Harry
10 Wähler:	Dick >	Harry >	Tom
1 Wähler:	Harry >	Dick >	Tom

Laut Borda Wahlsystem erhält Tom 182 Punkte, Harry erhält 114 Punkte und Dick geht als Sieger mit 190 Punkten hervor. Vergleicht man jeweils zwei Kandidaten, so gewinnt Tom gegen Harry mit $60 > 21$, Tom gewinnt auch knapp vor Dick, mit $41 > 40$ Stimmen und Dick gewinnt gegen Harry mit $69 > 12$ Stimmen. Da es sich um eine transitive Relation handelt, gibt es einen Condorcet Sieger, und zwar Tom [31, S. 85-87].

2.2.3 Instant-Runoff-Voting oder Hare'sche Rangwahlmethode

Neben Borda und Condorcet wollte auch Thomas Hare gegen die Ungenauigkeit der relativen Mehrheitswahl vorgehen und entwickelte die Hare'sche Rangwahlmethode auch Instant-Runoff-Voting (IRV), oder im englischsprachigen Raum single transferable vote (STV) als Variante des IRV. Auch bei diesem Vorschlag werden die Kandidaten der Reihe nach in eine Rangliste aufgeführt. Bei diesem Wahlsystem wird eine sofortige Stichwahl initiiert. Der Kandidat mit den wenigsten Stimmen nach der Stimmabgabe wird vom Wahlverfahren ausgeschlossen. Die nachgeordneten Kandidaten rücken nach und dieses Verfahren der Streichung eines Kandidaten wird schrittweise wiederholt bis nur noch 2 Kandidaten im Finale sind und der Kandidat mit der absoluten Mehrheit gewinnt. Dieses Wahlsystem wird in Australien zur Wahl der Mitglieder des Repräsentantenhauses und in Irland bei der Präsidentenwahl angewandt. Außerhalb der klassischen Wahlen wird das IRV noch vom Internationalen Olympischen Komitee zur Auswahl des Austragungsortes

2 Mehrheitswahlrecht

verwendet.

Diese Methode wird nun an dem bereits bekannten Beispiel in 2.2 angewandt.

Präferenzen	Prozent	A	B	C	D
A > B > C > D	10	10			
A > C > D > B	9	9			
A > D > B > C	11	11			
B > C > D > A	22		22		
C > D > B > A	23			23	
D > B > C > A	25				25
Gesamt	100	30	22	23	25

Nach der ersten Auszählung erhält kein Kandidat die absolute Mehrheit und der Kandidat mit den geringsten Stimmen für den 1. Platz wird gestrichen, also Kandidat B. Seine Stimmen werden nach der Präferenzreihung weitergegeben.

Präferenzen	Prozent	A	C	D
A > C > D	19	19		
A > D > C	11	11		
C > D > A	45		45	
D > C > A	25			25
Gesamt	100	30	45	25

Kandidat C gewinnt die Stimmen von Kandidat B dazu, da seine Wähler C als zweitgerihten Kandidaten bevorzugen. In diesem Schritt wird Kandidat D eliminiert, da er die wenigsten Stimmen erlangt.

Präferenzen	Prozent	A	C
A > C	30	30	
C > A	70		70
Gesamt	100	30	70

In der Stichwahl stehen nun die Kandidaten A und C und Kandidat C kann nun die absolute Mehrheit mit 70% für sich gewinnen und ist der Gesamtsieger nach der Hare'schen Rangwahlmethode [13, S. 199 - 201].

Bei diesem Verfahren trifft nun der oben genannte Kritikpunkt, dass Kandidat C im direkten Vergleich mit Kandidat D mehr Stimmen erhalten hätte, nicht mehr ein, da C als Gewinner hervorgeht. Nun scheint diese Methode als eine der fairsten, von den beschriebenen. Doch auch diese wies ein Paradoxon auf. Modifiziert man die Ergebnisse so, dass Kandidat C bei 4% der Wähler von Platz 3 auf Platz 1 vorgereiht wird, ist C nicht mehr der Sieger. Obwohl die Veränderung eigentlich eine Verbesserung für Kandidat C bedeutet.

$$\begin{array}{lll}
 D > B > C > A & 25\% - 4\% & \Rightarrow 21\% \\
 C > D > B > A & 25\% + 4\% & \Rightarrow 27\%
 \end{array}$$

So würde als erstes Kandidat D mit 21% der Stimmen ausscheiden. Seine Anteile würden an Kandidat B weitergegeben werden, da er der zweitgereichte ist. Im zweiten Schritt würde Kandidat C gestrichen werden, da er nur 27% der Stimmen hat und Kandidat A 30% der Stimmen und Kandidat B 43% der Stimmen. Zum Schluss stehen nur noch die Kandidaten A und B zur Auswahl. Die Stimmen des ausgeschiedenen Kandidaten C gehen an B, der an der nächsten Stelle in der Reihenfolge steht. Deswegen würde nun Kandidat B mit 70% der Stimmen gewinnen [13, S. 201].

2.2.4 Arrow-Paradoxon

Kenneth Arrow kam zum gleichen Schluss wie Borda und Condorcet, dass die einfache Mehrheitswahl kein geeignetes Mittel ist, um die individuellen Meinungen der Wähler in eine Gesamtentscheidung umzumünzen. Dieses Paradoxon wurde nach Arrow bezeichnet, er selbst beschrieb es als „General possibility theorem“. Doch bevor das Paradoxon betrachtet wird, werden die fünf Bedingungen, welche Arrow an ein Wahlsystem stellt, beleuchtet. Dabei dient sein Werk „Social Choice and Individual Values“ [1] und das Kapitel „Die Pessimisten“ von Szpiro [31] als Grundlage.

- (1) Als erste Bedingung stellt Arrow zwei zuvor beschriebene Axiome voraus. Das erste Axiom besagt, dass sich ein Wähler bei der Alternative von zwei Kandidaten x und y entweder für $x > y$ oder $y > x$ entscheidet [1, S. 13]. Das bedeutet auch, dass der Wähler einen Vergleich zwischen den beiden ziehen kann [31, S. 158]. Das zweite Axiom setzt die Transitivität des individuellen Wählerwillens voraus. Dadurch kann es im Einzelnen nicht zu einem Zirkelschluss kommen, bei der Gesamtentscheidung aber schon [1, S. 13].
- (2) Arrows nächste Bedingung wird als Monotonie Anforderung bezeichnet. Wenn die Entscheidung eines Wählers so verändert wird, dass bei der Rangliste ein Kandidat einen Rang höher steigt, während alle anderen Wähler ihre Meinung beibehalten, dann darf dieser Kandidat in der Gesamtentscheidung, im Rang nicht sinken [31, S. 159].
- (3) Die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen wurde bereits weiter oben angesprochen. Unwesentliche Alternativen sollen das Wahlergebnis nicht beeinflussen. Diese Bedingung wird allerdings oft verletzt, wie auch bei der Borda Wahl [31, S. 160].
- (4) Die nächste Bedingung wird als Souveränität der Bürger bezeichnet. Die Bedeutung ist, dass eine kollektive Wohlfahrtsfunktion niemanden seine Meinung aufzwingen darf [1, S. 29]. Oder anders ausgedrückt, es darf nicht sein, dass die Gesamtentscheidung der Wähler $x > y$ setzt, unabhängig davon, für welche Präferenzen die einzelnen Individuen gestimmt haben [31, S. 161].
- (5) Die letzte Bedingung wird als „Nondictatorship“ bezeichnet. Es dürfen nicht die Präferenzen einer einzelnen Person als Gesamtergebnis angegeben werden. Es soll nicht ein Einziger die kollektive Entscheidung bestimmen [31, S. 161].

Arrow bewies, dass seine Forderungen für ein Wahlsystem mit nur zwei Kandidaten erfüllt werden. Wobei die erste Bedingung etwas abgeändert wurde und als Voraussetzung gesehen wird. Bei dem Beweis erkennt man, dass die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen die einzige ist, welche von der Kandidatenzahl abhängig ist. Bei zwei Alternativen ist diese Bedingung trivial, da es keine irrelevanten Alternativen gibt. Erst bei drei Kandidaten führt es zu Problemen [1, S. 46 - 48]. Ebenfalls bewies er, dass es keine Wahl ab drei Kandidaten gibt, bei der gleichzeitig alle fünf Bedingungen erfüllt werden. So könnten beispielsweise die ersten vier Forderungen eingehalten werden, indem eine diktatorische Entscheidung, also ein Verstoß gegen die fünfte Bedingung, getroffen wird. Bei der Diskussion, welche Eigenschaft man weglassen kann, ist man noch nicht zu einem für alle befriedigenden Ergebnis gekommen. Im Folgenden wird genau dieser Beweis betrachtet, bei der zwar die ersten vier Bedingungen erfüllt werden, aber gegen die Letzte verstoßen wird. Dabei werden die Kandidaten als Alternativen bezeichnet und die Wähler als Individuen, da dies Arrows Beweis entspricht.

Satz. General Possibility Theorem

„If there are at least three alternatives which the members of the society are free to order in any way, then every social welfare function satisfying Conditions 2 and 3 and yielding a social ordering satisfying Axioms I and II must be either imposed or dictatorial“ [1, S.59].

Der folgende Beweis ist von Hubka [15] geschrieben worden. Die oben genannten Bedingungen sind von ihm auch, anhand der Vorlage Arrows [1] beschrieben worden. Bei (2) ist die Formulierung etwas anders. Beide bezeichnen diese Bedingung als positive Assoziation zwischen individuellen Präferenzordnungen und der kollektiven Präferenzordnung. Die (4) Bedingung wird als nicht erzwungene kollektive Präferenzordnung bezeichnet.

Beweis. Sei R die kollektive Präferenzordnung aus mehreren individuellen Reihungen $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ sodass $R = f(R_1, R_2, \dots, R_n)$ und f die Regel die gesucht wird um die soziale Wohlfahrtsfunktion, das heißt die fünf Bedingungen, zu erfüllen.

1. Sei i ein beliebiges Individuum aus der Menge der Individuen.
2. Wenn die Präferenzordnung von i , also $R_i = R$, dann würde bereits dieser Wähler gegen die Bedingung (5) verstoßen. Deswegen nehmen wir an $R_i \neq R$.
3. Ist $R_i \neq R$, dann bestimmen wir die kollektive Präferenzordnung, die sich bei der Anwendung der Regel f für die verbliebenen $n - 1$ Individuen ergibt. Nach Bedingung (1) muss es eine solche Ordnung, R_1 geben.
4. Wegen Bedingung (2) kann $R_i = R_1 \neq R$ nicht gelten, da eine kollektive Präferenz von einem weiteren Individuum unterstützt wird und das darf nicht zu einer Änderung führen.
5. Wenn $R_i \neq R_1 \neq R$, dann können nur folgende Kombinationen $x > z > y$, $y > x > z$, $y > z > x$, $z > x > y$ und $z > y > x$ zu einer kollektiven Präferenzordnung $x > y > z$ führen.
6. Daraus entstehen 10 mögliche Kombinationen:

2 Mehrheitswahlrecht

1. $x > z > y$ und $y > x > z$
2. $x > z > y$ und $y > z > x$
3. $x > z > y$ und $z > x > y$
4. $x > z > y$ und $z > y > x$
5. $y > x > z$ und $y > z > x$
6. $y > x > z$ und $z > x > y$
7. $y > x > z$ und $z > y > x$
8. $y > z > y$ und $z > x > y$
9. $y > z > x$ und $z > y > x$
10. $z > x > y$ und $z > y > x$

7. Sieben dieser Kombinationen können nicht zur kollektiven Ordnung $x > y > z$ führen, da bei ihnen eine andere kollektive Reihung zustande käme und das würde sonst gegen die (2) Bedingung verstoßen. Die Relationen, die zu einem Widerspruch führen würden sind 3., 4., 5., 7., 8., 9. und 10..

8. Die restlichen Kombinationen verstoßen gegen Bedingung (3). Hier wird es anhand der 1. Kombination gezeigt. Wenn

$$R_i : x > z > y \text{ und } R_1 : y > x > z, \text{ dann ist } R : x > y > z.$$

Werden diese Präferenzen um eine Alternative u erweitert, entstehen folgende Reihungen:

$$R'_i : u > x > z > y \text{ und } R'_1 : y > u > x > z \text{ und } R' : u > x > y > z.$$

Dann muss aus R die Präferenz R' entstehen, da in R'_i und in R'_1 die Alternative u vor x gereiht ist.

9. Durch die Eliminierung der Alternative z darf die Reihung der restlichen Alternativen, also $u > x > y$ nicht verändert werden. Also muss aus

$$R''_i : u > x > y \text{ und } R''_1 : y > u > x, R'' : u > x > y$$

folgen um Bedingung (3) zu erfüllen.

10. Vergleicht man die Ordnungen mit R_i , R_1 und R aus Schritt 8, sieht man die Verletzung der (3) Bedingung. In R''_i und R''_1 kommen u , x und y in der gleichen Reihenfolge wie x , z und y in R_i und R_1 vor. Nach der (3) Bedingung müsste R'' also $u > y > x$ und nicht $u > x > y$ gelten.

11. Für die Kombinationen 2 und 6 kann dies analog gezeigt werden. Hiermit wurde bewiesen, dass bei allen Möglichkeiten, bei denen $R_1 \neq R$, jede Änderung der kollektiven Präferenzen nach Absonderung eines Individuums i nicht zur Erfüllung der Bedingungen kommt.

12. Nach Absonderung eines Individuums i darf R_1 nicht ungleich R sein. Dann muss dies auch für ein weiteres abgesondertes Individuum j aus der Menge der verbliebenen $n - 1$ Individuen gelten. Das heißt, die kollektive Präferenz der noch verbliebenen $n - 2$ Individuen muss wieder gleich R sein.

13. Wenn die kollektive Präferenz R nicht von den individuellen Präferenzen unabhängig und keine erzwungene kollektive Präferenzordnung (4) ist, muss bei einer endlichen Anzahl von Individuen, nach weiterer Isolierung, ein letztes Individuum k bleiben, dessen Präferenzen exakt der kollektiven Präferenzordnung aller Individuen entspricht.

14. Wird also versucht den Bedingungen (1)-(4) zu entsprechen, so muss eines der abgesonderten Individuen $i, j, \dots$ die (5) Bedingung erfüllen. Das beweist, dass nie alle fünf Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden können. $\square$

3 Verhältniswahlrecht

Beim Verhältniswahlssystem steht nach der Auszählung der Stimmen noch nicht fest, wie die Zusammensetzung des Parlaments aussehen wird. Die Stimmenergebnisse müssen zunächst noch in Sitzzahlen für die jeweiligen Parteien umgerechnet werden. Dazu gibt es unterschiedliche Berechnungen. Die Aufgabe von Sitzzuteilungsverfahren im Verhältniswahlssystem liegt darin, allen Parteien eine möglichst genaue proportionale Sitzzuteilung zu garantieren. Dies ist an sich einfach, wenn das Ergebnis nicht ganzzahlig sein müsste. Da die Sitze im Parlament aus ganzen Sitzen bestehen, betrachten wir im Folgenden, wie mit dieser Problematik umgegangen wird.

Die Stimmenverrechnung, ist neben der Wahlkreiseinteilung ein wichtiges Element zur Beeinflussung der Wahlergebnisse. Eine Art der Beeinflussung ist die Sperrklausel. Dies ist eine gesetzlich verankerte Grenze, erst ab dieser wird eine Partei bei der Verteilung der Stimmen berücksichtigt. Es gibt bei Sperrklauseln eine hohe Schwankung, zwischen 0,67% und 15%, wenn man die Grenzen global betrachtet. In Österreich gibt es bei der Wahl zum Nationalrat eine 4% Hürde und bei Landtagswahlen entweder keine Sperrklausel, 4% oder 5%, je nach Bundesland unterschiedlich. Die Sperrklausel soll die Spaltung von Parteien verhindern, beeinflusst aber auch das Wahlverhalten gegenüber kleinen Parteien. Denn ein Wähler kann befürchten, dass seine Stimme keine Bedeutung erlangt, wenn er eine kleine Partei wählt, bei der es fragwürdig ist, ob diese die Prozenzhürde überwinden kann. So entscheidet sich dieser Wähler lieber für eine größere Partei, wo die Gefahr, dass die eigene Stimme nicht zählt, nicht existiert [22, S. 119-122].

Weiters kann das Verrechnungsverfahren zu einer Verzerrung der Aufteilung der Mandate, nach der Proporzregel, führen. Die verschiedenen Verfahren werden nach Nohlen [22] in zwei Gruppen unterteilt, einerseits den Höchstzahlverfahren¹, andererseits den Wahlzahlverfahren². Kopfermann [16] unterscheidet in seinem Buch nach den Höchstzahlverfahren und den Rundungsverfahren, welche sich mit den Wahlzahlverfahren nach Nohlen überschneiden. Bevor genauer auf die einzelnen Verfahren eingegangen wird, werden grundlegende Eigenschaften von Verteilungsverfahren angeführt.

Wird im Folgenden über gültige Stimmen (voces)

$$v_1, \dots, v_n > 0$$

gesprochen, so ist die Anzahl der gültigen Stimmen, der an der Mandatsvergabe beteiligten Listen, gemeint. Die gültigen Stimmen insgesamt sind

¹Werden auch als Divisorverfahren bezeichnet.

²Werden auch als Quotientenverfahren bezeichnet.

3 Verhältniswahlrecht

$$v := v_1 + \dots + v_n.$$

Ziel der Abstimmung ist eine Verteilung der Mandate aus ganzen Mandatszahlen

$$m_1, \dots, m_n \geq 0$$

mit insgesamt

$$m := m_1 + \dots + m_n > 0$$

Mandaten. Die Wähler stimmen über Parteien in Form von Listen ab. Die Zahl der Mandate wird dann aus den Stimmzahlen für eine Liste nach einem Verrechnungsverfahren bestimmt.

Zu den grundlegenden Eigenschaften [16, S. 94-99] von Verrechnungsverfahren gehören laut Kopfermann

- Gleichheit:
Die Gleichheitsbedingung ist beispielsweise erfüllt, wenn man etwa 5 Mandate auf zwei gleich große Parteien verteilen muss und wenn man die Mandatsverteilung (2, 3) genehmigt, so muss auch die Verteilung (3, 2) zugelassen werden.
- Monotonie:
Eine Mandatsverteilung heißt monoton, wenn eine Partei mit mehr Stimmen der Wähler als eine andere, nicht weniger Mandate erhalten darf:

$$\text{Ist } v_j < v_k, \text{ so ist } m_j \leq m_k (j \neq k = 1, \dots, n).$$

Ist die Monotonie nicht gegeben, so nennt man die Verteilung absurd. Solche absurden Verrechnungsverfahren werden bei Mehrheitswahlen in Einerwahlkreisen hingenommen, wenn es sich um eine Ausnahme handelt.

- Homogenität:
Eine Mandatsverteilung ist homogen, wenn proportionale Stimmenverteilungen bei gleicher Mandatszahl dieselben Mandatsverteilungen ergeben.

Man kann für die Verrechnung mit homogenen Verrechnungsverfahren die Stimmenanteile der Listen

$$\frac{v_1}{v}, \dots, \frac{v_n}{v}$$

und die genauen proportionalen Anteile, ihre Quoten

$$q_1 := \frac{v_1}{v} \cdot m, \dots, q_n := \frac{v_n}{v} \cdot m$$

zugrunde legen.

3 Verhältniswahlrecht

- Unabhängigkeitsbedingung:

Die Zahl der Mandate einer Liste hängt nur von der eigenen Stimmenzahl ab und nicht von der Verteilung der restlichen Stimmen auf die konkurrierenden Parteien.

Die Unabhängigkeitsbedingung wird verletzt, wenn bei einer Wahl mindestens drei Parteien antreten. Es gibt kein monotones und homogenes Verteilungsverfahren, dass die Unabhängigkeitsbedingung erfüllt. Deswegen wird nach einem Verteilungssystem gesucht, dass die Unabhängigkeitsbedingung nur geringfügig verletzt.

- Proportionalitätsbedingung:

Die Mandate werden verhältnismäßig mithilfe der Wahlzahl

$$w := \frac{v}{m}$$

berechnet. Die Wahlzahlregelung sieht vor, die Quoten folgendermaßen zu berechnen

$$q_1 = \frac{v_1}{w} = \mu_1 + r_1, \dots, q_n = \frac{v_n}{w} = \mu_n + r_n.$$

Die Quoten werden dabei in ganzzahlige Anteile $\mu_1, \dots, \mu_n$ und in die Dezimalreste $r_1, \dots, r_n$ eingeteilt. Die Partei erhält dann $\mu_1, \dots, \mu_n$ Mandate, während die Restmandate $r := r_1 + \dots + r_n$ je nach Methode, aufgeteilt werden.

- Quotenbedingungen:

Die Minimalbedingung besagt, dass jede Partei mindestens so viele Sitze erhält, wie die abgerundete Quote angibt, d.h.: $\mu_j = \lfloor q_j \rfloor \leq m_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Die Maximalbedingung besagt, dass jede Partei höchstens so viele Sitze erhält, wie die aufgerundete Quote angibt, d.h.: $m_j \geq \lceil q_j \rceil$ ($j = 1, \dots, n$).

- Mehrheits- und Minderheitsbedingung für Koalitionen:

Die Mehrheitsbedingung besagt, wenn bestimmte Parteien gemeinsam über die absolute Mehrheit an Stimmen erreichen, so erhalten sie auch die absolute Mehrheit an Mandaten, d.h.: $v_{j_1} + \dots + v_{j_k} > \frac{v}{2} \Rightarrow m_{j_1} + \dots + m_{j_k} > \frac{m}{2}$.

Die Minderheitsbedingung besagt, wenn bestimmte Parteien gemeinsam die absolute Minderheit an Stimmen erreichen, so erhalten sie auch die absolute Minderheit an Mandaten, d.h.: $v_{j_1} + \dots + v_{j_k} < \frac{v}{2} \Rightarrow m_{j_1} + \dots + m_{j_k} < \frac{m}{2}$.

Manche dieser Eigenschaften sind zugleich auch Anforderungen an Zuteilungsverfahren und dienen als Qualitätskriterien [19, S. 23-28]. Wenn man sich auf die Suche nach dem „besten“ Verfahren begibt, ist es laut Lübbert hilfreich diese auf die folgenden Kriterien einzuteilen:

- Proportionalität:

Die ideale proportionale Aufteilung wird mit der Quote, wie oben beschrieben,

erreicht. Diese Quote ist meist eine Dezimalzahl. Wenn die Sitzzahl, von der Quote ausgehend, der nächsthöheren oder der nächstniedrigeren ganzen Zahl entspricht, erfüllt das Verfahren die Quotenbedingung.

- **Parteigrößen Neutralität:**
Bei der Mandatzuteilung, nach der Stimmabgabe soll garantiert sein, dass weder große noch kleine Parteien bevorzugt werden. Wenn ein Berechnungsverfahren systematisch kleinere Parteien bevorzugt, könnten sich bestehende Parteien in zwei kleinere Parteien aufspalten. Werden bei einem Zuordnungsverfahren größere Parteien bevorzugt, kann es dazu kommen, dass sich kleinere Parteien zusammenschließen, um die Chance zu erhöhen, mehr Sitze zu bekommen. Parteienfusionen und Koalitionen werden dadurch begünstigt.
- **Mehrheitsbedingung:**
Wie bereits oben für Koalitionen beschrieben, gilt die Bedingung auch für eine Partei. So muss eine Partei, die mehr als 50% der Wählerstimmen erhält, auch mehr als 50% der Sitze im Parlament zugeteilt bekommen.
- **Monotonie:**
Lübbert teilt die Monotonie in drei Bereiche ein. In die Hausmonotonie, die Stimmenmonotonie und die Bevölkerungsmonotonie. Ein Berechnungsverfahren wird als hausmonoton bezeichnet, wenn garantiert wird, sollte die Sitzanzahl im Parlament größer werden, darf dies für keine Partei zu einem Verlust der Mandate kommen. Die Stimmenmonotonie besagt, sollte eine Partei einen Stimmenzuwachs erhalten, alle anderen Stimmen und die Sitzanzahl gleich bleiben, so sollte es nicht passieren, dass die Partei mit Stimmenzuwachs einen Sitz verliert. Die Bevölkerungsmonotonie besagt, sollte eine Partei einen Stimmenzuwachs erfahren, darf es nicht dazu führen, dass sich Mandate zwischen zwei anderen Parteien verschieben.

Diese Anforderungen an ein Berechnungsverfahren klingen plausibel und stehen in einer Wechselbeziehung zueinander. Es gibt allerdings Kriterien, die sich gegenseitig ausschließen: „There is no method that avoids the population paradox and always stays within the quota“ [2, S. 79]. Dieser Satz wird als „Unmöglichkeitssatz von Balinski/Young“ bezeichnet und schließt aus, dass ein Verfahren die Quotenbedingung zur Gänze erfüllt und frei vom Wählerzuwachsparadoxon ist. Ausnahmen dafür sind, wenn die Parteienzahl kleiner als 4 oder die zu verteilenden Mandate weniger als 7 (oder als die Anzahl der Parteien plus 3) ist [19, S. 28].

3.1 Historische Entwicklung der Berechnungsverfahren

Im Folgenden werden die historischen Entwicklungen der Verteilungsverfahren erläutert. Dabei wird vor allem auf die Geschichte der USA eingegangen, da sich nach der ersten Kongresswahl eine Diskussion darüber eröffnete, welches das ideale Sitzzuteilungsverfahren ist. Eine wesentliche Erkenntnis davon ist, dass es kein ideales Berechnungsverfahren

3 Verhältniswahlrecht

gibt, sondern dass sich im Laufe der Zeit viele unterschiedliche Verfahren entwickelt haben, die alle ihre Vor- und Nachteile haben.

Im Jahr 1787 wurden in den USA mehrere Vorschläge für Verteilungsverfahren erbracht. Die Constitutional Convention schrieb vor, dass die Anzahl an Repräsentanten, der Größe der Staaten entsprechend, auf das Haus verteilt werden sollen. Als Grundlage diente die Volkszählung, welche alle 10 Jahre stattfand. 1791 ergab die Volkszählung eine Bevölkerung von 3 615 920 Menschen. Hier sollte auf 30 000 Menschen mindestens ein Sitz fallen und jeder Staat sollte mindestens einen Repräsentanten stellen. Dies entspricht 120 zu verteilenden Sitzen.

Ein Vorschlag für die Verteilung kam 1792 von Alexander Hamilton, mittels Brief an den Präsidenten George Washington. Er schlug vor, die Sitze zuerst nach den Quoten aufzuteilen und die noch nicht vergebenen Plätze, den Staaten mit den größten Bruchteilen, also den Resten $r_1, \dots, r_n$ zuzuteilen. Es wird in der Literatur angenommen, dass Hamilton nicht mit der genauen Wahlzahl $3\,615\,920 : 120 = 30\,132,66\dots$, sondern mit 30 000 gerechnet hat und die Standardrundung bei 0,5 ausgeführt hat. Aus diesem Vorschlag heraus haben sich später die Rundungsverfahren entwickelt. Eines der wichtigsten ist von Thomas Hare im 19. Jahrhundert weiterentwickelt worden, und trägt auch seinen Namen. Der politische Gegner Hamilton's, Thomas Jefferson, und später 3. Präsident der USA, schlug dem amtierenden Präsident, ein Divisorverfahren vor. Er ging von einer gemeinsamen Verteilungszahl aus. Mittels abgerundeten Quotienten berechnet er aus der repräsentativen Bevölkerungszahl jedes einzelnen Staates und der Verteilungszahl als Divisor die Sitzzahl der Staaten. Der Divisor wurde so gewählt, dass die Zahl der Sitze aller Staaten zusammen 120 erreichte [16, S. 101-104].

Jefferson wählte als Divisor 28 500, aufgrund seiner Methode des Abrundens. Bei einer genauen Verteilungszahl von 30 132,66... würden nur insgesamt 111 Sitze vergeben werden. Jeffersons Vorgehensweise wurde von Victor d'Hondt Ende des 19. Jahrhunderts aufgegriffen und präzisiert. Der Senat hatte sich auf die Hamiltonschen Zahlen geeinigt, George Washington jedoch verweigerte seine Unterschrift und gab damit das erste Mal ein Veto, als amerikanischer Präsident. Wenige Tage später wurde Jeffersons Methode, mit einem geänderten Divisor von 33 000, zugelassen. Dadurch hatte das Repräsentantenhaus nun eine Größe von 105 Abgeordneten. Das Verfahren von Jefferson wurde, aufgrund seiner Ungleichbehandlung der Staaten, nur bis 1830 angewandt. Senator Daniel Webster entwickelte eine Abwandlung des Verfahrens von Jefferson, und zwar das Divisorverfahren mit Standardrundung, welches später noch näher erklärt wird [31, S. 118]. Ab dem Jahr 1850 wurde im Vorhinein die Anzahl der Sitze definiert und dann das Verfahren der größten Reste nach Samuel Vinton, einer Modifikation von Hamiltons Methode, herangezogen [16, S. 101-104].

Bei Hamiltons Vorschlag wurden von den 120 Sitzen im ersten Verteilungsverfahren nur 112 Sitze zugeteilt und die restlichen 8 Sitze wurden nach den größten Dezimalen an

3 Verhältniswahlrecht

Tabelle 3.1: Vergleich von Hamiltons und Jeffersons Methode

Staaten	Bevölkerung 1791	Hamilton :30 000	Jefferson :28 500
Virginia	630 560	21,01... 21	22,12... 22
Massachusetts	475 327	15,84... 16	16,67... 16
Pennsylvania	432 879	14,42... 14	15,18... 15
North Carolina	353 523	11,78... 12	12,40... 12
New York	331 589	11,05... 11	11,63... 11
Maryland	278 514	9,28... 9	9,77... 9
Connecticut	236 841	7,89... 8	8,31... 8
South Carolina	206 236	6,87... 7	7,23... 7
New Jersey	179 570	5,98... 6	6,30... 6
New Hampshire	141 822	4,72... 5	4,97... 4
Vermont	85 533	2,85... 3	3,00... 3
Georgia	70 835	2,36... 2	2,48... 2
Kentucky	68 705	2,29... 2	2,41... 2
Rhode Island	68 446	2,28... 2	2,40... 2
Delaware	55 540	1,85... 2	1,94... 1
	3 615 920	120	120

die Staaten Connecticut, Delaware, Massachusetts, New Hampshire, New Jersey, North Carolina, South Carolina und Vermont vergeben. Jefferson war nicht begeistert von dem Verrechnungsverfahren, da sein Heimatstaat Virginia durch dieses Verfahren Stimmen verlor. Das ausschlaggebende Argument, dass Washington zum Veto brachte, war, dass die Sitzzuteilung bei den aufgerundeten Staaten verfassungswidrig ist. Es wurde dadurch mehr als ein Vertreter pro 30 000 Menschen zugeteilt. In New Hampshire kam beispielsweise ein Vertreter auf 28 364 Personen. Diesen Grund gab Washington auch unter anderen, für sein Veto an. Da Jeffersons Methode dieselbe Bedingung verletzte, wurde die Sitzanzahl auf 105 verändert und somit konnte ein passender Divisor von über 30 000 gefunden werden [31, S. 113-115].

Während die Entwicklungen in den USA ihren Lauf nehmen, waren in Europa im 18. Jahrhundert die relativen Mehrheitswahlen in Einerwahlkreisen üblich. Aufgrund der negativen Auswirkungen der Mehrheitswahl, unter anderem, dass man nicht seinen Favoriten wählte, da sich dieser in einer aussichtslosen Position befand, sondern stattdessen einem anderen, vielversprechenderen Kandidaten seine Stimme gab, veranlasste Jean-Charles de Borda und Marquis de Condorcet andere Personenabstimmungen zu empfehlen. Als weitere Vorreiter, der heutigen Wahlsysteme gelten die Franzosen Joseph Gergonne und Joseph Comte de Villèle mit ihrer Quotenregelung. Ein Schüler des bekannten Mathematikers Fourier, Victor Considerant, setzte sich ebenfalls für eine proportionale Aufteilung der Stimmen, bei einer Wahl, ein.

3 Verhältniswahlrecht

„Sind etwa 400 Abgeordnete mit 200 000 Stimmen zu wählen, so sollten auf 500 Stimmen einer Meinungsgruppe ein Abgeordneter fallen, und das unabhängig von den Arrondissements für ganz Frankreich. Selbst absurde Meinungen sollten vertreten sein. Die Mehrheitswahl würde dagegen Meinungen unterdrücken, die über mehrere Wahlkreise ohne Mehrheit verteilt sind“ [16, S. 105].

Considerant's Vorschlag wurde abgelehnt und so kam es im Jahr 1842 zu einem extremen Beispiel der Ungerechtigkeit des bisherigen Mehrheitswahlsystems. Wegen schlecht eingeteilter Wahlkreise erhielten die Radikalen mit 1 409 Stimmen 19 Vertreter und die Konservativen, welche weniger Stimmen, gesamt 1 342 Stimmen, erreichten, 29 Vertreter. Erst Anfang des 20. Jahrhunderts wurden die Vorschläge zur proportionalen Aufteilung und zu einer Verteilung der Mandate auf Listen ernsthaft besprochen.

In der Schweiz wurden Quotenregelungen mit Reststimmenverwertung in Betracht gezogen. Dabei wurde 1867 das Verfahren der größten Reste, oder auch „Schweizer Verfahren“, bekannt. Victor d'Hondt erfand 1882 ein Divisorverfahren, das nach ihm benannt wurde. Früher wurde es auch als „Belgisches Verfahren“ betitelt, da d'Hondt das Verrechnungsverfahren in Belgien erfand. Victor d'Hondt wusste nicht, dass es das gleiche Verfahren war, das Thomas Jefferson zur Verteilung der Sitze des Repräsentantenhauses vorgeschlagen hatte. Der schweizer Physiker Eduard Hagenbach-Bischoff bewarb zusammen mit weiteren Autoren, das d'Hondt Verfahren. Hagenbach-Bischoff entwickelte selbst eine Variante des d'Hondt Verfahren. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde dadurch das Schweizer Verfahren zugunsten des Divisorverfahren nach d'Hondt verdrängt [16, S. 105-108].

3.2 Quotenverfahren

Quotenverfahren werden auch Rundungsverfahren genannt, da das Hauptmerkmal am Runden von Dezimalzahlen liegt. Die Rundungsverfahren sind Verallgemeinerungen des Verfahrens der größten Reste, deswegen sind sie auch als Restemethode bekannt. Sie liefern Verteilungen ohne große Abweichungen von den genauen proportionalen Anteilen. Die Minimal- und Maximalbedingung sind fast immer erfüllt, im schlechtesten Fall werden die Mandate um eines überschritten oder unterschritten. Ein Nachteil der Rundungsverfahren ist, dass eine Partei trotz gleichbleibender Verteilung der Stimmen, ein Mandat weniger erhalten kann, wenn sich die Mandatszahl erhöht. Dieser Widerspruch ist in den USA unangenehm aufgefallen und wird später noch als „Alabama Paradoxon“ näher erörtert [16, S. 108-109].

Nach Nohlen [22, S. 126-127] werden die Quotenverfahren auch als Wahlzahlverfahren bezeichnet, da eine Wahlzahl gebildet wird. Die Wahlzahl entsteht, wie oben bei der Proportionalitätsbedingung bereits erwähnt, durch eine Division. Wobei der Divisor je nach Verrechnungsverfahren verändert wird. Es wird die Zahl der abgegebenen gültigen

3 Verhältniswahlrecht

Stimmen durch, je nach konkretem Verfahren, die Zahl der zu vergebenen Mandate, oder dieser Zahl plus eins oder plus zwei dividiert. Der Divisor beeinflusst die Wahlzahl. Je größer der Divisor ist, desto kleiner wird die Wahlzahl. Bei den Wahlzahlverfahren werden in der Regel die Mandate nicht zur Gänze im ersten Verfahrensgang vergeben, die Restmandate benötigen ein zweites Zuteilungsverfahren.

Im Folgenden werden zuerst die zwei bekanntesten Rundungsregeln erklärt, da sie auch als Grundlage für andere Verfahren dienen.

Standardrundung

Die auftretenden Rundungsfehler bei statistischen Auswertungen werden häufig erst nach den Rechnungen wahrgenommen. Bei der Standardrundung werden Dezimalzahlen unter 0,5 abgerundet, über 0,5 aufgerundet und bei 0,5 wahlweise auf- oder abgerundet. Bei der Standardrundung fällt auf, dass die Summe der gerundeten Ergebnisse ungleich 100% ist. Rundet man entsprechend der Quoten der Parteien, also

$$q_1 = \mu_1 + r_1, \dots, q_n = \mu_n + r_n$$

nach der Zerlegung in Ganze Zahlen $\mu_1, \dots, \mu_n$ und der verbleibenden Reste $r_1, \dots, r_n$, so wird die Summe der gerundeten Mandatsteile nicht immer der Gesamtanzahl der Mandate m sein. Nur bei zwei Parteien führt die Standardrundung zu einem Ergebnis mit 100%, wenn vereinbart wird, wer bei gleichen Resten, das letzte Mandat erhält. Bei mehr als zwei konkurrierenden Parteien, wird die Wahrscheinlichkeit immer niedriger, dass die gerundeten Quoten der Summe m entsprechen.

Tabelle 3.2: Wahrscheinlichkeit, dass die gerundeten Quoten der Summe der Mandate entspricht

n	2	3	4	5	6	7	8
w_n	100%	75%	66,6...%	59,8...%	55%	51,1%	47,9...%

Je mehr Parteien n an einer Wahl mit Standardrundung beteiligt sind, desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit w_n dafür, dass die gerundeten Quoten die Summe der zu verteilenden Mandate m haben. Aus diesem Grund wurde nach anderen Rundungsverfahren gesucht.

Verfahren der größten Reste

Beim Verfahren der größten Reste, wird von der Standardrundung ausgegangen und diese je nach Ergebnis leicht variiert. Man rundet nicht bei 0,5, sondern bei einem größeren oder kleineren Dezimalrest, je nachdem, ob die Standardrundung zu viele oder zu wenige Mandate ergeben hat. Zum Beispiel bei der Weltbevölkerung 1975 wird bei 0,45 aufgerundet, um 100% zu erreichen. Im Folgenden werden die zwei Rundungsverfahren auf die prozentuale Berechnung der Weltbevölkerung betrachtet. Dabei wird deutlich, dass die Standardrundung nicht zu einem Ergebnis mit 100% geführt hat. So werden, wenn

3 Verhältniswahlrecht

man diese Berechnungen zur Aufteilung von Mandaten, betrachtet, nicht alle Mandate vergeben werden.

Tabelle 3.3: Weltbevölkerung 1975 mit Standardrundung und nach größten Resten gerundet

	Mill.	%	standardgerundet %	größte Reste gerundet %
Asien ohne UdSSR	2 295	57,289...	57	57
Europa mit UdSSR	734	18,322...	18	18
Amerika	540	13,479...	13	14
Afrika	417	10,409...	10	10
Australien, Ozeanien	20	0,499...	0	1
	4 006		98	100

Die Parteien erhalten die ganzzahligen Anteile der Quoten sofort

$$q_1 = \frac{v_1}{v} \cdot m = \mu_1 + r_1, \dots, q_n = \frac{v_n}{v} \cdot m = \mu_n + r_n.$$

Die übrigen Mandate erhalten diejenigen Parteien, mit den größten verbleibenden Resten. Bei dem Verfahren der größten Reste, sind die Minimal- und Maximalbedingung erfüllt und sie besitzt eine hohe Genauigkeit. Man erhält im Gegensatz zur Standardrundung immer die richtige Gesamtzahl und die Abweichung

$$\max_i |q_i - m_i| \leq \frac{n-1}{n}.$$

Brüche über $\frac{n-1}{n}$ werden aufgerundet, unter $\frac{1}{n}$ abgerundet und dazwischen kann beides gemacht werden. André Sainte-Laguë und G. Roulleau bewiesen 1910, dass der Fehler $\max_j |q_j - m_j|$ in jedem Fall für die Mandatsverteilung nach dem Verfahren der größten Reste am kleinsten ist. Georg Pólya verallgemeinerte die Fehlerminimierung nochmal stark und empfahl deswegen das Verfahren der größten Reste im Gegensatz zum d'Hondtschen Verfahren und dem Sainte-Laguë Verfahren.³

Wegen der Einfachheit des Verfahrens der größten Reste wurde es häufig für Manipulationen verwendet. Die Mehrheits- und Minderheitsbedingung sind wegen der Unerfüllbarkeit der Unabhängigkeitsbedingung verletzt.

Tabelle 3.4: Fiktives Beispiel der Verletzung der Mehrheits- und Minderheitsbedingung

Parteien	Stimmen	Quoten	Sitze
A	510	2,55	2
B	320	1,6	2
C	170	0,85	1
	1000	5	5

³Diese beiden Divisorverfahren, werden später noch genauer erörtert.

Dieses Beispiel veranschaulicht, dass die Minderheitsbedingung für Parteien hier nicht eingehalten werden kann. Die Parteien B und C haben insgesamt unter 50% der Stimmen erreicht, aber mehr als die Hälfte der Mandate, aufgrund der größeren Dezimalreste, für sich erzielen können [16, S. 108-113].

3.2.1 Hare Verfahren

Das Hare Verfahren wird auch Einfaches Wahlzahlverfahren genannt, da der Divisor der Zahl der zu vergebenen Mandate entspricht. Es wurde nach dem Engländer Thomas Hare benannt, ist aber historisch gesehen auf das Verfahren von Hamilton zurückzuführen. In Deutschland wird es auch Hare-Niemeyer Verfahren genannt, da der deutsche Mathematiker Horst F. Niemeyer das Verfahren im deutschen Bundestag vorschlug und dieses dort auch fast 20 Jahre Anwendung fand. Ebenfalls in Deutschland üblich ist auch die Bezeichnung Verfahren der größten Reste, da die Restverteilung nach der Berechnung der Quote ident ist.

Im 1. Schritt wird die Wahlzahl gebildet und dann die Quote berechnet. Die Quote jeder Partei ergibt sich, wenn man den Stimmengewinn einer Partei durch die Wahlzahl dividiert oder wenn man den Stimmengewinn einer Partei durch die Gesamtstimmen dividiert und mal der zu vergebenen Mandate, rechnet. Die ganzzahligen Ergebnisse sind die Mandate, die sofort vergeben werden können. Im 2. Schritt werden die Restmandate verteilt. Beim Hare Verfahren kommt das Verfahren der größten Reste zum Einsatz [38].

Im folgenden Beispiel [22, S. 127] wird das Einfache Wahlzahlverfahren dargestellt. Auf die 1000 gültigen Stimmen sollen 10 Mandate vergeben werden.

Tabelle 3.5: Anwendungsbeispiel des Hare Verfahrens

Partei	A	B	C	D	E	Gesamt	
Stimmen	350	90	180	220	160	1 000	
Wahlzahl	100	100	100	100	100	$w = \frac{v}{m}$	
Quote	3,5	0,9	1,8	2,2	1,6	$q = \frac{v_i}{w}$	
Ganzzahlige Mandate	3	0	1	2	1	7	1. Zuteilung
Größte Reste	0	1	1	0	1	3	2. Zuteilung
Gesamte Mandate	3	1	2	2	2	10	

3.2.2 Hagenbach-Bischoff Verfahren

Das Hagenbach-Bischoff Verfahren [22, S. 127-130], oder auch Droop Quote [16, S. 78] wird von der Hare'schen Quote abgeleitet. Beim Hagenbach-Bischoff Verfahren wird bei der Wahlzahl der Divisor verändert:

$$w = \frac{v}{m + 1}.$$

3 Verhältniswahlrecht

Bei der Droopschen Quote findet man in der Literatur die gleiche Verteilungszahl, oder auch eine weitere Abwandlung davon:

$$w = \frac{v}{m+1} + 1.$$

Je größer die Divisoren gewählt werden, desto kleiner wird die Wahlzahl. Da es bei den Rundungsverfahren im Normalfall nicht im 1. Zuteilungsverfahren zu einer Aufteilung aller Mandate kommt, kann durch die Größe des Divisors die Anzahl der Restmandate für das 2. Zuteilungsverfahren gesteuert werden.

Betrachtet man nun nochmal das Beispiel von dem Hare Verfahren, mit diesen Formeln, kommt man auf eine unterschiedliche Mandatzuteilung. Dabei kommt man in diesem Fall mit beiden abgeänderten Wahlzahlen zu dem gleichen Ergebnis.

Tabelle 3.6: Anwendungsbeispiel nach Hagenbach-Bischoff und Droop Quote

Partei	A	B	C	D	E	Gesamt	
Stimmen	350	90	180	220	160	1 000	
Wahlzahl	90	90	90	90	90	$w = \frac{v}{m+1}$	Hagenbach-Bischoff
Quote	3,88	1	2	2,44	1,77	$q = \frac{v_i}{w}$	
Ganzzahlige Mandate	3	1	2	2	1	9	1. Zuteilung
Größte Reste	1	0	0	0	0	1	2. Zuteilung
Gesamte Mandate	4	1	2	2	1	10	
Wahlzahl	91	91	91	91	91	$w = \frac{v}{m+1} + 1$	Droop Quote
Quote	3,84	0,98	1,97	2,41	1,75	$q = \frac{v_i}{w}$	
Ganzzahlige Mandate	3	0	1	2	1	7	1. Zuteilung
Größte Reste	1	1	1	0	0	3	2. Zuteilung
Gesamte Mandate	4	1	2	2	1	10	

Aufgrund der veränderten Wahlzahl hat sich auch die Verteilung der Mandate verändert. Beim Hare Verfahren wurden den Parteien B, C und E aufgrund ihrer größten Reste die letzten Mandate zugesprochen. Nur durch die minimale Änderung in der Wahlzahl, erkennt man bei dieser Tabelle, dass Partei A ein Mandat gewonnen und Partei E ein Mandat verloren hat. Daraus kann man schließen, wenn man sich bereits zuvor mit möglichen, günstigen Wahlausgängen beschäftigt hat, dass man diese mithilfe eines passenden Rundungsverfahrens, erreichen kann.

Die Methode nach Hagenbach-Bischoff wird nach Nohlen [22, S. 126-130] zu den Wahlzahlverfahren zugeordnet, ohne jedoch die genaue Verteilung der Restmandate, also die Verteilung im zweiten Zuteilungsverfahren zu beschreiben. Nohlen beschreibt allgemein die Möglichkeiten, die Restsitze zu verteilen. Dazu zählen die:

- Methode des größten Überrestes
- Methode des kleinsten Überrestes

- Restteilungsverfahren (Bildung von Höchstzahlen mittels Division durch 1, 2, 3,...)
- Methode des größten Durchschnitts.

Andere Autoren ordnen das Verfahren nach Hagenbach-Bischoff als Divisorverfahren ein, weshalb dieses später nochmals, mit anderer Restsitzberechnung, erläutert wird.

3.3 Paradoxa bei Quotenverfahren

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entdeckte man in den USA einige Paradoxa bei den Rundungsverfahren, welche vorwiegend verwendet wurden.

3.3.1 Alabama Paradoxon

Das Alabama Paradoxon wird auch als Mandatszuwachsparadoxon bezeichnet. Kopfermann beschreibt das Paradoxon folgendermaßen: „Ein Staat oder eine Partei erhält bei gleichbleibender Stimmenverteilung weniger Sitze, obwohl die Sitzzahl des Hauses vergrößert wird“ [16, S. 114].

Das klingt merkwürdig und erscheint einem unlogisch zu sein. Der Ursprung dieses Phänomens liegt bei der Verteilung der Sitze des amerikanischen Kongresses auf die Bundesstaaten. Durch das Bevölkerungswachstum in den USA im 19. Jahrhundert musste die Anzahl der Abgeordneten immer wieder angepasst und erhöht werden. Aus diesem Grund wurden 1880, von dem Leiter der Volkszählungsbehörde C. W. Seaton, Berechnungen für unterschiedliche Parlamentsgrößen durchgeführt. Die Berechnungsmethode zur Verteilung der Sitze war zu dieser Zeit die Hamilton Methode, auch Vinton Methode genannt. Diese entspricht der oben erklärten Methode nach Thomas Hare. Aufgrund der Bevölkerungszahlen laut der jüngsten Volkszählung, standen 275 bis 350 Sitze zur Verfügung. Die Berechnung von 275 bis 299 Sitzen war nachvollziehbar, ein glücklicher Staat erhielt immer einen Sitz mehr. Aber bei einer Sitzanzahl von 300 erhielt plötzlich der Bundesstaat Alabama um einen Sitz weniger, obwohl sich die Bevölkerungszahlen nicht veränderten. Diese Ungereimtheit wird in der folgenden Tabelle [31, S. 120] verdeutlicht. Dieser Ausschnitt aus den Berechnungen bezieht sich auf die Gesamtbevölkerungsanzahl von 49 713 370 Menschen und bei 299 Sitzen wurde 165 120 als geeignete Wahlzahl gewählt und bei 300 Sitzen wurde 164 580 als passender Divisor genommen.

Tabelle 3.7: Alabama Paradoxon beim Verfahren nach Hare

	299 Sitze			300 Sitze		
	Alabama	Texas	Illinois	Alabama	Texas	Illinois
Einwohner	1 262 505	1 591 749	3 077 871	1 262 505	1 591 749	3 077 871
Quote	7,646	9,640	18,640	7,671	9,672	18,701
Ganze Sitze	7	9	18	7	9	18
Dezimalrest	0,646	0,640	0,640	0,671	0,672	0,701
Zusätzliche Sitze	1	0	0	0	1	1
Gesamtsitze	8	9	18	7	10	19

Als C. W. Seaton das bemerkte, schrieb er an den Kongress folgenden Brief:

„While making these calculations I met with the so-called „Alabama“ paradox where Alabama was allotted 8 Representatives out of a total of 299, receiving but 7 when the total became 300. Such a result as this is to me conclusive proof that the process employed in obtaining it is defective, and that it does not in fact „apportion Representatives among the States according to their respective numbers.“ This conclusion has been confirmed by the discovery of other anomalies, and the result of my study of the question is the strong conviction that an entirely different process should be employed“ [5, S. 38-39].

Betrachtet man die Zahlen genauer, entdeckt man auch den Grund für dieses Paradoxon. Durch die Erhöhung der Sitze wächst die Quote jedes Bundesstaates um etwa 0,33 Prozent. So steigt ebenfalls der Dezimalrest um circa ein Drittel Prozent. Da die Einwohnerzahlen in Texas und Illinois größer sind als jene von Alabama, steigt der Nachkommarest in absoluten Zahlen bei den beiden Staaten stärker. Die Quote wächst für Alabama nur um 0,025, von 7,646 auf 7,671, in Texas wiederum um 0,032 und in Illinois noch stärker, um 0,061. Deswegen erreichen mit dieser Berechnungsmethode die größeren Bundesstaaten mehr Sitze als ein kleiner Bundesstaat.

Dieser berühmte Fall war nicht das erste Mal, dass dieses Paradoxon zum Vorschein kam. Bereits 1870 trat dasselbe Phänomen für Rhode Island auf. Der Bundesstaat hatte seit 1790 zwei Vertreter im Parlament. Bei einer neuen Volkszählung 1860 wurde Rhode Island nur noch ein Sitz bewilligt. Nach der nächsten Volkszählung 10 Jahre später, rechnete sich Rhode Island wieder Chancen auf zwei Sitze aus, da sie einen Bevölkerungswachstum erlebten. Berechnungen zeigten, dass zwei Sitze möglich wären, bei einer Parlamentsgröße von 270 Abgeordneten, bei einer Erhöhung auf 280, würde Rhode Island, aufgrund der prozentual kleinen Bevölkerungsanzahl unter den Bundesstaaten, wieder nur ein Sitz zustehen. Man einigte sich 1870 auf eine Parlamentsgröße von 292 Sitzen, bei der Rhode Island zwei Vertreter erhielt.

3 Verhältniswahlrecht

Das Dilemma rund um Alabama wurde ähnlich „gelöst“. Die Parlamentsgröße wurde auf 325 Sitze erhöht. Bei dieser Größe stimmten die Methoden zur Berechnung von Hamilton, also eines Rundungsverfahrens mit dem von Webster, einem Divisorverfahren überein. Dadurch wurde das eigentliche Probleme um weitere zehn Jahre verschoben [31, S. 114-121].

Diese Lösung ging 1901 nicht mehr auf. Die Sitzanzahl für das Repräsentantenhaus sollte zwischen 350 und 400 liegen. Dabei kam es für den Bundesstaat Maine zu starken Schwankungen. Je nachdem wie die Hausgröße ist, variieren die Repräsentanten für Maine zwischen 3 und 4.

Tabelle 3.8: Mandatsverteilung von Maine mit unterschiedlicher Sitzanzahl

Anzahl der Sitze	350 – 382	383 – 385	386	387 – 388	389 – 390	391 – 400
Sitze von Maine	3	4	3	4	3	4

Doch nicht nur Maine war bei dieser Aufteilung vom Alabama Paradoxon betroffen, sondern auch der Bundesstaat Colorado. Colorado würde immer 3 Sitze erhalten, außer die Größe des Repräsentantenhauses würde auf 357 Abgeordnete fixiert, dann erhielte Colorado nur 2 Sitze. Der Vertreter des Sonderausschusses der 12. Volksversammlung Albert J. Hopkins schlug aufgrund politischer Differenzen genau die Zahl von 357, welche Maine und Colorado benachteiligt, vor [2, S. 38-42].

Verteilungsverfahren die nicht vom Alabama Paradoxon betroffen sind, nennt man hausmonoton. Es bedeutet, dass es zu jeder Mandatsverteilung für m auch eine Verteilung für $m + 1$ geben muss. Dabei erhält jede Partei mindestens so viele Sitze bei $m + 1$, wie bei m [16, S. 115].

3.3.2 Parteienzuwachsparadoxon

Wird auch als Neue Parteien Syndrom oder New States Paradoxon bezeichnet. Dazu finden sich in der Literatur zwei unterschiedliche Definitionen. Einerseits „Die Mandatsverteilung ändert sich bei sonst gleichbleibender Stimmenverteilung, wenn eine neue, leer ausgehende Partei hinzukommt.“ [16, S. 115], andererseits schreibt Pukelsheim [23, S. 16] dazu, dass ein „Überhangssitz“ für die neu hinzugetretene Partei geschaffen wird. Beide Varianten haben dennoch die gleiche Kernaussage. Obwohl sich die Stimmen für die ursprünglichen Parteien nicht verändern, können sich aber die Mandatszuteilungen verschieben.

Dieses Paradoxon kam 1907 in den USA zum Vorschein. In den USA wurde zu der Zeit nach wie vor die Hamilton Methode, also das Hare Verfahren angewandt. Als Oklahoma 1907 Mitgliedsstaat der USA wurde, bestand das Parlament aus 386 Sitzen. Die Bevölkerungsanzahl Oklahomas entsprach damals circa 1 Million Menschen, welches fünf Sitzen im Parlament entsprach, da mit der Wahlzahl 193 167 gerechnet wurde. Die fünf Sitze

wurden hinzugefügt und das Parlament hatte nun 391 Plätze. Bei der neuen Berechnung der Sitze geschah etwas Merkwürdiges. Zwar erhielt Oklahoma die fünf zusätzlichen Sitze, aber New York verlor einen Sitz, welchen Maine erhielt.

Tabelle 3.9: Anwendungsbeispiel des Parteienzuwachsparadoxon

	ohne Oklahoma			mit Oklahoma		
Staat	Einwohner	Quote	Sitze	Einwohner	Quote	Sitze
New York	7 264 183	37,606	38	7 264 183	37,589	37
Maine	694 466	3,595	3	694 466	3,594	4
Oklahoma	-	-	-	1 000 000	5,175	5
Gesamt	74 562 608		386	75 562 608		391

Die Restmandate werden mithilfe der Quoten und den daraus entstehenden Dezimalresten verteilt. Obwohl sich die Einwohnerzahlen von New York und Maine nicht verändert haben und Oklahoma, so wie gedacht, die fünf zusätzlichen Sitze erhielt, war die Verteilung der anderen Staaten davon betroffen. Durch die Erhöhung der Gesamtbevölkerungszahl vermindern sich die Nachkommareste aller Staaten. Da New York jedoch viel größer ist, als Maine, verlor es mehr in absoluten Zahlen, als kleinere Staaten [31, S. 122].

Solche zusätzlichen Sitze, welche beim Eintritt einer Partei oder im obigen Fall eines Bundesstaates, werden laut Pukelsheim [23, S. 16-17] als „Überhangssitz“ bezeichnet. Dazu sollte auch das obige Beispiel zählen, da extra für Oklahoma neue Sitze geschaffen wurden. Nun noch ein Beispiel, bei dem sich die Sitzanzahl nicht erhöht.

Tabelle 3.10: Verschiebung von Mandaten aufgrund des Parteienzuwachsparadoxon

Parteien		Quoten	Sitze	Quoten mit D	Sitze mit D
A	4 223	5,67	5 + 1	5,49	5
B	3 539	4,75	4 + 1	4,6	4 + 1
C	1 924	2,58	2	2,5	2 + 1
D	(319)	-	-	0,41	0

Durch die Erhöhung der Gesamtanzahl von 9 686 Stimmen zu 10 000 wurden die Dezimalreste der Quoten kleiner. Die größte Partei, Partei A hatte dadurch den größten Nachteil und verlor einen Sitz an Partei C, obwohl sich die Stimmen, welche die Parteien von den Wählern erhalten hatten, nicht veränderten.

3.3.3 Wählerzuwachsparadoxon

Wird auch als Stimmenzuwachs-Paradoxon oder „Population Paradox“ bezeichnet. Das Wählerzuwachsparadoxon besagt, dass eine Partei trotz Stimmenzuwachs ein Mandat, an eine Partei mit Stimmenverlust, verlieren kann. Dieses Phänomen wurde Anfang des 20. Jahrhunderts bei der Einteilung der Sitze des Kongresses der USA festgestellt. Im folgenden Beispiel wurde die Verteilung der Sitze von 1960 und 1961 betrachtet. In diesem

3 Verhältniswahlrecht

Zeitraum hatte die USA einen durchschnittlichen jährlichen Bevölkerungswachstum von 1,34%, in diesem Jahr lag der Anstieg bei 1,32%. Manche Bundesstaaten wuchsen in der Zeit stärker an und andere deutlich weniger.

Tabelle 3.11: Entwicklung der Bevölkerungszahlen und Sitze der USA von 1960 bis 1961

Bundesstaat	Einwohner		Wachstum	Quote		Sitze	
	1960	1961		1960	1961	1960	1961
California	15 717 204	16 108 493	2,49%	38,290	38,733	38	39
Illinois	10 081 158	10 186 391	1,04%	24,559	24,493	25	24
Pennsylvania	11 319 366	11 374 631	0,49%	27,576	27,350	28	27
North Dakota	632 446	631 615	-0,13%	1,541	1,519	1	2
Gesamt	178 559 219	180 912 144	1,32%	435	435	435	435

In der oben stehenden Tabelle kann man erkennen, dass North Dakota einen Sitz dazugewonnen hatte, obwohl die Bevölkerungszahl gesunken war. Illinois und Pennsylvania hatten trotz Einwohnerwachstum beide einen Sitz verloren. Im Jahr 1960 erlangte Pennsylvania den 28. Sitz aufgrund der Restverteilung nach dem Hamiltonverfahren. Pennsylvania hatte den größeren Nachkommarest im Gegensatz zu North Dakota. Bei der Betrachtung der Quoten von 1961 erkennt man, dass für alle Bundesstaaten, welche ein geringeres Wachstum als die durchschnittlichen 1,32% hatten, eine kleinere Quote errechnet wurde. North Dakotas Quote ist zwar um 0,022 gesunken, jene von Pennsylvania aber um 0,226. Für North Dakota bedeuten diese 0,022 eine Reduktion von 1,43% im Gegensatz zu 1960 und für Pennsylvania entsprechen 0,226 nur 0,8%. Prozentual gesehen ist also North Dakotas Anteil stärker gesunken, in totalen Zahlen der Nachkommarest schiebt es sich dennoch vor Pennsylvania. Bei den Rundungsverfahren wird nicht auf die Prozente Acht gegeben, sondern nur auf die Reste der Quoten. Hier erkennt man auch eindeutig, dass Rundungsverfahren kleinere Parteien bevorzugen [2, S. 67-70]. Aufgrund dieser Paradoxa wurden im Laufe des 20. Jahrhunderts Rundungsverfahren zugunsten von Divisorverfahren abgelöst, da die oben genannten Paradoxa dabei nicht auftreten können.

3.4 Divisorverfahren

Andere Bezeichnungen für die Divisorverfahren sind Höchstzahlverfahren oder Rangmaßzahlenverfahren. Der Unterschied dabei liegt an der Formulierung der Berechnung. Beim d'Hondt Verfahren wird näher auf die unterschiedlichen Formulierungen zur Berechnung eingegangen. Im Folgenden wird der Begriff „Divisorverfahren“ auch als allgemeine Bezeichnung verwendet. Diese Methoden zur Auswertung von Wahlstimmen wurden vom Jefferson Verfahren abgeleitet. Divisorverfahren sind nicht vom Alabama Paradoxon betroffen, weichen aber im Gegensatz zu den Rundungsverfahren stärker von den proportionalen Anteilen ab. Durch wiederholte Division der Stimmenanzahl, die eine Partei

3 Verhältniswahlrecht

erreicht hat, mithilfe von Divisorreihen, entstehen für jede Partei, immer kleiner werdende Zahlenreihen. Durch die höchsten Quotienten erfolgt dann die Zuteilung der Mandate. Diese Beschreibung entspricht dem Höchstzahlverfahren.

Äquivalent dazu sind Berechnungen, bei denen das Hauptaugenmerk am Divisor liegt. In den USA sollte früher der Quotient aus der Bevölkerungszahl der einzelnen Staaten und einer Verteilungszahl oder Wahlzahl als Divisor gebildet werden. Bei diesem Schritt liegt der einzige Unterschied zu den Quotenverfahren in der unterschiedlichen Bezeichnung. So entspricht der Divisor der Wahlzahl. Erst bei der Verteilung der „Restsitze“ kommt es zu Unterschieden [19, S. 31-32]. Nach Jefferson wird die Quote stets abgerundet und nach Adams im Gegenzug dazu stets aufgerundet. Considerant schlug vor, die Standardrundung durchzuführen. Der Divisor gibt die Stimmenanzahl an, die für einen Sitz notwendig sind, damit am Ende auf jeden Sitz ungefähr gleich viele Stimmen entfallen. Früher wurde der Verteilungszahl ein höherer Stellenwert zugewiesen als der Parlamentsgröße. Wenn jedoch bereits die Sitzzahl des Hauses festgelegt war, wurde nach einem passenden Divisor gesucht. Die Wichtigkeit des Divisors und die daraus resultierenden Unterschiede, zeigt folgendes Beispiel deutlich.

Tabelle 3.12: Divisorverfahren im Vergleich

	Abroundung Divisor 380		Standardrundung Divisor 400		Aufrundung Divisor 430	
Stimmen	Quotient	Sitze	Quotient	Sitze	Quotient	Sitze
8 000	21,05...	21	20	20	18,60...	19
1 440	3,78...	3	3,6	4	3,34...	4
560	1,47...	1	1,4	1	1,30...	2
10 000		25		25		25
	Jefferson		Considerant		Adams	

Zu den bekanntesten Divisorverfahren gehören das Verfahren nach d'Hondt, das Verfahren nach Adams, das Verfahren nach Sainte-Laguë, das Verfahren nach Dean und das Verfahren nach Hill-Huntington.

Der Divisor und die Rundung, können die Sitzverteilung stark variieren. Man kann die Quotienten bei einem beliebigen Rest p zwischen 0 und 1 (inklusive 0 und 1) folgendermaßen runden:

Die p -Rundung: Ein Rest der kleiner ist als p wird abgerundet, ein Rest der größer ist als p wird aufgerundet und bei p wird wahlweise auf- oder abgerundet. Ist die zu rundende Zahl bereits eine ganze Zahl, so bedeutet die Aufrundung bei $p = 0$ die nächstgrößere ganze Zahl, und die Abrundung bei $p = 1$ die nächstkleinere ganze Zahl. Bei der Methode nach Jefferson wird mit $p = 1$ und bei der Methode von Adams mit $p = 0$ gerechnet. Aufgrund der Rundung erhält somit nach dem Verfahren von Adams jede Partei zumindest einen Sitz. Wodurch hier ein klarer Vorteil für kleinere Parteien

besteht.

Die Sitzzahlen pro Partei werden errechnet, indem die Stimmenanzahl durch die Verteilungszahl als Divisor berechnet werden. Dabei wird der Quotient laut p-Rundung gerundet. Zuvor muss jedoch noch der Divisor berechnet werden. Dieser wird iterativ, also durch eine wiederholende Rechnung, bestimmt. Ziel dabei ist es, dass alle Sitze beim 1. Verfahrensgang verteilt werden. Ausgangspunkt für die Berechnung der Verteilungszahl ist eine Division aller Stimmen die abgegeben wurden, durch die Anzahl der Sitze, die gesamt zur Verfügung stehen [16, S. 121-123]. Wurde zum Beispiel im ersten Schritt nicht alle Sitze verteilt, die zur Verfügung standen, so waren die Ansprüche an die erforderlichen Stimmen pro Sitz zu hoch, deshalb musste der Divisor verkleinert werden [19, S. 17].

Lübbert meint zu den Divisorverfahren

„Generell sind Divisoren nicht eindeutig bestimmt; vielmehr ist jeweils ein ganzes Intervall (...) zur Berechnung geeignet, da über die Rundung kleine Unterschiede ausgeglichen werden. Für die Praxis kann aus diesem Intervall eine beliebige Zahl ausgewählt werden; oft wird dazu eine möglichst „runde“ gewählt“ [19, S.19]

Allgemein kann man Divisorverfahren als Höchstzahlverfahren folgendermaßen darstellen [16, S. 124]:

Tabelle 3.13: Divisorverfahren als Höchstzahlverfahren

	v_1	v_2	$\dots$	v_n
1	$\frac{v_1}{p}$	$\frac{v_2}{p}$	$\dots$	$\frac{v_n}{p}$
2	$\frac{v_1}{1+p}$	$\frac{v_2}{1+p}$	$\dots$	$\frac{v_n}{1+p}$
3	$\frac{v_1}{2+p}$	$\frac{v_2}{2+p}$	$\dots$	$\frac{v_n}{2+p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
m	$\frac{v_1}{m-1+p}$	$\frac{v_2}{m-1+p}$	$\dots$	$\frac{v_n}{m-1+p}$

Neben der Formulierung von Divisorverfahren als Höchstzahlverfahren und als Rangmaßzahlverfahren, kann man diese auch über paarweise Vergleiche betrachten. Unabhängig welches Divisorverfahren angewendet wird, können immer jeweils zwei Parteien miteinander verglichen werden. Dabei wird darauf geachtet, ob die Sitzverteilung zwischen beiden Parteien unter Betrachtung der jeweiligen Wählerstimmen, gerechtfertigt ist. Anhand dieser Formulierung kann man eine allgemeine Eigenschaft von Divisorverfahren ableiten. Ein relativer Stimmenzuwachs einer Partei, kann im Vergleich zu einer

anderen Partei nicht dazu führen, dass die erste Partei einen Sitz verliert. Divisorverfahren erfüllen also immer die Bevölkerungsmonotonie [19, S. 40-42].

Beim Vergleichen entscheidet das jeweilige Divisorverfahren über den Vergleichsmaßstab [19, S. 41].

- Beim Verfahren nach Sainte-Laguë/ Schepers wird immer dann ein Mandat verschoben, wenn der absolute Unterschied der Erfolgswert (= Sitze pro Stimmen) der Wählerstimmen beider Parteien kleiner wird.

$$\frac{m_i}{v_i} - \frac{m_j}{v_j} \text{ für } i, j \text{ zwei unterschiedliche Parteien}$$

- Beim Verfahren nach Dean wird immer dann ein Mandat verschoben, wenn der absolute Unterschied der Vertretungswert (= Stimmen pro Sitz) beider Parteien kleiner wird.

$$\frac{v_j}{m_j} - \frac{v_i}{m_i} \text{ für } i, j \text{ zwei unterschiedliche Parteien}$$

- Beim Verfahren nach Hill-Huntington werden statt den absoluten Unterschieden, die relativen Unterschiede der Erfolgs- oder Vertretungswerte minimiert.
- Bei den Verfahren nach Adams und d'Hondt werden kompliziertere Vergleichskriterien verwendet. Wodurch diese Formulierung für die Divisorverfahren vor allem in der Theorie vorkommt [2, S. 101-105].

Neben diesen vier Möglichkeiten der Darstellung und Formulierung von Divisorverfahren, gibt es auch noch die Auszählung mit Fehlerminimierung. André Sainte-Laguë befasste sich mit der Fehlerminimierung und erhielt mit dem Fehler

$$\sum v_j \left(\frac{q_j - m_j}{v_j} \right)^2$$

das Höchstzahlverfahren mit der Reihe 1, 3, 5, 7, ... und dem Proportionalitätsindex $p = \frac{1}{2}$, welches später genauer beschrieben wird [16, S. 128].

3.4.1 Das Verfahren nach d'Hondt

Eines der bekanntesten Divisorverfahren ist die Methode nach d'Hondt, benannt nach dem belgischen Jurist Victor d'Hondt, oder auch Verfahren der größten Quotienten [4, S. 80]. Im 1. Schritt werden die Höchstzahlen ermittelt, indem dividiert wird. Die Divisorreihe lautet dabei 1, 2, 3, 4, ..., im Gegensatz zu den noch folgenden Verfahren. Im 2. Schritt werden die Höchstzahlen, beginnend mit der größten, so lange markiert, bis alle Mandate verteilt wurden. Das folgende Beispiel verdeutlicht die Berechnung.

3 Verhältniswahlrecht

Tabelle 3.14: Verfahren nach d'Hondt als Höchstzahlverfahren

Divisorreihe	Partei A	Partei B	Partei C
: 1	4 160 (1)	3 380 (2)	2 460 (3)
: 2	2 080 (4)	1 690 (5)	1 230 (7)
: 3	1 386 (6)	1 126 (8)	820
: 4	1 040 (9)	845 (10)	615
: 5	832	676	492

Bei einer Wahl stehen drei Parteien zur Auswahl, bei der insgesamt 10 000 Stimmen abgegeben wurden. Davon haben 4 160 Personen für Partei A gestimmt, 3 380 für Partei B und auf Partei C entfallen 2 460 der gültigen Stimmen. Diese Zahlen werden durch die Divisorreihe dividiert und in der Tabelle sieht man in den Klammern, die Reihung von dem größten Ergebnis beginnend, bis 10, da 10 Mandate verteilt werden. So erhält Partei A das 1., 4., 6. und 9. Mandat, Partei B das 2., 5., 8., und 10. Mandat und Partei C das 3. und das 7. Mandat. Hieran kann man auch gut erkennen, dass die proportionalen Anteile nicht ganz stimmig sind. So erhält Partei A mit 41,6% der Stimmen 4 Sitze und Partei B ebenfalls 4 Sitze mit nur 33,8% der Stimmen. Dies liegt hier jedoch auch an der Mandatszahl von 10, denn würden 11 Mandate zu verteilen sein, erhielte Partei A noch einen 5. Sitz [22, S. 123-125]. Bei dieser Art der Berechnung spricht man von einem Höchstzahlverfahren, da man die Stimmen, welche jede Partei erreicht hat, zuerst durch 1, 2, 3, ... berechnet und dann bei den Ergebnissen, beginnend mit dem Größten, die Mandate zuteilt.

Wie oben bereits allgemein beschrieben, kann man auch zuerst den Divisor bestimmen, um die Mandate zu verteilen. Victor d'Hondt, hat sich mit der Berechnung des Divisors beschäftigt und dabei festgestellt, dass es zu einer Sitzverteilung kommt, wenn der Divisor zwischen

$$\frac{v}{m+n-1} \text{ und } \frac{v}{m+1}$$

liegt. Aufgrund seiner Bemühungen, seine Berechnungsmethode an die Öffentlichkeit zu bringen, wurde 1899, als in Belgien die Verhältniswahl eingeführt wurde, das Verfahren nach d'Hondt zur Sitzberechnung in den Wahlkreisen herangezogen [16, S. 125-126].

Bei Kopfermanns Formel für den Divisor, werden jedoch nicht immer alle Sitze verteilt. Betrachtet man das obige Beispiel mit 3 Parteien, einer Gesamtstimmanzahl von 10 000 und 10 zu verteilende Mandate, erhält man laut der Formel geeignete Divisoren zwischen $833,\bar{3}$ und $909,\overline{09}$. Bildet man nun eine Division mit den Stimmen pro Partei geteilt durch den errechneten Divisor, erhält man folgende Zahlen.

3 Verhältniswahlrecht

Tabelle 3.15: Anwendung von Kopfermanns Intervall zur Bestimmung eines Divisors

Formel	Partei A	Partei B	Partei C
$\frac{v}{m+n-1}$	4,992	4,056	2,952
$\frac{v}{m+1}$	4,576	3,718	2,706

Wendet man die erste Formel an, so werden von den 10 zu vergebenden Sitzen, 4 an Partei A, 4 an Partei B und 2 an Partei C zugewiesen. Bei Anwendung der zweiten Formel werden allerdings nicht alle 10 Mandate vergeben, da Partei A 4 Sitze, Partei B 3 Sitze und Partei C 2 Sitze erhält.

Der deutsche Mathematiker Pukelsheim [23, S. 5] gibt als beste Divisorwahl

$$d = \frac{v}{m + \frac{n}{2}}$$

an. Wobei v für die Gesamtstimmenanzahl, m für die zu vergebenden Mandate und n für die Anzahl der Parteien steht. Setzt man in diese Formel die Zahlen von Nohlens Beispiel ein, erhält man als besten Divisor:

$$\frac{10\,000}{10 + \frac{3}{2}} \approx 869,565$$

Beim obigen Beispiel ergibt die Division für Partei A 4,78 für Partei B 3,89 und für Partei C 2,83. In diesem Fall wären nicht sofort alle Mandate verteilt, man müsste den Divisor noch anpassen.

Folgendes Beispiel [23, S. 7] zeigt, dass man mit Pukelsheims Formel durchaus gleich zu einer Verteilung aller Sitze kommen kann. Damit man bei der Wahl zum 5. Deutschen Bundestag von 1965 genau 496 Mandate verteilt, ergibt sich als „bester Divisor“:

$$d = \frac{31\,433\,933}{496 + \frac{4}{2}} = 63\,120$$

Mit diesem Divisor ergibt sich folgende Verteilung:

Tabelle 3.16: Anwendung von Pukelsheims Formel zum „besten Divisor“

Parteien	Stimmen	d = 63 120	Sitze
SPD	12 813 186	202,997	202
CDU	12 387 562	196,254	196
CSU	3 136 506	49,691	49
FDP	3 096 739	49,061	49
			Σ 496

3 Verhältniswahlrecht

In der Praxis wird bei Divisorverfahren zuerst von der Wahlzahl bzw. dem Divisor ausgegangen. Diese wird soweit angepasst, damit es zu einer Verteilung aller Sitze kommt, wenn man die Divisionen mit d durchführt. Diese Divisoren sind nicht eindeutig bestimmt, da sie in einem Intervall liegen. Es kann eine beliebige Zahl aus dem Intervall ausgewählt werden, im Regelfall wird dafür eine natürliche Zahl verwendet [19, S. 19].

Betrachtet man das d'Hondt Verfahren als Rangmaßzahlenverfahren [51], erkennt man die Ähnlichkeit zum Höchstzahlverfahren. Beim Rangmaßzahlverfahren wird die umgekehrte Division, also der Kehrwert, verwendet. Dabei werden die Elemente der Zahlenfolge, beim d'Hondt Verfahren $1, 2, 3, \dots$ durch die Wählerstimmen der einzelnen Parteien dividiert. Die Ergebnisse werden im Unterschied zu den Höchstzahlen nach aufsteigender Größe sortiert und entsprechend die Mandate zugeteilt [19, S. 40].

Verwendet man nun für Nohlens Beispiel das Rangmaßzahlverfahren mit der Formel

$$R_i = \frac{v \cdot i}{v_i} \text{ mit } i = 1, 2, 3, \dots$$

erhält man folgende Tabelle:

Tabelle 3.17: Verfahren nach d'Hondt als Rangmaßzahlverfahren

Zahlenfolge	Partei A	Partei B	Partei C
1	2,40 (1)	2,96 (2)	4,07 (3)
2	4,81 (4)	5,92 (5)	8,13 (7)
3	7,21 (6)	8,88 (8)	12,20
4	9,62 (9)	11,83 (10)	16,26
5	12,02	14,79	20,33

Wie bereits bei der Anwendung der Höchstzahlen erhalten Partei A und Partei B jeweils 4 Stimmen und Partei C erhält 2 Stimmen. Würde es ein 11. Mandat zu verteilen geben, ginge dies an Partei A, wie man in der letzten Zeile erkennen kann.

3.4.2 Hagenbach-Bischoff Verfahren

Das Hagenbach-Bischoff Verfahren wird von manchen Autoren als Quotenverfahren und von manchen als Divisorverfahren angesehen. Man findet auch die Bezeichnung „Quasi-Quotenverfahren“ dafür [41]. Der Schweizer Eduard Hagenbach-Bischoff hat, wie d'Hondt, ein Verfahren mit dem Proportionalitätsindex 1 vorgeschlagen. Bei der Variante von Hagenbach-Bischoff werden mit folgender Wahlzahl

$$w := \left\lfloor \frac{v}{m+1} \right\rfloor + 1$$

die Quoten

$$q_1 := \frac{v_1}{w} = \mu_1 + r_1, \dots, q_n := \frac{v_n}{w} = \mu_n + r_n$$

3 Verhältniswahlrecht

gebildet. Die ganzzahligen Werte $\mu_1, \dots, \mu_n$, werden als Vorabmandate an die Parteien vergeben. Die verbleibenden Restmandate werden wie folgt verteilt:

Tabelle 3.18: Verteilung der Restmandate beim Hagenbach-Bischoff Verfahren

	$\mathbf{v_1}$	$\mathbf{v_2}$	$\dots$	$\mathbf{v_n}$
1	$\frac{v_1}{\mu_1 + 1}$	$\frac{v_2}{\mu_2 + 1}$	$\dots$	$\frac{v_n}{\mu_n + 1}$
2	$\frac{v_1}{\mu_1 + 2}$	$\frac{v_2}{\mu_2 + 2}$	$\dots$	$\frac{v_n}{\mu_n + 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
r	$\frac{v_1}{\mu_1 + r}$	$\frac{v_2}{\mu_2 + r}$	$\dots$	$\frac{v_n}{\mu_n + r}$

Diese Rechnung ist meist einfacher als die von d'Hondt, da es hier zu weniger Restmandaten kommt [16, S. 126-127]. Kopfermann [16, S. 127] gibt ebenso wie im Artikel von Carnal und Riedwyl [4, S. 80-81] zusätzlich die Quote

$$q_1 := \frac{v_1}{v}(m+1), \dots, q_n := \frac{v_n}{v}(m+1)$$

an, da hier manchmal noch weniger Restmandate zu verteilen sind.

Mit diesen Formeln ergibt sich für drei Parteien, A, B und C, welche insgesamt 9 000 000 Stimmen erhalten haben und 9 Mandate gerecht aufgeteilt werden sollen, folgende Berechnung. Im ersten Schritt werden 8 Sitze bereits verteilt. Im zweiten Schritt werden die Restmandate berechnet, indem die Stimmenanzahl jeder Partei, durch die um eins vergrößerte Anzahl der bereits vergebenen Mandate dividiert wird. Für Partei A ergibt sich aus $4,3 : (4+1) = 0,86$, für Partei B ergibt sich $3,3 : (3+1) = 0,825$ und für Partei C $1,4 : (1+1) = 0,7$. Das größte Ergebnis, also der höchste Quotient bietet Partei A an, weshalb der Restplatz an diese Partei geht. Sollte es weitere Restsitze geben, müsste diese Berechnung zur Verteilung laut obiger Tabelle für jeden Sitz neu durchgeführt werden [4, S. 80].

Tabelle 3.19: Sitzverteilung nach Hagenbach-Bischoff

Partei	Stimmen (in Mio.)	Quote	Vorabmandate	Mandate
A	4,3	$4, \dot{7}$	4	5
B	3,3	$3, \dot{6}$	3	3
C	1,4	$1, \dot{5}$	1	1

3.4.3 Sainte-Laguë Verfahren

Das Sainte-Laguë/ Schepers Verfahren, wie es in einigen deutschen Literaturen bezeichnet wird, wird auch Webster Verfahren, nach dem Senator Daniel Webster, welcher oben

3 Verhältniswahlrecht

bereits erwähnt wurde, genannt.⁴ Websters Berechnungsmethode aus dem 19. Jahrhundert wurde vom Mathematiker André Sainte-Laguë weiterentwickelt, und vom Physiker Hans Schepers modifiziert. Schepers entwickelte ein Divisorverfahren in der Formulierung der Rangmaßzahlen. Sein Vorschlag führte zum gleichen Ergebnis, wie das Höchstzahlverfahren nach dem Franzosen Sainte-Laguë [51].

Das Sainte-Laguë Verfahren ist ähnlich dem d'Hondt Verfahren. Es handelt sich um ein Divisorverfahren, wobei im Gegensatz zum d'Hondt Verfahren die Rundung anders ist. Es wird die Standardrundung angewandt, welche auch in anderen Bereichen des alltäglichen Lebens üblich ist. Aufgrund dieser Rundungsvorschrift kann schneller ein passender Divisor gefunden werden, da meist schon im ersten Schritt, wenn die Wahlzahl als Divisor verwendet wird, mehr Mandate verteilt werden als bei d'Hondt. In folgendem Beispiel, der Bundestagswahl 2005 in Deutschland, sollen auf die sechs antretenden Parteien 598 Mandate verteilt werden.

Tabelle 3.20: Verfahren nach Sainte-Laguë bei der deutschen Bundestagswahl 2005

Partei	Stimmen	Quote	Sitze
Divisor		75 970, 5	
SPD	16 194 665	213, 17	213
CDU	13 136 740	172, 92	173
FDP	4 648 144	61, 18	61
Linke	4 118 194	54, 21	54
Grüne	3 838 326	50, 52	51
CSU	3 494 309	46	46
	45 430 378		598

In diesem Beispiel konnten alle Sitze direkt mit der Wahlzahl als Divisor verteilt werden, da es nach dem Sainte-Laguë, also mittels Standardrundung berechnet wurde. Wenn man mit dem gleichen Divisor, also 75 970, 5 das Verfahren nach d'Hondt anwendet, würden um 3 Sitze weniger verteilt werden und man müsste den Divisor anpassen. Nach d'Hondt würden die CDU, die Grünen und die CSU um einen Sitz weniger erhalten. Bei der CSU ist das aus der Tabelle nicht eindeutig erkennbar, die Quote ist auf zwei Nachkommastellen gerundet. Wäre sie auf vier Nachkommastellen gerundet, erhielte man 45,9956. Somit würde d'Hondt abrunden auf 45 Sitze, Sainte-Laguë aber aufrunden auf 46 Sitze [19, S. 18-19].

Im Folgenden wird das Beispiel vom d'Hondt Verfahren als Höchstzahlverfahren aufgegriffen und mithilfe der Sainte-Laguë Methode als Divisorverfahren, als Höchstzahlverfahren und als Rangmaßzahlverfahren dargestellt [43]. Hier kann man gut erkennen, wie sich die Sitzverteilung verändern kann, obwohl man ein ähnliches Verfahren anwendet. Auf drei Parteien, A, B und C werden insgesamt 10 000 Stimmen aufgeteilt. Partei A erhält 4 160 Stimmen, Partei B erhält 3 380 Stimmen und auf Partei C entfallen 2 460

⁴Nachzulesen unter Historische Entwicklung der Berechnungsverfahren.

3 Verhältniswahlrecht

Stimmen. Auf diese drei Parteien sollen wieder 10 Mandate verteilt werden. Bei der Divisormethode mit Standardrundung kommt es mit der Wahlzahl als Divisor nicht gleich zu einer Verteilung aller Mandate, das heißt, der Divisor muss verkleinert werden. Bereits mit einem Divisor $d = 980$ kommt es zu einer Zuweisung aller Sitze.

Tabelle 3.21: Anpassung des Divisors

Partei	Quote	Sitze	Quote	Sitze
	$d = 1\,000$		$d = 980$	
A	4,16	4	4,24	4
B	3,38	3	3,45	3
C	2,46	2	2,51	3
		9		10

Betrachtet man dieses Beispiel als Höchstzahlverfahren, finden sich dazu in der Literatur mehrere Formeln, die alle zur gleichen Verteilung führen. Folgende zwei Formeln [51] findet man in den meisten Literaturen:

$$\frac{v_i}{2i-1} \text{ mit } i = 1, 2, 3, \dots \text{ oder } \frac{v_i}{i} \text{ mit } i = 1, 3, 5, \dots$$

Man verwendet zur Berechnung der Höchstzahlen entweder die Vereinfachung der linken Formel

$$\frac{v_i}{i-0,5} \text{ mit } i = 1, 2, 3, \dots$$

oder die allgemeine Tabelle⁵ von Kopfermann [16, S. 124], welche oben beschrieben wurde mit $p = \frac{1}{2}$ kommt man ebenfalls zum gleichen Ergebnis.

Bei Verwendung der ersten Formel ergeben sich folgende Berechnungen:

Tabelle 3.22: Sainte-Laguë als Höchstzahlverfahren

Partei	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5
A	4 160 (1)	1 387 (4)	832 (6)	594 (9)	462
B	3 380 (2)	1 127 (5)	676 (8)	483	376
C	2 460 (3)	820 (7)	492 (10)	351	273

Betrachtet man dazu die anderen Formeln, so fällt auf, dass, wenn man mit dem Faktor 2 multipliziert auf die Zahlen aus Tabelle 3.22 kommt.

Bei der Anwendung des Verfahrens nach Schepers [51] werden die Rangmaßzahlen

$$R_i = \frac{v}{v_i}(i-0,5) \text{ mit } i = 1, 2, 3, \dots$$

⁵Tabelle 3.13.

verwendet. Bei den Rangmaßzahlen [42], werden im Gegensatz zu den Höchstzahlen von der kleinsten Zahl beginnend die Sitze verteilt.

Tabelle 3.23: Sainte-Laguë als Rangmaßzahlverfahren

Partei	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
A	1, 20 (1)	3, 61 (4)	6, 01 (6)	8, 41 (9)	10, 82
B	1, 48 (2)	4, 44 (5)	7, 40 (8)	10, 36	13, 31
C	2, 03 (3)	6, 10 (7)	10, 16 (10)	14, 23	18, 29

Bei dieser Anwendung des Sainte-Laguë Verfahrens kommt es genau wie bei dem Höchstzahlverfahren und bei der Anwendung des Divisorverfahrens mittels Standardrundung zu der gleichen Verteilung der Sitze. Partei A erhält 4 Sitze und Partei B und C erhalten jeweils 3 Sitze. Beim d'Hondt Verfahren kam es zu der Aufteilung 4, 4, 2, also 4 Sitze an Partei A, 4 Sitze an Partei B und nur 2 Sitze an Partei C. Obwohl sich beide Verfahren sehr ähnlich sind, können die Unterschiede durchaus zu anderen Sitzverteilungen führen.

3.4.4 Weitere Divisorverfahren

Im Folgenden werden die Divisorverfahren nach Adams, Hill-Huntington und Dean kurz erklärt. Sie zählen zu den „traditionellen“ Berechnungsverfahren, werden allerdings in der Praxis nicht so häufig angewandt wie d'Hondt oder Sainte-Laguë.

Das Adams Verfahren [37] ist dem Verfahren nach d'Hondt am ähnlichsten. Zuerst wird ein passender Divisor gesucht und anschließend wird gerundet. Bei Adams wird immer aufgerundet, deswegen muss der Divisor, ausgehend von der Wahlzahl, häufig vergrößert werden, damit es zu einer Verteilung aller Sitze kommt. Würde man, das Adams Verfahren als Höchstzahlverfahren betrachten, kann man die Zahlenfolge 0, 1, 2, 3, ... verwenden. Eine Division durch 0 ist allgemein nicht definiert. Beim Höchstzahlverfahren bedeutet das, dass die erste Höchstzahl unendlich ist und dadurch alle Parteien, die mindestens eine Stimme für sich errungen haben, auch ein Mandat zugeteilt bekommen [19, S. 6, 33, 40].

Das Hill-Huntington Verfahren hat sich im deutschsprachigen Raum noch nicht verbreitet. In den USA erfreut es sich jedoch großer Beliebtheit, so wird es seit 1941 zur Verteilung der Sitze im Repräsentantenhaus an die Bundesstaaten verwendet. Im ersten Schritt wird wieder nach einem passenden Divisor gesucht und anschließend mithilfe einer Rundungsregel die Sitze verteilt. Das Hill-Huntington Verfahren verwendet das geometrische Mittel zur Berechnung der Auf- und Abrundungsgrenze. Nach der Berechnung der Quote, wird von der auf- und abgerundeten Zahl das geometrische Mittel gebildet, indem man aus dem Produkt beider Zahlen die Wurzel bildet. Dieses Ergebnis dient als Rundungsgrenze. Liegt die Quote darunter, muss abgerundet werden, liegt die Quote darüber, muss aufgerundet werden [19, S. 6, 21, 22, 33, 40].

3 Verhältniswahlrecht

Verwendet man das Hill-Huntington Verfahren als Höchstzahlverfahren, wird folgende Zahlenfolge [40] zum Dividieren benützt

$$\sqrt{0 \cdot 1} = 0, \sqrt{1 \cdot 2} = 1,414, \sqrt{2 \cdot 3} = 2,449, \sqrt{3 \cdot 4} = 3,464, \dots, \sqrt{(n-1) \cdot n}.$$

Da sich das Hill-Huntington Verfahren in den USA bereits durchgesetzt hat und man, wenn man sich die Methoden der letzten Jahrhunderte betrachtet erkennen kann, dass die deutschsprachigen Gebiete mit einem Abstand von einigen Jahrzehnten die gleichen Berechnungsmethoden, nur etwas später, verwenden [19], wird im Folgenden ein Anwendungsbeispiel mittels Divisormethode mit geometrischen Mittel gezeigt. Bei einer Wahl sollen 16 Sitze auf die vier antretenden Parteien mit insgesamt 598 Stimmen verteilt werden. Dabei wird im ersten Schritt nach dem passenden Divisor gesucht. Die Berechnung der Wahlzahl, also Gesamtstimmen geteilt durch Mandate ergibt 37,375. Bei der Berechnung mit diesem Divisor werden zu viele Mandate verteilt, deswegen muss der Divisor vergrößert werden. Hier findet man keinen ganzzahligen Divisor, bei dem die konkrete Sitzzahl verteilt wird. Durch Anpassen, werden mit $d = 38,4$ genau 16 Sitze verteilt.

Tabelle 3.24: Fiktives Anwendungsbeispiel des Hill-Huntington Verfahrens

Partei	Stimmen	Quote mit $d = 38,4$	Mandate
A	249	6,484	7
B	55	1,432	2
C	247	6,432	6
D	47	1,224	1

Hier werden als Rundungsgrenzen das geometrische Mittel von $\sqrt{1 \cdot 2} = 1,414$ und $\sqrt{6 \cdot 7} = 6,481$ verwendet [40]. Dieses Verfahren und das Dean Verfahren, welches als nächstes erklärt wird, sind aufwendiger, da die Rundungsgrenzen immer separat berechnet werden müssen. Im Gegensatz dazu sind beim d'Hondt Verfahren und beim Adams Verfahren die Rundungsregeln einfacher.

Beim Verfahren nach Dean [39] wird wie bisher zuerst die Quote mit einem geeigneten Divisor berechnet und dann mithilfe des harmonischen Mittels die Rundung durchgeführt. Das harmonische Mittel wird aus dem Kehrwert des arithmetischen Mittels gebildet. Als Formel geschrieben, findet man die Rundungsregel für das Dean Verfahren mithilfe von

$$\frac{2}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}}$$

und dadurch entsteht auch die Zahlenfolge 1,33; 2,40; 3,43; 4,44; ... Die harmonische Rundung wird in der Praxis selten genutzt, vor allem wegen der komplexeren Berechnung.

Das Verfahren mit Standardrundung, das Verfahren mit geometrischer Rundung und das Verfahren mit harmonischer Rundung führen in der Regel zum gleichen Ergebnis. Der

Grund dafür sind die Rundungsgrenzen, welche sich bei Hill-Huntington und Dean immer mehr der Standardrundung, also bei 0,5 von Sainte-Laguë annähern [19, S. 6, 33, 50].

3.5 Vor- und Nachteile von Quoten- und Divisorverfahren

Im Laufe der Geschichte wurde in vielen Ländern der Welt nach „dem idealen Berechnungsverfahren“ gesucht, nachdem die Stimmen am gerechtesten verteilt sind. Im Idealfall, sollten alle Eigenschaften (Seite 22) und Qualitätskriterien (Seite 23), die oben beschrieben wurden, erfüllt werden. Es gibt aber kein Verfahren, bei dem alle Punkte zutreffen. Im Folgenden werden die Berechnungsverfahren auf ihre Eigenschaften überprüft und miteinander verglichen. Im Vergleich zwischen Rundungsverfahren und Divisorverfahren werden vorwiegend das Hare Verfahren und das d'Hondt Verfahren angewendet.

Divisorverfahren haben einige Vorteile gegenüber Quotenverfahren. Bei Divisorverfahren können das Alabama Paradoxon, das Parteienzuwachsparadoxon und das Wählerzuwachsparadoxon nicht auftreten, da sie bevölkerungsmonoton, stimmenmonoton und hausmonoton sind. Im folgenden Beispiel sieht man, was passieren kann, wenn ein Berechnungsverfahren die Stimmenmonotonie nicht erfüllt. Es werden 10 Mandate mithilfe des Verfahrens von Hare verteilt. Von den drei Parteien verändern sich die Stimmen so, dass Partei B weniger und Partei C mehr Stimmen erhält. Die Gesamtzahl der abgegebenen Stimmen steigt um 1000. Bei den Rundungsverfahren können hierbei Parteien mit verkleinerter Stimmenzahl, plötzlich mehr Sitze erhalten [4, S. 81-82]. Weitere Beispiele zur Hausmonotonie und Bevölkerungsmonotonie findet man beim Alabama Paradoxon (Seite 32) und beim Parteienzuwachsparadoxon (Seite 34).

Tabelle 3.25: Anwendungsbeispiel zur Stimmen-Monotonie mit dem Hare Verfahren

Partei	Stimmen	Quote	Sitze	veränderte Stimmen	Quote	Sitze
A	26 000	6,5	6 + 1	26 000	6,341	6
B	5 800	1,45	1	5 600	1,365	1 + 1
C	8 200	2,05	2	9 400	2,292	2
	40 000		10	41 000		10

Dieser Vorteil von den Divisorverfahren impliziert aber gleichzeitig einen Nachteil. Laut „Unmöglichkeitssatz von Balinski/Young“ können Berechnungsverfahren, die das Wählerzuwachsparadoxon vermeiden, die Quotenbedingung nicht erfüllen. Beim d'Hondt Verfahren kann es zu einer Verletzung der Maximalbedingung kommen, beim Verfahren nach Adams kann nur die Minimalbedingung verletzt werden. Alle anderen Divisorverfahren können die Quotenbedingung in beide Richtungen verletzen, aber nicht innerhalb einer Ergebniszuteilung. Das Verfahren von Sainte-Laguë kommt der Quotenbedingung nahe und es kommt nicht zu so starken Abweichungen, wie bei den anderen Divisorverfahren [2, S. 129-134].

Tabelle 3.26: Verletzung der Quotenbedingung bei Sainte-Laguë

Partei	Stimmen	Quote		Verteilung
		$d = w = 45\,527$	$d = 46\,850$	
A	70 653	1, 552	1, 508	2
B	117 404	2, 579	2, 506	3
C	210 923	4, 633	4, 502	5
D	1 194 456	26, 236	25, 495	25
Summe	1 593 436		35	

Das Beispiel [2, S. 80] von Tabelle 3.26 zeigt allerdings, dass es trotzdem vorkommen kann, dass beim Sainte-Laguë Verfahren, die Quotenbedingung nicht erfüllt wird. Auf vier Parteien sollen 35 Mandate verteilt werden. Verwendet man als Divisor die Wahlzahl 45 527, so wird um ein Mandat zu viel verteilt, weswegen der Divisor angepasst werden muss. Für Partei D wird die Quotenbedingung nicht mehr erfüllt, da Partei D sonst 26 Mandate erhalten müsste, zulasten einer der kleineren Parteien.

Wenn die Quotenbedingung erfüllt wird, wie bei allen Rundungsverfahren, besteht die Möglichkeit, neben des Eintretens des Wählerzuwachsparadoxons, dass das Parteienzuwachsparadoxon auftritt. Also muss ein Staat, bei der Auswahl nach einem geeigneten Berechnungsverfahren immer zwischen Erfüllung der Quote oder Vermeidung der Paradoxa entscheiden. Balinski und Young befürworten die Divisorverfahren „So if compromise there must be, it seems best to stay with methods that avoid the paradoxes - in other words, with divisor methods“ [2, S. 81].

Ein weiteres Beispiel [28, S. 114] zeigt, wie schwerwiegend die Verletzung der Quote bei Divisorverfahren sein kann. Bei einer Wahl sollen fünf Mandate auf die 25 antretenden Parteien verteilt werden. Von den insgesamt 10 000 Stimmen, entfallen 2 000 Stimmen auf Partei A, Partei B erhält 390 Stimmen, Partei C erhält 380 Stimmen, Partei D erhält 370 Stimmen, Partei E erhält 360 Stimmen und die Parteien F - Y erhalten je 325 Stimmen. Berechnet man sich die Quote für Partei A, ergibt sich

$$q = \frac{2\,000 \cdot 5}{10\,000} = 1,$$

dementsprechend erlangt nach einer Verteilung mit dem Hare Verfahren Partei A einen Sitz und auf die Parteien B - E entfallen ebenfalls je ein Sitz, aufgrund der höchsten Nachkommaresten. Wendet man nun auf dieses Beispiel das d'Hondt Verfahren an, muss der Divisor verändert werden, da mit der Wahlzahl

$$w = \frac{10\,000}{5} = 2\,000$$

nicht alle Mandate verteilt werden können. Damit es zu einer Verteilung aller Sitze kommt, wird der Divisor auf 395 angepasst. Bei dieser Berechnung erhält Partei A alle fünf Mandate für sich und die übrigen Parteien gehen leer aus. Neben dem Nachteil, der

Verletzung der Quote bei Divisorverfahren, zeigt dieses Beispiel außerdem einen weiteren Nachteil des Verfahrens nach d'Hondt. Dabei werden größere Parteien gegenüber kleineren Parteien bevorzugt [2, S. 79].

Bei den Berechnungsverfahren ist allgemein eine Benachteiligung kleinerer Parteien zu erkennen. Treten nur zwei Parteien an, werden nicht nur bei Divisorverfahren, sondern auch bei Rundungsverfahren größere Parteien bevorzugt. Die Ausnahme bildet das Adams Verfahren, da aufgrund der Rundungsregel, wonach jede Partei, die mindestens eine Stimme erreicht hat, auch einen Sitz erhält⁶, eher kleinere Parteien bevorzugt werden. Das Verfahren nach Hare bevorzugt zwar auch eher größere Parteien, jedoch nicht so stark wie das d'Hondt Verfahren. Das Verfahren nach Sainte-Laguë bietet hier wieder einen Vorteil. Es gilt als Parteigrößen neutral, bevorzugt also weder große noch kleine Parteien [16, S. 121-133].

Aufgrund der Verletzung der Quotenbedingung bei Divisorverfahren, sind diese auch anfälliger dafür, die Unabhängigkeitsbedingung stärker zu verletzen. Da die Unabhängigkeitsbedingung unerfüllbar ist, müssen Schwankungen um mindestens ein Mandat akzeptiert werden. Bei den Quotenverfahren ist eine größere Schwankung nicht möglich, aufgrund der Quotenbedingung. Kopfermann beschreibt dazu das **Abhängigkeits-Paradoxon**, welches besagt „Je nach Verteilung der Stimmen auf die anderen Parteien schwankt bei gleicher Gesamtstimmen- und Gesamtmandatszahl die Zahl der Mandate um mehr als eins“ [16, S. 134].

Folgendes Beispiel [16, S. 134] veranschaulicht das Paradoxon. Es sollen 15 Mandate auf die antretenden fünf Parteien aufgeteilt werden. Bei der ursprünglichen Stimmenverteilung erhielt Partei A 430 Stimmen, 185 Wähler befürworteten Partei B, für Partei C stimmten 135 Personen und Partei D und E erhielten je 125 Stimmen. Betrachtet man die Berechnung mit dem d'Hondt Verfahren muss der Divisor angepasst werden, damit alle Mandate verteilt werden. Bei der ersten Verteilung der Mandate wurde $d = 61,5$ gewählt und bei der zweiten Verteilung mit den veränderten Stimmen wurde mit $d = 53,5$ gerechnet. Durch die Veränderung der Stimmenanteile der Parteien B-E, verschieben sich zwei Mandate von Partei B und E, welche einen Stimmenverlust haben, an Partei A, obwohl dessen Stimmen gleichgeblieben sind.

Tabelle 3.27: Abhängigkeits-Paradoxon beim Verfahren nach d'Hondt

Partei	Stimmen	Mandate	veränderte Stimmen	Mandate
A	430	6	430	8
B	185	3	160	2
C	135	2	155	2
D	125	2	150	2
E	125	2	105	1
Summe	1 000	15	1 000	15

⁶Ohne Beachtung einer Sperrklausel.

3 Verhältniswahlrecht

Zu einem weiteren Vorteil der Divisorverfahren als Höchstzahlverfahren zählt, dass eine Berechnung nicht von Grund auf neu gemacht werden muss, wenn sich die Anzahl der Mandate erhöht. Bei den Quotenverfahren spielt anfangs, zur Berechnung der Wahlzahl die Anzahl der Mandate eine Rolle, weshalb man hier die Wahlzahl und darauf basierend die Quote verändern müsste.

Die Restemethode erfüllt im Gegensatz zu der Divisormethode die Mehrheitsbedingung nicht immer. In folgender Tabelle werden die Methode nach Hare und die Methode nach d'Hondt bezüglich der Mehrheitsbedingung verglichen. Es sollen fünf Mandate auf drei Parteien aufgeteilt werden. Bei der Hare Methode erhält Partei A, obwohl sie die Stimmenmehrheit hat, nicht die Mehrheit der Mandate. Bei Divisorverfahren wurde ausgehend von der Wahlzahl der Divisor verkleinert, da sonst nur drei Mandate verteilt werden würden. Wenn $d = 16$ verwendet wird, werden alle fünf Mandate verteilt. Beim d'Hondt Verfahren wird die Mehrheitsbedingung erfüllt, da Partei A die Stimmenmehrheit und auch die Mandatsmehrheit, mit drei von fünf Sitzen für sich erhält [4, S. 80-82].

Tabelle 3.28: Vergleich bezüglich Mehrheitsbedingung

Partei	Stimmen	Quote	Sitze	Quote	Sitze
		Hare		d'Hondt	
A	52	2,6	2	3,25	3
B	33	1,65	1 + 1	2,0625	2
C	15	0,75	0 + 1	0,9375	0
	100		5		5

Ein weiterer Nachteil der Quotenverfahren besteht darin, dass zwar im ersten Schritt mit den genauen proportionalen Anteilen gerechnet wird, bei der Verteilung der Restmandate kann es jedoch zu Abweichungen der Proportionalität kommen. Besonders bei kleineren Anteilen kann man starke Abweichungen zur Proportionalität erkennen.

Zusätzlich teilen sich die Quotenverfahren und die Divisorverfahren den negativen Aspekt der Mehrdeutigkeit. Beim Hare Verfahren kann es zu einer Mehrdeutigkeit kommen, wenn es identische Dezimalreste gibt. Beim d'Hondt Verfahren als Höchstzahlverfahren oder Rangmaßzahlverfahren kann es zur Mehrdeutigkeit kommen, wenn mehrmals die gleiche Höchstzahl auftritt. In folgendem Beispiel sollen 47 Mandate auf drei Parteien aufgeteilt werden. Partei A hat 203 Stimmen, Partei B 119 Stimmen und Partei C 34 Stimmen für sich erreicht.

3 Verhältniswahlrecht

Tabelle 3.29: Mehrdeutigkeit bei d'Hondt als Höchstzahlverfahren

	A	m	B	m	C	m
Stimmen	203	(1)	119	(2)	34	(9)
: 2	101,5	(3)	59,5	(5)	17	(19)
: 3	67,667	(4)	39,667	(8)	11,333	
: 4	50,75	(6)	29,75	(11)	8,5	
: 5	40,6	(7)	23,8	(14)	6,8	
: 6	33,833	(10)	19,833	(17)	5,6667	
: 7	29	(12)	17	(19)	4,857	
: 8	25,375	(13)	14,875		4,25	

Hier tritt die gleiche Höchstzahl, die 17, bei Partei B und Partei C auf. Beim Verteilen der Mandate ist es nicht eindeutig, welche Partei das 19. Mandat erhält. In diesem Fall ist es nicht relevant, da es sich nicht um das letzte Mandat handelt, das zu verteilen ist. In so einem Fall würde der letzte Sitz mittels Los verteilt. Mehrdeutigkeiten können auch beim Verfahren nach Sainte-Laguë vorkommen, allerdings wenn man sich viele unterschiedliche Berechnungsaufgaben ansieht, erkennt man, dass es bei dieser Methode seltener zur Mehrdeutigkeit kommt [51].

Zum Abschluss der Vor- und Nachteile wird hier noch die Listenverbindung angesprochen. Bei der Methode nach Hare ist es nachteilig, wenn sich zwei Parteien verbinden und als eine einzige Partei antreten. Bei Divisorverfahren sind Listenverbindungen im Gegensatz dazu sinnvoll und empfehlenswert. So begünstigt das Rundungsverfahren Parteisplittungen, wohingegen die Bildung von Koalitionen bei der Berechnung durch Divisorverfahren von Vorteil ist. Das folgende Beispiel zeigt, die Schwäche der Listenverbindung von zwei Parteien beim Hare Verfahren. Es sollen fünf Mandate auf drei Parteien aufgeteilt werden.

Tabelle 3.30: Listenverbindung beim Hare Verfahren

Partei	Stimmen	Quote	Mandate	Stimmen	Quote	Mandate
A	700	3,5176	3	700	3,5176	3 + 1
B	150	0,7538	0 + 1	295	1,4824	1
C	145	0,7286	0 + 1			

Durch die Listenverbindung würden die Parteien B und C ein Mandat verlieren, da sie allein betrachtet größere Nachkommaresten hatten, als zusammen und durch die Rundungsregel des Hare Verfahrens beide einen Sitz bekommen hätten [4, S. 81-82].

3.6 Anwendungsbeispiele der Quoten- und Divisorverfahren

Im folgenden Abschnitt werden reale Anwendungsbeispiele von Wahlberechnungen gezeigt. Dabei werden zuerst Vergleiche gezogen, zwischen unterschiedlichen Berechnungsverfahren und anschließend wird die letzte österreichische Nationalratswahl vorgestellt und durchgerechnet.

In folgendem Vergleich [19, S. 48] zwischen dem Hare Verfahren und den fünf traditionellen Divisorverfahren (Tabelle 3.32), kann man die Unterschiede gut erkennen. Anhand der Wahl zum deutschen Bundestag 2002 ist in der Tabelle 3.31 das Hare Verfahren zur Berechnung herangezogen worden. Bei der Wahl konnte die Partei des Demokratischen Sozialismus (PDS) 2 Direktmandate mithilfe der Erstwahlstimmen erhalten, wodurch nur noch 596 anstelle von 598 Mandate verteilt werden müssen. Da die PDS die 5% Hürde⁷ nicht erreicht hat, ist sie in den folgenden Tabellen nicht vertreten.

Tabelle 3.31: Bundestagswahl Deutschland 2002 mit Hare Verfahren

Partei	Zweitstimmen	Quote	Hare	
				Sitze
SPD	18 488 668	246,955	246	247
CDU	14 167 561	189,237	189	189
CSU	4 315 080	57,637	57	58
Grüne	4 110 355	54,902	54	55
FDP	3 538 815	47,268	47	47
Summe	44 620 479		593	596

Mithilfe der Quote konnten bereits 593 Sitze verteilt werden. Bei der Berechnung mit dem Hare Verfahren erhielten die SPD, die CSU und die Grünen durch die Resteverteilung noch ein Mandat. Hier kann man auch die allgemeine Benachteiligung kleinerer Parteien erkennen, da weder beim Hare Verfahren, noch bei den anderen Divisorverfahren mit Ausnahme des Adams Verfahrens, die kleinen Parteien einen Stimmvorteil erhalten. Aufgrund der Aufrundung des Adams Verfahrens, erhielt die FDP eine Stimme mehr, als bei der Berechnung mit den anderen Verfahren. Beim Verfahren nach d'Hondt wurde der Divisor von der Wahlzahl ausgehend angepasst, da diese zu groß war, wurde mit $d = 74\,560$ gerechnet. Hier ist der Nachteil, dass d'Hondt große Parteien bevorzugt anhand der CDU zu erkennen, welche eine Stimme mehr erhält, wohingegen die kleinere CSU eine Stimme verliert. Das Sainte-Laguë Verfahren stimmt bei dieser Berechnung mit den Ergebnissen nach größten Resten betrachtet, überein. Beim Adams Verfahren musste die Wahlzahl ebenfalls angepasst werden, da sonst zu viele Mandate verteilt werden. Hier wurde mit $d = 75\,160$ gerechnet. Bei den Verfahren nach Sainte-Laguë, nach Hill-Huntington und Dean werden die Mandate gleich verteilt, da diese drei Verfahren eine ähnliche Rundungsgrenze haben.

⁷Auf Deutschland bezogen, deswegen 5%.

3 Verhältniswahlrecht

Tabelle 3.32: Bundestagswahl Deutschland 2002 mit Divisorverfahren

	Partei	SPD	CDU	CSU	Grüne	FDP	
	Quote	247,97	190,02	57,87	55,13	47,46	
d'Hondt	Sitze	247	190	57	55	47	596
Sainte-Laguë	Sitze	247	189	58	55	47	596
Adams	Quote	245,991	188,499	57,412	54,688	47,084	
	Sitze	246	189	58	55	48	596
Hill-Huntington	Sitze	247	189	58	55	47	596
geom. Mittel		246,499	189,499	57,498	54,498	47,497	
Dean	Sitze	247	189	58	55	47	596
harm. Mittel		246,499	189,499	57,496	54,495	47,495	

Die Berechnungen zur Bundestagswahl 2002 zeigen, dass die größten Unterschiede zwischen dem Hare Verfahren, dem d'Hondt Verfahren und dem Verfahren nach Adams entstehen. Aus diesem Grund wird im folgenden Beispiel auf die zwei Bekanntesten, und zwar dem Hare und dem d'Hondt Verfahren eingegangen.

Bei der Wahl zum deutschen Bundestag werden im 1. Schritt immer die Wahlkreise auf die Bundesländer aufgeteilt. Die Berechnungsverfahren können nicht nur eingesetzt werden, um Stimmen in Mandate umzurechnen, sondern auch, wie in diesem Fall, Wahlkreise auf die Bundesländer. Bei der Bundestagswahl 2002 in Deutschland wurden die insgesamt 299 Wahlkreise nach dem letzten Bevölkerungsstand (31.12.1999) auf die 16 Bundesländer aufgeteilt. Die Aufteilung ist in Tabelle 3.33 dargestellt.

Laut der Verordnung zu einer Wahlkreisneueinteilung sollte auf jeden Wahlkreis idealerweise 250 000 Einwohner kommen. Dieses Ideal entstammt der Wahlzahl,

$$w = \frac{\text{Bevölkerung}}{\text{Wahlkreise}} = \frac{74\,882\,229}{299} = 250\,242.$$

Die Einteilung sollte den Landes- und Gemeindegrenzen nahekommen. Vergleicht man die Berechnungsverfahren kommt es in 6 Bundesländern zu einer unterschiedlichen Verteilung. Nach dem d'Hondt Verfahren verlieren Schleswig-Holstein, Hamburg und Thüringen je einen Wahlkreis und die Bundesländer Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen und Bayern erhalten dadurch einen Vorteil. Betrachtet man die Größen der Bundesländer ist erkennbar, dass bei der d'Hondt Verteilung die größeren Bundesländer bevorzugt gegenüber kleineren Bundesländern werden. An der obigen Tabelle können auch die proportionalen Anteile verglichen werden. Bei der zu dem Zeitpunkt gültigen Verteilung, würde in Schleswig-Holstein auf jeden Wahlkreis 238 696 Einwohner kommen. Bei der Methode nach d'Hondt liegt das minimale Vertretungsverhältnis höher und zwar bei 245 149 Einwohner pro Wahlkreis in Bayern. Bei beiden Berechnungen liegt der höchste Wert bei 291 951 Einwohner pro Wahlkreis in Bremen. Aufgrund dessen ist die Abweichung der proportionalen Anteile bei diesem Beispiel beim Hare Verfahren größer, als beim

3 Verhältniswahlrecht

Tabelle 3.33: Wahlkreiseinteilung nach Hare und d'Hondt

Bundesland	Bevölkerung 31.12.1999	Hare		d'Hondt	
		Wahlkreise	Bev.	Wahlkreise	Bev.
Schleswig-Holstein	2 625 654	11	238 696	10	262 565
Meckl.-Vorpommern	1 757 671	7	251 096	7	251 096
Hamburg	1 442 864	6	240 477	5	288 573
Niedersachsen	7 370 958	29	254 171	30	245 699
Bremen	583 902	2	291 951	2	291 951
Brandenburg	2 540 028	10	254 003	10	254 003
Sachsen-Anhalt	2 604 583	10	260 458	10	260 458
Berlin	2 953 105	12	246 092	12	246 092
Nordrhein-Westfalen	15 955 175	64	249 300	65	245 464
Sachsen	4 354 716	17	256 160	17	256 160
Hessen	5 321 459	21	253 403	21	253 403
Thüringen	2 407 409	10	240 741	9	267 490
Rheinland-Pfalz	3 719 085	15	247 939	15	247 939
Bayern	11 031 710	44	250 721	45	245 149
Baden-Württemberg	9 170 757	37	247 858	37	247 858
Saarland	983 153	4	245 788	4	245 788

d'Hondt Verfahren. Wie bereits beim obigen Beispiel, entspricht auch hier die Verteilung nach Hare auch der Verteilung nach Sainte-Laguë [4, S. 81-82].

Im nachfolgenden Beispiel wird die letzte Nationalratswahl von 2019 in Österreich genau betrachtet. Als gesetzliche Grundlagen dafür dienen die Nationalrats-Wahlordnung 1992 – NRWO, BGBl. Nr. 471, zuletzt geändert durch BGBl. I Nr. 32/2018 und das Wahlrechtsänderungsgesetz 2017. Österreich ist in mehrere Wahlkreise aufgeteilt, dazu zählen ein Bundeswahlkreis, 9 Landeswahlkreise, welche den Bundesländern entsprechen und 39 Regionalwahlkreise. Bei den Regionalwahlkreisen entfallen 2 auf das Burgenland, 4 auf Kärnten, 7 auf Niederösterreich, 5 auf Oberösterreich, 3 auf Salzburg, 4 auf die Steiermark, 5 auf Tirol, 2 auf Vorarlberg und 7 auf Wien. Die 183 Mandate des Nationalrats werden nach der Reihung auf den Listen auf den drei Wahlkreisebenen verteilt. Bei der Nationalratswahl kann man Vorzugsstimmen abgeben, und es können Vorzugsstimmenmandate erzielt werden. Auf der Ebene der Landeswahlkreise erhält ein Kandidat ein Mandat, wenn die Landeswahlzahl erreicht wurde, oder wenn er mindestens 10% der auf seine Partei entfallenen Stimmen erhält. Auf der Regionalwahlkreisebene erhält ein Kandidat ein Vorzugsstimmenmandat, wenn er mindestens 14% der Stimmen seiner Partei im Regionalwahlkreis für sich erreicht hat. Auf Bundesebene erhält ein Kandidat ein Vorzugsstimmenmandat, wenn mindestens 7% der Stimmen seiner Partei auf ihn entfallen [33, S. 90-91].

3 Verhältniswahlrecht

Zu Beginn der Berechnung wird die Anzahl der Mandate pro Landeswahlkreis mithilfe der Bevölkerungszahl, welche aus den österreichischen Staatsbürgern und den Auslandsösterreichern besteht, festgelegt. Für die Nationalratswahl 2019 wurden die Bevölkerungszahlen der letzten Registerzählung [46] aus dem Jahr 2011 verwendet. Dazu benötigt man die Verteilungszahl, welche aus der Bevölkerungszahl Österreichs geteilt durch die Mandatszahl von 183 gebildet wird. Die Verteilungszahl für die Wahl 2019 ergibt

$$\frac{7\,461\,953}{183} = 40\,775,699.$$

In Tabelle 3.34 sieht man die Mandatsverteilung nach den Bundesländern. Diese werden mithilfe des Hare Verfahrens ausgerechnet. Die Quote wird berechnet, indem man die Bevölkerungszahl eines Bundeslandes durch die Verteilungszahl 40 775,669 dividiert [§4 Abs. 1 - 4 NRWO].

Tabelle 3.34: Mandatsverteilung nach Landeswahlkreisen

Wahlkreis	Bürgerzahl	Quote	Mandate
Bgld.	268 673	6,589	6 + 1 = 7
Ktn.	516 212	12,660	12 + 1 = 13
NÖ	1 500 495	36,799	36 + 1 = 37
OÖ	1 295 694	31,776	31 + 1 = 32
Sbg.	462 162	11,334	11
Stmk.	1 124 074	27,567	27
T	631 323	15,483	15
Vbg.	321 465	7,884	7 + 1 = 8
W	1 341 855	32,908	32 + 1 = 33
	7 461 953		183

Die Aufteilung der Mandate auf die Regionalwahlkreise erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie auf die Landeswahlkreise [§4 Abs. 5 NRWO]. Die Umwandlung der abgegebenen Stimmen in Mandate erfolgt in einem dreiteiligen Ermittlungsverfahren. Zuerst wird die Wahlzahl berechnet, die für die ersten beiden Ermittlungsverfahren benötigt wird. Dabei betrachtet man in jedem Landeswahlkreis die abgegebenen gültigen Stimmen und teilt diese durch die Anzahl der zu vergebenen Mandate in diesem Bundesland. Der Quotient muss auf die nächsthöhere ganze Zahl erhöht werden [§96 Abs. 7 NRWO]. Anhand der Formel

$$w = \left\lceil \frac{v_i}{m_i} + 1 \right\rceil$$

mit $i = 1, 2, \dots, 9$ werden die Wahlzahlen für die neun Landeswahlkreise gebildet. Die folgenden Zahlen sind in [50] zu finden. Bei der Berechnung der Wahlzahl für das Burgenland erhält man bei der Division der gültigen Stimmen durch die Mandate die ganze

3 Verhältniswahlrecht

Zahl 26 723, diese ist aber laut NRWO um eins zu erhöhen. Bei allen anderen Wahlzahlen wurde auf die nächsthöhere ganze Zahl aufgerundet.

Tabelle 3.35: Wahlzahlen in den Landeswahlkreisen

Wahlkreis	gültige Stimmen	Mandate	Wahlzahl
Bgld.	187 061	7	26 724
Ktn.	311 812	13	23 986
NÖ	1 027 276	37	27 765
OÖ	845 096	32	26 410
Sbg.	298 325	11	27 121
Stmk.	715 170	27	26 488
T	387 159	15	25 811
Vbg.	184 433	8	23 055
W	820 914	33	24 877

Im 1. Ermittlungsverfahren werden die Stimmen in den einzelnen Regionalwahlkreisen betrachtet. „Jede Partei erhält soviele Mandate, wie die Wahlzahl in ihrer Parteisumme im Regionalwahlkreis enthalten ist“ [§97 NRWO].

Im Folgenden wird exemplarisch die Verteilung des Wiener Regionalwahlkreises Süd (9D) dargestellt [52]. Die Wahlzahl von Wien beträgt $w = 24\,877$ und damit ergibt sich beispielsweise für die ÖVP:

$$m_{\text{ÖVP}} = \left\lfloor \frac{34\,208}{24\,877} \right\rfloor = [1, 375] = 1$$

Tabelle 3.36: 1. Ermittlungsverfahren im Regionalwahlkreis Wien Süd

Partei	gültige Stimmen	Mandate
ÖVP	34 208	1
SPÖ	51 006	2
FPÖ	25 235	1
NEOS	9 750	0
JETZT	3 836	0
GRÜNE	20 526	0
KPÖ	1 207	0
WANDL	749	0
BIER	1 097	0

Bei der Nationalratswahl 2019 wurden im 1. Ermittlungsschrittes, also bei den Regionalwahlkreisen auf Landesebene bereits 79 der 183 Mandate [53] verteilt. Diese Mandate werden Grundmandate genannt. In Wien wurden von den 33 zu vergebenen Mandaten schon 13 Mandate durch die Regionalwahlkreise zugeteilt. Diese Mandate werden mit dem Vorzugsstimmensystem an die Regionalbewerber verteilt. Das bedeutet, dass alle

3 Verhältniswahlrecht

Kandidaten, welche mehr als 14% der Stimmen ihrer Partei, erhalten haben, einen Sitz zugeteilt bekommen. Mandate, die dadurch nicht vergeben werden können, werden den Regionalbewerbern entsprechend ihrer Reihung auf der Regionalparteiliste zugewiesen [§98 Abs. 3 - 4 NRWO].

Am 2. Ermittlungsverfahren können nur jene Parteien, die im 1. Schritt in einem Regionalwahlkreis ein Mandat erhalten haben oder auf das gesamte Bundesgebiet gesehen mindestens 4% der gültigen Stimmen für sich erreicht haben [§100 Abs. 1 NRWO]. Nach dem 1. Schritt gingen nur Mandate an die ÖVP, SPÖ, FPÖ und an die Grünen. Die NEOS erhielten zwar noch keine Mandate, schafften aber auf Bundesebene mehr als 4%, weswegen der Nationalrat aus diesen fünf Parteien gebildet wurde [53]. Im 2. Schritt werden die Mandate auf Landesebene aufgeteilt. „Jede Partei erhält so viele Mandate, wie die Wahlzahl in ihrer Parteisumme im Landeswahlkreis enthalten ist, abzüglich allenfalls im ersten Ermittlungsverfahren erzielter Mandate“ [§101 NRWO]. In folgender Tabelle wird anhand des Landeswahlkreises in Wien gezeigt, welche Verteilung der Mandate nach dem 1. Berechnungsschritt zustande gekommen ist und die Berechnung der Stimmen auf Landesebene. Beispielsweise erhält die SPÖ anhand der Berechnung

$$m = \left\lfloor \frac{222\,554}{24\,877} \right\rfloor = [8,946]$$

insgesamt 8 Mandate. Da die SPÖ aber bereits 5 Mandate durch die Regionalwahlkreise erhalten hat, bekommt sie im 2. Ermittlungsverfahren noch 3 Mandate zusätzlich. Diese neu berechneten Mandate werden wieder mit den Vorzugsstimmen verteilt.

Tabelle 3.37: 2. Ermittlungsverfahren im Landeswahlkreis Wien

	ÖVP	SPÖ	FPÖ	NEOS	GRÜNE
Grundmandate	4	5	2	0	2
Stimmen	202 180	222 554	105 289	80 964	169 866
Mandate nach 2. Verteilung	8	8	4	3	6

Nach dem 2. Berechnungsschritt wurden bei der Nationalratswahl 2019 insgesamt 156 der 183 Mandate verteilt [53]. Für den 1. und 2. Schritt der Berechnung wurde das Hare Verfahren verwendet. Die verwendete Wahlzahl in jedem Bundesland ist in beiden Schritten die gleiche.

Im 3. Ermittlungsverfahren wird mit dem d'Hondt Höchstzahlverfahren gerechnet. Es dürfen, wie bereits beim 2. Schritt nur noch Parteien an der Verteilung teilnehmen, welche mehr als 4% der Stimmen erhalten haben oder ein Mandat in den Regionalwahlkreisen für sich erringen konnten.

„Die Summen der Parteistimmen werden, nach ihrer Größe geordnet, nebeneinander geschrieben; unter jede Summe wird die Hälfte geschrieben, darunter das Drittel, das

3 Verhältniswahlrecht

Viertel und die weiterfolgenden Teilzahlen. Als Wahlzahl gilt bei 183 zu vergebenden Mandaten die hundertdreißiggrößte Zahl (...) der so angeschriebenen Zahlen. Jede Partei erhält so viele Mandate, wie die Wahlzahl in ihrer Parteisumme enthalten ist“ [§107 Abs. 4 - 6 NRWO].

Die Tabelle 3.38 zeigt einen Ausschnitt des Höchstzahlverfahrens. Die Zahlen stammen von der Seite des BMI [53].

Tabelle 3.38: 3. Ermittlungsverfahren auf Bundesebene

	ÖVP	SPÖ	FPÖ	NEOS	Grüne
Stimmen	1 789 417	1 001 868	772 666	387 124	664 055
: 2	894 709	500 934	386 333	193 562	332 028
: 3	596 472	333 956	257 555	129 041	221 352
⋮					
: 15	119 294	66 791	51 511	25 808	44 270
: 16	111 839	62 617	48 292	24 195	41 503
⋮					
: 31	57 723	32 318	24 925	12 488	21 421
⋮					
: 71	25 203	14 111	10 883	5 452	9 353

Bei der Nationalratswahl 2019 überschreiten die im 3. Schritt ermittelten Mandatszahlen, die bereits aus den ersten beiden Schritten ermittelten Mandate. Um die Mandate des 3. Berechnungsverfahrens zu erhalten, müssen die Mandate jeder Partei, welche bereits verteilt wurden, abgezogen werden [§107 Abs. 8]. Die ÖVP hat als stimmenstärkste Partei insgesamt 71 Mandate verteilt, 63 davon wurden bereits vergeben also können im letzten Schritt noch 8 Mandate verteilt werden [53].

Die 183. Zahl findet man bei der Division durch 31 bei der FPÖ. Dementsprechend lautet die Wahlzahl

$$w = \frac{772\,666}{31} = 24\,924,710$$

und jede Partei erhält so viele Mandate wie die Wahlzahl in den abgegebenen Parteistimmen enthalten ist.

4 Wahlprognosen

Neben den Berechnungen von den Wählerstimmen zum Staatsoberhaupt oder der Verteilung der Stimmen auf eine Regierung, steckt viel Mathematik in der Prognostizierung von Wahlergebnissen. Prognosen sind Vorhersagen auf der Basis des aktuellen Wissens, die von den tatsächlichen Zahlen abweichen können und auch die Wählermeinung beeinflussen können. Wahlprognosen können mithilfe von Stichproben anhand von Umfragen, Hochrechnungen oder Wahlbörsen ermittelt werden. Wahlumfragen sind Momentaufnahmen und es ist schwierig daraus Prognosen für die Zukunft zu erstellen. Man findet trotzdem vor Wahlen eine breite Menge von diesen Prognosen in den Medien. Eine Prognose der Umfrageergebnisse einer Zufallsstichprobe wird durch Schätzungen angegeben. Der Begriff Hochrechnung bedeutet von einer Teilmenge, beispielsweise von bereits ausgezählten Stimmen einzelner Wahlbezirke auf eine Gesamtheit zu schließen. Diese Art von Hochrechnung wird mittels Regression berechnet. Je mehr ausgezählte Stimmen vorhanden sind, desto genauer werden die Hochrechnungen. Der Begriff Hochrechnen kann aber auch dafür verwendet werden, wenn von einer Stichprobe, aufgrund von Umfragen auf die Gesamtheit geschlossen wird. Die Wahlbörsen sind eine neuere Art der Prognose, die sich in Amerika aufgrund von fehlerhaften Prognosen durch Umfragen entwickelt haben.

4.1 Mathematische Grundlagen

Damit man die Wahlprognosen unter mathematischer Sichtweise betrachten kann, benötigt es eine Reihe an Grundlagen. Dieses Wissen beziehe ich auf mein Studium und auf stochastische Grundwerke von Tschirk [32], Henze [12], Küttinger und Sauer [18] und Fischer, Lehner und Puchert [10].

Bei den folgenden Definitionen wird davon ausgegangen, dass man sich in einem Wahrscheinlichkeitsraum befindet. Die drei Eigenschaften sind als Axiome von Kolmogorow bekannt.

Definition. Wahrscheinlichkeitsraum

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dabei ist Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von Ω , das den Grundraum Ω und mit jeder Menge A auch deren Komplement A^c enthält. Weiters liegt mit jeder Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ auch deren Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ in $\mathcal{A}$. Dieses Mengensystem heißt σ -Algebra.

Ist P eine auf $\mathcal{A}$ definierte reelle Funktion mit folgenden Eigenschaften:

4 Wahlprognosen

- $P(A) \geq 0$ für $A \in \mathcal{A}$ (Nichtnegativität)
- $P(\Omega) = 1$ (Normierung)
- $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$ für eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ paarweiser disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ (σ -Additivität)

P heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* oder *Wahrscheinlichkeitsverteilung* auf $\mathcal{A}$. Jede Menge A aus $\mathcal{A}$ ist ein *Ereignis*.

Die Gleichverteilung oder auch Laplace Verteilung geht von einer endlichen Ergebnismenge Ω , mit $|\Omega| = n$ aus. Die Wahrscheinlichkeit für ein Element $w \in \Omega$ auszuwählen liegt bei $P(w) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n}$. Die Wahrscheinlichkeit ein günstiges Ereignis $A \subset \Omega$ zu erhalten ist

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

und wird als Laplace-Wahrscheinlichkeit bezeichnet.

Mithilfe der Laplace-Wahrscheinlichkeit kann beispielsweise berechnet werden, wie hoch die Wahlbeteiligung war. Dabei steht n , die Anzahl der möglichen Fälle für die Wahlberechtigten und die günstigen Fälle entsprechen den abgegebenen Stimmen. Die Zahlen stammen von der Seite des BMI [35].

Tabelle 4.1: Wahlbeteiligung Bundespräsidentenwahl 2016

	Wahlberechtigte	abgegebene Stimmen
1. Wahlgang	6 382 507	4 371 825
2. Wahlgang	6 399 607	4 749 339

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stimmberechtigter zur Wahl ging, lag beim 1. Wahlgang bei

$$P(A) = \frac{4\,371\,825}{6\,382\,507} = 0,685 \rightarrow 68,5\%$$

Wahlbeteiligung und beim 2. Wahlgang betrug die Beteiligung der Stimmberechtigten bei

$$P(A) = \frac{4\,749\,339}{6\,399\,607} = 0,742 \rightarrow 74,2\%.$$

Definition. Zufallsvariable

Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Zufallsvariable, falls für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\{X \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$, wobei $\{X \leq \alpha\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\}$

Dabei ist Ω die Ergebnismenge, diese gibt die Menge der möglichen Ergebnisse eines stochastischen Vorgangs an. Die Zufallsvariable X kann als Vorschrift angesehen werden, die jedem Ergebnis $w \in \Omega$ eine reelle Zahl zuordnet. Der Wert $X(w)$ ist dann die Erfüllung der Zufallsvariablen mit Ausgang w [12, S.10].

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ordnet jeder Zahl x die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zu, dass X maximal den Wert x annimmt. Formal geschrieben bedeutet das

$$F(x) := P(X \leq x).$$

Definition. Diskrete Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X heißt diskret, wenn die Ergebnismenge Ω endlich oder abzählbar unendlich ist.

Proposition. Falls X eine diskrete Zufallsvariable ist, die die Werte $(x_i)_{i \in I}$ annimmt, dann ist $F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$.

Beweis. Es ist $\{X \leq x\} = \bigcup_{x_i \leq x} \{X = x_i\}$, wobei es sich hier offensichtlich um eine paarweise disjunkte Vereinigung handelt. Wegen der σ -Additivität gilt daher $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$. $\square$

Im Unterschied zu den diskreten Zufallsvariablen, können stetige Zufallsvariable auch unendliche Werte annehmen.

Definition. Stetige Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn es eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ mit der Eigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$ gibt, derart dass für die Verteilungsfunktion F von X gilt, dass $F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx \forall t \in \mathbb{R}$. Die Funktion f wird Dichtefunktion genannt.

Der Erwartungswert $E(X)$ entspricht dem arithmetischen Mittel aus der beschreibenden Statistik, ist ein Lageparameter und wird häufig mit μ abgekürzt.

Definition. Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte $(x_j)_{j \in J}$ annimmt, wobei J endlich oder abzählbar ist. Dann nennt man $E(X) := \sum_{j \in J} x_j \cdot P(X = x_j)$ den Erwartungswert von X , wenn $\sum_{j \in J} |x_j| \cdot P(X = x_j)$ konvergiert.

Jede Zufallsvariable X , die nur endlich viele Werte annimmt, besitzt einen Erwartungswert.

Definition. Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f und existiert $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, so nennt man $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ den Erwartungswert von X .

Die Varianz und die Standardabweichung sind Maße, die die Abweichung der Werte einer Zufallsvariablen vom Erwartungswert angeben, also handelt es sich um Streuungsparameter. Sie sind voneinander abhängig. Man erhält die Standardabweichung, indem man die Wurzel der Varianz zieht.

Definition. Varianz und Standardabweichung

Ist $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, für die $E(X^2)$ existiert, dann definiert man ihre Varianz $V(X)$ durch $V(X) := E((X - E(X))^2)$, und ihre Streuung $\sigma := \sqrt{V(X)}$.

Satz. Varianz

Falls $E(X^2)$ existiert, dann gilt $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Beweis. Setze $E(X) = \mu$, dann gilt $V(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2 - 2 \cdot \mu \cdot X + \mu^2) = E(X^2) - 2 \cdot \mu \cdot E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2 \cdot \mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$ $\square$

Diese allgemeine Definition der Varianz wird nun für diskrete und stetige Zufallsvariablen präzisiert. Die Standardabweichung ergibt sich aus der Wurzel daraus.

Satz. Varianz

Sei X eine Zufallsvariable, für die $E(X^2)$ existiert, und setze $\mu := E(X)$. Weiters sei X entweder eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte $(x_i)_{i \in I}$ annimmt, oder eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion f . Dann ist die Varianz

$$V(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot P(X = x_i) - \mu^2 & \text{für diskrete ZV} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \mu^2 & \text{für stetige ZV} \end{cases}$$

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten diskreten Verteilungen. Wenn man auf das Urnenmodell zurückblickt, welches häufig im Schulalltag Einzug gefunden hat, handelt es sich hierbei um ein Ziehen mit Zurücklegen.

Definition. Binomialverteilung

Eine Zufallsvariable X besitzt eine Binomialverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ falls

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

gilt, wobei $q := 1 - p$.

4 Wahlprognosen

Der Ausdruck $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist der Binomialkoeffizient und die „Fakultät“ wird folgendermaßen berechnet $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Der Parameter p steht für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt und q steht für die Gegenwahrscheinlichkeit. Bei der Berechnung mit der Binomialverteilung ist der Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Varianz $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$.

Folgendes Beispiel [10, S. 193] verdeutlicht die Wichtigkeit, aber auch die schwierige Berechnung der Binomialverteilung für Wahlumfragen. Von 10 000 000 Wahlberechtigten wird eine Stichprobe mit einem Umfang von 1 000 Personen durchgeführt. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, dass Partei A gewählt wird mit $p = 0,4$ angegeben. Mit einem allgemeinen k ergibt sich:

$$P(X = k) = \binom{1000}{k} \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{1000-k} \text{ für } k = 0, 1, \dots, 1000.$$

Für $k = 400$ erhält man

$$P(X = 400) = \binom{1000}{400} \cdot 0,4^{400} \cdot 0,6^{600} \approx 0,0257.$$

Will man nun aber die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass 370 - 430 Wähler Partei A bevorzugen, erhält man

$$P(370 \leq X \leq 430) = \sum_{k=370}^{430} P(X = k) \approx 0,951.$$

Die Berechnung für das Intervall $[370, 430]$ wurde mittels GeoGebra durchgeführt, da es händisch sehr mühsam ist. Die Berechnung, dass exakt 400 Wähler Partei A befürworten sagt sehr wenig aus und liegt dementsprechend auch nur bei 2,57%. Besser ist es, die Wahrscheinlichkeit anzugeben, dass zwischen 370 und 430 Wähler Partei A den Vortritt geben. Dies ist auch anhand der Ergebnisse deutlich.

Die Normalverteilung ist eine der wichtigsten stetigen Verteilungen und wird auch als Gauß-Verteilung bezeichnet, nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß. Aufgrund der Form des Graphen wird die Dichte der Normalverteilung auch als Gaußsche Glockenkurve bezeichnet.

Definition. Normalverteilung

Die Zufallsvariable X hat eine Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 , $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, wenn X die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

annimmt.

Definition. Standardnormalverteilung

Eine Verteilung heißt standardnormalverteilt, wenn sie die Dichte

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

besitzt. Man nennt sie auch $N(0,1)$ -Verteilung, da der Erwartungswert $\mu = 0$ und die Standardabweichung $\sigma = 1$ ist.

Definition. Verteilungsfunktion

Man erhält die Verteilungsfunktion indem die Glockenfunktion φ integriert wird

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx., \text{ denn es gilt } \int_a^b \varphi(x) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Bei der Standardnormalverteilung nennt man Φ die Verteilungsfunktion und φ die Dichtefunktion. Nun werden wichtige Eigenschaften der Normalverteilung für die spätere praktische Anwendung erklärt. Man kann jede Normalverteilung in eine Standardnormalverteilung transformieren. Wenn $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ können die Werte der Verteilungsfunktion

$$\Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P(X^* \leq \frac{x - \mu}{\sigma}) = P(X \leq x)$$

in einer Tabelle abgelesen werden und müssen nicht jedes Mal neu berechnet werden. Zur Berechnung werden der Erwartungswert und die Standardabweichung eingesetzt und die konkretere Formel $\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$ verwendet. Eine wichtige Rechenregel [18, S. 315] für die praktische Anwendung ist, dass $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ist. Die Fläche unter der Dichteverteilung ist wie in der Definition von stetigen Zufallsvariablen beschrieben immer 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$. Die Dichtefunktion f ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswertes.

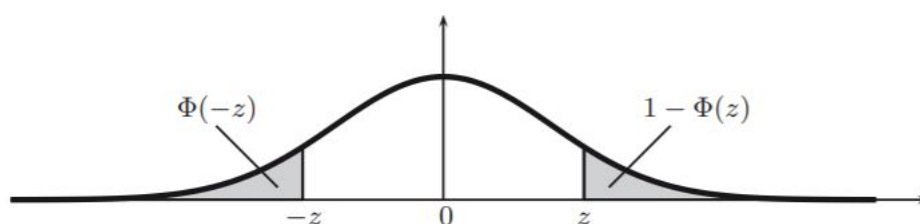


Abbildung 4.1: Rechenregel für die Standardnormalverteilung

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist eine Summe vieler unabhängiger Zufallsvariablen annähernd normalverteilt, das heißt man kann die Normalverteilung zur Berechnung verwenden. Der Grenzwertsatz nach Moivre-Laplace ist ein Spezialfall davon. Dieser besagt, dass die Binomialverteilung gegen die Normalverteilung konvergiert. Da die

4 Wahlprognosen

Binomialverteilung bei großem n mühsam zu berechnen ist, wird stattdessen die Normalverteilung verwendet. Da es sich bei Wahlumfragen um binomialverteilte Funktionen handelt, wird im Folgenden nur dieser Grenzwertsatz genau definiert.

Satz. Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Sei $0 < p < 1$ und $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von binomial verteilten Zufallsvariablen mit Parametern p und n . Dann gilt für reelle Zahlen $a < b$ und die Standardisierung X_n^* von X_n dass $\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq X_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Die Annäherung wird besser, je größer der Stichprobenumfang n ist. Es gibt eine Faustregel, die besagt, dass die Approximation der Binomialverteilung mittels Normalverteilung in der Praxis verwendbar ist, wenn $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \geq 9$ für die Varianz gilt. Diese Faustregel findet man auch im Katalog für die standardisierte Reifeprüfung der mathematischen Grundkompetenzen [34] wobei die Berechnung mit Hilfe der Stetigkeitskorrektur viel besser und mathematisch nachvollziehbarer ist. Eine genaue kritische Betrachtung dieser Faustregel ist in [20] dargestellt.

Nun wird wieder das Beispiel der Wahlumfrage [10, S. 204] aufgegriffen um die genannten Definitionen verständlicher zu machen. Aufgrund des Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace darf eine Approximation mittels Normalverteilung verwendet werden. Um Ungenauigkeiten durch die Approximation auszugleichen, wird eine Stetigkeitskorrektur mit $\pm \frac{1}{2}$ im Zähler verwendet. Zur Erinnerung wurde mittels Binomialverteilung das Ergebnis

$$P(370 \leq X \leq 430) = \sum_{k=370}^{430} P(X = k) \approx 0,951$$

berechnet. Für $x_1 = 430, x_2 = 370, \mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0,4 = 400$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1000 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{240}$ erhält man für $b = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ und $a = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$ die Approximation

$$\Phi(b) - \Phi(a) \approx 0,973 - 0,027 = 0,946.$$

Mit der Stetigkeitskorrektur $b' = \frac{x_1 + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}$ und $a' = \frac{x_2 - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}$ erhält man

$$\Phi(b') - \Phi(a') = 0,9510202.$$

Die Werte für Φ wurden aus einer Verteilungstabelle [10, S. 374] unter Berücksichtigung der Rechenregel $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ abgelesen.

Die Sigma-Regeln für die Standardnormalverteilung ergeben sich aus der Messung der Abweichungen vom Erwartungswert in Vielfachen der Standardabweichung σ :

$$P\left(\frac{|X - \mu|}{\sigma} \leq z\right) = P(|X - \mu| \leq z \cdot \sigma) = P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma) = P(-z \leq X^* \leq z) = 2\Phi(z) - 1$$

4 Wahlprognosen

Dabei steht X^* wieder für eine standardisierte Zufallsvariable und aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung gilt die letzte Gleichung. Daraus ergeben sich folgende Regeln:

- $P(X - \mu \leq 1 \cdot \sigma) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0,683$
- $P(X - \mu \leq 2 \cdot \sigma) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0,954$
- $P(X - \mu \leq 3 \cdot \sigma) = 2\Phi(3) - 1 \approx 0,997$

Das bedeutet beispielsweise, für $z = 2$, dass $\approx 95\%$ der Beobachtungswerte im Intervall $[\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma]$ liegen.

Satz. Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen [6, S. 173]

Sei X ein Ereignis, dass mit der Wahrscheinlichkeit p erfüllt wird und n unabhängige Wiederholungen stattfinden. So gilt für die Zufallsvariable $R_n(X)$ der relativen Häufigkeiten mit $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} E(R_n(X)) &= p \text{ und } V(R_n(X)) = \frac{p \cdot (1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n} \\ P(|R_n(X) - p| \geq \epsilon) &\leq \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot \epsilon^2} \leq \frac{1}{4n \cdot \epsilon^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|R_n(X) - p| \geq \epsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Anschaulich gesagt, nähert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei großer Versuchsanzahl und gleichbleibenden Versuchsbedingungen bei der theoretischen Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses an.

Als letzte mathematische Grundlage für die folgenden Berechnungen sei das Konfidenzintervall [8, S. 356-357] erwähnt.

Definition. Konfidenzintervall

Seien zwei Stichprobenfunktionen

$$G_u = g_u(X_1, \dots, X_n) \text{ und } G_o = g_o(X_1, \dots, X_n)$$

als untere und obere Grenze gegeben. Man nennt $[g_u, g_o]$ Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\gamma = 1 - \alpha$, wenn gilt

$$P(G_u \leq \vartheta \leq G_o) = \gamma$$

mit $g_u = g_u(x_1, \dots, x_n)$ und $g_o = g_o(x_1, \dots, x_n)$.

Dabei steht ϑ für den unbekannten Parameterschätzwert. Hierbei handelt es sich um ein beidseitig begrenztes Konfidenzintervall oder symmetrisches Konfidenzintervall. Es gibt auch einseitige Intervalle, die nur nach oben oder nur nach unten begrenzt sind. Für Wahlberechnungen wird vor allem das beidseitige Konfidenzintervall benötigt, mit einem einseitigen Intervall kann berechnet werden, ob eine kleine Partei die 4% oder 5% Hürde schaffen kann. Für die Berechnungen wird die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert und mit der konkreteren Formel

4 Wahlprognosen

$$g_u = \hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}$$

$$g_o = \hat{p} + \underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}}_{\epsilon}$$

das Konfidenzintervall berechnet. Dabei ist $\sigma = \frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}$ die Standardabweichung der relativen Häufigkeit, wenn $\hat{p} = R_n(x)$ ist. Bei der absoluten Häufigkeit wird die bereits bekannte Standardabweichung $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$ stattdessen verwendet. Rechnet man mit relativen Häufigkeiten, so ergibt sich der Erwartungswert und die Varianz durch

$$E_p(R_n) = \frac{1}{n} \cdot E(X) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p$$

$$V_p(R_n) = \frac{1}{n^2} \cdot V(X) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot (1 - p) = \frac{p \cdot (1 - p)}{n}.$$

Wenn $\hat{p}$ unbekannt ist, kann das Maximum davon eingesetzt werden, also $\sqrt{0,5 \cdot 0,5} = \frac{1}{2}$. Die Werte von α (oder γ) und ϵ können vorgegeben werden. Mithilfe der Sigma-Regeln und einer Tabelle für die Standardabweichung ergibt sich bei einem Konfidenzniveau von 95% folgendes

$$2\Phi(z) - 1 = \gamma \rightarrow 2\Phi(z) - 1 = 0,95 \rightarrow \Phi(z) = 0,975 \xrightarrow{\text{Tabelle}} z = 1,96.$$

Es gibt mehrere Begrifflichkeiten, die bei Konfidenzintervallen oder Vertrauensintervallen verwendet werden. Das Konfidenzniveau γ wird auch als Signifikanzniveau, Garantiewahrscheinlichkeit, Überdeckungswahrscheinlichkeit, Sicherheitswahrscheinlichkeit oder Sicherheitsgrad angesehen. Die Gegenwahrscheinlichkeit von γ ist α , die Irrtumswahrscheinlichkeit, wobei $\gamma = 1 - \alpha$ gilt, also die Summe der beiden 1 ergibt. Das Konfidenzintervall ergibt sich aus der Anteilsschätzung $\hat{p}$ für den tatsächlichen Wert p und der Schwankungsbreite ϵ . Die Schwankungsbreite wird auch als Fehler, Fehlerspanne oder Fehlerintervall bezeichnet.

4.2 Stichproben

Stichproben sind ein Hilfsmittel um aus einer kleinen Gruppe der Wählerschaft auf die gesamten Wahlberechtigten zu schließen. Im Folgenden wird von einer Zufallsstichprobe ausgegangen, welche anhand von Umfragen durchgeführt werden kann. Dabei soll ein ungefähres Ergebnis abgeschätzt werden. Die Problematik von Stichproben wird durch das „Stichproben-Desaster 1936“ [17, S. 178] verdeutlicht. Die Zeitschrift „Literary Digest“ hat eine Stichprobe mit sehr großem Umfang von ungefähr 2,4 Millionen Befragten durchgeführt. Diese prophezeite, dass Alfred Landon gegen F.D. Roosevelt gewinnen sollte. Das Problem war aber, dass die Wähler anhand von Telefonbüchern und KFZ Verzeichnissen befragt wurden, aber viele Roosevelt Wähler weder ein Telefon noch ein Auto hatten. Gleichzeitig hatte auch George Gallup eine Stichprobe mit 1 500 Befragten durchgeführt, also eine vergleichsweise sehr kleine Stichprobe. Gallup prognostizierte

4 Wahlprognosen

einen Sieg Roosevelts, der dann auch tatsächlich gewann. In dieser kleineren Stichprobe wurde versucht, dass die Befragten einen repräsentativen Querschnitt der Bevölkerung darstellen und ein Quotenverfahren zur Berechnung verwendet. So wurden Kriterien wie Religionszugehörigkeit, Alter, Geschlecht und sozialer Status beachtet [26, S. 62]. Das Gallup Institut ist heute als Forschungsinstitut für Meinungsumfragen sehr bekannt.

Aus diesem Grund ist eine der wichtigsten Anforderungen an eine Stichprobe, deren Repräsentativität. Die Unterschiede der Bevölkerung müssen in einer Stichprobe in demselben Verhältnis vertreten sein. Dazu muss die Heterogenität der Grundgesamtheit, also der Bevölkerung, bekannt sein. Wenn die Bevölkerungsunterschiede, wie das Geschlecht, Alter oder der Berufsstand in der Stichprobe berücksichtigt werden spricht man von einer Quotenstichprobe [26, S. 63-70]. Im Gegensatz dazu gibt es die reine Zufallsauswahl, von der man bei kommenden mathematischen Berechnungen ausgeht.

Eine Wahlumfrage wird entweder von einer Partei oder von den Medien beauftragt. Dabei gibt es vor allem Kritik an der Durchführung durch Parteien, da diese vorrangig das eigene Interesse beachten und dadurch eine Beeinflussung der Wähler zugunsten der Partei eine wichtige Rolle spielt [26, S. 15]. Doch nicht nur die Parteien beeinflussen Umfrageergebnisse, sondern es kann auch zu anderen Fehlern bei der Umfrage kommen, welche diese verzerren können. Wenn bei Umfragebögen einige Antworten fehlen, nennt man dies „missing cases“. Solche „missing cases“ können durch Schätzungen anhand von vorliegender Daten ausgeglichen werden. Ein weiteres Problem bei Umfragen sind „nonresponse“, also Totalausfälle eines Interviews. Gründe dafür können sein, dass Personen, die für eine Befragung ausgewählt worden sind, nicht erreicht wurden oder dass die Befragten ein Interview verweigern. Bei Telefoninterviews kann es außerdem passieren, dass man nichtprivate Anschlüsse, beispielsweise Firmen, erreicht. Eine letzte Art der Verzerrung des Ergebnisses, welches hier angesprochen wird, ist die Angabe von falschen Antworten [26, S. 84-85]. Dem Lügen lässt sich entgegenwirken durch die Methode der indirekten Befragung, auch „randomized response“ genannt. Dabei weiß der Interviewer nicht, ob die Person die Wahrheit sagt oder eine falsche Angabe macht. Die Antworten durch die „randomized response“ Methode sind verlässlicher als durch direkte Befragungen, da die Anteile bei der indirekten Methode zurückgerechnet werden [17, S. 88-91].

Bei der Stichprobe für eine Wahlumfrage handelt es sich um eine einstufige Stichprobe. Betrachtet man die Stichprobe als statistisch gängiges Modell der Urnenwahl, so wird häufig das Ziehen mit Zurücklegen verwendet [24, S. 420-425]. Es gibt unterschiedliche Methoden eine Umfrage durchzuführen. Eine Art davon ist das persönliche Interview. Wenn die Befragung direkt am Wahltag und am Wahlort stattfindet, spricht man von „Exit polls“. Bei diesen „Exit polls“ erreicht man eine hohe Antwortquote und kann daraus eine sehr präzise Hochrechnung durchführen, da hier tatsächlich nur Personen gefragt werden, die an der Wahl teilgenommen haben. Als Nachteil davon kann man die hohen Personalkosten und den zeitintensiven Aufwand betrachten. Zudem sind Briefwähler davon ausgeschlossen. Neben den persönlichen Befragungen sind auch Tele-

foninterviews sehr beliebt. Hierbei ist es allerdings schwierig eine reine Zufallsstichprobe durchzuführen da manche Personen nicht im Telefonbuch stehen, wie auch das oben erwähnte „Stichproben-Desaster“ verdeutlicht. Bei dieser Art der Befragung ist die Bereitschaft teilzunehmen niedriger als bei „face to face“ Gesprächen, vor allem wegen einer negativen Haltung gegenüber Telefonumfragen. Im Gegensatz zu den persönlichen Interviews sticht das Telefoninterview durch geringe Kosten hervor und wird vor allem deswegen auch häufig verwendet. Zudem sind die Ergebnisse der Befragung schnell verfügbar, da der Interviewer meist direkt vor dem Computer arbeitet. Zuletzt wird noch die Methode der Erhebung durch den Postweg erwähnt. Dies erfreut sich jedoch in der heutigen Zeit geringerer Beliebtheit, da sie sehr zeitaufwendig ist und die Teilnahmebereitschaft der Befragten gering ist. Außerdem können Unklarheiten bei den Fragen nicht geklärt werden und Analphabeten, die in Österreich noch immer einen Anteil von circa 15% ausmachen, werden im Vorhinein schon ausgeschlossen. Andererseits kann man durch diese Methode im Gegensatz zu den anderen beiden fast alle Personen erreichen [30, S. 1-3].

Die Schlussfolgerung von Stichproben auf die Grundgesamtheit heißt „induktive Schlussfolgerung“ und diese ist immer mit einem gewissen Grad an Unsicherheit behaftet. Für eine Stichprobe spielt die Größe davon eine wichtige Rolle. Je größer der Stichprobenumfang, umso kleiner ist die Schwankungsbreite und umso genauer kann eine Aussage über die Gesamtheit getroffen werden. Der praktische Grund, warum nicht Umfragen von einem größeren Umfang erstellt werden ist aufgrund der Kosten und einer aufwendigen Umsetzung. Eine größere Stichprobe bedeutet mehr Geld und die Durchführung benötigt mehr Zeit. Wenn der Zeitraum länger ist, kann es zu einer stärkeren Beeinflussung durch den politischen Wahlkampf kommen [26, S. 74].

Der Stichprobenumfang kann mithilfe des Bernoullischen Gesetzes der Großen Zahlen geschätzt werden. Wenn die relative Häufigkeit der Stimmen einer Partei bekannt ist, kann man den minimalen Umfang der Stichprobe berechnen. Soll beispielsweise die relative Häufigkeit mit der Wahrscheinlichkeit von höchstens 3% von der unbekannten Wahrscheinlichkeit um 2% abweichen, kann man den Stichprobenumfang folgendermaßen abschätzen

$$P(|R_n(X) - p| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n \cdot \epsilon^2} \leq 0,03$$

$$P(|R_n(X) - p| \geq 0,02) \leq \frac{1}{4n \cdot 0,02^2} \leq 0,03.$$

Durch Umformen erhält man den Stichprobenumfang n :

$$n \geq \frac{1}{4 \cdot 0,02^2 \cdot 0,03} \approx 20\,834$$

4 Wahlprognosen

Wenn die relative Häufigkeit um eine Wahrscheinlichkeit von höchstens 3% von der unbekannten Wahrscheinlichkeit ϵ um 2% abweicht, müsste der Stichprobenumfang mehr als 20 834 Personen umfassen.

Sollte die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses, beispielsweise dass ein Wähler eine Partei wählt bekannt sein mit $p \leq 0,08$ kann man wieder mithilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen den Stichprobenumfang berechnen.

$$\begin{aligned} P(|R_n(X) - p| \geq 0,02) &\leq \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot 0,02^2} \leq \max_{0 \leq p \leq 0,08} \left\{ \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot 0,02^2} \right\} \leq 0,03 \\ \frac{0,08 \cdot 0,92}{n \cdot 0,02^2} &\leq 0,03 \\ \Rightarrow \frac{0,08 \cdot 0,92}{0,03 \cdot 0,02} &\leq n \approx 6134 \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Berechnung sieht man, dass wenn eine Wahrscheinlichkeit p gegeben ist, der Stichprobenumfang um etwa zwei Drittel kleiner, ausreichend ist [6, S. 174-175].

4.2.1 Schätzen

Beim Schätzen werden allgemein gesagt Wahrscheinlichkeiten angegeben, die von einer Stichprobe auf die Gesamtheit schließen lassen. In der Statistik handelt es sich dabei um die induktive oder schließende Statistik. Als Grundlage für das Schätzen dienen die Stichproben. Es gibt zwei unterschiedliche Arten der Schätzung. Einerseits die Punktschätzung, bei der ein einziger Wert dem wahren Wert nahekommen soll und andererseits die Intervallschätzung, bei der ein Bereich festgelegt wird, in dem der wahre Wert liegen soll. Bei der Punktschätzung erfährt man nicht, wie nahe man dem wahren Wert kommt, siehe 4.1. Eine Art der Punktschätzung ist die Maximum-Likelihood-Methode. Die Idee dieser Methode ist es, für die Schätzung eines Parameters, den Wert des Parameters der am wahrscheinlichsten ist, anzunehmen [32, S. 5, 6, 121].

Wir betrachten die Maximum-Likelihood Schätzung [12, S. 238-241] für die Binomialverteilung. Die Likelihood Funktion ist definiert durch

$$L_k(p) := P_p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

wobei $p \in [0, 1]$ und die Funktion L_k ist definiert auf dem Einheitsintervall und nimmt reelle Werte an. Bei der Schreibweise $L_k(p)$ steht das L für Likelihood und wir müssen im Unterschied zur normalen Binomialverteilung den unbekannten Parameter p schätzen, der am wahrscheinlichsten ist. Das heißt wir bilden das Maximum und erhalten mit

$$L_k(\hat{p}) = \max_{0 \leq p \leq 1} L_k(p)$$

den Maximum-Likelihood Schätzwert. Weil $L_k(0) = L_k(1) = 0$ und $L_k(p) > 0$, können wir das Maximum finden, indem man die erste Ableitung der Likelihood Funktion gleich

4 Wahlprognosen

0 setzt. Nachdem sich nur ein Wert mit dieser Eigenschaft ergibt, muss dieser dann das Maximum sein. Dabei werden die Produktregel und die Kettenregel fürs Differenzieren verwendet.

$$\begin{aligned}
 L_k(p)' &= \binom{n}{k} \cdot [k \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} + p^k \cdot (n-k) \cdot (1-p)^{n-k-1} \cdot (-1)] \\
 &= \binom{n}{k} \cdot [k \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} - p^k \cdot (n-k) \cdot (1-p)^{n-k-1}] \\
 &= \binom{n}{k} \cdot [(k \cdot (1-p) - p \cdot (n-k)) \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k-1}] \\
 &= \binom{n}{k} \cdot (k - np) \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k-1}
 \end{aligned}$$

Setzt man nun $L_k(p)' = 0$ erhält man $\hat{p} = \frac{k}{n}$ als konkreten Maximum-Likelihood Schätzer, welches der relativen Häufigkeit entspricht. Man kann anstelle der Likelihood Funktion auch den Logarithmus davon maximieren. Dadurch erhält man das gleiche Ergebnis.

Möchte man von einer Stichprobe auf die Gesamtheit der Wahlberechtigten schließen, kann man den Maximum-Likelihood Schätzer verwenden. Bei folgendem Beispiel [6, S. 180] gaben von den 1 000 Befragten 337 Personen der Stichprobe an, dass sie Partei A wählen würden. Mit dem Schätzer

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{337}{1\,000} = 0,337 \Rightarrow 33,7\%$$

hat man sich den geschätzten Anteil der gesamten Wähler berechnet.

Die Ungenauigkeit der Aussagekraft der Punktschätzung wird durch die umgekehrte Frage [49] verdeutlicht. Wenn der Anteil der Wähler, die Partei A befürwortet haben bei $p = 0,337$ feststeht und man wissen möchte wie groß die Wahrscheinlichkeit ist genau 33,7% Wähler der Partei A aus einer Stichprobe zu erhalten, ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
 P(X = 337) &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
 &= \binom{1\,000}{337} \cdot 0,337^{337} \cdot (1-p)^{1000-337} = 0,02668
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass man nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,66% bei der Stichprobe exakt 337 Befürworter der Partei A erhält. Aus diesem Grund sollte besser die Intervallschätzung verwendet werden.

Die Intervallschätzung gibt im Gegenzug zur Punktschätzung an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der wahre Wert in dem Intervall enthalten ist [32, S. 121-122]. Das entspricht einer genaueren Aussage als bei der Punktschätzung. Die Intervallschätzung wird

anhand von Konfidenzintervallen berechnet.

Konfidenzintervalle oder Vertrauensintervalle geben die Genauigkeit von Stichproben beim Hochrechnen auf die Gesamtheit an. Eine Stichprobe kann nie mit 100%-iger Sicherheit eine Aussage auf die Grundgesamtheit schließen. Es kann sein, dass die Befragten bei der Umfrage lügen oder sich am Schluss noch umentscheiden. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Intervall getroffen wird, nennt man Konfidenzniveau. Üblicherweise wird mit einem Konfidenzniveau von 90%, 95% oder 99% gerechnet. Je höher das Konfidenzniveau desto größer ist auch das Konfidenzintervall und desto kleiner ist die Irrtumswahrscheinlichkeit [17, S. 103-104].

Bevor nun die Konfidenzintervalle betrachtet werden, wird zunächst nur ein Teil davon, und zwar die Schwankungsbreite ϵ behandelt. Bei einem Konfidenzniveau $\gamma = 95\%$ kann der maximale Fehler mit $\hat{p} = \frac{1}{2}$ berechnet werden. Bei 100 Befragten ergibt

$$\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{100}}$$

die maximale Schwankungsbreite von $\pm 9,8\%$. Erhöht man den Stichprobenumfang auf $n = 500$ oder $n = 1000$, so ergeben sich kleinere Schwankungsbereiche

$$\pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{500}} \Rightarrow \pm 4,4\% \text{ und } \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{1000}} \Rightarrow \pm 3,1\%.$$

Je größer der Stichprobenumfang ist, desto kleiner ist die Fehlerspanne. In der Praxis werden bei Stichproben meist 500 – 1 000 Befragungen durchgeführt [6, S. 163, 185–186].

Im Folgenden werden einige Beispiele mithilfe der mathematischen Grundlagen zur Intervallschätzung berechnet. Bei der standardisierten Reifeprüfung werden jedes Jahr unterschiedlichste Aufgaben zu den Konfidenzintervallen gestellt. Dabei wird nicht nur auf die Berechnung eingegangen, sondern auch auf die Interpretation der Werte.

Ein Meinungsforschungsinstitut soll den unbekannten Anteil von p schätzen, der besagt, dass die Wählerinnen und Wähler für Kandidat A stimmen. Es werden 200 Stichproben mit gleichem Umfang berechnet und für jede Stichprobe wird ein 95%- Konfidenzintervall angegeben. Die Aufgabenstellung lautet, die erwartete Anzahl an Intervallen, die den unbekannten Anteil von p enthalten, anzugeben. Die Anzahl erhält man, indem man

$$n \cdot \gamma = 200 \cdot 0,95 = 190$$

berechnet. In 190 Stichproben ist der geschätzte Wert $\hat{p}$ im Konfidenzintervall mit dem Niveau $\gamma = 95\%$ enthalten [36].

Das folgende Beispiel [10, S. 269] befasst sich mit der Auswahl des Konfidenzintervalls. Für eine Wahlberechnung wird eine Stichprobe der Größe $n = 1\,000$ durchgeführt. Diese

4 Wahlprognosen

werden aus der gesamten Bevölkerung, welche wahlberechtigt ist, $N = 10\,000\,000$ ausgewählt. Von den 1 000 Stimmen wählen 420 Personen Partei A, 380 Personen befürworten Partei B und Partei C erhält 60 Stimmen. Daraus ergibt sich der geschätzte Wert für p und die Standardabweichung

$$\hat{p}_A = 0,42; \hat{\sigma}_A = 0,0156; \hat{p}_B = 0,38; \hat{\sigma}_B = 0,0153; \hat{p}_C = 0,06; \hat{\sigma}_C = 0,0075$$

Will man eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von $\gamma = 0,9$ mit $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,645$ erhält man die Konfidenzintervalle

$$I_{X,A} = [0,3943; 0,4457], I_{X,B} = [0,3548; 0,4052], I_{X,C} = [0,0476; 0,0724]$$

Die Intervallbereiche von Partei A und Partei B überschneiden sich, deswegen ist nicht mit 90% Sicherheit eindeutig, dass Partei A mehr Stimmen erhält. Bei Partei C ist es nicht mit 90% Sicherheit klar, dass sie die 5% Hürde¹ schaffen. Wählt man stattdessen ein Sicherheitsniveau von $\gamma = 0,8$ erhält man für $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,282$ die Konfidenzintervalle

$$I_{X,A} = [0,40; 0,44], I_{X,B} = [0,3604; 0,3997], I_{X,C} = [0,050; 0,0696]$$

Nun kann man mit 80% Sicherheit sagen, dass Partei A gewinnt und Partei C über der 5% Hürde landet.

Mithilfe des Konfidenzintervalls lässt sich auch der minimal notwendige Stichprobenumfang berechnen [10, S. 270-271]. Wenn die Schwankungsbreite ϵ , die Irrtumswahrscheinlichkeit α und ein Schätzwert $\hat{p}$ vorliegt, lässt sich durch umformen, der Umfang n berechnen

$$\epsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow \hat{n} = \hat{p} \cdot (1-\hat{p}) \cdot \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\epsilon^2}.$$

Mit einem geschätzten Wert für p ergibt sich auch ein geschätzter minimal notwendiger Stichprobenumfang $\hat{n}$. Wenn $\hat{p}$ nicht gegeben ist, kann stattdessen das maximale p verwendet werden und dadurch erhält man folgende Größe der Stichprobe:

$$n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\epsilon} \right)^2.$$

Will man die notwendige Stichprobengröße ermitteln, können nachstehende Berechnungen durchgeführt werden. Zwei Parteien A und B möchten eine Wahlumfrage durchführen. Bei Partei A ist ein Ergebnis von circa 40% realistisch, bei Partei B geht es um das Erreichen der 5% Hürde. Der notwendige Stichprobenumfang wird mit dem maximalen p Wert

$$n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\epsilon} \right)^2$$

¹Auf Deutschland bezogen.

4 Wahlprognosen

berechnet. Wenn $\alpha = 0,1$ ergibt sich für $z(0,95) \Rightarrow z = 1,645$ und wenn $\alpha = 0,05$ ergibt sich für $z(0,975) \Rightarrow z = 1,96$ laut der Tabelle für die Standardnormalverteilung.

Tabelle 4.2: Stichprobenumfang

Partei A			Partei B		
α	$\epsilon = 0,01$	$\epsilon = 0,02$	α	$\epsilon = 0,001$	$\epsilon = 0,005$
0,1	6 765	1 691	0,1	676 506	27 060
0,05	9 604	2 401	0,05	960 400	38 416

Je kleiner ϵ gewählt wird, desto höher ist die Sicherheit und desto breiter wird das Konfidenzintervall. Die Berechnungen ergeben einen sehr großen Stichprobenumfang, der aufgrund von Kosten- und Zeitgründen kaum umsetzbar ist, bis auf die Werte von Partei A bei einer Schwankungsbreite von 2%. Mit der $\hat{p}$ - Korrektur, also mit dem Schätzwert, erhält man bei Partei B $\hat{p} = 0,05$ also ergibt $\hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) = 0,0475$ dann ist

$$\hat{n} = 0,0475 \cdot \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\epsilon^2}$$

daraus ergeben sich für Partei B folgende Werte:

Tabelle 4.3: Stichprobenumfang mit $\hat{p}$ - Korrektur

α	$\epsilon = 0,001$	$\epsilon = 0,005$	$\epsilon = 0,01$
0,1	128 536	5 141	1 285
0,2	78 018	3 121	780

Das verdeutlicht die Schwierigkeit bei kleinen Parteien exakte Prognosen zu machen, da der Stichprobenumfang unrealistisch hoch sein müsste oder das Konfidenzniveau niedrig angesetzt werden muss.

Neben bereits vorgegebenen Konfidenzniveaus, lässt sich dieses auch bestimmen, wenn das Intervall bereits vorgegeben ist. Wenn bei einer Stichprobe von 2 000 Personen 14% angeben, dass sie bei der nächsten Wahl eine bestimmte Partei wählen werden. Ein Meinungsforschungsinstitut hat durch diese Angabe berechnet, dass die Partei 12% bis 17% erreichen wird. Die Frage dabei ist, mit welcher Sicherheit dieses Intervall zutrifft. Hier wird nicht mit relativen Häufigkeiten, sondern mit absoluten Häufigkeiten und dem Erwartungswert und der Standardabweichung von Binomialverteilungen gerechnet. Sei $\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0,14 = 280$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{2000 \cdot 0,14 \cdot 0,86} \approx 15,52$ dann ergibt sich für die Anzahl von

$$\begin{aligned}
 n \cdot g_o &= \mu + z \cdot \sigma \\
 2000 \cdot 0,16 &= 280 + z \cdot 15,52 & | - 280 & | : 15,52 \\
 2,557 &= z \stackrel{\text{Tabelle}}{\Rightarrow} \Phi(z) = 0,995 \\
 2 \cdot \phi(z) - 1 &= 0,99.
 \end{aligned}$$

Mit einer Garantiewahrscheinlichkeit von 99% trifft das Konfidenzintervall zu [36].

Als letztes Beispiel wird die klassische Sonntagsfrage „Welche Partei würden Sie wählen, wenn am kommenden Sonntag Wahlen wären?“ betrachtet. Bei einer fiktiven Sonntagsumfrage, bei der Partei A und Partei B wählbar sind, gaben 234 der 1 000 Befragten an, Partei A zu bevorzugen. Bei der Wahl entschieden sich 29,5% für Partei A. Das beidseitige Konfidenzintervall mit Niveau $\gamma = 95\%$ soll berechnet werden und die Frage geklärt werden, ob der tatsächliche Wert von $p = 0,295$ im Intervall liegt.

$$I_X = \hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0,234 \pm 1,96 \cdot \frac{0,234 \cdot 0,766}{1\,000}$$

Das ergibt eine Untergrenze von 0,2078 und eine Obergrenze von 0,2602. Also liegt mit einer Sicherheit von 95% der geschätzte Wert für p im Intervall [20,78%, 26,02%]. Der tatsächliche Wert von 29,5% liegt nicht im Konfidenzintervall [36].

4.3 Hochrechnungen

Aufgrund von Werten aus bereits ausgezählten Gemeinden, wird auf das Wahlverhalten der Gesamtheit geschlossen. Als Methode der Hochrechnung am Wahltag dient die Wählerstromanalyse. Es wird davon ausgegangen, dass sich die Wählerbewegungen in einem bereits ausgezählten Wahllokal gleich verhält wie in den noch nicht ausgezählten Wahllokalen. Bei genügend ausgewerteten Gemeinden, das sind circa 200, liegt der Schätzfehler selten bei mehr als 1%. Diese Berechnungsart wird beispielsweise von SORA verwendet. Es werden bis zu 18 unterschiedliche Wählerstromanalysen durchgeführt. Die Unterschiede liegen dabei in der Einteilung der Gemeinden [14, S. 154-155].

Mittels multiplen Regressionsverfahren wird die Wählerbewegung, anhand von früheren Wahlergebnissen, berechnet. Dabei werden die „Aggregatdaten“, das sind die amtlichen Ergebnisse aus einzelnen Gemeinden als zusammengezählte Daten verwendet. Der Begriff „Regression“ steht für die Betrachtung der Ergebnisse der aktuellen Wahl mithilfe von Daten aus der vorigen Wahl, und „multiple“ da ein Vergleich der Ergebnisse einer Partei der aktuellen Wahl mit allen Parteiergebnissen aus der vorangegangenen Wahl stattfindet. Man benötigt dafür entweder die Ordinary-Least-Square Methode, also die Methode der kleinsten Quadrate oder die Maximum-Likelihood Methode zum Schätzen [14, S. 148-149]. Die multiple lineare Regression ermittelt anhand von mehreren unabhängigen Variablen den Wert von einer abhängigen Variable. Die Formel lautet folgendermaßen:

$$Y_N = Y_S + b \cdot (X_A - X_S).$$

Dabei stehen die Variablen für die Werte²

$$Y_N = \text{neue Wert für die Partei}$$

²Alle Werte außer des Regressionskoeffizienten sind in Prozent.

4 Wahlprognosen

Y_S = Stichprobenwert für diese Partei

X_A = altes Wahlergebnis dieser Partei

X_S = altes Ergebnis des Stichprobenanteils

und b gibt als Regressionskoeffizient an, wie groß der Anstieg oder Abfall von einer Wahl zur nächsten Wahl war. Die unabhängigen Werte sind hier die Ergebnisse aus der vorigen Wahl, also X_A und X_S und die abhängige Variable ist Y_N [26, S. 79].

4.4 Wahlbörsen

Wahlbörsen entstanden in den 80er Jahren in den USA, da traditionelle Umfrageergebnisse mehrmals zu falschen Prognosen führten. Die erste Wahlbörse wurde 1988 in Iowa angewandt und es wurde mit einer Abweichung von 0,25% der Wahlsieger George Bush als Präsident vorhergesagt. Andere Forschungsinstitute, die mit den klassischen Umfragen gearbeitet hatten, waren mehrere Prozentpunkte vom tatsächlichen Ergebnis entfernt. Bei Wahlbörsen wird nicht nach der eigenen Meinung gefragt, wie bei Wahlumfragen, sondern danach, wie die Einschätzung der breiten Bevölkerung sein wird [29, S. 381-382].

Wahlbörsen funktionieren ähnlich wie die Börse. Bei Wahlbörsen werden gesellschaftliche Informationen, also die Meinung über das Wahlverhalten in Marktpreisen widerspiegelt. Daraus ergibt sich ein Kurs, der das Ergebnis der Wahl prognostiziert [9, S. 387]. Dass Märkte die beste Methode sind, die Zusammenfassung der Informationen darzustellen, geht auf den Österreicher Friedrich August Hayek zurück, der dies bereits 1945 verbreitete. Bei den Wahlbörsen werden Parteien wie Aktien gehandelt und die Teilnehmer fungieren als Händler. Die Händler setzten virtuelles oder echtes Geld auf die Aktien. Wenn der Händler eine Partei für überbewertet hält, so wird er die Aktie dafür verkaufen. Meint er hingegen, dass eine Partei unterbewertet ist, so wird er diese kaufen. Wenn beispielsweise ein Händler die Sozialdemokraten, welche mit 28% in der Wahlbörse aufscheinen, besser einschätzt, so wird er „Papiere“ für die Sozialdemokraten kaufen [29, S. 382-383].

Es gibt zwei Arten von Wahlbörsen, einerseits den Stimmenanteilsmarkt, hier werden Stimmenanteile einer Partei oder eines Kandidaten in Prozent angegeben und andererseits den Gewinnermarkt, bei dem ein konkreter Gewinner vorhergesagt wird. Dieser Gewinnermarkt findet vor allem Anwendung beim Mehrheitswahlrecht, wie beispielsweise in den USA. Der größte Unterschied der beiden Arten ist die Aufteilung der Gewinne. Wenn beim Stimmenanteilsmarkt drei Parteien A, B und C bei der tatsächlichen Wahl 50%, 30% und 20% erreichen, erhält man für eine Aktie von Partei A 50 Werteinheiten, bei einer B Aktie gewinnt man 30 Werteinheiten und für eine Aktie der Partei C erhält man 20 Werteinheiten. Dabei hat man ein geringes Risiko das ganze Kapital zu verlieren. Beim Gewinnermarkt erhält man 100 Werteinheiten, wenn man den Gewinner

richtig vorhergesagt hat. Es verläuft nach dem „The Winner takes it all“ Prinzip.

Durch technische Innovationen, wie dem Internet erfreuten sich Wahlbörsen in den 90er Jahren großer Beliebtheit. Wie die erste Wahlbörse zeigt, konnte mit geringem Aufwand eine genauere Prognose als bei Wahlumfragen festgestellt werden. So wurde 1994 in Österreich die erste Wahlbörse durch die Technische Universität Wien durchgeführt. Das wissenschaftliche Interesse sank in den nächsten Jahren, da wenig staatliche Ressourcen eingesetzt wurden. Zusätzlich dazu wurde festgestellt, dass in Europa die Wahlbörsen im Durchschnitt ungenauer sind als Meinungsumfragen. In den USA ist gegenteiliges zu betrachten. Ein Grund dafür ist sicherlich, dass in Europa, im Gegensatz zur USA, vor allem Stimmenanteilmärkte stattfinden.

Zu den Interessen der Händler, auf Grund dessen sie an der Wahlbörse teilnehmen, zählen die Chance auf einen Gewinn, die Spielfreude und das politische Interesse. Aufgrund der Gewinnorientierung der Teilnehmer, werden die Meinungen dieser wahrheitsgetreu dargestellt und die Summe der Meinungen ergibt eine gute Prognose. Die Wahlbörse wirkt somit der Verzerrung aufgrund von subjektiver Vorlieben entgegen, da nach der Meinung der gesamten Wahlbeteiligten gefragt wird und nicht nur nach der eigenen. Auch die Anzahl der Teilnehmer hat keine so große Bedeutung, wie der Stichprobenumfang einer Umfrage. So wurde bei der ersten Wahlbörse mit nur circa 150 Händler ein sehr exaktes Ergebnis prophezeit [9, S. 388-394]. Bei der Wahlbörse spielt es auch deswegen keine Rolle, ob die Teilnehmer einen repräsentativen Querschnitt der Bevölkerung darstellen. So nehmen vor allem junge gebildete computeraffine Männer an einer Wahlbörse teil [29, S. 283]. In Bezug auf die Größe der Teilnehmer wurde sogar ein gegensätzliches Bild zu den Stichprobenberechnungen betrachtet. Beispielsweise wurde vor der Präsidentschaftswahl 1996 in den USA eine Wahlbörse mit 1 000 Händlern durchgeführt. Dabei kam es zu einer durchschnittlichen Abweichung von 4,6%. Die Meinungsumfragen dazu waren genauer. Dies lässt sich folgendermaßen erklären. Wenn eine kleinere Gruppe von Händlern ihre Meinung kundtut, haben diese ein größeres Interesse daran. Wohingegen bei einer höher Anzahl an Händlern inaktive oder nicht seriöse Teilnehmer zu größeren Abweichungen vom Wahlergebnis führen können [9, S. 391].

5 Schluss

Zum Abschluss dieser Arbeit möchte ich noch einmal präziser auf den Titel eingehen und auch nach der Beantwortung der Frage, welches Wahlsystem ideal ist. Eine Partei oder ein Kandidat kann bewusst oder unbewusst mit weniger Stimmen zum Wahlgewinner gekürt werden. Beim Mehrheitswahlrecht kann es aufgrund der Wahlkreiseinteilung zu Verschiebungen der Mandate kommen. Dazu zählt auch das „Gerrymandering“ bei dem versucht wird, den politischen Gegnern, Siege in Wahlkreisen wegzunehmen. Ein extremes Beispiel dafür war eine Wahl im 19. Jahrhundert in Frankreich. Bei der die Konservativen mit 67 Stimmen weniger als die Radikalen, um 10 Vertreter mehr erhielten. Weiters ist nachteilig an der Mehrheitswahl anzumerken, dass sie größere Parteien bevorzugt. Das ist jedoch auch bei einigen Verfahren beim Verhältniswahlrecht zu betrachten. Dass man bei dem Mehrheitswahlrecht einige Abzüge in Bezug auf ein gerechtes Wahlsystem machen muss, zeigt Arrow, indem er festhält, dass es bei einer Wahl ab drei Kandidaten nicht alle Bedingungen für ein gutes Wahlsystem erfüllt.

Bei der Verhältniswahl haben sich im Laufe der letzten Jahrhunderte viele Berechnungsverfahren, mit teilweise nur minimalen Unterschieden entwickelt. Bei den Quotenverfahren kann es aufgrund der Paradoxa unbeabsichtigt dazu kommen, dass eine Partei mit weniger Stimmen eine Wahl gewinnt. So kann es im Extremfall passieren, dass eine Partei Stimmen verliert aber Mandate hinzugewinnt, wie uns das Wählerzuwachsparadoxon gezeigt hat. Ebenfalls kann es durch die Verletzung der Mehrheitsbedingung dazu kommen, dass eine stimmenschwächere Partei eine Bevorzugung erfährt. Bei den Divisorverfahren kann insofern getrickst werden, indem man zuerst eine Berechnung mit den unterschiedlichen Methoden durchführt und dann jenes Verfahren wählt, welches für die regierende Partei am besten ist. In Österreich ist so etwas nicht möglich, da im Gesetz sehr genau beschrieben ist, wie die Wählerstimmen verteilt werden müssen. Zusätzlich dazu kann es bei einem proportionalen Wahlsystem zu einer Beeinflussung des Wählerwillens durch die Sperrklausel kommen. Um einem Verfall der eigenen Stimme vorzubeugen, kann ein Wähler stattdessen lieber einer größeren Partei seine Stimme schenken. Zusammenfassend kann man sagen, dass es sich nicht um die Suche nach dem perfekten Berechnungssystem handelt, sondern dass nach einem Verfahren gesucht wird, dass die Eigenschaften und Anforderungen an eine gute Berechnungsmethode am wenigsten verletzt werden.

Der letzte Teil dieser Arbeit behandelt eher den Aspekt der Mathematik hinter den Wahlen. Die Wahlprognosen können ebenfalls zur Beeinflussung der Wählerschaft führen, wenn diese im Wahlkampf in den Medien präsent sind. Bei den Wahlprognosen spielt besonders die Intervallschätzung eine wichtige Rolle für eine aussagekräftige Vorhersage.

5 *Schluss*

Die Hochrechnungen sind eine interessante Methode zur Prognostizierung. Leider geben die Meinungsforschungsinstitute in Österreich wenig Informationen zur genauen Berechnung dieser. Den Abschluss bilden die modernen Wahlbörsen, welche eher wirtschaftlichen Hintergrund haben, aber aufgrund der Vollständigkeit über die Möglichkeiten eine Prognose der Wahlergebnisse zu erstellen, erklärt wurden.

6 Abbildungsverzeichnis

2.1	Stimmenauszählung ohne Einteilung in Wahlkreise	9
2.2	Einteilung in gleich große Wahlkreise mit Wahlgewinn für Kandidat 1 . .	9
2.3	Zwei unterschiedliche Siege	9
4.1	Rechenregel für die Standardnormalverteilung	65

7 Tabellenverzeichnis

2.1	Beispiel Wahlkreise	6
2.2	Wiederholung der Aufteilung der Wahlkreise	7
3.1	Vergleich von Hamiltons und Jeffersons Methode	26
3.2	Wahrscheinlichkeit, dass die gerundeten Quoten der Summe der Mandate entspricht	28
3.3	Weltbevölkerung 1975 mit Standardrundung und nach größten Resten gerundet	29
3.4	Fiktives Beispiel der Verletzung der Mehrheits- und Minderheitsbedingung	29
3.5	Anwendungsbeispiel des Hare Verfahrens	30
3.6	Anwendungsbeispiel nach Hagenbach-Bischoff und Droop Quote	31
3.7	Alabama Paradoxon beim Verfahren nach Hare	33
3.8	Mandatsverteilung von Maine mit unterschiedlicher Sitzanzahl	34
3.9	Anwendungsbeispiel des Parteienzuwachsparadoxon	35
3.10	Verschiebung von Mandaten aufgrund des Parteienzuwachsparadoxon	35
3.11	Entwicklung der Bevölkerungszahlen und Sitze der USA von 1960 bis 1961	36
3.12	Divisorverfahren im Vergleich	37
3.13	Divisorverfahren als Höchstzahlverfahren	38
3.14	Verfahren nach d'Hondt als Höchstzahlverfahren	40
3.15	Anwendung von Kopfermanns Intervall zur Bestimmung eines Divisors	41
3.16	Anwendung von Pukelsheims Formel zum „besten Divisor“	41
3.17	Verfahren nach d'Hondt als Rangmaßzahlverfahren	42
3.18	Verteilung der Restmandate beim Hagenbach-Bischoff Verfahren	43
3.19	Sitzverteilung nach Hagenbach-Bischoff	43
3.20	Verfahren nach Sainte-Laguë bei der deutschen Bundestagswahl 2005	44
3.21	Anpassung des Divisors	45
3.22	Sainte-Laguë als Höchstzahlverfahren	45
3.23	Sainte-Laguë als Rangmaßzahlverfahren	46
3.24	Fiktives Anwendungsbeispiel des Hill-Huntington Verfahrens	47
3.25	Anwendungsbeispiel zur Stimmen-Monotonie mit dem Hare Verfahren	48
3.26	Verletzung der Quotenbedingung bei Sainte-Laguë	49
3.27	Abhängigkeits-Paradoxon beim Verfahren nach d'Hondt	50
3.28	Vergleich bezüglich Mehrheitsbedingung	51
3.29	Mehrdeutigkeit bei d'Hondt als Höchstzahlverfahren	52
3.30	Listenverbindung beim Hare Verfahren	52
3.31	Bundestagswahl Deutschland 2002 mit Hare Verfahren	53

7 Tabellenverzeichnis

3.32	Bundestagswahl Deutschland 2002 mit Divisorverfahren	54
3.33	Wahlkreiseinteilung nach Hare und d'Hondt	55
3.34	Mandatsverteilung nach Landeswahlkreisen	56
3.35	Wahlzahlen in den Landeswahlkreisen	57
3.36	1. Ermittlungsverfahren im Regionalwahlkreis Wien Süd	57
3.37	2. Ermittlungsverfahren im Landeswahlkreis Wien	58
3.38	3. Ermittlungsverfahren auf Bundesebene	59
4.1	Wahlbeteiligung Bundespräsidentenwahl 2016	61
4.2	Stichprobenumfang	75
4.3	Stichprobenumfang mit $\hat{p}$ - Korrektur	75

8 Literaturverzeichnis

- [1] Arrow, K. *Social Choice and Individual Values*. 3rd. Yale University Press, 2012.
- [2] Balinski, M. L. und Young, P. H. *Fair representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Brookings Institution Press, 2001.
- [3] Behrends, E. „Die Qual der Wahl - die Mathematik des Wählens“. In: Aigner, B. und Behrends, E. *Alles Mathematik. Von Pythagoras bis Big Data*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016.
- [4] Carnal, H. und Riedwyl, H. „Wer kommt ins Parlament?“ In: *Spektrum der Wissenschaft*. September. 2002.
- [5] *Congressional Record. 47th Congress, 1st Session*. Zitiert nach [2]. 1881.
- [6] Dorn, M. „Stochastik in politischen Fragestellungen“. Diplomarbeit Lehramt. Universität Wien, 2010.
- [7] Dubben, H.-H. und Beck-Bornholdt, H.-P. *Mit an Wahrscheinlichkeit grenzende Sicherheit. Logisches Denken und Zufall*. 5. Aufl. Rowohlt, 2010.
- [8] Fahrmeir, L. u. a. *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse*. 8. Aufl. Springer Spektrum, 2016.
- [9] Filzmaier, P. u. a. „Wahlbörsen als interdisziplinäres Instrument der Sozialforschung. Erfahrungen aus Wahlen in Österreich“. In: *SWS-Rundschau*. 43 (3). 2003.
- [10] Fischer, G., Lehner, M. und Puchert, A. *Einführung in die Stochastik*. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2015.
- [11] Grotz, F., Hartmann, C. und Behnke, J. *Wahlen und Wahlsysteme*. De Gruyter, 2017.
- [12] Henze, N. *Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. 13. Aufl. Springer Spektrum, 2021.
- [13] Hesse, C. *Achtung Denkfalle. Die erstaunlichsten Alltagsirrtümer und wie man sie durchschaut*. Beck, 2011.
- [14] Hofinger, C. und Ogris, G. „Orakel der Neuzeit. Was leisten Wahlbörsen, Wählerstromanalysen und Wahltagshochrechnungen?“ In: *Österreichische Zeitschrift für Politikwissenschaft*. 31 (2). 2002.
- [15] Hubka, B. *Ein einfacher Beweis des Arrow-Theorems*. 1975.
- [16] Kopfermann, K. *Mathematische Aspekte der Wahlverfahren. Mandatsverteilung bei Abstimmungen*. BI-Wiss.-Verl., 1991.

- [17] Krämer, W. *Statistik für alle. Die 101 wichtigsten Begriffe anschaulich erklärt*. Springer, 2015.
- [18] Kütting, H. und Sauer, M. J. *Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. 3. Aufl. Springer Spektrum, 2011.
- [19] Lübbert, D. *Sitzzuteilungsverfahren. Wahlmathematische Systematik und Stand der Diskussion*. Infobrief. 2009.
- [20] Maierhofer, K. „Stetigkeitskorrektur und Faustregel von Laplace bei der Normalapproximation der Binomialverteilung und Anwendungen im Mathematikunterricht“. Diplomarbeit Mathematik. Universität Wien, 2017.
- [21] Meyer, J. „Einfache Paradoxien der beschreibenden Statistik“. In: Siller, H.-S., Greefrath, G. und Werner, B. *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2018.
- [22] Nohlen, D. *Wahlrecht und Parteiensystem. Zur Theorie und Empirie der Wahlsysteme*. 7. Aufl. Barbara Budrich, 2014.
- [23] Pukelsheim, F. *Divisor oder Quote. Zur Mathematik von Mandatszuteilungen bei Verhältniswahlen*. Report 392. Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 1998.
- [24] Rinne, H. *Taschenbuch der Statistik*. Harri Deutsch, 2003.
- [25] Roberts, G. K. „Wahlsystem- und Wahlrechtsreformdebatten in Deutschland und Großbritannien“. In: Gallus, A., Schubert, T. und Thieme, T. *Deutsche Kontroversen. Festschrift für Eckhard Jesse*. Nomos, 2013.
- [26] Roth, D. *Empirische Wahlforschung. Ursprung, Theorien, Instrumente und Methoden*. 2. Aufl. Springer VS, 2008.
- [27] Schichl, H. und Steinbauer, R. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer, 2009.
- [28] Schick, K. „Wahlberechnungsverfahren“. In: *Praxis der Mathematik*. 28. Aufl. Heft 2. Aulis-Verl. Deubner, 1986.
- [29] Schredelseker, K. „Wie macht man Wahlprognosen“. In: *Alltagsentscheidungen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017.
- [30] Schwärzler, J. „Methodische Überlegungen zu Wählerstromanalyse und Wahlhochrechnung“. Diplomarbeit Statistik. Universität Wien, 2000.
- [31] Szpiro, G. *Die verflixte Mathematik der Demokratie*. Springer, 2011.
- [32] Tschirk, W. *Bayes-Statistik für Human- und Sozialwissenschaften*. Springer, 2019.
- [33] Ucakar, K. und Gschiegl, S. *Das politische System Österreichs und die EU*. 4. Aufl. Facultas, 2014.

Internetquellen

- [34] BMBWF. *Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS)*. URL: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=4827&token=ddec5415c590424ff8b29e9256efb30e0730c5b9> (besucht am 16.01.2022).
- [35] BMI. *Bundespräsidentenwahl 2016*. URL: https://www.bmi.gv.at/412/Bundespraesidentenwahlen/Bundespraesidentenwahl_2016/start.aspx (besucht am 13.01.2022).
- [36] Bundesministerium für Bildung. URL: <https://www.mathago.at/wp-content/uploads/PDF/AHS/WS4.pdf> (besucht am 01.02.2022).
- [37] Fehndrich, M. *Adams*. URL: <https://www.wahlrecht.de/verfahren/adams.html> (besucht am 08.12.2021).
- [38] Fehndrich, M. *Das Quotenverfahren mit Restausgleich nach größten Bruchteilen*. URL: <https://www.wahlrecht.de/verfahren/hare-niemeyer.html> (besucht am 08.12.2021).
- [39] Fehndrich, M. *Dean*. URL: <https://www.wahlrecht.de/verfahren/dean.html> (besucht am 08.12.2021).
- [40] Fehndrich, M. *Hill/Huntingtion*. URL: <https://www.wahlrecht.de/verfahren/hill.html> (besucht am 08.12.2021).
- [41] Fehndrich, M. *Quotenverfahren*. URL: <https://www.wahlrecht.de/verfahren/quotenverfahren.html> (besucht am 08.12.2021).
- [42] Fehndrich, M. *Rangmaßzahlverfahren*. URL: <https://www.wahlrecht.de/verfahren/rangmasszahlen.html> (besucht am 08.12.2021).
- [43] Fehndrich, M. *Sainte-Laguë - Beispiel*. URL: <https://www.wahlrecht.de/verfahren/stlague12.html> (besucht am 08.12.2021).
- [44] Fehndrich, M., Zicht, W. und Cantow, M. *Wahlen, Wahlrecht und Wahlsysteme*. URL: <https://www.wahlrecht.de/> (besucht am 12.12.2021).
- [45] Fehndrich, M., Zicht, W. und Cantow, M. *Wahlsystem der Bundestagswahl 2021*. URL: <https://www.wahlrecht.de/bundestag/index.htm> (besucht am 27.11.2021).
- [46] *Gesamte Rechtsvorschrift für Ergebnisse der Volkszählung 2011 durch die Statistik Österreich*. URL: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20008470> (besucht am 09.12.2021).

- [47] *Informationen des Bundeswahlleiters, Wahl zum 20. Bundestag am 26. September 2021. Endgültige Ergebnisse nach Wahlkreisen.* URL: https://www.bundeswahlleiter.de/dam/jcr/bf33c285-ee92-455a-a9c3-8d4e3a1ee4b4/btw21_sitzberechnung.pdf (besucht am 27.11.2021).
- [48] *Kritik an den USA. Sind die US-Wahlen undemokratisch?* 2020. URL: <https://www.wiwo.de/politik/ausland/kritik-an-den-usa-sind-die-us-wahlen-undemokratisch/7345004.html>. (besucht am 24.04.2021).
- [49] Küchenhoff, H. *Statistik Vorlesung.* URL: https://statsoz-neu.userweb.mwn.de/lehre/2012_SoSe/Stat2Soz_12/material/StatSoz2_120723.pdf (besucht am 12.01.2022).
- [50] *Landesstatistik. Nationalratswahl 2019.* URL: <https://www.salzburg.gv.at/stat/wahlen/nrw/download/NRW-2019.pdf> (besucht am 09.12.2021).
- [51] Mausberg, W. *Anteile, Zugriffe und Reihenfolgen. Berechnungsverfahren für Sitzverteilungen und Reihenfolgen bei der Besetzung von Gremien und für die Zuteilung sonstiger Berechtigungen im parlamentarischen Bereich.* Arbeitspapier AP 1998/002. 2005. URL: <http://webarchiv.bundestag.de/cgi/show.php?fileToLoad=5443&id=12> (besucht am 08.12.2021).
- [52] *Nationalratswahl 2019. Ergebnisse der Wiener Wahlbehörden.* URL: <https://www.wien.gv.at/wahlergebnis/de/NR191/gesamtansicht.html#9F> (besucht am 10.12.2021).
- [53] *Nationalratswahl 2019.* URL: https://www.bmi.gv.at/412/Bundespraesidentenwahlen/Bundespraesidentenwahl_2016/start.aspx (besucht am 10.12.2021).
- [54] Ross, A. *Gerrymandering in Amerika. Wie sich amerikanische Parteien mit Big Data ihre Wähler aussuchen.* 2019. URL: <https://www.faz.net/aktuell/politik/ausland/warum-amerikas-oberstes-gericht-das-gerrymandering-erlaubt-16259324.html> (besucht am 08.12.2021).
- [55] Verwaltungsplattform. URL: https://www.oesterreich.gv.at/themen/leben_in_oesterreich/wahlen.html (besucht am 26.11.2021).
- [56] *Wahlrecht, Brockhaus.* URL: <https://brockhaus-at.uaccess.univie.ac.at/ecs/permalink/41AEA22F643A0FD8DE6DDA46F8FC585F.pdf> (besucht am 20.11.2020).