

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master Thesis

Visualisierungen der elementaren Zahlentheorie durch
Mikrowelten: Erkenntnisse und Vergleiche

verfasst von / submitted by

Stefan Meier, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2021 / Vienna, 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Betreut von / Supervisor:

UA 199 514 520 02

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Lehrverbund
UF Informatik Lehrverbund
UF Mathematik Lehrverbund

Assoz.-Prof. Doz. Dr. Michael Schlosser

Abstract

The importance of numbers has grown to an indescribable extent from the beginning of their use to today's digital age. School education faces the great challenge of teaching students the increasingly complex number concepts in sufficient depth. One approach to teaching mathematical knowledge is to create new learning environments - digital microworlds -, in which learners are guided to explore mathematical topics for themselves and solve problems and tasks. This thesis deals with everyday relevant mathematical content and how it can be taught through digital microworlds. The current state of research shows positive learning effects and highlights the importance of introducing number theory not only in higher education, but also in everyday school life with suitable digital training environments. This paper recommends to use the described microworlds together with the proposed modernisations in teaching and also outlines a number theory microworld in the field of cryptography.

Kurzfassung

Die Bedeutung von Zahlen hat von den Anfängen ihrer Verwendung bis zum heutigen digitalen Zeitalter in unbeschreiblichem Maße zugenommen. Die Schulbildung steht vor der großen Herausforderung, den Schüler*innen die immer komplexeren Zahlenkonzepte und -beziehungen in ausreichendem Maße zu vermitteln. Ein Ansatz dafür ist die Schaffung neuer Lernumgebungen - digitaler Mikrowelten -, in denen Lernende angeleitet werden, mathematische Bereiche selbst zu erkunden und Probleme und Aufgaben eigenständig zu lösen. In dieser Arbeit wird der Frage nachgegangen, welche Zahlenkompetenzen und Inhalte der Zahlentheorie im digitalisierten Alltag relevant sind und wie diese durch digitale Mikrowelten vermittelt werden können. Der aktuelle Forschungsstand zeigt positive Lerneffekte und betont die Wichtigkeit, Zahlentheorie nicht nur in der Hochschulbildung, sondern auch im Schulalltag mit geeigneten digitalen Lernumgebungen zu erschließen. Davon ausgehend wird empfohlen, die beschriebenen Mikrowelten zusammen mit den vorgeschlagenen Modernisierungen im Unterricht einzusetzen. Zudem wird eine zahlen-theoretische Mikrowelt im Bereich der Kryptographie skizziert.

Vorwort

Die vorliegende Masterarbeit entstand aus meinem Wunsch und Interesse, Schüler*innen Mathematik durch digitale Medien tiefgründig erfahrbar zu machen. Als Lehrperson ist es mir ein großes Anliegen, dass Lernende Freude an und mit Mathematik und Technik haben. Aus meiner bisherigen Erfahrung zeigen Jugendliche große Begeisterung bei der Benutzung von digitalen Lernumgebungen, Rätseln und Mathematikspielen.

Gemeinsam mit meinem Betreuer, Assoz.-Prof. Dr. Schlosser, konnte ich meinen Blick auf mathematische Mikrowelten richten, die genau dieselben Ziele verfolgen wie oben beschrieben. Mit wertvollen Ratschlägen und Literaturvorschlägen konnte ich dank meines Betreuers zu einer klaren Struktur finden, die eine weitgehende Beantwortung der Fragestellung ermöglichte. Vielen Dank dafür!

Eine weitere große Unterstützung und mein größter Dank gebührt meiner Frau, Diana, die mich im Prozess dieser Masterarbeit mit Zuversicht, Kraft, Geduld und Hingabe dabei unterstützt hat, die Arbeit ans Ziel zu führen. Ohne dich hätte ich diese Arbeit nicht in dieser Form fertig stellen! Cui honorem, honorem!

Ein großer Dank gilt auch meiner Familie und meinen Freund*innen, die mir das Studium ermöglichten bzw. während des Studiums viel Geduld und Unterstützung entgegengebracht haben.

Glücklich ist der Mensch, der Weisheit findet und Einsicht gewinnt! Denn der Nutzen der Weisheit ist größer als der Erwerb von Silber und ihr Gewinn ist wertvoller als Gold. (Die Bibel, Spr. 3,13-14)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Kurzfassung der historischen Entwicklung der Arithmetik	3
1.2	Entwicklung des arithmetischen Denkens bei Schüler*innen	5
1.3	Forschungsfragen	7
2	Theoretische Grundlagen	9
2.1	Mikrowelten im Kontext der Mathematikdidaktik	9
2.2	Digitale Mikrowelten	12
2.2.1	Strukturelle Definition	14
2.2.2	Funktionale Definition	14
2.2.3	Digitale Mikrowelten als Repräsentationen von mathematischen Teilgebieten	15
2.3	Alltagsrelevante Inhalte der Zahlentheorie	16
2.3.1	Verschlüsselungsverfahren	16
2.3.2	Musik	18
2.3.3	Darstellende Kunst	20
2.3.4	Logisches Denken und Allgemeinbildung	24
2.3.5	Fundierte Zahlenverständnis	25
2.4	Relevante Definitionen und Sätze der Zahlentheorie für digitale Mikrowelten	27
2.4.1	Teilbarkeit	27
2.4.2	Primzahlen	29
2.4.3	Kongruenzen	31
2.4.4	Zahlenfolgen	31
2.4.5	Algorithmen	32
3	Zahlentheoretische Mikrowelten	33
3.1	Number Worlds	34
3.1.1	Zielsetzung und Rahmenbedingungen	34
3.1.2	Inhalt	35
3.1.3	Forschung	39
3.1.4	Ergebnisse	40
3.2	Bunny Numerics	45
3.2.1	Rahmenbedingungen	45
3.2.2	Inhalt	46
3.3	Number Line Microworld	52
3.3.1	Rahmenbedingungen	52
3.3.2	Inhalt und Erkenntnisse	54

Inhaltsverzeichnis

3.4	Übersicht und Vergleich	58
4	Diskussion	61
4.1	Erkenntnisse	62
4.2	Lerneffekte zahlentheoretischer Mikrowelten	64
4.3	Erweiterungen für den didaktischen Gebrauch	67
4.4	Limitationen	69
4.5	Ausblick - Vorschlag einer Mikrowelt	71
5	Resümee	77
	Literaturverzeichnis	79
	Abbildungsverzeichnis	85
	Tabellenverzeichnis	87

1 Einleitung

Im Zeitalter der Automatisierung und Digitalisierung gewinnt die Arithmetik seit Jahrzehnten an Aktualität und Bedeutung. Zahlen und das Rechnen mit Zahlen sind ein treuer Wegbegleiter im Alltag. Zeiten, Entfernungen, Gewichte, Geschwindigkeiten, Preise, Kredite, Steuern, Löhne oder seit neuestem die Covid-Inzidenz: Zahlen definieren unser Leben. Auch bilden Zahlen die Grundlage für Wissenschaft, Kultur und Technologie. Allerdings übernehmen Maschinen und künstliche Intelligenzen heutzutage einen Großteil des arithmetischen Denkens. Zum Addieren und Multiplizieren greift man schnell zum Taschenrechner, Entfernungen von A nach B überprüft man auf Google Maps, Geizhals bietet mit ein paar Klicks ein Preisentwicklungsdiagramm für jedes kaufbare Produkt. Für viele arithmetische Denkprozesse stehen heute unzählige Apps zur Verfügung.

Aufgrund dieser Automatisierung und der damit verbundenen Selbstverständlichkeit der Arithmetik steigen die Anforderungen an das Zahlengrundverständnis von Kindern - und den damit verbundenen mathematischen Teilbereichen (Loos und Ziegler, 2015). Schüler*innen kommen in ihrer Schulausbildung mit der „automatisierten“ Arithmetik in Berührung, müssen diese aber nur noch teilweise, wenn überhaupt, tiefgründig verstehen. Gleichzeitig steigt aber der Druck, immer komplexere mathematische Zusammenhänge zu verstehen und anzuwenden, um die Entwicklung von Technologie und Gesellschaft weiter voranzutreiben.

Es stellt sich die Frage, wie das Schulsystem den steigenden Anforderungen gerecht wird. Was wird von Heranwachsenden heutzutage erwartet und verlangt? Wie können Schüler*innen komplexe arithmetische Zusammenhänge innerhalb kürzester Zeit umfassend verstehen?

In den 80er Jahren hat sich in der Wissenschaft und in der Erkenntnistheorie ein neuer Ansatz zur Erklärung von Denk- und Erkenntnisprozessen entwickelt. Bauersfeld (1983) beschreibt, dass Lernende Informationen aus Alltagssituationen (zum Beispiel spezifischen Handlungen, Objekte und sprachliche Mittel) verinnerlichen und bereichsspezifisch verarbeiten. Das Denken bzw. - im Falle des arithmetischen Denkens - das Zahlenverständnis organisiert sich also nicht in umfassenden, kohärenten, abgeschlossenen Systemen, sondern ist das Ergebnis der Interaktion vieler selbstständiger, bereichsspezifischer Module. Diese sind insbesondere durch ihre Problemspezialisierung und Abgeschlossenheit gekennzeichnet.

Richenhagen (1985) stellt folgende These auf: Wenn sich Denken und Erkennen in bereichsspezifischen Modulen vollzieht, dann lässt sich Lernen auch als die Bildung neuer

1 Einleitung

oder Erweiterung alter Module definieren. Dies stellt für Didaktiker die Frage, ob der Aufbau von Wissensmodulen durch geeignete didaktische Mittel und Denkwerkzeuge spielerisch und mühelos möglich ist. An dieser Stelle setzen sogenannte *digitale Mikrowelten* an. Digitale Lernumgebungen, die immer öfter ihren Platz im Klassenzimmer finden, fördern ein „entdeckendes Lernen“: selbstbestimmt, von Neugierde geleitet, mit dem Ziel der Findung einer Problemlösung.

Diese Masterarbeit widmet sich digitalen Mikrowelten mit zahlentheoretischen Inhalten und gliedert sich in folgende Teile:

Im einleitenden Teil (Kapitel 1) wird auf die historische Entwicklung der Arithmetik sowie die Entwicklung des arithmetischen Denkens bei Schüler*innen eingegangen. Anschließend werden die Forschungsfragen aufgestellt und der Forschungsprozess punktuell erläutert.

Der theoretische Teil (Kapitel 2) widmet sich dem mathematisch-fachdidaktischen Kontext von Mikrowelten und der Begriff „digitalen Mikrowelten“ wird definiert und abgegrenzt. Es wird der Bezug der Zahlentheorie zum Alltag dargestellt und es werden für die digitalen Mikrowelten relevanten arithmetischen Definitionen und Sätze zusammengefasst.

Im darauffolgenden Kapitel 3 wird ein Überblick über vorhandene digitale Mikrowelten mit zahlentheoretischen Inhalten gegeben und wissenschaftliche Erkenntnisse mit Bezug auf ausgewählte Mikrowelten vorgestellt.

Das abschließende Kapitel 4 soll eine Zusammenschau der vorliegenden Erkenntnisse zeigen. Vorschläge für Erweiterungs- und Optimierungsmöglichkeiten zu bestehenden und zukünftigen Mikrowelten, sowie die Beschreibung angrenzender Teilgebiete für aufbauende Forschungen schließen die Arbeit ab.

1.1 Kurzfassung der historischen Entwicklung der Arithmetik

Zahlen entspringen dem Zählen von Dingen (Hefendehl-Hebeker und Schwank, 2015). Wie wir heute zählen bzw. wie wir Zahlen aufschreiben, ist nicht selbstverständlich, sondern das Ergebnis eines langen Entwicklungsprozesses.

Das Addieren von Elementen kann schon vor 20.000 Jahren auf eingeritzten Steinen und Knochen festgestellt werden. Mit dem Aufblühen des Handels im 8. Jahrtausend vor Christus erhöhte sich die Komplexität des Zählens und der Rechnungen. Für die Vereinfachung des wirtschaftlichen Austausches zwischen Völkern und Kulturen wurden Zahlenwörter und eine Zehlschrift für Maßausdrücke erfunden (Klix, 1992).

Ein weiterer wichtiger Entwicklungsschritt der Zahl zu einem eigenständigen Denkbjekt war die Benutzung von Ersatzobjekten zum Zählen: Steine, Muscheln oder Stäbchen. Im Gegensatz zu den Einritzungen in Knochen konnten diese Objekte flexibel für mathematische Operationen verwendet werden, wie zum Beispiel das Verändern einer Anzahl (Hefendehl-Hebeker und Schwank, 2015). Nach Krämer (1988) konnten dadurch Zahlen von gezählten Gegenstandsmengen getrennt werden. Die Zählung wurde an einer Ersatzobjektmenge durchgeführt. Mit der Aneinanderreihung dieser Gegenstände konnte mit Bildungsgesetzen wie bei den natürlichen Zahlen gerechnet werden. Auch dies führte zu einer Denkentlastung beim Handel (Hefendehl-Hebeker und Schwank, 2015).

Die „richtige“ Arithmetik beginnt aber nach Damerow und Lefèvre (1981) nicht mit der Bestimmung der Zahlnamen, sondern mit dem operativen Umgang mit Zahlrepräsentanten. Im Alten Ägypten wurden Zahlendarstellungen mit verschiedenen Objektrepräsentanten gebündelt, ähnlich wie in unserer Zeit die Zehnerpotenzen. Durch das Addieren solcher Zahlen entstanden neue, „größere“ Bündelungen, bei denen ein Ersatzobjekt gegen einen höheren oder minderen Repräsentanten getauscht wurde. Mit zunehmender Erfahrung bezüglich der Ergebnisse solcher Operationen wurden diese Darstellungen weniger benutzt. Stattdessen kam es vermehrt zu gedanklichen Rechenleistungen. In Mesopotamien abstrahierte man in späterer Zeit physische Objekte als Repräsentanten zu einem sexagonalen Stellenwertsystem. Über den Zählzweck hinaus wurden in der Wirtschaft Rechentechniken benutzt, wie zum Beispiel multipikative Strukturen in Tabellenform für Feldflächen (als Produkt von Länge und Breite) oder Erdmassen als Volumen (als ein Produkt dreier Faktoren).

Im antiken Griechenland (500-300 v. Chr) entwickelte sich die bekannte Hochkultur der frühen wissenschaftlichen Mathematik als beweisende Theorie (Hefendehl-Hebeker und Schwank, 2015, S. 82f). Zum ersten Mal wurde Mathematik als Bestandteil philosophischen Denkens, frei von praktischen Zwecken gesehen und behandelt. Die Pythagoreer benutzten Rechensteine nicht nur um praktische Probleme zu lösen, sondern auch um arithmetische Zusammenhänge zu demonstrieren, wie zum Beispiel Quadratzahlen. Generell zählen die Rechensteinoperationen als Grundlage der „Lehre der Geraden und

1 Einleitung

Ungeraden“, die eine Klassifikation unterschiedlicher ganzer Zahlen vornimmt. Dies wird in den Elementen des Euklid aufgegriffen und dargestellt: „*Gerade ist die Zahl, die sich halbieren läßt; Und ungerade die, die sich nicht halbieren läßt, oder die sich um die Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet*“ (Euklid, 1980, VII. Buch Definitionen 6 und 7).

Weiters zeigt das griechische Wort „Arithmos“, welches die Mächtigkeit von Mengen diskreter Objekte beschreibt, eine Abstraktion und Definition der Zahl (Lefèvre, 1981, S. 163):

„Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird. Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.“ (Euklid, 1980, VII. Buch Definitionen 1 und 2):

Euklid schreibt, dass die Einheit als Maß der Dinge und Zahl die Zusammensetzung von Einheiten ist. Dies kann auch als die wahre Geburtsstunde der elementaren Zahlentheorie betrachtet werden, ein Teilbereich der Mathematik, der sich nach heutiger Definition mit den Eigenschaften von ganzen Zahlen beschäftigt.

Im Altertum etablierte sich die Zählweisen um die Zahl Zehn, doch handelte es sich hierbei hauptsächlich um additive und subtraktive Darstellungssysteme, gestützt auf Hilfsmitteln und Werkzeugen (wie z.B. Rechensteine). Im indischen Zahlensystem wurde bereits seit dem 7. Jahrhundert ein dekadisches Ziffernsystem genutzt, welches durch die arithmetischen Schriften von Al-Hwarizmi überliefert sind, die ins Lateinische übersetzt und nach Europa dadurch verbreitet wurden. Der wesentliche Unterschied zwischen einem Stellenwertsystem zu den additiven Zahlendarstellungen bestand darin, dass die Multiplikation maßgeblich Einzug findet und umgesetzt wurde. Die Ziffernstelle repräsentiert einen nicht explizierten Faktor eines Produkts, es wird also eine entwickelte arithmetische Denkopoperation vorausgesetzt (Damerow und Lefèvre, 1981, S. 30). Größere Zahlen werden auf diese Weise überschaubar und beherrschbar, ohne die Grenzen der menschlichen Kapazitäten zu erreichen. Außerdem erlaubt es, durch das Operieren mit Zeichen und anwendbaren Regeln symbolische Rechenverfahren durchzuführen.

Mit der indisch-arabischen Zahlendarstellung wurde der Weg gelegt für die Ausweitung der Arithmetik und der Mathematik in Bezug auf weitere Zahlenmengen (wie z.B. irrationale Zahlen und in späterer Zeit der negativen Zahlen). Die Arithmetik entwickelte sich zu einer Formenlehre, die sich dazu eignet, Zusammenhänge und Rechengesetze in den natürlichen Zahlen zu finden und um dann den Zahlenbereich dieser Gesetze, so weit wie es verträglich ist, zu erweitern. (Hankel, 1867).

1.2 Entwicklung des arithmetischen Denkens bei Schüler*innen

Nach Hefendehl-Hebeker und Schwank (2015) ist der Startpunkt der kognitiven Zahlvorstellung bei Säuglingen, die zwischen unterschiedlichen Anzahlen von Objekten zu differenzieren beginnen. In der Kindheit werden Größenordnungen kognitiv erfasst und damit hantiert. Dabei fällt besonders auf, dass einerseits Kinder Zahlen leichter unterscheiden können, die weiter auseinander liegen und andererseits, dass sich die Fehleranfälligkeit erhöht beim Benutzen größerer Zahlenpaaren. Diese Effekte sind ein Indiz dafür, dass Heranwachsende einen mentalen Zahlenstrahl besitzen.

Generell wird das Zahlenverständnis für ein latentes Konstrukt gehalten, die als solches nicht leicht untersucht werden kann. So lernen Heranwachsende zu Beginn die sperrigen Zahlenwörter, noch bevor ihre Bedeutung oder Konstruktion kognitiv erfasst wird. Der Rechenvorgang zur Bildung dieser Zahlen wird erst später in Bezug genommen, wie zum Beispiel „13 ist gleich 10 und 3“. Trotzdem ist noch ungeklärt, inwiefern Zahlenwörter eine Bedeutung beim aufkeimenden Zahlenverständnis mit Zahlen als Objekte, mit denen gerechnet wird und Rechnen als ein Verändern von Anzahlen haben (Laurence und Margolis, 2006).

In der Grundschule ist das Ziel im arithmetischen Bereich der Mathematik, schriftliches Rechnen für Schüler*innen verständlich und anwendbar zu machen und damit ihr mathematisches Denken zu erweitern. Der grundlegende Start sind die Zahlendarstellungen und das dezimale Stellenwertsystem mit seiner festgelegten Zeichenabfolge. Um Zahlenwerte zu finden, die nicht unmittelbar dargestellt werden können, benutzt man die Grundrechnungsarten, ein Fortschritt des eigenen arithmetischen Denkens. Dabei ist das Verständnis über das dezimale Stellenwertsystem nicht so einfach vorauszusetzen. Überträge (Zum Beispiel von 9 auf 10) und Zahlenwörter sind für Grundschüler*innen keine leichte Hürde. Aus diesem Grund beginnt der vorschulische Einstieg in dem Zahlenraum von 1 bis 10 (ohne 0). Der Zahlenraum wird in der Grundschule erweitert, wobei dieser vorwärts und auch rückwärts genutzt werden soll. Des Weiteren sollen im arithmetischen Mathematikunterricht nicht nur Rechnungen des Ergebnisses willens berechnet werden, sondern sollen dadurch die Lernenden über Zahlen und ihre Zusammenhänge im Alltag verstehen lernen.

Das arithmetische Denken wird als Grundgerüst für weitere mathematische Teilbereiche (wie zum Beispiel der Algebra) aufgebaut und vorbereitet. Im Idealfall finden die begrifflichen Konstruktionen von neuen Denkweisen der Schüler*innen selbstständig statt. Mit dem Einfluss neuer Technologien z.B. zur Visualisierung mathematischer Konzepte können elementare und auch abstrakte arithmetische Strukturen leichter und überzeugend durch Schüler*innen verstanden werden (Glaeser und Polthier, 2014).

Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006) beschreiben den Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis hin zu den reellen (und komplexen) Zahlen als eine „Kultur-

1 Einleitung

leistung von höchster Perfektion“, die im Unterricht der Sekundarstufe durch sukzessive Erweiterung des Zahlbereiches, ausgehend von den natürlichen Zahlen, nachvollzogen wird. Für Lernende zeigen sich dabei Herausforderungen und Hürden, die durch Wandel der Vorstellungen über Zahlen und Zahloperationen bewältigt werden müssen.

Zum Beispiel lernen Schüler*innen mittels Brüchen zum ersten Mal ganze Einheiten in Stücke zu teilen. Es gibt zu den Brüchen viele gleichwertig auftretende Erscheinungsformen und Vorstellungen: Sie können das Ergebnis einer Division ganzer Zahlen sein, Größenvergleiche aufstellen (etwas ist $\frac{1}{2}$ mal so groß wie etwas anderes) oder Zahlenverhältnisse darstellen. Die genannten Erscheinungsformen von Brüchen und ihren Ausprägungen erfordern von Schüler*innen neue Strategien, Vorstellungsanpassungen und Gewohnheiten in Bezug zu den Grundvorstellungen und Techniken der natürlichen Zahlen, die sie bereits kennen und verwenden. Vor allem das Multiplizieren und Dividieren von Brüchen bzw. das Verständnis dafür, dass Multiplizieren vergrößert und Dividieren verkleinert, braucht eine gedankliche Umstrukturierung und eine Anpassung der bereits vorhandenen Grundvorstellungen.

Der Umgang mit negativen Zahlen setzt ein fortgeschrittenes Verständnis der Zahlen und Zahlenoperation voraus. Beim Operieren mit negativen Zahlen hilft die zweiseitige Zahlengerade, die Schüler*innen bereits als Grundvorstellung besitzen. Trotzdem passieren noch leicht Fehler bei der Einschätzung der Größe von negativen Dezimalzahlen (z.B. $-4,5 < -4$). Minus und Plus müssen nicht nur als Rechenoperationszeichen erfasst werden, sondern auch als Vorzeichen einer Zahl. Das Minus bekommt eine besondere Rolle, da es als Inversionszeichen einer Zahl verstanden werden soll. Die Vorstellung, dass Addition zweier Zahlen zu einer „größeren“ und Subtraktion zu einer „kleineren“ Zahl führt, ist hier, obwohl es bei Bruchzahlen noch gegolten hat, nicht mehr allgemeingültig. Auch bei den negativen Zahlen lassen sich die Multiplikation und Division mit den vorhandenen Grundvorstellungen für die Schüler*innen nicht mehr gut erklären und erfordern fantasievolle Kunstgriffe der Lehrpersonen.

Die nächste Lernherausforderung bilden die reelle Zahlen, welche die irrationalen Zahlen inkludieren. Die reellen Zahlen finden in der messbaren Lebenswelt der Heranwachsenden kaum einen Bezug: Sie öffnen die Tore zu der theoretischen formalen-operativen Mathematik (Kirsch, 1994, S.90f).

Das abstrakte mathematische Verständnis, das von Schüler*innen in der Sekundarstufe gefordert ist, baut auf den mentalen vorhandenen arithmetischen Grundgerüsten auf. Dabei ist die Arithmetik aber nicht nur das Gerüst selbst für „höhere“ Zahlenbereiche, sondern auch die Basis für das Verstehen von Zahlen in der Lebenswelt der Lernenden. Je fundierter arithmetisches Verständnis ist, desto besser können Heranwachsende den gesellschaftlichen und technologischen Anforderungen standhalten und wissenschaftliche Weiterentwicklungen ermöglichen.

1.3 Forschungsfragen

Besonders aus der kulturellen Entwicklung zeigt sich die Wichtigkeit der Arithmetik und damit der daraus abgeleiteten Zahlentheorie in Hinblick auf gegenwärtige und zukünftige Technologien. Aufenanger betont in (Aufenanger, 1999, S. 19),

(...) dass mit den neuen Medien ein Umbruch beim Lernen stattfindet. Der Schwerpunkt verlagert sich dabei weg von der Passivität der Lernenden hin zu einer Aktivität, mit der Wissen konstruiert wird. Entscheidend hierbei sind die Lernsituationen, die genügend Freiheit, aber auch Anregungen und Bezug zum Leben haben sollten, damit sich das Lernen entfalten kann.

Eine solche Art von Lernsituation ist das Lernen mit mathematischen digitalen Mikrowelten, wie sie im Laufe dieser Masterarbeit definiert werden. Der Fokus liegt dabei auf digitalen Mikrowelten mit zahlentheoretischen Inhalten. Diese werden übersichtlich vorgestellt, analysiert und verglichen. In diesem Sinne werden folgende Forschungsfragen formuliert.

F1: Welche Inhalte der elementaren Zahlentheorie sind für ein fundiertes Zahlenverständnis besonders relevant?

Der Ausdruck „fundiertes Zahlenverständnis“ bezieht sich im Rahmen dieser Masterarbeit auf den Kontext der kulturellen und gesellschaftlichen Anforderungen und wird in Kapitel 2.3.5 umfangreich ausgeführt. Dabei liegt der Fokus auf jene Gebiete der Zahlentheorie, die Heranwachsenden helfen sollen, zukünftigen technischen Anforderungen gerecht zu werden.

F2: Wie kann Verständnis zu Zahlenbegriffen und -Systemen mit dem digitalen Medium der Mikrowelten aufgebaut und vertieft werden?

Wie in Kapitel 1.2 beschrieben, wurde schon vielfach erforscht, wie Kinder bzw. Schüler*innen mathematisches Wissen aufbauen, behalten und vertiefen. Die Kapitel 2.1 und 2.2 beschreiben den mentalen Prozess des Wissensaufbaus mit Hilfe des digitalen Mediums Mikrowelten.

F3: Welche zahlentheoretischen Mikrowelten gibt es und welche Effekte haben zahlentheoretische Mikrowelten auf Schüler*innen?

Nach einer Festlegung über den Begriff Mikrowelten in Kapitel 2.2.3 werden in Kapitel 3 zahlentheoretische Mikrowelten beschrieben und verglichen. Anhand wissenschaftlicher Forschungen werden die Effekte der Mikrowelten auf Lernende präsentiert, um eine Diskussion über ihre Wirksamkeit und die Legitimation ihres Gebrauchs zu ermöglichen.

F4: Wie können bestehende zahlentheoretische Mikrowelten für den didaktischen Gebrauch erweitert werden?

In weiterer Folge werden in Kapitel 4 Optimierungs- und Erweiterungsvorschläge zum Ausbau der zahlentheoretischen Mikrowelten vorgeschlagen und diskutiert. Im Mittelpunkt der Vorschläge liegen einerseits Bereiche der Arithmetik und andererseits Gebiete der Lebensweltsituationen zur Anwendung des Wissens und der Kompetenzen der Lernenden. Abschließend wird noch eine digitale Mikrowelt im Bereich der Kryptographie vorgeschlagen und skizziert.

2 Theoretische Grundlagen

Mit den nachfolgenden Eingrenzungen, Festlegungen und Definitionen der verwendeten Umgebungen, Begriffe und relevanten mathematischen Inhalte der Zahlentheorie soll ein klarer Rahmen für die folgenden Untersuchungen sowie eine Basis für die Diskussion geschaffen werden.

2.1 Mikrowelten im Kontext der Mathematikdidaktik

Lernen und Entwicklung finden mit und durch innere Strukturen statt.
(Piaget nach Lawler, 1981)

Lawler (1981) führte ein Experiment durch, dessen Ergebnis folgenden Sachverhalt verdeutlichte: Kinder entwickeln Wissensstrukturen, die unabhängig voneinander sind, die aufeinander aufbauen, die zueinander in Verbindung stehen oder eine Kombination des Genannten. Diese Wissensstrukturen werden situationsbedingt aufgerufen, um hervortretende Problemstellungen zu lösen. Ein Beispiel aus seiner Forschung ist seine Tochter Miriam:

I asked Miriam, “How much is seventy-five plus twenty-six?” She answered, “Seventy, ninety, ninety-six, ninety-seven, ninety-eight, ninety-nine, one hundred, one-oh-one” (counting up the last five numbers on her fingers). I continued immediately, “How much is seventy-five cents and twenty-six?” She replied, “That’s three quarters, four and a penny, a dollar one.” Presented later with the same problem in the vertical form of the hindu-arabic notation (a paper sum), she would have added right to left with carries. Three different structures could operate on the same problem (Lawler, 1981, S. 4).

Miriam überträgt im Laufe des Experimentes ihre Erfahrungen von der ersten Wissenstruktur nicht auf die zweite. Sie erkennt die Rechnung nicht sofort, weil sie beim Erwähnen der „Cents“ sofort in Münzenwert weiterdenkt: die abgewandelte Fragestellung ruft eine andere Wissensstruktur hervor. Auch kann Miriam ihre Erfahrungen und Techniken aus der sog. *Papiersummenwelt* nicht auf andere Wissensstrukturen übertragen: die Wissensstrukturen sind komplett voneinander getrennt.

In diesem Kontext definiert Lawler (1981) die einzelnen Wissenstrukturen zum Lösen von Problemstellungen als *Mikrowelten*: verkleinerte mikrokosmische Abstraktionen der natürlichen Welt (der „realen“ Welt). Weiterführend kommt er zum Ergebnis, dass Mikrowelten aus zwei Bestandteilen gebildet sind: *Perspektiven* und *Funktionen*.

2 Theoretische Grundlagen

Die *Perspektive* einer Mikrowelt bildet sich aus Deskriptoren: Beschreibungen bzw. Namen von Dingen, von denen die Mikrowelt handelt. Im Beispiel von Miriam könnten die Deskriptoren der ersten Mikrowelt „Zahlen“ oder „Zählen“ heißen, die Deskriptoren der zweiten Mikrowelt „Geld“, „Bezahlen“ oder „Münzen“ und die der dritten Welt „Summe“ oder „Addieren“. Die Deskriptoren sind die Elemente, die auch bestimmen, welche Mikrowelt zum Lösen einer Fragestellung herangezogen wird. Sie bilden sich vor allem durch Vorerfahrungen und werden durch jede neue Anwendung der Mikrowelt erweitert, verfeinert und präzisiert.

Die *Funktionen* einer Mikrowelt definieren sich mittels *Relationen*, in der die Elemente der Perspektive zueinander stehen, oder *Operationen*, die sich auf die Elemente der Perspektive anwenden lassen.

Lawler (1981) veranschaulicht die beiden Bestandteile einer *Zähl-Mikrowelt* mittels folgendem Beispiel:

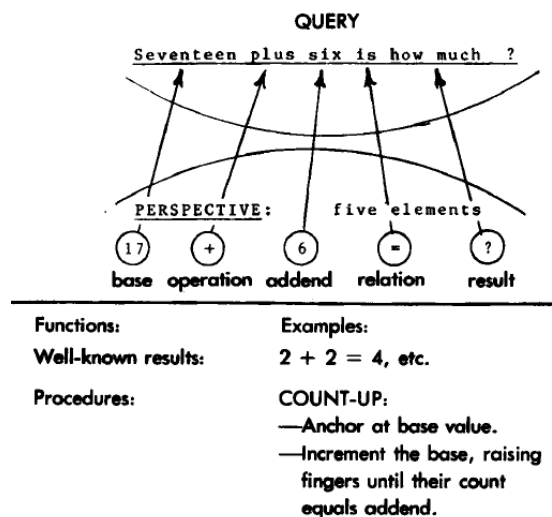


Abbildung 2.1: The Count Microworld (Lawler, 1981, S. 5).

Zum Lösen der Aufgabenstellung (dem *Query*) wird zuerst die *Perspektive* analysiert. Die Frage wird in ihre Deskriptoren geteilt: Basis, Operation, Additionswert, Relation, Ergebnis. Nach diesem Denkprozess werden die *Funktionen* aktiviert: den aufgezählten Deskriptoren werden konkrete Werte zugewiesen und die Funktionen erzeugen ein Ergebnis.

2.1 Mikrowelten im Kontext der Mathematikdidaktik

In unmittelbarem Gegensatz zur traditionellen Sichtweise von Wissen als statisch und sich-nicht-verändernd bezeichnet Lawler (1981) die Mikrowelten in ihrer Essenz als interaktiv und dynamisch: Mikrowelten sind immer auf der Suche nach Problemen, die sie lösen können. Je präziser eine Fragestellung formuliert wird, desto schneller kommt eine gewisse Mikrowelt zur Anwendung. Bei einer unspezifischen Problembeschreibung hingegen „konkurrieren“ die Mikrowelten miteinander, es stellt sich die Frage, welche zur Lösung herangezogen wird:

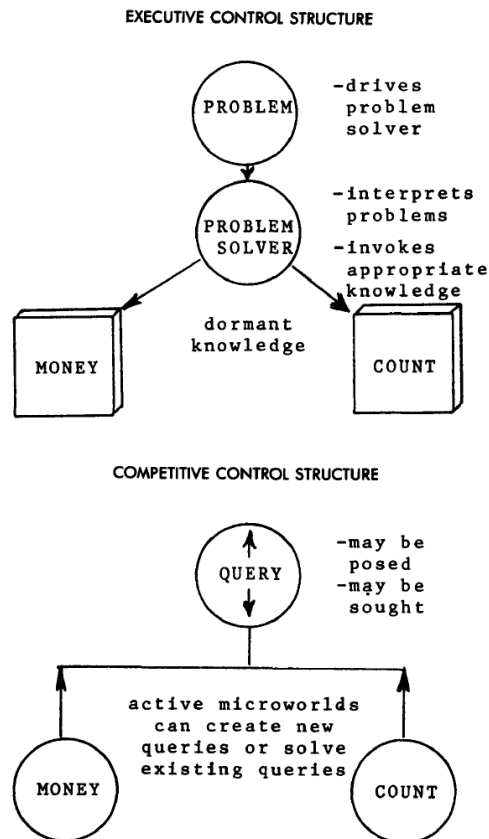


Abbildung 2.2: Konträre Kontrollstrukturen (Lawler, 1981, S. 7).

Abbildung 2.2 beschreibt zwei konträre mentale Kontrollstrukturen. Eine „exekutive“ Kontrollstruktur analysiert das Problem und ruft ein bestehendes Wissen ab, um dieses Problem zu lösen. Im Gegensatz dazu aktivieren sich in einer „kompetitiven“ Kontrollstruktur alle passenden Mikrowelten und versuchen parallel zueinander eine Lösung auf die Fragestellung anzubieten.

2.2 Digitale Mikrowelten

Parallel zu Lawler (1981) benutzte auch Seymour Papert in den 80er Jahren den Begriff Mikrowelten in einem anderen Kontext. Durch den Einfluss Jean Piagets orientiert sich Papert an konstruktivistischen und kognitionspsychologischen Lerntheorien und schafft die ersten *digitalen* Mikrowelten - computerbasierte Lernumgebungen als vereinfachte Repräsentationen von Themengebieten, die vom Lernenden selbständig exploriert und durch Problemlöseaktivitäten erschlossen werden (Lesgold, 1988). Der Schwerpunkt liegt dabei auf der pädagogischen Absicht, durch computerunterstützte Lernumgebungen eigenständig und erforschend zu Lernen sowie neues Wissen hervorzurufen. Papert's Meinung zur Schule zeigt sich gut in folgendem Zitat:

I think schools do an effective and terribly damaging job of teaching children to be infantile, dependent, intellectually dishonest, passive and disrespectful to their own developmental capacities (Papert, 1984, S. 20).

Er sah den Einsatz von digitalen Mikrowelten in der Schule als eine Alternative zum starren frontalen Unterricht. Bildreich bezeichnet er Mikrowelten als „Brutkästen für Wissen“ (Papert und Löthe, 1985, S. 126), oder „Gewächshaus für schlagkräftige Ideen“ (Papert und Löthe, 1985, S. 131) und führte damit Lernumgebungen aus, in denen Lernende selbstständig arbeiten, um sich Wissen anzueignen und anwenden können sowie Erfahrungen sammeln können.

Eine frühe Begriffsverwendung von digitalen Mikrowelten steht fast immer mit Logo-Umgebungen in Verbindung, vor allem mit der wohl bekanntesten und anschaulichsten: der Schildkrötengeometrie (engl. *turtle geometry*):

... the Turtle defines a self-contained world in which certain questions are relevant and others are not...this idea can be developed by constructing many such “microworlds”, each with its own set of assumptions and constraints. Children get to know what it is like to explore the properties of a chosen microworld undisturbed by extraneous questions. In doing so they learn to transfer habits of exploration from their personal lives to the formal domain of scientific theory construction (Papert, 1980, S. 117).

Die Schildkrötengeometrie, wie beschrieben, kann als Mikrowelt für Geometrievorstellungen betrachtet werden, bei der eine Schildkröte („*turtle*“) mit Programmierbefehlen in einer Ebene gesteuert werden kann. Die frühe Definition von Papert war äußerst einflussreich für die Entwicklung von Programmen, die als „Mikrowelten“ bezeichnet werden, da viele der ersten Computerumgebungen, die Mikrowelten genannt wurden, mit Logo erstellt wurden. Logo an sich ist aber keine reine Geometrieumgebung. Durch Programmieren kann das System für andere mathematische Inhalte erweitert bzw. verändert werden (z.B. *Dynaturtle*).

Ein fundamentaler Aspekt der digitalen Mikrowelten ist, dass das mathematische Themengebiet, in dem sich der Lernende Wissen erarbeiten soll, mit Computercodes erzeugt und gestaltet ist. Auch wenn die „ursprünglichen“ digitalen Mikrowelten mit Logo-Systemen geschaffen wurden, sind diese nicht exklusiv auf Logo beschränkt. Bei der Schaffung einer digitalen Mikrowelt muss das Themengebiet, das beschrieben werden soll, in Teilbereiche zerlegt und mit Programmcodes reproduziert werden.

In einer digitalen Mikrowelt werden die Lernenden nicht direkt mit einem zu lernenden Konzept konfrontiert. Vielmehr müssen sie in einem programmierten Lernbereich selbstständig Erfahrung sammeln und Theorien entwickeln, um sich neues Wissen anzueignen. Digitale Mikrowelten bieten also die Möglichkeit, dass Lernende in bisher unbekannte Wissensgebiete und Phänomene eintauchen. Sie können durch Experimentieren Erfahrungen betreffend den Inhalt von mathematischen Teilgebieten in der digitalen Mikrowelt sammeln. Dabei müssen sie keine Störfaktoren, wie sie in der wirklichen Welt vorkommen, überwinden. Auch ist es gewünscht, dass während des Lernprozesses „Selbstkorrekturen“ der eigenen Weltansichten stattfinden, um somit die reale Umwelt durch die Funktionen einer Mikrowelt besser verstehen zu können.

Eine weitere Eigenschaft von Mikrowelten ist die dynamische Vernetzung von verschiedenen visuellen Repräsentationsmöglichkeiten innerhalb einer digitalen Mikrowelt mit mathematischen Konzepten:

“I created a mouse-driven, computerized microworld, called Blocks Micro-world, that presents base-ten blocks and decimal numeration as linked systems ... Any change in blocks causes a change in the numeral; any change in a numeral causes a change in blocks” (Thompson, 1992, S. 127).

Mikrowelten sind, ähnlich wie Simulationen, ein Umfeld, in dem spezifische Regeln gelten, die durch Lernende erforscht und manipuliert werden können. Meist handelt sich auch um eine logische Repräsentation der natürlichen Welt (Pea, 1987).

Edwards (1998) untersuchte, wie der Begriff Mikrowelten in der mathematischen und naturwissenschaftlichen Bildung verwendet wurde und schlägt zwei Definitionen für Mikrowelten vor: eine strukturelle Definition, die sich auf die gemeinsamen Designelementen der Lernumgebungen konzentriert, sowie eine funktionale Definition, die den Lernprozess in den Mittelpunkt stellt.

2.2.1 Strukturelle Definition

Nach dem Vergleich verschiedener Mikrowelten konnte Edwards (1998) die folgenden Strukturelemente als weitgehend einheitlich ausarbeiten. Diese bilden somit die strukturellen „Minimalanforderungen“ an eine digitale Mikrowelt:

- Eine digitale Mikrowelt enthält eine Menge veränderbarer Rechenobjekte, die ein mathematisches oder wissenschaftliches Teilgebiet wiedergeben.
- Eine digitale Mikrowelt verbindet mehrere Darstellungsmöglichkeiten der zugrundeliegenden mathematischen oder wissenschaftlichen Inhalte. Typischerweise umfassen diese Darstellungen symbolische und visuelle Elemente, sind aber nicht allein auf diese begrenzt (zum Beispiel können auch Geräusche oder Bewegungen simuliert werden).
- Die Objekte und Operationen der digitalen Mikrowelt können miteinander kombiniert werden, um komplexere Objekte bzw. Operationen zu bilden.
- Zu einer digitalen Mikrowelt gehören Aufgabenstellungen. Sie können einerseits in der digitalen Mikrowelt-Umgebung inkludiert sein, oder mit Arbeitsblättern bzw. verbalen Anweisungen mitgegeben werden. Die lernende Person wird aufgefordert, die Objekte und Operationen der digitalen Mikrowelt zu benutzen, um die Aufgaben und Problemstellungen zu lösen.

2.2.2 Funktionale Definition

Digitale Mikrowelten müssen nicht nur über ihre eingebauten strukturellen Besonderheiten beschrieben werden. Sie können auch über ihre Effekte definiert werden, die eintreffen, wenn sich eine lernende Person mit der digitalen Mikrowelt auseinandersetzt.

Durch digitale Mikrowelten sollen mathematische Teilbereiche für Lernende auf eine verständliche Weise erfahrbar gemacht werden. Diese „Erfahrbarkeit“ ist nicht so leicht zu messen, wie zum Beispiel eine Liste struktureller Eigenschaften abzuhaken. Edwards (1998) schreibt, dass die Erfahrbarkeit durch Beobachtungen gemessen werden kann und legt folgende Aspekte als funktionale Eigenschaften einer Mikrowelt fest, die einem Lernenden begegnen sollen:

- In einer digitalen Mikrowelt können Objekte und Operationen so manipuliert werden, sodass neue Eigenschaften des mathematischen Teilgebietes entdeckt und dadurch die Inhalte besser verstanden werden. Experimentieren, Hypothesen aufstellen und diese testen, sowie das Forschen sind eine intendierte Ausrichtung der digitalen Mikrowelt.
- Die Interpretationen der Rückmeldungen der digitalen Mikrowelt führen zu einer Überarbeitung des Verständnisses und Ansichten des mathematischen Teilgebietes der Lernenden.

- Durch die Benutzung der Objekte und Operationen der digitalen Mikrowelt können Lernende neue Objekte erzeugen und damit spezifische Probleme und Aufgaben lösen.

2.2.3 Digitale Mikrowelten als Repräsentationen von mathematischen Teilgebieten

Edwards (1998) analysierte in seiner Forschung zu Mikrowelten auch eine philosophisch-kritische Frage. Digitale Mikrowelten sind nach 2.2.1 *Verkörperungen* oder *Repräsentationen* von Strukturen und Konzepten mathematischer Teilgebiete. Bei der Verwendung der Begriffe „verkörpern“ oder „repräsentieren“ ist aber zu beachten, dass diese die dynamische Essenz der Mikrowelten nicht wiedergeben - die Begriffe sind zu statisch und starr. Lernende, die in der Schulmathematik eingeführt werden, könnten zum Beispiel schnell das Gefühl bekommen, dass Repräsentationen gegeben und unveränderlich sind - obwohl die historische Entwicklung der Arithmetik hervorhebt, dass Darstellungssysteme über Jahrhunderte entwickelt und erweitert wurden.

In dieser Hinsicht bieten digitale Mikrowelten die Möglichkeit, konventionelle Repräsentationen zu überdenken. Durch die Entwicklung einer digitalen Lernumgebung schafft man einen Rahmen (einen Körper, einen Behälter) für mathematische Ideen. Digitale Mikrowelten laden ein, neue Darstellungssysteme zu schaffen, diese zu erweitern und darüber nachzudenken, wie Teilbereiche der Mathematik für Lernende bedeutend und sinnvoll werden. (Edwards, 1998)

Viele Forscher*innen sind der Überzeugung, dass computerbasierte Lernumgebungen mit ihren visuellen und experimentellen Elementen eine ausgezeichnete Ergänzung der traditionellen didaktischen Ansätzen bieten (Goldenberg, 1991). Leider gibt es nur wenige digitale Mikrowelten, die sich auf die Repräsentation zahlentheoretischer Inhalte fokussieren. Durch die fundamentale Wichtigkeit zahlentheoretischer Inhalte werden in dieser Arbeit zahlentheoretische Mikrowelten betrachtet und untersucht.

2.3 Alltagsrelevante Inhalte der Zahlentheorie

Oft wird die Frage gestellt, ob die Inhalte der elementaren Zahlentheorie im Alltag gebraucht werden. In diesem Kapitel werden

- alltagsnahe Beispiele und Situationen präsentiert, in denen die Zahlentheorie im Alltag vorkommt und
- auf den versteckten Nutzen dieses Teilgebietes der Mathematik aufmerksam gemacht, besonders wenn diese im Unterricht der Sekundarstufe eingebettet sind.

Für die beschriebenen Themengebiete werden die dazugehörigen Definitionen und Sätze aus der Zahlentheorie anschließend in Kapitel 2.4 aufgestellt.

2.3.1 Verschlüsselungsverfahren

Eine heutzutage bedeutende Anwendung der Zahlentheorie ist die Datenverschlüsselung. Wir leben im Zeitalter der digitalen Kommunikation, eine Zeit, in der Informationen massenhaft ausgetauscht werden. Beim Surfen im Internet, Schreiben von E-Mails und Nachrichten, sowie allgemein auf den sozialen Medien werden durch aktuelle Technologien eine große Menge an persönlichen Daten gesammelt. Dabei werden viele Nachrichten, Informationen und sensible Daten getauscht, die nicht für alle Personen lesbar sein sollten.

In den Medien wird immer wieder vom Kommunikationszeitalter gesprochen, weil der massenhafte Austausch von Information, wie er heutzutage mittels elektronischer Medien möglich ist, ein prägendes Merkmal zu sein scheint. Der Austausch von Information gilt aber seit jeher unsicher, da die Kanäle, über die die Information ausgetauscht wird, in aller Regel störanfällig sind.

Datenschutz ist ein großes Thema in der „digitalisierten“ Welt. Es ist allerdings eine interessante Beobachtung, dass sich die Menschen schon seit Beginn der Zeit mit Datenverschlüsselung beschäftigt haben. Das bekannteste Beispiel ist wohl die Caesar-Chiffre: ein Verschlüsselungsverfahren, das bereits im 1. Jahrhundert vom römischen Kaiser Julius Cäsar zum Austauschen von geheimen Informationen verwendet wurde. Dabei wird ein Buchstabe immer durch eine bestimmte Zahl, den Schlüssel, verschoben. Wenn der Schlüssel 5 wäre, wird A auf F verschoben, D auf I, Z auf E, usw. Ein weiteres bekanntes Beispiel ist die Entschlüsselung von Geheimbotschaften durch die Enigma-Maschine von Alan Turing im zweiten Weltkrieg. Der britische Mathematiker, Kryptoanalytiker und Informatiker konnte die Verschlüsselung der deutschen Wehrmacht decodieren und viele Funksprüche deutscher U-Boote erfolgreich entziffern.

Was haben Verschlüsselungsverfahren mit Zahlentheorie zu tun? Wenn eine verschlüsselte Nachricht (oder verschlüsselte Daten) entschlüsselt werden soll, dann muss der Sender der Botschaft dem Empfänger auch die Möglichkeit zur Entschlüsselung geben. Dieser „Schlüssel“ landete in der Geschichte oft in den falschen Händen. Die Idee einer doppelten

Verschlüsselung (mit zwei Schlüsseln) revolutionierte in den Siebzigerjahren die Kryptographie und wird auch heute noch, zum Beispiel beim RSA-Verschlüsselungsverfahren, eingesetzt. Dabei werden ein public- und private-Schlüsselpaar mit zahlentheoretischen Funktionen erzeugt. Der public-Key ist öffentlich und dient zum Verschlüsseln der Nachricht (und ist, wenn richtig angewendet, kaum oder nur mit großem Aufwand zu reversieren). Mit dem erzeugtem private-Key kann die Nachricht erneut verschlüsselt werden. Das RSA-Verfahren ist heutzutage das meistverbreitetste Verschlüsselungsverfahren und wird von vielen Nachrichten- und Datendiensten eingesetzt.

Um die Verschlüsselung anwenden zu können, werden folgende Sätze und Definitionen der Zahlentheorie eingesetzt:

- Primzahlentests (Zum Beispiel Sieb des Eratosthenes)
- Eulersche ϕ - Funktion
- Teiler
- Multiplikative Inverse
- Kongruenz
- Erweiterter euklidischer Algorithmus
- Chinesischer Restsatz

Um sich also bezüglich des eigenen Informationsaustausches sicher zu fühlen bzw. das RSA-Verfahren selbst anwenden zu können, benötigt man einige Kenntnisse der elementaren Zahlentheorie. Diese sind nicht nur für Mathematiker*innen, sondern auch für Informatiker*innen oder andere Berufe, in denen Kryptographie involviert ist, von großer Bedeutung.

2.3.2 Musik

Bereits in antiken Kulturen ist die mathematische Seite des Klanges umfassend studiert worden. Bei den Pythagoräern wurde zum ersten Mal der Ausdruck von Tonleitern mit Zahlenverhältnissen (von kleinen Zahlen) untersucht. Es gibt einige Projekte zum Verbinden der Musik mit Mathematik (z.B. musikalische Geometrien) und umgekehrt, wo Musik aus Mathematik erzeugt wird (z.B. die Vertonung des Goldenen Schnitts oder der Fibonacci-Zahlen). Musik entsteht durch rhythmische Strukturen, regelmäßige Pulswiederholungen, Akzente, Dauer und Takt. Besonders Takt spiegelt die Bedeutung der Mathematik wieder in der Entwicklung des Zählens, Rechnens und exakten Messungen von Zeit und Periodizität. Musikalische Formen bilden oft strenge Proportionen oder hypermetrische Strukturen (wie z.B. die Potenzen der Zahl 2 oder 3, oder andere komplexere Folgen) (HiSoUR Kunst Kultur Ausstellung, 2017). Ein Beispiel dafür:

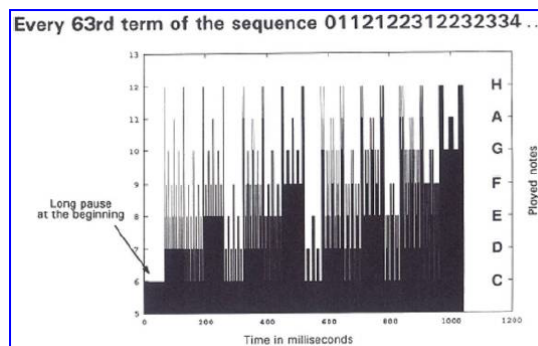


Abbildung 2.3: Aus zahlentheoretischen Folgen konstruierte „Barock-Töne“ (Schroeder, 2008, S. 163).

Eine Tonleiter ist eine diskrete Menge von Tonhöhen, die zum Erzeugen oder Beschreiben von Musik verwendet wird. Jede Tonhöhe entspricht einer bestimmten Frequenz, gemessen in Hertz. Für die Findung von Oktaven in einem Tonbereich eignen sich verschiedene Transponierungen in einem Intervall (z.B. die Addition modulo 1 und Primfaktorzerlegungen für diophantische Approximationen).

2.3 Alltagsrelevante Inhalte der Zahlentheorie

Um einen guten Klang bei einem Konzert zu erzeugen, benötigt ein Konzertsaal eine kräftige Reflexion der Frequenzen. Für die Messung der Qualität von Konzertsälen spielt nach Schroeder (2009) die Zerlegung ganzer Zahlen in die Summe von drei Quadraten eine wesentliche Rolle, eine Funktion der Zahlentheorie. Um die Reflexion des Schalls in einem Konzertsaal zu optimieren, erkannte Schroeder, dass diskrete Fourier-Transformationen von exponierten quadratischen Restfolgen modulo einer ungeraden Zahl ein konstantes Spektrum und damit eine optimale Streustruktur bilden:



Abbildung 2.4: Quadratic-Residue Diffusor (QRD), auf der Primzahl 17 als Periode beruhend. Derartige Strukturen sind weltweit als „Schroeder-Diffusoren“ bekannt und auch in der Göttinger Stadthalle zu finden. Die Wahl von 17 als Periode erlaubt die effiziente Schallstreuung von vier musikalischen Oktaven (Schroeder, 2008, S. 161).

Zahlentheorie ist also ein wichtiger Teil der Akustik, Architektur von Konzertsälen und Musiktheorie. Es ist ein Vorteil für Kulturschaffende und Theoretiker in diesem Bereich, ein bestimmtes Grundverständnis in folgender Auswahl an Themen der Zahlentheorie zu besitzen:

- Modulo-Funktion
- Kongruenz
- Primfaktorzerlegung und Diophantischer Approximation
- Bildung besonderer Zahlenfolgen
- Kettenbrüche
- 3-Quadrate-Satz

2.3.3 Darstellende Kunst

Zahlentheorie kann auch als Inspiration für Graphiken dienen. Ein Beispiel dafür sind partielle Gaußsche Summen, die folgendermaßen definiert sind :

$$S(m, k) := \sum_{n=0}^k e^{\frac{2in^2\pi}{m}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

Für $m \equiv 2 \pmod{4}$ wird $S(m, m-1) = 0$, d.h. die Summe kommt zurück zum Ursprung, nachdem sie zwei Spiralen bildet:

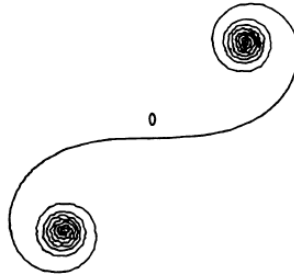


Abbildung 2.5: Partielle Gaußsche Summe, die eine Spirale bildet (Schroeder, 2009, S. 225).

Für verschiedene Restbeträge (z.b. $m \equiv 3 \pmod{4}$,...) ergeben sich Variationen der Spiralen die in einer Grafik kombiniert werden können:

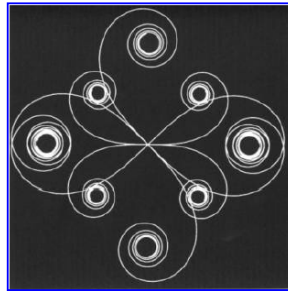


Abbildung 2.6: Mehrere Gaußsche Summen in der Gaußschen Zahlenebene (Schroeder, 2008, S. 168).

2.3 Alltagsrelevante Inhalte der Zahlentheorie

Ein weiteres schönes Beispiel ist das Spektrum teilerfremder Zahlen (Betrag der Fouriertransformierten). Der Betrag wird in verschiedenen Helligkeitswerten wiedergegeben:

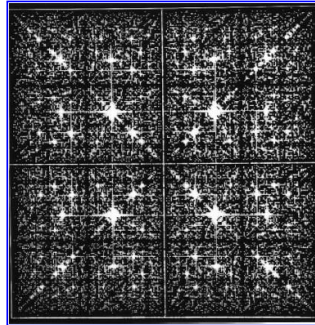


Abbildung 2.7: Spektrum teilerfremder Zahlen (Schroeder, 2008, S. 169).

In Kapitel 2.3.2 wird erwähnt, dass die Pythagoreer Zahlenverhältnisse in musikalische Intervallen ausgedrückt haben. Solche besondere Verhältnisse sind nicht nur in der Musik zu finden, sondern auch in Bildern. Bekannte Beispiele sind Leonardo da Vinci, der den menschlichen Körper in Bezug zu Kreisen und Quadraten stellte, oder Albrecht Dürer, der ganze Bücher zu den menschlichen Proportionen verfasste:

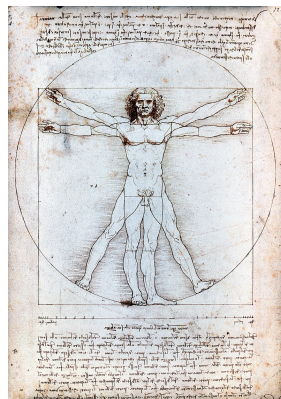


Abbildung 2.8: Der vitruvianische Mensch (Leonardo da Vinci, 1490).

2 Theoretische Grundlagen

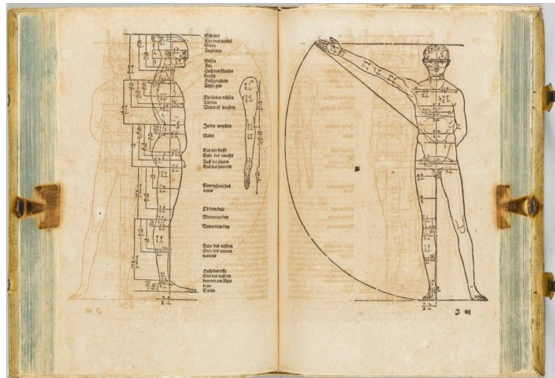


Abbildung 2.9: Seitenansicht eines sehr schlanken Mannes, Arm in Seitenansicht (Dürer, 1604)

Das bekannteste Verhältnis dieser Art ist vielleicht der *goldene Schnitt*, welcher bereits in Kunstwerken und Architektur der Antike erkennbar ist.

Der goldene Schnitt ist das Teilungsverhältnis zwischen einem größeren Teil Major (a) und einen kleineren Teil Minor (b):

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Die Fibonacci-Folge steht im unmittelbaren Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt: Je weiter die Folge fortschreitet, desto mehr nähert sich das Verhältnis zweier aufeinanderfolgenden Zahlen der Folge dem Goldenen Schnitt an. Diese „harmonische“ Proportionsteilung zeigte sich in Gemälden, z.B. „das Abendmahl“, oder die „Mona Lisa“, oder in Kunstwerken, z.B. die Statue „Venus von Milo“, die „Cheops-Pyramide“, oder das „Parthenon“ in Athen. Ob die Künstler das harmonische Verhältnis bewusst, oder durch ihre Intuition anwendeten, ist schwer zu beweisen bzw. zu widerlegen.

2.3 Alltagsrelevante Inhalte der Zahlentheorie

Auch heute orientiert sich das Schönheitsempfinden noch dem goldenen Schnitt. Es werden z.B. Gesichtsproportionen, die dem goldenen Schnitt entsprechen, als besonders attraktiv wahrgenommen, was in der Schönheitschirurgie zum Teil eine Rolle spielt (Burusapat und Lekdaeng, 2019).

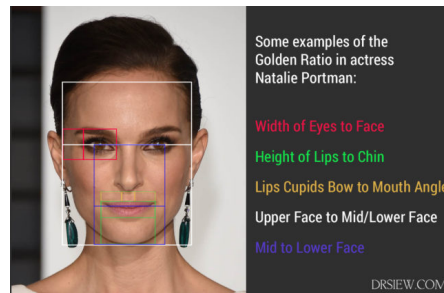


Abbildung 2.10: Goldene Schnitte im Beispiel von Natalie Portman (Siew, 2020).

Nicht nur in der menschlichen Empfindung, sondern auch in der Natur gibt es unzählige Beispiele für das Vorkommen dieses Verhältnisses, wie bei der Nautilus-Muschel, bei Blütenanordnungen, oder sogar Galaxien. Solche Zusammenhänge, die teilweise zum Bereich der Zahlentheorie gehören, finden durch die genannten Beispiele definitiv Relevanz für den Unterricht bzw. in digitalen Umgebungen (in denen man Zahlenfolgen besonders einfach visualisieren kann). Relevante Bereiche der Zahlentheorie sind dabei:

- Modulo-Funktion
- Kongruenz
- Teilungsverhältnisse
- Bildung besonderer Zahlenfolgen

2.3.4 Logisches Denken und Allgemeinbildung

Zahlentheorie ist eines der wenigen Bereiche der Mathematik, an dem Nichtmathematiker*innen und sogar Medien Interesse haben. Das liegt daran, dass jeder Mensch seine persönlichen Erfahrungen mit Zahlen macht und dabei oft auf Herausforderungen und Zahlenprobleme stößt. Zahlen sind überall und können auch Spaß machen, zum Beispiel in Form von mitreißenden und kniffligen Zahlenrätseln. In diesem Zusammenhang bezeichnet Ziegenbalg (2015) Zahlen als *„den Stoff, der (zusammen mit der räumlichen Anschauung) den menschlichen Geist zur Konstruktion gedanklicher Gebäude anregt, die die heutigen Entwicklungen der Mathematik möglich machen“*.

Zahlentheorie ist inhaltlich beschränkt und dadurch relativ unabhängig. Dennoch durchzieht die Zahlentheorie alle Gebiete der Mathematik und des Alltages. Die genannten Beispiele in den Kapiteln 2.3.1 bis zu 2.3.3 sind nur ein kleiner Teil der Vorkommnisse der Zahlentheorie in der Welt. Neben der Faszination an Zahlen und Zahlenfolgen (wie bei figurierten Zahlen, Fibonacci- oder Pythagoräischen Zahlen und der Kombinatorik) gibt es auch einige sehr relevante Vorkommnisse in der heutigen Technologie, wie Prüfwerte in Codes, Primzahlentests, Kalenderrechnungen, oder im Bereich der Programmierung in Form von Algorithmen, Codierung, oder andere computerbasierte Experimente bzw. im Glücksspiel und simplen Kartentricks.

Im Allgemeinen geht es um Zahlenverständnis: Die kognitive Fähigkeit, mathematische Objekte zu abstrahieren und zueinander in Beziehung zu setzen. Mathematische Objekte sind dabei Messungen, Zählungen, bzw. Beobachtungen die gezählt werden. Zahlenverständnis ist also die Fähigkeit, mit Zahlendarstellungen verschiedener Größen und mit deren Beziehungen umzugehen (Häsel-Weide und Nührenbörger, 2012).

Diese kognitive Zahlenfähigkeiten werden in der Schulzeit immer weiter ausgebaut, einerseits im Zahlenraum - dem Erfassen verschiedener Zahlengrößen im Alltag, andererseits in ihren Beziehungen von verschiedenen Zahlenmengen zueinander. Beispiele für das Vertiefen von Zahlenkompetenzen für die Allgemeinbildung sind das Rechnen mit und Beherrschen von negativen Zahlen (z.B. in Form von Schulden, Reduktionen, Positionen), Brüchen (Teile des Ganzen, Mengenteile, Verkleinerung der Zahlenmenge usw.) und besonderen Zahlen wie Primzahlen oder Quadratzahlen (Verschlüsselungen, Speichergrößen, Potenzen, usw.). Das schulisch aufgebaute Zahlenverständnis mündet nach dem klassischen mathematischen Spiralprinzip in der Statistik, in Flächenintegralen oder Extremwertaufgaben, die wirtschaftliche und technische Relevanz für die Allgemeinheit beinhalten.

Doch Heranwachsende besitzen durch die verschiedenen Schulsystemen auch ein unterschiedlich ausgeprägtes Zahlenverständnis. Die gesellschaftlichen Anforderungen müssen also an einem Basis-Zahlenverständnis angepasst sein (z.B. Einkauf in Geschäften, Verkehrsregeln, Vertragskosten, ...). Diese Basisschwelle gibt aber Raum für Manipulationen.

Einige Beispiele für Manipulation sind:

- Werbungen, die Preisreduktionen von großen Prozentzahlen versprechen (Bei kleinem Grundpreis), oder das Locken mit Preisen mit Nachkommastellen, wie zum Beispiel 9,99 (Kopetzky, 2016). Oft fällt der Blick nur auf die Dezimalstellen, weil der Zahlenraum der ganzen Zahlen leichter zu erfassen ist.
- Teure Ausstellungsstücke zu großen Preisen vor Geschäften (z.B. ein 20.000€ Fernseher) zu stellen. Dadurch wirken kleinere Fernseher im Geschäft - mit trotzdem hohen Preisen - nicht mehr so schlimm.
- Statistiken in den Zeitungen, welche große Zahlwerte in kleinen Prozentwerten verschleiern, gelten heutzutage als ein Kavaliersdelikt. Man wird verängstigt über „schlechte“ Verschlüsselungen von Nachrichtendiensten, ohne dass man versteht, was eine Verschlüsselung gut oder schlecht macht. Ideen und Meinungen über Statistiken, Graphen und Zahlenzusammenhänge, die das eigene Verständnis übersteigen, werden übernommen und verbreitet.

Mit Kenntnissen und Kompetenzen in der elementaren Zahlentheorie können Tricks und Manipulationen leichter durchschaut werden (Bosbach und Korff, 2017). Mengen und Zahlen werden in Relation gesetzt und „Denkhilfen“ von manipulativer Werbung und Marketing werden nicht mehr benötigt.

2.3.5 Fundiertes Zahlenverständnis

Aus den genannten Beispielen in den Kapiteln 2.3.1 bis 2.3.4 ist deutlich erkennbar, dass zahlentheoretische Inhalte, neben den mathematisch-kognitiven Kompetenzen, die in der Schulmathematik erworben werden, eine doch wichtige und ergänzende Rolle für ein vertieftes Weltverständnis bilden.

Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit unter dem Begriff *fundiertes Zahlenverständnis* schulmathematische- und gesellschaftsrelevante mathematische Inhalte der Zahlentheorie zusammengefasst. Die vier genannten Alltagsbereiche erheben keinen Anspruch auf Absolutheit oder Vollständigkeit - eine umfassendere Begriffsfestlegung würde den Rahmen dieser Arbeit in großen Maßen sprengen.

Mit „fundiertes Zahlenverständnis“ wird ein Zahlenverständnis beschrieben, das über das gesellschaftliche „Basisverständnis“ (vgl. Kapitel 2.3.4) hinausgeht. Manipulative Werbung und Medien setzen an dem Basisverständnis an - ein fundiertes Zahlenverständnis setzt Wissensstrukturen und Zahlenkompetenzen ein, um Manipulationsversuche zu verstehen und zu durchschauen.

Es wird angenommen, dass grundlegendes (Basis-)Zahlenverständnis durch das Curriculum der Sekundarstufe 1 abgedeckt ist. Nach dem österreichischen Lehrplan für die Oberstufe, werden Zahlen in der Sekundarstufe 2 weiter vertieft. Beispiele sind folgende

2 Theoretische Grundlagen

Kompetenzen, die in der Oberstufe erworben werden:

- Reflektieren über verschiedene Zahlenmengen
- Neue Zahlensysteme lernen und zwischen diesen wechseln können
- Teilbarkeitsfragen untersuchen können
- Darstellungen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik kennen
- Kryptologie und Codierung

Grundinhalte der elementaren Zahlentheorie sind eine Erweiterung des Zahlenverständnisses der Oberstufenmathematik. Teilbarkeiten, Primzahlentests, Modulo-Funktion und Kongruenzen, besondere Zahlenfolgen, Teilungsverhältnisse finden häufige Präsenz in den Bereichen Verschlüsselungen und Datensicherheit (2.3.1), im Kunstbereich bzw. der Gesichtserkennung (2.3.3) und allgemein wird logisches Denken (2.3.4) gefördert und gefordert.

Fundiertes Zahlenverständnis kann als das Fundament zum mathematischen Denken, Verstehen und Handeln über Zahlen in der gegenwärtigen Welt verstanden werden und auch als der mögliche kognitive Anschluss für das Mitwirken an den Neuentwicklungen der Zukunft.

2.4 Relevante Definitionen und Sätze der Zahlentheorie für digitale Mikrowelten

In diesem Abschnitt werden Definitionen und Sätze der elementaren Zahlentheorie, die in den vorgestellten digitalen Mikrowelten und der anschließenden Diskussion thematisiert werden, vorgestellt.

Die Definitionen und Sätze stammen großteils aus (Ziegenbalg, 2015) und (Lüneburg et al., 2010) und beschränken sich auf die für diese Arbeit wesentlichen Inhalte. Für umfassendere Ausführungen und Beweise kann in diesen Quellen zu allen Sätzen und Definitionen nachgelesen werden. Zu den Sätzen werden nur dann Beweise angeführt, wenn diese für den weiteren Teil der Arbeit relevant sind. Andernfalls können die Beweise auch in den angeführten Quellen nachgelesen werden.

2.4.1 Teilbarkeit

Satz 2.4.1 (Division mit Rest). Zu je zwei natürlichen Zahlen a und b (mit $b \neq 0$) gibt es stets eindeutig bestimmte nicht negative ganze Zahlen q und r mit der Eigenschaft

$$a = q \cdot b + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < b$$

Bemerkungen:

- Wenn man eine natürliche Zahl a durch eine natürliche Zahl b dividiert, dann bezeichnet man die Vielfachheit, mit der b zur Gänze in a aufgeht, als den *Quotienten* q .
- Ist der Rest gleich Null, dann sagt man dass die Zahl b die Zahl a (ohne Rest) *teilt*.

Definition 2.4.2 (Teiler und Vielfache). Es sind $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Man sagt, dass b ein *Teiler* von a ist, wenn es eine Zahl n gibt mit der Eigenschaft $a = n \cdot b$. Die Zahl a wird dann ein *Vielfaches* von b genannt. (Man schreibt dann $b \mid a$).

Bemerkungen:

- Man sagt, eine natürliche Zahl ist *gerade*, wenn sie von der Zahl 2 geteilt wird (d.h. wenn sie ein Vielfaches von 2 ist). Andernfalls wird sie als *ungerade* bezeichnet.
- Eine ganze Zahl a heißt *Quadratzahl*, wenn es eine ganze Zahl b gibt mit der Eigenschaft: $b^2 := b \cdot b = a$
- Teiler treten in der Regel paarweise auf. Ist $a = b \cdot c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$, so ist mit b stets auch c ein Teiler von a .
- Ist $a \neq 0$ und $a = b \cdot c$, so nennt man b und c auch *Komplementärteiler*.
- Ist $a \neq 0$ und b Teiler von a und $b \neq a$, dann heißt b auch ein *echter Teiler* von a .

2 Theoretische Grundlagen

Definition 2.4.3 (gemeinsamer Teiler). Man nennt d gemeinsamen Teiler von a und b , wenn d sowohl a als auch b teilt.

Bemerkungen:

- Zwei natürliche Zahlen haben immer mindestens einen gemeinsamen Teiler, nämlich 1.
- Sei d einen gemeinsamer Teiler von a und b . Dann ist $d \leq |a|, |b|$

Definition 2.4.4 (größter gemeinsamer Teiler - ggT). Da natürliche Zahlen immer einen Teiler haben, und ein Teiler nie größer als die Zahl, die er teilt, ist, haben zwei Zahlen auch einen *größten gemeinsamen Teiler*. Dieser größte gemeinsame Teiler ist eindeutig bestimmt. Der größte gemeinsame Teiler von $a, b \in \mathbb{N}$ wird mit $\text{ggT}(a, b)$ bezeichnet.

Bemerkungen:

- Es sind a und b *teilerfremd*, wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist.
- Seien $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ nicht alle 0, so ist $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k) := \max\{m \in \mathbb{N} \mid m \mid n_i \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$
- Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ nicht alle 0, so gilt $\text{ggT}(n_1, \dots, n_k) = \text{ggT}(|n_1|, \dots, |n_k|)$, da $n_1, \dots, n_k$ und $n_1, \dots, n_k$ dieselben positiven gemeinsamen Teiler besitzen.

Definition 2.4.5 (gemeinsames Vielfaches). Sind $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, dann heißt v ein gemeinsames Vielfaches von $n_1, \dots, n_k$, wenn $n_i \mid v$ für $1 \leq i \leq k$.

Definition 2.4.6 (kleinstes gemeinsames Vielfaches - kgV). Sind $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so ist

$$\text{kgV}(n_1, \dots, n_k) = \min\{v \in \mathbb{N} \mid n_i \mid v \text{ für } 1 \leq i \leq k\}.$$

2.4.2 Primzahlen

Definition 2.4.7 (Primzahl). Eine natürliche Zahl a mit $a > 1$ heißt *Primzahl*, wenn sie in $\mathbb{N}$ nur die beiden (trivialen) Teiler 1 und a besitzt.

Bemerkung:

- Eine natürliche Zahl a lässt sich in Faktoren zerlegen: $a = x \cdot y$. Die Zahl a heißt zerlegbar, wenn sie nichttriviale ganzzahlige Faktoren x und y besitzt. Jede natürliche Zahl a ($a > 1$) ist entweder eine Primzahl, oder sie ist zerlegbar. Primzahlen werden auch *unzerlegbar* (*irreduzibel*) genannt.
- Für jede natürliche Zahl a mit $a > 1$ ist der kleinste von 1 verschiedene Teiler von a stets eine Primzahl.

Satz 2.4.8. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. Seien $p_1, \dots, p_n$ verschiedene bekannte Primzahlen. Sei v das Produkt dieser Primzahlen: $v = p_1 \cdot \dots \cdot p_n$. Man betrachte die Zahl $v + 1 = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Sie besitzt, wie jede natürliche Zahl (größer als 1), einen kleinsten Primteiler q (dies schließt als Möglichkeit auch den Fall ein, dass $v + 1$ selbst eine Primzahl, dass also $v + 1 = q$ ist). Die Primzahl q ist von jeder der Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ verschieden, denn die Zahl $v + 1$ ist zwar durch q , aber durch keine der Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ teilbar (sie lässt bei der Division durch jede dieser Primzahlen ja offensichtlich den Rest 1). Also haben wir mit q eine neue Primzahl gefunden, die noch nicht unter den ursprünglich gegebenen Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ vorkam. Damit ist q die $(n + 1)$ -te Primzahl. $\square$

Bemerkung:

- Um alle Primzahlen bis zu einer gegebenen Schranke zu finden, kann man das *Sieb des Eratosthenes* (vgl. Kapitel 2.4.5) verwenden.

Lemma 2.4.9. Teilt eine Primzahl p ein Produkt $a \cdot b$ von zwei natürlichen Zahlen a und b , so teilt p (mindestens) einen der Faktoren.

Satz 2.4.10 (Primzahlenkriterium). Für die natürliche Zahl p ($p > 1$) sind die beiden folgenden Aussagen gleichwertig:

- p ist eine Primzahl.
- Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt: Aus $p \mid a \cdot b$ folgt $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Lemma 2.4.11. Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $n > 2$. Dann gibt es eine Primzahl p , so dass gilt $p \mid n$ (Baxa, 2017).

Satz 2.4.12 (Fundamentalsatz der Zahlentheorie). Jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ ist als Produkt von Primzahlen darstellbar: $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren ist diese Darstellung eindeutig. Der Index k kann auch 1 sein. In diesem Fall ist $n = p_1$ selbst eine Primzahl.

2 Theoretische Grundlagen

Beweis. Es wird einerseits die Existenz, andererseits die Eindeutigkeit des Satzes nach (Baxa, 2017) bewiesen:

- *Existenz:*

Induktion nach n : $n = p_0 = 2$ ist Primzahl. Sei nun $n > 2$. Wenn n eine Primzahl ist, gibt es nichts zu tun. Sei also n keine Primzahl. Dann gibt es eine Primzahl p_1 , sodass $p_1 \mid n$. Das bedeutet dass ein $q \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = p_1 \cdot q$. Da $1 < q < n$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung Primzahlen, sodass $q = p_2 \cdot \dots \cdot p_s$ gilt. Daraus folgt $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$.

- *Eindeutigkeit:*

Angenommen, es gibt ganze Zahlen ≥ 2 mit zwei verschiedenen Produktdarstellungen von Primzahlen. Sei n die kleinste solche Zahl und $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ die zwei Darstellungen. Dann gilt $p_r \mid n$, d.h. $p_r \mid q_1 \cdot \dots \cdot q_s \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, s\} : p_r \mid q_i$. O.B.d.A. sei $i = s$, d. h. $p_r \mid q_s$. Es folgt $p_r = q_s$ und $\frac{n}{p_r} = p_1 \cdot \dots \cdot p_{r-1} = q_1 \cdot \dots \cdot q_{s-1} < n$. Das bedeutet, dass $\frac{n}{p_r}$ ebenfalls zwei verschiedene Produktdarstellungen besitzt. Das ist ein Widerspruch zur angenommenen Minimalität von n . $\square$

2.4.3 Kongruenzen

Definition 2.4.13 (Kongruenzrelation). Es seien a, b und m ganze Zahlen und $m > 0$. Man vereinbart die folgende Schreib- und Sprechweise: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (b - a)$. Andere Schreibweise: $a \equiv b \pmod{m}$ an Stelle von $a \equiv b \pmod{m}$. In Worten: $a \equiv b \pmod{m}$: a ist kongruent zu b modulo m . Die Zahl m wird Modul der *Kongruenz* genannt.

Lemma 2.4.14. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $a \equiv b \pmod{m}$ genau dann, wenn a und b bei der Division durch m denselben Rest haben.

Definition 2.4.15 (Restklasse). $\bar{a} := \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a \pmod{m}\}$, also die Menge der zu a modulo m kongruenten ganzen Zahlen, heißt die *Restklasse* von a modulo m .

- Es ist $\bar{a} := \{a, a \pm m, a \pm 2m, a \pm 3m, \dots, a \pm k \cdot m, \dots\}$. Jede der Zahlen $a + v \cdot m$ kann als Repräsentant dieser Restklasse verwendet werden; insbesondere (im Falle $v = 0$) auch a selbst. Die Zahl a ist also einer der (i.A. unendlich vielen) *Repräsentanten* dieser Restklasse.

Definition 2.4.16 (Eulersche ϕ - Funktion). Es sei n eine natürliche Zahl. Mit $\phi(n)$ wird die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen zwischen 1 und n bezeichnet. Die Funktion ϕ heißt *Eulersche ϕ -Funktion*.

Beispiel:

Für $n = 12$ sind die entsprechenden teilerfremden Zahlen: 1, 5, 7, 11; also ist $\phi(12) = 4$.

2.4.4 Zahlenfolgen

Definition 2.4.17 (Fibonacci-Folge). Nach Ziegenbalg (2018) bilden die Fibonacci-Zahlen eine Zahlenfolge, die (rekursiv) folgendermaßen definiert ist:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1 & \text{für } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Die dritte Zeile der Definition besagt, dass sich jede Fibonacci Zahl (nach den beiden Anfangswerten) aus der Summe ihrer beiden Vorgänger ergibt.
- Die Zahlen der Fibonacci-Folge stehen im unmittelbaren Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt. Die Quotienten der aufeinanderfolgenden Zahlen nähern sich mit Fortschreiten der Folge alternierend dem Verhältnis 1,618... an (Beispiel: $13 : 8 = 1,6250$; $21 : 13 \approx 1,6154$ (Stelzner, 2003)). Zum Goldenen Schnitt kann in Kapitel 2.3.3 noch weiter gelesen werden.
- Die Zahlen der Fibonacci-Folge folgen bestimmten Teilbarkeitsmustern.

2.4.5 Algorithmen

Definition 2.4.18 (Algorithmus). Ein Algorithmus ist ein deterministisches Verfahren, das auf eine bestimmte Klasse von Eingaben (Zahlen, Zeichen, Operatoren) angewandt werden kann und für jede dieser Eingaben eine entsprechende Ausgabe generiert (Rogers, 2002).

Bemerkungen:

- Ein Algorithmus besteht aus endlich vielen und wohldefinierten Abfolgeschritten.
- Der Zweck eines Algorithmus ist die Lösung von (mathematischen) Problemen.

Definition 2.4.19 (Sieb des Eratosthenes). Das Sieb des Eratosthenes ist ein Algorithmus zum Bestimmen von Primzahlen bis zu einer gewissen Schranke n .

Prozedur:

Streiche nach dem Finden einer Primzahl p alle Vielfachen von p ($2p, 3p, \dots$). Die kleinste noch nicht gestrichene Zahl ist die nächste Primzahl. Um alle Primzahlen bis zu einer Zahl x zu finden, reicht es Vielfache von Primzahlen $\leq \sqrt{x}$ zu streichen, da das Quadrat einer Primzahl $z \geq \sqrt{x} + 1$ bereits größer als x wäre und alle anderen Vielfachen von z bereits gestrichen wurden.

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

Mikrowelten sind für Lernende ein großartiges Hilfswerkzeug zum Erlernen und Eintauchen in verschiedenen Teilgebiete der Mathematik. Dieses Kapitel befasst sich mit zahlentheoretischen Mikrowelten. Auf Basis der vorhandenen Forschung soll ein Überblick der zahlentheoretischen digitalen Mikrowelten geschaffen werden. In 3.4 sind die beschriebenen Mikrowelten im Hinblick auf ihre Intention und Funktionalität nebeneinandergestellt zu ihrem Vergleich.

Es sei bereits an dieser Stelle festgehalten, dass es eine Vielzahl an Mikrowelten gibt, und damit verbunden auch zahlreiche Forschungen. Allerdings befassen sich nur sehr wenige Mikrowelten mit dem mathematischen Teilgebiet der Zahlentheorie.

Die nachfolgend vorgestellten Lernumgebungen stammen aus den Jahren 1989 (Bunny Numerics) und 2003 (Number Worlds). Die Funktionalität und Effektivität der Mikrowelt *Number Worlds* wurde durch ein Forschungsprojekt untersucht und dessen Ergebnisse unmittelbar nach der Darstellung der Mikrowelt angeführt. Zum Verfassungszeitpunkt dieser Arbeit wurden keine weiteren digitalen Mikrowelten mit Fokus auf zahlentheoretische Inhalte gefunden. Aus diesem Grund wird im festgelegten Vergleichsrahmen die digitale Lernumgebung Number Line Microworld (2021), eine Mikrowelt zur Darstellung von Zahlen und Rechenoperationen auf der Zahlengerade, hinzugenommen. Durch die behandelten arithmetischen Grundthemen, sowie moderne didaktische Ansätze und Realisierung der Umgebung, zeigt sich Number Line Microworld lohnenswert zur Gegenüberstellungen zu den anderen Mikrowelten dieser Arbeit.

Für eine gute Übersichtlichkeit beim Vergleich wird bei der Darstellung der drei Mikrowelten wie folgt vorgegangen:

- Einführend wird der Entstehungskontext der Mikrowelt dargestellt, vor allem die Entwicklungsgründe und -umgebung sowie die angestrebte Zielgruppe.
- Anschließend wird die jeweilige Lernumgebung mit ihren Funktionen und Aufgaben ausführlich beschrieben.

3.1 Number Worlds

3.1.1 Zielsetzung und Rahmenbedingungen

Die digitale Lernumgebung *Number Worlds* wurde im Jahr 2003 von *Nathalie Sinclair* mit dem Ziel konzipiert, Lernende bei der Erforschung elementarer zahlentheoretischer Konzepte zu unterstützen (Sinclair et al., 2003; Liljedahl et al., 2006). Anlass zur Entwicklung von *Number Worlds* waren jüngste Forschungserkenntnisse aus der Mathematikdidaktik, die den curricularen Fokus in der Anwendbarkeit der Mathematik erkannten. Dadurch werden innermathematische Beziehungen und Strukturen im Unterricht oft übersehen oder unzureichend erklärt, vor allem im Bereich der natürlichen Zahlen. Zum Beispiel:

- In Bezug auf Faktoren und Vielfache besteht die Erkenntnis, dass Lernende die zwei Begriffe oft verwechseln und deren Verbindung nicht umfassend begreifen. Besonders der Umkehrschluss, dass angenommen a ein Faktor von b ist, dann b ein Vielfaches von a ist, wird von Lernenden nicht erkannt. (Siehe 2.4.2)
- In Bezug auf Faktoren herrscht die intuitive Annahme, dass große Zahlen - mit Ausnahme von Primzahlen - mehr Faktoren haben als kleine Zahlen (Zazkis, 1999). Auch gehen Lernende davon aus, dass große zusammengesetzte Zahlen unbedingt kleine Primfaktoren besitzen müssen (Zazkis und Campbell, 1996b). Als Beispiel dafür wird die Zahl 391 ($= 17 \cdot 23$) angeführt, die von Studienteilnehmer*innen als Primzahl angenommen wurde, weil sie keine Primfaktoren kleiner als 10 enthält. Weitere Studien, zum Beispiel (Zazkis und Liljedahl, 2002), kamen zu einem ähnlichen Ergebnis.
- Bezüglich der Vielfachen ist es für Mathematiker*innen selbstverständlich, dass jede n -te Zahl ein Vielfaches von n ist. Dieser Zusammenhang ist aber für Lernende, Studierende und sogar angehende Lehrkräfte laut (Zazkis und Campbell, 1996a) nicht immer offensichtlich. Studienteilnehmer*innen führten häufig lange Divisionen durch, um zu bestätigen, dass es in einem gegebenen Intervall von 10 Zahlen tatsächlich eine durch 7 teilbare Zahl gibt.

Die digitale zahlentheoretische Mikrowelt *Number Worlds* soll dazu beitragen, Lernschwierigkeiten zu den oben genannten Themenbereichen tiefgründiger zu verstehen und Heranwachsenden neue und bessere Lernmöglichkeiten zu bieten.

Bei der Entwicklung der Mikrowelt stellte Sinclair fest, dass es kaum ähnliche Lernumgebungen für elementare Zahlentheorie gibt und es auch an Forschung und Erkenntnissen im Bereich der schüler*innen-gerechten visuellen Darstellungen und experimentellen Schnittstellen fehlt. Faktorisierungsbäume und Zahlengeraden seien zwar weit verbreitete visuelle Repräsentationen im Bereich der Zahlentheorie, allerdings sind diese auf einzelne Themen der Mathematik bezogen und dadurch sehr begrenzt in ihren didaktischen Funktionen.

3.1.2 Inhalt

Number Worlds stellt nach der Definition von Edwards (1998) eine Verkörperung des mathematischen Teilgebiets der Zahlentheorie dar. Die Mikrowelt soll ein „Forschungswerkzeug“ (vgl. 2.2) sein und dabei: verschiedene Repräsentationen anbieten, das Lernen von mathematischen Objekten und deren Beziehungen zueinander fördern, das Sammeln von neuen Erfahrungen im mathematischen Teilgebiet der Zahlentheorie ermöglichen und allgemein zum analytischen Arbeiten motivieren.

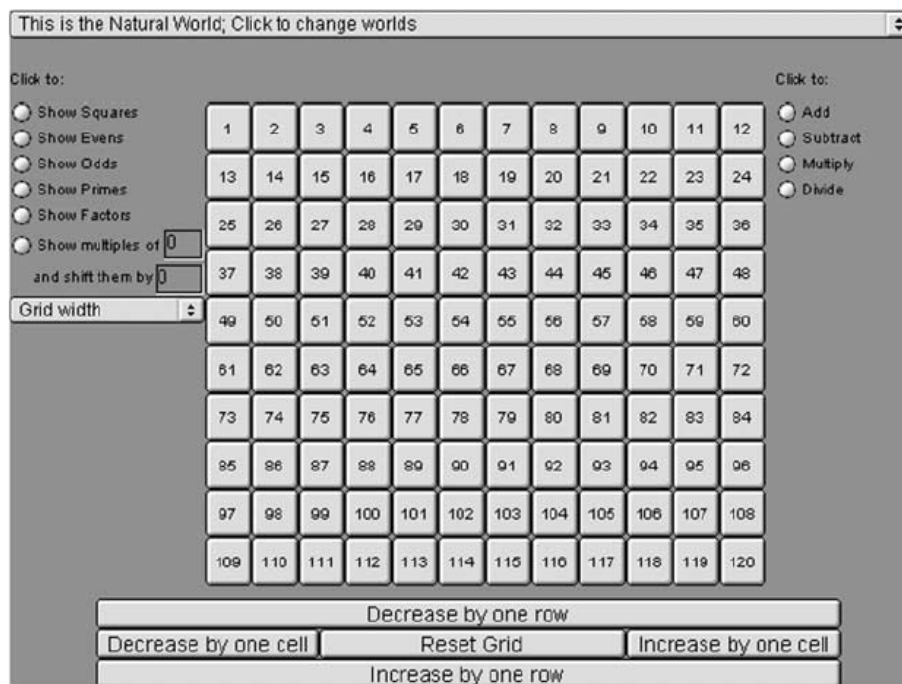


Abbildung 3.1: Number Worlds Mikrowelt (Sinclair et al., 2003, S. 239).

Abbildung 3.1.2 zeigt das programmierte *Number Worlds* - Applet. Als Erstes müssen Anwender*innen im oberen Drop-Down-Menü eine Zahlenwelt wählen. Angeboten werden *Natural World* (die natürlichen Zahlen ohne 0), *Whole World* (alle positiven ganzen Zahlen mit 0), *Even World* (die geraden natürlichen Zahlen), *Odd World* (die ungeraden natürlichen Zahlen) und *Prime World* (die Primzahlen). Jede der Auswahlmöglichkeiten generiert im mittleren Zellbereich die entsprechenden Zahlen.

Der mittlere Bereich besteht aus einem zweidimensionalen Array von anklickbaren Zellen. Der Zahlenbereich kann mittels Hinzufügen oder Löschen von Zeilen, Spalten oder einzelnen Zellen - bis auf ein Maximum von 10 Zeilen/Spalten bearbeitet werden. Auch die Zeilenbreite kann zwischen 1 und 12 variiert werden.

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

In jeder ausgewählten Welt können bestimmte Zahlen hervorgehoben werden: Quadratzahlen, gerade und ungerade Zahlen, Primzahlen, Teiler und Vielfache. Bei den Vielfachen können Verschiebungen eingestellt werden, um verschiedenste arithmetische Folgen erzeugen zu können. Auch ist es möglich, mit den Zahlen in Form von Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zu operieren. Das Ergebnis wird im Zellbereich hervorgehoben.

Es ist also zu erkennen, dass Number Worlds Funktionen der elementaren Zahlentheorie der natürlichen Zahlen darstellt. Die zweidimensionale Repräsentation der natürlichen Zahlen soll Lernende aus ihrer gewohnten visuellen Darstellung (eindimensionale Zahlengerade) herausführen und durch das Entdecken von Mustern, Strukturen und Zusammenhängen zu neuen Erfahrungen und tiefgründigem Verständnis beitragen.

Streifen und Teilbarkeiten

Die Verbindung zwischen dem Anzeigen von Vielfachen und der Breite des Arrays bestimmt das entstehende Muster der angezeigten Vielfachen. Zum Beispiel zeigen die Vielfachen von 10 bei einer Zeilenbreite von 10 einen „Streifen“. Vielfache von 5, oder 2 zeigen bei einer Zeilenbreite von 10 entweder 2, oder 5 Streifen. Generell entsteht eine solche Struktur, wenn die Zeilenbreite von dem festgelegten Vielfachen geteilt wird.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(a) Multiples of 10, gw = 10 (b) Multiples of 2, gw = 10 (c) Multiples of 5, gw = 10

Abbildung 3.2: Vielfache in einer Zellenbreite von 10 (Sinclair et al., 2003, S. 241).

Verschiebungen von Streifen und erstes Vielfaches

Vielfache von 10 bei einer Zeilenbreite von 10 ergeben eine Streifenstruktur. Der Streifen wird verschoben, wenn der Wert verschoben wird (zum Beispiel Vielfache von 9). Um also Zahlen in einem Streifen hervorzuheben, ist eine negative Verschiebung erforderlich, zum Beispiel wenn in der natürlichen Welt 2 addiert oder 8 subtrahiert werden (vgl. Abbildung 3.3). In Whole World existiert der *perfekte* Streifen nicht, da auch 0 immer hervorgehoben wird.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(a) Multiples of 10, shift 2 (b) Multiples of 10, shift -8

Abbildung 3.3: Verschiebungsoperation (Sinclair et al., 2003, S. 241).

Diagonalen und nicht vorhandene Teilbarkeiten

Eine weitere erzeugbare Struktur sind Diagonalen. Diagonalen entstehen zum Beispiel in Abbildung 3.4, wenn Vielfache von 2, 4, 5 und 7 mit einer Zeilenbreite von 9 angezeigt werden:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58
60	61	62	63	64	65	66	67	68
70	71	72	73	74	75	76	77	78
80	81	82	83	84	85	86	87	88
90	91	92	93	94	95	96	97	98

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58
60	61	62	63	64	65	66	67	68
70	71	72	73	74	75	76	77	78
80	81	82	83	84	85	86	87	88
90	91	92	93	94	95	96	97	98

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58
60	61	62	63	64	65	66	67	68
70	71	72	73	74	75	76	77	78
80	81	82	83	84	85	86	87	88
90	91	92	93	94	95	96	97	98

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58
60	61	62	63	64	65	66	67	68
70	71	72	73	74	75	76	77	78
80	81	82	83	84	85	86	87	88
90	91	92	93	94	95	96	97	98

(a) $m = 2$, $gw = 9$ (b) $m = 4$, $gw = 9$ (c) $m = 5$, $gw = 9$ (d) $m = 7$, $gw = 9$

Abbildung 3.4: Zusammenhang Zeilenbreite(gw) und Vielfache(m) (Sinclair et al., 2003, S. 241).

Generell entstehen Diagonalen, wenn Vielfache von m bei einer Zeilenbreite von n angezeigt werden, wobei m ein Teiler von $n \pm 1$ ist. Beispiel d) in 3.4 wird erzeugt, indem m weder von n noch von $n \pm 1$ ein Teiler ist. Beispiel a) in der selben Abbildung entsteht

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

dadurch, dass Vielfache von 2 bei ungerader Zeilenbreite hervorgehoben werden. Durch die vorteilhafte visuelle Repräsentation solcher Strukturzerzeugnisse werden Gemeinsamkeiten und Verbindungen hervorgehoben.

Verschiebungen und Kongruenzklassen

Wenn eine Verschiebung („*shift*“) vorgenommen wird, ändert sich das Muster von Vielfachen nicht - es ändert sich nur die Position. Grundsätzlich kann man mit Verschiebungen und Vielfachen jegliche arithmetische Folge darstellen. Die Darstellung von Vielfachen von m und Verschiebungen von s stellen die Kongruenzklasse Modulo s dar (Für zwei ganze Zahlen a und b gilt: a ist kongruent zu b modulo m , wenn m der Teiler von $a - b$ ist. D.h. a und b haben denselben Rest bei Division durch m . Nachzulesen unter 2.4.15) (Ziegenbalg, 2015).

Primzahlen

Wenn Primzahlen ausgewählt werden, so werden nie Zellen von Spalten (bei Spaltenbreite 10) mit *geraden* Zahlen hervorgehoben (vgl. 2.4.2). Zusätzlich ist bei selber Spaltenbreite in der Spalte mit der Zahl 5 nur 5 selbst als Primzahl dargestellt - sonst ist auch diese Spalte ohne weitere Primzahl. Wenn nur Primzahlen in der Ungeraden Welt (*Odd World*) angezeigt werden, so stehen alle Zwillingssprimzahlen nebeneinander. Wenn man sich in der Primzahlenwelt alle ungeraden Zahlen hervorhebt, so sind alle Zahlen außer 2 dargestellt, welche auch die erste Zelle der Primzahlenwelt ist.

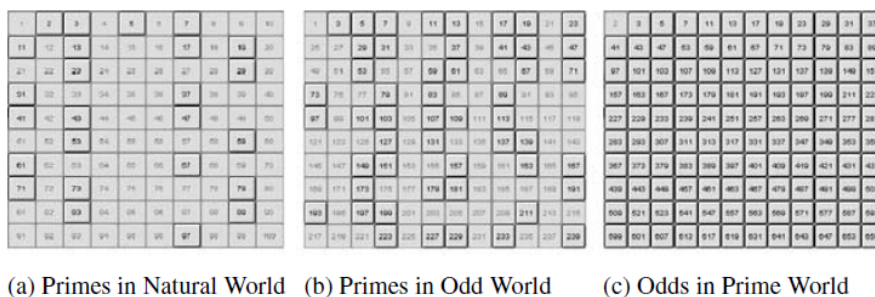


Abbildung 3.5: Primzahlen in verschiedenen Welten (Sinclair et al., 2003, S. 243).

Arithmetische Operationen

Addition, Subtraktion und Multiplikation sind in Number Worlds durchführbar. Bei der Division wird der ganzzahlige Quotient und Rest zurückgegeben, da Number Worlds eine zahlentheoretische Mikrowelt der ganzen Zahlen ist. Wenn ein Ergebnis einer arithmetischen Operation nicht in die ausgewählte Welt gehört, so wird das explizit angezeigt (zum Beispiel $5 - 17$ ist nicht Teil der natürlichen Welt, $5 \cdot 11$ ist nicht Teil der Primzahlenwelt).

3.1.3 Forschung

Sinclair et al. (2003) führten eine Number Worlds-Studie durch. Es sollte untersucht werden, ob die explorativen Elemente der Mikrowelt eine positive Wirkung auf das Verständnis elementarer zahlentheoretischer Strukturen (und deren Querverbindungen) haben. Des Weiteren sollte das Arbeiten an einer computerbasierten Lernumgebung beobachtet werden, wobei Wahrnehmungen, Schwierigkeiten und intuitive Handlungen der Proband*innen (bezüglich zahlentheoretischer Konzepte) festgehalten und analysiert wurden.

Im Rahmen dieser Forschung erklärten sich 90 Grundschullehrer*innen (*pre-Service elementary school teacher*) bereit, Number Worlds in ihrem Unterricht einzusetzen. Zur Vorbereitung nahmen die Lehrpersonen an einem Kurs teil, in dem sie mittels Materialien und Austausch verschiedene Inhalte der Zahlentheorie vertieften (Teilbarkeit, Teilbarkeitsregeln, Primzahlen, zusammengesetzte Zahlen, Teiler und Vielfache, größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfache). Im Anschluss wurden sie mit den Funktionen der Mikrowelt Number Worlds als Applet vertraut gemacht.

Die Schüler*innen, die an der Studie teilnahmen, erhielten eine schriftliche Anleitung zur Verwendung von Number Worlds, eine Beschreibung der Operationen und Fähigkeiten der Mikrowelt sowie eine Liste an Einstiegsaufgaben (in Form von „*Finde eine Zahl kleiner als 45, die mehr Teiler hat als diese*“, oder „*Versuche die Zahlen z , 14, 21, ... bzw. die Zahlen 8, 15, 22, ... hervorzuheben*“), um die neue Lernumgebung kennenzulernen. Den Schüler*innen stand es frei, die Einstiegsaufgaben zu Hause oder in der Schule im Computer-Labor zu lösen.

Ein wichtiger Aspekt der Studie war, dass bereits junge Schüler*innen (ab Sekundarstufe 1) durch Experimentieren und durch die unterschiedlichen Visualisierungen zahlentheoretischer Konzepte in die Arbeit mit komplexeren zahlentheoretischen Zusammenhängen eingeführt werden (Sinclair et al., 2003, S. 1). Nach Einschätzung der Autor*innen unterstützt das Arbeiten mit einer computerbasierten Lernumgebung genau diese Zielgruppe, bei der es Lehrer*innen noch am schwersten fällt, zahlentheoretische Konzepte zu vermitteln.

Für den weiteren Verlauf der Studie erstellten Sinclair et al. (2003) verschiedene Aufgaben zum Arbeiten in der Mikrowelt. Die Schüler*innen mussten vorgegebene Probleme mit den Funktionen von Number Worlds lösen und dabei Strukturen und Zusammenhänge der Zahlentheorie entdecken und erforschen.

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

Die Forschungsergebnisse entstanden über drei Kanäle:

- Beobachtungen: Während der zugewiesenen Laborstunden wurde die Arbeit der Schüler*innen beobachtet und bei Bedarf wurden Hilfestellung gegeben. Häufig gestellte Fragen, gewählte Wege zur Erkundung, Vermutungen sowie die gewählten Ansätze zum Testen von Vermutungen wurden notiert. Diese dienten als Basis zur Entwicklung eines Interviewleitfadens für die späteren Interviews.
- Schriftliche Aufgaben: Im Anschluss an die Erkundungsaufgaben im Labor erhielten die Teilnehmer*innen eine zusätzliche Liste von Aufgaben, zu denen eine schriftliche Antwort in einem Zeitraum von zwei Wochen erbeten wurde. Dabei mussten die Schüler*innen ihre Arbeit mit Number Worlds (mit Fokus auf Teilbarkeiten und Vielfache) selbst beobachten und schriftlich festhalten. Ein Beispiel für die Fragen ist: „*Beschreibe mindestens drei Wege, Diagonale hervorzuheben*“.
- Interviews: Als Letztes wurden mit sieben freiwilligen Teilnehmer*innen klinische Interviews durchgeführt, um vertiefend auf Ergebnisse der ersten beiden Forschungsmethoden einzugehen.

3.1.4 Ergebnisse

Die erhobenen Daten wurden ihrer inhaltlichen Natur gemäß in zwei Bereiche geteilt: *Effekte der Visualisierung* und *Effekte des Experimentierens*. In beiden Bereichen werden von den Interviews und Beobachtungen Zitate der Probanden von (Sinclair et al., 2003, S. 245 ff.) zur Veranschaulichung der Erkenntnisse angeführt.

Effekte der Visualisierung

Die visuelle Darstellung der zahlentheoretischen Inhalte in Number Worlds hatte Auswirkungen auf das Verständnis des Vielfachen-Konzepts sowie auf die Wahrnehmung des Unterschieds zwischen Vielfachen und Faktoren.

Verständnis zu Vielfache

Sowohl durch die Interviews als auch durch die Antworten auf die schriftlichen Aufgaben wurde deutlich, dass die Wahrnehmung der Vielfachen bei den teilnehmenden Schüler*innen durch Number Worlds beeinflusst wurde. Vor der Verwendung der Mikrowelt wurden Vielfache von den Teilnehmer*innen häufig als eine aufgezählte Liste von Zahlen (z.B. 4, 8, 12, 16, usw.) betrachtet. Dabei lag ihr Fokus bei jeder einzelnen Zahl. Durch die Visualisierung in Number Worlds rückt der konstant leere Zwischenraum zwischen den Vielfachen in den Fokus, sodass die Lernenden das Bild einer konstanten Verteilung der Vielfachen gewinnen konnten.

Bei einer Interviewfrage mussten die Schüler*innen vier verschiedene Bilder identifizieren, die Primzahlen, Faktoren, Quadratzahlen oder Vielfache darstellten. Alle Befragten erkannten sofort das Bild der Vielfachen (*“So that’s multiples, because you have the*

same amount of space between each, I think it's multiples of 5"). Bei einer weiteren Interviewfrage konnten Vielfache anhand der Beispielsbilder ausgeschlossen werden, da der Abstand offensichtlich nicht konstant war. Eine weitere Erkenntnis der Teilnehmer*innen war, dass die Größe einer Zahl m bestimmt, wie groß der Abstand zwischen ihren Vielfachen ist.

Das Merkmal des konstanten Abstandes - eine visuelle Repräsentation der Eigenschaft, dass *jede n -te Zahl eine Vielfache von n ist* (Siehe 2.4.2) - konnte in früheren Studien von den Teilnehmer*innen nicht erkannt bzw. angewendet werden (Zazkis und Campbell, 1996a; Ferrari, 2002).

Die Visualisierung macht das Konzept der Vielfachen begreifbarer als die rein theoretische Definition in Form von *jede n -te Zahl*.

Faktoren und Vielfache

Vorstudien zeigen, dass Schüler*innen arithmetische Sequenzen von Nicht-Multiplikatoren, d.h. verschobenen Vielfachen, nicht mehr als arithmetische Folge erkennen (im Gegensatz zu einfachen Folgen von Vielfachen). Sowohl in den schriftlichen Arbeiten als auch in den klinischen Interviews erkannten die Teilnehmer*innen von Sinclair et al. (2003) weitgehend und konsequent alle arithmetischen Sequenzen (Vielfache und z.B. verschobene Vielfache) und beschrieben diese mit reichhaltigen Adjektiven wie zum Beispiel („*konstant, fortfolgend, symmetrisch, vorhersehbar,...*“). Im Gegensatz dazu charakterisierten die Teilnehmer Faktoren als „*verteilt, inkonsistent, unsymmetrisch, zufällig, usw.*“.

Die Autor*innen gehen davon aus, dass Erwartungen und Erkenntnisse durch die Visualisierung der Folgen auf die Teiler übertragen wurden. Erst bei der visuellen Darstellung erkannten die Lernenden den Kontrast zwischen Vielfache und Faktoren sowie die starke Ähnlichkeit der Vielfachen mit einer arithmetischen Folge.

Zusätzlich zu den kontrastierenden Adjektiven, die für Faktoren genannt wurden, bemerkten die Teilnehmer*innen auch einige besondere visuelle Merkmale der Faktoren (Sinclair et al., 2003, S. 248):

“The visual image I have of factors are contained and finite. Visually they are clustered towards the top of the grid and thin out as the factors get larger. The multiple is visually separate from the factors and stands on its own.”

“Spaces between the original numbers and the next cell will be very large but as we move down to the next highlighted cell the space between it and the previous will be smaller and this pattern will continue until we reach one.”

“The visual image I have of factors is that there isn't a common difference. A factor of a number is never larger than half the number being factored, not including the number itself.”

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

Besonders das dritte Zitat zeigt, dass die Schüler*innen neue und wichtige Erkenntnisse während des Arbeitens mit Number Worlds gewonnen haben, ohne die dazugehörige Theorie zu kennen. Die visuelle Repräsentation von Teilern und Vielfachen durch die digitale Mikrowelt Number Worlds wurde von vielen der Teilnehmer*innen in die eigenen Wissensstrukturen integriert. Doch der Wissenserwerb ist nicht universell, wie folgendes Interview-Zitat einer Teilnehmerin zeigt. Sie hat die vorhandenen Wissenstrukturen über Vielfache nicht überdacht, sondern eine Parallelstruktur aufgebaut:

“Multiples work together creating a pattern of some sort, such as a collection of columns, a checkerboard, a diagonal or collection of connected and disconnected diagonals. They spread far and wide, and keep on going forever, but are still somehow connected. Multiples make me think of emails which are written by one person, starting out at that one point and then keep getting forwarded and sent on and on...”

Eine andere Teilnehmerin war sich früher unsicher bezüglich den begrifflichen Unterschieden zwischen Faktoren und Vielfachen. Nach dem Arbeiten in Number Worlds konnte sie die Wörter richtig verwenden und anwenden, weil sie sich dafür die visuelle Darstellung hervorruft:

“I usually, before I got multiples and factors really mixed up, I couldn’t remember which is which and now I know what factors look like, and what multiples would look like, so I just have a better understanding of the concepts.”

“I didn’t really realise the patterns of multiples until it was showing visually in front of me, I knew they went on but I didn’t, the difference between the multiples and the factors and the patterns that they created, I didn’t really know that before. I never thought of it before.”

Die visuelle Repräsentation durch Number Worlds konnte also viele verschiedene positive Verständniseffekte bei den Teilnehmer*innen der Studie erzeugen. Diese haben neue Wissensstrukturen aufgebaut bzw. alte verworfen und die Arbeit mit der Mikrowelt führte zu einem fundierteren Zahlenverständnis, besonders in Bezug auf Teiler und Vielfache.

Effekte des Experimentierens

Nicht nur die visuelle Repräsentation in der digitalen Mikrowelt hatte Effekte auf die Schüler*innen, auch das reine Forschen und Experimentieren mit Number Worlds beeinflusste ihr mathematisches Verständnis.

Viele Aufgabenstellungen forderten die Kinder auf, durch Ausprobieren zu allgemeingültigen Schlüssen zu kommen. Zum Beispiel mussten mehrere Zahlen gefunden werden, die genau drei Teiler haben. Es konnte beobachtet werden, wie Schüler*innen durch Experimentieren beim Suchen dieser Zahlen neue Zusammenhänge erkennen (*Alle Zahlen sind Quadratzahlen*). Die relevantesten Erkenntnisse der Beobachtungen werden in Folge

beschrieben:

Große Zahlen

Vorforschungen der Autor*innen ergaben, dass Schüler*innen intuitiv davon ausgehen, dass große Zahlen mehr Teiler haben als kleine Zahlen (Zazkis, 1999). Das Experimentieren in Number Worlds konfrontierte die Lernenden mit dieser Fehlvorstellung. Eine Aufgabe forderte die Teilnehmer*innen auf, eine Zahl kleiner als 45 zu finden, die mehr Teiler hat als die Zahl 45. Das Finden solcher Zahlen war für die Schüler*innen überraschend:

“In addition, in most cases there are fewer factors if the number is low, and more factors as the number gets higher, generally. This is not always true however as there are many large numbers that have few factors or are prime”

Die Vorstellung, dass größere Zahlen mehr Teiler als kleinere Zahlen haben, konnte also durch das Experimentieren in Numbers World korrigiert werden. Zusätzlich wurden allgemeingültige Erkenntnisse darüber gewonnen, welche Zahlen eine bestimmte Anzahl an Teilern haben (z.B. Zahlen mit 4 Teilern).

Primzahlen und Teiler

Schüler*innen erkannten Zahlen in der Produktschreibweise nicht als zusammengesetzte Zahlen. Auch verstanden sie nicht, dass ein Produkt zweier Primzahlen nicht selbst eine Primzahl sein kann. In der Interviewphase der Forschung wurde gefragt, ob zwei Primzahlen abgeschlossen bezüglich der Multiplikation sind. Diese Frage konnten die Schüler*innen mithilfe von Prime World durch Finden eines Gegenbeispiels leicht beantworten. Erkenntnisse zu zusammengesetzten Zahlen und Primzahlen wurden folgendermaßen verbalisiert:

“going into it I did have the information at hand on how we deduce the amount of factors a certain number has, but to be able to work with the applet and that showed me a different way. I mean, I realised maybe more so that uh two prime numbers form a composite, and stuff like that.”

“This program has shown me visually that the product of two prime numbers, three and five for example, elicits a number with four factors: one, three, five, and the composite number fifteen.”

Es war für viele überraschend, dass das Produkt zweier Primzahlen immer vier Faktoren hat. Dieses Wissen (u.a.) konnte durch Number Worlds einfach vermittelt und generalisiert werden.

Weitere Erfahrungen

Die Teilnehmer*innen arbeiteten enthusiastisch und erforschend mit Number Worlds. Mit Freude und Verwunderung erzeugten sie Muster wie Streifen und Diagonalen. Manche

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

empfanden das Arbeiten am Computer mit Number Worlds aber auch anstrengend und ablenkend. Die Schüler*innen erzählten, dass sie das Erzeugen von Diagonalen oder anderen komplexen Mustern als ästhetisch, Streifen aber dafür als langweilig empfanden:

“Multiples can create some visually pleasing stripes and diagonals along with some eyestraining checkerboards. There is a sense of order in the universe upon viewing some stripes on the grid. I look at those stripes and think that I can instantly recognise this regular pattern as a logical pattern.”

Für einige war durch das Erzeugen von Mustern die Ästhetik ihre Hauptmotivation, zahlentheoretische Inhalte vertiefend zu erforschen. Die erzeugten Muster in Number Worlds hatten eine größere Aussagekraft über Zahlenzusammenhänge als die rein theoretische Vermittlung der Inhalte. Diese Ästhetik erzeugte bei den Teilnehmer*innen eine neue Weise des mathematischen Denkens über Zahlen und deren Zusammenhänge:

“I find it interesting, the whole idea of the cells highlighting and seeing how they relate and just like even looking at these pictures too, kind of making everything back to the visual image that it created and how they related to each other and how it’s like not prime or how it is prime, because of it.”

“if you do a number line, every even number is, you see it in a line, but somehow in a pattern you really see just the relationship to each other.”

Die Teilnehmer*innen erzählten, dass sich ihre Sicht auf Zahlen im Alltag durch Number Worlds verändert hatte. Wo Zahlen vorher nur eine Relation zu sich selbst hatten, standen sie nun in reichhaltiger Verbindung und sie motivieren zum Weiterforschen. Auch die praktischen Möglichkeiten, die Number Worlds bot, wurden von den Schüler*innen angesprochen. Sie konnten schnell und unkompliziert Ideen und Theorien über Zahlenzusammenhänge ausprobieren, um sie zu bestätigen, zu verwerfen oder anzupassen:

“when you’re actually working with it and it’s not somebody just telling you how it is and you’re actually seeing it for yourself, so if you get to try things out and you get to see what your results are and you get to make predictions and then see if they’re right or wrong, I think that helps. Because it’s not so much somebody tells you something.”

Die Angst vor Fehlern konnte durch das einfache Erforschen und Anpassen minimiert werden. Durch das Arbeiten am Computer konnten die Schüler*innen Rechenprozesse aus ihrem Denken auslagern und sich mehr auf die Logik von Zusammenhängen konzentrieren.

Aus den Zitaten der Teilnehmer*innen und den zusammengefassten Effekten kann das Resümee gezogen werden, dass Number Worlds das Erforschen von elementaren zahlentheoretischen Konzepten und Problemen motivierend unterstützt und neue Perspektiven eröffnet.

3.2 Bunny Numerics

Bunny Numerics ist eine Logo-basierte Lernumgebung mit dem Ziel, mathematische Problemlösestrategien auszubauen und Denkprozesse der wissenschaftlichen Mathematik zugänglich zu machen (Graci et al., 1989).

3.2.1 Rahmenbedingungen

Die digitale Lernumgebung Bunny Numerics wurde weitgehend inspiriert von Seymour Paperts Konzept zur Erstellung eines Lehrplans basierend auf Mikrowelten (Graci et al., 1989, S. 2):

“My concept of how to create a curriculum (and by this word I mean a coherent set of materials to aid learning through the whole school period and before and after, as well) is to create a network of microworlds, each one focusing on different areas of knowledge.”

In diesem Sinne wurden auf der State University of New York, College at Oswego (SUNY Oswego) zwei Kurse zum Thema Problemlösefähigkeiten, Mathematik und Berechnungen gehalten. Zur Unterstützung dieser Kurse wurden mehrere Logo-Mikrowelten, also Add-ons zu Paperts turtle geometry microworld (Papert, 1980), erstellt, um das Lernen wissenschaftlichen mathematischen Denkens zu fördern. Eine dieser Mikrowelten davon war Bunny Numerics - eine Mikrowelt mit dem Fokus auf zahlentheoretischen Forschungen. Bunny Numerics ist eine rein Code-basierte Lernumgebung in Logo, wobei Werte und Positionen ausgegeben werden können. Sie wurde in ObjectLogo programmiert, wo schon viele der verwendeten Befehle vordefiniert waren. Dadurch war der Erstellungsaufwand der Mikrowelt sehr gering.

3.2.2 Inhalt

Die Lernumgebung Bunny Numerics besteht aus der visuellen Vorstellung einer Kaninchenwelt (*Bunny World*); einem Ozean mit einer endlosen Anzahl von nummerierten Inseln, die in einer Geraden arrangiert sind. Die erste Insel heißt Heimat („*Home*“), die weiteren Inseln 1, 2, 3 usw. (siehe Abbildung 3.6).

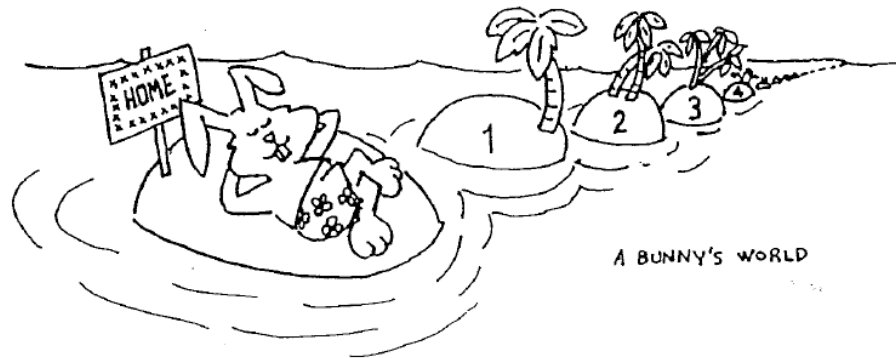


Abbildung 3.6: A Bunny's World (Graci et al., 1989, S. 2).

Die Kaninchenwelt wird von verschiedenen Rassen von Bunnys („*breeds*“) bewohnt, die den verschiedenen Zahlenarten (Gerade-, Ungerade-, Prim-, Fibonacci-Bunnys usw.) entsprechen. Die Bunnys sind durch ihre Rasse eingeschränkt, welche Insel sie betreten können. So kann ein Prim-Bunny nur auf einer Insel sein, die mit 2, 3, 5, 7, 11 etc. nummeriert ist (und auf seiner Start-Insel). Alle Kaninchen wissen, sich auf keine Inseln zu begeben, die für ihre Rasse nicht geeignet sind. Auf der Heimatinsel fühlen sich aber alle wohl, weil es der Geburtsort aller Kaninchen ist.

Standard Breeds	Birthing Operators	Standard Bunnies
Even Bunny	EvenBunny	Ed
Square Bunny	SquareBunny	Sammy
Factorial Bunny	FactorialBunny	Fred
Fibonacci Bunny	FibonacciBunny	Flo
Multiple of i Bunny	MultipleBunny $< i >$	Mark1, Mark2, ..., Mark12
Divisors of n Bunny	DivisorBunny $< n >$	Di1, Di2, ..., Di20
Prime Bunny	PrimeBunny	Pierre
Perfect Bunny	PerfectBunny	Pearl

Table 1: Some Standard Bunnies, Breeds, and Birthing Operators

Abbildung 3.7: Bunny Types (Graci et al., 1989, S. 5).

Logo-Befehle in Bunny Numerics

Die Logo-Prozeduren von Bunny Numerics werden *Bunny talk* genannt und dienen zur Kommunikation mit den Bunnys. Die wichtigsten Befehle werden in Folge genannt:

- *Hop Bunny*: Das angesteuerte Bunny hüpft zur nächsten legitimen Insel.
- *Loc (Location) bunny*: Der Name der Insel, auf der das Bunny zur Zeit steht, wird zurückgegeben.
- *Dis (Distance) Bunny*: Der Abstand zur Heimatinsel wird zurückgegeben.
- *HopHome bunny*: Das Bunny kehrt zur Heimatinsel zurück.
- *HopAge bunny*: Die Anzahl der Sprünge, die dieses Bunny seit seiner Geburt gemacht hat wird ausgegeben.

Die Standard-Bunnys in Abbildung 3.7 werden beim Programmstart erzeugt. Mit den gegebenen Befehlen (auch zu sehen in Abbildung 3.7) kann eine beliebige Anzahl von Bunnys kreiert werden. Durch das Operieren mit Bunnys können zahlentheoretische Zahlenfolgen zusammengesetzt werden:

```
? ;;view some squares, assuming Sammy is at home
? REPEAT 10 [ Hop :Sammy Type ( Loc :Sammy ) Type "| | ]
1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

? ;;view some multiples of 4, assuming Mark4 is at home
? REPEAT 10 [ Hop :Mark4 Type ( Loc :Mark4 ) Type "| | ]
4 8 12 16 20 24 28 32 36 40
```

Abbildung 3.8: Zahlenfolgen durch Hops (Graci et al., 1989, S. 4).

```
TO Sequence :b :n
  HopHome ;note that this is not a "bunny invariant" procedure
  REPEAT :n [ Hop :b Type ( Loc :b ) Type "| | ]
END

? ;;display the first 10 Fibonacci numbers
? Sequence :Flo 10
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55

? ;;display the first 10 prime numbers
? Sequence :Pierre 10
2 3 5 7 11 13 17 19 23
```

Abbildung 3.9: Weitere Bunny-Zahlenfolgen (Graci et al., 1989, S. 4).

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

Doch nicht nur Standardfolgen können erstellt werden. Durch das Erzeugen von neuen Bunnys mit modifizierter Hop-Anweisung können komplexere Folgen wie zum Beispiel Primzahlen, mit Zahlenabstand 2, ausgegeben werden:

```
TO DisplayTwinPrimes
  Make "b1 PrimeBunny
  Make "b2 PrimeBunny
  Hop :b2
  FOREVER
  [ Hop :b1 Hop :b2
  - IF ( ((Loc :b2) - (Loc :b1)) = 2 ) [ Pr List ( Loc :b1 ) ( Loc :b2 ) ]
  - ]
  END

? DisplayTwinPrimes
3 5
5 7
11 13
17 19
29 31
...
```

Abbildung 3.10: Komplexere Zahlenfolge (Graci et al., 1989, S. 4).

Mit Bunny Numerics können verschiedene Prozeduren geschrieben werden, um n Primzahlen, Quadratzahlen, Faktoren, Vielfache usw. anzuzeigen.

```
TO DisplayMultiples :m
  Make "MB MultipleBunny :m
  FOREVER [ Hop :MB Print ( Loc :MB ) ]
  END
```

Abbildung 3.11: Prozedur zum Anzeigen von Vielfachen von m (Graci et al., 1989, S. 6).

Es ist auch möglich, komplexere Prozeduren zu schreiben, zum Beispiel das Suchen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen bzw. der Primzahlen der Fibonacci-Folge:

```

TO LeastCommonMultiple :n1 :n2
  LocalMake "Jack ( MultipleBunny :n1 "Jack )
  LocalMake "Jill ( MultipleBunny :n2 "Jill )
  Hop :Jack PrintLoc :Jack
  Hop :Jill PrintLoc :Jill
  WHILE [ NOT ( ( Loc :Jack ) = ( Loc :Jill ) ) ]
  - [
    - IFELSE ( ( Loc :Jack ) < ( Loc :Jill ) )
    - [ Hop :Jack PrintLoc :Jack ]
    - [ Hop :Jill PrintLoc :Jill ]
  ]
  PrintLines 2
  ( Display "The LCM of " :n1 " and " :n2 " is: " ( Loc :Jack ) )
END

? LeastCommonMultiple 4 7
location of Jack: 4
location of Jill: 7
location of Jack: 8
location of Jill: 14
location of Jack: 12
location of Jack: 16
location of Jill: 21
location of Jack: 20
location of Jack: 24
location of Jill: 28
location of Jack: 28

The LCM of 4 and 7 is: 28

```

Abbildung 3.12: Prozedur zum Anzeigen des kgV zweier Zahlen (Graci et al., 1989, S. 6).

```

TO DisplayFiboPrimes
  LocalMake "FB FibonacciBunny
  LocalMake "PB PrimeBunny
  Hop :FB Hop :PB
  FOREVER
  - [ IFELSE ( ( Loc :FB ) = ( Loc :PB ) )
    - [ Print ( Loc :FB ) hop :FB hop :PB ]
    - [ IFELSE ( ( Loc :FB ) < ( Loc :PB ) ) [ Hop :FB ] [ Hop :PB ] ]
  ]
END

? DisplayFiboPrimes
2
3
5
13
89
233
1597
...

```

Abbildung 3.13: Prozedur für Primzahlen in der Fibonacci-Folge (Graci et al., 1989, S. 7).

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

In Abbildung 3.12 ist ersichtlich, dass Standard-Logo-Befehle notwendig sind, um in der Mikrowelt Prozeduren erzeugen zu können.

Mit Bunny Numerics können auch Teiler angezeigt werden. Im Unterschied zu Prozeduren zur Ausgabe von Vielfachen, sind die angezeigten Teiler nach unten begrenzt. Es sind also keine richtigen Sequenzen, die trotzdem angezeigt werden können:

```
TO DisplayDivisors :n
  LocalMake "Diva DivisorBunny :n
  REPEAT ( LongestTrip :Diva ) [ Hop :Diva Type Location :Diva TypeSpace ]
  PrintLine
END

? DisplayDivisors 23
1 23
? DisplayDivisors 24
1 2 3 4 6 8 12 24
```

Abbildung 3.14: Prozedur für Teiler in Bunny Numerics (Graci et al., 1989, S. 8).

Des Weiteren können durch den Befehl *BunnySet* Zahlensets aus den ersten n Elementen einer Zahlenfolge erzeugt werden.

```
? PrintSet BunnySet OddBunny 15
{ 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 }
```

Abbildung 3.15: Zahlensets in Bunny Numerics (Graci et al., 1989, S. 8).

Mit Zahlensets, verschiedenen Arten aus Bunnys, können nun mit entsprechenden Kenntnissen betreffend den Code komplexe zahlentheoretische Zusammenhänge gebildet werden, wie zum Beispiel das Sieb des Eratosthenes:

```
TO Sieve :n
  LocalMake "Numbers Diff ( BunnySet NaturalBunny :n ) ( Set 1 )
  LocalMake "Limit ( Sqrt :n )
  FOR [ i 2 :Limit ]
  [
    IF ( ElementOf :i :Numbers )
    [
      LocalMake
      "SpecialSet Diff ( BunnySet ( MultipleBunny :i ) :n ) ( Set :i )
      Make
      "Numbers ( Diff :Numbers :Specialset )
    ]
  ]
  OUTPUT ( :Numbers )
END

? PrintSet Sieve 50
{ 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 }
```

Abbildung 3.16: Sieb des Eratosthenes in Bunny Numerics (Graci et al., 1989, S. 9).

Es können auch neue Arten von Bunnys erzeugt werden. Ideen für weitere Arten sind zum Beispiel Koordinatenzahlen oder wundersame Zahlen.

Benutzbarkeit von Bunny Numerics

Der offensichtliche Nutzen von Bunny Numerics ist das Erzeugen von Zahlenfolgen, Finden von Zahlen mit bestimmten Eigenschaften, das Erproben von Vermutungen und allgemeines zahlentheoretisches Erkunden und Forschen. Schüler*innen mit zahlentheoretischem Grundwissen können (am besten unter der Anleitung einer Lehrperson) interessante Zahlenzusammenhänge in Bunny Numerics verstehen und reproduzieren lernen.

Darüber hinaus können Schüler*innen von erzeugten Zahlenfolgen im spielerischen Kontext der Bunny Numerics die nächstkommenden Inseln erraten, um auf diese Weise die Struktur einer Folge zu erforschen. In Verbindung mit der turtle geometry von Logo ist es möglich, mit Bunny Numerics auch Zahlenkreuzworträtsel zu erstellen.

3.3 Number Line Microworld

Basierend auf dem Erfolg von älteren didaktischen Modellen zu Programmieren in der Grundschule zogen Goldenberg et al. (2021) den Schluss, dass Programmieren das Potential hat, Schüler*innen beim Verstehen von mathematischen Inhalten zu unterstützen. Im Rahmen eines Projektes entwickelten sie vier Mikrowelten für die wichtigsten Inhalte der Mathematik der zweiten Schulstufe. Die ausführlichste, *Number Line Microworld*, ist eine arithmetische Mikrowelt, bei der eine Zahlengerade dargestellt wird und ein Positionskreis durch Additionen und Subtraktionen manipuliert werden kann.

3.3.1 Rahmenbedingungen

Das Projekt von Goldenberg et al. (2021) wurde durch zwei frühere Modelle zur Integration von Programmierung in die Grundschulmathematik inspiriert, eines davon aus Bulgarien und das zweite (ScratchMaths) aus dem Vereinigten Königreich.

Der bulgarische Ansatz aus den 1980er Jahren war, dass Schüler*innen lernen können, altersgerechte mathematische Ideen in einer Computersprache auszudrücken. Beginnend mit der Grundschule wurden die Kinder mit den Grundzügen des Programmierens im Zusammenhang mit Sprache und Mathematik vertraut gemacht. Es hat sich gezeigt, dass Schüler*innen, die im frühen Alter bei gleich bleibender Programmiersprache ins Programmieren eingeführt wurden, diese in der Mittelstufe schon ausdrucksstark verwenden und komplexere Programme zur Untersuchung von Geometrie und Algebra erstellen konnten (Sendova E. & Sendov B., 1994; Sendova E., 2013).

Das britische ScratchMaths-Projekt (vom Institute of Education des University College London) integrierte Kinder in eine zweijährige Lernerfahrung mit Mathematik und Programmieren, basierend auf der Annahme, dass Mathematik zugänglicher wird, wenn Kinder eine bessere Sprachoption haben (bzw. explizit auch eine angemessene Computersprache), mit der sie ihre mathematischen Ideen ausdrücken können. Eine spätere zufallsgesteuerte Kontrollstudie zur Bewertung der Auswirkungen des Programmierens auf das rechnerische und mathematische Denken der Kinder in den Klassen vier und fünf in über 110 Grundschulen im Vereinigten Königreich zeigte signifikante Auswirkungen (Benton et al., 2018a,b).

Die zwei früheren Forschungen zeigten also, dass Programmieren bei altersgerechter Gestaltung das Potenzial hat, das mathematische Verständnis der Schüler*innen *im Rahmen des schulischen Lehrplans* zu fördern. Goldenberg et al. (2021) gehen davon aus, dass die Erfolge insbesondere darauf zurückzuführen sind, dass Programmieren - im Gegensatz zum Aufschreiben/Notieren - eine „lebende“ Sprache ist, die der natürlichen Sprache der Schüler*innen sehr ähnlich ist. Beim Programmieren kann man die Implementierung gleich sehen, genauso wie im natürlichen Dialog auf eine Aussage eine Reaktion folgt.

Beim Erstellen der Mikrowelt fokussierten sich die Autoren auf die wichtigsten mathematischen Inhalte der Schulstufe sowie ein schülerzentriertes Lernen mit wenig kognitiven Ablenkungen. Durch das Design der Entwicklungsumgebung werden mathematische- und Programmierkenntnisse zu gleichen Teilen aufbauend vermittelt.

Da die Programmiersprache natürlich und einfach sein sollte, wurde die block-basierte Sprache *Snap!* gewählt. Dadurch können sich die Schüler*innen auf die mathematischen Schlüsselwörter fokussieren, statt auf die Semantik einer Programmiersprache. Ein weiterer Vorteil von Snap! ist, dass Funktionen nicht nur untereinander zusammengesetzt werden können, sondern auch ineinander, zum Beispiel:



Abbildung 3.17: Verschachtelte Funktion in *Snap!* (Goldenberg et al., 2021, S. 52).



Abbildung 3.18: Funktion mit Eingabe in *Snap!* (Goldenberg et al., 2021, S. 52).

Durch die Möglichkeit Funktionsblöcke zu erstellen und zu modifizieren, sollen Schüler*innen arithmetische Ideen leicht umsetzen und Ausgaben interpretieren. Die Anzahl der Blöcke und Elemente, die Snap! im Normalfall bietet, wurde auf die wesentlichen, wichtigen Funktionen reduziert, um den Schüler*innen eine sichere, fehlerfreie Lernumgebung zu bieten.

3.3.2 Inhalt und Erkenntnisse

Die Zahlengerade in Number Line Microworld (vgl. Abbildung 3.19) ist nicht als reines Rechenwerkzeug gedacht - vielmehr soll es ein Mittel sein, durch das Schüler*innen ein Bild von der Bedeutung des Addierens und Subtrahierens gewinnen. Auf der Zahlengeraden werden mit Strichen Intervalle von Zahlen festgelegt, deren Größe anpassbar ist (aufeinanderfolgende ganze Zahlen, Achtel oder andere Brüche, Zählen mit beliebigem Betrag, beliebiger Beginn).

Die Lernumgebung ist zu Beginn noch auf Basisfunktionen reduziert, sodass beim Erlernen keine Fehler oder Ablenkungen passieren können. Wie in blockbasierten Entwicklungsprogrammen üblich finden sich im linken Frame verschieden Baublöcke. Die grauen Blöcke generieren beim Anklicken eine Aufgabe, die in der Sprechblase des Dinosauriers angezeigt wird.

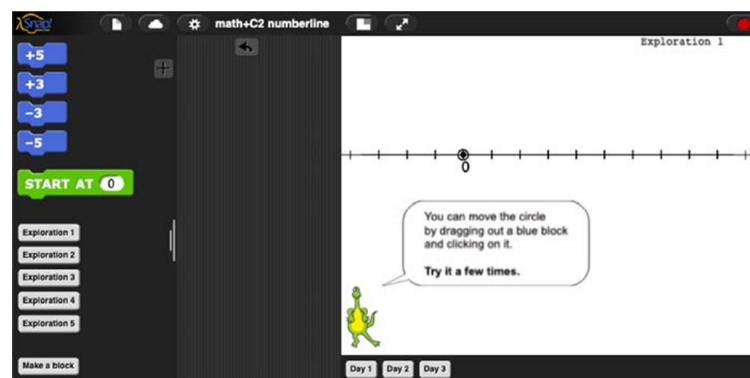


Abbildung 3.19: Mikroweltumgebung der Number Line Microworld (Goldenberg et al., 2021, S. 53).

Die blauen Blöcke können mit Drag-and-Drop in das mittlere Frame gezogen und zusammengesetzt werden. Durch Klick auf den zusammengesetzten Baublock wird im rechten Frame die Ausführung in Form von Pfeil-Sprüngen dargestellt:

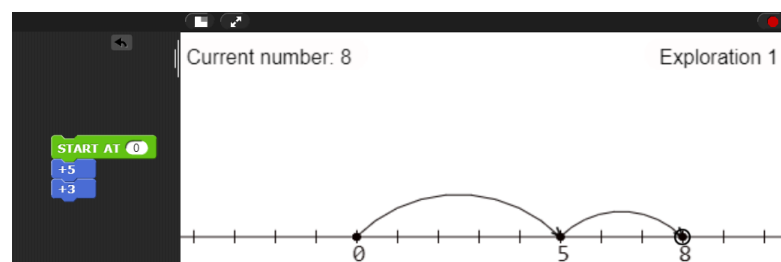


Abbildung 3.20: Number Line - Ausgabe bei Verwendung der Blöcke *Start at 0* und *+5* und *+3* (Goldenberg et al., 2021, S. 54).

Im Rahmen der Forschung von Goldenberg et al. (2021) wurden die Schüler*innen nach einer kurzen Erklärung der Lernumgebung aufgefordert, eine Liste an Aufgaben selbstständig zu lösen. Dabei waren die Anforderungen sehr verschieden: von offenen Fragen (z.B. „Wie viele Zahlen zwischen 1 und 10 kannst du markieren?“), bis hin zu ganz spezifischen Aufgaben, die Planung, Kopfrechnen und Experimentieren erforderten (z.B. „Finde eine Rechnung, die bei 0 beginnt, bei 2 endet und den Zahlenblock -3 NICHT verwendet.“ Ziel der Aufgaben war es, den Kindern Erfahrungen zu vermitteln, die ihnen später als Grundlage zum Erforschen, Experimentieren und Lernen durch Interaktion mit einer Programmiersprache dienen.

Während das Experimentieren der Schüler*innen oft keiner erkennbaren Struktur folgte, wurden viele Kinder von der Ästhetik der entstehenden Muster motiviert, strukturierte individuelle Arbeitsweisen zu entwickeln.



Abbildung 3.21: Motivierende Musterästhetik in Number Line Microworld

Eine andere Aufgabe war das Markieren von allen Zahlen auf der Zahlengeraden. Eine siebenjährige Schülerin hatte die Erkenntnis, dass sie mit Kombination der Blöcke $+3$ und -5 Sprünge im Intervall von 1 erzeugen kann.

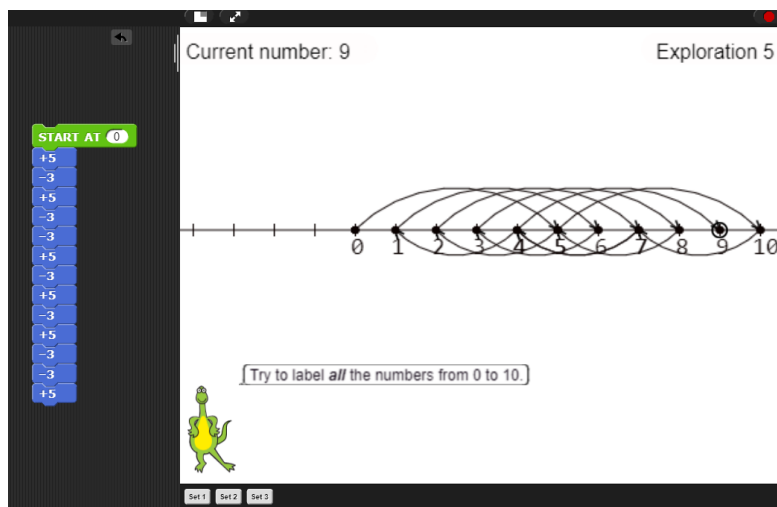


Abbildung 3.22: Lösungsdarstellung einer Aufgabe in Number Line Microworld

Die Aufgaben steigerten sich nicht nur in ihrer Komplexität, sondern auch im Zahlenraum. Ab einem bestimmten Punkt wurden die Blöcke ± 3 und ± 5 durch ± 300 und ± 500 ersetzt. Das war neu für Schüler*innen in diesem Alter, sie konnten aber schnell durch die vorhergehenden Erfahrungen mit den höheren Zahlen arbeiten.

3 Zahlentheoretische Mikrowelten

In offenen Klassendiskussionen forderten die Lehrpersonen die Schüler*innen dazu auf, ihre Erfahrungen und Ideen selbst zu analysieren und mit den anderen zu teilen. Durch Reflektieren sollten diese Erfahrungen die Basis für ein späteres formales Grundverständnis werden. Ein Beispiel für so eine Formalität war der Sprung um $+1$. Die Autor*innen stellten den Lernenden den sogenannten *Make a block* - Button vor, mit dem ein neuer Block für die zukünftige Verwendung erzeugt werden konnte:



Abbildung 3.23: Kombinerter Code zum Erzeugen eines $+1$ - Blocks (Goldenberg et al., 2021, S. 55).

Die Zusammenfügung in Abbildung 3.23 erzeugt einen neuartigen $+1$ - Block. Durch die *combine steps* - Umgebung werden nicht drei Pfeile dargestellt, die schlussendlich zu $+1$ führen, sondern ein einziger Pfeil, der im Intervall von 1 weiterspringt.

Eine besondere Eigenschaft der Mikrowelt ist die Anpassbarkeit des Zahlenraums. Die Zahlengerade kann durch Herauszoomen wachsen und durch Hineinzoomen schrumpfen, zur Darstellung von Brüchen mitsamt der Addition und Subtraktion der Brüche. So könnten statt den Blöcken $+3$ und -5 Bruchblöcken, wie $+\frac{5}{8}$ und $-\frac{3}{8}$ eingeführt werden. An der Visualisierung ändert sich außer den angezeigten Zahlen nichts. Die Umstellung für die Schüler*innen wird dadurch trivial: Brüche sind auch nur Zahlen, die man addieren oder subtrahieren kann, gleich wie einstellige oder mehrstellige Zahlen. Auf Papier bereiten Brüche den Schüler*innen oft Schwierigkeiten, wie zum Beispiel das Addieren von Zähler und Nenner zweier Brüche. Dieses Fehldenken kann durch die Visualisierung in der Number Line Microworld verhindert werden. Egal ob ganze Zahlen, Brüche, die Addition oder auch Subtraktion - alles kann auf einfache Weise abgelesen werden, was den Schüler*innen hilft, das richtige Ergebnis zu erwarten und zu verstehen:

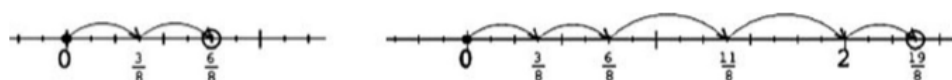


Abbildung 3.24: Addition von Brüchen auf der Zahlengerade in Number Line Microworld (Goldenberg et al., 2021, S. 56).

3.3 Number Line Microworld

Eine weitere Aufgabe besagte: *Start at $\frac{3}{4}$ and then move to $\frac{3}{8}$* - auf einer Zahlengerade, auf der nur Brüche mit Nenner 8 beschriftet waren. Die Erkenntnis, dass beim Eintippen von $\frac{3}{4}$ die Markierung auf $\frac{6}{8}$ springt, führte zu experimentellem Lernen bei den Schüler*innen.

Durch Number Line Microworld ist es also möglich, im Format der Blockbausteine die Themen Zahlen, Brüche, Teiler und Vielfache zu behandeln. Diese Bereiche mögen zum Teil über das Schulcurriculum der vorgesehenen Schulstufe für Number Line Microworld hinausgehen, sind aber ideal zur Vorbereitung auf die entsprechenden Zahlenräume und deren Rechenweisen. Zum Beispiel sind die Schüler*innen sehr leicht und ohne Absicht durch das Zusammenfügen von Blöcken in den Bereich der negativen Zahlen gekommen. Dies führte aufgrund der niederschweligen Aufgabenstellungen nicht zur Verwirrung bei den Lernenden, sondern stellte positive erste Berührungspunkte zu dem negativen Zahlenbereich her.

Mit den Aufgaben der Number Line Microworld können Lernende verschiedene Stellen der mathematischen Spirale zu einem frühen Zeitpunkt der Schulausbildung kennenlernen und somit Berührungspunkte für solide Anknüpfung zu einem späteren Zeitpunkt gelegt werden.

3.4 Übersicht und Vergleich

Die beschriebenen digitalen Lernumgebungen geben ein Bild, wie Mikrowelten generell im Unterricht eingesetzt werden können. Number Worlds, Bunny Numerics und Number Line Microworld konzentrieren sich auf jeweils verschiedene Altersgruppen und Lernfortschritte. Nun folgt eine Gegenüberstellung der drei Mikrowelten zur Hervorhebung ihrer Zielgruppen, behandelten Themen und weiterer Besonderheiten.

	Number Worlds	Bunny Numerics	Number Line Microworld
Jahr der Veröffentlichung	2003	1989	2021
Entwicklungsumgebung	- Java-Oberfläche - Analoge Aufgaben und Interviews	- Benutzung durch Befehle in Logo - Analoge Aufgaben	- Block-Codierumgebung in Snap! - Digitale Aufgaben
Visuelle Repräsentation	Zahlenmatrix	Eingabe von Code (Logo) und Zahlenausgabe	Block-Programmierung mit Darstellung einer Zahlengerade mit Pfeilen
Behandelte Themen	Faktoren Vielfache Kongruenzklassen Primzahlen Besondere Zahlenfolgen	Zahlenmengen Quadratzahlen Besondere Zahlenfolgen Teiler und Vielfache Primzahlen Perfekte Zahlen Algorithmen	Zahlenmengen Zahlenraum Rechenoperationen
Zielgruppe	Sekundarstufe 1	Studierende	Grundschule, 2. Klasse
Besonderheiten	- Ergebnisse dokumentiert - Interviews und Betreuung - Viele neue Erkenntnisse durch Lerneffekte - Korrekturen von Weltansichten - Motivierte zum Weiterarbeiten - Veraltetes grafisches Interface - Zur Zeit nicht mehr verfügbar	- Spezialisierte Zahlenobjekte zur Konstruktion vorhanden - Leichte Konstruktion von komplexen Zahlenfolgen und Algorithmen - Schnelle Ausgabe von Zahlenfolgen - Grundwissen der elementaren Zahlentheorie muss vorhanden sein - Weder Hasen noch Inseln visualisiert - Alle Objekte und Operationen in Codeform - Keine Ergebnisse der Lerneffekte zur Zeit verfügbar	- Operieren von Zahlen auf Zahlengerade - Aufbauender Schwierigkeitsgrad - Ausdehnung auf weitere Zahlenmengen (ungerade Zahlen, Brüche) - Steigender Schwierigkeitsgrad - Generierung neuer Funktionen - Generierung von Wissen und Erfahrungen über die Zielgruppenstufe hinaus

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung der Mikrowelten Number Worlds, Bunny Numerics, Number Line Microworld

Wie in Kapitel 2.2 beschrieben, sind Mikrowelten nach strukturellen und funktionalen Eigenschaften definiert. Zusammengefasst ist es möglich, vom funktionalen Blickpunkt gesehen, in einer Mikrowelt Objekte und Operationen so zu verwenden, dass der Lernende Eigenschaften des behandelten Gebietes der Mikrowelt entdecken und neue Erkenntnisse im jeweiligen Teilgebiet gewinnen kann. Dabei können Objekte und Operationen kombiniert werden, um komplexere Objekte zu schaffen. Es sind Aufgaben und Probleme inkludiert, die durch die Objekte und Funktionen der Mikrowelt gelöst werden sollen.

In diesen Punkten sind alle drei behandelten Mikrowelten gleich. Sie decken sich in ihrer Intention, Struktur und Funktion. Unterschiede gibt es in den Teilbereichen, die in den Mikrowelten behandelt werden, sowie in den technischen Realisierungen. Die Mikrowelten wurden in verschiedenen Jahrzehnten entwickelt. Dies bedingt einige Unterschiede zu Darstellungen und Entwicklungsumgebungen. Bestimmte Designentscheidungen über die visuelle Repräsentation von Operatoren, Funktionen und Darstellung von Ausgaben sind aber deutlich unterschiedlich. Die Zugänglichkeit der Mikrowelten ist durch die Repräsentation und die Komplexität der Umgebung auch mit notwendigem Vorwissen von Lernenden verbunden, sodass manche Mikrowelten nur mit einschlägiger Erfahrung benutzt werden können.

Didaktisch gesehen ergeben sich durch den Vergleich Bewertungen und Präferenzen der Mikrowelten für bestimmte Altersgruppen von Lernenden sowie Empfehlungen zur Weiterentwicklung von Designentscheidungen. Im nächsten Kapitel werden Empfehlungen hinsichtlich der Verwendung von zahlentheoretischen Mikrowelten in der gegenwärtigen Zeit diskutiert.

4 Diskussion

In diesem Kapitel werden die bisherigen Erkenntnisse gesammelt und vorgestellt. Die Besonderheiten, die beim Erarbeiten der Themen aufgetreten sind, werden hervorgehoben, um weiteres Forschen zu unterstützen.

Mit Blick auf die Theorien und Erkenntnisse in Kapitel 2 sowie auf die konkreten Beispiele in Kapitel 3 wird diskutiert, ob Mikrowelten - in ihrem Zweck, Aufbau und Effekt - ein geeignetes und zeitgemäßes didaktisches Werkzeug sind, wie diese im Unterricht eingesetzt werden könnten und welche Entwicklungs- und Optimierungspotentiale vorhanden sind.

Im Rahmen der Recherchearbeit wurde festgestellt, dass es nur eine kleine Anzahl von Mikrowelten im mathematischen Bereich der Zahlentheorie gibt. Diese Limitation sowie weitere Grenzen der Arbeit werden zusammengefasst aufgezeigt.

Aufbauend auf den gewonnenen Ergebnissen wird abschließend ein Konzept für eine Mikrowelt im Bereich der Kryptographie skizziert.

4.1 Erkenntnisse

In Kapitel 1.3 wurden vier Forschungsfragen aufgestellt, um die gesellschaftlichen Anforderungen in Bezug auf Zahlentheorie zu ermitteln und zu analysieren, ob zahlentheoretische Mikrowelten geeignete Werkzeuge zum Üben und Trainieren dieser Kenntnisse und Kompetenzen sind:

1. Welche Inhalte der elementaren Zahlentheorie sind für ein fundiertes Zahlenverständnis besonders relevant?
2. Wie kann Verständnis zu Zahlenbegriffen und Systemen mit dem digitalen Medium der Mikrowelten aufgebaut und vertieft werden?
3. Welche zahlentheoretischen Mikrowelten gibt es und welche Effekte haben diese auf Schüler*innen?
4. Wie können bestehende zahlentheoretische Mikrowelten für den didaktischen Gebrauch erweitert werden?

Zu Beginn wurde im Sinne der ersten Forschungsfrage dem Begriff ***fundiertes Zahlenverständnis*** nachgegangen. Zusammengefasst sind damit Wissen und Kompetenzen gemeint, die über das gesellschaftliche Basisverständnis zum Umgang mit Zahlen im alltäglichen Gebrauch hinausgehen. Zahlen sollen also im Alltag nicht nur erfasst und verwendet werden, es bedarf einer Reflexion über ihren Sinn und eines umfassenden Verständnisses über ihre Zusammenhänge mit anderen Zahlen(-mengen).

Mit Blick auf ausgewählte gesellschaftliche Bereiche - Musik, Kunst, Technik und Software - haben sich insbesondere folgende zahlentheoretische Inhalte von großer Bedeutung für ein fundiertes Zahlenverständnis erwiesen: (vgl. Kapitel 2.3.1 bis 2.3.4):

- Faktoren, Teilbarkeiten von Zahlen und Teilverhältnisse (z.B. Goldener Schnitt)
- Vielfache, Multiplikatives Inverses
- Primzahlen, Primfaktorzerlegung, Primzahlentests (z.B. Sieb des Eratosthenes)
- Besondere Zahlenfolgen
- Modulo-Funktion und Kongruenz
- Eulersche ϕ - Funktion
- Erweiterter euklidischer Algorithmus
- Chinesischer Restsatz

Es wird betont, dass ein mathematisches Grundverständnis von Verschlüsselungsmethoden Voraussetzung für ein fundiertes Zahlenverständnis in den Bereichen Technik und Software ist. Für Logik und Zahlenverständnis in allgemeinen Situationen ist eine Vertiefung in den ersten genannten Themen grundlegend: Teiler und Teilbarkeiten, Vielfache, Primzahlen und Zahlenfolgen.

Als Nächstes widmete sich die Arbeit der Frage, wie **Verständnis zu Zahlenbegriffen und -Systemen mit Hilfe digitaler Mikrowelten aufgebaut und vertieft** werden können. Ausgehend von der Forschungslage zu Denk- und Erkenntnisprozessen in den 80er Jahren, als die Idee der digitalen Lernumgebungen sowie die erste digitale Mikrowelt entstanden, kann man die Antwort auf diese Frage wie folgt zusammenfassen:

- Kinder bauen themenspezifische mentale Wissensstrukturen auf, die teilweise nicht miteinander verbunden sind und unabhängig voneinander zur Lösung auftretender Probleme herangezogen werden. In Forschungen werden diese Denkstrukturen als *Mikrowelten* in einem nicht digitalen Kontext definiert (vgl. Kapitel 2.1).
- Digitale Mikrowelten - computerbasierte Lernumgebungen, die verschiedene Themengebiete vereinfacht darstellen - setzen an dieser Form des Wissenserwerbs an. Sie bieten Lernenden die Möglichkeit, spezifische (mathematische) Themengebiete und -bereiche selbstständig zu erforschen und zu erschließen (vgl. Kapitel 2.2).
- Digitale Mikrowelten sind logische Repräsentationen der natürlichen Welt. Die Aufgabenstellungen erlauben also einen schnellen Bezug zum Alltag und führen zu einem nachhaltigen Wissensaufbau. Vorhandene Wissensstrukturen werden durch das selbstständige Arbeiten intuitiv überprüft und bei Bedarf korrigiert bzw. adaptiert.
- Das Arbeiten am Computer ist dynamisch: Lernende müssen aktiv werden, um zu einem Ergebnis zu kommen. Dies stellt eine positive Alternative zum statischen Frontalunterricht dar. Äußere Störfaktoren, die im realen Unterricht oft vorkommen, werden durch das Arbeiten am Computer minimiert (vgl. Kapitel 2.2.3).

Zur Veranschaulichung digitaler Mikrowelten wurden die zahlentheoretischen Lernumgebungen *Number Worlds* (2003) und *Bunny Numerics* (1989) in ihrer Funktionsweise umfangreich beschrieben und die arithmetische Lernumgebung *Number Line Microworld* (2021) aufgrund ihrer Aktualität und den modernen didaktischen Ansätzen zum Vergleich hinzugezogen. In Kapitel 4.2 und Kapitel 4.3 wird die Beantwortung der letzten beiden Forschungsfragen versucht.

4.2 Lerneffekte zahlentheoretischer Mikrowelten

Die drei vorgestellten Mikrowelten ähneln sich in ihrer Struktur und Funktion, zeigen aber deutliche Unterschiede in ihrer Realisierung. Es ist zu beobachten, dass trotz den verschiedenen visuellen Repräsentationen, Veröffentlichungsjahrgängen und Zielgruppen die generierten Lerneffekte durchaus dieselben sind. Es erscheint sinnvoll, die Lerneffekte analog zur Struktur der Forschung von Sinclair et al. (2003) in *Effekte der Visualisierung* und *Effekte des Experimentierens* zu unterteilen.

Lerneffekte aufgrund der Visualisierung

Bezüglich der Definition nach Edwards (1998) gleichen sich die drei Lernumgebungen, stoßen aber innerhalb dieser an ihre Grenze. Edwards hebt hervor, dass Mikrowelten *mehrere Darstellungsmöglichkeiten* des zugrundeliegenden wissenschaftlichen Teilgebietes anbieten können. Alle drei untersuchten Mikrowelten sind aber auf *eine einzige* visuelle Repräsentation beschränkt:

- *Number Worlds* wurde als Java-Applet realisiert. Mit Java selbst kamen die Lernenden nicht in Berührung, da alle Funktionen, Operationen und Repräsentation von Zahlen **in einer Zahlenmatrix** grafisch dargestellt wurden. Durch das Klicken auf Radiobuttons, eine Auswahl in Drop-Down-Menüs und die Eingabe von Zahlen lässt sich die Zahlendarstellung sofort manipulieren, um neue Erkenntnisse zu gewinnen.
- *Bunny Numerics* ist von den untersuchten Mikrowelten die älteste (Erscheinungsjahr 1989). Die technologischen Gegebenheiten für computerbasierte Anwendungen waren zu dieser Zeit noch sehr begrenzt und es dominierten schriftliche Programmiersprachen. Logo war für damalige Verhältnisse mit rekursiven Funktionen bereits modern, obwohl sich die Entwicklungsumgebungen und Anwendung für Schüler*innen als zu komplex darstellten. Es wirkt nach einer vermissten Chance, dass *Bunny Numerics* die Logo-Grafikausgabe durch die Turtle-Grafik nicht nutzte. Die Visualisierung bei *Bunny Numerics* ist **eine schlichte Zahlenausgabe**. Es gilt zu beachten, dass *Bunny Numerics* für Studierende konzipiert wurde, die bereits zahlentheoretische Grundkenntnisse besitzen.
- *Number Line Microworld* folgte dem (aus didaktischer Sicht) populären Ansatz der Block-Programmierung in *Snap!*. Funktions- und Operationsbausteine lassen sich zusammenlegen, um so komplexere Abläufe zu generieren. Diese Abläufe werden auf Knopfdruck sofort grafisch dargestellt - als **eine Zahlengerade mit Pfeilen**.

Bunny Numerics und *Number Worlds* beschränken sich auf elementare zahlentheoretische Inhalte. Durch den mathematischen Verständnisfortschritt von Studierenden kann aber davon ausgegangen werden, dass in *Bunny Numerics* komplexere Erforschungen möglich sind. *Number Line Microworld* spricht Schüler*innen in der Grundschule an und beschränkt sich auf die Darstellung und das Operieren mit Zahlen auf der Zahlengerade.

Aufgrund der Visualisierung konnten folgende Lerneffekte beobachtet werden:

- Bei *Number Worlds* wurden Vielfache nach der Arbeit in der Mikrowelt nicht mehr (nur) als eine Liste von Zahlen, sondern als eine konstante Verteilung einer bestimmten Größe wahrgenommen. Arithmetische Folgen konnten nach der Anwendung der Lernumgebung mit Eigenschaften wie konstant, fortfolgend, symmetrisch, vorhersehbar usw. beschrieben werden, was vorher nicht der Fall war.
- Bei *Number Line Microworld* erzeugten Lernende Muster aus Pfeilen mit den zur Verfügung stehenden Zahlenblöcken und zeigten sich aufgrund der Ästhetik dieser Mustern motiviert, weiterzuarbeiten und zu experimentieren. Auch die Einsicht, dass $\frac{3}{4}$ gleich ist mit $\frac{6}{8}$ war ein Lerneffekt aufgrund der Zahlendarstellung in der Mikrowelt, also der Visualisierung.

Zusammenfassend erkannten Schüler*innen mit Hilfe der visuellen Repräsentation in den digitalen Mikrowelten funktionale Verbindungen zwischen Zahlen und -folgen und konnten Zahlenzusammenhänge fundiert analysieren. Es war ihnen möglich, ihr Verständnis und ihre Wissensstrukturen umfangreich auszubauen und zum Teil alte Wissensstrukturen zu verwerfen.

Man kann davon ausgehen, dass *Bunny Numerics* bei einer entsprechend entwickelten Visualisierung ähnliche Effekte generieren könnte. Immerhin liegen zwischen der Veröffentlichung der drei Mikrowelten Jahrzehnte. Die Illustration der Mikrowelt als gerade, unendliche Folge von Inseln wäre im Grunde genommen der Darstellung der Zahlengerade bei *Number Line Microworld* sehr ähnlich. Wenn in dieser illustrierten Form zum Beispiel der „Even Bunny“ von Insel zu Insel hüpfen würde, würde er ähnliche Formen wie die Pfeile bei *Number Line Microworld* annehmen.

Für den Einsatz in der Schule sollen Mikrowelten benutzerfreundlich, intuitiv und grafisch ansprechend sein. Eine zu hohe Komplexität lenkt von der Repräsentation des behandelten Teilgebietes ab und senkt auch die Motivation. Wenn Schüler*innen zum ersten Mal mit zahlentheoretischen Zusammenhängen in Berührung kommen, sollte die Schwelle der Benutzbarkeit besonders niedrig sein. Es empfiehlt sich aus diesem Grund nicht, im Regelschulumfeld Mikrowelten zu benutzen, in denen codiert werden muss, sodass zuvor Syntax und Semantik einer Programmiersprache beherrscht werden müssen. Block-Programmierungsumgebungen sind diesbezüglich ein Zwischenweg, da sie niederschwelliger zu bedienen sind als Codierungs-Programmierungsumgebungen, trotzdem fördern sie (zusätzlich zu den Erkenntnissen des inhaltlichen Teilgebietes der Mikrowelt) das algorithmische Denken.

Lerneffekte aufgrund des Experimentierens

Nicht nur die visuelle Repräsentation in den digitalen Mikrowelten führte zu Lerneffekten bei Schüler*innen, auch das selbstständige Forschen und Experimentieren zeigte bedeutsame Ergebnisse.

- In *Number Worlds* forderten viele Aufgabenstellungen die Kinder auf, durch Ausprobieren Theorien zu erstellen und zu allgemein gültigen Schlüssen zu kommen. Durch Experimentieren erkannten die Lernenden zum Beispiel, dass große Zahlen nicht unbedingt mehr Teiler haben als kleine Zahlen oder dass ein Produkt zweier Primzahlen immer vier Faktoren hat.
- Die Anforderungen bei *Number Line Microworld* waren sehr verschieden, sowohl offene als auch ganz spezifische Fragen und Aufgaben gab es. Auf der Suche nach einer Lösung für ihre Fragestellung erkannte eine Schülerin durch Ausprobieren, dass sie mit der Kombination der Blöcke $+3$, $+3$ und -5 Sprünge im Intervall von 1 erzeugen kann. Die Möglichkeit, neue Blöcke mit der Funktion *Make a block* zu generieren, eröffnete neue Dimensionen des eigenständigen Erforschens.

Auch bei *Bunny Numerics* kann man davon ausgehen, dass vor allem die Komplexität der Mikrowelt (durch vordefinierte Bunnies, das Erzeugen von neuen Bunnies mit modifizierten Hop-Anweisungen sowie die Entwicklung von Prozeduren für mathematische Funktionen) viele Möglichkeiten zum Experimentieren bietet und dieses wiederum umfangreiche Lerneffekte erzielt.

Der bedeutendste Lerneffekt im Bereich des Experimentierens in Mikrowelten war die Begeisterung und Motiviertheit der Teilnehmer*innen bei der Arbeit in der digitalen Lernumgebung. Dadurch, dass ihr Verständnis, ihre Reflexion und ihr Mitwirken bei jedem Schritt erforderlich waren, tauchten sie tief in die Prozesse ein und sie fühlten sich mit jedem Fortschritt aufgefordert, weiter zu forschen und neue Aufgabenstellungen zu erfüllen. Die erzeugten Muster (in *Number Worlds* und *Number Line Microworld*) hatten eine größere Aussagekraft über Zahlenzusammenhänge als nur die theoretische Vermittlung der Inhalte. Die unmittelbare Ausgabe von Ergebnissen am Computerdisplay führte zu schnellem Lernen und oft zum Erkennen und Überdenken von falschen Wissensstrukturen und intuitiven Annahmen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die untersuchten Mikrowelten auf verschiedenen Stufen des Bildungsweges zu Wissensaufbau und Korrekturen von Weltansichten führten. Es ist davon auszugehen, dass jede Lernerfahrung (auch der Frontalunterricht) neue und Korrekturen ermöglicht - das Besondere an den digitalen Mikrowelten ist tatsächlich die selbstständige Arbeit eines jeden Einzelnen, die Motivation und Begeisterung für die entsprechenden Wissensbereiche sowie für die Vertiefung in neue Themen. Es empfiehlt sich aus diesem Grund, soweit die Lernumgebungen zum Curriculum passt und leicht zu bedienen ist, digitale Mikrowelten im Unterricht einzusetzen. Computerunterstütztes Arbeiten im Mathematikunterricht fördert vielfältige neue Erfahrungen und

Kompetenzen, um auf den digitalen Alltag der Gegenwart und der Zukunft vorbereitet zu sein, oder auch diesen aktiv zu gestalten.

4.3 Erweiterungen für den didaktischen Gebrauch

Die bestehenden zahlentheoretischen Mikrowelten wurden seit ihrer Erstellung und ursprünglichen Verwendung nicht mehr erweitert. Da dies zum Teil schon Jahrzehnten zurückliegt, bietet sich aus Sicht der Informatik- und Mathematikdidaktik an, zeitgemäße Erkenntnisse einzubauen und technische Empfehlungen zu verbalisieren.

Mit *Number Line Microworld* wurde eine moderne, aber arithmetische Mikrowelt dem Vergleich hinzugezogen. Aktuelle technische und didaktische Ansätze wurden in dieser Mikrowelt verwirklicht, um die Schüler*innen bereits im jungen Alter bei den wichtigsten mathematischen Inhalten im Schulcurriculum zu unterstützen. Im Ansatz sollen Funktionsblöcke in ihrer Semantik zusammengeschoben werden, um so eine Zahlenausgabe zu erzeugen. Der Fokus der Mikrowelt liegt beim Operieren mit ganzen Zahlen auf einer Zahlengeraden und erweitert sich in weitere Zahlenbereiche (Bruchzahlen, negative Zahlen,...) sowie selbst herstellbare neue Funktionsblöcke, um „Abkürzungen“ zu erzeugen.

Ein großer Nachteil von *Bunny Numerics* ist die Komplexität der Syntax und Semantik der Logo-Umgebung. Die verwendeten Objekte und Funktionen, die in ObjectLogo voreinstellt wurden, sind nur ein *imaginärer Indikator*, dass sich verschiedene Arten von Bunnies auf verschiedene Inseln bewegen. Um diese Objekte und Funktionen semantisch richtig für den mathematischen Gebrauch verwenden zu können, sind Vorkenntnisse in Logo nötig, sodass Vorerfahrung in der mathematischen Programmierung notwendig ist. Es ist aus diesem Grund logisch, dass die Zielgruppe von *Bunny Numerics* nur Studierende sind.

So könnte die Idee von *Bunny Numerics* mit einer vereinfachten Syntax und ähnlicher Semantik in einer blockbasierten Entwicklungsumgebung realisiert werden. Somit ist es möglich, die Komplexität und das notwendige Einstiegswissen zu senken. *Bunny Numerics* wurde nach einer theoretischen Einleitung in die Zahlentheorie eingesetzt. In einer blockbasierten Umgebung kann diese Einleitung, je nach Ausrichtung der Komplexität, weggelassen werden, da bereits bei *Number Worlds* und bei *Number Line Microworld* positive Erfahrungen und Lerneffekte durch selbstständiges Probieren und Experimentieren gemacht wurden.

Die visuelle Repräsentation in *Bunny Numerics* beschränkt sich auf die Ausgabe von Zahlen nach einer Funktions- bzw. Operationseingabe. Die blockbasierte Eingabe von solchen Funktionen und Operationen würde möglicherweise, ähnlich wie bei *Number Line Microworld*, zu einer sofortigen visuellen Repräsentation führen. Bei dieser könnten beschriftete Hasen und Inseln visualisiert werden, die sich jeweils nach ausgewählten Operationen und Funktionen bewegen. Als zusätzliche Visualisierung sollten Ergebnisse bzw. Operationen durch Zahlen dargestellt werden, ähnlich der ursprünglichen Repräsentation

4 Diskussion

in Bunny Numerics.

In Number Worlds ist keine „traditionelle“ Eingabe von Operationen und Funktionen auf textbasierte oder ähnlichen Weise möglich. Die visuelle Repräsentation von Zahlen ist jederzeit sichtbar und wird durch Radiobutton, Drop-Down-Menüs und durch Eingaben von Zahlen in Textboxen modifiziert. Es werden durch Auswählen einerseits die angezeigten Zahlen verändert (z.B. können nur ungerade Zahlen angezeigt werden), andererseits können bestimmte Zahlen hervorgehoben werden (wie z.B. Faktoren oder Vielfache einer Zahl). Die grafischen Elemente in Number Worlds sind durch Standard-GUI-Elemente einer älteren Java-Version realisiert. Eine Portierung und Veränderung zu aktuellen GUI-Elemente würde die visuelle Ansprechbarkeit verbessern.

Aus der Anzahl der auswählbaren Funktionen und Zahlenzellen lässt sich schließen, dass das *Number Worlds* Applet für eine niedrigere Bildschirmauflösung konzipiert ist als aktuell üblich. Mit modernen Auflösungen, Scroll- und Zoomfunktionen wäre es möglich, einen immer weitergehenden Zahlenbereich zu erzeugen. Auf diese Weise könnten auch negative Zahlen fortfolgend angezeigt werden. Dadurch bestünde die Chance, neue Erkenntnisse in Kombination mit den Funktionen zu gewinnen. Durch Drop-Down-Menüs könnten in Number Worlds weitere Funktionen realisiert werden, ohne negative Wirkung auf die Übersichtlichkeit zu befürchten. Das Anzeigen von Kongruenzen und Restklassen ist ebenfalls eine Option, zusätzlich zu den weiteren Operationen, die hinzugefügt werden könnten: Zahlenfolgen und Algorithmen. Durch das Clustern von Operationen und Funktionen in verschiedenen Menüs könnte auch ein neuer freier Bereich in der Umgebung entstehen, in der Aufgaben und Probleme dargestellt werden, sodass sie den/der Benutzer*innen nicht mehr auf Papier bereitgestellt werden müssen.

Im Allgemeinen ist es ein Ansatz der modernen Mathematikdidaktik, die *Alltagsrelevanz* von mathematischen Funktionen und Teilgebieten betonend darzustellen. In diesem Sinne können auch realisierte zahlentheoretische Funktionen bzw. gestellte Probleme mit der Referenz zur Alltagsrelevanz kommentiert werden, um so die Wichtigkeit besser zu zeigen und zum Lösen von Problemen zu motivieren.

4.4 Limitationen

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind vor allem als kritisches Beleuchten eines Themas zu sehen, das bislang wenig reflektiert und untersucht wurde. Bei der Recherche stellten sich verschiedene inhaltliche und methodische Limitationen heraus, auf die zum Teil bereits eingegangen wurde, nun aber in diesem Kapitel explizit gemacht werden.

Theoretische Grundlagen

Im Mittelpunkt dieser Untersuchung standen Zahlenkenntnisse, Zahlenverständnis und Zahlenkompetenzen - insbesondere Inhalte der Zahlentheorie. Kompetenzen in anderen mathematischen Gebieten sowie weitere Inhalte zu Mikrowelten, Wissenswelten oder Didaktik in der Zahlentheorie wurden nur eingeschränkt thematisiert, obwohl es von Bedeutung und Interesse wäre.

Bei den behandelten *zahlentheoretischen Inhalten* liegt das Hauptaugenmerk auf Sätzen und Beweisen, die von alltäglicher Relevanz sind und tiefere Einblicke in und Verständnis für wichtige Erkenntnisse und fortschreitende Entwicklungen der Welt ermöglichen. Die getroffene Auswahl ist nur eine kleine Abbildung davon, in welchen Bereichen des Lebens Zahlentheorie vorkommt und es werden Beispiele angeführt, die zum Zeitpunkt des Verfassens der Arbeit in einem höheren Maß Popularität aufwiesen. Sicherlich gibt es viele weitere Themen, in denen zahlentheoretisches Wissen und Kompetenzen Einblicke ermöglichen, die aber über die *normale* Schulbildung hinausgehen. Eine allumfassende mathematische Erklärung der angeführten Beispiele hätte den Rahmen der Arbeit gesprengt.

Bei der Darstellung des Forschungsstandes bzw. der *Eingliederung der Mikrowelten in der Erkenntnistheorie* kam die Literaturrecherche auch an ihre Grenzen. Lawler hat sich über diese Abhandlung (Lawler, 1981) hinaus noch mit weiteren mentalen Wissenstrukturen (die er auch Mikrowelten nannte) beschäftigt, auf die in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wurde. Die diesbezüglich ausgeführten theoretischen Grundlagen geben Einblick in seine - mit Blick auf digitale Mikrowelten relevanten und ähnlichen - Konzepte und Forschungen.

Zahlentheoretische Mikrowelten

Eine weitere Limitation der vorliegenden Arbeit ist offensichtlich: die *geringe Zahl an vorgestellten und untersuchten digitalen zahlentheoretischen Mikrowelten*. Durch die Beschränkung auf zahlentheoretische Inhalte wurden zur vergleichenden Betrachtung Mikrowelten herangezogen, die einerseits eindeutig der Zahlentheorie zugeordnet sind, und andererseits tatsächlich auch der Definition nach (Edwards, 1998) entsprechen.

4 Diskussion

Herausfordernd waren auch *das fortgeschrittene Alter* und die *fehlenden empirischen Untersuchungen* der Mikrowelten. Zwar gibt es auch eine Studie mit Probanden bei der Anwendung von *Bunny Numerics* („*Bunny Numerics Report*“), allerdings war diese zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit - auch nach direkter Anfrage bei den Verfassern - nicht verfügbar. *Bunny Numerics* konnte somit nach (Graci et al., 1989) inhaltlich beschrieben werden, aber es konnten keine erforschten Lerneffekte dargelegt werden. Für eine aussagekräftigere Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine „jüngere“ arithmetische Mikrowelt dem Vergleich hinzugezogen.

Diskussion

Die Diskussion in den Kapiteln 4.2 und 4.3 stellt nur eine Sicht und einen gewissen Ausschnitt der Realität dar, insofern darf ihre Bedeutung nicht überbewertet werden. Die Reichweite der vorliegenden Untersuchung ist sehr begrenzt und die Analyse und Interpretation einer Mikrowelt ist nicht zwangsläufig auf andere übertragbar oder allgemein gültig. Dennoch kann aufgrund zweier Aspekte davon ausgegangen werden, dass die Diskussion fundiert ist: zum einen aufgrund der Berücksichtigung sehr verschiedener Mikrowelten hinsichtlich Entwicklungsjahr, Entwicklungsumgebung und Zielgruppe, zum anderen wegen der bestehenden empirischen Forschung verbunden mit *Number Worlds*.

4.5 Ausblick - Vorschlag einer Mikrowelt

Aus den Erkenntnissen und der Diskussion, aber auch auf Basis der Limitationen und Herausforderung der Arbeit, lassen sich etliche Fragen und Implikationen für die zukünftige Tätigkeit mit Mikrowelten ableiten. Als Ausblick wird folgend unter dem Arbeitsnamen *Number Theory Microworld* eine Mikrowelt vorgeschlagen, in der die im Rahmen dieser Arbeit erkannten positiven Effekte und gewisse alltagsrelevante Bereiche der Zahlentheorie eingearbeitet werden.

Onlineplattform

Durch aktuelle technische Gegebenheiten sind Programme am leichtesten durch einen Browser im Internet zugänglich, sind auf Webseiten eingebunden. Viele Lern- und Entwicklungsumgebungen können zum Zeitpunkt dieser Arbeit also bereits rein über Internetbrowser benutzt werden, wie z.B. *Geogebra*, *Snap!*, *Scratch* oder *Python*. So sind Apps über mathematische Zusammenhänge von *Geogebra*, mathematische- und Logikspiele von blockbasierten Programmen (z.B. die *Number Line Microworld*) oder Java- bzw. Python-Applets im Internet zu Genüge zu finden. *Number Theory Microworld* kann genau ein solches Applet sein, welches über den Browser abgerufen und genutzt werden kann.

Module und Erweiterbarkeit

Mikrowelten fokussieren sich auf wissenschaftliche Themengebiete. Ist das Themengebiet zu groß, so bilden Mikrowelten Teilbereiche dessen ab. *Number Theory Microworld* könnte aus diesem Grund die Implementierung mehrerer Themenbereiche als Module realisieren. So wäre es für eine benutzende Person möglich, zwischen Modulen zu verschiedenen Teilbereichen der Zahlentheorie zu wählen. Weitere Mikrowelten können dadurch jederzeit hinzugefügt werden. Eventuell ist auch eine Progression zwischen den Mikrowelten denkbar, sodass eine Person von Mikrowelten zu elementaren Teilinhalten der Zahlentheorie (bzw. auch der Arithmetik) zu Mikrowelten spezieller Inhalte der Zahlentheorie fortschreitet. Auch Überschneidungen zu Teilbereichen sind denkbar, da die Module verschiedene visuelle Repräsentationen beinhalten können.

Aufgabenstellungen

Das Arbeiten in Mikrowelten wird immer begleitet von Aufgabenstellungen und Problemen, die es zu lösen gilt. Meist werden dem Benutzer diese Aufgaben in analoger Form auf Papier gegeben. In *Number Line Microworld* können auswählbare Aufgaben bereits vollständig in den jeweiligen Mikrowelt-Modulen digital implementiert oder zur Verwendung (z.B. im PDF-Format) heruntergeladen werden. Auf diese Weise spart man Papier und schon die Umwelt. Aufgabenstellungen und Probleme sind dann nicht ortsgebunden und können von Benutzern über den Browser jederzeit und überall geöffnet und parallel beim Arbeiten in einer Mikrowelt betrachtet werden.

Implementierung vorhandener Mikrowelten

Zu den zahlentheoretischen Definitionen und Sätzen zu Teilern, Vielfachen, Teilbarkeiten und Faktoren oder Primzahlen, die einen großen und relevanten Teil der elementaren Zahlentheorie beinhalten, eignet sich eine ähnliche Implementierung wie bei *Number Worlds*, besonders mit den Erweiterungsvorschlägen, die im vorhergehenden Kapitel zur didaktischen und fachlichen Modernisierung gemacht wurden.

Modul - Number Theory Encrypt Microworld

In diesem Kapitel soll nicht nur eine neue Mikrowelt-Umgebung beschrieben, sondern auch zahlentheoretische Konzepte zu unbehandelten Inhalten für neue Mikrowelten vorgestellt werden. Diese Inhalte von *Number Theory Encrypt Microworld* orientieren sich besonders an den Bereichen, die in Kapitel 2.3.1 bis 2.3.5 als „alltagsrelevant“ genannt wurden.

In der *Number Theory Encrypt Microworld* (gekürzt NTEM) werden zahlentheoretische Inhalte behandelt, die Relevanz im Bereich der Kryptografie haben. In NTEM kommunizieren zwei Personen (Bob und Alice) miteinander. Die Kommunikation sollte über verschiedene Methoden von den Lernenden verschlüsselt und entschlüsselt werden. Ziel ist es, dass - ähnlich wie die Funktionskategorien in blockbasierten Entwicklungsumgebungen - verschiedene Kommunikationsumgebungen mit Verschlüsselungsmöglichkeiten auswählbar sind. Vorgeschlagene Verschlüsselungen sind:

- Klartext-Kommunikation
- Verschlüsselte Kommunikation mit dem Caesar-Chiffre
- Textverschlüsselung mit dem Vigenère-Chiffre oder One-Time-Pad
- Verschlüsselte Kommunikation mit dem RSA-Verfahren

In diesem Kapitel werden exemplarisch Realisierungen des Caesar-Chiffre und RSA-Verfahrens im Rahmen der Mikrowelt NTEM betrachtet. Funktionsweisen und didaktische Ideen zum Vigenère-Chiffre und One-Time-Pad können in (Koc, 2019) nachgelesen werden.

4.5 Ausblick - Vorschlag einer Mikrowelt

Der Programmierbereich verfügt bereits über Startblöcke zu zwei Personen, die miteinander kommunizieren wollen. Je nach ausgewählter Umgebung stehen im Codeblock-Bereich Funktionen zur Kommunikation und Verschlüsselung in Blockform zur Auswahl:

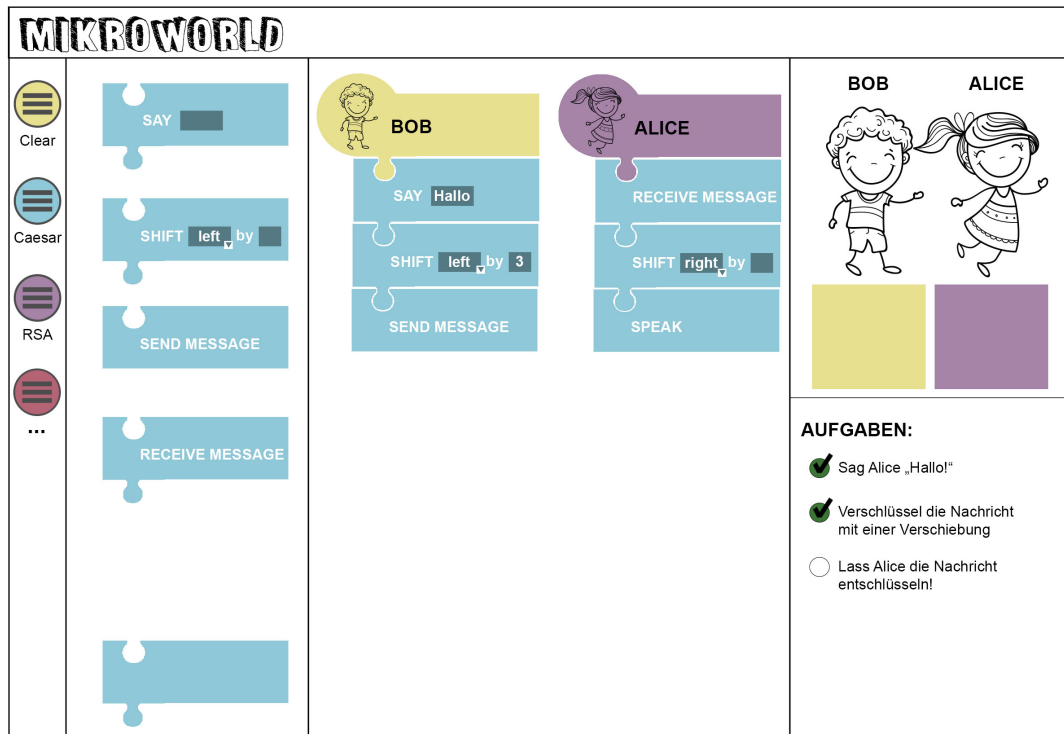


Abbildung 4.1: Konzeptzeichnung zur Verschlüsselungs-Mikrowelt

In Abbildung 4.1 sind von links nach rechts folgende Bereiche dargestellt: Auswahl der Kommunikation, Codeblock-Bereich, Programmierbereich, Ausgabe (oben), Aufgabenliste (unten). Je nach Auswahl der Kommunikation werden verschiedene Funktionsblöcke zur Programmierung zur Verfügung gestellt. Wird ein Code in der richtigen Abfolge zusammengefügt und ausgeführt, wird die gestellte Aufgabe als erledigt markiert.

Die Arten der Verschlüsselungen sind nach Schwierigkeit gereiht. So können Benutzer*innen sich nach und nach mit der Lernumgebung vertraut machen und Kenntnisse und Fähigkeiten zu Verschlüsselungen in ihrer begrifflichen und mathematischen Bedeutung vertiefen. In der Konzeptidee müssen sich die funktionalen Blöcke nicht auf die Problemrelevanz beschränken. Lernende sollen durch Trial-and-Error mit verschiedenen Blöcken ihre mathematische Bedeutung im Kontext von Verschlüsselungen selbst erfor-schen können.

4 Diskussion

Das RSA-Verfahren stellt in diesem Konzept das komplexeste mathematische Problem dar. Viele zahlentheoretische Grundlagen und Berechnungen werden zum Verstehen des RSA-Verfahrens benötigt. Begrifflichkeiten wie *öffentlicher Schlüssel* und *öffentliche Zahl*, *privater Schlüssel*, *Primzahl*, *Modulo-Funktion*, *ggT*, *Eulerische ϕ -Funktion* und *Satz von Euler* sind notwendig, um eine Nachricht über das RSA-Verfahren vom Sender zu verschlüsseln und vom Empfänger wieder entschlüsseln zu können.

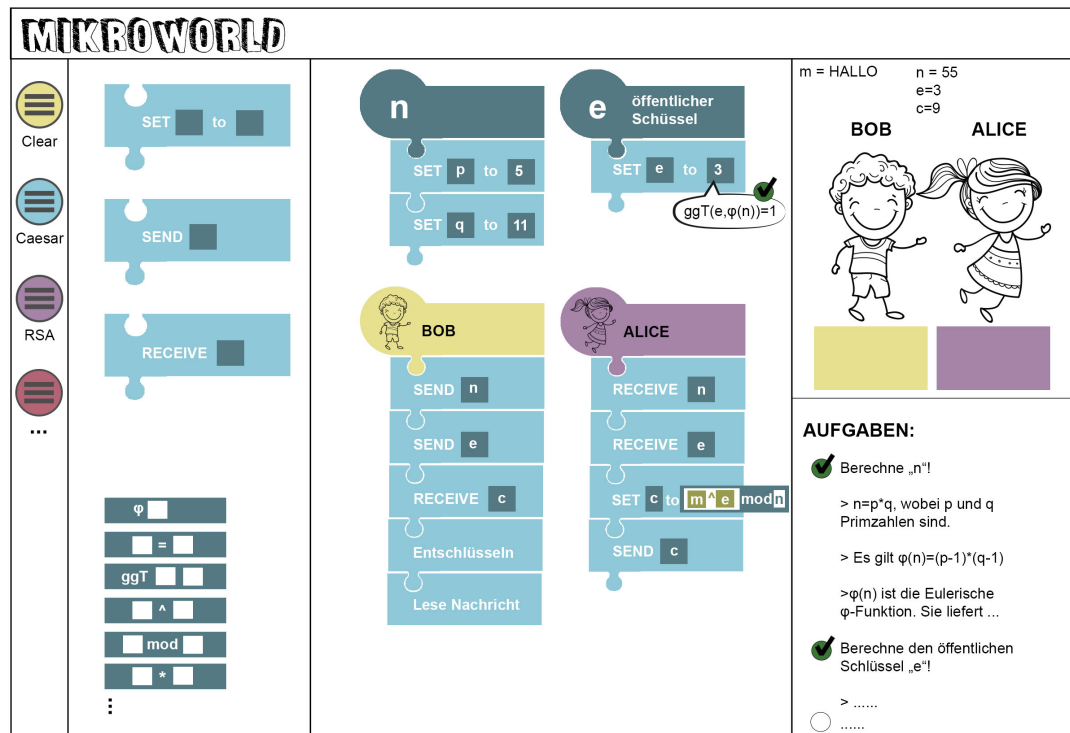


Abbildung 4.2: Konzeptzeichnung zur RSA-Verschlüsselung

Ein Vorschlag wäre, die Aufgaben zum Aufbau einer verschlüsselten Kommunikation in verschiedene Schwierigkeitsstufen zu unterteilen:

1. Einführungsvariante
 - Übergabe des öffentlichen Schlüssels und Zahl (Bob)
 - Eingabe einer Nachricht
 - Automatische Verschlüsselung der Nachricht und Versendung (Alice)
 - Automatische Entschlüsselung und Ausgabe der Nachricht (Bob)

2. Halbvollständige Variante

- Berechnung einer öffentlichen Zahl n aus zwei Primzahlen p und q mit $n = p * q$ und $\phi(n) = (p - 1) * (q - 1)$.
- Festlegung des öffentlichen Schlüssels e mit $\text{ggT}(e, \phi(n)) = 1$
- Verschlüsselung der Nachricht m mit $c = m^e \bmod \phi(n) = 1$ und Versenden
- Automatische Entschlüsselung und Ausgabe der Nachricht

3. Vollständige Variante

- Selbstständige Erzeugung des Schlüsselpaares
- Übergabe des öffentlichen Schlüssels und Zahl
- Verschlüsselung der Nachricht und Versenden
- Selbstständige Entschlüsselung und Ausgabe der Nachricht

Der Aufgabenbereich eignet sich einerseits, um mathematische Programmieraufgaben der Varianten punktuell festzuhalten, andererseits, um mathematische Methoden und deren Theorien bei dem jeweiligen Aufgabenpunkt zu dokumentieren. So kann die lernende Person die mathematischen Funktionen und die zahlentheoretische Definition explorativ anwenden. Durch Checkboxen wird zu Teilaufgaben automatisches Feedback gegeben, ob eine Funktion richtig implementiert wurde.

Das Modul NTEM ist ein Beispielkonzept für eine Mikrowelt, in der sich Lernende zahlentheoretische Inhalte aneignen können, die für ein fundiertes Zahlenverständnis (nach Kapitel 2.3.5) relevant sind. Die tatsächliche Entwicklung dieser Mikrowelt ist nicht Teil dieser Arbeit.

Weitere Module

Neben dem Thema Verschlüsselung können in *Number Theory Microworld* weitere zahlentheoretische Mikrowelten, zum Beispiel im Bereich Musik und Kultur implementiert werden. Kernideen dazu werden nachfolgend beschrieben:

- Im Bereich Musik könnten Zahlen vertont werden, indem ihnen Töne der Tonleiter zugewiesen werden. Durch Wiederholungen bzw. Aneinanderreihungen von Zahlen und Zahlenfolgen werden Melodien erzeugt. Weitergehend können digitale Diffusoren, wiederum in Form von Zahlen oder Folgen, implementiert werden, um dann die Vertonung der Tonfolge bzw. die Melodie auf verschiedenen Stufen zu verändern.
- Im Bereich Kunst könnten grafische Objekte oder Bilder in einem Gitternetz oder einer Spirale so angeordnet werden, dass sich das Verhältnis des goldenen Schnittes annähernd durch Nachberechnung ergibt. Auf diese Weise kann nicht nur ein mathematisches Gefühl für Teilungsverhältnisse aufgebaut, sondern auch ein Gefühl für ästhetische Anordnungen von Elementen in Grafiken oder Fotografie vermittelt werden.

5 Resümee

Ziel der vorliegenden Masterarbeit war es, digitale Mikrowelten mit zahlentheoretischen Inhalten in Hinblick auf ihre didaktische Verwendung zum Aufbau eines fundierten Zahlenverständnisses zu untersuchen. Zu diesem Zwecke wurden – nach der Festlegung aller Begriffe und Definitionen – zwei zahlentheoretische und eine arithmetische Mikrowelt vorgestellt und einerseits inhaltlich, andererseits didaktisch verglichen. In weiterer Folge wurden ihre Lerneffekte auf Schüler*innen analysiert und bewertet. Ausgehend von diesem Vergleich galt es, Optimierungen und Erweiterungen für den didaktischen Gebrauch zu erarbeiten und eine weitere zahlentheoretische Mikrowelt zu skizzieren.

Zusammengefasst zeigt sich, dass der Nutzen der Zahlentheorie nicht nur innermathematisch liegt, als ein Grundstein für verschiedene Bereiche der Mathematik, sondern auch vielfältig im Alltag deutlich wird. Die Beschäftigung mit der Zahlentheorie baut mathematisches Verständnis auf und trainiert das Auge für funktionale Beziehungen von Zahlen im täglichen Leben. Das Erkennen und die Anwendung zahlentheoretischer Zusammenhänge in der Kryptografie, Kunst, Fotografie und Musik sind Basiskompetenzen, um die Entwicklung von Technologie und Gesellschaft voranzutreiben.

Für das Erlernen von zahlentheoretischen Definitionen und Sätzen zum Erwerb von Wissensstrukturen im Bereich der Zahlenzusammenhänge zeigten sich digitale Mikrowelten als durchaus geeignet. Durch verschiedene visuelle Repräsentationen von zahlentheoretischen (bzw. allgemein arithmetischen) Inhalten konnten sich Lernende Wissen auf explorative Weise aneignen und Zusammenhänge von Zahlen (z.B. Faktoren, Vielfachen, Produkten, Folgen und Primzahlen) erkunden. Durch die Problemlöse- und Erforschungskomponenten waren die Probanden motiviert, von sich selbst heraus mehr und Neues zu erforschen. Mikrowelten veränderten den Blick der Lernenden auf Zahlen im Alltag insofern, dass Zahlen vertieft in ihrer Funktion und in Verbindung zu anderen Zahlen und Bereichen betrachtet wurden.

Darüber hinaus war festzustellen, dass es nur wenige digitale Mikrowelten gibt, die zahlentheoretische Inhalte darstellen. Auch wurden diese in einer Zeit entwickelt, die nicht mehr der heutigen Technologie entspricht, somit weisen sie visuelle Nachteile für Lernende auf, die mit einer Modernisierung der Oberfläche gelöst werden könnten. Es ist wünschenswert, dass einerseits die grafische Aufbereitung von bestehenden Mikrowelten nach heutigen Standards erfolgt, andererseits dass die Mikrowelten mit neuen Inhalten und didaktischen Ansätzen erweitert werden. Viele relevante Inhalte der Zahlentheorie werden durch bestehende Mikrowelten nicht oder nur zu wenig abgedeckt. Mathematische Mikrowelten, die sich auf den Bereich der Kryptografie, die Optimierungen von Bildern

oder Musik durch Mathematik spezialisieren, wären eine gute Ergänzung für Lernende.

Die Fragestellung nach den Lerneffekten von Mikrowelten konnte leider nicht ausreichend beantwortet werden, da kaum vergleichbare aussagekräftige Forschungsergebnisse identifiziert werden konnten. Zur Untersuchung wurden lediglich zwei zahlentheoretische Mikrowelten herangezogen, wobei nur bei einer davon Lerneffekte erforscht und dokumentiert wurden. Aus diesem Grund stellen die oben genannten Schlüsse nur einen gewissen Ausschnitt der Realität dar und können nicht als vollständig erforscht betrachtet werden. Es empfiehlt sich das Untersuchen von Mikrowelten aus anderen mathematischen Teilbereichen, um Schlüsse auf allgemeingültige Lerneffekte durch mathematische Mikrowelten machen zu können. Für eine vertiefte Analyse, wie bestehende (und auch zukünftige) Mikrowelten im Kontext der aktuellen Didaktik erweitert und programmiert werden können, ist die Betrachtung weiterer moderner Mikrowelten sinnvoll.

Insgesamt lässt sich der Schluss ziehen, dass digitale Mikrowelten großes didaktisches Potential bergen. Mit dieser Arbeit - mit dem Vergleich dreier Mikrowelten, dem Konzept für eine kryptografische Mikrowelt, den Kernideen für Mikrowelten in den Bereichen Musik und Kunst und den Entwicklungs- und Optimierungsvorschlägen zu bestehenden zahlentheoretischen Mikrowelten - wurde ein möglicher Grundstein für weitere Untersuchungen gelegt.

Literaturverzeichnis

- Stefan Aufenanger. Lernen mit neuen Medien – Was bringt es wirklich? Forschungsergebnisse und Lernphilosophien. *Medien praktisch. Zeitschrift für Medienpädagogik*, (4): S. 4–8, 1999.
- H. Bauersfeld. Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. *Lernen und Lehren von Mathematik*, (6):S. 1–56, 1983.
- Christoph Baxa. VO Zahlentheorie: Manuskript. 2017.
- L. Benton, I. Kalas, P. Saunders, C. Hoyles, und R. Noss. Beyond jam sandwiches and cups of tea: An exploration of primary pupils' algorithm-evaluation strategies. *Journal of Computer Assisted Learning*, 34(5):S. 590–601, 2018a.
- Laura Benton, Piers Saunders, Ivan Kalas, Celia Hoyles, und Richard Noss. Designing for learning mathematics through programming: A case study of pupils engaging with place value. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 16:S. 68–76, 2018b.
- Gerd Bosbach und Jens Jürgen Korff. *Die Zahlentrickser: Das Märchen von den aussterbenden Deutschen und andere Statistikkügen*. Heyne, München, 2 Auflage, 2017.
- Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme, und Hans-Georg Weigand, Hrsg. *Handbuch der Mathematikdidaktik*. SPRINGER, Berlin, Heidelberg, 2015.
- Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn. Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme, und Hans-Georg Weigand, Hrsg., *Handbuch der Mathematikdidaktik*, S. 19–49. SPRINGER, Berlin, Heidelberg, 2015.
- Chairat Burusapat und Pattariya Lekdaeng. What Is the Most Beautiful Facial Proportion in the 21st Century? Comparative Study among Miss Universe, Miss Universe Thailand, Neoclassical Canons, and Facial Golden Ratios. *Plastic and reconstructive surgery. Global open*, 7(2):e2044, 2019.
- Peter Damerow und Wolfgang Lefèvre, Hrsg. *Rechenstein, Experiment, Sprache: Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften*. Klett-Cotta, Stuttgart, 1. Auflage, 1981.
- Albrecht Dürer. *Opera Alberti Dureri*. Jansen, Arnem, 1604.

- Laurie D. Edwards. Embodying mathematics and science: Microworlds as representations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1):S. 53–78, 1998.
- Euklid. *Die Elemente: Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1980.
- P. Ferrari. Understanding elementary number theory at the undergraduate level: A semiotic approach. *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction*, S. 97–116, 2002.
- Georg Glaeser und Konrad Polthier. *Bilder der Mathematik*. Sachbuch. Springer Spektrum, Berlin and Heidelberg, 2. Auflage, 2014.
- E. Paul Goldenberg. Seeing Beauty in Mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, S. 39–66. Mathematical Association of America, USA, 1991.
- E. Paul Goldenberg, Cynthia J. Carter, June Mark, Kristen Reed, Deborah Spencer, und Kate Coleman. Programming as Language and Manipulative for Second-Grade Mathematics. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 7(1):S. 48–65, 2021.
- Craig Graci, Jack Narayan, und Randy Odendahl. Bunny Numerics. In Erich Kaltofen und Stephen M. Watt, Hrsg., *Computers and mathematics*, S. 228–239. SPRINGER, New York, 1989.
- Hermann Hankel. *Theorie der complexen Zahlensysteme: Insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton’schen Quaternionen, nebst ihrer geometrischen Darstellung*. L. Voss, Leipzig, 1867.
- Uta Häsel-Weide und Marcus Nührenbörger. *Individuell fördern - Kompetenzen stärken in der Eingangsstufe (Kl. 1 und 2). 4. Fördern im Mathematikunterricht.*, Band 134 in *Beiträge zur Reform der Grundschule*. 2012.
- Lisa Hefendehl-Hebeker und Susanne Prediger. Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, (48):S. 1–7, 2006.
- Lisa Hefendehl-Hebeker und Inge Schwank. Arithmetik: Leitidee Zahl. In Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme, und Hans-Georg Weigand, Hrsg., *Handbuch der Mathematikdidaktik*, S. 77–115. SPRINGER, Berlin, Heidelberg, 2015.
- HiSoUR Kunst Kultur Ausstellung. Musik und Mathematik: Akademisch Kultur Mathematik, 2017. URL <https://www.hisour.com/de/music-and-mathematics-17961/>.
- Arnold Kirsch. *Mathematik wirklich verstehen: Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen*. Aulis-Verl. Deubner, Köln, 1994.

- Friedhart Klix. *Die Natur des Verstandes*. Hogrefe, Göttingen, 1992.
- Aygül Koc. *Einführung in die Kryptologie und ihre Vermittlung im Schulunterricht*. 2019.
- Markus Kopetzky. *Preispsychologie: In vier Schritten zur optimierten Preisgestaltung*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 1. Auflage, 2016.
- Sybille Krämer. *Symbolische Maschinen: Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.
- Stephen Laurence und Eric Margolis. Number and Natural Language. In Peter Carruthers, Stephen Laurence, und Stephen P. Stich, Hrsg., *The innate mind*, S. 216–236. Oxford University Press, 2006.
- Robert W. Lawler. The Progressive Construction of Mind. *Cognitive Science*, 5(1):S. 1–30, 1981.
- W. Lefèvre. Rechenstein und Sprache. Zur Begründung der wissenschaftliche Mathematik durch die Pythagoreer. In Peter Damerow und Wolfgang Lefèvre, Hrsg., *Rechenstein - Experiment - Sprache*, S. 115–169. Klett-Cotta, Stuttgart, 1981.
- Alan Lesgold. Intelligenter computerunterstützter Unterricht. *Wissenspsychologie*, S. 554–569, 1988.
- Peter Liljedahl, Nathalie Sinclair, und Rina Zazkis. Number concepts with Number Worlds : thickening understandings. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(3):S. 253–275, 2006.
- Andreas Loos und Günter M. Ziegler. Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. In Regina Bruder, Lisa Hefendehl-Hebeker, Barbara Schmidt-Thieme, und Hans-Georg Weigand, Hrsg., *Handbuch der Mathematikdidaktik*, S. 3–17. SPRINGER, Berlin, Heidelberg, 2015.
- Heinz Lüneburg, Theo Grundhöfer, Huberta Lausch, und Karl Strambach. *Zahlentheorie*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, Berlin and Boston, 2010.
- Martina Gembski. Große Zahlen begreifen: Fehlvorstellungen zu Zahlen vorbeugen und korrigieren. *Mathematik 5-10*, (47), 2019.
- S. Papert. Tomorrow’s Classrooms. *New Horizons in Educational Computing*, S. 17–20, 1984.
- Seymour Papert. *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basicbooks, New York, 2. Auflage, 1980.
- Seymour Papert. *Die vernetzte Familie: Kinder und Computer*. Kreuz, Stuttgart, 1998a.
- Seymour Papert. *Revolution des Lernens: Kinder, Computer, Schule in einer digitalen Welt*. Heise, Hannover, 5. Auflage, 1998b.

- Seymour Papert und Herbert Löthe. *Gedankenblitze: Kinder, Computer und neues Lernen*, Band 8126 in *Rororo computer*. Rowohlt, Reinbek b. Hamburg, 1985.
- Roy D. Pea. *Mirrors of minds: Patterns of experience in educational computing ; papers from the Center for Children and Technology, Bank Street College*. Ablex, Norwood N.J., 1987.
- Gottfried Richenhagen. Kinder, Computer und Mikrowelten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 6(4):S. 285–302, 1985.
- Hartley Rogers. *Theory of recursive functions and effective computability*. MIT Press, Cambridge, Mass., 5. Auflage, 2002.
- Simeon Schlicht. *Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs*. Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften. SPRINGER, 2016.
- Manfred Schroeder. *Number Theory in Science and Communication: With Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing, and Self-Similarity*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 5. Auflage, 2009.
- Manfred R. Schroeder. Alltag mit der "Königin der Mathematik". *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen*, S. 157–169, 2008.
- Sendova E. Assisting the art of discovery at school age: The Bulgarian experience. *Talent development around the world*, S. 39–98, 2013.
- Sendova E. & Sendov B. Using computers in school to provide linguistic approaches to mathematics: A Bulgarian example. *Machine-Mediated Learning*, (4):S. 27–65, 1994.
- Siew. Golden Ratio - The Secret to Beauty - Latest Concepts, 2020. URL <https://drsiew.com/golden-ratio-secret-beauty-latest-concepts/>.
- Nathalie Sinclair, Rina Zazkis, und Peter Liljedahl. Number Worlds: Visual and Experimental Access to Elementary Number Theory Concepts. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8(3):S. 235–263, 2003.
- Ruben Stelzner. Der Goldene Schnitt - Das Mysterium der Schönheit: Eine naturwissenschaftlich-philosophische Abhandlung, 2003. URL <http://www.golden-section.eu/>.
- Patrick W. Thompson. Notations, Conventions, and Constraints: Contributions to Effective Uses of Concrete Materials in Elementary Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2):S. 123, 1992.
- Rina Zazkis. Intuitive rules in number theory: Example of ‘The more of A, the more of B’ rule implementation. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2):S. 197–209, 1999.

- Rina Zazkis und Stephen Campbell. Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers' Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5):S. 540–563, 1996a.
- Rina Zazkis und Stephen Campbell. Prime decomposition: Understanding uniqueness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(2):S. 207–218, 1996b.
- Rina Zazkis und Peter Liljedahl. Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(1):S. 91–118, 2002.
- Jochen Ziegenbalg. *Elementare Zahlentheorie: Beispiele, Geschichte, Algorithmen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2015.
- Jochen Ziegenbalg. *Figurierte Fibonacci-Zahlen*. Springer Fachmedien, Wiesbaden GmbH, 2018.

Abbildungsverzeichnis

2.1	The Count Microworld (Lawler, 1981, S. 5).	10
2.2	Konträre Kontrolstrukturen (Lawler, 1981, S. 7).	11
2.3	Aus zahlentheoretischen Folgen konstruierte „Barock-Töne“ (Schroeder, 2008, S. 163).	18
2.4	Quadratic-Residue Diffusor (QRD), auf der Primzahl 17 als Periode beruhend. Derartige Strukturen sind weltweit als „Schroeder-Diffusoren“ bekannt und auch in der Göttinger Stadthalle zu finden. Die Wahl von 17 als Periode erlaubt die effiziente Schallstreuung von vier musikalischen Oktaven (Schroeder, 2008, S. 161).	19
2.5	Partielle Gaußsche Summe, die eine Spirale bildet (Schroeder, 2009, S. 225).	20
2.6	Mehrere Gaußsche Summen in der Gaußschen Zahlenebene (Schroeder, 2008, S. 168).	20
2.7	Spektrum teilerfremder Zahlen (Schroeder, 2008, S. 169).	21
2.8	Der vitruvianische Mensch (Leonardo da Vinci, 1490).	21
2.9	Seitenansicht eines sehr schlanken Mannes, Arm in Seitenansicht (Dürer, 1604).	22
2.10	Goldene Schnitte im Beispiel von Natalie Portman (Siew, 2020).	23
3.1	Number Worlds Mikrowelt (Sinclair et al., 2003, S. 239).	35
3.2	Vielfache in einer Zellenbreite von 10 (Sinclair et al., 2003, S. 241).	36
3.3	Verschiebungsoperation (Sinclair et al., 2003, S. 241).	37
3.4	Zusammenhang Zeilenbreite(gw) und Vielfache(m) (Sinclair et al., 2003, S. 241).	37
3.5	Primzahlen in verschiedenen Welten (Sinclair et al., 2003, S. 243).	38
3.6	A Bunny’s World (Graci et al., 1989, S. 2).	46
3.7	Bunny Types (Graci et al., 1989, S. 5).	46
3.8	Zahlenfolgen durch Hops (Graci et al., 1989, S. 4).	47
3.9	Weitere Bunny-Zahlenfolgen (Graci et al., 1989, S. 4).	47
3.10	Komplexere Zahlenfolge (Graci et al., 1989, S. 4).	48
3.11	Prozedur zum Anzeigen von Vielfachen von m (Graci et al., 1989, S. 6).	48
3.12	Prozedur zum Anzeigen des kgV zweier Zahlen (Graci et al., 1989, S. 6).	49
3.13	Prozedur für Primzahlen in der Fibonacci-Folge (Graci et al., 1989, S. 7).	49
3.14	Prozedur für Teiler in Bunny Numerics (Graci et al., 1989, S. 8).	50
3.15	Zahlensets in Bunny Numerics (Graci et al., 1989, S. 8).	50
3.16	Sieb des Eratosthenes in Bunny Numerics (Graci et al., 1989, S. 9).	50
3.17	Verschachtelte Funktion in <i>Snap!</i> (Goldenberg et al., 2021, S. 52).	53
3.18	Funktion mit Eingabe in <i>Snap!</i> (Goldenberg et al., 2021, S. 52).	53

Abbildungsverzeichnis

3.19	Mikroweltumgebung der Number Line Microworld (Goldenberg et al., 2021, S. 53).	54
3.20	Number Line - Ausgabe bei Verwendung der Blöcke <i>Start at 0</i> und <i>+5</i> und <i>+3</i> (Goldenberg et al., 2021, S. 54).	54
3.21	Motivierende Musterästhetik in Number Line Microworld	55
3.22	Lösungsdarstellung einer Aufgabe in Number Line Microworld	55
3.23	Kombinierter Code zum Erzeugen eines <i>+1</i> - Blocks (Goldenberg et al., 2021, S. 55).	56
3.24	Addition von Brüchen auf der Zahlengerade in Number Line Microworld (Goldenberg et al., 2021, S. 56).	56
4.1	Konzeptzeichnung zur Verschlüsselungs-Mikrowelt	73
4.2	Konzeptzeichnung zur RSA-Verschlüsselung	74

Tabellenverzeichnis

3.1	Gegenüberstellung der Mikrowelten Number Worlds, Bunny Numerics, Number Line Microworld	58
-----	--	----