

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Zugänge zur Integralrechnung: Darstellung der fachlichen
und didaktischen Möglichkeiten sowie deren Umsetzung in
Schulbüchern“

verfasst von / submitted by

Felix Heistingner, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2021 / Vienna, 2021

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 507 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Englisch Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Begriffe, Definitionen und Sätze	2
2.1	Fachliche Klärung des Integralbegriffs	2
2.1.1	Unter- und Obersummen	2
2.1.2	Integrierbarkeit und Integral	4
2.2	Stammfunktionen	6
2.3	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	7
2.4	Abschließende Bemerkungen	9
2.4.1	Das Integral als Mittelwert	10
2.4.2	<i>Integrierbar sein</i> vs. <i>eine Stammfunktion besitzen</i>	11
2.4.3	Zum Begriff des unbestimmten Integrals	13
3	Begriffe und Konzepte aus der Fachdidaktik	16
3.1	Die drei Winter'schen Grunderfahrungen	16
3.2	Aspekte und Grundvorstellungen	19
3.3	Zum Analysisunterricht	21
3.3.1	Relevante Spannungsfelder	22
3.3.2	Inhaltliche Vernetzung	24
4	Fachdidaktische Diskussion des Integralbegriffs	25
4.1	Der Integralbegriff – Aspekte und Grundvorstellungen	25
4.1.1	Produktsummenaspekt	27
4.1.2	Stammfunktionsaspekt	28
4.1.3	Maßaspekt	31
4.1.4	Flächeninhaltsgrundvorstellung	34
4.1.5	Rekonstruktionsgrundvorstellung	36
4.1.6	Kumulationsgrundvorstellung	38
4.1.7	Abschließende Bemerkungen	40
4.2	Verschiedene Zugänge zur Integralrechnung	41
4.2.1	Flächeninhalte unter Funktionsgraphen	42
4.2.2	Umkehrung der Differentiation	47
4.2.3	Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten	51
4.3	Beiträge zu den Winter'schen Grunderfahrungen	57
5	Vergleich gängiger Schulbücher für die AHS	59
5.1	Gewählte Zugänge und deren Umsetzung	59
5.1.1	Beschreibung der gewählten Zugänge	60
5.1.2	Aspekte und Grundvorstellungen	82

5.1.3	Umgang mit Spannungsfeldern	86
5.1.4	Inhaltliche Vernetzung	89
5.1.5	Ermöglichung der Grunderfahrungen	90
5.2	Fachliche Korrektheit	91
5.2.1	Die Begriffe <i>Integrieren</i> und <i>Integrierbar</i>	91
5.2.2	Das unbestimmte Integral	93
6	Fazit	95
6.1	Ein Vorschlag	96
	Literatur	100
	Abbildungsverzeichnis	103
	Tabellenverzeichnis	103
	Zusammenfassung	104
	Abstract	105

1 Einleitung

Die Integralrechnung ist im österreichischen Lehrplan für *allgemeinbildende höhere Schulen*¹ fest verankert (vgl. RIS 2021) und bildet darin einen der letzten großen Themenbereiche, die in diesen Schulformen im Mathematikunterricht behandelt werden. Um dem Anspruch gerecht zu werden, zur Allgemeinbildung der Schüler*innen beizutragen, sollte dabei insbesondere „das *inhaltliche Verständnis des Integralbegriffs* im Mittelpunkt [stehen]“ (Danckwerts & Vogel 2006: 125). Dieses inhaltliche Verständnis den Schüler*innen im Mathematikunterricht auf geeignete Weise zugänglich zu machen, gilt jedoch insbesondere aufgrund der großen Vielfalt fachlicher und inhaltlicher Facetten des Integralbegriffs als besonders anspruchsvoll (vgl. Blum & Törner 1983: 171-172, Danckwerts & Vogel 2006: 94).

Ziel dieser Arbeit ist daher, zunächst die fachliche und inhaltliche Komplexität des Integralbegriffs zu beleuchten und anhand der daraus hervorgehenden fachdidaktischen und fachlichen Kriterien unterrichtliche Zugänge zur Integralrechnung im Detail zu beschreiben sowie deren Umsetzung in den vier Schulbüchern, die für die zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit für die österreichische AHS-Oberstufe zur Verfügung stehen, im Detail zu analysieren. Dabei spielen selbstverständlich auch die spezifischen Anforderungen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts eine große Rolle und werden vielseitig berücksichtigt. Die Analyse zeigt, dass alle untersuchten Schulbücher zumindest auf grundlegender Ebene erreichen, „ein umfassendes Bild der Grundvorstellungen und Aspekte zum Integralbegriff zu vermitteln“ (Greefrath et al. 2016: 262). In Hinblick auf einzelne Kriterien gibt es jedoch zum Teil sehr große Unterschiede zwischen den vier Schulbüchern, wobei keines der Schulbücher in allen analysierten Bereichen gleichzeitig dominiert.

Zu Beginn werden sowohl relevante *mathematische Begriffe, Definitionen und Sätze* als auch grundlegende *Begriffe und Konzepte aus der Fachdidaktik* eingeführt. Darauf folgt eine umfassende *fachdidaktische Diskussion des Integralbegriffs*, bei der zunächst insbesondere die Vielzahl von Aspekten und Grundvorstellungen sowie deren durchaus komplexes Zusammenspiel im Zentrum steht. Außerdem werden auf Basis einschlägiger Literatur drei verschiedene unterrichtliche Zugänge zur Integralrechnung beschrieben und analysiert sowie in Bezug auf deren Beiträge zur Allgemeinbildung anhand entsprechender Kriterien miteinander verglichen. Zum Abschluss werden die Zugänge zur Integralrechnung, die in den vier österreichischen Schulbüchern für die AHS-Oberstufe gewählt wurden, im Detail beschrieben, anhand der erarbeiteten Kriterien analysiert und sorgfältig miteinander verglichen.

¹Allgemeinbildende höhere Schule (kurz AHS) ist der Überbegriff für gymnasiale Schulformen mit Oberstufe in Österreich (BMBWF 2021).

2 Mathematische Begriffe, Definitionen und Sätze

In diesem Kapitel werden grundlegende mathematische Begriffe wie *Unter- und Obersummen*, *Integrierbarkeit*, *bestimmtes Integral*, *Stammfunktion* und *Integralfunktion* definiert und damit in Verbindung stehende Sätze diskutiert, wobei dabei dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* seiner Rolle entsprechend viel Aufmerksamkeit geschenkt wird. Abschließend werden noch Überlegungen zum *Integral als Mittelwert* angestellt, die beiden Funktionseigenschaften *integrierbar sein* und *eine Stammfunktion besitzen* gegenübergestellt und der Begriff des *unbestimmten Integrals* kritisch beleuchtet.

2.1 Fachliche Klärung des Integralbegriffs

Der für die Schule relevante Integralbegriff geht auf Bernhard Riemann (1826-1866) und Jean Gaston Darboux (1842-1917) zurück (vgl. Büchter & Henn 2010: 227) und wird in der Fachliteratur üblicherweise als Riemann-Integral oder Riemannsches Integral bezeichnet.² Der eigenständige Begriff des Darboux-Integrals existiert zwar auch, man kann aber zeigen, dass dieser zum Riemann-Integral äquivalent ist und damit eigentlich nur eine weitere, in vielen Fällen jedoch sehr nützliche Beschreibung desselben Integralbegriffs darstellt (vgl. Heuser 2009: 468). Daher spielt eine tatsächliche Unterscheidung im Grunde keine Rolle, was sich auch in einschlägigen Lehrwerken widerspiegelt.³

Im Rahmen dieser Arbeit werden sich von nun an die Begriffe *integrierbar* und (*bestimmtes*) *Integral* immer einfach auf den für die Schule relevanten Integralbegriff beziehen, wobei damit gleichzeitig auch auf eine Unterscheidung zwischen Riemann- und Darboux-Integral verzichtet wird. Um ein vernünftiges Maß an begrifflicher Klarheit zu gewährleisten, werden im Folgenden noch die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit diesem Integralbegriff sauber definiert und miteinander in Verbindung gebracht.

2.1.1 Unter- und Obersummen

In dieser Arbeit bezeichne $[a; b]$ stets ein abgeschlossenes Intervall reeller Zahlen, wobei $a < b$ gelten soll. Dieses Intervall wird nun durch endlich viele Stellen $t_0, t_1, \dots, t_n$ mit

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

²siehe z.B. Deiser (2015), Forster (2016), Heuser (2009)

³Beispielsweise führt Otto Forster (2016: 208) in seinem Lehrwerk *Analysis 1* streng genommen das Darboux-Integral ein, bezeichnet es aber von Anfang an als Riemannsches Integral und führt Riemannsche Summen, die ja eigentlich der Definition des Riemann-Integrals zu Grunde liegen (vgl. Heuser 2009: 450), erst danach ein.

in $n \in \mathbb{N}^*$ Teilintervalle der Form $[t_{i-1}; t_i]$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ zerlegt. Die so erhaltene Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ wird mit Z bezeichnet und man schreibt

$$Z := [t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b]$$

(vgl. Greefrath et al. 2016: 222).

Definition (Unter- und Obersummen). Sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung des Intervalls $[a; b]$. Außerdem sei m_i das Infimum und M_i das Supremum der Funktionswerte von f im Teilintervall $[t_{i-1}; t_i]$. Dann wird

$$U(Z) := \sum_{i=1}^n m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

die *Untersumme* und

$$O(Z) := \sum_{i=1}^n M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

die *Obersumme* von f zur Zerlegung Z genannt (vgl. Büchter & Henn 2010: 225).

Aufgrund der Beschränktheit von f sind Unter- und Obersummen stets wohldefiniert, da diese die Existenz der Infima und Suprema auf allen Teilintervallen garantiert. Insbesondere existiert deshalb auch ein Infimum s und ein Supremum S der Funktionswerte von f im gesamten Intervall $[a; b]$. Daher gilt für Unter- und Obersumme zu einer beliebigen Zerlegung Z , dass

$$s \cdot (b - a) \leq U(Z) \leq O(Z) \leq S \cdot (b - a)$$

(vgl. Büchter & Henn 2010: 225).

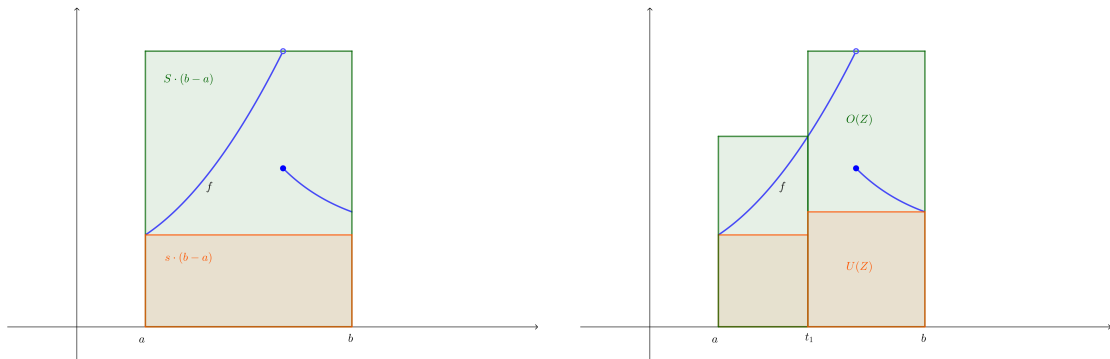


Abb. 1: Graphische Veranschaulichung der Beziehung $s \cdot (b - a) \leq U(Z) \leq O(Z) \leq S \cdot (b - a)$

Sei ab jetzt $\mathcal{U}$ die Menge aller Untersummen und $\mathcal{O}$ die Menge aller Obersummen von f zu beliebigen Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$. Es ist bereits klar, dass diese beiden

Mengen beschränkt sind. Man kann nun aber zeigen⁴, dass insbesondere sogar gilt, dass jede Obersumme von f eine obere Schranke von $\mathcal{U}$ und jede Untersumme von f eine untere Schranke von $\mathcal{O}$ ist. Insgesamt lässt sich aus diesem Sachverhalt also eine schöne und besonders wichtige Beziehung destillieren, nämlich

$$\sup \mathcal{U} \leq \inf \mathcal{O}$$

(vgl. Büchter & Henn 2010: 226).

2.1.2 Integrierbarkeit und Integral

Definition (Integrierbarkeit und Integral). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $[a; b] \subseteq I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $[a; b]$ beschränkte Funktion. Wenn für die Mengen der Unter- beziehungsweise Obersummen von f zu beliebigen Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$ gilt, dass

$$\sup \mathcal{U} = \inf \mathcal{O},$$

dann wird diese Zahl das *bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a; b]$* genannt und mit

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

bezeichnet. Eine Funktion, die die in dieser Definition geforderten Voraussetzungen erfüllt, wird *integrierbar auf dem Intervall $[a; b]$* genannt (vgl. Greefrath et al. 2016: 224).⁵

Mit dieser Definition ist jedoch leider noch überhaupt nicht klar, wie man nun tatsächlich vorgehen kann, wenn man die Integrierbarkeit einer Funktion über einem Intervall überprüfen oder gar das entsprechende bestimmte Integral berechnen möchte (vgl. Büchter & Henn 2010: 228). In diesem Zusammenhang gibt es jedoch einen wichtigen Satz, der dann in weiterer Folge Vieles erleichtert.

Satz (Kriterium für Integrierbarkeit).⁶ Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $[a; b] \subseteq I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $[a; b]$ beschränkte Funktion. Falls es eine Folge von Untersummen (c_n) und eine Folge von Obersummen (d_n) gibt⁷, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n - c_n) = 0,$$

dann ist f integrierbar auf dem Intervall $[a; b]$ (vgl. Büchter & Henn 2010: 228).

⁴Beweis z.B. in Büchter & Henn (2010: 226)

⁵Streng genommen entspricht dies nun der Definition des Darboux-Integrals (vgl. Deiser 2015: 38).

⁶Beweis z.B. in Büchter & Henn (2010: 228)

⁷Damit ist gemeint, dass $c_n \in \mathcal{U}$ und $d_n \in \mathcal{O}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Die Relevanz dieses Satzes ist kaum zu unterschätzen. Einerseits kann man damit die Integrierbarkeit von Funktionen beweisen, die auf dem betrachteten Intervall monoton oder stetig sind (vgl. Bächter & Henn 2010: 229-231), andererseits lassen sich dadurch zumindest gewisse bestimmte Integrale als Grenzwerte solcher Folgen von Unter- beziehungsweise Obersummen konkret berechnen (siehe z.B. Bächter & Henn 2010: 231-234). Außerdem liefert dieser Satz den entscheidenden Ansatz für eine alternative und durchaus anschauliche Definition des bestimmten Integrals, die auch in der Schulmathematik üblich ist (vgl. Greefrath et al. 2016: 225).

Bei dieser Definition beschränkt man sich auf sogenannte *äquidistante* Zerlegungen des betrachteten Intervalls, also Zerlegungen in lauter gleich breite Teilintervalle. Zerlegt man das betrachtete Intervall in $n \in \mathbb{N}^*$ solche Teile, dann bezeichnet man üblicherweise die entsprechende Untersumme mit U_n und die entsprechende Obersumme mit O_n (vgl. Greefrath et al. 2016: 225). Entscheidend ist nun, dass man mit (U_n) und (O_n) Folgen von Unter- beziehungsweise Obersummen erhält, die eine Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert dieser Folgen ermöglichen und dass diese Definition zu der bereits gegebenen äquivalent ist (vgl. Greefrath et al. 2016: 225).⁸

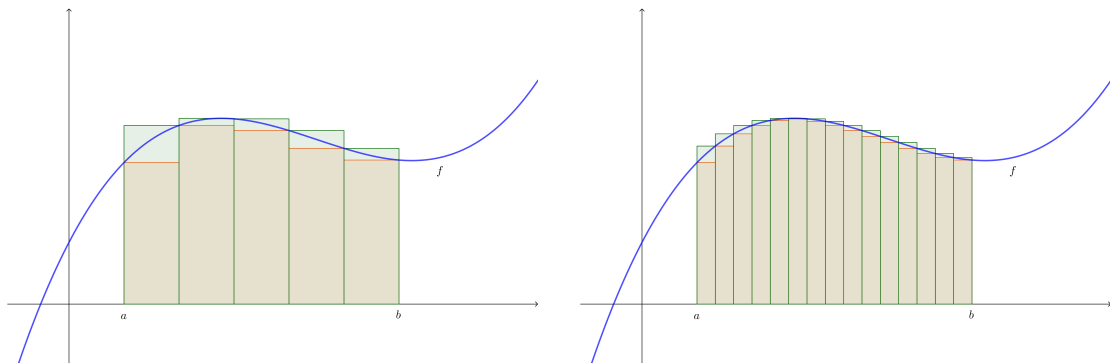


Abb. 2: Graphische Veranschaulichung von Unter- und Obersummen bei äquidistanten Zerlegungen ($n = 5$ bzw. $n = 15$)

Alternative Definition (Integrierbarkeit und Integral). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $[a; b] \subseteq I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $[a; b]$ beschränkte Funktion. Weiter seien (U_n) und (O_n) die Folgen von Unter- beziehungsweise Obersummen von f zu äquidistanten Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$. Wenn gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n,$$

dann wird diese Zahl das *bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a; b]$* genannt und

⁸Beweis z.B. in Deiser (2015: 40)

mit

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

bezeichnet. Eine Funktion, die die in dieser Definition geforderten Voraussetzungen erfüllt, wird *integrierbar auf dem Intervall* $[a; b]$ genannt (vgl. Greefrath et al. 2016: 225).

Auch wenn diese alternative Definition des bestimmten Integrals auf den ersten Blick sogar eine Anleitung zum Berechnen bestimmter Integrale beinhaltet, so bleibt es leider bis auf wenige Ausnahmen nach wie vor mühsam bis unmöglich, solche Berechnungen tatsächlich durchzuführen (vgl. Büchter & Henn 2010: 235). Man kann diese Anleitung aber zumindest dafür verwenden, sich über Unter- und Obersummen an das bestimmte Integral gezielt heranzutasten. Dies ist vor allem mit entsprechendem Technologieeinsatz gut durchführbar und kann bei geeigneter Wahl der Software auch sehr schön graphisch veranschaulicht werden⁹ (vgl. Büchter & Henn 2010: 232).

Für stetige Funktionen liefert schließlich der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* eine Möglichkeit zur Berechnung bestimmter Integrale, die zumindest theoretisch immer ans Ziel führt, in vielen Fällen aber auch von sehr großem praktischen Nutzen ist (vgl. Büchter & Henn 2010: 244). Bevor aber dieser Satz im Detail diskutiert werden kann, muss noch der Begriff der *Stammfunktion* eingeführt werden.

2.2 Stammfunktionen

Definition (Stammfunktion). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nennt man eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, die

$$F' = f$$

erfüllt, *Stammfunktion von f* (vgl. Forster 2016: 221).

Wie man an der Definition bereits erkennt, ist der Begriff der Stammfunktion eigentlich in der Differentialrechnung verankert und steht zumindest auf den ersten Blick in keiner Verbindung zum Integral. Diese Verbindung wird erst durch den bereits erwähnten *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* hergestellt (vgl. Büchter & Henn 2010: 237).

Sei nun F eine Stammfunktion von f . Dann kann man sich unschwer davon überzeugen, dass man beliebig viele weitere Stammfunktion von f finden kann, denn offensichtlich besitzt auch die Funktion G mit $G(x) = F(x) + c$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ die geforder-

⁹z.B. mit den Befehlen „Untersumme“ und „Obersumme“ bei *GeoGebra*

ten Eigenschaften (vgl. Büchter & Henn 2010: 238). Eine in weiterer Folge besonders wichtige Aussage ist dann, dass man über diese Konstruktion tatsächlich auch schon alle möglichen Stammfunktionen von f gefunden hat, sofern man voraussetzt, dass die gemeinsame Definitionsmenge I ein Intervall ist (vgl. Büchter & Henn 2010: 240).

Satz (Stammfunktionen von f).¹⁰ Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt, dass eine Funktion $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f ist, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $G(x) = F(x) + c$ (vgl. Forster 2016: 221).

Der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* ermöglicht es dann, das Berechnen bestimmter Integrale stetiger Funktionen im Wesentlichen auf das Ermitteln entsprechender Stammfunktionen zu reduzieren¹¹ (vgl. Büchter & Henn 2010: 237). Man kann also damit in vielen Fällen „die mächtigen Ableitungsregeln für die Integralrechnung nutzbar machen“ (Büchter & Henn 2010: 246).

2.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Formulierung des *Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung* ist in der einschlägigen Literatur nicht ganz einheitlich. Um Missverständnissen vorzubeugen, wird in dieser Arbeit durchgängig dieselbe Formulierung verwendet. Bei dieser gibt es *einen Hauptsatz*, der allerdings aus *zwei Teilen* besteht (siehe z.B. Büchter & Henn 2010: 240-241, Blum & Törner 1983: 166-167). Eine andere, durchaus übliche Formulierung, die dieser sehr ähnlich ist, spricht von *zwei Hauptsätzen* und meint damit einfach den ersten beziehungsweise zweiten Teil der in dieser Arbeit verwendeten Formulierung (siehe z.B. Greefrath et al. 2016: 228-230, Blum & Kirsch 1996, Kirsch 1996). Abschließend gibt es noch Formulierungen, die entweder nur den ersten Teil (siehe z.B. Bender 1990, Danckwerts & Vogel 2006: 104-108) oder aber auch nur den zweiten Teil (siehe z.B. Forster 2016: 221) als *Hauptsatz* oder *Fundamentalsatz* bezeichnen.

Es braucht nun noch einen letzten Begriff, bevor der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formuliert werden kann, und zwar den Begriff der *Integralfunktion*.

Definition (Integralfunktion). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von I integrierbar ist, dann bezeichnet man die Funktion

$$F_a : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

¹⁰Beweis z.B. in Forster (2016: 221)

¹¹Auch dies ist bekanntermaßen oft leichter gesagt als getan beziehungsweise nicht immer möglich.

als *Integralfunktion von f zur unteren Grenze a* (vgl. Greefrath et al. 2016: 228), wobei man sinnvollerweise festlegt, dass

$$\int_a^a f(t) dt := 0 \quad \text{und} \quad \int_a^x f(t) dt := - \int_x^a f(t) dt \quad (\text{für } x < a)$$

(vgl. Büchter & Henn 2010: 227, Forster 2016: 218).

Der Begriff der Integralfunktion ist nicht nur für den in diesem Abschnitt diskutierten *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* von zentraler Bedeutung, sondern er spielt unter anderem auch bei didaktischen Überlegungen zur Einführung der Integralrechnung in der Schule eine große Rolle.¹²

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).¹³ Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

1. Ist $a \in I$ und $F_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Integralfunktion von f mit

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

dann ist F_a differenzierbar und es gilt $F'_a = f$.¹⁴

2. Ist $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f und $a, b \in I$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

(vgl. Büchter & Henn 2010: 240-241, Forster 2016: 220-221)

Dieser Satz, dessen große Bedeutung mit der Bezeichnung *Hauptsatz* unterstrichen wird, verbindet „zwei Jahrtausende alte mathematische Problemkreise - das Problem, Tangenten an Kurven zu legen, und das Problem, Flächeninhalte zu bestimmen“ (Büchter & Henn 2010: 237). Die Entdeckung, dass „sich die Operationen von Differentiation und Integration invers zueinander verhalten“ (Greefrath et al. 2016: 221), wird sowohl Isaac Newton (1643-1727) als auch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) zugeschrieben, wobei die erste dokumentierte explizite Formulierung des Hauptsatzes von Newton stammt (vgl. Greefrath et al. 2016: 221).

Die beiden zentralen Aussagen des Hauptsatzes lassen sich recht prägnant auf den Punkt bringen. Der erste Teil sagt aus, dass „jede Integralfunktion einer stetigen Funk-

¹²siehe z.B. Danckwerts & Vogel (2006: 96-110)

¹³Beweis z.B. in Forster (2016: 220-221)

¹⁴Daraus folgt insbesondere sofort, dass jede stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt.

tion eine Stammfunktion¹⁵ ist“ (Greefrath et al. 2016: 228). Es gilt dann also: „Differenzieren macht Integrieren rückgängig“ (Blum & Kirsch 1996: 62). Diesen Zusammenhang kann man unter anderem anhand geeigneter Beispiele aus der angewandten Mathematik¹⁶ motivieren und darüber hinaus auch auf durchaus anschaulichem Wege beweisen (vgl. Blum & Kirsch 1996: 62-63, Kirsch 1996: 55-59). Das Ausmaß der Bedeutung des zweiten Teils ist in der einschlägigen Literatur unterschiedlich groß. Klar ist, dass man damit einen Weg gefunden hat, bestimmte Integrale einer stetigen Funktion im Grunde einfach durch Einsetzen der Grenzen in eine beliebige Stammfunktion zu berechnen (vgl. Greefrath et al. 2016: 229). Dies allein ist ohne Zweifel bereits von großer sowohl theoretischer als auch praktischer Bedeutung. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen und die Aussage des zweiten Teils lesen als „Integrieren macht Differenzieren rückgängig“ (Blum & Kirsch 1996: 64). Dies ist in der Schule speziell im Zusammenhang mit der Grundvorstellung vom Integrieren als Rekonstruieren¹⁷ von großer Bedeutung (vgl. Blum & Kirsch 1996: 64-65, Danckwerts & Vogel 2006: 96-110) und stellt außerdem den zweiten Teil des Hauptsatzes ähnlich prägnant dem ersten gegenüber, sodass die beiden Teile einander sowohl inhaltlich als auch sprachlich sehr schön ergänzen.

Auch beim Beweis des zweiten Teils des Hauptsatzes findet man in der einschlägigen Literatur unterschiedliche Herangehensweisen. Hat man den ersten Teil des Hauptsatzes bereits zur Verfügung, so liegt es von einem rein formalen Standpunkt aus betrachtet gewissermaßen auf der Hand, den zweiten Teil aus dem ersten zu folgern, da man dabei mithilfe des in Abschnitt 2.2 erwähnten Satzes über Stammfunktionen in wenigen einfachen Schritten ans Ziel kommt (siehe z.B. Forster 2016: 221). Blum und Kirsch kritisieren jedoch, dass dabei die „inhaltliche Aussage auf eine bloße Integralberechnungsformel reduziert“ (Blum & Kirsch 1996: 65) wird und man deshalb zumindest im schulischen Kontext den zweiten Teil des Hauptsatzes lieber unabhängig¹⁸ vom ersten Teil herleiten und beweisen sollte (vgl. Blum & Kirsch 1996: 65).

2.4 Abschließende Bemerkungen

Zum Abschluss dieses Kapitels werden im Folgenden noch einige interessante und wichtige Bemerkungen zu weiteren relevanten Begriffen im Zusammenhang mit der Integralrechnung gemacht. Dabei werden jeweils hauptsächlich fachliche aber in manchen

¹⁵Die Umkehrung dieser Aussage ist i.A. jedoch falsch, da z.B. $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \sin(x) + 2$ zwar eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(x)$ ist, aber keine Integralfunktion von f sein kann (vgl. Büchter & Henn 2010: 242).

¹⁶z.B. physikalische Arbeit (vgl. Blum & Kirsch 1996: 62-63)

¹⁷siehe Abschnitt 4.1

¹⁸Die Existenz der Stammfunktion wird bei diesem Vorschlag dadurch legitimiert, dass man von vornherein das bestimmte Integral der Ableitung einer Funktion betrachtet (vgl. Blum & Kirsch 1996: 63).

Bereichen weiterhin bereits einzelne fachdidaktische Aspekte diskutiert.

2.4.1 Das Integral als Mittelwert

Betrachtet man eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, die über dem Intervall $[a; b] \subseteq I$ integrierbar ist, so kann man sich die in einigen Anwendungssituationen¹⁹ natürliche Frage stellen, was denn „ein vernünftiger ‚Mittelwert‘ der Funktion f “ (Büchter & Henn 2010: 245) in diesem Intervall sein könnte. Um diese Frage zu beantworten, kann man beispielsweise eine äquidistante Zerlegung des Intervalls betrachten, aus jedem Teilintervall auf eine für den Kontext sinnvolle Weise einen Funktionswert herausgreifen und dann einfach das arithmetische Mittel dieser Funktionswerte berechnen (vgl. Büchter & Henn 2010: 245). Sei nun $\bar{y}_n$ das arithmetische Mittel bei einer Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ in n gleich breite Teilintervalle und $f(x_i)$ der ausgewählte Funktionswert von f im i -ten Teilintervall. Dann gilt

$$\bar{y}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Durch Multiplikation mit der Intervallbreite $b - a$ kann man nun den entscheidenden Schritt leisten, den man graphisch gewissermaßen als Übergang von einzelnen Werten zu Rechtecken interpretieren kann (vgl. Büchter & Henn 2010: 245, Danckwerts & Vogel 2006: 113). Es gilt also

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i) = (b-a) \cdot \bar{y}_n$$

wobei die linke Seite im Allgemeinen dann eine sogenannte *Zwischensumme* von f zur vorliegenden äquidistanten Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ ist.²⁰

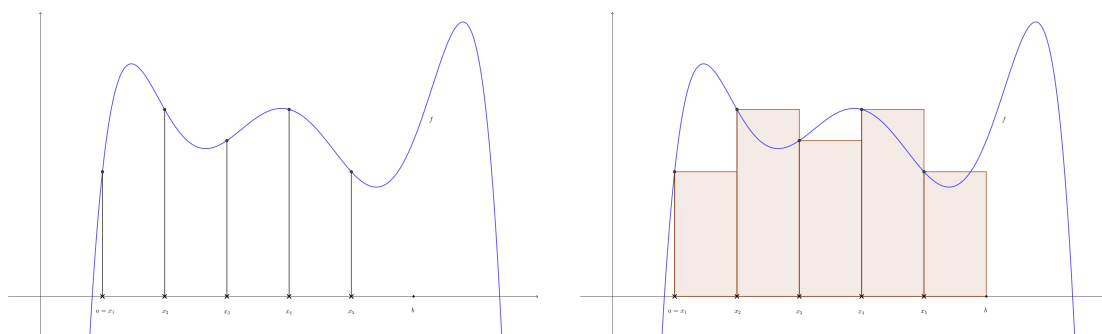


Abb. 3: Übergang von einzelnen Werten zur Zwischensumme bei der Mittelwertbildung

Man kann ohne große Schwierigkeiten zeigen, dass im Falle der Integrierbarkeit von f über $[a; b]$ auch jede entsprechende Folge solcher Zwischensummen gegen das bestimmte

¹⁹z.B. Durchschnittstemperatur an einem Ort über einen bestimmten Zeitraum mithilfe der entsprechenden Temperaturkurve (vgl. Büchter & Henn 2010: 245)

²⁰Nur in speziellen Fällen handelt es sich dabei um eine Unter- oder Obersumme.

Integral von f über $[a; b]$ konvergiert (siehe z.B. Deiser 2015: 40). Das bedeutet, man kann nun auf vernünftige Weise einen Mittelwert von f in $[a; b]$ definieren und zwar als Grenzwert von $\bar{y}_n$ für $n \rightarrow \infty$. Bezeichnet man diesen Grenzwert als $\mu(f)$, so gilt dann

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

(vgl. Büchter & Henn 2010: 246). Damit hat man mithilfe des Integrals „das Analogon zum arithmetischen Mittel“ (Danckwerts & Vogel 2006: 113) für den kontinuierlichen Fall gefunden und so den „Begriff des Mittelwerts deutlich erweitert“ (Danckwerts & Vogel 2006: 114). Daher spielt diese Idee insbesondere auch in der Stochastik eine große Rolle (vgl. Blum & Törner 1983: 165-166, Danckwerts & Vogel 2006: 113).

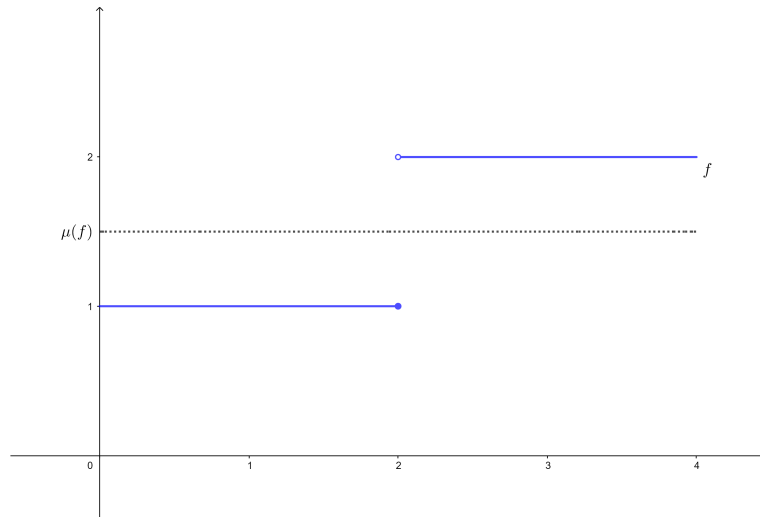


Abb. 4: Die Funktion $f : [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihren Mittelwert $\mu(f)$ nicht als Funktionswert an.

Falls f im Intervall $[a; b]$ stetig ist, dann gilt nach dem sogenannten *Mittelwertsatz der Integralrechnung* sogar, dass ein $\xi \in [a; b]$ existiert, sodass

$$f(\xi) = \mu(f)$$

(vgl. Forster 2016: 213-214), also dass „der Mittelwert $\mu(f)$ [tatsächlich] als Funktionswert von f angenommen wird“ (Danckwerts & Vogel 2006: 115).

2.4.2 Integrierbar sein vs. eine Stammfunktion besitzen

Für stetige Funktionen wurde oben bereits geklärt, dass sie sowohl über jedem abgeschlossenen Teilintervall ihrer Definitionsbereiche integrierbar sind (siehe Abschnitt 2.1.2), als auch eine Stammfunktion besitzen (siehe Abschnitt 2.3). Lässt man aber die Voraussetzung der Stetigkeit fallen, so kann im Grunde alles passieren (vgl. Furdek

2008: 22). In diesem Abschnitt werden die beiden besonders interessanten Fälle *integrierbar sein aber keine Stammfunktion besitzen* und *eine Stammfunktion besitzen aber nicht integrierbar sein* behandelt und jeweils mit einem typischen Beispiel untermauert. Damit soll verdeutlicht werden, dass es sich im Allgemeinen bei *integrierbar sein* und *eine Stammfunktion besitzen* um zwei voneinander unabhängige Funktionseigenschaften handelt, die man einander nicht gleichsetzen kann beziehungsweise sollte (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 95, Tietze et al. 1997: 287).

Als erstes wird der Fall *integrierbar sein aber keine Stammfunktion besitzen* behandelt. Man kann sich ohne allzu viel Aufwand davon überzeugen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x < 3 \\ -1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

auf jedem abgeschlossenen Teilintervall der reellen Zahlen integrierbar ist²¹. Es jedoch völlig ausgeschlossen, dass f auf einem Intervall, das die Stelle $x = 3$ enthält, eine Stammfunktion besitzt, da dies einen Widerspruch zum *Satz von Darboux*²² bedeuten würde (vgl. Deiser 2011: 240). Auf jedem solchen Intervall ist f dann also integrierbar, besitzt aber keine Stammfunktionen. Beispiele wie dieses sind durchaus auch für die Schule relevant und können im Zusammenhang mit einem passenden Kontext sogar als Einstieg in die Integralrechnung verwendet werden.²³

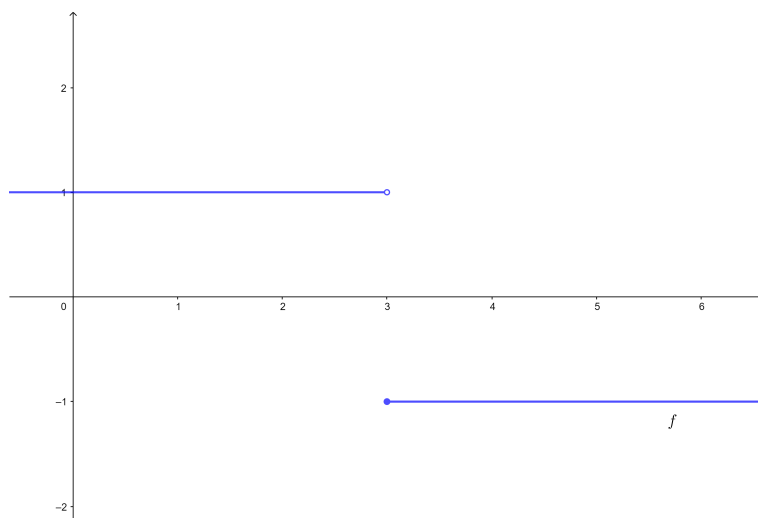


Abb. 5: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\mathbb{R}$ integrierbar, besitzt aber keine Stammfunktion auf Intervallen, die die Stelle $x = 3$ enthalten.

²¹siehe Abschnitt 2.1.2

²²Dieser besagt, dass „obwohl [...] die Ableitung einer Funktion nicht notwendig stetig ist, kann sie keine Werte überspringen“ (Deiser 2011: 240).

²³siehe z.B. Danckwerts & Vogel (2006: 97-98)

Für den Fall *eine Stammfunktion besitzen aber nicht integrierbar sein* wird hier nun ein *Klassiker* angeführt, welcher in leichten Abwandlungen in zahlreichen Lehrbüchern²⁴ zu finden ist. Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar. Für ihre Ableitung g' erhält man

$$g'(x) = \begin{cases} 2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

und stellt dabei fest, dass g' in jedem abgeschlossen Intervall, das die Stelle $x = 0$ enthält, unbeschränkt ist. Daher ist g' über keinem solchen Intervall integrierbar, besitzt aber nach Konstruktion eine Stammfunktion.

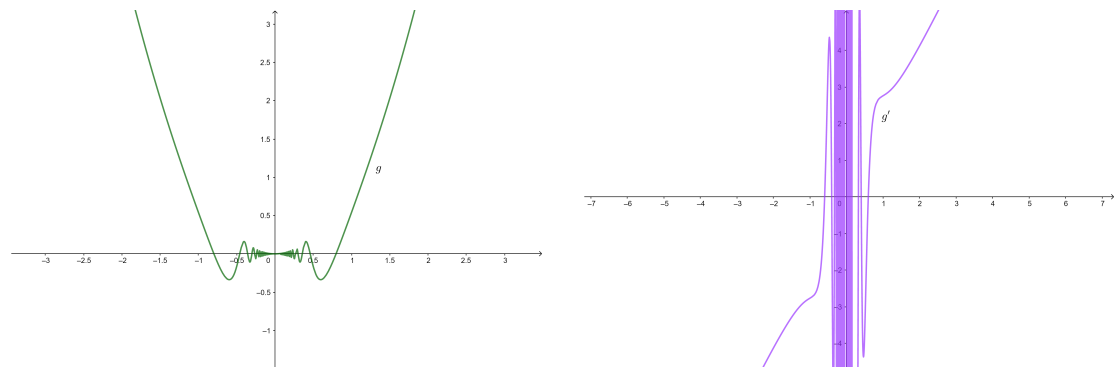


Abb. 6: g' besitzt eine Stammfunktion, ist aber z.B. über $[-1; 1]$ nicht integrierbar

Der Fall *eine Stammfunktion besitzen aber nicht integrierbar sein* ist augenscheinlich deutlich komplexer als der Fall *integrierbar sein aber keine Stammfunktion besitzen* und führt bereits zu einem Griff „in die Kiste ‚pathologischer‘ Funktionen“ (Danckwerts & Vogel 2006: 143).

2.4.3 Zum Begriff des unbestimmten Integrals

Bisher war in dieser Arbeit ausschließlich vom *bestimmten Integral* die Rede und das sogenannte *unbestimmte Integral* blieb bewusst völlig unerwähnt. Der Grund für das bewusste Weglassen dieses Begriffs ist, dass er einerseits fachlich oft eher unpräzise und andererseits didaktisch problematisch ist (vgl. Blum & Törner 1983: 179, Forster 2016: 222). Es ist dennoch wichtig, ihn im Rahmen dieser Arbeit zu erwähnen, da er trotz

²⁴siehe z.B. Blum & Törner (1983: 180), Danckwerts & Vogel (2006: 95), Deiser (2015: 79), Knoche & Wippermann (1986: 280), Tietze et al. (1997: 200)

allem weit verbreitet (vgl. Deiser 2015: 74) und auch im österreichischen Lehrplan für die AHS-Oberstufe zu finden ist (vgl. RIS 2021).

Bei Oliver Deiser ist folgende Definition des unbestimmten Integrals zu finden:

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal²⁵ integrierbar und besitzt f eine Stammfunktion, so heißt

$$\int f = \int f(x) \, dx = \{F \mid F : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist Stammfunktion von } f\}$$

das *unbestimmte Integral* von f . (Deiser 2015: 75)

Das unbestimmte Integral wird also definiert als die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f , die über jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Definitionsbereichs integrierbar ist und auch tatsächlich eine Stammfunktion besitzt.²⁶ Diese Definition ist zwar an sich nicht problematisch, jedoch ist sie auch nur von zweifelhaftem Nutzen (vgl. Deiser 2015: 75). Es gibt daher die Konvention, dass man mit

$$\int f(x) \, dx$$

auch einfach „irgendeine Stammfunktion von f “ (Deiser 2015: 75) meint. Dies kann man durchaus als einen „Ausdruck des Bedürfnisses [auffassen], unter dem Integral einer Funktion ebenso eine Funktion zu verstehen wie unter der Ableitung“ (Deiser 2015: 75). Neben der Variante, mit dieser Schreibweise eine Stammfunktion zu meinen, gibt es bekanntermaßen noch „die ‚plus c‘-Notation, die der Tatsache besser gerecht werden will, dass eine Stammfunktion nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist“ (Deiser 2015: 75). Man schreibt dann

$$\int f(x) \, dx = F(x) \quad \text{oder} \quad \int f(x) \, dx = F(x) + c$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist und $c \in \mathbb{R}$ (vgl. Deiser 2015: 75, Forster 2016: 222).

Mit dem unbestimmten Integral ist also entweder eine Menge, deren vollständig korrekte Notation „oft eher hinderlich denn nützlich“ (Deiser 2015: 75) ist, oder eine gewissermaßen saloppe Schreibweise für Stammfunktionen gemeint (vgl. Deiser 2015: 75).

²⁵Gemeint ist über jedem Intervall $[a; b] \subseteq I$. Außerdem soll $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sein.

²⁶Es gibt auch nicht stetige Funktionen, die diese Voraussetzungen erfüllen (siehe z.B. Furdek 2008: 20). Außerdem gibt es Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, aber nicht integrierbar sind (siehe Abschnitt 2.4.2). Daher ist die große Vorsicht bei der Formulierung dieser Definition durchaus berechtigt.

Peter Bender bezeichnet den Begriff des unbestimmten Integrals als unglücklich und argumentiert, dass dieser Begriff in der Schule nicht behandelt werden sollte²⁷ (vgl. Bender 1990: 118). Er schreibt, dass das „Irrtümer suggerierende Symbol ‘ $\int$ ’ [...] aufgegeben werden“ müsste, da der „Integral-Operator [...] eindeutig definiert werden [sollte]“ (Bender 1990: 118-119) und schließt mit dem folgenden, durchaus pragmatischen Argument:

Wer nach der Schule in Studium und Beruf mit der konventionellen Bezeichnungs-Vielfalt in der Integralrechnung konfrontiert wird, kann sich dann, früh genug, damit auseinandersetzen. Die Schule bereitet [...] mit einer sparsamen, aber klaren Begrifflichkeit besser darauf vor als mit einer enzyklopädischen Darbietung von vielen Bezeichnungsweisen. (Bender 1990: 119)

²⁷Auf die Behandlung des unbestimmten Integrals in der Schule wird in den Abschnitten 4.2.2 und 5.2.2 noch genauer eingegangen.

3 Begriffe und Konzepte aus der Fachdidaktik

In diesem Kapitel werden grundlegende Überlegungen, Begriffe und Konzepte aus der Fachdidaktik behandelt, die im Rahmen dieser Arbeit eine Rolle spielen. Zunächst wird die Frage diskutiert, inwiefern Mathematik zur Allgemeinbildung beitragen kann. Eine Antwort auf diese Frage wird durch die drei sogenannten *Winter'schen Grunderfahrungen* geliefert, die im Anschluss im Detail behandelt werden, wobei deren wichtige Rolle für den Mathematikunterricht mehrfach unterstrichen wird. Danach werden die Konzepte *Aspekte* und *Grundvorstellungen* eingeführt, wobei den Grundvorstellungen dabei besonders viel Aufmerksamkeit geschenkt wird. Abschließend werden noch einige wichtige Themen und Konzepte speziell im Zusammenhang mit dem Analysisunterricht behandelt, wobei dabei der Fokus einerseits auf relevanten *Spannungsfeldern* und andererseits auf der praktischen *Ermöglichung der Winter'schen Grunderfahrungen* liegt.

3.1 Die drei Winter'schen Grunderfahrungen

Eine der grundlegendsten Fragen in Bezug auf Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen ist wohl die nach dessen Legitimierung. Man muss sich also die Frage stellen, „inwieweit [das Fach Mathematik] für Allgemeinbildung unentbehrlich ist“ (Winter 1995: 37). Bereits 1995 schrieb Heinrich Winter, dass es in Anbetracht

der tiefgreifenden Wandlungsprozesse in unserer Gesellschaft (Wertpluralismus, Verwissenschaftlichung des beruflichen und öffentlichen Lebens, Überflutung mit unterschiedlichsten Medienprodukten, zunehmende Spezialisierung in den Wissenschaften und in der Berufswelt, Wandel durch technische Innovationen, ...) und angesichts der großen ungelösten Probleme (Friedenssicherung, Erhaltung der Umwelt, sozialer Ausgleich, Emanzipation der Frauen) wird es einerseits immer schwieriger, Allgemeinbildung zu definieren, andererseits aber auch immer wichtiger, [dass] möglichst viele Menschen eine möglichst gediegene Allgemeinbildung erwerben können. (Winter 1995: 37)²⁸

All dies hat in den letzten Jahren an Aktualität sicherlich nichts eingebüßt, weshalb auch Winters Antwort auf die Frage, welche Rolle das Fach Mathematik an allgemeinbildenden Schulen spielt beziehungsweise spielen soll, nach wie vor höchste Relevanz besitzt. Diese Antwort lautet wie folgt:

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

²⁸Mit dieser Auffassung von Allgemeinbildung knüpft Winter übrigens stark an den Bildungsbegriff nach Wolfgang Klafki an (vgl. Tietze et al. 1997: 13-14).

- (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
- (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.

Das Wort *Erfahrung* soll zum Ausdruck bringen, [dass] das Lernen von Mathematik weit mehr sein [muss] als eine Entgegennahme und Abspeicherung von Information, [dass] Mathematik erlebt (möglicherweise auch erlitten) werden [muss]. (Winter 1995: 37-38)

Diese drei Grunderfahrungen, die in der einschlägigen Literatur gerne mit G1, G2 und G3 abgekürzt werden²⁹ (siehe z.B. Greefrath et al. 2016: 2), spielten bei der Entwicklung der Bildungsstandards im Fach Mathematik in Deutschland eine grundlegende Rolle (vgl. Greefrath et al. 2016: 2) und sind auch im österreichischen Lehrplan für die AHS zu Teilen fast wortwörtlich zu finden (vgl. RIS 2021). Die hohe Relevanz, die diese drei Grunderfahrungen speziell für den Mathematikunterricht in der AHS-Oberstufe haben, wird von Danckwerts und Vogel folgendermaßen auf den Punkt gebracht:

Erst in der expliziten wechselseitigen Integration aller drei Grunderfahrungen kann der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe seine spezifisch bildende Kraft entfalten. Dies ist die mathematikdidaktische Position als Antwort auf den Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe, der nach breitem Konsens darin besteht, vertiefte Allgemeinbildung, Wissenschaftspropädeutik und Studierfähigkeit zu verbinden. (Danckwerts & Vogel 2006: 7)

Die erste Grunderfahrung, welche von nun an mit G1 bezeichnet wird, bezieht sich auf die vielseitigen und nützlichen Anwendungen der Mathematik (vgl. Winter 1995: 38). Es geht dabei jedoch dezidiert nicht nur darum, „den Gebrauch von Mathematik, der über Alltagsrechnen hinausgeht“ (Winter 1995: 38) zu erlernen, sondern anhand geeigneter „[Beispiele] aus dem gelebten Leben [zu erfahren], wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von *Aufklärung* durch sie zustande kommen kann“ (Winter 1995: 38). Neben zahlreichen relevanten Anwendungen in Naturwissenschaften und Technik sowie Anwendungen aus dem gesellschaftlichen Leben, die

²⁹Diese Konvention wird ab jetzt auch in dieser Arbeit befolgt.

in diesem Sinne erlebt beziehungsweise erfahren werden sollen (vgl. Winter 1995: 38), geht es außerdem noch darum, „Mathematik als eine mehrtausendjährige kulturelle Errungenschaft der Menschheit schätzen zu lernen“ (Greefrath et al. 2016: 2).

In gewisser Hinsicht liefert die zweite Grunderfahrung, die von nun an G2 genannt wird, das Pendant zu G1. Während es bei G1 um Erfahrungen im Zusammenhang mit „der Welt um uns“ (Winter 1995: 37) geht, ist bei G2 „sozusagen die innere Welt der Mathematik angesprochen“ (Winter 1995: 39). Schüler*innen sollen „typisch mathematische Denk- und Arbeitsweisen [...] erfahren“ (Greefrath et al. 2016: 2) und Mathematik als „eine eigenständige formale Wissenschaft“ (Greefrath et al. 2016: 2) erleben. Wichtige Bestandteile dieser Denk- und Arbeitsweisen sind nicht nur stichhaltiges Argumentieren und deduktives Ordnen von Begriffen und Aussagen, sondern auch grundlegende algebraische Begriffe und Fertigkeiten (vgl. Winter 1995: 40-41), für die Winter unter anderem auf folgende, zum Teil zugespitzte Art und Weise plädiert:

Die mathematische Allgemeinbildung ist nicht durch das definiert, was ohne Formeln ‘geht’, sondern ist nur etwas wert, wenn sie den verständigen Gebrauch von Formeln nachdrücklich anstrebt. [...] Den Segen von Formeln kann man allerdings nur erfahren, wenn man *kreativ* mit ihnen umgehen kann. (Winter 1995: 40)

Bei der dritten Grunderfahrung, die analog zu den beiden anderen ab jetzt G3 genannt wird, wird Mathematik in gewisser Hinsicht „als Schule des Denkens“ (Winter 1995: 42) gesehen, wobei dabei konkret die Förderung von Problemlösefähigkeiten im Mittelpunkt steht (vgl. Winter 1995: 42). Sowohl im Zusammenhang mit innermathematischen Problemstellungen als auch beim Modellieren außermathematischer Phänomene ergeben sich im Mathematikunterricht unzählige Möglichkeiten, „den Gebrauch des Verstandes zu trainieren“ (Winter 1995: 42) und sich heuristische Strategien anzueignen. Eine wichtige Voraussetzung dafür ist jedoch die bewusste und kritische Reflexion des eigenen Handelns sowohl in Bezug auf die verwendeten heuristischen Strategien als auch in Bezug auf die Korrektheit der Lösung und die Sinnhaftigkeit der im Laufe des Lösungsprozesses getroffenen Annahmen (vgl. Winter 1995: 42-43). Der Erwerb heuristischer Fähigkeiten stellt für Schüler*innen „eine wichtige Grundlage für eine eigenständige und verständige Erschließung unserer Welt“ (Greefrath et al. 2016: 2) dar. Damit ist G3 eng verbunden mit einer gewissen „[intellektuellen] Haltung, zu der auch die Bereitschaft gehört, sich frei, kreativ und positiv gestimmt einer gedanklichen Herausforderung zu stellen“ (Danckwerts & Vogel 2006: 6). Und im Sinne des oben angerissenen Verständnisses von Allgemeinbildung gehört die Entwicklung ebendieser Haltung zweifelsohne „zu den zentralen Aufgaben [eines allgemeinbildenden] Mathematikunterrichts“ (Danckwerts & Vogel 2006: 6).

3.2 Aspekte und Grundvorstellungen

In diesem Abschnitt werden nun die beiden Konzepte *Aspekte* und *Grundvorstellungen* eingeführt, welche dann bei der fachdidaktischen Diskussion des Integralbegriffs eine große Rolle spielen werden.³⁰ Zunächst wird geklärt, wie diese beiden Konzepte im Rahmen dieser Arbeit zu verstehen sind. Im Anschluss wird das Konzept der *Grundvorstellung* genauer betrachtet und spezifiziert. Abschließend werden *Aspekte* und *Grundvorstellungen* noch miteinander in Verbindung gebracht und deren Zusammenhänge übersichtlich dargestellt.

Ein *Aspekt*, bezogen auf einen mathematischen Begriff, beschreibt einen „Teilbereich [dieses] Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann“ (Greefrath et al. 2016: 17). Aspekte beziehen sich also auf die fachliche Seite eines Begriffs und bilden gewissermaßen dessen fachlichen Kern (vgl. Greefrath et al. 2016: 17). Dies ist eine durchaus naheliegende Definition, die hauptsächlich deshalb notwendig ist, um dem äußerst wichtigen fachdidaktischen Konzept der *Grundvorstellung* ein fachliches Pendant zu geben (vgl. Greefrath et al. 2016: 17).

Das Konzept der *Grundvorstellung*, wie es in der einschlägigen Literatur und auch in dieser Arbeit verwendet wird, geht maßgeblich auf die Arbeiten von Rudolf vom Hofe zurück und ist in vielfältiger Hinsicht von großer Bedeutung (vgl. vom Hofe 1995, vom Hofe 1996). Eine grundlegende Definition dieses Konzepts könnte in etwa so lauten: „Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt“ (Greefrath et al. 2016: 17). Grundvorstellungen spielen daher für den Mathematikunterricht in vielerlei Hinsicht eine große Rolle, denn sie schaffen „Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität“ (vom Hofe 1995: 98).

Die oben gegebene Definition von Grundvorstellungen ist noch sehr allgemein und kann weiter spezifiziert werden. Eine besonders wichtige Spezifikation ist die Unterscheidung zwischen universellen und individuellen Grundvorstellungen (vgl. Greefrath et al. 2016: 18-19), wobei damit eine Unterscheidung zwischen normativen Leitlinien für Lehrpersonen und individuellen Erklärungsmodellen der Schüler*innen gemeint ist (vgl. vom Hofe 1995: 123). Bei einer universellen Grundvorstellung zu einem Begriff „handelt es sich [...] um eine *didaktische Kategorie [der Lehrperson]*“ (vom Hofe 1995: 123), die beschreibt, was sich Schüler*innen „idealerweise unter [diesem] Begriff vorstellen [sollten]“ (Greefrath et al. 2016: 18). Universelle Grundvorstellungen sind also Leitlinien für Lehrpersonen, die aus inhaltlichen Überlegungen beziehungsweise fachdidaktischen Analysen heraus entstehen und die didaktischen Entscheidungen von Lehrpersonen lei-

³⁰siehe Kapitel 4

ten sollten (vgl. Greefrath et al. 2016: 18, vom Hofe 1995: 123). Während universelle Grundvorstellungen normativen Charakter haben, sind individuelle Grundvorstellungen, wie die Bezeichnung bereits suggeriert, eng verbunden mit den subjektiven Erfahrungsbereichen der Schüler*innen (vgl. vom Hofe 1995: 123). Den Zusammenhang zwischen universellen und individuellen Grundvorstellungen und damit die Grundidee dieser Überlegungen kann man wie folgt beschreiben:

Im günstigen Falle ist der Schüler oder die Schülerin in der Lage, die [von der Lehrperson] intendierten Grundvorstellungen aus der Perspektive [der eigenen] Erfahrungsbereiche und Erklärungsmodelle zu erfassen, was langfristig dazu führen kann, [dass] der Schüler oder die Schülerin die intendierte Grundvorstellung aufbaut, sie in das System [der eigenen] Erklärungs- und Handlungsmöglichkeiten integriert und – in einem [den] individuellen Bedingungen entsprechenden Ausmaß – am Kern des mathematischen Begriffs teilhat, das heißt, diesen ‚versteht‘. (vom Hofe 1996: 8)

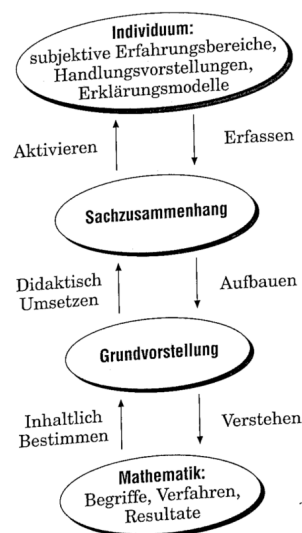


Abb. 7: Grundvorstellungen und deren Rolle im Mathematikunterricht (vom Hofe 1996: 7)

Die zugrunde liegende Annahme dabei ist, dass die Lehrperson durch entsprechende didaktische Umsetzungen die Entwicklung individueller Grundvorstellungen so fördern kann, dass sie den entsprechenden universellen Grundvorstellungen nahe kommen beziehungsweise zumindest diesen im Kern gleichen (vgl. vom Hofe 1996: 7-8).

Individuelle Grundvorstellungen und deren Analyse sind zwar in Unterrichtssituationen von großer Relevanz (vgl. Greefrath et al. 2016: 20), für die Diskussion didaktischer Zugänge zu einem mathematischen Begriff spielen jedoch besonders die universellen Grundvorstellungen per Definition eine entscheidende Rolle (vgl. Greefrath et al. 2016: 18, vom Hofe 1995: 123). Im Zusammenhang mit den fachdidaktischen Überlegungen

in dieser Arbeit wird daher mit dem Begriff *Grundvorstellung* immer eine universelle Grundvorstellung gemeint sein.

Abschließend wird nun noch das Zusammenspiel von Aspekten und Grundvorstellungen betrachtet. Dieses ergibt sich nun grundsätzlich auf recht natürliche Weise, und zwar indem man die beiden oben gegebenen Definitionen miteinander in Verbindung bringt. Es kann nämlich „ein bestimmter Aspekt eines Begriffs eine Basis für verschiedene Grundvorstellungen darstellen und umgekehrt kann eine bestimmte Grundvorstellung mit Bezug zu unterschiedlichen Aspekten entwickelt werden“ (Greefrath et al. 2016: 18). Für die Gesamtheit der Aspekte und Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff kann sich also ein relativ komplexes Gesamtbild ergeben (vgl. Greefrath et al. 2016: 18).

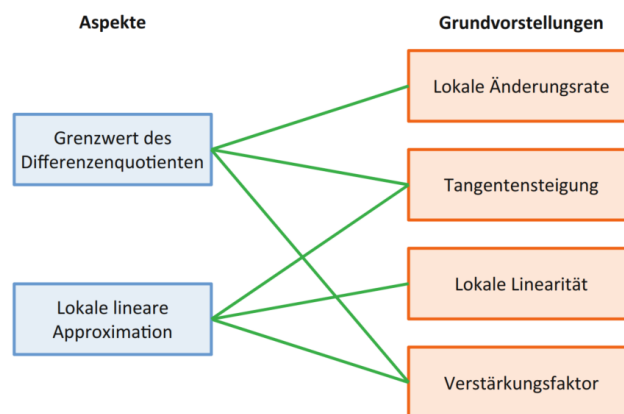


Abb. 8: Beispiel für das Zusammenspiel von Aspekten und Grundvorstellungen (Greefrath et al 2016: 147)

3.3 Zum Analysisunterricht

In diesem Abschnitt werden nun noch einige Themen und Konzepte behandelt, die sich in einigen Fällen speziell auf das Unterrichten von Inhalten der Analysis beziehen. Zunächst werden drei *Spannungsfelder* diskutiert, in denen man sich im Analysisunterricht befindet, und Vorschläge zum Umgang mit diesen Spannungsfeldern gemacht. Im Anschluss werden dann noch Ideen von Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel zur Ermöglichung der drei Winter'schen Grunderfahrungen im Analysisunterricht besprochen und in diesem Zusammenhang noch der Begriff der *inhaltlichen Vernetzung* eingeführt.

3.3.1 Relevante Spannungsfelder

Der Mathematikunterricht ist stets durch diverse Spannungsfelder geprägt, in deren Zusammenhang es wichtig ist, eine geeignete Balance zu finden. Typische Spannungsfelder, in denen man sich insbesondere beim Unterrichten von Inhalten aus der Analysis befindet, sind das Verhältnis von *Anschaulichkeit* und fachlicher *Strenge*, die Sichtweise von *Mathematik als Produkt* und die von *Mathematik als Prozess* sowie das Verhältnis zwischen *Idee und Bedeutung* und *kalkülhaftem Arbeiten* (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 6-14). In diesem Abschnitt werden nun diese Spannungsfelder und ihre Bedeutung für den Analysisunterricht näher beleuchtet.

Das im Mathematikunterricht ohnehin bereits schwierige Verhältnis zwischen Anschaulichkeit und fachlicher Strenge „spitzt sich für den Analysisunterricht zu, weil die klassische Analysis über einen breit geteilten kanonischen (deduktiven) Aufbau verfügt“ (Danckwerts & Vogel 2006: 3). Auf Basis dieses kanonischen Aufbaus gibt es daher gewissermaßen ein vorgeschriebenes Bild davon, wie man Dinge ‚richtig‘ beziehungsweise behandeln sollte (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 3). Als Lehrperson steht man dadurch dann vor dem Problem, dass scheinbar „[jedes] Mehr an Anschaulichkeit auf Kosten der Strenge [...] einer Verwässerung des mathematischen Anspruchs [gleich]“ (Danckwerts & Vogel 2006: 4). In diesem Zusammenhang sei nun vor allem auf die Beiträge von Arnold Kirsch und Werner Blum hingewiesen, die sich bereits in den Siebzigerjahren des vergangenen Jahrhunderts eindringlich mit diesem schwierigen Spannungsfeld befassten. Sie schlagen vor, im Unterricht „auf verschiedenen *Stufen der Strenge* vorzugehen“ (Blum & Kirsch 1979: 18), also zunächst durchaus auch gezielt Vereinfachungen vorzunehmen, sofern „diese *keine Verfälschungen* sind und auf höherer Ebene ausgebaut werden können (im Sinne des *Spiralprinzips*)“ (Blum & Kirsch 1979: 18). Bei der Einführung von Begriffen stellen sie bewusst „einen geringeren Anspruch an das formale Niveau“ (Kirsch 1976: 104) beziehungsweise betonen sie, dass durchaus „[bewusst] Lücken im mathematischen Aufbau gelassen werden dürfen“ (Blum & Kirsch 1979: 18), wobei hier dann im Gegenzug besonders „der *Anschaung* eine große Bedeutung [zukommen soll]“ (Blum & Kirsch 1979: 18). Anstatt also von Anfang an „nach formaler fachsystematischer Exaktheit und inhaltlicher Vollständigkeit“ (Blum & Kirsch 1979: 22) zu streben, geht es in erster Linie vielmehr „um den *Aufbau angemessener Vorstellungen*“ (Kirsch 1976: 87) im Zusammenhang mit den behandelten Begriffen. Etwaige fachliche Präzisierungen können dann auch zu späteren Zeitpunkten noch problemlos vorgenommen werden (vgl. Kirsch 1976: 87). Entscheidend ist nun, dass ein solches Vorgehen zwar einerseits zunächst Vereinfachungen im Hinblick auf die fachliche Strenge beinhaltet, andererseits dadurch aber inhaltliches Argumentieren auf geeignetem Niveau ermöglicht, welches „durchaus korrekt und ‚intellektuell ehrlich‘ sein soll“ (Blum & Kirsch 1979: 7), und den Schüler*innen früh ein hohes „Maß an

Fähigkeiten im Umgang mit [den behandelten Begriffen]“ (Kirsch 1976: 104) abverlangt. Dies ist dem Argument der befürchteten *Verwässerung* also durchaus entgegenzuhalten und spricht damit klar für einen solchen Umgang mit diesem Spannungsfeld.

Ein weiteres Spannungsfeld, für welches man im Unterricht eine gute Balance finden muss, betrifft verschiedene Sichtweisen von Mathematik auf einer sehr allgemeinen Stufe. Man kann Mathematik nämlich einerseits als fertiges Produkt verstehen, dessen für die Schule relevante Teilgebiete am Ende der Schullaufbahn alle abgeschlossen sein und von den Schüler*innen möglichst fehlerfrei beherrscht werden sollten. Andererseits kann man Mathematik als Prozess verstehen, bei dem man bewusst eine gewisse Offenheit und damit Vernetzung sowie vielfältige Anwendung zulässt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 7-8). Klar ist, dass „[beide] Sichtweisen [...] zu einem gültigen Bild von der Mathematik [gehören]“ (Danckwerts & Vogel 2006: 7) und dass das fehlerfreie Beherrschen von Kalkülen und vorgegebenen mathematischen Modellen speziell auch im Zusammenhang mit dem Bestehen von Prüfungen auf jeden Fall eine gewisse, vermutlich oft unerwünscht große Relevanz besitzt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 5-8). Die überaus wichtige Grunderfahrung G3 (siehe Abschnitt 3.1) wird bei der Dominanz der Sichtweise von Mathematik als Produkt jedoch leider in den Hintergrund gedrängt, denn „[nur] eine prinzipiell offene, prozessorientierte Unterrichtsführung kann der Bedeutung der Heuristik für das Lernen von Mathematik gerecht werden“ (Danckwerts & Vogel 2006: 8). So ein prozessorientierter Unterricht folgt dann in weiten Teilen dem sogenannten *genetischen Prinzip*, welches die Genese mathematischer Begriffe in vielfältiger Hinsicht berücksichtigt und damit auch Raum für Intuition und Heuristik schafft (vgl. Blum & Törner 1983: 229). Dabei kann man durchaus auch so weit gehen, dass man gemeinsam mit den Schüler*innen anhand geeigneter Problemstellungen die entsprechenden mathematischen Inhalte im Zuge des Unterrichts *neu erfindet*³¹ (vgl. Freudenthal 1973: 118). Zusätzlich wird bei einer solchen Herangehensweise „die Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb und innerhalb der Mathematik“ (Blum & Törner 1983: 229) ermöglicht, was im Grunde bedeutet, dass man damit auch den anderen beiden Grunderfahrungen gerecht werden kann. Es spricht also viel dafür, der Prozessorientierung im Mathematikunterricht allgemein und damit auch im Analysisunterricht ausreichend Raum zu geben.

Bei beiden bisher diskutierten Spannungsfeldern spielten Vorstellungen und Ideen bereits eine Rolle und es wurde argumentiert, dass man jeweils eher demjenigen Pol des Spannungsfeldes mehr Aufmerksamkeit schenken sollte, der diese Aspekte des Mathematikunterrichts stärker berücksichtigt. Dies führt nun zum letzten Spannungsverhältnis, das hier diskutiert wird, und zwar zum Verhältnis zwischen Idee und Bedeutung und kalkülhaftem Arbeiten. In anderen Worten geht es hierbei um das Span-

³¹im englischen Original: *re-invent*

nungsverhältnis zwischen „Grundvorstellungen und Kalkülorientierung“ (Danckwerts & Vogel 2006: 13). Die große Bedeutung der Grundvorstellungen und des inhaltlichen Verstehens für den Mathematikunterricht steht außer Frage (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 9, Greefrath et al. 2016: 20) und wurde auch in dieser Arbeit bereits mehrfach betont. Dies bedeutet aber nicht, dass man dem kalkülhaften Arbeiten im Analysisunterricht gar keine Aufmerksamkeit schenken sollte, denn „schließlich verdankt die Analysis als Disziplin ihren Siegeszug wesentlich der Entwicklung leistungsfähiger Kalküle“ (Danckwerts & Vogel 2006: 14), welche bekanntermaßen in vielen Bereichen zur Anwendung kommen. Auch wenn also grundsätzlich der Aufbau von Grundvorstellungen zu priorisieren ist (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 9), da „[ohne] die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen [...] die Gefahr [besteht], dass lediglich formales, rezeptives Wissen erworben wird“ (Greefrath et al. 2016: 20), so wäre es dennoch „ein Missverständnis, kalkülhaftes Arbeiten zu diskreditieren“ (Danckwerts & Vogel 2006: 13). Entscheidend ist daher, dass man mithilfe all dieser Überlegungen „eine fruchtbare Balance zwischen beiden Polen“ (Danckwerts & Vogel 2006: 14) findet.

3.3.2 Inhaltliche Vernetzung

Um im Analysisunterricht gezielt Beiträge zu allen drei Grunderfahrungen nach Heinrich Winter zu leisten, machen Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel einige hilfreiche Vorschläge dahingehend, woran man sich bei der Auswahl der Inhalte eines solchen Unterrichts orientieren sollte. Neben dem bereits diskutierten und wichtigen Fokus auf den Aufbau adäquater Grundvorstellungen sowie einer „Anwendungsorientierung im Sinne modellbildender Aktivitäten“ (Danckwerts & Vogel 2006: 10) nennen sie dabei insbesondere noch die *inhaltliche Vernetzung* (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 9-14).

Man unterscheidet hierbei zwischen vertikaler Vernetzung und horizontaler Vernetzung, wobei es eben bei vertikaler Vernetzung um Ideen geht, „die sich gleichsam wie ein roter Faden durch das Curriculum ziehen“ (Danckwerts & Vogel 2006: 10). Für den Analysisunterricht typische Beispiele solch einer vertikalen Vernetzung sind die Idee der Änderung und das Messen von Flächeninhalten, welche beide unmittelbaren Bezug zu fundamentalen Ideen³² der Analysis haben und sich beide im Grunde durch die gesamte Schullaufbahn ziehen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 14). Mit horizontaler Vernetzung ist eine Verzahnung mit anderen Inhaltsbereichen des Mathematikunterrichts gemeint, was in der AHS-Oberstufe insbesondere die Stochastik aber durchaus auch die analytische Geometrie betrifft (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 14).

³²Genaue Ausführungen zu diesem durchaus bedeutsamen fachdidaktischen Konzept sind unter anderem bei Schweiger (1992) zu finden.

4 Fachdidaktische Diskussion des Integralbegriffs

„Die *begriffliche* Seite des Integrals gilt zu Recht als schwer zugänglich.“

(Danckwerts & Vogel 2006: 94)

In diesem Kapitel wird thematisiert, warum der Integralbegriff als schwer zugänglich gilt (vgl. Blum & Törner 1983: 171, Danckwerts & Vogel 2006: 94) und wie beziehungsweise ob verschiedene unterrichtliche Zugänge zur Integralrechnung den hohen Ansprüchen gerecht werden. Zunächst wird die große Fülle zugehöriger *Aspekte* und *Grundvorstellungen* behandelt und deren Zusammenhänge beleuchtet, um die fachliche und fachdidaktische Komplexität des Integralbegriffs besser zu verstehen. Im Anschluss werden drei typische *Zugänge zur Integralrechnung* in der Schule beschrieben und sowohl anhand fachdidaktischer als auch fachlicher Kriterien analysiert. Abschließend werden die drei diskutierten unterrichtlichen Zugänge noch dahingehend miteinander verglichen, wie sehr sie jeweils zu den drei *Winter'schen Grunderfahrungen* und damit zur Allgemeinbildung der Schüler*innen beitragen können.

4.1 Der Integralbegriff – Aspekte und Grundvorstellungen

Einer der Gründe, warum der Integralbegriff als schwer zugänglich gilt, ist sicherlich seine Vielseitigkeit (vgl. Blum & Törner 1983: 171). Aus diversen Gründen sind jedoch die Bezeichnungen und auch die Einteilung der verschiedenen Facetten des Integralbegriffs in fachliche beziehungsweise fachdidaktische Kategorien in der einschlägigen Literatur nicht einheitlich (vgl. Greefrath et al. 2016: 254). Um eine gewisse Einheitlichkeit zu schaffen, wird im Rahmen dieser Arbeit die Kategorisierung von Gilbert Greefrath et al. in drei Aspekte und vier Grundvorstellungen verwendet, da diese sehr übersichtlich ist und sich darüber hinaus sehr gut dafür eignet, zahlreiche Erkenntnisse früherer Arbeiten zu diesem Thema zusammenzufassen und entsprechend einzugliedern (vgl. Greefrath et al. 2016: 254-256). Bei den genannten Aspekten und Grundvorstellungen handelt es sich konkret um den *Produktsummenaspekt*, den *Stammfunktionsaspekt* und den *Maßaspekt* sowie die *Flächeninhaltsgrundvorstellung*, die *Rekonstruktionsgrundvorstellung*, die *Kumulationsgrundvorstellung* und die *Mittelwertsgrundvorstellung* (vgl. Greefrath et al. 2016: 238-262).

Wie in Abschnitt 3.2 bereits erwähnt, ist das Zusammenspiel von Aspekten und Grundvorstellungen im Allgemeinen relativ komplex. Im Fall des Integralbegriffs ist es tatsäch-

lich sogar so, dass alle Grundvorstellungen bis auf die Mittelwertsgrundvorstellung Bezüge zu allen drei Aspekten haben (vgl. Greefrath et al. 2016: 238). Wenn man also von der Mittelwertsgrundvorstellung absieht, könnte man sagen, dass beim Integralbegriff Aspekte und Grundvorstellungen in diesem Sinne maximal miteinander vernetzt sind.

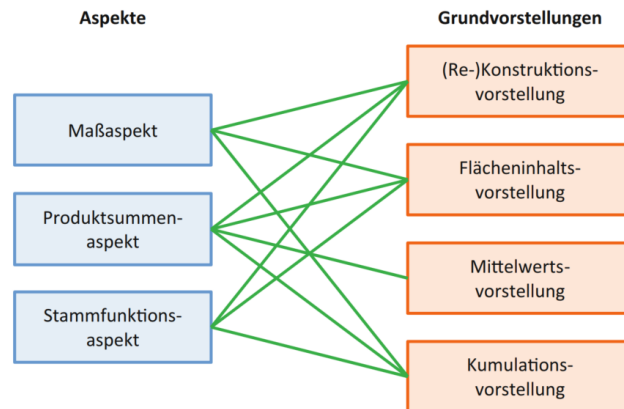


Abb. 9: Zusammenspiel von Aspekten und Grundvorstellungen im Zusammenhang mit dem Integralbegriff (Greefrath et al. 2016: 238)

Die Mittelwertsgrundvorstellung ist demnach wiederum in diesem Sinne minimal vernetzt, was man als Veranschaulichung dafür auffassen könnte, dass diese Grundvorstellung lediglich eine untergeordnete Rolle spielt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 110). An sich wird ihr sowohl in der einschlägigen Literatur als auch in der Schule überraschend wenig Bedeutung beigemessen (vgl. Bender 1990: 103, Danckwerts & Vogel 2006: 110, Tietze et al. 1997: 284), obwohl das Mitteln eigentlich „eine im Alltagsdenken tief verankerte Grundvorstellung [darstellt]“ (Danckwerts & Vogel: 2006: 110) und außerdem dadurch eine erste horizontale Vernetzung der Integralrechnung zur Stochastik³³ möglich ist (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 113, Greefrath et al. 2016: 253).

Im Rahmen dieser Arbeit wird nun von einer weiteren Diskussion der Mittelwertsgrundvorstellung abgesehen, da sich Zugänge zur Integralrechnung, welche diese Grundvorstellung in den Mittelpunkt stellen³⁴, nicht durchgesetzt haben (vgl. Tietze et al. 1997: 284). Darüber hinaus macht sich die geringe Vernetzung der Mittelwertsgrundvorstellung auch dahingehend bemerkbar, dass sie auch bei anderen Zugängen zur Integralrechnung zunächst keine Rolle spielt (siehe Abschnitt 4.2).

In den folgenden Teilabschnitten werden nun die drei Aspekte und die drei anderen

³³Ein typisches Beispiel für diese Vernetzung ist die Normalverteilung (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 14).

³⁴siehe z.B. Blum & Törner (1983: 165-166)

Grundvorstellungen im Detail diskutiert und deren Beziehungen zueinander aufgezeigt sowie anhand geeigneter Beispiele verdeutlicht.

4.1.1 Produktsummenaspekt

Der Produktsummenaspekt umfasst einen sehr zentralen Teilbereich des Integralbegriffs (vgl. Blum & Kirsch 1996: 62) und spielt gleich bei mehreren didaktischen Zugängen zur Integralrechnung eine entscheidende Rolle.³⁵ Außerdem eröffnet dieser Aspekt „die Möglichkeit für die Entwicklung eines theoretischen Integralbegriffs“ (Danckwerts & Vogel 2006: 122), da das Bilden geeigneter Produktsummen ja genau die Grundlage einer fachlich exakten Definition des bestimmten Integrals³⁶ darstellt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 122). Ganz allgemein ist unter dem Begriff *Produktsumme* ein Ausdruck der Struktur

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

zu verstehen, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gelten soll. Insbesondere sind also Unter-, Ober- und Zwischensummen einer auf dem betrachteten Intervall beschränkten Funktion Beispiele für Produktsummen (vgl. Greefrath et al. 2016: 239).

Die Interpretation des bestimmten Integrals als Grenzwert geeigneter Produktsummen ist nicht nur von theoretischem Interesse, sondern spielt auch im Zusammenhang mit vielen verschiedenen Anwendungen der Integralrechnung eine große Rolle (vgl. Blum & Törner 1983: 159-160, Danckwerts & Vogel 2006: 119-121). Um ein paar typische Anwendungen zu nennen, geben Werner Blum und Günter Törner die folgende, übersichtlich zusammengefasste Liste von Beispielen an:

- (a) Summe von Produkten ‘Kraft mal (kleine) Weglänge’ liefert die [verrichtete] Arbeit;
- (b) Summe von Produkten ‘Höhe mal Streifenbreite’ liefert den Flächeninhalt;
- (c) Summe von Produkten ‘Querschnitt(sflächeninhalt) mal Scheibendicke’ liefert das Volumen;
- (d) Summe von Produkten ‘Änderungsrate mal Schrittlänge’ liefert den Gesamtzuwachs einer Funktion, d.h. den Gesamteffekt ihrer Änderungen.

(Blum & Törner 1983: 159-160)

Je nach Situation spielt entweder das Summieren oder das Bilden von Produkten die größere Rolle (vgl. Greefrath et al. 2016: 239). Insofern kann man also das bestimmte Integral in diesem Zusammenhang sowohl als verallgemeinerte Summe als auch als

³⁵siehe Abschnitt 4.2

³⁶siehe Abschnitt 2.1

verallgemeinertes Produkt auffassen, wobei sich die Interpretation als verallgemeinerte Summe mehr auf den zugrundeliegenden Grenzprozess und die Interpretation als verallgemeinertes Produkt auf den Grenzwert bezieht (vgl. Blum & Törner 1983: 160), der ja auch „der Dimension nach ein Produkt von Größen“ (Blum & Kirsch 1996: 62) ist. Sei zum Beispiel die Kraft F , die entlang des geradlinigen Weges zwischen zwei Punkten a und b mit Länge $s = b - a$ verrichtet wird, konstant. Dann gilt bekanntermaßen für die verrichtete Arbeit W die Beziehung

$$W = F \cdot s.$$

Die Arbeit ist das Produkt von Kraft und Weg. Ist nun aber die Kraft entlang des Weges nicht konstant sondern abhängig vom zurückgelegten Weg s , so kann man die verrichtete Arbeit dann als verallgemeinertes Produkt von Kraft und Weg der Form

$$W = \int_a^b F(s) \, ds$$

angeben³⁷ (vgl. Blum & Kirsch 1996: 62, Danckwerts & Vogel 2006: 120). Konzentriert man sich stattdessen mehr auf den Prozess des Aufsummierens, der ja dieser Beziehung zugrunde liegt, so rückt man wiederum die Interpretation als verallgemeinerte Summe in den Mittelpunkt³⁸ (vgl. Greefrath et al. 2016: 254).

4.1.2 Stammfunktionsaspekt

Ein weiterer wichtiger Aspekt des Integralbegriffs ist der Stammfunktionsaspekt, bei dem der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung im Mittelpunkt steht. Dieser Zusammenhang, der aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hervorgeht³⁹, macht es einerseits möglich, zumindest formal für jede stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Stammfunktion anzugeben und andererseits das Berechnen bestimmter Integrale auf das Ermitteln entsprechender Stammfunktionen zurückzuführen beziehungsweise auf das Einsetzen in solche zu reduzieren (vgl. Greefrath et al. 2016: 239-240).

Ähnlich wie der Produktsummenaspekt kann auch der Stammfunktionsaspekt bei mehreren didaktischen Zugängen zur Integralrechnung eine wichtige Rolle spielen.⁴⁰ Anders als der Produktsummenaspekt eröffnet der Stammfunktionsaspekt dabei aber keine fachlich solide Möglichkeit, das bestimmte Integral sauber zu definieren (vgl. Danck-

³⁷Ein weiteres, vermutlich noch typischeres Beispiel ist der in einem bestimmten Zeitintervall zurückgelegte Weg als verallgemeinertes Produkt von (nichtnegativer) Geschwindigkeit und Zeit (vgl. Büchter & Henn 2010: 92-95).

³⁸siehe Abschnitt 4.1.6

³⁹siehe Abschnitt 2.3

⁴⁰siehe Abschnitt 4.2

werts & Vogel 2006: 95, Greefrath et al 2016: 241). Damit ist gemeint, dass wenn man die Integralrechnung ganz über das „Umkehrproblem der Differentialrechnung“ (Blum & Törner 1983: 163) einführt, so erhält man nur einen mehr oder weniger sinnvollen Integralbegriff, solange man sich auf stetige Funktionen beschränkt (vgl. Blum & Törner 1983: 164). Hebt man diese Beschränkung auf, so ist man genau mit den in Abschnitt 2.4.2 diskutierten Fällen konfrontiert, die zeigen, dass die Existenz einer Stammfunktion grundsätzlich weder hinreichend noch notwendig für die Integrierbarkeit einer Funktion ist (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 95).⁴¹

Bei Anwendungen der Integralrechnung liefert der Stammfunktionsaspekt einen anderen, eher der Differentialrechnung zugehörigen Zugang dazu, „den Gesamtzuwachs einer (unbekannten) Funktion F mit gegebener Ableitung $F' = f$ als Gesamteffekt der gegebenen Änderungsrate(nfunktion) f “ (Blum & Törner 1983: 164) zu berechnen.⁴² Sei zum Beispiel $v : [0; 10] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $v(t) = a \cdot t$, $a > 0$, die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion eines gleichmäßig beschleunigten Fahrzeugs in den ersten zehn Fahrsekunden mit $v(t)$ in m/s. Möchte man nun die Länge des Weges berechnen, den das Fahrzeug in den ersten zehn Fahrsekunden zurücklegt, so kann man nun auch die aus der Differentialrechnung bekannte Beziehung

$$s'(t) = v(t) = a \cdot t$$

ausnutzen, um eine Funktionsgleichung einer entsprechenden Weg-Zeit-Funktion s aufzustellen, deren absolute Änderung im Intervall $[0; 10]$ offensichtlich das gewünschte Resultat liefert. Konkret erhält man hier als mögliche Funktionsgleichung von s den Ausdruck

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

und kann damit den in den ersten zehn Fahrsekunden zurückgelegten Weg durch

$$s(10) - s(0)$$

berechnen, womit hier nun erfolgreich der zurückgelegte Weg aus den gegebenen Änderungsraten *rekonstruiert* wurde (vgl. Blum & Törner 1983: 164). Es ist dann eine Frage des didaktischen Zugangs zur Integralrechnung, ob der Ausdruck

$$\int_0^{10} v(t) \, dt$$

⁴¹Dieses Problem wird in Abschnitt 4.2.2 in Zusammenhang mit einem entsprechenden didaktischen Zugang noch genauer behandelt.

⁴²im Gegensatz zum Zugang über Produktsummen (siehe Abschnitt 4.1.1, Beispiel (d) von Blum & Törner)

per Definition als Differenz $s(10) - s(0)$ verstanden wird⁴³ oder ob das bestimmte Integral anders eingeführt wurde und damit auf anderem Wege bereits geklärt ist, dass dieses Integral ebenfalls dem zurückgelegten Weg in den ersten zehn Fahrsekunden entspricht.

Über den Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung erhält man bekanntermaßen auch die sogenannten *Integrationsregeln*, womit im Grunde genau die Umkehrungen der Ableitungsregeln gemeint sind (vgl. Büchter & Henn 2010: 246). Es handelt sich also im Kern um Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen, was im Falle stetiger Funktionen nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine vielversprechende Strategie für das Berechnen bestimmter Integrale darstellt.⁴⁴ Speziell im Zusammenhang mit aufwendigeren Integrationsregeln wie etwa partielle Integration und Substitution werfen Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn jedoch die Frage auf, wie wichtig umfassende Fertigkeiten im Umgang mit solchen Regeln tatsächlich noch sind, denn ihrer Meinung nach „haben solche Fertigkeiten in Zeiten von Computer-Algebra-Systemen [weder] einen praktischen Nutzen, noch führen sie zu tieferer mathematischer Einsicht“ (Büchter & Henn 2010: 246). Gilbert Greefrath et al. halten es jedoch wiederum für durchaus sinnvoll, zumindest einfache Spezialfälle wie etwa die lineare Substitution auch in der Schule zu behandeln (vgl. Greefrath et al. 2016: 275). Die Frage, wie weit man bei diesem Teilbereich des Stammfunktionsaspekts in der Schule tatsächlich gehen sollte, ist zweifelsohne schwierig zu beantworten und geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

Bisher wurde in diesem Abschnitt nur die Bedeutung von Stammfunktionen für die Integralrechnung behandelt. Tatsächlich liefert aber der erste Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auch einen Zusammenhang in die andere Richtung, aus dem also die Bedeutung der Integralrechnung für das Angeben von Stammfunktionen hervorgeht. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Dann gilt für eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dass $F_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F_a(x) := \int_a^x f(t) \, dt$$

eine Stammfunktion von f ist.⁴⁵ Einerseits bedeutet dies, dass man sich eben mithilfe der Integralrechnung Stammfunktionen *konstruieren* kann⁴⁶, andererseits hat man dadurch die Möglichkeit, auch dann eine Stammfunktion anzugeben, wenn sich diese nicht in Termen elementarer Funktionen ausdrücken lässt (vgl. Büchter & Henn 2010:

⁴³Dies wird manchmal auch als *Stammfunktionsintegral* bezeichnet (vgl. Blum & Törner 1983: 163, siehe Abschnitt 4.2.2).

⁴⁴siehe Abschnitt 2.3

⁴⁵siehe Abschnitt 2.3

⁴⁶siehe Abschnitt 4.2.3

250). Ein typisches und auch für die Schule relevantes Beispiel einer stetigen Funktion, die keine elementare Stammfunktion besitzt, ist die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung φ , die gegeben ist durch

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Eine spezielle Stammfunktion von φ , die in der Stochastik eine große Rolle spielt, ist die sogenannte Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Φ , deren Funktionsgleichung

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) \, dt$$

man eben nicht ohne Integral⁴⁷ angeben kann (vgl. Büchter & Henn 2010: 250).

4.1.3 Maßaspekt

Problemstellungen in Zusammenhang mit dem Berechnen von Flächeninhalten und Volumina waren bereits in der Antike von großem Interesse. In diesem Sinne gehen die Ursprünge der Integralrechnung bereits auf die mathematischen Errungenschaften dieser Zeit⁴⁸ zurück (vgl. Greefrath et al. 2016: 218-220). Damit ist der Maßaspekt, bei dem Flächen-, Längen- und Volumenmessung im Mittelpunkt stehen (vgl. Greefrath et al. 2016: 244), gewissermaßen der älteste Aspekt der Integralrechnung. Er findet seine Fortsetzung dann in der sogenannten Maßtheorie (vgl. Greefrath et al. 2016: 243-244), auf die im Rahmen dieser Arbeit nun aber bewusst nicht viel näher eingegangen wird. Zentral ist, dass die grundlegenden Eigenschaften eines Maßes auch vom bestimmten Integral erfüllt werden, wenn man es „zur Flächenmessung auf positive Funktionen, zur Längenmessung (z.B. Bogenlänge) und zur Volumenmessung (z.B. Rotationskörper) [anwendet]“ (Greefrath et al. 2016: 244).

Der Maßaspekt spielt bei didaktischen Zugängen zur Integralrechnung speziell im Zusammenhang mit Flächeninhalten eine große Rolle⁴⁹, wobei dabei üblicherweise mit einem *naiven* Flächeninhaltsbegriff gearbeitet wird (vgl. Blum & Törner 1983: 161, Danckwerts & Vogel 2006: 125). Damit ist gemeint, dass man sich auf hinreichend schöne Beispiele konzentriert, sodass sinnvoll angenommen werden kann, „dass die Existenz und Eindeutigkeit des Inhalts der betrachteten Flächen unproblematisch und gesichert ist“ (Danckwerts & Vogel 2006: 103). Die Frage, ob man diese angenommene „Präexistenz des Inhalts“ (Danckwerts & Vogel 2006: 103-104), die Praxiserfahrungen nach für Schüler*innen selbstverständlich ist (vgl. Danckwerts & Vogel 2006:

⁴⁷Streng genommen handelt es sich hier jedoch um ein uneigentliches Integral (vgl. Forster 2016: 239).

⁴⁸Beispielsweise ist es Archimedes von Syrakus (287-212 v. Chr.) bereits gelungen, den Flächeninhalt unter einem Parabelbogen zu berechnen (vgl. Greefrath et al. 2016: 219-220).

⁴⁹siehe Abschnitt 4.2

104), bereits in der Schule zu einem späteren Zeitpunkt in Frage stellen sollte, wird in der Literatur zum Teil unterschiedlich beantwortet, wobei allgemein eine gewisse Zurückhaltung diesbezüglich vorherrscht.⁵⁰

Wie bereits erwähnt, kommt vor allem der Flächenmessung besonders viel Bedeutung im Zusammenhang mit didaktischen Zugängen zur Integralrechnung zu. Wird zum Beispiel eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ durch zwei Graphen stetiger Funktionen berandet, so kann man mithilfe des bestimmten Integrals dieser Teilmenge auf eindeutige Weise ihren Flächeninhalt zuordnen (vgl. Greefrath et al. 2016: 243-244). Seien also $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$, dann gilt für den Flächeninhalt A der Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die von den Graphen von f und g berandet wird,

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

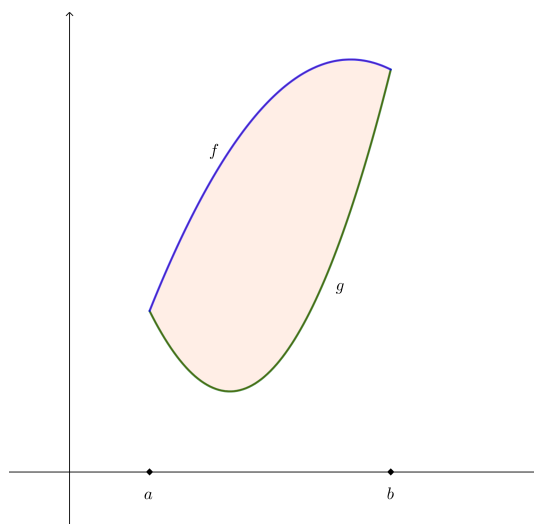


Abb. 10: Die Graphen der stetigen Funktionen f und g beranden eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, der man mithilfe des bestimmten Integrals ihren Flächeninhalt A zuordnen kann.

Betrachtet man Flächen, die von einem geeigneten Funktionsgraphen und der x -Achse eingeschlossen werden, muss man jedoch beachten, dass das bestimmte Integral in diesem Fall nur bei der „Flächenmessung oberhalb der x -Achse“ (Greefrath et al. 2016: 244) das hier gewünschte Ergebnis liefert (vgl. Greefrath et al. 2016: 244). So gilt zum Beispiel für den Flächeninhalt A der Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die vom Graphen der Funktion $h : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sin(x)$ und der x -Achse berandet wird, dass

$$A \neq \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, dx = 0,$$

⁵⁰siehe z.B. Danckwerts & Vogel (2006: 125), Freudenthal (1973: 572), Kirsch (1976: 96-97), Tietze et al. (1997: 283)

da das bestimmte Integral in diesem Zusammenhang eben den sogenannten *orientierten* Flächeninhalt der berandeten Menge liefert (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 93) und ein Teil des Graphen von h unterhalb der x -Achse liegt.⁵¹ Dieses Problem lässt sich allerdings leicht lösen, indem man stattdessen das bestimmte Integral der Funktion $|h|$ betrachtet⁵², denn dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)| \, dx = \int_{-\pi}^0 -h(x) \, dx + \int_0^{\pi} h(x) \, dx = - \int_{-\pi}^0 h(x) \, dx + \int_0^{\pi} h(x) \, dx$$

und daher

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)| \, dx = \left| \int_{-\pi}^0 \sin(x) \, dx \right| + \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx = |-2| + 2 = 4.$$

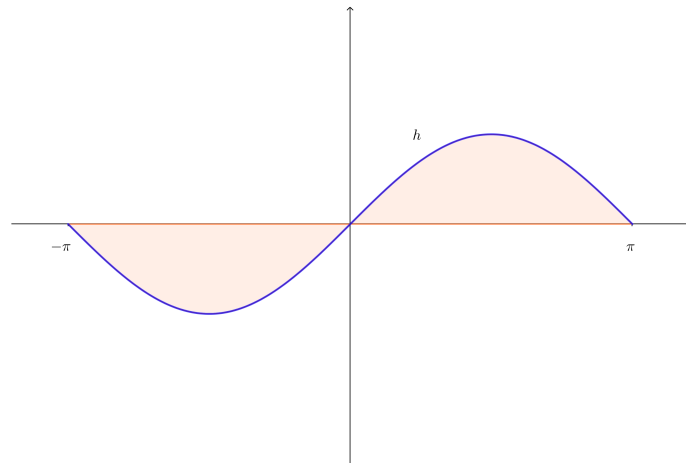


Abb. 11: Hier liefert das bestimmte Integral von h *nicht* den Flächeninhalt der vom Graphen und der x -Achse berandeten Teilmenge von $\mathbb{R}^2$

Da den Flächeninhalten auch hier nun besonders viel Beachtung geschenkt wurde, ist es abschließend noch wichtig festzuhalten, dass der Maßaspekt „allgemeiner [ist] als nur eine Flächeninhaltsvorstellung⁵³ zum Integral“ (Greefrath et al. 2016: 244). Neben Längen und Volumina können außerdem durchaus auch „physikalische Größen wie die Arbeit als Wegintegral über die Kraft [...] unter diesem Aspekt gesehen werden“ (Greefrath et al. 2016: 244).

⁵¹Es gilt ja

$$\int_{-\pi}^0 \sin(x) \, dx = - \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx, \text{ also } \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, dx = 0$$

⁵²Analog müsste man auch im vorigen Beispiel vorgehen, wenn man die Voraussetzung $f(x) \geq g(x)$ fallen ließe.

⁵³siehe Abschnitt 4.1.4

4.1.4 Flächeninhaltsgrundvorstellung

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung, wie die Bezeichnung bereits vorwegnimmt, stellt das Berechnen von Flächeninhalten in den Mittelpunkt. Damit betont diese Grundvorstellung „den ‚klassischen Zugang‘ zur Integralrechnung“ (Greefrath et al. 2016: 244), der die Frage in den Mittelpunkt stellt, wie man den Inhalt einer „krummlinig [berandeten] Fläche möglichst genau [...] bestimmen [kann]“ (Greefrath et al. 2016: 244).⁵⁴ Wie im vorigen Abschnitt bereits diskutiert, ist diese Grundvorstellung sehr eng verbunden mit dem Maßaspekt, aber auch die anderen beiden behandelten Aspekte des Integralbegriffs kommen zum Tragen (vgl. Greefrath et al. 2016: 238).

Die Flächeninhaltsgrundvorstellung spielt einerseits eine sehr wichtige Rolle, da bekanntermaßen selbst in unterschiedlichsten Anwendungen der Integralrechnung das „Integral als Grenzwert [von Summen] von Rechtecksflächen(inhalten)“ (Blum & Törner 1983: 160) graphisch veranschaulicht werden kann. Damit ist die Flächeninhaltsgrundvorstellung eine zentrale geometrische Grundvorstellung zum Integralbegriff⁵⁵, die auch über rein geometrische Fragestellungen hinaus Bedeutung hat (vgl. Blum & Törner 1983: 160). Andererseits ist jedoch ein zu starker Fokus auf diese Grundvorstellung oder gar eine Reduktion des Integralbegriffs auf seine geometrische Deutung als Flächeninhalt im Mathematikunterricht durchaus nicht unproblematisch, da dadurch das Erschließen anderer inhaltlicher Deutungen erschwert werden kann (vgl. Blum & Törner 1983: 161, Greefrath et al. 2016: 247). Außerdem kann bei so einem Fokus auch leicht aus den Augen verloren werden, dass das bestimmte Integral gar nicht zwangsläufig Flächeninhalte im elementaren Sinn, sondern eben sogenannte *orientierte* Flächeninhalte liefert.⁵⁶ Flächen, die von Funktionsgraphen auf geeignete Weise berandet werden, werden vom bestimmten Integral also eigentlich nicht gemessen sondern *bilanziert* (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 93). Vorschläge, wie man die Flächeninhaltsgrundvorstellung dahingehend erweitern kann, sind zum Beispiel bei Peter Bender zu finden:

Die erste Achse ist eine befestigte Straße. Oberhalb von ihr befindet sich ein gleichmäßig nasser Sumpf, der durch die Straße und den Graph der zu integrierenden Funktion begrenzt ist. Auf der Straße fährt ein Entwässerungsfahrzeug ab einer bestimmten Stelle nach rechts. [...] Es führt einen Behälter mit sich, in dem das Wasser gesammelt wird. An jeder Stelle des Weges ist die Höhe des Wasserspiegels im Behälter ein (Längen-) Maß für die bis dahin überstrichene Fläche. [...] Unterhalb der ersten Achse liegt Wüste, ebenfalls durch die Straße und den Funktionsgraph begrenzt; und diese wird [...] *bewässert*. Nach wie vor ist die Höhe des Wasserstandes im Behälter an

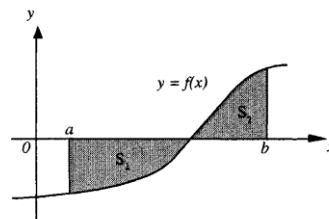
⁵⁴siehe Abschnitt 4.2.1

⁵⁵die berühmte „Fläche unter Kurve“ ...

⁵⁶siehe Abschnitt 4.1.3

jeder Stelle ein Maß für die überstrichene Fläche. (Bender 1990: 112)

Neben der Möglichkeit, damit eine Metapher für das Bilanzieren von Flächen zu geben, kann diese funktionale Auffassung vom Flächeninhalt auch dazu verwendet werden, zum Begriff der Integralfunktion und in weiterer Folge zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung vorzustoßen (vgl. Bender 1990: 112, Kirsch 1976: 94-97). Ein ähnliches Vorgehen ist auch im Zusammenhang mit der Rekonstruktionsgrundvorstellung⁵⁷ möglich und bildet dann die Grundlage für den in Abschnitt 4.2.3 diskutierten didaktischen Zugang zur Integralrechnung, bei dem das Rekonstruieren von Beständen aus gegebenen Änderungsraten im Mittelpunkt steht (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 96-110, Kirsch 1976: 94).



Die Figur zeigt den Graphen von $y = f(x)$.
 S_1 ist die Fläche, welche von der x -Achse, $x = a$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.
 S_2 ist die Fläche, welche von der x -Achse, $x = b$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.
 Dabei ist $a < b$ und $0 < S_2 < S_1$.

Der Wert von $\int_a^b f(x) dx$ ist

- A. $S_1 + S_2$
- B. $S_1 - S_2$
- C. $S_2 - S_1$
- D. $|S_1 - S_2|$
- E. $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

Abb. 12: Aufgabe im Rahmen der internationalen Vergleichsstudie TIMSS im Jahr 1999 (Baumert et al. 1999: 80).

Auch wenn die Flächeninhaltsgrundvorstellung zweifelsohne sehr wichtig ist, „sollte im Unterricht diese Vorstellung nur als eine von mehreren möglichen Vorstellungen verwendet werden“ (Greefrath et al. 2016: 245), da sie ohne entsprechende Ergänzungen, wie oben bereits erwähnt, in doppelter Hinsicht durchaus problematisch sein kann. Als Beleg für einen Teil der Problematik, der von einer zu großen Betonung dieser Grundvorstellung ausgeht, wird gerne eine Aufgabe der internationalen Vergleichsstudie TIMSS aus dem Jahr 1999 (Abb. 12) hergenommen (siehe z.B. Danckwerts & Vogel

⁵⁷siehe Abschnitt 4.1.5

2006: 94, Greefrath et al. 2016: 245-246). Diese zielt nämlich genau auf „den Unterschied zwischen dem Flächeninhalt und dem Wert des Integrals“ (Greefrath et al. 2016: 245) ab und wurde von deutschen Schüler*innen nur mit einer relativen Häufigkeit von 23 % richtig beantwortet (vgl. Baumert et al. 1999: 80).

4.1.5 Rekonstruktionsgrundvorstellung

Die Rekonstruktionsgrundvorstellung umfasst „sowohl die (Re-)Konstruktion einer Größe aus gegebenen Änderungsraten als auch die (Re-)Konstruktion einer Stammfunktion einer gegebenen Funktion“ (Greefrath et al. 2016: 247). Damit ist die Rekonstruktionsgrundvorstellung zum Integralbegriff sehr umfassend und vielfältig, „hat Bezüge zu allen Aspekten des Integrals“ (Greefrath et al. 2016: 249) und hat darüber hinaus mehrere Bezüge zu weiteren Grundvorstellungen des Integralbegriffs wie der Flächeninhaltsgrundvorstellung und der Kumulationsgrundvorstellung⁵⁸ (vgl. Greefrath et al. 2016: 248-249). Aus diesem Grund gilt diese Grundvorstellung als zentral für ein adäquates inhaltliches Verständnis des Integralbegriffs (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 125).

Wie in der Definition bereits angedeutet, wird hier in der Literatur manchmal zwischen Konstruktion und Rekonstruktion unterschieden (siehe z.B. Bender 1990: 121, Greefrath et al. 2016: 247-248). Dabei hängt es maßgeblich vom gegebenen Kontext und damit von „der Interpretation der Werte der Ausgangsfunktion“ (Greefrath et al. 2016: 247) ab, welche Sichtweise gerade passender ist. Diese Unterscheidung ist jedoch in vielen Fällen relativ schwierig (vgl. Greefrath et al. 2016: 247-248) und im Zusammenhang mit stetigen Funktionen dann überhaupt kaum mehr mathematischer Natur (vgl. Bender 1990: 104), da dann wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ohnehin klar ist, dass beide Sichtweisen im Grunde das gleiche Ziel verfolgen (vgl. Tietze et al. 1997: 287). Man kann aber durchaus argumentieren, dass eine Unterscheidung zwischen den beiden Sichtweisen für den Unterricht sehr wohl relevant sein kann (vgl. Bender 1990: 104), unter anderem da diese je nach gewähltem Zugang zur Integralrechnung unterschiedlich früh und unterschiedlich gut erschlossen werden können.⁵⁹

Für die Behandlung im Unterricht nennen Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel gleich eine Vielzahl realitätsbezogener Beispiele, die die Rekonstruktionsgrundvorstellung in den Mittelpunkt rücken und in denen jeweils sowohl das Rekonstruieren einer Größe als auch das Rekonstruieren einer Funktion aus gegebenen Änderungsraten das Ziel sein kann:

⁵⁸siehe Abschnitte 4.1.4 und 4.1.6

⁵⁹siehe Abschnitt 4.2

- Aus den Aufzeichnungen eines Fahrtenschreibers (Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf) wird der zurückgelegte Weg rekonstruiert (Geschwindigkeit = momentane Änderungsrate des Weges).
- Aus der Kenntnis der Beschleunigung einer Rakete zu jedem Zeitpunkt wird ihr Geschwindigkeitsverlauf rekonstruiert (Beschleunigung = momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit).
- Aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Epidemie wird auf die Anzahl der Infizierten geschlossen (Ausbreitungsgeschwindigkeit = momentane Änderungsrate der Infizierten).
- Die Stärke des Stroms, der einem Akku [in einem bestimmten Zeitintervall] entnommen oder zugeführt wird, lässt Rückschlüsse auf seinen Ladezustand zu (Stromstärke = momentane Änderungsrate der Ladungsmenge).
- Aus der Kenntnis des Grenzsteuer-Verlaufs (in Abhängigkeit des zu versteuernden Jahreseinkommens) kann man auf den Einkommenssteuersatz zurückschließen (Grenzsteuer = lokale Änderungsrate der Einkommenssteuer).

(Danckwerts & Vogel 2006: 102-103)

Im Zusammenhang mit diesen Beispielen ist auch der bereits erwähnte Bezug zur Kumulationsgrundvorstellung deutlich erkennbar (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 102, Greefrath et al. 2016: 248). Der ebenfalls bereits erwähnte Bezug zur Flächeninhaltsgrundvorstellung ergibt sich unter anderem bei graphischen Überlegungen anhand von Flächen in Zusammenhang mit Funktionsgraphen (vgl. Greefrath et al. 2016: 248).

Verwendet man bei der Einführung des Integralbegriffs zum Beispiel sogenannte *Flächeninhaltsfunktionen* (siehe z.B. Bender 1990, Kirsch 1996: 55-59) oder schon früh das Konzept der Integralfunktion (siehe z.B. Danckwerts & Vogel 2006: 103-108, Kirsch 1976), so kann man damit bekanntermaßen Stammfunktionen zu einer gegebenen stetigen Funktion konstruieren, auch wenn die Werte dieser gegebenen Funktion nicht zwangsläufig als Änderungsraten interpretiert werden. Ob bei der ersten Begegnung mit dieser Idee bereits bekannt ist, dass das Resultat eine Stammfunktion ist, hängt wieder vom gewählten Zugang ab.⁶⁰

Ein sicherlich traditionsreiches, jedoch relativ wenig anwendungsbezogenes Beispiel zum Konstruieren einer Stammfunktion ist das Untersuchen der Integralfunktion $F_1 :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

⁶⁰siehe Abschnitt 4.2

(vgl. Greefrath et al. 2016: 248-249, Kirsch 1976: 102-104). Arnold Kirsch sieht F_1 dabei als Flächeninhaltsfunktion und erarbeitet vor diesem Hintergrund Schritt für Schritt durch Überprüfen von Eigenschaften wie beispielsweise

$$F_1(a \cdot b) = F_1(a) + F_1(b)$$

für alle $a, b \in]0; \infty[$, dass es sich dabei um die natürliche Logarithmusfunktion⁶¹ handeln muss (vgl. Kirsch 1976: 102-103). Dabei wird die Eigenschaft von $f :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$, die Ableitungsfunktion von F_1 zu sein, nicht verwendet, sondern es wird hauptsächlich mit grundlegenden Eigenschaften des Integrals argumentiert (vgl. Kirsch 1976: 102-103).

Graphische Vorgehensweisen zum Konstruieren von Stammfunktionen mithilfe grundlegender Eigenschaften des Integrals sind in der einschlägigen Literatur an mehreren Stellen zu finden, wobei man sich dabei oft auf Integralfunktionen stückweise linearer Funktionen konzentriert (siehe z.B. Danckwerts & Vogel 2006: 96-99, Kirsch 1976: 91-94). Dadurch hat man natürlich den Vorteil, dass man Funktionswerte der Integralfunktion auf elementare Weise exakt berechnen kann (vgl. Kirsch 1976: 91) und daher sogar eine explizite Funktionsgleichung der Integralfunktion beziehungsweise Stammfunktion angeben kann (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 97-99). Daher kann so eine Vorgehensweise im Rahmen der Einführung des Integralbegriffs grundsätzlich bereits sehr früh verwendet werden⁶² (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 97-99).

4.1.6 Kumulationsgrundvorstellung

Ähnlich wie die Flächeninhaltsgrundvorstellung sehr eng mit dem Maßaspekt zusammenhängt⁶³, ist die Kumulationsgrundvorstellung sehr eng mit dem Produktsummenaspekt verbunden, denn hier stehen nun „der Prozess der Sammlung [beziehungsweise] des Aufsummierens von Teilprodukten zu einer Produktsumme“ (Greefrath et al. 2016: 253) im Mittelpunkt. Diese Grundvorstellung beruht also auf „einer geeigneten Interpretation der Produktsummen, die im Grenzwert zum Integral führen“ (Greefrath et al. 2016: 253). Da der Produktsummenaspekt an sich eine sehr zentrale Rolle spielt⁶⁴, wird auch der Kumulationsgrundvorstellung große Bedeutung beigemessen (vgl. Bender 1990: 104, Danckwerts & Vogel 2006: 125). Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel betonen dabei insbesondere den Bezug zur Rekonstruktionsgrundvorstellung (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 102), während Peter Bender das Kumulieren auch mit der Flächeninhaltsgrundvorstellung und dem Stammfunktionsaspekt unmittelbar in Verbindung bringt (Bender 1990: 104-105).

⁶¹Diese kann bekanntlich auch über diese Integralfunktion definiert werden (vgl. Kirsch 1976: 103).

⁶²siehe Abschnitt 4.2.3

⁶³siehe Abschnitt 4.1.4

⁶⁴siehe Abschnitt 4.1.1

Die Beziehung zur Flächeninhaltsgrundvorstellung macht sich unter anderem im Zusammenhang mit der graphischen Veranschaulichung des bestimmten Integrals durch Rechtecke bemerkbar. Während aber bei der Flächeninhaltsgrundvorstellung der Grenzwert entsprechender Summen von Rechtecksflächeninhalten im Mittelpunkt steht⁶⁵, geht es beim Kumulieren um den zugrundeliegenden Prozess des Aufsummierens (vgl. Greefrath et al. 2016: 253-254). Der Zusammenhang zum Stammfunktionsaspekt und die Beziehung zur Rekonstruktionsgrundvorstellung lässt sich wiederum sehr gut mit unterschiedlichsten Anwendungsbeispielen⁶⁶ herstellen, in denen man den Gesamteffekt der Änderungsraten durch Kumulieren rekonstruiert (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 102). In gewisser Hinsicht ist die Kumulationsgrundvorstellung also grundlegend für weitere wichtige Grundvorstellungen zum Integralbegriff⁶⁷ (vgl. Tietze et al. 1997: 280-284), was die große Bedeutung, die ihr oft zukommt, durchaus rechtfertigt beziehungsweise bestätigt.

Dass sich die Kumulationsgrundvorstellung besonders gut dafür eignet, „Wissen zum Integralbegriff auf andere mathematische und physikalische Kontexte zu übertragen“ (Greefrath et al. 2016: 254), zeigt das folgende Beispiel. Ähnlich wie bei der Diskussion des Produktsummenaspekts wird wieder die physikalische Arbeit als verallgemeinerte Produktsumme von Kraft und Weg betrachtet.⁶⁸ Um das Augenmerk aber nun verstärkt auf das Kumulieren zu richten und dabei gleich ein möglichst allgemeines Resultat zu erhalten, wird nun kein notwendigerweise geradliniger Weg betrachtet, sondern ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein stetiges Kraftfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Außerdem sei $Z = [t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b]$ eine Zerlegung des Intervalls $[a; b]$ und

$$\vec{s}_i = \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Nimmt man nun an, die Kraft entlang der Strecke von $\gamma(t_{i-1})$ nach $\gamma(t_i)$ ist konstant und bezeichnet diese mit $\vec{F}_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so erhält man als Näherung für die Arbeit W entlang des Weges γ die Summe von Skalarprodukten

$$W \approx \vec{F}_1 \cdot \vec{s}_1 + \dots + \vec{F}_n \cdot \vec{s}_n.$$

Die Arbeit, die entlang des gesamten Weges verrichtet wird, ergibt sich also näherungsweise als Kumulation von Teilprodukten, die jeweils die verrichtete Arbeit entlang eines kurzen Wegstückes approximieren (vgl. Deiser 2015: 273, Greefrath et al. 2016: 254).

⁶⁵siehe Abschnitt 4.1.4

⁶⁶siehe z.B. die Liste von Danckwerts & Vogel in Abschnitt 4.1.5.

⁶⁷Es besteht sogar auch eine Beziehung zur Mittelwertgrundvorstellung (vgl. Tietze et al. 1997: 284).

⁶⁸siehe Abschnitt 4.1.1

Der Grenzwert dieser Annäherungen ist dann das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

(vgl. Deiser 2015: 273), wobei die hier verwendete Beziehung $\frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\gamma}(t)$ sofort aus der Definition der $\vec{s}_i$ folgt. Dieses Beispiel wurde gewählt, um die Tragfähigkeit dieser Grundvorstellung zu unterstreichen und sich dabei absichtlich von Anschauungen zu lösen, die sich auf orientierte Flächeninhalte und Funktionsgraphen stützen. Für den Mathematikunterricht in der Schule eignen sich wohl eher einfachere Versionen dieses Beispiels, die zum Beispiel entweder einen geradlinigen Weg voraussetzen (vgl. Greefrath et al. 2016: 254), von Anfang an die Kraft als Funktion des zurückgelegten Weges auffassen (vgl. Blum & Kirsch 1996: 62) oder sogar beide genannten Annahmen treffen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 120).

In zahlreichen Anwendungen der Integralrechnung besteht also auch eine wichtige Verbindung der Kumulationsgrundvorstellung zum Maßaspekt, zu dem ja auch das Messen „[physikalischer] Größen wie [der] Arbeit als Wegintegral über die Kraft“ (Greefrath et al. 2016: 244) gezählt werden kann.⁶⁹ Weitere Beispiele dieser Verbindung zum Maßaspekt sind das Berechnen der Bogenlänge eines Funktionsgraphen in einem Intervall $[a; b]$ (vgl. Greefrath et al. 2016: 281) und das Berechnen des Volumens eines Rotationskörpers, der durch Rotation eines Funktionsgraphen um eine der beiden Achsen entsteht (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 120-122, Greefrath et al. 2016: 275). Auch hierbei löst man sich jeweils von graphischen Veranschaulichungen durch Flächeninhalte und stellt das „Aufsummieren von Teilprodukten zu einer Produktsumme“ (Greefrath et al. 2016: 253) in den Mittelpunkt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 120-122, Greefrath et al. 2016: 275-281).

4.1.7 Abschließende Bemerkungen

Aus der Diskussion der einzelnen Grundvorstellungen geht klar hervor, dass diese auch untereinander zum Teil sehr stark vernetzt sind. Dies wird im graphischen Modell von Gilbert Greefrath et al. jedoch leider nicht berücksichtigt, denn dieses beschränkt sich darauf, auszudrücken, „welche Grundvorstellungen sich auf Basis welcher Aspekte gut entwickeln lassen“ (Greefrath et al. 2016: 18). Der Fokus liegt dort also bewusst nur auf den ohnehin schon zahlreichen Beziehungen zwischen Aspekten und Grundvorstellungen (vgl. Greefrath et al. 2016: 18). Was die Beziehungen zwischen den einzelnen Grundvorstellungen betrifft, lässt sich eine gewisse Hierarchie erkennen, die der Kumulationsgrundvorstellung eine besonders grundlegende Rolle einräumt.⁷⁰

⁶⁹siehe Abschnitt 4.1.3

⁷⁰siehe Abschnitt 4.1.6

Alles in allem lässt sich also abschließend festhalten, dass der Integralbegriff nicht nur äußerst facettenreich ist, sondern fast alle dieser Facetten auch sehr eng und auf vielseitige Art und Weise miteinander verbunden sind. Daher ist es besonders wichtig, in der Schule einen geeigneten Zugang zur Integralrechnung zu wählen, der es ermöglicht, „ein umfassendes Bild der Grundvorstellungen und Aspekte zum Integralbegriff zu vermitteln“ (Greefrath et al. 2016: 262) und dessen inhaltliches Verständnis in den Mittelpunkt zu stellen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 125), ohne dabei die Schüler*innen mit der Fülle der inhaltlichen Deutungen zu überfordern (vgl. vom Hofe 1995: 104).

4.2 Verschiedene Zugänge zur Integralrechnung

Im Rahmen dieser Arbeit wird in erster Linie zwischen drei verschiedenen unterrichtlichen Zugängen zur Integralrechnung unterschieden. Diese Zugänge sind jeweils nach ihren motivierenden Problemstellungen benannt und werden demzufolge mit *Flächeninhalte unter Funktionsgraphen*, *Umkehrung der Differentiation* und *Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten* bezeichnet. Die Einschränkung auf diese drei Zugänge soll jedoch nicht suggerieren, dass es nur drei Wege gibt, die Integralrechnung in der Schule einzuführen.⁷¹ Vielmehr handelt es sich dabei um die drei Zugänge, die einerseits eine lange Tradition in der Mathematikdidaktik haben (vgl. Blum & Törner 1983: 172-173) und andererseits mit dem österreichischen Lehrplan weitgehend kompatibel sind (vgl. RIS 2021).

Für alle in diesem Abschnitt diskutierten Zugänge gilt, dass Fragen bezüglich Existenz und Eindeutigkeit der jeweils betrachteten auftretenden Flächeninhalte frühestens im Rahmen einer anschließenden weiteren Präzisierung zu behandeln wären (vgl. Blum & Kirsch 1979: 20-21). Im Sinne des Spiralprinzips beziehungsweise der Fortsetzbarkeit sollte zwar stets berücksichtigt werden, dass fachliche Vertiefungen zu einem späteren Zeitpunkt sinnvoll erfolgen können müssen (vgl. Blum & Törner 1983: 233-236), inwieweit dies jedoch in Bezug auf solche Fragen noch in der Schule stattfindet beziehungsweise stattfinden soll, sei dahingestellt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 124-125). In Zusammenhang mit unterrichtlichen Zugängen zur Integralrechnung ist breit akzeptiert, dass es sinnvoll ist, Existenz und Eindeutigkeit der auftretenden Flächeninhalte zunächst vorauszusetzen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 103-104), da diese und auch weitere grundlegende Eigenschaften von Flächeninhalten und in weiterer Folge von bestimmten Integralen der Erfahrung nach von Schüler*innen nicht in Frage gestellt werden beziehungsweise an deren naives Vorwissen zu diesem Thema anknüpfen (vgl.

⁷¹Ein Zugang über die Mittelwertbildung wurde bereits am Beginn von Abschnitt 4.1 erwähnt. Des weiteren gibt es Zugänge, bei denen Differential- und Integralrechnung simultan eingeführt werden (siehe z.B. Greefrath et al. 2016: 270-272, Henn 2018) oder die Integralrechnung vor der Differentialrechnung behandelt wird (vgl. Blum & Törner 1983: 156-157).

Blum & Kirsch 1979: 20, Blum & Törner 1983: 161-168, Danckwerts & Vogel 2006: 103-104, Kirsch 1976: 95). Für die Schule gilt daher, dass „[das] Hauptproblem der Integralrechnung [...] *nicht* die *Definition*, sondern die *Berechnung* der Integralwerte [ist]“ (Blum & Kirsch 1979: 20).⁷²

Jeder Zugang sollte natürlich früher oder später alle Aspekte des Integralbegriffs erschließen. Jedoch könnte man durchaus sagen, dass jeder der drei Zugänge einen anderen Aspekt als *primäre* Basis verwendet. Dies ist grundsätzlich deshalb gut möglich, weil jeder der drei Aspekte mit allen drei zentralen Grundvorstellungen verbunden ist.⁷³ Dies bedeutet aber eben nicht, dass jeweils keine anderen Aspekte zum Tragen kommen, sondern einfach, dass man in jedem der Fälle mit einem anderen Aspekt beginnt.

4.2.1 Flächeninhalte unter Funktionsgraphen

Der Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen stellt in zweierlei Hinsicht einen *klassischen* Zugang zur Integralrechnung dar. Einerseits hat er eine lange Tradition in der Mathematikdidaktik (vgl. Blum & Törner 1983: 172, Kirsch 1976: 88-89) und andererseits geht er im Kern auf eine Problemstellung zurück, mit der sich die Menschheit bereits in der Antike befasste, und zwar dem Berechnen des Inhalts einer krummlinig berandeten Fläche (vgl. Greefrath et al. 2016: 218-220). Da hier das Berechnen von Flächeninhalten im Vordergrund steht, knüpft dieser Zugang direkt an Vorkenntnisse aus der Sekundarstufe I an, wo man sich bereits eingehend mit Flächeninhalten von Polygonen und auch bereits von Kreisen befasst (vgl. RIS 2021).

Als typischen Einstieg betrachtet man hier gerne den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 1]$ und möchte nun den Inhalt der Fläche zwischen x -Achse und Funktionsgraph in diesem Intervall bestimmen. Klar ist, dass dies ad hoc nicht möglich ist und als Lösungsansatz wählt man dann das Annähern des Flächeninhaltes mithilfe gleich breiter Rechtecke. Die Idee des Annäherns durch Teilflächen ist unter Umständen bereits aus der Sekundarstufe I bekannt, wobei man sich hier nun aus reiner Praktikabilität auf Rechtecke beziehungsweise sogar gleich breite Rechtecke beschränkt (vgl. Greefrath et al. 2016: 265).

Nun muss man eine passende Strategie für das weitere Vorgehen finden, wobei dabei das Annähern des gesuchten Flächeninhalts durch Unter- und Obersummen zu bevorzugen ist (vgl. Knoche & Wippermann 1986: 260-261). Die Vorteile gegenüber dem Verwenden von Zwischensummen an dieser Stelle sind vielfältig. Einerseits ist das Annähern

⁷²Auch die für die Schule übliche Definition des bestimmten Integrals als Folengrenzwert (siehe Abschnitt 2.1.2) spiegelt diese Grundhaltung wider (vgl. Blum & Törner 1983: 170).

⁷³siehe Abschnitt 4.1

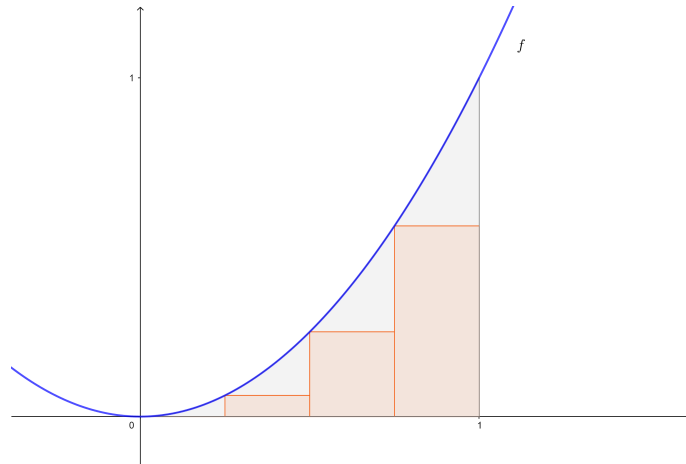


Abb. 13: Annähern der Fläche durch gleich breite Rechtecke

eines Flächeninhalts „durch Inhalte von einbeschriebenen und umschriebenen Polygonflächen“ (Knoche & Wippermann 1986: 260) als sinnvolle Strategie möglicherweise bereits aus der Sekundarstufe I bekannt (vgl. Knoche & Wippermann 1986: 260), wo man diese historisch relevante Methode zur Annäherung des Flächeninhalts eines Kreises bereits behandeln kann (vgl. Greefrath et al. 2016: 232-234). Etwas formaler betrachtet, entspricht das Annähern durch Unter- und Obersummen außerdem damit gewissermaßen⁷⁴ einer Intervallschachtelung und dies ist ebenfalls eine Methode, die den Schüler*innen zu diesem Zeitpunkt bereits vertraut sein sollte (vgl. Knoche & Wippermann 1986: 261). Andererseits lassen sich Unter- und Obersummen sehr gut mithilfe von entsprechendem Technologieeinsatz⁷⁵ berechnen und auch graphisch veranschaulichen, was den hohen Rechenaufwand, der mit dieser Strategie einhergehen kann, deutlich verringert (vgl. Büchter & Henn 2010: 231-232, Greefrath et al. 2016: 265). Außerdem wird durch die graphische Veranschaulichung (Abb. 14) deutlich, „dass dieses Verfahren durch Erhöhung der Anzahl der Teilintervalle immer genauer und die Differenz zwischen Ober- und Untersummen immer kleiner wird“ (Greefrath et al. 2016: 265).⁷⁶

An dieser Stelle hat man nun im Grunde zwei Möglichkeiten. Die erste dieser Möglichkeiten besteht darin, sich vorerst mit solchen numerischen Betrachtungen zufrieden zu geben und Unter- und Obersummen zu bestimmten äquidistanten Zerlegungen des betrachteten Intervalls zu untersuchen. Dabei kann man verwenden, dass für den ge-

⁷⁴I.A. ist dies leider nicht ganz korrekt, denn Folgen von Unter- und Obersummen sind bekanntermaßen nicht notwendigerweise monoton.

⁷⁵z.B. mit den Befehlen „Untersumme“ und „Obersumme“ bei *GeoGebra*.

⁷⁶*Immer genauer* und *immer kleiner* sollen in dieser Formulierung keinen Anspruch auf Monotonie im allgemeinen Fall erheben, sondern beziehen sich vielmehr auf ein *anschauliches Gesamtbild*.

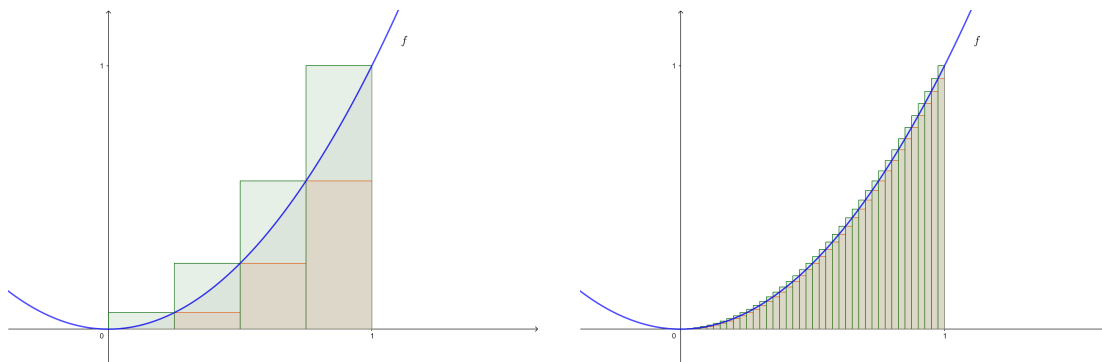


Abb. 14: Durch Erhöhung der Anzahl der Teilintervalle kann man sich mit Unter- und Obersummen graphisch schön an den gesuchten Flächeninhalt *herantasten* ($n = 4$ bzw. $n = 40$)

suchten Flächeninhalt I und alle $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n \leq I \leq O_n$$

gilt, um anhand der Differenz $O_n - U_n$ Aussagen darüber zu machen, wie gut die entsprechenden Annäherungen bereits sind (vgl. Büchter & Henn 2010: 235, Greefrath et al. 2016: 265). Dieses Vorgehen würde nun eine Definition des bestimmten Integrals als diese Zahl I nahelegen (vgl. Greefrath et al. 2016: 265), welche damit im Kern der ersten der beiden in Abschnitt 2.1.2 gegebenen Definitionen entsprechen würde. Allerdings ist zu beachten, dass man an dieser Stelle eigentlich noch keinen neuen Begriff benötigt, da von Existenz und Eindeutigkeit des Flächeninhaltes bereits ausgegangen wird (vgl. Blum & Kirsch 1979: 15) und man damit in gewisser Hinsicht nur dem gesuchten Flächeninhalt einen neuen Namen geben würde. Die zweite Möglichkeit besteht darin, zu versuchen, den Grenzwert der Unter- und Obersummen tatsächlich zu ermitteln (vgl. Greefrath et al. 2016: 266). Im Falle des hier gewählten Beispiels ist dies tatsächlich auch rein algebraisch durchführbar, insbesondere wenn man die Summenformel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2 \cdot n + 1)$$

als gegeben voraussetzt (siehe z.B. Büchter & Henn 2010: 232, Greefrath et al. 2016: 226). Damit ist eine exakte Berechnung des gesuchten Flächeninhaltes als Grenzwert der Unter- beziehungsweise Obersummen möglich, was in weiterer Folge die zweite in Abschnitt 2.1.2 gegebene Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert von Unter- und Obersummen nahelegt (vgl. Blum & Törner 1983: 172, Greefrath et al. 2016: 266).

Arnold Kirsch identifiziert an dieser Stelle insbesondere zwei Schwachpunkte eines solchen Zugangs. Erstens argumentiert er, dass eine frühzeitige analytische Definition

des bestimmten Integrals im Unterricht zu einem „[Missverhältnis] von begrifflichem und terminologischem Anspruch gegenüber dem realisierten Niveau der Diskussion“ (Kirsch 1976: 88) führen kann. Damit ist gemeint, dass der mit der Definition verbundene Anspruch an begrifflicher Exaktheit an dieser Stelle zu hoch ist, wobei sich dieser dann oft ohnehin auf „[einige] Alibi-Stunden“ (Kirsch 1976: 104) beschränkt und danach wieder fallen gelassen wird (vgl. Kirsch 1976: 88). In so einem Vorgehen erkennt Kirsch daher viel eher den Wunsch der Lehrperson „nach einer ‚sauberen Theorie‘“ (Kirsch 1976: 102) als den Versuch, den Integralbegriff für Schüler*innen auf geeignetem Niveau früh zugänglich zu machen (vgl. Kirsch 1976: 87). Zweitens ergibt sich das relativ offensichtliche Problem, dass weitere Aufgaben, die in diesem Zusammenhang nun gestellt werden können, entweder zu banal oder zu kompliziert sind (vgl. Kirsch 1976: 89). Zum Beispiel kann man nun das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x \, dx$$

auch als Grenzwert von Unter- und Obersummen berechnen, was zwar einerseits die entsprechenden Erwartungen erfüllt, aber andererseits im Rahmen dieses Zugangs vor allem einen äußerst umständlichen Weg darstellt, den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen (vgl. Kirsch 1976: 89). Im Gegensatz dazu stellen sogar bereits bestimmte Integrale von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten größer als 2 recht große und leider auch isolierte Herausforderungen dar. Das Berechnen solcher bestimmten Integrale stellt sich dann aber plötzlich sogar als sehr einfach heraus, nachdem der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung behandelt wurde. Damit stellt sich hier die berechtigte Frage, ob solche Aufgaben dann überhaupt die Mühe wert sind (vgl. Kirsch 1976: 89). Die Argumentation in Bezug auf den zweiten Schwachpunkt kann zwar einerseits durch die heutigen Möglichkeiten des Technologieeinsatzes relativiert werden, andererseits steht dann aber an dieser Stelle eigentlich sogar grundsätzlich in Frage, wie beziehungsweise ob man den Integralbegriff auf diesem Wege überhaupt noch wirklich motivieren kann.

Nachdem man nun über das Bestimmen von Flächeninhalten unter Funktionsgraphen nichtnegativer Funktionen bei einer Definition des bestimmten Integrals über Unter- und Obersummen angelangt ist, kann man „das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze“ (Blum & Törner 1983: 172) auffassen, um auf diese Weise zum Begriff der Integralfunktion zu kommen (vgl. Blum & Törner 1983: 172, Büchter & Henn 2010: 233). Mithilfe der wenigen nun bereits bekannten Integrale lässt sich dann die Aussage des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erahnen, der dann „mit Rückgriff auf die geometrische Interpretation des bestimmten Integrals gerechtfertigt wird“ (Blum & Törner 1983: 172). Von dort aus ist dann auch der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erreichbar, sodass

abschließend nun weitere Anwendungen der Integralrechnung insbesondere mithilfe des Hauptsatzes erschließbar sind (vgl. Blum & Törner 1983: 172).

Damit ist dieser Zugang zur Integralrechnung nun zumindest grob umrissen, wobei die Frage noch offen ist, an welcher Stelle geklärt wird, dass das bestimmte Integral Flächen eigentlich nicht einfach misst sondern bilanziert (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 93). Werner Blum und Arnold Kirsch betonen, dass Schüler*innen insbesondere im Zusammenhang mit geeigneten anwendungsbezogenen Beispielen „schon frühzeitig lernen [sollten], *Flächeninhalte bei Funktionsgraphen als Größenprodukte* im verallgemeinerten Sinn zu *interpretieren*, um falsche Fixierungen zu vermeiden“ (Blum & Kirsch 1979: 16). In anderen Worten sollte also der Produktsummenaspekt früh erschlossen werden, um einerseits den Integralbegriff für weitere Anwendungen zu öffnen und andererseits eine zu starke Bindung an die Interpretation des bestimmten Integrals als Flächeninhalt zu verhindern (vgl. Blum & Törner 1983: 161). Da Produktsummen in der Definition des bestimmten Integrals bei diesem Zugang ohnehin schon vorkommen, ist also eine Erklärung der auftretenden Vorzeichen mithilfe dieser Produktsummen insbesondere durch geeigneten Anwendungsbezug durchaus möglich (vgl. Blum & Törner 1983: 162). Als mögliche Alternative schlägt Peter Bender vor, das Auftreten negativer Vorzeichen mithilfe von geeigneten Metaphern im Zusammenhang mit Integralfunktionen zu erklären⁷⁷ (vgl. Bender 1990: 112). Anstatt nur Metaphern zu verwenden, könnte man jedoch durchaus auch hier geeignete anwendungsbezogene Beispiele wählen, wodurch gleichzeitig bereits viel Raum für die Rekonstruktionsgrundvorstellung geschaffen werden würde (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 102-103).

Allein anhand dieser Überlegungen wird bereits deutlich, dass man bei einem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen durchaus in der Lage ist, früher oder später alle Aspekte des Integralbegriffs auf sinnvolle und zusammenhängende Weise zu erschließen, wobei der Maßaspekt und der Produktsummenaspekt stärker beziehungsweise früher zum Tragen kommen (vgl. Greefrath et al. 2016: 266). Entsprechend stehen hierbei dann die Flächeninhaltsgrundvorstellung aber auch die Kumulationsgrundvorstellung im Vordergrund (vgl. Greefrath et al. 2016: 267). Stammfunktionsaspekt und Rekonstruktionsgrundvorstellung spielen dann spätestens nach der Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ebenfalls eine Rolle (vgl. Blum & Törner 1983: 172), womit nun alle drei Aspekte und auch die drei zentralen Grundvorstellungen abgedeckt sind.

In diesem Abschnitt wurde bereits an mehreren Stellen Kritik an diesem Zugang geäußert. Dabei stand im Vordergrund, dass hier einerseits „die analytische Definition des [...] Integrals zu früh angesteuert“ (Danckwerts & Vogel 2006: 95) werden könnte

⁷⁷siehe z.B. die gegebene Metapher in Abschnitt 4.1.4

und dass es zu Beginn nur wenige sinnvolle Aufgaben zum Berechnen von bestimmten Integralen gibt, die im Rahmen dieses Zugangs überhaupt interessant und zumutbar sind (vgl. Kirsch 1976: 89). Außerdem wurde bereits betont, dass es wichtig ist, den Produktsummenaspekt auch in Zusammenhang mit weiteren Anwendungen der Integralrechnung früh zu erschließen, insbesondere um zu verhindern, dass sich Schüler*innen zu sehr auf die Interpretation des bestimmten Integrals als Flächeninhalt fixieren (vgl. Blum & Kirsch 1979: 16). Abschließend deutet die Tatsache, dass man bei diesem Zugang die graphische Interpretation als orientierten Flächeninhalt, die zwar zum Beispiel mithilfe geeigneter Anwendungskontexte gut motiviert werden kann (vgl. Blum & Törner 1983: 162), aber im Zusammenhang mit dem Berechnen von Flächeninhalten eigentlich sehr störend ist⁷⁸, zusätzlich behandeln muss, auf einen weiteren möglichen Kritikpunkt hin. Gewissermaßen ist die Entwicklung des Integralbegriffs bei diesem Zugang daher nämlich eigentlich gar nicht die Lösung der ursprünglich motivierenden Problemstellung, sondern lediglich das entscheidende Mittel zum Zweck.

4.2.2 Umkehrung der Differentiation

Auch der Zugang über das „Umkehrproblem der Differentialrechnung“ (Blum & Törner 1983: 163) hat an sich bereits eine lange Tradition (vgl. Kirsch 1976: 89-90) und steht dem bereits diskutierten Zugang in vielerlei Hinsicht diametral gegenüber. Den Kern der motivierenden Problemstellung stellt hier das Finden von Stammfunktionen dar, welches im Grunde direkt an die den Schüler*innen bereits bekannte Differentialrechnung⁷⁹ anknüpft und auf diese Weise „natürlich motiviert“ (Kirsch 1976: 89) ist (vgl. Blum & Törner 1983: 163, Kirsch 1976: 89).

Das Finden von Stammfunktionen muss sich nicht auf ein rein kalkülgeleitetes Umkehren der Ableitungsregeln beschränken, sondern lässt sich auch graphisch beispielsweise mithilfe sogenannter Richtungsfelder veranschaulichen (vgl. Blum & Törner 1983: 163, Büchter & Henn 2010: 238-239). Ist zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ gegeben, so kann man den Graphen einer Stammfunktion F von f konstruieren, indem man in einem passenden Koordinatensystem „in jedem Punkt $(x \mid y)$ ‚die Richtung $f(x)$ einzeichnet‘, [also man zeichnet] ein kleines Geradenstückchen der Steigung $f(x)$ “ (Büchter & Henn 2010: 238). Jeder mögliche Pfad durch dieses Richtungsfeld entspricht damit dann dem Graphen einer Stammfunktion von f (vgl. Blum & Törner 1983: 163).

Solche Richtungsfelder lassen sich durch Technologieeinsatz⁸⁰ leicht konstruieren und verdeutlichen auch die Tatsache, dass sich je zwei Stammfunktionen einer auf einem In-

⁷⁸siehe Abschnitt 4.1.3

⁷⁹Nach dem österreichischen Lehrplan für die AHS ist die Differentialrechnung verpflichtend vor der Integralrechnung zu behandeln (RIS 2021).

⁸⁰z.B. mit dem Befehl „Richtungsfeld“ bei *GeoGebra*

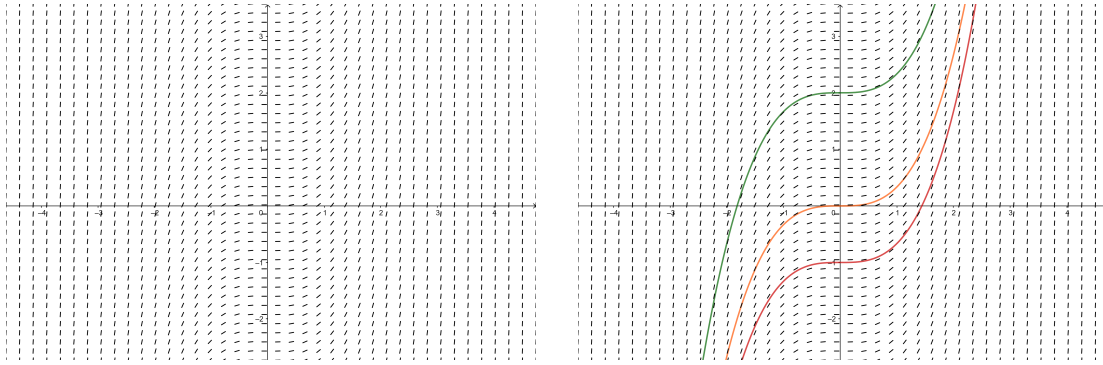


Abb. 15: Richtungsfeld für Stammfunktionen von f mit $f(x) = x^2$

tervall definierten Funktion nur um eine additive Konstante unterscheiden (vgl. Büchter & Henn 2010: 238-239). All dies verlangt nun eigentlich noch nach keiner neuen Begriffsbildung und kann vollständig im Rahmen der Differentialrechnung behandelt werden (vgl. Blum & Törner 1983: 163). An dieser Stelle die Schüler*innen mit dem Begriff des unbestimmten Integrals zu konfrontieren, halten Werner Blum und Günter Törner daher für „überflüssig und verwirrend“ (Blum & Törner 1983: 173). Auch Arnold Kirsch und Peter Bender sprechen sich deutlich gegen die Einführung dieses Begriffs aus, wobei Bender den Begriff nicht nur an dieser Stelle, sondern allgemein aus der Schule verbannen⁸¹ würde (vgl. Bender 1990: 118-119, Kirsch 1976: 89).

Unabhängig davon, ob man nun den Begriff des unbestimmten Integrals einführt oder nicht, kann man an dieser Stelle bereits zahlreiche Aufgaben stellen und damit insbesondere die Entwicklung der Rekonstruktionsgrundvorstellung unterstützen (vgl. Greefrath et al. 2016: 268). Dabei muss selbstverständlich nicht mit Richtungsfeldern gearbeitet werden, denn es bieten sich auch andere graphische Darstellungen an (vgl. Greefrath et al. 2016: 269). Auch diverse Problemstellungen mit Anwendungsbezug, die aus der Differentialrechnung bereits bekannt sind, lassen sich nun auf durchaus gewinnbringende Weise umkehren (vgl. Blum & Törner 1983: 164). Die an diesem Punkt bereits auf verschiedene Arten gut erklärbare Tatsache, dass die absolute Änderung einer Stammfunktion in einem gegebenen Intervall $[a; b]$ von der Wahl der Stammfunktion unabhängig ist, wird im Rahmen so eines Zugangs manchmal bereits zur Definition des bestimmten Integrals herangezogen.⁸² Um eine gewisse begriffliche Abgrenzung zu schaffen, wird dies in der einschlägigen Fachliteratur dann in manchen Werken als *Stammfunktionsintegral* bezeichnet (vgl. Blum & Törner 1983: 163, Tietze et al. 1997:

⁸¹siehe Abschnitt 2.4.3

⁸²Solche Zugänge werden z.B. bei Blum & Kirsch (1979: 17), Blum & Törner (1983: 163), Danckwerts & Vogel (2006: 95), Greefrath et al. (2016: 241), Tietze et al. (1997: 282-283) geschildert.

283). Für eine stetige Funktion f auf einem Intervall $[a; b]$ definiert man dann

$$\int_a^b f := F(b) - F(a),$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist⁸³ (vgl. Blum & Kirsch 1979: 17, Blum & Törner 1983: 163-164). Damit wird hier der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zur Definition erklärt und damit das bestimmte Integral für stetige Funktionen scheinbar schlagartig verfügbar gemacht (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 95). Ein Vorteil an dieser Definition liegt ganz klar darin, dass das Berechnen bestimmter Integrale nun von Anfang an im Grunde auf das Ermitteln von Stammfunktionen reduziert ist, was insbesondere den im vorigen Abschnitt diskutierten Problemen im Zusammenhang mit dem Ermitteln von Grenzwerten von Unter- und Obersummen entgegenzuhalten ist (vgl. Greefrath et al. 2016: 268). Außerdem muss man sich nicht vorerst auf Potenzfunktionen oder Polynomfunktionen beschränken, sondern kann im Grunde sofort auch bestimmte Integrale von Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, trigonometrischen Funktionen beziehungsweise allgemein bestimmte Integrale von skalaren Vielfachen, Summen und Differenzen elementarer Funktionen auch ohne Technologieeinsatz berechnen (vgl. Greefrath et al. 2016: 268-269). Ob man sich in der Schule ohne Technologieeinsatz sogar den Herausforderungen stellen sollte, die durch Produkte, Quotienten oder Verkettungen elementarer Funktionen entstehen, ist nicht eindeutig zu beantworten und eher umstritten.⁸⁴ Entscheidend ist eher, dass all dies grundsätzlich bereits an dieser Stelle erreichbar ist.

So verlockend so ein Zugang auf den ersten Blick aussehen mag, so bringt er doch einige und zum Teil sehr große Probleme mit sich. Aus fachlicher Sicht hat man das große Problem, dass der Integralbegriff, den man hier nun eingeführt hat, höchstens für stetige Funktionen sinnvoll sein kann (vgl. Blum & Törner 1983: 164) und zu großen Problemen führt, sobald man Stetigkeit nicht mehr voraussetzt⁸⁵, da man die Eigenschaften *integrierbar sein* und *eine Stammfunktion besitzen* nicht gleichsetzen kann beziehungsweise so eine Gleichheit auch nicht andeuten sollte (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 95). Doch selbst wenn man sich im Unterricht ohnehin auf stetige Funktionen beschränken würde⁸⁶, bleibt so eine Definition des bestimmten Integrals nicht nur in fachdidaktischer sondern auch in fachlicher Hinsicht problematisch. Einerseits ist es selbstverständlich nicht trivial, dass eine stetige Funktion tatsächlich eine Stammfunktion besitzt, dies lässt sich nämlich auch beispielsweise anhand von Richtungsfeldern

⁸³Die klassische Schreibweise $\int_a^b f(x) dx$ wäre an dieser Stelle noch nicht sinnvoll motivierbar (vgl. Kirsch 1976: 92).

⁸⁴siehe Abschnitt 4.1.2

⁸⁵siehe Abschnitt 2.4.2

⁸⁶Dadurch würden jedoch zum Teil sogar besonders anschauliche Beispiele wegfallen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 96-99).

nur schwer plausibel machen (vgl. Bender 1990: 112-113, Blum & Kirsch 1979: 17). Andererseits ist das Stammfunktionsintegral ohne diesen Nachweis streng genommen gar nicht wohldefiniert, denn die Definition führt beispielsweise bei

$$\int_1^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

zu einer gewissermaßen ausweglosen Situation, da man hier keine entsprechende Stammfunktion durch Umkehren von Ableitungsregeln finden kann (vgl. Büchter & Henn 2010: 250).

Aus fachdidaktischer Sicht wird hier üblicherweise in erster Linie bemängelt, dass es sich bei diesem Vorgehen „um ein Musterbeispiel für eine antididaktische Inversion im Sinne Freudenthals“ (Danckwerts & Vogel 2006: 95) handelt.⁸⁷ Damit ist gemeint, dass man bei so einem Vorgehen die Schüler*innen mit einem fertigen Resultat in Form einer Definition konfrontiert, welches erst im Anschluss weiter analysiert wird. Dieses im fachmathematischen Diskurs durchaus übliche Vorgehen ist aus didaktischer Sicht jedoch äußerst unvorteilhaft, da dabei zunächst gewissermaßen verheimlicht wird, wie beziehungsweise warum man überhaupt zu diesem Resultat kommt (vgl. Freudenthal 1973: 103). Konkret bezieht sich diese Kritik an dem in diesem Abschnitt diskutierten Zugang darauf, dass hier „etwas, das im ursprünglichen Verständnis der Theorie ein tiefliegender Satz ist, zur Definition degradiert [wird]“ (Danckwerts & Vogel 2006: 95), womit dieser Satz im übrigen auch „in seiner Bedeutung nicht angemessen hervorgehoben wird“ (Kirsch 1976: 89). Ein weiteres didaktisches Problem an dieser Definition des bestimmten Integrals ist, dass diese in weiten Teilen offen lässt, „welche inhaltlichen Vorstellungen [die Schüler*innen] mit dem Zahlenwert $F(b) - F(a)$ verbinden [sollen]“ (Blum & Törner 1983: 164). Insbesondere muss die Beziehung zur Flächeninhaltsgrundvorstellung dann ohnehin zusätzlich hergestellt werden (vgl. Kirsch 1976: 89), denn den Flächeninhalt unter einem entsprechenden Funktionsgraphen in einem Intervall einfach als die absolute Änderung der Stammfunktion zu definieren könnte man als „künstlich, ja abwegig“ (Blum & Törner 1983: 165) beschreiben (vgl. Blum & Kirsch 1979: 18, Blum & Törner 1983: 165).

Anhand dieser Überlegungen wird klar, dass das Stammfunktionsintegral tatsächlich sowohl aus fachlichen als auch aus fachdidaktischen Gründen ein äußerst problembehafteter Begriff ist. Manche dieser Probleme können natürlich ein Stück weit abgefedert werden. Zum Beispiel kann man auch bereits vor der in diesem Abschnitt gegebenen Definition anhand geeigneter Beispiele plausibel machen, dass „Flächeninhaltsfunktionen (in Bezug auf den Graphen von f) Stammfunktionen von f sind“ (Blum & Törner 1983: 173). Dieser Schritt in Richtung des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und

⁸⁷siehe z.B. Danckwerts & Vogel (2006: 95), Kirsch (1976: 89), Greefrath et al. (2016: 243)

Integralrechnung relativiert dann einerseits die erwähnten Probleme bezüglich der Existenz des Stammfunktionsintegrals (vgl. Blum & Kirsch 1979: 17) und stellt andererseits die wichtige Beziehung zur Flächeninhaltsgrundvorstellung her (vgl. Blum & Törner 1983: 164-165). Man könnte durchaus behaupten, dass durch so ein Vorgehen nun zumindest die Rekonstruktionsgrundvorstellung und die Flächeninhaltsgrundvorstellung sowie der Stammfunktionsaspekt und zum Teil auch der Maßaspekt abgedeckt sind. Um im Anschluss aber noch den eigentlich sehr zentralen Produktsommenaspekt zu erschließen und auch die gewissermaßen grundlegende Kumulationsgrundvorstellung sinnvoll zu ermöglichen, müssen dazu passende Beispiele erst zusätzlich motiviert und behandelt werden (vgl. Blum & Kirsch 1979: 17-18). Auch wenn also so ein Zugang zunächst so wirken mag, als könnte man bereits früh sehr viel erreichen, so stellt sich doch heraus, dass durch so ein Vorgehen die Entwicklung eines adäquaten inhaltlichen Verständnisses des Integralbegriffs nicht leichter wird, „da die inhaltliche Bedeutung bestimmter Integrale dennoch erarbeitet werden [muss]“ (Greefrath et al. 2016: 243). Werner Blum und Günter Törner drücken an dieser Stelle jedoch ihre Bedenken dahingehend aus, dass dies im Unterricht dann tatsächlich noch in ausreichender Form geschieht (vgl. Blum & Törner 1983: 164).

4.2.3 Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten

Der Zugang nach dem Motto *Integrieren heißt Rekonstruieren* geht in weiten Teilen auf Beiträge von Arnold Kirsch zurück (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 96), der bereits 1976 auf diese Weise für „[eine] ‚intellektuell ehrliche‘ Einführung des Integralbegriffs“ (Kirsch 1976: 87) plädierte. Es handelt sich bei diesem Zugang gewissermaßen um einen Mittelweg, der die Schwächen der beiden bereits diskutierten Zugänge ausgleichen soll (vgl. Kirsch 1976: 90). Darüber hinaus wird der Anspruch gestellt, dass dabei die Schüler*innen von Anfang an „die Möglichkeit zur *Eigentätigkeit* haben, indem [ihnen] sinnvolle Aufgaben zugänglich sind, die zur Begriffsbildung hinführen“ (Kirsch 1976: 90). Dabei steht der „*Aufbau angemessener Vorstellungen*“ (Kirsch 1976: 87) im Vordergrund und fachliche Präzisierungen können zeitlich nach hinten verschoben werden (vgl. Kirsch 1976: 87).

Der Einstieg erfolgt bei diesem Zugang über Anwendungsbeispiele, bei denen man sich zum Ziel setzt, aus gegebenen Änderungsraten entsprechende Bestände zu rekonstruieren (vgl. Greefrath et al. 2016: 262-264). Dafür steht natürlich eine Vielzahl an möglichen Kontexten⁸⁸ zur Verfügung (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 102-103, Greefrath et al. 2016: 262-264), wobei zu beachten ist, dass hier im Gegensatz zu anderen Zugängen bereits stückweise lineare Funktionen „ein hinreichend komplexes Beispielmaterial [bilden], um wesentliche Eigenschaften des Integralbegriffs erkennen zu lassen“

⁸⁸siehe Abschnitt 4.1.5

(Kirsch 1976: 91). Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel gehen daher überhaupt so weit, dass sie für die erste Begegnung mit dieser Problemstellung einen Kontext wählen, der sich mit einer stückweise konstanten Funktion modellieren lässt⁸⁹ (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 96-98).

In eine leere Badewanne wird eine gewisse Zeit lang Wasser eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt, gleichzeitig der Abfluss geöffnet und nach einer Weile wieder geschlossen. [...] Wie lässt sich aus der Kenntnis der Zuflussgeschwindigkeit auf die Wassermenge V in der Wanne zu einem beliebigen Zeitpunkt t schließen? (Danckwerts & Vogel 2006: 96)

Um diese Frage zu beantworten, beginnt man zunächst mit einer graphischen Darstellung (vgl. Tietze et al. 1997: 280), wobei man dabei die rekonstruierte Größe unmittelbar auf sinnvolle Weise als den entsprechenden orientierten Flächeninhalt interpretieren kann (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 98, Blum & Kirsch 1979: 20).

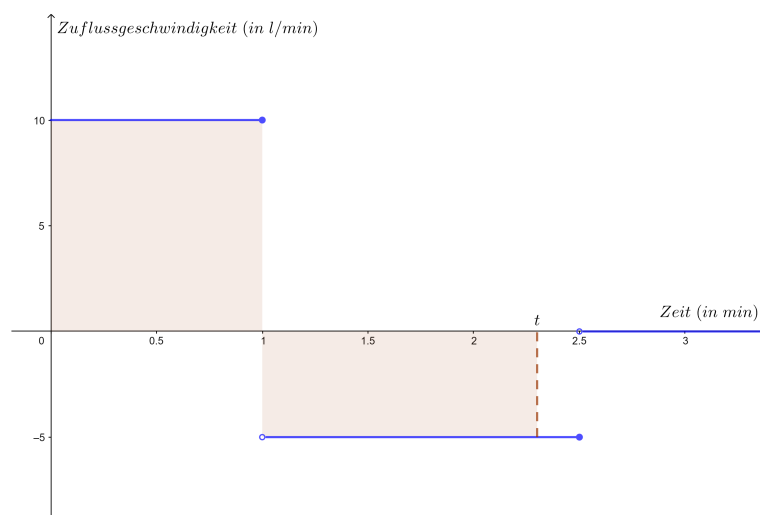


Abb. 16: Modellierung eines konstanten Zuflusses/Abflusses und der in der Badewanne enthaltenen Wassermenge V zum Zeitpunkt t (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 97)

Anstatt gleich die Frage nach der Wassermenge V zu einem beliebigen Zeitpunkt t zu stellen, kann man sich zunächst natürlich auch für die Wassermenge zu einem bestimmten Zeitpunkt interessieren. Hier hat man es dann bereits zum ersten Mal mit einer Produktsumme zu tun und stellt dabei fest, dass man damit erfolgreich die Wassermenge, die zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Badewanne ist, rekonstruieren kann (vgl. Greefrath et al. 2016: 262). Diese Idee lässt sich verallgemeinern, wobei man sich dann stets die Frage stellen muss, ob man sich gerade in der Zuflussphase, der Abflussphase oder der Phase danach befindet. Man muss hier also zwischen drei

⁸⁹Vergleichbare Beispiele sind z.B. auch bei Blum & Kirsch (1979: 20), Blum & Törner (1983: 172), Greefrath et al. (2016: 262-263), Kirsch (1976: 94) und Tietze et al. (1997: 280) zu finden.

Fällen unterscheiden, die sich allerdings alle mithilfe der graphischen Darstellung leicht erklären lassen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 97).

Für einen Zeitpunkt t während der Zuflussphase ist die bis dahin zugeflossene Wassermenge gleich dem Produkt

$$10 \text{ Liter/Minute} \cdot t \text{ Minuten} = 10 t \text{ Liter.}$$

Für einen Zeitpunkt t während der Abflussphase ist von den in der ersten Minute zugeflossenen 10 Litern jene Menge abzuziehen, die wieder abgeflossen ist, das ergibt

$$10 - 5(t - 1) \text{ Liter.}$$

Die Wassermenge V in der Wanne in Abhängigkeit von der Zeit t ist damit beschrieben durch

$$V(t) = \begin{cases} 10 t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5(t - 1) & \text{für } 1 < t \leq 2,5 \\ 2,5 & \text{für } t > 2,5 \end{cases}$$

(Danckwerts & Vogel 2006: 97)

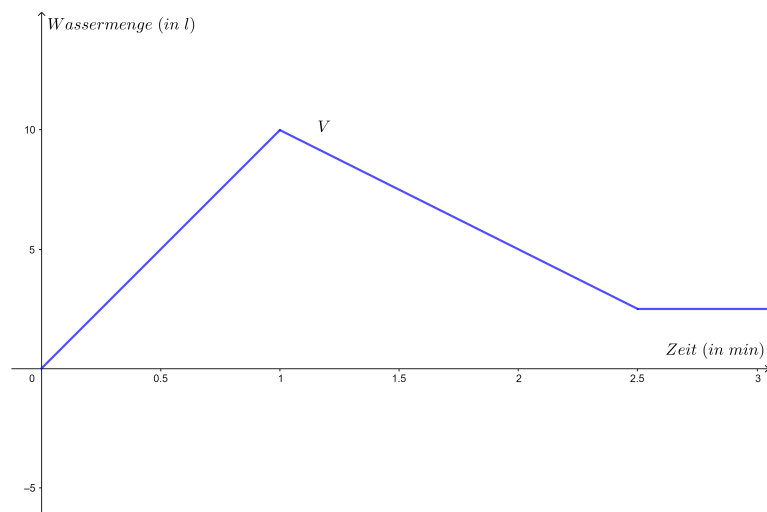


Abb. 17: Graph der rekonstruierten Funktion V (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 98)

Neben dem Aufstellen einer Funktionsgleichung bietet es sich außerdem an, den Graphen von V zu skizzieren (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 98), sodass man auch auf diese Weise schön erkennen kann, dass es sich bei V um eine stetige, stückweise lineare

Funktion handelt, deren Anstieg jeweils genau der Zuflussgeschwindigkeit im entsprechenden Intervall entspricht. Auf diese Tatsache kann man dann bei der Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, die erst zu einem späteren Zeitpunkt erfolgt, bereits gut zurückgreifen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 104-105, Kirsch 1976: 97).

Nach diesem Einstieg stellen die bereits erwähnten stückweise linearen Funktionen eine geeignete Basis für weitere Beispiele dar (vgl. Kirsch 1976: 91), wobei sich neben zahlreichen anderen Kontexten auch das Badewannenbeispiel in diesem Sinne ausbauen lässt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 99). Man hat hier jedoch zunächst einen gewissen Erklärungsbedarf, denn es ist noch gar nicht klar, dass man den entsprechenden orientierten Flächeninhalt auch bei nicht konstanten Zu- beziehungsweise Abflussgeschwindigkeiten als den rekonstruierten Bestand interpretieren kann (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 100). Zur Begründung bieten sich unter anderem Unter- und Obersummen an, wobei man nun beispielsweise im Rahmen eines passenden Badewannenbeispiels argumentieren kann, „dass die Zuflussgeschwindigkeit im Kleinen, [also] in genügend kleinen Zeitintervallen, als nahezu konstant betrachtet werden kann“ (Danckwerts & Vogel 2006: 100). Somit kann „der Zuwachs der Wassermenge im Zeitintervall Δt [...] als kleiner (orientierter) Rechteckinhalt“ (Danckwerts & Vogel 2006: 101) und die Wassermenge zu einem bestimmten Zeitpunkt als Summe solcher kleinen orientierten Rechtecksflächeninhalte gedeutet werden (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 101). Da sich diese Summe dann bei hinreichend schmalen Rechtecken „augenscheinlich [...] beliebig wenig von dem (orientierten) Inhalt unter [dem Graphen der Zuflussgeschwindigkeit] unterscheidet“ (Danckwerts & Vogel 2006: 101), lässt es sich so also durchaus anschaulich rechtfertigen, dass man diesen orientierten Flächeninhalt nicht nur bei konstantem Zufluss als die rekonstruierte Wassermenge interpretieren kann (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 101). Hierbei wird vorgeschlagen, dies gleich anhand „eines beliebigen (nicht unbedingt linearen) Verlaufs der Zuflussgeschwindigkeit“ (Danckwerts & Vogel 2006: 100) zu demonstrieren⁹⁰ und dabei aber auch dezidiert noch nicht über eine Plausibilisierung hinauszugehen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 101).

Nachdem man anhand geeigneter Beispiele unter anderem festgestellt hat, dass es sinnvoll ist, sich für den orientierten Flächeninhalt zu interessieren, der vom Graphen einer Funktion und der x -Achse „vom Startwert bis zur Stelle x “ (Danckwerts & Vogel 2006: 103) berandet wird, kann man diese Problemstellung auch von spezifischen Kontexten lösen und allgemein den Begriff der Integralfunktion einführen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 103). Dem Begriff der Integralfunktion gewissermaßen den Vortritt gegenüber dem bestimmten Integral zu geben, ist in der fachdidaktischen Literatur durchaus weit

⁹⁰An dieser Stelle bietet sich zweifelsohne ähnlich wie beim Zugang über Flächeninhalte entsprechender Technologieeinsatz an (siehe Abschnitt 4.2.1).

verbreitet.⁹¹ Neben anderen Vorzügen wie dem Unterstützen einer „[funktionalen] Auffassung vom Flächeninhalt“ (Bender 1990: 112), verursacht der Begriff der Integralfunktion dabei nicht die „Schwierigkeiten der Motivation und der Schreibweise“ (Blum & Kirsch 1979: 21), die er beim Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen verursachen kann (vgl. Blum & Kirsch 1979: 21). Was die Schreibweise angeht, bieten sich die Bezeichnungen I_a oder F_a an, wobei damit auf die Begriffe Integralfunktion beziehungsweise Flächeninhaltsfunktion angespielt wird und der Index a den entsprechenden Startwert angibt (vgl. Blum & Kirsch 1979: 20, Danckwerts & Vogel 2006: 103). In der einschlägigen Literatur wird zwischen den beiden möglichen Begriffen nicht immer sauber unterschieden. Stellt man aber wie bei diesem Zugang den Anwendungsbezug in den Mittelpunkt, so ist der Begriff Integralfunktion aus sprachlichen Gründen zu bevorzugen (vgl. Kirsch 1976: 94), und wird daher auch in dieser Arbeit in Zusammenhang mit diesem Zugang verwendet. Somit gelangt man an dieser Stelle zu einer anschaulich sinnvollen Definition, wobei die Funktionswerte der Integralfunktion zu einer gegebenen *Berandung* einfach „als algebraische [Summen] von (für sich genommenen positiven) Flächeninhalten“ (Blum & Kirsch 1979: 15) zu verstehen sind und als Integrale bezeichnet werden (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 103). An die Berandung stellt man einerseits den Anspruch, dass sie auf dem gesamten betrachteten Intervall definiert ist (vgl. Kirsch 1976: 94) und andererseits muss sie hinreichend schöne Eigenschaften haben, sodass die Annahme berechtigt ist, „dass die Existenz und Eindeutigkeit des Inhalts der betrachteten Flächen unproblematisch und gesichert ist“ (Danckwerts & Vogel 2006: 103-104).

Die Eigenschaften der zu diesem Zeitpunkt bereits in Beispielen aufgetretenen Integralfunktionen stützen und motivieren dann geradezu die Aussage des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 104-105, Kirsch 1976: 97, Kirsch 1996: 59), bei dessen Behandlung bei diesem Vorgehen auch die Bedeutung der Stetigkeit als Voraussetzung klar zum Vorschein kommt und thematisiert werden kann (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 106). Der zweite Teil des Hauptsatzes kann dann ebenfalls gut erschlossen werden (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 107, Blum & Törner 1983: 173), wobei dieser speziell bei einem Fokus auf die Rekonstruktionsgrundvorstellung ohnehin gut erreichbar ist (vgl. Blum & Kirsch 1996: 64-65).

Den Abschluss der Theorieentwicklung bildet bei diesem Zugang eine analytische Präzisierung (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 117-124), die direkt an das bisherige Vorgehen anknüpft und bei der man stufenweise beliebig exakt werden kann (vgl. Kirsch 1976: 95-97). Die zentrale Lücke, die in jedem Fall noch geschlossen werden muss, ist dabei

⁹¹siehe z.B. Bender (1990), Blum & Kirsch (1979: 21), Danckwerts & Vogel (2006: 96-110), Kirsch (1976), Tietze et al. (1997: 280-282)

eine eigenständige, von Flächeninhalten losgelöste Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert geeigneter Produktsummen. Auch dies kann man anhand geeigneter Beispiele wie der physikalischen Arbeit oder dem Volumen eines Rotationskörpers motivieren (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 119-122) und auf gewohnte Weise auch durchaus anschaulich rechtfertigen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 123). Spätestens im Rahmen dieser Definition kann man dann auch die übliche Schreibweise für Integrale einführen, deren Symbolik vor diesem Hintergrund nun sinnvoll verstanden werden kann (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 123).

Bei diesem Zugang kommt zunächst vor allem der Produktsummenaspekt zum Tragen (vgl. Greefrath et al. 2016: 262) und es wird dadurch auch bereits früh der Grundstein für die Kumulationsgrundvorstellung gelegt (vgl. Tietze et al. 1997: 280). Darüber hinaus eröffnet dieses Vorgehen klarerweise von Anfang an Möglichkeiten zur Entwicklung der Rekonstruktionsgrundvorstellung (Danckwerts & Vogel 2006: 98), die für das inhaltliche Verständnis des Integralbegriffs als zentral gesehen wird.⁹² Außerdem hat man bereits beim ersten beschriebenen Beispiel durch das Aufstellen einer Funktion V , die jedem Zeitpunkt t die entsprechende Wassermenge zuordnet, auch von Anfang an die Möglichkeit, ein Fundament für den Begriff der Integralfunktion zu schaffen, wodurch insbesondere der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung früh verfügbar gemacht (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 96) und gleichzeitig der Stammfunktionsaspekt gut erschlossen werden kann (vgl. Tietze et al. 1997: 281). Je nach Wahl der Beispiele kommt auch der Maßaspekt zumindest im erweiterten Sinne zum Tragen⁹³, wobei dieser insbesondere nach einer analytischen Präzisierung in vollem Umfang erschlossen werden kann (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 119-123). Auch wenn orientierte Flächeninhalte bei diesem Zugang von Anfang an eine Rolle spielen, so spielt dabei „die Fläche selbst nur die Rolle eines Repräsentationsmediums, das in diversen Anwendungen geeignet zu interpretieren ist“ (Blum & Törner 1983: 172). Die Flächeninhaltsgrundvorstellung ist bei diesem Zugang zunächst also eher untergeordnet (vgl. Greefrath et al. 2016: 264), wobei sie bei diversen Plausibilisierungen und spätestens bei einer analytischen Präzisierung sehr wohl eine wichtige Rolle spielt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 117-119). Daher kann man durchaus behaupten, dass bei diesem Zugang alle drei Aspekte und die zentrale Grundvorstellung erfolgreich abgedeckt werden, wobei dabei insbesondere der durchaus zentrale Produktsummenaspekt⁹⁴ und die als besonders wichtig erachtete Rekonstruktionsgrundvorstellung⁹⁵ von Anfang an im Mittelpunkt stehen.

⁹²siehe Abschnitt 4.1.5

⁹³siehe Abschnitt 4.1.3

⁹⁴siehe Abschnitt 4.1.1

⁹⁵siehe Abschnitt 4.1.5

4.3 Beiträge zu den Winter'schen Grunderfahrungen

Zum Abschluss dieses Kapitels wird nun noch diskutiert, inwiefern die drei behandelten Zugänge zur Integralrechnung zu den drei Winter'schen Grunderfahrungen beitragen. Wie in Abschnitt 3.1 bereits verdeutlicht, spielen diese für den Mathematikunterricht in der AHS eine grundlegende Rolle, da sie gewissermaßen die Antwort auf die Frage darstellen, inwiefern das Fach Mathematik zur Allgemeinbildung beitragen kann und daher überhaupt legitimiert ist (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 6-7, Winter 1995: 37).

Der Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen stellt in erster Linie G2 in den Vordergrund, aber auch G1 und G3 werden bei so einem Zugang grundsätzlich ermöglicht. Nach grundlegenden Überlegungen zur motivierenden Problemstellung, die durchaus zu G3 beitragen können (vgl. Winter 1995: 42), folgt dieser Zugang in weiten Teilen gewissermaßen dem *klassischen* Theorieaufbau, der in erster Linie eine analytische Definition des Integralbegriffs zum Ziel hat und einen Fokus auf Anwendungsbezüge zunächst eher vernachlässigt.⁹⁶ Insofern kann man hier argumentieren, dass G1 bei diesem Zugang insbesondere im Verhältnis zu G2 nur in geringem Ausmaß ermöglicht wird (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 6-11, Winter 1995: 38-39). Wie bereits erwähnt, wird G3 zwar insbesondere am Anfang grundsätzlich ermöglicht, es bleibt dann aber eine Frage der Umsetzung, inwieweit Heuristik und Problemlösefähigkeiten bei diesem Zugang nach dem Einstieg eine weitere Rolle spielen.

Beim Zugang über die Umkehrung der Differentiation verhält es sich in Bezug auf die Winter'schen Grunderfahrungen eigentlich sehr ähnlich zum Zugang über Flächeninhalte. Wieder können grundsätzlich alle Grunderfahrungen ermöglicht werden und wieder steht zunächst G2 im Vordergrund, obwohl dabei nun ein anderer Aspekt dieser Grunderfahrung zum Tragen kommt, denn hier liegt der Fokus auf dem Entwickeln eines Kalküls (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 11). Der Prozess der Begriffsentwicklung, der ebenfalls zu G2 zu zählen ist (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 11) und beim Zugang über Flächeninhalte an dieser Stelle gewissermaßen stattdessen im Vordergrund steht, ist jedoch beim Zugang über die Umkehrung der Differentiation durchaus problembehaftet und trägt deshalb wenig zu G2 bei oder ist möglicherweise in diesem Sinne sogar als kontraproduktiv einzustufen.⁹⁷ Inwieweit G1 bei diesem Zugang ermöglicht wird, hängt selbstverständlich stark von der Auswahl der Beispiele ab, wobei hierbei durch den möglichen Rückgriff auf Ergebnisse und Anwendungen der Differentialrechnung sicherlich viel möglich ist (vgl. Blum & Törner 1983: 173). Ob G3 über die anfängliche Problemstellung hinaus eine Rolle spielt, hängt auch hier zweifelsohne stark von der Umsetzung im Unterricht ab. Man ist allerdings durchaus versucht, hinter der Vorge-

⁹⁶siehe Abschnitt 4.2.1

⁹⁷siehe Abschnitt 4.2.2

hensweise, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zur Definition zu erklären, die Intention zu verorten, heuristische Herangehensweisen sogar zu verkürzen, da man dadurch fast von Anfang an bereits auf eine Formel zurückgreifen kann.

Der Zugang über die Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten, wie er bei Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel beschrieben wird, soll in gewisser Hinsicht nach Konstruktion alle drei Grunderfahrungen gut ermöglichen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 125). Tatsächlich besteht von Anfang sehr viel Anwendungsbezug⁹⁸, man durchläuft durch schrittweise Abstraktion einen beliebig präzisierbaren, „intellektuell ehrlichen“ (Kirsch 1976: 87) Prozess der Begriffsentwicklung (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 110) und durch die Tatsache, dass man die wichtigsten Erkenntnisse bei diesem Zugang bereits durch äußerst einfache Beispiele entdecken kann (vgl. Kirsch 1976: 91), hat man dabei auch stets viel Raum für Eigentätigkeit und Heuristik (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 126). Damit sind alle drei Grunderfahrungen abgedeckt und darüber hinaus wird dadurch deutlich, „wie sehr die drei zentralen mathematikdidaktischen Aspekte *Problemlösen*, *Begriffsbilden* und *Anwenden* zusammengehören und ein Netz für den verständigen Umgang mit Mathematik bilden“ (Danckwerts & Vogel 2006: 126). Das bedeutet, dass in dieser Kombination der drei Grunderfahrungen darüber hinaus auch noch die Erfahrung gemacht werden kann, wie sehr die verschiedenen Facetten der Mathematik, die durch G1 bis G3 vertreten werden, miteinander zusammenhängen.

⁹⁸siehe Abschnitt 4.2.3

5 Vergleich gängiger Schulbücher für die AHS

„Die Integralrechnung ist als Unterrichtsgegenstand nur dadurch legitimiert, dass das *inhaltliche Verständnis des Integralbegriffs* im Mittelpunkt steht.“

(Danckwerts & Vogel 2006: 125)

Wie im vorigen Kapitel bereits diskutiert wurde, ist der Integralbegriff äußerst facettenreich und es ist daher von großer Bedeutung, dass Zugänge zur Integralrechnung diesem Facettenreichtum gerecht werden und das inhaltliche Verständnis dieses bedeutsamen mathematischen Begriffs in den Vordergrund rücken (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 125, Greefrath et al. 2016: 262). In diesem Kapitel werden nun die vier Schulbücher, die zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit für die österreichische AHS-Oberstufe zur Verfügung standen, anhand der in den bisherigen Kapiteln erarbeiteten fachdidaktischen und fachlichen Kriterien analysiert und dahingehend miteinander verglichen. Zunächst werden die *Zugänge zur Integralrechnung*, die in den einzelnen Schulbüchern gewählt wurden, detailliert beschrieben und den in Kapitel 4 vorgestellten Zugängen entsprechend zugeordnet. Im Anschluss daran werden die vier Schulbücher systematisch in Bezug auf das Erschließen aller *Aspekte*, den Fokus auf zentrale *Grundvorstellungen*, den Umgang mit typischen *Spannungsfeldern*, *inhaltliche Vernetzung* und der Ermöglichung der *Winter'schen Grunderfahrungen* analysiert und miteinander verglichen. Zum Abschluss des Kapitels folgen Ausführungen zur *fachlichen Korrektheit*, bei denen ein besonderer Fokus auf die Verwendung der Wörter *Integrieren* und *Integrierbar* sowie dem Umgang mit dem *unbestimmten Integral* in den analysierten Schulbüchern gelegt wird.

5.1 Gewählte Zugänge und deren Umsetzung

Bei den Schulbüchern, die im Rahmen dieser Arbeit analysiert werden, handelt es sich um *Mathematik verstehen 8*, *Lösungswege Mathematik 8*, *Thema Mathematik 8* und *Dimensionen Mathematik 8*. Insbesondere um gewisse inhaltliche Elemente der einzelnen Schulbücher besser zu verstehen, spielen nicht nur die bereits erwähnten fachdidaktischen und fachlichen Kriterien eine Rolle, sondern auch die Vorgaben des österreichischen Lehrplans für die AHS-Oberstufe. Um die regelmäßigen Bezüge auf den Lehrplan im Laufe der Analyse besser nachvollziehen zu können, wird nun an dieser Stelle der relevante Auszug des Lehrplans noch in voller Länge zitiert.

Grundlagen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen“ allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_i f(x_i) \Delta x$$

- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerung von Formeln mit Produkten (z.B. für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können
- Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können

Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)
- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können
- Das unbestimmte Integral kennen

(RIS 2021)

5.1.1 Beschreibung der gewählten Zugänge

Bevor in weiterer Folge die Zugänge zur Integralrechnung, die in den vier verschiedenen Schulbüchern gewählt und umgesetzt wurden, anhand fachdidaktischer und fachlicher Kriterien miteinander verglichen werden, wird hier zunächst jeder dieser Zugänge kurz einzeln vorgestellt und beschrieben sowie den in Kapitel 4 vorgestellten Zugängen zur Integralrechnung entsprechend zugeordnet.

In *Mathematik verstehen 8* wird das Thema Integralrechnung im Rahmen der ersten drei Kapitel behandelt, wobei dieses dadurch grob in *Grundbegriffe*, *Anwendungen* und *Vertiefung* aufgeteilt wird. Begonnen wird mit einer fachlich sehr gründlichen Einführung des Konzepts der Stammfunktion, wobei dabei vorerst noch auf den Begriff

des unbestimmten Integrals verzichtet wird und ausschließlich Begriffe und Konzepte aus der Differentialrechnung verwendet werden. Der Fokus liegt dabei augenscheinlich weder auf Anwendungsbezug noch auf Anschaulichkeit, da abgesehen von einem Musterbeispiel zum Einstieg und einer Aufgabe am Ende des Abschnitts nicht einmal versucht wird, in irgendeiner Form Anwendungsbezüge herzustellen und auch kaum mit graphischen Darstellungen jeglicher Art gearbeitet wird. Viel mehr steht die Tätigkeit des Ermitteln von Stammfunktionen durch kalkülhaftes Umkehren von Ableitungsregeln im Vordergrund, was sich insbesondere in der Auswahl der Aufgaben widerspiegelt. Direkt im Anschluss an diesen Abschnitt über Stammfunktionen wird das *klassische* Flächeninhaltsproblem⁹⁹ aufgegriffen und anhand eines Musterbeispiels das Berechnen von Unter- und Obersummen bei Zerlegung des betrachteten Intervalls in gleich breite Teilintervalle exemplarisch vorgeführt sowie für die in diesem Musterbeispiel vorkommende streng monoton fallende Funktion auch explizit gezeigt, dass man dem gesuchten Flächeninhalt auf diese Weise beliebig nahe kommen kann. Auf dieses Musterbeispiel folgen dann Definitionen der Begriffe Zerlegung, Untersumme und Obersumme, wobei zwar von Anfang an Stetigkeit verlangt, ansonsten aber sogar die Einschränkung auf gleich breite Teilintervalle weggelassen wird. Außerdem wird an dieser Stelle und auch bei der Definition des bestimmten Integrals bewusst auf den „Rückgriff auf die anschauliche Vorstellung des Flächeninhalts [verzichtet]“ (Malle et al. 2020: 12), um alle Begriffe gleich möglichst allgemein einzuführen.

Definition

Unter einer **Zerlegung Z des Intervalls $[a; b]$** verstehen wir ein $(n + 1)$ -Tupel $Z = (x_0 | x_1 | x_2 | \dots | x_n)$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Definition

Es sei f eine im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion und $Z = (x_0 | x_1 | x_2 | \dots | x_n)$ eine Zerlegung von $[a; b]$. Die Längen der Teilintervalle $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ seien $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Ferner seien $m_1, m_2, \dots, m_n$ Minimumstellen und $M_1, M_2, \dots, M_n$ Maximumstellen von f in den jeweiligen Teilintervallen. Man setzt:

Untersumme von f in $[a; b]$ bei der Zerlegung Z :

$$U_f(Z) = f(m_1) \cdot \Delta x_1 + f(m_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(m_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(m_i) \cdot \Delta x_i$$

Obersumme von f in $[a; b]$ bei der Zerlegung Z :

$$O_f(Z) = f(M_1) \cdot \Delta x_1 + f(M_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(M_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta x_i$$

Abb. 18: Definitionen der Begriffe Zerlegung, Untersumme und Obersumme in *Mathematik verstehen 8* (Malle et al. 2020: 12)

Nach einer kurzen Erinnerung an die Überlegungen zum Flächeninhaltsproblem wird anschließend auf fachlich sehr vorsichtige¹⁰⁰ Art und Weise eine analytische Definiti-

⁹⁹siehe Abschnitt 4.2.1

¹⁰⁰Es wird tatsächlich auf die erste der in Abschnitt 2.1.2 gegebenen Definitionen des bestimmten

on des bestimmten Integrals einer auf dem Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f als die „eindeutig bestimmte reelle Zahl I , die ‚zwischen‘ allen Untersummen U und allen Obersummen O von f in $[a; b]$ liegt“ (Malle et al. 2020: 13) angesteuert und auch gleich die übliche Schreibweise sowie die Bezeichnungen der einzelnen Bestandteile davon eingeführt. Im Anschluss an diese Reihe von absichtlich durchaus abstrakten Definitionen wird kurz das Integral als Lösung des Flächeninhaltsproblems diskutiert und die Deutung des bestimmten Integrals „als Verallgemeinerung eines Produkts“ (Malle et al. 2020: 15) besprochen, wobei dabei neben Flächeninhalten keine weiteren Beispiele dazu genannt werden. Zusätzlich zu Unter- und Obersummen wird dann noch der Begriff Zwischensumme eingeführt und dabei sehr sauber und durchaus auch anschaulich vorgegangen. Die Definition von Zwischensummen, wobei Unter- und Obersummen als Spezialfälle davon behandelt werden, dient dann dazu, zu erläutern, dass das bestimmte Integral „näherungsweise gleich einer **Summe von sehr vielen sehr kleinen Produkten** der Form $f(x) \cdot \Delta x$ [ist]“ (Malle et al. 2020: 16). Um den Nutzen dieser der Zwischensummen zu illustrieren, wird dann in einem kurzen Abschnitt die „Flächeninhaltsberechnung nach Leibniz“ (Malle et al. 2020: 17) behandelt, in dessen Rahmen auch die Herkunft der üblichen Schreibweise besprochen wird. Auffallend ist, dass im Rahmen all dieser Überlegungen der Begriff Grenzwert genau so wie im Lehrplan anscheinend absichtlich vermieden und damit das bestimmte Integral nie explizit als Grenzwert geeigneter Produktsummen aufgefasst wird. Stattdessen wird bereits unmittelbar nach der Einführung all der erwähnten grundlegenden Begriffe der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung¹⁰¹ behandelt, sodass Integrale auch ohne Überlegungen zu Grenzwerten schon zu einem frühen Zeitpunkt berechnet werden können. Bei der Begründung des Satzes (Abb. 19) gehen die Autor*innen sehr ähnlich vor wie Arnold Kirsch und Werner Blum (vgl. Blum & Kirsch 1996: 64), wobei jedoch lediglich die formalen Elemente übereinstimmen, da in *Mathematik verstehen* 8 auch an dieser Stelle auf den empfohlenen Anwendungsbezug verzichtet wird. Mithilfe dieser Formel können dann zahlreiche bestimmte Integrale berechnet und einige grundlegende Sätze über bestimmte Integrale bewiesen werden, wobei hier wieder sehr strikt auf jeglichen Anwendungsbezug und zum Großteil auch auf graphische Veranschaulichungen verzichtet wird.

Im zweiten Kapitel werden Anwendungen der Integralrechnung behandelt, wobei dabei zunächst besonders dem Berechnen von Flächeninhalten viel Raum gegeben wird. Im Zusammenhang mit Flächen, die von Graphen stetiger Funktionen mit negativen Funktionswerten berandet werden, wird mit Spiegelungen an der x -Achse argumentiert, dass dann den entsprechenden Integralen jeweils ein negatives Vorzeichen vorzustellen sei.

Integrals (jedoch nur für stetige Funktionen) abgezielt, wobei bei den dafür notwendigen Verallgemeinerungen zwar darauf verwiesen wird, dass man diese beweisen kann, ansonsten aber keine weiteren Kommentare gemacht werden.

¹⁰¹Dieser wird im Schulbuch an dieser Stelle natürlich nicht so bezeichnet.

BEGRÜNDUNG:

Wir betrachten eine Zerlegung $Z = (x_0 \mid x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid x_n)$ des Intervalls $[a; b]$ und setzen $\Delta F_i = F(x_{i+1}) - F(x_i)$. In der Abbildung ist dies für eine streng monoton steigende Stammfunktion F veranschaulicht, die folgenden Überlegungen gelten aber auch, wenn F nicht monoton ist. Wir gehen in mehreren Schritten vor:

1. **SCHRITT:** Die Steigung von F in einem Teilungspunkt x_i beträgt: $F'(x_i) = \frac{\Delta F_i}{\Delta x_i}$
Daraus folgt:
 $\Delta F_i \approx F'(x_i) \cdot \Delta x_i = f(x_i) \cdot \Delta x_i$
2. **SCHRITT:** Es gilt:
 $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n \Delta F_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$
3. **SCHRITT:** Diese Näherung wird im Allgemeinen umso genauer, je kleiner die Längen Δx_i sind. Wenn die „Feinheit“ der Zerlegung (dh. die Länge des größten Teilintervalls) gegen 0 strebt, ergibt sich:
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

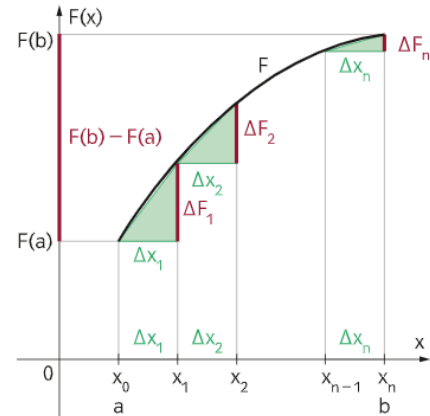


Abb. 19: Begründung für das Berechnen bestimmter Integralen mit Stammfunktionen in *Mathematik verstehen 8* (Malle et al. 2020: 18)

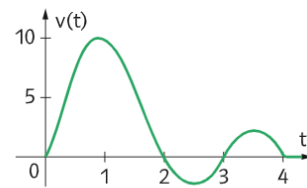
Auf das Verwenden von Beträgen wird verzichtet. Weitere Anwendungen, die behandelt werden, sind das Berechnen von Weglängen, Volumina bei bekannter Querschnittsfläche sowie Arbeit als Integral der Kraft nach dem Weg und als Integral der Leistung nach der Zeit. Abschließend folgen noch ein auffallend kurzer Abschnitt, der sich allgemein mit dem Thema „Integrale von Änderungsraten“ (Malle et al. 2020: 45) beschäftigt, und drei kurze Aufgaben zu wirtschaftlichen Anwendungen. Im Rahmen dieses Kapitels wird bei Begründungen zwar immer wieder auf die analytische Definition des bestimmten Integrals zurückgegriffen, es kommen aber sehr wohl auch graphische Veranschaulichungen zum Tragen und auch wenn der Begriff *orientierter Flächeninhalt* oder Vergleichbares nicht vorkommt, so wird in Aufgaben mit Anwendungsbezug zum Teil sehr wohl darauf eingegangen.

Zum Abschluss des Themas Integralrechnung wird im dritten Kapitel noch eine weitere fachliche Vertiefung vorgenommen, wobei zunächst der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung grundsätzlich fachlich sehr ordentlich formuliert, jedoch leider zum Teil fehlerhaft begründet wird¹⁰². Im Anschluss daran wird noch das unbestimmte Integral¹⁰³ sowie die Substitutionsregel und die partielle Integration als weitere Methoden zum Berechnen bestimmter Integrale eingeführt und jeweils Aufgaben dazu gestellt.

¹⁰²Der erste Teil wird aus dem zweiten gefolgert und dabei behauptet, dass daraus die Existenz von Stammfunktionen stetiger Funktionen folgt.

¹⁰³Darauf wird in Abschnitt 5.4.2 noch näher eingegangen.

Ein Körper wird auf einer geraden Bahn hin und her bewegt.
Nebenstehend ist seine Geschwindigkeit $v(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt (t in min, $v(t)$ in m/min).
Kreuze die beiden zutreffenden Aussage(n) an!



Zum Zeitpunkt 2 ist der Körper weiter vom Ausgangspunkt entfernt als zum Zeitpunkt 3.	☐
$\int_1^2 v(t) dt$ ist die Länge des in den ersten zwei Minuten zurückgelegten Weges.	☐
Der Körper bewegt sich stets in die gleiche Richtung (dh. fährt nie zurück).	☐
In der ersten Minute legt der Körper einen kürzeren Weg zurück als in der letzten Minute.	☐
Nach 4 Minuten ist der Körper gleich weit vom Ausgangspunkt entfernt wie nach 2 Minuten.	☐

Abb. 20: Aufgabe 2.44 in *Mathematik verstehen 8* (Malle et al. 2020: 18)

Der Zugang, den die Autor*innen von *Mathematik verstehen 8* gewählt haben, enthält also sowohl Elemente des Zugangs über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen als auch Elemente des Zugangs über die Umkehrung der Differentiation. Obwohl zwar mit dem Finden von Stammfunktionen begonnen wird, besteht zu diesem Zeitpunkt noch kein Anspruch darauf, dies mit der Integralrechnung in Verbindung zu bringen, da weder das unbestimmte Integral eingeführt wird, noch der Fokus auf das Konstruieren beziehungsweise Rekonstruieren gelegt wird. Vielmehr steht das kalkülhafte Anwenden von Sätzen und Regeln im Mittelpunkt. Es wird zwar angedeutet, dass Stammfunktionen in weiterer Folge eine Rolle spielen werden, es wird dabei aber ebenfalls noch kein expliziter Bezug auf die Integralrechnung genommen. Daher könnte man durchaus argumentieren, dass der Einstieg in das Thema Integralrechnung hier über das *klassische* Flächeninhaltsproblem geschieht und dabei jedoch genau das passiert, wovor Arnold Kirsch gewarnt hat. Es wird nämlich sehr früh eine möglichst allgemeine, analytische Definition des bestimmten Integrals für stetige Funktionen angestrebt, was an dieser Stelle zu einem „[Missverhältnis] von begrifflichem und terminologischem Anspruch gegenüber dem realisierten Niveau der Diskussion“ (Kirsch 1976: 88) führt. Dieses Missverhältnis lässt sich insbesondere an der Wahl der Aufgaben in diesem Abschnitt festmachen. Besonders bezeichnend ist dabei die erste Aufgabe (Abb. 21), die im Anschluss an die Definition des bestimmten Integrals gestellt wird. Dabei geht es nämlich lediglich darum, die einzelnen Bestandteile der Schreibweise richtig zu benennen beziehungsweise auf Details in der Schreibweise zu achten. Dies unterstreicht das erwähnte Missverhältnis, da man den Schüler*innen hier zwar eine aufwendige und abstrakte Definition zumutet, ihnen aber im Anschluss daran zunächst lediglich eine Diskussion über die Konventionen der Schreibweise zutraut.

Darüber hinaus wird auf die bewusst große Allgemeinheit der gegebenen Definition in

Gegeben ist das Integral $\int_0^1 \frac{u-1}{2} du$.

- a) Wie lautet der Integrand?
- b) Wie lautet die Integrationsvariable?
- c) Wie lautet die untere, wie die obere Grenze des Integrals?
- d) Welche der folgenden Integrale stellen die gleiche Zahl dar wie das gegebene Integral:

(1) $\int_0^1 \frac{u-1}{2} dv$ (2) $\int_0^1 \frac{y-1}{2} dy$ (3) $\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot (x-1) dz$ (4) $\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot (x-1) dx$ (5) $\int_1^0 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) dx$

Abb. 21: Aufgabe 1.17 in *Mathematik verstehen 8* (Malle et al. 2020: 18) ist die erste Aufgabe im Anschluss an die Definition des bestimmten Integrals

den ohnehin wenigen Aufgaben in diesem Abschnitt wenig bis gar nicht eingegangen. In den meisten Fällen schränkt man sich dabei ohnehin wieder auf äquidistante Zerlegungen der betrachteten Intervalle und sogar nichtnegative Funktionen ein. Vermutlich aus dem Grund, dass in der Schule dann doch das Berechnen bestimmter Integrale im Vordergrund steht (vgl. Blum & Kirsch 1979: 20) und man mit der hier gegebenen Definition keine naheliegende Möglichkeit hat, in nichttrivialen Fällen über Approximationen hinauszukommen (vgl. Büchter & Henn 2010: 228), wird ebenfalls schon sehr früh der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung behandelt. Dieser wird dadurch zwar nicht zur Definition degradiert, wie es in manchen Fällen beim Zugang über die Umkehrung der Differentiation passiert, aber dadurch, dass davor versucht wird, das bestimmte Integral möglichst allgemein einzuführen und abgesehen von Flächeninhalten noch keine Anwendungsbezüge hergestellt werden, ist bei diesem Satz und insbesondere bei den darauf folgenden Aufgaben¹⁰⁴ überhaupt nicht klar, „welche inhaltlichen Vorstellungen [die Schüler*innen] mit dem Zahlenwert $F(b) - F(a)$ verbinden [sollen]“ (Blum & Törner 1983: 164). Der gesamte weitere Theorieaufbau erfolgt dann ebenfalls mithilfe dieses Satzes und ohne Rückgriff auf die analytische Definition. Auf diese wird jedoch zumindest im Zusammenhang mit Anwendungen der Integralrechnung immer wieder kurz Bezug genommen, um verschiedene Interpretationen des bestimmten Integrals in Anwendungskontexten zu rechtfertigen. Insgesamt ergibt sich also eine Mischung aus dem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen und dem Zugang über die Umkehrung der Differentiation, wobei nicht nur Stärken sondern auch einige typische Schwächen beider dieser Zugänge übernommen werden.

Im Schulbuch *Lösungswege Mathematik 8* wird das Thema Integralrechnung ebenfalls

¹⁰⁴Z.B. kommen bereits im Rahmen der ersten Aufgabe (ohne Kontext und ohne davor schon mögliche Kontexte oder Interpretationen behandelt zu haben) die Integrale

$$\int_1^2 (-1) dx \quad \text{und} \quad \int_{-1}^1 x dx$$

vor (vgl. Malle et al. 2020: 19).

auf die ersten drei Kapitel aufgeteilt, wobei hier die Aufteilung grob in *unbestimmtes Integral*, *bestimmtes Integral inklusive Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* und *Anwendungen* erfolgt. Begonnen wird auch hier mit der Einführung des Konzepts der Stammfunktion, wobei in diesem Rahmen dann auch sehr bald das unbestimmte Integral definiert wird und Regeln für das Finden von Stammfunktionen gleich in dieser Schreibweise formuliert und als Integrationsregeln bezeichnet werden. Um die neue Schreibweise zu erklären, wird als vorläufige Erklärung geschrieben, dass das Integralsymbol „an ein S wie Stammfunktion [erinnert]“ (Freiler et al. 2018: 9) und dass dieses Symbol genauso wie „[der] Ausdruck dx [...] im Kapitel 2 klarer werden“ (Freiler et al. 2018: 9). Außerdem wird der Begriff Integrieren explizit als „Umkehrung zum Differenzieren“ (Freiler et al. 2018: 9) eingeführt. Zum unbestimmten Integral folgen dann einige Aufgaben, wobei hierbei sowohl immer wieder Anwendungsbezug hergestellt als auch viel auf graphische Darstellungen beziehungsweise Zusammenhänge gesetzt wird. Zum Abschluss dieses Kapitels werden dann auch noch die Substitutionsmethode und die partielle Integration für unbestimmte Integrale behandelt.

Auch wenn man es aufgrund der Vorgehensweise im ersten Kapitel vielleicht anders erwarten würde, beginnt das zweite Kapitel mit dem *klassischen* Flächeninhaltsproblem und der Etablierung der Begriffe Unter- und Obersumme.¹⁰⁵ Anhand eines recht aufwendig durchgeführten und mit zahlreichen Graphiken versehenen Musterbeispiels wird das Berechnen von Unter- und Obersummen bei äquidistanten Zerlegungen des betrachteten Intervalls vorgeführt und dabei anschaulich demonstriert, dass damit der gesuchte Flächeninhalt offenbar beliebig gut abgeschätzt werden kann. Als explizite Verallgemeinerung dieser Idee werden dann die Begriffe Untersumme und Obersumme ohne Rückgriff auf Flächeninhalte definiert, wobei von Anfang an sowohl Stetigkeit als auch die Zerlegung in gleich breite Teilintervalle vorausgesetzt werden.

Ober- und Untersummen

Gegeben ist eine auf $[a; b]$ stetige Funktion f . Zerlegt man das Intervall $[a; b]$ in n gleich große Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, und bezeichnet mit $m_1, m_2, \dots, m_n$ die Minimumstellen und mit $M_1, M_2, \dots, M_n$ die Maximumstellen von f in den einzelnen Intervallen, dann nennt man

$$\begin{aligned}
 - U_n &= \Delta x \cdot f(m_1) + \Delta x \cdot f(m_2) + \dots + \Delta x \cdot f(m_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(m_i) \quad \textbf{Untersumme} \text{ von } f \text{ in } [a; b]. \\
 - O_n &= \Delta x \cdot f(M_1) + \Delta x \cdot f(M_2) + \dots + \Delta x \cdot f(M_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(M_i) \quad \textbf{Obersumme} \text{ von } f \text{ in } [a; b].
 \end{aligned}$$

Abb. 22: Definition der Begriffe Untersumme und Obersumme in *Lösungswege Mathematik* 8 (Freiler et al. 2018: 25)

Im Anschluss an diese Definition werden noch ein paar klärende Anmerkungen ge-

¹⁰⁵Dieser Schritt ist vermutlich zu einem großen Teil auf die Vorgaben des Lehrplans zurückzuführen.

macht, die leider nicht alle fachlich korrekt¹⁰⁶ sind, und es werden einige Aufgaben zum Berechnen von Unter- und Obersummen gestellt, wobei dabei auch Aufgaben vorkommen, bei denen man die Differenz von Unter- und Obersummen von Funktionen, die im betrachteten Intervall streng monoton sind, untersucht. Die aus den Aufgaben gewonnenen Erkenntnisse zu Unter- und Obersummen werden dann zusammengetragen und es wird zu einer Definition des bestimmten Integrals einer auf dem Intervall $[a; b]$ stetigen Funktion f als „jene **Zahl**, die **zwischen** allen **Untersummen** U und **Obersummen** O von f in $[a; b]$ liegt“ (Freiler et al. 2018: 27), übergeleitet. Im darauf folgenden Abschnitt wird dann noch der Begriff der Zwischensumme eingeführt und anhand dessen die übliche Schreibweise, wie im ersten Kapitel versprochen, nun tatsächlich erläutert. Außerdem wird explizit festgehalten, dass das bestimmte Integral „der Grenzwert einer Summe von Produkten“ (Freiler et al. 2018: 29) ist.¹⁰⁷ Nachdem das bestimmte Integral nun eingeführt ist, werden als nächstes geeignete Interpretationen davon behandelt, wobei gleich zu Beginn mithilfe des bereits ein Stück weit etablierten Produktsummenaspekts erklärt wird, dass das bestimmte Integral im Falle von Vorzeichenwechseln der betrachteten Funktion ähnlich wie bei Arnold Kirsch und Werner Blum graphisch als „algebraische Summe von (für sich genommenen positiven) Flächeninhalten“ (Blum & Kirsch 1979: 15) aufzufassen ist. Nach einigen Aufgaben, bei denen die Schüler*innen bestimmte Integrale mithilfe dieser Überlegung und elementaren Methoden¹⁰⁸ berechnen sollen, werden auch noch zahlreiche Aufgaben mit Bezug zu Zu- und Abflussprozessen gestellt (Abb. 23), in denen entsprechende bestimmte Integrale zum Teil ebenfalls berechnet und insbesondere geeignet interpretiert werden sollen. Begriffe wie *Flächenbilanz* oder *orientierter Flächeninhalt* kommen allerdings auch hier nicht explizit vor.

Als nächstes wird der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung behandelt, wobei keiner der beiden Teile an dieser Stelle bewiesen wird.¹⁰⁹ Die Aussage des zweiten Teils wird anhand eines Beispiels zum Berechnen der Weglänge bei gegebener Geschwindigkeit-Zeit-Funktion plausibel gemacht, wobei dabei die Weglänge sozusagen einmal über das unbestimmte Integral und einmal über das bestimmte Integral berechnet wird. Der erste Teil wird eigentlich nicht thematisiert, nur vereinfacht dargestellt und das Konzept der Integralfunktion wird im gesamten Schulbuch vollständig vermieden. Im Anschluss werden grundlegende Sätze über bestimmte Integrale mithilfe

¹⁰⁶Es wird behauptet, dass für Unter- und Obersummen bei äquidistanten Zerlegungen und der in der Definition festgelegten Notation im Allgemeinen die Beziehung $U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq U_4 \leq \dots \leq A \leq \dots \leq O_4 \leq O_3 \leq O_2 \leq O_1$ gilt.

¹⁰⁷Korrekt wäre eigentlich eine Formulierung wie *Grenzwert von Produktsummen/Summen von Produkten*, da z.B. (U_n) und (O_n) Folgen von Untersummen bzw. Obersummen (also geeigneten Produktsummen) sind. Ähnlich unpräzise Formulierungen sind aber beispielsweise sogar bei Blum & Törner (1983: 160) zu finden.

¹⁰⁸Die Aufgaben sind so gewählt, dass man die bestimmten Integrale jeweils mithilfe des Funktionsgraphen und Formeln aus der Sekundarstufe I berechnen kann.

¹⁰⁹Ein Beweis beider Teile ist jedoch im Anhang zu finden.

In der Graphik ist die Zuflussgeschwindigkeit Z (in m^3/min) für ein Becken in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) dargestellt.

- a) Interpretiere den Ausdruck $\int_0^{140} Z(t) dt$.
- b) Berechne den Wert $\int_0^{140} Z(t) dt$.
- c) Gib an, ob die folgenden Aussagen in jedem Fall richtig sind, und begründe deine Entscheidung.
- i) Nach einer halben Stunde befindet sich das meiste Wasser im Becken.
 - ii) Nach 90 Minuten ist das Becken leer.
 - iii) Nach 90 Minuten ist die Wassermenge im Becken am größten.
 - iv) Nach 90 Minuten fließt aus dem Becken Wasser ab.
 - v) In der ersten halben Stunde fließt weniger Wasser in das Becken als in der zweiten halben Stunde.
 - vi) Zu Beginn befindet sich kein Wasser im Becken.

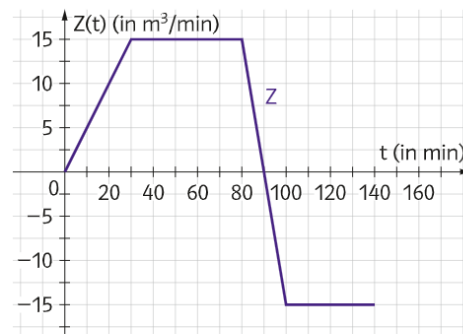


Abb. 23: Aufgabe 75 in *Lösungswege Mathematik 8* (Freiler et al. 2018: 32)

fe des zweiten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung behandelt, wobei darauf verwiesen wird, dass hier im Grunde die bereits bekannten Sätze über unbestimmte Integrale übertragbar sind. Außerdem werden einige Aufgaben zur Berechnung bestimmter Integrale gestellt, bei denen zum Teil auch Anwendungsbezug hergestellt wird. Nach einem kurzen Einschub über diskrete Modelle und die Annäherung von Summen durch bestimmte Integrale, wird der Rest des zweiten Kapitels dem Berechnen von Flächeninhalten gewidmet, wobei hier im Falle negativer Funktionswerte einfach mit Beträgen gearbeitet wird. Zum Abschluss werden in einem kurzen Abschnitt auch noch uneigentliche Integrale behandelt.

Im dritten Kapitel setzen sich die Autor*innen explizit das Ziel, das zugrundeliegende „Muster“ der Integralrechnung“ (Freiler et al. 2018: 52), womit das Bilden geeigneter Produktsummen gemeint ist, in zahlreichen Kontexten anzuwenden und damit insbesondere bekannte Zusammenhänge, die in einfachen Fällen durch Produkte ausgedrückt werden, zu verallgemeinern. Behandelt werden dabei das Berechnen von Volumina bei bekannter Querschnittsfläche, zahlreiche Aufgabenstellungen im Zusammenhang mit Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung, Arbeit als Integral der Kraft nach dem Weg und als Integral der Leistung nach der Zeit sowie weitere naturwissenschaftliche Anwendungen, in denen das „Integral einer momentanen Änderungsrate“ (Freiler et al. 2018: 71) betrachtet wird. Den Abschluss bilden dann auch hier noch verschiedene Anwendungen in der Wirtschaft. In diesem Kapitel wird viel mit geeigneten gra-

phischen Veranschaulichungen gearbeitet und obwohl zwar Begriffe wie *orientierter Flächeninhalt* nicht explizit verwendet werden, wird viel damit argumentiert und zahlreiche entsprechende graphische Darstellungen werden auf passende Weise interpretiert.

Ähnlich wie bei *Mathematik verstehen 8* enthält der Zugang zur Integralrechnung, den die Autor*innen von *Lösungswege Mathematik 8* gewählt haben, sowohl Elemente des Zugangs über die Umkehrung der Differentiation als auch welche des Zugangs über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen. Anders als bei *Mathematik verstehen 8* wird hier jedoch mit dem unbestimmten Integral begonnen und vieles, was das kalkülhafte Arbeiten mit Integralen allgemein betrifft, bereits in diesem Zusammenhang behandelt. Aus diesem Grund könnte man argumentieren, dass bei *Lösungswege Mathematik 8* der Einstieg in das Thema Integralrechnung über das *Umkehrproblem der Differentialrechnung* erfolgt. Dadurch wird aber auch dem Begriff des unbestimmten Integrals auffallend viel Aufmerksamkeit geschenkt, was einerseits aus fachdidaktischer Sicht umstritten (vgl. Bender 1990: 118-119, Blum & Törner 1983: 173) und andererseits in der Umsetzung immer wieder Probleme fachlicher Natur erzeugt, sodass beispielsweise aus den Ausführungen im ersten Kapitel streng genommen nicht einmal klar hervorgeht, wie das unbestimmte Integral überhaupt zu verstehen ist. Durch Musterbeispiele und Anwendungsbezüge ist zwar immer wieder klar, was in bestimmten Zusammenhängen gemeint ist, aber der Versuch eines Aufbaus einer nachvollziehbaren Theorie zum unbestimmten Integral muss in weiten Teilen als gescheitert beurteilt werden.¹¹⁰ Für die Einführung des bestimmten Integrals wird im zweiten Kapitel jedoch ein separater, wesentlich erfolgreicherer Anlauf über das *klassische* Flächeninhaltsproblem genommen. Dabei wird abgesehen von gelegentlichen fachlichen Ungenauigkeiten das bestimmte Integral einer im betrachteten Intervall stetigen Funktion in mehreren Schritten, auf durchaus anschauliche Weise und an einigen Stellen auch mit passendem Anwendungsbezug (vgl. Blum & Törner 1983: 160, Danckwerts & Vogel 2006: 96-103) als Grenzwert geeigneter Produktsummen etabliert. Darüber hinaus wird den Schüler*innen in diesem Abschnitt wieder viel Eigentätigkeit ermöglicht und insbesondere anhand der ausgewählten Aufgaben auch ein durchaus verständnisvoller Umgang im Zusammenhang mit Funktionen, die im betrachteten Intervall das Vorzeichen wechseln, angestrebt (vgl. Blum & Kirsch 1979: 15). Die Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung entspricht dann wiederum eher dem Vorgehen im Rahmen eines gewissermaßen abgedeckelten¹¹¹ Zugangs über die Umkehrung der Differentiation, wobei eben durch die Etablierung des bestimmten Integrals als Grenzwert geeigneter Produktsummen eine geeignete Interpretation „[des Zahlenwerts] $F(b) - F(a)$ “ (Blum & Törner 1983: 164) zumindest in gewissen, an dieser Stelle bereits behandelten Kontexten kein Problem darstellt. Auf diese Weise wird der zweite Teil des Hauptsatzes der

¹¹⁰siehe auch Abschnitt 5.4.2

¹¹¹siehe Abschnitt 4.2.2

Differential- und Integral hier plausibel gemacht und lediglich mit einem Verweis auf einen allgemeineren Beweis im Anhang dann auch gleich in allgemeiner Form formuliert.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei f eine auf $[a; b]$ stetige Funktion. Dann gilt:

1) Es existiert eine Stammfunktion F von f .

$$2) \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Abb. 24: Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung in *Lösungswege Mathematik 8* (Freiler et al. 2018: 25)

Der erste Teil wird jedoch nur in stark vereinfachter Form angeschrieben und auch nicht näher behandelt. Der Beweis des ersten Teils, der im Anhang zu finden ist, entspricht jedoch im Übrigen genau dem, der im Rahmen des bereits erwähnten abgeforderten Zugangs über die Umkehrung der Differentiation empfohlen wird (vgl. Blum & Törner 1983: 173). Der Großteil des weiteren Theorieaufbaus erfolgt dann auch hier mithilfe des zweiten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Es gibt dabei jedoch eine nennenswerten Ausnahme, da bereits in diesem Kapitel behandelt wird, dass es bei manchen diskreten Modellen sinnvoll sein kann, Summen durch Integrale anzunähern. Auch im Zusammenhang mit Anwendungen der Integralrechnung wird wieder sehr stark auf orientierte Flächeninhalte und insbesondere auf Produktsummen gesetzt. Tatsächlich handelt es sich also auch beim Zugang zur Integralrechnung in *Lösungswege Mathematik 8* um eine Mischung aus dem Zugang über die Umkehrung der Differentiation und dem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen, wobei die Zusammensetzung dieser Mischung zumindest an manchen Stellen stark von der in *Mathematik verstehen 8* abweicht. Die typischen Schwächen des Zugangs über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen sind beispielsweise in *Lösungswege Mathematik 8* deutlich weniger stark ausgeprägt als in *Mathematik verstehen 8*, da bereits früher und mithilfe anwendungsbezogener Beispiele und Aufgaben dem Produktsummenaspekt in größerer Allgemeinheit mehr Raum gegeben wird (vgl. Blum & Kirsch 1979: 16). Umgekehrt sind die Probleme, die der Begriff des unbestimmten Integrals mit sich bringen kann, in *Lösungswege Mathematik 8* sehr stark ausgeprägt und in *Mathematik verstehen 8* zumindest nur in deutlich reduzierter Form zu finden, da der Begriff hier generell kaum zum Tragen kommt.

Das Schulbuch *Thema Mathematik 8* teilt das Thema Integralrechnung auf die ersten beiden Kapitel auf, wobei sich das erste Kapitel mit den *Grundlagen* und das zweite Kapitel mit üblichen *Anwendungen* der Integralrechnung beschäftigt. Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Schulbüchern wird hier nicht mit der Einführung des Konzepts der Stammfunktion begonnen, sondern direkt das *klassische* Flächeninhaltsproblem aufgegriffen. Nach einer kurzen Motivation über die Annäherung des Flächeninhalts

eines Kreises mithilfe von Polygonen werden gleich am Anfang die Begriffe Unter- und Obersumme sowie die beiden Begriffe Links- und Rechtssumme für äquidistante Zerlegungen und eine Funktion, die im betrachteten abgeschlossenen Intervall stetig und nichtnegativ ist, eingeführt.

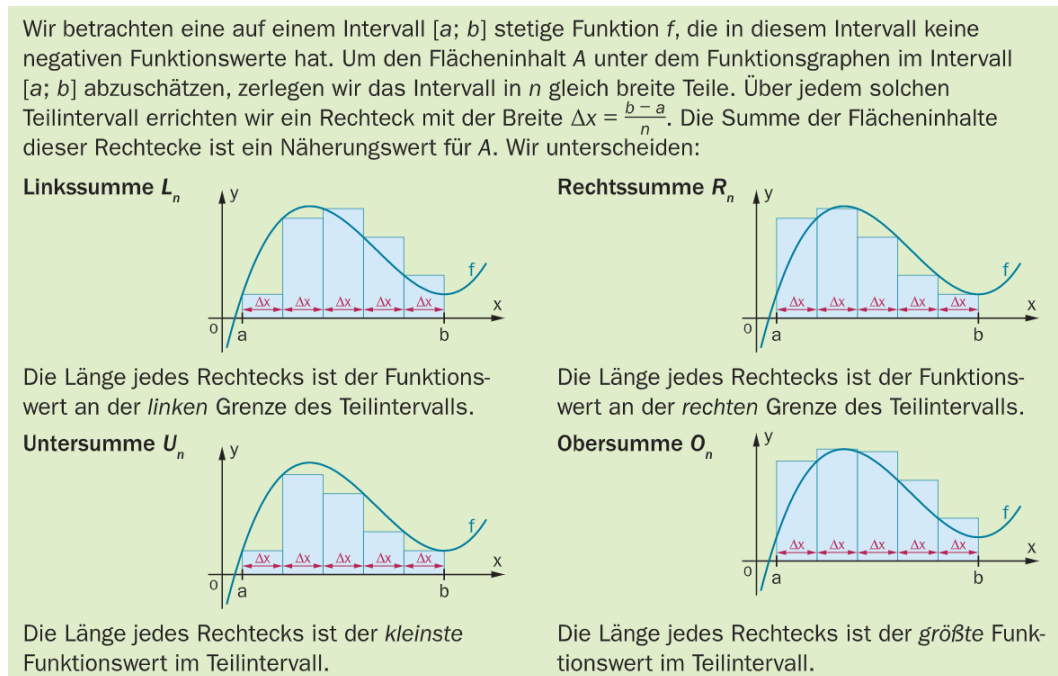


Abb. 25: Definition der Begriffe Unter- und Obersumme sowie Links- und Rechtssumme in *Thema Mathematik 8* (Dorfmayr et al. 2020: 8)

Das erklärte Ziel ist, den Flächeninhalt abzuschätzen, wobei zwar festgehalten wird, dass Unter- und Obersummen entsprechend untere und obere Schranken dafür darstellen, jedoch vermutlich aus praktischen Gründen in den auf die Definitionen folgenden Aufgaben auch viel mit Links- und Rechtssummen gearbeitet wird. Nach einigen Aufgaben zu diesen neuen Begriffen wird anschaulich demonstriert, dass Verfeinerungen der Zerlegung zu immer besseren Abschätzungen des Flächeninhalts führen, woraufhin der Inhalt der vom Funktionsgraphen berandeten Fläche als gemeinsamer Grenzwert der Unter- und Obersummen definiert wird. Insbesondere mithilfe entsprechenden Technologieeinsatzes werden auch dazu einige Aufgaben gestellt und in manchen Fällen Grenzwerte dieser Folgen tatsächlich berechnet. In einem nächsten Schritt wird das bestimmte Integral als der Flächeninhalt unter dem Graphen einer stetigen, nichtnegativen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall eingeführt, wobei aber bereits angedeutet wird, dass dies eigentlich einen Spezialfall darstellt. Als Möglichkeit, bestimmte Integrale zu berechnen, wird zunächst ein Beispiel mit einer linearen Funktion gewählt, bei dem mit der Flächeninhaltsformel für Trapeze vorgegangen wird, und dann erwähnt, dass man in allgemeineren Fällen auf Grenzwerte von Unter- und Obersummen oder den Einsatz von Technologie zurückgreifen kann. Dann wird bewusst

„[ohne] Rückgriff auf die geometrische Anschauung und die Einschränkung $f(x) \geq 0$ [...] das bestimmte Integral als Grenzwert von Produktsummen definiert“ (Dorfmayr et al. 2020: 12). Dabei schränkt man sich zwar nicht auf Unter- und Obersummen ein, man bleibt aber bei äquidistanten Zerlegungen des Intervalls. Auch die übliche Schreibweise wird an dieser Stelle erklärt. Es folgen darauf wieder einige Aufgaben, bei denen die graphische Darstellung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt im Mittelpunkt steht und bei denen auch keine negativen Funktionswerte in den jeweils betrachteten Intervallen auftreten. Danach wird eine „Präzisierung der anschaulichen Integraldefinition“ (Dorfmayr et al. 2020: 14)¹¹² angestrebt, wobei dabei zwar sogar die Begriffe Riemann-Summen und Riemann-Integral fallen, dann aber eigentlich eher anschaulich und ganz im Sinne von Arnold Kirsch und Werner Blum der Umgang mit negativen Funktionswerten erklärt wird (vgl. Blum & Kirsch 1979: 14-15). Auch hier wird zwar der Begriff *orientierter Flächeninhalt* nicht explizit verwendet, das *Bilanzieren von Flächen* wird jedoch in anderen Worten eindeutig beschrieben und auch graphisch klar veranschaulicht.

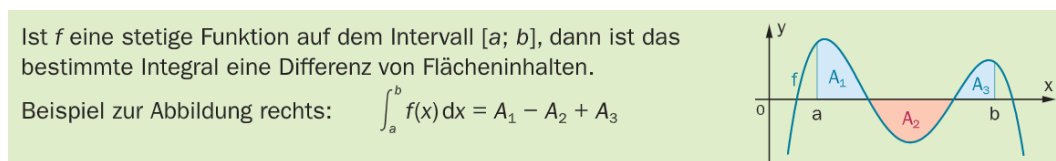


Abb. 26: „Flächenanteile unter der x -Achse ‚zählen negativ‘“ (Dorfmayr et al. 2020: 14)

Mit Rückgriff auf die Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert geeigneter Produktsummen und zahlreichen graphischen Veranschaulichungen werden im Anschluss an diese Präzisierung gleich mehrere verschiedene Anwendungen erschlossen. Darunter sind diverse Bewegungsaufgaben und weitere physikalische Kontexte wie die Arbeit als Integral der Kraft nach dem Weg und die Gesamtmenge als Integral der Flussrate nach der Zeit zu finden. Im darauf folgenden Abschnitt wird dann das unbestimmte Integral mithilfe von Integralfunktionen eingeführt, wobei diese anschaulich mithilfe von *Flächeninhaltsfunktionen* motiviert werden. Auffallend ist, dass das unbestimmte Integral hier tatsächlich mithilfe des „[bestimmten Integrals] als Funktion der oberen Grenze“ (Blum & Törner 1983: 172) definiert wird, wobei auch auf die Schwierigkeiten im Zusammenhang der Schreibweise (vgl. Blum & Kirsch 1979: 21) eingegangen wird. Außerdem wird zunächst auch nur in einer kleinen Bemerkung auf eine Schreibweise ohne Grenzen eingegangen und dabei auch klar festgelegt, dass diese dann die Menge aller Integralfunktionen¹¹³ meint. Bei der Definition des unbestimmten Integrals wird

¹¹²Auffallend ist, dass dieser Abschnitt tatsächlich eigentlich deutlich anschaulicher gestaltet ist als die davor gegebene Definition des bestimmten Integrals.

¹¹³Dass dies leider fachlich auch nicht ganz problemfrei ist, wird in Abschnitt 5.4.2 noch genauer behandelt.

also noch nicht auf die Differentialrechnung zurückgegriffen, sondern der Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren in einem nächsten Schritt als bedeutender Satz¹¹⁴ hervorgehoben, formuliert und der übliche Beweis davon zumindest skizziert. Nach einigen Aufgaben, bei denen auf vielseitige Weise mit Integralfunktionen, die hier unbestimmte Integrale genannt werden, gearbeitet wird, wird dann noch das Konzept der Stammfunktion allgemein eingeführt, wobei insbesondere bei der Verbindung zum unbestimmten Integral dann sogar einige fachliche Fehler¹¹⁵ passieren. Die Regeln für das Finden von Stammfunktionen werden dabei als Integrationsregeln bezeichnet und in mehreren Schritten erarbeitet. Außerdem werden graphische Zusammenhänge zwischen Funktionen und ihren Stammfunktionen recht intensiv behandelt. Nach diesem zum Teil leider unglücklich gestalteten Einschub zum Konzept der Stammfunktion wird dann der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung formuliert und mithilfe des bereits verfügbaren ersten Teils bewiesen. Den Abschluss des Kapitels zu den Grundlagen der Integralrechnung bilden dann noch weitere Sätze über bestimmte Integrale, die zum Teil auch über Grenzwerte von Produktsummen bewiesen werden, die Substitutionsregel und die partielle Integration für unbestimmte Integrale, ein auffallend gründlicher Abschnitt über uneigentliche Integrale und ein kurzer Ausblick in Richtung weiterer Möglichkeiten fachlicher Präzisierung.

Im zweiten Kapitel werden zahlreiche Anwendungen der Integralrechnung behandelt, die aufgrund der durchaus sorgfältigen Etablierung des bestimmten Integrals als Grenzwert von Produktsummen im ersten Kapitel jedoch alle bereits problemlos erschlossen werden können. Neben dem Berechnen von Flächeninhalten, Volumina bei bekannter Querschnittsfläche und Arbeit als Integral der Kraft nach dem Weg sowie als Integral der Leistung nach der Zeit kommen auch hier wieder verschiedenste Bewegungsaufgaben vor. Darüber hinaus wird auch der Mittelwertsatz behandelt und es gibt sogar einen Abschnitt zum Berechnen von Bogenlängen von Funktionsgraphen sowie von Mantelflächen von Rotationskörpern.

Der Zugang zur Integralrechnung, den die Autor*innen von *Thema Mathematik 8* gewählt haben, entspricht in weiten Teilen genau einer Variante des Zugangs über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen, in der bereits früh der Produktsummenaspekt auch im Zusammenhang mit weiteren Anwendungen der Integralrechnung erschlossen wird. Der Einstieg erfolgt über das *klassische* Flächeninhaltsproblem, wobei eine Definition des bestimmten Integrals nicht sofort angestrebt, sondern zunächst anhand zahlreicher Aufgaben das Abschätzen der jeweils gesuchten Flächeninhalte durch Unter-,

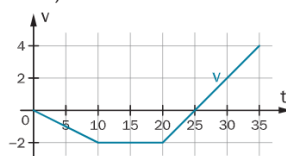
¹¹⁴Es handelt sich dabei natürlich genau um den ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

¹¹⁵Neben Schwierigkeiten, die vom unbestimmten Integral ausgehen, sind einige dieser Fehler im Übrigen damit verbunden, dass Voraussetzungen an Funktionen und deren Definitionsbereiche nicht sinnvoll festgelegt werden.

Ober-, Links- oder Rechtssummen selbsttätig durchgeführt wird. Auf Technologieeinsatz wird sogar vorerst noch verzichtet und viel eher die Aufgaben so gestellt, dass der dabei auftretende Rechenaufwand durchaus gering ausfällt. Nachdem thematisiert beziehungsweise streng genommen sogar definiert wurde, dass der gesuchte Flächeninhalt jeweils der gemeinsame Grenzwert der entsprechenden Unter- und Obersummen ist, wird auch mit Technologieeinsatz gearbeitet und es werden auf diese Weise auch einige Grenzwerte konkret ermittelt. Dadurch wird insbesondere die von Arnold Kirsch geschilderte Problematik (vgl. Kirsch 1976: 89) vermieden, dass Aufgaben, die im Zusammenhang mit dem Ermitteln von Grenzwerten gestellt werden, entweder zu banal oder zu „kompliziert und isoliert“ (Kirsch 1976: 89) sind. Die Bedenken bezüglich des Technologieeinsatzes an dieser Stelle, die in Abschnitt 4.2.1 geäußert wurden, werden zumindest in gewisser Hinsicht dadurch relativiert, dass in diesem Schulbuch hier noch gar nicht vom bestimmten Integral die Rede ist und man daher aus Sicht der Schüler*innen nicht das Berechnen von Integralen, sondern die algebraische Hürde des Ermittels von Grenzwerten einem Computer beziehungsweise einem Taschenrechner überlässt. An dieser Stelle stellt sich im Übrigen auch die Frage, ob in diesem Schulbuch überhaupt von Anfang an von Existenz und Eindeutigkeit der vorkommenden Flächeninhalte ausgegangen wird oder nicht. Der Einstieg und die damit verbundenen Aufgaben legen dies zwar nahe, die Definition des Flächeninhalts als Grenzwert von Unter- und Obersummen jedoch wiederum eher nicht. Das bestimmte Integral wird im Anschluss daran zwar auch unmittelbar mit Flächeninhalten in Verbindung gebracht, dann aber an ohne Rückgriff auf Flächeninhalte für stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen als Grenzwert geeigneter Produktsummen definiert. Auch wenn bei der Definition des bestimmten Integrals bewusst darauf verzichtet wird, spielen Flächeninhalte als graphische Veranschaulichungen weiterhin eine zentrale Rolle und auch im Zusammenhang mit negativen Funktionswerten wird anschaulich mit orientierten Flächeninhalten gearbeitet, auch wenn dieser Begriff nicht explizit erwähnt wird. Die Schwierigkeiten, die das Auftreten negativer Funktionswerte beim Zugang über Flächeninhalte verursachen kann, werden durch den Fokus auf Produktsummen und die bereits an dieser Stelle aufgegriffenen Anwendungsbezüge augenscheinlich verhindert (vgl. Blum & Törner 1983: 161-162). Die dabei verwendete Formulierung „Flächeninhalte im Kontext“ (Dorfmayr et al. 2020: 16) verdeutlicht noch einmal die zentrale Stellung von Flächeninhalten bei diesem Zugang (Abb. 27).

Der Umgang mit dem ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung entspricht genau dem, wie er von Günter Törner und Werner Blum im Zusammenhang mit einem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen geschildert wird (vgl. Blum & Törner 1983: 172). Auch dabei verlässt man sich stark auf die graphische Veranschaulichung als Flächeninhalt und fasst Integralfunktionen als sogenannte Flächeninhaltsfunktionen auf. Dabei beschränkt man sich in den Erklärungen und auch

Die Bewegung einer Modelleisenbahn wird durch ihre Geschwindigkeits-Zeit-Funktion (v in m/s, t in s) beschrieben.



Berechne den Wert des bestimmten Integrals und interpretiere diesen im Kontext:

$$\int_0^{10} v(t) dt \quad \int_0^{20} v(t) dt \quad \int_0^{30} v(t) dt$$

Abb. 27: Aufgabe 51 (zum Thema „Flächeninhalte im Kontext“) in *Thema Mathematik 8* (Dorfmayr et al. 2020: 17)

bei den zugehörigen Aufgaben auf Integralfunktionen nichtnegativer Funktionen, wie es auch bei Arnold Kirsch (vgl. Kirsch 1996: 55-56) als sinnvolle Vereinfachung vorgeschlagen wird. Eine Erweiterung auf Integralfunktionen von Funktionen, die auch negative Werte annehmen, wie es zum Beispiel bei Peter Bender (vgl. Bender 1990: 112) behandelt wird, findet nicht statt. Außerdem wird im Übrigen an dieser Stelle nicht thematisiert, wie der als unbestimmtes Integral definierte Ausdruck

$$F(x) = \int_a^x f(u) du$$

im Falle $x \leq a$ zu verstehen ist.¹¹⁶ Fest steht, dass die Behandlung des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung in diesem Schulbuch tatsächlich den „verblüffenden Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung“ (Dorfmayr et al. 2020: 20) repräsentiert und seine zentrale Aussage, die sich gut durch „Differenzieren macht Integrieren rückgängig“ (Blum & Kirsch 1996: 62) zusammenfassen lässt, klar zur Geltung bringt. Im Anschluss an den Abschnitt über Stammfunktionen wird dann auch der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung formuliert und bewiesen, wobei dieser hier aus dem ersten Teil gefolgert wird und nicht wie bei Arnold Kirsch und Werner Blum empfohlen, gewissermaßen als eigenständige Aussage bewiesen beziehungsweise begründet wird (vgl. Blum & Kirsch 1996: 63-65). Mit Ausnahme der Behandlung der Substitutionsregel und der partiellen Integration für unbestimmte Integrale, folgen die Autor*innen auch im weiteren Verlauf sehr genau dem in Abschnitt 4.2.1 skizzierten Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen, da auf Basis der bisher behandelten Inhalte nun diverse Anwendungen der Integralrechnung nicht nur gut erschließbar, sondern mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auch sinnvoll durchführbar sind (vgl. Blum &

¹¹⁶Allgemein ist der Umgang mit dem unbestimmten Integral in weiterer Folge aus fachlicher Sicht problematisch, auch wenn die Definition über Integralfunktionen zunächst als interessante und vielversprechende Alternative zur üblichen Behandlung dieses Begriffs erscheint, die auch gut zu diesem Zugang passt.

Törner 1983: 172).

Auch im Schulbuch *Dimensionen Mathematik 8* wird das Thema Integralrechnung im Rahmen der ersten beiden Kapitel behandelt, wobei dieses dadurch in *Grundlagen* sowie *Exaktifizierung und Anwendungen* aufgeteilt wird. Ähnlich wie in *Thema Mathematik 8* wird auch hier direkt mit dem *klassischen* Flächeninhaltsproblem begonnen und nach einer kurzen Aufgabe, bei der Schüler*innen im Zusammenhang mit dem Abschätzen eines Flächeninhalts selbst experimentieren sollen, werden die beiden Begriffe Unter- und Obersumme für äquidistante Zerlegungen eingeführt und erklärt, wie es zu verstehen ist, dass der Graph einer nichtnegativen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall eine Fläche festlegt.

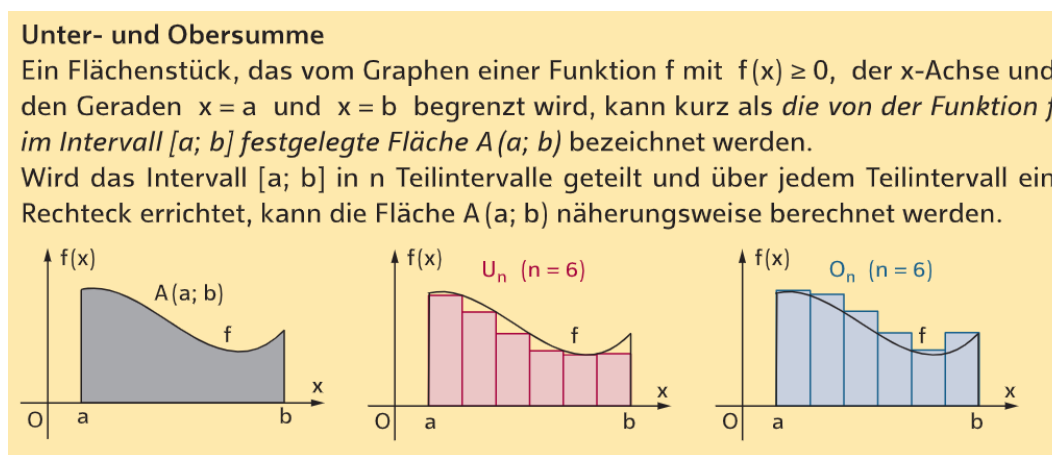


Abb. 28: Definition der Begriffe Unter- und Obersumme in *Dimensionen Mathematik 8* (Bleier et al. 2020: 7)

Nach einigen Erläuterungen zu den neuen Begriffen wird explizit festgelegt, dass in den darauffolgenden Aufgaben stets gelten soll, dass alle Funktionen auf den betrachteten Intervallen stetig sind und immer äquidistante Zerlegungen verwendet werden sollen. In diesen Aufgaben wird auch bewusst auf die Differenz von Ober- und Untersumme geachtet, um beurteilen zu können, wie gut die jeweiligen Abschätzungen bereits sind. Die aus den Aufgaben gewonnenen Erkenntnisse werden dann zusammengetragen zur „Idee von Leibniz“ (Bleier et al. 2020: 10), die zur Einführung des bestimmten Integrals als gemeinsamer Grenzwert von Unter- und Obersummen führt. Dabei wird tatsächlich mit Grenzwerten von Folgen argumentiert und die Einschränkung auf stetige Funktionen auf elegante und fachlich beinahe unproblematische Weise¹¹⁷ sogar vorübergehend fallengelassen. Obwohl also bis zu diesem Punkt auf durchaus geschickte Art und Weise alle Definitionen relativ gut ohne Stetigkeit auskommen, wird das bestimmte Integral

¹¹⁷Es wird an sich sehr wohl verwendet, dass die betrachtete Funktion auf jedem Teilintervall sowohl Maximum als auch Minimum annimmt.

dann trotzdem nur für Funktionen definiert, die auf dem betrachteten Intervall stetig sind. Die Voraussetzung der Nichtnegativität wird im Rahmen der Definition des bestimmten Integrals stillschweigend weggelassen und auch in den Bemerkungen zur Definition nicht erwähnt. Dort wird hauptsächlich auf die Schreibweise eingegangen und dabei auch thematisiert, dass das bestimmte Integral „näherungsweise gleich einer **Summe von Produkten**“ (Bleier et al. 2020: 11) ist. Darauf folgen weitere Anwendungen der Integralrechnung, bei denen bestimmte Integrale bereits in verschiedensten Kontexten interpretiert werden sollen, die graphische Veranschaulichung als Flächeninhalt oft zum Tragen kommt und zwar viel mit Technologieeinsatz, aber nach wie vor mit Unter- und Obersummen gearbeitet wird. Außerdem kommen hier sogar schon Aufgaben zum Berechnen von Mittelwerten mithilfe bestimmter Integrale vor. Auch im Rahmen dieser Aufgaben treten keine Funktionen mit negativen Funktionswerten auf. Im Anschluss an diese Einführung des Integralbegriffs wird das Konzept der Stammfunktion behandelt, wobei dabei fachlich sehr gründlich und korrekt vorgegangen und der Begriff des unbestimmten Integrals vorerst weggelassen wird. Die einzigen unmittelbaren Verbindungen zur Integralrechnung sind einerseits die Anmerkung, dass „Bestimmen einer Stammfunktion [...] Integrieren genannt [wird]“ (Bleier et al. 2020: 23), und andererseits die Verwendung des Begriffs Integrationskonstante. Im Laufe dieser Begriffserklärungen wird jedoch auch gleich angekündigt, dass der Zusammenhang zur „Deutung als Summe von Produkten“ (Bleier et al. 2020: 23) dann im darauf folgenden Abschnitt erklärt wird. Ansonsten stützen sich die Autor*innen dieses Schulbuchs in diesem Abschnitt lediglich auf Begriffe und Konzepte aus der Differentialrechnung und stellen dazu auch zahlreiche Aufgaben, bei denen in vielen Fällen auch Anwendungsbezug hergestellt wird.

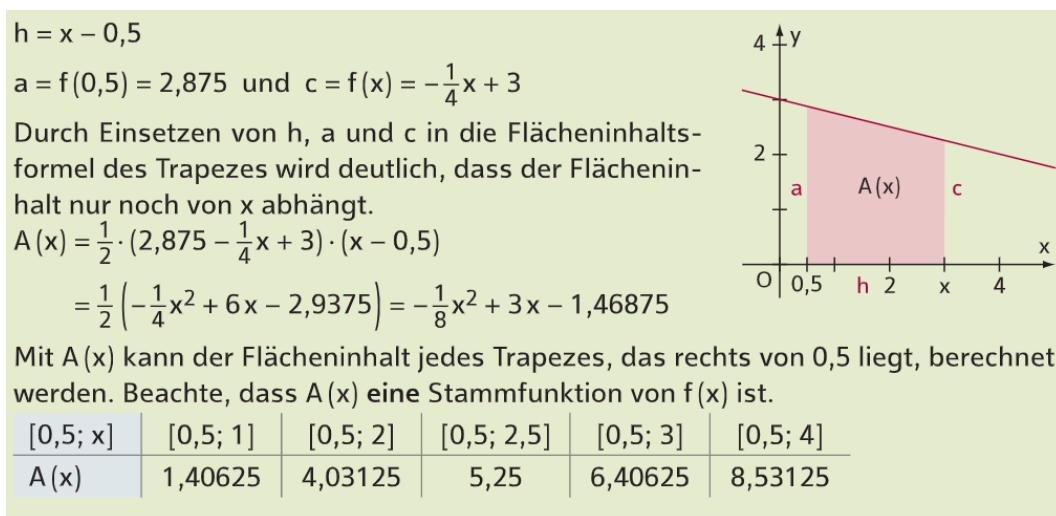


Abb. 29: Aufstellen einer *Flächeninhaltsfunktion* in *Dimensionen Mathematik 8* (Bleier et al. 2020: 30)

Zu Beginn des nächsten Abschnitts wird das Aufstellen einer Flächeninhaltsfunktion thematisiert und anhand eines Beispiels mit einer linearen Funktion konkret durchgeführt (Abb. 29). Dabei wird auch gezielt hervorgehoben, dass die Flächeninhaltsfunktion dann eine Stammfunktion dieser linearen Funktion ist und dazu im Anschluss eine analoge Aufgabe gestellt. Als Verallgemeinerung dieser Idee wird dann der erste Teil des Hauptsatzes durchaus detailreich besprochen und begründet, wobei dabei einzelne Schritte auch graphisch veranschaulicht werden und auf die Schreibweise mit Integralfunktionen vorerst noch verzichtet wird. Im Anschluss an die Begründung des ersten Teils wird auch gleich der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung motiviert und mithilfe des ersten Teils bewiesen. Dadurch wird der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hier gewissermaßen hergeleitet und erst im Anschluss vollständig, übersichtlich und fachlich korrekt¹¹⁸ formuliert. Die Notation im Zusammenhang mit der dabei auftretenden Integralfunktion wird durch einen entsprechenden Hinweis erläutert. Außerdem wird an dieser Stelle nun auch der Begriff des unbestimmten Integrals als Menge aller Stammfunktionen einer stetigen Funktion eingeführt. Diesem Begriff wird jedoch auch in weiterer Folge wenig Beachtung geschenkt. Darüber hinaus werden zum Abschluss dieses Kapitels noch weitere Eigenschaften des bestimmten Integrals behandelt und weitere Integrationsmethoden wie Substitution, partielle Integration und Partialbruchzerlegung im Rahmen von online verfügbaren Arbeitsblättern vorgestellt.

Im zweiten Kapitel werden zunächst die Erkenntnisse aus den vorigen Abschnitten und insbesondere der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung noch einmal in einer Übersicht dargestellt und im Anschluss der Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren mithilfe von Integralfunktionen hervorgehoben und bewiesen. Diesen Zusammenhang sollen die Schüler*innen in einigen Aufgaben dann auch konkret nachrechnen. Nach diesem kurzen Abschnitt zur Exaktifizierung werden dann zahlreiche Anwendungen der Integralrechnung behandelt, die mithilfe von Produktsummen jeweils problemlos begründet werden können. Besonders viel Aufmerksamkeit kommt dabei dem Berechnen von Flächeninhalten zu, wobei hier nun mithilfe von Spiegelungen der Graphen beziehungsweise mithilfe von Beträgen mit bestimmten Integralen von Funktionen umgegangen wird, die im betrachteten Intervall negative Funktionswerte annehmen. Weitere Anwendungen der Integralrechnung, die thematisiert werden, sind das Berechnen von Volumina bei bekannter Querschnittsfläche, Wege bei bekannter Geschwindigkeit, Geschwindigkeit bei bekannter Beschleunigung und physikalische Arbeit als Integral der Kraft nach dem Weg. Darüber hinaus werden sogar die Arbeit und die mittlere Leistung des Wechselstroms als Anwendungen in der Elektrotechnik, die mittlere Lebensdauer eines radioaktiven Atomkerns als Anwendung in der Atomphysik, Anwendungen in der Wirtschaft und das Berechnen der Bogenlänge eines

¹¹⁸bis auf einen unscheinbaren Notationsfehler

Funktionsgraphen behandelt. Den Abschluss des Themas bilden zahlreiche Aufgaben, bei denen im Zusammenhang mit diversen diskreten Modellen das bestimmte Integral als Näherung verwendet werden soll. Vorzeichenfragen, die im Rahmen mancher der behandelten Anwendungen auftreten, bleiben weiterhin Nebensache und werden zum Teil bewusst außer Acht gelassen. Aufgaben, in denen die zu integrierende Funktion das Vorzeichen wechselt und man trotzdem am Wert des bestimmten Integrals auf dem gesamten betrachteten Intervall interessiert ist, kommen lediglich sehr vereinzelt und erst ganz am Ende des zweiten Kapitels vor.

Ähnlich wie der Zugang, der in *Thema Mathematik 8* gewählt wurde, folgt der Zugang zur Integralrechnung in *Dimensionen Mathematik 8* in weiten Teilen einer Variante des Zugangs über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen, die dem Produktsummenaspekt früh auch im Zusammenhang mit anderen typischen Anwendungen der Integralrechnung viel Aufmerksamkeit schenkt. Der Zugang in diesem Schulbuch stimmt jedoch nicht vollständig mit dem in *Thema Mathematik 8* gewählten Zugang überein, wobei es sich bei diesen Unterschieden nicht unbedingt um klare Vorteile eines Schulbuchs gegenüber dem anderen handelt. Der Einstieg erfolgt selbstverständlich auch hier über das *klassische* Flächeninhaltsproblem und die darauf folgenden Definitionen der Begriffe Unter- und Obersumme. Dabei ist jedoch auffallend, dass die Formulierungen in Kombination mit den graphischen Darstellungen so gewählt sind, dass an dieser Stelle tatsächlich lediglich mit einer gewissen fachlichen Unschärfe¹¹⁹ auf Stetigkeit verzichtet werden kann und dies auch getan wird. Viel mehr wird die Stetigkeit der betrachteten Funktionen in den Aufgaben in diesem Abschnitt gewissermaßen als Vereinfachung explizit vorausgesetzt. Ähnlich verhält es sich bei der Überleitung zur Definition des bestimmten Integrals, wo dann aber sogar explizit Maxima und Minima verwendet werden, obwohl auf Stetigkeit verzichtet wird. Dennoch könnte man durchaus argumentieren, dass auf diese Weise hier sogar eine anschaulich sinnvolle Definition¹²⁰ des Begriffs der Integrierbarkeit über Grenzwerte von Folgen¹²¹ gut erreichbar wäre. Diese Möglichkeit wird allerdings nicht wahrgenommen und das bestimmte Integral dann doch unter Voraussetzung der Stetigkeit der Funktion auf dem betrachteten Intervall definiert. Auch wenn bis zur Definition des bestimmten Integrals lediglich das Berechnen von Flächeninhalten thematisiert wird, werden unmittelbar im Anschluss an die Definition bereits verschiedenste weitere Anwendungen der Integralrechnung erschlossen und insbesondere jeweils geeignete Interpretationen des bestimmten Integrals als Flächeninhalt unter Funktionsgraphen thematisiert, was genau den Empfehlungen von

¹¹⁹Es ist von kleinsten und größten Funktionswerten die Rede, die ja bei Verzicht auf Stetigkeit nicht angenommen werden müssen.

¹²⁰Mit einer anschaulich sinnvollen Definition ist hier gemeint, dass man dabei ähnlich wie Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel bei der Definition des Begriffs Integralfunktion mithilfe von scheinbar offensichtlich sinnvoll festgelegten Flächeninhalten (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 103-104) vorgehen könnte.

¹²¹siehe z.B. Abschnitt 2.1.2

Günter Törner und Werner Blum entspricht (vgl. Blum & Törner 1983: 161). Einerseits wird dabei sogar der Mittelwertsatz der Integralrechnung plausibel gemacht und angewendet, andererseits wird konsequent auf eine Deutung des bestimmten Integrals als *orientierter Flächeninhalt* verzichtet beziehungsweise wird durch die Wahl der Aufgaben einer solchen Deutung förmlich ausgewichen. Aufgrund der vielen Anwendungsbezüge könnte man meinen, dass falschen Fixierungen in Bezug auf Flächeninhalte geradezu vorbildlich (vgl. Blum & Kirsch 1979: 16) vorgebeugt wird. Jedoch ist eben zu beachten, dass dabei trotzdem der durchaus bedeutsame Punkt ausgelassen wird, dass das bestimmte Integral im Allgemeinen entsprechende Flächen nicht misst, sondern bilanziert (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 93). Anders als in *Thema Mathematik 8* wird das Konzept der Stammfunktion vor der Behandlung des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung eingeführt und beide Teile dieses zentralen Satzes auf einmal besprochen. Insbesondere bei der Behandlung des ersten Teils wird im Grunde genau so vorgegangen, wie es im Zusammenhang mit einem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen empfohlen wird (vgl. Blum & Törner 1983: 172) und dabei in der Herleitung beziehungsweise Begründung auch auf die für Schüler*innen oft verwirrende Notation mit Integralfunktionen (vgl. Blum & Kirsch 1979: 21) verzichtet. Gleich wie in *Thema Mathematik 8* wird entgegen der Empfehlung von Arnold Kirsch und Werner Blum (vgl. Blum & Kirsch 1996: 63-65) der zweite Teil direkt aus dem ersten gefolgert. Während in *Thema Mathematik 8* unbestimmte Integrale über Integralfunktionen eingeführt werden, wird hier der Begriff des unbestimmten Integrals erst nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung thematisiert, kaum beachtet und auch keine Aufgaben dazu gestellt. Zu Beginn des zweiten Kapitels werden die Erkenntnisse des ersten Kapitels noch einmal übersichtlich dargestellt, wobei man stillschweigend aber offenbar bewusst auf die Einschränkung auf nichtnegative Funktionen verzichtet und lediglich verlangt, dass die Funktion f auf dem betrachteten Intervall stetig ist (Abb. 30). Dabei fällt auf, dass zwar korrekterweise erwähnt wird, dass Flächeninhaltsfunktionen als geometrische Deutung von Spezialfällen von Integralfunktionen verstanden werden können, aber auch in diesem Zusammenhang weiterhin überhaupt nicht thematisiert wird, was im Falle von negativen Funktionswerten passiert. Der Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren wird hier dann mithilfe von Integralfunktionen noch einmal explizit hervorgehoben und die Aussagen bewiesen. Dazu werden auch einige Aufgaben gestellt, bei denen an mehreren Stellen auch negative Funktionswerte auftreten, dies aufgrund der Abstraktheit der Aufgaben vermutlich aber kaum auffällt und auch nicht thematisiert wird. Den Abschluss des Themas Integralrechnung bilden dann noch zahlreiche weitere Anwendungen der Integralrechnung, die auf Basis des im ersten Kapitel bereits etablierten Produktsummenaspekts gut erschlossen werden können (vgl. Blum & Törner 1983: 161). Da jedoch der Deutung des bestimmten Integrals als orientierter Flächeninhalt sehr spät und auch dann sehr wenig Aufmerksamkeit geschenkt wird,

stellt sich die Frage, ob Schüler*innen nach Behandlung des Themas Integralrechnung mithilfe dieses Schulbuchs Aufgaben wie die in Abschnitt 4.1.4 zitierte Aufgabe aus der internationalen Vergleichsstudie TIMSS aus dem Jahr 1999 überhaupt richtig beantworten könnten (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 93-94).

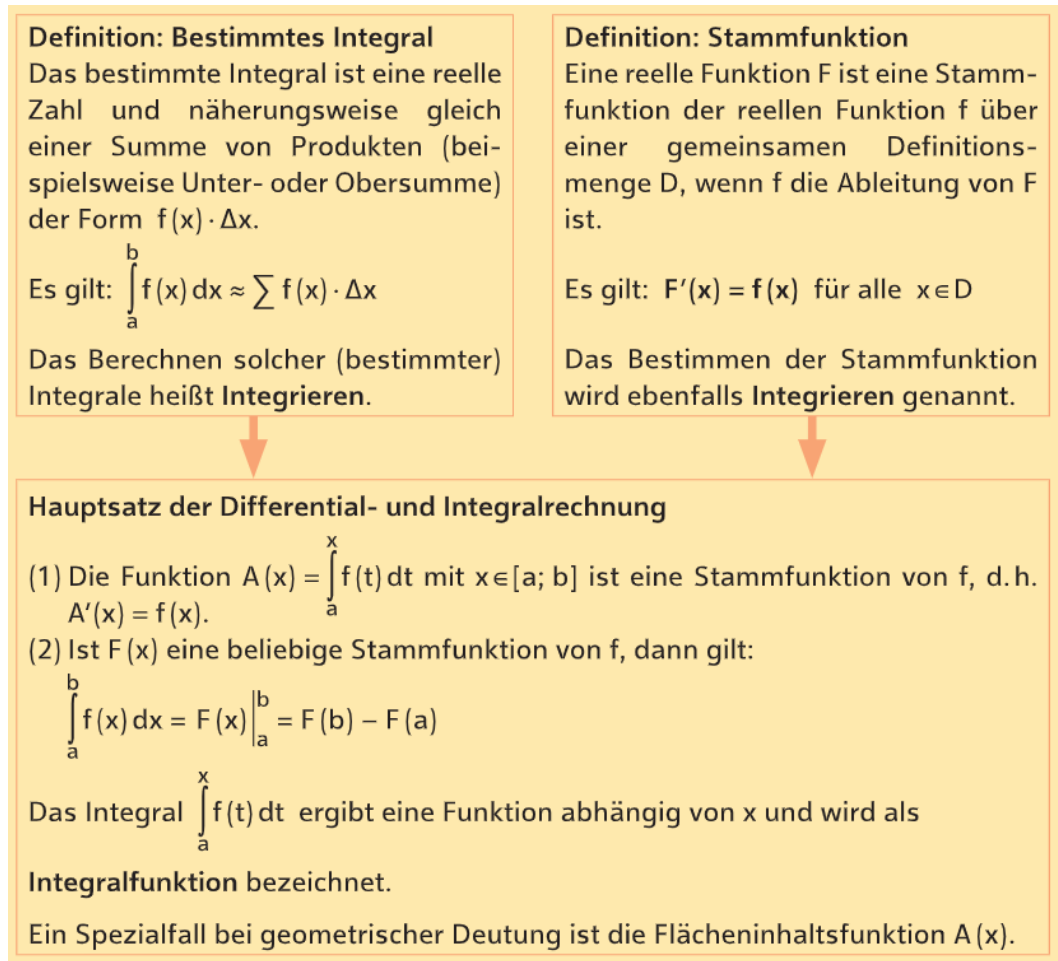


Abb. 30: Ein Überblick zur Theorie in *Dimensionen Mathematik 8* (Bleier et al. 2020: 35)

Insgesamt stellt sich also heraus, dass in je zwei Schulbüchern jeweils sehr ähnliche Zugänge zur Integralrechnung gewählt wurden. Dabei handelt es sich entweder um eine Mischung aus dem Zugang über die Umkehrung der Differentiation und dem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen oder um eine Variante des Zugangs über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen, die auch weiteren Anwendungsbezügen bereits früh viel Raum gibt. Auf die konkrete Umsetzung der gewählten Zugänge konnte bisher jedoch jeweils nur oberflächlich eingegangen werden. In den folgenden Abschnitten werden nun sowohl in Bezug auf die in dieser Arbeit bereits diskutierten fachdidaktischen Kriterien als auch in Bezug auf einzelne fachliche Kriterien systematisch alle vier Schulbücher noch genauer untersucht und dahingehend miteinander verglichen.

5.1.2 Aspekte und Grundvorstellungen

In Zusammenhang mit den drei verschiedenen Zugängen zur Integralrechnung, die in Kapitel 4 beschrieben wurden, wurde bereits festgehalten, dass man grundsätzlich mit jedem davon in der Lage wäre, alle drei Aspekte und die drei zentralen Grundvorstellungen zum Integralbegriff zu erschließen. Da die Zugänge in den vier Schulbüchern jeweils zumindest in weiten Teilen einem oder zwei der in Kapitel 4 behandelten Zugänge entsprechen, stellt sich also weniger die Frage, welche Aspekte und Grundvorstellungen zum Tragen kommen, sondern viel mehr, ob in manchen Fällen gewisse Aspekte und Grundvorstellungen zu kurz kommen oder besonders stark betont werden.

Der Maßaspekt wird in allen Schulbüchern durchaus intensiv behandelt, da insbesondere dem Berechnen von Flächeninhalten, aber auch dem Berechnen von Volumina in allen Schulbüchern jeweils ein ganzer Abschnitt gewidmet ist. Außerdem stellt das Berechnen von Flächeninhalten in allen Schulbüchern die motivierende Problemstellung für das bestimmte Integral dar, auch wenn der Fokus auf diese Problemstellung beim Einstieg zum Beispiel in *Mathematik verstehen 8* nur kurz anhält. Im Zusammenhang mit innermathematischen Anwendungen wird darüber hinaus sowohl in *Thema Mathematik 8* als auch in *Dimensionen Mathematik 8* das Berechnen der Bogenlänge eines Funktionsgraphen behandelt und in *Thema Mathematik* sogar das Berechnen des Inhalts der Mantelfläche eines Rotationskörpers besprochen. Außerdem kann man durchaus auch das Messen physikalischer Größen zu diesem Aspekt zählen (vgl. Greefrath et al. 2016: 244), was neben dem Berechnen von Flächeninhalten und Volumina ohnehin vom Lehrplan vorgeschrieben ist (vgl. RIS 2021) und daher in allen vier Schulbüchern vorkommt.

Ähnlich verhält es sich mit dem Produktsummenaspekt, der in allen Schulbüchern sowohl im Theorieaufbau als auch bei den behandelten Anwendungen der Integralrechnung eine Rolle spielt. Dennoch gibt es teilweise sogar große Unterschiede, wie stark die Rolle des Produktsummenaspekts betont wird. Da der Lehrplan im Grunde vorgibt, dass bei der Einführung des bestimmten Integrals Unter- und Obersummen verwendet werden sollen und das bestimmte Integral „näherungsweise als Summe von Produkten“ (RIS 2021) aufgefasst und berechnet werden können soll, wird dem Produktsummenaspekt in allen Schulbüchern zumindest ein entsprechendes Minimum an Aufmerksamkeit geschenkt. Während in *Mathematik verstehen 8* Produktsummen im Zusammenhang mit Anwendungen der Integralrechnung in den meisten Fällen nur in kurzen Begründungen am Beginn der jeweiligen Abschnitte vorkommen, kommt in den anderen Schulbüchern sogar bereits vor Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung das Berechnen und Interpretieren bestimmter Integrale verstärkt zum Tragen, wobei damit dem Produktsummenaspekt entsprechend mehr Raum gege-

ben und Bedeutung beigemessen wird (vgl. Blum & Kirsch 1979: 16, Blum & Törner 1983: 161). In *Lösungswege Mathematik 8* werden in diesem Rahmen neben Aufgaben zu Flächeninhalten auch Aufgaben zu Anwendungen im Zusammenhang mit Zu- und Abnahmeprozessen gestellt und in *Thema Mathematik 8* werden an dieser Stelle sogar bereits zahlreiche Bewegungsaufgaben und Aufgaben zu weiteren physikalischen Anwendungen behandelt. Auf diese Weise am stärksten betont wird der Produktsummenaspekt jedoch in *Dimensionen Mathematik 8*, wo mithilfe von Produktsummen an dieser Stelle neben den Anwendungen, die auch in *Thema Mathematik 8* vorkommen, zum Teil bereits wirtschaftliche Anwendungen und das Berechnen von Mittelwerten erschlossen und Aufgaben dazu gestellt werden.

Auch der Stammfunktionsaspekt spielt in allen Schulbüchern eine große Rolle. Dies ist schon allein deshalb wenig überraschend, da der Lehrplan wortwörtlich vorgibt, dass Schüler*innen „den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können [sollen]“ (RIS 2021). Wie in Abschnitt 4.1.2 bereits umfassend diskutiert wurde, ist der Stammfunktionsaspekt an sich äußerst vielseitig und bezieht sich im Großen und Ganzen auf alle wichtigen Beziehungen, die aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hervorgehen (vgl. Greefrath et al. 2016: 240). Das Berechnen bestimmter Integral mithilfe von Stammfunktionen wird selbstverständlich¹²² in allen Schulbüchern behandelt und teilweise so stark betont, dass in *Lösungswege Mathematik 8* die durchaus irreführende und fachlich problematische Bemerkung zu finden ist, dass man für die Berechnung eines bestimmten Integrals eine Stammfunktion finden „muss“ (Freiler et al. 2018: 34). Das Aufstellen beziehungsweise *Konstruieren* von Stammfunktionen mithilfe der Integralrechnung, das es zumindest formal ermöglicht, zu jeder stetigen Funktion eine Stammfunktion anzugeben (vgl. Büchter & Henn 2010: 250), wird jedoch nur in *Thema Mathematik 8* und *Dimensionen Mathematik 8* auf fachlich korrekte Weise thematisiert und auch Aufgaben dazu gestellt. Es ist daher wenig überraschend, dass nur diese beiden Schulbücher die Beziehung „Differenzieren macht Integrieren rückgängig“ (Blum & Kirsch 1996: 62) nicht auf triviale Weise über unbestimmte Integrale¹²³ herstellen, sondern tatsächlich über Flächeninhaltsfunktionen beziehungsweise Integralfunktionen. Ebenfalls diesem Aspekt zuzuordnen sind die sogenannten Integrationsregeln, die entweder in Zusammenhang mit bestimmten oder unbestimmten Integralen selbstverständlich in allen Schulbüchern behandelt werden. Eine abschließende Beobachtung, die die große Rolle des Stammfunktionsaspekts in allen vier Schulbüchern unterstreicht, ist die absichtliche Doppeldeutigkeit des Verbs *Integrieren*, welches einerseits das Finden von Stammfunktionen und andererseits das Berechnen von bestimmten Integralen meint. Man könnte argumentieren, dass dies im

¹²²Auch das steht wortwörtlich im Lehrplan (vgl. RIS 2021).

¹²³Integralfunktionen werden in *Thema Mathematik 8* zwar so genannt, hier ist aber nun die üblichere, in 2.4.3 thematisierte Auffassung des unbestimmten Integrals gemeint.

Kern genau dem entspricht, was Peter Bender an sich am Einführen des unbestimmten Integrals in der Schule kritisiert¹²⁴ (vgl. Bender 1990: 118-119), und diese durchaus verwirrende¹²⁵ Doppeldeutigkeit genau wie die Behandlung des unbestimmten Integrals in der Schule fallengelassen werden sollte.¹²⁶

Wie in Bezug auf den Maßaspekt bereits erwähnt, wird dem Berechnen von Flächeninhalten in allen vier Schulbüchern grundsätzlich recht viel Aufmerksamkeit geschenkt, was in Anbetracht der jeweils gewählten Zugänge zur Integralrechnung wenig überraschend ist. Dennoch gibt es im Zusammenhang mit der Flächeninhaltsgrundvorstellung zwei erwähnenswerte Auffälligkeiten. Eine der Sorgen, die bei einem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen in der einschlägigen Literatur auftreten, ist eine zu starke Bindung des bestimmten Integrals an seine geometrische Deutung als Flächeninhalt (vgl. Blum & Kirsch 1979: 16).¹²⁷ Um diesem Problem gewissermaßen formal aus dem Weg zu gehen, wird in *Mathematik verstehen 8* bewusst und explizit bereits sehr früh auf den „Rückgriff auf die anschauliche Vorstellung des Flächeninhalts [verzichtet]“ (Malle et al. 2020: 12), was zur Folge hat, dass man sich dieser im Rahmen der Behandlung der Grundlagen der Integralrechnung bis auf wenige Ausnahmen nicht bedient und auch zum Beispiel im Zusammenhang mit physikalischen Anwendungen der Integralrechnung eher sparsam mit graphischen Darstellungen dieser Art umgeht. Grund für dieses durchaus konsequente und offenbar bewusste Unterdrücken der Flächeninhaltsgrundvorstellung ist der Anspruch, das Integral von Anfang an als „[abstrakten] Oberbegriff für die einzelnen Deutungen“ (Malle et al. 2020: 47) einzuführen. Dass dies jedoch insbesondere beim Einstieg in das Thema zu Problemen führt, wurde bereits in Abschnitt 5.1.1 diskutiert. Einer der Gründe, warum ein zu starker Fokus auf die Veranschaulichung als Flächeninhalt problematisch sein kann, ist die Tatsache, dass das bestimmte Integral eigentlich einen *orientierten Flächeninhalt* liefert (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 93). In gewisser Hinsicht muss die Flächeninhaltsgrundvorstellung also um diese Facette erweitert werden, um die passendere anschauliche Vorstellung als *Flächenbilanz* zu erschließen.¹²⁸ Obwohl keines der Schulbücher solche Begriffe explizit verwendet, wird in fast allen von ihnen sehr bewusst auf eine solche Erweiterung abgezielt und Aufgaben dazu gestellt. Die Ausnahme ist in diesem Fall *Dimensionen Mathematik 8*, in dem einer Deutung des bestimmten Integrals als *Flächenbilanz* bis zum allerletzten Abschnitt förmlich aus dem Weg gegangen wird.

Da dem Produktsummenaspekt in allen Schulbüchern sowohl im Theorieaufbau als

¹²⁴siehe Abschnitt 2.4.3

¹²⁵Insbesondere im Zusammenhang mit einem Integralbegriff, der über stetige Funktionen hinausgeht (siehe Abschnitt 5.4).

¹²⁶Darauf wird in Abschnitt 5.4.2 noch näher eingegangen.

¹²⁷siehe z.B. auch Blum & Törner (1983: 161), Danckwerts & Vogel (2006: 93-94), Greefrath et al. (2016: 245), Tietze et al. (1997: 280)

¹²⁸siehe Abschnitt 4.1.4

auch im Zusammenhang mit Anwendungen der Integralrechnung ein gewisses Maß an Aufmerksamkeit geschenkt wird, kommt auch die Kumulationsgrundvorstellung in keinem der Schulbücher auffallend zu kurz (vgl. Greefrath et al. 2016: 253). Erwähnenswert ist an dieser Stelle jedoch, dass zwar alle Schulbücher explizit darauf eingehen, dass das bestimmte Integral „näherungsweise als Summe von Produkten“ (RIS 2021) aufgefasst werden können soll¹²⁹, aber nur in drei der vier Schulbücher das bestimmte Integral explizit als Grenzwert solcher Produktsummen behandelt wird. In *Mathematik verstehen 8* wird von diesem Begriff offenbar absichtlich nicht Gebrauch gemacht und darüber hinaus werden die Begriffe Unter- und Obersummen in so großer Allgemeinheit definiert, dass aus der Definition des bestimmten Integrals als Zahl „zwischen“ allen Untersummen U und allen Obersummen O “ (Malle et al. 2020: 13) eine Auffassung des bestimmten Integrals als Grenzwert für das ungeübte Auge vermutlich auch nicht implizit oder intuitiv hervorgeht. Insbesondere das gezielte Annähern an diesen Wert durch geschickt gewählte Folgen geeigneter Produktsummen geht daraus nicht klar hervor (vgl. Büchter & Henn 2010: 228), was jedoch für die Kumulationsgrundvorstellung in Zusammenhang mit dem Grenzübergang zum bestimmten Integral sicherlich förderlich wäre.¹³⁰

Auch wenn keines der Schulbücher einem Zugang über die *Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten* folgt, so wird die Rekonstruktionsgrundvorstellung allein schon aufgrund der in manchen Schulbüchern sogar zahlreichen Anwendungsbezüge sicherlich nicht unterdrückt oder vernachlässigt. Dennoch gibt es zwei auffallende Unterschiede zwischen manchen der vier Schulbücher. Einer dieser Unterschiede ist die Position, an der Anwendungen der Integralrechnung, die eng mit der Rekonstruktionsgrundvorstellung verbunden sind¹³¹, erstmals behandelt werden. Alle Schulbücher bis auf *Mathematik verstehen 8* thematisieren entsprechende Anwendungsbezüge in Zusammenhang mit dem bestimmten Integral bereits vor der Behandlung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und legen damit entsprechende Zusammenhänge zwischen Differenzieren und Integrieren dem Erschließen dieser Anwendungen auch nicht notwendigerweise zugrunde. In *Mathematik verstehen 8* werden dagegen „Integrale von Änderungsraten“ (Malle et al. 2020: 45) erst deutlich nach Behandlung des zweiten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung thematisiert und gewissermaßen als triviale Anwendung beziehungsweise Folgerung¹³² dessen dargestellt (Abb. 31). Die einzige Ausnahme ist dabei Berechnen von Weglängen bei bekannter Geschwindigkeit, was zwar ebenfalls erst nach dem zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung behandelt, aber mithilfe von Produktsummen erklärt wird.

¹²⁹Dies ist ja ohnehin Vorgabe des Lehrplans (vgl. RIS 2021).

¹³⁰siehe Abschnitt 2.1.2

¹³¹siehe Abschnitt 4.1.5

¹³²Von einem rein fachlichen Standpunkt aus ist dies an dieser Stelle ja durchaus gerechtfertigt.

Integrale von Änderungsraten

Es sei f eine in $[a; b]$ stetige Funktion mit stetiger Ableitung. Da f eine Stammfunktion von f' ist, gilt nach dem Satz auf Seite 18:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Abb. 31: „Integrale von Änderungsraten“ in *Mathematik verstehen 8* (Malle et al. 2020: 45)

Der zweite auffallende Unterschied ist, dass das *Konstruieren* von Stammfunktionen mithilfe von Flächeninhaltsfunktionen¹³³ nur in den beiden Schulbüchern *Thema Mathematik 8* und *Dimensionen Mathematik 8* behandelt wird. Dort wird dies dafür sogar nicht nur theoretisch im Rahmen eines Beweises des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung behandelt, sondern es werden tatsächlich auch geeignete Aufgaben (vgl. Kirsch 1976: 91-94) dazu gestellt.

Obwohl die Mittelwertsgrundvorstellung im Rahmen dieser Arbeit in weiten Teilen bewusst ignoriert wurde, so kann der Vollständigkeit halber an dieser Stelle trotzdem noch erwähnt werden, dass auch diese in zwei der vier Schulbücher durchaus zum Tragen kommt. Sowohl in *Thema Mathematik 8* als auch in *Dimensionen Mathematik 8* wird das bestimmte Integral in Zusammenhang mit entsprechenden Mittelwerten thematisiert und es werden jeweils auch einige Aufgaben dazu gestellt.

5.1.3 Umgang mit Spannungsfeldern

Das Spannungsverhältnis zwischen Anschauung und Strenge ist bekanntermaßen im Analysisunterricht besonders problematisch, da es aus der klassischen Analysis ein breit geteiltes Bild davon gibt, wie deren Inhalte korrekt zu behandeln und zu verstehen sind (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 3). Mit dieser Problematik wird in den vier Schulbüchern auf teilweise sehr unterschiedliche Arten umgegangen, wobei *Mathematik verstehen 8* in diesem Zusammenhang besonders auffällt. Wie bereits mehrfach erwähnt, wird in diesem Schulbuch bewusst und insbesondere im Rahmen des Theorieaufbaus bereits früh auf graphische Veranschaulichungen des bestimmten Integrals verzichtet und schon nach einem einzigen Musterbeispiel zu Flächeninhalten eine fachlich sehr gründliche analytische Definition des bestimmten Integrals gegeben, bei der man sich nicht einmal auf äquidistante Zerlegungen einschränkt. Aufgaben oder Veranschaulichungen, die einer so großen Allgemeinheit gerecht werden, kommen jedoch gar nicht vor. Dies zeigt klar eine Diskrepanz zwischen dem Anspruch an fachliche Exaktheit und dem „realisierten Niveau der Diskussion“ (Kirsch 1976: 88), da offenbar

¹³³siehe Abschnitt 4.1.5

den Autor*innen selbst inhaltliches Argumentieren auf geeignetem Niveau (vgl. Blum & Kirsch 1979: 7) an dieser Stelle nicht möglich erscheint. In Bezug auf das Verhältnis zwischen Anschauung und Strenge könnte man also insbesondere am ersten Kapitel in diesem Schulbuch durchaus bemängeln, dass es „primär dem Wunsch [der Mathematiker*innen] nach einer ‚sauberen Theorie‘ entgegenkommen“ (Kirsch 1976: 102) möchte. Alle anderen Schulbücher schränken sich immerhin auf äquidistante Zerlegungen ein und legen allgemein mehr Wert auf die graphische Veranschaulichung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt beziehungsweise Flächenbilanz. Während jedoch beispielsweise in *Lösungswege Mathematik 8* und *Thema Mathematik 8* im Rahmen der Definition des bestimmten Integrals deren Abstraktheit und Allgemeinheit hervorgehoben wird, wird in *Dimensionen Mathematik 8* im Grunde einfach stillschweigend die davor stets gegebene Voraussetzung der Nichtnegativität der betrachteten Funktion fallengelassen. Insofern könnte man argumentieren, dass die Bindung an die Anschauung in diesem Schulbuch im Zusammenhang mit dieser Definition am größten ist.¹³⁴ In *Thema Mathematik* werden zunächst überhaupt eigentlich Flächeninhalte unter Funktionsgraphen über Unter- und Obersummen definiert und dies dann mit dem bestimmten Integral als graphische Deutung eines abstrakten Begriffs explizit in Verbindung gebracht. Das bestimmte Integral wird also bewusst abstrakt definiert, während Flächeninhalte damit dennoch eine tragende Rolle im Theorieaufbau und in weiterer Folge auch in den Anwendungen übernehmen. Ähnlich, aber in gewisser Hinsicht schon eher der Einführung des bestimmten Integrals in *Mathematik verstehen 8* entsprechend, wird in *Lösungswege Mathematik 8* vorgegangen. Daher lässt sich also in Bezug auf das Verhältnis zwischen Anschauung und Strenge in Zusammenhang mit der Definition des bestimmten Integrals eine Reihung der vier Schulbücher auf einem Spektrum zwischen Strenge und Anschauung verorten, die sich beispielsweise durchaus auch auf die in Abschnitt 5.1.1 zitierten Definitionen der Begriffe Unter- und Obersumme übertragen lässt.

Das Spannungsfeld zwischen der Sichtweise der Mathematik als Produkt und der als Prozess lässt sich allein auf Basis der Schulbücher schwer diskutieren, da deren Einsatz im Unterricht klarerweise jeweils auf unterschiedliche Arten erfolgen kann. Dennoch könnte man anhand dessen, inwieweit Schüler*innen in den jeweiligen Schulbüchern mit fertigen Resultaten konfrontiert werden, Aussagen über den generellen Umgang mit diesem Spannungsfeld machen. Neben der Position der Definition des bestimmten Integrals, die mittlerweile jedoch bereits umfassend behandelt wurde, ist vielleicht insbesondere der Umgang mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung vor diesem Hintergrund von besonderem Interesse. Wenig überraschend ergibt sich dabei beinahe die gleiche Reihung der vier Schulbücher. In *Mathematik verstehen 8*

¹³⁴In Abschnitt 5.1.2 wurde bereits diskutiert, dass dies im Zusammenhang mit der Flächeninhaltsgrundvorstellung tatsächlich sogar durchaus auch zu Problemen führt.

erfolgt die erste Begegnung mit dem zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bereits sehr früh, um das Berechnen bestimmter Integrale zu ermöglichen. Zu diesem Zeitpunkt ist aber noch völlig ungewiss, welche inhaltlichen Vorstellungen die Schüler*innen mit diesem Resultat verbinden sollen (vgl. Blum & Törner 1983: 164) und der Satz wird auch nicht inhaltlich motiviert, sondern einfach als „bequemere Methode“ (Malle et al. 2020: 18) für das Berechnen bestimmter Integrale dargestellt und ohne Anwendungsbezug begründet. In *Lösungswege Mathematik 8* wird ebenfalls zunächst der zweite Teil behandelt, wobei dieser dort zumindest anhand eines Anwendungsbezuges motiviert und plausibel gemacht wird. Sowohl in *Thema Mathematik 8* als auch in *Dimensionen Mathematik 8* wird der Hauptsatz anhand von Flächeninhaltsfunktionen motiviert und dabei dieser Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren explizit behandelt und herausgearbeitet. Man könnte daher argumentieren, dass diese beiden Schulbücher dahingehend prozessorientierter vorgehen als *Lösungswege Mathematik 8*, welches wiederum prozessorientierter vorgeht als *Mathematik verstehen 8*.

Wie in Abschnitt 3.3.1 bereits diskutiert wurde, wäre es grundsätzlich „ein Missverständnis, kalkülhaftes Arbeiten zu diskreditieren“ (Danckwerts & Vogel 2006: 13). Allerdings muss beachtet werden, dass der Aufbau angemessener Grundvorstellungen Priorität haben sollte (vgl. Kirsch 1976: 87), da ohne diese Grundlage „die Gefahr [besteht], dass lediglich formales, rezeptives Wissen erworben wird“ (Greefrath et al. 2016: 20). Demzufolge wäre es zweifelsohne vorteilhaft, sich auch im Zusammenhang mit dem Integralbegriff zunächst mit dem Aufbau entsprechender Grundvorstellungen zu befassen, bevor man sich zum Ziel setzt, das zugehörige Kalkül in Zusammenhang mit dem zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zu erschließen. Tatsächlich gibt es jedoch nur ein Schulbuch, dass dies nicht zumindest in weiten Teilen befolgt. Dabei handelt es sich um *Mathematik verstehen 8*, bei dem man, wie in Abschnitt 5.1.1 bereits erwähnt, bestimmte Integrale wie beispielsweise

$$\int_{-1}^1 x \, dx$$

berechnen soll, bevor überhaupt behandelt wurde, wie das Ergebnis interpretiert werden könnte. Ein gewisser Fokus auf das kalkülhafte Arbeiten ist aber in allen Schulbüchern zu finden, was sich beispielsweise auch an der Behandlung der Substitutionsregel und der partiellen Integration bemerkbar macht. Während Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn hauptsächlich gegenüber dem Behandeln dieser beiden Methoden in Zeiten von Technologieeinsatz skeptisch sind (vgl. Büchter & Henn 2010: 246), argumentieren Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel sogar, dass allgemein die Relevanz des zweiten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung als Methode zur Berechnung bestimmter Integrale „häufig überschätzt [wird]“ (Danckwerts & Vogel

2006: 107). Dieser Standpunkt ist zwar durchaus extrem, aber die dadurch aufgeworfene Frage, wie wichtig das Beherrschen der sogenannten Integrationsregeln insbesondere im Verhältnis zum Aufbau geeigneter Grundvorstellungen heutzutage tatsächlich noch ist, ist sicherlich relevant.

5.1.4 Inhaltliche Vernetzung

Aufgrund des Lehrplans und der Behandlung des Themas Integralrechnung im Rahmen der ersten zwei oder drei Kapitel, ist sowohl vertikale als auch horizontale Vernetzung in allen vier Schulbüchern grundsätzlich gewährleistet. Das Berechnen von Flächeninhalten und Volumina knüpft ebenso an Vorwissen an wie das Ermitteln von Stammfunktionen, da sowohl in Zusammenhang mit Geometrie als auch mit Analysis entsprechende Inhalte bereits im Vorfeld umfassend thematisiert werden (vgl. RIS 2021). Wie stark jeweils explizit auf dieses Vorwissen zurückgegriffen wird, variiert jedoch insbesondere in Bezug auf die dazu gestellten Aufgaben von Schulbuch zu Schulbuch. Am Beispiel des Vorwissens aus der Differentialrechnung erkennt man auch hier wieder eine gewisse Reihung der Schulbücher. In *Mathematik verstehen 8* wird im Grunde eine einzige Aufgabe gestellt, die explizit auf eine Verknüpfung mit dem Vorwissen der Schüler*innen abzielt, während in *Lösungswege Mathematik 8* bereits drei Aufgaben dazu gestellt werden und in *Dimensionen Mathematik 8* sogar auch Aufgaben zu graphischen Zusammenhängen zwischen differenzierbaren Funktionen und deren Ableitungen vorkommen. Am meisten Wert auf die Behandlung des Vorwissens wird aber anscheinend in *Thema Mathematik 8* gelegt, wo zusätzlich zu zahlreichen Aufgaben auch noch kurze Abschnitte zu finden sind, in denen wichtige Grundlagen und Ergebnisse der Differentialrechnung übersichtlich zusammengefasst werden. Ein gewisser Fokus auf vertikale Vernetzung ist also in allen Schulbüchern zu finden, wird jedoch durchaus unterschiedlich stark betont.

Interessanter als die vertikale Vernetzung, die, wie bereits erwähnt, in einem Mindestmaß durch den Lehrplan ohnehin gesichert ist, ist die horizontale Vernetzung, wobei dabei insbesondere die Verzahnung mit der Stochastik ins Auge fällt. Rund um das Thema Normalverteilung spielen gleich zwei Besonderheiten in Zusammenhang mit dem Integral eine Rolle. Einerseits verwendet man dabei uneigentliche Integrale und andererseits taucht in Zusammenhang mit der Normalapproximation der Binomialverteilung das Integral als Näherung in einem diskreten Modell auf. In den folgenden Tabellen wird noch einmal übersichtlich zusammengefasst, ob diese beiden Besonderheiten jeweils bereits im Rahmen der Integralrechnung behandelt werden oder nicht.

	<i>Mathematik verstehen 8</i>	<i>Lösungswege Mathematik 8</i>
uneigentliche Integrale	✗	✓
diskrete Modelle	✗	✓

	<i>Thema Mathematik 8</i>	<i>Dimensionen Mathematik 8</i>
uneigentliche Integrale	✓	✓
diskrete Modelle	✗	✓

Tabelle 1: Überblick zu Grundlagen der horizontalen Vernetzung mit der Stochastik

5.1.5 Ermöglichung der Grunderfahrungen

In Abschnitt 4.3 wurde bereits diskutiert, dass alle in Kapitel 4 behandelten Zugänge zur Integralrechnung grundsätzlich alle drei Winter’schen Grunderfahrungen ermöglichen können. Daher ist dies erwartungsgemäß auch im Zusammenhang mit den Zugängen, die in den vier Schulbüchern gewählt wurden, der Fall, wobei durch die dabei auftretenden Mischungen beziehungsweise durch besondere Schwerpunktsetzungen jeweils einige bemerkenswerte Ergänzungen zur Analyse in Abschnitt 4.3 zu machen sind.

Der Zugang, der in *Mathematik verstehen 8* gewählt wurde, entspricht einer Mischung aus dem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen und dem Zugang über die Umkehrung der Differentiation. Erwartungsgemäß steht also in *Mathematik verstehen 8* insbesondere im ersten Kapitel G2 besonders im Vordergrund, da sowohl einer analytischen Definition des bestimmten Integrals als auch dem Entwickeln des entsprechenden Kalküls so viel Raum gegeben wird, dass man argumentieren könnte, dass daher G1 am Anfang völlig vernachlässigt wird und G3 auf das Nachvollziehen der Lösung des Flächeninhaltsproblems reduziert wird. Obwohl G1 im zweiten Kapitel sehr wohl zum Tragen kommt, bleibt G3 gewissermaßen auf das Minimum reduziert, da der Heuristik in diesem Schulbuch augenscheinlich wenig Beachtung geschenkt wird und auch in Zusammenhang mit Anwendungen der Integralrechnung den Schüler*innen auffallend wenig Gelegenheit gegeben wird, diese ein Stück weit selbstständig zu erschließen.

In *Lösungswege Mathematik 8* verhält es sich wenig überraschend grundsätzlich ähnlich, wobei in Zusammenhang mit dem Theorieaufbau eine weitere Facette von G2 ebenfalls eine Rolle spielt. Die Basis für die Definition des bestimmten Integrals erfolgt nämlich bewusst in mehreren Schritten, wobei dies gewissermaßen einer schrittweisen Verallgemeinerung des ursprünglichen Problems entspricht und somit eine typische „Denk- und Arbeitsweise der Mathematik“ (Danckwerts & Vogel 2006: 103) widerspiegelt. Ein weiterer Unterschied ist, dass durch das frühere Erschließen weiterer Anwendungen G1

in *Lösungswege Mathematik 8* ebenfalls stärker zum Tragen kommt als in *Mathematik verstehen 8*. Da ähnlich wie in *Mathematik verstehen 8* auffallend viel mit Musterbeispielen gearbeitet wird, wird augenscheinlich auch hier G3 recht wenig Beachtung geschenkt.

Da sowohl *Thema Mathematik 8* als auch *Dimensionen Mathematik 8* in weiten Teilen dem Zugang über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen entsprechen, steht jeweils zumindest am Anfang hauptsächlich G2 im Vordergrund. Weil aber in beiden Fällen neben Flächeninhalten auch weitere Anwendungen der Integralrechnung bereits früh erschlossen werden, kommt auch G1 in beiden Schulbüchern durchaus deutlich zum Tragen. Der größte Unterschied zwischen den beiden Schulbüchern in Bezug auf die Ermöglichung der drei Winter'schen Grunderfahrung besteht darin, dass in *Thema Mathematik 8* ähnlich wie in *Mathematik verstehen 8* und *Lösungswege Mathematik 8* auffallend viel mit Musterbeispielen gearbeitet wird, während in *Dimensionen Mathematik 8* zwar auch zahlreiche Musterbeispiele vorkommen, aber zumindest bei der ersten Konfrontation mit dem Flächeninhaltsproblem sowie der ersten Konfrontation mit Stammfunktionsaufgaben gestellt werden, bei denen die Schüler*innen zunächst selbstständig Lösungsansätze finden sollen, bevor dann in weiterer Folge die jeweiligen Themen umfassend behandelt werden. Insofern könnte man argumentieren, dass G3 im Vergleich mit den anderen Schulbüchern in *Dimensionen Mathematik 8* am meisten Beachtung geschenkt wird.

5.2 Fachliche Korrektheit

Im Rahmen der Beschreibung der Zugänge¹³⁵, die in den vier Schulbüchern gewählt wurden, wurden bereits jeweils zahlreiche Bemerkungen bezüglich der fachlichen Korrektheit im Umgang mit mathematischen Begriffen gemacht. Da selbstverständlich kein Buch frei von Fehlern ist, soll auf einzelne Ungereimtheiten, die in den Schulbüchern jeweils auftreten, nun nicht noch weiter eingegangen werden. Stattdessen werden nun noch zwei Problembereiche besprochen, die in allen Schulbüchern zumindest in gewissem Maße auftreten und jeweils unterschiedlich große fachliche Schwierigkeiten verursachen.

5.2.1 Die Begriffe *Integrieren* und *Integrierbar*

Es wurde in Abschnitt 5.1.2 in Zusammenhang mit dem Stammfunktionsaspekt bereits diskutiert, dass das Verb *Integrieren* in allen Schulbüchern absichtlich mit zwei verschiedenen Bedeutungen belastet wird. Es wird nämlich damit einerseits das Berechnen bestimmter Integrale gemeint und andererseits das Bilden des unbestimmten Integrals beziehungsweise das Finden von Stammfunktionen. Diese Doppeldeutigkeit

¹³⁵siehe Abschnitt 5.1.1

kann sicherlich zu ähnlichen Verwirrungen führen wie der Begriff des unbestimmten Integrals an sich (vgl. Bender 1990: 118-119). Dennoch ist es die Erfahrung des Autors dieser Arbeit, dass beide Verwendungen des Verbs durchaus weit verbreitet sind, was vermutlich in weiten Teilen der großen Beliebtheit des unbestimmten Integrals¹³⁶ anzulasten ist.

So verbreitet diese Doppeldeutigkeit auch sein mag, so bleibt zu beachten, dass das entsprechende Adjektiv *Integrierbar* üblicherweise sehr wohl ein klar definierter mathematischer Begriff ist, der im Allgemeinen nichts mit Stammfunktionen zu tun hat beziehungsweise haben sollte (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 95).¹³⁷ Auffallend ist nun, dass das Adjektiv *Integrierbar* in den Schulbüchern *Mathematik verstehen 8* und *Lösungswege Mathematik 8* gewissermaßen zurecht gar nicht vorkommt, da das bestimmte Integral hier ohnehin nur für stetige Funktionen definiert wird und in beiden Schulbüchern im Rahmen der Definition plausibel gemacht wird, dass dieses existiert und eindeutig ist. Außerdem wird jeweils erwähnt, dass dies auch formaler begründet beziehungsweise bewiesen werden kann, was insgesamt an dieser Stelle bereits einem sicherlich mehr als ausreichenden Anspruch an mathematischer Exaktheit entspricht (vgl. Kirsch 1976: 96-97). Auch in *Dimensionen Mathematik 8* wird der Begriff *Integrierbar* nicht definiert, aber trotzdem an einer Stelle verwendet, vermutlich¹³⁸ um zu betonen, dass das man zu einer stetigen Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, stets eine differenzierbare Integralfunktion aufstellen kann. Das aus fachlicher Sicht größte Problem mit dem Begriff *Integrierbar* tritt in *Thema Mathematik 8* auf, da dort in Zusammenhang mit Stammfunktionen definiert wird, dass eine Funktion integrierbar ist, wenn sie eine Stammfunktion besitzt. Dass so eine Definition mit einer fachlicher Vertiefung über stetige Funktionen hinaus nicht vereinbar ist, wird im Übrigen im selben Schulbuch einige Seiten später demonstriert. Dort sollen Schüler*innen anhand einer stückweise konstanten Funktion explizit nachweisen, dass eine zugehörige Integralfunktion dann keine Stammfunktion ist, unmittelbar nachdem erklärt wurde, dass „auch Funktionen mit einer oder mehreren Sprungstellen integrierbar sind“ (Dorfmayr et al. 2020: 43).

Auch wenn die Autor*innen von *Thema Mathematik 8* mit der hier erwähnten Aufgabe ihre fachlich problematische Definition von Integrierbarkeit selbst ad absurdum führen, so ist ihnen dennoch anzurechnen, dass sie im Rahmen dieses Abschnitts im Schulbuch versuchen, den Schüler*innen einen kleinen „Einblick in die *Idee* der Weiterentwicklung des Integralbegriffs“ (Danckwerts & Vogel 2006: 124) zu geben. Damit ist *Thema Mathematik 8* das einzige der vier Schulbücher, die den Integralbegriff zumin-

¹³⁶siehe Abschnitt 2.4.3

¹³⁷siehe Abschnitt 2.4.2

¹³⁸Da der Begriff nicht definiert wird, ist dies an der entsprechenden Stelle im Schulbuch jedoch nicht vollständig klar.

dest in Ansätzen auch formal über stetige Funktionen hinaus öffnet. Obwohl nämlich in diesen Schulbüchern die Sinnhaftigkeit beziehungsweise Existenz dieser Integrale nicht thematisiert wird, kommen sowohl in *Lösungswege Mathematik 8* als auch in *Mathematik Dimensionen 8* Aufgaben zu stetigen Zufallsvariablen vor, deren Dichtefunktionen nicht stetig sind und trotzdem ohne zusätzliche Erklärungen entsprechend integriert werden sollen.

5.2.2 Das unbestimmte Integral

Der zweite Problembereich, der in allen vier Schulbüchern vertreten ist, ist die Behandlung des unbestimmten Integrals. Auch wenn der Begriff des unbestimmten Integrals als so wichtig erachtet wird, dass er im österreichischen Lehrplan für die AHS zu finden ist, ist es klar die Auffassung des Autors dieser Arbeit, dass ein *sauberer* Theorieaufbau zum unbestimmten Integral so umständlich ist und so wenig Vorteile besitzt, dass es sinnvoller wäre, dies gar nicht erst zu versuchen und dem Begriff minimale beziehungsweise keine Aufmerksamkeit zu schenken.¹³⁹ Außerdem wurde in Abschnitt 4.2.2 bereits erwähnt, dass auch in der einschlägigen Fachliteratur von einigen Autor*innen von der Einführung des unbestimmten Integrals in der Schule abgeraten und dabei häufig betont wird, dass dieser Begriff zu Verwirrungen führt (vgl. Bender 1990: 118-119, Blum & Törner 1983: 163). Diese Einschätzungen stimmen in weiten Teilen mit den Beobachtungen, die im Rahmen dieser Arbeit gemacht wurden, überein, da genau die Schulbücher am wenigsten fachliche Schwierigkeiten haben, die dem unbestimmten Integral am wenigsten Aufmerksamkeit schenken. In *Dimensionen Mathematik 8* wird das unbestimmte Integral lediglich definiert, jedoch nie verwendet. Daher beschränken sich die Probleme, die vom unbestimmten Integral ausgehen, auf einen Fehler in der Definition, da als Voraussetzung nur von einer stetigen Funktion und nicht von einer stetigen Funktion auf einem Intervall die Rede ist. Ähnlich verhält es sich in *Mathematik verstehen 8*, wobei zusätzlich zum gleichen Fehler in der Definition hier auch der Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren trivialerweise über das unbestimmte Integral erklärt wird.¹⁴⁰ In *Thema Mathematik 8* werden interessanterweise zunächst Integralfunktionen als unbestimmte Integrale¹⁴¹ bezeichnet. Dadurch wird zwar der Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren auf sinnvolle Weise erschlossen, jedoch wird in weiterer Folge fälschlicherweise „die Menge all dieser unbestimmten Integrale [...] $\int f(x) dx$ “ (Dorfmayr et al. 2020: 20) mit der Menge aller

¹³⁹siehe Abschnitt 2.4.3

¹⁴⁰siehe Abschnitt 5.1.2

¹⁴¹Vergleichbares ist z.B. auch in Forster (2016: 220-221) zu finden. In *Thema Mathematik 8* wird jedoch leider nicht erklärt, wie der Ausdruck

$$F(x) = \int_a^x f(u) du$$

im Fall $x \leq a$ zu verstehen ist (siehe Abschnitt 5.1.1).

Stammfunktionen von f gleichgesetzt und ab diesem Punkt nur noch die Schreibweise ohne Grenzen verwendet. Darüber hinaus werden dazu dann teilweise Aufgaben gestellt, die mit der Interpretation des unbestimmten Integrals als Menge überhaupt nicht vereinbar sind.

Zwischen den Funktionen f und g besteht folgender
Zusammenhang: $f'(x) = \int g(x) dx$
Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

f' ist eine Stammfunktion von g .	☐
g ist die Ableitungsfunktion von f .	☐
$\int f dx$ ist die Stammfunktion von g .	☐
f und g besitzen dieselbe Stammfunktion.	☐
$g'(x) = f(x)$	☐

Abb. 32: Aufgabe 93 (zu unbestimmten Integralen) in *Thema Mathematik 8*
(Dorfmayr et al. 2020: 25)

In *Lösungswege Mathematik 8* wird überhaupt das Thema Integralrechnung mit dem unbestimmten Integral begonnen. Das Problem mit dem Definitionsbereich, das in *Mathematik verstehen 8* und *Dimensionen Mathematik 8* auftritt, wird hier tatsächlich sogar vermieden. Ansonsten ist der Versuch eines Theorieaufbaus zum unbestimmten Integral allerdings an mehreren Stellen problematisch beziehungsweise derartig unpräzise, dass selbst im Rahmen der Einführung des Begriffs nicht klar hervorgeht, ob unter dem unbestimmten Integral eine Funktion oder eine Menge von Funktionen zu verstehen ist. Erklärungen zu Eigenschaften des unbestimmten Integrals, die in weiterer Folge gegeben werden, schaffen diesbezüglich dann ebenfalls keine Klarheit beziehungsweise sind insbesondere in Bezug auf die Schreibweise so inkonsistent, dass sie teilweise nicht einmal mit der ohnehin unpräzisen Definition zusammenpassen, die am Beginn gegeben wird.

6 Fazit

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die vier verschiedenen Schulbücher, die für die AHS-Oberstufe in Österreich in Frage kommen, in Hinblick auf die jeweils gewählten Zugänge zur Integralrechnung analysiert und dabei verstärkt darauf eingegangen, inwieweit die untersuchten Schulbücher den hohen Ansprüchen, die die Behandlung der Integralrechnung mit sich bringt (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 94, Greefrath et al. 2016: 262), gerecht werden.

Je zwei der Schulbücher verfolgen dabei sehr ähnliche Zugänge. Sowohl in *Mathematik verstehen 8* als auch in *Lösungswege Mathematik 8* entspricht der jeweils gewählte Zugang einer Mischung aus dem Zugang über die Umkehrung der Differentiation und dem über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen, während in *Thema Mathematik 8* und in *Dimensionen Mathematik 8* jeweils eine Variante des Zugangs über Flächeninhalte unter Funktionsgraphen gewählt wird, bei der neben dem Berechnen von Flächeninhalten auch weitere Anwendungen der Integralrechnung bereits früh erschlossen werden. Durch die Wahl dieser Zugänge und nicht zuletzt durch die Vorgaben des österreichischen Lehrplans, werden in allen Schulbüchern alle drei Aspekte des Integralbegriffs behandelt und auch die drei zentralen Grundvorstellungen erhalten in jedem der Schulbücher zumindest ein gewisses Maß an Aufmerksamkeit. Auch wenn also alle vier Schulbücher die Voraussetzung, „ein umfassendes Bild der Grundvorstellungen und Aspekte zum Integralbegriff zu vermitteln“ (Greefrath et al. 2016: 262), zumindest auf grundlegender Ebene erfüllen, so zeigen die Ergebnisse der Analyse im Rahmen dieser Arbeit zum Teil doch beträchtliche Unterschiede zwischen den Schulbüchern. Dabei wurde neben Aspekten und Grundvorstellungen auch auf den Umgang mit typischen Spannungsfeldern, inhaltliche Vernetzung, Ermöglichung der Winter’schen Grunderfahrungen und fachliche Korrektheit geachtet. Es gibt kein Schulbuch, das in Hinblick auf all diese Kriterien das Thema Integralrechnung besser behandelt als alle anderen und aufgrund der Vielzahl unterschiedlicher Kriterien ist eine zusammenfassende Reihung der Schulbücher in Bezug auf den Grad der Erfüllung dieser Kriterien grundsätzlich schwer begründbar. Es ist an dieser Stelle jedoch durchaus auffallend und bemerkenswert, dass *Dimensionen Mathematik 8* in vielen, durchaus zentralen Bereichen wie Grunderfahrungen, Aspekte und Grundvorstellungen besonders gut abschneidet, während *Mathematik verstehen 8* eben diese Kriterien in vielen Fällen kaum über ein gewisses Mindestmaß hinaus erfüllt.

Was die Wahl der Zugänge angeht, bleibt ganz allgemein noch anzumerken, dass keines der Schulbücher einen Zugang über die Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten gewählt hat, obwohl dieser, wie in Kapitel 4 umfassend diskutiert wurde, insbesondere in Bezug auf das Erschließen der Aspekte und Grundvorstellun-

gen sowie das Ermöglichen der Winter’schen Grunderfahrungen am besten geeignet erscheint. Eine durchaus erfolgreiche Umsetzung so eines Zugangs ist beispielsweise im deutschen Schulbuch *Mathematik Neue Wege* zu finden (vgl. Schmidt et al. 2010: 192-244). Ein Grund, warum sich dieser Zugang in Österreich bisher nicht durchgesetzt hat, könnte durchaus sein, dass er von allen in Kapitel 4 vorgestellten Zugängen die Vorgaben des österreichischen Lehrplans auf am wenigsten offensichtliche beziehungsweise direkte Art und Weise erfüllt (vgl. RIS 2021) und daher vielleicht die Sorge besteht, durch so einen Zugang ausgerechnet im Abschlussjahrgang wertvolle Zeit zu verlieren. Dabei handelt es sich jedoch lediglich um eine Hypothese. Eine genauere Untersuchung in Hinblick auf das Vermeiden dieses Zugangs in österreichischen Schulbüchern ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich und bedarf weiterer Forschung.

6.1 Ein Vorschlag

Nach dieser durchaus umfassenden Analyse möglicher unterrichtlicher Zugänge zur Integralrechnung und deren Umsetzung in Österreichs Schulbüchern für die AHS-Oberstufe soll nun noch ein Vorschlag für einen alternativen Zugang gemacht werden, der sich auf die Ergebnisse dieser Arbeit stützt und die verwendeten fachdidaktischen und fachlichen Kriterien dementsprechend gut erfüllt. Als Basis für diesen Vorschlag dient dabei der Zugang über die Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten, da sich dieser, wie bereits mehrfach erwähnt, insbesondere in Hinblick auf grundlegende fachdidaktische Kriterien am besten dafür zu eignen scheint, die „begriffliche Seite des Integrals“ (Danckwerts & Vogel 2006: 94) zu erschließen. Wie in Abschnitt 4.2.3 bereits verdeutlicht, ist dieser Zugang in der einschlägigen Literatur weit verbreitet und es sind darin auch teilweise sehr konkrete Vorschläge zur Umsetzung zu finden.¹⁴² Darüber hinaus existieren bereits deutsche Schulbücher wie beispielsweise *Mathematik Neue Wege*, die entsprechende Vorschläge durchaus erfolgreich umgesetzt haben (vgl. Schmidt et al. 2010: 192-244). Es ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, diese Vorschläge beziehungsweise insbesondere deren Umsetzung in deutschen Schulbüchern für die österreichische AHS-Oberstufe einfach zu übernehmen, da man diese selbstverständlich zunächst an die Voraussetzungen der österreichischen Schullandschaft anpassen muss. Dabei ist insbesondere darauf zu achten, dass eine Erfüllung des österreichischen Lehrplans im Rahmen der zeitlichen und fachlichen Ressourcen, die im Abschlussjahrgang der österreichischen AHS zur Verfügung stehen, in vollem Umfang möglich sein muss.

Ein auffallend typisches Merkmal eines Zugangs über die Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten ist ein Einstieg über das Rekonstruieren der Wassermenge in einer Badewanne bei bekannter Zufluss- und Abflussrate.¹⁴³ Der große Vorteil solcher

¹⁴²siehe z.B. Danckwerts & Vogel (2006: 93-127), Kirsch (1976), Tietze et al. (1997: 280-287)

¹⁴³siehe Abschnitt 4.2.3

Aufgaben ist, dass hierbei sogar mit stückweise konstanten Funktionen auf sinnvolle und anschauliche Weise bereits Grundlagen für alle zentralen Grundvorstellungen zum Integralbegriff geschaffen werden können und man dabei sogar von Anfang an mit geeigneten Interpretationen von orientierten Flächeninhalten konfrontiert ist. Der Einstieg soll daher auch im Rahmen dieses Vorschlags über solche Aufgaben erfolgen, wobei anders als bei Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel dem Rekonstruieren der Bestandsfunktion im Rahmen der ersten Aufgaben weniger Beachtung geschenkt werden sollte als dem Berechnen von Beständen zu bestimmten Zeitpunkten (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 96-99). Auch wenn in der einschlägigen Literatur dem Begriff der Integralfunktion oft der Vortritt gegenüber dem bestimmten Integral gegeben wird¹⁴⁴, so ist diese Vorgehensweise im Rahmen dieses Vorschlags schwer zu rechtfertigen, da die dominante Stellung des bestimmten Integrals im österreichischen Lehrplan für die AHS berücksichtigt beziehungsweise reflektiert werden sollte. Dieser dominanten Stellung erst zu einem späteren Zeitpunkt gerecht zu werden wäre wiederum mit den verfügbaren zeitlichen Ressourcen kaum vereinbar.

Neben Zu- und Abflussprozessen gibt es selbstverständlich zahlreiche weitere Sachzusammenhänge¹⁴⁵, die vor dem Hintergrund der Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten behandelt werden können und im Rahmen so eines Zugangs auch aufgegriffen werden sollten (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 102-103, Schmidt et al. 2010: 192-201). Da man bei der Plausibilisierung der Vorgehensweise in Zusammenhang mit Kontexten, die sich nicht mehr mit abschnittsweise konstanten Funktionen modellieren lassen, ohnehin bereits Produktsummen wie beispielsweise Unter- und Obersummen verwenden muss, würde sich im Kontext der österreichischen AHS an dieser Stelle nun eine Definition des bestimmten Integrals „als Zahl ‚zwischen‘ allen Ober- und Untersummen“ (RIS 2021) sowie die Einführung der üblichen Schreibweise anbieten. Dennoch sollte aber zu diesem Zeitpunkt, wie bei Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel empfohlen, eher anschaulich argumentiert werden¹⁴⁶ und eine analytische Präzisierung des Integralbegriffs trotzdem erst zu einem späteren Zeitpunkt vorgenommen werden (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 101). Um stattdessen weiterhin möglichst viel Anwendungsbezug und sinnvolle Eigentätigkeit¹⁴⁷ zu gewährleisten, sollten Aufgaben zu verschiedenen geeigneten Kontexten gestellt werden, in denen insbesondere auch viel mit abschnittsweise linearen Funktionen modelliert werden kann (vgl. Kirsch 1976: 91-94). In diesem Sinne geeignete Aufgaben sind übrigens durchaus auch in aktuellen österreichischen Schulbüchern für die AHS zu finden.¹⁴⁸

¹⁴⁴siehe Abschnitt 4.2.3

¹⁴⁵siehe Abschnitt 4.1.5

¹⁴⁶z.B. mithilfe entsprechenden Technologieeinsatzes

¹⁴⁷Damit sind Aufgaben gemeint, die für Schüler*innen gut zugänglich sind und gleichzeitig zur Begriffsbildung beitragen (vgl. Kirsch 1976: 90).

¹⁴⁸siehe Abb. 27 in Abschnitt 5.1.1

Bis hierhin steht im Rahmen dieses Vorschlags also hauptsächlich der Produktsummenaspekt sowie der Aufbau aller drei zentralen Grundvorstellungen im Mittelpunkt. Als nächstes soll nun der Stammfunktionsaspekt erschlossen werden, wobei dafür der Begriff der Integralfunktion ähnlich wie bei Rainer Danckwerts und Dankwart Vogel eingeführt werden soll.¹⁴⁹ Um diesen Begriff zu motivieren, lassen sich die Aufgaben zu abschnittsweise linearen Funktionen, die bereits verfügbar sind, auf naheliegende Weise erweitern und man kann dabei anhand einfacher graphischer Überlegungen sogar Funktionsgleichungen der entsprechenden Integralfunktionen beziehungsweise *Bestandsfunktionen* angeben (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 96-99, Kirsch 1976: 92-94). In einem wichtigen Abstraktionsschritt löst man sich dann von Sachzusammenhängen und betrachtet allgemein Integralfunktionen zu *Berandungen* mit hinreichend schönen Eigenschaften. Die bisherigen Aufgaben zum Aufstellen von Bestandsfunktionen legen in weiterer Folge die Aussage des ersten Teils des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nahe, dessen Aussage an dieser Stelle zumindest auf anschauliche Weise begründet werden sollte.

Da das Konzept der Stammfunktion sowie zentrale Sätze in dessen Zusammenhang bereits vollständig im Rahmen der Differentialrechnung behandelt werden können, sollte dies im Falle dieses Vorschlags genau so gemacht werden und vor der Behandlung des Themas Integralrechnung abgeschlossen worden sein. Auf Basis des Wissens über Stammfunktionen lässt sich dann auch der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung an dieser Stelle gut herleiten und beweisen (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 107). Mithilfe des Hauptsatzes lassen sich nun zahlreiche weitere Aufgaben zu diversen Anwendungen der Integralrechnung bearbeiten, wobei dazu auch das Berechnen von Flächeninhalten zählt. Außerdem können an dieser Stelle diverse Regeln für das Berechnen bestimmter Integrale sinnvoll behandelt und begründet werden, da sowohl der Produktsummenaspekt als auch der Stammfunktionsaspekt bereits dementsprechend ausreichend erschlossen sind. Abschließend muss nun noch einmal auf die Definition des bestimmten Integrals eingegangen und die Deutung des bestimmten Integrals als Grenzwert geeigneter Produktsummen etabliert werden. Dies dient einerseits einer Präzisierung des Integralbegriffs und andererseits dazu, beispielsweise das Berechnen von Volumina bei bekannter Querschnittsfläche oder der physikalischen Arbeit in entsprechenden Kontexten zu ermöglichen. Somit kann nun auch noch der Maßaspekt in ausreichendem Umfang erschlossen werden.

Der hier skizzierte Vorschlag ist damit gewissermaßen eine Variante des als besonders vorteilhaft einzustufenden Zugangs über die Rekonstruktion von Beständen aus Änderungsraten, die auf die speziellen Anforderungen der österreichischen AHS ab-

¹⁴⁹siehe Abschnitt 4.2.3

gestimmt ist. Lediglich die Behandlung des unbestimmten Integrals fehlt an dieser Stelle noch, um den Lehrplan vollständig zu erfüllen. Da dieser Begriff im Rahmen einer tragfähigen Theorieentwicklung jedoch ohnehin nicht förderlich ist, kann und sollte man ihn höchstens am Ende als inhaltliche Ergänzung erwähnen und als Menge aller Stammfunktionen einer stetigen Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, einführen. Dadurch wird dem unbestimmten Integral lediglich minimale Aufmerksamkeit geschenkt und gleichzeitig werden diverse Probleme, die mit der Definition dieses Begriffs oft einhergehen, zumindest auf formaler Ebene vermieden.

Literatur

- Baumert, Jürgen; Bos, Wilfried; Klieme, Eckhard; Lehmann, Rainer; Lehrke, Manfred; Hosenfeld, Ingmar; Neubrand, Johanna; Watermann, Rainer (Hrsg.) (1999). *Testaufgaben zu TIMSS/III – Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlussklassen der Sekundarstufe II (Population 3)*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.
- Bender, Peter (1990). Zwei „Zugänge“ zum Integralbegriff?. *Mathematica Didactica* Nr. 13, S. 102-127.
- Bleier, Gabriele; Lindenberg, Judith; Lindner, Andreas; Süß-Stepancik, Evelyn (2020). *Dimensionen Mathematik 8*. Wien: Westermann.
- Blum, Werner & Kirsch, Arnold (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht 25/Heft 3*, S. 6-24.
- Blum, Werner & Kirsch, Arnold (1996). Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. *Mathematik lehren/Heft 78*, S. 60 - 65.
- Blum, Werner & Törner, Günter (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- BMBWF (2019). *Webseite des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung – Allgemeinbildende höhere Schule (AHS)*.
<https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulsystem/sa/ahs.html> (9.6.2021).
- Büchter, Andreas & Henn, Hans-Wolfgang (2010). *Elementare Analysis*. Heidelberg: Spektrum.
- Danckwerts, Rainer & Vogel, Dankwart (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Berlin-Heidelberg: Spektrum.
- Deiser, Oliver (2011). *Analysis 1*. Berlin-Heidelberg: Springer Spektrum.
- Deiser, Oliver (2015). *Analysis 2* (2. Auflage). Berlin-Heidelberg: Springer Spektrum.
- Dorfmayr, Anita; Mistlbacher, August; Sator, Katharina; Zillner, Michaela (2020). *Thema Mathematik 8*. Linz: Veritas.
- Forster, Otto (2016). *Analysis 1* (12. Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Freiler, Philipp; Marsik, Julia; Mayer, Florian; Olf, Markus; Wittberger, Markus (2018). *Lösungswege Mathematik 8*. Wien: öbv.
- Freudenthal, Hans (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Furdek, Attila (2008). Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – und was in der Schule meist verschwiegen wird. *Mathematikinformation* Nr. 48, S. 15-26.
- Greefrath, Gilbert; Oldenburg, Reinhard; Siller, Hans-Stefan; Ulm, Volker; Weigand, Hans-Georg (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin-Heidelberg: Springer.
- Henn, Hans-Wolfgang (2018). „Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis“. In: Siller, Greefrath & Blum (Hrsg.). *Neue*

- Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4*, S. 145-160.
- Heuser, Harro (2009). *Lehrbuch der Analysis - Teil 1* (17. Auflage). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- vom Hofe, Rudolf (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum-Verlag.
- vom Hofe, Rudolf (1996). *Grundvorstellungen - Basis für inhaltliches Denken. Mathematik lehren/Heft 78*, S. 4-8.
- Kirsch, Arnold (1976). Eine „intellektuell ehrliche“ Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. *Didaktik der Mathematik 4/Heft 2*, S. 87-105.
- Kirsch, Arnold (1996). Der Hauptsatz anschaulich?. *Mathematik lehren/Heft 78*, S. 55-59.
- Knoche, Norbert & Wippermann, Heinrich (1986). *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis*. Zürich: Bibliographisches Institut.
- Malle, Günther; Koth, Maria; Woschitz, Helge; Malle, Sonja; Salzger, Bernhard; Ulovec, Andreas (2020). *Mathematik verstehen 8*. Wien: öbv.
- RIS (2021). *Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen*. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> (9.6.2021).
- Schmidt, Günter; Körner, Henning; Lergenmüller, Arno (2010). *Mathematik Neue Wege – Analysis*. Braunschweig: Schroedel.
- Schweiger, Fritz (1992). Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik/Heft 13*, S. 199-214.
- Tietze, Uwe-Peter; Klika, Manfred; Wolpers, Hans (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis*. Braunschweig: Vieweg.
- Winter, Heinrich (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61*, S. 37-46.

Abbildungsverzeichnis

1	Graphische Veranschaulichung der Beziehung $s \cdot (b - a) \leq U(Z) \leq O(Z) \leq S \cdot (b - a)$	3
2	Graphische Veranschaulichung von Unter- und Obersummen bei äquidistanten Zerlegungen ($n = 5$ bzw. $n = 15$)	5
3	Übergang von einzelnen Werten zur Zwischensumme bei der Mittelwertbildung	10
4	Die Funktion $f : [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihren Mittelwert $\mu(f)$ nicht als Funktionswert an.	11
5	Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\mathbb{R}$ integrierbar, besitzt aber keine Stammfunktion auf Intervallen, die die Stelle $x = 3$ enthalten.	12
6	g' besitzt eine Stammfunktion, ist aber z.B. über $[-1; 1]$ nicht integrierbar .	13
7	Grundvorstellungen und deren Rolle im Mathematikunterricht (vom Hofe 1996: 7)	20
8	Beispiel für das Zusammenspiel von Aspekten und Grundvorstellungen (Greefrath et al 2016: 147)	21
9	Zusammenspiel von Aspekten und Grundvorstellungen im Zusammenhang mit dem Integralbegriff (Greefrath et al. 2016: 238)	26
10	Die Graphen der stetigen Funktionen f und g beranden eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, der man mithilfe des bestimmten Integrals ihren Flächeninhalt A zuordnen kann.	32
11	Hier liefert das bestimmte Integral von h <i>nicht</i> den Flächeninhalt der vom Graphen und der x -Achse berandeten Teilmenge von $\mathbb{R}^2$	33
12	Aufgabe im Rahmen der internationalen Vergleichsstudie TIMSS im Jahr 1999 (Baumert et al. 1999: 80).	35
13	Annähern der Fläche durch gleich breite Rechtecke	43
14	Durch Erhöhung der Anzahl der Teilintervalle kann man sich mit Unter- und Obersummen graphisch schön an den gesuchten Flächeninhalt <i>herantasten</i> ($n = 4$ bzw. $n = 40$)	44
15	Richtungsfeld für Stammfunktionen von f mit $f(x) = x^2$	48
16	Modellierung eines konstanten Zuflusses/Abflusses und der in der Badewanne enthaltenen Wassermenge V zum Zeitpunkt t (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 97)	52
17	Graph der rekonstruierten Funktion V (vgl. Danckwerts & Vogel 2006: 98) .	53
18	Definitionen der Begriffe Zerlegung, Untersumme und Obersumme in <i>Mathematik verstehen 8</i> (Malle et al. 2020: 12)	61
19	Begründung für das Berechnen bestimmter Integralen mit Stammfunktionen in <i>Mathematik verstehen 8</i> (Malle et al. 2020: 18)	63
20	Aufgabe 2.44 in <i>Mathematik verstehen 8</i> (Malle et al. 2020: 18)	64

21	Aufgabe 1.17 in <i>Mathematik verstehen 8</i> (Malle et al. 2020: 18) ist die erste Aufgabe im Anschluss an die Definition des bestimmten Integrals	65
22	Definition der Begriffe Untersumme und Obersumme in <i>Lösungswege Mathematik 8</i> (Freiler et al. 2018: 25)	66
23	Aufgabe 75 in <i>Lösungswege Mathematik 8</i> (Freiler et al. 2018: 32)	68
24	Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung in <i>Lösungswege Mathematik 8</i> (Freiler et al. 2018: 25)	70
25	Definition der Begriffe Unter- und Obersumme sowie Links- und Rechtssumme in <i>Thema Mathematik 8</i> (Dorfmayr et al. 2020: 8)	71
26	„Flächenanteile unter der x -Achse ‚zählen negativ‘“ (Dorfmayr et al. 2020: 14)	72
27	Aufgabe 51 (zum Thema „Flächeninhalte im Kontext“) in <i>Thema Mathematik 8</i> (Dorfmayr et al. 2020: 17)	75
28	Definition der Begriffe Unter- und Obersumme in <i>Dimensionen Mathematik 8</i> (Bleier et al. 2020: 7)	76
29	Aufstellen einer <i>Flächeninhaltsfunktion</i> in <i>Dimensionen Mathematik 8</i> (Bleier et al. 2020: 30)	77
30	Ein Überblick zur Theorie in <i>Dimensionen Mathematik 8</i> (Bleier et al. 2020: 35)	81
31	„Integrale von Änderungsraten“ in <i>Mathematik verstehen 8</i> (Malle et al. 2020: 45)	86
32	Aufgabe 93 (zu unbestimmten Integralen) in <i>Thema Mathematik 8</i> (Dorfmayr et al. 2020: 25)	94

Tabellenverzeichnis

1	Überblick zu Grundlagen der horizontalen Vernetzung mit der Stochastik . .	90
---	--	----

Zusammenfassung

Die vorliegende Masterarbeit befasst sich mit unterrichtlichen Zugängen zur Integralrechnung in der gymnasialen Oberstufe sowie deren Umsetzung in Schulbüchern, die in entsprechenden Schulformen in Österreich zum Einsatz kommen. Um geeignete unterrichtliche Zugänge beschreiben und analysieren zu können, wird zunächst die fachliche und inhaltliche Komplexität des Integralbegriffs beleuchtet und es werden spezifische Ansprüche eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts diskutiert, die sowohl bei der Wahl des Zugangs als auch bei dessen Umsetzung eine Rolle spielen. Anhand der daraus hervorgehenden fachdidaktischen und fachlichen Kriterien werden daraufhin drei verschiedene Zugänge zur Integralrechnung, die in der einschlägigen Literatur eine lange Tradition besitzen, im Detail beschrieben sowie deren Umsetzung in vier verschiedenen Schulbüchern analysiert und diese dabei in Hinblick auf die erarbeiteten fachdidaktischen und fachlichen Kriterien systematisch miteinander verglichen. Die Analyse zeigt, dass alle vier Schulbücher die zentralen inhaltlichen Kriterien zumindest auf grundlegender Ebene erfüllen. In Bezug auf einzelne Kriterien bestehen allerdings zum Teil sehr große Unterschiede, wobei jedoch keines der Schulbücher in allen analysierten Bereichen gleichzeitig dominiert.

Abstract

This master's thesis investigates possible didactic approaches to integral calculus suitable for academic secondary schools in Austria and the ways in which these approaches are implemented in corresponding schoolbooks. At first, the great complexity of the concept of integration in terms of theory as well as application is systematically outlined and specific requirements of teaching mathematics with a focus on general education are discussed. With the help of criteria emerging from these considerations, three well-established didactic approaches to integral calculus are described in great detail and their implementations in four different Austrian schoolbooks are carefully analysed and compared with respect to each of the aforementioned criteria. The analysis shows that each of the four schoolbooks fulfils the criteria which are considered to be most essential at least to a minimal degree. However, considerable differences among the four schoolbooks can be identified when considering each criterion individually and none of the schoolbooks outperforms the others in all criteria simultaneously.