

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

Das Erstellen von *GeoGebra*-Applets und ihre
Anwendungsmöglichkeiten in der 9. Schulstufe AHS

verfasst von / submitted by

Laura Sergi, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna, 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 507 520

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt SEK (AB)
UF Englisch
UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Danksagung

Ich möchte mich hiermit bei all jenen bedanken, die mich beim Erstellen meiner Masterarbeit aber auch während des gesamten Studiums tatkräftig unterstützt haben.

Dazu zählen auf der einen Seite Herr ao. Univ.-Prof- Mag. Dr. Stefan Götz, der mich von der Themenfindung bis zum Fertigstellen der Arbeit bestmöglich unterstützt hat. Seine Anmerkungen zu meiner Arbeit und die vielen Unterhaltungen über Mathematikdidaktik allgemein haben nicht nur diese Arbeit positiv beeinflusst, sondern auch meinen eigenen Horizont erweitert. Ich möchte mich daher herzlichst für Ihre wertvollen Beiträge im Schaffungsprozess bedanken!

Ein großes Dankeschön gilt natürlich auch meinen Eltern, die es mir ermöglicht haben, mich voll und ganz auf das Studium konzentrieren zu können, wenn es notwendig war, und auch stets ein offenes Ohr hatten, wenn ich das Bedürfnis verspürt habe, meine Freude über besonders gute oder meinen Ärger über besonders schlechte Lehrveranstaltungen zum Ausdruck zu bringen. Danke Mama, dass du mich – egal wie uninteressant es teilweise für dich gewesen sein muss – immer abgeprüft hast, wenn ich vor schwierigen Prüfungen auf Nummer sicher gehen wollte und immer an mich geglaubt hast.

Zuletzt möchte ich mich auch noch bei meinem Freund bedanken, der mir stets bei mathematischen Fragen geholfen und mir immer zur Seite gestanden hat, mir aber auch gezeigt hat, wie wichtig es ist, ab und zu die Arbeit zur Seite zu legen und den Kopf freizubekommen. Du hast außerdem durch zahlreiche interessante Gespräche und gemeinsames Problemlösen ein noch viel größeres naturwissenschaftliches Interesse in mir entfacht. Danke für alles!

Abstract

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung, wie *GeoGebra*-Applets in der 9. Schulstufe eingesetzt werden können, um die mathematischen Grundvorstellungen von Schüler*innen auszubauen und zu festigen und somit zu einem tieferen Verständnis beizutragen. Nach einer theoretischen Einführung zu Grundvorstellungen, den Vorteilen der Technologienutzung im Mathematikunterricht und der diesbezüglichen Situation in Österreich, soll anschließend insbesondere auf die Erstellung von *GeoGebra*-Applets eingegangen werden. Dafür wird vorerst die Software mit allen für Applets relevanten Funktionen beschrieben, da die Arbeit gleichzeitig auch anderen Lehrpersonen helfen soll, Applets zu erstellen und diese im Unterricht einzusetzen. Mit Bezug auf den Lehrplan der 5. Klasse AHS und die in dieser Schulstufe auszubildenden Grundkompetenzen werden anschließend solche Applets generiert und fachlich als auch didaktisch sowie hinsichtlich ihrer Einsatzmöglichkeiten analysiert.

Abstract

The aim of this thesis is to examine how *GeoGebra* Applets can be created and used to help ninth grade students to develop “Grundvorstellungen” (basic ideas) that are believed to be essential for a profound understanding of mathematics. The theoretical part of this paper not only introduces relevant concepts and the software but also serves as an instruction for developing Applets by explaining the most important *GeoGebra* tools in greater detail. Additionally, the curriculum content for 5th grade AHS as well as skills and competences that need to be acquired are described, before 15 different Applets are created and analyzed from a didactical perspective.

Inhaltsverzeichnis

1	Didaktische Konzepte	3
1.1	Aspekte.....	3
1.2	Grundvorstellungen.....	3
1.3	Wichtigkeit von Grundvorstellungen.....	3
2	Technologieeinsatz im Mathematikunterricht.....	5
2.1	Situation in Österreich.....	5
2.2	Verfügbare Technologien für den Mathematikunterricht	7
2.3	Vorteile des Einsatzes von GeoGebra im Unterricht.....	8
2.4	Der reflektierte Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht	11
3	GeoGebra	14
3.1	Software und Anwendungen	14
3.2	Grundlegende Werkzeuge und Befehle	17
3.3	Werkzeuge für Aktionsobjekte und Texte.....	20
3.4	Zusätzliche Einstellungsmöglichkeiten	25
3.5	Erstellung eines Applets	27
4	Vier Arten von Applets und ihre Einsatzmöglichkeiten	34
4.1	Demonstrationsapplets	34
4.2	Applets zum Entdecken und Ausprobieren	36
4.3	Übungsapplets.....	36
4.4	Werkzeugapplets.....	38
5	Lehrstoff der 9. Schulstufe	40
5.1	Mengen, Zahlen und Rechengesetze.....	40
5.2	Gleichungen und Gleichungssysteme	40
5.3	Funktionen.....	46
5.4	Trigonometrie.....	52
5.5	Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^2$	57

6	Applets für die 5. Klasse AHS.....	62
6.1	<i>Quadratische Gleichung mit einem Parameter</i>	62
6.2	<i>Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck.....</i>	65
6.3	<i>Verhältnisse am Einheitskreis.....</i>	68
6.4	<i>Sinus, Kosinus und Tangens im Einheitskreis.....</i>	71
6.5	<i>Sinus und Kosinus als Projektionsfaktor</i>	73
6.6	<i>Füllkurve eines Kegelstumpfes</i>	76
6.7	<i>Charakteristische Eigenschaft der linearen Funktion</i>	83
6.8	<i>Parameter einer quadratischen Funktion.....</i>	86
6.9	<i>Rationale Funktionen – Definitions- und Wertemenge</i>	90
6.10	<i>Parameter rationaler Funktionen.....</i>	93
6.11	<i>In Formeln Funktionen sehen</i>	96
6.12	<i>Vektoraddition und -subtraktion im $\mathbb{R}^2$.....</i>	100
6.13	<i>Parameterdarstellung einer Geraden in der Ebene</i>	104
6.14	<i>Darstellungswechsel bei Geradengleichungen in der Ebene</i>	107
6.15	<i>Lineares Gleichungssystem in zwei Variablen mit Parametern.....</i>	111
7	Fazit.....	116
8	Quellverzeichnis	118

Einleitung und Aufbau der Arbeit

Bereits seit mehreren Jahren kommt *GeoGebra* an vielen Schulen Österreichs im Mathematikunterricht zum Einsatz, um diesen anschaulicher zu gestalten und Schüler*innen beim Bearbeiten von mathematischen Fragestellungen zu unterstützen. Auch die seit 2018 geltende neue Prüfungsordnung gibt „[...] grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2021) als Minimalanforderungen an elektronische Hilfsmittel vor, Anforderungen welche die Software *GeoGebra* erfüllt. Während zwar online viele Applets zur freien Verfügung stehen, so wird in der Lehrer*innen-Bildung nur sehr wenig auf deren Einsatzmöglichkeiten eingegangen (vgl. Universität Wien, 2016/2017). Ebenso gibt es keine umfassenden Anleitungen, die Lehrpersonen bei der Erstellung von *GeoGebra-Applets* unterstützen könnte. Die Masterarbeit dient dazu, diesen Defiziten zu begegnen und soll auch andere Lehrkräfte dazu anregen und anleiten, nicht nur auf vorhandene Applets zuzugreifen, sondern diese auch selbstständig zu erstellen. Damit soll unter anderem auch der im Lehrplan als maximale Realisierung von Technologieunterstützung festgelegte didaktische Grundsatz, der „sinnvolle[n] Einsatz derartiger Technologien als Werkzeug beim Modellieren, Visualisieren und Experimentieren“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018) vorsieht, umgesetzt werden.

Um das zu erreichen, wird in den *ersten beiden Kapiteln* der Arbeit, nach einer Erläuterung wichtiger didaktischer Konzepte, vorerst auf die Vorteile des Einsatzes von Technologie im Mathematikunterricht eingegangen und auch die Situation im österreichischen Schulsystem wird erläutert.

Im *dritten Kapitel* soll dann die Software *GeoGebra* genauer vorgestellt werden. Neben der Anwendung selbst und den *GeoGebra-Applets* wird auch auf weitere Materialien wie *GeoGebra-Books* und *GeoGebra-Arbeitsblätter* eingegangen und deren Einsatzmöglichkeiten aufgezeigt. Dieser Teil der Arbeit soll auch als eine *Anleitung zur Erstellung von GeoGebra-Applets* fungieren. Insbesondere werden hier die einzelnen zur Verfügung stehenden Werkzeuge und deren Implementierung in Applets erklärt. Auch auf weniger offensichtliche, aber durchaus sehr hilfreiche Möglichkeiten des Programms, wie beispielsweise das Setzen von Bedingungen oder das zusätzliche Skripting wird eingegangen. Ebenso wird in diesem Kapitel diskutiert, wie das Layout eines Applets – also beispielsweise Farbe und Stärke von Objekten

– beeinflusst werden kann und dadurch die Benutzerfreundlichkeit für Schüler*innen potenziell erhöht wird.

Im *vierten Kapitel* werden dann verschiedene Arten von Applets vorgestellt, bevor dann in den *letzten beiden Kapiteln* das zuvor beschriebene Theoriewissen in die Praxis umgesetzt wird. Nach einer allgemeinen Beschreibung des Lehrstoffes der 9. Schulstufe AHS in Mathematik, zu erreichenden Lernzielen und auszubildenden Grundvorstellungen werden Applets erstellt, die zur Erreichung dieser Ziele beitragen sollen. Während einige Applets hauptsächlich dazu dienen, mathematische Sachverhalte zu veranschaulichen, sollen weiters Applets entwickelt werden, die zum Entdecken, Ausprobieren, als Werkzeug und zum Üben eingesetzt werden können. Abschließend werden die zuvor erstellten und vorgestellten Applets fachlich sowie didaktisch analysiert und ihre Einsatzmöglichkeiten beziehungsweise deren Eingliederung in den Unterricht aufgezeigt.

1 Didaktische Konzepte

Um didaktisch-methodische Entscheidungen treffen zu können, oder, wie in diesem Fall, sinnvolle Materialien für den Unterricht gestalten zu können ist es von großer Bedeutung, vorerst festzulegen, welche Grundvorstellungen zu einem Thema bei Schüler*innen ausgebildet werden sollen. In diesem Kapitel sollen die didaktischen Konzepte „Aspekt“ und „Grundvorstellung“ sowie deren Beziehung zueinander definiert und erklärt werden.

1.1 Aspekte

Der Begriff des Aspektes wird in „Didaktik der Analysis“ wie folgt definiert:

„Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann“ (Greefrath et al., 2016: 17)

Es handelt sich bei Aspekten also um rein fachliche Charaktersierungen oder Definitionen von Begriffen. Fachdidaktische Überlegungen spielen hierbei noch keine Rolle.

1.2 Grundvorstellungen

Im Gegensatz zum Aspekt ist die Grundvorstellung zu einem Begriff nun die „inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt“ (Greefrath et al., 2016: 17). Grundvorstellungen helfen also dabei, fachliche Aspekte zu einem bestimmten Themenbereich zu erfassen, diesen Kontext und Sinn zu geben. Ein Aspekt kann hierbei die Basis für eine oder mehrere Grundvorstellungen bilden und umgekehrt kann eine Grundvorstellung auch mehreren Aspekten Bedeutung verleihen.

Bei Grundvorstellungen kann weiter noch zwischen universellen und individuellen beziehungsweise zwischen primären und sekundären Grundvorstellungen unterschieden werden. Während universelle Grundvorstellungen, basierend auf intensiven fachdidaktischen Analysen und Diskursen, angeben, welche Vorstellungen in Schüler*innen idealerweise zu einem Thema ausgebildet werden sollten und damit den Soll-Zustand widerspiegeln, geben individuelle Grundvorstellungen Aufschluss über den Ist-Zustand, den derzeitigen Lernstand eines Schülers oder einer Schülerin und können dabei helfen, methodisch-didaktische Entscheidungen zu treffen. Primäre Grundvorstellungen unterstützen Schüler*innen dabei, konkrete Handlungen, reale Objekte und Erfahrungen mit mathematischen Begriffen zu verknüpfen, sekundäre hingegen dienen dazu, neue Begriffe mit bereits bekannten Vorstellungen zu mathematischen Begriffen zu verbinden (vgl. Greefrath et al., 2016: 18-19).

1.3 Wichtigkeit von Grundvorstellungen

Laut vom Hofe (1995) sind Grundvorstellungen in dreierlei Hinsicht wichtig: sie tragen dazu bei, der Mathematik in den Augen der Schüler*innen Sinn zu geben, sie ermöglichen mentale Repräsentationen und sie sind ein wichtiger Bestandteil des Versuches, Mathematik und

Realität zu verbinden. Grundvorstellungen helfen also dabei, Mathematik und die im Unterricht erworbenen Handlungskompetenzen in einen größeren Kontext zu setzen. Die Ausbildung dieser zielt darauf ab, dass Begriffe und deren Definitionen nicht nur auswendig gelernt werden, sondern dass auch Bedeutung mit ihnen verknüpft wird. Ebenso soll durch das Ausbilden von Grundvorstellungen mathematisches Handeln auf begründeten Überlegungen und Vorstellungen basieren können und Wissen weit über die formale und rezeptive Komponente erworben werden, denn erst dann wird mathematisches Wissen auch transferfähig. Das Ausbilden von tragfähigen Grundvorstellungen ist daher insbesondere für das Modellbilden unumgänglich. Auch für die Lehrperson ist das Wissen über Grundvorstellungen essentiell, um den eigenen Unterricht planen, durchführen und verbessern zu können. Während universelle Grundvorstellungen als Zielorientierung dienen und dabei helfen, methodische und didaktische Entscheidungen zu treffen, sowie passende Materialien auszuwählen und zu entwerfen, können individuelle Grundvorstellungen der Schüler*innen viel über den Lernfortschritt aussagen und bieten somit eine Grundlage, über den eigenen Unterricht zu reflektieren, diesen wenn nötig zu verändern beziehungsweise zu verbessern und Fehlvorstellungen rechtzeitig beheben zu können (vgl. Greefrath et al., 2016: 20).

2 Technologieeinsatz im Mathematikunterricht

Mit der immer besser werdenden technischen Ausstattung von Schulen in den letzten Jahren wurde es auch möglich, die Nutzung verschiedener Technologien im Lehrplan sowie in der Prüfungsordnung zu verankern. In diesem Kapitel soll vorerst auf die Situation in Österreich in Bezug auf im Lehrplan vorgesehene Technologienutzung sowie auf die Ausstattung von Schulen und Haushalten eingegangen werden, bevor dann im Mathematikunterricht verwendete Technologien sowie Hardware- und Software-Lösungen vorgestellt werden. Anschließend werden die Vorteile des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht anhand didaktischer Überlegungen und vorangehender Studien evaluiert und auch potenzielle Gefahren aufgezeigt.

2.1 Situation in Österreich

Während der Lehrplan der AHS Unterstufe zwar vorsieht, elektronische sowie informationstechnische Hilfsmittel beim Lösen von mathematischen Aufgaben zu nutzen, jedoch keine konkreten Anforderungen an technologische Hilfsmittel stellt – „[d]ie Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018) – wird im Lehrplan der AHS Oberstufe im Detail angegeben, welche Mindestvoraussetzungen die zu verwendende Technologieunterstützung erfüllen muss:

„Sie müssen zumindest über grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionen, Kurven und anderen geometrischen Objekten, zum symbolischen Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- und Stammfunktionen, zur Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik verfügen“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018).

Ebenso wird darauf hingewiesen, dass technologische Unterstützung nicht nur beim Bearbeiten von Aufgaben, sondern idealerweise auch als Werkzeug für das Modellbilden, Veranschaulichen sowie zum Entdecken und Ausprobieren eingesetzt werden soll. Die zuvor erwähnten Minimalanforderungen an die zu verwendenden Hilfsmittel wurden 2018 auch in der Prüfungsordnung der AHS verankert und beschreiben damit insbesondere auch jene Unterstützung, die von Schüler*innen bei der Reifeprüfung genutzt werden kann (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2021).

Um den Einsatz einer solchen Technologie auch gewährleisten zu können, ist die Ausstattung an den Schulen sicherzustellen. Zur derzeitigen Situation an den österreichischen Schulen in Bezug auf die technische Ausstattung dieser liegen zwar keine exakten Daten vor, in einer OMG-Umfrage im Jahr 2020 (vgl. OMG-Studie, 2020) wurde jedoch festgestellt, dass

81% der Lernenden ($n = 148$) und 76% der Lehrenden ($n = 152$) sehr zufrieden oder zumindest zufrieden mit der Hardware-Ausstattung an ihrem Schulstandort sind. Auch mit dem Einsatz von Lernsoftware scheinen 90% der Lehrenden und 74% der Lernenden zumindest zufrieden zu sein. Ein weiteres interessantes Resultat der Studie – insbesondere in Bezug auf diese Arbeit – ergab sich bei der Frage nach notwendigen Schritten, die gesetzt werden müssten, um die Digitalisierung an Schulen voranzutreiben. Während 52% der Lehrenden angaben, dass bessere Aus- und Fortbildungsmöglichkeiten angeboten werden sollten, sahen fast genauso viele Lehrende (50%) das Verbessern des Angebotes an digitalen Lehr- und Lernmaterialien als notwendig an, um das Potential bestmöglich nutzen zu können. Dieser Forderung nach einer Verbesserung des Lehr- und Lernmaterials soll mit dieser Arbeit nachgegangen werden.

Um eine Software wie *GeoGebra* nicht nur in der Schule, sondern auch beim Bearbeiten von Hausaufgaben einsetzen zu können, ist neben der Ausstattung der Schulstandorte selbstverständlich auch die technische Ausstattung der Haushalte beziehungsweise das Vorhandensein eines Internetzugangs relevant. Eine Studie der Statistik Austria zum Einsatz von Informations- sowie Kommunikationstechnologien, durchgeführt im Zeitraum April bis Juni 2020 mit rund 4900 Personen, lieferte Erkenntnisse darüber: 90% aller Haushalte verfügten im Jahr 2020 über einen Internetzugang. Zusätzlich wurde erhoben, dass besonders in der Altersgruppe 16-24 Jahre 100% der Männer sowie 97% der Frauen mehrmals täglich das Internet nutzen (vgl. Statistik Austria, 2020a). Eine weitere Studie der Statistik Austria zur Ausstattung privater Haushalte im Zuge der Konsumerhebung 2019/2020 mit 7.139 Haushalten ergab, dass in diesem Zeitraum 97% der Haushalte über ein Mobiltelefon und 72% über einen PC verfügten (vgl. Statistik Austria, 2020b).

Die Studienergebnisse zeigen klar auf, dass fehlende technische Ausrüstung wohl kaum noch ein Argument gegen den Einsatz von Lehr- und Lernsoftware darstellt. Die Statistiken verdeutlichen zusätzlich, wie präsent das Internet in unserem Alltag, besonders in jenem der Schüler*innen, geworden ist. Es ist daher anzunehmen, dass viele Schüler*innen auch ausgeprägte Fähigkeiten im und ein verstärktes Interesse am Umgang mit Technologie besitzen. Beachtet man zusätzlich die im Lehrplan verankerten didaktischen Grundsätze des Unterrichtens, die unter anderem vorgeben, dass „[d]er Unterricht [...] an die Vorkenntnisse, Vorerfahrungen und an die Vorstellungswelt der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen [hat]“ und dass „[d]ie Materialien und Medien, die im Unterricht eingesetzt werden, [...] möglichst aktuell und anschaulich zu sein [haben], um die Schülerinnen und Schüler zu aktiver Mitarbeit anzuregen“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018), so sollte der Einsatz von Technologie auch aus dem Mathematikunterricht eigentlich gar nicht mehr wegzudenken sein.

2.2 Verfügbare Technologien für den Mathematikunterricht

2.2.1 Technologische Systeme

Die in Abschnitt 2.1 angeführten, im Lehrplan verankerten Anforderungen an technologische Hilfsmittel können in drei technologische Systeme gegliedert werden: *Computer-Algebra-Systeme* (oder kurz CAS), *Tabellenkalkulationssoftware* (TKS) sowie *dynamische Geometriesoftware* (DGS) (vgl. Vollrath & Roth, 2012: 162). Computer-Algebra-Systeme sind in der Lage, die grundlegenden operativen Handlungen beim Bearbeiten von mathematischen Fragestellungen zu übernehmen. Dazu zählen im schulischen Kontext neben dem Ausführen von Rechenoperationen mit Zahlen und Variablen insbesondere das Arbeiten mit Termen und Formeln (Umformen, Vereinfachen etc.) sowie das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen.

Unter dem Begriff „Tabellenkalkulationssoftware“ werden Programme zusammengefasst, mit denen Datensätze tabellarisch erfasst, bearbeitet und verarbeitet werden können. TKS soll Schüler*innen unter anderem dabei helfen, mit Hilfe stochastischer Berechnungen Datensätzen zu analysieren sowie grafisch zu veranschaulichen. Besonders beim Arbeiten mit realen Daten, die beispielsweise durch Umfragen gewonnen wurden und oft deutlich umfangreicher sind als Datenlisten in Schulbüchern, sind Tabellenkalkulationsprogramme zur Aufarbeitung dieser kaum mehr wegzudenken.

Während Computer-Algebra-Systeme und Tabellenkalkulationsprogramme primär dazu dienen, operatives Handeln zu erleichtern oder es den Schüler*innen abzunehmen, können dynamische Geometriesoftwares zur Veranschaulichung mathematischer Zusammenhänge eingesetzt werden. Mit ihnen können geometrische Konstruktionen wie ebene Figuren, Körper und Kurven erstellt und anschließend auch skaliert oder verschoben werden. Auch beim Arbeiten mit Vektoren können dynamische Geometriesoftwares durch die Möglichkeit der Erstellung von Punkten und Pfeilen zum Einsatz kommen.

2.2.2 Hardware- und Software-Lösungen

An österreichischen Schulen wird primär *GeoGebra* als Software-Lösung (vgl. GeoGebra, 2021a) oder grafikfähige Taschenrechner wie der TI-Nspire CX CAS, TI 82 bzw. TI 84 oder Casio Classpad II eingesetzt (vgl. Arun, 2020; Windpessl, 2019). Der Vorteil von *GeoGebra* gegenüber anderen Programmen (wie beispielsweise MathCAD oder Mathematica) besteht darin, dass *GeoGebra* sowohl über ein Computer-Algebra-System als auch ein Tabellenkalkulationssystem verfügt und auch eine dynamische Geometriesoftware integriert ist. Zusätzlich ist *GeoGebra* nicht nur als Anwendung für den PC, sondern auch als App für mobile Endgeräte verfügbar. Ein weiterer Vorteil ergibt sich daraus, dass die Software kostenlos

verfügbar ist (vgl. GeoGebra, 2021c). Auch die oben angeführten Handheld-Geräte vereinen CAS, TKS und DGS. Da im Normalfall jede(r) Schüler*in einer Klasse einen solchen Taschenrechner besitzt, ist weder das Mitbringen eines PCs noch das Arbeiten im EDV-Saal notwendig.

Die Auswahl einer geeigneten Technologie-Lösung erfolgt durch die Schulen oder die Lehrkräfte selbst, innerhalb einer Klasse wird jedoch gewöhnlich auch ein und dieselbe Software oder Hardware verwendet. Einem im Jahr 2020 im Auftrag von Mathago durchgeführten Test zufolge, bei dem verschiedene Maturaaufgaben mit verschiedenen Technologien gelöst wurden, soll *GeoGebra* sowohl in Bezug auf die Anzahl der mit Technologie lösbaren Items als auch hinsichtlich der für das Lösen benötigten Zeit besser abgeschnitten haben als Handhelds (vgl. Arun, 2020). Allgemein lässt sich jedoch anmerken, dass alle verfügbaren Systeme Vor- und Nachteile aufweisen und der Umgang mit ihnen gelehrt als auch gelernt werden muss, damit diese sinnvoll und effizient eingesetzt werden können. Zusätzlich muss bei der Auswahl einer Hardware- oder Softwarelösung auch die Finanzierungsfrage geklärt werden, denn die Kosten für die Anschaffung von Taschenrechnern müssen in Österreich von den Schüler*innen beziehungsweise deren Eltern getragen werden. Wird mit Software-Lösungen für den PC gearbeitet, so müssen diese idealerweise auch von zuhause aus verfügbar sein, was wiederum die Anschaffung eines Laptops oder eines anderen mobilen Endgerätes notwendig macht.

2.3 Vorteile des Einsatzes von GeoGebra im Unterricht

Mit steigendem Technologieeinsatz an Schulen weltweit verbesserte sich auch die Studienlage zum Einsatz von *GeoGebra* oder Taschencomputern im Mathematikunterricht und dessen Effekt. Egal ob Studien aus dem europäischen oder aber dem asiatischen Raum betrachtet werden, es zeigt sich unmissverständlich eine klare Tendenz: nicht nur die Wahrnehmung von Schüler*innen, sondern auch die messbaren Effekte von Technologieeinsatz im Mathematikunterricht sind durchwegs positiv. Im Folgenden sollen die wichtigsten Forschungsergebnisse zusammengefasst werden.

Die erste wichtige Erkenntnis, die in mehreren Forschungsberichten angeführt ist, ist die Steigerung des Interesses und der Motivation der Lernenden. Schüler*innen sehen das Arbeiten mit dem Programm *GeoGebra* als spannend und bereichernd an und beschäftigen sich daher auch lieber mit den darin repräsentierten mathematischen Inhalten (vgl. Holzer, 2019; Arbain & Shukor, 2015; Radovic et al., 2020). Dies ist nicht weiter verwunderlich. Die Mediennutzung hat sich mit dem Aufkommen des Smartphones dahingehend verändert, dass bereits in sehr jungem Alter dynamische Internetseiten und Applikationen mehrmals täglich aufgerufen werden, um Informationen zu erhalten, Alltagsprobleme zu lösen und sich zu

unterhalten oder unterhalten zu lassen – und das alles mit einem Klick. Dass dies unter Umständen zur Reizüberflutung führen kann, muss wohl an dieser Stelle nicht weiter erklärt werden. Schon im Kleinkindalter passt sich das Gehirn an diese Reize an, gewöhnt sich aber gleichermaßen auch an diese übermäßige Stimulation, sodass statische, oft farblose Texte in Büchern nicht mehr die Aufmerksamkeit dieser reizüberfluteten Gehirne auf sich ziehen können. Es scheint ein unrealistisches Vorhaben zu sein, Smartphones wieder aus unserem täglichen Leben abzuschaffen, wohl aber ist es möglich durch dynamische Software-Systeme diesem erhöhten Bedarf an Stimulation auch im Unterricht gerecht zu werden (vgl. De Witt, 2000).

Auch in Bezug auf den Wissenserwerb konnte ein positiver Effekt von Technologieunterstützung nachgewiesen werden. Es zeigte sich nicht nur, dass jene Gruppen, die mit *GeoGebra* unterrichtet wurden, in den darauffolgenden Überprüfungen besser abschnitten als die Kontrollgruppen, ebenso konnte nachgewiesen werden, dass das erworbene Wissen auch nachhaltiger war als bei jenen Gruppen, die ohne Technologieunterstützung unterrichtet wurden (vgl. Birgin & Uzun Yazıcı, 2021; Holzer, 2019; Radovic et al., 2020). Hier könnte argumentiert werden, dass es nicht weiter überraschend ist, dass Schüler*innen, denen ein Computerprogramm zur Verfügung steht, um Aufgaben zu bearbeiten, besser abschneiden. Die Fehleranzahl kann selbstverständlich drastisch reduziert werden, wenn gewisse Arbeitsschritte von einem Programm übernommen werden. So wäre es beispielsweise auch offensichtlich, dass Schüler*innen beispielsweise beim Dividieren von Dezimalzahlen weniger Fehler machen, wenn für diese Divisionen ein Taschenrechner zur Verfügung gestellt wird. Betrachtet man die oben erwähnten Studien genauer, so zeigt sich jedoch, dass dieser Vergleich nicht gerechtfertigt ist: in allen oben erwähnten Studien wurde *GeoGebra* entweder rein als Instruktionsmedium eingesetzt oder zum Ausprobieren und Entdecken von Schüler*innen verwendet, nie aber als Unterstützungswerkzeug bei der anschließenden Überprüfung der Effekte.

Zusätzlich zu empirischen Daten finden sich auch theoretische Überlegungen zu den Vorteilen von Technologieeinsatz im Mathematikunterricht. Lechner beispielsweise setzte sich schon vor mehr als 20 Jahren damit auseinander, wie CAS, DGS und TKS den Mathematikunterricht bereichern und dazu beitragen können, tragfähige Grundvorstellungen auszubilden. Wie ein Computer-Algebra-System beim Darstellen, Operieren und Interpretieren hilfreich sein kann, wird wie folgt formuliert:

„Wie können CAS bei diesem Übersetzungsprozess helfen? Nun: einerseits wird er schwieriger, da zum Übersetzungsprozess von der Problemstellung in die

mathematische Sprache noch der [Übersetzungsvorgang] in die mathematische Arbeitsumgebung des CAS hinzukommt, andererseits gewinnen wir aber dadurch einen (einfachen) Zugang zu einer Fülle an verschiedenen Darstellungsformen, die uns bei der Bearbeitung und v.a. bei der Interpretation unserer Ergebnisse hilfreich sein können.“ (Lechner, 1999/2000: 18)

Auch wenn der Autor in diesem Zitat nur auf die Potentiale von CAS hinweist, so können die Überlegungen auf die gesamte Arbeitsumgebung von *GeoGebra* umgelegt werden.

Lechner erörtert zusätzlich die Potentiale von Technologieeinsatz in Bezug auf die verschiedenen Tätigkeitsbereiche, also beim *darstellend-interpretierenden Arbeiten*, beim *operativ-algorithmischen Arbeiten*, beim *kritisch-argumentativen Arbeiten* sowie beim *heuristisch-experimentellen Arbeiten*. So sieht der Autor beim *darstellend-interpretierenden Arbeiten* das Potential von Technologien wie *GeoGebra* in der Verwendung dieser als Visualisierungswerkzeuge. Beim Darstellen und Interpretieren geht es im Grunde immer um das Übersetzen: das Übersetzen von Problemen in Alltagssprache in die Sprache der Mathematik, das Übersetzen von mathematischen Ergebnissen in die Alltagssprache oder auch das „Übersetz[en] einer Darstellung in eine andere innerhalb der Mathematik“ (Lechner, 1999/2000: 17). Genau hier kann *GeoGebra* helfen, Sachverhalte zu veranschaulichen, Darstellungswechsel zu betreiben und anhand dieser verschiedenen Darstellungen sind Ergebnisse oft auch einfacher zu interpretieren. Auch für den Ausbau tragfähiger Grundvorstellungen ist diese Möglichkeit des Programmes nicht zu vernachlässigen: sowohl beim Darstellen (insbesondere in verschiedenen Formen) werden mathematischen Sachverhalten Bedeutungen zugeschrieben als auch beim anschließenden Interpretieren der von dem Computer gelieferten Lösungen (vgl. Lechner 1999/2000: 18-21).

Beim *formal-operativen Arbeiten*, also beim algorithmischen und kalkül-orientiertem Handeln, dienen mathematische Arbeitsumgebungen hingegen als Rechenwerkzeuge und bieten bei verständnisvollem Umgang damit die Möglichkeit, Kalküle besser zu verstehen, Zusammenhänge zu erkennen und mathematische Probleme vollständig zu lösen, während ohne der Hilfe des Programmes unter Umständen vielleicht nur Lösungsansätze gefunden werden können (vgl. Lechner, 1999/2000: 23).

Auch als Untersuchungswerkzeug kann *GeoGebra* im Mathematikunterricht Vorteile bringen, insbesondere beim *heuristisch-experimentellen Arbeiten*. *GeoGebra* oder andere dynamische Geometriesoftwares ermöglichen es, ohne viel Aufwand Parameter zu verändern, Zusammenhänge zu entdecken oder Vermutungen darüber aufzustellen und bringt somit auch den induktiven Charakter der Mathematik zum Vorschein (vgl. Lechner, 1999/2000: 29-30).

Die Vorteile von Technologieeinsatz im Mathematikunterricht beim *kritisch-argumentativen Arbeiten* (also beim Beweisen, Begründen und Argumentieren) sind laut Lechner (1999/2000: 33) nicht so offensichtlich wie in den anderen Tätigkeitsbereichen, da hier Software wie *GeoGebra* primär als Überprüfungswerkzeug eingesetzt wird. Er betont jedoch, dass durch die teilweise ‚Auslagerung‘ anderer Tätigkeiten, der Fokus auf das kritisch-argumentative Arbeiten gerichtet werden kann:

„In dem Maße, in dem das Durchführen von Verfahren an die Technologie delegiert werden kann, gewinnen andere grundlegende mathematische Fähigkeiten an Bedeutung und dazu gehört neben dem Darstellen, neben dem bewussten Einsatz heuristischer Techniken eben Argumentieren. Fähigkeiten, die Maschinen nicht oder nur in eingeschränktem Maße zugesprochen werden, können so stärker ins Blickfeld des [Mathematikunterrichts] treten und im Unterricht intensiver entwickelt werden.“ (Lechner 1999/2000: 33)

Entfällt also beispielsweise weniger Zeit auf das händische Erstellen eines Funktionsgraphen, so kann mehr Zeit dafür aufgewendet werden, im Unterricht darüber zu diskutieren, warum der Funktionsgraph genauso aussieht wie sie aussieht. Auch in „Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe“ werden die Chancen des Technologieeinsatzes gut zusammengefasst:

„Der Unterrichtsschwerpunkt verschiebt sich in Richtung Planung, Analyse, Argumentation sowie kreatives und produktives Arbeiten, [s]elbsttätiges und entdeckendes Arbeiten [...] werden unterstützt [und auch] im Hinblick auf Modellierungen eröffnen sich neue Möglichkeiten zur Behandlung realistischer Probleme.“ (Vollrath & Roth, 2012: 164)

Selbstverständlich ist es für alle Tätigkeitsbereiche wichtig, die zur Verfügung stehende Technologie mit Maß und Ziel im Unterricht einzusetzen und besonders Aufgabenstellungen anzupassen, um all die Potentiale bestmöglich auszuschöpfen, wie im nächsten Abschnitt genauer erläutert wird.

2.4 Der reflektierte Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht

All diese Möglichkeiten, die sich durch den Computereinsatz im Mathematikunterricht eröffnen, sind jedoch nur als „prinzipielle“ Chancen zu betrachten, da ihr Erfolg von vielen Faktoren abhängt. Nicht nur die Schüler*innen, auch die Lehrpersonen müssen über ausreichende Fähigkeiten besitzen, mit Computerprogrammen und -werkzeugen umzugehen und auch gewillt sein, sich damit auseinanderzusetzen. Außerdem sind Unterrichtskonzepte notwendig, die auf das Arbeiten mit dem Computer ausgelegt sind und dieses auch schulen (vgl. Vollrath

& Roth, 2012: 164). Das Auslagern von Rechenarbeit, ohne zu verstehen, was eigentlich berechnet wird, ist nicht Sinn und Zweck eines computergestützten Unterrichts. Die Lehrperson sollte daher stets bereits bei der Vorbereitung überlegen, ob der Einsatz von Technologie an einer gewissen Stelle im Unterricht didaktischen Mehrwert bringt und – wenn ja – die Aufgabenstellungen entsprechend anpassen, sodass *GeoGebra* oder andere Technologien das mathematische Arbeiten den Schüler*innen nicht nur abnehmen sondern es bereichern. Darunter fällt beispielsweise das bewusste Fokussieren auf die Analyse und die Interpretation von Ergebnissen:

„Selbstständige Arbeitsphasen [...] am Computer müssen gut vorbereitet und angeleitet sein. Insbesondere sind klare Arbeitsaufträge notwendig, die in der Regel immer zwei Reflexionsphasen umfassen, nämlich eine vor der jeweiligen Nutzung des Rechners und eine im Anschluss an die Nutzung, die in einer schriftlichen Sicherung der erarbeiteten Ergebnisse münden sollte. Ohne diese Vorgehensweise besteht die schon häufiger dokumentierte Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler das eigentliche Ziel aus den Augen verlieren und nur noch unreflektiert mit der Maus „aktiv“ sind.“ (Vollrath & Roth, 2012: 171)

Die Aufgabenstellung „Finde die Lösungen der Gleichung $x^2 + 6x + 9 = 0$ “ könnte also beispielsweise zu „Welche Lösungsfälle können bei quadratischen Gleichungen auftreten? Wovon hängt die Anzahl der Lösungen ab? Finde die Lösung der Gleichung $x^2 + 6x + 9 = 0$ und begründe, warum diese Gleichung genau eine Lösung hat!“ abgeändert werden. Zusätzlich sollte auch vermehrt auf das Arbeiten mit realistischen Aufgaben gesetzt werden. Dank *GeoGebra* können größere Datenmengen auf einmal oder komplexere Funktionsterme bearbeitet und analysiert werden. Die grafische Veranschaulichung und das Untersuchen von Zahlen und Fakten zur Coronapandemie stellt beispielsweise eine Möglichkeit dar, wie Realmodelle mit Hilfe von *GeoGebra* im Unterricht verwendet werden können. Die Chancen, die *GeoGebra* in dieser Hinsicht eröffnet, sind nahezu grenzenlos. Eine weitere Möglichkeit, zu verhindern, dass der Computer schlicht und einfach Arbeit abnimmt, ist das eigenständige Erstellen von „Werkzeugapplets“ durch die Schüler*innen, wie in Abschnitt 4.4 näher erläutert wird.

Zusätzlich ist natürlich nicht zu übersehen, dass der Computer – vor allem aber das Mobiltelefon, falls darauf gearbeitet wird – auch immer gleichzeitig eine Ablenkung darstellen kann. Benachrichtigungen oder auch rein die Möglichkeit, andere Anwendungen zu öffnen, lenken die Aufmerksamkeit der Schüler*innen oft auf nicht unterrichtsbezogene Inhalte. Da auch für das Verwenden von *GeoGebra*-Applets eine Internetverbindung notwendig ist, ist

auch das Entkoppeln der Geräte von der Netzwerkverbindung keine Option. Während es viele Computerräume zulassen, dass die Lehrperson auf alle Bildschirme der Schüler*innen gleichzeitig Zugriff und Einblick hat, gibt es beim Arbeiten mit mobilen Endgeräten keine solche Möglichkeit, es sei denn, es wird mit *GeoGebra-Classroom* gearbeitet (siehe Abschnitt 3.1.3.2). Außerdem ist es immer sinnvoll, als Lehrperson nicht hinter dem eigenen Computer zu verweilen, sondern sich im Klassenraum zu bewegen, um den Überblick zu behalten. Auch klare Aufgabenstellungen und gut überlegte zeitliche Angaben können Ablenkungen vorbeugen. Besonders wenn Schüler*innen nicht genau wissen, was sie eigentlich tun sollen oder zu wenig Arbeitsaufträge bekommen, werden andere Anwendungen schnell zur Alternativbeschäftigung.

Anschließend soll an dieser Stelle noch darauf hingewiesen werden, dass viel Zeit dafür aufgewendet werden muss, die Schüler*innen mit dem Programm vertraut zu machen, um es dann auch sinnvoll im Unterricht einsetzen zu können. Auch wenn viele Bereiche der Arbeitsumgebung sehr intuitiv zu handhaben sind und auch das Technologiewissen in unserer Gesellschaft immer größer wird, so gibt es doch einige programmspezifische Besonderheiten und Einstellungen, die im Unterricht thematisiert werden sollten. Damit sind insbesondere die von *GeoGebra* akzeptierten Notationen wie der Punkt bei Dezimalzahlen (2.45 statt 2,45) oder die Notationen für Vektoren ($a = (x, y)$ für Pfeile, $A = (x, y)$ für Punkte) oder auch Rundungseinstellungen gemeint. Treten gehäuft Fehler auf, weil Terme nicht richtig eingetippt oder die Einstellungen nicht angepasst werden, so kann dies schnell zu Frustration führen. Dennoch ist es in keiner Weise Zeitverschwendung, sich gemeinsam mit den Schüler*innen intensiv mit dem Programm auseinanderzusetzen, da es den Unterricht in vieler Hinsicht bereichern kann.

3 GeoGebra

In diesem Kapitel werden vorerst die Software und verschiedene Anwendungen dieser vorgestellt, bevor dann auf die Bedienung dieser eingegangen wird. Grundlegende Werkzeuge und Befehle als auch die – wohl weniger häufig verwendeten aber für die Erstellung von Applets sehr hilfreichen – Aktionsobjekte werden erklärt. Am Ende dieses Kapitels ist auch eine detaillierte Beschreibung des Erstellungsvorgangs eines ausgewählten Applets zu finden. Diese soll Lehrkräfte bei der Erstellung eigener Applets unterstützen.

3.1 Software und Anwendungen

3.1.1 Entstehung und Entwicklung

GeoGebra ist eine für den schulischen Einsatz bestimmte Software, die 2001 bis 2002 von Markus Hohenwarter an der Universität Salzburg im Zuge einer Diplomarbeit entwickelt wurde. Ursprünglich wurde mit der Entwicklung von *GeoGebra* dem Versuch nachgegangen, eine dynamische Geometrie-Software zu generieren und diese mit einem Computer-Algebra-System zu verknüpfen. Ziel war es, Objekte sowohl geometrisch als auch algebraisch darstellen und verändern zu können (vgl. Hohenwarter, 2002). Mittlerweile sind noch weitere Systeme, wie das Tabellenkalkulationssystem integriert und Anwendungen und Materialien für den bestmöglichen Einsatz im Unterricht entwickelt worden. Heute wird *GeoGebra* als Open-Source-Software weltweit millionenfach genutzt und zeichnet sich durch seine vielseitigen Funktionen, eine einfache, intuitive Benutzeroberfläche sowie die Möglichkeit der Gestaltung von interaktiven Unterrichtsmaterialien, wie eben auch Applets, aus (vgl. GeoGebra, 2021c).

3.1.2 GeoGebra-Apps

Auch wenn *GeoGebra*-Applets mit mobilen Endgeräten online auf der Website abgerufen und verwendet werden können, so ist für das allgemeine Arbeiten mit dem Programm das Verwenden einer dafür geeigneten Applikation zu empfehlen. Dieser Abschnitt soll daher eine kurze Übersicht über die mittlerweile verfügbaren iOS- und Android-Applikationen und deren Funktionen geben.

Die in Abbildung 1 dargestellte Tabelle zeigt auf, welche Funktionen in welchen Applikationen verfügbar sind und dient somit auch gleich als Überblick über die wichtigsten Funktionen von *GeoGebra* allgemein.

Apps / Funktionen	 Taschenrechner	 Grafikrechner	 Geometrie	 3D	 CAS	 Suite	 Classic
Numerische Berechnungen	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Operationen mit Funktionen	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Operationen mit Brüchen	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Grafische Darstellung		✓	✓	✓	✓	✓	✓
Schieberegler		✓	✓	✓	✓	✓	✓
Vektoren und Matrizen		✓	✓	✓	✓	✓	✓
Wertetabelle		✓			✓	✓	✓
Geometrische Konstruktionen			✓	✓		✓	✓
3D-Graphen				✓		✓	✓
Wahrscheinlichkeitsrechner						✓*	✓
Ableitungen und Integrale				✓	✓	✓	✓
Gleichungen lösen				✓	✓	✓	✓
Symbolische Berechnungen				✓	✓	✓	✓
Tabellenkalkulation							✓

* kommt demnächst für iOS und Android

Abbildung 1: Vergleich der GeoGebra Mathe Apps (<https://www.geogebra.org/m/rgntrz2d#material/vwh7kv4s>)

Die neueste Anwendung „Suite“ kann auf Smartphones installiert werden und vereint die Anwendungen „Grafikrechner“, „Geometrie“, „3D“ sowie „CAS“. Vergleicht man die PC-Anwendung „Classic“ mit der Smartphone-App „Suite“ so fällt auf, dass die PC-Version abgesehen vom Vorteil des größeren Bildschirms auch in anderen Punkten benutzerfreundlicher ist. So kann hier im Gegensatz zu „Suite“ der CAS-Rechner mit dem Grafikrechner verbunden werden und ein ständiges Wechseln der Tastatur (in der mobilen Version kann nur entweder die Zeichentastatur, die Zahlentastatur oder die Buchstabentastatur geöffnet werden) ist nicht notwendig. Auch das Tabellenkalkulationsprogramm kann nur in der PC-Variante verwendet werden. Beachtet man jedoch, dass an vielen Schulstandorten nur begrenzt EDV-Säle oder Laptops verfügbar sind und auch nicht alle Schüler*innen einen eigenen Laptop besitzen, so stellen die Applikationen für mobile Endgeräte auf jeden Fall eine sinnvolle Möglichkeit für vermehrten Technologieeinsatz im Mathematikunterricht dar. Verfolgt man das Ziel, dass die Applets auch problemlos auf Smartphones geöffnet und bearbeitet werden können, sollte jedoch bei der Erstellung dieser berücksichtigt werden, dass das Layout auch an geringere Bildschirmgrößen angepasst werden muss.

3.1.3 Weitere Anwendungen

Da die Möglichkeit des virtuellen Unterrichtens besonders in den letzten beiden Jahren immer häufiger genutzt werden musste, hat sich auch die Plattform *GeoGebra* den neuen Herausforderungen gestellt und zwei neue Anwendungen veröffentlicht: „*GeoGebra-Notizen*“ und „*GeoGebra-Classroom*“.

3.1.3.1 *GeoGebra-Notizen*

Mit der Anwendung „Notizen“ kann eine Bildschirmpräsentation mit verschiedenen Elementen erstellt werden. Neben den klassischen Werkzeugen wie Stift und Radierer können auch geometrische Figuren, Tabellen, Gleichungen, Dateien und Mind-Maps sowie ein *GeoGebra*-Grafik- beziehungsweise CAS-Fenster in die Präsentation eingefügt werden. Die Folien können entweder „live“ erstellt, oder vorbereitet, gespeichert und anschließend im Unterricht verwendet werden. Da im Moment noch keine Möglichkeit der Einbettung von Applets gegeben ist, wird auf die Notizfunktion an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Es ist jedoch denkbar (und wäre mit Sicherheit sinnvoll), dass diese Möglichkeit in Zukunft angeboten wird.

3.1.3.2 *GeoGebra-Classroom*

Wird ein *GeoGebra*-Classroom erstellt, so können Schüler*innen mit einem Code in diesen virtuell eintreten. Innerhalb des Classrooms können dann mehrere Einheiten, die zuvor von der Lehrperson erstellt wurden, mit jeweils verschiedenen Aufgaben von den Schüler*innen bearbeitet und der Lernfortschritt von der Lehrperson beobachtet werden. Zu diesen Aufgaben zählen Fragestellungen wie offene Fragen oder Multiple-Choice Fragen, aber auch *GeoGebra* Apps wie beispielsweise „Suite“ oder „Classic“ sowie *GeoGebra*-Aktivitäten (mehr dazu im Abschnitt 3.1.4.2) können integriert werden. Die Lehrperson kann verfolgen, welche Antworten die einzelnen Schüler*innen auf bestimmte Fragen geben oder wie diese beispielsweise beim Konstruieren einer geometrischen Figur vorgehen. Auch die zuvor erwähnte Notiz-Funktion kann hier als Aufgabe eingefügt werden, zum Beispiel zum Erstellen von Mind-Maps.

3.1.4 *GeoGebra* Materialien

Innerhalb der in Abschnitt 3.1.3.2 beschriebenen Anwendung „Classroom“ oder auch außerhalb dieser können verschiedene Materialien kreiert und im Unterricht eingesetzt werden. Die nachstehend beschriebenen Materialien „Applet“, „Aktivität“ und „Buch“ können wiederum ineinander verschachtelt werden.

3.1.4.1 *GeoGebra-Applet*

Einen der kleinsten Bausteine eines *GeoGebra*-Unterrichtsmaterials bildet meist ein Applet. Darunter versteht man eine zuvor erstellte *GeoGebra*-Datei, die meist interaktive Elemente und Aufgabenstellungen enthält. Diese können entweder mit den *GeoGebra*-Apps oder auch mit der *GeoGebra*-Web-Version erstellt werden, jedoch empfiehlt es sich, bei der Erstellung von komplexeren Applets eine Desktop-Version – anstatt ein weniger übersichtliches Smartphone-App – zu verwenden. Applets zeichnen sich im Gegensatz zum herkömmlichen *GeoGebra* Einsatz im Klassenzimmer insbesondere dadurch aus, dass gewisse Konstruktions- oder Rechenschritte schon im Vorhinein vorgenommen werden und dadurch im Unterricht viel Zeit

eingespart werden kann. Ebenso können kompliziertere mathematische Ausdrücke, wie lange Funktionsterme und komplexe Formeln oder auch längere Datenlisten von der Lehrperson hinterlegt werden und müssen dann nicht mehr in der Unterrichtsstunde von den Schüler*innen eingetippt werden. Diese interaktiven Übungen können dann privat oder öffentlich hochgeladen werden und als ‚Aktivität‘ in weiteren Materialien wie beispielsweise einer Classroom-Aufgabe integriert oder als Link direkt versendet werden.

3.1.4.2 GeoGebra-Aktivität

Sobald ein Applet hochgeladen wird, wird es zur „Aktivität“ und kann zusätzlich noch mit weiteren, zum Teil interaktiven, Elementen versehen werden. Dazu zählen Fragen (offen oder mit Antwortmöglichkeiten), Informations- oder Instruktionstexte, Videos oder Bilder. Eine Aktivität ist am besten mit einem klassischen Arbeitsblatt, wie wir es alle kennen, vergleichbar, mit dem großen Unterschied, dass es online abrufbar, bearbeitbar sowie dynamisch ist und auch Rückmeldung geben kann. Nicht immer ist es notwendig, selbstständig Applets beziehungsweise Aktivitäten zu erstellen. Gerade in den Themenbereichen „Geometrie“ und „Funktionale Abhängigkeiten“ existiert online eine Vielzahl an Aktivitäten, die vom *GeoGebra* Team selbst oder von anderen Nutzer*innen für den Unterrichtseinsatz erstellt wurden und kostenlos zur Verfügung stehen. Auch diese können, genauso wie selbst erstellte Aktivitäten, in anderen Anwendungen verwendet und in Materialien eingefügt werden (vgl. GeoGebra, 2021d).

3.1.4.3 GeoGebra-Buch

In einem *GeoGebra*-Buch wiederum können mehrere Aktivitäten in Kapitel strukturiert und zusammengefasst werden. Oftmals handelt es sich bei den in Büchern integrierten Aktivitäten auch um reine Textelemente. Auch Metadaten wie Titel, Sprache, Zielgruppe, Beschreibungen und Tags können hinterlegt werden, damit passende Bücher von der *GeoGebra*-Community leicht gefunden und dann genutzt werden können. Selbstverständlich kann auch hier die Sichtbarkeit so eingestellt werden, dass nur über einen Link auf das Buch zugegriffen werden kann. Bücher sind insbesondere sinnvoll, um Materialien, die zu einem bestimmten Thema erstellt oder ausgewählt wurden, für die Schüler*innen übersichtlich zu sammeln. Auch interaktive längere Arbeitsaufträge (Wochenplan etc.) in Form eines *GeoGebra*-Buches, besonders solche die im Distance-Learning bearbeitet werden sollen, können den Unterricht bereichern.

3.2 Grundlegende Werkzeuge und Befehle

In diesem Abschnitt sollen die grundlegenden Funktionen von *GeoGebra* vorgestellt werden. Sowohl im Grafik- also auch im CAS- und Tabellenkalkulationsfenster gibt es zwei

beziehungsweise drei verschiedene Arten Objekte zu erstellen und Befehle auszuwählen: mit Hilfe der Werkzeugleiste, über die Eingabezeile im Algebra-Fenster oder durch direkte Eingabe der algebraischen Struktur. Da die Desktop Version *GeoGebra Classic* (Version 6) am besten geeignet ist, um Applets zu erstellen, beziehen sich die nachfolgenden Erklärungen und Beschreibungen auf Funktionen dieser Anwendung. Bis auf wenige Ausnahmen können diese aber auch auf andere Anwendungen umgelegt werden.

Möchte man beispielsweise einen Kreis mit Mittelpunkt (0 | 0) und Radius 4 erstellen, so kann man entweder auf das entsprechende Symbol in der Werkzeugleiste klicken, im Grafikfenster den Mittelpunkt auswählen und dann den Radius eingeben oder aber den Befehl *Kreis(<Mittelpunkt>, <Radius>)* in der Eingabezeile einfügen und die Platzhalter durch die passenden Werte ersetzen. Eine Liste aller Befehle ist auf der Homepage von *GeoGebra* abrufbar (GeoGebra, 2021b). Kennt man die algebraische Struktur des gewünschten Objektes ($x^2 + y^2 = 16$), so kann diese auch direkt angegeben werden. Klickt man auf ein Symbol in der Werkzeugleiste, so öffnet sich eine Auswahl verschiedener, verwandter Werkzeuge (siehe Abbildung 2). Die Werkzeugleiste kann auch individuell angepasst werden.

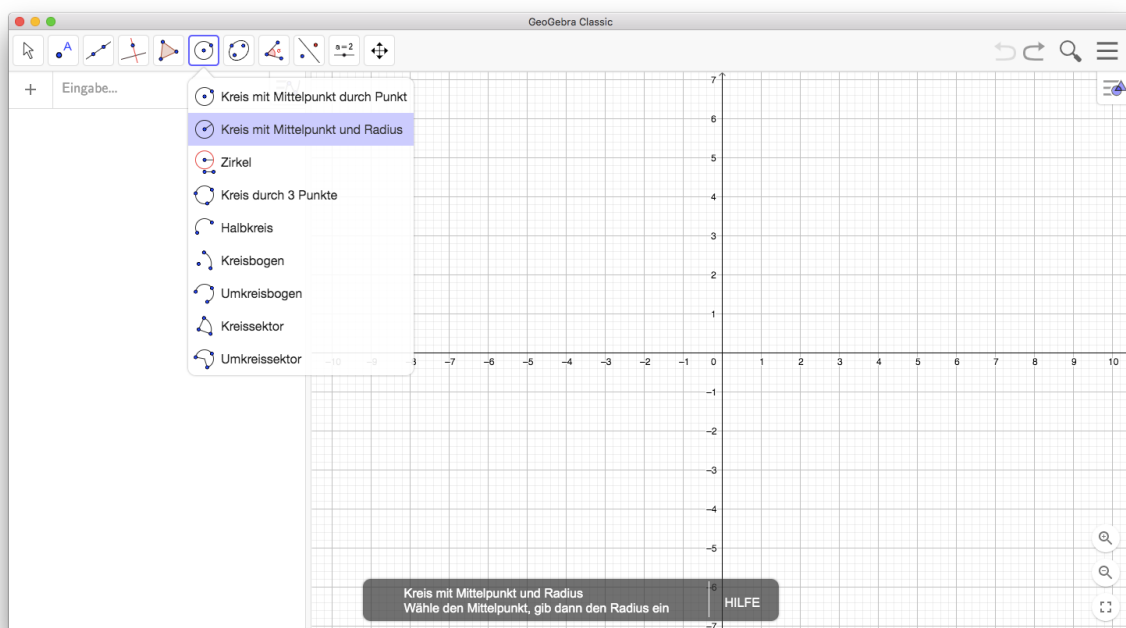


Abbildung 2: Werkzeugleiste und Werkzeugauswahl

3.2.1 Werkzeuge für geometrische Objekte

Im Grafikfenster stehen Konstruktionswerkzeuge zum Erstellen von Punkten (z. B. Schnittpunkte oder Extrema), Strecken, Geraden (z. B. Mittelsenkrechte, parallele Gerade), Vektoren, Ortskurven und Kegelschnitten zur Verfügung. Auch Vielecke und Winkel können mit Hilfe von *GeoGebra* konstruiert werden. In vielen Fällen stehen mehrere Optionen zur

Verfügung, welche Bestimmungsstücke als bekannt angenommen werden sollen – also ob beispielsweise eine Strecke über Anfangs- und Endpunkt oder über Anfangspunkt, Richtung und Länge konstruiert werden soll. Auch Werkzeuge zum Spiegeln, Drehen, Verschieben und Ausmessen von Objekten sowie ein „Funktionsinspektor“ zur Berechnung von Null- und Extremstellen, der Fläche unter der Kurve und Kurvenlänge und zur Erstellung einer Wertetabelle können verwendet werden. Die in der 3D-Grafik verfügbaren Werkzeuge sind jenen der zweidimensionalen Geometrie gleich, jedoch um die im Raum relevanten geometrischen Objekte wie Ebenen und Körper ergänzt.

3.2.2 Werkzeuge im CAS-Fenster

Die für das CAS-Fenster verfügbaren Werkzeuge sind deutlich weniger umfangreich als jene, die für geometrische Konstruktionen in Verwendung kommen. Um Rechenoperationen durchzuführen, wird das Werkzeug „Berechne symbolisch“ beziehungsweise „Berechne numerisch“ verwendet. Beim Vereinfachen und Umformen von Ausdrücken können die Schaltflächen „Faktorisiere“ oder „Multipliziere“ hilfreich sein. Auch für das Lösen von Gleichungen ist ein Werkzeug vorhanden, dieses wird erfahrungsgemäß wohl am öftesten eingesetzt und es kann wieder zwischen numerischer oder allgemeiner Lösung ausgewählt werden. Beim Arbeiten mit längeren Termen kann das Werkzeug „Ersetze“ hilfreich sein, welches es erlaubt eine Variable in beispielsweise einer Gleichung durch einen anderen Ausdruck beziehungsweise eine Zahl zu ersetzen. Außerdem befinden sich in der Werkzeugleiste noch die Schaltflächen „Ableitung“ und „Integral“, die per Mausklick die Ableitungs- oder Stammfunktionen von zuvor eingegebenen Funktionen bilden.

Zusätzlich kann natürlich auch im CAS-Fenster von Befehlen Gebrauch gemacht werden. Befehle, die nicht als Schaltfläche aufscheinen und dennoch in der Schule häufig zum Einsatz kommen sind beispielsweise:

- *Integral*(*<Funktion>*, *<Startwert>*, *<Endwert>*) zum Berechnen des bestimmten Integrals
- *Löse*(*<Gleichung>*, *<Variable>*) um einen Ausdruck auf eine bestimmte Variable umzuformen
- *KomplexeNullstelle*(*<Polynom>*) zur Berechnung der komplexen Nullstelle eines Polynoms

3.2.3 Werkzeuge für Tabellenkalkulationen

Das Tabellenkalkulationssystem lässt es zu, eine Urliste an Daten zu analysieren. Durch einen Klick auf die Schaltfläche „Analyse einer Variablen“ werden die wichtigsten statistischen Kennzahlen berechnet und die Daten grafisch in verschiedenen Diagrammtypen

veranschaulicht. Auch die Analyse zweier Variablen hinsichtlich Korrelation und Regression ist möglich, wobei zwischen verschiedenen Regressionsmodellen gewählt werden kann. Ebenso stehen Werkzeuge zum Erstellen von Listen, Listen von Punkten, Matrizen und Polygonzügen zur Verfügung. Auch die Summe, der Mittelwert, die Anzahl von Daten in einer Spalte oder das Minimum/Maximum einer Datenliste kann über die Werkzeugleiste schnell berechnet werden.

3.2.4 Der Wahrscheinlichkeitsrechner

Das Werkzeug „Wahrscheinlichkeitsrechner“ kann nicht über die Werkzeugleiste, jedoch aber über den Menüpunkt „Ansicht“ geöffnet werden. Er erstellt nach Eingabe notwendiger Kennzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung Dichte- oder Wahrscheinlichkeitsfunktionen grafisch und – wenn möglich – tabellarisch dar, kann statistische Tests durchführen und Konfidenzintervalle erstellen. Da Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der 9. Schulstufe noch nicht durchgenommen werden und der Rechner demnach auch bei den hier erstellten Applets keine Anwendung findet, wird an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen.

3.3 Werkzeuge für Aktionsobjekte und Texte

Um den größtmöglichen Nutzen aus dem Einsatz von Applets ziehen zu können, ist es wichtig, Sachverhalte nicht nur zu präsentieren, sondern Schüler*innen auch Veränderungen durchführen und deren Auswirkungen beobachten zu lassen. Die Möglichkeit, Antworten zu Fragen anzugeben und die Richtigkeit dieser zu kontrollieren, kann weiters genutzt werden. Im Folgenden sollen die dazu notwendigen Werkzeuge und ihre Einsatzmöglichkeiten genauer erklärt werden. Da für einige Aktionsobjekte grundlegende Skripting-Fähigkeiten sehr hilfreich sein können, soll vorerst auch diese Möglichkeit vorgestellt werden.

3.3.1 Skripting

Die Möglichkeit des Skriptings wird auf der *GeoGebra*-Website wie folgt beschrieben:

„Skripte sind eine Abfolge von Befehlen, die nacheinander ausgeführt werden. *GeoGebra* bietet zwei Skriptsprachen um Befehle anzugeben – *GGBScript* und *JavaScript*. Die Ausführung eines Skriptes kann ausgelöst werden durch:

- Klicken auf ein bestimmtes Objekt
- Aktualisierung (*Wert-Veränderung*, *Neudefinition*) eines bestimmten Objektes
- Laden der Datei (im Fall von JavaScript)
- Javascript Listeners (siehe auch JavaScript)

Die Skripte werden im Tab "Skripting" im Eigenschaften-Dialog eines Objektes eingegeben.“ (GeoGebra, 2021e)

Da die Verwendung von *JavaScript* deutlich mehr Kenntnisse über das Programmieren erfordert also *GGBScript*, soll an dieser Stelle nur auf die zweite Option eingegangen werden. Ein *GGBScript* enthält schlicht und einfach eine Auflistung von Befehlen, die nach Auswahl eines Objekts oder einer durchgeführten Aktualisierung nacheinander ausgeführt werden. Diese Befehle können die gleichen sein, wie sie auch in der Eingabezeile angegeben werden, zusätzlich stehen aber noch konkret für das Skripting bestimmte Befehle zur Verfügung. Beim Anklicken eines Objektes können mit diesen zusätzlichen Befehlen zum Beispiel Konstruktionen aktualisiert, Objekte und Bedingungen gesetzt oder gelöscht und Farben verändert werden. Eine genaue Liste aller Skripting-Befehle findet man online: vgl. GeoGebra (2021f). Skripte kommen besonders bei Kontrollkästchen oder bei Schaltflächen zum Einsatz.

3.3.2 Schieberegler

Eines der wichtigsten Elemente, die es Schüler*innen ermöglichen, einfach und gezielt Veränderungen an Konstruktionen, Funktionen oder algebraischen Ausdrücken vorzunehmen, ist der *Schieberegler*. Dieser ordnet einer Variablen einen veränderbaren Zahlenwert zu. Er kann über die Werkzeugleiste oder über den Befehl *Schieberegler*(*<Min>*, *<Max>*, *<Schrittweite>*, *<Geschwindigkeit>*, *<Breite>*, *<IstWinkel>*, *<Horizontal>*, *<Animiert>*, *<Zufällig>*) erstellt werden, wobei bei der zweiten Variante nur Minimum und Maximum angegeben werden müssen. Wird im Eingabefeld eine undefinierte Variable verwendet, so wird für diese automatisch ein Schieberegler erstellt (bei der Standardeinstellung kann der Schieberegler Werte im Intervall [-5; 5] mit einer Schrittweite von 0,1 annehmen).

Folgende Einstellungen können im Dialogfenster vorgenommen werden:

- Name: hierbei handelt es sich um den Wert der zu ersetzenden Variable, unter den allgemeinen Einstellungen kann jedoch angegeben werden, dass statt dem Namen die frei wählbare ‚Beschriftung‘ angezeigt wird.
- Art: hier kann bestimmt werden, ob die mit dem Schieberegler verbundene Variable Zahlen, Winkel oder ganze Zahlen als Wert annehmen kann.
- Intervall: legt fest, welcher Minimal- und welcher Maximalwert angenommen werden kann.
- Schieberegler (Lage): hier kann ausgewählt werden, ob der Schieberegler eine fixe Position hat oder bewegt werden kann und ob dieser horizontal oder vertikal aufsteht.
- Animation: unter diesem Menüpunkt können Einstellungen für die mögliche automatische Veränderung des Schiebereglers wie Geschwindigkeit und Laufrichtung eingestellt werden.

In den allgemeinen Einstellungen können anschließend noch weitere das Layout betreffende Aspekte wie Farbe, Breite und Linienstärke verändert werden. Ist der Schieberegler erstellt, so kann der Wert der damit verbundenen Variablen durch Verschieben des Reglers verändert werden. Oft wird auch ein Eingabefeld mit dem Schieberegler verknüpft.

3.3.3 Eingabefeld

Mit einem *Eingabefeld* kann ein damit verknüpftes Objekt oder der Wert einer verknüpften Variablen (die jedoch zuerst mit einem Schieberegler verknüpft werden muss) durch Eingabe verändert werden. Wird beispielsweise der Punkt P mit den Koordinaten $(0 \mid 0)$ mit einem Eingabefeld verknüpft, so können die Koordinaten des Punktes durch Eingabe des Ausdrucks „ (x,y) “ in das Eingabefeld (wobei x und y für die jeweilig gewünschten Lagekoordinate stehen) verändert werden. Ebenso könnte man für die Koordinaten des Punktes P die Variablen a und b wählen, diese mit einem Schieberegler verknüpfen und dann für jede Koordinate ein separates Eingabefeld erstellen. Soll mit dem Eingabefeld ein Zahlenwert verändert werden und muss dieses daher mit einem Schieberegler verknüpft werden, so ist es ratsam, den entsprechenden Schieberegler auf ‚nicht sichtbar‘ zu stellen. In den allgemeinen Einstellungen können Beschriftung und Länge des Eingabefeldes, seine Position sowie seine Textart, -größe und -farbe ausgewählt werden.

Im Gegensatz zum Schieberegler eignen sich Eingabefelder besonders dann, wenn die Veränderung eines Parameters und deren Auswirkung keine Rolle spielt, sondern nur ein bestimmter Wert oder wenige konkrete Werte relevant sind. Auch für Fragen, die innerhalb des Applets beantwortet werden sollen, kann das Eingabefeld als Antwortfeld dienen.

3.3.4 Kontrollkästchen

Ein *Kontrollkästchen* dient als Hilfsmittel, um Variablen mit den Wahrheitswerten „wahr“ oder „falsch“ zu belegen und wird besonders dafür verwendet, die Sichtbarkeit anderer Objekte rasch einstellen zu können. Soll ein Objekt nur dann sichtbar sein, wenn das Häkchen im Kontrollkästchen gesetzt ist, so muss bei diesem Objekt in den allgemeinen Einstellungen unter dem Menüpunkt „Erweitert“ die verknüpfte Variable angegeben werden. Möchte man die Sichtbarkeit so einstellen, dass das Objekt nur dann angezeigt wird, wenn das Häkchen im Kontrollkästchen nicht gesetzt ist, kann das logische Nicht-Symbol $\neg$ verwendet werden, um den Wahrheitswert umzukehren. Kontrollkästchen können auch verwendet werden, um Multiple-Choice Fragen zu stellen und eine Rückmeldung zu geben, wie in Abbildung 3 dargestellt ist.

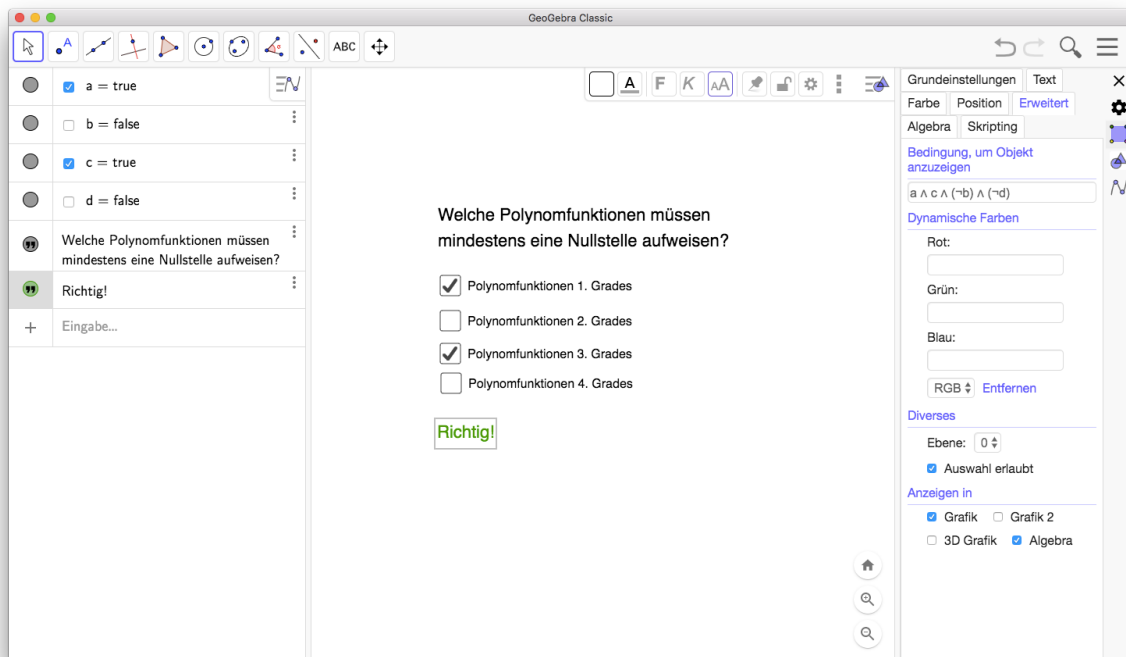


Abbildung 3: Kontrollkästchen

Der Text „Richtig“ erscheint nur, wenn die erste und die dritte Antwortmöglichkeit angekreuzt und somit die Wahrheitswerte mit den Namen a und c auf „wahr“ gesetzt wurden. Da Multiple-Choice Fragen jedoch mittlerweile auch außerhalb der Applets in Aktivitäten eingebaut werden können, wird diese Option wohl in Zukunft weniger genutzt werden. Der Vorteil, eine solche Frage direkt in ein Applet einzubauen ergibt sich jedoch daraus, dass die Rückmeldung auch direkt mit einem Objekt verknüpft werden kann. So kann beispielsweise festgelegt werden, dass die positive Rückmeldung nur dann erscheint, wenn ein bestimmtes Objekt in der Grafik einen bestimmten Wert hat und zusätzlich ein entsprechendes Kontrollkästchen auf „wahr“ gesetzt wurde. Zum Anzeigen von (grafischen) Lösungen ist das Einfügen von Kontrollkästchen und Setzen von Bedingungen aber nach wie vor sehr hilfreich. Auch bei unübersichtlichen Konstruktionen können Kontrollkästchen genutzt werden, um Objekte separat anstatt gleichzeitig anzeigen zu lassen. Die Funktionen von Kontrollkästchen können über Skripting noch erweitert werden. So können beispielsweise mit dem Befehl `SetzeSichtbarInGrafikansicht( <Objekt>, <Grafikfenster 1|2>, <Wahrheitswert> )` Kontrollkästchen verschachtelt (bestimmte Kontrollkästchen werden erst sichtbar, wenn ein verknüpftes anderes Kontrollkästchen ausgewählt wurde) oder mit dem Befehl `SetzeWert( <Wahrheitswert>, <0|1> )` gruppiert werden (es kann immer nur ein Kontrollkästchen ausgewählt werden), wie es auch in Abbildung 4 ersichtlich ist.

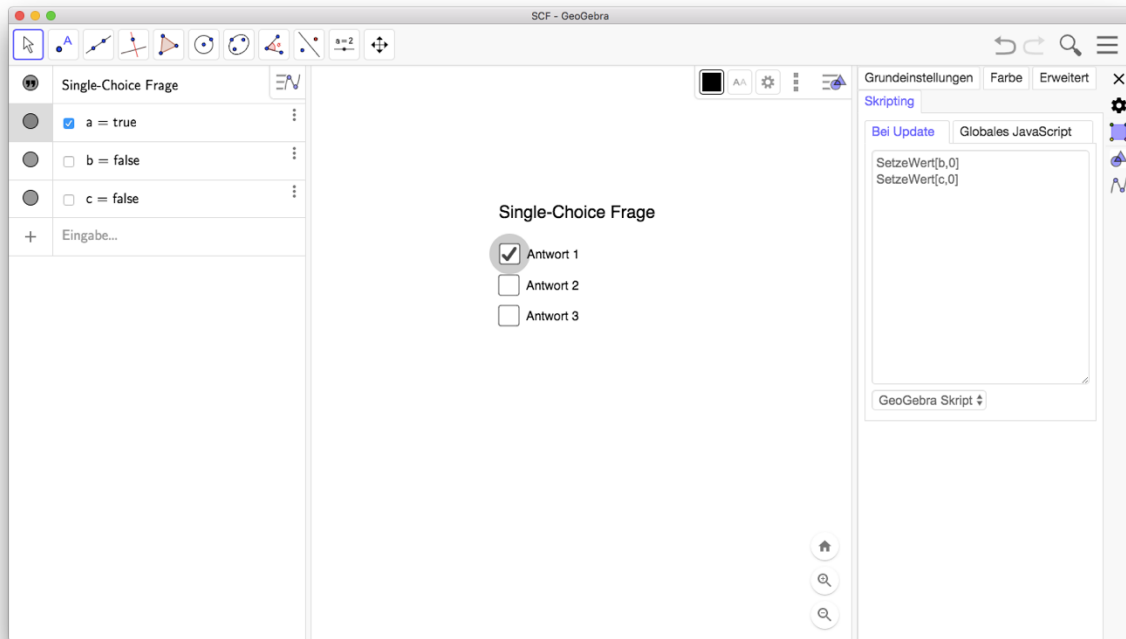


Abbildung 4: Gruppieren von Kontrollkästchen

Beim Anklicken der ersten Antwortmöglichkeit, ein Wahrheitswert mit dem Namen a , werden die anderen beiden Wahrheitswerte, also die Antwortmöglichkeiten 2 und 3 auf Null gesetzt. Dies ist besonders dann relevant, wenn Single-Choice Fragen erstellt werden oder verschiedene Objekte nicht gleichzeitig angezeigt werden sollen.

3.3.5 Schaltfläche

Eine *Schaltfläche* kann als eine Art virtueller Tastenknopf angesehen werden. Beim Betätigen dieser wird eine Aktion, oder auch mehrere, ausgeführt, welche zuvor über Skriptingbefehle definiert wurden. Schaltflächen können direkt über die Werkzeugleiste erstellt werden, woraufhin sich ein Dialogfenster öffnet, in dem Beschriftung und Skript festgelegt werden können. In den allgemeinen Einstellungen kann dann noch Schriftgröße und -farbe bestimmt werden und gegebenenfalls ein Symbol oder Bild in die Schaltfläche eingefügt werden. Eine klassische Anwendung von Schaltflächen in Applets ist das Aktualisieren von Konstruktionen und das Zurücksetzen von Werten, das unter anderem bewirkt, dass Zufallszahlen neu berechnet und eingegebene Lösungen auf den ursprünglichen Wert (meist 0) zurückgesetzt werden und somit eine neue Aufgabe erscheint. Hierfür wären also die Skriptingbefehle *AktualisiereKonstruktion()* sowie *SetzeWert(<Objekt>, <Objekt>)* im Dialogfenster einzugeben.

3.3.6 Texte

Selbstverständlich können auch *Texte* eingefügt werden, wobei hier „statische und dynamische Texte oder *LaTeX*-Formeln erzeugt werden [können]“ (GeoGebra, 2021g). Es besteht also die

Möglichkeit, neben Buchstaben und Sonderzeichen (griechische Buchstaben, Pfeile, logische Verknüpfungen etc.), auch Objekte im Dialogfenster auszuwählen, deren algebraische Struktur dann im Text aufscheint und sich mit einer Veränderung des Objektes auch im Text dynamisch mitverändert. Um mathematische Ausdrücke wie Brüche, Potenzen oder Summenzeichen einzufügen wird *LaTeX* verwendet, wobei hier aus Vorlagen ausgewählt werden kann. Texte können in Serifenschrift oder serifenlos dargestellt werden und auch die Größe, die Farbe und der Hintergrund können eingestellt werden.

3.4 Zusätzliche Einstellungsmöglichkeiten

Neben den zuvor erwähnten objektspezifischen Einstellungen, wie beispielsweise die Schrittweite eines Schiebereglers, gibt es auch Einstellungsmöglichkeiten, die bei allen Objekten vorgenommen werden können oder jene, welche Änderungen am Layout oder an der Bedienbarkeit des Applets bewirken. All diese allgemeinen Einstellungen, die im Menüpunkt „Einstellungen“ aufscheinen, sollen in Folge erläutert werden.

3.4.1 Globale Einstellungen und Algebra-Einstellungen

Unter dem Zahnradsymbol findet man die globalen Einstellungsmöglichkeiten. Diese beschränken sich auf die Sprache, die Anzahl der Nachkommastellen beim Runden und die Schriftgröße. Ebenso kann bestimmt werden, bei welchen Objekten der Name standardmäßig angezeigt wird.

In den Einstellungen, die das Algebra-Fenster betreffen und die unter dem -Symbol zu finden sind, kann ausgewählt werden, ob Hilfsobjekte im Algebra-Fenster angezeigt werden oder nicht und in welcher Reihenfolge (z. B. Konstruktionsreihenfolge oder Objekttyp) die Objekte aufscheinen. Außerdem kann unter dem Punkt „Algebra-Bezeichnungen“ festgelegt werden, ob nur die Definition oder der Wert einer algebraischen Struktur aufscheint, beides gemeinsam oder die Beschreibung eines Objektes angezeigt wird. Auch die Darstellungsweise von Koordinaten kann von $A = (x,y)$ auf $A: (x,y)$ oder $A = (x \mid y)$ geändert und die Winkeleinheit ausgewählt werden.

3.4.2 Layout-Einstellungen

Das Symbol  führt zu den allgemeinen Layout-Einstellungen des Grafik-Fensters, also Einstellungen welche die Achsen, den Hintergrund und das Koordinatengitter betreffen. Die Achsen betreffend kann eingestellt werden, welcher Achsenbereich sichtbar sein soll und in welchem Verhältnis x - und y -Achse zueinanderstehen. Auch ob die Achsen überhaupt sichtbar sein sollen und in welcher Farbe sowie Stärke und mit welchem Beschriftungsstil diese aufscheinen, kann ausgewählt werden. Für x - und y -Achse kann dann noch separat bestimmt werden, ob Zahlenwerte angezeigt werden und auch die Achsenmarkierung, ihre Beschriftung

und Einheit sowie der Abstand zwischen den Markierungen (mit den Optionen 1, π und $\pi/2$) kann ausgewählt werden. Ebenso kann die x -Achse nach oben und unten, die y -Achse nach links und rechts verschoben werden, sodass deren Schnittpunkt nicht mehr im Punkt (0 | 0) liegt. Zusätzlich zu den Achsen kann auch das Koordinatengitter nach Bedarf eingestellt werden. Die Sichtbarkeit sowie die Linienart und -farbe aber auch die Art des Gitters (weites oder enges metrisches Gitter, isometrische oder in Polarkoordinaten) sowie der Abstand zwischen den Gitterpunkten und der Punktfang (Objekte können einfacher oder ausschließlich an Gitterpunkten fixiert werden) kann manuell eingestellt werden. Außerdem beinhalten die allgemeinen Layout-Einstellungen noch Einstellungsmöglichkeiten für die Navigationsleisten, die Hintergrundfarbe und Darstellung von rechten Winkeln und auch über das Anzeigen von Mauskoordinaten und Tooltips kann hier entschieden werden.

3.4.3 Einstellungen an Objekten

Das Objekt-Symbol  führt zu einem Dialogfenster, in dem verschiedene Einstellungen an Objekten vorgenommen werden können. Unter „Grundeinstellungen“ können Name, Definition und Beschriftung eines Objekts festgelegt werden. Anschließend kann ausgewählt werden, wie das Objekt in der Grafikanzeige gekennzeichnet werden soll (hier kann zwischen Name, Wert, Beschriftung und Zweierkombinationen davon gewählt werden) und ob das Objekt sowie seine Spur sichtbar sein soll. Zusätzlich kann das Objekt fixiert – es ist dann nicht mehr verschiebbar, ohne vorher in die Einstellungen zurückzukehren – oder als Hilfsobjekt definiert werden. Im Reiter „Farbe“ kann dann die Farbe, bei Figuren auch die Deckkraft, des Objektes ausgewählt werden, unter „Darstellung“ kann über Linienstärke, Linienart, die Deckkraft von Linien, Füllungsoptionen oder Punktgrößen und -darstellungen entschieden werden. Um Applets möglichst anschaulich und optisch attraktiv zu gestalten ist es empfehlenswert, von diesen Möglichkeiten auch Gebrauch zu machen. Ebenso ist es für die Benutzerfreundlichkeit von Applets sinnvoll – besonders wenn diese auf verschiedenen Geräten verwendet werden – auch die Position von Objekten festzulegen. Während bei über Koordinaten definierten Objekten (Punkten, Strecken, Figuren und Körpern) keine Positionseinstellungen vorgenommen werden können, kann bei anderen Objekten ausgewählt werden, ob diese eine fixe Position am Bildschirm haben sollen oder an einen Koordinatenpunkt fixiert werden. Wird Ersteres gewählt, so bleibt beispielsweise ein Text stets am oberen Bildschirmrand, egal wie das Koordinatensystem verändert wird. Bei zweiter Option bewegt sich der Text beim Zoomen oder Verschieben des Koordinatensystems mit. Dies kann besonders dann hilfreich sein, wenn ein Text immer unter einer bestimmten geometrischen Figur aufscheinen soll.

Auch die erweiterten Objekt-Einstellungen können bei der Erstellung von Applets hilfreich sein. Hier können Bedingungen gesetzt werden, um das Objekt anzuzeigen. In den meisten Fällen handelt es sich bei diesen Bedingungen um Wahrheitswerte, wie schon im Abschnitt 3.3.4 erläutert wurde. Alternativ kann die Sichtbarkeit aber auch von einem Schieberegler abhängen. Die Bedingung $a > 5$ würde beispielsweise das Objekt erst erscheinen lassen, wenn die mit dem Regler verknüpfte Variable a einen Wert der größer ist als Fünf annimmt. Unterhalb des Feldes für Bedingungen findet sich noch die Option der dynamischen Farben. Die drei RGB Farbwerte (oder HSV beziehungsweise HSL) werden mit Schieberegler, die Werte zwischen 0 und 1 annehmen können, verknüpft. Durch Verändern dieser Schieberegler in der Grafikanzeige kann dann die Farbe des Objektes dynamisch verändert werden. Es ist auch möglich, den Schieberegler zu animieren, ihn also automatisch weiterlaufen zu lassen und somit eine kontinuierliche und automatische Farbänderung zu bezwecken. Ebenso können andere Werte, wie zum Beispiel die Steigung des Graphen einer linearen Funktion mit diesem Schieberegler verknüpft werden, sodass sich bei Veränderung der Steigung dann auch die Farbe der Geraden ändert.

Liegen mehrere Objekte übereinander kann in den erweiterten Einstellungen auch die Ebene eines Objektes verändert werden. Es kann auch festgelegt werden, in welchen Fenstern (Grafik, Grafik 2, 3D Grafik, Algebra) das Objekt angezeigt wird. Unter „Algebra“ (bei Punkten und Pfeilen vorhanden) kann noch entschieden werden, welche Koordinaten in der Darstellung aufscheinen (kartesische Koordinaten, 3D kartesische Koordinaten, komplexe Koordinaten oder Polar- oder Kugelkoordinaten) und mit welcher Schrittweite ein Punkt seine Koordinaten ändern kann. Bei sich bewegenden Objektes (beispielsweise Punkte entlang einer Geraden) kann auch die Geschwindigkeit sowie die Bewegungsrichtung angegeben werden. Im letzten Reiter des Dialogfensters befindet sich dann noch die Skripting Option (siehe Abschnitt 3.3.1).

3.5 Erstellung eines Applets

In diesem Abschnitt soll im Detail auf die notwendigen Schritte beim Erstellen des in Abschnitt 6.13 vorgestellten Applets zur anschaulichen Darstellung der Parameterdarstellung einer Geraden eingegangen werden. Dieses Applet wurde ausgewählt, da es sowohl Eingabefelder als auch Schieberegler und Kontrollkästchen enthält. Die genaue Beschreibung soll dazu beitragen, Lehrkräfte bei der eigenständigen Programmierung von Applets mit Aktionsobjekten zu unterstützen und die in Kapitel 6 beschriebenen Hintergrundprogrammierungen besser zu verstehen.

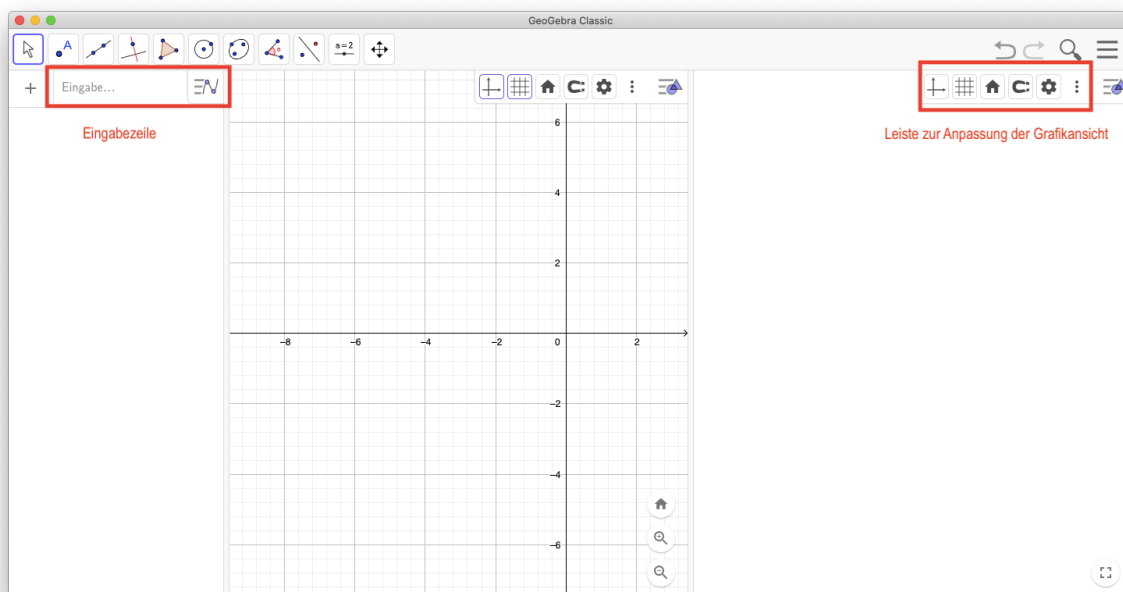


Abbildung 5: Grafiksicht anpassen

Zu Beginn wird über den Menüpunkt „Ansicht“ eine zweite Grafiksicht, „Grafik 2“, hinzugefügt und über die in Abbildung 5 markierte Leiste das Koordinatengitter als auch das Koordinatensystem dieser Ansicht entfernt. Über die Eingabezeile in der Algebra-Ansicht wird der Punkt P mit $P = (1,1)$ sowie der Vektor $r = (1,1)$ eingegeben. Vektoren müssen stets in der Form (x, y) in das Eingabefeld eingegeben werden. *GeoGebra* erstellt bei der Eingabe von mit Großbuchstaben bezeichneten Vektoren automatisch Punkte, bei der Verwendung von Kleinbuchstaben werden Pfeile erstellt. Anschließend kann ein Eingabefeld erzeugt werden, das mit diesen Objekten verknüpft wurde, wie in Abbildung 6 zu sehen ist.

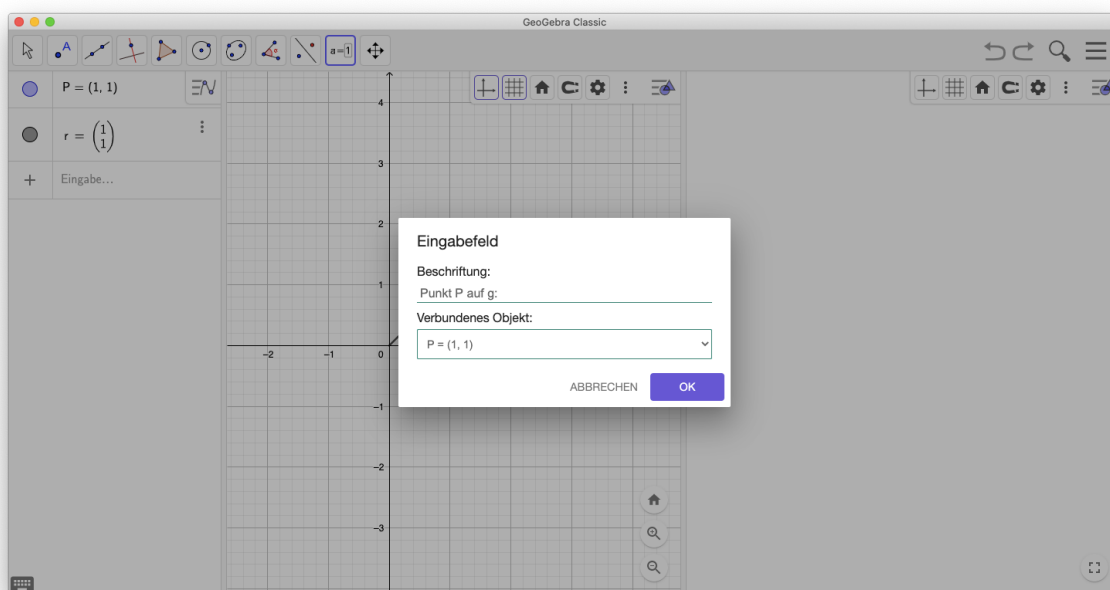


Abbildung 6: Eingabefeld erstellen

Auch ein Schieberegler für den Parameter t , der Werte im Intervall $[-5;5]$ mit einer Schrittweite von 0,25 annehmen kann, wird im zweiten Grafikenfenster erzeugt, wie in Abbildung 7 dargestellt ist.

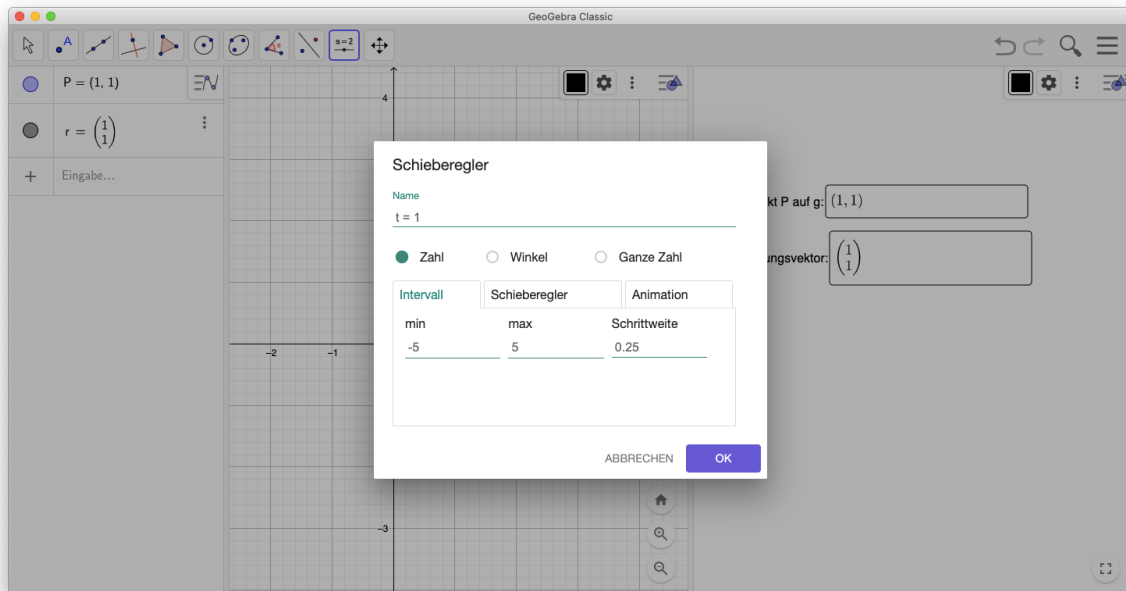


Abbildung 7: Schieberegler erzeugen

Wie Abbildung 8 zeigt, wird nun der Punkt C mit $C = P + t \cdot r$ im Algebra-Fenster sowie der Vektor u mit $u = \text{Vektor}(P, C)$ und eine Gerade durch diese beiden Punkte, über den Befehl $\text{Gerade}(P, C)$, definiert. Die Objekte sind auch in der Grafikanzeige zu sehen. Prinzipiell werden Objekte immer in jener Grafikanzeige angezeigt, die zuletzt angeklickt wurde. Werden Objekte in der falschen Ansicht dargestellt, kann in den Objekteinstellungen im Reiter „Erweitert“ die entsprechende Ansicht ausgewählt werden (siehe Abschnitt 3.4.3). Durch einen Klick auf den blauen Punkt neben dem Vektor r in der Algebra-Ansicht, wird dieser aus der Grafikanzeige entfernt. Er ist weiterhin im Hintergrund vorhanden, bestimmt die Lage des Punktes C und kann über das Eingabefeld verändert werden, ist jedoch nicht mehr sichtbar. Bereits jetzt kann im Applet die intendierte Bewegung eines Punktes C , der mit X beschriftet wurde, auf einer über einen Punkt und einen Richtungsvektor definierten Gerade durchgeführt werden. Damit die Veränderung der Koordinaten dieses Punktes besser beobachtet werden kann, soll die Berechnung von X nun in einem dynamischen Text dargestellt werden, wie in Abbildung 9 ersichtlich ist. Textelemente können direkt über die Werkzeugleiste erstellt werden. Die farblich markierten Elemente können im Reiter mit dem *GeoGebra*-Logo ausgewählt werden und verändern sich im Text, wenn sich die algebraische Struktur dieser Objekte verändert.

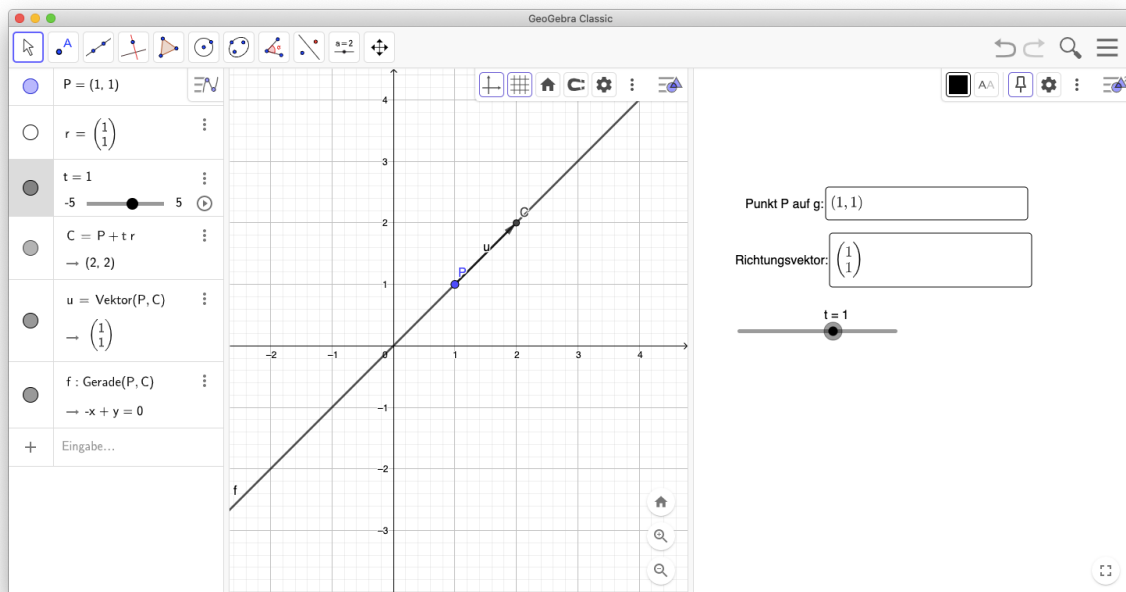


Abbildung 8: Punkt, Vektor und Gerade erzeugen

Da die Darstellung von Punkten in dynamischen Texten immer in der Form (x, y) erfolgen würde, wurden zuvor mit den Befehlen $a = x(P)$, $b = y(P)$, $c = x(C)$ und $d = y(C)$ die Koordinaten der Punkte P und C einzeln ausgedrückt. Damit die Einträge der Vektoren untereinander und nicht nebeneinander stehen, wurde der *LaTeX*-Befehl `\binom{ }{ }` bei der Texteingabe verwendet. Nun soll noch die Parameterdarstellung der Geraden angezeigt werden. Auch hier wird ein dynamischer Text verwendet, mit dem Unterschied, dass t diesmal als Buchstabe eingegeben, und nicht als dynamisches Element ausgewählt wurde und somit auch keine Berechnung von X erfolgt.

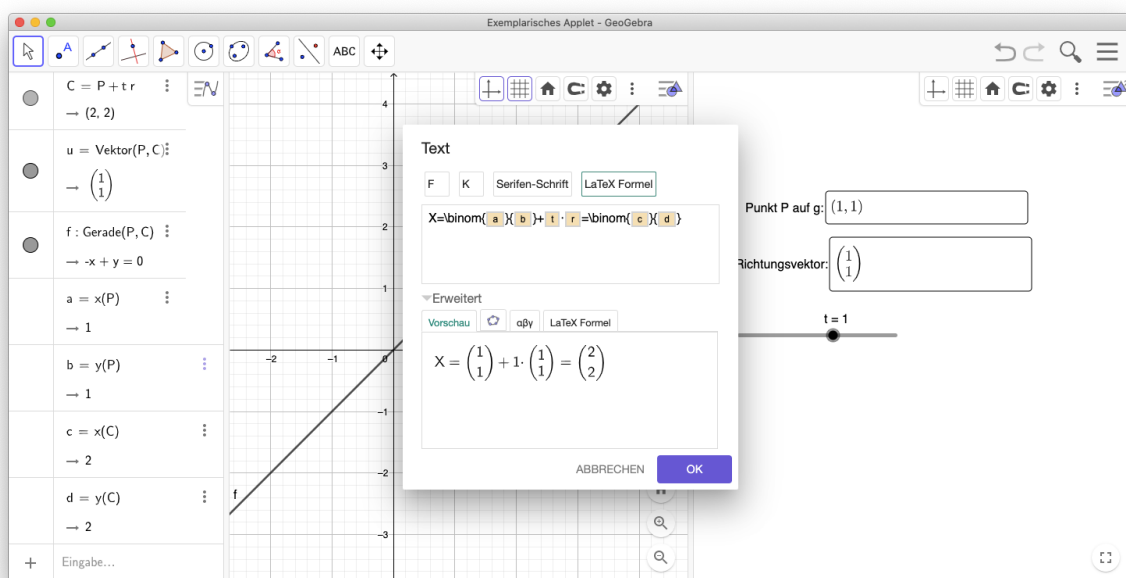


Abbildung 9: Dynamischer Text

Dieser Text soll jedoch nur angezeigt werden, wenn auch ein entsprechendes Kontrollkästchen angeklickt wurde. Dafür wird vorerst der Text in der Grafiksicht platziert, darüber wird ein Kontrollkästchen (über die Werkzeugleiste) hinzugefügt. In diesem Fall hat das Kästchen den Namen e . Wird ein Kontrollkästchen erstellt, so kann direkt ausgewählt werden, dass dieses die Sichtbarkeit des zweiten Textes beeinflussen soll (siehe Abbildung 10). Wird dies nicht direkt beim Erstellen ausgewählt, so kann auch im Nachhinein bei den Objekteinstellungen des Textes im Reiter „Erweitert“ die Bedingung $e = 1$ angegeben werden.

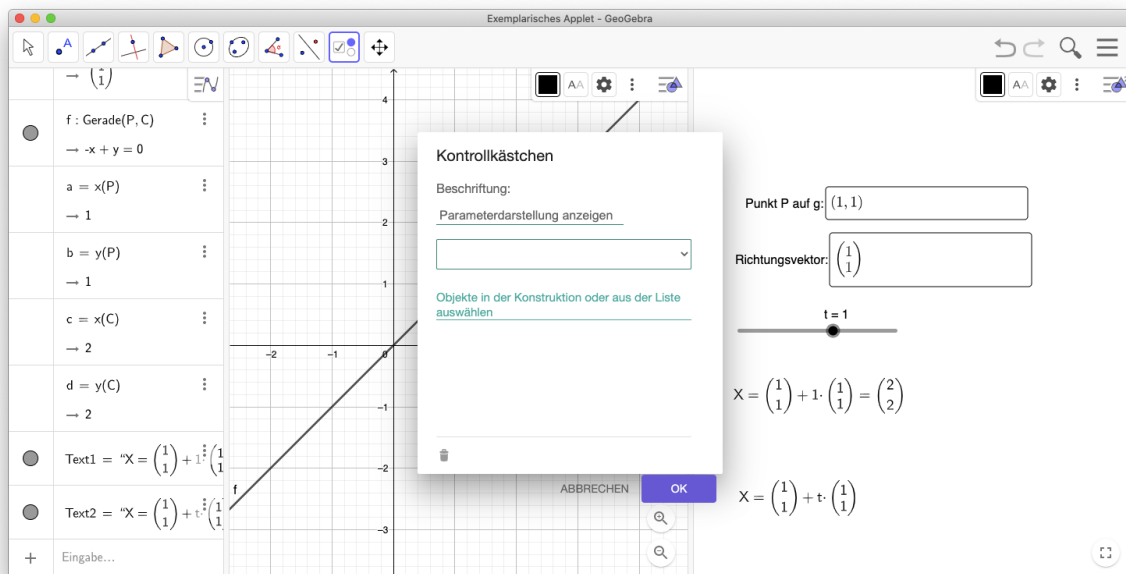


Abbildung 10: Kontrollkästchen erstellen

Vermutlich aufgrund eines Programmfehlers funktionieren Kontrollkästchen nicht direkt nach dem Erstellen dieser. Man muss daher entweder das Programm schließen und erneut öffnen, oder aber in den Objekteinstellungen eine Aktualisierung vornehmen. Am einfachsten ist es, die Beschriftung des Kontrollkästchens zu aktualisieren. Dafür muss diese nur angeklickt und die Enter-Taste betätigt werden, wie in Abbildung 11 zu sehen ist. Das Kontrollkästchen bestimmt nun, ob die Parameterdarstellung angezeigt wird oder nicht. Die Beschriftung des Vektors u soll noch angepasst werden. Es soll der dynamische Text „ $t \cdot \vec{r}$ “ als Beschriftung angezeigt werden, wobei sich t mit Veränderung des Schiebereglers mitverändern soll. Um das zu erreichen, muss der dynamische Text „ $t \cdot \vec{r}$ “ in die erste Grafiksicht eingefügt werden. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, diesen Text als Beschriftung von u zu wählen. Entweder, der Text wird an die Position des Punktes C (beschriftet mit X) gekoppelt (siehe Abbildung 12), oder der Text wird als Beschriftung des Vektors u gewählt (siehe Abbildung 13).

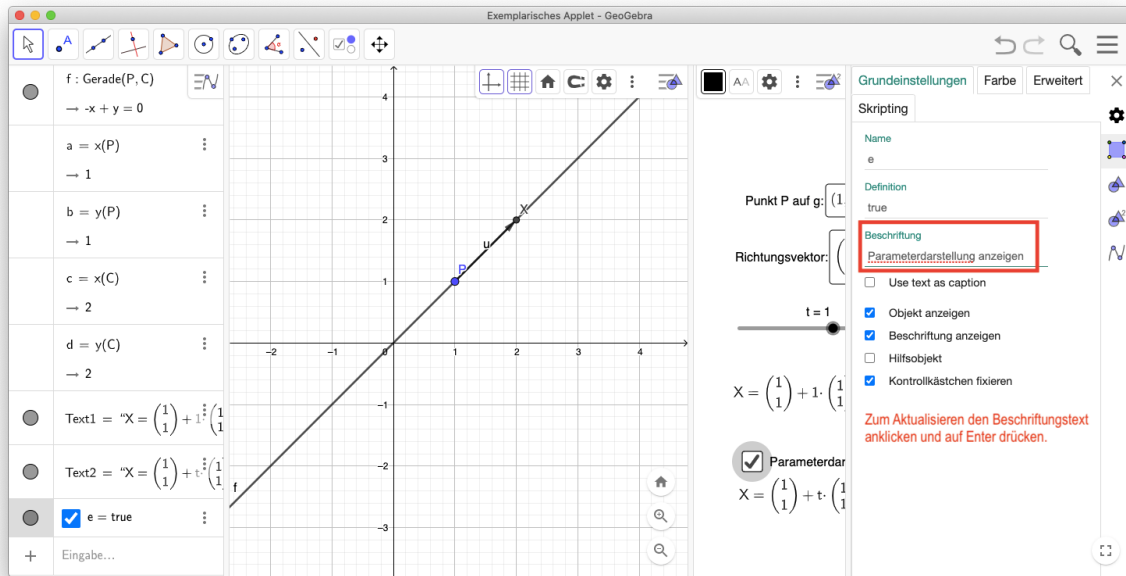


Abbildung 11: Kontrollkästchen aktualisieren

Damit das Textelement nur als Beschriftung und nicht zusätzlich als Textelement aufscheint, muss das Häkchen „Objekt anzeigen“ in den Objekteinstellungen des Textelementes entfernt werden. Alle anderen Texte, die hinzugefügt und Farb-Einstellungen, die vorgenommen werden, gehen nicht über die grundlegenden Funktionen von *GeoGebra*, die bereits in Abschnitt 3.3.6 beziehungsweise in Abschnitt 3.4.3 beschrieben wurden, hinaus und werden an dieser Stelle daher nicht genauer erläutert.

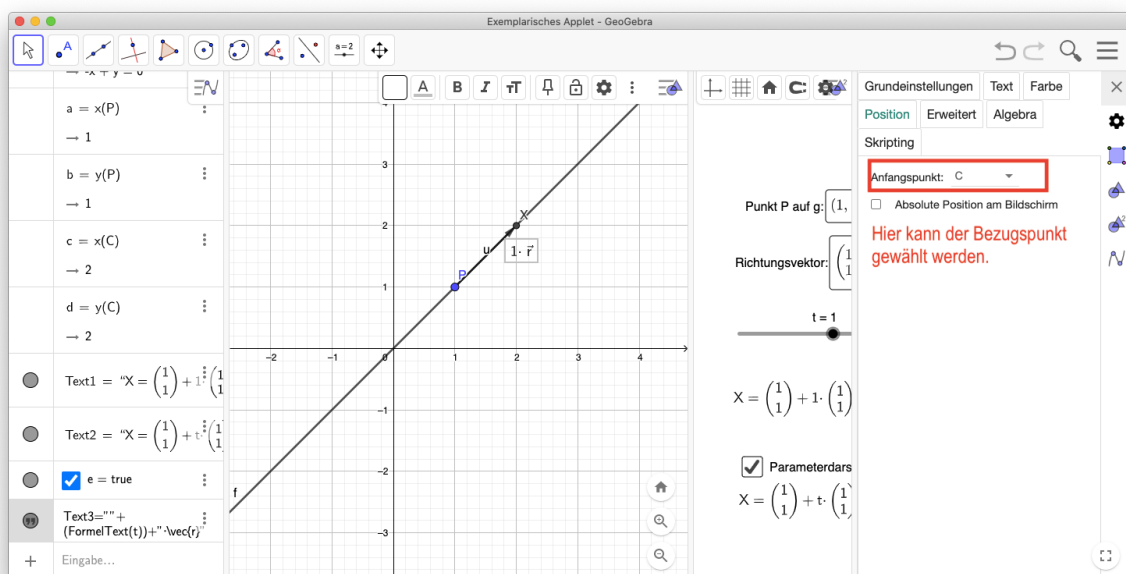


Abbildung 12: Texte an Punkte koppeln

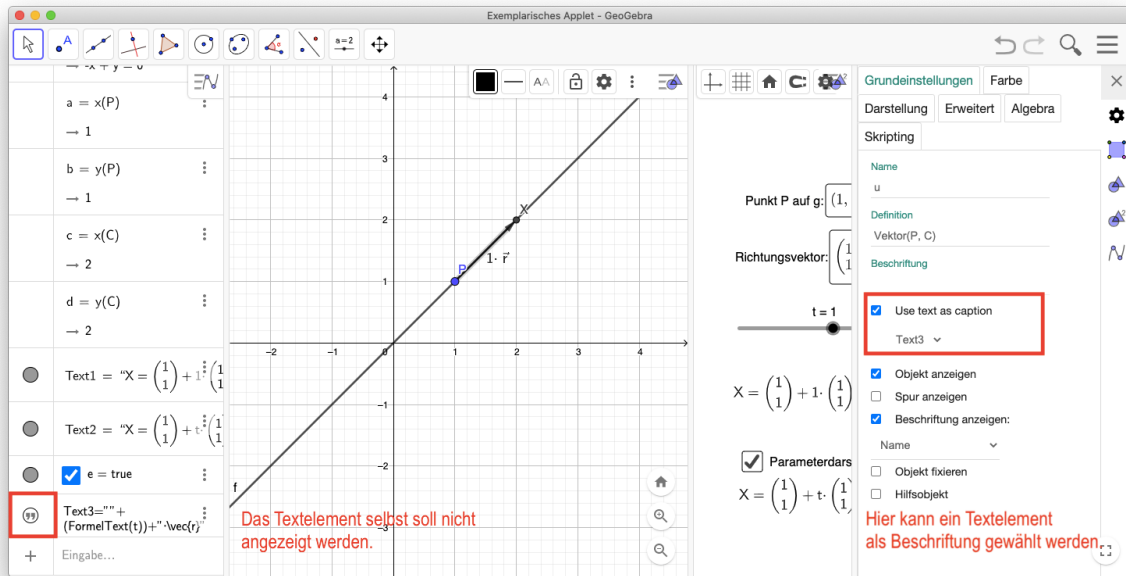


Abbildung 13: Texte als Beschriftungen wählen

4 Vier Arten von Applets und ihre Einsatzmöglichkeiten

In einem Artikel in der Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG zeigt Christian Dorner (2014) unter anderem auf, welche verschiedene Arten von *GeoGebra*-Applets im Mathematikunterricht eingesetzt werden können, welche Vorteile diese mit sich bringen und worauf beim Einsatz geachtet werden muss. In Anlehnung an Jürgen Roth, welcher Applets anhand des Grades der Vorgegebenheit klassifiziert (vgl. Roth, 2008: 133-134), wird zwischen *Demonstrationsapplets*, *Entdeckungsapplets*, *Lernapplets* und *Werkzeugapplets* unterschieden. Da idealerweise jede Art von Applet einen Lernprozess auslöst oder unterstützt, wurde diese Kategorisierung hier durch den Begriff „Übungs-Applets“ ersetzt. Diese Kategorisierung deckt sich auch weitgehend mit den von Lechner aufgezeigten Potentialen von mathematischen Arbeitsumgebungen als Visualisierungs-, Rechen-, Untersuchungs- und Überprüfungswerkzeuge (vgl. Lechner 1999/2000). Im Folgenden sollen die einzelnen Arten von Applets und ihre Einsatzmöglichkeiten in den verschiedenen Unterrichtsphasen nach Barzel (vgl. Barzel et al., 2014: 36-40) aufgezeigt werden.

4.1 Demonstrationsapplets

Demonstrationsapplets eignen sich besonders gut, um mathematische Sachverhalte grafisch zu veranschaulichen. Sie erfordern kein aktives Handeln der Schüler*innen. Das Drehen und Verschieben der Grafikansicht sollte jedenfalls möglich sein. Im Dreidimensionalen wird es mit *GeoGebra* somit möglich, Körper oder Skizzen von verschiedenen Seiten zu betrachten, was insbesondere für Schüler*innen, die kein gutes räumliches Vorstellungsvermögen besitzen, hilfreich sein kann. Besonders im Bereich der Trigonometrie, wenn Vermessungsaufgaben im Raum skizziert werden sollen, eignet sich das 3D-Grafikfenster zur Veranschaulichung des Sachverhaltes (vgl. Dorner, 2014: 35-36). Für zweidimensionale Abbildungen mag der Vorteil eines Demonstrationsapplets nicht ganz so offensichtlich sein, da diese problemlos auch in Schulbüchern abgedruckt oder an der Tafel dargestellt werden können. Doch auch im Zweidimensionalen eröffnet *GeoGebra* Möglichkeiten, die herkömmlichen Unterrichtsmaterialien in vielen Aspekten überlegen sind:

- Übersichtlichkeit: Besonders bei komplexeren Modellierungsprozessen werden Handskizzen oft unübersichtlich. Bei Konstruktionen mit *GeoGebra* können Hilfslinien, oder Objekte, die in gewissen Bearbeitungsstufen oder für bestimmte Unteraufgaben nicht mehr relevant sind, einfach aus- und nach Bedarf auf wieder eingeblendet werden. Es ist somit besser möglich, einzelne Objekte einer Konstruktion hervorzuheben und zu betrachten.

- Genauigkeit: Konstruktionen, die mit der Hand, insbesondere jene die an der Tafel durchgeführt werden, fehlt es oft an Präzession. Dies führt beispielsweise beim Legen von Tangenten, Messen von Winkeln oder Konstruieren von Figuren zu Ungenauigkeiten, die wiederum die Lösung verzerren können. Auch Funktionsgraphen können händisch wohl niemals so genau gezeichnet werden wie mit einem Computerprogramm.
- Schnelligkeit: Oftmals nimmt das Zeichnen von Skizzen, Figuren oder Funktionsgraphen sehr viel Zeit in Anspruch. *GeoGebra* erstellt diese Objekte jedoch nach Angabe der notwendigen Bestimmungsstücke oder algebraischen Strukturen in Millisekunden und kann somit helfen, im Unterricht Zeit zu sparen und den Fokus auf das Wesentliche, beispielsweise die Analyse solcher Objekte, zu lenken.
- Zoom-Möglichkeit: Während eine Buchseite in ihrer Größe und Auflösung begrenzt ist, bietet *GeoGebra* die Möglichkeit, ein Objekt, wie beispielsweise einen Funktionsgraphen, nicht nur ausschnittsweise, sondern auch das Verhalten für sehr große Argumente zu betrachten. Dies wiederum ermöglicht intuitive Rückschlüsse über das Verhalten im Unendlichen. Auch das Hineinzoomen in einen Zahlenstrahl kann nützlich sein, um Zahlenmengen und ihre Eigenschaften zu untersuchen.

Demonstrationsapplets können sowohl bei der Erarbeitung neuer Themen, als auch für das Wiederholen, Üben und Vertiefen von mathematischen Fähigkeiten sinnvoll eingesetzt werden. Wird ein solches Applet in Einführungsstunden verwendet, sollte es jedoch auf jeden Fall von Fragestellungen und Diskussionen begleitet werden. Auch zum Erkennen von Zusammenhängen verschiedener Themenaspekte können Demonstrationsapplets nützlich sein. Sie können also in drei Unterrichtsphasen eingesetzt werden: beim Erkunden, Entdecken oder Erfinden, beim Systematisieren und Absichern oder beim Üben, Vertiefen und Wiederholen (vgl. Barzel, 2014: 36-40). In allen Unterrichtsphasen muss darauf geachtet werden, dass Schüler*innen auch mitdenken, anstatt nur zuzusehen. Ebenso sollte „[i]m Sinne der biokybernetischen Lerntheorie [...] eine solche Applikation einen Denkanstoß liefern um darauf weiter aufbauen zu können. Ohne weitere Verwendung im Unterricht ist das gezeigte Demonstrationsapplet nutzlos, es wird auf alle Fälle eine weitere Vertiefung benötigt, um einen nachhaltigen Effekt zu bekommen“ (Dorner, 2014: 37). Auch ein übersichtliches Layout ist wichtig. Die Lehrperson sollte bei der Erstellung von Demonstrationsapplets von verschiedenen Farben und Linienstärken sowie Einstellungen zur Sichtbarkeit (nicht jedes Objekt, das für die Konstruktion verwendet wurde, ist für die finale Abbildung wichtig) Gebrauch machen. Zusätzlich muss erwähnt werden, dass in vielen Situationen ein selbständiges Erstellen einer

Konstruktion oder das Zeichnen eines Funktionsgraphen für die Ausbildung vieler Grundvorstellungen notwendig ist und nicht jede grafische Veranschaulichung von einem Computerprogramm übernommen werden sollte.

4.2 Applets zum Entdecken und Ausprobieren

Im Gegensatz zu Demonstrationsapplets erfordern Entdeckungsapplets ein aktives Arbeiten der Schüler*innen. Meistens werden Schieberegler verwendet, um diese Interaktivität zu gewährleisten aber die Veränderungsmöglichkeiten gleichzeitig auch zu begrenzen und den Fokus somit auf eine bestimmte Änderung lenken zu können. So können beispielsweise die Parameter von Funktionen verändert werden, um zu erforschen, wie sich diese Änderung auf den Funktionsgraphen auswirkt. Ebenso könnten Punkte entlang des Einheitskreises verschoben und die Veränderung der Sinus- und Kosinuswerte beobachtet werden. Der Vorteil gegenüber Darstellungen im Schulbuch ist die Möglichkeit des dynamischen Veränderns und Beobachtens der Auswirkungen. Schüler*innen können wahrnehmen, dass eine Veränderung einer Größe oder eines Objekts eine bestimmte Veränderung einer anderen Größe oder eines Objekts auslöst und somit Zusammenhänge besser erfassen. Entdeckungsapplets eignen sich daher, wie der Name schon suggeriert, besonders in Unterrichtsphasen, in denen es um das Entdecken, Erkunden und Erfinden geht, können aber auch in Phasen des Absicherns und Systematisierens sehr gut eingesetzt werden, besonders wenn durch dynamische Veränderungen Zusammenhänge zwischen verschiedenen Teilaspekten eines Themas deutlich werden. Bei der Erstellung solcher Applets muss ein besonderes Augenmerk auf die Benutzerfreundlichkeit gelegt werden, da Schüler*innen sich nicht darauf konzentrieren sollen, wie das Applet funktioniert, sondern was damit beobachtet werden kann. Das Applet sollte daher übersichtlich gestaltet und einfach zu bedienen sein. Ebenso sind klare Vorgaben unumgänglich. Durch Aufgabe- oder Fragestellungen muss klar hervorgehen, was verändert und beobachtet werden soll (vgl. Dorner, 2014: 38). Um zusätzlich zu verdeutlichen, welche Größen mit einem Schieberegler verändert werden, ist es ratsam, die Schieberegler ausreichend zu beschriften und gegebenenfalls auch den Wert des veränderten Parameters anzeigen zu lassen. Nicht immer sind die Standardeinstellungen passend.

4.3 Übungsapplets

Bei Übungsapplets „steht das Festigen von Grundwissen bzw. Grundkompetenzen im Vordergrund“ (Dorner, 2014: 39). Sie beinhalten normalerweise eine klar formulierte Aufgabenstellung, sie erfordern aktives Handeln der Schüler*innen – das Lösen der Aufgabe(n) – und bieten idealerweise auch Hilfestellungen, wenn sich jemand nicht auskennt. Übungsapplets sollten so gestaltet werden, dass sie von den Schüler*innen selbständig

bearbeitet werden können und keine zusätzlichen Erklärungen der Lehrperson notwendig sind. Vergleicht man Aufgaben in Übungsapplets mit Schulbuchaufgaben, so zeichnen sich Applets durch folgende Vorteile aus:

- **Versuchsanzahl:** Über eine Schaltfläche kann die Möglichkeit hinzugefügt werden, das gesamte Applet neu zu laden und somit einen neuen Versuch der Aufgabenbearbeitung zu starten.
- **Rückmeldung:** Applets können so programmiert werden, dass sie den Schüler*innen Rückmeldungen geben. Neben „Richtig“ und „Falsch“ können, mit etwas mehr Programmieraufwand, auch differenziertere Rückmeldungen angezeigt werden. Rückmeldungen sind essentiell, damit Schüler*innen ihren Lernfortschritt selbst überprüfen können. Werden Applets in einen *GeoGebra*-Classroom integriert, so kann auch die Lehrperson diesen Fortschritt mitverfolgen.
- **Hilfestellung:** Idealerweise wird auch die Möglichkeit integriert, bei Bedarf eine Hilfestellung angeboten zu bekommen. Das kann ein Link zu einem Lernvideo sein, ein Informationstext zu einem Themengebiet, Tipps und Tricks zum Bearbeiten von Aufgabenstellungen oder für die Bearbeitung der Aufgabe notwendige Merksätze und Formeln. Natürlich könnte auch eine Schaltfläche zum Anzeigen der Lösung integriert werden.
- **Variation:** Über den Zufallsgenerator, der bei jeder Aktualisierung neue Zufallswerte auswählt, können theoretisch unendlich viele Aufgaben einer Art in ein und demselben Applet bearbeitet werden. Schüler*innen können somit theoretisch unbegrenzt üben. Auch wenn das Bearbeiten der gleichen Aufgabe mit unterschiedlichen Zahlenwerten in vielen Situationen keine zusätzlichen Denkprozesse aktiviert und daher nur begrenzt sinnvoll ist, so kann beispielsweise bei Hausübungen in Form von Übungsapplets gegenseitiges Abschreiben verhindert werden.

Auch hier legt der Name nahe, in welcher Unterrichtsphase das Übungsapplet eingesetzt werden kann: beim Üben, Vertiefen und Wiederholen. Ist jedoch eine Option zur Rückmeldung integriert und/oder wird das Applet in einem *GeoGebra*-Classroom bearbeitet, so kann es auch in der Phase des Diagnostizierens und Überprüfens Anwendung finden. Wie auch beim Entdeckungsapplet soll auch beim Übungsapplet der Fokus nicht durch fehlende Benutzerfreundlichkeit von der eigentlichen Aufgabenstellung abweichen. Nach dem Lesen der Aufgabenstellung soll intuitiv klar sein, wie das Applet zu bearbeiten ist (vgl. Dorner, 2014: 40). Es ist daher zu empfehlen, nicht allzu viele Aufgaben in ein Applet zu integrieren. Bei der Erstellung des Applets und der Formulierung der Aufgabenstellung muss darauf geachtet

werden, dass Eingaben von Schüler*innen von dem Programm unter Umständen nicht erkannt werden. So müssen beispielsweise in Eingabefelder Dezimalzahlen mit einem Punkt statt einem Komma eingegeben werden, der Bruchstrich wird mit $\frac{1}{2}$ eingefügt und Wurzeln müssen als rationale Potenzen dargestellt werden. Auch dass Punkte in *GeoGebra* mit der Notation „(x,y)“ eingegeben werden müssen, kann zum Hindernis werden. Wird darauf nicht hingewiesen, kann es leicht passieren, dass Schüler*innen verzweifeln und die Lust an der Bearbeitung verlieren, da sie trotz richtiger Lösung kein positives Feedback erhalten.

4.4 Werkzeugapplets

Werkzeugapplets sind Applets die spezifisch zum Lösen einer gewissen Aufgabenstellung erstellt wurden. Ein Beispiel hierfür wäre ein Applet mit einem Eingabefeld, in das die Größe eines Winkels eingetragen werden soll. Das Applet stellt diesen Winkel mit seinen zugehörigen Sinus- und Kosinuswerten dann automatisch in einem Einheitskreis dar. Dorner unterscheidet in seinem Beitrag zwischen zwei verschiedenen Arten von Werkzeugapplets:

„Im Unterricht aktiv sind [bei der Verwendung von Werkzeugapplets erster Art] ausschließlich die Lernenden, allerdings obliegt die Vorbereitung der Lehrperson, die ja durchwegs mehr Zeit in Anspruch nehmen kann. Der einmalige Einsatz beschränkt sich im Unterricht auf das Eingeben von Werten und das Erhalten und eventuell Interpretieren der Lösung. Der Einsatz eines Werkzeugapplets dieser Art macht also nur wirklich Sinn, wenn das Werkzeug öfters gebraucht wird. [...] Die Eigenschaften eines Werkzeugapplets zweiter Art erweisen größeren Tiefgang, denn hier steht das Erstellen im Vordergrund. Um ein Werkzeug erstellen zu können, müssen Schüler/innen den Vorgang, den später das Programm erledigt, auf einer höheren Ebene verstehen. Es wird von ihnen eine Abstraktionsleistung verlangt, da sie den Ablauf in einer gewissen Allgemeinheit durchführen müssen, so dass das Werkzeug für beliebige Werte funktioniert.“ (Dorner, 2014: 40-41)

Zu den Werkzeugapplets erster Art lässt sich sagen, dass deren Sinnhaftigkeit von einigen Faktoren abhängt. Wie im obigen Zitat erwähnt, muss der Fokus von der Bearbeitung der Aufgabenstellung zur Interpretation von Ergebnissen verschoben werden, um einen Lernprozess möglich zu machen. Zusätzlich sollte ein solches Applet nicht zu Beginn eines neuen Themas eingesetzt werden. Genauso wie ein Taschenrechner in der Schule für gewöhnlich erst dann verwendet werden darf, wenn sichergestellt wurde, dass der Großteil der Klasse grundlegende Rechenoperationen auch im Kopf durchführen kann, so trägt es auch nicht zur Ausbildung wichtiger Grundvorstellungen bei, vorgefertigte Werkzeugapplets einzusetzen, bevor die Grundaspekte eines Themas verstanden wurden. Werkzeugapplets erster Art sollten

daher frühestens in der Phase des Übens, Vertiefens und Wiederholens im Unterricht Anwendung finden. Ein deutlich aktiverer Lernprozess wird durch das selbstständige Programmieren von Werkzeugapplets durch die Schüler*innen angeregt. Dies ist jedoch definitiv kein leichtes Unterfangen. Vorerst muss sichergestellt werden, dass die Schüler*innen ausreichend Wissen und Fähigkeiten besitzen – und zwar nicht nur in Bezug auf thematische Aspekte, sondern auch hinsichtlich der Bedienung des Programmes *GeoGebra* –, und auch die Lehrperson muss sich sehr gut mit dem Programm auskennen, um als Unterstützung fungieren zu können. Außerdem muss genügend Zeit für die Erstellung eingeplant werden. Werkzeugapplets zweiter Art sind daher definitiv erst in der letzten Phase der Bearbeitung eines Themas einsetzbar. Betrachtet man die einzelnen Konstruktionsschritte, die zur Erstellung des Applets vorgenommen wurden, so kann das neu erstellte Werkzeug jedoch auch zum Diagnose-Instrument werden, da sich falsche Grundvorstellungen wohl auch in falschen Funktionen des Applets äußern, wobei hier klarerweise die Gefahr besteht, fehlendes technologisches Wissen als unzureichende fachliche Kompetenz zu interpretieren.

5 Lehrstoff der 9. Schulstufe

Um *GeoGebra*-Applets erstellen zu können, die für die 5. Klasse AHS (9. Schulstufe) geeignet sind, ist eine genaue Auseinandersetzung mit dem Lehrplan unumgänglich. Die nachfolgenden Kapitel sollen daher die einzelnen Themenbereiche, die nach dem österreichischen Lehrplan in der 5. Klasse AHS unterrichtet werden, im Detail beleuchten, mathematische Aspekte und auszubildende Grundvorstellungen aufzeigen, didaktisch-methodische Herausforderungen und Möglichkeiten darlegen sowie auch das aus der Unterstufe mitgebrachte Vorwissen der Schüler*innen untersuchen. Weiters soll aufgezeigt werden, wie der Lehrstoff in Schulbüchern der 5. Klasse strukturiert ist und welche Aufgabenstellungen üblicherweise zu bearbeiten sind, damit anschließend Applets erstellt werden können, die eine passende Ergänzung zu diesen Aufgaben darstellen.

5.1 Mengen, Zahlen und Rechengesetze

In diesem Themenbereich beschränkt sich der Einsatz von *GeoGebra* hauptsächlich auf das Auslagern von operativen Tätigkeiten. *GeoGebra* kann hier also ähnlich wie ein Taschenrechner benützt werden, um beispielsweise längere Rechenausdrücke zu vereinfachen. Zusätzlich ist ein Großteil des Stoffes zu diesem Themengebiet bereits im Lehrplan der Unterstufe verankert. Daher wurde die Entscheidung getroffen, keine Applets zu erstellen, die primär für das Arbeiten mit Mengen, Zahlen und Rechengesetzen eingesetzt werden können und auch den Lehrstoff der 9. Schulstufe in diesem Bereich nicht weiter zu beleuchten.

5.2 Gleichungen und Gleichungssysteme

5.2.1 Vorwissen

Wie das Thema „Gleichungen und Gleichungssysteme“ in der 9. Schulstufe eingeführt und erarbeitet wird, kann am besten durch einen Blick in die in Österreich sehr häufig verwendeten Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ (vgl. Malle et al., 2017) erkannt werden. Während sich das Arbeiten mit Variablen in der 1. Klasse AHS auf das Lösen sehr einfacher, ohne schwierige Umformungsschritte lösbarer Gleichungen beschränkt (z. B. $x + 9 = 15$), werden in der 2. Klasse AHS Sachaufgaben zum Aufstellen und Lösen von einfachen linearen Gleichungen behandelt und Umkehroperationen thematisiert. Auch das Interpretieren von Formeln scheint im Lehrplan für die 6. Schulstufe auf. In der 3. Klasse wird dann vermehrt mit Ausdrücken mit mehreren Variablen gearbeitet. Formeln sollen aufgestellt und begründet und längere Terme vereinfacht werden. Auch das Lösen von linearen Gleichungen mit einer Variablen ist erneut im Lehrplan angeführt, bevor dann in der 4. Klasse AHS auch Bruchgleichungen und Gleichungssysteme behandelt werden. Sowohl das graphische Lösungsverfahren als auch die drei rechnerischen Methoden (Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren,

Eliminationsverfahren) werden an (Sach-)Aufgaben geübt und die verschiedenen Lösungsfälle untersucht. Interessanterweise ist das Thema „Ungleichungen“ im Lehrplan der AHS nicht verankert, wird jedoch im Werk „Das ist Mathematik 4“ behandelt (vgl. Humenberger et al., 2020). Auch wenn prinzipiell mit Potenzen gearbeitet wird und diese vereinzelt auch beim Umformen von Gleichungen vorkommen (jedoch dann wieder wegfallen), so ist das Lösen von quadratischen oder höheren Gleichungen in der Unterstufe noch nicht Teil des Stoffes.

5.2.2 Thematische Schwerpunkte, Lernziele und Grundkompetenzen

Ziel der 5. Klasse AHS ist es dann, „Lineare und quadratische Gleichungen in einer Variablen lösen können [und] Lösungsfälle untersuchen [zu] können“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). Auch lineare Gleichungssysteme und deren Lösungsfälle werden erneut thematisiert, wobei hier im Gegensatz zur Unterstufe auch Lösungsfälle in Abhängigkeit von Parametern untersucht werden. Folgende Aufgabe ist beispielsweise im Werk „Mathematik verstehen 5“ im Kapitel „Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen“ zu finden:

„Gib einen Wert für a an, sodass das Gleichungssystem keine Lösung hat!

$$\begin{array}{l} I: y = -2x + 1 \\ II: y = ax - 6 \end{array} \quad \text{“ (Malle et al., 2017: 194)}$$

Laut Lehrplan sollen Gleichungen und Gleichungssysteme in der 5. Klasse AHS auch für das Lösen von inner- und vermehrt auch außermathematischen Problemen eingesetzt werden (vgl. Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). In „Mathematik verstehen 5“ wird mit dem Lernziel „Lineare Gleichungen in zwei Variablen grafisch interpretieren können [und] wissen, dass die Lösungsmenge einer solchen Gleichung als Gerade in $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden kann“ (Malle et al., 2017: 186) zusätzlich betont, dass die Lösungsfälle auch geometrisch gedeutet werden sollen. Auch in den Grundkompetenzen der österreichischen Reifeprüfung finden sich die Themenbereiche lineare und quadratische Gleichungen sowie Gleichungssysteme wieder. Die Grundkompetenzen AG 1.2 („Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, Ungleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit“) und AG 2.1 („Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können“) beschreiben die zu erreichenden Kompetenzen beim allgemeinen Arbeiten mit Termen. Schüler*innen sollen außerdem „[l]ineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können“ (AG 2.2), „[q]uadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können“ (AG 2.3) und auch „[l]ineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen

[sowie] Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können“ (AG 2.5) (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2021).

5.2.3 Gleichungen und Gleichungssysteme in Schulbüchern der 5. Klasse

Bevor verschiedene Arten von Gleichungen und Gleichungssysteme genauer untersucht werden, werden vorerst die Grundbegriffe der Algebra – Variablen, Terme, Gleichungen und Formeln – definiert. Es folgen Aufgaben zum Aufstellen oder Interpretieren von Termen mit einem besonderen Fokus auf die Termdarstellung prozentueller Veränderungen. Es muss beispielsweise die Aussage „Eine Größe G wird um 15% erhöht“ der Termdarstellung $G \cdot 1,15$ zugeordnet werden (Malle et al., 2017: 39). Im nächsten Schritt wird der Begriff der Äquivalenzumformung definiert und in den darauffolgenden Aufgabenstellungen müssen Umformungen durchgeführt oder überprüft werden. Auch die Begriffe „Grundmenge“, „Definitions Menge“, „Lösungsmenge“ und „Lösung“ werden erklärt, bevor dann Gleichungen in einer Variablen und deren Lösungen untersucht werden.

Quadratische Gleichungen werden in „Mathematik verstehen 5“ (vgl. Malle et al., 2017) im dritten Kapitel eingeführt. Nachdem die Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ als quadratische Gleichung definiert wird, werden Sonderfälle quadratischer Gleichungen ($a \cdot x^2 = 0$; $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$; $a \cdot x^2 + c = 0$) präsentiert und erläutert, wie man in den jeweiligen Fällen die Lösung berechnen kann. Zwar kommen in Musterbeispielen unterschiedliche Lösungsmengen vor, wie diese aber von der Diskriminante beziehungsweise den Parametern abhängen, wird nicht weiter erwähnt. Es folgen Aufgaben zum Lösen von Sonderfällen quadratischer Gleichungen. Anschließend wird die normierte quadratische Gleichung sowie die kleine Lösungsformel eingeführt und auch erstmals der Begriff Diskriminante und ihr Zusammenhang mit der Anzahl der Lösungen erklärt. In den darauffolgenden Aufgaben soll die Lösungsmenge normierter quadratischer Gleichungen ermittelt werden. Die gleiche Vorgehensweise ist auch bei der allgemeinen quadratischen Gleichung zu erkennen. Im Anschluss daran können Anwendungsaufgaben zum Lösen quadratischer Gleichungen, wie beispielsweise die Folgende gefunden werden:

„Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit 50m/s lotrecht nach oben geschossen, so ist seine Höhe $h(t)$ über der Abschußstelle zum Zeitpunkt t näherungsweise gegeben durch: $h(t) = 50 \cdot t - 5 \cdot t^2$ (t in s, $h(t)$ in m)

Zu welchen ungefähren Zeitpunkten ist der Körper in einer Höhe von a) 10m, b) 20m, c) 25m über der Abschußstelle? Runde auf zwei Nachkommastellen!“ (Malle et al., 2017: 62)

Nachdem dann der Satz von Vieta und sein Beweis sowie verschiedene Aufgaben zum Ermitteln von Koeffizienten einer quadratischen Gleichung angeführt werden, endet das Kapitel „Quadratische Gleichungen“ mit dem Unterkapitel „Quadratische Gleichungen mit Parametern“. In diesem Abschnitt sind Aufgaben zu finden, in denen mögliche Werte der Parameter einer quadratischen Gleichung bestimmt werden müssen, wenn die Anzahl der Lösungen bekannt ist.

Bevor in „Mathematik verstehen 5“ in Kapitel 9 die Gleichungssysteme betrachtet werden, wird zuerst die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ als lineare Gleichung in zwei Variablen definiert und ihre Lösungsmenge, also alle Punkte $(x | y)$ auf der entsprechenden Geraden betrachtet (vgl. Malle et al., 2017: 186-189). Es folgen Aufgaben zu verschiedenen Darstellungsformen solcher Geraden (explizite und implizite Form) beziehungsweise zum Darstellungswechsel, Aufgaben zur Lage dieser Geraden im Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Parametern und zur Lagebeziehung zwischen Punkt und Gerade. Es folgt die Definition eines Gleichungssystems in zwei Variablen, bestehend aus zwei Gleichungen, und dessen Lösung. Zusätzlich wird ein Überblick über die drei rechnerischen Lösungsverfahren sowie die grafische Lösungsmethode gegeben, wobei hier gleich alle drei Lösungsfälle präsentiert werden. Es folgen Aufgaben zum Lösen von Gleichungssystemen (zuerst wird das Lösungsverfahren konkret vorgegeben, dann ist dieses selbst zu wählen), anschließend müssen fehlende Parameter in Gleichungssystemen in Abhängigkeit von der Lösungsmenge angegeben werden. Auch Textaufgaben sind angeführt.

5.2.4 Aspekte und Grundvorstellungen zu Gleichungen und Gleichungssystemen

Um ein Verständnis über Gleichungen und Gleichungssysteme aufbauen zu können, ist es wichtig, dass tragfähige Grundvorstellungen über Variablen aufgebaut werden. Bereits im Jahr 1993 befasste sich Günther Malle mit den wesentlichen Aspekten des Variablenbegriffs und unterschied zwischen dem *Gegenstandsaspekt* (die Variable ist eine unbekannte Größe), dem *Einsetzungsaspekt* (verschiedene Werte können anstelle der Variablen eingesetzt werden) und dem *Kalkülaspekt* (mit Variablen kann gerechnet werden wie mit Zahlen) (vgl. Malle, 1993: 45-49). Diese drei Aspekte lassen sich direkt auch als bei Schüler*innen auszubildende Grundvorstellungen formulieren – Gegenstandsvorstellung, Einsetzungsvorstellung und Kalkülvorstellung. Alle drei sind für das verständnisvolle Arbeiten mit Gleichungen von enormer Bedeutung. Die folgenden Aufgabenstellungen sollen verdeutlichen, wie die einzelnen Grundvorstellungen im Unterricht ausgebaut werden können:

- *Aufgabe 1:* „Eine Ware kostet inklusive Verpackung 3,50€. Der Preis für die Verpackung beträgt ein Viertel des Preises der Ware (ohne Verpackung). Wie viel kostet die Ware, wie viel die Verpackung?“ (Malle et al., 2017: 51)
- *Aufgabe 2:* „Gegeben ist die lineare Gleichung $7x + 4y = 20$. Kreuze die Zahlenpaare an, die Lösungen der gegebenen Gleichung sind!
 $(3 \mid -\frac{1}{5})$ $(-1 \mid 6,75)$ $(1 \mid 3,5)$ $(2 \mid 1,5)$ $(4 \mid -1)$ “ (Malle et al., 2017: 188)
- *Aufgabe 3:* „Vereinfache! $(x + y) \cdot (1 - y) - (1 - x) \cdot y$ “ (Malle et al., 2017: 44)

In der ersten Aufgabe wird die Gegenstandsvorstellung angesprochen. Für die gesuchte Größe, der Preis der Ware, muss eine Variable definiert werden und der im Text beschriebene Sachzusammenhang mit dieser ausgedrückt werden. Aufgaben der zweiten Art dienen der Ausbildung der Einsetzungsvorstellung. Verschiedene Werte werden für die Variable x und für y eingesetzt, um zu überprüfen, ob die Punkte die angegebene Gleichung erfüllen. Die dritte Aufgabe dient rein der Ausbildung der Kalkülvorstellung, da hier keine Unbekannten berechnet werden müssen, noch Werte anstelle der Variablen eingesetzt werden müssen. Stattdessen müssen die schon aus der Arithmetik bekannten Rechenregeln angewandt werden.

Selbstverständlich gibt es unzählige Aufgaben, bei denen mehrere Aspekte vertreten sind. Das wird vor allem beim Arbeiten mit Gleichungen und Gleichungssystemen ersichtlich. Soll beispielsweise die Gleichung $(x + 2) \cdot (x - 7) + 10x = 10$ gelöst werden, so muss die Variable x in erster Linie als unbekannte Größe aufgefasst werden, die es zu berechnen gilt. Idealerweise ist hier auch bereits die Einsetzungsvorstellung vorhanden: es werden jene Werte gesucht, die für x eingesetzt eine wahre Aussage liefern. Um die Lösungsmenge dann auch ermitteln zu können, muss die Gleichung zuerst umgeformt werden, wofür wiederum eine Kalkülvorstellung notwendig ist und beim Arbeiten mit den Lösungsformeln müssen wiederum entsprechende Werte anstelle der Parameter a, b und c (beziehungsweise p und q) eingesetzt werden.

Wie auch in „Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra“ festgestellt wird, so ist es beim Arbeiten mit Gleichungen wichtig, zwischen Lösungsvariablen und Koeffizienten (oder Parametern) zu unterscheiden (vgl. Henn & Filler, 2015: 17). Auch wenn es in den Augen der Lehrperson vielleicht offensichtlich ist, dass bei der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung, $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, die Variable x die gesuchte, unbekannte Größe, die Parameter a, b und c hingegen für beliebige, aber feste, reelle Zahlen stehen, so mag dies für Schüler*innen nicht im Vorhinein klar sein. Besonders wenn die Variable einmal nicht durch den Buchstaben x bezeichnet wird, könnte es problematisch werden. Auch beim Lösen von Gleichungen in *GeoGebra* muss bei mehreren Variablen eine Unterscheidung zwischen

Koeffizienten und Lösungsvariable vorgenommen werden, indem der passende Befehl – *Löse(<Gleichung in x>)* beziehungsweise *Löse(<Gleichung>, <Variable>)* – ausgewählt wird.

Zusätzlich zu den Grundvorstellungen zu Variablen müssen auch jene zu Gleichungen ausgebildet sein, um mit Gleichungen und Gleichungssystemen arbeiten zu können. In einem Artikel in der Mitgliederzeitschrift der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik werden drei Aspekte zum Gleichheitszeichen hervorgehoben, die wiederum auch als Grundvorstellungen bei Schüler*innen vorhanden sein sollten:

„Mit Gleichungen lässt sich eine „Gleichheit“ ...
... feststellen oder behaupten,
... erreichen (indem z. B. nach allen „Lösungen“ gesucht wird, für die diese Gleichheit dann gilt, die Gleichung also gelöst wird),
... *per definitionem* festsetzen bzw. vereinbaren (z. B. für Funktionen)“ (Hischer, 2021: 67)

Es lässt sich also erkennen, dass in Anlehnung an diese Aspekte eine *Feststellungsvorstellung*, eine *Erreichungsvorstellung* sowie eine *Definitionsvorstellung* im Unterricht ausgebildet werden sollte. Auch wenn im Themenblock „Gleichungen und Gleichungssysteme“ besonders der zweitgenannte Aspekt, das Erreichen einer Gleichheit durch das Finden von Lösungen, in den Vordergrund tritt, so gibt es durchaus Aufgabenstellungen, wie die in Abbildung 14 dargestellte, bei denen auch das Vorhandensein der anderen beiden Vorstellungen von Nöten ist:

9.42 Lea lädt Musikdateien aus dem Internet herunter. Bei dem Anbieter MPMusic kostet eine Musikdatei 0,97€, bei eLOAD 0,99€. Für insgesamt 32 Musikdateien muss Lea 31,32€ zahlen. Wie viele Dateien hat sie bei MPMusic heruntergeladen, wie viele bei eLOAD?

Abbildung 14: Schulbuchaufgabe Gleichungssysteme (Malle et al., 2017: 195)

Vorerst müssen zwei Gleichheiten festgestellt werden. Schüler*innen müssen erkennen, dass x Dateien des Anbieters MPMusic und y Dateien des Anbieters eLOAD insgesamt 31,32€ ausmachen. Es muss also die Gleichheit $0,97x + 0,99y = 31,32$ festgestellt werden. Ebenso muss erkannt werden, dass die Gesamtstückanzahl als Summe aus x und y dargestellt werden kann und die Gleichheit $x + y = 32$ festgestellt werden. Anschließend gilt es, Gleichheiten zu erreichen, also eine Lösung zu finden, die eingesetzt in beide Gleichungen wahre Aussagen liefert. Wird diese Sachaufgabe grafisch gelöst, so müssen die beiden Gleichungen als lineare Funktion betrachtet werden. Die Gleichheiten $y = -\frac{0,97}{0,99}x + \frac{31,32}{0,99}$ sowie $y = -x + 32$ müssen als Funktionen festgesetzt werden.

Allgemein ist beim Arbeiten mit Gleichungen und Gleichungssystemen oftmals ein Auffassen dieser als Funktionen hilfreich oder sogar notwendig. Es ist daher wichtig, zusätzlich zu den Grundvorstellungen zu Variablen und Gleichungen, auch die im Abschnitt 5.3.4 beschriebenen Grundvorstellungen zu Funktionen auszubilden oder zu festigen.

5.3 Funktionen

5.3.1 Vorwissen

Grundlegend für das Arbeiten mit Funktionen ist es, das Konzept einer veränderlichen Größe zu verstehen beziehungsweise die Fähigkeit, mit Variablen, Formeln, Termen und Gleichungen zu arbeiten, Fähigkeiten die laut österreichischem Lehrplan (vgl. Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018) bereits in der Unterstufe ausgebaut werden sollten. Nachdem dann in der 8. Schulstufe die Zahlenmenge der rationalen Zahlen durch die irrationalen Zahlen zu den reellen Zahlen erweitert wird, sind alle Voraussetzungen gegeben, um auch das Thema „reelle Funktionen“ behandeln zu können. Im Lehrplan scheint unter dem Themenbereich „Arbeiten mit Variablen“ daher ab der 4. Klasse AHS auch erstmals der Funktionsbegriff auf. Der Lehrplan der AHS-Unterstufe sieht vor, dass „durch das Arbeiten mit funktionalen Abhängigkeiten [ein] intuitive[r] Funktionsbegriff erarbeite[t]“ werden soll (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). Auch in den Bildungsstandards der 8. Schulstufe, M8, waren diese Kompetenzen im Inhaltsbereich I2, ‚Variable, funktionale Abhängigkeiten‘, verankert und in jeder Handlungs- und Komplexitätsebene realisiert. So wird beispielsweise im Handlungsbereich 3 (Interpretieren) und Komplexitätslevel 1 die Kompetenz „Die Schülerinnen und Schüler können algebraisch, tabellarisch oder grafisch dargestellte Strukturen und (funktionale) Zusammenhänge beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten“ angeführt (Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen, 2009). Auch wenn die Bildungsstandards in dieser Form abgeschafft wurden, so bieten sie dennoch einen Überblick über die Ziele des Mathematikunterrichts in der Unterstufe.

Schulbücher der 8. Schulstufe geben Aufschluss darüber, inwiefern der Funktionsbegriff bereits in der Unterstufe thematisiert und das funktionale Denken gefördert wird. Betrachtet man beispielsweise das Werk „Das ist Mathematik 4“, so lässt sich erkennen, dass vorerst der Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung definiert wird (vgl. Humenberger, 2020: 84). Schüler*innen sollen bei Beispielen, zuerst durch Pfeildiagramme, dann mittels Graphen im Koordinatensystem dargestellt, entscheiden, ob es sich um Funktionen handelt oder nicht. Anschließend werden die Darstellungsarten von Funktionen – Tabelle, Graph und Funktionsterm – erklärt und etliche Aufgaben zum Darstellungswechsel angeführt. Auch Teilaufgaben zum Ablesen von Wertepaaren sind in diesem Schulbuchaufgaben bereits

vertreten. Im Anschluss daran sollen Funktionsgraphen interpretiert werden. Besonders häufig kommen hier Weg-Zeit-Diagramme und Füllkurven vor. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit direkt proportionalen Zusammenhängen und allgemeinen linearen Funktionen. Die Begriffe Steigung, y -Achsen-Abschnitt und Nullstelle werden eingeführt, Darstellungswechsel sollen durchgeführt und charakteristische Eigenschaften erkannt werden, und auch Sachaufgaben zu linearen Zusammenhängen sind angeführt. Zuletzt werden noch die Themen „Quadratische Funktionen“ und „Rationale Funktionen“ angeschnitten, wobei hier hauptsächlich das Ablesen und berechnen von Wertepaaren eine Rolle spielt. Auch in der Schulbuchreihe „Thema Mathematik“ lässt sich eine sehr ähnliche Vorgehensweise bei der Einführung des Themas in der 4. Klasse AHS erkennen (vgl. Dorfmayr et al., 2019). Es ist daher anzunehmen, dass auch im Unterricht meist ähnlich verfahren wird. Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass Schüler*innen in der 9. Schulstufe durchaus bereits mit dem Funktionsbegriff vertraut sein sollten, wobei der in Abschnitt 5.3.4 erläuterte Zuordnungsaspekt im Vorwissen der Lernenden sicherlich deutlich besser ausgeprägt ist als der Kovariationsaspekt.

5.3.2 Thematische Schwerpunkte, Lernziele und Grundkompetenzen

Betrachtet man den Lehrplan für das 1. und 2. Semester der Oberstufe, die 5. Klasse AHS, so ist schnell erkennbar, dass das Thema ‚Funktionen‘ in dieser Schulstufe eine große Rolle spielt. Zusätzlich zu den bereits in der 4. Klasse ausgebauten Fähigkeiten des Darstellungswechsels und des Verstehens des Konzeptes einer Abhängigkeit sollen Schüler*innen in der 5. Klasse auch „über den Modellcharakter von Funktionen reflektieren können“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). Auch das Beschreiben und Untersuchen von linearen, quadratischen und rationalen Funktionen ist abermals Teil des Lehrstoffes, wobei vor allem die letzten beiden deutlich ausführlicher behandelt werden und auch das Berechnen von Schnittpunkten erstmals thematisiert wird. Neu hinzu kommen abschnittsweise definierte Funktionen sowie der funktionale Aspekt von Formeln mit einem besonderen Fokus auf die Fähigkeit, „direkte und indirekte Proportionalitäten mit Hilfe von Funktionen beschreiben [zu] können“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). Ebenso soll vermehrt in anwendungsorientierten Bereichen mit Funktionen gearbeitet werden: „Funktionen als mathematische Modelle auffassen können“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018).

Da der größte Teil des Stoffes der Oberstufe auch Teil der österreichischen Reifeprüfung ist, ist es an dieser Stelle angebracht, die Lernziele der 9. Schulstufe in Form von Grundkompetenzen anzuführen (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2021). Besonders in den Themenbereichen „Funktionsbegriff, reelle Funktionen,

Darstellungsformen und Eigenschaften“, „Lineare Funktionen“ und „Potenzfunktionen“ sollen in der 5. Klasse AHS bereits maturarelevante Grundkompetenzen ausgebaut werden, wie in Tabelle 1 ersichtlich ist.

Grundkompetenz	Beschreibung
Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften	
FA 1.1	Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann.
FA 1.2	Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können.
FA 1.3	Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können.
FA 1.4	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können.
FA 1.6	Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können.
FA 1.7	Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können.
Lineare Funktion $[f(x) = k \cdot x + d]$	
FA 2.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können.
FA 2.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können.
FA 2.3	Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können.
FA 2.4	Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können: $f(x+1) = f(x) + k$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k$
FA 2.5	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktionen bewerten können.
FA 2.6	Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können.
Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$, oder mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$	
FA 3.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können.
FA 3.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können.

FA 3.3	Die Wirkung der Parameter a und b kennen und im Kontext deuten können.
FA 3.4	Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = a \cdot x^{-1}$ beschreiben können.
Polynomfunktionen $[f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \text{ mit } n \in \mathbb{N}]$	
FA 4.3	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können.

Tabelle 1: Grundkompetenzen zu Funktionen

Anmerkung: die Grundkompetenzen FA 3.1 und FA 3.2 beschränken sich für die 5. Klasse AHS auf Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + b$, $f(x) = ax^{-1} + b$ oder $f(x) = ax^{-2} + b$, die Grundkompetenz 4.3 auf Polynomfunktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$.

5.3.3 Funktionen in Schulbüchern der 5. Klasse

Sehr ähnlich wie auch in der 4. Klasse AHS wird auch in der 5. Klasse in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017) vorerst der Begriff der Funktion als eindeutige Zuordnung definiert und anhand verschiedener Darstellungsarten erläutert, wann es sich bei Zuordnungen um Funktionen handelt und wann nicht. Auch Begrifflichkeiten wie Definitions- und Wertemenge, Argument, Funktionswert als auch Minimum- und Maximumstelle werden eingeführt. Ebenso müssen Funktionsgraphen in verschiedenen Anwendungssituationen interpretiert und Wertepaare ermittelt werden, bevor dann zu den linearen Funktionen übergegangen wird. Ergänzend zu den bereits in der 4. Klasse erarbeiteten Aspekten zu den linearen Funktionen wird hier auch der Kovariationsaspekt angesprochen, indem anhand von Steigungsdreiecken und Alltagsaufgaben die konstante Änderung des y -Wertes bei Änderung des x -Wertes um einen bestimmten Wert $x \rightarrow x + c$ ($c \in \mathbb{R}$) erklärt, veranschaulicht und das Deuten des Steigungswertes k geübt beziehungsweise der Differenzenquotient eingeführt wird. Auch das Vergleichen von linearen Funktionen hinsichtlich ihrer Steigung und ihrer Verschiebung entlang der senkrechten Achse sowie das Berechnen von Schnittpunkten ist Thema in dem zuvor erwähnten Schulbuch der 5. Klasse AHS.

Bei den nichtlinearen Funktionen wird darauf Wert gelegt, dass Schüler*innen lernen, quadratische Funktionen zu zeichnen und Wertetabellen zu erstellen. Auch der Zusammenhang zwischen quadratischen Gleichungen und deren Lösungen und den Nullstellen von quadratischen Funktionen beziehungsweise der Anzahl an Nullstellen wird thematisiert. Außerdem sollen Scheitelpunkte berechnet sowie anhand gegebener Funktionsgraphen der zugehörige Funktionsterm angegeben werden können. Zusätzlich wird, wie bei den linearen Funktionen, viel mit quadratischen Modellen aus dem Alltag wie beispielsweise Wurfparabeln und Brückenbögen gearbeitet.

Im nächsten Schritt werden Funktionen der Form $f(x) = \frac{c}{x}$ sowie $f(x) = \frac{c}{x^2}$ ($c \in \mathbb{R}$) und deren Eigenschaften anhand verschiedenster Graphen und Funktionsterme analysiert und die indirekte Proportionalität zweier Größen in verschiedenen Kontexten behandelt.

Anschließend werden noch abschnittsweise definierten Funktionen sowie Sprungfunktionen vorgestellt und verschiedene Aufgaben zum Darstellen und Modellieren dieser angeführt, bevor anschließend der Zusammenhang zwischen Formeln und Funktionen thematisiert wird. Hier kommen Funktionen erstmals mit mehreren Argumenten vor. Mit Hilfe verschiedener Formeln aus der Physik wird gezeigt, wie sich die Wahl von Konstanten und Argument auf den Funktionstyp auswirkt.

Allgemein lässt sich erkennen, dass einige Themenbereiche auch schon in der 8. Schulstufe vorkommen und der Stoff der 9. Schulstufe daher teilweise als Wiederholung und Auffrischung dient. Es ist jedoch deutlich zu sehen, dass die Modellierungskomponente, das Übersetzen von Alltagssituationen in die Sprache der Mathematik, in dieser Klasse einen deutlich höheren Stellenwert einnimmt, als dies noch in der vorangehenden Schulstufe der Fall war.

5.3.4 Aspekte und Grundvorstellungen zu Funktionen

Zusätzlich zu den in Abschnitt 5.2.4 erläuterten Grundvorstellungen zu Variablen und Gleichungen sind auch funktionsspezifische Aspekte und Grundvorstellungen im Unterricht anzusprechen und auszubilden. Um den Funktionsbegriff in seiner Vollständigkeit erfassen zu können, sind zwei Definitionen einer Funktion notwendig (Greefrath et al., 2016: 47):

- Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Jedem Element einer Menge A wird genau ein Element einer Menge B zugeordnet.
- Die Teilmenge f des kartesischen Produkts $A \times B$ zweier Mengen A und B wird als Funktion bezeichnet, wenn für alle $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.

Malle (2000) klassifiziert die erste Definition als *Zuordnungsaspekt*, während die zweite unter dem Begriff *Paarmengenaspekt* fällt. Um diese Aspekte in ihrer Tiefe erfassen zu können, sind bei Schüler*innen drei Grundvorstellungen auszubilden, die *Zuordnungsvorstellung*, die *Kovariationsvorstellung* sowie die *Objektvorstellung*, wobei jede Grundvorstellung mit beiden Aspekten in Verbindung gebracht werden kann (vgl. Greefrath et al., 2016: 46). Diese können wie folgt beschrieben werden:

- *Zuordnungsvorstellung*: Jedem Wert einer bestimmten Größe wird genau ein Wert einer bestimmten anderen Größe zugeordnet.
- *Objektvorstellung*: Ein Zusammenhang zwischen zwei Größen wird durch die Funktion als Ganzes beschrieben.

- *Kovariationsvorstellung*: Eine Funktion beschreibt, wie sich das Ändern der unabhängigen Größe auf die abhängige Größe auswirkt.

Um diese Grundvorstellungen im Unterricht ausbilden zu können ist es wichtig, verschiedene Darstellungsformen von Funktionen zu behandeln und zu untersuchen. Die im Folgenden angeführten Aktivitäten zum Temperaturverlauf von zu Beginn kochendem Wasser sollen veranschaulichen, wie die einzelnen Grundvorstellungen durch verschiedene Darstellungsmöglichkeiten von funktionalen Zusammenhängen ausgebildet werden können:

- *Aktivität 1*: Die Lehrperson stellt einen Topf auf den Tisch, in dem ein Thermometer angebracht ist. Ein Wasserkocher wird aufgestellt. Die Lehrperson fragt die Schüler*innen, was vermutlich beobachtet werden kann, wenn das kochende Wasser in den Topf gefüllt und jede Minute die Temperatur gemessen wird.
- *Aktivität 2*: Das kochende Wasser wird in den Topf gefüllt. Jede Minute (10 Minuten lang) wird die Temperatur gemessen und die Werte in eine Tabelle an der Tafel eingetragen. Die Tabelle wird horizontal, als auch vertikal betrachtet und diskutiert.
- *Aktivität 3*: Mit Hilfe der Tabelle sollen die Schüler*innen selbstständig einen Funktionsgraphen erstellen, der den Sachverhalt wiedergibt.

Bereits die erste Aktivität eignet sich, um zwei Grundvorstellungen auszubilden. Schüler*innen werden schon vor der Durchführung des Experimentes einen gewissen Zusammenhang zwischen der vergangenen Zeit und der Temperatur feststellen können (Objektvorstellung) und vermutlich intuitiv erkennen, dass die Temperatur mit voranschreitender Zeit sinken wird (Kovariationsvorstellung). Wird auch noch die Abhängigkeit thematisiert (welche Größe ist von welcher abhängig), so kann zusätzlich auch noch die Zuordnungsvorstellung angesprochen werden. In der zweiten Aktivität spielen sowohl die Zuordnungsvorstellung (bei der horizontalen Analyse) als auch die Kovariationsvorstellungen (wenn die Tabelle senkrecht betrachtet wird) eine bedeutende Rolle. Schüler*innen können nicht nur erkennen, dass jedem Zeitpunkt genau eine Temperatur zugeordnet werden kann, sondern auch die Wirkung der Zeitveränderung auf die Temperaturveränderung kann direkt erkannt und thematisiert werden. Beim Zeichnen des Graphen wird dann die Objektvorstellung als auch die Zuordnungsvorstellung gefestigt, da die einzelnen Wertepaare in ein Koordinatensystem übertragen und zu einem „ganzen“ Funktionsgraphen verbunden werden. Wird das Aussehen des Funktionsgraphen und seine Veränderung mit der Zeit noch zusätzlich diskutiert, kann auch die graphische Darstellung bei der Ausbildung der Kovariationsvorstellung helfen.

Verschiedene Darstellungsformen eignen sich also unterschiedlich gut zur Ausprägung der jeweils gewünschten Grundvorstellungen. Damit zwischen den einzelnen

Grundvorstellungen dann schlussendlich auch eine mentale Verbindung aufgebaut werden kann ist es zusätzlich ratsam, Schüler*innen auch zum Darstellungswechsel zu animieren und verschiedene Darstellungen miteinander zu vergleichen (vgl. Greefrath et al., 2016: 56). Auch wenn es mit Sicherheit sehr wichtig gewesen ist, dass Schüler*innen auch selbstständig und analog Funktionen auf verschiedenste Art und Weise darstellen können, sind *GeoGebra*-Applets ein hilfreiches Werkzeug um verschiedene Funktionen in unterschiedlichen Darstellungsarten kennenzulernen und zu analysieren. Das selbstständige Erstellen von Tabellen und Funktionsgraphen nimmt oft viel Zeit in Anspruch. Applets können hier helfen, zeitliche Ressourcen beim Darstellen zu sparen und diese für das Interpretieren und Analysieren zu nutzen.

Ebenso ist das Betrachten von Funktionen mit Parametern und das Verändern dieser ein wichtiges Unterrichtswerkzeug, um das funktionale Denken bestmöglich zu fördern. In der 9. Schulstufe eignet es sich beispielsweise die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + c$ mit verschiedenen Werten für a und c zu betrachten und die Funktionsgraphen zu vergleichen:

„Auf Basis der Zuordnungsvorstellung wird jeweils überlegt, welchen Funktionswert [eine Funktion] einer Stelle x zuordnet und wie dies mit Zuordnungen durch die Funktion [mit veränderten Parametern] zusammenhängt. Dadurch können bzw. sollen [auch] Einsichten über Zusammenhänge zwischen den Graphen der Funktionen [...] als Ganzes entstehen. Dies spricht also die Objektvorstellung von Funktionen an.“ (Greefrath et al., 2016: 61).

Besonders hier können *GeoGebra*-Applets den Lernprozess und damit die Ausbildung von Grundvorstellungen unterstützen, da mit ihnen die Auswirkung einer Parameteränderung auf die Funktionsgraphen dynamisch veranschaulicht werden kann und Raum zum Ausprobieren und Entdecken bieten, wie im Kapitel 6 ersichtlich wird.

5.4 Trigonometrie

5.4.1 Vorwissen

Um die einzelnen Aspekte der Trigonometrie verstehen zu können sind einige Vorerfahrungen mit verwandten Themengebieten notwendig. Schüler*innen müssen zwischen verschiedenen Arten von Dreiecken unterscheiden, Winkel messen sowie Winkelarten erkennen können und auch das Arbeiten mit Verhältnissen sollte bereits bekannt sein. Ebenso kann das Wissen über den Lehrsatz des Pythagoras sowie über Kreisbögen und Bogenmaß als Grundvoraussetzung angesehen werden. Diese Themenbereiche sind im österreichischen Curriculum der AHS Unterstufe verankert. Das Arbeiten mit Winkeln ist Thema der 1. Klasse, Dreiecke werden in der 2. Klasse durchgenommen und der Lehrsatz des Pythagoras, Verhältnisse sowie Kreis und

Bogenmaß sind Thema der 3. und 4. Klasse (vgl. Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). Die Winkelfunktionen sowie Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken treten dann erstmals im Lehrplan der 9. Schulstufe auf (vgl. Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018).

5.4.2 Thematische Schwerpunkte, Lernziele und Grundkompetenzen

Laut Curriculum sollen in der 5. Klasse AHS die Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte eines Winkels definiert, berechnet und am Einheitskreis dargestellt werden können. Ebenso sollen Gleichungen der Form $\sin(\alpha) = c$ (analog für Kosinus und Tangens), wobei c eine gegebene reelle Zahl darstellt, gelöst werden können. Zusätzlich werden Berechnungen an Dreiecken (allgemein und rechtwinklig) durchgeführt, wofür Wissen über die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck im Zusammenhang mit den Winkelfunktionen notwendig ist, aber auch der Kosinus- sowie der Sinussatz beherrscht werden müssen. Auch das Umwandeln von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten ist Thema der 9. Schulstufe (vgl. Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). Im Stoff der zentralisierten Reifeprüfung sind diese Themenbereiche nur teilweise angeführt. Die Grundkompetenzen beschränken sich darauf, die „Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck [zu] kennen und zur Auflösung rechtwinkliger Dreiecke einsetzen [zu] können“ sowie die „Definitionen von Sinus und Cosinus für Winkel größer als 90° [zu] kennen und einsetzen [zu] können“ (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2021). Vermessungsaufgaben beschränken sich auf rechtwinklige Dreiecke (oder jene die in rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt werden können) und auch Polarkoordinaten spielen nicht direkt eine Rolle.

5.4.3 Trigonometrie in Schulbüchern der 5. Klasse

Der Einstieg in das Thema „Trigonometrie“ erfolgt im Werk „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017) über die Definition von Kosinus, Sinus und Tangens als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck. Die Begriffe *Ankathete*, *Gegenkathete* und *Hypotenuse* werden eingeführt und die Verhältnisse zwischen ihnen als *Sinus*, *Kosinus* beziehungsweise *Tangens* definiert. Noch vor dem ersten Rechenbeispiel wird erklärt, wie die Berechnung eines Winkelfunktionswertes beziehungsweise die Berechnung des Winkels bei bekanntem Verhältnis mit dem Taschenrechner erfolgt. In den darauffolgenden Aufgaben müssen dann fehlende Größen in einem rechtwinkligen Dreieck berechnet oder Verhältnisse richtig zugeordnet werden, bevor dann mit Anwendungsaufgaben in ebenen Figuren, anschließend auch bei Körpern fortgefahren wird. Auch Aufgaben zur Berechnung von Steigungen sowie klassische Vermessungsaufgaben werden angeführt. Anschließend werden kurz die

Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens erläutert und die Sinus-beziehungsweise Kosinuswerte „besonderer Winkel“ (0° , 30° , 45° , 60° , 90°) angegeben, interessanterweise ohne einen Bezug zum Einheitskreis herzustellen. Nach einer kurzen allgemeinen Einführung zum Thema „Koordinaten“ werden dann die Polarkoordinaten vorgestellt. Nach Aufgaben zum Umrechnen von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten und umgekehrt tritt erstmals der Begriff *Einheitskreis* auf und Sinus- sowie Kosinuswerte von Winkeln werden als „Stellen auf den Achsen“ und „vorzeichenbehaftete Strecken“ (Malle, 2017: 93) angeführt. Es folgen Aufgaben zu Sinus- und Kosinuswerten und deren Vorzeichen in Abhängigkeit von der Winkelgröße sowie Aufgaben zum Einzeichnen von Winkeln und deren Winkelfunktionswerten. Ein Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck wird nicht explizit hergestellt. Anschließend wird die trigonometrische Flächeninhaltsformel eingeführt. Das Arbeiten mit dieser soll mit Hilfe von Aufgaben zum Dreieck und Parallelogramm geübt werden. Zuletzt werden Sinus- und Kosinussatz hergeleitet und Anwendungsaufgaben angeführt.

5.4.4 Aspekte und Grundvorstellungen zur Trigonometrie

In der Literatur finden sich kaum Versuche, didaktische Aspekte und Grundvorstellungen für Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck beziehungsweise im Einheitskreis zu definieren. In Anlehnung an einen Artikel aus der Zeitschrift „Mathematik lehren“ mit dem Titel „Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus“ (Frohn & Salle, 2017) soll hier nun versucht werden, in Anbetracht des Lehrplans sowie Schulbuchaufgaben und Definitionen, die wesentlichen Aspekte zusammenzufassen und Grundvorstellungen zu formulieren. Periodische Funktionen spielen in der 9. Schulstufe noch keine Rolle und werden daher an dieser Stelle auch nicht weiter didaktisch analysiert. Selbstverständlich ist es dennoch wichtig, auch für die in der 9. Schulstufe relevanten Aspekte der Trigonometrie Grundvorstellungen dahingehend zu entwickeln, dass später bei der Erarbeitung von periodischen Funktionen an das erworbene Wissen angeknüpft werden kann.

Da Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte eines Winkels stets ein Verhältnis zwischen zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks angeben – egal ob im ersten Quadranten des Einheitskreises oder bei rechtwinkligen Dreiecken mit einer Hypotenusenlänge ungleich eins –, ist es sinnvoll die von Frohn und Salle (2017) formulierte *Verhältnisvorstellung* zu übernehmen und auch einen *Verhältnisaspekt* zu definieren. In dem Artikel wird die *Projektionsvorstellung* als zweite Grundvorstellung angegeben. Diese beschreibt die Auffassung von Sinus und Kosinus als Projektionsfaktor bei der Projektion einer Strecke auf

eine angrenzende horizontale, beziehungsweise senkrechte Gerade, wie in Abbildung 15 dargestellt.

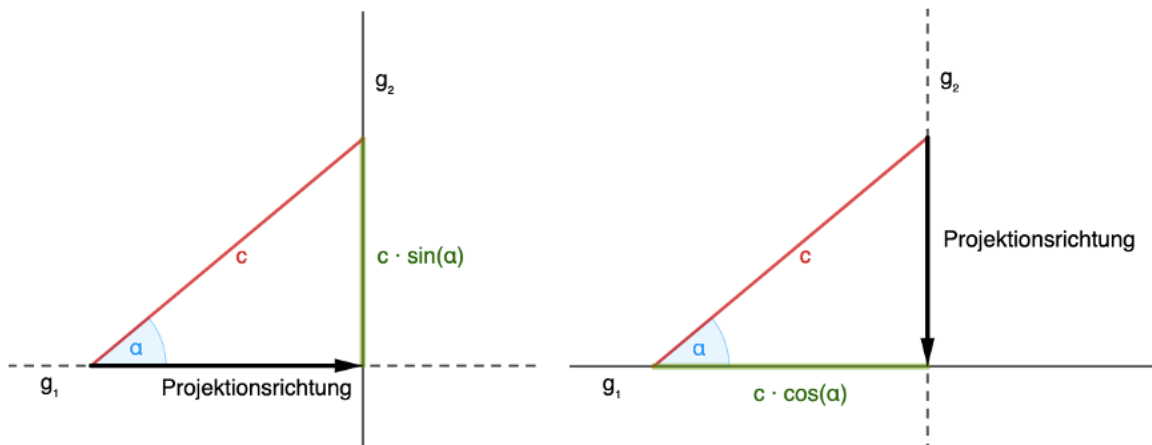


Abbildung 15: Sinus und Kosinus als Projektionsfaktor

Da diese Grundvorstellung insbesondere beim Einzeichnen der Winkelfunktionswerte im Einheitskreis eine Rolle spielt soll auch diese übernommen werden. Es kann argumentiert werden, dass es für ein umfassendes Verständnis von trigonometrischen Zusammenhängen auch noch eine dritte Grundvorstellung auszubilden gilt, die gleichzeitig auch den zweiten mathematischen Aspekt der Begriffe *Sinus* und *Kosinus* darstellt, die Auffassung von Sinus und Kosinus als Koordinaten eines Punktes am Einheitskreis. Ist P ein Punkt auf dem Einheitskreis und α der Winkel, welchen der Ortsvektor von P mit der positiven x -Achse einschließt, so hat der Punkt P die Koordinaten $(\cos(\alpha) \mid \sin(\alpha))$ beziehungsweise gilt für Punkte Q auf Kreisen mit einem Radius r und Mittelpunkt im Ursprung allgemein $Q = (r \cdot \cos(\alpha) \mid r \cdot \sin(\alpha))$. Besonders für das spätere Verständnis von periodischen Funktionen und deren Zusammenhang mit dem Einheitskreis ist das Ausbilden dieser Grundvorstellung unumgänglich. Abbildung 16 soll veranschaulichen, wie die einzelnen Aspekte die jeweiligen Grundvorstellungen beeinflussen können und umgekehrt.

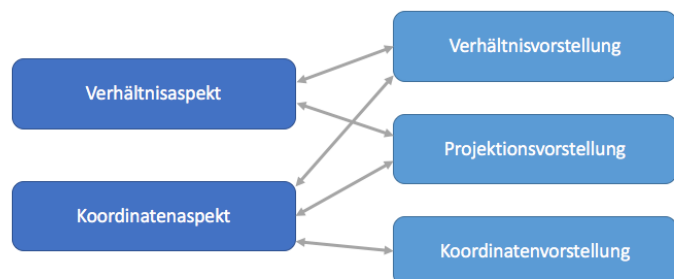


Abbildung 16: Grundvorstellungen zur Trigonometrie

Die Verhältnisvorstellung wird durch das Arbeiten an und mit rechtwinkligen Dreiecken sowie mit Figuren, die sich aus rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen lassen, ausgebildet. Besonders Aufgaben zur Steigung von Straßen können hier helfen, den Tangenswert eines Winkels intuitiv als Verhältnis zwischen Horizontalentfernung und Höhenunterschied aufzufassen. Um die beiden anderen Grundvorstellungen ausbilden zu können ist das Verständnis von und das Arbeiten mit dem Einheitskreis notwendig. Winkel und deren Winkelfunktionswerte sollten im Einheitskreis eingezeichnet oder erkannt werden und auch die Vorzeichen der jeweiligen Werte in Abhängigkeit von der Winkelgröße muss richtig zugeordnet werden können. Sowohl für die Ausprägung einer tragfähigen Projektions- als auch einer Koordinatenvorstellung eignet es sich, interaktive Übungen im Unterricht einzusetzen. Schüler*innen können so die Größe von Winkeln oder die Lage von Punkten verändern und beobachten, wie sich die projizierten Winkelfunktionswerte beziehungsweise die Koordinaten des Punktes verändern. Wie bei Grundvorstellungen allgemein, so ist es auch für die Grundvorstellungen zur Trigonometrie essentiell, dass im Unterricht versucht wird, diese miteinander zu verknüpfen. Während der Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus eines

Winkels als Projektion und Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis mit einer passenden Grafik (siehe Abbildung 17) schnell erkannt werden kann, so bedarf die Verbindung der Verhältnisvorstellung mit der Projektionsbeziehungsweise Koordinatenvorstellung genauer didaktischer Überlegungen und methodischer Vielfalt. Hier wäre es beispielsweise sinnvoll, Schüler*innen im Einheitskreis nach rechtwinkligen Dreiecken suchen zu lassen und die entsprechenden Verhältnisse zu entdecken. Ebenso können

rechtwinklige Dreiecke durch Drehung und passende Positionierung so in einen Kreis gelegt werden, dass die Seitenverhältnisse in den Koordinaten eines Eckpunktes wiedererkannt werden können. Besonders für diese und ähnliche interaktive Aufgaben scheinen *GeoGebra*-Applets besonders gut geeignet zu sein.

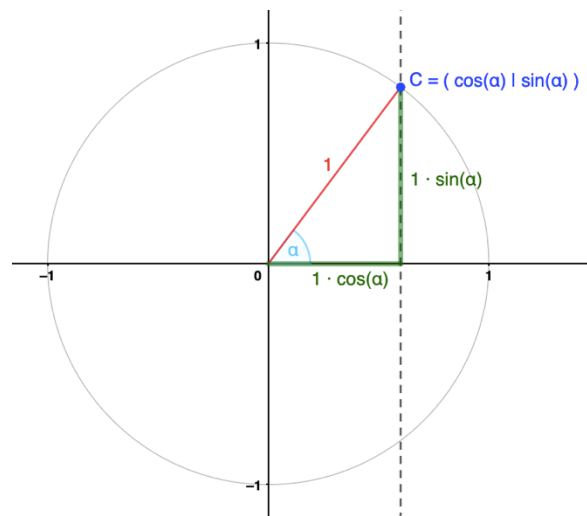


Abbildung 17: Sinus und Kosinus im Einheitskreis

5.5 Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^2$

5.5.1 Vorwissen

Das Vorwissen der Schüler*innen in der 5. Klasse AHS zu diesem Themenbereich beschränkt sich auf das Arbeiten mit Punkten und Geraden im Koordinatensystem. Bereits in der 1. Klasse AHS werden Lagebeziehungen von Geraden thematisiert (jedoch nur in ihrer grafischen Darstellung) (vgl. Humenberger et al., 2016), bevor dann in der 2. Klasse AHS zum ersten Mal mit Koordinatensystemen gearbeitet wird. Schüler*innen müssen Punkte im positiven Koordinatensystem (im ersten Quadranten), sowie Strecken und Geraden durch gegebene Punkte einzeichnen können (vgl. Humenberger et al., 2017). Nach der dritten Klasse können Schüler*innen „rationale Zahlen für Darstellungen in Koordinatensystemen verwenden“ (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018), das Koordinatensystem wird also erweitert. Nach der 4. Klasse AHS sollten sie dann bereits lineare Gleichungen als lineare Funktionen auffassen und damit arbeiten können. Auch der Satz des Pythagoras, der beim Berechnen des Betrags eines Vektors angewandt wird, ist im Lehrplan der 4. Klasse AHS verankert (vgl. Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). Für das Berechnen von Winkeln zwischen Vektoren muss Wissen über den Kosinus vorhanden sein, Wissen, das zwar erst in der 5. Klasse erworben wird (siehe Abschnitt 5.4), jedoch *bevor* die Vektoren an der Reihe sind.

5.5.2 Thematische Schwerpunkte, Lernziele und Grundkompetenzen

In der 5. Klasse AHS wird der Begriff „Vektor“ und dessen Definition das erste Mal eingeführt. Laut Lehrplan sollen in dieser Schulstufe Rechenoperationen mit Vektoren durchgeführt werden. Vektoren sollen addiert, subtrahiert, aber auch mit reellen Zahlen multipliziert werden können. Auch die grafische Veranschaulichung dieser Rechenoperationen ist im Lehrplan erwähnt. Außerdem soll das Skalarprodukt, der Winkel zwischen zwei Vektoren sowie Abstände zwischen Gerade und Punkt beziehungsweise zwischen zwei Punkten ermittelt werden können. Ein weiteres wichtiges Themengebiet ist das Arbeiten mit Geradengleichungen, also das Aufstellen von und Arbeiten mit Parameter- und der Normalvektordarstellungen von Geraden, worunter auch das Ermitteln von Lagebeziehungen fällt (vgl. Rechtsinformationssystem des Bundes, 2018). Das Curriculum für die 5. Klasse AHS deckt sich im Themenbereich „Vektoren und analytische Geometrie im $\mathbb{R}^2$ “ weitgehend mit den für die Reifeprüfung festgelegten Grundkompetenzen (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2021), die in Tabelle 2 aufgelistet sind.

Grundkompetenz	Beschreibung
AG 3.1	Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können
AG 3.2	Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können
AG 3.3	Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können
AG 3.4	Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ [...] angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können
AG 3.5	Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

Tabelle 2: Grundkompetenzen zu Vektoren

5.5.3 Vektoren und Geraden in Schulbüchern der 5. Klasse AHS

In „Mathematik verstehen 5“ ist der Themenbereich in vier Kapitel aufgeteilt, „Vektoren“, „Geometrische Darstellung von Vektoren und deren Rechenoperationen“ sowie „Geraden in $\mathbb{R}^2$ “ und „Weitere Anwendungen von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ “ (Malle et al., 2017). Im ersten genannten Kapitel wird ein Vektor als geordnetes Zahlenpaar im $\mathbb{R}^2$ definiert. Auch die Definitionen der Rechenoperationen – die Summe von Vektoren, ihre Differenz, die Multiplikation mit einem Skalar sowie das Skalarprodukt – und Rechengesetze im $\mathbb{R}^2$ sind angeführt, bevor Aufgaben zum Anwenden dieser Rechenoperationen folgen. Die geometrische Deutung dieser Rechenoperationen wird erst im nächsten Kapitel behandelt. Im Kapitel zur geometrischen Darstellung von Vektoren wird dann erstmals der Vektor als Pfeil eingeführt. Auch der Unterschied zwischen einem Vektor als Punkt und einem Vektor als Pfeil wird mehrmals betont. In verschiedenen Aufgaben müssen dann Vektoren grafisch dargestellt oder ihre Koordinaten aus einer Grafik abgelesen werden. Anschließend wird erklärt, wie ein Vektor berechnet werden kann, von dem Anfangs- und Endpunkt bekannt ist (Spitze-Minus-Schaft-Regel) und auch der Zusammenhang $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ wird verdeutlicht, bevor dann Erklärungen und Aufgabenstellungen zur geometrischen Darstellung der Vektoraddition und -subtraktion sowie der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl folgen. Im nächsten Unterkapitel werden einige Anwendungen der Vektorrechnung in der Geometrie behandelt, wie beispielsweise die Berechnung des Mittelpunktes einer Strecke oder das Ermitteln des Schwerpunktes eines Dreiecks. Nach Aufgaben zum Betrag eines Vektors werden Orthogonalitäts- und Parallelitätskriterium sowie das Aufstellen von Normalvektoren erklärt. Das nächste Kapitel, „Geraden in $\mathbb{R}^2$ “, behandelt Geraden in Parameter- als auch in Normalvektordarstellung. Zuerst wird der Begriff „Richtungsvektor“ eingeführt, dann die Parameterdarstellung mit Hilfe einer

Grafik erklärt. Anschließend finden sich in diesem Schulbuch Aufgaben zum Aufstellen von Geradengleichungen in Parameterdarstellung als auch Aufgaben zur Lagebeziehung zwischen Punkten und Geraden in Parameterdarstellung, bevor dann auch Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden behandelt werden. Die gleiche Vorgehensweise ist dann im nächsten Abschnitt, beim Arbeiten mit Geraden in Normalvektordarstellung erkennbar, wobei am Ende des Kapitels auch noch der Zusammenhang zwischen linearen Gleichungssystemen und allgemeinen Geradengleichungen thematisiert wird, wie an der in Abbildung 18 dargestellten Aufgabe zu erkennen ist.

12.70 Deute die Gleichungen des folgenden Gleichungssystems als Geraden! Entscheide – ohne das Gleichungssystem zu lösen – aufgrund der Normalvektoren der Geraden, ob das Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzt!

a)
$$\begin{cases} -1,5x + 2y = -11 \\ 6x - 8y = 45 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 13x - 26y = 1 \\ -26x + 52y = -2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 8x + 7y = 9 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}$$

Abbildung 18: Schulbuchaufgabe Lagebeziehung von Geraden (Malle et al., 2017: 252)

Im letzten, Vektoren betreffenden Kapitel wird vorerst die Formel zur Berechnung des Winkelmaßes zwischen zwei Vektoren über den Kosinussatz hergeleitet und an verschiedenen Aufgaben angewendet. Auch der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen des Skalarproduktes und der Winkelart wird thematisiert. Erklärungen und Aufgaben zur Berechnung des Einheitsvektors, zur Normalprojektion, zur Hesse'schen Abstandsformel sowie zur vektoriellen Flächeninhaltsformel für Dreiecke folgen, bevor zuletzt auch noch die merkwürdigen Punkte eines Dreiecks mit Hilfe von Geradengleichungen ermittelt werden sollen.

5.5.4 Aspekte und Grundvorstellungen zu Vektoren und Geraden

Betrachtet man die in „Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra“ vorgestellten Möglichkeiten, den Vektorbegriff im Unterricht einzuführen und weiter damit zu arbeiten (vgl. Henn & Filler, 2015) als auch die von Henn & Filler untersuchten Schüler*innenvorstellungen in der vektoriellen analytischen Geometrie, so kristallisieren sich vier wesentliche Aspekte des Vektorbegriffs und daraus resultierende Grundvorstellungen heraus:

- *Vektorraumaspekt*: Hiermit ist die Auffassung von Vektoren als n -Tupel, welche die Vektorraumaxiome erfüllen gemeint. In der Schule treten diese Axiome oft als „Rechenregeln für Vektoren“ auf. Im Gegensatz zu den nachstehenden Aspekten wird der Vektor hier algebraisch anstatt geometrisch aufgefasst. Ein Vektor ist also ein n -Tupel, mit dem verschiedene Rechenoperationen durchgeführt werden können. Die

entsprechende Grundvorstellung soll daher mit „ n -Tupelvorstellung“ bezeichnet werden.

- *Pfeilklassenaspekt*: Dieser Aspekt umfasst die Auffassung von Vektoren als Menge aller Pfeile, die gleich lang, parallel und gleich orientiert sind. Einen Vektor als eine solche Pfeilmenge betrachten zu können, also eine „Pfeilklassenvorstellung“ im Mathematikunterricht auszubilden, ist für das weitere verständnisvolle Arbeiten mit Vektoren essentiell.
- *Verschiebungsaspekt*: Ein Vektor kann eine Parallelverschiebung eines Objekts im Raum oder in der Ebene darstellen. Besonders beim Begreifen der Parameterdarstellung ist es wichtig zu verstehen, dass ein Vektor eine Verschiebung eines Punktes bewirken kann (vgl. Kaufmann, 2021). Daher wird auch die „Verschiebungsvorstellung“ an dieser Stelle als auszubildende Grundvorstellung angeführt.
- *Punktaspekt*: Auch wenn in der Hochschullehre affine Punkträume erst nach Vektorräumen behandelt werden, so ist die Vorstellung von Vektoren als Punkte, die „Punktvorstellung“, bei Schüler*innen deutlich früher ausgeprägt als andere Vorstellungen. Der Begriff des Punktes und wie mit Punkten gerechnet wird ist in der Schule oft weniger klar definiert. Probleme dieser wenig exakten Unterscheidung zwischen Vektoren als Punkte und Vektoren als Pfeile werden bei der Punkt-Vektor-Addition in der Schule manchmal durch das Konstrukt des Ortsvektors umgangen (vgl. Henn & Filler, 2015: 106-107). Da dieses Konstrukt jedoch didaktisch umstritten und auch in „Mathematik verstehen 5“ nicht verwendet wird, wird auch hier davon abgesehen. Bei der Ausbildung der Punktvorstellung ist es daher jedoch wichtig, darauf Rücksicht zu nehmen, dass „der Unterschied zwischen der Vektoraddition und der „Punkt-Vektor-Addition“ klar herausgearbeitet [wird] (trotz gleichen Operationszeichens [...]) und dass auch „auf die geometrische Interpretation Wert gelegt [wird]“ (Henn & Filler, 2015: 106). Die Addition $P + \vec{v} = Q$ bedeutet also, dass Q ein Bild des um den Vektor $\vec{v}$ verschobenen Punktes P darstellt. Zusätzlich muss hervorgehoben werden, dass die Vektorraumaxiome, oder, wie sie in der Schule genannt werden, „Rechenregeln für Vektoren“, auf Punkte als geometrische Objekte nicht angewandt werden können. Es muss beispielsweise im Unterricht geklärt werden, dass die Addition zweier Punkte nicht einen weiteren Punkt als Ergebnis liefert.

Es lässt sich nicht nur für die Punktvorstellung, sondern auch allgemein feststellen, dass die Grundvorstellungen zu Vektoren nicht so gut zusammenspielen wie jene zu anderen Themenbereichen und sich teilweise sogar widersprechen. So ermöglicht eine ausgeprägte n -

Tupelvorstellung beispielsweise das Arbeiten mit Vektoren mit mehr als drei Einträgen. Da es jedoch für Schüler*innen unmöglich ist, sich einen vier- oder vielleicht sogar fünfdimensionalen Pfeil vorzustellen, könnte das Arbeiten mit solchen n -Tupeln unter Umständen problematisch für die Ausbildung der Pfeilklassenvorstellung sein. Es ist daher wichtig, Unterschiede im Unterricht klar hervorzuheben und zu diskutieren, um somit auch die vier Grundvorstellungen separat voneinander ausbilden und festigen zu können.

Um nun auch in der Lage zu sein, vektorielle Geradengleichungen aufstellen zu können, sind nicht nur tragfähige Grundvorstellungen zu Vektoren, sondern auch zu Variablen und Gleichungen notwendig (siehe Abschnitt 5.2.4). Betrachtet man die Schulbuchaufgabe in Abbildung 19, so wird klar, dass hier neben den Grundvorstellungen zu Vektoren auch mehrere Vorstellungen zu Gleichungen und Variablen vorhanden sein müssen.

12.11 $A = (9 | 11)$, $B = (15 | 13)$. Liegt der Punkt $P = (18 | 14)$ **a)** auf der Geraden durch die Punkte A und B, **b)** auf der Strecke AB?

Abbildung 19: Schulbuchaufgabe Punkt und Gerade (Malle et al., 2017: 240)

Vorerst muss die Geradengleichung $X = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgestellt werden. Die Gleichheit muss hier also festgesetzt und der Parameter t als auch der Punkt X müssen als Variable im Einsetzungsaspekt aufgefasst werden können. Auch Punkt- und Verschiebungsvorstellung sind für das Aufstellen von Gleichungen in der Parameterdarstellung notwendig. Um die Aufgabe a) lösen zu können, muss der Punkt P anstelle von X eingesetzt werden. Nun gilt es, zur Gegenstandsvorstellung zu wechseln, den Parameter t also als unbekannte, gesuchte Größe aufzufassen und diese für die beiden Zeilen zu berechnen. Um diesen berechneten Wert dann in Aufgabe b) interpretieren zu können, ist wiederum Wissen über das Rechnen mit Vektoren, besonders aber eine tragfähige Verschiebungsvorstellung essentiell. Selbstverständlich sind auch beim Arbeiten mit Geradengleichungen in Normalvektordarstellung tragfähige Grundvorstellungen zu Variablen und Gleichungen notwendig.

6 Applets für die 5. Klasse AHS

Nachdem nun der Schulstoff der 5. Klasse AHS beschrieben und die auszubildenden Grundvorstellungen herausgearbeitet wurden, kann nun der praktische Teil der Arbeit, die Erstellung der Applets, erfolgen. In diesem Kapitel sollen alle für die 5. Klasse AHS erstellten Applets vorgestellt und auf ihre Erstellung näher eingegangen werden. Bei der anschließenden didaktischen Analyse soll ein besonderer Fokus auf das Potential der jeweiligen Applets, Schüler*innen dabei zu unterstützen, tragfähige Grundvorstellungen auszubilden, gelegt werden. Zusätzlich ist am Ende jedes Abschnittes eine Kurzinformation zu finden, die eine Beschreibung, Einsatzmöglichkeiten und notwendiges Vorwissen beinhaltet.

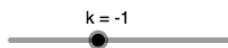
6.1 Quadratische Gleichung mit einem Parameter

Mit Hilfe dieses Applets kann untersucht werden, wie die Lösungsfälle von quadratischen Gleichungen mit bestimmten Parametern zusammenhängen. Schüler*innen können eine Gleichung der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ in das Eingabefeld eingeben, wobei ein Parameter nicht bestimmt ist oder den Zusammenhang zwischen den Lösungsfällen und dem Wert eines Parameters k anhand der bereits eingegebenen Gleichung ($x^2 - 2x + k = 0$) erkunden. Dieser Parameter kann dann mit Hilfe eines Schiebereglers verändert werden. Ein dynamischer Text zeigt die große Lösungsformel an, wobei die entsprechenden Parameter bereits eingesetzt wurden. Das Verändern des Wertes k verändert auch den Text. Der Wert der Diskriminante wird mit Hilfe eines dynamischen Textes angezeigt. So kann beobachtet werden, wie sich diese in Abhängigkeit von k verändert. Ein weiterer dynamischer Text gibt die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von k an. Wie in Abbildung 20 ersichtlich ist, kann durch Anklicken eines Kontrollkästchens auch ein Merksatz eingeblendet werden, der den Zusammenhang zwischen Diskriminante und Lösungsanzahl erläutert.

Gegeben ist eine quadratische Gleichung mit Parameter k:

$$0 = x^2 - 2x + k$$

Verändere den Wert von k und beobachte, wie sich der Wert der Diskriminante ändert!



$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (1)}$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)$$

$$D = 8$$

Wie viele Lösungen hat also die Gleichung?

Für $k = -1$ hat die quadratische Gleichung

zwei Lösungen.

☒ Warum ist das so?

Tipp

Du kannst auch andere quadratische Gleichungen, die einen Parameter k enthalten, eingeben und beobachten, wie die Anzahl der Lösungen von diesem Parameter abhängen. Solche Gleichungen findest du in deinem Schulbuch.

Merke

Die Anzahl der Lösungen hängt von dem Ausdruck unter der Wurzel, der Diskriminante D ab.

Für $D < 0$ hat die quadratische Gleichung keine Lösung.

Für $D = 0$ hat die quadratische Gleichung genau eine Lösung.

Für $D > 0$ hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen.

Abbildung 20: Quadratische Gleichung mit einem Parameter

6.1.1 Kurzbeschreibung

Quadratische Gleichung mit einem Parameter

<https://www.geogebra.org/m/xvmr5yyp>

Art des Applets

Entdeckungssapplet, Werkzeugapplet

Kurzbeschreibung

Quadratische Gleichungen mit einem unbestimmten Parameter können eingegeben werden, um zu untersuchen, wie die Lösungsmenge der Gleichung von diesem Parameter abhängt.

Angesprochene Grundvorstellungen

Gegenstandsvorstellung, Erreichungsvorstellung

Benötigtes Vorwissen

Lösen allgemeiner quadratischer Gleichungen

Passende Schulbuchaufgaben

Aufgaben 3.47 – 3.52 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017: 66)

Tabelle 3: Kurzbeschreibung Quadratische Gleichungen mit Parametern

6.1.2 Hintergrundprogrammierungen

Da Gleichungen in *GeoGebra* nicht zu jenen Objekten gehören, die mit einem Eingabefeld verknüpft werden können, ist das Eingabefeld mit einer nicht sichtbaren Funktion f verknüpft. Wird also über das Eingabefeld der Ausdruck $x^2 - 5x + k$ eingegeben, so wird von *GeoGebra* im Hintergrund eine Funktion $f(x) = x^2 - 5x + k$ erstellt. Damit die von den Schüler*innen eingegebene Gleichung beziehungsweise ihre Koeffizienten erkannt und in weiterer Folge in

die Lösungsformel eingesetzt werden können, und auch die Diskriminante berechnet werden kann, müssen die Koeffizienten a , b und c der quadratischen Gleichung von dem Programm ausgelesen werden können. Dies wurde mit den Definitionen $a(x) = \frac{f''(x)}{2}$, $b(x) = f'(x) - 2 \cdot a(x) \cdot x$ sowie $c = f(0)$ erreicht. Die Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ kann mit Hilfe dieser Werte dann von dem Programm im Hintergrund berechnet werden und die richtige Anzahl der Lösungen kann über die Sichtbarkeitsbedingung eingeblendet werden: für $D < 0$ wird der Text „keine Lösung“ eingeblendet, für $D = 0$ „genau eine Lösung“ und für $D > 0$ wird „zwei Lösungen“ angezeigt.

6.1.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Das Applet kann im Unterricht dabei unterstützen, die in Abschnitt 5.2.4 beschriebene *Einsetzungsvorstellung* zu Variablen, als auch die *Gegenstandsvorstellung* zu festigen. Der Parameter k muss als Variable im Einsetzungsaspekt aufgefasst werden, x hingegen ist eine Unbekannte deren Wert berechnet werden kann, also eine Variable im Gegenstandsaspekt. Um ein grundlegendes Verständnis über den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer quadratischen Gleichung und der Anzahl an Lösungen aufbauen zu können, ist es wichtig, dass Schüler*innen zwischen Koeffizienten, die verändert werden können, und Lösungsvariablen unterscheiden können. Dass diese Koeffizienten beziehungsweise der Parameter im Einsetzungsaspekt die für die Lösungsvariable – im Gegenstandsaspekt – in Frage kommenden Werte beeinflussen können, soll mit diesem Applet aufgezeigt werden. Es ist hier aber wichtig, dass bereits vor dem Arbeiten mit quadratischen Gleichungen mit Parametern beide Grundvorstellungen bei Schüler*innen vorhanden sind.

Auch eine Grundvorstellung zu Gleichungen, die *Erreichungsvorstellung*, kann mit diesem Applet gefestigt werden. Schüler*innen sollen erkennen, dass sich in Abhängigkeit von k die Anzahl jener Werte ändert, die für x eingesetzt eine wahre Aussage liefern, mit denen also Gleichheit erreicht werden kann.

Es handelt sich bei diesem Applet einerseits um ein *Entdeckungsapplet*, da beobachtet werden kann, dass eine Veränderung des Parameters auch eine Veränderung der Lösungsfälle hervorruft, andererseits kann das Applet auch als *Werkzeugapplet* verwendet werden. Um die bei Werkzeugapplen bestehende Gefahr, dass mathematisches Arbeiten ausgelagert wird, ohne dieses zu verstehen, zu reduzieren, wurden Beobachtungs- und Überlegungsaufgaben integriert. Auch der Fokus auf die Diskriminante und ihren Wert sowie das zusätzliche Merkkästchen soll zu dieser intendierten Reduktion beitragen.

Das Applet kann gut in Kombination mit Schulbuchaufgaben, wie der in Abbildung 21 dargestellten, verwendet werden.

3.50 Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung genau zwei reelle Lösungen, genau eine reelle Lösung bzw. keine Lösung?

- a) $x^2 - 2x + k = 0$ c) $kx^2 + x + 1 = 0$ (mit $k \neq 0$)
b) $x^2 + kx + 1 = 0$ d) $4x^2 + 4(k+1)x + k^2 = 0$

Abbildung 21: Schulbuchaufgabe Quadratische Gleichung mit Parametern (Malle et al., 2017: 66)

Die Nutzung des Applets ohne konkrete Angaben aus dem Schulbuch, einem Arbeitsblatt oder von der Lehrperson ist problematisch, da Schüler*innen vermutlich ohne Vorgabe keine passende Gleichung eingeben würden und Eingaben wie beispielsweise $k^2 - 2 \cdot k + 1 = 0$ keine sinnvollen Ergebnisse liefern. Ebenso ist anzumerken, dass quadratische Gleichungen mit Parametern erst dann behandelt werden sollten, wenn bereits grundlegendes Wissen über das Lösen von quadratischen Gleichungen vorhanden ist.

6.2 Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck

In dem in Abbildung 22 dargestellten Applet kann ein Dreieck vergrößert werden, sodass unterschiedlich große, ähnliche Dreiecke entstehen. Schüler*innen können beobachten, wie die Seitenverhältnisse, die sich dynamisch mitverändern, unabhängig von der Größe des Dreiecks stets gleichbleiben.

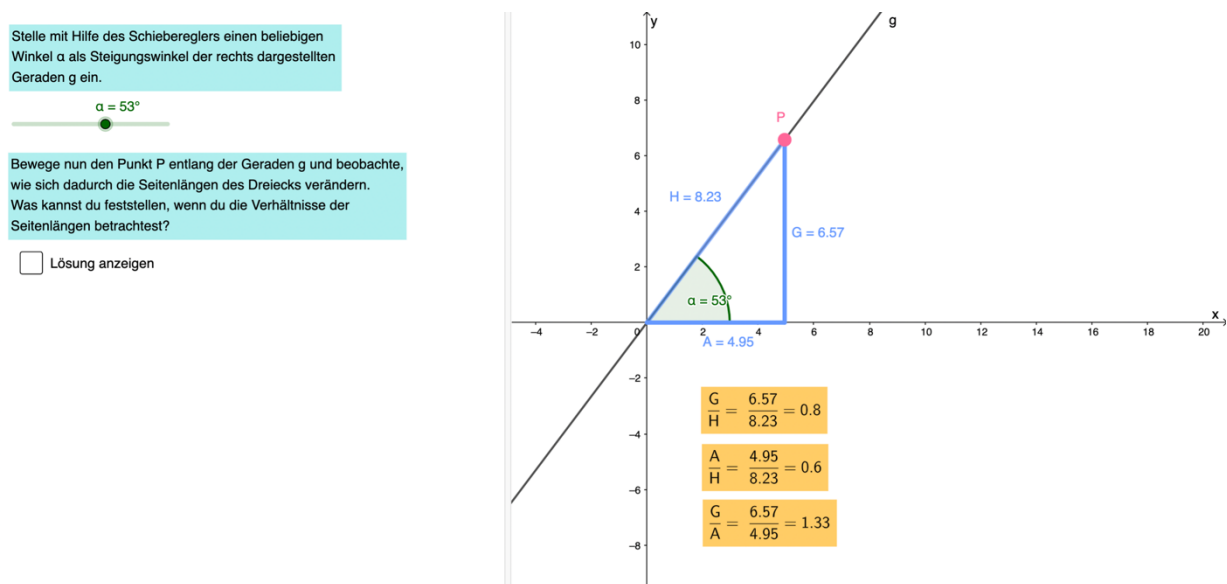


Abbildung 22: Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck I

Durch Anklicken des Kontrollkästchens öffnet sich die Antwort auf die gestellte Frage. Im Antworttext werden die Verhältnisse auch gleich als Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels α definiert, wie in Abbildung 23 zu sehen ist.

Stelle mit Hilfe des Schiebereglers einen beliebigen Winkel α als Steigungswinkel der rechts dargestellten Geraden g ein.



Bewege nun den Punkt P entlang der Geraden g und beobachte, wie sich dadurch die Seitenlängen des Dreiecks verändern. Was kannst du feststellen, wenn du die Verhältnisse der Seitenlängen betrachtest?

☒ Lösung anzeigen

Die Verhältnisse sind für einen konstanten Winkel α stets konstant, egal wie du das Dreieck vergrößerst oder verkleinerst.

Diese, von α abhängigen, Verhältnisse sind auch so definiert:

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A}$$

G steht für die Gegenkathete, also die Seite, die dem Winkel α gegenüberliegt. A ist die an den Winkel α anliegende Ankathete und H steht für die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks.

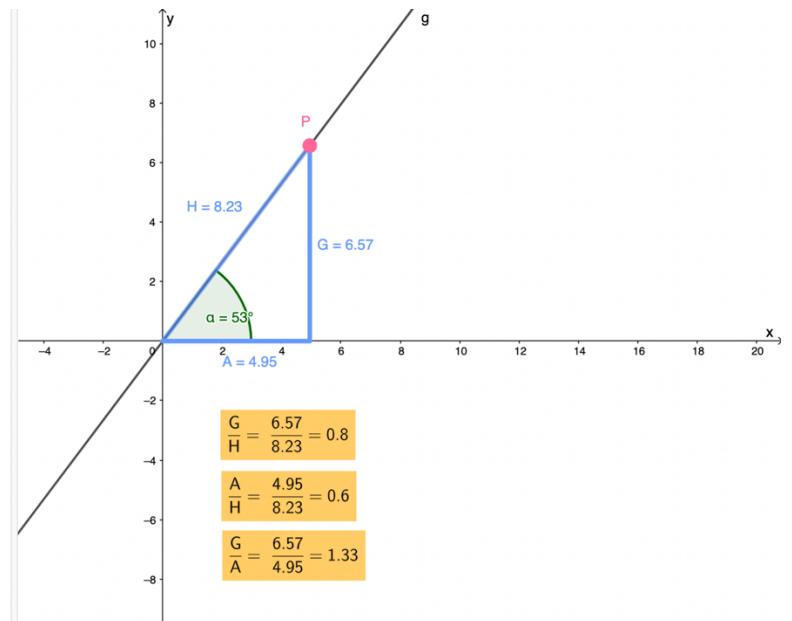


Abbildung 23: Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck 2

6.2.1 Kurzbeschreibung

Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck

<https://www.geogebra.org/m/n2dk5uuy>

Art des Applets

Entdeckungsapplet

Kurzbeschreibung

Ähnliche Dreiecke können erzeugt werden und es kann beobachtet werden, dass die Seitenverhältnisse für konstante Winkel ebenfalls konstant bleiben.

Angesprochene Grundvorstellungen

Verhältnisvorstellung

Benötigtes Vorwissen

kein bestimmtes Vorwissen notwendig

Passende Schulbuchaufgaben

Aufgabe 4.01 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017: 70-71)

Tabelle 4: Kurzbeschreibung Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck

6.2.2 Hintergrundprogrammierungen

Vorerst wurde der Winkel α über einen Schieberegler definiert, welcher ganzzahlige Werte im Intervall $[0^\circ; 89^\circ]$ annehmen kann. Über das Werkzeug *Winkel mit fester Größe* wurde der Steigungswinkel der Geraden g erzeugt. Anschließend wurde der Punkt P (in pink) über den Befehl $P = \text{Punkt}(g)$ erzeugt, sodass dieser frei entlang der Geraden bewegt werden kann. Der Schnittpunkt einer zur y -Achse parallelen Gerade durch P erzeugt einen nicht sichtbaren Fußpunkt von P , der wiederum den Endpunkt der Ankathete A darstellt. Eine Strecke von P zu diesem Fußpunkt bildet die Gegenkathete G . Über die Verschiebung des Punktes P kann die Größe des Dreiecks verändert werden. Es können so beliebige ähnliche Dreiecke erzeugt

werden. Die Verhältnisse, die unter dem Dreieck angegeben sind, wurden mit Hilfe eines dynamischen Textes erstellt, sodass sich beim Bewegen des Punktes P auch die Seitenlängen in diesen Verhältnissen mitverändern. Zähler und Nenner der dargestellten Brüche sind mit den Seitenlängen der Hypotenuse sowie der Katheten verknüpft. Der Wert dieser Verhältnisse wurde im Eingabefeld über den Quotienten der Seitenlängen berechnet und dann wiederum mit dem Text verbunden. Der Antworttext wurde mit Hilfe von Bedingungen so programmiert, dass dieser nur dann sichtbar ist, wenn das entsprechende Kontrollkästchen angeklickt wurde, wie in Abschnitt 3.3.4 beschrieben.

6.2.3 Didaktische Überlegungen und Einsatzmöglichkeiten

Das Applet dient primär dazu, Schüler*innen bei der Entwicklung einer *Verhältnisvorstellung* (siehe Abschnitt 5.4.4) zu Sinus, Kosinus und Tangens zu unterstützen. Der Fokus wird dafür auf das konstante Verhältnis der Seitenlängen gerichtet. Dass die Seitenlängen in ähnlichen (rechtwinkligen) Dreiecken stets im selben Verhältnis zueinanderstehen, egal wie groß oder klein die Dreiecke sind, kann in dynamischen Abbildungen deutlich besser erkannt werden, als bei Aufgaben im Schulbuch, wie Abbildung 24 zeigt.

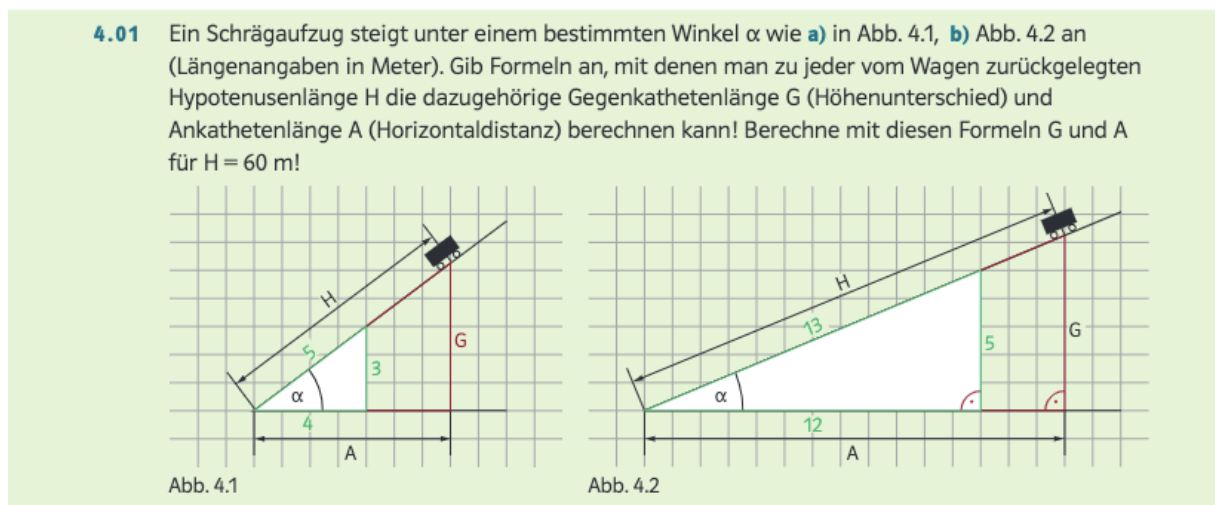


Abbildung 24: Schulbuchaufgabe Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck (Malle et al., 2017: 70)

Wie im Applet, so wird auch hier vorerst der Fokus auf die Seitenverhältnisse ähnlicher Dreiecke gerichtet. Die Abbildungen und die damit verbundene Aufgabe legen zwar nahe, dass für konstante Winkel auch die Verhältnisse gleich bleiben, dieser Zusammenhang kann jedoch besser festgestellt werden, wenn die Größe des Dreiecks beliebig verändert werden kann.

Im Antworttext wird die von Schüler*innen vermutlich beobachtete Tatsache, dass die Verhältnisse der Seitenlängen in ähnlichen Dreiecken stets konstant sind, verbalisiert und konkretisiert. Die Verhältnisse werden auch als Winkelfunktionswerte von α definiert. Man könnte mit zusätzlichen Elementen im Applet (z. B. Umformung der Ausdrücke und Anzeigen

der Projektionsrichtung) auch gleichzeitig versuchen, die *Projektionsvorstellung* auszubilden, jedoch würde man damit vermutlich die Übersichtlichkeit des Applets beeinträchtigen. Da das Applet schon jetzt sehr textlastig ist, wurde die Projektionsvorstellung an dieser Stelle nicht miteinbezogen.

Das Applet ist dazu konzipiert, als *Entdeckungssapplet* zu Beginn einer Unterrichtssequenz – vermutlich zu Beginn des Themenblocks „Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck“ – eingesetzt zu werden. Durch die sehr klaren Instruktionen beziehungsweise Fragestellungen wird eine Fokussierungshilfe geboten. Der Fokus wird zuerst auf die Seitenverhältnisse gelenkt. Es soll selbstständig festgestellt werden, dass diese Seitenverhältnisse für einen konstanten Winkel α konstant bleiben. Der genaue Zusammenhang zwischen den Seitenverhältnissen und dem Winkel α wird dann im Antworttext präsentiert.

6.3 Verhältnisse am Einheitskreis

In diesem Applet wird der Sinus- und der Kosinuswert eines Winkels α im Einheitskreis dargestellt. Schüler*innen können mit einem Schieberegler, der Werte im Intervall $[0^\circ; 360^\circ]$ annehmen kann, die Größe des Winkels α verändern und beobachten, wie sich damit die Katheten und somit auch die Seitenverhältnisse des eingezeichneten Dreiecks verändern, wie in Abbildung 25 ersichtlich ist.

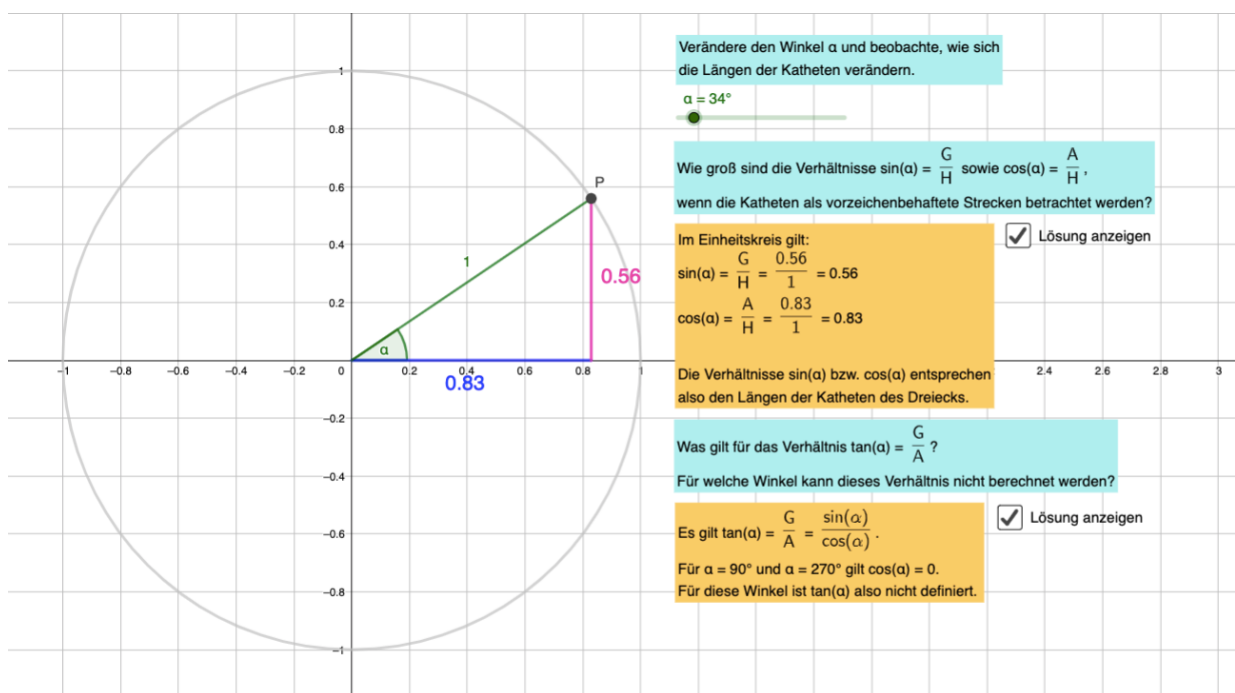


Abbildung 25: Sinus und Kosinus im Einheitskreis

Die erste Aufgabenstellung fragt nach dem Zusammenhang zwischen den Verhältnissen der Hypotenuse zu den Katheten, also nach dem Sinus- beziehungsweise Kosinuswert des Winkels.

Wird ein Haken im Kontrollkästchen gesetzt, so wird die Lösung angezeigt. Im Antworttext wird darauf hingewiesen, dass die Verhältnisse genau den Kathetenlängen entsprechen. Durch Anklicken des ersten Kontrollkästchens wird auch eine weitere Aufgabe zum Tangenswert, also dem Verhältnis der Gegenkathete zur Ankathete, angezeigt. Wird das zweite Kontrollkästchen angeklickt, so wird die richtige Lösung eingeblendet.

6.3.1 Kurzbeschreibung

Verhältnisse am Einheitskreis
https://www.geogebra.org/m/vnpgnyy9
Art des Applets
Entdeckungsapplet
Kurzbeschreibung
Ein Punkt P auf dem Einheitskreis kann um einen Winkel α gedreht und der Sinus- bzw. der Kosinuswert dieses Winkels soll über die Verhältnisse der Katheten zur Hypotenuse definiert und angegeben werden. Auch eine Aufgabe zum Tangens als Verhältnis von Sinus und Cosinus soll gelöst werden.
Angesprochene Grundvorstellungen
Verhältnisvorstellung, Koordinatenvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Sinus und Kosinus als Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck kennen
Passende Schulbuchaufgaben
ergänzend zum Erklärungstext auf Seite 93 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017) einzusetzen

Tabelle 5: Kurzbeschreibung Verhältnisse am Einheitskreis

6.3.2 Hintergrundprogrammierungen

Zuerst wurde ein Schieberegler erstellt, der dem Winkel α eine veränderbare Größe zuordnet. Der Punkt P wurde daraufhin über die Definition $Drehe(B, \alpha, A)$ erstellt, wobei A der Mittelpunkt des Kreises, also der Ursprung des Koordinatensystems ist, B der Schnittpunkt des Kreises mit der x -Achse. Eine unsichtbare, zur y -Achse parallele Geraden durch den Punkt P wurden erzeugt. Ihr Schnittpunkt mit der horizontalen Achse bildet den Eckpunkt des Dreiecks mit den Kathetenlängen $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ und der Hypotenusenlänge 1. Die in Abbildung 25 dargestellten Längen der Katheten im Einheitskreis wurden als Texte in das Grafikfeld eingefügt und an die Position des (unsichtbaren) Mittelpunktes der Strecken gekoppelt. Dies ist eine gute Alternative, wenn die Möglichkeiten, die zur Beschriftung von Objekten zur Verfügung stehen, nicht ausreichen (Sonderzeichen, dynamische Werte etc.) oder die Position der Beschriftung oder ihre Größe nicht geeignet ist.

Der Antworttext ist dynamisch. Beim Erstellen des Textes wurden die Seitenlängen der Katheten als Zähler der Brüche ausgewählt. Die Brüche verändern sich, wenn die Seitenlängen der Katheten verändert werden. Die Sichtbarkeitsbedingung für die Texte wurde so gewählt,

dass diese nur dann sichtbar sind, wenn die Häkchen bei „Lösung anzeigen“ gesetzt wurden, wie bereits im Abschnitt 3.3.4 erläutert wurde.

6.3.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Dieses Applet dient als Unterstützung bei der Ausbildung der *Verhältnissvorstellung* von Sinus und Kosinus, soll aber insbesondere auch die *Koordinatenvorstellung* mit der *Verhältnissvorstellung* verknüpfen (siehe Abschnitt 5.5.4), zwei Vorstellungen, die im Schulbuch hauptsächlich separat voneinander angesprochen werden und deren Zusammenhang nur in einem kurzen Erklärungstext thematisiert wird (siehe Abbildung 26). Bei der Einführung neuer Themen oder Themenbereiche im Unterricht ist es stets didaktisch sinnvoll und hilfreich, an bereits bekannte Zusammenhänge und Inhalte anzuknüpfen. Diese Verknüpfung zu einer Verhältnissvorstellung zu Kosinus und Sinus kann mit Hilfe dieses Applets hergestellt werden. Zusätzlich wird wiederholt, wie die Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken definiert sind und die Verhältnissvorstellung wird daher nicht nur mit der Koordinatenvorstellung verbunden, sondern auch erneut gefestigt.

Darstellung von Sinus und Cosinus im Einheitskreis

Eine einfache Darstellung von Sinus und Cosinus erhält man, wenn man Punkte auf einem Kreis um den Ursprung O mit dem Radius $r = 1$ betrachtet. Dieser Kreis wird als **Einheitskreis** bezeichnet. Ist $P = (x | y) = [1 | \varphi]$ der Punkt auf dem Einheitskreis mit dem Polarwinkel φ , dann gilt:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

Der Punkt P hat also die kartesischen Koordinaten $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$, dh. $P = (\cos \varphi | \sin \varphi)$.

Merke

Für einen Punkt $P = [1 | \varphi]$ auf dem Einheitskreis gilt: $P = (\cos \varphi | \sin \varphi)$.

Abbildung 26: Verhältnisse im Einheitskreis (Malle et al., 2017: 93)

Es handelt sich hierbei um ein *Entdeckungapplet*. Klare Instruktionen und Beobachtungsaufgaben sollen den Fokus auf das Wesentliche – also in diesem Fall die Seitenverhältnisse des Dreiecks im Einheitskreis – lenken und verhindern, dass Schüler*innen nicht mehr wahrnehmen, als dass der Punkt entlang des Kreises bewegt wird.

Durch die klaren Instruktionen kann das Applet im Unterricht, oder auch im Zuge einer Hausübung, ohne Unterstützung durch die Lehrperson verwendet werden. Auch der Einsatz vor einer Unterrichtseinheit zu Sinus und Kosinus im Einheitskreis im Sinne des Flipped-Classroom Konzeptes wäre möglich. Wichtig ist jedoch, dass Sinus und Kosinus als Verhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken bereits bekannt sind. Auch eine kurze Erklärung des Begriffes „Einheitskreis“ vor der Nutzung des Applets ist empfehlenswert.

Nun sollte auch noch die Darstellung des Tangenswertes eines Winkels im Einheitskreis veranschaulicht werden, wie im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

6.4 Sinus, Kosinus und Tangens im Einheitskreis

Schüler*innen können in diesem Applet den Sinus-, den Kosinus- als auch den Tangenswert eines beliebigen Winkels im Einheitskreis anzeigen lassen. Der Winkel kann verändert werden und über Kontrollkästchen kann ausgewählt werden, welche Winkelfunktionswerte angezeigt werden sollen, wie in Abbildung 27 ersichtlich ist. Eine Beobachtungsaufgabe ist angeführt, deren Lösung über ein weiteres Kontrollkästchen eingeblendet werden kann.

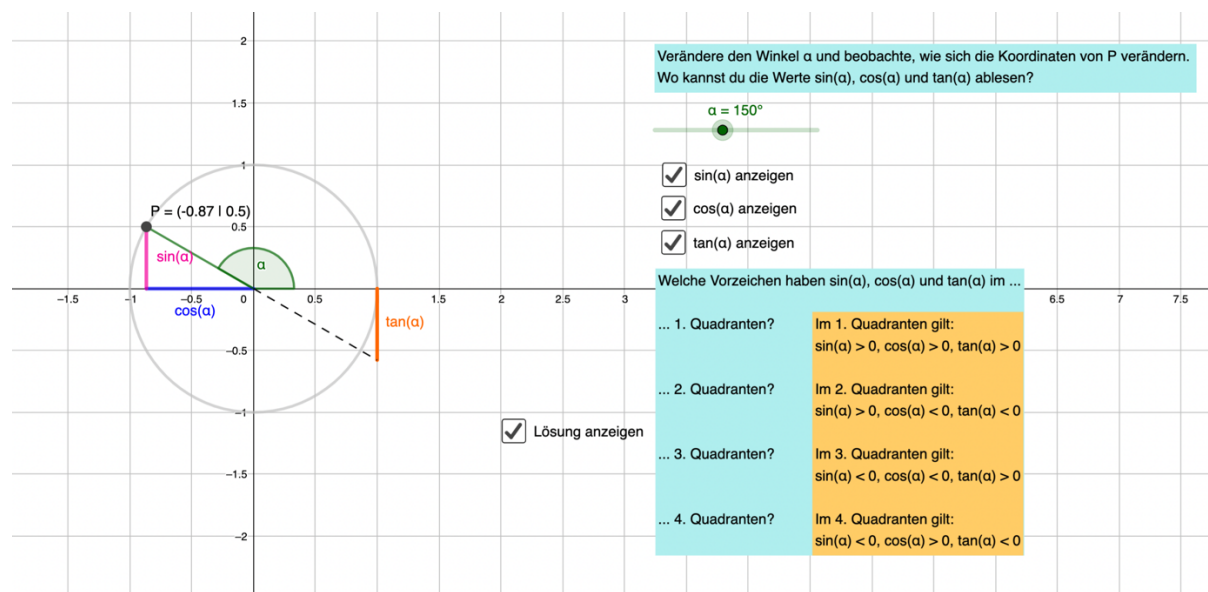


Abbildung 27: Sinus, Kosinus und Tangens im Einheitskreis

6.4.1 Kurzbeschreibung

Sinus, Kosinus und Tangens im Einheitskreis

<https://www.geogebra.org/m/kewrzfbu>

Art des Applets

Entdeckungsapplet, Demonstrationsapplet, Werkzeugapplet

Kurzbeschreibung

Ein Punkt P auf dem Einheitskreis kann um einen Winkel α gedreht und der Sinus, der Kosinus bzw. der Tangens dieses Winkels kann eingeblendet werden. Eine Beobachtungsaufgabe zu den Vorzeichen der Winkelfunktionswerte in den jeweiligen Quadranten soll gelöst werden.

Angesprochene Grundvorstellungen

Koordinatenvorstellung

Benötigtes Vorwissen

kein konkretes Vorwissen notwendig aber Sinus, Kosinus und Tangens bereits als Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck kennen hilft beim Verständnis

Passende Schulbuchaufgaben

Aufgaben 5.11 – 5.28 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017: 94-96)

Tabelle 6: Kurzbeschreibung Sinus, Kosinus und Tangens im Einheitskreis

6.4.2 Hintergrundprogrammierungen

Um dieses Applet zu erstellen, wurden die grundlegenden Elemente des in Abschnitt 6.3 beschriebenen Applets übernommen. Nicht immer ist es notwendig, alle Elemente neu zu erstellen. Oft genügt es, bereits existierende Applets anzupassen. Zusätzlich zu den Instruktionen, Aufgabenstellungen und Lösungstexten wurde noch der Tangenswert des Winkels α über den Schnittpunkt einer Geraden durch P und den Ursprung sowie einer Geraden mit der Geradengleichung $x = 1$ konstruiert. Die Option, die einzelnen Winkelfunktionswerte ein- und wieder auszublenden – um die Übersichtlichkeit zu gewährleisten – wurde über Kontrollkästchen und Sichtbarkeitsbedingungen (siehe Abschnitt 3.3.4) integriert. Ein dynamischer Text, der die Koordinaten von P anzeigt, wurde als Beschriftung des Punktes P gewählt, damit auch die Veränderung dieser Koordinaten beobachtet werden kann.

6.4.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Dieses Applet dient primär der im Abschnitt 5.4.4 beschriebenen *Koordinatenvorstellung* zu Sinus und Kosinus, da Schüler*innen beobachten können, wie sich die Koordinaten des Punktes verändern, wenn die Größe des Winkels α verändert wird. Der dargestellte Tangenswert dient zwar nicht zur Ausbildung dieser Grundvorstellung, wurde jedoch in das Applet integriert, um eine Lücke im Schulbuch zu füllen. In „Mathematik verstehen 5“ wird nämlich ausschließlich die Darstellung von Sinus und Kosinus im Einheitskreis behandelt (vgl. Malle et al., 2017: 93). Durch zusätzliche Erklärungen und Aufgabenstellungen (z. B. „Wie kann der Wert von $\tan(\alpha)$ berechnet werden, wenn $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ bekannt sind?“) könnte auch die *Verhältnisvorstellung* angesprochen werden. Da die Verhältnisvorstellung und der Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionswerten jedoch schon in einem anderen Applet (siehe Abschnitt 6.3) angesprochen wurde, ist hier aus Gründen der Übersichtlichkeit des Applets auf weitere Überlegungsaufgaben verzichtet worden.

Das Applet kann sowohl als *Entdeckungssapplet* als auch als *Demonstrationsapplet* eingesetzt werden, um Schüler*innen erkunden zu lassen oder aufzuzeigen, wie die Winkelfunktionswerte im Einheitskreis dargestellt und abgelesen werden können. Auch ein Einsatz als *Werkzeugapplet* bei der Bearbeitung von Fragestellungen wie jener in Abbildung 28 dargestellten ist möglich.

5.14 Entnimm dem Einheitskreis!

$\sin 0^\circ =$ _____	$\sin 90^\circ =$ _____	$\sin 180^\circ =$ _____	$\sin 270^\circ =$ _____
$\cos 0^\circ =$ _____	$\cos 90^\circ =$ _____	$\cos 180^\circ =$ _____	$\cos 270^\circ =$ _____

Abbildung 28: Schulbuchaufgabe Sinus und Kosinus im Einheitskreis (Malle et al., 2017: 94)

Nicht nur im Schulbuch (vgl. Malle et al., 2017: 93-96), auch bei der standardisierten Reifeprüfung in Mathematik wird vermehrt ein Fokus auf das grafische Darstellen von Winkelfunktionswerten im Einheitskreis und ihre Vorzeichen in den jeweiligen Quadranten gelegt, wie bereits im Abschnitt 5.4.2 erläutert wurde und anhand der in Abbildung 29 dargestellten Aufgabe zu erkennen ist.

Auch die *Projektionsvorstellung* sollte nun noch ausgebildet werden. Das im nächsten Abschnitt vorgestellte Applet soll dabei unterstützen.

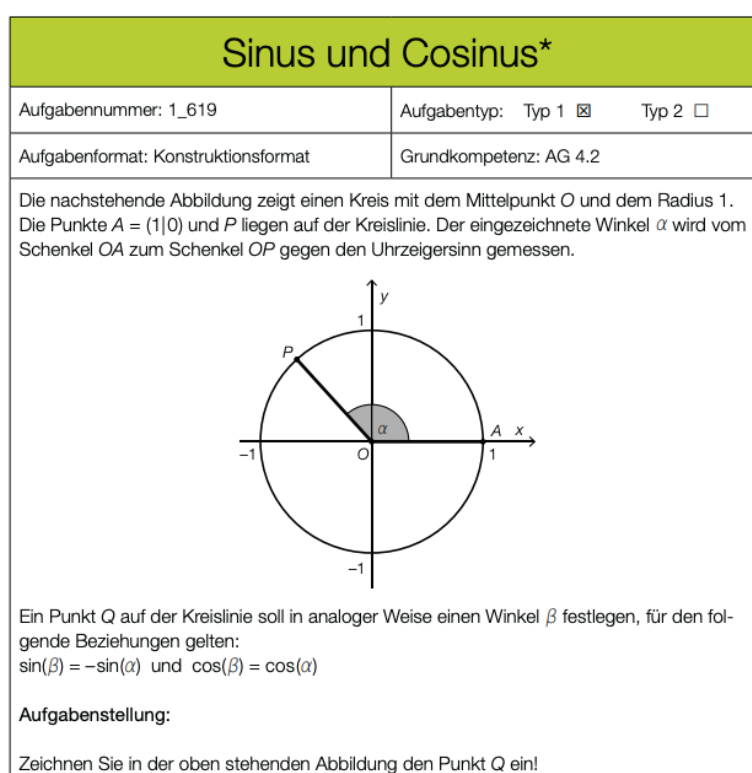


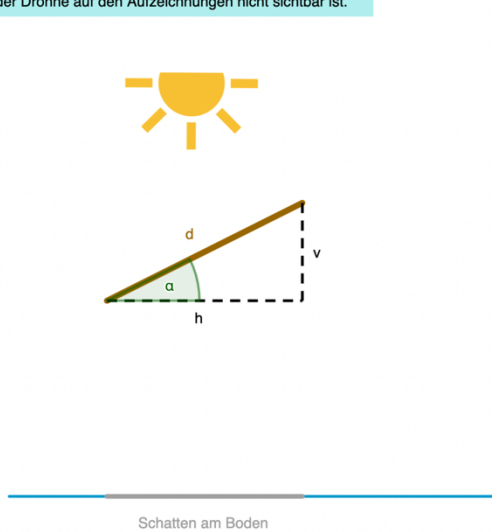
Abbildung 29: Aufgabe der SRDP (Aufgabenpool des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2018)

6.5 Sinus und Kosinus als Projektionsfaktor

Dieses Applet soll im Unterricht dabei unterstützen, auch die *Projektionsvorstellung* zu Sinus und Kosinus auszubilden. Dazu wird, wie in Abbildung 30 ersichtlich, vorerst die Problemstellung, die Schattenlänge einer Drohne bestimmen zu wollen, grafisch dargestellt und erklärt. Schüler*innen sollen eine Formel aufstellen, mit der die Schattenlänge auf dem Boden, also die Länge der Horizontalprojektion h von d , berechnet werden kann. Zur Hilfestellung kann ein rechtwinkliges Dreieck eingeblendet und die Lösung angezeigt werden.

Auch eine Formel der Vertikalprojektion v soll aufgestellt werden. Dies entspricht der Schattenlänge, wenn die Sonne um 90° gegen den Uhrzeigersinn wandert. Wie in Abbildung 31 zu sehen ist, kann die Lage der Sonne über ein Kontrollkästchen entsprechend verändert werden.

Eine in der Luft stehende Kameradrohne (vereinfacht durch eine Strecke d dargestellt) schließt mit der Horizontalen einen Winkel α ein. Bei den Dreharbeiten soll darauf geachtet werden, dass der Schatten der Drohne auf den Aufzeichnungen nicht sichtbar ist.



Das Einzeichnen eines rechtwinkligen Dreiecks kann dabei helfen, diese Schattenlänge zu bestimmen.

☒ Rechtwinkliges Dreieck anzeigen

Versuche, eine Formel aufzustellen, mit der die Länge der Projektionslinie h der Horizontalprojektion von d auf den Boden berechnet werden kann!

☒ Lösung anzeigen

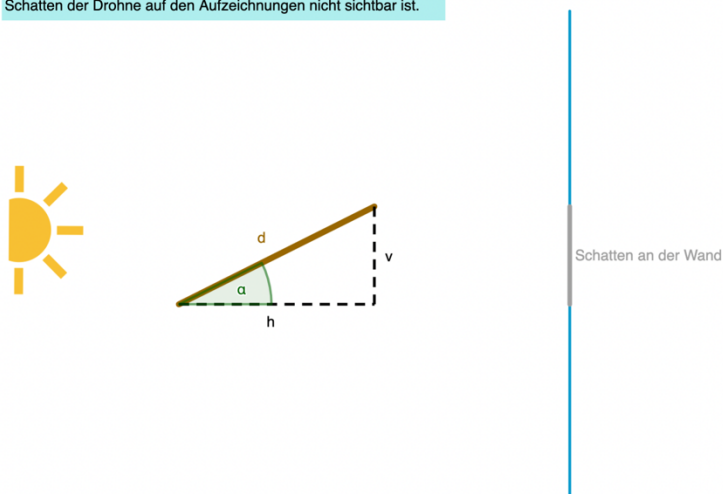
$$h = \cos(\alpha) \cdot d$$

Kommt das Licht von der Seite, so wird die Länge d an eine vertikale Wand projiziert.

☐ Sonne seitlich anzeigen

Abbildung 30: Kosinus als Projektionsfaktor

Eine in der Luft stehende Kameradrohne (vereinfacht durch eine Strecke d dargestellt) schließt mit der Horizontalen einen Winkel α ein. Bei den Dreharbeiten soll darauf geachtet werden, dass der Schatten der Drohne auf den Aufzeichnungen nicht sichtbar ist.



Das Einzeichnen eines rechtwinkligen Dreiecks kann dabei helfen, diese Schattenlänge zu bestimmen.

☒ Rechtwinkliges Dreieck anzeigen

Versuche, eine Formel aufzustellen, mit der die Länge der Projektionslinie h der Horizontalprojektion von d auf den Boden berechnet werden kann!

☐ Lösung anzeigen

Kommt das Licht von der Seite, so wird die Länge d an eine vertikale Wand projiziert.

☒ Sonne seitlich anzeigen

Wie kann in diesem Fall die Länge v der Vertikalprojektion berechnet werden?

☒ Lösung anzeigen

$$v = \sin(\alpha) \cdot d$$

Abbildung 31: Sinus als Projektionsfaktor

6.5.1 Kurzbeschreibung

Sinus und Kosinus als Projektionsfaktor
https://www.geogebra.org/m/tsrzfja3
Art des Applets
Entdeckungsapplet, Demonstrationssapplet
Kurzbeschreibung
Die Projektion einer Strecke auf eine horizontale bzw. vertikale Gerade ist als Schatten einer Drohne in der Luft dargestellt. Eine Formel für die Länge dieser Projektionsstrecke soll mit Hilfe von Sinus und Kosinus angegeben werden.
Angesprochene Grundvorstellungen
Projektionsvorstellung, Verhältnisvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Sinus, Kosinus und Tangens als Verhältnisse der Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck kennen
Passende Schulbuchaufgaben
keine passenden Aufgaben in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017)

Tabelle 7: Kurzbeschreibung Sinus und Kosinus als Projektionsfaktor

6.5.2 Hintergrundprogrammierungen

Die Sichtbarkeit der meisten Objekte in diesem Applet ist über Bedingungen festgelegt. So sind die Strecken h und v sowie der Winkel α nur dann sichtbar, wenn das Kontrollkästchen „Rechtwinkliges Dreieck anzeigen“ angeklickt wurde. Das Kontrollkästchen „Sonne seitlich anzeigen“ bewirkt – ebenfalls über Sichtbarkeitsbedingungen –, dass die Sonne am oberen Bildrand sowie der Schatten am Boden nicht mehr angezeigt wird, stattdessen aber die Sonne auf der linken Seite sowie der Schatten an der vertikalen Wand erscheint. Die beiden Formeln $h = \cos(\alpha) \cdot d$ und $v = \sin(\alpha) \cdot d$ werden genau dann angezeigt, wenn die Kontrollkästchen „Lösung anzeigen“ angeklickt werden. Die beiden Sonnen wurden nicht in *GeoGebra* erstellt. Stattdessen wurde ein Screenshot eines Piktogramms (erstellt in *Microsoft Word*) als Bilddatei in die *GeoGebra* Datei eingefügt. Bilddateien können direkt über die Werkzeugleiste eingefügt werden.

6.5.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Mit diesem Applet soll die *Projektionsvorstellung*, wie in Abschnitt 5.4.4 beschrieben, zu Sinus und Kosinus ausgebildet werden. Schüler*innen müssen selbstständig eine Formel für die Länge der Projektionslinien finden. Um die Formeln für diese Projektionslinien h und v – $h = \cos(\alpha) \cdot d$ und $v = \sin(\alpha) \cdot d$ – aufstellen zu können, müssen die Zusammenhänge $\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$ beziehungsweise $\sin(\alpha) = \frac{G}{H}$ abgerufen werden. Dabei wird auch die *Verhältnisvorstellung* gefestigt und eine Verbindung zwischen diesen beiden Grundvorstellungen aufgebaut.

Das Applet kann im Unterricht entweder als *Entdeckungsapplet*, oder aber als *Demonstrationssapplet* eingesetzt werden. Durch klare Beschreibungen der Situation sowie

eindeutige Instruktionen und Lösungsrückmeldungen ist das selbstständige Beobachten und Entdecken möglich. In beiden Fällen ist es sicherlich verständnisfördernd, wenn der Begriff der Projektion vorerst allgemein erläutert wird. Mit Fragen wie „Was verstehen wir unter einer Projektion?“, „In welchem Zusammenhang habt ihr den Begriff schon einmal gehört?“ oder „Was könnte ein Projektionsfaktor sein?“ kann ein Alltagsbezug hergestellt und ans Vorwissen der Schüler*innen angeknüpft werden.

Allgemein ist es wichtig – egal ob das Applet zur Demonstration oder zum selbstständigen Entdecken eingesetzt wird –, dass Sinus und Kosinus bereits als Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck bekannt sind, da die Formeln für die Berechnung der Projektionslängen sonst vermutlich nicht aufgestellt werden können.

6.6 Füllkurve eines Kegelstumpfes

In diesem Applet kann durch Betätigen einer Schaltfläche der Füllvorgang einer Vase in Form eines Kegelstumpfes gestartet werden. Schüler*innen können beobachten, wie der Wasserstand in der Vase steigt. Zusätzlich ist die Füllkurve sichtbar, wobei hier die verstrichene Zeit sowie der entsprechende Wasserstand farblich markiert sind. Auch eine Beobachtungsaufgabe ist angeführt. Durch Anklicken eines Kontrollkästchens kann die Lösung dieser Aufgabe angezeigt werden, wie in Abbildung 32 zu sehen ist.

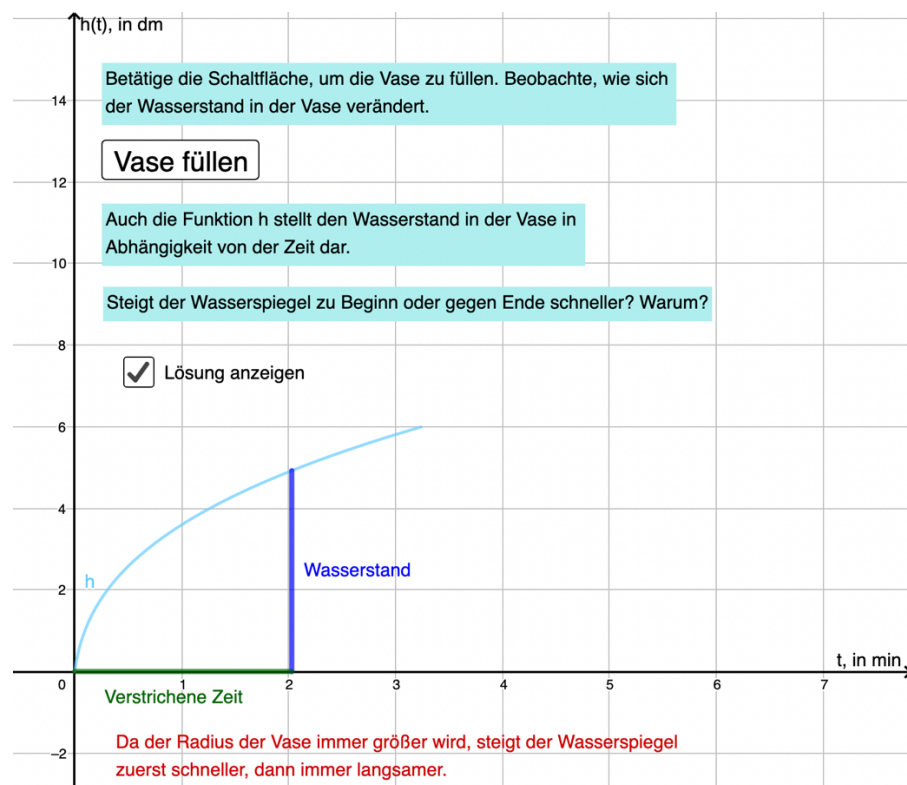


Abbildung 32: Füllkurve

6.6.1 Kurzbeschreibung

Füllkurve eines Kegelstumpfes
https://www.geogebra.org/m/e2crshz5
Art des Applets
Demonstrationsapplet
Kurzbeschreibung
Schüler*innen können beobachten, wie sich eine kegelstumpfförmige Vase mit Wasser füllt und wie dieser Vorgang mit der Füllkurve zusammenhängt. Ein weiterführender Text in der <i>GeoGebra</i> -Aktivität erklärt, wie die Füllkurve aufgestellt wird.
Angesprochene Grundvorstellungen
Kovariationsvorstellung, Zuordnungsvorstellung, Objektvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Funktion als eindeutige Zuordnungen kennen und diese Zuordnungen grafisch darstellen können
Passende Schulbuchaufgaben
Aufgaben 6.24 – 6.27 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017: 161)

Tabelle 8: Kurzbeschreibung Füllkurve eines Kegelstumpfes

6.6.2 Hintergrundprogrammierungen

Um ein Applet wie dieses erstellen zu können, sind nicht nur technische Kenntnisse, sondern auch gründliche mathematische Überlegungen notwendig. Der gesamte Vorgang hängt von einem unsichtbaren Schieberegler ab, der nach dem Betätigen der Schaltfläche kontinuierlich seinen Wert verändert. Dieser Wert t stellt die verstrichene Zeit in Minuten dar. Durch den Skripting Befehl *StartAnimation(t, true)* werden alle Schieberegler in Bewegung gesetzt. Die Geschwindigkeit kann unter den Einstellungen des Schiebereglers bestimmt werden. Für dieses Applet wurde eine Geschwindigkeit von 0,5 gewählt (bei einer Geschwindigkeit von 1 durchläuft der Schieberegler das festgelegte Intervall in 10 Sekunden).

Pro Sekunde sollen rund 1 Liter Flüssigkeit in die virtuelle Vase fließen. Dies entspricht zwar nicht der Füllgeschwindigkeit, wenn die Vase mit einem haushaltsüblichen Wasserhahn gefüllt wird, beschleunigt jedoch das Ablaufen der Animation. Der angezeigte Kegelstumpf hat die Radien $r_1 = 1$ (Grundfläche) beziehungsweise $r_2 = 5$ (Deckfläche) und eine Höhe $H = 6$. Als Einheit wurden Dezimeter gewählt, damit das Gefäß in etwa einer großen Bodenvase entspricht. Der Schieberegler wurde entsprechend eingestellt. Das Volumen V (in Liter) in Abhängigkeit von der Höhe des Wasserstandes h (in Dezimeter) ist durch den Zusammenhang

$$V(h) = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \cdot x + r_1 \right)^2 dx = \frac{H \cdot \pi}{3 \cdot (r_2 - r_1)} \cdot \left[\left(\frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1 \right)^3 - r_1^3 \right] \quad \text{gegeben,} \quad \text{die}$$

Umkehrfunktion ergibt die Füllkurve: $h(V) = \frac{H}{r_2 - r_1} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3 \cdot (r_2 - r_1) \cdot V}{H \cdot \pi}} + r_1^3 - r_1 \right)$. In der *GeoGebra*-Aktivität wurde die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfes geometrisch hergeleitet. Für das Volumen in Abhängigkeit von der Höhe erhält man in diesem Fall den

Zusammenhang $V = \frac{H \cdot \pi}{3} \cdot \left[r_1^2 + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1 \right) + \left(\frac{r_2 - r_1}{H} \cdot h + r_1 \right)^2 \right]$. Wird diese Formel mit *GeoGebra* zu $h =$ umgeformt, so erhält man für die Füllhöhe in Abhängigkeit vom Volumen $h(V) = \frac{\sqrt[3]{-H^3 \cdot r_1^3 \cdot \pi^3 + 3 \cdot H^2 \cdot V \cdot r_1 \cdot \pi^2 - 3 \cdot H^2 \cdot V \cdot r_2 \cdot \pi^2 + H \cdot r_1 \cdot \pi}}{r_1 \cdot \pi - r_2 \cdot \pi}$. Diese Funktion h kann durch Herausheben des Faktors $\frac{H}{r_1 - r_2}$ und Multiplizieren beider Faktoren mit (-1) auf die obere, einfachere, Darstellung gebracht werden.

Für die Werte $r_1 = 1$, $r_2 = 5$, $H = 6$ sowie $h = 6$ ergibt sich ein Gesamtvolumen von rund 194,78 Litern, was zu einer Fülldauer von 3,24 Minuten führt. Für die Füllgeschwindigkeit 1 Liter/Sekunde gilt: $V(t) = 60 \cdot t$, wobei $V(t)$ das Wasservolumen in Litern nach t Minuten angibt. Die für das Intervall $[0; 3,24]$ definierte Funktion h mit $h(60 \cdot x)$ stellt also die Füllkurve des Gefäßes in der Grafik dar (auch wenn für die grafische Darstellung die horizontale Achse als Zeitachse mit Argument t beschriftet wurde, so ist die Funktion h in der algebraischen Darstellung von x abhängig, da t bereits als veränderbarer Wert am Schieberegler definiert wurde). Die beiden Kegelstümpfe in der 3D-Grafik wurden durch Rotationskurven um die z -Achse erzeugt, wobei das Rotationsintervall der blauen Kurve der berechneten Höhe des Wasserstandes zur Zeit t entspricht, um einen korrekten Anstieg des Flüssigkeitslevels zu gewährleisten. Die Kugeln, die das Wasser darstellen sollen, das aus dem Hahn fließt, sind Punkte, deren z -Koordinate von t abhängt. Insgesamt wurden acht solche Punkte mit unterschiedlichen Koordinaten erzeugt. Der höchstgelegene Punkt wurde mit $(0, 0, 12 - \frac{6}{3,24} \cdot t)$, der niedrigste mit den Koordinaten $(0, 0, 5 - \frac{6}{3,24} \cdot t)$ definiert. Die Punkte wandern also mit steigendem t die z -Achse hinunter und erreichen ihren tiefsten Wert, wenn der Schieberegler am Ende (bei $t = 3,24$) angekommen ist. Zusätzlich wurden die Sichtbarkeitseinstellungen so gewählt, dass die Punkte nur dann sichtbar sind, wenn ihre z -Koordinaten kleiner als 7,1 sind und sie sich somit unter dem Wasserhahn befinden. Für einen solchen Punkt W wurde also beispielsweise die Sichtbarkeitsbedingung $z(W) < 7.1 \wedge t > 0$ gewählt. Der Zusatz $t > 0$ verhindert, dass bereits vor dem Starten des Füllvorgangs Wassertropfen sichtbar sind.

6.6.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Der Einsatz des Applets im Unterricht kann dazu beitragen, alle drei Grundvorstellungen zu funktionalen Abhängigkeiten zu festigen (siehe Abschnitt 5.3.4). Zum einen trägt die dynamische 3D-Grafik dazu bei, dass Schüler*innen eine klare Abhängigkeit erkennen: je mehr Zeit vergeht, umso höher steht das Wasser in der Vase. Der *Kovariationsaspekt* einer Funktion, also dass die Veränderung des Argumentes (in diesem Fall der Zeit) eine Veränderung der abhängigen Größe (des Wasserstandes) bewirkt, wird veranschaulicht. Auch die Frage nach der

Veränderung des Wasserstandes soll beim Ausbilden einer tragfähigen *Kovariationsvorstellung* unterstützen. Um zusätzlich auch *Zuordnungsvorstellung* und *Objektvorstellung* anzusprechen, ist auch der Funktionsgraph der Füllkurve gegeben. Unterstützt durch die grün und dunkelblau eingefärbten Linien, soll die Aufmerksamkeit der Schüler*innen auf die eindeutige Zuordnung – jeder Zeit wird genau eine Höhe des Wasserstandes zugeordnet –, die wiederum als Funktionsgraph dargestellt werden kann, gelenkt werden. Da auch ersichtlich wird, dass der Füllvorgang der Vase direkt mit der Füllkurve zusammenhängt, kann auch eine Verbindung zwischen den drei Grundvorstellungen hergestellt werden.

Aufgaben zum Interpretieren, Zuordnen und Zeichnen von Füllkurven sind auch in Schulbüchern der 5. Klasse AHS zu finden (vgl. Malle et al., 2017: 116). Bei Aufgaben dieser Art ergibt sich jedoch oft das Problem, dass nie tatsächlich ein Gefäß gefüllt wird. Beim Versuch, sich im Geiste vorzustellen, wie ein abgebildetes Gefäß mit Flüssigkeit gefüllt wird und zu erkennen, wie sich der Wasserstand ändert, stoßen wohl einige an die Grenzen ihrer Vorstellungskraft. Noch schwieriger wird es für jene Schüler*innen, die über kein gutes räumliches Vorstellungsvermögen verfügen. Diesem Problem soll das Applet entgegenwirken, da es klar den Zusammenhang zwischen dem tatsächlichen Füllvorgang und der abgebildeten Füllkurve aufzeigt.

Das Applet ist primär ein *Demonstrationsapplet*, dass zur Veranschaulichung eines Vorgangs dient, der in einem statischen, zweidimensionalen Schulbuch auf diese Art und Weise niemals abgebildet werden könnte. Die Schüler*innen müssen nicht aktiv handeln. Ein Klick auf die Schaltfläche reicht, der Vorgang wird gestartet und stattfindende Veränderungen können beobachtet werden. Der Fokus liegt hier vorerst also nicht auf mathematischen Handlungen, sondern auf dem Verstehen eines Zusammenhangs. Erst bei der Frage, wann der Wasserspiegel schneller steigt, ist es notwendig, den abgebildeten Prozess zu analysieren und die Kurve zu interpretieren. Idealerweise sollte das Applet als Vorbereitung für das Lösen von Aufgaben zu Füllkurven, wie sie in „Mathematik verstehen 5“ zu finden sind (vgl. Malle et al., 2017: 116) zum Einsatz kommen, da es definitiv dabei unterstützen kann, das Konzept einer Füllkurve zu verstehen. Schulbuchaufgaben sollten im Anschluss daran bearbeitet werden, um dieses erlangte Verständnis weiter zu festigen.

6.6.4 Fachmathematische Bemerkungen

Lehrpersonen, die dieses Applet zum Anlass nehmen, eigene Füllprozesse darzustellen, müssen zuvor in der Lage sein, eine Funktion aufzustellen, welche jedem Volumen des Gefäßes die entsprechende Höhe zuordnet. Diese Funktion muss wiederum mit jener Funktion verknüpft werden, die der verstrichenen Zeit das entsprechende Füllvolumen zuordnet. Das

Auseinandersetzen mit Problemen dieser Art kann daher auch fachlich sehr interessant sein und bietet eine oft willkommene Abwechslung zu Problemen, die „routinemäßig“ im Unterricht behandelt werden.

Aber nicht nur Lehrpersonen können oder sollen sich mit Modellierungsaufgaben dieser Art beschäftigen. Für interessierte Schüler*innen – oder Schüler*innen, die eine Fachbereichsarbeit im Fach Mathematik schreiben wollen – bietet das Applet eine gute Basis, sich näher mit Füllkurven und deren Modellierung auseinanderzusetzen. Eine detaillierte Erklärung, wie die Funktion der Füllkurve aufgestellt werden kann, wurde daher in der *GeoGebra*-Aktivität hinzugefügt und ein Exkurs zu Füllkurven ist im nächsten Abschnitt zu finden.

6.6.5 Exkurs zu Füllkurven

Unter Füllkurven versteht man Funktionen, die den Flüssigkeitsstand in verschiedenen Gefäßen in Abhängigkeit von der Zeit angeben, meist unter der Annahme, dass die Gefäße mit einer konstanten Zuflussgeschwindigkeit befüllt werden. Um Füllkurven aufstellen zu können, muss zuerst eine Funktion $V: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, h \rightarrow V(h)$ aufgestellt werden, welche das Volumen der Flüssigkeit im Gefäß in Abhängigkeit vom Flüssigkeitsstand h angibt. Diese kann mit geometrischen Hilfsmitteln, bei komplexeren Gefäßen über die Integration der Funktion der Querschnittsfläche in Abhängigkeit von der Höhe oder – beim Befüllen von Rotationskörpern – über die Rotation von Kurven hergeleitet werden. Die Umkehrfunktion dieser Funktion V gibt dann die Füllhöhe in Abhängigkeit vom Flüssigkeitsvolumen an. Möchte man die Veränderung des Flüssigkeitsstandes nun in Abhängigkeit von der Zeit angeben, so muss das Flüssigkeitsvolumen V durch eine Funktion $V: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, t \rightarrow V(t)$ ersetzt werden, wobei $V(t)$ das nach t Zeiteinheiten eingefüllte Flüssigkeitsvolumen angibt. Da die Füllgeschwindigkeit meist als konstant angenommen wird, handelt es sich bei der Funktion V um eine lineare Funktion der Form $V(t) = c \cdot t$.

6.6.5.1 Füllkurve eines Zylinders

Zu Beginn soll die Füllkurve eines Zylinders mit der Höhe H und dem Radius r aufgestellt werden, der in Abbildung 33 dargestellt ist. Ist der Zylinder bis zur Höhe h gefüllt, so gilt für das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß der Zusammenhang $V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$. Die Umkehrfunktion liefert die Höhe des Flüssigkeitsstandes in Abhängigkeit des Volumens: $h(V) = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$. Für die konstante Füllgeschwindigkeit c ergibt sich die Füllfunktion h mit $h(t) = \frac{c \cdot t}{r^2 \cdot \pi}$. Es handelt sich hier also – wie bei prismenförmigen Gefäßen allgemein – um einen linearen Zusammenhang. Besonders wichtig ist es, stets auf die Anpassung der Einheiten zu achten. Ist die

Füllgeschwindigkeit beispielsweise in Liter pro Sekunde gegeben, so müssen die Abmessungen des Gefäßes gegebenenfalls in Dezimeter umgewandelt werden. Ebenso ist es wichtig, Definitions- und Wertemenge festzulegen, da ab einer bestimmten Fülldauer $\left(t_0 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot H}{c}\right)$ das Gefäß übergehen würde. Ein Zylinder mit Radius $r = 1 \text{ dm}$ und einer Höhe $H = 3 \text{ dm}$, der mit einer Füllgeschwindigkeit von 0,2 Liter pro Sekunde gefüllt wird, ist beispielsweise nach rund $15\pi \approx 47,12$ Sekunden voll. Die Füllkurve ist somit durch die Funktion $h: [0; 15\pi] \rightarrow [0; 3]$ mit $h(t) = \frac{0,2 \cdot t}{\pi}$ gegeben, die in Abbildung 33 zu sehen ist.

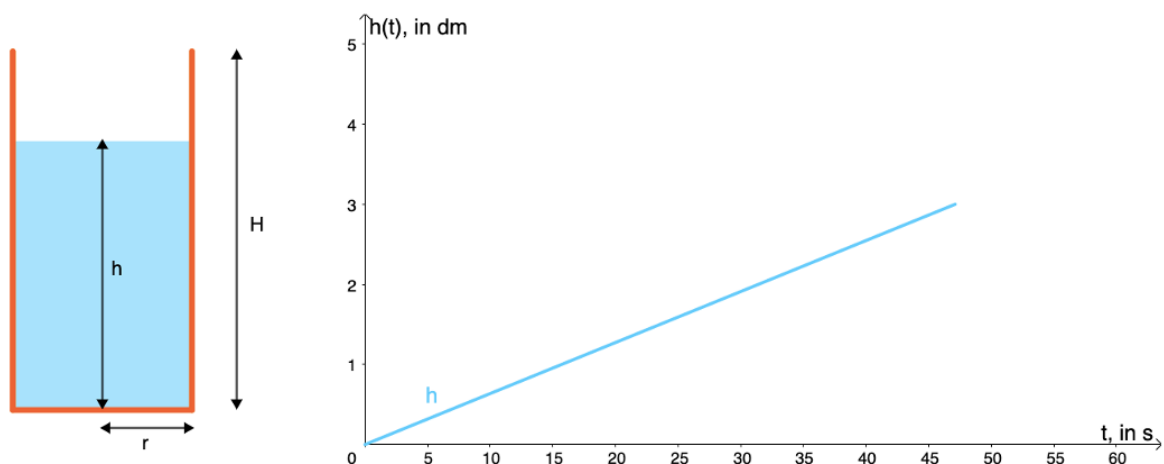


Abbildung 33: Querschnitt Zylinder und Füllkurve für $H = 3 \text{ dm}$, $r = 1 \text{ dm}$ und $c = 0,2 \text{ l/s}$

6.6.5.2 Füllkurve eines Paraboloids

Um das Volumen der Flüssigkeit in einem Paraboloid in Abhängigkeit von der Füllhöhe angeben zu können, muss das Rotationsvolumen einer Parabel (wie in Abbildung 34 dargestellt) mit $p: y = a \cdot x^2$ ($a \in \mathbb{R}^+$) um die y -Achse berechnet werden. Umformen auf x^2 liefert den Zusammenhang $x^2 = \frac{y}{a}$. Das Füllvolumen in Abhängigkeit der Füllhöhe h ergibt sich durch

$$V(h) = \pi \cdot \int_0^h x^2 dy = \pi \cdot \int_0^h \frac{y}{a} dy = \pi \cdot \frac{h^2}{2a}.$$

Die Umkehrfunktion gibt die Füllhöhe in Abhängigkeit vom Flüssigkeitsvolumen an: $h(V) = \sqrt{\frac{2 \cdot V \cdot a}{\pi}}$. Für die konstante

Füllgeschwindigkeit c (in l/s) ergibt sich die Füllfunktion $h(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot c \cdot t \cdot a}{\pi}}$ (t in Sekunden).

Die Füllkurve ist also eine Wurzelfunktion. Ist die Höhe H und der Radius R der Öffnung eines paraboloidförmigen Gefäßes bekannt, kann der Parameter a der Rotationsparabel durch $H = a \cdot R^2$ beziehungsweise $a = \frac{H}{R^2}$ berechnet werden. Für ein 1,5 dm hohes Paraboloid mit einem maximalen Durchmesser von 1 dm ist die Parabel also durch $p: y = 6x^2$, die Füllkurve bei

einer Füllgeschwindigkeit von 0,2 Liter/Sekunde durch h : $h(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2 \cdot t \cdot 6}{\pi}}$ gegeben. Relevant ist noch die Definitionsmenge dieser Füllfunktion. Das Volumen des Wasserglases beträgt $V(1,5) = \pi \cdot \frac{1,5^2}{12} = 0,1875\pi \approx 0,59$ Liter. Fließen pro Sekunde 0,2 Liter in das Gefäß, so ergibt sich eine Fülldauer von $0,9375\pi \approx 2,95$ Sekunden. Die Funktion h ist also für $t \in [0; 0,9375\pi]$ definiert. Der Graph der Füllkurve ist in Abbildung 34 zu sehen.

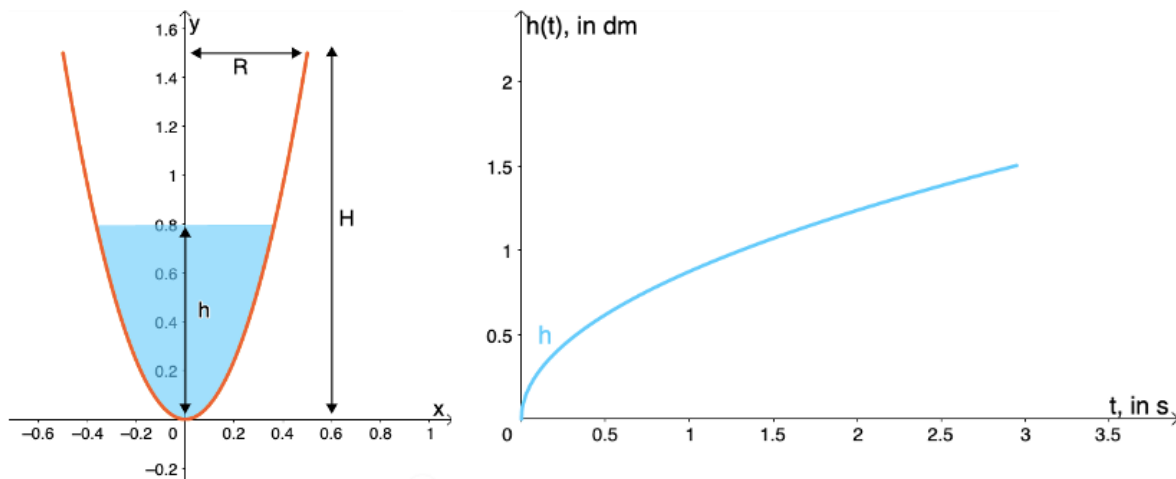


Abbildung 34: Querschnitt Paraboloid und Füllkurve für $H = 1,5$ dm, $R = 0,5$ dm und $c = 0,2$ l/s

6.6.5.3 Füllkurve eines Körpers mit rechteckigen Querschnittsflächen

Nun soll die Füllkurve eines Körpers betrachtet werden, der kein Rotationskörper ist. Wir betrachten einen Blumenkasten mit rechteckigen waagrechten Querschnittsflächen, deren Seitenlängen mit zunehmender Höhe linear zunehmen. Die Breite b der Querschnittsflächen bleibt konstant. Die Seitenlänge der Grundfläche wird mit a_1 , jene der Deckfläche mit a_2 bezeichnet. Die Höhe des Blumenkastens wird durch die Variable H ausgedrückt. Eine Skizze eines solchen Gefäßes ist in Abbildung 35 zu sehen. Zuerst muss eine Funktion aufgestellt werden, welche die Seitenlänge $a(h)$ der Querschnittsfläche in der Höhe h angibt. Diese Funktion ist durch $a: [0; H] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a(h) = \frac{a_2 - a_1}{H} \cdot h + a_1$ gegeben. Der Flächeninhalt Q der Querschnittsfläche in der Höhe h kann also durch die Funktion $Q: [0; H] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(h) = \left(\frac{a_2 - a_1}{H} \cdot h + a_1\right) \cdot b$ beschrieben werden. Die Stammfunktion von Q liefert für das Intervall $[0; h]$ das Volumen der Flüssigkeitsmenge, wenn der Blumenkasten bis zur Höhe h gefüllt wird: $V: [0; h] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V(h) = \int \left(\left(\frac{a_2 - a_1}{H} \cdot h + a_1\right) \cdot b\right) dh = b \cdot \left(\frac{a_2 - a_1}{2H} \cdot h^2 + a_1 \cdot h\right)$. Die Umkehrfunktion kann über die Lösungsformel zum Lösen quadratischer Gleichungen gefunden werden. Für die konstante Füllgeschwindigkeit c wird die Füllkurve h des Gefäßes durch

$$h(t) = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 2 \cdot \left(\frac{a_2 - a_1}{H}\right) \cdot \frac{c \cdot t}{b}}}{\frac{a_2 - a_1}{H}}$$
 beschrieben, also wieder durch eine (affine) Wurzelfunktion. Ein

Blumenkasten mit den Abmessungen $a_1 = 2 \text{ dm}$, $a_2 = 4 \text{ dm}$, $b = 8 \text{ dm}$ und $H = 3 \text{ dm}$ und mit einem daraus resultierenden Fassungsvermögen von 72 Litern ist bei einer Zuflussgeschwindigkeit von 0,2 Litern/Sekunde nach 6 Minuten (360 Sekunden) vollständig befüllt. Die Füllkurve h kann in diesem Fall durch $h: [0; 360] \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Gleichung

$$h(t) = -3 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{30} \cdot t}$$
 beschrieben werden und ist in Abbildung 35 graphisch dargestellt.

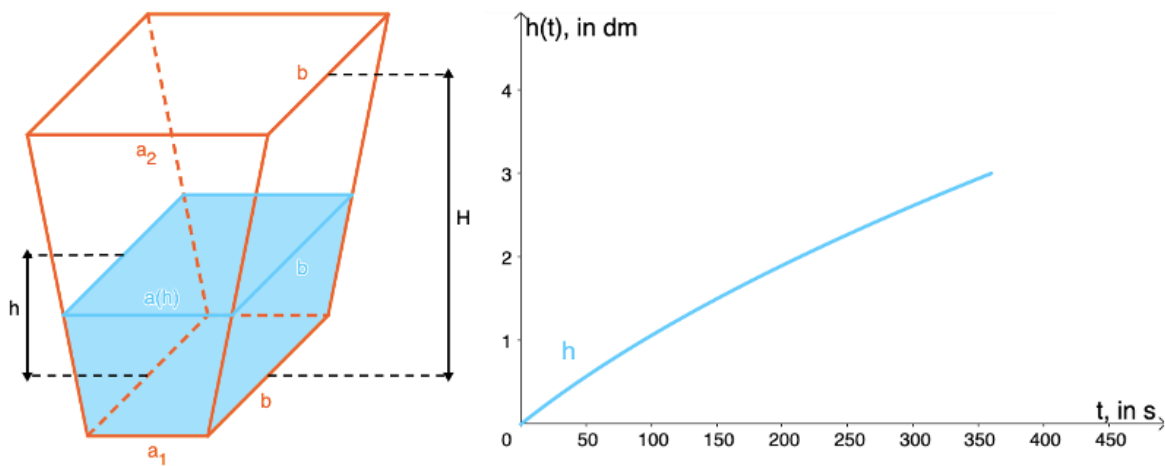


Abbildung 35: Skizze Blumenkasten und Füllkurve für $a_1=2 \text{ dm}$, $a_2 = 4 \text{ dm}$, $b = 8 \text{ dm}$, $H = 3 \text{ dm}$ und $c = 0,2 \text{ l/s}$

6.7 Charakteristische Eigenschaft der linearen Funktion

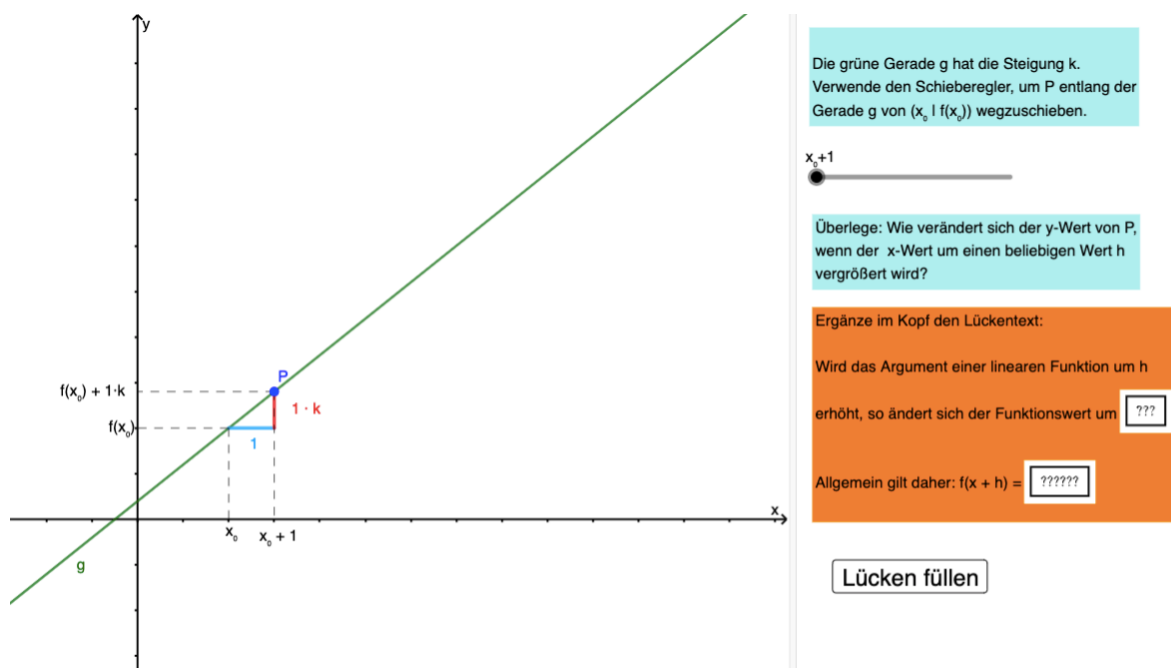


Abbildung 36: Charakteristische Eigenschaft der linearen Funktion

Das abgebildete Applet (Abbildung 36) dient dem Entdecken einer wichtigen charakteristischen Eigenschaft der linearen Funktion $f: f(x) = k \cdot x + d : f(x + h) = f(x) + k \cdot h$. Mit Hilfe eines Schiebereglers kann der Punkt P von dem Punkt $(x_0 | f(x_0))$ – entlang der grünen Geraden g – wegbewegt werden. Mit dieser Bewegung verändern sich auch die Längen der Katheten des eingezeichneten Steigungsdreiecks. Ein ergänzender Lückentext soll helfen, den Zusammenhang auch formell anzugeben. Wird die Schaltfläche „Lücken füllen“ betätigt, so erscheinen die Texte „ $k \cdot h$ “ sowie „ $f(x) + k \cdot h$ “.

6.7.1 Kurzbeschreibung

Charakteristische Eigenschaft der linearen Funktion
https://www.geogebra.org/m/ep5c9jay
Art des Applets
Demonstrationsapplet, Entdeckungssapplet
Kurzbeschreibung
Anhand eines veränderbaren Steigungsdreiecks kann beobachtet werden, wie sich der Funktionswert einer linearen Funktion bei Veränderung des Arguments verändert. Der Zusammenhang $f(x + h) = f(x) + k \cdot h$ soll festgestellt und ein Lückentext entsprechend ergänzt werden.
Angesprochene Grundvorstellungen
Kovariationsvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Lineare Funktionen der Form $f(x) = k \cdot x + d$ kennen und die Parameter deuten können
Passende Schulbuchaufgaben
Ergänzend zum Erklärungstext auf Seite 130 einsetzbar und beim Bearbeiten der Aufgaben 7.12 – 7.13 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017: 130-132)

Tabelle 9: Kurzbeschreibung Charakteristische Eigenschaft der linearen Funktion

6.7.2 Hintergrundprogrammierungen

Die Bewegung des Punktes $P = (a + 2 | g(a + 2))$, und somit die Veränderung des Steigungsdreiecks, wird durch die einen Schieberegler a bedingt, der jedoch mit $x_0 + a$ beschriftet wurde. Der Schieberegler kann alle ganzzahlige Werte von 1 bis 8 annehmen. Ein unsichtbarer Punkt C mit den Koordinaten $(a + 2 | 0)$, bewegt den dynamischen Text $x_0 + a$ entlang der x -Achse. Bei der Konstruktion wurden hauptsächlich dynamische Texte verwendet, also Texte, die sich mit der Veränderung des Schieberegler mitverändern. Wird der Schieberegler beispielsweise auf den Wert „ $x_0 + 4$ “ verändert, so würde die senkrechte Kathete des Steigungsdreiecks den Wert „ $4 \cdot k$ “ zeigen, auf der x -Achse wäre das Argument von P mit „ $x_0 + 4$ “ abzulesen, der y -Wert von P würde sich entsprechend zu „ $f(x_0) + 4 \cdot k$ “ mitverändern. Dieser Text, der den y -Wert von P anzeigen soll, ist an den Schnittpunkt einer horizontalen Geraden durch P mit der y -Achse gekoppelt und bewegt sich daher entlang der

senkrechten Achse.

Die Schaltfläche unter dem Lückentext wurde mit Hilfe der folgenden Skripting-Befehle so programmiert, dass beim Klicken auf die Schaltfläche die weißen Kästchen verschwinden und der Text somit vollständig sichtbar wird:

SetzeSichtbarInGrafikansicht(Text10, 2, false)

SetzeSichtbarInGrafikansicht(Text11, 2, false)

Text10 und *Text11* stehen hier für die weißen Fragezeichen-Kästchen, 2 steht für das Grafikfenster, in dem die Sichtbarkeit verändert werden soll und mit *false* wird die Sichtbarkeit auf *nicht sichtbar* gesetzt.

6.7.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Das Applet dient primär dazu, Schüler*innen bei der Ausbildung einer tragfähigen *Kovariationsvorstellung* (siehe Abschnitt 5.3.4) zu unterstützen. Es wird nicht nur klar ersichtlich, dass eine Veränderung des Arguments eine Veränderung des Funktionswertes hervorruft, sondern auch die Art dieser Veränderung wird – insbesondere durch die zusätzlichen Aufgabenstellungen – thematisiert und veranschaulicht. Im Gegensatz zu statischen Abbildungen in Schulbüchern, wie jene in Abbildung 37, kann durch den Schieberegler ein klarer Fokus darauf gelegt werden, wie sich das Verändern einer Größe auf die andere auswirkt. Können Schüler*innen keine dynamischen Änderungen durchführen und beobachten, besteht die Gefahr, dass anstelle der Kovariationsvorstellung – die jedoch für das Verstehen der Bedeutung des Zusammenhangs $f(x + h) = f(x) + k \cdot h$ unumgänglich ist – nur die *Zuordnungsvorstellung* ausgebildet wird. Im Unterricht kann das Applet als *Entdeckungsapplet*, als auch als *Demonstrationsapplet* eingesetzt werden. Da die Instruktionen sehr genau und die Bedienbarkeit dieses Applets sehr einfach ist, kann es ohne Anleitung durch die Lehrkraft verwendet werden. Erfolgt die Demonstration durch die Lehrperson, so kann das Fenster mit den Fragestellungen bei Bedarf auch gelöscht und durch einen von der Lehrperson geleiteten Dialog ersetzt werden. Auch wenn lineare Funktionen bereits aus der 4. Klasse bekannt sein sollten, ist es dennoch empfehlenswert, vorerst den Begriff „Steigung“ erneut zu erläutern. Können sich Schüler*innen nichts unter der Steigung des Graphen einer linearen Funktion vorstellen, so kann trotz Veranschaulichung im Applet auch der Zusammenhang $f(x + h) = f(x) + k \cdot h$ nicht erfasst werden. Das Applet lässt sich auch gut zur zusätzlichen Hilfestellung beim Lösen von Aufgaben wie der in Abbildung 38 dargestellten verwenden. Die Schulbuchaufgabe kann dann gleich als Überprüfung dienen: haben Schüler*innen mit Hilfe des Applets eine tragfähige Kovariationsvorstellung entwickelt, so sollte die Bearbeitung der Aufgabe keine Probleme bereiten. Zusätzlich soll noch darauf hingewiesen werden, dass das

Applet auch in höheren Schulstufen zur Wiederholung des Themas „Lineare Funktionen“, besonders aber beim Vergleich von linearen und exponentiellen Wachstumsprozessen, erneut eingesetzt werden kann.

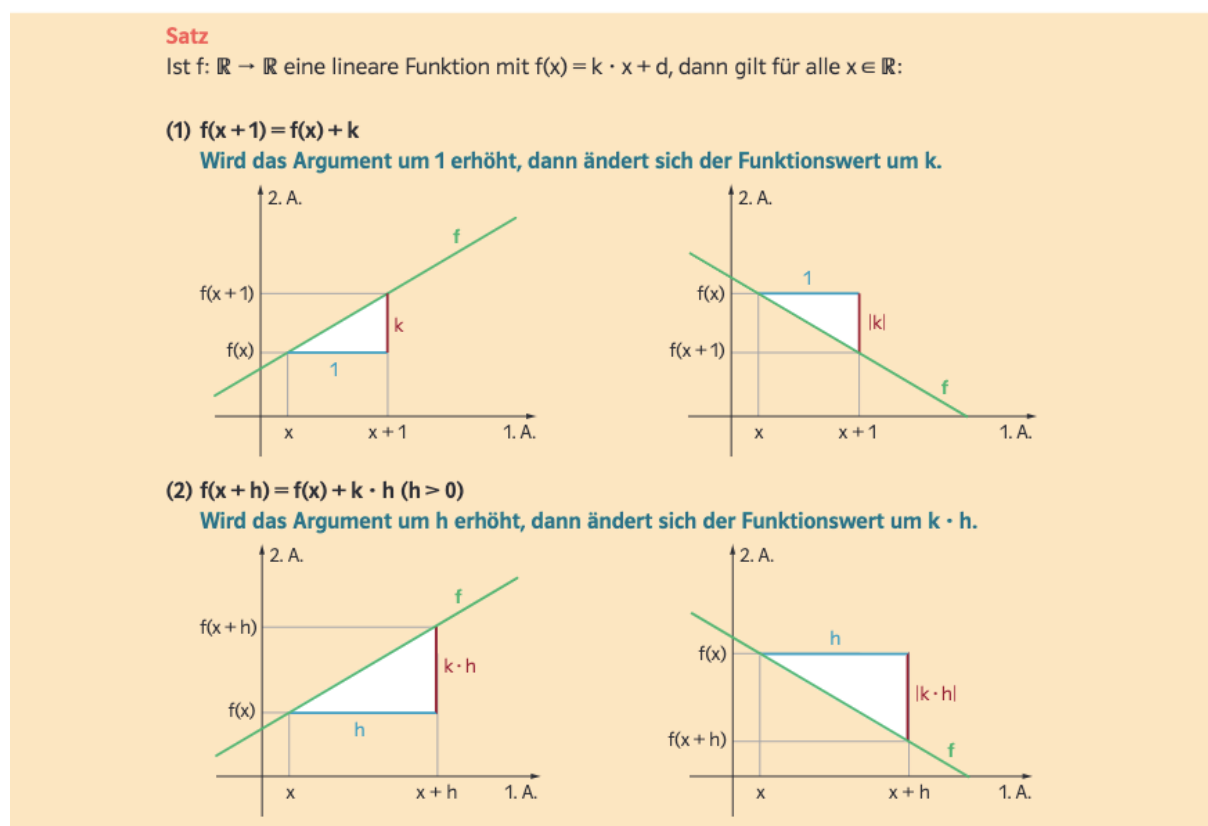


Abbildung 37: Eigenschaften linearer Funktionen (Malle et al., 2017: 130)

- 7.13** Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = 3x + 4$.
Um wie viel wächst $f(x)$, wenn x **a)** um 1, **b)** um 2, **c)** um 10, **d)** um 100 erhöht wird?

Abbildung 38: Schulbuchaufgabe Lineare Funktion (Malle et al., 2017: 132)

6.8 Parameter einer quadratischen Funktion

In diesem Applet können Schüler*innen üben, die Vorzeichen der Parameter a , b und c einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ anhand ihres Graphen zu erkennen. Es werden dafür zufällige quadratische Funktionen von dem Programm erzeugt. Auf den Hinweis, dass es sich bei der dargestellten Funktion um eine allgemeine quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ handelt, folgt die Aufforderung, anhand des Graphen festzustellen, ob a , b und c größer, kleiner oder gleich 0 sind. Auch eine Lösungsüberprüfung sowie eine zusätzliche Hilfestellung wurden eingebaut. Stimmt die Auswahl der Kontrollkästchen mit den zufällig bestimmten Parametern überein, so erscheint ein grüner Stern unter der Aufgabe.

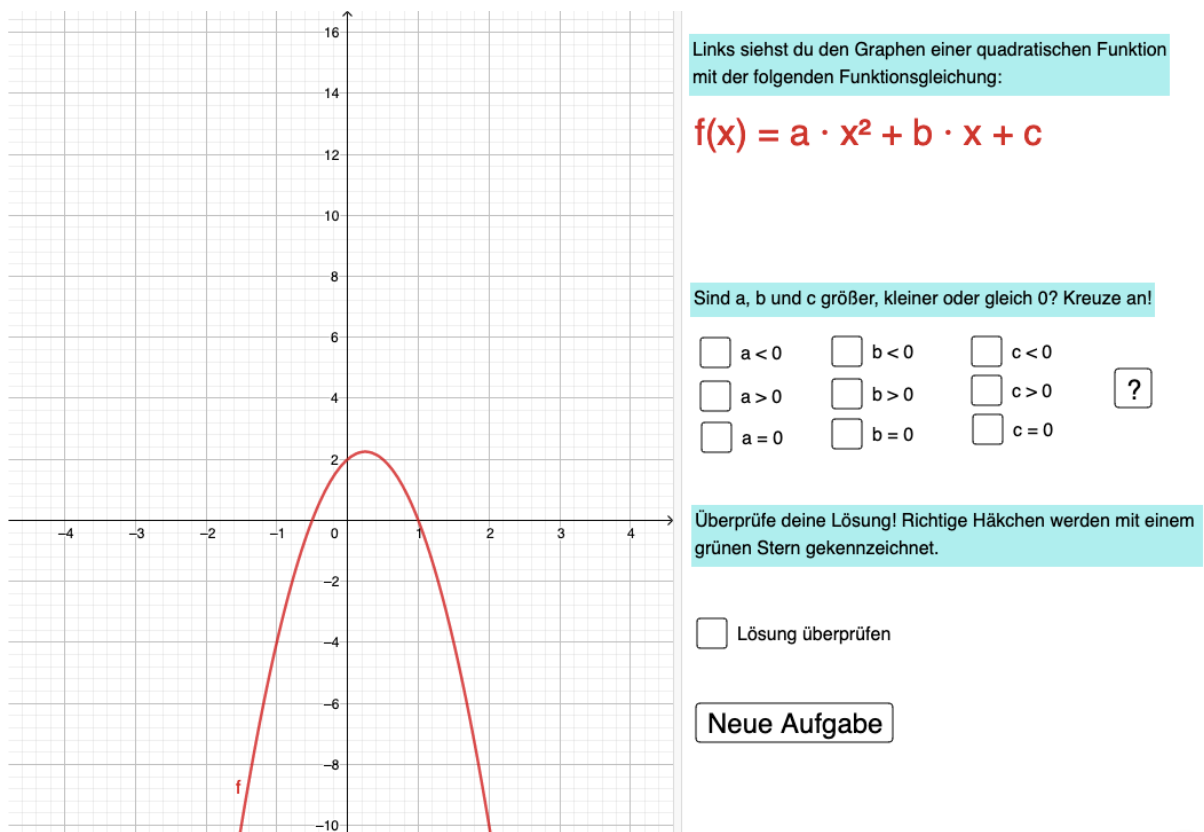


Abbildung 39: Parameter einer quadratischen Funktion

6.8.1 Kurzbeschreibung

Parameter einer quadratischen Funktion

<https://www.geogebra.org/m/pgsacxgq>

Art des Applets

Übungsapplet

Kurzbeschreibung

Verschiedene quadratische Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ werden präsentiert und Schüler*innen müssen für die Parameter a , b und c angeben, ob diese größer, kleiner oder gleich 0 sind.

Angesprochene Grundvorstellungen

Objektvorstellung

Benötigtes Vorwissen

Quadratische Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ kennen und ihre Parameter deuten können

Passende Schulbuchaufgaben

Ergänzend zum Erklärungstext auf Seite 161 und im Anschluss an die Aufgaben 8.10 – 8.14 in „Mathematik verstehen 5“ einsetzbar (Malle et al., 2017: 161-163)

Tabelle 10: Kurzbeschreibung Parameter einer quadratischen Funktion

6.8.2 Hintergrundprogrammierungen

Mit dem Befehl `Zufallszahl[-4, 4]` für die Parameter b und c beziehungsweise `ZufälligesElement[{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4}]` für den Parameter $a \neq 0$ werden die Parameterwerte a , b und c zufällig bestimmt, um eine zufällige quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ zu erzeugen. Diese wird links in der Grafikanzeige abgebildet. Die

Aufgabenüberprüfung erfolgt über eine Sichtbarkeitsbedingung, wie in Abschnitt 3.3.4 beschrieben. Unter jeder der drei Spalten an Kontrollkästchen ist ein grüner Stern eingefügt worden, der nur dann sichtbar ist, wenn die Kontrollkästchen richtig angekreuzt wurden. Die Bedingung $c < 0 \wedge k \neq 1 \wedge n \neq 1 \vee c > 0 \wedge l \neq 1 \wedge n \neq 1 \vee c \neq 0 \wedge m \neq 1 \wedge n \neq 1$ zeigt beispielsweise einen grünen Stern unter der dritten Spalte an, sofern die Aufgabe richtig gelöst wurde. Die Variable c steht hier für den Parameter c der Funktion, die Werte k , l und m sind die Namen der Kontrollkästchen die mit „ $c < 0$ “, „ $c > 0$ “ beziehungsweise „ $c = 0$ “ beschriftet wurden, n hingegen ist der Name jenes Kontrollkästchens, das mit „Lösung überprüfen“ beschriftet wurde. Beim Anklicken der einzelnen Kontrollkästchen werden über Skripting-Befehle alle anderen Kontrollkästchen einer Spalte auf „falsch“ gesetzt (wie in Abschnitt 3.3.4 beschrieben). So wird verhindert, dass durch das Anklicken aller Kästchen eine positive Rückmeldung erscheint.

Die Schaltfläche „Neue Aufgabe“ aktualisiert das Applet. Die Parameter werden neu berechnet und die Kontrollkästchen auf den Wahrheitswert „falsch“ zurückgesetzt (die Häkchen werden also entfernt). Dadurch erscheint eine neue Funktion, von der wiederum die Parameter bestimmt werden sollen. Wie bereits in Abschnitt 4.3 erläutert, sollten *Übungsapplets* idealerweise auch die Möglichkeit anbieten, sich zusätzliche Informationen und Hilfestellung zu holen. Dies ist über die Schaltfläche „?“ eingebaut. Ein Klick auf das Fragezeichen animiert über den Skripting-Befehl *StartAnimation()* einen unsichtbaren Schieberegler. Die Werte dieses Schiebereglers beeinflussen die Sichtbarkeit von Hilfstexten. Durchläuft der Schieberegler das erste Drittel des möglichen Wertebereichs, so erscheint der Text „Der Parameter a bestimmt, ob der Graph der Funktion nach oben, oder nach unten geöffnet ist. Je größer der Betrag von a , umso steiler ist der Graph“. Im Anschluss daran wird der Text „Der Parameter b verschiebt den Scheitelpunkt nach links oder rechts. Für die x -Koordinate des Scheitels gilt: $x_S = -\frac{b}{2a}$ “ angezeigt. Durchläuft der animierte Schieberegler das letzte Drittel seines Wertebereichs, so können Schüler*innen Informationen zum Parameter c finden: „Der Parameter c verschiebt den Funktionsgraphen entlang der y -Achse. Es gilt: $f(0) = c$ “. Die Geschwindigkeit der Animation wurde so gewählt, dass die Texte in der verfügbaren Zeit gelesen werden können. Falls mehr Zeit notwendig ist, kann die Animation gestoppt oder auch neu gestartet werden.

6.8.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Beim Arbeiten mit Funktionen mit Parametern wird insbesondere die *Objektvorstellung* angesprochen (siehe Abschnitt 5.3.4). Die Funktion, dargestellt als Graph, wird als Ganzes betrachtet und das Aussehen ihres Graphen analysiert. Das Applet unterstützt Schüler*innen

dabei, einen Zusammenhang zwischen dem Funktionsgraphen und der Funktionsgleichung erkennen zu können, eine Fähigkeit, die besonders beim Modellbilden relevant ist:

„Dieses Wissen um die Bedeutung von Parametern ist beispielsweise erforderlich, wenn ein realer funktionaler Zusammenhang modelliert wird, indem diejenige Funktion aus einer Funktionsklasse gesucht wird, die den gegebenen Zusammenhang möglichst gut beschreibt.“ (Greefrath et al., 2016: 58)

Bei dem beschriebenen Applet handelt es sich um ein *Übungsapplet*. Es hilft Schüler*innen dabei, ihr Wissen über quadratische Funktionen zu vertiefen und zu überprüfen. Selbstverständlich könnte eine ähnliche Aufgabenstellung auch ohne weiteres in einem Schulbuch zu finden sein: eine quadratische Funktion wird abgebildet und ihre Parameter müssen bestimmt werden. Damit das Nutzen des Applets jedoch einen klaren Vorteil bietet, wurde es mit allen im Abschnitt 4.3 beschriebenen Möglichkeiten ausgestattet, die ein Übungsapplet dem Schulbuch überlegen machen. So haben Schüler*innen die Option, eine Rückmeldung, aber auch eine Hilfestellung zu erhalten. Bei falscher Erstantwort kann erneut ein Versuch gestartet werden.

Zusätzlich ist das Übungsangebot quasi unbegrenzt. Über die Schaltfläche „Neue Aufgabe“ kann die Konstruktion neu geladen werden. Durch die erneute Berechnung der Zufallszahlen entsteht also auch eine neue Aufgabe. Während eine Fehlvorstellung beim Bearbeiten einer einzigen Schulbuchaufgabe vielleicht nicht sichtbar wird, so würde sich diese vermutlich beim Lösen mehrere Aufgaben herauskristallisieren. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen: Angenommen ein(e) Schüler*in glaubt, dass ein positiver Parameter b die Funktion ausgehend von der Grundparabel nach rechts, ein negativer Wert diese nach links verschiebt. Betrachtet man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2x - 3$, so würde sich diese Vorstellung bestätigen. Beim Betrachten einer Funktion g mit $g(x) = x^2 + 2x - 3$ würde sich jedoch zeigen, dass der Zusammenhang nicht so einfach ist wie eben angedeutet. Die Option, das eigene Wissen an verschiedenen Beispielen zu testen, kann dabei helfen, solche Fehlvorstellungen rechtzeitig zu erkennen.

Wie die meisten Übungsapplets sollte auch dieses erst dann eingesetzt werden, wenn der Zusammenhang zwischen dem Graphen einer quadratischen Funktion und ihren Parametern bereits im Unterricht thematisiert wurde. Auch das Konzept der Grundparabel $y = x^2$ und dass jede Änderung der Parameter die Funktion ausgehend von dieser Grundparabel verändert, sollte bekannt sein, um die Parameter und ihre Wirkung richtig interpretieren zu können. Übungsapplets lassen sich auch als Diagnosewerkzeug verwenden, besonders wenn sie in einen *GeoGebra-Classroom* integriert und dort bearbeitet werden. Die Lehrperson kann dadurch den

Lernstand ihrer Schüler*innen überprüfen und erkannte Fehlvorstellungen können rechtzeitig korrigiert werden.

6.9 Rationale Funktionen – Definitions- und Wertemenge

Dieses Applet präsentiert Funktionsgleichungen rationaler Funktionen. Schüler*innen sollen die Definitionsmenge der angezeigten Funktion und ihre Wertemenge angeben. Als Hilfestellung kann über ein Kontrollkästchen auch der Funktionsgraph angezeigt werden, wie in Abbildung 40 zu sehen ist.

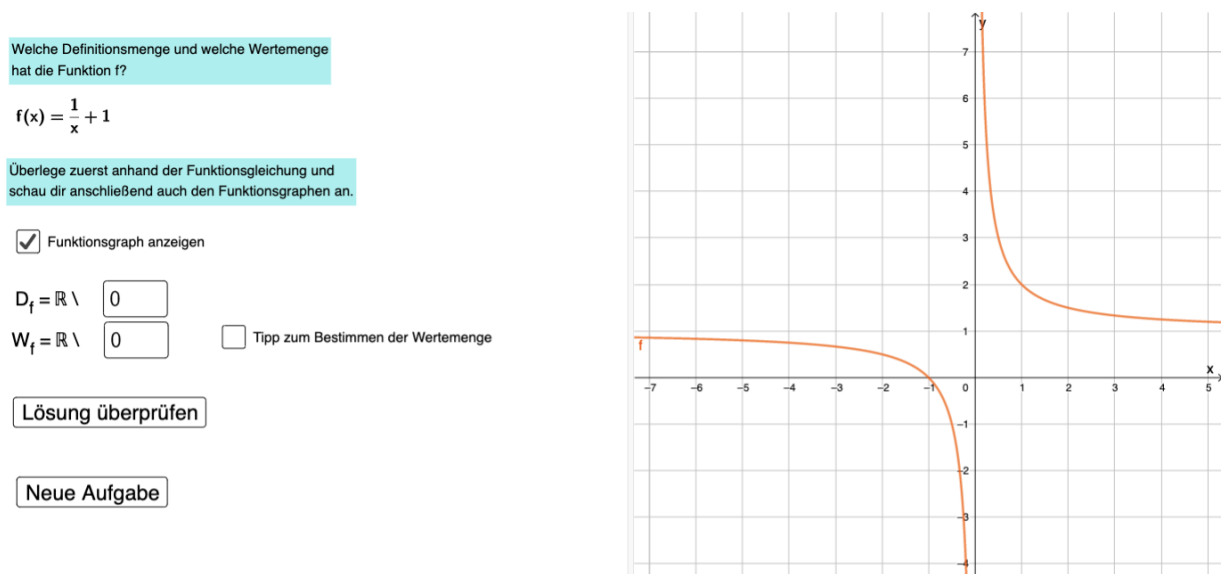


Abbildung 40: Rationale Funktionen - Definitions- und Wertemenge

Wird die Schaltfläche „Lösung überprüfen“ betätigt, so erscheint eine Rückmeldung. Beliebig oft können über die Schaltfläche „Neue Aufgabe“ weitere Aufgaben angezeigt und gelöst werden. Außerdem steht ein Hilfstext zur Bestimmung der Wertemenge zur Verfügung. Ein Klick auf das Kontrollkästchen „Tipp zum Bestimmen der Wertemenge“ öffnet diese Hilfestellung.

6.9.1 Kurzbeschreibung

Rationale Funktionen – Definitions- und Wertemenge	
https://www.geogebra.org/m/kgxhuszv	
Art des Applets	
Übungsapplet	
Kurzbeschreibung	
Verschiedene rationale Funktionen der Form $f(x) = \frac{1}{x+a} + b$ werden präsentiert (als Funktionsgleichung und als Graph) und Schüler*innen müssen ihre Definitions- sowie Wertemenge angeben.	
Angesprochene Grundvorstellungen	
Objektvorstellung, Zuordnungsvorstellung	
Benötigtes Vorwissen	
Die Begriffe Definitions- und Wertemenge kennen und wissen, wie diese bestimmt werden	
Passende Schulbuchaufgaben	
Im Anschluss an die Aufgaben 8.24 – 8.25 in „Mathematik verstehen 5“ einsetzbar (Malle et al., 2017: 168)	

Tabelle 11: Kurzbeschreibung Rationale Funktionen – Definitions- und Wertemenge

6.9.2 Hintergrundprogrammierungen

Die Funktion f wurde mit $f(x) = \frac{1}{x+a} + b$ definiert, wobei die Parameter a und b zuerst als ganzzahlige Zufallszahlen im Intervall $[-4; 4]$ festgelegt wurden. Die Sichtbarkeit dieses Funktionsgraphen hängt vom Wahrheitswert des Kontrollkästchens „Funktionsgraph anzeigen“ ab. Auch ein Tipp zur Bestimmung der Wertemenge – „Der Ausdruck $\frac{1}{x+a}$ kann nicht den Wert Null annehmen. Der Ausdruck $\frac{1}{x+a} + b$ kann also nicht den Wert b annehmen“ – kann über das Kontrollkästchen angezeigt werden. Bei dem Tipp handelt es sich um ein Textelement dessen Sichtbarkeit an das Kontrollkästchen geknüpft ist (siehe Abschnitt 3.3.4). Die Eingabefelder sind wiederum mit Schieberegler verknüpft. Durch die Eingabe von Werten in die Eingabefelder werden die Werte dieser, über Schieberegler definierten, Variablen verändert. Der Schriftzug „Richtig“ erscheint, wenn die eingegebenen Werte in den Eingabefeldern mit den Werten $-a$ beziehungsweise b übereinstimmen, die Definitions- und Wertemenge also richtig bestimmt wurden. Die Bedingung für die Sichtbarkeit des Textes „Leider falsch, probiere es noch einmal!“ wurde so gewählt, dass dieser Text nur dann aufscheint, wenn die Schaltfläche zur Lösungsüberprüfung betätigt wird, mindestens eine der beiden Mengen jedoch falsch angegeben wurde. Damit die Rückmeldung nur dann aufscheint, wenn die Schaltfläche „Lösung überprüfen“ betätigt wird, wurde diese Schaltfläche mit dem Skripting-Befehl `SetzeWert[g,1]` versehen. Bei g handelt es sich um ein unsichtbares Kontrollkästchen, dass durch den Klick auf die Schaltfläche den Wahrheitswert 1 annimmt. Die Rückmeldungen werden also nur dann angezeigt, wenn Definitions- und Wertemenge bestimmt worden sind und $g = 1$ gilt. Wird ein neuer Versuch gestartet, also neue Werte in die

Eingabefelder eingegeben, so wird die Rückmeldung über den Skripting-Befehl *SetzeWert[g,0]* wieder ausgeblendet.

Durch Anklicken der Schaltfläche „Neue Aufgabe“, die über den Skripting-Befehl *AktualisiereKonstruktion()* die Konstruktion neu lädt, sodass auch die Parameter neu berechnet werden, kann eine neue Funktion angezeigt werden. Die beiden Kontrollkästchen (zum Anzeigen des Graphen sowie zum Anzeigen der Rückmeldung) sowie die mit den Eingabefeldern verknüpften Variablen werden zusätzlich auf 0 gesetzt, um den Anfangszustand wiederherzustellen.

6.9.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Das beschriebene Applet dient in erster Linie zur Ausbildung der *Zuordnungsvorstellung*, wie in Abschnitt 5.3.4 näher beschrieben wurde. Unter der Zuordnungsvorstellung wird oft die Idee verstanden, dass eine Funktion **jedem** x -Wert genau einen Funktionswert zuordnet. Diese ungenaue Definition einer Funktion kann jedoch dazu führen, dass rationale Funktionen fälschlicherweise nicht als Funktionen erkannt werden, da es hier x -Werte gibt, für die die Funktion nicht definiert ist und denen daher kein Funktionswert zugeordnet werden kann. Es ist daher wichtig, die Zuordnungsvorstellung im Zusammenhang mit der Definitionsmenge auszubilden. Genau dabei kann dieses Applet unterstützen. Bereits in der Termdarstellung kann erkannt werden, dass ein gewisser Wert nicht für x eingesetzt werden darf. Dieser Wert muss also aus der Grundmenge herausgenommen werden. Das führt dazu, dass diesem x -Wert auch kein Funktionswert zugeordnet wird, wie auch im Hilfstext verdeutlicht wird. Auch das Betrachten des zugehörigen Graphen kann das Ausbilden einer tragfähigen Zuordnungsvorstellung unterstützen, da die Polstelle gut erkennbar ist und dem Konzept einer Definitionslücke daher Bedeutung zugeschrieben wird. Der abgebildete Graph kann zusätzlich auch die *Objektvorstellung* ansprechen und dazu beitragen, den Zusammenhang zwischen der Funktionsgleichung und ihrem Graphen, einer Hyperbel, zu erkennen. Auch eine Verknüpfung von Zuordnungs- und Objektvorstellung kann durch diesen Darstellungswechsel stattfinden.

Es handelt sich bei dem Applet um ein *Übungsapplet*, das ergänzend zu den Schulbuchaufgaben in „Mathematik verstehen 5“ zur Bestimmung von Definitions- und Wertemenge eingesetzt werden kann (siehe Abbildung 41). Die Aufgaben im Applet sind etwas schwieriger als jene im Schulbuch, da im Vergleich zu den Funktionsgleichungen, die im Schulbuch zu finden sind ($f(x) = \frac{a}{x} + b$; $a, b \in \mathbb{R}$) im Applet auch jene Funktionen auftreten, deren Definitionslücken an anderen Stellen als bei $x = 0$ liegen. Das Applet kann daher sehr gut zur Differenzierung eingesetzt werden: Schüler*innen, die bereits alle Aufgaben im Schulbuch richtig gelöst und verstanden haben, können mit den zusätzlichen Aufgaben gefördert beziehungsweise gefordert

werden. Durch die Möglichkeit der zusätzlichen Hilfestellung mit der Abbildung des Graphen sowie der Lösungsrückmeldung und der Vielzahl an Versuchen, sollte die Bearbeitung der Aufgaben jedoch auch für lernschwächere Schüler*innen bei hinreichend langer Übung kein großes Problem darstellen. Außerdem hilft das Auseinandersetzen mit Aufgabenstellungen wie diesen dabei, zu vermeiden, dass Schüler*innen fälschlicherweise annehmen, dass jede rationale Funktion stets bei $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle aufweist.

8.24 Skizziere den Graphen der Funktion f und gib die größtmögliche Definitionsmenge sowie die Wertemenge von f an!

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$

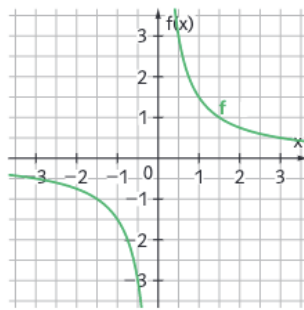
b) $f(x) = \frac{2}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

d) $f(x) = -\frac{1}{x} - 1$

8.25 Die abgebildete Funktion f ist vom Typ $f(x) = \frac{c}{x}$ (mit $c \in \mathbb{R}^*$). Gib eine Funktionsgleichung von f , die größtmögliche Definitionsmenge D_f von f und die Wertemenge W_f von f an!

a)

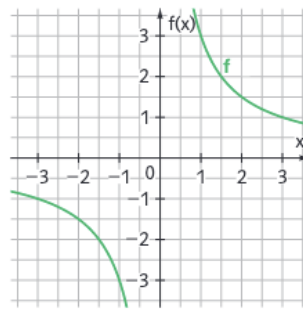


$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$D_f = \underline{\hspace{2cm}}$

$W_f = \underline{\hspace{2cm}}$

b)

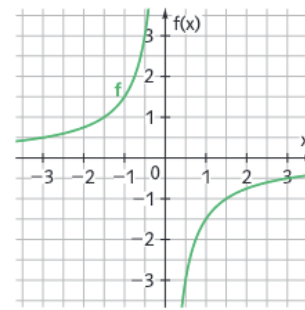


$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$D_f = \underline{\hspace{2cm}}$

$W_f = \underline{\hspace{2cm}}$

c)



$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$D_f = \underline{\hspace{2cm}}$

$W_f = \underline{\hspace{2cm}}$

Abbildung 41: Schulbuchaufgabe Rationale Funktionen (Malle et al., 2017: 168)

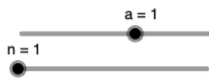
6.10 Parameter rationaler Funktionen

In dem in Abbildung 42 dargestellten Applet können Schüler*innen die Parameter a und n der Funktion $f(x) = \frac{a}{x^n}$ verändern und beobachten, wie sich auch der Funktionsgraph entsprechend verändert. Auch eine Beobachtungsaufgabe ist angeführt. Wird das Häkchen im Kästchen „Lösung anzeigen“ gesetzt, so erscheint eine Erklärung zum Zusammenhang zwischen n und dem Symmetrieverhalten der Funktion. Gleichzeitig wird auch eine weitere Beobachtungsaufgabe, wie in Abbildung 43 zu erkennen ist, sichtbar. Auch die Lösung zu dieser Aufgabe kann mit Hilfe eines Kontrollkästchens eingeblendet werden.

Rechts siehst du eine rationale Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{a}{x^n} \quad (a, n \neq 0)$$

Verändere die Parameter a und n und beobachte, wie sich der Funktionsgraph ändert:



Welchen Zusammenhang zwischen n und der Symmetrie der Funktion f kannst du beobachten?

☐ Lösung anzeigen

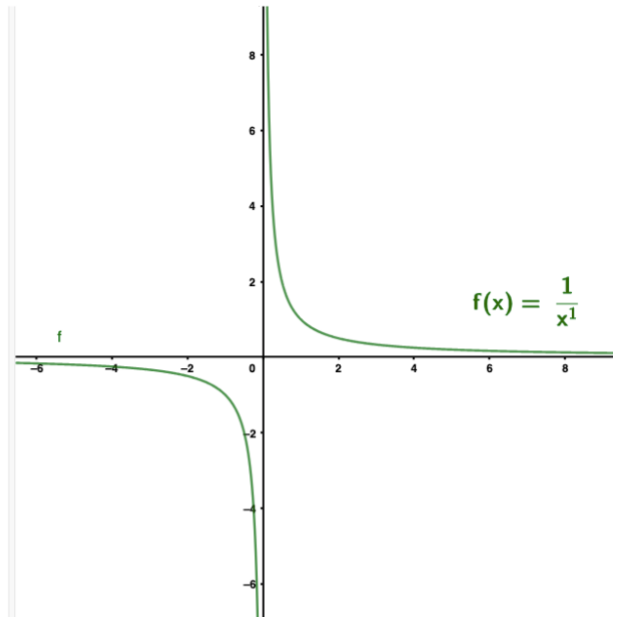
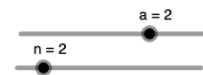


Abbildung 42: Parameter rationaler Funktionen 1

Rechts siehst du eine rationale Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{a}{x^n} \quad (a, n \neq 0)$$

Verändere die Parameter a und n und beobachte, wie sich der Funktionsgraph ändert:



Welchen Zusammenhang zwischen n und der Symmetrie der Funktion f kannst du beobachten?

☒ Lösung anzeigen

Für gerade n ist die Funktion f symmetrisch bezüglich der y-Achse.

Man sagt f ist gerade und es gilt: $f(x) = f(-x)$

Für ungerade n ist die Funktion symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

Man sagt f ist ungerade und es gilt: $f(-x) = -f(x)$

In welchen Quadranten liegen die Äste der Hyperbel für... ☒ Lösung anzeigen

... $a > 0$ und gerades n?	im 1. und 2. Quadranten
... $a < 0$ und gerades n?	im 3. und 4. Quadranten
... $a > 0$ und ungerades n?	im 1. und 3. Quadranten
... $a < 0$ und ungerades n?	im 2. und 4. Quadranten

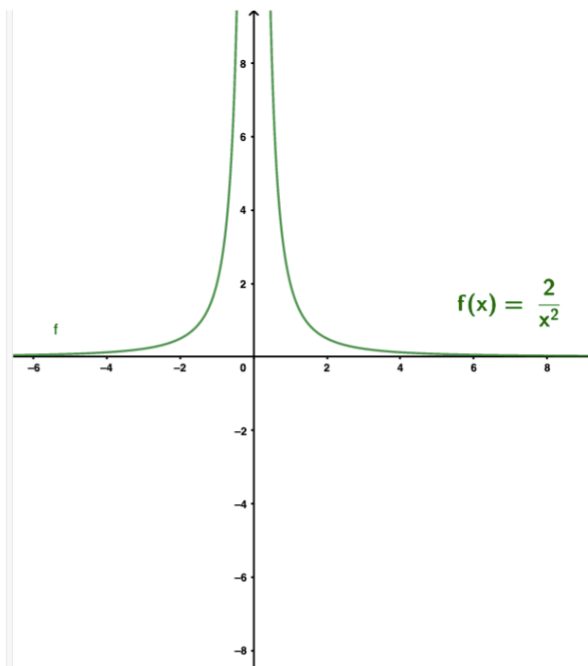


Abbildung 43: Parameter rationaler Funktionen 2

6.10.1 Kurzbeschreibung

Parameter rationaler Funktionen
https://www.geogebra.org/m/ttwhrtw4
Art des Applets
Entdeckungsapplet, Werkzeugapplet
Kurzbeschreibung
Über Schieberegler können die Parameter a und n einer Potenzfunktion der Form $f(x) = \frac{a}{x^n}$ verändert und beobachtet werden, wie diese Veränderung den Funktionsgraphen beeinflusst. Zwei Beobachtungsaufgaben zum Symmetrieverhalten und zur Lage der Hyperbeläste sind zu lösen.
Angesprochene Grundvorstellungen
Objektvorstellung, Zuordnungsvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Rationale Funktionen der Form $f(x) = \frac{a}{x}$ kennen und Aussagen über das Symmetrieverhalten von Funktionen tätigen können
Passende Schulbuchaufgaben
Aufgaben 8.29 – 8.30 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017: 169)

Tabelle 12: Kurzbeschreibung Parameter rationaler Funktionen

6.10.2 Hintergrundprogrammierungen

Die im rechten Grafikfenster angezeigte Funktion wurde mit $f(x) = \frac{a}{x^n}$ im Algebra-Fenster definiert, woraufhin automatisch Schieberegler für die Parameter a und n von *GeoGebra* erstellt wurden. Der Parameter a kann ganzzahlige Werte im Intervall $[-5; 5]$ annehmen, für n kann mit dem Schieberegler ein ganzzahliger Werte aus dem Intervall $[1; 8]$ ausgewählt werden. Ein dynamischer Text neben dem Funktionsgraphen zeigt auch die zugehörige Funktionsgleichung an. Die Lösung zur ersten Aufgabe als auch die zweite Aufgabenstellung und das dazugehörige Kontrollkästchen werden erst angezeigt, wenn das erste Kontrollkästchen zum Anzeigen der Lösung angeklickt wurde. Dies wurde durch entsprechende Sichtbarkeitsbedingungen erreicht (siehe Abschnitt 3.3.4). Ein weiteres, mit einer Sichtbarkeitsbedingung versehenes Textelement – die Lösung zur zweiten Beobachtungsaufgabe – wird erst dann angezeigt, wenn auch der zweite Wahrheitswert durch Anklicken des zweiten Kontrollkästchens auf „wahr“ gesetzt wurde.

6.10.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Das Applet kann im Mathematikunterricht dazu beitragen, zwei tragfähige Grundvorstellungen zu Funktionen – wie in Abschnitt 5.3.4 beschrieben – auszubilden oder zu festigen – die *Objektvorstellung* und die *Zuordnungsvorstellung*. Schüler*innen können die Parameter der rationalen Funktion verändern und beobachten, wie sich der Funktionsgraph, also die Funktion als Ganzes (als Objekt) verändert. Es kann festgestellt werden, wie sich das Aussehen des Graphen und damit auch die Eigenschaften der Funktion in Abhängigkeit von den Parametern

verändern. Besonders mit der zweiten Beobachtungsaufgabe kann zusätzlich auch noch die Zuordnungsvorstellung angesprochen werden. Je nachdem, welche Werte für a und n gewählt werden, ändert sich die Wertemenge der Funktion f . Den Argumenten werden Funktionswerte aus unterschiedlichen Teilmengen der reellen Zahlen zugordnet. Für gerades n und negatives a ist die Wertemenge der Funktion beispielsweise durch $\mathbb{R}^+$ gegeben.

Es handelt sich bei dem vorgestellten Applet um ein *Entdeckungsapplet*, das zum Erforschen des Zusammenhangs zwischen den Parametern einer rationalen Funktion und ihren Eigenschaften im Unterricht eingesetzt werden kann. Durch die klaren Instruktionen und Erklärungen ist bei der Nutzung des Applets keine weitere Hilfestellung durch die Lehrperson notwendig. Inhaltlich geht das Applet etwas über den Stoff der 9. Schulstufe hinaus, da es nicht nur Funktionen der Form $f(x) = \frac{a}{x}$ und $f(x) = \frac{a}{x^2}$ (mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) sondern auch die Eigenschaften von Funktionen mit höheren Potenzen von x thematisiert, und kann daher sehr gut zur Differenzierung und zusätzlichen Förderung mathematisch interessierter Schüler*innen eingesetzt werden. Denkbar wäre auch ein Einsatz als *Werkzeugapplet* bei der Bearbeitung von Aufgaben, wie der in Abbildung 44 dargestellten.

8.29 Die abgebildete Funktion f ist vom Typ $f(x) = \frac{c}{x^2}$ (mit $c \in \mathbb{R}^*$). Gib eine Funktionsgleichung von f , die größtmögliche Definitionsmenge von f und die Wertemenge von f an!

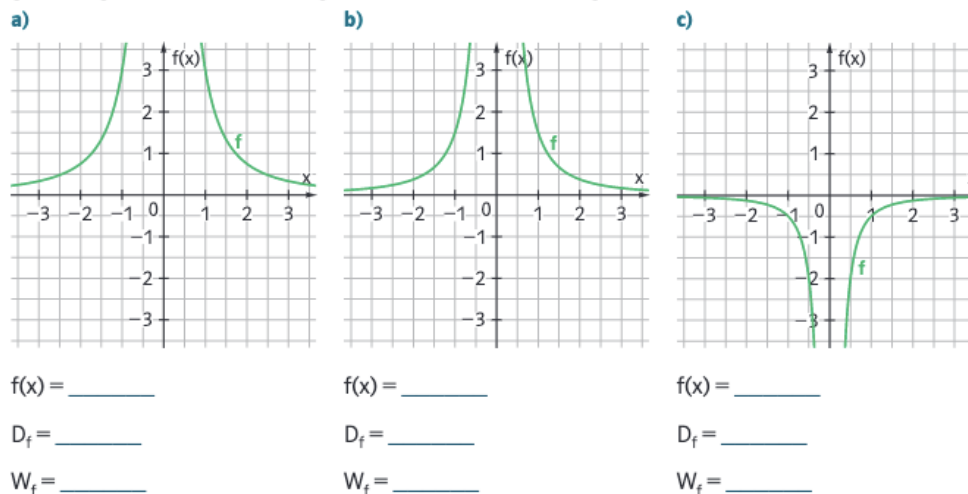


Abbildung 44: Schulbuchaufgabe Rationale Funktionen (Malle et al., 2017: 169)

Um den Fokus für diesen Verwendungszweck jedoch auf die Bearbeitung dieser konkreten Aufgabe zu lenken, könnten vorerst die Beobachtungsaufgaben gelöscht oder angepasst werden, sowie der Schieberegler für den Parameter n auf den Wert 2 gestellt und anschließend entfernt werden.

6.11 In Formeln Funktionen sehen

Je nach Konstantsetzen von Variablen können Formeln als verschiedene Funktionen aufgefasst werden. In diesem Applet wird ein abstrakter Zusammenhang zwischen vier Variablen

präsentiert: $S = \frac{t^2 \cdot u}{v}$. Je nachdem welche Variablen als konstant angenommen werden (diese sind dann als Parameter aufzufassen), ergeben sich die drei Zuordnungen $S: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, t \rightarrow S(t)$ oder $S: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, u \rightarrow S(u)$ oder aber $S: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, v \rightarrow S(v)$. Schüler*innen können zwischen diesen drei Zuordnungen wählen und die Werte der Konstanten verändert, wie in Abbildung 45 zu sehen ist.

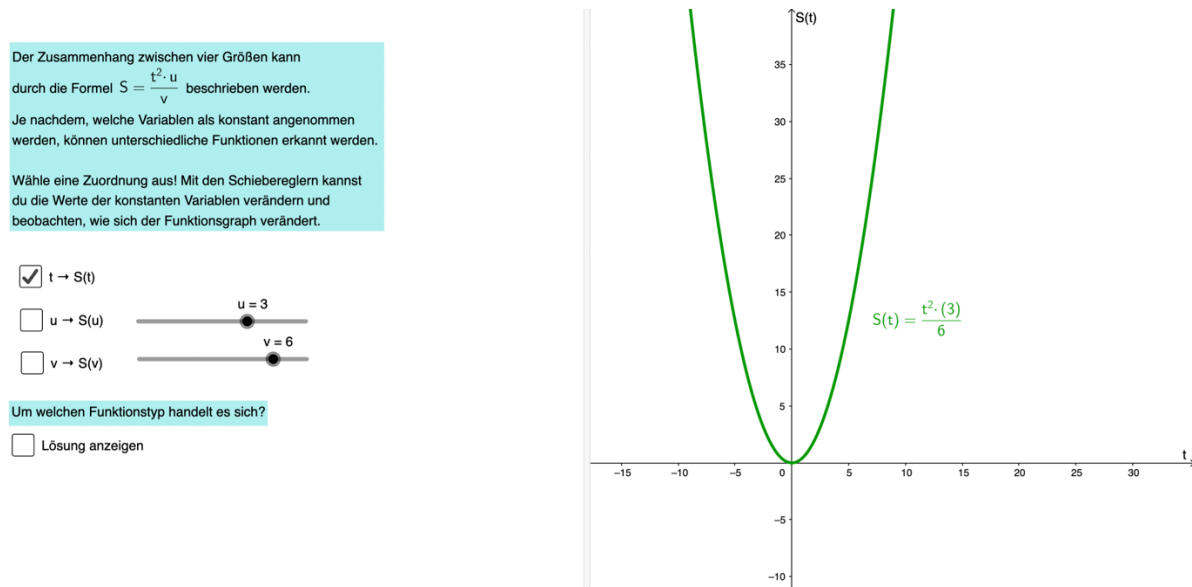


Abbildung 45: Von Formeln zu Funktionen 1

Wird eine Zuordnung ausgewählt und die Werte der Konstanten eingegeben, so können die Nutzer*innen den entsprechenden Funktionsgraphen sowie die Funktionsgleichung betrachten. Außerdem soll auch der Funktionstyp bestimmt werden (siehe Abbildung 46).

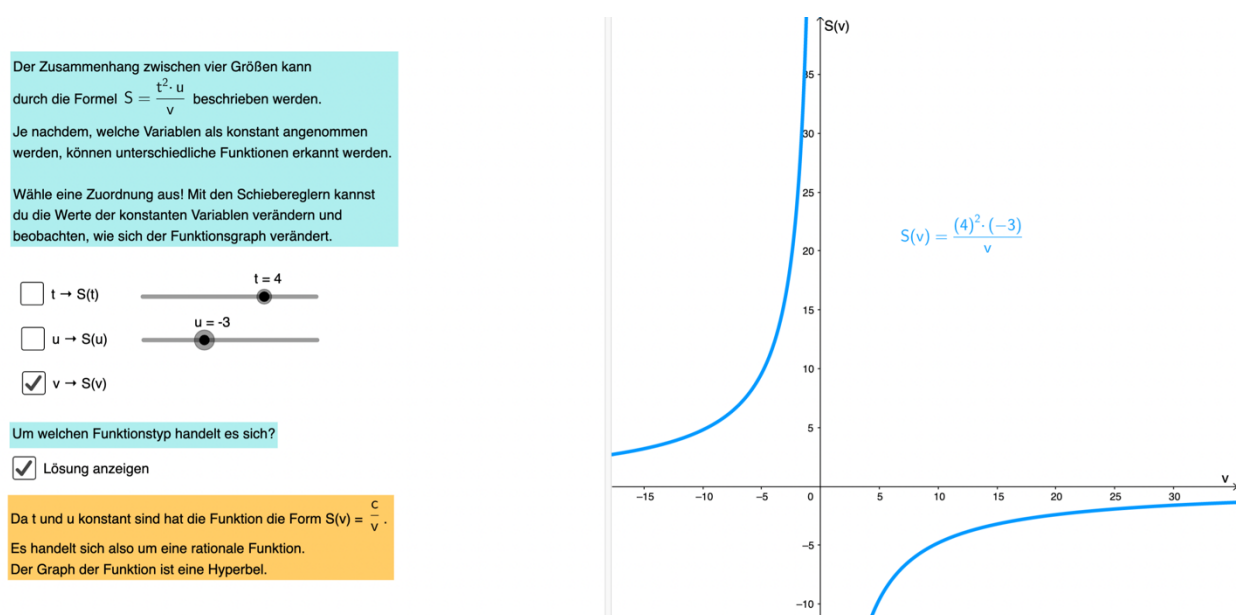


Abbildung 46: Von Formeln zu Funktionen 2

6.11.1 Kurzbeschreibung

Von Formeln zu Funktionen
https://www.geogebra.org/m/cpdh956m
Art des Applets
Entdeckungsapplet, Demonstrationssapplet
Kurzbeschreibung
Ausgehend von einer Formel können verschiedene Zuordnungsvorschriften ausgewählt und somit verschiedene Funktionen in dieser Formel erkannt werden. Die jeweils konstanten Parameter können beliebig gewählt werden. In einer zusätzlichen Aufgabe muss der Funktionstyp bestimmt werden.
Angesprochene Grundvorstellungen
Objektvorstellung, Zuordnungsvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Funktionen als eindeutige Zuordnung kennen und zwischen verschiedenen Funktionstypen unterscheiden können
Passende Schulbuchaufgaben
Buch Seite 177 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017: 177)

Tabelle 13: Kurzbeschreibung In Formeln Funktionen sehen

6.11.2 Hintergrundprogrammierungen

Damit die Konstanten frei gewählt werden können, wurden die Funktionen $F_1(x) = \frac{x^2 \cdot u}{v}$, $F_2(x) = \frac{t^2 \cdot x}{v}$ und $F_3(x) = \frac{t^2 \cdot u}{x}$ mit Schieberegler für die Parameter t, u und v verknüpft. Die drei Kontrollkästchen, mit denen die Zuordnung ausgewählt werden kann, beeinflussen über Bedingungen die Sichtbarkeit der Schieberegler, der Funktionsgleichungen sowie der Funktionsgraphen (siehe Abschnitt 3.3.4). Ist also beispielsweise das Kontrollkästchen „ $t \rightarrow S(t)$ “ ausgewählt, so sind nur die Schieberegler für u und v , aber auch nur die Funktion $F_1(x) = \frac{x^2 \cdot u}{v}$ sowie die entsprechende Funktionsgleichung für Schüler*innen sichtbar. Über zusätzliche Skripting-Befehle wurden die Kontrollkästchen so verschachtelt, dass immer nur eines ausgewählt werden kann (siehe Kapitel 3.3.4). Mit Hilfe der Skripting-Befehle `SetzeAktiveGrafikansicht(2)`, `SetzeBeschriftung(xAchse, „t“)`, `SetzeBeschriftung(yAchse, „S(t)“)` wird zusätzlich, je nach Auswahl der Zuordnungsvorschrift, auch die Beschriftung der Achsen im zweiten Grafikfenster angepasst. Ein weiteres Kontrollkästchen kann angeklickt werden, um die Lösung der Aufgabe anzuzeigen. Zusätzlich ist die Sichtbarkeit der verschiedenen Lösungstexte auch von der zu Beginn ausgewählten Funktion abhängig, da je nach Funktionstyp ein anderer Lösungstext aufscheinen muss. Der Lösungstext zur rationalen Funktion ist beispielsweise nur dann sichtbar, wenn sowohl das Kontrollkästchen „ $v \rightarrow S(v)$ “ als auch „Lösung anzeigen“ auf „wahr“ gesetzt wurden.

6.11.3 Didaktische Analyse und Einsatzmöglichkeiten

Das Applet dient primär dazu, Schüler*innen beim Ausbilden tragfähiger *Zuordnungs-* und *Objektvorstellungen* zu unterstützen (siehe Abschnitt 5.3.4). Es wird aufgezeigt, dass je nach Wahl der unabhängigen Größen eines bestimmten Zusammenhangs verschiedene Zuordnungen möglich sind. Ebenso wird durch die Funktionsgraphen gezeigt, dass die Wahl der Zuordnung den Funktionstypen, die Funktion als Objekt, beeinflusst. Diese Erkenntnis soll insbesondere beim Beantworten der Schlussfrage gewonnen werden. Ein Zusammenhang zwischen dem *Zuordnungsaspekt* und dem *Paarmengenaspekt* kann hier also festgestellt werden: wird die Art der Zuordnung verändert, so ändert sich auch die entsprechende Punktemenge.

Es handelt sich bei dem vorliegenden Applet um ein *Entdeckungsapplet*, das jedoch auch als *Demonstrationsapplet* eingesetzt werden kann. Schüler*innen können entdecken, wie aus Formeln mehrere Funktionen verschiedenen Typs entstehen können. Wichtig ist hier, dass Schüler*innen erkennen, dass eine Variable als Argument, der Rest jedoch als konstanter Wert angenommen wird und dass nach Einsetzen der Konstanten ein Funktionsterm mit nur einer unabhängigen Variablen übrigbleibt.

In Formeln kann man Funktionen erkennen, wenn man einige der vorkommenden Variablen konstant hält.

Beispiel 1: Das Volumen des nebenstehend abgebildeten Quaders hängt von der Grundkantenlänge a und der Höhe h ab. Man schreibt:

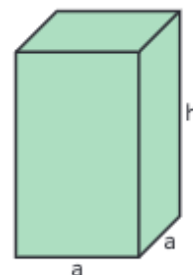
$$V(a, h) = a^2 \cdot h$$

Ist die Kantenlänge a konstant, dann hängt das Volumen nur mehr von der Höhe h ab:

$$V(h) = a^2 \cdot h \quad (a \text{ konstant})$$

Ist hingegen die Höhe h konstant, dann hängt das Volumen nur mehr von der Kantenlänge a ab:

$$V(a) = h \cdot a^2 \quad (h \text{ konstant})$$



Man kann also in der Formel $V = a^2 \cdot h$ die folgenden Funktionen sehen:

Funktion	Typ	Graph
$V(h) = a^2 \cdot h \quad (a \text{ konstant})$	$f(x) = k \cdot x$ $[k \triangleq a^2, x \triangleq h]$	
$V(a) = h \cdot a^2 \quad (h \text{ konstant})$	$f(x) = c \cdot x^2$ $[c \triangleq h, x \triangleq a]$	

Abbildung 47: In Formeln Funktionen sehen (Malle et al., 2017: 177)

Besonders gut kann das Applet zusätzlich zu der theoretischen Einführung im Schulbuch (Abbildung 47) eingesetzt werden. Die Entscheidung, die Schüler*innen die Werte der Konstanten selbst verändern zu lassen und diese nicht vorzugeben, wurde aus zwei Gründen getroffen: Erstens müssen Schüler*innen aktiv konstante Werte für die Variablen wählen und somit bewusster zwischen Argument und Parameter einer Funktion unterscheiden. Zweitens soll das Applet zusätzlichen Raum zum Entdecken bieten. Schüler*innen können ausprobieren und beobachten, wie sich der Funktionsgraph verändert, wenn die Parameter variiert werden. Die Frage nach dem Funktionstyp soll, wie bereits erwähnt, verstärkt die Objektvorstellung ansprechen. Der Lösungstext soll zusätzlich erklären, wie der Funktionstyp nicht nur an dem Graphen sondern auch an der Funktionsgleichung erkannt werden kann.

6.12 Vektoraddition und -subtraktion im $\mathbb{R}^2$

Das Applet veranschaulicht die grafische Addition als auch die Subtraktion zweier Vektoren. Wird das Applet geöffnet, so können Schüler*innen vorerst nur zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie die Instruktion, eine der beiden Schaltflächen zu betätigen, sehen, wie in Abbildung 48 ersichtlich ist. Wird die Schaltfläche „Vektoraddition“ betätigt, so kann beobachtet werden, wie der Vektor $\vec{b}$ entlang des Vektors $\vec{a}$ verschoben wird, wie in Abbildung 49 zu erkennen ist. Die Animation endet, wenn der Vektor $\vec{b}$ bis zur Spitze des Vektors $\vec{a}$ verschoben wurde, und der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ wird eingezeichnet. Auch ein Erklärungstext erscheint (siehe Abbildung 50). Ein Klick auf die Schaltfläche „Vektorsubtraktion“ startet eine Animation, die zuerst den Vektor $-\vec{b}$ anzeigt, diesen verschiebt und schließlich den Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ darstellt.

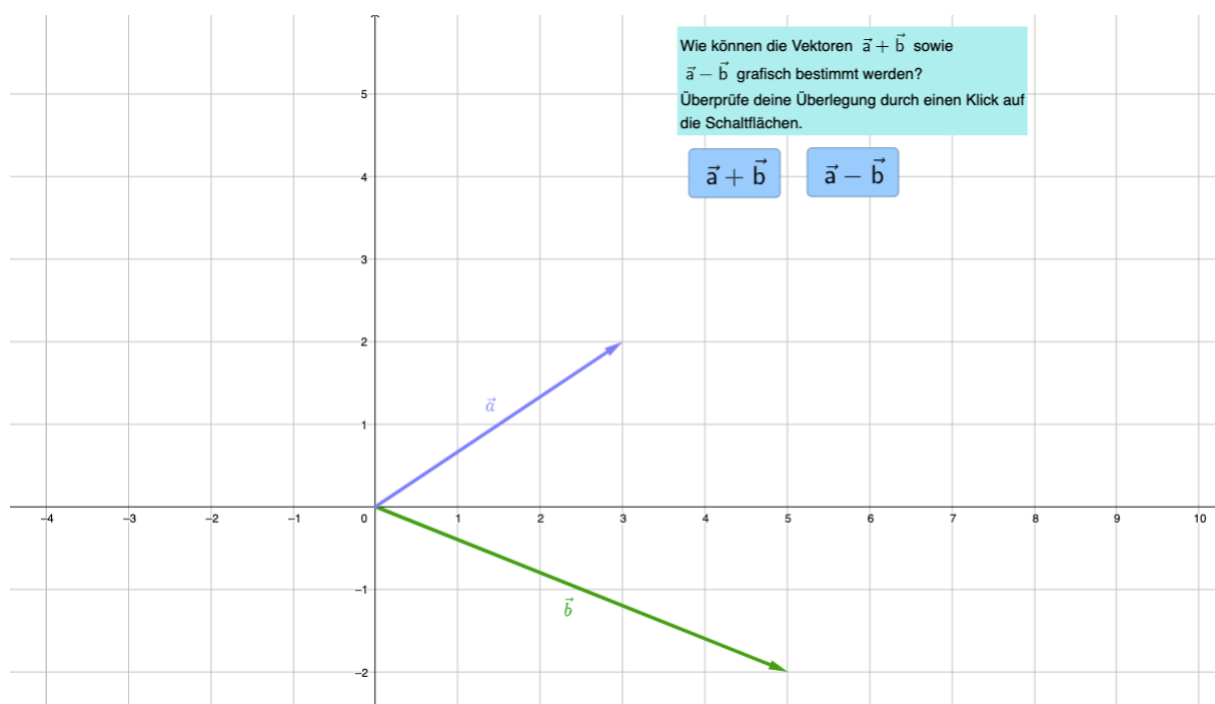


Abbildung 48: Vektoraddition und -subtraktion I

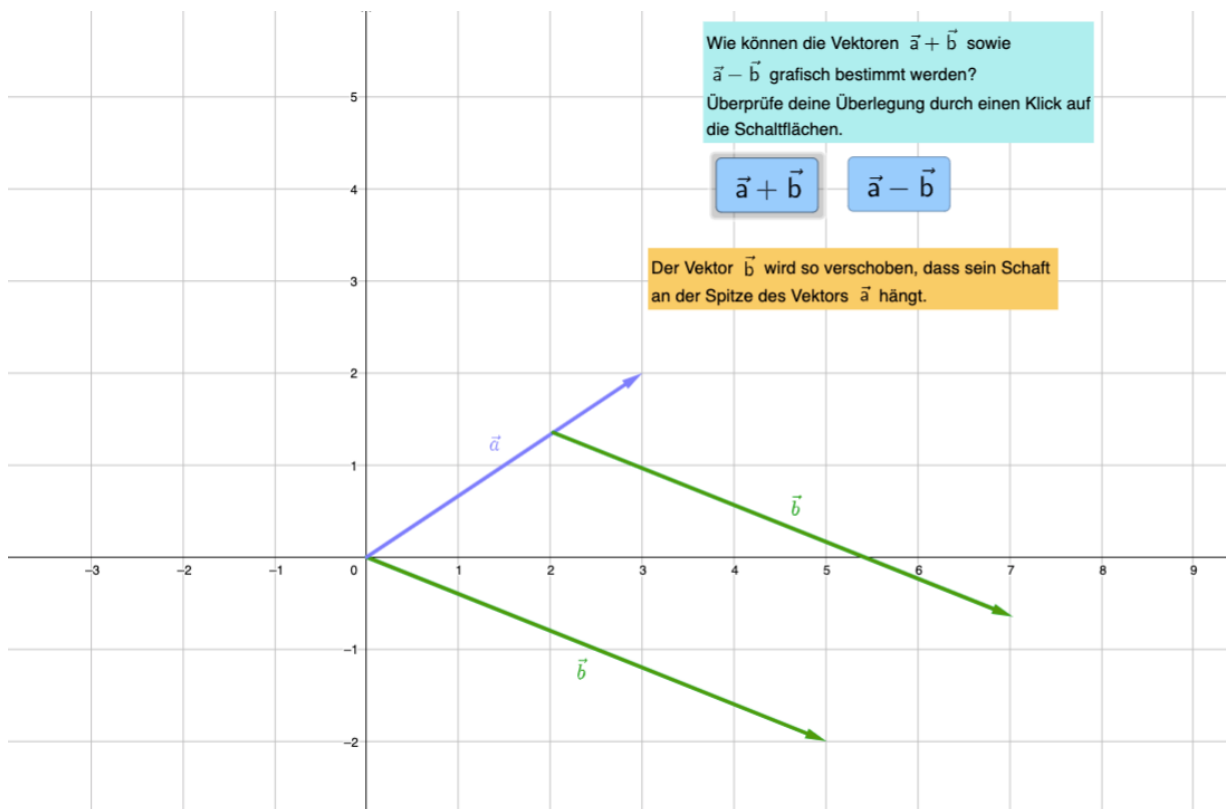


Abbildung 49: Vektoraddition und -subtraktion 2

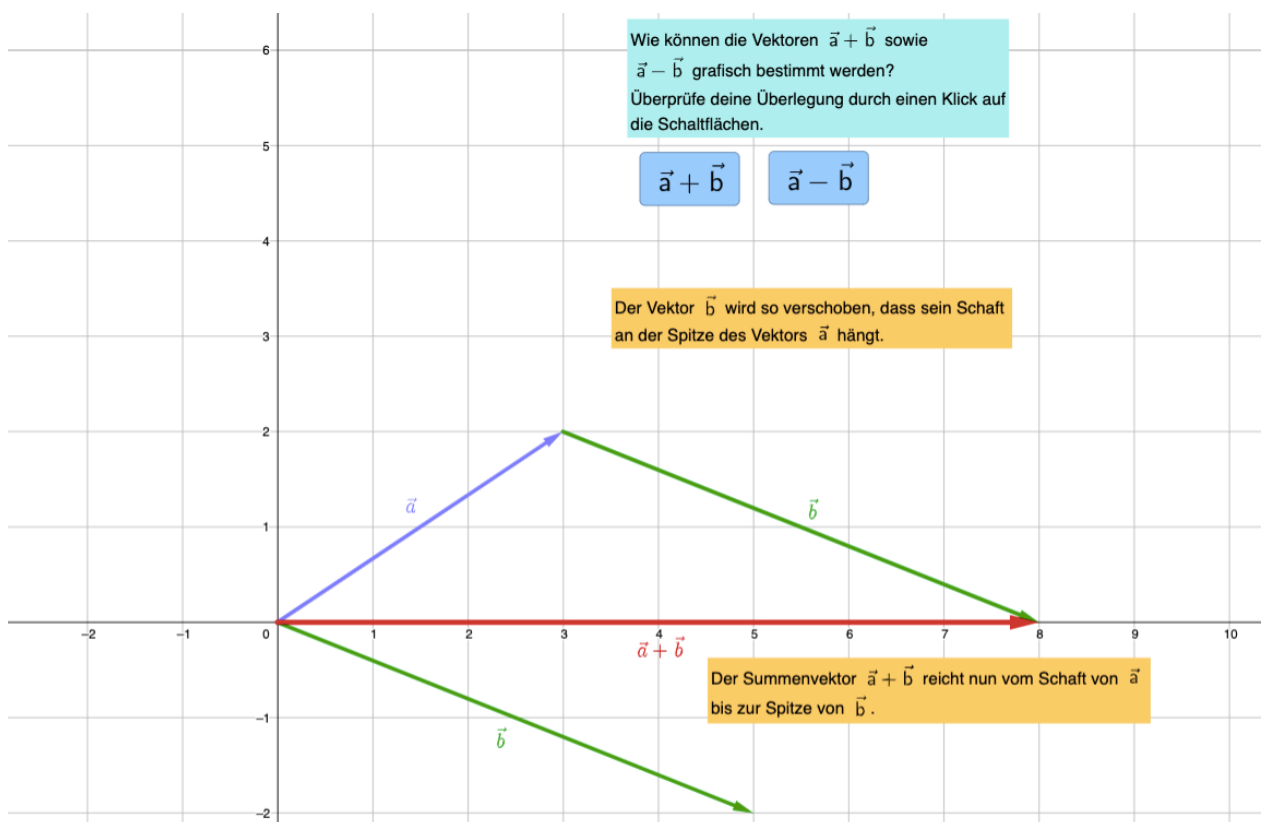


Abbildung 50: Vektoraddition und -subtraktion 3

6.12.1 Kurzbeschreibung

Vektoraddition und -subtraktion
https://www.geogebra.org/m/zwkff96y
Art des Applets
Demonstrationsapplet
Kurzbeschreibung
Sowohl die Vektoraddition als auch die -subtraktion zweier Vektoren werden geometrisch veranschaulicht.
Angesprochene Grundvorstellungen
Pfeilklassenvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Vektoren geometrisch darstellen können
Passende Schulbuchaufgaben
Ergänzend zum Erklärungstext auf Seite 218 in „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2017: 218) einsetzbar

Tabelle 14: Kurzbeschreibung Vektoraddition und -subtraktion

6.12.2 Hintergrundprogrammierungen

Zwei unsichtbare Schieberegler a (für die Vektoraddition) und b (für die Vektorsubtraktion) werden durch die Schaltflächen in Bewegung gesetzt. Die Sichtbarkeiten von Texten und Vektoren sowie die Position der Vektoren sind an die Werte dieser beiden Variablen geknüpft. Die Variable a kann Werte zwischen 0 und 10 annehmen. Für $a = 0$ liegen die beiden Vektoren $\vec{b}$ übereinander, für $a = 10$ befindet sich der Schaft des zweiten, bewegten, Vektors $\vec{b}$ an der Spitze von $\vec{a}$ und der Additionsvektor wird angezeigt. Die Variable b durchläuft Werte im Intervall $[-2; 10]$. Für $-2 < b < 0$ wird der Vektor $-\vec{b}$ nur angezeigt, jedoch noch nicht verschoben. Erst für $b > 0$ setzt sich dieser auch in Richtung $\vec{a}$ in Bewegung. Auch die Erklärungstexte werden an den passenden Stellen mit Hilfe von Sichtbarkeitsbedingungen eingeblendet. Der Text „Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ reicht nun vom Schaft von $\vec{a}$ bis zur Spitze von $\vec{b}$ “ wird also beispielsweise nur eingeblendet, wenn $a = 10$ gilt. Wird die Schaltfläche „Vektoraddition“ betätigt, so wird folgendes Skript ausgeführt:

SetzeWert[a,0]

StartAnimation(b,false)

SetzeWert[b,-2]

StartAnimation(a,true)

Der Befehl *SetzeWert[a,0]* veranlasst zuerst, dass der Schieberegler zurückgesetzt wird, die Animation also von Beginn an abläuft. *StartAnimation(b,false)* und *SetzeWert[b,-2]* stoppt die eventuell gerade ablaufende Animation der Vektorsubtraktion und setzt diese in Anfangsposition zurück. Mit dem letzten Befehl wird die Animation der Addition gestartet.

Analog dazu wurde auch die zweite Schaltfläche, „Vektorsubtraktion“, mit einem Skript versehen:

SetzeWert[b,-2]

StartAnimation(a,false)

SetzeWert[a,0]

StartAnimation(b,true)

Auch hier werden vorerst alle eventuell ablaufenden Animationen zurückgesetzt, bevor mit dem Befehl *StartAnimation(b,true)* die Animation zur grafischen Darstellung der Vektorsubtraktion gestartet wird.

6.12.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Das beschriebene Applet soll beim Ausbilden einer tragfähigen *Pfeilklassenvorstellung* (siehe Abschnitt 5.5.4) unterstützen. Um Rechenoperationen mit Vektoren grafisch deuten und durchführen zu können, ist es essentiell, dass ein Vektor als Menge unendlich vieler Pfeile mit gleicher Länge und Orientierung aufgefasst wird. Schüler*innen müssen begreifen, dass es sich auch nach dem Verschieben eines Vektors noch immer um denselben Vektor handelt, um verständnisvoll mit Vektoren in grafischer Darstellung arbeiten zu können. Genau diese Verschiebung von Vektoren im Koordinatensystem soll durch die programmierten Animationen veranschaulicht werden.

Es handelt sich bei dem Applet um ein *Demonstrationsapplet*, das zeigen soll, wie die Summe beider Vektoren beziehungsweise deren Differenz grafisch bestimmt werden kann. Natürlich kann auch an der Tafel eine Vektoraddition oder -subtraktion grafisch dargestellt werden, denn auch mit Kreide und Geodreieck (oder Bleistift und Geodreieck im Heft) kann selbstverständlich eine Verschiebung (z. B. eines Dreiecks) vorgenommen und beispielsweise der Summenvektor eingezeichnet werden. Solche Konstruktionen sind jedoch leider später nicht mehr gut nachvollziehbar. Sehr oft kommt es vor, dass Schüler*innen so beschäftigt damit sind, richtig von der Tafel abzuschreiben und schnellstmöglich alles ins eigene Heft zu kopieren, sodass nicht viel Zeit zum Nachdenken und Verstehen bleibt. Wird die Konstruktion dann später betrachtet, besteht die Gefahr, dass zu diesem späteren Zeitpunkt nicht mehr klar ist, welche Ausgangssituation gegeben war und welche Schritte vorgenommen wurden. Auch Abbildungen in Schulbüchern (Abbildung 51), präsentieren oft nur den bereits eingezeichneten Summenvektor, anstatt auf die unter Umständen notwendige Verschiebung von Vektoren weiter einzugehen.

Werden zwei Vektoren durch aneinandergehängte Pfeile dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Pfeil vom Anfangspunkt des ersten Pfeiles zum Endpunkt des zweiten Pfeiles.

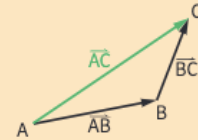


Abbildung 51: Vektoraddition (Malle et al., 2017: 218)

In einem Applet dagegen kann die Animation beliebig oft von vorne abgespielt werden. Zusätzliche Erklärungstexte sollen dabei unterstützen, den Vorgang zu verstehen.

Das Applet sollte erst dann im Unterricht verwendet werden, wenn Schüler*innen bereits mit der geometrischen Darstellung von Vektoren vertraut sind. Das Applet kann entweder von der Lehrperson bedient und die Animation im Plenum beobachtet und besprochen werden, oder aber auch von den Schüler*innen selbstständig, beispielsweise nach dem Flipped-Classroom-Konzept, genutzt werden. Durch die Instruktions- und Erklärungstexte ist eine Anwendung ohne zusätzliche Unterstützung durch die Lehrperson durchaus möglich.

6.13 Parameterdarstellung einer Geraden in der Ebene

Das in Abbildung 52 dargestellte Applet soll Schüler*innen dabei helfen, die Parameterdarstellung einer Geradengleichung aufstellen zu können und diese auch zu verstehen. Über zwei Eingabefelder können die Koordinaten eines Punktes P auf der Geraden, sowie jene des Richtungsvektors eingegeben werden. Über einen Schieberegler t kann der Punkt X entlang dieser Geraden verschoben werden. Ein dynamischer Text zeigt an, wie sich die Koordinaten von X in Abhängigkeit von t verändern. Es folgt eine Frage nach der Parameterdarstellung der Geraden g . Diese Geradengleichung kann dann über ein Kontrollkästchen angezeigt werden.

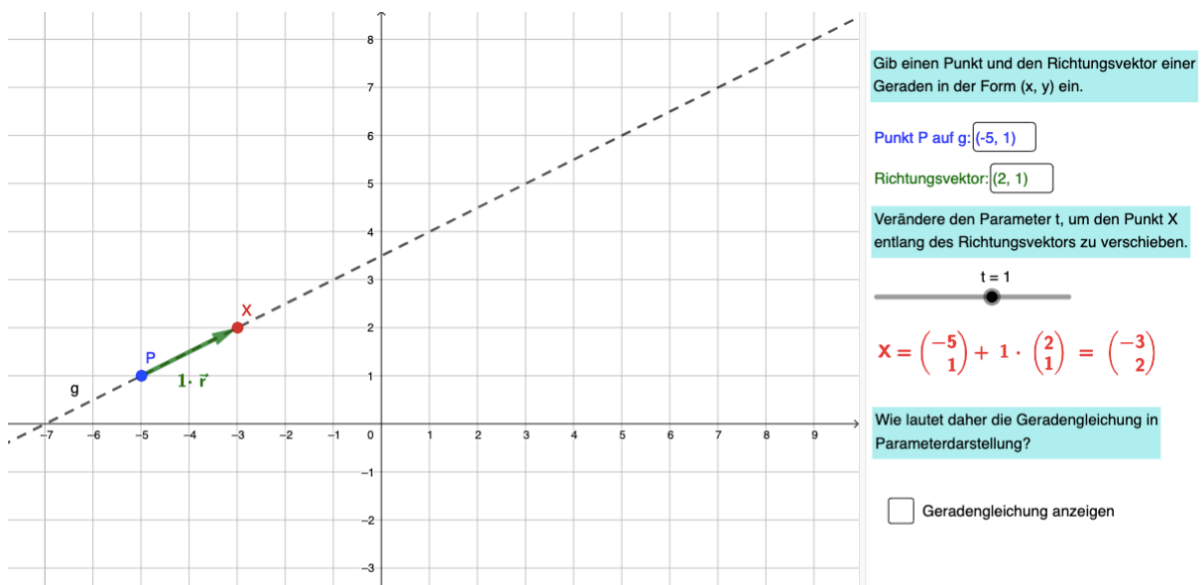


Abbildung 52: Parameterdarstellung einer Geraden

6.13.1 Kurzbeschreibung

Parameterdarstellung einer Geraden in der Ebene
https://www.geogebra.org/m/vjrzcqz
Art des Applets
Entdeckungsapplet, Demonstrationsapplet, Werkzeugapplet
Kurzbeschreibung
Schüler*innen können beobachten, wie eine Gerade über einen Punkt und einen Richtungsvektor mit Hilfe der Parameterdarstellung definiert werden kann.
Angesprochene Grundvorstellungen
Verschiebungsvorstellung, Punktvorstellung, Einsetzungsvorstellung, Definitionsvorstellung, Zuordnungsvorstellung, Kovariationsvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Vektoren und ihre Rechenoperationen geometrisch darstellen können
Passende Schulbuchaufgaben
Ergänzend zum Erklärungstext auf Seite 239 in „Mathematik verstehen 5“ sowie beim Bearbeiten der Aufgaben 12.02 – 12.04 (Malle et al., 2017: 239) einsetzbar

Tabelle 15: Kurzbeschreibung Parameterdarstellung einer Geraden in der Ebene

6.13.2 Hintergrundprogrammierungen

Die Eingabefelder wurden beim Erstellen mit einem zuvor eingefügten Punkt P sowie einem Vektor r verknüpft. Mit einem Schieberegler, der Werte von -5 bis 5 mit einer Schrittweite von 0,5 annehmen kann, kann ein ebenfalls auf der Geraden g befindlicher Punkt X , der über $X = P + t \cdot \vec{r}$ definiert wurde, um ein Vielfaches des Richtungsvektors entlang der Geraden verschoben werden. Neben dem Richtungsvektor wurde ein Text eingefügt, der das jeweilige Vielfache des Richtungsvektors anzeigt (z. B. für $t = 3$ wird $3 \cdot \vec{r}$ angezeigt). In einem dynamischen Text unter dem Schieberegler kann beobachtet werden, wie sich die Koordinaten des Punktes X verändern, aber auch, wie diese in Abhängigkeit von t berechnet werden. Um das Applet übersichtlich zu gestalten, wurden die Farben der Eingabefelder beziehungsweise der Texte an die entsprechenden Objekte in der grafischen Darstellung angepasst. Wird das Kontrollkästchen „Geradengleichung anzeigen“ angeklickt, so erscheint die Parameterdarstellung der Geraden, ein Textelement, das mit der entsprechenden Sichtbarkeitsbedingung versehen wurde (siehe Abschnitt 3.3.4).

6.13.3 Didaktische Analyse und Einsatzmöglichkeiten

Das Applet kann sowohl dabei unterstützen, tragfähige Grundvorstellungen zu Vektoren, als auch zu Variablen und Gleichungen zu entwickeln. Im Bereich der Vektorrechnung wird primär die *Verschiebungsvorstellung* (siehe Abschnitt 5.5.4) ausgebildet, da beobachtet werden kann, wie der Richtungsvektor beziehungsweise ein Vielfaches davon den Punkt X verschiebt. Zusätzlich wird durch die angeführte Berechnung von X auch die Punkt-Vektor-Addition thematisiert und die *Punktvorstellung* damit angesprochen. Es soll hier verdeutlicht werden,

dass die Summe aus Punkt und Pfeil wieder ein, um diesen Pfeil verschobener, Punkt ist. Mit der Frage nach einer Parameterdarstellung der Geraden, entlang der sich X bewegt, wird außerdem das Ausbilden der *Einsetzungsvorstellung* bei Variablen, der *Definitionsvorstellung* bei Gleichungen (wie in Abschnitt 5.2.4 beschrieben) sowie der *Zuordnungs-* als auch der *Kovariationsvorstellung* bei Funktionen (siehe Abschnitt 5.3.4) begünstigt: Der Parameter t muss als Variable im Einsetzungsaspekt aufgefasst werden. Jeder Punkt X der Geraden wird dann durch den Ausdruck $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt. Jedem Wert t wird also ein entsprechender Punkt X zugeordnet, die Koordinaten von X verändern sich also mit der Veränderung von t . Die Ausbildung all dieser Grundvorstellungen wird insbesondere durch die dynamische, grafische Darstellung dieser Abhängigkeit unterstützt, da sich Schüler*innen die Idee der Parameterdarstellung als Verschiebung eines Punktes um einen Vektor, die Idee des „laufenden Punktes“ (siehe Abbildung 53), nicht mehr nur vorstellen, sondern sogar beobachten können. Die schrittweise Berechnung von X beziehungsweise das Nachvollziehen dieser Berechnung, kann weiterführend auch bei Aufgaben helfen, bei denen die Lagebeziehung zwischen Punkt und Gerade überprüft werden muss.

Das Applet kann sowohl in Einführungsstunden als *Entdeckungsapplet*, als auch als *Demonstrationsapplet* verwendet werden. Es könnte weiterführend auch als *Werkzeugapplet* dienen, das nach Angabe von Punkt und Richtungsvektor automatisch die Geradengleichung anzeigt und grafisch darstellt. Haben Schüler*innen jedoch mit Hilfe des Applets die Parameterdarstellung verstanden, so benötigen sie zukünftig vermutlich kein Werkzeug dieser Art zum Aufstellen dieser. Wird das Applet vor der Begriffsdefinition „Parameterdarstellung“ im Unterricht eingesetzt, so könnte die Fragestellung „Wie lautet daher die Geradengleichung in Parameterdarstellung?“ auch durch die Frage „Wie kann jeder Punkt X der Geraden in Abhängigkeit von t definiert werden?“ ersetzt werden. Im Nachhinein könnte diese Gleichung dann als *Parameterdarstellung einer Geraden* definiert werden. Wichtig ist jedoch, dass Vorwissen zum Darstellen von und Rechnen mit Vektoren vorhanden ist.

Satz

Ist g eine Gerade der Ebene, P ein Punkt auf g und $\vec{g}$ ein Richtungsvektor von g , dann gilt für alle $X \in \mathbb{R}^2$:

$$X \in g \Leftrightarrow X = P + t \cdot \vec{g} \text{ für ein } t \in \mathbb{R}$$

**Definition**

Die Vektorgleichung $X = P + t \cdot \vec{g}$ nennt man eine **Parameterdarstellung der Geraden g** mit dem **Parameter t** [Betonung: Parámeter].

Merke

Jedem Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ entspricht genau ein Punkt auf der Geraden g .
Umgekehrt entspricht jedem Punkt auf der Geraden g genau ein Parameterwert $t \in \mathbb{R}$.

BEACHT: P ist ein fester Punkt auf der Geraden und X ein Punkt auf der Geraden, dessen Lage vom Parameterwert t abhängt. Man bezeichnet X auch als „laufenden Punkt“ der Geraden.
Wenn t ganz $\mathbb{R}$ durchläuft, durchläuft X die ganze Gerade.

Eine Gerade in der Ebene kann durch folgende Punktmenge beschrieben werden:

$$\text{Gerade in } \mathbb{R}^2: g = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = P + t \cdot \vec{g} \wedge t \in \mathbb{R}\}$$

Abbildung 53: Schulbuchtext Parameterdarstellung (Malle et al., 2017: 239)

6.14 Darstellungswechsel bei Geradengleichungen in der Ebene

Dieses Applet leitet Schüler*innen schrittweise durch den Darstellungswechsel von entweder einer Geradengleichung in Parameterdarstellung in eine allgemeine Geradengleichung, wie in Abbildung 54 zu sehen ist, oder von einer allgemeinen Geradengleichung in eine Parameterdarstellung, wie Abbildung 55 veranschaulicht. Beim Wechsel von der Parameterdarstellung zur allgemeinen Geradengleichung muss zuerst die Geradengleichung in Parameterform angegeben werden. Anschließend muss ein Normalvektor bestimmt und in die Formel $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2$ eingesetzt werden, um die Geradengleichung in der Form $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = c$ angeben zu können.

Beim Wechsel von der allgemeinen Geradengleichung zur Parameterdarstellung muss die Gleichung vorerst in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ angegeben und anschließend ein Normal- und ein Richtungsvektor bestimmt werden, bevor dann ein beliebiger, auf der Geraden liegender Punkt berechnet werden soll. Mit diesem Punkt und einem zuvor aufgestellten Richtungsvektor soll dann eine Parameterdarstellung der Geraden angegeben werden.

Wähle aus, welchen Darstellungswechsel du durchführen möchtest:

- ☒ Parameterdarstellung ► allgemeine Geradengleichung
☐ allgemeine Geradengleichung ► Parameterdarstellung

Gib eine Geradengleichung in Parameterdarstellung ein und drücke auf Enter:

z.B. $X = (0,0) + t \cdot (1,0)$ für eine Gerade mit Punkt $P = (0 \mid 0)$ und Richtungsvektor $(1 \mid 0)$

g: $X = (1, 3) + t (1, -2)$

Gib einen Normalvektor dieser Geraden an und drücke auf die Enter-Taste:

n = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gib die Gerade g nun mit Hilfe des Normalvektors und des Punktes P in der Form $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2$ an und drücke auf Enter:

g: $2x + y = 5$ Fertig!

Abbildung 54: Darstellungswechsel von Geradengleichungen 1

Wähle aus, welchen Darstellungswechsel du durchführen möchtest:

- ☐ Parameterdarstellung ► allgemeine Geradengleichung
☒ allgemeine Geradengleichung ► Parameterdarstellung

Ergänze die Lücken, um eine Geradengleichung in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ anzugeben.

g: $2 \cdot x + 3 \cdot y = 5$

Lies einen Normalvektor aus der Gleichung ab und gib diesen an. Gib dann auch einen Richtungsvektor der Geraden an und drücke die Enter-Taste.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Setze für x oder y eine beliebige Zahl ein und berechne die andere Variable, um einen Punkt P auf g zu finden. Gib P in der Form (p_1, p_2) an.

P = $(1, 1)$

Gib eine Geradengleichung von g in Parameterdarstellung in der Form $X = (p_1, p_2) + t \cdot (r_1, r_2)$ an und drücke Enter.

g: $X = (1, 1) + t (-3, 2)$ Fertig!

Abbildung 55: Darstellungswechsel von Geradengleichungen 2

6.14.1 Kurzbeschreibung

Darstellungswechsel bei Geradengleichungen in der Ebene
https://www.geogebra.org/m/ks3nzfpn
Art des Applets
Werkzeugapplet
Kurzbeschreibung
Schüler*innen können Geraden in Parameterdarstellung oder als Gleichung der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ angeben und werden Schritt für Schritt durch den Darstellungswechsel geleitet.
Angesprochene Grundvorstellungen
Pfeilklassenvorstellung, Punktvorstellung, Einsetzungsvorstellung, Gegenstandsvorstellung, Erreichungsvorstellung
Benötigtes Vorwissen
Geradengleichungen in Parameter- sowie in Normalvektordarstellung angeben können
Passende Schulbuchaufgaben
Aufgaben 12.54 – 12.56 (Malle et al., 2017: 249)

Tabelle 16: Kurzbeschreibung Darstellungswechsel bei Geradengleichungen in der Ebene

6.14.2 Hintergrundprogrammierungen

Welche Art des Darstellungswechsels vorgenommen werden soll, kann über ein Kontrollkästchen ausgewählt werden. Entsprechend öffnen sich dann mit Sichtbarkeitsbedingungen (siehe Abschnitt 3.3.4) versehene Eingabefelder, in die eine Geradengleichung in Parameterdarstellung oder in allgemeiner Form eingegeben werden muss.

Im Falle einer Umwandlung der Parameterdarstellung in die allgemeine Geradengleichung muss vorerst ein Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ der Geraden bestimmt werden. Dieser muss dann, gemeinsam mit einem Punkt $P = (p_1 | p_2)$ auf der Geraden g , in die Gleichung $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2$ eingesetzt werden. Die Gerade muss abschließend in der Form $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y = c$ angegeben werden. Die letzte Instruktion sowie das Eingabefeld für die Gleichung in allgemeiner Form werden erst sichtbar, wenn der Normalvektor n richtig eingegeben wird. Da das erste Eingabefeld mit einer (unsichtbaren) Geraden g_1 verknüpft ist, kann *GeoGebra* im Hintergrund das Skalarprodukt s eines Vektors auf g mit dem eingegebenen Normalvektor n bilden. Die Sichtbarkeitsbedingung der nächsten Elemente ist dann mit $s = 0$ festgelegt worden. Das letzte Eingabefeld ist mit einer zweiten Gerade g_2 verknüpft. Nach betätigen der Enter-Taste wird überprüft, ob die beiden Geraden zwei gemeinsame Punkte besitzen und somit ident sind. Über die Sichtbarkeitsbedingung $g_1(0) = g_2(0) \wedge g_1(4) = g_2(4)$ wird bei richtiger Darstellung dann der Text „Fertig!“ angezeigt. Ist dem nicht so, erscheint der Text „Leider falsch, probiere es noch einmal!“.

Eine ähnliche Vorgehensweise wurde auch für den Wechsel einer Geradengleichung in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ in eine Gleichung in Parameterdarstellung gewählt. Zuerst müssen Schüler*innen die Koeffizienten a , b und c der Gleichung, die in Parameterdarstellung angegeben werden soll, in Eingabefelder einfügen. Sie definieren damit eine Gerade g_1 . Anschließend muss ein Normalvektor aus dieser Gleichung herausgelesen und ein Richtungsvektor der Geraden angegeben werden. Das Programm prüft mit Hilfe des Skalarprodukts, ob die Vektoren richtig bestimmt wurden. Stimmen diese Angaben, so wird der nächste Schritt sichtbar. Die Sichtbarkeitsbedingung $y(P) = g_1(x(P))$ überprüft, ob P auf der angegebenen Geraden g_1 liegt und zeigt gegebenenfalls das Eingabefeld für die Gleichung in Parameterdarstellung an. Stimmt die dort eingegebene Gerade mit jener überein, die über die Koeffizienten zu Beginn definiert wurde, so erscheint die Rückmeldung „Fertig!“, andernfalls wird zum erneuten Versuch aufgefordert.

6.14.3 Didaktische und methodische Überlegungen

Durch die Nutzung dieses Applets werden keine in Abschnitt 5.5.4 beschriebenen Grundvorstellungen zu Vektoren oder zu Gleichungen (beschrieben in Abschnitt 5.2.4) ausgebildet. Dafür kann beim Wechsel von der Parameterdarstellung in die allgemeine Gleichungsdarstellung die *Pfeilklassen-* als auch die *Punktvorstellung* gefestigt werden. Bei der anderen Richtung des Darstellungswechsels wird neben der Punkt- und der Pfeilklassenvorstellung beim Finden eines Punktes auf der Geraden auch die *Einsetzungs-* sowie die *Gegenstandsvorstellung* zu Variablen, aber auch die *Erreichungsvorstellung* zu Gleichungen gefestigt: Wird ein beliebiger Wert anstelle von x eingesetzt, so wird y zur Variable im Gegenstandsaspekt, deren Wert berechnet werden kann, um Gleichheit zu erreichen.

Das Applet dient also nicht zum Ausbilden einer oder mehrerer Grundvorstellungen, kann diese jedoch vertiefen. Zusätzlich soll ein anderer Verwendungszweck von Applets aufgezeigt werden: *GeoGebra* kann Darstellungswechsel sehr einfach durchführen. Wird eine Gerade ausgewählt und werden die Objekt-Einstellungen geöffnet, so kann im Reiter „Algebra“ ausgewählt werden, in welcher Darstellung die Gerade im Algebra-Fenster aufscheinen soll. Erfahrungsgemäß verbreitet sich das Wissen über diese Möglichkeit schnell in einer Schulklasse und der Darstellungswechsel erfolgt per Mausklick, ohne auch nur im Geringsten darüber nachzudenken, was eigentlich dahintersteckt. Applets wie dieses können einer solchen Auslagerung entgegenwirken. Stellt man Schüler*innen ein solches *Werkzeugapplet* zur Verfügung, um Aufgaben, wie die in Abbildung 56 dargestellte, oder

ähnliche, zu lösen, so werden sie dieses vermutlich auch einsetzen und sich nicht nach weiteren, arbeitserleichternden Möglichkeiten umschaun.

12.55 Gib eine Gleichung der folgenden Geraden an!

a) $X = (1|2) + t \cdot (-5|1)$

c) $X = (2|0) + t \cdot (0|1)$

e) $X = t \cdot (1|1)$

b) $X = (8|8) + t \cdot (8|-1)$

d) $X = (-6|3) + t \cdot (1|1)$

f) $X = t \cdot (1|-1)$

12.56 Gib eine Parameterdarstellung der folgenden Geraden an!

a) $2x - 3y = 4$

d) $-2x + y = -1$

g) $x + y = 0$

j) $2x = 5y - 3$

b) $x + 4y = 2$

e) $x = 2$

h) $y = 0$

k) $-x - y = 6$

c) $x - 2y = 4$

f) $2x + 3y = 5$

i) $-x + y = 3$

l) $9x + 2y = 0$

Abbildung 56: Schulbuchaufgabe Geradengleichungen (Malle et al., 2017: 249)

Im Gegensatz zum Darstellungswechsel über die Algebra-Einstellungen wird im Applet auch verlangt, über die einzelnen Schritte nachzudenken, was der optimalen Nutzung eines Werkzeugapplets entspricht (siehe Abschnitt 4.4.).

Das Applet kann im Unterricht eingesetzt werden, sobald beide Darstellungsformen von Geradengleichungen bekannt sind. Eventuell könnte vorerst auch wiederholt werden, wie ein beliebiger Punkt auf einer Geraden gefunden und ein Normalvektor zu einer Geraden aufgestellt werden kann, da diese Schritte im Applet nicht sehr ausführlich erklärt werden. Außerdem ist die Nutzung dieses Werkzeugs nur sinnvoll, wenn eine konkrete Aufgabenstellung vorliegt. In „Mathematik verstehen 5“ sind viele Aufgaben angeführt, die mit Hilfe dieses Applets gelöst werden können (vgl. Malle et al., 2017: 249).

6.15 Lineares Gleichungssystem in zwei Variablen mit Parametern

Mit diesem Applet können Schüler*innen üben, die Parameter eines Gleichungssystems zu bestimmen, wenn bekannt ist, ob dieses eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben soll. Zwei zufällige Gleichungen werden angezeigt, wobei die Werte der Parameter a und c der zweiten Gleichung nicht angegeben sind, wie in Abbildung 57 ersichtlich ist. Diese Parameter sollen bestimmt werden. Zur Kontrolle kann die grafische Darstellung der Gleichungen eingeblendet und die Lösung auch überprüft werden.

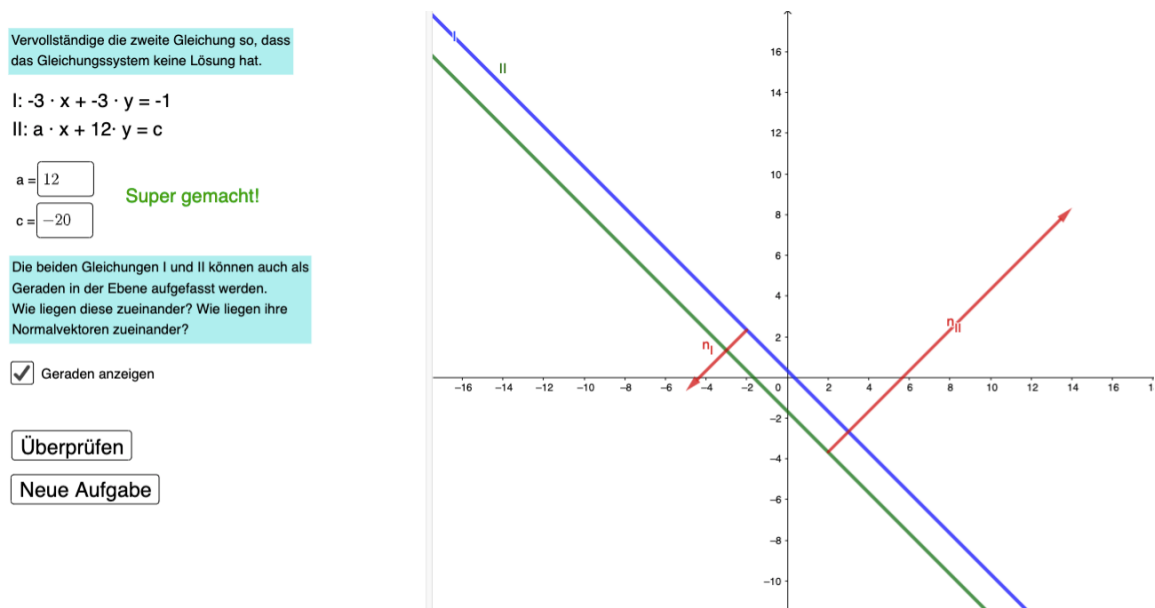


Abbildung 57: Gleichungssystem mit Parametern

6.15.1 Kurzbeschreibung

Lineares Gleichungssystem in zwei Variablen mit Parametern

<https://www.geogebra.org/m/zy8tvztz>

Art des Applets

Übungsapplet, Entdeckungsapplet

Kurzbeschreibung

Parameter eines Gleichungssystems sollen so ergänzt werden, dass dieses entweder keine, genau einer oder unendlich viele Lösungen hat. Die den Gleichungen entsprechenden Geraden und ihre Normalvektoren können angezeigt werden.

Angesprochene Grundvorstellungen

Einsetzungsvorstellung, Definitionsvorstellung

Benötigtes Vorwissen

Geradengleichungen in allgemeiner Form angeben, damit arbeiten und lineare Gleichungen in zwei Variablen als Geraden auffassen können

Passende Schulbuchaufgaben

Aufgaben 12.70 – 12.74 (Malle et al., 2017: 252)

Tabelle 17: Kurzbeschreibung Lineares Gleichungssystem in zwei Variablen mit Parametern

6.15.2 Hintergrundprogrammierungen

Wird das Applet geöffnet, so wird über eine zufällige Auswahl der Koeffizienten die erste Gleichung I: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$ von *GeoGebra* erstellt. Ein wiederum zufälliger Parameter k wird von *GeoGebra* ausgewählt (mit $k \in \{-4; -3; -2; -1; 0,5; 2; 3; 4; 5\}$). Das Produkt $k \cdot b_1$ bildet dann den Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung. Mit dem Befehl $l = \text{ZufälligesElement}(\{0,1,2\})$ wird ebenso zufällig bestimmt, ob das Gleichungssystem keine, eine oder zwei und somit unendlich viele Lösungen haben soll. Je nach Auswahl wird eine andere Angabe angezeigt (für $l = 0$ z. B. erscheint also der Text „Vervollständige die zweite Gleichung so, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.“). Die Parameter a und c der

Gleichung II: $a \cdot x + b \cdot y = c$ müssen dann entsprechend bestimmt werden. Der Wert von b , also das k -te Vielfache von b_1 , wird angezeigt.

Die beiden Gleichungen können zusätzlich auch als Geraden mit ihren Normalvektoren im zweiten Grafikenster dargestellt werden. Da die Geraden und ihre Normalvektoren mit Hilfe von Zufallszahlen beziehungsweise über die Eingabe der Schüler*innen erzeugt werden, ist es leider nicht möglich, ihre Beschriftungen so zu wählen, dass diese für alle möglichen Werte immer gut sichtbar sind, wie in Abbildung 57 beim zweiten Normalvektor erkennbar ist. Auch die Beschriftungen der Geraden sind leider nicht immer an der richtigen Stelle. Da die Geraden jedoch verschiedenfärbig angezeigt werden und die entsprechenden Beschriftungen eben diese Färbung aufweisen, sollte auch bei Fehlplatzierung für Schüler*innen ersichtlich sein, welche Gerade welcher Gleichung entspricht.

Die Schaltfläche „Überprüfe“ kontrolliert über folgende Skripting-Befehle die Lagebeziehung dieser beiden Geraden ($gl1$ und $gl2$) und ob diese mit der gesuchten Lösungsmenge übereinstimmt und überprüft somit auch die Eingabe der Schüler*innen:

```
Wenn[ $gl1 \perp gl2 \wedge l \neq 2$ , SetzeWert[f,1]]
Wenn[ $gl1 \parallel gl2 \wedge gl1 \neq gl2 \wedge l \neq 0$ , SetzeWert[f,1]]
Wenn[ $\neg(gl1 \parallel gl2) \wedge l \neq 1$ , SetzeWert[f,1]]
SetzeWert[j,1]
```

Ist der Wahrheitswert f gleich 1, so erscheint eine positive Rückmeldung, ist dem nicht so, erscheint die Aufforderung „Leider falsch, probiere es noch einmal!“ Der Text „Super gemacht!“ erscheint also genau dann, wenn die Geraden ident sind und der Angabetext nach unendlich vielen Lösungen fragt, die Geraden parallel sind und nach einem Gleichungssystem ohne Lösung gesucht wurde oder aber die Geraden nicht parallel sind und die Parameter so bestimmt werden mussten, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung hat. Die Sichtbarkeit beider Rückmeldungen ist zusätzlich noch von dem Wahrheitswert j abhängig, der erst bei Betätigung der Schaltfläche auf „wahr“ gesetzt wird. Dies soll verhindern, dass bereits beim Öffnen des Applets eine Rückmeldung erscheint.

6.15.3 Didaktische Analyse und Einsatzmöglichkeiten

Auch wenn durch den Einsatz dieses Applets keine Grundvorstellungen ausgebildet werden können, eignet es sich dennoch dazu, die *Einsetzungsvorstellung* zu Variablen (die Gerade ändert ihre Lage, wenn verschiedene Parameter eingesetzt werden) als auch die *Definitionsvorstellung* zu Gleichungen (die Gleichungen in zwei Variablen definieren Geraden in der Ebene) zu festigen, Grundvorstellungen, die in Abschnitt 5.2.4 beschrieben wurden. Besonders hilfreich ist der Einsatz dieses Applets jedoch, um die in „Mathematik verstehen

5“ angeführten Lernziele „Lineare Gleichungen in zwei Variablen grafisch interpretieren können; wissen, dass die Lösungsmenge einer solchen Gleichung als Gerade in $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden kann“ (Malle et al., 2017: 186) sowie „Lösungsfälle für lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Normalvektoren ermitteln können“ (Malle et al., 2017: 238) zu erreichen. Die zusätzliche grafische Darstellung, die nicht nur die beiden Geraden, sondern auch zugehörige Normalvektoren anzeigt, unterstützt bei der Erreichung dieser Lernziele.

Je nachdem, wie und wann das Applet im Unterricht eingesetzt wird und wie es von den Schüler*innen genutzt wird, handelt es sich entweder um ein *Übungsapplet* oder auch um ein *Entdeckungsapplet*. Es wäre möglich, nach der Einführung der Darstellung einer Geraden als allgemeine Gleichung, das Applet als Entdeckungsapplet zu verwenden. Bereits aus der 4. Klasse aber auch aus vorhergehenden Kapiteln im Schulbuch sind Gleichungssysteme und deren Lösungsfälle bekannt. Das Applet könnte in diesem Fall dazu dienen, den Zusammenhang zwischen Geradengleichungen in allgemeiner Form und Gleichungssystemen mit Gleichungen in zwei Variablen zu entdecken. Der Entdeckungsprozess wird besonders durch die zusätzliche Fragestellung „Die beiden Gleichungen I und II können auch als Geraden in der Ebene aufgefasst werden. Wie liegen diese zueinander? Wie liegen ihre Normalvektoren zueinander?“ und die grafische Darstellung der Geraden angeregt.

Wird die gegenseitige Lage von in allgemeiner Form gegebener Geraden bereits im Unterricht thematisiert, bevor das Applet zum Einsatz kommt, so kann dieses idealerweise als *Übungsapplet* genutzt werden. Durch die zufällige Auswahl der Parameter als auch der Lösungsfälle ergibt sich ein sehr umfangreiches Übungsangebot. Wird das Applet in einen *GeoGebra-Classroom* integriert, so kann der Fortschritt der Schüler*innen von der Lehrperson beobachtet werden. Möglich wäre es auch, die Übungen aus dem Applet als Hausübung aufzugeben und die Angabe sowie die Lösungen von den Schüler*innen niederschreiben zu lassen. Im Gegensatz zu einer Hausübungsangabe aus dem Schulbuch (wie in Abbildung 58 zu sehen), könnte durch die Variationen im Applet ein mögliches Abschreiben der Hausübung von Mitschüler*innen verhindert werden. Ob nun die erste oder die zweite Einsatzmöglichkeit gewählt wird – in beiden Fällen ist es notwendig, dass vorerst ein grundlegendes Wissen über die allgemeine Form von Geradengleichungen vorhanden ist.

- 12.70** Deute die Gleichungen des folgenden Gleichungssystems als Geraden! Entscheide – ohne das Gleichungssystem zu lösen – aufgrund der Normalvektoren der Geraden, ob das Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzt!
- a) $\begin{cases} -1,5x + 2y = -11 \\ 6x - 8y = 45 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 13x - 26y = 1 \\ -26x + 52y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x + 7y = 9 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}$
- 12.71** Deute die Gleichungen des folgenden Gleichungssystems als Geraden! Gib mit Hilfe der Normalvektoren Werte für a und b so an, dass das Gleichungssystem **1)** genau eine Lösung, **2)** keine Lösung, **3)** unendlich viele Lösungen besitzt!
- a) $\begin{cases} ax + 3y = 15 \\ 9x + 3y = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax - 22y = b \\ 7x - 11y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x + 2y = -4 \\ 3x + ay = b \end{cases}$
- 12.72** Ermittle im folgenden Gleichungssystem die Zahl $p \in \mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat! Wie viele Lösungen hat es für jeden anderen Wert von p?
- a) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x + p \cdot y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 7y = 11 \\ p \cdot x + 14y = -22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} p \cdot x - 2y = 8 \\ x + y = -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - p \cdot y = 1 \\ -12x + 9y = -3 \end{cases}$
- 12.73** Gib Zahlen a, b $\in \mathbb{R}$ an, sodass das folgende Gleichungssystem keine Lösung, genau eine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen hat!
- a) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ a \cdot x + b \cdot y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{3}{4}x + a \cdot y = b \\ 3x + 8y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a \cdot x + 2y = b \\ x - 8y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ a \cdot x - b \cdot y = 2 \end{cases}$

Abbildung 58: Schulbuchaufgabe Gleichungssysteme und Geraden (Malle et al., 2017: 252)

7 Fazit

Grundvorstellungen dienen dazu, mathematischen Aspekten Bedeutung zuzuschreiben. Genau diese Zuschreibung von Bedeutung kann wohl kaum besser erfolgen als über das Veranschaulichen von Sachverhalten – und genau dafür sind Applets besonders gut geeignet. Die didaktisch-methodischen Analysen der Applets zeigen klar deren Potentiale für den Mathematikunterricht auf. Mit Hilfe von Applets können nicht nur einzelne tragfähige Grundvorstellungen ausgebildet werden, sondern auch verschiedene Grundvorstellungen miteinander verknüpft und gefestigt werden. Fehlvorstellungen können über die Möglichkeit des wiederholten Übens und Erforschens erkannt und behoben werden. Aber auch abseits des Ausbildens von Grundvorstellungen zeigen sich klare Vorteile des Einsatzes von Applets im Unterricht. Während Konstruktionen an der Tafel oft ungenau und die einzelnen Schritte, wenn einmal ins Heft übertragen, meist nicht mehr nachvollziehbar sind und viel wertvolle Unterrichtszeit in Anspruch nehmen, können Konstruktionen in Applets im Vorhinein erstellt und über Animationen immer wieder abgespielt werden. Zusätzlich können diese Konstruktionen dynamisch verändert werden. Ob nun das Vergrößern eines Winkels, das Verändern der Parameter einer Funktion oder die Verschiebung eines Pfeiles vorgenommen wird – die Auswirkung dieser Veränderungen beobachten zu können, kann Schüler*innen dabei helfen, Zusammenhänge festzustellen, die in statischen Abbildungen nur schwer erkannt werden können. Aber nicht nur *Demonstrations-* oder *Entdeckungsapplets* sind herkömmlichen Darstellungsformen überlegen: auch *Übungsapplets* können durch Quantität und Qualität der Aufgabenstellungen überzeugen. Der Zufallsgenerator ermöglicht ein quasi unbegrenztes Üben, verschiedene Formen von automatischen Rückmeldungen können integriert werden und auch eine detaillierte und direkt abrufbare zusätzliche Hilfestellung kann Schüler*innen bei der Bearbeitung von Aufgaben unterstützen. *Werkzeugapplets* wiederum ermöglichen es, den Fokus des Mathematikunterrichts zu verlagern, vom *operativ-algorithmischen* zum *kritisch-argumentativen* Arbeiten.

Um all diese Potentiale bestmöglich ausschöpfen zu können, ist das Erstellen solcher Applets mit viel Überlegungsarbeit verbunden. Applets sollten leicht bedienbar sein, klare Instruktionen enthalten, den Fokus auf das Wesentliche lenken, dem gedankenlosen Auslagern von mathematischen Handlungen entgegenwirken und gleichzeitig Wissen vermitteln und Verständnis fördern. Es ist daher nicht zu leugnen, dass viel Zeit für die Erstellung eingeplant werden muss, besonders anfangs, wenn man noch nicht mit allen Funktionen von *GeoGebra* vertraut ist. Doch der Aufwand macht sich in vielerlei Hinsicht bezahlt: es ist anzunehmen, dass ein gutes Applet Schüler*innen nicht nur besser beim Verstehen von Zusammenhängen

unterstützt als viele andere herkömmliche Unterrichtsmaterialien, sondern dass sie sich auch lieber mit diesen auseinandersetzen. Außerdem kann ein Applet immer wieder eingesetzt und idealerweise durch einfache Änderungen adaptiert werden, sodass es für möglichst viele Einsatzbereiche genutzt werden kann.

Nicht nur gründliche Überlegungen vor dem Erstellen von Applets, auch viel Geduld währenddessen ist oftmals notwendig. Das Programm hat – wie vermutlich jede Softwarelösung – seine Eigenheiten und nicht immer funktioniert alles genauso wie es sein soll. Hier ist definitiv die weltweite Community an Nutzer*innen ein riesengroßer Vorteil. Jede Frage, die beim Erstellen der Applets für diese Masterarbeit aufgetreten ist, kann in Forumsbeiträgen gefunden werden und fast immer ist auch die Problemlösung geschildert. Außerdem, das wurde mir im Zuge dieser Arbeit ganz besonders bewusst, wird das Bedienen des Programmes mit jedem erstellten Applet einfacher. Neu entdeckte Möglichkeiten der Programmierung erlauben es, noch komplexere Applets zu erstellen und auch die stetige Weiterentwicklung der Software eröffnet neue Optionen.

Trotz der großen Community existieren jedoch kaum hilfreiche Anleitungen für das Erstellen von Applets. Zwar sind die einzelnen Funktionen des Programmes – manchmal genauer, manchmal weniger genau – beschrieben, die Einsatzmöglichkeiten dieser Funktionen jedoch nicht angeführt. Die vorliegende Arbeit soll daher auch als Anleitung dienen, wie die verschiedenen Funktionen und Werkzeuge für die Erstellung von Applets genutzt werden können, wobei anzumerken ist, dass wohl ein grundlegendes Programmverständnis notwendig ist, um mit diesen Anleitungen arbeiten zu können.

Beim Schreiben dieser Arbeit wurde mir abermals bewusst, wie viele Möglichkeiten *GeoGebra* bietet, den Mathematikunterricht zu bereichern und wie schade es gleichzeitig ist, dass viele Lehrpersonen die Software nur sehr sporadisch im Unterricht nutzen. Es ist daher, meiner Meinung nach, dringend notwendig, das Angebot an Workshops oder auch verpflichtenden Lehrveranstaltungen im Zuge der Lehrer*innenausbildung auszubauen, um die Software *GeoGebra* (angehenden) Lehrpersonen näherzubringen und sie von deren Potentialen für den Unterricht zu überzeugen.

8 Quellverzeichnis

- Arbain, Nazihatulhasanah; Shukor, Nurbiha (2015): "The Effects of GeoGebra on Students Achievement". *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 172(C), S. 208-214.
- Arun, Deniz (2020): *Die Unterschiede im Technologieeinsatz bei der Mathematik Zentralmatura*. Online verfügbar unter: <https://www.mathago.at/wp-content/uploads/PDF/Unterschiede-im-Technologieeinsatz-bei-der-Mathematik-Zentralmatura.pdf> [letzter Zugriff: 06.10.21]
- Aufgabenpool des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2018): *Sinus und Cosinus**. Online verfügbar unter: <https://prod.aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/340/Sinus%20und%20Cosinus.pdf> [letzter Zugriff: 11.12.21]
- Barzel, Bärbel, et al. (2014): *Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II*. 7. Auflage. Cornelsen Verlag, Berlin.
- Birgin, Osman; Uzun Yazıcı, Kübra (2021): "The effect of GeoGebra software-supported mathematics instruction on eighth-grade students' conceptual understanding and retention". *Journal of computer assisted learning*, 37(4), S. 925-939.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2021): *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS)*. Online verfügbar unter: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=4826&token=4574fed24b889f914a68a7411172dbce06459c69> [letzter Zugriff: 30.09.21]
- De Witt, Claudia (2000): „Medienbildung für die Netz-Generation“. *MedienPädagogik*, 1, S. 1-12.
- Dorfmayr, Anita, et al. (2019): *Thema Mathematik 4, Schülerbuch*. 3. Auflage. Veritas-Verlag & Ed. Hölzel Verlag, Linz und Wien.
- Dorner, Christian (2014): „Einsatzmöglichkeiten für GeoGebra in der 5. Klasse AHS“. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, 47, S. 33-47.
- Frohn, Daniel; Salle, Alexander (2017): „Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus“. *Mathematik lehren*, 204, S. 8-12.
- GeoGebra (2021a): <https://www.geogebra.org/>
- GeoGebra (2021b): *Befehle*. <https://wiki.geogebra.org/de/Kategorie:Befehle>
- GeoGebra(2021c): *Info*. <https://www.geogebra.org/about>
- GeoGebra (2021d): *Materialien*. <https://www.geogebra.org/materials>
- GeoGebra (2021e): *Skripting*. <https://wiki.geogebra.org/de/Skripting>
- GeoGebra (2021f): *Skripting Befehle*. [https://wiki.geogebra.org/de/Skripting_\(Befehle\)](https://wiki.geogebra.org/de/Skripting_(Befehle))
- GeoGebra (2021g): *Text*. [https://wiki.geogebra.org/de/Text_\(Werkzeug\)](https://wiki.geogebra.org/de/Text_(Werkzeug))
- Greefrath, Gilbert, et al. (2016): *Didaktik der Analysis*. Springer, Berlin Heidelberg.
- Henn, Hans-Wolfgang; Filler, Andreas (2015): *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer, Berlin Heidelberg.
- Hischer, Horst (2021): „Was ist eine Gleichung?“. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 110, S. 65-72. Online verfügbar unter: <https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/download/990/1104> [letzter Zugriff: 02.11.21]
- Hohenwarter, Markus (2002). *GeoGebra - ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Diplomarbeit, Paris-Lodron-Universität Salzburg.
- Holzer, Michael Johannes (2019): *GeoGebra in der Sekundarstufe II : ein Vergleich zwischen dem Unterrichten mit und ohne Einsatz von GeoGebra anhand der Themen Exponentialfunktionen und Differentialrechnung*. Diplomarbeit, Universität Wien.
- Humenberger, Hans, et al. (2016): *Das ist Mathematik 1, Schulbuch*. 1. Auflage. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien.
- Humenberger, Hans, et al. (2017): *Das ist Mathematik 2, Schulbuch*. 1. Auflage. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien.

- Humenberger, Hans, et al. (2020): *Das ist Mathematik 4, Schulbuch*. 1. Auflage. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien.
- Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (2009): *Bildungsstandards für Mathematik, 8. Schulstufe*. Online verfügbar unter: <https://www.iqs.gv.at/themen/nationales-monitoring/bildungsstandards/grundlagen-der-bildungsstandards> [letzter Zugriff: 29.09.21]
- Kaufmann, Stefan-Harald (2021): *Schülervorstellungen zu Geradengleichungen in der vektoriellen Analytischen Geometrie*. 1. Auflage. Springer Fachmedien, Wiesbaden.
- Lechner, Josef (1999/2000): *Grundwissen, Grundvorstellungen, Grundtätigkeiten*. Online verfügbar unter: <http://www.acdca.ac.at/projekt3/a303grundwissen.pdf> [letzter Zugriff: 26.10.21]
- Malle, Günther (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden.
- Malle, Günther, et al. (2017): *Mathematik verstehen: 5, Schülerbuch*. 1. Auflage. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch, Wien.
- Malle, Günther (2000): „Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation“. *Mathematik lehren*, 103, S. 8-11.
- OMG-Studie im Auftrag der Innovationsstiftung für Bildung (2020): *Potenziale der Digitalisierung für das Lernen in der Schule von morgen*. Online verfügbar unter: https://innovationsstiftung-bildung.at/fileadmin/Dokumente/innovationsstiftung.at/Dokumente/ISB__Praesentation_Meinungsumfrage_2020.pdf [letzter Zugriff: 10.02.2022]
- Radovic, Slavisa et al. (2020): “Examining the effects of Geogebra applets on mathematics learning using interactive mathematics textbook”. *Interactive Learning Environments*, 28(1), S. 32-49.
- Rechtsinformationssystem des Bundes (2018): *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen*. Online verfügbar unter: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> [letzter Zugriff: 01.10.21]
- Rechtsinformationssystem des Bundes (2021): *Gesamte Rechtsvorschrift für Prüfungsordnung AHS*. Online verfügbar unter: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007845> [letzter Zugriff: 04.11.21]
- Roth, Jürgen (2008): „Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen?“ *Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Bericht über die 23. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“*, (S. 131-138). Online verfügbar unter: https://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/dynamik_von_dgs/roth_dynamik_von_dgs.pdf [letzter Zugriff: 20.10.21]
- Statistik Austria (2020a): *IKT-Einsatz in Haushalten 2020*. Online verfügbar unter: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/informationsgesellschaft/ikt-einsatz_in_haushalten/index.html [letzter Zugriff: 06.10.21]
- Statistik Austria (2020b): *Konsumerhebungen 2019/20 - Ausstattung der privaten Haushalte*. Online verfügbar unter: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/soziales/ausstattung_privater_haushalte/index.html [letzter Zugriff: 06.10.21]
- Universität Wien (2016): *Teilcurriculum UF Mathematik BA Lehramt*. Online verfügbar unter: https://mtbl.univie.ac.at/storage/media/mtbl02/2015_2016/2015_2016_246.pdf [letzter Zugriff: 25.11.21]

- Universität Wien (2017): *Teilcurriculum UF Mathematik MA Lehramt*. Online verfügbar unter:
https://senat.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/s_senat/konsolidiert_Lehramt/Teilcurriculum_Mathematik_MA_Lehramt.pdf [letzter Zugriff: 25.11.21]
- Vom Hofe, Rudolf (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag, Berlin, Heidelberg, Oxford.
- Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen (2012): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. 2. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Windpessl, Mario (2019): *Technologieeinsatz im Mathematikunterricht*. Diplomarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz.