



universität
wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Explizite Definierbarkeit, Non-Kreativität und Eliminierbarkeit“

verfasst von / submitted by

Kevin Walkner, BA

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Arts (MA)

Wien, 2020 / Vienna 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 066 941

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Philosophie

Betreut von / Supervisor:

Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Georg Schiemer

Abstract

Mit dem Aufkommen formaler Methoden in der Philosophie wurde die traditionelle Definitionslehre grosso modo durch eine moderne, mathematische Definitionstheorie ersetzt.¹ In diesem Zusammenhang wurden die Bedingungen untersucht, unter denen die Erweiterung einer formalen Theorie und ihrer Signatur durch eine Formel eine definitorische Theorieerweiterung darstellt. Zu diesem Zweck wurden Explikationsvorschläge für zwei Definitionskriterien formuliert – d.h. zwei Kriterien, welche eine Formel, die eine Definition im Versuchssinn ist, erfüllen muss, um eine Definition im Erfolgssinn zu sein. Bei diesen beiden Kriterien handelt es sich um Eliminierbarkeit und Non-Kreativität.

Darüberhinaus wurde eine Definition für den Ausdruck 'Explizitdefinition' vorgeschlagen. Sie liefert im Wesentlichen syntaktische Bedingungen, denen eine bestimmte Teilklasse von jenen theorieerweiternden Formeln genügt. Tatsächlich konnte durch Joseph Shoenfield² gezeigt werden, dass jede Formel, die als Explizitdefinition eine neue deskriptive Konstante in eine Theorie einführt, diese Theorie um jene Konstante non-kreativ erweitert und jene Konstante in der neu gewonnenen Theorie eliminierbar macht – salopp: Es wurde gezeigt, dass explizite Definierbarkeit Non-Kreativität und Eliminierbarkeit impliziert.

Reinhard Kleinknecht³ konnte einige Jahre später beweisen, dass jede Konstante, die in einer Theorie eliminierbar ist, in dieser Theorie auch explizit definierbar ist – salopp: Er konnte zeigen, dass Eliminierbarkeit explizite Definierbarkeit impliziert. Verbunden mit dem Resultat von Shoenfield ergibt sich damit, dass, grob gesprochen, Eliminierbarkeit auch Non-Kreativität impliziert. Dieses Resultat scheint in die einschlägige Literatur Eingang gefunden zu haben. So schreibt etwa Edgar Morscher in (Morscher, 2017, p. 270): "Reinhard Kleinknecht hat nachgewiesen, dass die Eliminierbarkeit die Non-Kreativität impliziert. [...] Wir könnten also aus theoretischen Gründen auf das Kriterium der Non-Kreativität ganz verzichten."

Die vorliegende Arbeit geht der Frage nach, ob jede Definition im Wesentlichen eine Explizitdefinition ist. Um sie systematisch behandeln zu können, überführen wir sie in eine formale: Ist die Erweiterung einer Ausgangstheorie um eine Definition identisch mit ihrer Erweiterung um eine entsprechende Explizitdefinition?

Das Ergebnis der Arbeit hat zwei Hauptteile. Mit dem ersten wird eine Kritik an Kleinknechts Resultat vorgebracht. Wir werden dafür argumentieren, dass

¹vgl. (Suppes, 1957) und (Morscher, 2017)

²vgl. (Shoenfield, 1967)

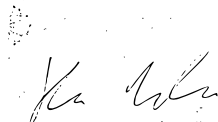
³vgl. (Kleinknecht 1979 & 1981)

sein Beweis nur erbracht werden konnte, weil die Bedeutung des Ausdrucks 'non-kreativ' unter der Hand geändert wurde; und zwar in einer Art und Weise, die den abgeänderten Begriff inadäquat macht. Genauer: Der ursprüngliche Begriff der non-Kreativität wird durch ein fünfstelliges Prädikat ausgedrückt, der neue hingegen nur durch ein dreistelliges. Mit dem neuen Begriff der Non-Kreativität kann aber nicht länger die relative Konsistenz von Theorien gefolgert werden, was jedoch für die definitionstheoretische Adäquatheit von jenem erforderlich ist. Daher bleibt auch nach Kleinknechts Resultat die zentrale Frage unserer Arbeit offen.

Mit dem zweiten Hauptteil wird jedoch ein Beweis dafür erbracht, dass jede geschlossene Formel, die eine Theorie um eine Konstante non-kreativ erweitert und diese Konstante eliminierbar setzt, äquivalent ist zu einer Explizitdefinition dieser Konstante – modulo Geschlossenheit und Äquivalenz also die Konverse zu Shoenfields Theorem.

Erklärung der selbständigen Erstellung

Hiermit erkläre ich, die vorgelegte Arbeit selbständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Alle wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommenen Textpassagen und Gedankengänge sind durch genaue Angabe der Quelle in Form von Anmerkungen bzw. In-Text-Zitationen ausgewiesen. Dies gilt auch für Quellen aus dem Internet, bei denen zusätzlich URL und Zugriffsdatum angeführt sind. Ferner versichere ich, diese Arbeit nicht bereits andernorts zur Beurteilung vorgelegt zu haben.



(Kevin Walkner)

Vorwort

Philosophie ist für mich keine blasse, akademische Disziplin, sie geht mir nahe. Reinhard Kleinknecht hat häufig verständnisvoll davon gesprochen, dass die „echten Fragen“ uns zurufen und nicht weggehen, auch wenn wir woanders hinschauen. Ein guter Teil der vorliegenden Schrift besteht aus Kritik an seinen Arbeiten. Dieser Umstand soll nicht darüber hinwegtäuschen, wie dankbar ich ihm bin und wie sehr ich ihn schätze und bewundere.

An der Universität Salzburg aber habe ich mich nicht nur bei ihm zu Hause gefühlt, auch bei Markus Hierl, Laurenz Hudetz, Jana Straßer und Alexander Zimmermann. Ich bin richtig, richtig dankbar, dass ich so viel von ihnen allen lernen konnte.

Der Abschluss des Masterstudiums ist trotz der schönen persönlichen Begegnungen eine kleine Behauptung des Willens – ständig benotet und bewertet zu werden, ECTS sammeln zu müssen und unter dem Druck von willkürlichen Deadlines zu arbeiten, ist eine grauenvolle Weise zu studieren und der gründlichen Auseinandersetzung mit Fragen und damit dem tieferen Verständnis der Inhalte abträglich, zumindest in meinem Fall.

Glücklicherweise hat sich Georg Schiemer bereit erklärt, meine Masterarbeit zu betreuen. Er hat mir in seiner unglaublich warmherzigen und zugewandten Art den Gang durch mein Studium mehrere Male erträglicher gemacht. Danke an ihn für den verständnisvollen Umgang auf Augenhöhe und für den lehrreichen inhaltlichen Austausch sowieso!

Danke auch für das Korrekturlesen der Arbeit an Paul Hüttinger, der an dieser Stelle nicht namentlich genannt werden möchte.

Aber am aller wichtigsten: Ich möchte mich bei meinen Eltern, Astrid und Benno, meinen Freund*innen, meiner Familie und meinem Hundefreund Camillo bedanken – ohne deren beständige Liebe wäre mir gar nichts möglich, weder akademisch noch sonst wie.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Definitionen – ein winziger historischer Abriss	5
1.2	Worum es in der Arbeit nicht geht	8
1.3	Aufbau der Arbeit und Bemerkungen zu Vorgangs- und Ausdrucksweise	13
2	Hilfsdefinitionen	17
2.1	Mengentheoretische Präliminarien	17
2.2	Konkatenation von endlichen Folgen	18
2.3	Auswahl von Tupelgliedern	22
3	Syntax	26
3.1	Alphabet	26
3.2	Einige grundlegende Definitionen	29
3.3	Erforderliche, auf die Syntax bezogene Theoreme	35
4	Semantik	54
4.1	Einige grundlegende Definitionen	54
4.2	Erforderliche, semantische Metatheoreme	61
5	Definitorische Erweiterungen von Theorien	76
5.1	Interpretationserweiterungen und Invarianz der Folgerungsbeziehung unter Signaturerweiterungen	79
5.2	Eine minimale Substitutionstheorie	94
5.3	Non-Kreativität und Eliminierbarkeit	100
5.4	Resultate von Shoenfield und Kleinknecht	103
5.5	Die Konverse zum Satz von Shoenfield	108
6	Coda	112

1 Einleitung

Mit dem Aufkommen formaler Methoden in der Philosophie wurde die traditionelle Definitionslehre grosso modo durch eine moderne, mathematische Definitionstheorie ersetzt.¹ In diesem Zusammenhang wurden die Bedingungen untersucht, unter denen die Erweiterung einer formalen Theorie und ihrer Signatur durch eine Formel eine definitorische Theorieerweiterung darstellt. Zu diesem Zweck wurden Explikationsvorschläge für zwei Definitionskriterien formuliert – d.h. zwei Kriterien, welche eine Formel, die eine Definition im Versuchssinn ist, erfüllen muss, um eine Definition im Erfolgssinn zu sein. Bei diesen beiden Kriterien handelt es sich um Eliminierbarkeit und Non-Kreativität.

Darüberhinaus wurde eine Definition für den Ausdruck 'Explizitdefinition' vorgeschlagen. Sie liefert im Wesentlichen syntaktische Bedingungen, denen eine bestimmte Teilklasse von jenen theorieerweiternden Formeln genügt. Tatsächlich konnte durch Joseph Shoenfield² gezeigt werden, dass jede Formel, die als Explizitdefinition eine neue deskriptive Konstante in eine Theorie einführt, diese Theorie um jene Konstante non-kreativ erweitert und jene Konstante in der neu gewonnenen Theorie eliminierbar macht – salopp: Es wurde gezeigt, dass explizite Definierbarkeit Non-Kreativität und Eliminierbarkeit impliziert.

Reinhard Kleinknecht³ konnte einige Jahre später beweisen, dass jede Konstante, die in einer Theorie eliminierbar ist, in dieser Theorie auch explizit definierbar ist – salopp: Er konnte zeigen, dass Eliminierbarkeit explizite Definierbarkeit impliziert. Verbunden mit dem Resultat von Shoenfield ergibt sich damit, dass, grob gesprochen, Eliminierbarkeit auch Non-Kreativität impliziert. Dieses Resultat scheint in die einschlägige Literatur Eingang gefunden zu haben. So schreibt etwa Edgar Morscher in (Morscher, 2017, p. 270): "Reinhard Kleinknecht hat nachgewiesen, dass die Eliminierbarkeit die Non-Kreativität impliziert. [...] Wir könnten also aus theoretischen Gründen auf das Kriterium der Non-Kreativität ganz verzichten."

Die vorliegende Arbeit geht der Frage nach, ob jede Definition im Wesentlichen eine Explizitdefinition ist. Um sie systematisch behandeln zu können, überführen wir sie in eine formale: Ist die Erweiterung einer Ausgangstheorie um eine Definition identisch mit ihrer Erweiterung um eine entsprechende Explizitdefinition?

¹vgl. (Suppes, 1957) und (Morscher, 2017)

²vgl. (Shoenfield, 1967)

³vgl. (Kleinknecht 1979 & 1981)

Das Ergebnis der Arbeit hat zwei Hauptteile. Mit dem ersten wird eine Kritik an Kleinknechts Resultat vorgebracht. Wir werden dafür argumentieren, dass sein Beweis nur erbracht werden konnte, weil die Bedeutung des Ausdrucks 'non-kreativ' unter der Hand geändert wurde; und zwar in einer Art und Weise, die den abgeänderten Begriff inadäquat macht. Genauer: Der ursprüngliche Begriff der non-Kreativität wird durch ein fünfstelliges Prädikat ausgedrückt, der neue hingegen nur durch ein dreistelliges. Mit dem neuen Begriff der Non-Kreativität kann aber nicht länger die relative Konsistenz von Theorien gefolgert werden, was jedoch für die definitionstheoretische Adäquatheit von jenem erforderlich ist. Wie wir sehen werden bleibt daher auch nach Kleinknechts Resultat die zentrale Frage unserer Arbeit offen.

Mit dem zweiten Hauptteil wird jedoch ein Beweis dafür erbracht, dass jede geschlossene Formel, die eine Theorie um eine Konstante non-kreativ erweitert und diese Konstante eliminierbar setzt, äquivalent ist zu einer Explizitdefinition dieser Konstante – modulo Geschlossenheit und Äquivalenz also die Konverse zu Shoenfields Theorem.⁴

1.1 Definitionen – ein winziger historischer Abriss

Wenn Sokrates Laches nach dessen Verständnis von 'Tapferkeit' fragt, erhält er eine Antwort der Form: Tapferkeit ist Φ . Unter welchen Bedingungen eine Antwort angemessen ist, ist im Allgemeinen schwer zu klären und scheint stark vom Kontext abzuhängen. In einer Vielzahl von Fällen sind es jedoch Definitionen, die eine angemessene Antwort liefern und nach denen mit 'Was ist X ?' verlangt wird.

Was sind Definitionen? In einer ersten Annäherung wollen wir Definitionen als sprachliche Gebilde⁵ auffassen, die die Bedeutung eines Wortes angeben.⁶

⁴Der inhaltliche Hauptteiler belegt nur das letzte Drittel der Arbeit. An dieser Stelle gemessen ist er also kein Hauptteil. Die penible, formallogische Vorbereitung auf den Seiten davor ist aber notwendig, um die Theoreme in den Abschnitten 5.4 und 5.5 im Detail beweisen zu können – und der Teufel sitzt bekanntlich im Detail.

⁵Wie Kleinknecht (1979, p.1) bemerkt, wäre eine Charakterisierung durch 'Satz, der die Bedeutung eines Wortes angibt' bereits zu eng, weil rekursive Definitionen dadurch ausgeschlossen würden. Auch ohne die Einschränkung auf Sätze, gelten etwa ostentive Definitionen bei diesem Verständnis nicht als Definitionen. (vgl. (Morscher, 2017)). Tatsächlich behandeln wir letzten Endes nur, was Richard Robinson in (Robinson, 1954) „definitions in mathematics“ nennt.

⁶Das mehrdeutige 'angeben' verbirgt unterschiedliche Auffassungen von Definitionen: 'angeben' kann nämlich u.a. reportiv oder stipulativ gemeint sein (vgl. Morscher, 2017, p. 177). Reportive Definitionen dienen dazu, einen Gebrauch eines Ausdrucks wiederzugeben, stipulative dazu, einen Gebrauch vorzugeben. Mit ihnen werden also verschiedene Zwecke verfolgt. Wir kümmern uns in dieser Arbeit nur um diejenigen Bedingungen, die einen sprachlichen

Nähere Auskunft über diese Frage geben die traditionelle Definitionslehre und die moderne Definitionstheorie. Erstere befasst sich mit Definitionen als natürlichsprachliche Phänomene und letztere mit Definitionen als formalsprachliche Phänomene und hat sich aus jener heraus entwickelt.

Gemäß der aristotelischen Definitionslehre erfolgt Definieren durch Angabe eines *genus proximum* und der *differentia specifica*. Definitionen dieser Art wurden in der nachfolgenden Literatur 'Realdefinitionen' genannt. Nach Aristoteles hat sich die Definitionslehre weiterentwickelt und es wurden unabhängig vom *genus proximum* und der *differentia specifica* Definitionsregeln formuliert.⁷ Ein sprachliches Gebilde galt dabei nur dann als Definition, wenn u.a.: (i) es das Wesen einer Sache bestimmte; (ii) es nicht negativ beschrieb (z.B.: „Force is not a kinematical notion“ (Suppes, 1957, p.151)); (iii) es keine unklaren, bildlichen oder mehrdeutigen Ausdrücke enthielt (z.B.: „Beauty is eternity gazing at itself in a mirror“ (Suppes, 1957, p.151)). Für Definitionsketten⁸ wurden darüberhinaus u.a. noch folgende Anforderungen formuliert: (i) Definitionsketten dürfen nicht zirkulär sein (z.B.: „abstrakt ist, was nicht konkret ist“ und „konkret ist, was nicht abstrakt ist“); (ii) Definitionsketten dürfen nicht zu Widersprüchen führen.

In der modernen Definitionstheorie wurden viele dieser Bedingungen verworfen. Auch deshalb, weil Definitionen in der exakten Rekonstruktion von naturwissenschaftlichen Theorien eine bedeutende Rolle zukam⁹, und es daher galt, sie von metaphysischem Ballast, wie etwa der Bedingung der Wesensbestimmung, zu befreien. Aber einige von ihnen haben ihren Weg in ein neues, formales Gewand gefunden. So etwa die beiden letztgenannten:

(1) Explizitdefinition sind Bisubjunktionsformeln, deren linke Bisubjunktionsglieder neben den zu definierenden Konstanten höchstens die logischen Ausdrücke Variable und Identitätsprädikat enthalten, und deren rechte Bisubjunktionsglieder neben dem logischen Vokabular nur Konstanten einer Signatur enthalten, welche die zu definierende Konstante selbst nicht enthält. Dadurch werden zirkelhafte Definitionsketten unmöglich gemacht, da das neue Vokabular (i.e. die zu definierende Konstante) nur über bereits vorhandenes Vokabular (i.e. die zugrundeliegende Signatur ohne die Konstante) eingeführt wird.

Ausdruck zu einer Definition machen und sowohl für reportive als auch für stipulative Definitionen gelten.

⁷Für eine detaillierte Behandlung dieser Angelegenheit siehe (Suppes, 1957, pp. 151-173) und (Morscher, 2017, pp. 175-223).

⁸'Definitionskette' ist hierbei in einem schwachen Sinn zu verstehen, und zwar derart, dass eine einzelne Definition auch eine (eingliedrige) Kette bildet.

⁹vgl. (Kleinknecht, 1979, p. V)

(2) In der modernen Definitionstheorie werden Theorieerweiterungen untersucht. Für definitorische Theorieerweiterungen wurden zwei Kriterien formuliert. Das Kriterium der Non-Kreativität garantiert, dass jede Erweiterung einer Theorie durch eine Formel konsistent ist, sofern es die Ausgangstheorie auch ist.¹⁰ Damit eine Formel, die eine Definition „sein will“, auch tatsächlich eine Definition ist, muss sie Theorien auf non-kreative Weise erweitern, und damit relativ-konsistent erweitern. Diese Voraussetzung ist das Pendant zum formalisierten Verbot für Definitionsketten, Widersprüche einzuführen – ein Umstand, der dem Non-Kreativitätskriterium u.a. die Berechtigung verleiht, ein Definitionskriterium zu sein.

Zu diesem Kriterium der Non-Kreativität wurde noch das Kriterium der Eliminierbarkeit hinzugefügt.¹¹ Der Grund dafür, zwei Kriterien anzugeben, besteht darin, dass beide Kriterien in einem gewissen Sinn voneinander logisch unabhängig, aber jeweils nötig sind, um definitorische Adäquatheit zu gewährleisten^{12, 13}

Was bedeutet das? Wir haben ein gewisses vortheoretisches Verständnis von 'Definition'. Dieses Verständnis ist zum Teil durch die traditionellen Definitionsregeln angedeutet. Wenn wir Definitionen im traditionellen Zusammenhang als sprachliche Gebilde auffassen, dann ist es naheliegend, sie im Rahmen einer formalen Theorie durch Formeln zu repräsentieren. Aber nicht jede Formel ist eine Definition – nur jene Formeln, die den beiden Definitionskriterien genügen: Eliminierbarkeit¹⁴ und Non-Kreativität.

Dieser Übergang von einem natürlichsprachlichen Verständnis von Definitionen hin zu einem formalsprachlichen ist nicht unproblematisch und bedarf sorgfältiger philosophischer Untersuchungen. Alle Rückschlüsse von diesem auf jenes sind deshalb mit großer Vorsicht zu ziehen.

Schlüsse dieser Art wollen wir in der vorliegenden Arbeit aber gar nicht

¹⁰vgl. (Morscher, 2017, pp. 266f)

¹¹Die beiden Kriterien gehen laut Kleinknecht (1979, p. 164) auf Pascal zurück.

¹²Non-Kreativität, u.a. weil Eliminierbarkeit allein relative Konsistenz nicht impliziert (Näheres dazu in Abschnitt 5) und Eliminierbarkeit, u.a. weil Non-Kreativität allein offensichtlich nicht-definitorische Theorieerweiterungen wie die folgende zulässt: Wenn eine Theorie aus dem logischen Abschluss der Formelmengende $\{\exists x Hx\}$ besteht und um die Formel $\exists x Px$ erweitert wird, dann liegt zwar eine non-kreative Erweiterung vor, aber $\exists x Px$ ist keine Definition der Konstante P .

¹³Beide Kriterien zusammengefasst machen eine definitorische Theorieerweiterung aus – ein Umstand, der sich in Kleinknechts Definition von 'definitorische Extension' (Kleinknecht, 1979, p. 211) widerspiegelt.

¹⁴Durch das Kriterium der Eliminierbarkeit soll die Idee eingefangen werden, dergemäß Definitionen nichts weiter als Abkürzungen für sprachliche Ausdrücke sind – und die definierten Ausdrücke im Grunde verzichtbar und daher „eliminierbar“.

erst versuchen, wir bewegen uns beinahe durchgehend im formalsprachlichen Bereich. Die einzige Ausnahme stellt unsere philosophische Kritik an Kleinknechts Resultat dar – eine Kritik, die nicht auf die formale Korrektheit seiner Beweise abzielt, sondern auf die definitionstheoretische Bedeutung der gewonnenen Erkenntnisse. In ihr werden wir auf den Umstand Bezug nehmen, dass die präzisen, formalsprachlichen Fassungen, die die beiden Kriterien etwa durch Definition 79 und Definition 80 erhalten, nur dann Definitionskriterien darstellen, wenn sie auf adäquate Weise die vortheoretischen Anforderungen an Definitionen (als Formeln) stellen. Für das Kriterium der Non-Kreativität bedeutet dies, die Bedingung der relativen Konsistenz zu umfassen. Wir werden diese Adäquatheitsbedingung für eine Präzisierung des Non-Kreativitätskriteriums nicht weiter hinterfragen. Wir behandeln Probleme, die sich erst auftun, wenn diese Voraussetzung gegeben ist.

1.2 Worum es in der Arbeit nicht geht

Es gibt eine Vielzahl von Verbindungen von der Definitionstheorie zu Themen anderer philosophischer Disziplinen oder Teildisziplinen. Einer dieser Verbindungen nachzugehen, drängt sich, für mich, förmlich auf: Was sagt uns die moderne Definitionstheorie darüber, was es heißt, eine Sache zu verstehen? Ist das Verstehen einer (formal korrekten und inhaltlich angemessenen) Definition eines Ausdrucks hinreichend für das (vollständige) Verstehen der Sache¹⁵, auf die sich der Ausdruck bezieht? Ist es notwendig?

Auf den ersten Blick scheint es zwei Typen von Phänomenen zu geben, die für Fragen dieser Art relevant sind: einerseits Verstehen, das durch Erfahrung gewonnen wird und andererseits theoretisches Verstehen.

Eine grobe Gegenüberstellung: Verstehen einer Sache durch Erfahrung kann erfolgen, auch wenn für das, was verstanden wird, noch keine Sprache entwickelt wurde. Daraus folgt nicht, dass Verstehen durch Erfahrung immer Verstehen ohne Sprache ist. Tatsächlich kann Verstehen durch Erfahrung auch darin bestehen, dass erst durch sie eine sprachliche Äußerung verstanden wird.¹⁶

¹⁵‘Verstehen’ wird hier offensichtlich mehrdeutig verwendet. Dementsprechend ist einiges durcheinander. Wie von Savigny (1979, p.19) bemerkt, geht mit der Angabe einer Definition häufig auch die Beschreibung eines Sachverhalts einher und daher scheinen die unterschiedlichen Bedeutungen des Ausdrucks miteinander verknüpft zu sein. In einer gründlichen Auseinandersetzung muss dieses Gewirr jedenfalls entflochten werden.

¹⁶Ich vermute, dass wir alle die Situation kennen: Wir führen ein Gespräch, sind ernsthaft bemüht, unser Gegenüber zu verstehen, aber bei einzelnen Brocken wissen wir nicht so recht, was wir mit ihnen anfangen sollen. Dann, ein paar Wochen oder Monate später der innerliche Aufschrei: ‘Ah, jetzt verstehe ich!’. Wir machen eine bestimmte Erfahrung und plötzlich haben

Theoretisches Verstehen zeichnet sich hingegen dadurch aus, dass gleichsam mit Begriffen und nur mit Begriffen gearbeitet wird, die dem Verstehen schon zur Verfügung stehen. Jedenfalls ist es keine Voraussetzung, relevante Erfahrung zu durchleben¹⁷, um Verständnis dieser Art zu erlangen.¹⁸

Gibt es einen echten Kontrast zwischen diesen beiden Arten zu verstehen?

die Worte eine (neue) Bedeutung. Wenn die Erfahrung nicht darin besteht, eine Definition zu lesen, dann scheinen wir mit Ereignissen dieser Art einen Fall von Verstehen ohne Definition vorliegen zu haben.

¹⁷Vielleicht gibt es in der Belletristik, Musik oder Kunst hinreichend lebendigen Ersatz für geliebte Erfahrung. Sagen wir also vorsichtshalber: Theoretisches Verständnis ist Verständnis, das erworben werden kann, ohne relevante Erfahrung oder einen hinreichend lebendigen Ersatz dafür durchlebt zu haben.

Anlass zu dieser Abschwächung sollte allein schon Tolstoy's Fabel über Verzweiflung geben – über einen Wanderer und seine Flucht vor der Bestie, die ihm nach dem Leben trachtet:

There is an old Eastern fable about a traveler who is taken unawares on the steppes by a ferocious wild animal. In order to escape the beast the traveler hides in an empty well, but at the bottom of the well he sees a dragon with its jaws open, ready to devour him. The poor fellow does not dare to climb out because he is afraid of being eaten by the rapacious beast, neither does he dare drop to the bottom of the well for fear of being eaten by the dragon. So he seizes hold of a branch of a bush that is growing in the crevices of the well and clings on to it. His arms grow weak and he knows that he will soon have to resign himself to the death that awaits him on either side. Yet he still clings on, and while he is holding on to the branch he looks around and sees that two mice, one black and one white, are steadily working their way round the bush he is hanging from, gnawing away at it. Sooner or later they will eat through it and the branch will snap, and he will fall into the jaws of the dragon. The traveler sees this and knows that he will inevitably perish. But while he is still hanging there he sees some drops of honey on the leaves of the bush, stretches out his tongue and licks them. In the same way I am clinging to the tree of life, knowing full well that the dragon of death inevitably awaits me, ready to tear me to pieces, and I cannot understand how I have fallen into this torment. And I try licking the honey that once consoled me, but it no longer gives me pleasure. The white mouse and the black mouse – day and night – are gnawing at the branch from which I am hanging. I can see the dragon clearly and the honey no longer tastes sweet. I can see only one thing; the inescapable dragon and the mice, and I cannot tear my eyes away from them. And this is no fable but the truth, the truth that is irrefutable and intelligible to everyone.

The delusion of the joys of life that had formerly stifled my fear of the dragon no longer deceived me. No matter how many times I am told: you cannot understand the meaning of life, do not think about it but live, I cannot do so because I have already done it for too long. Now I cannot help seeing day and night chasing me and leading me to my death. This is all I can see because it is the only truth. All the rest is a lie.

Those two drops of honey, which more than all else had diverted my eyes from the cruel truth, my love for my family and for my writing, which I called art – I no longer found sweet. (Tolstoy, 1987, p.64f)

¹⁸Vielleicht ist diese Gegenüberstellung schon deshalb verfehlt, weil durch sie eine klassifikatorische Einteilung vorgenommen wird. Vielleicht ist es angemessen, davon auszugehen, dass Verstehen in Graden erfolgt: Selbst in einer hoch theoretischen Disziplin wie der Topologie können Skizzen von Linien, Schleifen und Punkten, das Verständnis von Ausdrücken wie etwa 'stetig' vertiefen – auch dann, wenn die Definition über Urbilder von offenen Mengen sitzt.

Van Fraassen scheint dieser Ansicht zu sein, wenn er schreibt:

Suppose that, in a philosophical way, I do not understand ethics or science or religion. It might be one thing to take me by the hand and lead me into relevant experience. That might allow me to acquire a deeper sense of insight into those aspects of human existence. It would be quite another thing – and to the empiricists of little or no value – to postulate that there are certain entities or realms of being about which ethics (or science, or religion) tells us a true story. (van Fraassen, 2002, p.37)

Für Empirist*innen wie van Fraassen ist Metaphysik mitunter ein gefährliches Hemmnis für das authentische Verstehen einer Sache.¹⁹ Finden wir also in der Metaphysik klare Beispiele für theoretisches Verstehen? Hilary Putnam scheint Verstehen, wie es in der Metaphysik erfolgen kann, jedenfalls auch einer anderen Art von Verstehen gegenüber zu stellen:

I see the attempt to provide an Ontological explanation of the objectivity of mathematics as, in effect, an attempt to provide *reasons which are not part of mathematics for the truth of mathematical statements* and the attempt to provide an Ontological explanation of the objectivity of ethics as a similar attempt to provide *reasons which are not part of ethics for the truth of ethical statements*; and I see both attempts as deeply misguided. Seeing that and how they are misguided is an absolute prerequisite to recovering our common sense in these areas. (Putnam, 2005, p.3-4)

Damit ist aber natürlich nicht gesagt, dass er denselben Kontrast aufzieht wie

¹⁹Aus empiristischer Sicht (vgl. van Fraassen, 2002, p.1-30 & insbesondere p.37) zeichnet sich metaphysisches Treiben durch unnachgiebiges Verlangen nach Erklärungen aus und eine gleichzeitige Zufriedenstellung dieses Verlangens durch Postulate, die unmöglich durch Erfahrung widerlegt werden können ('unmöglich' ist hier in einem metaphysisch harmlosen, begrifflichen Sinn gemeint. (vgl. van Fraassen, 1977)). Metaphysiker*innen gehen dabei wie folgt vor: Zunächst wird eine Ontologie bestimmt, die festlegt, was es gibt bzw. was wirklich ist und was nicht. Auf Basis dieser Ontologie wird dann ein Teil einer natürlichen Sprache, oder eine gesamte natürliche Sprache neu interpretiert.

So wird aus 'Rosa ist seit ihrem 18. Lebensjahr Antifaschistin, davor war sie es nicht.' bei Aristoteles eine Behauptung über Substrata, bei David Lewis eine Behauptung über mereologische Teile von zeitlich ausgedehnten Entitäten (vgl. Simons, 1991) und bei Peter Simons eine Behauptung über Tropen (vgl. Simons, 1994). In allen drei metaphysischen Erzählungen soll erklärt werden können, wie die behauptete Veränderung möglich ist bzw. worin sie *wirklich* besteht. Auf diese Weise, so die empiristische Kritik, werden jedoch wahre und gut verständliche Aussagen in etwas verwandelt, das kaum noch jemand versteht und von dem niemand mehr so recht weiß, ob es wahr oder falsch sein soll.

wir.²⁰ Aber auch unabhängig von Metaphysik scheint es ihn zu geben: Wenn wir einen bestimmten menschlichen Lebensbereich verstehen wollen, ist es häufig hilfreich, darauf zu achten, welche Fragen in diesem Bereich relevant sind. Nehmen wir eine Situation, in der ich eine moralisch relevante Entscheidung zu treffen habe. Eine Neuropsychologin könnte sich dafür interessieren, welche Gehirnareale in diesem Moment besonders stark durchblutet sind, welche Botenstoffe wo und in welchem Ausmaß ausgeschüttet werden. Eine Evolutionsbiologin könnte in ihren Modellen nach Erklärungen für in diesem Moment auftretende Gefühle und Bedürfnisse suchen. Eine Psychologin könnte unter Berücksichtigung sozialer Faktoren eine Vorhersage versuchen und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf meine Handlungsalternativen legen. Nichts davon berührt, worum es in dieser Situation *für mich* geht. Nichts davon hilft mir, wenn ich mit der Frage ringe 'Was soll ich tun?'.

²⁰Theoretische Überlegungen können bei Putnam auch Teil des „common sense“ sein. Der Kontrast, den van Fraassen in obiger Stelle andeutet, dürfte wohl eher von dieser Art sein:

Es ist eine Sache, Tierrechte im Abstrakten zu studieren. Tom Regan (2004) etwa postuliert einen inhärenten Wert für nicht-menschliche Tiere und trägt mit seinen Ausführungen vermutlich dazu bei, dass theoretische Widerstände in uns aufgeweicht und anti-speziesistische Anliegen verständlicher werden; vielleicht erschweren er und andere Tierethiker*innen durch ihre Argumente theoretische Ausflüchte, die vorgeben, uns von der Verantwortung einer aufrichtigen moralischen Entscheidung zu befreien.

Ganz etwas anderes ist es aber, wenn ich einen Hund in mein Leben lasse, ihn näher kennenlernen – seine Neigungen, seine Eigenheiten – und beginne, ihn nach und nach als Person zu sehen. Wenn ich dann beobachten muss, wie er aus der Überzeugung speziesistischer Überlegenheit und Bosheit heraus brutal geschlagen, getreten und verletzt wird, dann *erlebe* ich mit voller Wucht unverkennbare, moralisch verwerfliche Grausamkeit. In so einem Moment ist das Unrecht ebenso deutlicher Teil meiner Erfahrung, wie die Farben seiner schweren Pfoten. Theoretische Überlegungen tun bei einer solchen Erfahrung nichts zur Sache.

William James stemmt sich in *A World of Pure Experience* gegen die Analyse der Rationalist*innen von Begriffen in abstrakten Zerrbildern: „Practically to experience one's personal continuum in this living way is to know the originals of the ideas of continuity and sameness, to know what the words stand for concretely, to own all that they can ever mean.“ (James, 1922, p.50) Sind wir nicht versucht zu sagen, dass wir mit dem, was uns in dieser Gewalterfahrung offenbart wird, verstehen, was jemand behauptet, wenn sie*er sagt, speziesistische Gräueltaten seien von gleichem Rang wie rassistische oder sexistische? „To own all that it can ever mean“? Auch wenn wir nicht so weit gehen wollen wie James, scheint sich das Verstehen einer Sache nicht im theoretischen Verstehen zu erschöpfen, es kann durch Erfahrung bereichert werden. Vielleicht ähnlich wie Marrys Gang ins Freie in (Chalmers, 1996) ihr Verständnis von Farben bereichert? Können wir ähnliche kritische Schlüsse daraus ziehen wie Chalmers?

Natürlich ist nachträgliche, kritische Reflexion des Erlebten vernünftig; nicht umsonst bereuen wir Handlungen gegenüber Personen, die wir im Rausch von Wut und Zorn als schlechter Behandlung würdig gesehen haben. Metaphysiker*innen sehen darin ein theoretisches Problem: Entweder gelingt es uns, eine metaphysische Unterfütterung unserer Erfahrung zu finden, „to make our actual experience again seem rationally possible“ (James, 1922, p.49). Oder wir können nicht ernst nehmen, was wir erlebt haben.

Ich sehe die Notwendigkeit für eine metaphysische Unterfütterung nicht, im Gegenteil: In meinen Augen haben wir im Nachhinein kein rein theoretisches Problem vor uns, sondern ein moralisches und praktisches, insbesondere eines von Wille und Entscheidung (vgl. Sartre, 2007 & van Fraassen, 1988, 2002 & 2008).

Wir verstehen durch Erfahrung, welche Fragen relevant sind; und dieses Verständnis der Situation gewinnen wir nicht allein durch das („theoeretische“) Studieren von Modellen oder Theorien.

Wenn das Verstehen einer Definition eines Ausdrucks ein Spezialfall von theoretischem Verstehen ist, dann ist es also vielleicht weder hinreichend noch notwendig für das Verstehen einer Sache, auf die sich der Ausdruck bezieht.

Gleichzeitig können wir nicht leugnen, dass Definitionen uns in irgendeinem Sinn (besser) verstehen lassen. Vielleicht besteht der Fortschritt nur in gewonnener Klarheit über begriffliche (und damit deduktive) Beziehungen. Die philosophische Tiefe dieser ganzen Angelegenheit ist für unsere kleine, formale Untersuchung jedenfalls unerreichbar. Wir werden uns in dieser Arbeit nicht darum kümmern.

Neben den Fragen zu Verstehen, ließe sich zum einen mit mehr oder weniger technischen, aber philosophischen Themen an die Ergebnisse der Arbeit anschließen. Da sind etwa die Konsequenzen für die Debatten zu Äquivalenz und Reduktion von empirischen Theorien, die in jüngerer Zeit in Wissenschaftslogik-Publikationen geführt wurden (vgl. Hudetz, 2018 & 2019), in denen die syntaktischen Rekonstruktionen von empirischen Theorien wieder eine Rolle spielen.²¹ Oder die Frage, ob sich neue theoretische Terme in der Physik auf Basis von kinematischen oder anderen bereits „wohlverstandenen“ Begriffen definieren lassen (vgl. van Fraassen, 2010).

Zum anderen gäbe es auch innerhalb der mathematischen Logik naheliegende Anknüpfungspunkte: Lassen sich die Resultate auf eine Prädikatenlogik höherer Stufe, oder mehrsortige Logiksysteme übertragen? Oder nicht-klassische Logiksysteme? Welche Korollare ergeben sich unter Hinzunahme von Evert Beths Resultaten zu impliziter Definierbarkeit (vgl. Beth, 1953), welche in Hinblick auf numerische oder rekursive Definierbarkeit (vgl. Kleinknecht, 1979), oder bedingte²² Definitionen? In Abschnitt 5 werden wir nachweisen, dass sich Non-

²¹Definitische Erweiterungen von Theorien tun dies dabei sogar explizit, beispielsweise in (Barrett & Halvorson, 2016 & Halvorson, 2019).

²²Der definitionstheoretische Status von den sogenannten „bedingten Definitionen“ ist bislang nur unzureichend geprüft worden. In (Suppes, 1957, p.165) finden wir eine Explikation, die wir wie folgt auf Prädikatkonstanten übertragen:

Definition. *D ist eine bedingte Prädikatkonstanten-Definition von P in T auf Basis von S und σ gdw*

- (a) σ ist eine Signatur.
- (b) S ist eine σ -Theorie.
- (c) $P \in \mathcal{PK} \setminus \overset{(1)}{\sigma}$.

Kreativität nicht aus Eliminierbarkeit allein folgern lässt. Aber wie steht es um Eliminierbarkeit und relative Konsistenz?

Alles das sparen wir aus. Wir behandeln ein sehr spezifisches, formales Problem, das sich allerdings nur aufgetan hat, weil Philosoph*innen in der Vergangenheit Fragen ähnlich denen in diesem Unterabschnitt beharrlich nachgegangen sind.

1.3 Aufbau der Arbeit und Bemerkungen zu Vorgangs- und Ausdrucksweise

Nach der lockeren und bisweilen etwas polemischen Einleitung ist die Arbeit auf folgende Weise strukturiert: Wir behandeln die zentrale Frage (i.e.: Ist jede Definition eine Explizitdefinition?) als eine formale (i.e.: Ist die Erweiterung einer formalen Theorie um eine Definition identisch mit ihrer Erweiterung um eine entsprechende Explizitdefinition?), wodurch die beiden Beiträge zur Beantwortung dieser Frage Gegenstand mathematischer Beweise gemacht werden können. Die beiden Beiträge haben die Form von Behauptungen, näherhin von Theoremen in den Abschnitten 5.4 und 5.5. Alles in den vorangehenden Abschnitten und Unterabschnitten ist unerlässliche Vorarbeit – jede Definition, jedes Theorem und Lemma wird benötigt, um die Nachweise für Theorem 21, 22 und 23 im Detail erbringen zu können.

Zu diesem Zweck wird ein formalsprachlicher Rahmen aufgebaut. Das heißt, wir geben in Abschnitt 3 die Syntax einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe und in Abschnitt 4 eine dazugehörige Semantik an. Inhaltlich sind die damit umfassten Definitionen, Lemmata und Theoreme gewissermaßen „Logik-

-
- (d) D ist eine geschlossene $\sigma(+)$ - P -Formel
 - (e) Für mindestens eine σ -Formel E , mindestens eine σ -Formel B , sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge t gilt:
 - (a) $t(i) \in \mathcal{V}$ für jedes i , mit $1 \leq i \leq \dot{P}$, und $|img(t)| = \dot{P}$
 - (b) $fr(B) \subseteq \{v | v \in dom(t)\}$ und $fr(E) = \{v | v \in dom(t)\}$.
 - (c) $D = \forall t_1 \dots \forall t_{\dot{P}} (B \rightarrow \langle Pt_1 \dots t_{\dot{P}} \leftrightarrow E \rangle)$
 - (d) $T = cn_{\sigma(+), P}(S \cup \{D\})$

Meines Wissens wurde Suppes Vorschlag in keiner Publikation kritisch geprüft. Der so explizierte Begriff ist jedenfalls zu weit, weil demgemäß bedingte Definitionen unter der Bedingung $S \models^\sigma \forall t_1 \dots \forall t_{\dot{P}} B$ mit expliziten Definitionen äquivalent sind; und eine gelungene Explikation muss jene klar von diesen unterscheiden. Die Negation der Bedingung (also: $S \not\models^\sigma \forall t_1 \dots \forall t_{\dot{P}} B$) ins Definiens zu nehmen, führt zu einem zu engen Explikat, weil bedingte Definitionen dann nur in konsistente Theorien eingefügt werden könnten. Ob die Ergänzung durch die Bedingung ' $S \models^\sigma \exists t_1 \dots \exists t_{\dot{P}} \neg B$ ' ein adäquates Explikat bringt, wurde noch nicht untersucht.

Allgemeingut“.²³ In ihrer Ausformulierung unterscheiden sie sich dennoch stark von dem meisten, was man in der einschlägigen Literatur findet, insbesondere der Sprachaufbau über endliche Folgen (in dieser Form) und die Zusammenfassung von Konstanteninterpretationen und Variablenbelegungen in einer Interpretationsfunktion. Die verbleibenden Unterschiede im weiteren Verlauf lassen sich beinahe alle auf diese beiden zurückführen. Die größte Ähnlichkeit besteht naheliegender Weise zu den Definitionen von Kleinknecht (1979). Dies gilt insbesondere für die definitionstheoretischen Begriffe²⁴ in Abschnitt 5. Aufgrund dieser Eigenheit im Aufbau konnten jedenfalls keine Beweise aus der Literatur übernommen, sondern mussten eigenständig ausgeführt werden.

In Abschnitt 2 werden mengentheoretische Vorbereitungen getroffen. Jede Behauptung dieser Arbeit ist trivial, wird explizit bewiesen²⁵ oder beruht auf mengentheoretischen oder arithmetischen Voraussetzungen. Jeder technische Ausdruck in dieser Arbeit wird explizit definiert oder stammt aus einer Mengentheorie oder der Arithmetik. In Abschnitt 2.1 werden diese undefinierten Ausdrücke eingeführt. In Abschnitt 2.2 wird eine Operation bestimmt, die endliche Folgen aneinanderfügt und in Abschnitt 2.3 eine Funktion, mit der sich jedes Glied von „wohlgeformten“ n -Tupel eindeutig auswählen lässt – in beiden Fällen sind nahezu alle Definitionen neu und nicht Teil des „Logik-Allgemeinguts“.

In Abschnitt 3.1 wird das Alphabet der formalen Sprache angegeben. Darauf aufbauend werden in Abschnitt 3.2 die Begriffe der Signatur, des Ausdrucks, des Terms und der Formel über einer Signatur eingeführt. In Abschnitt 3.3 werden wir zeigen, dass Beweise mittels vollständiger Induktion über Term- und Formelgrade im erforderlichen Sinn möglich sind.

Alle für die Semantik erforderlichen Begriffe werden in Abschnitt 4.1 eingeführt: Konstanteninterpretation, Variablenbelegung, Termwert, Variablenvarianten, Modell, Folgerung, Theorie, Konsistenz und Inkonsistenz. In Abschnitt 4.2 werden u.a. Behauptungen zur eindeutigen Bestimmtheit und Koinzidenz bzgl. Interpretationen bewiesen und es werden wichtige Folgerungszusammenhänge und Bedingungen für konsistente und inkonsistente Theorien nachgewiesen.

Abschnitt 5 ist definitorischen Erweiterungen von Theorien gewidmet. Wir

²³Für eine exakte Rekonstruktion dieses Allgemeinguts siehe (Kleinknecht & Wüst, 1976a & 1976b).

²⁴Was bei Kleinknecht und Morscher 'non-kreativ' heißt, wird von manchen anderen Autor*innen 'konservativ' genannt. (vgl. Barrett & Halvorson, 2016)

²⁵Streng genommen, sind durch diese Unterscheidung nicht alle Fälle abgedeckt: In manchen Beweisen mittels vollständiger Induktion wird die Basisbehauptung bewiesen und der Beweis für die triviale Schrittbehauptung ausgespart. 'o.B.' ist kurz für 'ohne Beweis'.

definieren die Prädikate 'Theorieerweiterung', 'non-kreativ', 'eliminierbar' und 'Explizitdefinition'. In Abschnitt 5.3 werden die logischen Verbindungen zwischen den beiden Definitionskriterien Eliminierbarkeit und Non-Kreativität im Detail aufgezeigt. Mit den Abschnitten 5.1 und 5.2 werden davor die letzten definitionstheoretischen, substitutionstheoretischen und sonstigen begrifflichen Vorbereitungen getroffen, um in Abschnitt 5.4 und 5.5 die beiden Hauptresultate der Arbeit im Detail nachweisen zu können – eines kritisch, das andere konstruktiv.

Bei dem kritischen Resultat handelt es sich um Theorem 21. Mit ihm wird gezeigt, dass non-kreative Theorieerweiterungen in Kleinknechts Sinn nicht in allen Fällen relativ-konsistente Theorieerweiterungen sind. Daher, so wird in Abschnitt 5.4 weiter argumentiert, liefern Kleinknechts Arbeiten keinen Beweis für die Behauptung, dass Non-Kreativität aus Eliminierbarkeit folgt.

Bei dem konstruktiven Resultat handelt es sich um Theorem 22 und Theorem 23 in Abschnitt 5.5. Mit ihnen wird nachgewiesen, dass eine Theorieerweiterung um eine Definition (als geschlossene Formel) identisch ist mit ihrer Erweiterung um eine entsprechende Explizitdefinition.

Die Kritik an Kleinknechts Resultaten ist keine Kritik, die auf die formale Korrektheit der Beweise abzielt, sondern eine bzgl. der inhaltlichen Adäquatheit. Auf gleiche Weise, könnte an den Theoremen 22 und 23 kritisiert werden, dass sie definitorische Artefakte sind, insbesondere zumal die Syntax und Semantik recht eigenwillig aufgezogen werden. In Bezug auf die Semantik können wir beschwichtigend auf das Generalisierungstheorem, das Deduktionstheorem, das Resolutionstheorem und Koinzidenztheoreme in Bezug auf Variablen, Terme, Formeln und Interpretationserweiterungen verweisen, und auf die Monotonie der Folgerungsrelation und die üblichen Bedingungen für konsistente und inkonsistente Theorien, was alles im Laufe der Arbeit bewiesen werden. Vollständigkeit und Korrektheit sollten sich zeigen lassen, wurden aber nicht eigens bewiesen. Bewiesen, aber nicht abgetippt, sind die eindeutige Lesbarkeit von Formeln, die identische Anzahl linker und rechter Klammern in Formeln, das Transparenztheorem²⁶, sowie die Behauptung, dass jedes echte Anfangssegment

²⁶

Definition. A ist ein konstitutiver Bestandteil von B gdw für mindestens eine Signatur σ gilt:

- (a) B ist eine σ -Formel
- (b) für jedes Σ gilt: wenn Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für B ist, dann gilt für mindestens ein $i \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq i \leq \tilde{\Sigma}$: $\Sigma(i) = A$.

einer Formel keine Formel ist – der Sprachaufbau dürfte somit ebenfalls für eine prädikatenlogische Sprache erster Stufe adäquat sein.

In Bezug auf die Definitionen, Theoreme, Korollare, Lemmata und Beweise wurde Wert auf Präzision gelegt. Die wenigen Erläuterungen, die durch den formalen Teil begleiten wurden eher locker gehalten.

Die sprachlichen Gebilde, die im Laufe der Arbeit unmittelbar auf den Ausdruck ‘Definition’ folgen, sind natürlich keine Definitionen im in dieser Arbeit studierten, formalsprachlichen Sinn. Sie sind vielmehr ihre natürlichsprachlichen Pendanten, angereichert um Symbole aus der Mathematik. Es wurde darauf Wert gelegt, dass sie ihren syntaktischen Aufbau betreffend formalsprachlichen Definitionen entsprechen. Das heißt, bei Analoga zu Explizitdefinitionen trennen wir das logisch einfache Definiendum eindeutig vom Definiens, in unserem Fall durch die Satzverknüpfung ‘genau dann, wenn’, oder kurz: gdw. Wird ein Eigenname oder ein Funktionsausdruck durch einen Identitätssatz mit dem Symbol ‘:=’ definiert, so ist die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingung nachweisbar. Um anzudeuten, dass wir einen Ausdruck rekursiv definieren wollen, wird nach dem ‘gdw’ zunächst die Grundmenge angegeben, auf der die Rekursion durchgeführt wird und dann der Zusatz ‘allein aufgrund folgender rekursiver Bestimmungen ergibt’ angefügt – dieser ersetzt die sonst gebräuchliche Abschlussklausel.

Eine letzte Bemerkung: An manchen Stellen sprechen wir von Definitionen von Begriffen. Da Begriffe, so wie wir sie in dieser Arbeit verstehen, keine rein syntaktischen Gebilde sind, sollte es genauer heißen: ‘Definition von einem Ausdruck, der einen Begriff ausdrückt’. Wir bleiben bei der Kurzform.

Theorem o.B.: Für jedes σ , jede σ -Formel A , sowie für jede σ -Formel B gilt: A ist eine endliche Teilfolge von B gdw A ein konstitutiver Bestandteil von B ist.

2 Hilfsdefinitionen

In diesem Abschnitt geben wir vorbereitende Definitionen an. Zu Beginn setzen wir noch ein paar Bemerkungen zur Mengentheorie, welche wir im weiteren Verlauf voraussetzen und benötigen. Darauf folgen zwei Unterabschnitte, in denen wir zwei mengentheoretische Objekte und gewisse Funktionen auf ihnen exakt bestimmen: einerseits endliche Folgen und eine Konkatenationsoperation, und andererseits n -Tupel und eine Tupelglieder-Auswahlfunktion.

2.1 Mengentheoretische Präliminarien

Für unsere definitionstheoretischen Untersuchungen setzen wir eine Mengentheorie und die Theorie der natürlichen Zahlen voraus. Was die Mengentheorie betrifft, übernehmen wir im Grunde das System von Enderton (1977). Im Folgenden wollen wir einige wichtige Ausdrücke anführen und eine knappe, intuitive Erläuterung ihres Gebrauchs geben.

Die undefinierten Grundausdrücke, deren Verständnis bereits vorausgesetzt bzw. durch entsprechende Prinzipien angedeutet wird, umfassen nur das zweistellige Prädikat ' $\in$ '. Negiert hat es die Gestalt ' $\notin$ '. Wir drücken durch das Symbol ' $\subseteq$ ' die Relation der (unechten) Teilmenge, und mit ' $\times$ ', ' $\cap$ ' bzw. ' $\cup$ ' jeweils die binäre Operation des Kartesischen Produkts, die des Durchschnitts bzw. die der Vereinigung aus. Auch die leere Menge bezeichnen wir standardgemäß mit ' $\emptyset$ '. Ist eine Menge von Mengen gegeben, so bezeichnen wir die Vereinigung all dieser Mengen mit ' $\bigcup$ '; ist die Menge von Mengen indexiert, dann ist $\bigcup_{i=1}^n$ die Vereinigung aller Mengen von M_1 bis M_n , ohne Superskript ' n ' ist sie identisch mit der Vereinigung aller Mengen ab M_1 . Die Potenzmenge $p(M)$ einer Menge M ist die Menge all ihrer Teilmengen. Sind M und N Mengen, so sagen wir, sie seien disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben. Sollte die Satzfunktion ' ϕ ' prädikativ sein und höchstens ' x ' als freie Variable enthalten, dann bezeichnen wir die Menge all derjenigen Dinge x , die ' ϕ ' erfüllen mit ' $\{x|\phi\}$ '.

Wir sagen dann, dass f eine Funktion von M in N ist und schreiben in verkürzter Form ' $f : M \longrightarrow N$ ' genau dann, wenn $f \subseteq M \times N$ – f damit eine Relation ist – und wenn f linkstotal und rechtseindeutig ist. Eine bijektive Funktion ist darüberhinaus rechtstotal („surjektiv“) und „ordnet“ keinen zwei verschiedenen Argumenten denselben Wert zu („injektiv“). Ist $f : M \longrightarrow N$, so werden wir sagen, dass f eine Funktion auf M ist und $\text{dom}(f) = M$. Mit ' $\text{img}(f)$ ' bezeichnen wir die Menge $\{y|y \in N \text{ und für mindestens ein } x \text{ gilt: } \langle x, y \rangle \in f\}$.

Ist ferner $E \subseteq M$, dann sei die Einschränkung der Funktion f auf E , bezeichnet durch ' $f|_E$ ', identisch mit derjenigen Funktion g , für die gilt: $g = f \cap (E \times \text{img}(f))$.

Wir identifizieren die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ über die von Neumann-Konstruktion mit $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$. Vor diesem Hintergrund lassen sich dann leicht die gängigen arithmetischen Prädikate und Operationen definieren bzw. bestimmen. Im Speziellen seien an dieser Stelle nur eine Relation und zwei Teilmengen von $\mathbb{N}$ erwähnt: (i) m teilt n genau dann, wenn $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ und für mindestens ein $q \in \mathbb{N}$ gilt: $n = m \cdot q$ (ii) $\mathbb{G} = \{n | n \in \mathbb{N} \text{ und } 2 \text{ teilt } n\}$ (iii) $\mathbb{U} = \{n | n \in \mathbb{N} \text{ und } 2 \text{ teilt } n \text{ nicht}\}$.

Darüberhinaus können wir nun eine exakte Erläuterung dafür geben, was wir meinen, wenn wir davon sprechen, dass eine bestimmte Menge endlich (nämlich genau dann, wenn es keine Bijektion von ihr in mindestens eine ihrer echten Teilmengen gibt), unendlich (nämlich genau dann, wenn es eine Bijektion von ihr in mindestens eine ihrer echten Teilmengen gibt) oder abzählbar unendlich (nämlich genau dann, wenn sie unendlich ist und es eine Bijektion von ihr in $\mathbb{N}$ gibt) ist. Nachdem wir eine bestimmte Wohlordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}$ gelegt haben, sind wir in der Lage, Folgendes auszudrücken: Ist M eine endliche Menge, dann ist $\max(M)$ identisch mit der größten natürlichen Zahl, die in M enthalten ist und $|M|$ identisch mit der Anzahl der Elemente von M . Ist M eine nach unten beschränkte Menge von natürlichen Zahlen, dann schreiben wir ' $\min(M)$ ', um das kleinste Element dieser Menge zu bezeichnen.

Die Elemente eines n -fachen Kartesischen Produkts nennen wir ' n -Tupel' und bezeichnen sie jeweils mithilfe der spitzen Klammern ' $\langle \rangle$ ' und ' $\langle \rangle$ ' und durch die entsprechend gereihete Angabe ihrer n Glieder (wobei wir bzgl. ihrer exakten Bestimmung dem Vorschlag von Kuratowski folgen, wodurch selbstverständlich für alle Tupel die üblichen Identitätsbedingungen gelten, bei denen die „Reihenfolge berücksichtigt wird“). Wir werden darüberhinaus von der Definition eines Funktionsausdrucks Gebrauch machen, der uns eine elegante Bezugnahme auf das i -te Glied eines Tupels ermöglicht: Ist τ ein beliebiges n -Tupel, so schreiben wir $\tau^{(i)}$, um das i -te Glied zu bezeichnen – vorausgesetzt natürlich $1 \leq i \leq n$.

2.2 Konkatenation von endlichen Folgen

Das Alphabet unserer formalen Sprache bilden Teilmengen der ganzen Zahlen und endliche Folgen von Teilmengen der ganzen Zahlen. Ausdrücke, Terme und Formeln über diesem Alphabet sind endliche Folgen des Alphabets (dazu mehr

in Abschnitt 3). An einigen Stellen werden wir Ausdrücke „aneinanderfügen“. Im Falle abstrakter, mathematischer Objekte bedarf diese Konkatenation einer genauen Beschreibung, insbesondere deshalb, weil wir Theoreme beweisen. In diesem Unterabschnitt wird also Konkatenation theoretisch gefasst. Dafür beginnen wir mit dem Begriff der Indexmenge: Eine (endliche) Indexmenge ist endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen, die alle natürlichen Zahlen bis zu einem bestimmten n enthält.

Definition 1. I ist eine Indexmenge bis n gdw $n \in \mathbb{N}$ und $I = \{i | i \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq i \leq n\}$.

Definition 2. I ist eine Indexmenge gdw für mindestens ein n gilt: I ist eine Indexmenge bis n .

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar folgendes Korollar o.B.:

Korollar 1. Für jedes n gilt: wenn $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es genau ein I , sodass I eine Indexmenge bis n ist.

Beweis. Trivial. □

Weil Indexmengen mit der Wahl einer natürlichen Zahl eindeutig bestimmt sind, können wir von Funktionen sprechen, die jeder natürlichen Zahl n die Indexmenge bis n zuordnet.

Definition 3. $\mathcal{I} = f$ gdw $f : \mathbb{N} \longrightarrow \wp(\mathbb{N})$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(n)$ ist eine Indexmenge bis n .

Ist $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir statt ' $\mathcal{I}(n)$ ' einfach ' $\mathcal{I}'_n$ '. Eine n -gliedrige Folge von Elementen einer Menge ist eine Funktion von der Indexmenge bis n in besagte Menge.

Definition 4. f ist eine n -gliedrige Folge von M gdw $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathcal{I}'_n \longrightarrow M$.

Definition 5. f ist eine n -gliedrige Folge gdw für mindestens ein M gilt: f ist eine n -gliedrige Folge von M .

Durch das Binden der Variable ' n ' erhalten wir eine Definition für den Ausdruck 'endliche Folge'.

Definition 6. f ist eine endliche Folge von M gdw für mindestens ein n gilt: f ist eine n -gliedrige Folge von M .

Definition 7. f ist eine endliche Folge gdw für mindestens ein M gilt: f ist eine endliche Folge von M .

Die nachfolgend bestimmte Funktion wird sich als unglaublich nützlich erweisen und uns eine elegante Bezugnahme auf die Stelligkeit von Prädikatkonstanten und Funktionskonstanten ermöglichen.

Definition 8. Für jede endliche Folge f gilt: $\dot{f} = n$ gdw f eine n -gliedrige Folge ist.

Die Funktionswerte dieser Funktion sind mit 1 nach unten beschränkt.

Korollar 2. Für jede endliche Folge f gilt: $\dot{f} \geq 1$.

Beweis. Sei f eine endliche Folge. Nach Definition 9 gilt für mindestens ein M : f ist eine endliche Folge von M . Sei M von dieser Art. Nach Definition 7 gilt für mindestens ein n : f ist eine n -gliedrige Folge von M . Sei n von dieser Art. Nach Definition 5. gilt: $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathcal{I}_n \rightarrow M$. Da $\text{dom}(f) = \mathcal{I}_n$ gilt nach Definition 3 und Definition 1 für jedes $i \in \text{dom}(f)$: $i \leq n$. Also: $n = \max(\text{dom}(f))$. Also: $\dot{f} = n$. Also: $\dot{f} \geq 1$. $\square$

Ein verallgemeinerter Begriff der endlichen Folge ist der der endlichen Quasifolge.

Definition 9. f ist eine endliche Quasifolge gdw f eine endliche Folge ist, oder für mindestens ein g sowie mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ gilt: g ist eine endliche Folge, $n < \dot{g}$ und $f = g \restriction_{\mathcal{I}_{\dot{g}} \setminus \mathcal{I}_n}$.

Schließlich sind wir dazu in der Lage, eine explizite Definition für den Konkatinationsfunktionsausdruck ' $\dot{\circ}$ ' anzugeben.

Definition 10. Wenn f und g endliche Quasifolgen sind, dann gilt:

$f \dot{\circ} g = X$ gdw X eine $|\text{dom}(f)| + |\text{dom}(g)|$ -gliedrige Folge ist, sodass für jedes $i \in \text{dom}(X)$ gilt:

- (a) Wenn $i \leq |\text{dom}(f)|$, dann $X(i) = f(\min(\text{dom}(f)) + i - 1)$
- (b) Wenn $|\text{dom}(f)| < i$, dann $X(i) = g(\min(\text{dom}(g)) + i - |\text{dom}(f)| - 1)$.

Die Länge zweier zusammengefügter Folgen ist die Summe der Längen der beiden Folgen:

Korollar 3. Für jede endliche Folge f und g gilt: $(f \dot{\circ} g) = \dot{f} + \dot{g}$.

Beweis. Seien f und g endliche Folgen. Sei $\dot{f} = n$ und $\dot{g} = m$. Nach Definition gilt: $n = \max(\text{dom}(f))$ und $m = \max(\text{dom}(g))$. Also gilt nach Definition: $\text{dom}(f) = \mathcal{I}_n$ und $\text{dom}(g) = \mathcal{I}_m$. Nach Definition ist $(f \dot{\circ} g)$ eine $|\text{dom}(f)| + |\text{dom}(g)|$ -gliedrige Folge. Nach Definition gilt also: $\text{dom}(f \dot{\circ} g) = \mathcal{I}_{|\text{dom}(f)| + |\text{dom}(g)|}$. Da $|\text{dom}(f)| + |\text{dom}(g)| = \max(\text{dom}(f \dot{\circ} g))$, gilt: $|\text{dom}(f)| + |\text{dom}(g)| = (f \dot{\circ} g)$. Also: $n + m = (f \dot{\circ} g)$. Also: $\dot{f} + \dot{g} = (f \dot{\circ} g)$. $\square$

Wenn zwei Folgen identisch sind und wir dasselbe Anfangssegment von beiden Folgen lösen, dann sind die verbleibenden Folgenreste miteinander identisch.

Lemma 1. Für jede endliche Folge f , g und h gilt: wenn $f \dot{\circ} g = f \dot{\circ} h$, dann $g = h$.

Beweis. Seien f , g und h endliche Folgen. Angenommen, $f \dot{\circ} g = f \dot{\circ} h$.

„ $\subseteq$ “: Sei $\langle i, x \rangle \in g$. Nach Definition gilt: $f \dot{\circ} g(|\text{dom}(f)| + i) = g(\min(\text{dom}(g)) + |\text{dom}(f)| + i - |\text{dom}(f)| - 1)$. Da $\min(\text{dom}(g)) = 1$, gilt: $f \dot{\circ} g(|\text{dom}(f)| + i) = g(i)$. Also: $\langle (|\text{dom}(f)| + i), x \rangle \in f \dot{\circ} g$. Da $f \dot{\circ} g = f \dot{\circ} h$, gilt nach Definition: $\langle \min(\text{dom}(g)) + |\text{dom}(f)| + i - |\text{dom}(f)| - 1, x \rangle \in h$. Da $\min(\text{dom}(g)) = 1$, gilt: $\langle i, x \rangle \in h$. Also gilt für jedes i und x mit $\langle i, x \rangle \in g$: $\langle i, x \rangle \in h$. Also $g \subseteq h$.

„ $\supseteq$ “: Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass $h \subseteq g$.

Also: $g = h$. $\square$

Folgen, die selbst in einer Folge geordnet sind, lassen sich verketteten und damit gleichsam auffädeln. Wir führen eine Funktion für diesen Vorgang ein. Im Folgenden schreiben wir $\overset{\uparrow}{F}$ anstatt von $\uparrow(F)$.

Definition 11. Wenn M eine Menge von endlichen Quasifolgen ist und F eine endliche Folge von M ist, dann gilt:

$\overset{\uparrow}{F} = f$ gdw sich dies allein aufgrund folgender rekursiver Bestimmungen ergibt:

- (a) wenn $\dot{F} = 1$, dann: $\overset{\uparrow}{F} = f$ gdw $f = (F(1) \dot{\circ} F(1))|_{\mathcal{I}_{|\text{dom}(F(1))|}}$
- (b) wenn $\dot{F} = 2$, dann: $\overset{\uparrow}{F} = f$ gdw $f = F(1) \dot{\circ} F(2)$
- (c) wenn $\dot{F} > 2$, dann: $\overset{\uparrow}{F} = f$ gdw $f = F|_{\mathcal{I}_{(\dot{F}-1)}} \dot{\circ} F(\dot{F})$.

Wir schreiben deshalb $\overset{\uparrow}{F} = (f \dot{\circ} f)|_{\mathcal{I}_{|\text{dom}(f)|}}$, weil die Quasiolgef unter Umständen keine Folge ist. Falls f eine Folge ist, dann gilt natürlich $(f \dot{\circ} f)|_{\mathcal{I}_{|\text{dom}(f)|}} = f$.

Für das nachfolgende triviale Korollar erbringen wir keinen Beweis.

Korollar 4. Wenn M eine Menge von endlichen Quasifolgen ist und F eine Folge von M ist, dann ist $\overset{\uparrow}{F}$ eine endliche Folge.

Beweis. Trivial. □

Die letzte Definition dieses Unterabschnitts klärt, unter welchen Bedingungen eine Folge eine Teilfolge einer anderen ist.

Definition 12. f ist eine endliche Teilfolge von g gdw f und g endliche Folgen sind und:

- (a) $g = f$, oder
- (b) es gibt mindestens ein f' , sodass: $g = f \smallfrown f'$, oder
- (c) es gibt mindestens ein f' , sodass: $g = f' \smallfrown f$, oder
- (d) es gibt mindestens ein f' , sowie ein f'' , sodass: $g = f' \smallfrown f \smallfrown f''$.

Bevor wir uns einer kleinen Theorie der Auswahl von Tupelgliedern zuwenden, zuvor noch ein Lemma, das uns erlaubt, die numerische Induktion aus der Theorie der natürlichen Zahlen auf Beweise mittels Induktion über Formelgrade zu übertragen.

Lemma 2. Für jede Menge X , jede Menge M , sowie jedes f gilt: Wenn $f : X \rightarrow \mathbb{N}$, dann gilt: $X \subseteq M$ gdw für jedes $x \in X$, sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $f(x) = n$, dann $x \in M$.

Beweis. Seien X und M beliebige Mengen und $f : X \rightarrow \mathbb{N}$. „ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $X \subseteq M$. Dann gilt für jedes $x \in X$: $x \in M$. Also erhalten wir durch Abschwächung: für jedes $x \in X$, sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $f(x) = n$, dann $x \in M$. „ $\Leftarrow$ “: Angenommen, für jedes $x \in X$, sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn $f(x) = n$, dann $x \in M$. Sei $x \in X$. Dann gilt für mindestens ein $i \in \mathbb{N}$: $f(x) = i$. Also: $x \in M$. Also $X \subseteq M$. □

2.3 Auswahl von Tupelgliedern

Nachdem wir die (Syntax der) formale(n) Sprache aufgebaut haben, werden wir uns ihrer Interpretation zuwenden. Eine atomare Formel $Pt_1 \dots t_n$ ist dabei genau dann unter einer Interpretation $\mathcal{J}$ wahr, wenn das n -Tupel, bestehend

aus den Termwerten unter $\mathfrak{I}$ in entsprechender Reihenfolge, Element der Extension von P unter $\mathfrak{I}$ ist. Solche n -Tupel werden nach Kuratowski (1921) folgendermaßen rekursiv bestimmt: $\langle x_1, x_2 \rangle = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ und $\langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle = \langle \langle x_1, \dots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle$. Sind X und Y Mengen, dann ist $X \times Y$ identisch mit $\{\langle x, y \rangle \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$, und X^{n+1} identisch mit $X^n \times X$.

Definition 13. τ ist ein n -Tupel über M gdw $\tau \in M^n$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Im Zusammenhang mit der semantischen Interpretation von (rein syntaktischen) Sprachen wollen wir an einigen Stellen auf die einzelnen Glieder von n -Tupeln Bezug nehmen. Diese Bezugnahme ist jedoch nur dann eindeutig, wenn die Menge, über dem das Tupel gebildet ist, selbst keine Tupel enthält. Ein Beispiel: Angenommen, ein Tupel τ besteht aus einem 2-Tupel von nicht-mengentheoretischen Objekten an der ersten Stelle und einem nicht-mengentheoretischen Objekt an der zweiten Stelle, also etwa: $\tau = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$. Wenn wir nun $\tau^{(2)}$ schreiben, dann kann einerseits (intendierter Weise) c damit bezeichnet werden, weil c das zweite Glied des 2-Tupels τ ist. Nach Kuratowski ist τ aber auch identisch mit dem 3-Tupel $\langle a, b, c \rangle$, und dann wäre mit $\tau^{(2)}$ aber b bezeichnet. Da nicht im Allgemeinen $b = c$, ist die Bezugnahme mit $\tau^{(2)}$ nicht eindeutig. Diese Eindeutigkeit wird aber in den auf die Semantik bezogenen Definitionen vorausgesetzt. Deshalb wollen wir in diesem Unterabschnitt Schritt für Schritt aufzeigen, dass die Eindeutigkeit unter gewissen Einschränkungen gewährleistet ist.

Wir führen zu diesem Zweck einen neuen Begriff ein, den des „Basis- n -Tupel“. Ein Basis- n -Tupel ist ein n -Tupel, das über einer Menge gebildet ist, die selbst kein Tupel als Element enthält. Dadurch kann einer Situation wie der eben skizzierten vorgebeugt werden.

Definition 14. τ ist ein Basis- n -Tupel über M gdw τ ein n -Tupel über M ist und es gibt kein τ' , kein m und kein M' sodass: τ' ist ein m -Tupel über M' und $\tau' \in M$.

Definition 15. τ ist ein Basis- n -Tupel gdw für mindestens ein M gilt: τ ist ein Basis- n -Tupel über M .

Definition 16. τ ist ein Basis-Tupel gdw für mindestens ein n gilt: τ ist ein Basis- n -Tupel.

Trivialerweise ist jedes Basis-Tupel ein Basis- n -Tupel, für mindestens ein n . Seien m und n nun von der Art, dass ein Basis-Tupel sowohl ein Basis- n -Tupel ist

als auch ein Basis- m -Tupel. Durch Induktion über n lässt sich leicht nachweisen, dass $n = m$. Deshalb sind wir dazu berechtigt, eine Funktion einzuführen, die bei einem Tupel als Argument die Anzahl seiner Glieder als Wert gibt:

Definition 17. $\circ = f$ gdw $f : \{\tau \mid \tau \text{ ist ein Basis-Tupel}\} \longrightarrow \mathbb{N}$, sodass für jedes $\tau \in \text{dom}(f)$ gilt, dass τ ein Basis- $f(\tau)$ -Tupel ist.

Ist τ ein Basis-Tupel, so schreiben wir statt ' $\circ(\tau)$ ' einfach ' τ' '.

Ebenfalls auf triviale Weise (über die Identitätsbedingungen für n -Tupel) zeigen lässt sich der folgende Zusammenhang:

Lemma 3. *Für jedes τ gilt: Wenn τ ein Basis-Tupel ist, dann gibt es genau ein y , für das gilt: für mindestens ein x gilt: $\tau = \langle x, y \rangle$.*

Beweis. Trivial. □

Auf dieses eindeutig bestimmte letzte Tupelglied y können wir über eine Funktion Bezug nehmen:

Definition 18. Wenn τ ein Basis-Tupel ist, dann gilt: $\text{last}(\tau) = y$ gdw für mindestens ein x gilt: $\tau = \langle x, y \rangle$.

Wenn wir ein Tupel um das letzte Glied kürzen, dann erhalten wir entweder eine Einermenge, bestehend aus dem ersten Tupelglied, oder ein neues Tupel.

Definition 19. τ' ist ein um das Endglied gekürzter Abschnitt von τ gdw τ ein Basis-Tupel ist und Folgendes gilt:

- (a) wenn $\tau' = 2$, dann gilt für mindestens ein x , sowie ein y : $\tau = \langle x, y \rangle$ und $\tau' = \{x\}$
- (b) wenn $\tau' \geq 3$, dann gilt: $\tau = \langle \tau', \text{last}(\tau) \rangle$.

In beiden Fällen ist das Ergebnis der Kürzung eindeutig, o.B..

Lemma 4. *Für jedes Basis-Tupel τ gibt es genau ein τ' , sodass τ' ein um das Endglied gekürzter Abschnitt von τ ist.*

Deshalb sind wir berechtigt, eine Funktion einzuführen, die uns bei einem beliebigen Tupel als Argument ein um das letzte Glied gekürzten Tupel als Wert gibt.

Definition 20. Wenn τ ein Basis-Tupel ist, dann gilt: $\tau^{(-1)} = \tau'$ gdw τ' ist ein um das Endglied gekürzter Abschnitt von τ .

Im nächsten Schritt verallgemeinern wir diesen Vorgang auf ein beliebiges n , kleiner als die Länge des Tupels:

Definition 21. τ' ist ein um n gekürzter Abschnitt von τ gdw τ ein Basis-Tupel ist und $n \in I_{\tau-1} \cup \{0\}$ und jenes sich aufgrund folgender rekursiver Bestimmungen ergibt:

(Rekursionsbasis)

($n = 0$) τ' ist genau dann ein um n gekürzter Abschnitt von τ , wenn $\tau' = \tau$

($n = 1$) τ' ist genau dann ein um n gekürzter Abschnitt von τ , wenn $\tau' = \overset{(-1)}{\tau}$

(Rekursionsklausel)

($1 < n < \overset{\circ}{\tau}$) τ' ist genau dann ein um n gekürzter Abschnitt von τ , wenn τ' ein um $n - 1$ gekürzter Abschnitt von $\overset{(-1)}{\tau}$ ist.

Lemma 5. Für jedes τ , sowie für jedes n gilt: wenn τ ein Basis-Tupel ist und $n \in I_{\tau-1} \cup \{0\}$, dann gibt es genau ein τ' , sodass τ' ein um n gekürzter Abschnitt von τ ist.

Beweis. Trivial. □

Definition 22. Wenn τ ein Basis-Tupel ist und $n \in I_{\tau-1}$, dann gilt:

$\tau(-)n = \tau'$ gdw τ' ein um n gekürzter Abschnitt von τ ist.

Wenn wir ein Tupel τ der Länge n um die m hintersten Glieder kürzen, dann ist das letzte Glied des abgetrennten Tupel das $(n - m)$ te Tupelglied von τ .

Definition 23. x ist n -tes Tupelglied von τ gdw τ ein Basis-Tupel ist und $n \in I_{\tau}$ und Folgendes gilt:

(a) wenn $n = 1$, dann $x \in \tau((-)(\overset{\circ}{\tau} - 1))$

(b) wenn $1 < n \leq \overset{\circ}{\tau}$, dann $x = \text{last}(\tau(-)(\overset{\circ}{\tau} - n))$.

Lemma 6. Für jedes τ , sowie für jedes n gilt: wenn τ ein Tupel ist und $n \in I_{\tau}$, dann gibt es genau ein x , sodass x ein n -tes Tupelglied von τ ist.

Beweis. Trivial. □

Definition 24. Wenn τ ein Basis-Tupel ist und $n \in I_{\tau}$, dann gilt:

$\overset{(n)}{\tau} = x$ gdw x ist n -tes Tupelglied von τ .

3 Syntax

Eine prädikatenlogische Sprache erster Stufe besteht aus einer Menge von Formeln. Formeln sind aus deskriptivem Vokabular, logischem Vokabular und Hilfszeichen zusammengesetzt. Die Details dieses Aufbaus gilt es zu klären; wir gehen dabei folgendermaßen vor:

Wir legen im nächsten Unterabschnitt zunächst den Zeichenvorrat unserer Sprache fest. Wir bilden dann zuerst beliebige Verkettungen von Zeichen, „ungrammatikalische“ Ausdrücke. Später sondern wir unter den Ausdrücken Terme und Formeln aus.

Das alles geschieht vor dem Hintergrund einer „Signatur“. Zusätzlich zu den Hilfszeichen der formalen Sprache – die eine ähnliche Funktion wie Satzzeichen in der natürlichen Sprache haben – und den logischen Konstanten – Zeichen, die etwa dem natürlichsprachlichem 'und', 'nicht' oder 'jedes' entsprechen sollen – gibt es einen Teil des Alphabets, dem durch eine Interpretation explizit eine Extension und damit eine „Bedeutung“ zugewiesen wird. Diesen Teil des Alphabets nennen wir 'Signatur'. Zeichen aus einer Signatur sollen diejenigen natürlichsprachlichen Ausdrücke repräsentieren, mit denen wir Objekte bezeichnen oder Eigenschaften oder Beziehungen ausdrücken. Sie sollen also Individuennamen (logisch einfache wie etwa 'Rosa' und ungesättigte, logisch zusammengesetzte wie etwa 'der biologische Vater von') und Prädikate (wie etwa 'ist Anarchist*in' oder 'wird im Alltag weniger diskriminiert als') repräsentieren. Ausdrücke sind immer Ausdrücke über einer Signatur – sie sind beliebige Aneinanderreihungen von logischen Zeichen, Hilfszeichen und Zeichen aus der Signatur –, Formeln ebenfalls immer Formeln über einer Signatur – sie sind gewissermaßen „grammatikalisch korrekt“ gebildete Aneinanderreihungen und sollen natürlichsprachliche Aussagesätze repräsentieren – und eine formale Sprache ist somit auch immer eine formale Sprache über einer Signatur.

So wie natürliche Sprachen sich verändern und wachsen, können formale Sprachen durch Hinzufügen von neuem Vokabular erweitert werden. Im fünften Abschnitt werden wir Definitionen als (theorie- und) signaturerweiternde Formeln studieren.

3.1 Alphabet

In der formalen Semantik weisen wir uninterpretierten syntaktischen Gebilden durch Interpretationsfunktionen eine „Bedeutung“ zu. Für Gegenstandskonstan-

ten sind es Objekte aus dem Gegenstandsbereich, für Prädikatkonstanten Teilmengen vom Gegenstandsbereich oder Mengen von Tupeln über dem Gegenstandsbereich, für Funktionskonstanten Funktionen auf dem Gegenstandsbereichs bzw. kartesischen Produkt des Gegenstandsbereichs. Damit diese Zuordnung eindeutig ist, darf beispielsweise ein und dasselbe Zeichen nicht gleichzeitig Gegenstandskonstante und Prädikatkonstante sein. Für das Alphabet wählen wir daher paarweise disjunkte Mengen von deskriptiven, logischen und Hilfszeichen.

Worin, also aus welchen Objekten, der Zeichenvorrat tatsächlich besteht, ist letztlich irrelevant, solange sie voneinander verschieden sind. In unserem Fall sind die Zeichen nicht wohlgeformte Kreidestriche oder Tintenklekse und auch nicht deren typographische Gestalten. Unser Alphabet besteht aus ganzen Zahlen.

Die Arbeiten von Tarski (1953) haben uns vor Augen geführt, dass eine unbedarfte Durchmischung von Objekt- und Metasprache zu Antinomien führen kann. Eine schadhafte Mehrdeutigkeit oder Verwechslung von objektsprachlichen Zeichen mit ihren metasprachlichen Namen wird durch die Wahl unseres Zeichenvorrats erschwert: Ganze Zahlen können nicht auf Papier gedruckt werden. Weil wir ohnehin nie *in* unserer formalen Sprache sprechen, sondern immer nur *über* sie, genügen uns die metasprachlichen Namen allein auch, um Theoreme zu beweisen und Definitionen zu formulieren.

Wir bestimmen nun der Reihe nach die Bestandteile unseres Alphabets.

Definition 25. $\mathcal{O} := \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8\}$

Das „logische Vokabular“ $\mathcal{O}$ wird metasprachlich auch durch $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, \equiv\}$ bezeichnet.

Definition 26. $\mathcal{H} := \{-9, -10\}$

Die „Hilfszeichen“ $\mathcal{H}$ werden auch durch $\{\langle, \rangle\}$ bezeichnet.

Definition 27. $\mathcal{V} := \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ \& 2 teilt } m \text{ nicht}\}$

$\mathcal{V}$ sind die „Variablen“.

Definition 28. $\mathcal{GK} := \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ \& 2 teilt } m \text{ \& 4 teilt } m \text{ nicht}\}$

$\mathcal{GK}$ sind die „Gegenstandskonstanten“.

Definition 29. $\mathcal{PK} := \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ \& 4 teilt } m \text{ \& 8 teilt } m \text{ nicht}\}$

PK sind die „unsortierten Prädikatkonstanten“.

Definition 30. $FK := \{m | m \in \mathbb{N} \ \& \ 8 \text{ teilt } m \ \& \ 16 \text{ teilt } m \text{ nicht}\}$

FK sind die „unsortierten Funktionskonstanten“.

’ist Feministin’ wird u.a. dadurch zu einem wahrheitswertfähigen Aussagesatz, dass wir den Ausdruck an einer Stelle durch einen Eigennamen ergänzen: ’Rosa ist Feministin’. ’beutet aus’ ist an zweifacher Stelle ergänzungsbedürftig.

Prädikatkonstanten sollen sprachliche Gebilde dieser Art repräsentieren. Den unsortierten Prädikatkonstanten sehen wir ihre Stelligkeit allerdings nicht an. Anstatt sie in Definitionen, Theoremen und Beweisen jedes Mal neu explizit zu bestimmen, kodieren wir die Stelligkeit n in der Prädikatkonstante P , indem wir die Indexmenge $\mathcal{I}_n$ konstant auf eine unsortierte Prädikatkonstante P' abbilden und P mit dieser Abbildung identifizieren – eine Prädikatkonstante P ist damit eine n -gliedrige Folge und führt ihre Stelligkeit als $\dot{P}$ mit.

Definition 31. P ist eine n -stellige Prädikatkonstante gdw $n \in \mathbb{N}$ und für mindestens ein $P' \in PK$ gilt: $P : \mathcal{I}_n \longrightarrow \{P'\}$.

Auf analoge Weise kodieren wir die Stelligkeit von Funktionskonstanten.

Definition 32. f ist eine n -stellige Funktionskonstante gdw $n \in \mathbb{N}$ und für mindestens ein $f' \in FK$ gilt: $f : \mathcal{I}_n \longrightarrow \{f'\}$.

Definition 33. $\mathcal{PK} := \{P | \text{Für mindestens ein } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } P \text{ ist eine } n\text{-stellige Prädikatkonstante}\}$.

$\mathcal{PK}$ sind die „Prädikatkonstanten“.

Definition 34. $\mathcal{FK} := \{f | \text{Für mindestens ein } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } f \text{ ist eine } n\text{-stellige Funktionskonstante}\}$

$\mathcal{FK}$ sind die „Funktionskonstanten“. Nicht unsortierte Prädikatkonstanten und unsortierte Funktionskonstanten, sondern n -stellige Prädikatkonstanten und m -stellige Funktionskonstanten sind Bestandteil unseres Alphabets.

Definition 35. $\mathcal{K} := \mathcal{GK} \cup \mathcal{PK} \cup \mathcal{FK}$

Die Gesamtheit der deskriptiven Konstanten ist die Vereinigung der Gegenstands-, Prädikats- und Funktionskonstanten. Das Alphabet unserer formalen Sprache ist die Menge aller Zeichen unseres Alphabets.

Definition 36. $\mathcal{A} = \mathcal{O} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{K}$

Bei dieser Festlegung entsteht der Zeichenvorrat aus disjunkten Mengen.

Korollar 5. $\mathcal{O}, \mathcal{H}, \mathcal{V}, \mathcal{GK}, \mathcal{PK}$ sowie $\mathcal{FK}$ sind paarweise disjunkt.

Beweis. Trivial. □

3.2 Einige grundlegende Definitionen

Eine Signatur ist ein Tripel, bestehend aus Gegenstandskonstanten, Prädikatkonstanten und Funktionskonstanten.²⁷

Definition 37. σ ist eine Signatur bzgl. gk, pk und fk gdw

- (a) $pk \subseteq \mathcal{PK}$ und $\mathcal{PK} \setminus pk$ ist abzählbar unendlich
- (b) $gk \subseteq \mathcal{GK}$ und $\mathcal{GK} \setminus gk$ ist abzählbar unendlich
- (c) $fk \subseteq \mathcal{FK}$ und $\mathcal{FK} \setminus fk$ ist abzählbar unendlich
- (d) $\sigma = \langle pk, gk, fk \rangle$

Definition 38. σ ist eine Signatur gdw für mindestens ein gk, pk und fk gilt: σ ist eine Signatur bzgl. gk, pk und fk .

Die Konstanten einer Teilsignatur sind auch in der umfassenderen Signatur enthalten.

Definition 39. σ ist eine Teilsignatur von σ' gdw σ und σ' Signaturen sind und $(\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)}) \subseteq (\bigcup_{i=1}^3 \sigma'^{(i)})$.

Wir bestimmen eine Funktion, mit Hilfe derer eine gegebene Signatur um eine beliebige Konstante erweitert werden kann.

Definition 40. $(+) = f$ gdw $f : \{\sigma \mid \sigma \text{ ist eine Signatur}\} \times \mathcal{K} \longrightarrow \Sigma$, sodass für jedes $\sigma \in \text{dom}(f)$, sowie für jedes $k \in \mathcal{K}$ gilt:

$$f(\langle \sigma, k \rangle) = \begin{cases} \langle \sigma^{(1)} \cup \{k\}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)} \rangle, & \text{falls } k \in \mathcal{PK} \\ \langle \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)} \cup \{k\}, \sigma^{(3)} \rangle & \text{falls } k \in \mathcal{GK} . \\ \langle \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)} \cup \{k\} \rangle & \text{falls } k \in \mathcal{FK} \end{cases}$$

Wir schreiben ' $\sigma(+)k$ ' anstatt von ' $(+)(\langle \sigma, k \rangle)$ '.

Ein Ausdruck über einer Signatur ist eine endliche Folge von Variablen, logischen Konstanten, Hilfszeichen und deskriptiven Konstanten aus der Signatur.

²⁷Obwohl die relativen Komplemente abzählbar unendlich sein müssen, kann eine Signatur dennoch abzählbar unendliche viele Konstanten enthalten. vgl. (Kleinknecht, 1979, p. 9)

Definition 41. X ist ein σ -Ausdruck gdw

- (a) σ ist eine Signatur
- (b) X ist eine endliche Folge von $\bigcup_{i=1}^3 {}^{(i)}\sigma \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{H}$

Ein Term über einer Signatur ist ein Ausdruck, der entweder aus einer Variable, einer Gegenstandskonstante oder einer n -stelligen Funktionskonstante, gefolgt von n weiteren Termen ist.

Definition 42. Σ ist eine σ -Termkonstruktionssequenz für t gdw Σ eine endliche Folge von $\{X \mid X \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$ ist, sodass:

- (a) $\Sigma(\dot{\Sigma}) = t$
- (b) für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$ gilt:
 - (a) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$, oder
 - (b) für mindestens ein $c \in {}^{(2)}\sigma$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder
 - (c) für mindestens ein $f \in {}^{(3)}\sigma$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\smile} g$.

Definition 43. t ist ein σ -Term gdw für mindestens ein Σ gilt, dass Σ eine σ -Termkonstruktionssequenz für t ist.

Aus dieser Festlegung ergibt sich die ungewöhnliche Konsequenz, dass Variablen und Gegenstandskonstanten strenggenommen keine Terme sind, lediglich eingliedrige Folgen derselben.

Definition 44. t ist ein Term gdw für mindestens eine Signatur σ gilt: t ist ein σ -Term.

Definition 45. $\text{term}(\sigma) = M$ gdw $M = \{t \mid t \text{ ist ein } \sigma\text{-Term}\}$

Ist σ eine Signatur, so schreiben wir ' term_σ ' anstatt von ' $\text{term}(\sigma)$ '.

Definition 46. $\text{term} = M$ gdw $M = \{t \mid t \text{ ist ein Term}\}$

Die Anzahl der notwendigen Konstruktionsschritte bestimmt den Grad eines Terms.

Definition 47. t ist ein Term vom Grad n gdw für mindestens eine Signatur σ gilt:

- (a) t ist ein σ -Term
- (b) $n = \min(\{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ und für mindestens eine } \sigma\text{-Termkonstruktionssequenz } \Sigma \text{ für } t \text{ gilt: } \dot{\Sigma} = m\})$

Die Definition über das Minimum der Längen von Termkonstruktionssequenzen ist deshalb unproblematisch, weil die entsprechenden Mengen offensichtlich in jedem Fall nicht-leer, abgeschlossen und nach unten beschränkt sind.

Weil das Minimum immer eindeutig bestimmt ist, ergibt sich aufgrund der Definition von 'Termkonstruktionssequenz' unmittelbar folgendes Korollar o.B.:

Korollar 6. Für jeden Term t gibt es genau ein n , sodass t ein Term vom Grad n ist.

Beweis. Trivial. □

Sodann können wir eine entsprechende Funktion bestimmen, die jedem Term ihren Termgrad zuordnet.

Definition 48. $tgrd = g$ gdw $g : term \longrightarrow \mathbb{N}$, sodass für jedes $t \in term_\sigma$ gilt: t ist ein Term vom Grad $tgrd(t)$.

Eine atomare Formel ist gleichsam die kleinstmögliche Formel. Sie ist ein Ausdruck, der entweder aus einer Prädikatkonstante und Termen oder einer Identitätsformel besteht.

Definition 49. A ist eine atomare σ -Formel gdw A ein σ -Ausdruck ist und

- (a) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} \dot{g}$, oder
- (b) für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\vee} t) \dot{\vee} s$.

Definition 50. A ist eine atomare Formel gdw für mindestens eine Signatur σ gilt: A ist eine atomare σ -Formel.

Eine Formel über einer Signatur setzt sich aus atomare Formeln und deren Verbindungen mit logischen Konstanten, Variablen und anderen Formeln zusammen.

Definition 51. Σ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für A gdw²⁸ Σ eine endliche Folge von $\{X \mid X \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$ ist, sodass:

- (a) $\Sigma(\dot{\Sigma}) = A$
- (b) für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$ gilt:
 - (a) $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder
 - (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\Sigma}(k)$, oder
 - (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\Sigma}(k)) \dot{\Sigma}(\{1, \wedge\})) \dot{\Sigma}(j)) \dot{\Sigma}(\{1, \emptyset\})$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\Sigma}(k)) \dot{\Sigma}(\{1, \vee\})) \dot{\Sigma}(j)) \dot{\Sigma}(\{1, \emptyset\})$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\Sigma}(k)) \dot{\Sigma}(\{1, \rightarrow\})) \dot{\Sigma}(j)) \dot{\Sigma}(\{1, \emptyset\})$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\Sigma}(k)) \dot{\Sigma}(\{1, \leftrightarrow\})) \dot{\Sigma}(j)) \dot{\Sigma}(\{1, \emptyset\})$, oder
 - (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\Sigma}(\{1, v\})) \dot{\Sigma}(k)$, oder $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\Sigma}(\{1, v\})) \dot{\Sigma}(k)$.

Definition 52. A ist eine σ -Formel gdw für mindestens ein Σ gilt, dass Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für A ist.

Definition 53. A ist eine Formel gdw für mindestens ein σ gilt: A ist eine σ -Formel.

Sofern es der Kontext zulässt und Missverständnisse nur schwer auftreten können, wird eingedenk besserer Lesbarkeit im Folgenden der metasprachliche Name eines Ausdrucks X über einer Signatur durch die entsprechende Aneinanderreihung der Namen der Elemente aus $\text{img}(X)$ abgekürzt. Somit wird die übliche Bezeichnungsweise eingeführt: Wir schreiben ' Pfx ' anstatt von ' $\{\langle 1, P \rangle, \langle 2, f \rangle, \langle 3, x \rangle\}$ ' und bezeichnen etwa die Formel $\{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\Sigma} B$, indem wir ' $\neg$ ' einem bereits abgekürzten Namen von B voranstellen. (Ein Missverständnis kann beispielsweise auftreten, wenn wir ' a ' schreiben und damit eine Gegenstandskonstante bezeichnen wollen, aber ebensogut ein eingliedriger Term gemeint sein kann.) In Definitionen werden wir allerdings die exakte Schreibweise beibehalten, um kleinen, aber folgenreichen Fehlern vorzubeugen.

²⁸Unsere Definition von 'Formel' über Konstruktionssequenzen ist eine Anpassung und Verallgemeinerung von Zimmermanns Ansatz in (Zimmermann, 2009).

Eine weitere metasprachliche Konvention, von der wir ebenfalls Gebrauch machen wollen, sind die Klammerersparnisregeln: Äußere Klammernamen können weggelassen werden, $\neg, \forall$ & $\exists$ binden stärker als $\wedge$ & $\vee$, und $\wedge$ & $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ & $\leftrightarrow$.

Die Gesamtheit der Formeln über einer Signatur ist die Sprache über dieser Signatur.

Definition 54. $spr(\sigma) = M$ gdw $M = \{A \mid A \text{ ist eine } \sigma\text{-Formel}\}$.

Teilmengen einer Sprache nennen wir 'Formelmengen'.

Definition 55. T ist eine σ -Formelmenge gdw $T \subseteq spr(\sigma)$.

Definition 56. $spr = M$ gdw $M = \{A \mid A \text{ ist eine Formel}\}$.

Definition 57. T ist eine Formelmenge gdw $T \subseteq spr$.

Ist σ eine Signatur, so schreiben wir ' spr_σ ' anstatt von ' $spr(\sigma)$ '.

Wie auch bei Termen bestimmt die Anzahl der notwendigen Konstruktionsschritte den Grad einer Formel.

Definition 58. A ist eine Formel vom Grad n gdw für mindestens eine Signatur σ gilt:

- (a) A ist eine σ -Formel
- (b) $n = \min(\{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ und für mindestens eine } \sigma\text{-Formelkonstruktionssequenz } \Sigma \text{ für } A \text{ gilt: } \dot{\Sigma} = m\})$.

Weil das Minimum eindeutig bestimmt ist, ergibt sich auch für Formelkonstruktionssequenzen folgendes Korollar o.B.:

Korollar 7. Für jede Formel A gibt es genau ein n , sodass A eine Formel vom Grad n ist.

Die Funktion $fgrd$ ordnet jeder Formel ihren Formelgrad zu.

Definition 59. $fgrd = g$ gdw $g : spr \rightarrow \mathbb{N}$, sodass für jedes $A \in spr$ gilt: A ist eine Formel vom Grad $fgrd(A)$.

Eine Variable kommt in einer Formel frei vor, wenn sie nicht durch einen All- oder Existenzquantor gebunden wird.

Definition 60. x kommt in A frei vor gdw $x \in \mathcal{V}$ und für mindestens ein σ gilt, dass A eine σ -Formel ist und sich jenes aufgrund folgender rekursiver Bestimmungen ergibt:

(Rekursionsbasis) ($fgdr(A) = 1$) Für jedes σ gilt: Wenn A eine atomare σ -Formel ist, dann gilt: $x \in \text{img}(A)$ genau dann, wenn x in A frei vorkommt.

(Rekursionsklausel) ($fgdr(A) > 1$) Für jedes σ und jeden σ -Ausdruck B und C , sowie für jede Variable $v \in \mathcal{V}$ gilt:

- (a) Wenn B eine σ -Formel ist und $A = \{\langle 1, \neg \rangle\} \checkmark B$, dann gilt: x kommt in B frei vor, gdw x kommt in A frei vor
- (b) Wenn B und C σ -Formeln sind und $A = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark B) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \checkmark C) \checkmark \{\langle 1, \vee \rangle\}$, dann gilt: x kommt in B oder C frei vor, gdw x kommt in A frei vor
- (c) Wenn B und C σ -Formeln sind und $A = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark B) \checkmark \{\langle 1, \vee \rangle\}) \checkmark C) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}$, dann gilt: x kommt in B oder C frei vor, gdw x kommt in A frei vor
- (d) Wenn B und C σ -Formeln sind und $A = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark B) \checkmark \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \checkmark C) \checkmark \{\langle 1, \Rightarrow \rangle\}$, dann gilt: x kommt in B oder C frei vor, gdw x kommt in A frei vor
- (e) Wenn B und C σ -Formeln sind und $A = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark B) \checkmark \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \checkmark C) \checkmark \{\langle 1, \Rightarrow \rangle\}$, dann gilt: x kommt in B oder C frei vor, gdw x kommt in A frei vor
- (f) Wenn B eine σ -Formel ist und $A = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \checkmark \{\langle 1, v \rangle\}) \checkmark B$, dann gilt: x kommt in B frei vor und $x \neq v$, gdw x kommt in A frei vor
- (g) Wenn B eine σ -Formel ist und $A = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \checkmark \{\langle 1, v \rangle\}) \checkmark B$, dann gilt: x kommt in B frei vor und $x \neq v$, gdw x kommt in A frei vor.

Eine Formel, die keine freien Variablen enthält, ist eine geschlossene Formel.

Definition 61. A ist eine geschlossene σ -Formel gdw A eine σ -Formel ist und für kein x gilt: x kommt in A frei vor.

Definition 62. $fr = f$ gdw $f : \{A \mid \text{Für mindestens eine Signatur } \sigma \text{ gilt: } A \text{ ist eine } \sigma\text{-Formel}\} \rightarrow p(\mathcal{V})$, sodass für jedes $A \in \text{dom}(f)$ gilt: $f(A) = \{v \mid v \text{ kommt in } A \text{ frei vor}\}$.

Korollar 8. Für jede Signatur σ , sowie für jedes A gilt: A ist eine geschlossene σ -Formel gdw $fr(A) = \emptyset$.

Beweis. Trivial. □

3.3 Erforderliche, auf die Syntax bezogene Theoreme

Wir beweisen in diesem Unterabschnitt, dass sich die Eigenschaft ein Ausdruck, ein Term oder eine Formel zu sein, von einer Teilsignatur auf eine umfassendere Signatur überträgt. Darüber hinaus zeigen wir Behauptungen, die uns später Beweise mittels vollständiger Induktion über Terme und Formeln ermöglichen.

Bevor wir diese Nachweise im Detail erbringen können, müssen wir allerdings die beiden nachfolgenden kleinen Lemmata zeigen.

Lemma 7. Für jede Funktion f , jedes $E \subseteq \text{dom}(f)$, sowie jedes $x \in E$ gilt, dass $f(x) = f|_E(x)$.

Beweis. Sei f eine Funktion, sei weiters $E \subseteq \text{dom}(f)$, und $x \in E$ beliebig. Dann gilt: $x \in \text{dom}(f)$. Also: $f(x) \in \text{img}(f)$. Gemäß unserer Annahme gilt dann: $\langle x, f(x) \rangle \in E \times \text{img}(f)$. Und da trivialerweise $\langle x, f(x) \rangle \in f$, gilt nach Definition: $\langle x, f(x) \rangle \in f|_E$. Da $\langle x, f(x) \rangle \in f|_E$ genau dann gilt, wenn $f|_E(x) = f(x)$, gilt: $f|_E(x) = f(x)$. □

Lemma 8. Für jede Funktion f , jedes $E \subseteq \text{dom}(f)$, sowie jedes M gilt: für jedes $x \in E$ gilt, dass $f(x) \in M$ gdw $f|_E(x) \in M$.

Beweis. Sei f eine Funktion, sei weiters $E \subseteq \text{dom}(f)$, und seien M und $x \in E$ beliebig. Wegen Lemma 7 gilt: $f|_E(x) = f(x)$. „ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $f(x) \in M$. Dann aufgrund der Identität auch: $f|_E(x) \in M$. „ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $f|_E(x) \in M$. Dann aufgrund der Identität auch: $f(x) \in M$. □

Alle Ausdrücke über einer Teilsignatur sind Ausdrücke über der umfassenderen Signatur; gleiches gilt für Terme und Formeln.

Lemma 9. Für jede Signatur σ , jede Signatur σ' , sowie für jeden σ -Ausdruck X gilt: wenn σ eine Teilsignatur von σ' ist, dann ist X ein σ' -Ausdruck.

Beweis. Seien σ und σ' Signaturen und X ein σ -Ausdruck. Dann gilt nach Definition: X ist eine endliche Folge von $\bigcup_{i=1}^3 \binom{(i)}{\sigma} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{H}$. Angenommen, σ ist eine Teilsignatur von σ' . Dann gilt nach Definition: $(\bigcup_{i=1}^3 \binom{(i)}{\sigma}) \subseteq (\bigcup_{i=1}^3 \binom{(i)}{\sigma'})$. Also ist X eine endliche Folge von $\bigcup_{i=1}^3 \binom{(i)}{\sigma'} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{H}$. Also ist X ein σ' -Ausdruck. $\square$

Lemma 10. *Für jede Signatur σ , jede Signatur σ' , sowie für jeden σ -Term t gilt: wenn σ eine Teilsignatur von σ' ist, dann ist t ein σ' -Term.*

Beweis. Seien σ und σ' Signaturen und t ein σ -Term. Dann gilt nach Definition für mindestens Σ , dass Σ eine σ -Termkonstruktionssequenz für t ist. Sei Σ von dieser Art. Dann gilt nach Definition: Σ ist eine endliche Folge von $\{X | X \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$, sodass: (i) $\Sigma(\dot{\Sigma}) = t$, (ii) für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$ gilt: (a) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$; oder (b) für mindestens ein $c \in \binom{(2)}{\sigma}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$; oder (c) für mindestens ein $f \in \binom{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \uparrow g$.

Angenommen, σ ist eine Teilsignatur von σ' . Dann gilt nach Lemma 9: Σ ist eine endliche Folge von $\{X | X \text{ ist ein } \sigma'\text{-Ausdruck}\}$. Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$. dann gilt: (a) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$; oder (b) für mindestens ein $c \in \binom{(2)}{\sigma}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$; oder (c) für mindestens ein $f \in \binom{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \uparrow g$.

Fall (a): Angenommen, für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$. Dann gilt: (a) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$; oder (b) für mindestens ein $c \in \binom{(2)}{\sigma'}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$; oder (c) für mindestens ein $f \in \binom{(3)}{\sigma'}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \uparrow g$.

Fall (b): Angenommen, für mindestens ein $c \in \binom{(2)}{\sigma}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$. Sei c von dieser Art. Da nach Definition $\binom{(2)}{\sigma} \subseteq \binom{(2)}{\sigma'}$, gilt: $c \in \binom{(2)}{\sigma'}$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also gilt für mindestens ein $c \in \binom{(2)}{\sigma'}$: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also gilt: (a) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$; oder (b) für mindestens ein $c \in \binom{(2)}{\sigma'}$ gilt: $\Sigma(i) =$

$\{\langle 1, c \rangle\}$; oder (c) für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma'}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$.

Fall (c): Angenommen, für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Seien f und M von dieser Art. Da nach Definition $\overset{(3)}{\sigma} \subseteq \overset{(3)}{\sigma'}$, gilt: $f \in \overset{(3)}{\sigma'}$. Also gilt für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma'}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g : für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Also gilt: (a) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$; oder (b) für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma'}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$; oder (c) für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma'}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$.

Also gilt in jedem Fall: (a) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$; oder (b) für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma'}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$; oder (c) für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma'}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Da trivialerweise $\Sigma(\dot{\Sigma}) = t$, gilt nach Definition, dass Σ eine σ' -Termkonstruktionssequenz für t ist. Also gilt nach Definition: t ein σ' -Term. $\square$

Lemma 11. *Für jede Signatur σ , jede Signatur σ' , sowie für jede σ -Formel A gilt: wenn σ eine Teilsignatur von σ' ist, dann ist A eine σ' -Formel.*

Beweis. Seien σ und σ' Signaturen und A eine σ -Formel. Dann gilt nach Definition für mindestens ein Σ , dass Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für A ist. Sei Σ von dieser Art. Dann gilt nach Definition, dass Σ eine endliche Folge von $\{X | X \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$ ist, sodass: (i) $\Sigma(\dot{\Sigma}) = A$, und (ii) für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$ gilt: (a) $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\bowtie} \Sigma(k)$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\bowtie} \Sigma(k)) \dot{\bowtie} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\bowtie} \Sigma(j)) \dot{\bowtie} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\bowtie} \Sigma(k)) \dot{\bowtie} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\bowtie} \Sigma(j)) \dot{\bowtie} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$.

$\Sigma(k)) \checkmark \{\langle 1, \vee \rangle\} \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \checkmark \{\langle 1, v \rangle\}) \checkmark \Sigma(k)$, oder $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \checkmark \{\langle 1, v \rangle\}) \checkmark \Sigma(k)$.

Angenommen, σ ist eine Teilsignatur von σ' . Nach Lemma 9 gilt dann: Σ ist eine endliche Folge von $\{X | X \text{ ist ein } \sigma'\text{-Ausdruck}\}$. Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$. Dann gilt: (a) $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \checkmark \Sigma(k)$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \{\langle 1, \vee \rangle\}) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \{\langle 1, \wedge \rangle\}$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \checkmark \{\langle 1, v \rangle\}) \checkmark \Sigma(k)$, oder $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \checkmark \{\langle 1, v \rangle\}) \checkmark \Sigma(k)$.

Fall (a): Angenommen, $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel. Dann gilt nach Definition: A ist ein σ -Ausdruck ist und (i) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \checkmark \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \checkmark t) \checkmark s$. Nach Lemma 9 gilt: A ist ein σ' -Ausdruck.

Fall (a.i): Angenommen, für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \checkmark \overset{\uparrow}{g}$. Seien P und g von dieser Art. Da nach Definition $\overset{(1)}{\sigma} \subseteq \overset{(1)}{\sigma'}$, gilt: $P \in \overset{(1)}{\sigma'}$. Nach Lemma 10 gilt, dass g eine Folge von σ' -Termen ist. Also gilt für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma'}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ' -Termen: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \checkmark \overset{\uparrow}{g}$. Also: (i) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma'}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ' -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \checkmark \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen σ' -Term t , sowie für mindestens einen σ' -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \checkmark t) \checkmark s$.

Fall (a.ii): Angenommen, für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \checkmark t) \checkmark s$. Seien t und s von dieser Art. Dann gilt nach Lemma 10, dass t ein σ' -Term ist und s ein σ' -Term ist. Also gilt für mindestens einen σ' -Term t , sowie für mindestens einen σ' -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \checkmark t) \checkmark s$. Also: (i) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma'}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ' -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \checkmark \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen σ' -Term t , sowie für mindestens einen σ' -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \checkmark t) \checkmark s$.

Also gilt in beiden Fällen: (i) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma'}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ' -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen σ' -Term t , sowie für mindestens einen σ' -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\vee} t) \dot{\vee} s$. Dann ist nach Definition A eine σ' -Formel. Also gilt: $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$.

Fall (b)-(d): Trivialerweise gilt: $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$.

Also gilt in jedem Fall für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$: $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$. Also ist Σ eine σ' -Formelkonstruktionssequenz für A . Also ist A eine σ' -Formel. $\square$

Schneidet man die Termkonstruktionssequenz an einer beliebigen Stelle ab, so entsteht eine neue Termkonstruktionssequenz für das letzte Glied der gekürzten Sequenz. Jede Termkonstruktionssequenz besteht somit aus Termen.

Theorem 1. Für jedes t , jedes σ , sowie für jede σ -Termkonstruktionssequenz Σ für t gilt: Für jedes $i \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$, gilt: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ ist eine σ -Termkonstruktions-

sequenz für $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$.

Beweis. Angenommen, Σ ist eine σ -Termkonstruktionssequenz für t , und $i \in \mathcal{I}_{\dot{\Sigma}}$. Dann gilt wegen Lemma 8 für jedes $X \in \text{dom}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i})$, dass $\Sigma(X) \in \{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$ gdw $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(X) \in \{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$. Da für jedes $X \in \text{dom}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i})$ gilt, dass $\Sigma(X) \in \{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$, gilt auch für jedes $X \in \text{dom}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i})$, dass $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(X) \in \{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$. Also ist $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ eine endliche Folge von $\{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$. (Die Grundbedingung ist damit erfüllt.) Da $\Sigma|_{\mathcal{I}_i} = i$, gilt $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i}) = \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$. (Die Bedingung (a) ist damit erfüllt.) Gemäß Annahme gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \Sigma|_{\mathcal{I}_i} \leq \dot{\Sigma}$: für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$; oder für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$; oder für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \dot{g}$. Also gilt wegen Lemma 7 auch für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \Sigma|_{\mathcal{I}_i}$: für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = \{\langle 1, v \rangle\}$; oder für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$; oder für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i})$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(j)$ und $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \dot{g}$. Also ist $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ eine σ -Termkonstruktionssequenz für $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$. $\square$

Korollar 9. Für jedes t , jedes σ , sowie für jede σ -Termkonstruktionssequenz Σ für t gilt: Für jedes $i \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$, gilt: $\Sigma(i)$ ist ein σ -Term.

Beweis. Angenommen, Σ ist eine σ -Termkonstruktionssequenz für t , und $i \in \mathcal{I}_{\dot{\Sigma}}$. Also gilt wegen Theorem 1: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ ist eine σ -Termkonstruktionssequenz für $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$. Also ist wegen Lemma 7 $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ auch eine σ -Termkonstruktionssequenz für $\Sigma(i)$. Also gibt es mindestens eine σ -Termkonstruktionssequenz Σ' für $\Sigma(i)$. Also ist $\Sigma(i)$ ein σ -Term. $\square$

Wenn ein Term in einem Schritt konstruierbar ist, dann kann er nicht aus einer n -stelligen Funktionskonstante gefolgt von n Termen bestehen.

Lemma 12. Für jede Signatur σ , sowie für jedes $t \in \text{term}_{\sigma}$: sowohl $\dot{t} = 1$, als auch $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$, gdw $\text{tgrd}(t) = 1$.

Beweis. Seien σ eine Signatur und $t \in \text{term}_{\sigma}$.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, sowohl $\dot{t} = 1$, als auch $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$. Sei Σ eine 1-gliedrige Folge von $\{Y|Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$, mit $\Sigma(1) = t$. Da $\dot{\Sigma} = 1$, gilt: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = t$. Sei $i \in \text{dom}(\Sigma)$. Da $\text{dom}(\Sigma) = \{1\}$, gilt: $i = 1$. Also: $\Sigma(i) = t$. Fall (I): Angenommen, $t(1) \in \mathcal{V}$. Dann gilt für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$: $\langle 1, x \rangle \in t$. Sei x von dieser Art. Da $\dot{t} = 1$, gilt: $t = \{\langle 1, x \rangle\}$. Also: $\Sigma(i) = \{\langle 1, x \rangle\}$. Also gilt für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$: $\Sigma(i) = \{\langle 1, x \rangle\}$. Also: Für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, x \rangle\}$, oder für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Fall (II): Angenommen, $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$. Dann gilt für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$: $\langle 1, c \rangle \in t$. Sei c von dieser Art. Da $\dot{t} = 1$, gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also gilt für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also: Für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, x \rangle\}$, oder für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Also in jedem Fall: Für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, x \rangle\}$, oder für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $\Sigma(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Also gilt nach Definition: Σ ist eine σ -Termkonstruktionssequenz für t .

Indirekte Annahme: Angenommen für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein Σ' gilt: Σ' ist eine σ -Termkonstruktionssequenz für t und $\dot{\Sigma}' = n$ und $n < \dot{\Sigma}$. Seien n und Σ' von dieser Art. Dann gilt: $n < 1$. Da für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $1 \leq m$, gilt also: $1 \leq n$. Also: $n < n$. Also führt die Indirekte Annahme zu einem Widerspruch. Also gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, sowie für jedes Σ' : wenn Σ' eine σ -Termkonstruktionssequenz für t ist und $\dot{\Sigma}' = n$, dann $\dot{\Sigma} \leq n$. Also: $\dot{\Sigma} = \min(\{m|m \in \mathbb{N} \text{ und für mindestens eine } \sigma\text{-Termkonstruktionssequenz } \Sigma' \text{ für } t \text{ gilt: } \dot{\Sigma}' = m\})$. Also $\dot{\Sigma} = \text{tgrd}(t)$. Also: $\text{tgrd}(t) = 1$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\text{tgrd}(t) = 1$. Also gilt nach Definition für mindestens eine Signatur σ' und mindestens ein Σ' : t ist ein σ' -Term und Σ' ist eine σ' -Termkonstruktionssequenz für t und $\dot{\Sigma}' = 1$. Da Σ' eine σ' -Termkonstruktionssequenz für t ist, gilt: $\Sigma'(\dot{\Sigma}') = t$. Also $\Sigma'(1) = t$. Sei $i \in \text{dom}(\Sigma')$, dann

gilt: $i = 1$. Außerdem gilt nach Definition: Für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma'(i) = \{\langle 1, x \rangle\}$, oder für mindestens ein $c \in \sigma'^{(2)}$ gilt: $\Sigma'(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder für mindestens ein $f \in \sigma'^{(3)}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma')$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma'(j)$ und $\Sigma'(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \dot{g}^\uparrow$.

Indirekte Annahme: Angenommen, für mindestens ein $f \in \sigma'^{(3)}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma')$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma'(j)$ und $\Sigma'(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \dot{g}^\uparrow$. Seien f und M von dieser Art. Da $\text{dom}(\Sigma') = \{1\}$, gilt: $M = \{1\}$, oder $M = \emptyset$. Also: $|M| \geq 1$. Da also $|M| \neq 0$, gilt: $M \neq \emptyset$. Also: $M = \{1\}$. Also: $\max(M) = 1$. Da $i = 1$, gilt: $1 < 1$. Also führt die Indirekte Annahme zu einem Widerspruch. Also ist es nicht der Fall, dass für mindestens ein $f \in \sigma'^{(3)}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma')$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma'(j)$ und $\Sigma'(i) = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \dot{g}^\uparrow$. Also: Für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma'(i) = \{\langle 1, x \rangle\}$, oder für mindestens ein $c \in \sigma'^{(2)}$ gilt: $\Sigma'(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$.

Fall (I): Für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma'(i) = \{\langle 1, x \rangle\}$. Sei x von dieser Art. Da $i = 1$ und $\Sigma'(1) = t$, gilt: $t = \{\langle 1, x \rangle\}$. Also: $\dot{t} = 1$. Also: $t(1) = x$. Da $x \in \mathcal{V}$, gilt: $t(1) \in \mathcal{V}$. Also: $t(1) \in \sigma'^{(2)}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$. Also: sowohl $\dot{t} = 1$, als auch $t(1) \in \sigma'^{(2)}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$.

Fall (II): Für mindestens ein $c \in \sigma'^{(2)}$ gilt: $\Sigma'(i) = \{\langle 1, c \rangle\}$. Sei c von dieser Art. Da $i = 1$ und $\Sigma'(1) = t$, gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also: $\dot{t} = 1$. Also: $t(1) = c$. Da $c \in \sigma'^{(2)}$, gilt: $t(1) \in \sigma'^{(2)}$. Da gemäß Annahme $t \in \text{term}_\sigma$, gilt: t ist ein σ -Ausdruck. Also: $\text{img}(t) \subseteq ((\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)}) \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{V})$. Also: $t(1) \in ((\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)}) \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{V})$. Da $t(1) \in \mathcal{GK}$ und nach Korollar 5 $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}, \mathcal{O}, \mathcal{H}$, und $\mathcal{V}$ paarweise disjunkt sind, gilt: $t(1) \in \sigma^{(2)}$. Also: $t(1) \in \sigma^{(2)}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$. Also: sowohl $\dot{t} = 1$, als auch $t(1) \in \sigma^{(2)}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$.

Also in jedem Fall: sowohl $\dot{t} = 1$, als auch $t(1) \in \sigma^{(2)}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$. $\square$

Lemma 13. Für jede Signatur σ , sowie für jedes $t \in \text{term}_\sigma$: $\text{tgrd}(t) = 1$ gdw für mindestens ein $c \in \sigma^{(2)}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, x \rangle\}$.

Beweis. Sei σ eine Signatur, sei $t \in \text{term}_\sigma$.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $tgrd(t) = 1$. Dann gilt nach Lemma 12: $\dot{t} = 1$ und (i) $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$ oder (ii) $t(1) \in \mathcal{V}$.

Fall (i): Angenommen, $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$. Also gilt für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$: $t(1) = c$. Sei c von dieser Art. Dann gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also gilt für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also gilt für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$: $t = \{\langle 1, x \rangle\}$.

Fall (ii): Angenommen $t(1) \in \mathcal{V}$. Auf zu Fall (i) vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, x \rangle\}$.

Also gilt in jedem Fall, dass für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$: $t = \{\langle 1, x \rangle\}$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, (i) für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder (ii) für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, x \rangle\}$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Sei c von dieser Art. Dann gilt: $\dot{t} = 1$ und $t(1) = c$. Wegen Lemma 12 gilt dann: $tgrd(t) = 1$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens ein $x \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, x \rangle\}$. Auf zu Fall (i) vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass: $tgrd(t) = 1$.

Also gilt in jedem Fall: $tgrd(t) = 1$. $\square$

Wenn für die Konstruktion eines Terms mehr als ein Schritt nötig ist, dann kann er keine Variable oder Gegenstandskonstante sein.

Lemma 14. Für jede Signatur σ , sowie für jeden σ -Term t gilt: $tgrd(t) > 1$ gdw für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von term_σ gilt: $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$.

Beweis. Sei σ eine Signatur und t ein σ -Term.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $tgrd(t) > 1$. Dann gilt nach Definition für mindestens eine Termkonstruktionssequenz Σ für t , dass $\Sigma(\dot{\Sigma}) = t$ und $\dot{\Sigma} = tgrd(t)$. Also gilt nach Definition: (i) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, v \rangle\}$, oder (ii) für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder (iii) für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < i$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F gilt: für jedes $k \in \text{dom}(F)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $F(k) = \Sigma(j)$ und $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, v \rangle\}$. Sei v von dieser Art. Sei $\Sigma' = \{\langle 1, \langle 1, v \rangle \rangle\}$. Dann gilt: $\dot{\Sigma}' = 1$ und Σ' ist eine σ -Termkonstruktionssequenz für t . Da $tgrd(t) = \min(\{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ und für mindestens eine } \sigma\text{-Termkonstruktionssequenz } \Sigma'' \text{ für } t \text{ gilt: } \dot{\Sigma}'' = m\})$, gilt $tgrd(t) \leq \dot{\Sigma}$. Also $tgrd(t) \leq 1$. Aber $1 < tgrd(t)$. Widerspruch zur Annahme. Also gibt es kein $v \in \mathcal{V}$ mit: $t = \{\langle 1, v \rangle\}$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Auf zu Fall (i) vollkommen analoge Weise kann die Annahme zu einem Widerspruch geführt werden. Also gibt es kein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$.

Also: für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < \dot{\Sigma}$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F gilt: für jedes $k \in \text{dom}(F)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $F(k) = \Sigma(j)$ und $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$. Seien f und F von dieser Art. Da Σ eine σ -Termkonstruktionssequenz für t ist, gilt nach Korollar 9 für jedes $i \in \text{dom}(\Sigma)$: $\Sigma(i)$ ist ein σ -Term. Also gilt für jedes $i \in \text{dom}(F)$: $F(i)$ ist ein σ -Term. Also ist F eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge von term_σ , sodass $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$. Also gilt für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von term_σ gilt: $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$.

„ $\Leftarrow$ “ Angenommen, für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von term_σ gilt: $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$. Seien f und F von dieser Art. Nach Korollar 5 gilt für kein $v \in \mathcal{V}$: $t = \{\langle 1, v \rangle\}$. Außerdem gilt nach Korollar 5 für kein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Da $\dot{f} \geq 1$ gilt: $\dot{F} \geq 1$. Also: $\dot{t} > 1$. Also gilt nach Lemma 12: $tgrd(t) \neq 1$. Da $tgrd$ nach Definition eine Funktion in $\mathbb{N}$ ist, gilt daher $tgrd(t) > 1$. $\square$

Die Schritte, die nötig sind, um einen Term zu konstruieren, sind auch nötig, wenn dieser Term in einen komplexeren Term eingebettet ist. Daher ist der Termgrad von auf Funktionskonstanten folgenden Termen immer kleiner als der des umfassenderen Funktionsterms. Lemma 12, Lemma 13, Lemma 14 & das nachfolgende Theorem 2 ermöglichen Beweise mittels vollständiger Induktion über Termgrade.

Theorem 2. Für jede Signatur σ , jeden σ -Term t und t' , jedes $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie für jede $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von term_σ , mit $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$ und $t' \in \text{img}(F)$, gilt: $tgrd(t) > tgrd(t')$.

Beweis. Sei σ eine Signatur, t und t' σ -Terme, $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ und sei F eine $\dot{f}$ -gliedrige

Folge F von $term_\sigma$, mit $t = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{F}$ und $t' \in \text{img}(F)$. Nach Lemma 14 gilt: $tgrd(t) > 1$. Nach Definition gibt es eine σ -Termkonstruktionssequenz Σ für t , mit $\dot{\Sigma} = tgrd(t)$. Also gilt (i) für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, v \rangle\}$, oder (ii) für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$, oder (iii) für mindestens ein $f' \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}$ und $\max(M) < \dot{\Sigma}$, sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $t = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{g}$. Da $\dot{t} \neq 1$ gilt nach Lemma 13 dass für kein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, v \rangle\}$ und für kein $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Also gilt: für mindestens ein $f' \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie mindestens ein $M \subseteq \text{dom}(\Sigma)$, mit $|M| = \dot{f}'$ und $\max(M) < \dot{\Sigma}$, sowie für mindestens eine $\dot{f}'$ -gliedrige Folge g gilt: für jedes $k \in \text{dom}(g)$ gibt es ein $j \in M$, sodass $g(k) = \Sigma(j)$ und $t = \{\langle 1, f' \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{g}$.

Seien f' , M und g von dieser Art. Da $t(1) = f$ und $t(1) = f'$, gilt: $f = f'$. Also: $\{\langle 1, f \rangle\} = \{\langle 1, f' \rangle\}$. Also gilt nach Lemma 1: $\overset{\uparrow}{F} = \overset{\uparrow}{g}$. Also gibt es mindestens ein $j < \dot{\Sigma}$, sodass $\Sigma(j) = t'$. Sei j von dieser Art. Also gilt nach Theorem 1: $\Sigma|_{\mathcal{I}_j}$ ist eine σ -Termkonstruktionssequenz für t' . Da $tgrd(t') \leq j$ und $j < tgrd(t)$ gilt: $tgrd(t') < tgrd(t)$. $\square$

Wie schon im Falle der Termkonstruktionssequenzen, können wir Formelkonstruktionssequenzen an einer beliebigen Stelle i abschneiden und erhalten dadurch eine neue Konstruktionssequenz.

Theorem 3. *Für jedes A , jedes σ , sowie für jede σ -Formelkonstruktionssequenz Σ für A gilt: Für jedes $i \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$, gilt: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$.*

Beweis. Angenommen, Σ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für A , und $i \in \mathcal{I}_{\dot{\Sigma}}$. Dann gilt wegen Lemma 8 für jedes $X \in \text{dom}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i})$, dass $\Sigma(X) \in \{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$ gdw $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(X) \in \{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$. Da für jedes $X \in \text{dom}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i})$ gilt, dass $\Sigma(X) \in \{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$, gilt auch für jedes $X \in \text{dom}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i})$, dass $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(X) \in \{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$. Also ist $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ eine endliche Folge von $\{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$. (Die Grundbedingung ist damit erfüllt.) Da $\Sigma|_{\mathcal{I}_i} = i$, gilt $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(\Sigma|_{\mathcal{I}_i}) = \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$. (Die Bedingung (a) ist damit erfüllt.) Gemäß Annahme gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \Sigma|_{\mathcal{I}_i} \leq \dot{\Sigma}$: $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel; oder für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)$; oder für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$,

oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$. Also gilt wegen Lemma auch für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq \Sigma|_{\mathcal{I}_i}$: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$ ist eine atomare σ -Formel; oder für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(k)$; oder für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(k)$, oder $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma|_{\mathcal{I}_i}(k)$. Also ist $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$. $\square$

Daraus ergibt sich unmittelbar als Korollar, dass Formelkonstruktionssequenzen nur aus Formeln bestehen.

Korollar 10. *Für jedes A , jedes σ , sowie für jede σ -Formelkonstruktionssequenz Σ für A gilt: Für jedes $i \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$, gilt: $\Sigma(i)$ ist eine σ -Formel.*

Beweis. Angenommen, Σ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für A , und $i \in \mathcal{I}_{\dot{\Sigma}}$. Also gilt wegen Theorem 3: $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}(i)$. Also ist wegen Lemma 7 $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ auch eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $\Sigma(i)$. Also gibt es mindestens eine σ -Formelkonstruktionssequenz Σ' für $\Sigma(i)$. Also ist $\Sigma(i)$ eine σ -Formel. $\square$

Trivialerweise lassen sich Formelkonstruktionssequenzen nicht nur durch Abtrennen erzeugen, sondern auch durch Aneinanderfügen von Formelkonstruktionssequenzen.

Lemma 15. *Für jede Signatur σ , jede endliche Folge F von spr_{σ} , sowie für jede endliche Folge Σ gilt: Wenn für jedes $i \in \text{dom}(\Sigma)$ gilt, dass $\Sigma(i)$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(i)$ ist, dann ist $\dot{\Sigma}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(\dot{F})$.*

Beweis. Trivial. $\square$

Somit lässt sich zeigen, dass die logischen Konnektive tatsächlich so etwas wie Operationen auf Formeln sind: Das Negationssymbol verbunden mit einer

Formel liefert eine neue Formel, das Konjunktionssymbol gefüttert mit Formeln (und Klammern) erzeugt eine neue Formel, usw.

Lemma 16. *Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, jedes $A \in \text{srp}_\sigma$, sowie für jedes $B \in \text{spr}_\sigma$ gilt: (i) $\neg A \in \text{spr}_\sigma$, (ii) $\langle A \wedge B \rangle \in \text{spr}_\sigma$, (iii) $\langle A \vee B \rangle \in \text{spr}_\sigma$, (iv) $\langle A \rightarrow B \rangle \in \text{spr}_\sigma$, (v) $\langle A \leftrightarrow B \rangle \in \text{spr}_\sigma$, (vi) $\forall x A \in \text{spr}_\sigma$ und (vii) $\exists x A \in \text{spr}_\sigma$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, $x \in \mathcal{V}$, $A \in \text{srp}_\sigma$ und $B \in \text{spr}_\sigma$.

ad(i): Nach Definition gilt: A ist eine σ -Formel. Also gilt, ebenfalls nach Definition, für mindestens ein Σ , dass Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für A ist. Sei Σ von dieser Art. Dann gilt nach Definition: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = A$. Da $\langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma})$ ein σ -Ausdruck ist, gilt: $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle$ ist eine endliche Folge von $\{X \mid X \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$. Außerdem gilt: $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(\dot{\Sigma} + 1) = \neg A$. Sei $i \in \text{dom}(\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle)$. Dann gilt: $1 \leq i \leq \dot{\Sigma} + 1$.

Fall (i): Angenommen, $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$. Dann gilt nach Definition: (a) $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(k)$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\langle 1, \emptyset \rangle \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \langle 1, \wedge \rangle) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \langle 1, \emptyset \rangle$, oder $\Sigma(i) = (((\langle 1, \emptyset \rangle \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \langle 1, \vee \rangle) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \langle 1, \emptyset \rangle$, oder $\Sigma(i) = (((\langle 1, \emptyset \rangle \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \langle 1, \rightarrow \rangle) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \langle 1, \emptyset \rangle$, oder $\Sigma(i) = (((\langle 1, \emptyset \rangle \checkmark \Sigma(k)) \checkmark \langle 1, \leftrightarrow \rangle) \checkmark \Sigma(j)) \checkmark \langle 1, \emptyset \rangle$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\langle 1, \forall \rangle \checkmark \langle 1, v \rangle) \checkmark \Sigma(k)$, oder $\Sigma(i) = (\langle 1, \exists \rangle \checkmark \langle 1, v \rangle) \checkmark \Sigma(k)$.

Da Σ eine endliche Teilfolge von $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle$ ist, gilt trivialeweise: (a) $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(k) = \langle 1, \neg \rangle \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(k))$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(i) = (((\langle 1, \emptyset \rangle \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(k))) \checkmark \langle 1, \wedge \rangle) \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(j))) \checkmark \langle 1, \emptyset \rangle$, oder $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(i) = (((\langle 1, \emptyset \rangle \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(k))) \checkmark \langle 1, \vee \rangle) \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(j))) \checkmark \langle 1, \emptyset \rangle$, oder $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(i) = (((\langle 1, \emptyset \rangle \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(k))) \checkmark \langle 1, \rightarrow \rangle) \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(j))) \checkmark \langle 1, \emptyset \rangle$, oder $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(i) = (((\langle 1, \emptyset \rangle \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(k))) \checkmark \langle 1, \leftrightarrow \rangle) \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(j))) \checkmark \langle 1, \emptyset \rangle$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(i) = (\langle 1, \forall \rangle \checkmark \langle 1, v \rangle) \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(k))$, oder $\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(i) = (\langle 1, \exists \rangle \checkmark \langle 1, v \rangle) \checkmark (\Sigma \checkmark \langle 1, \langle 1, \neg \rangle \checkmark \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle(k))$.

Formel. Also gilt nach Definition: $A \in \text{spr}_\sigma$.

ad(ii)-(vii): Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass $\langle A \wedge B \rangle \in \text{spr}_\sigma$, $\langle A \vee B \rangle \in \text{spr}_\sigma$, $\langle A \rightarrow B \rangle \in \text{spr}_\sigma$, $\langle A \leftrightarrow B \rangle \in \text{spr}_\sigma$, $\forall x A \in \text{spr}_\sigma$ und $\exists x A \in \text{spr}_\sigma$. $\square$

Eine Formel, für deren Konstruktion nur ein Schritt notwendig ist, kann nur eine atomare Formel sein.

Theorem 4. *Für jede Signatur σ , sowie für jede σ -Formel A gilt: A ist eine atomare σ -Formel gdw $\text{fgrd}(A) = 1$.*

Beweis. Sei A eine Formel.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, A ist eine atomare σ -Formel. Sei Σ eine 1-gliedrige Folge von $\{Y | Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$, mit $\Sigma(1) = A$. Dann ist Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für A , mit $\dot{\Sigma} = 1$. Da für jedes $M \subseteq \mathbb{N}$ gilt, dass $1 \leq \min(M)$, gilt auch: $1 = \min(\{m | m \in \mathbb{N} \text{ und für mindestens eine } \sigma\text{-Formelkonstruktionssequenz } \Sigma \text{ für } A \text{ gilt: } \dot{\Sigma} = m\})$. Also $\text{fgrd}(A) = 1$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\text{fgrd}(A) = 1$. Dann gilt für mindestens ein σ' , sowie für mindestens ein Σ' , dass Σ' eine σ' -Formelkonstruktionssequenz für A ist, mit $\dot{\Sigma}' = 1$ und $\Sigma'(1) = A$. Da für kein $i \in \mathbb{N}$ und kein $j \in \mathbb{N}$ gilt, dass $1 \leq i, j < 1$, gilt gemäß Definition für jedes $i \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}'$: $\Sigma'(i)$ ist eine atomare σ' -Formel. Also ist A eine atomare σ' -Formel. Nach Definition gilt (i) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma'}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ' -Termen: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \check{\vee} \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen σ' -Term t , sowie für mindestens einen σ' -Term s : $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \check{\vee} t) \check{\vee} s$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma'}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ' -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \check{\vee} \overset{\uparrow}{g}$. Seien P und g von dieser Art. Da A eine σ -Formel ist, gilt: A ist ein σ -Ausdruck. Da $P \in \mathcal{PK}$ und $P \in \text{img}(A)$, gilt also: $P \in \overset{(1)}{\sigma}$.

Sei $t \in \text{img}(g)$. Dann ist t ein σ' -Term. Der Beweis für die Behauptung, dass t ein σ -Term ist, erfolgt durch Induktion über den Termgrad von t :

(Induktionsbasis) Angenommen, $\text{tgrd}(t) = 1$. Dann gilt nach Lemma 12 für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma'}: t = \{\langle 1, c \rangle\}$ oder für mindestens ein $v \in \mathcal{V}: t = \{\langle 1, v \rangle\}$.

Fall (i.i): Angenommen, für mindestens ein $c \in \overset{(2)}{\sigma'}$ gilt: $t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Sei c von dieser Art. Da $c \in \mathcal{GK}$, A ein σ -Ausdruck ist und $c \in \text{img}(A)$, gilt: $c \in \overset{(2)}{\sigma}$. Also: t ist ein σ -Term.

Fall (i.ii): Angenommen, für mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $t = \{\langle 1, v \rangle\}$. Dann gilt nach Definition: t ist ein σ -Term.

Also gilt in jedem Fall: t ist ein σ -Term.

(Induktionsschritt) Angenommen, $tgrd(t) > 1$. Dann gilt nach Lemma 14 für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma'}$ sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von $term_{\sigma'}$: $t = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\circ} \overset{\uparrow}{F}$. Seien f und F von dieser Art. Da $f \in \mathcal{FK}$, A ein σ -Ausdruck ist und $f \in img(A)$, gilt: $f \in \overset{(3)}{\sigma}$. Nach Theorem 2 gilt für jedes $i \in dom(F)$: $tgrd(F(i)) < tgrd(t)$. Also gilt gemäß Induktionsvoraussetzung für jedes $i \in dom(F)$: $F(i)$ ist ein σ -Term. Also gilt nach Definition: t ist ein σ -Term.

Also gilt nach Definition: A ist eine atomare σ -Formel.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens einen σ' -Term t , sowie für mindestens einen σ' -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\circ} t) \dot{\circ} s$. Seien t und s von dieser Art. Auf zu Fall (i) vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass t und s σ -Terme sind. Also gilt nach Definition: A ist eine atomare σ -Formel.

Also gilt in jedem Fall: A ist eine atomare σ -Formel. $\square$

Formeln, deren Konstruktion mehrerer Schritte bedarf, müssen logische Konnektive enthalten.

Theorem 5. Für jede Signatur σ , sowie für jede σ -Formel A gilt: $fgrd(A) > 1$ gdw für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = (B \wedge C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = (B \vee C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = (B \rightarrow C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = (B \leftrightarrow C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$.

Beweis. Sei σ eine Signatur und A eine σ -Formel.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $fgrd(A) > 1$. Da A eine σ -Formel ist, gilt für mindestens ein Σ , dass Σ eine σ -Konstruktionssequenz für A ist. Nach Theorem 4 gilt, dass A keine atomare σ -Formel ist. Da $\Sigma(\dot{\Sigma}) = A$, gilt nach Definition: (i) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\circ} \Sigma(k)$, oder (ii) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < \dot{\Sigma}$ gilt: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\circ} \Sigma(k)) \dot{\circ} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\circ} \Sigma(j)) \dot{\circ} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\circ} \Sigma(k)) \dot{\circ} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\circ} \Sigma(j)) \dot{\circ} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\circ} \Sigma(k)) \dot{\circ} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\circ} \Sigma(j)) \dot{\circ} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\circ} \Sigma(k)) \dot{\circ} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\circ} \Sigma(j)) \dot{\circ} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$.

$\rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder (iii) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < \dot{\Sigma}$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < \dot{\Sigma}$ gilt: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)$. Sei k von dieser Art. Dann gilt nach Korollar 10: $\Sigma(k)$ ist eine σ -Formel. Also gilt für mindestens eine σ -Formel B : $A = \neg B$. Also: für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \wedge C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \vee C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \rightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \leftrightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < \dot{\Sigma}$ gilt: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$. Auf zu Fall (i) vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \wedge C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \vee C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \rightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \leftrightarrow C \rangle$. Also: für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \wedge C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \vee C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \rightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \leftrightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$.

Fall (iii): Angenommen, für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < \dot{\Sigma}$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder $\Sigma(\dot{\Sigma}) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$. Auf zu Fall (i) vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$. Also: für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \wedge C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \vee C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel

B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \rightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \leftrightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$.

Also in jedem Fall: für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \wedge C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \vee C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \rightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \leftrightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \wedge C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \vee C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \rightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C gilt: $A = \langle B \leftrightarrow C \rangle$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$.

Sei o.B.d.A. angenommen, dass für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$. Indirekte Annahme: $fgrd(A) = 1$. Dann gilt nach Theorem 4: A ist eine ⁽¹⁾atomare σ -Formel. Nach Definition gilt (i) für mindestens ein $P \in \sigma'$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ' -Termen: $A = \{ \langle 1, P \rangle \} \dot{\vee} \uparrow g$, oder (ii) für mindestens einen σ' -Term t , sowie für mindestens einen σ' -Term s : $A = (\{ \langle 1, \dot{=} \rangle \} \dot{\vee} t) \dot{\vee} s$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $P \in \sigma'$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ' -Termen gilt: $A = \{ \langle 1, P \rangle \} \dot{\vee} \uparrow g$. Seien P und g von dieser Art. Wegen Korollar 5 gilt: $\{ \langle 1, \neg \rangle \} \neq \{ \langle 1, P \rangle \}$. Also gilt: $A(1) \neq A(1)$. Widerspruch aufgrund der indirekten Annahme, also: $fgrd(A) \neq 1$. Also: $fgrd(A) > 1$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens einen σ' -Term t , sowie für mindestens einen σ' -Term s gilt: $A = (\{ \langle 1, \dot{=} \rangle \} \dot{\vee} t) \dot{\vee} s$. Seien t und s von dieser Art. Wegen Korollar 5 gilt: $\{ \langle 1, \dot{=} \rangle \} \neq \{ \langle 1, P \rangle \}$. Also gilt: $A(1) \neq A(1)$. Widerspruch aufgrund der indirekten Annahme, also: $fgrd(A) \neq 1$. Also: $fgrd(A) > 1$.

Also gilt in jedem Fall $fgrd(A) > 1$. $\square$

Das nachfolgende Theorem berechtigt uns gewissermaßen zu Beweisen durch Induktion über Formeln.

Theorem 6. *Für jede Formel A , jede Formel B , jede Formel C , sowie für jedes $v \in \mathcal{V}$ gilt: Wenn $A = \neg B$, oder $A = \langle B \wedge C \rangle$, oder $A = \langle B \vee C \rangle$, oder $A = \langle B \rightarrow C \rangle$, oder $A = \langle B \leftrightarrow C \rangle$, oder $A = \forall v B$, oder $A = \exists v B$, dann gilt: $fgrd(B) < fgrd(A)$ und $fgrd(C) < fgrd(A)$.*

Beweis. Seien A , B und C Formeln und $v \in \mathcal{V}$. Sei o.B.d.A. $A = \langle B \wedge C \rangle$. Nach Definition gibt es eine Signatur σ und eine σ -Formelkonstruktionssequenz Σ für A , mit $\dot{\Sigma} = fgrd(A)$. Also gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq i < fgrd(A)$ und $\Sigma(i) = B$. Wegen Theorem 3 ist $\Sigma|_{\mathcal{I}_i}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für B . Also ist $fgrd(B) \leq i$. Also $fgrd(B) < fgrd(A)$. Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass $fgrd(C) < fgrd(A)$. $\square$

4 Semantik

Unter der Interpretation einer formalen Sprache verstehen wir die eindeutige Zuweisung von Extensionen zu Termen und Prädikatkonstanten, und die Rückführung der Bedeutung der logischen Konstanten $\neg, \wedge, \vee, \forall$ etc. auf die (in der klassischen Mathematik übliche) Bedeutung der natürlichsprachlichen junktorhaften und quantorhaften Ausdrücke 'nicht', 'und', 'oder', 'für jede/jedes/jeden' etc. durch die Angabe von Wahrheitsbedingungen für Formeln. Die Zuweisung von Extensionen erfolgt durch die Angabe von Funktionen.

Die Folgerungsbeziehung besteht genau dann zwischen einer Formelmenge und einer Formel, wenn jede Interpretation, die die Formelmenge wahr macht, auch die Formel wahr macht. Eine Theorie ist eine Formelmenge, die nur aus geschlossenen Formeln besteht und alle ihre logischen Konsequenzen selbst enthält, also unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist.

4.1 Einige grundlegende Definitionen

Eine Interpretationsfunktion entsteht durch die Zusammenführung einer Interpretation der deskriptiven Konstanten und einer Interpretation der Variablen. Eine σ -Konstanteninterpretation fixiert einen Gegenstandsbereich und ordnet als Funktion auf die Signatur σ jeder Gegenstandskonstante ein Objekt aus dem Gegenstandsbereich zu, jeder Prädikatkonstante eine Menge von Objekten bzw. von Tupel von Objekten aus bzw. gebildet über dem Gegenstandsbereich, und jeder Funktionskonstante eine Funktion mit Argumenten und Werten aus bzw. gebildet über dem Gegenstandsbereich.

Definition 63. I ist eine σ -Konstanteninterpretation gdw

- (a) σ ist eine Signatur
- (b) I ist eine Funktion auf $\overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(2)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma} \cup \{\forall\}$
- (c) $I(\forall) \neq \emptyset$
- (d) Für jede Prädikatkonstante $P \in \overset{(1)}{\sigma}$ gilt: $I(P) \subseteq I(\forall)^{\dot{P}}$
- (e) Für jede Gegenstandskonstante $c \in \overset{(2)}{\sigma}$ gilt: $I(c) \in I(\forall)$
- (f) Für jede Funktionskonstante $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ gilt: $I(f)$ ist eine Funktion von $I(\forall)^f$ in $I(\forall)$.

Eine Variablenbelegung fixiert einen Gegenstandsbereich und ordnet jeder Variable ein Objekt aus dem Gegenstandsbereich zu.

Definition 64. β ist eine Variablenbelegung gdw

- (a) β ist eine Funktion auf $\mathcal{V} \cup \{\forall\}$
- (b) für jede Variable $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\beta(v) \in \beta(\forall)$.

Dass eine Variablenbelegung den Allquantor nicht auf die leere Menge abbildet, muss im Definiens (im Gegensatz zur Definition von 'Konstanteninterpretation') nicht explizit verlangt werden, da anders als bei Signaturen $\mathcal{V}$ nicht leer sein kann.

Gegeben eine Konstanteninterpretation und eine Variablenbelegung hat jeder Term einen Termwert aus dem Gegenstandsbereich. Für Gegenstandskonstanten und Variablen sind es diejenigen Objekte, die ihnen durch Konstanteninterpretationen bzw. Variablenbelegungen zugeordnet werden. Für einen logisch komplexen Term, bestehend aus einer Funktionskonstante und n Termen, ist der Termwert rekursiv bestimmt: Er ist identisch mit dem Wert der Funktion, dem die Funktionskonstante durch die Konstanteninterpretation zugeordnet wurde bei den Termwerten der n Terme als Argument.²⁹

Definition 65. δ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β gdw

- (a) I eine σ -Konstanteninterpretation ist
- (b) β eine Variablenbelegung ist
- (c) $\beta(\forall) = I(\forall)$
- (d) $t \in \text{term}_\sigma$ und sich jenes aufgrund folgender rekursiver Bestimmungen über den Termgrad von t ergibt:

(Rekursionsbasis)

- $(tgrd(t) = 1)$ δ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β gdw (i) wenn $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$, dann $I(t(1)) = \delta$; und (ii) wenn $t(1) \in \mathcal{V}$, dann $\beta(t(1)) = \delta$.

²⁹In der Induktionsbasis der Definition werden für $tgrd(t)$ nur zwei Fälle unterschieden, nämlich dass $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$ und, dass $t(1) \in \mathcal{V}$. Aufgrund von Lemma 12 ist diese Fallunterscheidung eine vollständige. Deshalb könnte auf äquivalente Weise jeweils das Antezedens nach dem 'gdw' auch vorangestellt werden: (i) wenn $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$, dann gilt: δ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β gdw $I(t(1)) = \delta$; und (ii) wenn $t(1) \in \mathcal{V}$, dann gilt: δ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β gdw $\beta(t(1)) = \delta$.

(Rekursionsklausel)

$(tgrd(t) > 1)$ für jedes $f \in \overset{(3)}{\sigma}$, sowie für jede $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von $term_\sigma$, mit $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$, sowie für jedes Basis- $\dot{f}$ -Tupel τ , sodass für jedes $1 \leq i \leq \dot{f}$ gilt, dass $\overset{(i)}{\tau}$ ein σ -Termwert von $F(i)$ bezüglich I und β ist, gilt: $I(f)(\tau) = \delta$ genau dann, wenn δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist.

Dieser Termwert ist für jeden Term eindeutig bestimmt.

Korollar 11. *Für jede Signatur σ , jeden σ -Term t , jede σ -Konstanteninterpretation I , sowie für jede Variablenbelegung β gibt es genau ein δ , sodass δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist.*

Beweis. Sei σ eine Signatur, t ein σ -Term, I eine σ -Konstanteninterpretation und β eine Variablenbelegung. Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Termgrad von t .

(Induktionsbasis) Sei $tgrd(t) = 1$. Wegen Lemma 12 gilt daher: $\dot{t} = 1$ und: $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$.

Fall (1): Angenommen, $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$. „Existenz“: Es gilt wegen Korollar 5: $t(1) \notin \mathcal{V}$. Also: wenn $t(1) \in \mathcal{V}$, dann $\beta(t(1)) = I(t(1))$. Außerdem: $I(t(1)) = I(t(1))$. Also: wenn $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$, dann $I(t(1)) = I(t(1))$. Also nach DefTermwert: $I(t(1))$ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β . Also gilt für mindestens ein δ , dass δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist. „Eindeutigkeit“: Seien δ und δ' derart, dass: δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist und δ' ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist. Dann gilt nach DefTermwert: $I(t(1)) = \delta$ und $I(t(1)) = \delta'$. Also: $\delta = \delta'$. Also gibt es genau ein δ , sodass δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist.

Fall (2): Angenommen, $t(1) \in \mathcal{V}$. Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass es genau ein δ gibt, sodass δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist.

Also gibt es genau ein δ , sodass δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist.

(Induktionsschritt) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $tgrd(t) = n + 1$. Dann gilt wegen Lemma 14: Für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von $term_\sigma$ gilt: $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$. Seien f und F von dieser Art. Nach Theorem 2 gilt dann für jedes $i \in dom(F)$: $F(i)$ ist ein σ -Term mit $tgrd(F(i)) < tgrd(t)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für jedes $i \in dom(F)$ genau ein δ' , sodass δ' ein

σ -Termwert von $F(i)$ bezüglich I und β ist. Sei τ ein Basis- $\dot{f}$ -Tupel, sodass $\tau^{(i)}$ ein σ -Termwert von $F(i)$ bezüglich I und β ist. „Existenz“: Da $I(f)(\tau) = I(f)(\tau)$, gilt: $I(f)(\tau)$ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β . Also gilt für mindestens ein δ , dass δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist. „Eindeutigkeit“: Seien δ' und δ'' σ -Termwerte von t bezüglich I und β . Also: $I(f)(\tau) = \delta'$ und $I(f)(\tau) = \delta''$. Also: $\delta' = \delta''$.

Also gibt es genau ein δ , sodass δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist. $\square$

Eine σ -Interpretation fixiert einen Gegenstandsbereich, ordnet Termen auf Basis von Konstanteninterpretationen und Variablenbelegungen Objekte aus dem Gegenstandsbereich als Termwerte zu und Prädikatkonstanten Mengen von Objekten oder Mengen von Tupeln von Objekten aus bzw. gebildet über dem Gegenstandsbereich.

Definition 66. $\mathfrak{I}$ ist eine σ -Interpretation bezüglich I und β gdw

- (a) I ist eine σ -Konstanteninterpretation
- (b) β ist eine Variablenbelegung
- (c) $\beta(\forall) = I(\forall) = \mathbb{N}^{30}$
- (d) $\mathfrak{I}$ ist eine Funktion auf $\sigma^{(1)} \cup \sigma^{(3)} \cup \text{term}_\sigma \cup \{\forall\}$
- (e) $\mathfrak{I}|_{\sigma^{(1)} \cup \sigma^{(3)} \cup \{\forall\}} = I|_{\sigma^{(1)} \cup \sigma^{(3)} \cup \{\forall\}}^{31}$

³⁰Wenn wir über Tupel über dem Gegenstandsbereich quantifizieren, dann tun wir dies immer eingeschränkt auf Basis-Tupel. In der von Neumann-Konstruktion enthält $\mathbb{N}$ selbst keine Tupel. Daher sind alle Tupel über $\mathbb{N}$ Basis-Tupel und umgekehrt. Wäre dies nicht der Fall, würde unsere Definition von 'Interpretation' zu einer inadäquaten Semantik führen: Wenn einer Prädikatkonstante als Extension die leere Menge zugewiesen wird und der Gegenstandsbereich nur Tupel mit der Prädikatkonstanten entsprechenden Gliedrigkeit enthält, die keine Basis-Tupel sind, dann ist die allquantifizierte Prädikationsformel wahr, aber existenzquantifizierte Prädikationsformel falsch.

Die Festlegung des Gegenstandsbereichs auf $\mathbb{N}$ hingegen ist unproblematisch, weil nach dem Löwenheim-Skolem-Theorem ohnehin genau die erfüllbaren Formeln ein Modell über $\mathbb{N}$ haben. (vgl. Hodges, 1993, p.87ff)

³¹Für eine Vielzahl von Beweisen ist es erforderlich, dass Konstanteninterpretationen und Variablenbelegungen durch Interpretationen eindeutig bestimmt sind. Dies kann nachgewiesen werden (siehe Lemma 17), allerdings nur unter der Bedingung, dass eine gegebene Interpretation $\mathfrak{I}$ und die entsprechende Konstanteninterpretation I übereinstimmen, so sie auf $\sigma^{(3)}$ eingeschränkt werden. Diese Bedingung ergibt sich jedoch nicht aus den übrigen und muss daher eingefügt werden.

Um dies nachzuvollziehen, betrachte eine Variablenbelegung β , die jede Variable aus $\mathcal{V}$ konstant auf 0 abbildet, wobei $\beta(\forall) = \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$; eine Signatur σ , mit $\sigma^{(1)} = \emptyset$, $\sigma^{(2)} = \emptyset$ und $\sigma^{(3)} =$

- (f) für jedes $t \in \text{term}_\sigma$, sowie für jedes δ gilt: $\mathcal{I}(t) = \delta$ gdw δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β ist.

Definition 67. $\mathcal{I}$ ist eine σ -Interpretation gdw für mindestens ein I , sowie für mindestens ein β gilt: $\mathcal{I}$ ist eine σ -Interpretation bezüglich I und β .

Weichen zwei Variablenbelegungen an einer Stelle $x \in \mathcal{V}$ voneinander ab, so erzeugen sie bei derselben Konstanteninterpretation zwei Interpretationsvarianten von x .

Definition 68. β differiert von β' höchstens in Bezug auf v gdw

- (a) β und β' sind Variablenbelegungen
- (b) $\beta(\forall) = \beta'(\forall)$
- (c) $v \in \mathcal{V}$
- (d) Für jedes $x \in \mathcal{V} \setminus \{v\}$ gilt: $\beta(x) = \beta'(x)$.

Definition 69. $\mathcal{I}$ ist eine σ, v -Variante von $\mathcal{I}'$ gdw für mindestens ein I , mindestens ein β , sowie für mindestens ein β' gilt:

- (a) $\mathcal{I}$ ist eine σ -Interpretation bezüglich I und β
- (b) $\mathcal{I}'$ ist eine σ -Interpretation bezüglich I und β'
- (c) β differiert von β' höchstens in Bezug auf v .

Eine Interpretation macht eine atomare Identitätsformel wahr, wenn die Termwerte der beiden, das Identitätsprädikat flankierenden Terme identisch sind. Sie macht eine atomare Prädikationsformel wahr, wenn die Termwerte der Prädikatkonstanten nachfolgenden Terme in der durch die Interpretation zugewiesenen Extension der Prädikatkonstante enthalten sind. Die Wahrheitsbedingungen für

$\{f\}$, wobei f eine 1-stellige Funktionskonstante ist; eine Konstanteninterpretation I mit $I(\forall) = \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$, die f auf die Funktion $\{(x, y) \in (\{0\} \cup \mathbb{Z}^-)^2 \mid y = 0, \text{ falls } x = 0, \text{ und } y = -1, \text{ sonst}\}$ abbildet; und eine Konstanteninterpretation I' mit $I'(\forall) = \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$, die f auf die Funktion $\{(x, y) \in (\{0\} \cup \mathbb{Z}^-)^2 \mid y = 0, \text{ falls } x = 0, \text{ und } y = -2, \text{ sonst}\}$ abbildet. Offensichtlich gilt, dass $I(f) \neq I'(f)$ und somit $I \neq I'$. Die einzigen Terme in diesem Beispiel sind die eingliedrigen Folgen von $\mathcal{V}$ und Folgen von f und zwei Termen niedrigeren Grades. Die Termwerte der Variablen sind allein durch β bestimmt und immer mit 0 identisch. Damit ist der Termwert eines Funktionsterms, in dem f eine Variable zum Argument hat, gleichfalls identisch mit 0. Dasselbe gilt für beliebige Iterationen – im Falle beider Konstanteninterpretationen gelangen die Termwerte niemals über 0 „hinaus“. Somit lässt sich eine Funktion $\mathcal{I}$ finden, die zugleich Interpretation bezüglich I und β und bezüglich I' und β ist.

Negations-, Konjunktions-, Disjunktions-, Subjunktions- und Bisubjunktionsformeln sind auf die gängige Weise festgelegt.

Eine allquantifizierte Formel $\forall x A$ ist wahr unter einer Interpretation, wenn jede x -Variante der Interpretation A wahr macht. Für Formeln der Form $\exists x A$ gelten die dualen Bestimmungen.

Definition 70. $\mathcal{I}$ ist ein σ -Modell von A (kurz: $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$) gdw A eine σ -Formel und $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation ist und sich jenes aufgrund folgender Bestimmungen ergibt:

(Rekursionsbasis) ($f g d r(A) = 1$)

- (a) für jedes $t \in \text{term}_{\sigma}$, sowie für jedes $s \in \text{term}_{\sigma}$ gilt: wenn $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\vee} t) \dot{\vee} s$, dann gilt: $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(s)$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$
- (b) für jedes $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie für jede $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ -Termen gilt: wenn $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{g}$, dann gilt: für jedes Basis- $\dot{g}$ -Tupel τ , mit $\overset{(i)}{\tau} = \mathcal{I}(g(i))$ für jedes $1 \leq i \leq \dot{g}$, gilt: $\tau \in \mathcal{I}(P)$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$.

(Rekursionsklausel) ($f g d r(A) > 1$) Für jede σ -Formel B , jede σ -Formel C , sowie für jedes $v \in \mathcal{V}$ gilt:

- (a) Wenn $A = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} B$, dann gilt: es ist nicht der Fall, dass $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} B$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$
- (b) Wenn $A = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} B) \dot{\vee} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\vee} C) \dot{\vee} \{\langle 1, \lvert \rangle\}$, dann gilt: sowohl $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} B$, als auch $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} C$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$
- (c) Wenn $A = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} B) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\vee} C) \dot{\vee} \{\langle 1, \lvert \rangle\}$, dann gilt: $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} B$, oder $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} C$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$
- (d) Wenn $A = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} B) \dot{\vee} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\vee} C) \dot{\vee} \{\langle 1, \lvert \rangle\}$, dann gilt: $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} C$, oder es ist nicht der Fall, dass $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} B$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$
- (e) Wenn $A = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} B) \dot{\vee} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\vee} C) \dot{\vee} \{\langle 1, \lvert \rangle\}$, dann gilt: sowohl $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} B$, als auch $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} C$, oder es sowohl nicht der Fall ist, dass $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} B$ als auch nicht der Fall, dass $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} C$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$
- (f) Wenn $A = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} B$, dann gilt: für jede σ, v -Variante $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}$ gilt, dass $\models_{\mathcal{I}'}^{\sigma} B$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$
- (g) Wenn $A = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} B$, dann gilt: für mindestens eine σ, v -Variante $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}$ gilt, dass $\models_{\mathcal{I}'}^{\sigma} B$ gdw $\models_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$.

Definition 71. $\not\models_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ gdw $\mathfrak{J}$ eine σ -Interpretation ist, $A \in \text{spr}_{\sigma}$ und es nicht der Fall ist, dass $\models_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$.

Ein extendiertes Modell einer Formelmenge ist eine Interpretation, die jede Formel in ihr wahr macht.

Definition 72. $\mathfrak{J}$ ist ein extendiertes σ -Modell von T (kurz: $\models_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$) gdw

- (a) $\mathfrak{J}$ ist eine σ -Interpretation
- (b) T ist eine σ -Formelmenge
- (c) Für jedes $A \in T$ gilt: $\models_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$.

Ist jedes extendierte Modell einer Formelmenge ein Modell einer Formel, so folgt diese aus jener logisch.

Definition 73. A ist eine σ -Folgerung aus T (kurz: $T \models^{\sigma} A$) gdw

- (a) T ist eine σ -Formelmenge
- (b) A ist eine σ -Formel
- (c) Für jedes $\mathfrak{J}$ gilt: wenn $\models_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann gilt: $\models_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$.

Der logische Abschluss einer Formelmenge ist die eindeutig bestimmte Menge all derjenigen geschlossenen Formeln, die aus jener logisch folgen.

Definition 74. $cn_{\sigma}(T) = M$ gdw

- (a) T ist eine σ -Formelmenge
- (b) $M = \{A \mid T \models^{\sigma} A \text{ und } A \text{ ist eine geschlossene } \sigma\text{-Formel}\}$.

Eine Theorie ist eine Formelmenge, die mit ihrem logischen Abschluss identisch ist.

Definition 75. T ist eine σ -Theorie gdw

- (a) σ ist eine Signatur
- (b) T ist eine σ -Formelmenge
- (c) $T = cn_{\sigma}(T)$.

Lässt sich ein kontradiktorischer Widerspruch aus einer Theorie ableiten, so ist sie inkonsistent, andernfalls konsistent.

Definition 76. T ist eine konsistente σ -Theorie gdw

- (a) T ist eine σ -Theorie
- (b) Es gibt keine σ -Formel A , sodass gilt: $T \models^\sigma A$ und $T \models^\sigma \neg A$.

Definition 77. T ist eine inkonsistente σ -Theorie gdw

- (a) T ist eine σ -Theorie
- (b) Für mindestens eine σ -Formel A gilt: $T \models^\sigma A$ und $T \models^\sigma \neg A$.

4.2 Erforderliche, semantische Metatheoreme

In diesem Unterabschnitt beweisen wir Zusammenhänge, die aufgrund der Definitionen von semantischen Begriffen aus dem vorigen Unterabschnitt bestehen – zuerst zur eindeutigen Bestimmtheit und Koinzidenz bzgl. Interpretationen, dann zu wichtigen Folgerungszusammenhängen und schließlich zu konsistenten und inkonsistenten Theorien.

Durch die Wahl einer Interpretationsfunktion ist die Interpretation der Konstanten und die der Variablen eindeutig bestimmt:

Lemma 17. *Für jedes σ , sowie für jedes $\mathfrak{I}$ gilt: Wenn $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation ist, dann gilt für genau ein I , sowie für genau ein β , dass $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β ist.*

Beweis. Sei σ eine Signatur und $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation.

„Existenz“: trivial.

„Eindeutigkeit“: Angenommen, $\mathfrak{I}$ ist eine σ -Interpretation bezüglich I und β , und bezüglich I' und β' . Zu zeigen: (1) $\beta = \beta'$ und (2) $I = I'$.

ad (1): Sei $x \in \text{dom}(\beta)$. Dann gilt nach Definition: $x \in \mathcal{V} \cup \{\forall\}$.

Fall ($x = \forall$): Nach Definition gilt: $\beta(\forall) = \mathfrak{I}(\forall)$. Aber auch: $\mathfrak{I}(\forall) = \beta'(\forall)$.

Also: $\beta(\forall) = \beta'(\forall)$. Also: $\beta(x) = \beta'(x)$.

Fall ($x \in \mathcal{V}$): Dann gilt nach Definition und Korollar 11, dass $\beta(x)$ der σ -Termwert von $\{\langle 1, x \rangle\}$ bezüglich I und β ist. Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}(\{\langle 1, x \rangle\}) = \beta(x)$. Nach Definition gilt dann, dass $\beta(x)$ der σ -Termwert von $\{\langle 1, x \rangle\}$ bezüglich I und β' ist. Also nach Definition: $\beta(x) = \beta'(x)$.

Also in jedem Fall: $\beta(x) = \beta'(x)$. Sei nun $x \in \text{dom}(\beta')$. Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass $\beta(x) = \beta'(x)$. Also: $\beta = \beta'$.

ad (2): Sei $k \in \text{dom}(I)$. Dann gilt nach Definition: $k \in \overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(2)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma} \cup \{\forall\}$.

Fall ($k = \forall$): Nach Definition gilt: $I(\forall) = \mathfrak{I}(\forall)$. Aber auch: $\mathfrak{I}(\forall) = I'(\forall)$. Also: $I(\forall) = I'(\forall)$. Also: $I(k) = I'(k)$.

Fall ($k \in \overset{(1)}{\sigma}$): Auf zu Fall ($k = \forall$) vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass: $I(k) = I'(k)$.

Fall ($k \in \overset{(2)}{\sigma}$): Auf zu Fall ($x \in \mathcal{V}$) vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass: $I(k) = I'(k)$.

Fall ($k \in \overset{(3)}{\sigma}$): Auf zu Fall ($k = \forall$) vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass: $I(k) = I'(k)$.

Also in jedem Fall: $I(k) = I'(k)$. Sei nun $k \in \text{dom}(I')$. Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass $I(k) = I'(k)$. Also: $I = I'$. $\square$

Wenn eine Interpretation in Bezug auf zwei Variablen eine Variante von einer anderen Interpretation ist, dann spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Variationen erzeugt wurden.

Lemma 18. *Für jede Signatur σ , jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}^x$, jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}^{x,v}$, für jedes $x \in \mathcal{V}$, sowie für jedes $v \in \mathcal{V}$ gilt: Wenn $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$ ist und $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ, v -Variante von $\mathfrak{I}^x$ ist, dann gilt für mindestens ein $\mathfrak{I}^v$, dass (i) $\mathfrak{I}^v$ eine σ, v -Variante von $\mathfrak{I}$ ist und (ii) $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}^v$ ist.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, $x \in \mathcal{V}$, $v \in \mathcal{V}$ und seien $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}^x$ und $\mathfrak{I}^{x,v}$ σ -Interpretationen, sodass $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$ ist und $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ, v -Variante von $\mathfrak{I}^x$ ist. Dann gilt nach Definition und Lemma 17 für genau ein I , genau ein β , und genau ein $\beta_{\mathfrak{I}^x}$, dass $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β ist, $\mathfrak{I}^x$ eine σ -Interpretation bezüglich I und $\beta_{\mathfrak{I}^x}$ ist und $\beta_{\mathfrak{I}^x}$ höchstens in Bezug auf x von β differiert. Seien I , β und $\beta_{\mathfrak{I}^x}$ von dieser Art. Außerdem gilt nach Definition und Lemma 17 für genau ein I' , genau ein β' , und genau ein $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$, dass $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ -Interpretation bezüglich I' und $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ ist, $\mathfrak{I}^x$ eine σ -Interpretation bezüglich I' und β' ist und $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ höchstens in Bezug auf v von β' differiert. Seien I' , β' und $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ von dieser Art. Aufgrund von Lemma 17 gilt: $I = I'$ und $\beta_{\mathfrak{I}^x} = \beta'$. Also ist $\mathfrak{I}^x$ eine σ -Interpretation bezüglich I und $\beta_{\mathfrak{I}^x}$ und $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$. Außerdem gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ differiert von $\beta_{\mathfrak{I}^x}$ höchstens in Bezug auf v .

Sei nun $\beta_{\mathfrak{I}^v}$ eine Funktion auf $\mathcal{V} \cup \{\forall\}$, sodass (i) $\beta_{\mathfrak{I}^v}(\forall) = \beta(\forall)$, (ii) $\beta_{\mathfrak{I}^v}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\})} = \beta|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\})}$, und (iii) $\beta_{\mathfrak{I}^v}(v) = \beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}(v)$. Dann gilt nach Definition: $\beta_{\mathfrak{I}^v}$ ist eine Variablenbelegung und $\beta_{\mathfrak{I}^v}$ differiert von β höchstens in Bezug auf v . Sei nun weiters $\mathfrak{I}^v$ eine Funktion auf $\overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma} \cup \text{term}_{\sigma} \cup \{\forall\}$, sodass (i) $\mathfrak{I}^v|_{(\overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma} \cup \{\forall\})} = I|_{(\overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma} \cup \{\forall\})}$ und (ii) für jedes $t \in \text{term}_{\sigma}$, sowie für jedes δ gilt: $\mathfrak{I}^v(t) = \delta$ gdw δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und $\beta_{\mathfrak{I}^v}$ ist. Dann gilt nach Definition: $\mathfrak{I}^v$ ist eine σ -Interpretation bezüglich I und $\beta_{\mathfrak{I}^v}$. Also ist $\mathfrak{I}^v$ eine σ, v -Variante von $\mathfrak{I}$.

Da $\beta_{\mathfrak{I}^v}(\forall) = \beta(\forall)$, $\beta(\forall) = \beta_{\mathfrak{I}^x}(\forall)$ und $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}(\forall) = \beta_{\mathfrak{I}^x}(\forall)$, gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}(\forall) = \beta_{\mathfrak{I}^x}(\forall)$. Da $\beta_{\mathfrak{I}^x}|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\})} = \beta|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\})}$ und $\beta_{\mathfrak{I}^v}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\})} = \beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\})}$, gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}|_{(\mathcal{V} \setminus \{x,v\})} = \beta|_{(\mathcal{V} \setminus \{x,v\})}$. Da $\beta_{\mathfrak{I}^v}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\})} = \beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\})}$, gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\})} = \beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}|_{(\mathcal{V} \setminus \{x,v\})}$. Da $\beta_{\mathfrak{I}^v}(v) = \beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}(v)$, gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\})} = \beta_{\mathfrak{I}^v}|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\})}$. Also gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ differiert von $\beta_{\mathfrak{I}^v}$ höchstens in Bezug auf x . Also ist nach Definition $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}^v$. Also gilt für mindestens ein $\mathfrak{I}^v$, dass (i) $\mathfrak{I}^v$ eine σ, v -Variante von $\mathfrak{I}$ ist und (ii) $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}^v$ ist. $\square$

Eine Formel, die mit einer logischen Konsequenz einer Formelmenge äquivalent ist, ist selbst eine logische Konsequenz der Formelmenge.

Lemma 19. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A , sowie für jede σ -Formel B gilt: Wenn $T \models^{\sigma} A$ und $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow B$, dann $T \models^{\sigma} B$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel und B eine σ -Formel. Angenommen, $T \models^{\sigma} A$ und $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow B$. Sei $\mathfrak{I}$ derart, dass $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} T$. Also: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$. Also $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ oder $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$. Also ist es nicht der Fall, dass $\not\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ und $\not\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$. Außerdem gilt: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \leftrightarrow B$. Also gilt: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ und $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$, oder $\not\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ und $\not\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$. Also gilt: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ und $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$. Also: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$. Also: wenn $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} T$, dann $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$. Also gilt für jedes $\mathfrak{I}$: wenn $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} T$, dann $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$. Also: $T \models^{\sigma} B$. $\square$

Die materiale Äquivalenz zwischen Formeln ist eine transitive Relation.

Lemma 20. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A , jede σ -Formel B , sowie für jede σ -Formel C gilt: Wenn $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow B$ und $T \models^{\sigma} B \leftrightarrow C$, dann $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow C$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel, B eine σ -Formel und C eine σ -Formel. Angenommen, $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow B$ und $T \models^{\sigma} B \leftrightarrow C$. Sei $\mathfrak{I}$ derart, dass $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} T$. Also: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \leftrightarrow B$ und $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B \leftrightarrow C$. Also gilt: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$

und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Fall I: Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Da $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B \leftrightarrow C$, gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Da $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$, gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Also ist es nicht der Fall, dass: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Da $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$, gilt also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow C$. Fall II: Angenommen, $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Da $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B \leftrightarrow C$, gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Da $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$, gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Also ist es nicht der Fall, dass: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Also: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Da $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$, gilt also: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} C$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow C$. Also gilt in jedem Fall: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow C$. Also: wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow C$. Also für jedes $\mathfrak{J}$: wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow C$. Also: $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow C$. $\square$

Jedes Element einer Formelmenge folgt aus der Formelmenge.

Lemma 21. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge S , sowie für jedes $A \in S$ gilt: $S \models^{\sigma} A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, S eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel, sodass $A \in S$. Sei $\mathfrak{J}$ derart, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} S$. Dann gilt nach Definition für jedes $B \in S$: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$. Also: wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} S$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$. Also gilt für jedes $\mathfrak{J}$: wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} S$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$. Also: $S \models^{\sigma} A$. $\square$

Wird eine Theorie um eine geschlossene Formel ergänzt, so folgen genau diejenigen Formeln aus der Ergänzung, die auch aus dem logischen Abschluss der Ergänzung folgen.³²

Lemma 22. *Für jede Signatur σ , jede σ -Theorie S , jede geschlossene σ -Formel D , sowie für jede σ -Formel A gilt: $S \cup \{D\} \models^{\sigma} A$ gdw $cn_{\sigma}(S \cup \{D\}) \models^{\sigma} A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, S eine σ -Theorie, D eine geschlossene σ -Formel und A eine σ -Formel.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $S \cup \{D\} \models^{\sigma} A$. Sei $\mathfrak{J}$ derart, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} cn_{\sigma}(S \cup \{D\})$. Also gilt nach Definition für jede geschlossene σ -Formel B , mit $S \cup \{D\} \models^{\sigma} B$, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Da für jedes $B \in S \cup \{D\}$ gilt, dass B eine geschlossene σ -Formel ist und $S \cup \{D\} \models^{\sigma} B$, gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} S \cup \{D\}$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$. Also nach Definition: $cn_{\sigma}(S \cup \{D\}) \models^{\sigma} A$.

³²Beachte, dass dieser Zusammenhang nur gilt, wenn D eine geschlossene Formel ist: Ist S beispielsweise die leere Menge, D keine allgemeingültige Formel und $D = A$, dann ist A nicht in $cn(D)$ enthalten und folgt auch nicht daraus.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $cn_\sigma(S \cup \{D\}) \models^\sigma A$. Sei $\mathfrak{J}$ derart, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma S \cup \{D\}$. Sei $B \in cn_\sigma(S \cup \{D\})$. Dann gilt nach Definition: $S \cup \{D\} \models^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma cn_\sigma(S \cup \{D\})$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$. Also nach Definition: $S \cup \{D\} \models^\sigma A$. $\square$

Wir können sowohl das Deduktionstheorem als auch die konverse, das Resolutionstheorem, auf semantische Weise leicht beweisen.

Theorem 7. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A , sowie für jede σ -Formel B gilt: Wenn $T \cup \{A\} \models^\sigma B$, dann $T \models^\sigma A \rightarrow B$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel und B eine σ -Formel. Angenommen, $T \cup \{A\} \models^\sigma B$. Sei $\mathfrak{J}$ derart, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T$.

Fall (I): Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T \cup \{A\}$. Gemäß Annahme gilt für jedes $\mathfrak{J}'$: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}'}^\sigma T \cup \{A\}$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}'}^\sigma B$. Also: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T \cup \{A\}$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A \rightarrow B$.

Fall (II): Angenommen, $\nVdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$. Also gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A \rightarrow B$.

Also gilt in jedem Fall: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A \rightarrow B$. Also: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A \rightarrow B$. Also gilt für jedes $\mathfrak{J}$: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A \rightarrow B$. Also: $T \models^\sigma A \rightarrow B$. $\square$

Theorem 8. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A , sowie für jede σ -Formel B gilt: Wenn $T \models^\sigma A \rightarrow B$, dann $T \cup \{A\} \models^\sigma B$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel und B eine σ -Formel. Angenommen, $T \models^\sigma A \rightarrow B$. Sei $\mathfrak{J}$ derart, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T \cup \{A\}$. Dann gilt $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$. Gemäß Annahme gilt für jedes $\mathfrak{J}'$: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}'}^\sigma T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}'}^\sigma A \rightarrow B$. Also: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A \rightarrow B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A \rightarrow B$. Also: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Da $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$, gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T \cup \{A\}$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also gilt für jedes $\mathfrak{J}$: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T \cup \{A\}$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also: $T \cup \{A\} \models^\sigma B$. $\square$

Eine Bisubjunktion ist äquivalent mit der Konjunktion der Subjunktionen „in beide Richtungen“.

Lemma 23. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A , sowie für jede σ -Formel B gilt: $T \models^\sigma A \leftrightarrow B$ gdw $T \models^\sigma A \rightarrow B$ und $T \models^\sigma B \rightarrow A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel und B eine σ -Formel.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $T \models^\sigma A \leftrightarrow B$. Sei $\mathfrak{J}$ derart, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A \leftrightarrow B$. Also gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$.

Fall (I): Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \rightarrow B$. Außerdem gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B \rightarrow A$.

Fall (II): Angenommen, $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \rightarrow B$. Außerdem gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B \rightarrow A$.

Also gilt in jedem Fall: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \rightarrow B$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B \rightarrow A$. Also: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \rightarrow B$. Also gilt für jedes $\mathfrak{J}$: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \rightarrow B$. Also: $T \models^{\sigma} A \rightarrow B$. Also: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B \rightarrow A$. Also gilt für jedes $\mathfrak{J}$: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B \rightarrow A$. Also: $T \models^{\sigma} B \rightarrow A$. Also: $T \models^{\sigma} A \rightarrow B$ und $T \models^{\sigma} B \rightarrow A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $T \models^{\sigma} A \rightarrow B$ und $T \models^{\sigma} B \rightarrow A$. Sei $\mathfrak{J}$ derart, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \rightarrow B$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B \rightarrow A$. Also: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Außerdem gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$.

Fall (I): Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$. Da $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$, gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow B$.

Fall (II): Angenommen, $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$. Da $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$ oder $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$, gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also gilt: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow B$.

Also gilt in jedem Fall: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow B$. Also: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow B$. Also gilt für jedes $\mathfrak{J}$: Wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} A \leftrightarrow B$. Also: $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow B$. $\square$

Lemma 24. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A , sowie für jede σ -Formel B gilt: $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow B$ gdw $T \cup \{A\} \models^{\sigma} B$ und $T \cup \{B\} \models^{\sigma} A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel und B eine σ -Formel.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow B$. Aufgrund von Lemma 23, gilt: $T \models^{\sigma} A \rightarrow B$ und $T \models^{\sigma} B \rightarrow A$. Aufgrund von Theorem 8, gilt dann: $T \cup \{A\} \models^{\sigma} B$ und $T \cup \{B\} \models^{\sigma} A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $T \cup \{A\} \models^{\sigma} B$ und $T \cup \{B\} \models^{\sigma} A$. Aufgrund von Lemma 7, gilt: $T \models^{\sigma} A \rightarrow B$ und $T \models^{\sigma} B \rightarrow A$. Aufgrund von Lemma 23, gilt: $T \models^{\sigma} A \leftrightarrow B$. $\square$

Wenn die Formel A , zu einer Formelmenge hinzugefügt, keine zusätzlichen logischen Konsequenzen bringt, dann ist sie selbst logische Konsequenz der Formelmenge.

Lemma 25. Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmengende S , sowie für jede σ -Formel A gilt: Wenn für jede σ -Formel B gilt: wenn $S \cup \{A\} \models^\sigma B$, dann auch $S \models^\sigma B$, dann gilt: $S \models^\sigma A$.

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmengende und A eine σ -Formel. Angenommen, für jede σ -Formel B gilt: wenn $S \cup \{A\} \models^\sigma B$, dann auch $S \models^\sigma B$. Da $A \in S \cup \{A\}$, gilt aufgrund der Reflexivität der Konsequenzrelation: $S \cup \{A\} \models^\sigma A$. Also: $S \models^\sigma A$. $\square$

Eine Interpretation, die eine x -Variante einer anderen Interpretation ist, ko-inzidiert mit dieser in allen Termen, die x nicht enthalten.

Lemma 26. Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, jeden σ -Term t , mit $x \notin \text{img}(t)$, jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$ gilt: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^x(t)$.

Beweis. Seien σ eine Signatur, $x \in \mathcal{V}$, t ein σ -Term, $x \notin \text{img}(t)$, $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation und $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$. Nach Definition gibt es mindestens ein I , β und β^x , sodass $\mathfrak{I}$ eine Interpretation bezüglich I und β ist, $\mathfrak{I}^x$ eine Interpretation bezüglich I und β^x , und β^x höchstens in Bezug auf x von β differiert. Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Termgrad von t .

(Induktionsbasis) Sei $\text{tgrd}(t) = 1$. Dann gilt nach Lemma 12: $t = 1$ und (i) $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$, oder (ii) $t(1) \in \mathcal{V}$.

Fall (i): Angenommen, $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$. Nach Definition gilt dann: $I(t(1))$ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β und $I(t(1))$ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β^x . Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}(t) = I(t(1))$ und $\mathfrak{I}^x(t) = I(t(1))$. Also: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^x(t)$.

Fall (ii): Angenommen, $t(1) \in \mathcal{V}$. Da $x \notin \text{img}(t)$, gilt: $t(1) \neq x$. Nach Definition gilt daher: $\beta(t(1)) = \beta^x(t(1))$. Also gilt: $\beta(t(1))$ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β und $\beta(t(1))$ ist ein σ -Termwert von t bezüglich I und β^x . Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}(t) = \beta(t(1))$ und $\mathfrak{I}^x(t) = \beta(t(1))$. Also: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^x(t)$.

Also gilt in jedem Fall: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^x(t)$.

(Induktionsschritt) Sei $\text{tgrd}(t) > 1$. Also gilt wegen Lemma 14 für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ sowie für mindestens eine f -gliedrige Folge F von term_σ : $t = \{ \langle 1, f \rangle \} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{F}$. Seien f und F von dieser Art. Mit Theorem 2 für jedes $i \in \text{dom}(F)$: $\text{tgrd}(F(i)) < \text{tgrd}(t)$. Sei τ ein Basis- $\dot{F}$ -Tupel, sodass für jedes $i \in \mathcal{I}_{\dot{F}}$ gilt: $\overset{(i)}{\tau}$ ist ein σ -Termwert von $F(i)$ bezüglich I und β . Sei weiters τ^x ein Basis- $\dot{F}$ -Tupel, sodass für jedes $i \in \mathcal{I}_{\dot{F}}$ gilt: $\overset{(i)}{\tau^x}$ ist ein σ -Termwert von

$F(i)$ bezüglich I und β^x . Nach Induktionsvoraussetzung und Definition gilt: $\tau = \tau^x$. Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}(t) = I(f)(\tau)$ und $\mathfrak{I}^x(t) = I(f)(\tau)$. Also: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^x(t)$. $\square$

Variante-sein ist eine transitive Beziehung.

Lemma 27. *Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}'$, jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}''$ gilt: Wenn $\mathfrak{I}''$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}'$ ist, und wenn $\mathfrak{I}'$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$ ist, dann ist $\mathfrak{I}''$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, $x \in \mathcal{V}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}'$ und $\mathfrak{I}''$ jeweils σ -Interpretationen. Angenommen, $\mathfrak{I}''$ ist eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}'$ und $\mathfrak{I}'$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$. Dann gilt nach Definition für mindestens ein I' , mindestens ein β' und sowie für mindestens ein β'' , dass $\mathfrak{I}'$ eine σ -Interpretation bezüglich I' und β' ist, $\mathfrak{I}''$ eine σ -Interpretation bezüglich I' und β'' ist und β' von β'' höchstens in Bezug auf x differiert. Seien I' , β' und β'' von dieser Art. Dann gilt außerdem nach Definition für mindestens ein I , mindestens ein β und sowie für mindestens ein β''' , dass $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β ist, $\mathfrak{I}'$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β''' ist und β von β''' höchstens in Bezug auf x differiert. Seien I , β und β''' von dieser Art. Aufgrund von Lemma 17 gilt dann: $I = I'$ und $\beta = \beta'''$. Da $\beta|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}} = \beta'|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}}$ und $\beta'|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}} = \beta''|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}}$, gilt: $\beta|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}} = \beta''|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}}$. Also ist $\mathfrak{I}''$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$. $\square$

Variante-sein ist eine symmetrische Beziehung.

Lemma 28. *Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}'$: Wenn $\mathfrak{I}'$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$ ist, dann ist $\mathfrak{I}$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}'$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, $x \in \mathcal{V}$, $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ jeweils σ -Interpretationen. Angenommen, $\mathfrak{I}'$ ist eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$. Dann gilt außerdem nach Definition für mindestens ein I , mindestens ein β und sowie für mindestens ein β' , dass $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β ist, $\mathfrak{I}'$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β' ist und β von β' höchstens in Bezug auf x differiert. Seien I , β und β' von dieser Art. Da $\beta|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}} = \beta'|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}}$ gilt: $\mathfrak{I}$ ist eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}'$. $\square$

Zwei Interpretationen, von denen eine eine x -Variante der anderen ist, machen genau dieselben Formeln wahr, in denen x nicht frei vorkommt.

Lemma 29. Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, jede σ -Formel A , mit $x \notin \text{fr}(A)$, für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$ gilt: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$.

Beweis. Seien σ eine Signatur, $x \in \mathcal{V}$, $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation und A eine σ -Formel, mit $x \notin \text{fr}(A)$. Zu zeigen: Für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$ gilt: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über den Formelgrad von A .

(Induktionsbasis) Sei $\text{fgrd}(A) = 1$, dann gilt nach Theorem 4: A ist eine atomare σ -Formel. Also gilt nach Definition (i) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ -Termen: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s : $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\bowtie} t) \dot{\bowtie} s$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Seien P und g von dieser Art. Sei $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation und $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$. Dann gilt nach Definition für jedes Basis- $\dot{g}$ -Tupel τ : wenn für jedes $i \in \text{dom}(g)$ gilt, dass $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}(g(i))$, dann: $\tau \in \mathfrak{I}(P)$. Da $x \notin \text{fr}(A)$, gilt nach Definition für jedes $i \in \text{dom}(g)$: $x \notin \text{img}(g(i))$. Also gilt nach Lemma 26 für jedes $i \in \text{dom}(g)$: $\mathfrak{I}(g(i)) = \mathfrak{I}^x(g(i))$. Da $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}^x(P)$ gilt also für jedes Basis- $\dot{g}$ -Tupel τ : wenn für jedes $i \in \text{dom}(g)$ gilt, dass $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}^x(g(i))$, dann: $\tau \in \mathfrak{I}^x(P)$. Also: $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$. Auf vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\bowtie} t) \dot{\bowtie} s$. Seien s und t von dieser Art.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$. Dann gilt: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(s)$. Da $x \notin \text{fr}(A)$, gilt nach Definition: $x \notin \text{img}(t)$ und $x \notin \text{img}(s)$. Dann gilt nach Lemma 26: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^x(t)$ und $\mathfrak{I}(s) = \mathfrak{I}^x(s)$. Also gilt: $\mathfrak{I}^x(t) = \mathfrak{I}^x(s)$. Also: $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$. Auf vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$.

Also gilt in jedem Fall für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$.

(Induktionsschritt) Sei $fgrd(A) > 1$. Dann gilt nach Theorem 5 für mindestens eine σ -Formel B : $A = \neg B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C : $A = (B \wedge C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C : $A = (B \vee C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C : $A = (B \rightarrow C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C : $A = (B \leftrightarrow C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und mindestens ein $v \in \mathcal{V}$: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und mindestens ein $v \in \mathcal{V}$: $A = \exists v B$.

Fall (ii.i): Angenommen, für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$. Sei B von dieser Art. Dann gilt nach Definition: $x \notin fr(B)$. Sei $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation und $\mathcal{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathcal{I}$.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$. Dann gilt nach Definition: $\not\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} B$. Da nach Theorem 6 $fgrd(B) < fgrd(A)$, gilt gemäß Induktionsvoraussetzung: $\not\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} B$. Also nach Definition: $\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} A$. Auf vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass $\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathcal{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathcal{I}^x$ von $\mathcal{I}$: $\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$ genau dann, wenn $\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} A$.

Fall (ii.ii) - Fall (ii.v): Auf zu Fall (ii.i) vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass für jede σ -Interpretation $\mathcal{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathcal{I}^x$ von $\mathcal{I}$ gilt: $\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$ genau dann, wenn $\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} A$.

Fall (ii.vi): Angenommen, für mindestens eine σ -Formel B und mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$. Seien B und v von dieser Art. Sei $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation und $\mathcal{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathcal{I}$. Da $x \notin fr(A)$, gilt nach Definition: $x = v$ oder $x \notin fr(B)$.

Fall (ii.vi.i): Angenommen, $x = v$.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$. Da $x = v$, gilt nach Definition für jede σ, x -Variante $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}$: $\Vdash_{\mathcal{I}'}^{\sigma} B$. Sei $\mathcal{I}^*$ eine σ, x -Variante von $\mathcal{I}^x$. Nach Lemma 27 gilt: $\mathcal{I}^*$ ist eine σ, x -Variante von $\mathcal{I}$. Also: $\Vdash_{\mathcal{I}^*}^{\sigma} B$. Also gilt für jede σ, x -Variante $\mathcal{I}'$ von $\mathcal{I}^x$: $\Vdash_{\mathcal{I}'}^{\sigma} B$. Also: $\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} \forall x B$. Also: $\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} A$. Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass $\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathcal{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathcal{I}^x$ von $\mathcal{I}$: $\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} A$ genau dann, wenn $\Vdash_{\mathcal{I}^x}^{\sigma} A$.

Fall (ii.vi.ii): Angenommen, $x \notin fr(B)$.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{I}}^{\sigma} \forall v B$. Sei $\mathcal{I}^{x,v}$ eine σ, v -Variante von $\mathcal{I}^x$. Da $\mathcal{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathcal{I}$ ist, gilt nach Lemma 18 für mindestens ein $\mathcal{I}^v$, dass (i) $\mathcal{I}^v$

eine σ, v -Variante von $\mathfrak{I}$ ist und (ii) $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}^v$ ist. Sei $\mathfrak{I}^v$ von dieser Art. Dann gilt: $\Vdash_{\mathfrak{I}^v}^\sigma B$. Nach Theorem 6 gilt: $fgrd(B) < fgrd(A)$. Da $x \notin fr(B)$, gilt nach Induktionsvoraussetzung für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}'$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}''$ von $\mathfrak{I}'$: $\Vdash_{\mathfrak{I}'}^\sigma B$ genau dann, wenn $\Vdash_{\mathfrak{I}''}^\sigma B$. Also gilt: $\Vdash_{\mathfrak{I}^v}^\sigma B$ genau dann, wenn $\Vdash_{\mathfrak{I}^{x,v}}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{I}^{x,v}}^\sigma B$. Also gilt für jede σ, v -Variante $\mathfrak{I}'$ von $\mathfrak{I}^x$: $\Vdash_{\mathfrak{I}'}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma \forall v B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma \forall v B$. Auf vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass $\Vdash_{\mathfrak{I}}^\sigma A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$: $\Vdash_{\mathfrak{I}}^\sigma A$ genau dann, wenn $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma A$.

Also gilt in beiden Fällen für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$: $\Vdash_{\mathfrak{I}}^\sigma A$ genau dann, wenn $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma A$.

Fall (ii.vii): Angenommen, für mindestens eine σ -Formel B und mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$. Seien B und v von dieser Art. Sei $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation und $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$. Da $x \notin fr(A)$, gilt nach Definition: $x = v$ oder $x \notin fr(B)$.

Fall (ii.vii.i): Angenommen, $x = v$.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{I}}^\sigma A$. Da $x = v$, gilt nach Definition für mindestens eine σ, x -Variante $\mathfrak{I}'$ von $\mathfrak{I}$: $\Vdash_{\mathfrak{I}'}^\sigma B$. Sei $\mathfrak{I}'$ von dieser Art. Nach Lemma 28 gilt: $\mathfrak{I}$ ist eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}^x$. Also gilt nach Lemma 27: $\mathfrak{I}'$ ist eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}^x$. Also gilt für mindestens eine σ, x -Variante $\mathfrak{I}'$ von $\mathfrak{I}^x$: $\Vdash_{\mathfrak{I}'}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma \exists v B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma A$. Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass $\Vdash_{\mathfrak{I}}^\sigma A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$: $\Vdash_{\mathfrak{I}}^\sigma A$ genau dann, wenn $\Vdash_{\mathfrak{I}^x}^\sigma A$.

Fall (ii.vii.ii): Angenommen, $x \notin fr(B)$.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{I}}^\sigma \exists v B$. Dann gilt nach Definition für mindestens eine σ, v -Variante $\mathfrak{I}^v$ von $\mathfrak{I}$, dass $\Vdash_{\mathfrak{I}^v}^\sigma B$. Sei $\mathfrak{I}^v$ von dieser Art. Dann gilt: $\Vdash_{\mathfrak{I}^v}^\sigma B$. Außerdem gilt nach Definition für mindestens ein I' , mindestens ein β' und sowie für mindestens ein β'' , dass $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I' und β' ist, $\mathfrak{I}^v$ eine σ -Interpretation bezüglich I' und β'' ist und β' von β'' höchstens in Bezug auf v differiert. Seien I, β und $\beta_{\mathfrak{I}^v}$ von dieser Art. Da $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$ ist, gilt ebenfalls nach Definition für mindestens ein I' , mindestens ein β' und sowie für mindestens ein β'' , dass $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I' und β' ist, $\mathfrak{I}^x$ eine σ -Interpretation bezüglich I' und β'' ist und β' von β'' höchstens in Bezug auf x differiert. Seien I^*, β^* und $\beta_{\mathfrak{I}^x}$ von dieser Art. Nach Lemma 17

gilt: $I = I^*$ und $\beta = \beta^*$.

Sei nun $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ eine Variablenbelegung, sodass:

$\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}} = \beta_{\mathfrak{I}^v}|_{(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cup \{\forall\}}$ und $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}(x) = \beta_{\mathfrak{I}^x}(x)$. Dann gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ differiert von $\beta_{\mathfrak{I}^v}$ höchstens in Bezug auf x . Da $\beta_{\mathfrak{I}^v}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v,x\}) \cup \{\forall\}} = \beta_{\mathfrak{I}^x}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v,x\}) \cup \{\forall\}}$, gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\}) \cup \{\forall\}} = \beta_{\mathfrak{I}^x}|_{(\mathcal{V} \setminus \{v\}) \cup \{\forall\}}$. Also gilt: $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ differiert von $\beta_{\mathfrak{I}^x}$ höchstens in Bezug auf v .

Sei $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine Funktion auf $\overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma} \cup \text{term}_\sigma \cup \{\forall\}$, sodass (i) $\mathfrak{I}|_{\overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma} \cup \{\forall\}} = I|_{\overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma} \cup \{\forall\}}$ und (ii) für jedes $t \in \text{term}_\sigma$, sowie für jedes δ gilt: $\mathfrak{I}(t) = \delta$ gdw δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$ ist. Dann ist nach Definition $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und $\beta_{\mathfrak{I}^{x,v}}$. Des Weiteren gilt, dass $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}^v$ ist. Nach Theorem 6 gilt: $\text{fgrd}(B) < \text{fgrd}(A)$. Da $x \notin \text{fr}(B)$, gilt nach Induktionsvoraussetzung für jede σ -Interpretation $\mathfrak{J}'$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{J}''$ von $\mathfrak{J}'$: $\models_{\mathfrak{J}'}^\sigma B$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{J}''}^\sigma B$. Da $\models_{\mathfrak{I}^v}^\sigma B$, gilt: $\models_{\mathfrak{I}^{x,v}}^\sigma B$. Außerdem gilt, dass $\mathfrak{I}^{x,v}$ eine σ, v -Variante von $\mathfrak{I}^x$ ist. Also gilt für mindestens ein $\mathfrak{J}'$, dass $\mathfrak{J}'$ eine σ, v -Variante von $\mathfrak{I}^x$ ist und $\models_{\mathfrak{J}'}^\sigma B$. Also: $\models_{\mathfrak{I}^x}^\sigma \exists v B$. Also: $\models_{\mathfrak{I}^x}^\sigma A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\models_{\mathfrak{I}^x}^\sigma A$. Auf vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass $\models_{\mathfrak{I}^v}^\sigma A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{J}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{J}^x$ von $\mathfrak{J}$: $\models_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$.

Also gilt in beiden Fällen für jede σ -Interpretation $\mathfrak{J}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{J}^x$ von $\mathfrak{J}$: $\models_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$.

Also gilt in jedem Fall für jede σ -Interpretation $\mathfrak{J}$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{J}^x$ von $\mathfrak{J}$: $\models_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$ genau dann, wenn $\models_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$. $\square$

Wenn eine Formel A aus einer Formelmenge folgt, deren Elemente allesamt x nicht als freie Variable enthalten, dann folgt auch die Universalisierung $\forall x A$ aus der Formelmenge.

Theorem 9. Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A , jedes $x \in \mathcal{V}$ gilt: Wenn $T \models^\sigma A$ und für jedes $B \in T$ gilt, dass $x \notin \text{fr}(B)$, dann $T \models^\sigma \forall x A$.

Beweis. Sei σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel und $x \in \mathcal{V}$. Angenommen, $T \models^\sigma A$ und für jedes $B \in T$ gilt, dass $x \notin \text{fr}(B)$. Sei $\mathfrak{J}$ eine σ -Interpretation, sodass $\models_{\mathfrak{J}}^\sigma T$. Nach Definition gilt für jedes $B \in T$: $\models_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Sei $\mathfrak{J}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{J}$. Nach Lemma 29 gilt für jedes $B \in T$: $\models_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$. Also gilt

nach Definition: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma T$. Da $T \models^\sigma A$, gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$. Also gilt für jede σ, x -Variante $\mathfrak{J}^x$ von $\mathfrak{J}$: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$. Also gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \forall x A$. Also: $T \models^\sigma \forall x A$. $\square$

Lemma 30. *Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, jede σ -Formel A , mit $x \notin fr(A)$, sowie für jede σ -Formel B gilt: $\{\forall x(A \leftrightarrow B)\} \models^\sigma (A \leftrightarrow \forall x B)$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmengende, $x \in \mathcal{V}$, A eine σ -Formel, mit $x \notin fr(A)$ und B eine σ -Formel. Aufgrund von Theorem 8 und Lemma 23 gilt: $\{\forall x(A \leftrightarrow B)\} \models^\sigma (A \leftrightarrow \forall x B)$ gdw $\{\forall x(A \leftrightarrow B), \forall x B\} \models^\sigma A$ und $\{\forall x(A \leftrightarrow B), A\} \models^\sigma \forall x B$.

Sei $\mathfrak{J}$ eine σ -Interpretation. Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \{\forall x(A \leftrightarrow B), A\}$. Dann gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \forall x(A \leftrightarrow B)$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$. Indirekte Annahme: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \forall x B$. Dann gilt nach Definition für mindestens eine σ, x -Variante $\mathfrak{J}^x$ von $\mathfrak{J}$: $\nVdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$. Sei $\mathfrak{J}^x$ von dieser Art. Da $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \forall x(A \leftrightarrow B)$ gilt nach Definition auch $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma (A \leftrightarrow B)$. Also gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$. Da $x \notin fr(A)$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$, gilt nach Lemma 29: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$. Widerspruch, also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \forall x B$. Also: $\{\forall x(A \leftrightarrow B), A\} \models^\sigma \forall x B$.

Sei $\mathfrak{J}$ eine σ -Interpretation. Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \{\forall x(A \leftrightarrow B), \forall x B\}$. Dann gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \forall x(A \leftrightarrow B)$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma \forall x B$. Sei $\mathfrak{J}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{J}$. Dann gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma (A \leftrightarrow B)$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$. Also gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$, oder $\nVdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$ und $\nVdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$ und $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma B$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}^x}^\sigma A$. Da $x \notin fr(A)$ gilt nach Lemma 29: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$. Also: $\{\forall x(A \leftrightarrow B), \forall x B\} \models^\sigma A$.

Also gilt: $\{\forall x(A \leftrightarrow B)\} \models^\sigma (A \leftrightarrow \forall x B)$. $\square$

Die Folgerbarkeit einer Formel bleibt unter der Hinzufügung neuer Prämissen erhalten – die Folgerungsrelation ist monoton.

Theorem 10. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmengende T , jede σ -Formel B , sowie für jede σ -Formel A gilt: Wenn $T \models^\sigma A$, dann $T \cup \{B\} \models^\sigma A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmengende, A eine σ -Formel und B eine σ -Formel. Angenommen, $T \models^\sigma A$. Sei $\mathfrak{J}$ eine σ -Interpretation, sodass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T \cup \{B\}$. Nach Definition gilt für jedes $C \in T \cup \{B\}$: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma C$. Also gilt für jedes $C \in T$: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma C$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$. Also: $T \cup \{B\} \models^\sigma A$. $\square$

Lemma 31. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmengende T , sowie für jede σ -Formel A gilt: Wenn $T \models^\sigma A$, dann gilt für jede σ -Formel B : $T \cup \{A\} \models^\sigma B$ gdw $T \models^\sigma B$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel. Angenommen, $T \models^\sigma A$. Sei B eine σ -Formel.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $T \cup \{A\} \models^\sigma B$. Sei $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation, sodass $\models_{\mathcal{I}}^\sigma T$. Gemäß Annahme gilt: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma A$. Dann gilt: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma T \cup \{A\}$. Also: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma B$. Also: $T \models^\sigma B$.
 „ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $T \models^\sigma B$. Nach Theorem 10 gilt: $T \cup \{A\} \models^\sigma B$.
 Also: $T \cup \{A\} \models^\sigma B$ gdw $T \models^\sigma B$. $\square$

Aus einer Menge geschlossener Formeln folgen genau diejenigen geschlossenen Formeln, die auch aus dem logischen Abschluss der Formelmenge folgen.

Lemma 32. *Für jede Signatur σ , sowie für jede σ -Formelmenge T gilt: Wenn für jedes $B \in T$ gilt, dass B eine geschlossene σ -Formel ist, dann gilt für jede geschlossene σ -Formel A : $T \models^\sigma A$ gdw $cn_\sigma(T) \models^\sigma A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, A eine σ -Formel und T eine σ -Formelmenge, sodass für jedes $B \in T$ gilt: B ist eine geschlossene σ -Formel.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $T \models^\sigma A$. Sei $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation, sodass $\models_{\mathcal{I}}^\sigma cn_\sigma(T)$. Sei $B \in T$. Dann gilt: B ist eine geschlossene σ -Formel. Sei $\mathcal{I}'$ eine σ -Interpretation, sodass $\models_{\mathcal{I}'}^\sigma T$. Dann gilt nach Definition: $\models_{\mathcal{I}'}^\sigma B$. Also: $T \models^\sigma B$. Also nach Definition: $B \in cn_\sigma(T)$. Also: $\models_{\mathcal{I}'}^\sigma B$. Also gilt für jedes $B \in T$: $\models_{\mathcal{I}'}^\sigma B$. Also: $\models_{\mathcal{I}'}^\sigma T$. Also gemäß Voraussetzung: $\models_{\mathcal{I}'}^\sigma A$. Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathcal{I}$: wenn $\models_{\mathcal{I}}^\sigma cn_\sigma(T)$, dann $\models_{\mathcal{I}}^\sigma A$. Also: $cn_\sigma(T) \models^\sigma A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $cn_\sigma(T) \models^\sigma A$. Sei $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation, sodass $\models_{\mathcal{I}}^\sigma T$. Sei $B \in cn_\sigma(T)$. Dann gilt nach Definition, wenn $\models_{\mathcal{I}}^\sigma T$, dann $\models_{\mathcal{I}}^\sigma B$. Also: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma B$. Also gilt für jedes $B \in cn_\sigma(T)$: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma B$. Also: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma cn_\sigma(T)$. Also: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma A$. Also: $T \models^\sigma A$.

Also: $T \models^\sigma A$ gdw $cn_\sigma(T) \models^\sigma A$. $\square$

Aus einer inkonsistenten Formelmenge folgt Beliebiges.

Theorem 11. *Für jede Signatur σ , sowie für jedes T gilt: Wenn T eine inkonsistente σ -Theorie ist, dann gilt für jedes $A \in spr_\sigma$: $T \models^\sigma A$.*

Beweis. Sei σ eine Signatur und T eine inkonsistente σ -Theorie. Sei $A \in spr_\sigma$. Sei weiters $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation, sodass $\models_{\mathcal{I}}^\sigma T$. Da T eine inkonsistente σ -Theorie ist, gilt nach Definition für mindestens ein $B \in spr_\sigma$: $T \models^\sigma B$ und $T \models^\sigma \neg B$. Also: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma B$ und $\models_{\mathcal{I}}^\sigma \neg B$. Also: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma B$ oder $\models_{\mathcal{I}}^\sigma A$. Nach Definition gilt: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma B$. Also: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma A$. Also: $T \models^\sigma A$. $\square$

Eine Formelmenge, die unter wenigstens einer Interpretation wahr ist, kann nicht inkonsistent sein.

Theorem 12. *Für jede Signatur σ , sowie für jede σ -Theorie T gilt: wenn für mindestens ein $\mathfrak{J}$ gilt, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$, dann ist T eine konsistente σ -Theorie.*

Beweis. Angenommen, für mindestens ein $\mathfrak{J}$ gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} T$. Sei $\mathfrak{J}$ von dieser Art. Indirekte Annahme: Angenommen, T ist keine konsistente σ -Theorie. Dann gilt nach Definition: T ist eine inkonsistente σ -Theorie. Also gilt nach Theorem 11 für jede σ -Formel A : $T \models^{\sigma} A$. Sei $B \in \text{spr}_{\sigma}$. Dann gilt auch, dass $\neg B \in \text{spr}_{\sigma}$. Dann gilt sowohl $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$, als auch $\Vdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} \neg B$. Also gilt nach Definition: $\nVdash_{\mathfrak{J}}^{\sigma} B$. Widerspruch. Also ist T eine konsistente σ -Theorie. $\square$

5 Definitorische Erweiterungen von Theorien

Was rechtfertigt die Untersuchung von philosophischen Fragen zu Definitionen in einem formalen Rahmen? Tarski führt in (Tarski, 1953) meisterhaft vor, dass das Studium des Wahrheitsbegriffs in einem solchen Geiste nicht nur ein gangbarer Weg ist, sondern auch ein äußerst fruchtbarer sein kann. In eine ähnliche Kerbe schlägt Kleinknecht (1979, p.4), wenn er anmerkt, dass erst „dadurch, dass man formalisierte Theorien mit einer exakten Symbolsprache zum Gegenstand der Betrachtung machte, die meisten Untersuchungen überhaupt möglich geworden [sind].“ Er geht noch einen Schritt weiter: „Während die traditionelle Definitionslehre seit ARISTOTELES kaum einen nennenswerten Fortschritt zu verzeichnen hatte, wurden in der modernen Definitionstheorie zahlreiche Entdeckungen gemacht, die unser Wissen von der Struktur und der Leistungsfähigkeit wissenschaftlicher Theorien erheblich vertieft haben.“ Das Erfordernis des formalen Apparats dahingestellt, ermöglicht uns der Theoriebegriff der Prädikatenlogik erster Stufe ein exaktes Simulakrum der ursprünglichen, zentralen Frage der vorliegenden Arbeit zu studieren. Zur Erinnerung, diese lautet: Ist jede Definition im Wesentlichen eine Explizitdefinition, auch wenn diese vielleicht eine von ihr verschiedene sprachliche Form hat?

Blieben wir bei dieser ersten Formulierung, stünden wir vor einer unstemmbaren Aufgabe: Wie stellen wir fest, was eine Definition im Wesentlichen ist, und was nicht? Wir wollen deshalb einen Weg einschlagen, der uns nicht bei jedem Tritt fürchten lässt, in metaphysischem Morast zu versinken, und vorerst jene Frage durch die folgende ersetzen: Hat das Einfügen einer Definition für eine deskriptive Konstante in eine Theorie im Allgemeinen dieselben Konsequenzen wie das Einfügen einer Explizitdefinition derselben deskriptiven Konstante in dieselbe Theorie?

Genauer: Ist die Erweiterung einer Theorie durch eine Definition für eine deskriptive Konstante identisch mit der Erweiterung durch eine entsprechende Explizitdefinition?

Definition 78. T' ist eine Theorieerweiterung von T gdw für mindestens ein σ , sowie mindestens ein σ' gilt:

- (a) σ ist eine Teilsignatur von σ'
- (b) T ist eine σ -Theorie und T' ist eine σ' -Theorie
- (c) $T \subseteq T'$.

Mithilfe von Definition 78 noch genauer: Wenn T' eine Theorieerweiterung von T ist und T' durch Hinzufügen einer Definition für eine deskriptive Konstante zu T entstanden ist, gibt es dann eine Explizitdefinition für dieselbe Konstante, die T zu T' definitiv erweitert?

Definition 79. Die Theorieerweiterung von S zu T um die Formel D und die Konstante k ist non-kreativ relativ zu σ gdw

- (a) σ ist eine Signatur
- (b) S ist eine σ -Theorie
- (c) $k \in \mathcal{K}$ und $k \notin \bigcup_{i \in \{1,2,3\}} \sigma^{(i)}$
- (d) D ist eine $\sigma + k$ -Formel
- (e) $T = \text{cn}_{\sigma(+)}(S \cup \{D\})$
- (f) Für jede σ -Formel A gilt: Wenn $T \models^{\sigma(+)} A$, dann $S \models^{\sigma} A$.

Definition 80. k ist in T bezüglich σ eliminierbar gdw

- (a) σ ist eine Signatur
- (b) $k \in \mathcal{K}$ und $k \notin \bigcup_{i \in \{1,2,3\}} \sigma^{(i)}$
- (c) T ist eine $\sigma(+)$ -Theorie
- (d) Für jede $\sigma(+)$ -Formel A gibt es mindestens eine σ -Formel B , sodass $T \models^{\sigma(+)} A \leftrightarrow B$.

Mithilfe von Definition 79 und Definition 80 noch genauer: Wenn die Theorieerweiterung von T zu T' um die Formel D und die Konstante k non-kreativ relativ zu σ ist, und wenn k in T bezüglich σ eliminierbar ist, gibt es dann eine Explizitdefinition für k , die T zu T' definitiv erweitert?

Definition 81. D ist eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P gdw³³

- (a) σ eine Signatur ist

³³Diese Definition entspricht modulo Sprachaufbau exakt der von Kleinknecht in (Kleinknecht, 1979, p.166).

- (b) $P \in \mathcal{PK} \setminus \overset{(1)}{\sigma}$
- (c) Für mindestens eine σ -Formel E , sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige injektive Folge v von $\mathcal{V}$ gilt:
 - (a) für jedes $x \in \mathcal{V}$ gilt: x kommt dann und nur dann frei in E vor, wenn $x \in \text{img}(v)$.
 - (b) $D = \text{cl}_{\forall}(v) \dot{\vee} (\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} (\{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} (v \dot{\vee} (\{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\} \dot{\vee} (E \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}))))))^{34}$

Definition 82. D ist eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P in T auf Basis von S gdw ³⁵

- (a) σ ist eine Signatur
- (b) S ist eine σ -Theorie
- (c) D ist eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P
- (d) $T = \text{cn}_{\sigma(+)}P(S \cup \{D\})$.

Mithilfe von Definition 81 und Definition 82 noch genauer, und eingeschränkt auf Prädikatkonstanten³⁶:

(1) Wenn D_{ex} eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P in T' auf Basis von T ist, ist dann die Theorieerweiterung von T zu T' um die Formel D_{ex} und die Konstante P non-kreativ relativ zu σ und P in T bezüglich σ eliminierbar?

(2) Wenn die Theorieerweiterung von T zu T' um die Formel D und die Konstante k non-kreativ relativ zu σ ist, und wenn k in T bezüglich σ eliminierbar ist, gibt es dann D_{ex} , sodass D_{ex} eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P in T' auf Basis von T ist?

Shoenfields Theorem liefert eine positive Antwort auf die erste Frage. Wir werden zeigen, dass Kleinknechts Resultate allem Anschein zum Trotz keine positive Antwort auf die zweite Frage geben, sich aber dennoch ein Beweis für die Konverse zu Shoenfields Theorem finden lässt, sofern wir die Behauptung auf

³⁴Vulgo: $D = \forall v_1 \dots \forall v_{\dot{P}} (Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)$

³⁵Anders als in (Kleinknecht, 1979) verlangen wir im Definiens nicht explizit, dass D eine geschlossene Formel ist – diese Bedingung ergibt sich aus den übrigen.

³⁶Eine erweiterte Definitionstheorie, die in ihrem Untersuchungsbereich auch Gegenstandskonstanten und Funktionskonstanten umfasst, kann auf nahezu vollkommen analoge Weise durch den Umweg über Unitätsformeln entwickelt werden. Die Details können in (Kleinknecht, 1979) auf den Seiten 175-188 und 188-192 nachgeschlagen werden. All unsere Beweise können mutatis mutandis übertragen werden.

geschlossene Formeln beschränken. Zur Vorbereitung der Kritik an Kleinknechts Arbeit, zeigen wir im nächsten Unterabschnitt logische Beziehungen zwischen den beiden explizierten Definitionskriterien auf.

Die Definitionen, Theoreme und Lemmata aus den Abschnitten Syntax und Semantik reichen noch nicht für einen Beweis der Konversen. Die verbleibenden Vorarbeiten werden deshalb in den Unterabschnitten 5.1, 5.2 und 5.3 unternommen; dies beinhaltet eine auf Prädikatkonstanten eingeschränkte Substitutionstheorie, mit der wir ein Konjunkt im Dann-Teil von Shoenfields Theorem nachweisen werden.

5.1 Interpretationserweiterungen und Invarianz der Folgerungsbeziehung unter Signaturerweiterungen

In Explizitdefinitionen werden die freien Variablen in der Bisubjunktionsformel durch einen Allquantor gebunden. Setzt man einen Allquantor vor eine solche Bisubjunktionsformel, so bildet man den „universellen Abschluss“ der Formel. Im Beweis für die Konverse zu Shoenfields Theorem wird es notwendig sein, vor dem Bilden des universellen Abschlusses noch eine n -fache Konjunktion von atomaren Identitätsformeln an das Definiens anzufügen. Außerdem müssen wir zeigen, dass die Folgerungsrelation monoton ist, auch wenn die hinzugefügte Formel über einer umfassenderen Signatur gebildet wurde. Zu diesem Zweck müssen einige Lemmata zu Interpretationserweiterungen bewiesen werden. Die Definitionen von und logischen Zusammenhänge in Verbindung mit 'universeller Abschluss', ' n -fache Konjunktion', 'atomare Identitätsformel' und 'Interpretationserweiterung' werden in diesem Unterabschnitt erarbeitet.

Definition 83. f ist ein universeller Abschluss für die Variablen x gdw

- (a) x eine endliche Folge von $\mathcal{V}$ ist
- (b) f eine $2|x|$ -gliedrige Folge von $\text{img}(x) \cup \{\forall\}$ ist
- (c) für jedes $i \in \text{dom}(f)$ gilt: wenn $i \in \mathbb{U}$, dann $f(i) = \forall$, und wenn $i \in \mathbb{G}$, dann $f(i) = x(\frac{i}{2})$.

Weil Existenz und Eindeutigkeit trivialerweise gelten, ergibt sich unmittelbar folgendes Korollar.

Korollar 12. Für jede endliche Folge x von $\mathcal{V}$ gibt es genau ein f , sodass f ein universeller Abschluss für die Variablen x ist.

Beweis. Trivial. $\square$

Außerdem ergibt sich ebenfalls unmittelbar, dass jeder universelle Abschluss für Variablen ein Ausdruck jeder Signatur ist – dadurch ist garantiert, dass wir universelle Abschlüsse vor bestimmte Bisubjunktionsformeln beliebiger Signaturen setzen können und dadurch eine Definition über dieser Signatur erhalten.

Korollar 13. *Für jede Signatur σ , jedes f , sowie für jedes x gilt: wenn f ein universeller Abschluss für die Variablen x ist, dann ist $f(x)$ ein σ -Ausdruck.*

Beweis. Trivial. $\square$

Definition 84. $cl_{\mathcal{V}} = f$ gdw $f : \{x|x \text{ ist eine endliche Folge von } \mathcal{V}\} \longrightarrow \{Y|Y \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$, sodass für jedes $x \in \text{dom}(f)$ gilt: $f(x)$ ist ein universeller Abschluss für die Variablen x .

Der universelle Abschluss einer σ -Formel ist ebenfalls eine σ -Formel.

Lemma 33. *Für jede Signatur σ , für jede endliche Folge v von $\mathcal{V}$, sowie für jede σ -Formel A gilt: $cl_{\mathcal{V}}(v) \dot{\vee} A$ ist eine σ -Formel.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, v eine endliche Folge von $\mathcal{V}$ und A eine σ -Formel. Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Länge von v .

(Induktionbasis) Angenommen, $\dot{v} = 1$. Dann gilt nach Definition, dass: $cl_{\mathcal{V}}(v) = \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\}$. Da A eine σ -Formel ist, gilt nach Definition für mindestens ein Σ , dass Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für A ist. Sei Σ von dieser Art. Dann gilt nach Definition: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = A$. Da $\{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(\dot{\Sigma})$ ein σ -Ausdruck ist, gilt: $\Sigma \dot{\vee} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle\}$ ist eine endliche Folge von $\{X|X \text{ ist ein } \sigma\text{-Ausdruck}\}$. Außerdem gilt: $\Sigma \dot{\vee} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle\} = cl_{\mathcal{V}}(v) \dot{\vee} A$.

Sei $i \in \text{dom}(\Sigma \dot{\vee} \{\langle 1, \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(\dot{\Sigma}) \rangle\})$. Dann gilt: $1 \leq i \leq \dot{\Sigma} + 1$.

Fall (i): Angenommen, $1 \leq i \leq \dot{\Sigma}$. Dann gilt nach Definition: (a) $\Sigma(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} \Sigma(k)) \dot{\vee} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(j)) \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$, oder $\Sigma(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\vee} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\vee} \Sigma(k)$.

Also gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq i \leq \dot{\Sigma} + 1$: (a) $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(i)$ ist eine atomare σ -Formel, oder (b) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$ gilt: $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(i) = \{\langle 1, \neg \rangle\} \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(k))$, oder (c) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, sowie mindestens ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k, j < i$ gilt: $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(k))) \dot{\wr} \{\langle 1, \wedge \rangle\}) \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(j))) \dot{\wr} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(k))) \dot{\wr} \{\langle 1, \vee \rangle\}) \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(j))) \dot{\wr} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(k))) \dot{\wr} \{\langle 1, \rightarrow \rangle\}) \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(j))) \dot{\wr} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(i) = (((\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(k))) \dot{\wr} \{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\}) \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(j))) \dot{\wr} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}$, oder (d) für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < i$, sowie mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(i) = (\{\langle 1, \forall \rangle\} \dot{\wr} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(k))$, oder $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(i) = (\{\langle 1, \exists \rangle\} \dot{\wr} \{\langle 1, v \rangle\}) \dot{\wr} (\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}(k))$.

Also gilt nach Definition: $\Sigma \dot{\wr} \{\langle 1, \{\langle 1, \forall \rangle, \langle 2, v(1) \rangle\} \dot{\wr} \Sigma(\dot{\Sigma})\}$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $cl_{\forall}(v) \dot{\wr} A$. Also gilt für mindestens ein Σ , dass Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $cl_{\forall}(v) \dot{\wr} A$ ist. Also ist nach Definition $cl_{\forall}(v) \dot{\wr} A$ eine σ -Formel.

(Induktionsschritt) Die Schrittbehauptung kann durch Iteration des Vorgehens zum Nachweis der Basisbehauptung gezeigt werden. $\square$

Eine atomare Identitätsformel für eine Variable besteht nur aus dem Identitätsprädikat und dieser Variable.

Definition 85. A ist eine atomare Identitätsformel für x gdw $x \in \mathcal{V}$ und $A = \{\langle 1, \dot{=} \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, x \rangle\}$.

Korollar 14. Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, sowie für jede atomare Identitätsformel A für x gilt: A ist eine atomare σ -Formel.

Beweis. Trivial. $\square$

Korollar 15. Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, sowie für jede atomare Identitätsformel A für x gilt: A ist eine σ -Formel.

Beweis. Trivial. $\square$

Eine atomare Identitätsformel ist mit der Wahl der Variable eindeutig bestimmt.

Korollar 16. *Für jedes $x \in \mathcal{V}$ gibt es genau ein A , sodass A eine atomare Identitätsformel für x ist.*

Beweis. Seien σ eine Signatur und $x \in \mathcal{V}$.

„Existenz“: Sei $A = \{\langle 1, \dot{=} \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, x \rangle\}$. Dann gilt für mindestens ein A , dass A eine atomare Identitätsformel für x ist.

„Eindeutigkeit“: Seien A und A' jeweils atomare Identitätsformeln für x . Dann gilt nach Definition:

$A = \{\langle 1, \dot{=} \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, x \rangle\}$ und $A' = \{\langle 1, \dot{=} \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, x \rangle\}$. Also: $A = A'$. $\square$

Umgekehrt ist auch die Variable mit der Wahl der atomaren Identitätsformel eindeutig bestimmt.³⁷

Korollar 17. *Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, jedes $y \in \mathcal{V}$, sowie für jedes A gilt: wenn A eine atomare Identitätsformel für x ist, und wenn A eine atomare Identitätsformel für y ist, dann $x = y$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, $x \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{V}$ und $A \in \text{spr}_\sigma$. Angenommen, A ist eine atomare Identitätsformel für x und A ist eine atomare Identitätsformel für y . Dann gilt nach Definition: $A = \{\langle 1, \dot{=} \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, x \rangle\}$ und $A = \{\langle 1, \dot{=} \rangle, \langle 2, y \rangle, \langle 3, y \rangle\}$. Also: $x = y$. $\square$

Trivialerweise macht jede Interpretation jede atomare Identitätsformel wahr.

Lemma 34. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formel A , sowie für jedes $x \in \mathcal{V}$ gilt: wenn A eine atomare Identitätsformel für x ist, dann gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} \models_\sigma A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, $A \in \text{spr}_\sigma$ und $x \in \mathcal{V}$. Angenommen, A ist eine atomare Identitätsformel für x . Dann gilt nach Definition: $A = \{\langle 1, \dot{=} \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, x \rangle\}$. Sei $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation. Dann gilt: $\mathfrak{I}(\{\langle 1, x \rangle\}) = \mathfrak{I}(\{\langle 1, x \rangle\})$. Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I} \models_\sigma A$. Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} \models_\sigma A$. $\square$

Daraus folgt unmittelbar das nachfolgende Lemma.

³⁷Beide Eindeutigkeiten müssen vorliegen, damit jeder injektiven Variablenfolge eine injektive Formelfolge entspricht, was in der Definition von 'Konjunktion atomarer Identitätsformeln' vorausgesetzt wird.

Lemma 35. Für jede Signatur σ , jede σ -Formel A , jede σ -Formel B , sowie für jedes $x \in \mathcal{V}$ gilt: wenn B eine atomare Identitätsformel für x ist, dann gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \leftrightarrow A \wedge B$.

Beweis. Seien σ eine Signatur, $A \in \text{spr}_{\sigma}$, $B \in \text{spr}_{\sigma}$ und $x \in \mathcal{V}$. Angenommen, B ist eine atomare Identitätsformel für x . Sei $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation. Nach Lemma 34 gilt: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} B$.

Fall (i): Angenommen, $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$. Dann gilt nach Definition: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \wedge B$. Also gilt nach Definition: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \leftrightarrow A \wedge B$.

Fall (ii): Angenommen, $\not\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$. Dann gilt nach Definition: $\not\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \wedge B$. Also gilt nach Definition: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \leftrightarrow A \wedge B$.

Also gilt in jedem Fall: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \leftrightarrow A \wedge B$. Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A \leftrightarrow A \wedge B$. $\square$

Ist eine Folge von Formeln gegeben, dann kann die Konjunktion all dieser Formeln gebildet werden, indem sie in einer Formelkonstruktionssequenz, die alle Formeln der Folge generiert, der Reihe nach durch $\wedge$ miteinander verknüpft werden.

Definition 86. K ist eine Konjunktion der Formeln F gdw

- (a) F eine endliche Folge von spr ist
- (b) Für mindestens eine Signatur σ , sowie für mindestens eine σ -Formelkonstruktionssequenz Σ für K gilt:
 - (a) $\Sigma(\dot{\Sigma}) = K$
 - (b) für mindestens ein j , mit $1 \leq j \leq \dot{\Sigma}$ gilt:
 - i. $\Sigma(j) = F(1)$
 - ii. für jedes $i \in \text{dom}(\Sigma) \setminus \mathcal{I}_j$ gilt: $\Sigma(i) = (\Sigma(i-1) \wedge F(i-j+1))$.

Beachte, dass die Bedingung $\dot{\Sigma} = \dot{F}$ nicht erfüllt sein muss, wenn F keine Folge von atomaren Formeln ist. Andernfalls ist die Bedingung schon erfüllt.

Korollar 18. Für jedes F , sowie für jedes K gilt: wenn K eine Konjunktion der Formeln F ist, dann ist K eine Formel.

Beweis. Sei K eine Konjunktion der Formeln F . Dann gilt nach Definition für mindestens ein Σ , sowie für mindestens ein σ , dass Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für K ist. Also gilt nach Definition, dass K eine Formel ist. $\square$

Wir bestimmen die einzelnen Konjunkte nicht über Mengen, sondern über eine Folge, damit wir die Gliederung in der Folge leicht auf die Reihenfolge der Konjunkte in der Konjunktion übertragen können – nur dann ist die Konjunktion eindeutig bestimmt. Für den Beweis der Eindeutigkeit benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 36. *Für jede endliche Folge F von spr gibt es mindestens eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge Σ , sodass für mindestens eine Signatur σ und jedes $i \in \text{dom}(\Sigma)$ gilt: $\Sigma(i)$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(i)$.*

Beweis. Sei F eine endliche Folge von spr . Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Länge von F .

(Induktionsbasis) Angenommen, $\dot{F} = 1$. Nach Definition gilt für mindestens eine Signatur σ , dass $F(1)$ eine σ -Formel ist. Also gibt es nach Definition mindestens eine σ -Formelkonstruktionssequenz Σ' für $F(1)$. Sei Σ' von dieser Art. Sei nun $\Sigma = \{\langle 1, \Sigma' \rangle\}$. Dann gilt für mindestens eine Signatur σ und jedes $i \in \text{dom}(\Sigma)$: $\Sigma(i)$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(i)$.

(Induktionsschritt) Angenommen, $\dot{F} > 1$. Sei $F' = F \setminus \{\langle \dot{F}, F(\dot{F}) \rangle\}$. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung mindestens eine $\dot{F}'$ -gliedrige Folge Σ , sodass für mindestens eine Signatur σ und jedes $i \in \text{dom}(\Sigma)$ gilt: $\Sigma(i)$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F'(i)$. Seien Σ' und σ' von dieser Art. Nach Definition gilt für mindestens eine Signatur σ , dass $F(\dot{F})$ eine σ -Formel ist. Sei σ von dieser Art. Dann gibt es nach Definition mindestens eine σ -Formelkonstruktionssequenz Σ für $F(\dot{F})$. Sei Σ von dieser Art. Sei $\sigma^* = \langle \overset{(1)}{\sigma} \cup \overset{(1)}{\sigma'}, \overset{(2)}{\sigma} \cup \overset{(2)}{\sigma'}, \overset{(3)}{\sigma} \cup \overset{(3)}{\sigma'} \rangle$. Dann ist nach Definition σ^* eine Signatur. Da σ und σ' nach Definition jeweils Teilsignaturen von σ^* sind, gilt nach Lemma für jedes $i \in \text{dom}(\Sigma')$, dass $\Sigma'(i)$ eine σ^* -Formelkonstruktionssequenz für $F'(i)$ ist und Σ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(\dot{F})$ ist. Dann ist $\Sigma' \dot{\cup} \{\langle 1, \Sigma \rangle\}$ eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge, sodass für mindestens eine Signatur σ und jedes $i \in \text{dom}(\Sigma)$ gilt: $\Sigma(i)$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(i)$. Also gibt es mindestens eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge Σ , sodass für mindestens eine Signatur σ und jedes $i \in \text{dom}(\Sigma)$ gilt: $\Sigma(i)$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(i)$. $\square$

Lemma 37. *Für jede endliche Folge F von spr gibt es genau ein K , sodass K eine Konjunktion der Formeln F ist.*

Beweis. Sei F eine endliche Folge von spr .

„Existenz“: Nach Lemma 36 gibt es mindestens eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge Σ , sodass für mindestens eine Signatur σ und jedes $i \in \text{dom}(\Sigma)$ gilt: $\Sigma(i)$ ist eine

σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(i)$. Seien Σ und σ von dieser Art. Nach Lemma 15 gilt: $\overset{\uparrow}{\Sigma}$ ist eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $F(\dot{F})$. Sei K eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge von spr_σ , sodass: $K(1) = F(1)$ für jedes $i \in \text{dom}(K) \setminus \{1\}$ gilt: $K(i) = \langle K(i-1) \wedge F(i) \rangle$. Zu zeigen: für jedes $i \in \text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K) \setminus \mathcal{I}_{\overset{\uparrow}{\Sigma}}$ gilt, dass $\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K|_{\mathcal{I}_i}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $K(i - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})))$ ist. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über $\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K) \setminus \mathcal{I}_{\overset{\uparrow}{\Sigma}}$.

(Induktionsbasis) Angenommen, $i = \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})) + 1$. Da $K(1) = F(1)$ und es für jedes $j \in \text{dom}(F)$ mindestens ein $k \in \text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})$ gibt, sodass $F(j) = \overset{\uparrow}{\Sigma}(k)$ gilt trivialerweise, dass $\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} \{ \langle 1, K(1) \rangle \}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $K(1)$ ist. Da $1 = \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})) + 1 - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma}))$, gilt, dass $(\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K)|_{\mathcal{I}_i}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $K(i - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})))$ ist.

(Induktionsschritt) Angenommen, $i > \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})) + 1$. Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt, dass $(\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K)|_{\mathcal{I}_{i-1}}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $K(i-1 - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})))$ ist. Da es für jedes $j \in \text{dom}(F)$ mindestens ein $k \in \text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})$ gibt, sodass $F(j) = \overset{\uparrow}{\Sigma}(k)$ und $K(i - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma}))) = \langle K(i-1 - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma}))) \wedge F(i - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma}))) \rangle$, gilt nach Definition, dass $(\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K)|_{\mathcal{I}_{i-1}} \dot{\wr} \{ \langle 1, K(i - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma}))) \rangle \}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $K(i - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})))$ ist. Also ist $\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K|_{\mathcal{I}_i}$ eine σ -Formelkonstruktionssequenz für $K(i - \max(\text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma})))$.

Also gilt für mindestens ein j , mit $1 \leq j \leq \overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K$: (i) $\Sigma(j) = F(1)$, und (ii) für jedes $i \in \text{dom}(\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K) \setminus \mathcal{I}_j$ gilt: $\overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K(i) = \langle \overset{\uparrow}{\Sigma} \dot{\wr} K(i-1) \wedge F(i-j+1) \rangle$. Also gilt nach Definition für mindestens ein K , dass K eine Konjunktion der Formeln F ist.

„Eindeutigkeit“: Seien K und K' jeweils Konjunktionen der Formeln F . Dann gilt nach Definition für mindestens eine Signatur σ , sowie für mindestens eine σ -Formelkonstruktionssequenz Σ für K : (i) $\Sigma(\dot{\Sigma}) = K$ und (ii) für mindestens ein j , mit $1 \leq j \leq \dot{\Sigma}$ gilt: $\Sigma(j) = F(1)$ und für jedes $i \in \text{dom}(\Sigma) \setminus \mathcal{I}_j$ gilt: $\Sigma(i) = \langle \Sigma(i-1) \wedge F(i-j+1) \rangle$. Seien σ , Σ und j von dieser Art. Außerdem gilt nach Definition für mindestens eine Signatur σ , sowie für mindestens eine σ -Formelkonstruktionssequenz Σ für K' : (i) $\Sigma(\dot{\Sigma}) = K'$ und (ii) für mindestens ein j , mit $1 \leq j \leq \dot{\Sigma}$ gilt: $\Sigma(j) = F(1)$ und für jedes $i \in \text{dom}(\Sigma) \setminus \mathcal{I}_j$ gilt:

$\Sigma(i) = \langle \Sigma(i-1) \wedge F(i-j+1) \rangle$. Seien σ' , Σ' und j' von dieser Art. Zu zeigen: für jedes $0 \leq i \leq \dot{F}$ gilt, dass $\Sigma(j+i) = \Sigma'(j'+i)$. Der Beweis erfolgt durch Induktion über $\mathcal{I}_{\dot{F}} \cup \{0\}$.

(Induktionsbasis) Angenommen, $i = 0$. Da $\Sigma(j) = F(1)$ und $\Sigma'(j) = F(1)$, gilt $\Sigma(j+i) = \Sigma'(j'+i)$.

(Induktionsschritt) Angenommen, $i > 0$. Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt: $\Sigma(j+i-1) = \Sigma'(j'+i-1)$. Da $\Sigma(j+i) = \langle \Sigma(j+i-1) \wedge F(j+i-j+1) \rangle$ und $\Sigma'(j+i) = \langle \Sigma'(j+i-1) \wedge F(j+i-j+1) \rangle$, gilt: $\Sigma(j+i) = \Sigma'(j+i)$.

Dann gilt: $\Sigma(\dot{\Sigma}) = \Sigma'(\dot{\Sigma}')$. Da $\Sigma(\dot{\Sigma}) = K$ und $\Sigma'(\dot{\Sigma}') = K'$, gilt: $K = K'$. $\square$

Einen Spezialfall von Konjunktionen von Formelfolgen stellen Konjunktionen von atomaren Identitätsformeln dar. Da jeder Variablenfolge eindeutig eine Folge von atomaren Identitätsformeln entspricht, muss nur die Variablenfolge explizit im Definiendum angeführt werden.

Definition 87. K ist eine Konjunktion der atomaren Identitätsformeln für die Variablen v gdw für mindestens ein F gilt:

- (a) v ist eine injektive Folge von $\mathcal{V}$
- (b) F ist eine $\dot{v}$ -gliedrige Folge von spr , sodass für jedes $i \in \text{dom}(F)$ gilt: $F(i)$ ist eine atomare Identitätsformel für $v(i)$
- (c) K ist eine Konjunktion der Formeln F .

Die Eindeutigkeit der soeben bestimmten Relation ergibt sich durch die Ordnung auf den ganzen Zahlen.

Lemma 38. Für jede injektive Folge v von $\mathcal{V}$ gibt es genau ein K , sodass K eine Konjunktion der atomaren Identitätsformeln für die Variablen v ist.

Beweis. Sei v eine injektive Folge von $\mathcal{V}$.

„Existenz“: Nach Korollar 16 gibt es für jedes $i \in \text{dom}(v)$ genau ein A , sodass A eine atomare Identitätsformel für $v(i)$ ist. Sei F eine $\dot{v}$ -gliedrige Folge von spr , sodass für jedes $i \in \text{dom}(F)$ gilt: $F(i)$ ist eine atomare Identitätsformel für $v(i)$. Nach Lemma 37 gilt für genau ein K , dass K eine Konjunktion der Formeln F ist. Sei K von dieser Art. Also gilt für mindestens ein F : (i) v ist eine injektive Folge von $\mathcal{V}$ (ii) F ist eine $\dot{v}$ -gliedrige Folge von spr , sodass für jedes $i \in \text{dom}(F)$ gilt: $F(i)$ ist eine atomare Identitätsformel für $v(i)$ und (iii) K ist eine Konjunktion der Formeln F . Dann gilt nach Definition, dass K eine Konjunktion der atomaren Identitätsformeln für die Variablen v ist.

„Eindeutigkeit“: Seien K und K' atomare Identitätsformeln für die Variablen v . Dann gilt nach Definition für mindestens ein F : (i) v ist eine injektive Folge von $\mathcal{V}$ (ii) F ist eine $\dot{v}$ -gliedrige Folge von spr , sodass für jedes $i \in \text{dom}(F)$ gilt: $F(i)$ ist eine atomare Identitätsformel für $v(i)$ und (iii) K ist eine Konjunktion der Formeln F . Sei F von dieser Art. Außerdem gilt nach Definition für mindestens ein F' : (i) v ist eine injektive Folge von $\mathcal{V}$ (ii) F' ist eine $\dot{v}$ -gliedrige Folge von spr , sodass für jedes $i \in \text{dom}(F')$ gilt: $F'(i)$ ist eine atomare Identitätsformel für $v(i)$ und (iii) K' ist eine Konjunktion der Formeln F' . Sei F' von dieser Art. Nach Korollar 16 gilt: $F = F'$. Nach Lemma gilt damit: $K = K'$. $\square$

In einer σ -Explizitdefinition für eine Konstante k wird zuerst die Bisubjunktion einer σ -Formel und einer $\sigma(+)$ k -Formel und dann der universelle Abschluss gebildet. Das Ergebnis ist eine geschlossene $\sigma(+)$ k -Formel.

Korollar 19. *Für jedes D , jedes σ , sowie für jedes P gilt: Wenn D eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P ist, dann ist D eine geschlossene $\sigma(+)$ P -Formel.*

Beweis. Sei D eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P . Dann gilt nach Definition: $D = cl_{\forall}(v) \dot{\vee} (\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} (\{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} (v \dot{\vee} (\{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\} \dot{\vee} (E \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}))))))$. Sei $D' = (\{\langle 1, \emptyset \rangle\} \dot{\vee} (\{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} (v \dot{\vee} (\{\langle 1, \leftrightarrow \rangle\} \dot{\vee} (E \dot{\vee} \{\langle 1, \emptyset \rangle\}))))))$. Indirekte Annahme: für mindestens ein x gilt: x kommt frei in D vor. Sei x von dieser Art. Dann gilt nach Definition für jedes $i \in \text{dom}(v)$: $x \neq v(i)$ und x kommt frei in D' vor. Also gilt nach Definition: x kommt frei in $\{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} v$ vor, oder x kommt frei in E vor.

Fall (i): Angenommen, x kommt frei in $\{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} v$ vor. Dann gilt nach Definition: $x \in \text{img}(\{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} v)$. Da $x \in \mathcal{V}$ und $\mathcal{PK}$ und $\mathcal{V}$ aufgrund von Korollar 5 disjunkt sind, gilt für mindestens ein $i \in v$: $x = v(i)$. Widerspruch. Also ist D eine geschlossene $\sigma(+)$ P -Formel.

Fall (ii): Angenommen, x kommt frei in E vor. Dann gilt nach Definition: $x \in \text{img}(v)$. Also gilt für mindestens ein $i \in v$: $x = v(i)$. Widerspruch. Also ist D eine geschlossene $\sigma(+)$ P -Formel.

Also gilt in jedem Fall: D ist eine geschlossene $\sigma(+)$ P -Formel. $\square$

Wir schließen die syntaktischen Vorbereitungen dieses Unterabschnitts ab und widmen uns Interpretationserweiterungen.

Definition 88. $\mathcal{I}'$ ist eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathcal{I}$ um k gdw für mindestens ein I , mindestens ein I' , sowie für mindestens ein β gilt:

- (a) $k \in \mathcal{K}$
- (b) $\mathfrak{I}$ ist eine σ -Interpretation bezüglich I und β
- (c) $\mathfrak{I}'$ ist eine $\sigma(+)$ k -Interpretation bezüglich I' und β
- (d) $I|_{\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)} \cup \{\forall\}} = I'|_{\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)} \cup \{\forall\}}.$

Kommt die Konstante, um die eine Signatur erweitert wird, nicht in einem Term vor, dann gibt eine Interpretationserweiterung einer Ausgangsinterpretation um diese Konstanten dem Term denselben semantischen Wert wie die Ausgangsinterpretation.

Lemma 39. *Für jede Signatur σ , jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, jedes $k \in \mathcal{K}$, sowie für jede $\sigma(+)$ k -Interpretation $\mathfrak{I}^k$ gilt: wenn $\mathfrak{I}^k$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathfrak{I}$ um k ist, dann gilt für jeden σ -Term t : $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^k(t)$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, t ein σ -Term, $k \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation und $\mathfrak{I}^k$ eine $\sigma(+)$ k -Interpretation. Angenommen, $\mathfrak{I}^k$ ist eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathfrak{I}$ um k . Dann gilt nach Definition für mindestens ein I , mindestens ein I' , sowie für mindestens ein β , dass (i) $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β ist, (ii) $\mathfrak{I}^k$ eine $\sigma(+)$ k -Interpretation bezüglich I' und β ist und (iii) $I|_{\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)} \cup \{\forall\}} = I'|_{\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)} \cup \{\forall\}}.$ Seien I , I' und β von dieser Art. Sei $t \in \text{term}_\sigma$. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über den Termgrad von t .

(Induktionsbasis) Sei $tgrd(t) = 1$. Wegen Lemma 12 gilt daher: $\dot{t} = 1$ und: $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$ oder $t(1) \in \mathcal{V}$.

Fall (i): Angenommen, $t(1) \in \overset{(2)}{\sigma}$. Dann gilt: $I(t(1)) = I'(t(1))$. Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^k(t)$.

Fall (ii): Angenommen, $t(1) \in \mathcal{V}$. Da $\beta(t(1)) = \beta(t(1))$, gilt nach Definition: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^k(t)$.

Also gilt in jedem Fall: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^k(t)$.

(Induktionsschritt) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $tgrd(t) = n + 1$. Dann gilt wegen Lemma 14: Für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von term_σ gilt: $t = \{\langle 1, f \rangle\} \overset{\uparrow}{\bowtie} F$. Seien f und F von dieser Art. Nach Theorem 2 gilt dann für jedes $i \in \text{dom}(F)$: $F(i)$ ist ein σ -Term mit $tgrd(F(i)) < tgrd(t)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für jedes $i \in \text{dom}(F)$, dass $\mathfrak{I}(F(i)) = \mathfrak{I}^x(F(i))$.

Sei τ ein Basis- $\dot{f}$ -Tupel, sodass für jedes $1 \leq i \leq \dot{f}$ gilt: $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}(F(i))$. Also gilt für jedes $1 \leq i \leq \dot{f}$: $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}^x(F(i))$. Da $I(f) = I'(f)$, gilt: $I(f)(\tau) = I'(f)(\tau)$. Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}^x(t)$. $\square$

Koinzidieren eine Interpretation und ihre Erweiterung in Bezug auf alle Konstanten in einer Formel, so sind sie unter denselben Bedingungen Modell dieser Formel.

Lemma 40. *Für jede Signatur σ , jedes $k \in \mathcal{K}$, sowie für jedes σ -Formel A gilt: für jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, sowie für jede $\sigma(+)\mathcal{K}$ -Interpretation $\mathfrak{I}^k$ gilt: wenn $\mathfrak{I}^k$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathfrak{I}$ um k ist, dann gilt: $\Vdash_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$ gdw $\Vdash_{\mathfrak{I}^k}^{\sigma(+)\mathcal{K}} A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, t ein σ -Term, $k \in \mathcal{K}$ und $A \in \text{spr}_{\sigma}$. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über den Formelgrad von A .

(Induktionsbasis) Sei $\text{fgrd}(A) = 1$, dann gilt nach Theorem 4: A eine atomare σ -Formel. Also gilt nach Definition (i) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ -Termen: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s : $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\bowtie} t) \dot{\bowtie} s$. Sei $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation und $\mathfrak{I}^k$ eine $\sigma(+)\mathcal{K}$ -Interpretation. Angenommen, $\mathfrak{I}^k$ ist eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathfrak{I}$ um k . Dann gilt nach Definition für mindestens ein I , mindestens ein I' , sowie für mindestens ein β , dass (i) $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β ist, (ii) $\mathfrak{I}^k$ eine $\sigma(+)\mathcal{K}$ -Interpretation bezüglich I' und β ist und (iii) $I|_{\bigcup_{i=1}^3 \overset{(i)}{\sigma} \cup \{\forall\}} = I'|_{\bigcup_{i=1}^3 \overset{(i)}{\sigma} \cup \{\forall\}}$. Seien I , I' und β von dieser Art.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von σ -Termen gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Seien P und g von dieser Art.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$. Dann gilt nach Definition für jedes Basis- $\dot{g}$ -Tupel τ : wenn für jedes $i \in \text{dom}(g)$ gilt, dass $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}(g(i))$, dann: $\tau \in \mathfrak{I}(P)$. Sei τ von dieser Art. Nach Lemma 39 gilt für jedes $i \in \text{dom}(g)$: $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}^k(g(i))$. Da $I(P) = I'(P)$, gilt für jedes $i \in \text{dom}(g)$: wenn $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}^k(g(i))$, dann: $\tau \in \mathfrak{I}^k(P)$. Also gilt für jedes Basis- $\dot{g}$ -Tupel τ : wenn für jedes $i \in \text{dom}(g)$ gilt, dass $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}^k(g(i))$, dann: $\tau \in \mathfrak{I}^k(P)$. Also: $\Vdash_{\mathfrak{I}^k}^{\sigma(+)\mathcal{K}} A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{I}^k}^{\sigma(+)\mathcal{K}} A$. Auf vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass $\Vdash_{\mathfrak{I}}^{\sigma} A$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\cup} t) \dot{\cup} s$. Seien s und t von dieser Art.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$. Also nach Definition: $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(s)$. Da nach Lemma 39 gilt, dass $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}^k(t)$ und $\mathcal{I}(s) = \mathcal{I}^k(s)$, gilt also: $\mathcal{I}^k(t) = \mathcal{I}^k(s)$. Also gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$. Auf vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$.

Also gilt in jedem Fall: $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$ gdw $\Vdash_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$.

(Induktionsschritt) Sei $fgrd(A) > 1$. Dann gilt nach Theorem 5 für mindestens eine σ -Formel B : $A = \neg B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C : $A = (B \wedge C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C : $A = (B \vee C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C : $A = (B \rightarrow C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und eine σ -Formel C : $A = (B \leftrightarrow C)$, oder für mindestens eine σ -Formel B und mindestens ein $v \in \mathcal{V}$: $A = \forall v B$, oder für mindestens eine σ -Formel B und mindestens ein $v \in \mathcal{V}$: $A = \exists v B$. $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation und $\mathcal{I}^k$ eine $\sigma(+)^k$ -Interpretation. Angenommen, $\mathcal{I}^k$ ist eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathcal{I}$ um k . Dann gilt nach Definition für mindestens ein I , mindestens ein I' , sowie für mindestens ein β , dass (i) $\mathcal{I}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β ist, (ii) $\mathcal{I}^k$ eine $\sigma(+)^k$ -Interpretation bezüglich I' und β ist und (iii) $I|_{\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)} \cup \{\forall\}} = I'|_{\bigcup_{i=1}^3 \sigma^{(i)} \cup \{\forall\}}$. Seien I , I' und β von dieser Art.

Fall (ii.i): Angenommen, für mindestens eine σ -Formel B gilt: $A = \neg B$. Sei B von dieser Art.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$. Dann gilt nach Definition: $\not\Vdash_{\mathcal{J}}^{\sigma} B$. Da nach Theorem 6 $fgrd(B) < fgrd(A)$, gilt gemäß Induktionsvoraussetzung: $\not\Vdash_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} B$. Also gilt nach Definition: $\Vdash_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$. Auf vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathcal{I}$, sowie für jede $\sigma(+)^k$ -Interpretation $\mathcal{I}^k$ gilt: wenn $\mathcal{I}^k$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathcal{I}$ um k ist, dann gilt: $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$ gdw $\Vdash_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$.

Fall (ii.ii) - Fall (ii.v): Auf zu Fall (ii.i) vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass für jede σ -Interpretation $\mathcal{I}$, sowie für jede $\sigma(+)^k$ -Interpretation $\mathcal{I}^k$ gilt: wenn $\mathcal{I}^k$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathcal{I}$ um k ist, dann gilt: $\Vdash_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$ gdw $\Vdash_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$.

Fall (ii.vi): Angenommen, für mindestens eine σ -Formel B und mindestens

ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \forall v B$. Seien B und v von dieser Art.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\models_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$. Dann gilt nach Definition für jede σ, v -Variante $\mathcal{J}'$ von $\mathcal{J}$: $\models_{\mathcal{J}'}^{\sigma} B$. Sei $\mathcal{J}^*$ eine $\sigma(+)$ - k, v -Variante von $\mathcal{J}^k$. Dann gilt nach Definition für mindestens ein I^k , mindestens ein β^k und sowie für mindestens ein β^* , dass $\mathcal{J}^k$ eine $\sigma(+)$ - k -Interpretation bezüglich I^k und β^k ist, $\mathcal{J}^*$ eine $\sigma(+)$ - k -Interpretation bezüglich I^k und β^* ist und β^k von β^* höchstens in Bezug auf v differiert. Seien I^k , β^k und β^* von dieser Art. Dann gilt wegen Lemma 17, dass $I^k = I'$ und $\beta^k = \beta$. Sei $\mathcal{J}^v$ eine Funktion auf ${}^{(1)}_{\sigma} \cup {}^{(3)}_{\sigma} \cup \text{term}_{\sigma} \cup \{\forall\}$, sodass (i) $\mathcal{J}^v|_{{}^{(1)}_{\sigma} \cup {}^{(3)}_{\sigma} \cup \{\forall\}} = I|_{{}^{(1)}_{\sigma} \cup {}^{(3)}_{\sigma} \cup \{\forall\}}$ und (ii) für jedes $t \in \text{term}_{\sigma}$, sowie für jedes δ gilt: $\mathcal{J}^v(t) = \delta$ gdw δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und $\beta_{\mathcal{J}^*}$ ist. Da $\beta^*(\forall) = I'(\forall)$ und $I'(\forall) = I(\forall)$, gilt: $\mathcal{J}^v$ ist eine σ -Interpretation bezüglich I und β^* . Dann ist nach Definition $\mathcal{J}^v$ eine σ, v -Variante von $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}^*$ ist eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathcal{J}^v$ um k . Nach Theorem 6 gilt: $fgrd(B) < fgrd(A)$. Da also $\models_{\mathcal{J}^v}^{\sigma} B$, gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass $\models_{\mathcal{J}^*}^{\sigma(+)^k} B$. Also gilt für jede $\sigma(+)$ - k, v -Variante $\mathcal{J}^*$ von $\mathcal{J}^k$, dass $\models_{\mathcal{J}^*}^{\sigma(+)^k} B$. Also $\models_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} \forall v B$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\models_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$. Auf analoge Weise kann gezeigt werden, dass $\models_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathcal{J}$, sowie für jede $\sigma(+)$ - k -Interpretation $\mathcal{J}^k$: wenn $\mathcal{J}^k$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathcal{J}$ um k ist, dann gilt: $\models_{\mathcal{J}}^{\sigma} A$ gdw $\models_{\mathcal{J}^k}^{\sigma(+)^k} A$.

Fall (ii.vii): Angenommen, für mindestens eine σ -Formel B und mindestens ein $v \in \mathcal{V}$ gilt: $A = \exists v B$. Seien B und v von dieser Art.

„ $\Rightarrow$ “: Angenommen, $\models_{\mathcal{J}}^{\sigma} \exists v B$. Dann gilt nach Definition für mindestens eine σ, v -Variante $\mathcal{J}^v$ von $\mathcal{J}$, dass $\models_{\mathcal{J}^v}^{\sigma} B$. Sei $\mathcal{J}^v$ von dieser Art. Dann gilt: $\models_{\mathcal{J}^v}^{\sigma} B$. Außerdem gilt dann nach Definition für mindestens ein I^v , mindestens ein β^v , sowie für mindestens ein β' , dass $\mathcal{J}^v$ eine σ -Interpretation bezüglich I^v und β^v ist, $\mathcal{J}$ eine σ -Interpretation bezüglich I^v und β' ist und β^v von β' höchstens in Bezug auf v differiert. Seien I^v , β^v und β' von dieser Art. Dann gilt wegen Lemma 17, dass $I^v = I$ und $\beta' = \beta$. Also differiert β^v von β höchstens in Bezug auf v differiert. Sei $\mathcal{J}^{v,k}$ eine Funktion auf ${}^{(1)}_{\sigma(+)^k} \cup {}^{(3)}_{\sigma(+)^k} \cup \text{term}_{\sigma(+)^k} \cup \{\forall\}$, sodass (i) $\mathcal{J}^v|_{{}^{(1)}_{\sigma(+)^k} \cup {}^{(3)}_{\sigma(+)^k} \cup \{\forall\}} = I|_{{}^{(1)}_{\sigma(+)^k} \cup {}^{(3)}_{\sigma(+)^k} \cup \{\forall\}}$ und (ii) für jedes $t \in \text{term}_{\sigma(+)^k}$, sowie für jedes δ gilt: $\mathcal{J}^{v,k}(t) = \delta$ gdw δ ein σ -Termwert von t bezüglich I' und β^v ist. Dann gilt nach Definition: $\mathcal{J}^{v,k}$ ist eine $\sigma(+)$ - k -Interpretation. Außerdem gilt nach Definition, dass $\mathcal{J}^{v,k}$ eine $\sigma(+)$ - k, v -Variante von $\mathcal{J}^k$ ist und $\mathcal{J}^{v,k}$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathcal{J}^v$ um k ist. Nach Theorem 6 gilt: $fgrd(B) < fgrd(A)$. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung: $\models_{\mathcal{J}^{v,k}}^{\sigma(+)^k} B$.

Also gilt für mindestens eine $\sigma(+)\mathbf{k}, v$ -Variante $\mathfrak{J}'$ von $\mathfrak{J}^k$, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}'}^\sigma B$. Also:
 $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} \exists v B$.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen, $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$. Auf analoge Weise kann gezeigt werden, dass
 $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$.

Also gilt für jede σ -Interpretation $\mathfrak{J}$, sowie für jede $\sigma(+)\mathbf{k}$ -Interpretation $\mathfrak{J}^k$:
wenn $\mathfrak{J}^k$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathfrak{J}$ um k ist, dann
gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$ gdw $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$.

Also gilt in jedem Fall für jede σ -Interpretation $\mathfrak{J}$, sowie für jede $\sigma(+)\mathbf{k}$ -
Interpretation $\mathfrak{J}^k$: wenn $\mathfrak{J}^k$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten
von $\mathfrak{J}$ um k ist, dann gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$ gdw $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$. $\square$

Wir sind nun in der Lage zu zeigen, dass die Folgerungsbeziehung zwischen
einer σ -Formel und einer σ -Formelmenge auch unter einer Signaturerweiterung
erhalten und monoton bleibt.

Lemma 41. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A ,
sowie jedes $k \in \mathcal{K}$ gilt: Wenn $T \models^\sigma A$, dann $T \models^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel und $k \in \mathcal{K}$. Angenommen, $T \models^\sigma A$. Sei $\mathfrak{J}^k$ eine $\sigma(+)\mathbf{k}$ -Interpretation, sodass $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} T$. Dann gilt für jedes $B \in T$, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} B$. Außerdem gilt dann nach Definition für genau ein I^k , sowie für genau ein β^k , dass $\mathfrak{J}^k$ eine $\sigma(+)\mathbf{k}$ -Interpretation bezüglich I^k und β^k ist. Seien I^k und β^k von dieser Art. Sei $I = I^k|_{\sigma \cup \sigma^{(1)} \cup \sigma^{(2)} \cup \sigma^{(3)} \cup \{\forall\}}$.

Sei weiters $\mathfrak{J}$ eine Funktion auf $\sigma^{(1)} \cup \sigma^{(3)} \cup \text{term}_\sigma \cup \{\forall\}$, sodass (i) $\mathfrak{J}|_{\sigma \cup \sigma^{(3)} \cup \{\forall\}} = I|_{\sigma \cup \sigma^{(3)} \cup \{\forall\}}$ und (ii) für jedes $t \in \text{term}_\sigma$, sowie für jedes δ gilt: $\mathfrak{J}(t) = \delta$ gdw δ ein σ -Termwert von t bezüglich I und β^k ist. Dann gilt nach Definition, dass $\mathfrak{J}$ eine σ -Interpretation bezüglich I und β^k ist und $\mathfrak{J}^k$ eine σ -Interpretationserweiterung der Konstanten von $\mathfrak{J}$ um k ist. Dann gilt nach Lemma 40 für jedes $B \in T$, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma B$. Also gilt: $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma T$. Also gilt gemäß Annahme, dass $\Vdash_{\mathfrak{J}}^\sigma A$. Also gilt nach Lemma 40: $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$. Also gilt für jede $\sigma(+)\mathbf{k}$ -Interpretation $\mathfrak{J}^k$: wenn $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} T$, dann $\Vdash_{\mathfrak{J}^k}^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$. Also: $T \models^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$. $\square$

Lemma 42. *Für jede Signatur σ , jede σ -Formelmenge T , jede σ -Formel A ,
jedes $k \in \mathcal{K}$, sowie für jede $\sigma(+)\mathbf{k}$ -Formel B gilt: Wenn $T \models^\sigma A$, dann $T \cup \{B\} \models^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, T eine σ -Formelmenge, A eine σ -Formel, $k \in \mathcal{K}$ und B eine $\sigma(+)\mathbf{k}$ -Formel. Angenommen, $T \models^\sigma A$. Dann gilt nach Lemma 41, dass $T \models^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$ und nach Lemma 31: $T \cup \{B\} \models^{\sigma(+)\mathbf{k}} A$. $\square$

5.2 Eine minimale Substitutionstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir eine minimale Substitutionstheorie erarbeiten – gerade so viel, um nachweisen zu können, dass $A \leftrightarrow [A]_{P,v}^E$ aus einer Explizitdefinition der Form $\forall x_1 \dots \forall x_n (Px_1 \dots x_n \leftrightarrow E)$ folgt, wobei A eine beliebige Formel und $[A]_{P,v}^E$ das Ergebnis der Substitution von E für die Prädikatkonstante P in A ist. Sodann lässt sich nämlich zeigen, dass explizit definierbare Prädikatkonstanten eliminierbar sind.³⁸

Folgende Zwischenschritte sind dafür erforderlich: Wir bestimmen die Substitution von Termen für Variablen in Termen, die Substitution von Termen für Variablen in Formeln und schließlich die Substitution von Formeln für Prädikatkonstanten in Formeln.³⁹

Definition 89. Wenn $s \in \text{term}$, v eine injektive endliche Folge von $\mathcal{V}$ und t eine $\dot{v}$ -gliedrige Folge von term ist, dann gilt: $[s]_v^t = s'$ gdw sich dies aufgrund folgender rekursiver Bestimmungen ergibt:

- (a) Wenn $tgrd(s) = 1$, dann gilt:
 - (a) wenn $s(1) \in \mathcal{GK}$, dann $s' = s$
 - (b) wenn $s(1) \in \mathcal{V}$, dann gilt:
 - i. wenn $s(1) \notin \text{img}(v)$ ist, dann $s' = s$
 - ii. wenn $s(1) \in \text{img}(v)$ ist, dann $s' = t(v^{-1}(s(1)))$.
- (b) Wenn $tgrd(s) > 1$, dann gilt für jedes $f \in \mathcal{FK}$, sowie für jede $\dot{f}$ -gliedrige Folge g von term , mit $s = \{\langle 1, f \rangle\} \uparrow g$: wenn für jede $\dot{f}$ -gliedrige Folge s_{sub} von term und für jedes $i \in \text{dom}(f)$ gilt, dass $s_{\text{sub}}(i) = [g(i)]_v^t$, dann gilt: $s' = \{\langle 1, f \rangle\} \uparrow s_{\text{sub}}$.

Für die Bestimmung des Substitutionsergebnisses von Termen für Variablen in Formeln muss für allquantifizierte und existenzquantifizierte Formeln vor der

³⁸Wie im Falle der Definition von 'Explizitdefinition' kann eine erweiterte Substitutionstheorie, die in ihrem Untersuchungsbereich auch Gegenstandskonstanten und Funktionskonstanten umfasst auf nahezu vollkommen analoge Weise entwickelt werden, diesmal durch den Umweg über normierte Termnormalformen. Die Details können in (Kleinknecht, 1979) pp.5-106 nachgeschlagen werden. Alle Beweise können mutatis mutandis übertragen werden.

³⁹vgl. (Kleinknecht, 1979) insbesondere p.13, p.30f & p.56. Wir werden allerdings anders als in (Kleinknecht, 1979), wo die Folge der Variablen nur im Definiens frei vorkommt, und anders als in (Kleinknecht, 1981), wo die Folge der Variablen eindeutig durch die Reihenfolge ihres Vorkommens in E bestimmt ist, die gesamte Funktion auf v relativieren. Andernfalls lässt sich die Eliminierbarkeit von explizit definierbaren Konstanten nämlich nur für Explizitdefinitionen nachweisen, in denen die Reihenfolge zufällig übereinstimmt.

Substitution eine „gebundene Umbenennung“ vorgenommen werden: Die durch den Quantor gebundene Variable wird in der Formel durch diejenige Variable ersetzt, die weder in der Formel, noch in dem zu substituierenden Term vorkommt und kleiner ist als jede andere Variable, die weder in der Formel, noch in dem zu substituierenden Term vorkommt. Dadurch wird verhindert, dass mehr oder weniger Variablen vom Quantor erfasst werden als vor der Substitution.

Definition 90. Wenn $A \in spr$, v eine injektive endliche Folge von $\mathcal{V}$ und t eine $\dot{v}$ -gliedrige Folge von $term$ ist, dann gilt: $[A]_v^t = A'$ gdw sich dies aufgrund folgender rekursiver Bestimmungen ergibt:

- (a) Wenn $fgrd(A) = 1$, dann gilt:
 - (a) wenn $A(1) \in \mathcal{PK}$, dann gilt für jedes $P \in \mathcal{PK}$, sowie für jede $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von $term$, mit $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} \dot{g}$: wenn für jede $\dot{P}$ -gliedrige Folge s_{sub} von $term$ und für jedes $i \in dom(P)$ gilt, dass $s_{sub}(i) = [g(i)]_v^t$, dann gilt: $A' = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} s_{sub}^\uparrow$
 - (b) wenn $A(1) = \dot{=}$, dann gilt für jedes $s \in term$, sowie für jedes $s' \in term$, mit $A = \{\langle 1, \dot{=}\rangle\} \dot{\vee} s \dot{\vee} s'$: $A' = \{\langle 1, \dot{=}\rangle\} \dot{\vee} [s]_v^t \dot{\vee} [s']_v^t$
- (b) Wenn $fgrd(A) > 1$, dann gilt für jedes $B \in spr$, jedes $C \in spr$, jedes $x \in \mathcal{V}$, sowie für jedes $y \in \mathcal{V}$:

- (a) wenn $A = \neg B$, dann gilt: $A' = \neg[B]_v^t$
- (b) wenn $A = (B \wedge C)$, dann gilt: $A' = ([B]_v^t \wedge [C]_v^t)$
- (c) wenn $A = (B \vee C)$, dann gilt: $A' = ([B]_v^t \vee [C]_v^t)$
- (d) wenn $A = (B \rightarrow C)$, dann gilt: $A' = ([B]_v^t \rightarrow [C]_v^t)$
- (e) wenn $A = (B \leftrightarrow C)$, dann gilt: $A' = ([B]_v^t \leftrightarrow [C]_v^t)$
- (f) wenn $A = \forall x B$ und $y \notin img(A) \cup img(img(t)) \cup img(img(v))$ und für jedes $z \in \mathcal{V}$, mit $z \notin img(A) \cup img(img(t)) \cup img(img(v))$, gilt, dass $y \leq z$, dann gilt: $A' = \forall y[[B]_{\{\langle 1, \{\langle 1, z \rangle\}\}}^t]_v^t$
- (g) wenn $A = \exists x B$ und $y \notin img(A) \cup img(img(t)) \cup img(img(v))$ und für jedes $z \in \mathcal{V}$, mit $z \notin img(A) \cup img(img(t)) \cup img(img(v))$, gilt, dass $y \leq z$, dann gilt: $A' = \exists y[[B]_{\{\langle 1, \{\langle 1, z \rangle\}\}}^t]_v^t$

Definition 91. Wenn $A \in spr$, $E \in spr$, $P \in \mathcal{PK}$, wobei $|fr(E)| = \dot{P}$ und wenn v eine bijektive endliche Folge von $fr(E)$ ist, dann gilt: $[A]_{P,v}^E = A'$ gdw sich dies aufgrund folgender rekursiver Bestimmungen ergibt:

- (a) Wenn $fgrd(A) = 1$, dann gilt:
 - (a) wenn $A(1) \in \mathcal{PK}$, dann gilt für jedes $F \in \mathcal{PK}$, sowie für jede $\dot{F}$ -gliedrige Folge g von $term$, mit $A = \{\langle 1, F \rangle\} \uparrow g$:
 - i. wenn $F = P$, dann $A' = [E]_v^F$
 - ii. wenn $F \neq P$, dann $A' = A$
 - (b) wenn $A(1) = \dot{=}$, dann $A' = A$
- (b) Wenn $fgrd(A) > 1$, dann gilt für jedes $B \in spr$, jedes $C \in spr$, sowie für jedes $x \in \mathcal{V}$:
 - (a) wenn $A = \neg B$, dann gilt: $A' = \neg[B]_{P,v}^E$
 - (b) wenn $A = \langle B \wedge C \rangle$, dann gilt: $A' = \langle [B]_{P,v}^E \wedge [C]_{P,v}^E \rangle$
 - (c) wenn $A = \langle B \vee C \rangle$, dann gilt: $A' = \langle [B]_{P,v}^E \vee [C]_{P,v}^E \rangle$
 - (d) wenn $A = \langle B \rightarrow C \rangle$, dann gilt: $A' = \langle [B]_{P,v}^E \rightarrow [C]_{P,v}^E \rangle$
 - (e) wenn $A = \langle B \leftrightarrow C \rangle$, dann gilt: $A' = \langle [B]_{P,v}^E \leftrightarrow [C]_{P,v}^E \rangle$
 - (f) wenn $A = \forall x B$, dann gilt: $A' = \forall x [B]_{P,v}^E$
 - (g) wenn $A = \exists x B$, dann gilt: $A' = \exists x [B]_{P,v}^E$

Lemma 43. Für jede Signatur σ , jede σ -Interpretation $\mathfrak{I}$, jedes $x \in \mathcal{V}$, jedes $t \in term_\sigma$, jedes $s \in term_\sigma$, sowie für jede σ, x -Variante $\mathfrak{I}^x$ von $\mathfrak{I}$ gilt: wenn $\mathfrak{I}^x(\{\langle 1, x \rangle\}) = \mathfrak{I}(t)$, dann $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}^x(s)$.

Beweis. Sei σ eine Signatur, $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation, $x \in \mathcal{V}$, $t \in term_\sigma$, $s \in term_\sigma$, sowie $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$. Angenommen, $\mathfrak{I}^x(\{\langle 1, x \rangle\}) = \mathfrak{I}(t)$. Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Termgrad von s .

(Induktionsbasis) Angenommen, $tgrd(s) = 1$. Dann gilt nach Lemma 12 für mindestens ein $c \in \sigma' \stackrel{(2)}{:} s = \{\langle 1, c \rangle\}$ oder für mindestens ein $y \in \mathcal{V}$: $s = \{\langle 1, y \rangle\}$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $c \in \sigma' \stackrel{(2)}{:} s = \{\langle 1, c \rangle\}$. Sei c von dieser Art. Dann gilt nach Definition $[s]_x^t = \{\langle 1, c \rangle\}$. Da $x \notin img(s)$, gilt nach Lemma 26: $\mathfrak{I}(s) = \mathfrak{I}^x(s)$. Da $[s]_x^t = s$, gilt: $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}^x(s)$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens ein $y \in \mathcal{V}$ gilt: $s = \{\langle 1, y \rangle\}$. Sei y von dieser Art.

Fall (ii.i): Angenommen, $x = y$. Dann gilt nach Definition: $[s]_x^t = t$. Da gemäß Annahme $\mathfrak{I}^x(\{\langle 1, x \rangle\}) = \mathfrak{I}(t)$, gilt: $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}^x(s)$.

Fall (ii.ii): Angenommen, $x \neq y$. Dann gilt nach Definition: $[s]_x^t = \{\langle 1, y \rangle\}$. Da $x \notin \text{img}(s)$, gilt nach Lemma 26: $\mathfrak{I}(s) = \mathfrak{I}^x(s)$. Da $[s]_x^t = s$, gilt: $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}^x(s)$.

Also gilt in jedem Fall: $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}^x(s)$.

(Induktionsschritt) Angenommen, $\text{tgrd}(s) > 1$. Dann gilt nach Lemma 14 für mindestens ein $f \in \overset{(3)}{\sigma}$ sowie für mindestens eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge F von term_σ : $s = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{F}$. Seien f und F von dieser Art. Nach Theorem 2 gilt für jedes $i \in \text{dom}(F)$: $\text{tgrd}(F(i)) < \text{tgrd}(s)$. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung für jedes $i \in \text{dom}(F)$: $\mathfrak{I}([F(i)]_x^t) = \mathfrak{I}^x(F(i))$. Sei τ ein Basis- $\dot{f}$ -Tupel, sodass für jedes $1 \leq i \leq \dot{f}$ gilt: $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}^x(F(i))$. Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}^x(s) = \mathfrak{I}^x(f)(\tau)$.

Außerdem gilt dann für jedes $1 \leq i \leq \dot{f}$: $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}([F(i)]_x^t)$. Sei F_{sub} eine $\dot{f}$ -gliedrige Folge von term_σ , sodass für jedes $1 \leq i \leq \dot{f}$ gilt: $F_{\text{sub}}(i) = [F(i)]_x^t$. Dann gilt nach Definition: $[s]_x^t = \{\langle 1, f \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{F_{\text{sub}}}$. Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}(f)(\tau)$. Da $\mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}^x(f)$, gilt also: $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}^x(s)$. $\square$

Lemma 44. Für jede Signatur σ , jedes $x \in \mathcal{V}$, jedes $t \in \text{term}_\sigma$, sowie für jede σ -Formel A gilt: $\{\forall x A\} \models^\sigma [A]_x^t$.

Beweis. Sei σ eine Signatur, $x \in \mathcal{V}$, $t \in \text{term}_\sigma$ und A eine σ -Formel. Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Formelgrad von A .

(Induktionsbasis) Sei $\text{fgrd}(A) = 1$. Dann gilt nach Theorem 4: A ist eine atomare σ -Formel. Dann gilt nach Definition (i) für mindestens ein $P \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie mindestens eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge g von term_σ : $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s : $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\bowtie} t) \dot{\bowtie} s$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $F \in \overset{(1)}{\sigma}$, sowie für mindestens eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge g von term_σ gilt: $A = \{\langle 1, F \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g}$. Seien F und g von dieser Art. Sei g_{sub} eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge von term_σ , sodass für jedes $i \in \text{dom}(g_{\text{sub}})$ gilt: $g_{\text{sub}}(i) = [g(i)]_x^t$. Dann gilt nach Definition: $[A]_x^t = \{\langle 1, F \rangle\} \dot{\bowtie} \overset{\uparrow}{g_{\text{sub}}}$.

Sei $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation, sodass $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} \forall x A$. Sei $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$, sodass $\mathfrak{I}^x(\{\langle 1, x \rangle\}) = \mathfrak{I}(t)$. Dann gilt nach Lemma 43 für jedes $i \in \text{dom}(g)$: $\mathfrak{I}([g(i)]_x^t) = \mathfrak{I}^x(g(i))$. Da $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} \forall x A$, gilt: $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$. Also gilt nach Definition für jedes Basis- $\dot{g}$ -Tupel τ : wenn für jedes $i \in \text{dom}(g)$ gilt, dass $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}^x(g(i))$, dann: $\tau \in \mathfrak{I}^x(P)$. Da $\mathfrak{I}^x(P) = \mathfrak{I}(P)$, gilt für jedes Basis- $\dot{g}$ -Tupel τ : wenn für jedes $i \in \text{dom}(g)$ gilt, dass $\overset{(i)}{\tau} = \mathfrak{I}([g(i)]_x^t)$, dann: $\tau \in \mathfrak{I}(P)$. Also gilt nach Definition: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} [A]_x^t$. Also: $\{\forall x A\} \models^{\sigma} [A]_x^t$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens einen σ -Term s , sowie für mindestens einen σ -Term s' gilt: $A = (\{\langle 1, \dot{=}\rangle\} \dot{\wedge} s) \dot{\wedge} s'$. Seien s und s' von dieser Art. Dann gilt nach Definition: $[A]_x^t = \{\langle 1, \dot{=}\rangle\} \dot{\wedge} [s]_v^t \dot{\wedge} [s']_v^t$.

Sei $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation, sodass $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} \forall x A$. Sei $\mathfrak{I}^x$ eine σ, x -Variante von $\mathfrak{I}$, sodass $\mathfrak{I}^x(\{\langle 1, x \rangle\}) = \mathfrak{I}(t)$. Dann gilt nach Lemma 43: $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}^x(s)$ und $\mathfrak{I}([s']_x^t) = \mathfrak{I}^x(s')$. Da $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} \forall x A$, gilt: $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} A$. Also gilt nach Definition: $\mathfrak{I}^x(s) = \mathfrak{I}^x(s')$. Also: $\mathfrak{I}([s]_x^t) = \mathfrak{I}([s']_x^t)$. Also: $\models_{\mathfrak{I}^x}^{\sigma} [A]_x^t$. Also: $\{\forall x A\} \models^{\sigma} [A]_x^t$.

Also gilt in jedem Fall: $\{\forall x A\} \models^{\sigma} [A]_x^t$.

(Induktionsschritt) Trivial. $\square$

Theorem 13. Für jede Signatur σ , jedes $P \in \mathcal{PK}$, jede $\dot{P}$ -gliedrige Folge v von $\mathcal{V}$, sowie für jedes $E \in \text{spr}_{\sigma}$ gilt: Wenn $\forall v_1 \dots \forall v_{\dot{P}} (Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)$ eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P ist, dann gilt für jedes $A \in \text{spr}_{\sigma(+)_k}$: $\{\forall v_1 \dots \forall v_{\dot{P}} (Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)\} \models^{\sigma(+)^P} A \leftrightarrow [A]_{P,v}^E$.

Beweis. Sei σ eine Signatur, $P \in \mathcal{PK}$, v eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge von $\mathcal{V}$ und $E \in \text{spr}_{\sigma}$. Angenommen, $\forall v_1 \dots \forall v_{\dot{P}} (Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)$ ist eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P . Sei $A \in \text{spr}_{\sigma(+)_k}$. Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Formelgrad von A .

(Induktionsbasis) Sei $\text{fgrd}(A) = 1$. Dann gilt nach Theorem 4: A ist eine atomare $\sigma(+)_k$ -Formel. Dann gilt nach Definition (i) für mindestens ein $F \in \overset{(1)}{\sigma(+)_k}$, sowie mindestens eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge g von $\text{term}_{\sigma(+)_k}$: $A = \{\langle 1, F \rangle\} \dot{\wedge} \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen $\sigma(+)_k$ -Term t , sowie für mindestens einen $\sigma(+)_k$ -Term s : $A = (\{\langle 1, \dot{=}\rangle\} \dot{\wedge} t) \dot{\wedge} s$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $F \in \overset{(1)}{\sigma(+)_k}$, sowie für mindestens eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge g von $\text{term}_{\sigma(+)_k}$ gilt: $A = \{\langle 1, F \rangle\} \dot{\wedge} \overset{\uparrow}{g}$. Seien F und g von dieser Art.

Fall (i.i): Angenommen, $P = F$. Dann gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{g}$. Also nach Definition: $A = [Pv_1 \dots v_{\dot{P}}]_v^g$. Nach Lemma 44 gilt: $\{\forall x(Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)\} \models^\sigma [[Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E]]_x^t$. Da nach Definition $[[Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E]]_x^t = [[Pg_1 \dots g_{\dot{P}}]_v^g \leftrightarrow [E]_v^g]$, gilt: $\{\forall x(Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)\} \models^\sigma [[Pg_1 \dots g_{\dot{P}}]_v^g \leftrightarrow [E]_v^g]$. Da nach Definition $[A]_{P,v}^E = [E]_v^g$, gilt: $\{\forall v_1 \dots \forall v_{\dot{P}}(Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)\} \models^{\sigma(+)^P} A \leftrightarrow [A]_{P,v}^E$.

Fall (i.ii): Angenommen, $P \neq F$. Da somit nach Definition $A = [A]_{P,v}^E$, gilt trivialerweise: $\emptyset \models^{\sigma(+)^P} A \leftrightarrow [A]_{P,v}^E$. Also gilt nach Theorem 10: $\{\forall v_1 \dots \forall v_{\dot{P}}(Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)\} \models^{\sigma(+)^P} A \leftrightarrow [A]_{P,v}^E$.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens einen σ -Term t , sowie für mindestens einen σ -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\vee} t) \dot{\vee} s$. Dann kann auf zu Fall (i.ii) vollkommen analoge Weise gezeigt werden, dass: $\{\forall v_1 \dots \forall v_{\dot{P}}(Pv_1 \dots v_{\dot{P}} \leftrightarrow E)\} \models^{\sigma(+)^P} A \leftrightarrow [A]_{P,v}^E$.

(Induktionsschritt) Trivial. $\square$

Theorem 14. Für jede Signatur σ , jedes $P \in \mathcal{PK}$, jede $\dot{P}$ -gliedrige Folge v von $\mathcal{V}$, jedes $E \in \text{spr}_\sigma$, sowie für jedes $A \in \text{spr}_{\sigma(+)^P}$ gilt: $[A]_{P,v}^E$ ist eine σ -Formel.

Beweis. Sei σ eine Signatur, $P \in \mathcal{PK}$, v eine $\dot{P}$ -gliedrige Folge von $\mathcal{V}$, $E \in \text{spr}_\sigma$ und $A \in \text{spr}_{\sigma(+)^P}$. Der Beweis erfolgt durch Induktion über den Formelgrad von A .

(Induktionsbasis) Sei $\text{fgrd}(A) = 1$. Dann gilt nach Theorem 4: A ist eine atomare $\sigma(+)^P$ -Formel. Dann gilt nach Definition (i) für mindestens ein $F \in \overset{(1)}{\sigma(+)^P}$, sowie mindestens eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge g von $\text{term}_{\sigma(+)^P}$: $A = \{\langle 1, F \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{g}$, oder (ii) für mindestens einen $\sigma(+)^P$ -Term t , sowie für mindestens einen $\sigma(+)^P$ -Term s : $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\vee} t) \dot{\vee} s$.

Fall (i): Angenommen, für mindestens ein $F \in \overset{(1)}{\sigma(+)^P}$, sowie für mindestens eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge g von $\text{term}_{\sigma(+)^P}$ gilt: $A = \{\langle 1, F \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{g}$. Seien F und g von dieser Art. Wegen Korollar 5 gilt trivialerweise: g ist eine $\dot{F}$ -gliedrige Folge von term_σ .

Fall (i.i): Angenommen, $P = F$. Dann gilt: $A = \{\langle 1, P \rangle\} \dot{\vee} \overset{\uparrow}{g}$. Nach Definition gilt dann: $[A]_{P,v}^E = [E]_v^g$. Dann gilt trivialerweise: $[A]_{P,v}^E$ ist eine σ -Formel.

Fall (i.ii): Angenommen, $P \neq F$. Da somit nach Definition $A = [A]_{P,v}^E$, gilt trivialerweise: $[A]_{P,v}^E$ ist eine σ -Formel.

Fall (ii): Angenommen, für mindestens einen $\sigma(+)^P$ -Term t , sowie für mindestens einen $\sigma(+)^P$ -Term s gilt: $A = (\{\langle 1, \equiv \rangle\} \dot{\vee} t) \dot{\vee} s$. Seien t und s von dieser

Art. Wegen Korollar 5 gilt trivialerweise: $P \notin \text{img}(t)$ und $P \notin \text{img}(s)$. Also ist t ein σ -Term und s ein σ -Term. Also ist A eine σ -Formel. Da nach Definition $A = [A]_{P,v}^E$, gilt: $[A]_{P,v}^E$ ist eine σ -Formel.

(Induktionsschritt) Trivial. $\square$

Theorem 15. *Für jedes D , $k \in \mathcal{PK}$, T , S , sowie für jedes σ gilt: Wenn D eine explizite Definition von k in T auf Basis von S und σ ist, dann ist k in T bezüglich σ eliminierbar.*

Beweis. Sei $k \in \mathcal{PK}$. Angenommen, D ist eine explizite Definition von k in T auf Basis von S und σ . Dann gilt nach Definition, dass D eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P ist. Also gilt nach Definition für mindestens eine σ -Formel E , sowie mindestens eine k -gliedrige injektive Folge v von $\mathcal{V}$, dass für jedes $x \in \mathcal{V}$ gilt: x kommt dann und nur dann frei in E vor, wenn $x \in \text{img}(v)$ und $D = cl_{\mathcal{V}}(v) \checkmark (\{ \langle 1, \emptyset \rangle \} \checkmark (\{ \langle 1, k \rangle \} \checkmark (v \checkmark (\{ \langle 1, \leftrightarrow \rangle \} \checkmark (E \checkmark \{ \langle 1, \emptyset \rangle \}))))))$. Seien E und v von dieser Art.

Nach Definition gilt: $T = cn_{\sigma(+k)}(S \cup \{D\})$. Sei $A \in spr_{\sigma(+k)}$. Nach Korollar 19 gilt: D ist eine geschlossene $\sigma(+k)$ -Formel. Wegen Lemma 22, Theorem 10 und Theorem 13 gilt: $T \models^{\sigma(+k)} A \leftrightarrow [A]_{P,v}^E$. Nach Theorem 14 gilt: $[A]_{P,v}^E$ ist eine σ -Formel. Also gibt es für jede $\sigma(+k)$ -Formel A mindestens eine σ -Formel B , sodass: $T \models^{\sigma(+k)} A \leftrightarrow B$. Da T eine $\sigma(+k)$ -Theorie ist, gilt nach Definition: k ist in T bezüglich σ eliminierbar. $\square$

5.3 Non-Kreativität und Eliminierbarkeit

Eine Definition ist in der modernen Definitionstheorie eine Formel, die eine Theorie auf eine gewisse Art erweitert. Die erforderliche Art der Erweiterung ist durch zwei Definitionskriterien festgelegt: Non-Kreativität und Eliminierbarkeit. Warum genügt nicht Eliminierbarkeit allein? Wie in Abschnitt 1.1 ausgeführt, sind die in Bezug auf Erweiterungen von formalen Theorien ausformulierten Definitionen 79 und 80 selbst Präzisierungen der beiden Kriterien und können als solche inhaltlich adäquat oder inadäquat sein. Bei einer adäquaten Präzisierung des Begriffs der Non-Kreativität muss jede non-kreative Theorieerweiterung auch relativ-konsistent sein. Wir können leicht nachweisen, dass dies bei Definition 79 tatsächlich der Fall ist.

Definition 92. T' ist eine relativ-konsistente Theorieerweiterung von T gdw für mindestens ein σ , sowie mindestens ein σ' gilt:

- (a) σ ist eine Teilsignatur von σ'
- (b) T ist eine σ -Theorie und T' ist eine σ' -Theorie
- (c) $T \subseteq T'$
- (d) Wenn T eine konsistente σ -Theorie ist, dann ist T' eine konsistente σ' -Theorie.

Korollar 20. *Für jedes T' , sowie für jedes T gilt: Wenn T' eine relativ-konsistente Theorieerweiterung von T ist, dann ist T' eine Theorieerweiterung von T .*

Beweis. Trivial. □

Lemma 45. *Für jedes D , jedes k , jedes T , jedes S , sowie für jedes σ gilt: Wenn D bezüglich k in T non-kreativ auf Basis von S und σ ist, dann $S \subseteq T$.*

Beweis. Angenommen, D ist bezüglich k in T auf Basis von S und σ non-kreativ. Sei $A \in S$. Dann gilt nach Definition, dass A eine geschlossene σ -Formel ist und $S \models^\sigma A$. Da trivialerweise σ eine Teilsignatur von $\sigma(+k)$ ist, gilt nach Lemma 11: A ist eine $\sigma(+k)$ -Formel. Da für kein x gilt, dass x frei in A vorkommt, ist A nach Definition eine geschlossene $\sigma(+k)$ -Formel. Außerdem gilt nach Lemma 41: $S \models^{\sigma(+k)} A$. Nach Theorem 10 gilt: $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+k)} A$. Also gilt nach Definition: $A \in cn_{\sigma(+k)}(S \cup \{D\})$. Also: $A \in T$. Also: $S \subseteq T$. □

Theorem 16. *Für jedes D , jedes k , jedes T , jedes S , sowie für jedes σ gilt: Wenn D bezüglich k in T non-kreativ auf Basis von S und σ ist, dann ist T eine relativ-konsistente Theorieerweiterung von S .*

Beweis. Angenommen, D ist bezüglich k in T auf Basis von S und σ non-kreativ. Dann gilt nach Definition für jede σ -Formel A : Wenn $T \models^{\sigma(+k)} A$, dann $S \models^\sigma A$.

Indirekte Annahme: Angenommen, T ist keine relativ-konsistente Theorieerweiterung von S . Da nach Lemma 45 $S \subseteq T$, gilt: S ist eine konsistente σ -Theorie und T ist keine konsistente $\sigma(+k)$ -Theorie. Nach Theorem 11 gilt dann für jedes $A \in spr_{\sigma(+k)}: T \models^{\sigma(+k)} A$. Sei B eine σ -Formel. Nach Definition ist trivialerweise auch $\neg B$ eine σ -Formel. Nach Lemma 11 gilt: B ist eine $\sigma(+k)$ -Formel und $\neg B$ ist eine $\sigma(+k)$ -Formel. Also: $T \models^{\sigma(+k)} B$ und $T \models^{\sigma(+k)} \neg B$. Da D bezüglich k in T auf Basis von S und σ non-kreativ ist, gilt auch: $S \models^\sigma B$ und $S \models^\sigma \neg B$. Also gilt für mindestens eine σ -Formel B , dass $S \models^\sigma B$ und

$S \models^\sigma \neg B$. Also ist nach Definition S keine konsistente σ -Theorie. Widerspruch.
Also: T ist eine relativ-konsistente Theorieerweiterung von S . $\square$

Das Kriterium der Eliminierbarkeit hingegen lässt es zu, dass eine Konstante in einer Theorie eliminierbar ist, obwohl diese Theorie auf eine Weise erzeugt wurde, in der die Konsistenz nicht erhalten wurde. Tatsächlich ist in jeder inkonsistenten Theorie jede ihrer deskriptiven Konstanten eliminierbar.

Theorem 17. *Für jedes $k \in \mathcal{K}$, für jede Signatur σ , sowie für jede $\sigma+k$ -Theorie T gilt: Wenn T eine inkonsistente $\sigma+k$ -Theorie ist, dann ist k in T bezüglich σ eliminierbar.*

Beweis. Sei σ eine Signatur, $k \in \mathcal{K}$ und T eine $\sigma(+k)$ -Theorie. Angenommen, T ist eine inkonsistente $\sigma(+k)$ -Theorie. Dann gilt nach Theorem 11 für jedes $A \in \text{spr}_{\sigma(+k)}$: $T \models^{\sigma(+k)} A$. Sei B eine beliebige $\sigma(+k)$ -Formel und B' eine beliebige σ -Formel. Dann gilt nach Lemma 11: B' ist eine $\sigma(+k)$ -Formel. Also gilt trivialerweise nach Definition: $\langle B \leftrightarrow B' \rangle$ ist eine $\sigma(+k)$ -Formel. Also: $T \models^{\sigma(+k)} \langle B \leftrightarrow B' \rangle$. Also gibt es für jede $\sigma(+k)$ -Formel A mindestens eine σ -Formel A' , sodass: $T \models^{\sigma(+k)} \langle A \leftrightarrow A' \rangle$. Also ist nach Definition k in T bezüglich σ eliminierbar. $\square$

Theorem 18. *Für mindestens eine Signatur σ , ein $k \in \mathcal{K}$, ein S , sowie für mindestens ein T gilt: T ist eine Theorieerweiterung von S , k ist in T bezüglich σ eliminierbar und T ist keine relativ-konsistente Theorieerweiterung von S .*

Beweis. Sei $P \in \mathcal{PK}$, mit $\dot{P} = 1$. Dann gilt nach Definition, dass $\langle \{P\}, \emptyset, \emptyset \rangle$ eine Signatur ist. Sei $\sigma = \langle \{P\}, \emptyset, \emptyset \rangle$. Sei $x \in \mathcal{V}$. Dann gilt nach Definition, dass $\forall x Px$ eine σ -Formel ist. Sei $S = \text{cn}_\sigma(\{\forall x Px\})$. Dann gilt nach Definition, dass S eine σ -Theorie ist. Sei nun $a \in \mathcal{GK}$. Dann gilt, dass $\langle \{P\}, \{a\}, \emptyset \rangle$ eine Signatur ist. Sei $\sigma' = \langle \{P\}, \{a\}, \emptyset \rangle$. Dann gilt nach Definition, dass σ eine Teilsignatur von σ' ist. Sei $T = \text{cn}_{\sigma'}(\{\forall x Px, \neg Pa\})$. Da $S \subseteq T$, gilt nach Definition, dass T eine Theorieerweiterung von S ist.

Da $T \models^{\sigma'} Pa$ und $T \models^{\sigma'} \neg Pa$, gilt nach Definition, dass T eine inkonsistente σ' -Theorie ist. Nach Theorem 17 gilt dann: a ist in T bezüglich σ eliminierbar.

Sei schließlich $\mathfrak{I}$ eine σ -Interpretation mit $\mathfrak{I}(\forall) = \mathbb{N}$ und $\mathfrak{I}(P) = \{\delta \mid \delta \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt trivialerweise nach Definition: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} \forall x Px$. Also gilt trivialerweise nach Definition: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} \text{cn}_\sigma(\{\forall x Px\})$. Also gilt für mindestens ein $\mathfrak{I}$, dass $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma} \text{cn}_\sigma(\{\forall x Px\})$. Also gilt nach Theorem 12: S ist eine konsistente σ -Theorie. Also ist T keine relativ-konsistente Theorieerweiterung von S .

Also gilt für mindestens eine Signatur σ , ein $k \in \mathcal{K}$, ein S , sowie für mindestens ein T : T ist eine Theorieerweiterung von S , k ist in T bezüglich σ eliminierbar und T ist keine relativ-konsistente Theorieerweiterung von S . $\square$

Das Kriterium der Eliminierbarkeit allein genügt deshalb nicht, weil es relativ-konsistente Theorieerweiterungen nicht garantiert, und damit auch keine non-kreative Theorieerweiterung.

Korollar 21. *Für mindestens eine Signatur σ , ein $k \in \mathcal{K}$, ein S , sowie für mindestens eine $\sigma(+)$ -Formel D gilt: $cn_{\sigma+k}(S \cup \{D\})$ ist eine Theorieerweiterung von S , k ist in T bezüglich σ eliminierbar und D ist bezüglich k in $cn_{\sigma+k}(S \cup \{D\})$ nicht non-kreativ auf Basis von S und σ .*

Beweis. Sei $P \in \mathcal{PK}$, mit $\dot{P} = 1$. Dann gilt nach Definition, dass $\langle \{P\}, \emptyset, \emptyset \rangle$ eine Signatur ist. Sei $\sigma = \langle \{P\}, \emptyset, \emptyset \rangle$. Sei $x \in \mathcal{V}$. Dann gilt nach Definition, dass $\forall x Px$ eine σ -Formel ist. Sei $S = cn_{\sigma}(\{\forall x Px\})$. Dann gilt nach Definition, dass S eine σ -Theorie ist. Sei nun $a \in \mathcal{GK}$. Dann gilt, dass $\langle \{P\}, \{a\}, \emptyset \rangle$ eine Signatur ist. Sei $\sigma' = \langle \{P\}, \{a\}, \emptyset \rangle$. Dann gilt nach Definition, dass σ eine Teilsignatur von σ' ist. Sei $T = cn_{\sigma'}(\{\forall x Px, \neg Pa\})$. Da $S \subseteq T$, gilt nach Definition, dass T eine Theorieerweiterung von S ist.

Da $T \models^{\sigma'} Pa$ und $T \models^{\sigma'} \neg Pa$, gilt nach Definition, dass T eine inkonsistente σ' -Theorie ist. Nach Theorem 17 gilt dann: a ist in T bezüglich σ eliminierbar.

Nach Theorem 16 gilt: $\neg Pa$ ist bezüglich a in $cn_{\sigma'}(\{\forall x Px, \neg Pa\})$ nicht non-kreativ auf Basis von $cn_{\sigma}(\{\forall x Px\})$ und σ .

Also gilt für mindestens eine Signatur σ , ein $k \in \mathcal{K}$, ein S , sowie für mindestens eine $\sigma(+)$ -Formel D : $cn_{\sigma+k}(S \cup \{D\})$ ist eine Theorieerweiterung von S , k ist in T bezüglich σ eliminierbar und D ist bezüglich k in $cn_{\sigma+k}(S \cup \{D\})$ nicht non-kreativ auf Basis von S und σ . $\square$

5.4 Resultate von Shoenfield und Kleinknecht

In den vorangegangenen Abschnitten und Unterabschnitten haben wir die unerlässlichen Vorbereitungen getroffen, um die zentrale Frage der vorliegenden Arbeit behandeln zu können: Ist jede Definition im Wesentlichen eine Explizitdefinition? In Wahrheit verbergen sich hinter dieser Frage zwei Teilfragen: (1) Sind Explizitdefinitionen tatsächlich Definitionen und ist (2) jede Definition im Wesentlichen eine Explizitdefinition?

Überführen wir die erste Frage nach dem Definitionsstatus von Explizitdefinitionen in eine formale Frage, so liefert Shoenfields Theorem eine Antwort.

Eingeschränkt auf Prädikatkonstanten, sind wir in der Lage, seiner Behauptung eine präzise Formulierung zu geben:

Theorem 19. *Für jedes D, k, T, S , sowie für jedes σ gilt: Wenn D in T eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante P auf Basis von S ist, dann ist (i) die Theorieerweiterung von S zu T um die Formel D und die Konstante k non-kreativ relativ zu σ und (ii) k in T bezüglich σ eliminierbar.*

Kleinknecht hat in (Kleinknecht, 1979) den Weg zu diesem Resultat präzise nachgezeichnet. Es handelt sich dabei einerseits um das Theorem T15.9 – um den Beweis im Detail nachvollziehen zu können, sollten die Beweise für folgende Theoreme nachgeschlagen werden: T2.1(a), T2.1(c), T2.1(o), T3.1(a), T3.1(c), T3.1(g), T3.1(i), T3.13, T4.9(a), T15.1(a), T15.2, T15.7 – und andererseits um das Theorem T15.4.

Grob gesprochen, konnte Joseph Shoenfield zeigen, dass die Erweiterung einer Theorie um eine Explizitdefinition jeweils das Kriterium der Non-Kreativität und das Kriterium der Eliminierbarkeit erfüllt. Kleinknecht konnte beweisen, dass die Eliminierbarkeit einer Konstante ihre explizite Definierbarkeit impliziert. Auf Basis von Shoenfields Resultat zeigte er dann, dass die Eliminierbarkeit einer Konstante die non-kreative Erweiterbarkeit impliziert. Dieses Theorem wurde so interpretiert, dass das Kriterium der Eliminierbarkeit das Kriterium der Non-Kreativität impliziert. Nach allem, was wir wissen, scheint dies aber unmöglich zu sein. Wo liegt der Fehler? Wir wollen der Sache auf den Grund gehen und Kleinknechts Argument Schritt für Schritt nachvollziehen. So viel vorweg: Ein Beweisfehler ist wohl niemandem unterlaufen.

Wir beginnen die Rekonstruktion von Kleinknechts Argument in (Kleinknecht, 1981) mit seiner Definition eines fünfstelligen Non-Kreativität-Prädikats, deren Definiens dieselben Bedingungen ausdrückt wie das Definiens unserer Definition zu Beginn von Abschnitt 5. Durch Binden zweier Variablen entsteht ein neuer Non-Kreativitätsbegriff:

Definition 93. **Auf Basis von σ ist k non-kreativ in T einföhrbar** gdw für mindestens ein D , sowie für mindestens ein S gilt, dass die Theorieerweiterung von S zu T um die Formel D und die Konstante k non-kreativ relativ zu σ ist.

Non-Kreativität in diesem zweiten Sinn wird (modulo Referenz auf Signatur und Konstante) zu einer Eigenschaft von Theorien; und zwar von genau jenen Theorien, die auf non-kreative Weise (im ersten Sinn) aus einer anderen Theorie entstanden sind. Beachte: Auf diesem Weg wird der Non-Kreativitätsbegriff

gleichsam auf dieselbe Ebene gehoben wie der Eliminierbarkeitsbegriff – beide drücken nun eine „Eigenschaft“ von Theorien aus.

Ähnliches geschieht mit dem Begriff der Explizitdefinition:

Definition 94. D ist in T eine σ -Explizitdefinition der Prädikatkonstante P gdw

- (a) D ist eine σ -Explizitdefinition der Prädikatkonstante P
- (b) T ist eine $\sigma(+)$ P -Theorie
- (c) $D \in T$.

Definition 95. P ist in T eine explizit definierbare Prädikatkonstante auf Basis von σ gdw für mindestens ein D gilt: D ist in T eine σ -Explizitdefinition der Prädikatkonstante P .

Sodann kann folgendes Resultat gezeigt werden:

Theorem 20. Für jedes $P \in \mathcal{PK}$, jedes T , sowie für jedes σ gilt: Wenn P in T bezüglich σ eliminierbar ist, dann ist P in T eine explizit definierbare Prädikatkonstante auf Basis von σ .

Also Korollar ergibt sich mit Shoenfelds Resultat dann:

Korollar 22. Für jedes $P \in \mathcal{PK}$, T , sowie für jedes σ gilt: Wenn P in T bezüglich σ eliminierbar ist, dann ist auf Basis von σ P non-kreativ in T einführbar.

Morscher (2017, p.270) etwa können wir entnehmen, dass er dieses Theorem auf die gleiche Weise interpretiert wie Kleinknecht: Das Kriterium der Eliminierbarkeit impliziert das Kriterium der Non-Kreativität.

Aber wie kann dies sein, in Anbetracht der nachgewiesenen Zusammenhänge? Wir konnten uns doch davon überzeugen, dass eine Theorieerweiterung, deren Ergebnis eine eliminierbare Konstante enthält, keine relativ-konsistente und damit keine non-kreative sein muss.

Denken wir die Angelegenheit sorgfältig durch. Für unsere Frage sind vier Begriffe wesentlich: Eliminierbarkeit, non-Kreativität, Theorieerweiterung und Explizitdefinition. Unabhängig von ihrer präzisen Bestimmung, wie sollen die vier miteinander zusammenhängen?

Non-Kreativität im intendierten Sinn ist eine Eigenschaft von Theorieerweiterungen, eine non-kreative Theorieerweiterung somit ein Spezialfall von Theorieerweiterungen. Eliminierbarkeit im intendierten Sinn ist keine Eigenschaft

von Theorieerweiterungen; wenn sie vorliegt, besteht ein ganz bestimmtes Verhältnis zwischen Theorie, Konstante und Signatur. Eliminierbarkeit betrifft also das Ergebnis einer Theorieerweiterung oder deren Ausgangstheorie.

Die Eingliederung des Begriffs der Explizitdefinition in dieses Geflecht ist wesentlich schwieriger, was zum Teil damit zusammenhängt, dass er hochgradig mehrdeutig ist – selbst dann, wenn wir nicht länger von Bedeutungen sprechen, die in irgendeinem Sinn angegeben werden sollen. Auf der einen Seite sind Explizitdefinitionen in einem gewissen Sinn nichts anderes als gewisse sprachliche Ausdrücke und in einem formalen Rahmen damit auch rein syntaktisch charakterisierbar und durch Definition 81 inhaltlich angemessen expliziert. Aber sie sind nur in dem Sinn nichts anderes als gewisse sprachliche Ausdrücke, in dem auch ein zärtliches Streicheln in nichts anderem besteht als einer Bewegung der Gliedmaßen (van Fraassen, 2008, p.80). Für ein angemessenes Verständnis von Definitionen im Allgemeinen und Explizitdefinitionen im Speziellen scheint es erforderlich, ihre Rolle in bedeutungsklärenden Zusammenhängen zu berücksichtigen. Im Studium formaler definitionstheoretischer Fragen ist für eine inhaltlich angemessene Explikation des Begriffs der Explizitdefinition daher die Beziehung und die Eigenschaften von Theoriepaaren zu berücksichtigen, von dem die eine Theorie durch die Explizitdefinition zur anderen erweitert wird.

Im ersten, syntaktischen Sinn sind Explizitdefinitionen also Bestandteile der Ergebnisse von Theorieerweiterungen. Im zweiten, umfassenderen Sinn sind Explizitdefinitionen spezielle Erweiterungen von Theorien, nämlich Erweiterungen durch Explizitdefinitionen im ersten, syntaktischen Sinn. Tatsächlich beurteilen wir, ob die rein syntaktische Explikation des Begriffs der Explizitdefinition inhaltlich angemessen ist im Hinblick auf ihre theorieerweiternden Eigenschaften. Die inhaltliche Angemessenheit der theorieerweiternden Eigenschaften wiederum wird im Hinblick auf die beiden Kriterien Eliminierbarkeit und Non-Kreativität geprüft. Soll der Nachweis von Eliminierbarkeit und Non-Kreativität Gegenstand eines mathematischen Beweises sein, so müssen jene Kriterien ebenfalls präzisiert werden. Diese Präzisierungen unterliegen nun selbst wieder Adäquatheitsbedingungen. Im Fall des Kriteriums der Non-Kreativität besteht eine notwendige Adäquatheitsbedingung darin, dass alle Theorieerweiterungen, die gemäß dem präzisiertem Kriterium non-kreativ sind, auch relativ-konsistent sind.

Mit Definitionen 93 haben wir jedenfalls ein begriffliches Schlachtfeld betreten, auf dem die logischen Beziehungen neu ausgefochten werden. Allerdings kann es sein, dass wir, mit unseren definitionstheoretischen Interessen, diesen

Kampf gar nicht führen wollen – nämlich dann, wenn die neu bestimmten Begriffe durch die Präzisierung ihre definitionstheoretische Relevanz verloren haben. Das Kriterium der Non-Kreativität betrifft jedenfalls nun nicht länger Theorieerweiterungen, sondern lediglich deren Ergebnis. Ob die Adäquatheit des präzisierten Kriteriums nach dem „Wegbinden“ von zwei Variablen erhalten bleibt, liegt nicht auf der Hand, sondern gilt es zu prüfen.

In der Tat ist das genau unsere Kritik an der Interpretation von Kleinknechts Theorem: Es liefert den Beweis für einen Zusammenhang zwischen einem definitionstheoretisch relevanten Kriterium – der Eliminierbarkeit – und einem nur vordergründig definitionstheoretisch relevanten Kriterium – Non-Kreativität in auf seine Weise präzisiertem Sinn. Denn Non-Kreativität, wie sie durch Definition 93 inhaltlich bestimmt ist, stellt nicht sicher, dass die Erweiterung einer Theorie durch eine Formel zu einer Theorie, die der Non-Kreativitätsbedingung im Sinn von Definition 93 genügt, eine relativ-konsistente Erweiterung ist, wovon wir uns durch den Beweis für das folgende Theorem überzeugen können:

Theorem 21. *Für mindestens ein k , mindestens ein σ , mindestens ein S , sowie für mindestens ein T gilt: T ist Theorieerweiterung von S , auf Basis von σ ist P non-kreativ in T einführbar und T ist keine relativ-konsistente Theorieerweiterung von S .*

Beweis. Sei $P \in \mathcal{PK}$, $a \in \mathcal{GK}$, $\sigma = \langle \emptyset, \{a\}, \emptyset \rangle$ eine Signatur, $S = cn_\sigma(\{a \doteq a\})$ eine σ -Theorie und $T = cn_{\sigma(+)}P(\{S\} \cup \{Pa \wedge \neg Pa\})$ eine $\sigma(+)k$ -Theorie. Da σ eine Teilsignatur von $\sigma(+)k$ ist und $S \subseteq T$ gilt nach Definition: T ist eine Theorieerweiterung von S .

Da trivialerweise für jede σ -Interpretation $\mathcal{I}$ gilt, dass für jedes $A \in S$ gilt, dass $\models_{\mathcal{I}}^\sigma A$, gilt für jede σ -Interpretation $\mathcal{I}$: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma S$. Also gilt für mindestens eine σ -Interpretation $\mathcal{I}$: $\models_{\mathcal{I}}^\sigma S$. Also ist nach Theorem 12 S eine konsistente σ -Theorie.

Da $T \models_{\mathcal{I}}^{\sigma(+)} Pa$ und $T \models_{\mathcal{I}}^{\sigma(+)} \neg Pa$, gilt für mindestens eine $\sigma(+)P$ -Formel A : $T \models_{\mathcal{I}}^{\sigma(+)} A$ und $T \models_{\mathcal{I}}^{\sigma(+)} \neg A$. Also ist nach Definition T eine inkonsistente $\sigma(+)P$ -Theorie. Also ist nach Definition T keine relativ-konsistente Theorieerweiterung von S .

Sei $S' = cn_\sigma(\{-a \doteq a\})$ eine σ -Theorie. Sei $T = cn_{\sigma(+)}P(\{S\} \cup \{Pa \wedge \neg Pa\})$. Da trivialerweise $S \models_{\mathcal{I}}^\sigma a \doteq a$ und $S \models_{\mathcal{I}}^\sigma \neg a \doteq a$, gilt für mindestens eine σ -Formel A : $S \models_{\mathcal{I}}^\sigma A$ und $S \models_{\mathcal{I}}^\sigma \neg A$. Also ist nach Definition S eine inkonsistente σ -Theorie. Also gilt nach Theorem 11 für jede σ -Formel A : $S \models_{\mathcal{I}}^\sigma A$. Dann gilt: jede σ -Formel A : wenn $T \models_{\mathcal{I}}^{\sigma(+)} A$, dann $S \models_{\mathcal{I}}^\sigma A$. Dann gilt nach Definition:

die Theorieerweiterung von S zu T um die Formel $Pa \wedge \neg Pa$ und die Konstante P ist non-kreativ relativ zu σ . Also gilt für mindestens ein D , sowie für mindestens ein S : die Theorieerweiterung von S zu T um die Formel D und die Konstante P ist non-kreativ relativ zu σ . Also gilt nach Definition: auf Basis von σ ist P non-kreativ in T einführbar. $\square$

Wir sehen also, dass die Erweiterung einer Theorie eine nicht relativ-konsistente sein kann, obwohl das Ergebnis ihrer Erweiterung dem Kriterium der Non-Kreativität genügt, wie es durch Definition 93 bestimmt ist. Deshalb ist die Präzisierung des Kriteriums durch Definition 93 inadäquat.

Wie wir also sehen, hat Kleinknecht zwar bewiesen, dass Eliminierbarkeit explizite Definierbarkeit impliziert (im Sinne von Definition 95 also, dass eine Explizitdefinition für eine Konstante aus einer Theorie folgt, in der diese Konstante eliminierbar ist), aber nicht, dass eine $\sigma(+)$ -Formel D , die eine gegebene σ -Theorie S zu T erweitert, vor dem Hintergrund von S äquivalent ist zu einer σ -Explizitdefinition D_{ex} für die Konstante k (kurz: $S \models^{\sigma(+)} D \leftrightarrow D_{ex}$), auch wenn k in T bezüglich σ eliminierbar ist.

5.5 Die Konverse zum Satz von Shoenfield

Eingeschränkt auf geschlossene Formeln lässt sich die Konverse zu Shoenfields Theorem allerdings dennoch zeigen:

Theorem 22. *Für jedes T , jedes S , jede Signatur σ , jede geschlossene σ -Formel D , sowie jedes $k \in \mathcal{PK}$ gilt: Wenn (i) D bezüglich k in T non-kreativ auf Basis von S und σ ist und (ii) k in T bezüglich σ eliminierbar ist, dann gibt es eine $\sigma(+)$ -Formel D_{ex} , sodass (i) D_{ex} ist eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante k und (ii) $S \models^{\sigma(+)} D \leftrightarrow D_{ex}$.*

Beweis. Seien σ eine Signatur, D eine geschlossene σ -Formel, $k \in \mathcal{PK}$. Angenommen, D ist bezüglich k in T auf Basis von S und σ non-kreativ und k ist in T bezüglich σ eliminierbar.

ad (i): Sei v eine k -gliedrige injektive Folge von 1-gliedrigen Folgen von $\mathcal{V}$. Dann ist nach Definition $\{\langle 1, k \rangle\} \bowtie v$ eine $\sigma(+)$ -Formel. Da k in T bezüglich σ eliminierbar ist, gilt für mindestens eine σ -Formel B : $T \models^{\sigma(+)} \{\langle 1, k \rangle\} \bowtie v \leftrightarrow B$. Sei B von dieser Art. Sei weiters K eine Konjunktion der atomaren Identitätsformeln für die Variablen v .

$$\text{Sei}^{40} \text{ nun } E = \begin{cases} \langle cl_{\forall}(w)B \wedge K \rangle & , \text{ falls } fr(B) \not\subseteq img(v) \\ & \text{und } w \text{ diejenige endliche bijektive Folge} \\ & \text{von } fr(B) \setminus img(v) \text{ ist, sodass f\"ur} \\ & \text{jedes } i \in dom(w), \text{ sowie f\"ur jedes} \\ & j \in dom(w) \text{ gilt:} \\ & w(i) \leq w(j) \text{ gdw } i \leq j. \\ \langle B \wedge K \rangle & , \text{ falls } fr(B) \subseteq img(v) \end{cases}.$$

Sei $D_{ex} = cl_{\forall}(v) \langle kv_1, \dots, v_k \leftrightarrow E \rangle$.

Fall (i.i): Angenommen, $fr(B) \subseteq img(v)$. Dann gilt nach Korollar 15, dass E eine σ -Formel ist. Trivialerweise gilt f\"ur jedes $x \in \mathcal{V}$, dass x dann und nur dann in E frei vorkommt, wenn $x \in img(v)$. Dann gilt nach Definition: D_{ex} ist eine σ -Explizitdefinition f\"ur die Pr\"adikatkonstante k .

Fall (i.ii): Angenommen, $fr(B) \not\subseteq img(v)$ und w ist eine endliche Folge von $fr(B) \setminus img(v)$, sodass f\"ur jedes $i \in dom(w)$, sowie f\"ur jedes $j \in dom(w)$ gilt: $w(i) \leq w(j)$ gdw $i \leq j$. Dann gilt nach Lemma 33 und Korollar 15, dass E eine σ -Formel ist. Trivialerweise gilt f\"ur jedes $x \in \mathcal{V}$, dass x dann und nur dann in E frei vorkommt, wenn $x \in img(v)$. Dann gilt nach Definition: D_{ex} ist eine σ -Explizitdefinition f\"ur die Pr\"adikatkonstante k .

Also gilt in jedem Fall: D_{ex} ist eine σ -Explizitdefinition f\"ur die Pr\"adikatkonstante k .

ad (ii) Zu zeigen: $S \models^{\sigma(+)^k} (D \leftrightarrow D_{ex})$. Aufgrund von Lemma 23, dem Deduktionstheorem und dem Resolutionstheorem gilt: $S \models^{\sigma(+)^k} (D \leftrightarrow D_{ex})$ gdw $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)^k} D_{ex}$ und $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} D$. Also gen\"ugt es, zu zeigen, dass: (I): $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)^k} D_{ex}$, und (II): $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} D$.

ad (I)

Fall (I.i): Angenommen, $fr(B) \subseteq img(v)$. Dann gilt wegen Lemma 35 und Lemma 20: $T \models^{\sigma(+)^k} kv_1, \dots, v_k \leftrightarrow \langle B \wedge K \rangle$. Da T eine Menge geschlossener $\sigma(+)^k$ -Formeln ist, gilt aufgrund des Generalisierungstheorems: $T \models^{\sigma(+)^k} cl_{\forall}(v) \langle kv_1, \dots, v_k \leftrightarrow \langle B \wedge K \rangle \rangle$. Also gilt: $T \models^{\sigma(+)^k} D_{ex}$.

Fall (I.ii): Angenommen, $fr(B) \not\subseteq img(v)$. Dann gilt wegen Lemma 35 und Lemma 20: $T \models^{\sigma(+)^k} kv_1, \dots, v_k \leftrightarrow \langle B \wedge K \rangle$. Da T eine Menge geschlossener $\sigma(+)^k$ -Formeln ist, gilt aufgrund des Generalisierungstheorems: $T \models^{\sigma(+)^k} cl_{\forall}(w) \langle kv_1, \dots, v_k \leftrightarrow \langle B \wedge K \rangle \rangle$. Da f\"ur jedes $i \in dom(w)$ gilt, dass $w(i) \notin$

⁴⁰Die Idee f\"ur die Konstruktion dieser Formel ist dem Beweis in (Kleinknecht, 1981, p.228) entnommen.

$fr(\{ \langle 1, k \rangle \} \uparrow \hat{v})$, gilt wegen Lemma 30: $T \models^{\sigma(+)^k} \langle kv_1, \dots, v_k \leftrightarrow cl_V(w)(B \wedge K) \rangle$. Da T eine Menge geschlossener $\sigma(+)^k$ -Formeln ist, gilt abermals aufgrund des Generalisierungstheorems: $T \models^{\sigma(+)^k} cl_V(v) \langle kv_1, \dots, v_k \leftrightarrow \langle cl_V(w)B \wedge K \rangle \rangle$. Also gilt: $T \models^{\sigma(+)^k} D_{ex}$.

Also gilt in beiden Fällen: $T \models^{\sigma(+)^k} D_{ex}$. Da nach Definition $T = cn_{\sigma(+)^k}(S \cup \{D\})$, gilt nach Lemma 22: $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)^k} D_{ex}$.

ad (II)

Indirekte Annahme: Für mindestens ein $A \in spr_{\sigma(+)^k}$ gilt: $S \cup \{D\} \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A$ und $S \cup \{D_{ex}\} \not\models^{\sigma(+)^k} A$. Sei A von dieser Art.

Fall (II.i)⁴¹: Angenommen, $A \in spr_{\sigma}$. Dann gilt aufgrund der Monotonie der Folgerungsrelation: $S \not\models^{\sigma(+)^k} A$. Also gilt wegen Lemma 42: $S \not\models^{\sigma} A$. Da D bezüglich k in T non-kreativ auf Basis von S und σ ist, gilt auch: $T \not\models^{\sigma(+)^k} A$. Also gilt wegen Lemma 22: $S \cup \{D\} \not\models^{\sigma(+)^k} A$. Da $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)^k} D_{ex}$, gilt wegen Lemma 31: $S \cup \{D\} \cup \{D_{ex}\} \not\models^{\sigma(+)^k} A$. Widerspruch zur Annahme. Also gilt für jedes $A \in spr_{\sigma(+)^k}$: Wenn $S \cup \{D\} \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A$, dann $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)^k} A$. Also wegen Lemma 25: $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} D$.

Fall (II.ii): Angenommen, $A \in spr_{\sigma(+)^k} \setminus spr_{\sigma}$. Da D_{ex} eine explizite Prädikatkonstanten-Definition von k in $cn_{\sigma(+)^k}(S \cup \{D_{ex}\})$ auf Basis von S und σ ist, gilt, dass k in $cn_{\sigma(+)^k}(S \cup \{D_{ex}\})$ bezüglich σ eliminierbar ist. Also gilt für mindestens ein $A' \in spr_{\sigma}$: $cn_{\sigma(+)^k}(S \cup \{D_{ex}\}) \models^{\sigma(+)^k} A \leftrightarrow A'$. Sei A' von dieser Art. Da nach Korollar 19 D_{ex} eine geschlossene $\sigma(+)^k$ -Formel ist, und S eine σ -Theorie, gilt wegen Lemma 22: $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A \leftrightarrow A'$. Außerdem gilt aufgrund der Monotonie der Folgerungsrelation: $S \cup \{D_{ex}\} \cup \{D\} \models^{\sigma(+)^k} A \leftrightarrow A'$. Da $S \cup \{D\} \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A$, gilt wegen Lemma 19: $S \cup \{D\} \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A'$. Da $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)^k} D_{ex}$, gilt wegen Lemma 31: $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)^k} A'$. Da D eine geschlossene $\sigma(+)^k$ -Formel ist, und S eine σ -Theorie, gilt wegen Lemma 22: $cn_{\sigma(+)^k}(S \cup \{D\}) \models^{\sigma(+)^k} A'$. Da $A' \in spr_{\sigma}$ und da D bezüglich k in $cn_{\sigma(+)^k}(S \cup \{D\})$ non-kreativ auf Basis von S und σ ist, gilt: $S \models^{\sigma} A'$. Aufgrund von Lemma 42 gilt dann: $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A'$. Da $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A \leftrightarrow A'$ gilt wegen Lemma 19: $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A$. Widerspruch zur Annahme. Also gilt für jedes $A \in spr_{\sigma(+)^k}$: Wenn $S \cup \{D\} \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A$, dann $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} A$. Also wegen Lemma 25: $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)^k} D$.

Also: $S \models^{\sigma(+)^k} D \leftrightarrow D_{ex}$. Also gilt für mindestens eine $\sigma(+)^k$ -Formel D_{ex} , dass (i) D_{ex} ist eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante k und (ii) $S \models^{\sigma(+)^k} D \leftrightarrow D_{ex}$. $\square$

⁴¹Diese Fallunterscheidung ist offenkundig redundant. Sie wurde aus ästhetischen Gründen nicht getilgt.

Theorem 23. Für jedes T , jedes S , jedes σ , jede geschlossene σ -Formel D , sowie jedes $k \in \mathcal{PK}$ gilt: Wenn (i) D bezüglich k in T non-kreativ auf Basis von S und σ ist und (ii) k in T bezüglich σ eliminierbar ist, dann gibt es mindestens eine $\sigma(+)$ - k -Formel D_{ex} , sodass D_{ex} eine explizite Prädikatkonstanten-Definition von k in T auf Basis von S und σ ist.

Beweis. Seien σ eine Signatur, D eine geschlossene σ -Formel, $k \in \mathcal{PK}$. Angenommen, D ist bezüglich k in T auf Basis von S und σ non-kreativ und k ist in T bezüglich σ eliminierbar. Nach Theorem 22 gilt für mindestens eine $\sigma(+)$ - k -Formel D_{ex} , dass (i) D_{ex} ist eine σ -Explizitdefinition für die Prädikatkonstante k und (ii) $S \models^{\sigma(+)} D \leftrightarrow D_{ex}$. Sei D_{ex} von dieser Art. Nach Definition gilt: $T = cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D\})$. Sei $A \in cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D\})$. Dann gilt, dass A eine geschlossene $\sigma(+)$ - k -Formel ist und $cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D\}) \models^{\sigma(+)} A$. Nach Lemma 22 gilt: $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)} A$. Sei $\mathfrak{I}$ eine $\sigma(+)$ - k -Interpretation, sodass $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma(+)} S \cup \{D_{ex}\}$. Aufgrund von Lemma 23, dem Deduktionstheorem und dem Resolutionstheorem gilt: $S \models^{\sigma(+)} (D \leftrightarrow D_{ex})$ gdw $S \cup \{D\} \models^{\sigma(+)} D_{ex}$ und $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)} D$. Also: $S \cup \{D_{ex}\} \models^{\sigma(+)} D$. Also: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma(+)} D$. Also: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma(+)} S \cup \{D\}$. Also: $\models_{\mathfrak{I}}^{\sigma(+)} A$. Also: $A \in cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D_{ex}\})$. Also: $cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D\}) \subseteq cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D_{ex}\})$. Auf vollkommen analoge Weise kann gezeigt werden, dass $cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D_{ex}\}) \subseteq cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D\})$. Also: $T = cn_{\sigma(+)}(S \cup \{D_{ex}\})$. Also ist nach Definition D_{ex} eine explizite Prädikatkonstanten-Definition von k in T auf Basis von S und σ □

6 Coda

Die zentrale Frage der vorliegenden Arbeit war, ob jede Definition eine Explizitdefinition ist. Diese Frage wurde in eine formale Frage überführt: Ist die Erweiterung einer formalen Theorie durch eine Definition identisch mit ihrer Erweiterung durch eine entsprechende Explizitdefinition. Shoenfield (1967) lieferte einen ersten Teil der Antwort. Es wurde geprüft, ob Kleinknechts Arbeiten (1979 & 1987) zu den logischen Beziehungen zwischen den beiden Definitionskriterien die Antwort vervollständigen. Zu diesem Zweck wurde ein formaler Rahmen eingerichtet, in dem Schritt für Schritt nachgewiesen wurde, dass sie es nicht tun, weil Kleinknechts Resultate auf einem definitionstheoretisch inadäquaten Begriff von Non-Kreativität beruhen.

Der zweite Beitrag der Arbeit zur Beantwortung der zentralen Frage besteht in einem Beweis für die Behauptung, dass jede geschlossene Formel D , die eine Ausgangstheorie um eine Konstante non-kreativ erweitert und diese Konstante eliminierbar setzt, vor dem Hintergrund der Ausgangstheorie äquivalent ist zu einer Explizitdefinition der Konstante. Damit ist die Erweiterung einer formalen Theorie um eine Definition als geschlossene Formel identisch mit der Erweiterung durch eine entsprechende Explizitdefinition.

An entscheidenden Stellen dieses Beweises wurde von der Voraussetzung Gebrauch gemacht, dass D eine geschlossene Formel ist und ein Relatum der Folgerungsrelation $\models$ auch eine offene Formel sein kann. Es gilt, sich dieser Voraussetzungen zu entledigen und das Theorem zu verallgemeinern.

Literatur

- [1] Barrett, T. W. & Halvorson, H., (2016) „Morita equivalence.“ *The Review of Symbolic Logic* 9 (3), 556–582.
- [2] Beth, E. (1953) „On Padoa’s Method in the Theory of Definitions“, *Indag. Math.* 15, 330-339.
- [3] Chalmers, D. (1996) *The Conscious Mind*. New York, Oxford: Oxford University Press.
- [4] Enderton, H. (1977) *Elements of Set Theory*. New York: Academic Press.
- [5] Halvorson, H. (2019) *The Logic in Philosophy of Science*. Cambridge, New York, NY: Cambridge University Press.
- [6] Hodges, W. (1993) *Model Theory*. Cambridge University Press.
- [7] Hudetz, L. (2018) *The Logic of Scientific Theories*. PhD dissertation. Universität Salzburg.
- [8] Hudetz, L. (2019). “Definable Categorical Equivalence”. *Philosophy of Science* 86(1), 47-75.
- [9] James, W. (1922) *Essays in Radical Empiricism*. New York: Longmans, Green and Co.
- [10] Kleinknecht, R. & Wüst, E. (1976a) *Lehrbuch der elementaren Logik. Band 1: Aussagenlogik* München: Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH.
- [11] Kleinknecht, R. & Wüst, E. (1976b) *Lehrbuch der elementaren Logik. Band 2: Prädikatenlogik* München: Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH.
- [12] Kleinknecht, R. (1979) *Grundlagen der modernen Definitionstheorie*. Königstein/Ts: Scriptor-Verlag.
- [13] Kleinknecht, R. (1981) “Eliminability, Non-Creativity and Explicit Definability”, *Logique et Analyse* 94, 223-229.
- [14] Kuratowski, C. (1921) “Sur la notion de l’ordre dans la théorie des ensembles”, *Fundamenta Mathematicae* 2, 161–171.
- [15] Morscher, E. (2017) *Die wissenschaftliche Definition*. Wien: LIT Verlag.

- [16] Putnam, H. (2005) *Ethics Without Ontology*. Cambridge: Harvard University Press.
- [17] Regan, T. (2004) *The Case for Animal Rights*. (2. Auflage) Berkeley, Los Angeles: University of California Press.
- [18] Robinson, R. (1954) *Definition*. Oxford University Press.
- [19] Sartre, J. (2007) *Existentialism Is a Humanism*. New Haven: Yale University Press.
- [20] Shoenfield, J.R. (1967) *Mathematical Logic*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [21] Simons, P. (1991) „On Being Spread Out in Time“ In: Spohn, W., van Fraassen, B. & Skyrms, B. (Hrs.) *Existence and Explanation*. Dordrecht: Kluwer.
- [22] Simons, P. (1994) „Particulars in Particular Clothing: Three Trope Theories of Substance“ *Philosophy and Phenomenological Research* 54(3), 553-575
- [23] Suppes, P. (1957) *Introduction to Logic*. Princeton: Van Nostrand Company.
- [24] Tarski, A. (1953) „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen“, *Studia Philosophica* 1, 261–405. Translation by L. Blaustein, with a postscript added.
- [25] Tolstoy, L. (1987) *A Confession and Other Religious Writings*. London: Penguin Books Ltd.
- [26] van Fraassen, B. (1977) „The Only Necessity Is Verbal Necessity“, *Journal of Philosophy* 74, 71-85.
- [27] van Fraassen, B. (1998) „The Peculiar Effects of Love and Desire“ In: Rorty, A. & McLaughlin, B. *Perspectives on Self-Deception*. Berkeley: University of California Press, 123-156
- [28] van Fraassen, B. (2002) *The Empirical Stance*. New Haven: Yale University Press.
- [29] van Fraassen, B. (2008) „Sloughs Of Despond, Mountains Of Joy“ *Critical Quarterly* 50(4), 74-87.

- [30] van Fraassen, B. (2010) “Logic and the Philosophy of Science”, *Journal of the Indian Council of Philosophical Research* 27 (2), 45-65.
- [31] von Savigny, E. (1976) *Grundkurs zum wissenschaftlichen Definieren: Übungen zum Selbststudium*. (4. Auflage) München: Dt. Taschenbuch-Verlag.
- [32] Zimmermann, A. (2009) „Ein Vergleich dreier aussagenlogischer Semantiken“, *Kriterion—Journal of Philosophy* 22, 44–61.