



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Was haben Aktienkurse und Moleküle gemeinsam und was sagt dies über den Gewinn einer Firma aus? “

Ökonomische Allgemeinbildung mithilfe der Analysis und Stochastik

verfasst von / submitted by

Michael Beck

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium
UF Mathematik
UF Geschichte, Sozialkunde und politische Bildung

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen Menschen voller Freude einen großen Dank aussprechen, welche mich im Laufe meines Studiums unterstützt haben und einen großen Anteil daran haben, dieses auch endlich zu einem Abschluss zu bringen.

Zu allererst möchte ich meiner Familie danken, welche mich nicht nur bei der Wahl dieses Studiums und der folgenden Berufswahl unterstützte, sondern auch in den Jahren davor sorgten, dass ich mich der Herausforderung einer Universitätslaufbahn stellen konnte. Insbesondere möchte ich an dieser Stelle meinem Vater danken, welcher mir nicht nur beim Korrekturlesen eine große Unterstützung bot, sondern auch stets für Hilfestellungen aus dem Bereich der Lesbarkeit und aus dem fachlichen Umfeld zu Verfügung stand.

Meiner Freundin Bettina Bruckner, BEd gilt an dieser Stelle ein außergewöhnlicher Dank auszusprechen, da sie während der intensiven Schreibphase nicht nur eine mentale Stütze bot, sondern mich auch täglich darin unterstützte, das Kapitel des Studiums mit Erfolg zu beenden und meinen Willen dieses Ziel zu erreichen stets bestärkte.

Weiters gilt es all meinen Studienkolleginnen- und Kollegen einen Dank zu übermitteln, da wir so manch schwere Arbeitsphase gemeinsam durchstanden und trotzdem auch die Zeit des Studiums zu einer wundervollen Zeit werden ließen.

Insbesondere danke ich an dieser Stelle meinem langjährigen Wegbegleiter und Freund Mag. Thomas Hell, welcher nicht nur seit der ersten Woche meines Studiums ein treuer Wegbegleiter war, sondern auch stets auf gegenseitige Unterstützung zählen konnte, welche uns zu Leistungshochs brachte und durch so manche Leistungstiefs helfen konnte.

Außerdem gilt es auch einen Dank auszusprechen an all jene Personen, welche mich tagtäglich während meiner Studienzeit begleiteten, wie die Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter der Fachbereichsbibliothek Mathematik. Ein

Dank gilt aber auch all jenen Kolleginnen und Kollegen, welche mich während meiner ersten Dienstjahre unterstützten und begleiteten und diese Zeit zu einer der lehrreichsten meines ganzen bisherigen Lebens werden ließen.

Schlussendlich ein großer Dank an ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Peter Raith, welcher mir nicht nur trotz der schwierigen Umstände hilfreicher Betreuer meiner Diplomarbeit war, sondern während meines gesamten Studiums ein hilfsbereiter Lehrer war und sich für uns Studentinnen und Studenten stets Zeit genommen hat, sei es für mündliche Prüfungen spätabends oder für Anregungen und Hilfestellungen zu allerlei fachwissenschaftlichen Fragestellungen.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und in der Bearbeitung und Abfassung keine anderen als die angegebenen Quellen oder Hilfsmittel benutzt, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet habe. Die vorliegende Diplomarbeit wurde noch nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt.

Ort, Datum

Unterschrift

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
1 Ökonomische Funktionen mit einer Variablen	5
1.1 Märkte	5
1.2 Preisbildung durch Modelle	7
1.3 Erlös, Kosten und Gewinn aus Sicht der Verkäufer	11
1.3.1 Preis-Absatzfunktion	11
1.3.2 Erlösfunktion	14
1.3.3 Kostenfunktion	15
1.3.4 Gewinnfunktion	18
2 Anwendungen der Differentialrechnung für ökonomische Funktionen mit einer Variablen	22
2.1 Umsetzung der Differentialrechnung mit ökonomischen Funktionen	22
2.1.1 Interpretation der ersten Ableitung	22
2.1.2 Grenzfunktion	25
2.2 Gewinnmaximierung	27
2.2.1 Gewinnmaximierung im Monopol	28
2.2.2 Gewinnmaximierung im Polypol	31
2.2.3 Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz	33
2.3 Betriebsminimum- und Optimum	34
2.4 Bogen- und Punktelastizität für ökonomische Funktionen	38
2.4.1 Elastizität bei Erlösfunktionen	40
2.4.2 Elastizität bei Kostenfunktionen	42
3 Aktienkurse und Aktienkursanalyse	49
3.1 Aktienhandel und Renditen	49
3.1.1 Grundbegriffe	49
3.1.2 Preise von Aktien und der Aktienindex	52
3.2 Statistik und Aktien	56
3.3 Aktienkurse und Binomialverteilung – Random Walk Modell	64
3.4 Aktienkurse und Normalverteilung – Black-Scholes Modell	69

3.4.1 Grundlagen Normalverteilung.....	69
3.4.2 Normalverteilte Aktienkurse.....	72
3.4.3 Brownsche Bewegung und Wiener Prozess.....	73
3.4.4 Black-Scholes - Modell für Aktienkursprozesse	75
3.4.5 Simulation eines Aktienkursprozesses	80
4 Ökonomische Funktionen und Aktienkursanalyse im	
Mathematikunterricht.....	86
4.1 Didaktik der Analysis.....	86
4.1.1 Historischer Überblick und Folgen für den Mathematikunterricht.....	86
4.1.2 Mathematik und ökonomische Allgemeinbildung	93
4.2 Didaktik der Stochastik.....	94
4.2.1 Stochastisches Denken und Ziele des Stochastikunterrichts	95
4.2.2 Aktienkursanalyse im Stochastikunterricht	97
Zusammenfassung	101
Abstract.....	103
Literaturverzeichnis	105
Abbildungsverzeichnis.....	109
Tabellenverzeichnis	109

Einleitung

Anhand der folgenden Arbeit soll dem Wunsch einer ökonomischen Allgemeinbildung im Zuge des Mathematikunterrichtes nachgekommen werden, indem Themenfelder präsentiert werden, welche sowohl eine mathematische Grundbildung als auch praxisnahe Anwendungen bieten. Sämtliche in dieser Arbeit erarbeiteten fachwissenschaftlichen Inhalte können mit einer entsprechenden didaktischen Aufbereitung für den Mathematikunterricht verwendet werden. Daher richtet sich jene Arbeit nicht nur an Kolleginnen und Kollegen, sondern auch an interessierte Leserinnen und Leser, welche sich dem Versuch stellen möchte, sich selbstständig mit diesen Inhalten auseinanderzusetzen.

Im Zuge meiner zweijährigen Dienst Erfahrung als Lehrer der Unterrichtsfächer Angewandte Mathematik und Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung konnte ich bereits die Erfahrung machen, dass sich Schülerinnen und Schüler oftmals zweierlei Gefühlen konfrontiert sehen: „Wozu lerne ich das überhaupt“ und „Mathematik war immer schon mein Angstfach“. Hinsichtlich der Wahrnehmung von Mathematik als Angstfach ist es mir persönlich ein großes Anliegen, vor allem hinsichtlich der Tatsache bereits 3 Maturaklassen erfolgreich begleitet zu haben, dass sich die Mühe, Mathematik als lebendige und lebensnahe Wissenschaft zu vermitteln, stets rentiert und mit dem entsprechenden Unterrichtsideen und punktuellen Schwerpunkten, Mathematik erlebt werden kann und nicht immer gefürchtet werden muss. Bezogen auf die Frage „Wozu lerne ich das überhaupt“ kann ich festhalten, dass diese Frage einer der Hauptantriebe war, sich mit den Inhalten dieser Arbeit tiefergehend zu beschäftigen. Ich selbst erlebte meinen Mathematikunterricht oftmals als jenen, der in den 1960er vorherrschend war – Mathematik als Rechenkunst. Im Laufe meines Studiums wurde mir aber immer mehr bewusst, dass die Welt der Mathematik kaum etwas NICHT zu bieten hat und es einem mit den entsprechenden Fähigkeiten und Bemühungen möglich ist, in fast allen Bereichen des Lebens mathematische Anwendungen nutzen zu können. Daher stellte ich mir die Frage, welche Inhalte des Mathematikunterrichtes einer

höheren berufsbildenden Schule kann ich auf eine Art und Weise gestalten, welche sowohl den Ansprüchen einer fachwissenschaftlichen Arbeit genügen als auch den Wunsch einer potentiellen Umsetzung im Mathematikunterricht erfüllen können. Im Zuge dieser Überlegungen konnte ich meine seit jeher existierenden Interessengebieten der Wirtschafts- und Finanzmathematik erneut für mich entdecken und für den fachwissenschaftlichen Teil dieser Arbeit nutzen. In diesem Sinne stellt die folgende Ausarbeitung von Inhalten aus den fachwissenschaftlichen Bereichen der Analysis und Stochastik kein Widerspruch dar, sondern vielmehr ein Beweis dafür, dass Situationen aus der Realität keine linear verlaufende Lösungen bieten, sondern vernetztes Denken und verknüpfende mathematische Fähigkeiten verlangt.

Im ersten Teil dieser Arbeit widme ich mich ökonomischen Funktionen mit einer Variablen. Dieses bereits vielen Schülerinnen und Schülern sowie Absolventinnen und Absolventen bekannte Thema wird mit einer Darbietung diverser Grundbegriffe eröffnet, durch welche geklärt werden soll, was überhaupt ein Markt ist und was Angebot und Nachfrage mit dem Preis eines Produktes zu tun haben und was dies für den Gewinn eines Produzenten bedeutet.

Damit verbunden wird im zweiten Teil dieser Arbeit der Schwerpunkt auf die Verknüpfung der Infinitesimalrechnung mit der Kosten-Preistheorie gelegt. Insbesondere wird der Frage nachgegangen, wie die erste Ableitung einer Funktion, deren Grenzfunktion, für ökonomische Anwendungen genutzt werden kann. Dieser Aspekt wird im letzten Teil dieser Arbeit besonders herausgearbeitet.

Im dritten Teil dieser Arbeit erläutere ich jene Grundbegriffe, die für eine nähere Beschäftigung mit Aktien vonnöten sind, um in der Folge vor allem der Frage nachzugehen, mit welchen mathematischen Modellen Aktienkurse analysiert, prognostiziert und simuliert werden können.

Nach diesen fachwissenschaftlichen Ausarbeitungen bündle ich all diese Inhalte in einem didaktischen Input, welcher vor allem die Rolle von fundamentalen

Ideen und Grundvorstellungen im Mathematikunterricht darbietet. Aus diesen initiiere ich den Versuch, ein diesen didaktischen Grundsätzen gerechtes Konzept zu gestalten, auf welche Art und Weise, eine Grundvorstellung „Ableitung“ mit der Kosten-Preis-Theorie verbunden werden kann. In weiterer Folge biete ich die fachwissenschaftlichen Ausführungen über die Analyse und Prognose von Aktienkursen in einen anwendungsbezogenen und praxisnahen Unterricht ein, welcher auf dem Spiralmodell nach Bruner hinsichtlich der Wahrscheinlichkeitsrechnung basiert.

Während dieser gesamten Arbeit bin ich bemüht, allen Ansprüchen einer formalistischen fachwissenschaftlich ganzheitlichen Ausführung über ökonomische Funktionen und der Analyse von Aktienkursen gerecht zu werden, wobei im Sinne einer didaktischen Reduktion auf wesentliche Inhalte besonders Rücksicht genommen wurde und im Sinne eines logisch-inhaltlichen Stufenaufbaues eine Weiterverwendung aller Inhalte anvisiert wurde sowie dem mathematischen Anspruch der Beweisnotwendigkeit Rechnung getragen wurde.

Zusätzlich war es mir ein Anliegen in allen mir möglichen Bereichen eine anschauliche Darstellung der erarbeiteten Inhalte zu erzielen, indem besonderer Wert auf Abbildungen und Graphiken gelegt wurde, welche einer ergänzenden Verbalisierung der Konkretisierung dienen.

1. Ökonomische Funktionen mit einer Variablen

In diesem Kapitel werden die sowohl in der Wirtschaftsmathematik als auch in der Schule als essentiell zu betrachtenden mathematischen und ökonomischen Grundlagen behandelt. Die Wirtschaftsmathematik als Fachrichtung verlangt zum einen elementare Kenntnisse der Ökonomie als auch der Analysis, welche in ihren Grundsätzen als vorausgesetzt betrachtet werden. Hinsichtlich der Vorkenntnisse in Bezug auf ökonomisches Grundwissen, werden im Laufe dieses Kapitels Grundbegriffe erläutert und mit ihren Bedeutungen hinsichtlich ihrer mathematischen Grundlagen verschränkt.

1.1. Märkte

Vereinfacht dargestellt ist unter einem Markt eine Situation zu verstehen, in welchem eine Nachfrage auf ein Angebot trifft. Ob es sich hierbei um reale Personen handelt oder um Dynamiken sei nicht weiter zu vertiefen, da es in der Folge unausweichlich ist, für die Verwendung von Funktionen mit einer Variablen Vereinfachungen des komplexen Sachverhaltes eines Marktes zu vollziehen. Entscheidend ist, dass der Anbieter (Verkäufer) mit Gütern handelt, welche zu bestimmten Preisen von der nachfragende Partei (Käufer) erworben werden kann. Aufgrund der Vielfalt an Märkten, man denke zum Beispiel an den Immobilien-oder Aktienmarkt, ist es notwendig, die Preisbildung auf diesen näher zu analysieren. Wie zuvor erwähnt ist es notwendig, Vereinfachungen vorzunehmen, welche sich schon in der Zusammensetzung eines fiktiven Marktes ergeben, indem man von einem vollkommenen Markt ausgeht. ¹Lachmann fasste die folgenden Kriterien für einen solchen vollkommenen Markt wie folgt zusammen²:

- Die zu verkaufenden Güter sind homogen. Damit wird vorausgesetzt, dass sie sich nicht in sachlichen, räumlichen oder persönlichen Aspekten unterscheiden. Kurz zusammengefasst: Die zum Verkauf stehenden Güter sind als gleichwertig zu betrachten.

¹ vgl. [13], 31.

² vgl. [22], 58.

- Das zu kaufende Produkt wird auf dem gesamten Markt zum gleichen Preis angeboten
- Alle Marktteilnehmer verfügen über eine vollständige Markttransparenz. Darunter ist zu verstehen, dass sämtliche Informationen den Preis, das Produkt als auch die Teilnehmer betreffend offengelegt und bekannt sind
- Der freie Markteintritt als auch Marktaustritt ist gewährleistet.
- Bei der Abwicklung eines Kaufes bzw. Verkaufes entstehen bis auf die Produktionskosten und dem Verkaufspreis keine weiteren Ausgaben oder Einnahmen für die Marktteilnehmer.

Schon auf den ersten Blick ist ersichtlich, dass ein solcher vollkommener Markt in einer Marktwirtschaft, welche allen Überlegungen zu Grunde gelegt wird, in der Realität nicht existiert. Allerdings dient ein solcher vollkommener Markt als geeignetes Konstrukt, um komplexe Sachverhalte vereinfacht darzustellen und in der Folge als Grundlage für Analysen zu nutzen.

Im nächsten Schritt geht es um eine nähere Differenzierung eines Marktes hinsichtlich der Anzahl der Teilnehmer an diesem. Grundsätzlich wird zwischen drei Grundformen unterschieden: Monopol, Oligopol und Polypol. Diese Unterscheidung richtet sich nach der Anzahl an Anbietern und Nachfragern³:

- Monopol: Ein Anbieter steht vielen Nachfragern gegenüber. Sollte dies in einem vollkommenen Markt der Fall sein, spricht man von einem reinen Monopol.
- Oligopol: Treffen viele Nachfrager auf wenige Anbieter, so spricht man von einem Oligopol. Als Beispiele sind hier der Mineralölmarkt oder der Spielkonsolenmarkt zu nennen.

³ vgl. [13], 32f.

- Polypol: Diese Grundform wird auch als vollständige Konkurrenz bezeichnet. Darunter kann verstanden werden, dass sich (unendlich) viele Nachfrager ebenso viele Anbieter gegenüberstehen.

Das reine Monopol als auch das Polypol sind als reine theoretische Modelle zu verstehen. Trotz der Konzentration auf vollkommene Märkte ist der Fall eines polypolistischen Anbieter in einer unvollkommenen Marktsituation eine durchaus in der Realität zu findender Fall, wie zum Beispiel bei Herstellern von Markenartikeln der Fall ist. Diese Form wird als monopolistische Konkurrenz bezeichnet, da sich dieser Anbieter in einem gewissen preislichen Spielraum als Monopol verstehen lässt, da er aufgrund der „Besonderheit dieser Marke“ von einer gewissen Kundenbindung ausgehen kann⁴.

1.2. Preisbildung durch Modelle

Der Wirtschaftswissenschaftler Allen ist der Ansicht, dass zwei ökonomische Größen nicht erfasst werden können und daher nicht in direkter Form beschrieben werden können.⁵ Daher ist es notwendig, auf vereinfachte Modelle zurückzugreifen, welche auf Basis eines funktionalen Zusammenhanges beschrieben werden.

Definition Nachfragefunktion:

Die Funktion $x_n: \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$, die jedem Preis p eine nachgefragte Menge x zuordnet, heißt Nachfragefunktion. Sie wird mit $x_N(p)$ bezeichnet.

Nun stellt sich die Frage, welche Modellierung für eine Nachfragefunktion als geeignet erscheint. Hinsichtlich der Praktikabilität eines solchen Modells, haben Black und Bradley festgehalten, dass eine lineare Funktion als Modell eine einfachere Handhabung bietet und trotz ihrer Simplität eine nicht wesentlich schlechtere Annäherung bietet als Regressionsfunktionen höheren Grades.⁶

⁴ vgl. [13], 33.

⁵ vgl. [3], 113.

⁶ vgl. [5], 8f.

Daher bieten solche linearen Regressionsfunktionen den Vorteil, dass sie mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate statistisch leichter zu ermitteln sind.⁷

Sicherlich bedarf es einer Überprüfung des Bestimmtheitsmaßes, ob es sich hinsichtlich eines linearen Modells um eine geeignete Annäherung handelt, wobei dieses Maß nur in Kombination mit einer Punktwolke oder im Vergleich mit anderen Regressionsfunktionen interpretiert werden sollte.

Als eine übliche Marktlage kann folgendes vereinfachtes Beispiel herangezogen werden, ohne eine konkrete Funktion heranzuziehen, da es sich an dieser Stelle um allgemein gültige Aussagen und Eigenschaften der Nachfragefunktion handeln soll:

Bei einem günstigeren Preis ist die Nachfrage nach einem Produkt größer bzw. stärker. Als Hintergrund kann vereinfacht angenommen werden, dass die potentiellen Nachfrager bei einem konstanten Einkommen größere Mengen erwerben können. Steigt allerdings der Preis, ist die Nachfrage geringer, da um eben dieses gleichbleibende Einkommen weniger Güter erworben werden können. Verstärkt gilt dieser Umstand, wenn auf preisgünstigere Alternativen ausgewichen werden kann.⁸Das sogenannte „Gesetz der Nachfrage“ kann als Begründung dienen: Je niedriger der Preis eines Produktes ist, desto höher ist die Nachfrage.⁹

Um nun die zuvor definierte Nachfragefunktion in das Korsett vereinfachter ökonomischer Zusammenhänge und einfacher mathematischen Bedingungen zu formen, sind die folgenden Eigenschaften für die Nachfragefunktion notwendig¹⁰:

⁷ vgl. [16], 74.

⁸ vgl. [13], 35.

⁹ vgl. [4], 37.

¹⁰ vgl. [13], 35f.

- Die Nachfragefunktion $x_N(p)$ ist eine streng monoton fallende Funktion.
- Die Nachfragefunktion $x_N(p)$ ist stetig. Trotz des Umstandes möglicher sprunghafter Preisänderungen ist diese Eigenschaft für vereinfachte Modelle ausreichend.
- Die Menge x besitzt im Allgemeinen die Einheit Mengeneinheiten (ME). Der Preis p ist allgemein in Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit $\left(\frac{GE}{ME}\right)$ angegeben.

Definition Angebotsfunktion:

Die Funktion $x_A: \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$, die jedem Preis p eine angebotene Menge x zuordnet, heißt Angebotsfunktion. Sie wird mit $x_A(p)$ bezeichnet.

Bei der Angebotsfunktion stellen sich im Allgemeinen dieselben Fragen wie zuvor bei der Nachfragefunktion, wenn es um die Wahl eines geeigneten Modells für den Zusammenhang zwischen Preis und angebotener Menge geht. Es wird erneut untersucht werden müssen, ob sich aus dem Bestimmtheitsmaß in Kombination mit einer näheren Betrachtung der Punktwolke sowie alternativer Modelle schließen lässt, ob eine lineare Funktion ein geeignetes Modell sein könnte.¹¹

Allerdings ist erneut aufgrund einer „Gesetzmäßigkeit“, dem sogenannten „Gesetz des Angebots“ möglich, vereinfacht von einem linearen Modell auszugehen. Dieses Gesetz des Angebotes besagt, dass je höher der Preis eines Produktes ist, desto größer ist das Angebot.¹²

Dieser Schluss scheint erneut plausibel, da bei einem höheren Preis der potentielle Gewinn für den Verkäufer bei konstanten Produktionskosten größer ist und daher eine höhere Nachfrage zu mehr Gewinn führt.

¹¹ vgl. [13], 36.

¹² vgl. [4], 45.

Analog zu den für die Nachfragefunktion verlangten und notwendigen Vereinfachungen, werden von der Angebotsfunktion folgende Eigenschaften verlangt¹³:

- Die Angebotsfunktion $x_A(p)$ ist eine streng monoton steigende Funktion.
- Die Angebotsfunktion $x_N(p)$ ist stetig. Trotz des Umstandes möglicher sprunghafter Preisänderungen ist diese Eigenschaft für vereinfachte Modelle ausreichend.
- Die Menge x besitzt im Allgemeinen die Einheit Mengeneinheiten (ME). Der Preis p ist allgemein in Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit $\left(\frac{GE}{ME}\right)$ angegeben.

In der Ökonomie ist es in der Folge von Interesse, in welchem Gegenspiel die Angebots- und Nachfragefunktion stehen. Terveer und Terveer zeigten, dass ein Markt zu hohe und zu niedrige Preise selbst reguliert und Anbieter und Nachfrager einen Preis finden, welcher als „stabiles Gleichgewicht am Markt“ bezeichnet wird.¹⁴

Es kann daher folgende Definition formuliert werden:

Definition Marktgleichgewicht:

Der Schnittpunkt $S(p_0|x_0)$ der Graphen von Nachfrage- und Angebotsfunktion heißt Marktgleichgewicht. Dabei stellt p_0 den Gleichgewichtspreis und x_0 die Gleichgewichtsmenge dar.

¹³ vgl. [13], 38.

¹⁴ vgl. [27], 236.

Die folgende Abbildung soll diesen Sachverhalt grafisch veranschaulichen:

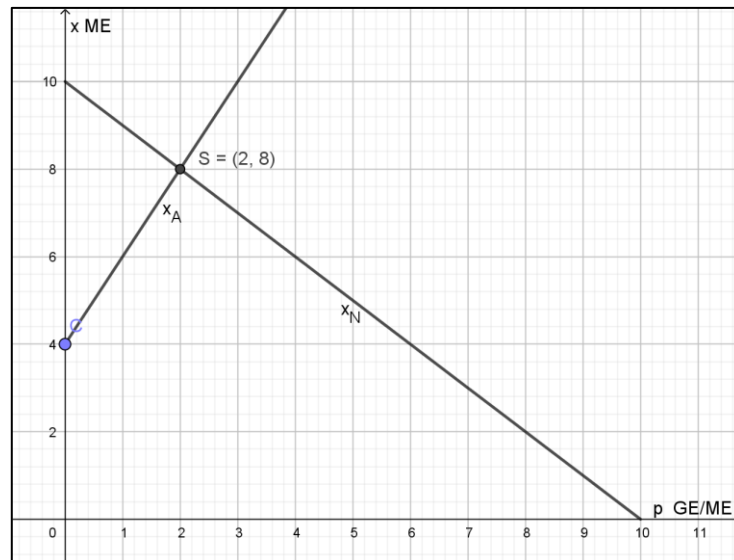


Abbildung 1 Graphen von Angebots- und Nachfragefunktion mit gekennzeichnetem Marktgleichgewicht S

1.3. Erlös, Kosten und Gewinn aus Sicht der Verkäufer

Im Abschnitt zuvor wurde bereits der Zusammenhang zwischen einem auf dem Markt platzierten Produkt und dem dafür verlangten Preis beschrieben. In diesem Fall wurde die Nachfrage- als auch Angebotsfunktion so definiert, dass der funktionale Zusammenhang auf Basis der unabhängigen Variable p (der Preis) und der abhängigen Variable x beschreiben wurde. Allerdings ist es rein pragmatisch betrachtet, vor allem hinsichtlich der folgenden Abschnitte über den Zusammenhang von Erlös, Kosten und Gewinn, sinnvoller, für weitere Überlegungen die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion zu definieren. In diesem Punkt richte ich mich allerdings nicht nach der Notwendigkeit einer Vereinfachung, sondern einer in den Wirtschaftswissenschaften üblichen Notation.¹⁵

¹⁵ vgl. [13], 40.

1.3.1. Preis-Absatzfunktion

Im ersten Schritt wird davon ausgegangen, dass aus Sicht eines Monopolisten der Preis von diesem festgelegt wird und die (gesamte) Marktnachfrage mit der (individuellen) Produktnachfrage übereinstimmt. Daher lässt sich folgend definieren:

Definition Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten

Die Preis – Absatz- Funktion $p_N(x)$ eines Monopolisten ist die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion $x_N(p)$.

Es gilt: $p_N(x) := x_N^{-1}(p)$.

Zusätzlich zu der Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten, kann aufgrund der im Abschnitt 1.1. formulierten Grundmärkte und deren Eigenschaften festgehalten werden, dass ein polypolistischer Anbieter in einem vollkommenen Markt mit allen weiteren Anbietern ein Marktgleichgewicht bildet. Daher kann folgend die Preis-Absatz-Funktion eines Polypolisten formuliert werden:

Definition Preis-Absatz-Funktion eines Polypolisten

Die Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ eines polypolistischen Anbieters ist eine konstante Funktion mit dem konstanten Funktionswert in Höhe des Gleichgewichtspreises p_0 .

Es gilt $p(x) := p_0$.

Nun wird noch ein polypolistischer Anbieter auf einem unvollkommenen Markt betrachtet, da dies einer realitätsnäheren Situation entspricht als es bei den beiden zuvor definierten Funktionen der Fall war. Es wird davon ausgegangen, dass der Anbieter zwischen einer oberen Preisgrenze p_o und einer unteren Preisgrenze p_u annähernd unter den Bedingungen eines Monopolisten seine Produkte anbieten kann. ¹⁶.

¹⁶ vgl. [19], 183.

Diese Preisspanne wird als „monopolistischer Bereich“ bezeichnet, welcher sich damit erklären lässt, dass sich aufgrund der unvollkommenen Marktsituation der polypolistische Anbieter einen Vorteil verschaffen kann, indem er aufgrund persönlicher Präferenzen der Kunden eine Kundenbindung bewirken kann. Dieses akquisitorische Potential hat zur Folge, dass innerhalb dieses Bereiches eine Preissteigerung einen verhältnismäßig geringen Nachfragerückgang zur Folge hat. Außerhalb dieses Bereiches kann aufgrund der nicht ansprechenden Preise sowohl aus Sicht des Anbieters als auch des Nachfragenden keine zufriedenstellende Nachfrage generiert werden. Das daher folgende Modell basiert auf den Überlegungen von Gutenberg(1984) und lässt den Graphen einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion als Veranschaulichung fungieren. Zwischen der Preisunter- und Obergrenze besitzt der Graph eine verhältnismäßig steile negative Steigung, was bedeutet, dass ein größerer Preisspielraum einen recht geringen Einfluss auf die folgende Nachfrage hat. Die folgende Abbildung soll diesen Sachverhalt veranschaulichen:

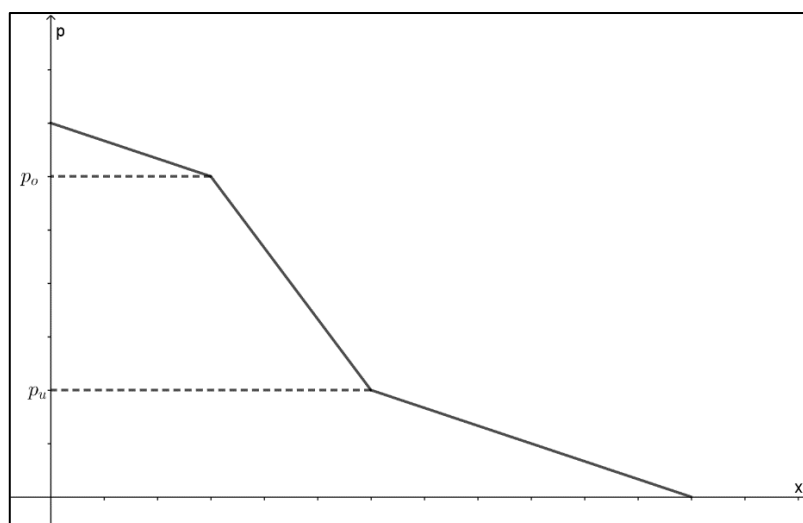


Abbildung 2 Graph einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion

1.3.2. Erlösfunktion

Die Erlösfunktion ergibt sich aus der ohne ökonomisches Grundverständnis logische Folgerung, dass der Umsatz, sprich jene Geldmenge, welche durch den Verkauf von Waren eingenommen wird, als Produkt aus Preis und Menge ermittelt werden kann. Diese Einnahmen werden aus Sicht des Anbieters als Erlös bezeichnet und in der Einheit Geldeinheiten (GE) angegeben.¹⁷

Definition Erlösfunktion

Sei p der Preis zu dem ein Unternehmen ein Produkt verkauft und x die Menge, die für diesen Preis umgesetzt wird. Die Funktion $E: \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$ mit $E(x) = p \cdot x$ heißt Erlösfunktion.

Wie bereits im obigen Abschnitt festgehalten, hängt die Preisgestaltung von der Marktform ab. Handelt es sich um einen polypolistischen Anbieter, so ergibt sich aus der konstanten Preis-Absatz Funktion eine lineare Erlösfunktion. Handelt es sich um einen monopolistischen Anbieter, so ergibt sich eine quadratische Erlösfunktion, da die Preis-Absatz Funktion bereits als linear angenommen wird. Gemein haben alle Marktformen, dass sich der Erlös als Funktion mit der unabhängigen Variable x ME darstellen lässt. Dies gilt auch für einen für einen Anbieter unter monopolistischer Konkurrenz.

Um diesen Sachverhalt anschaulich darzustellen, bilde ich aus einer aus diesem Abschnitt zugrundeliegenden Buch entnommenen Preis-Absatzfunktion mit doppelten Knick eine abschnittsweise definierte Erlösfunktion:¹⁸

Beispiel: Die folgende Funktion p sei die Preis Absatzfunktion mit einem abschnittsweise definierten linearen Modell:

$$p(x) = \begin{cases} 30 - 0,5x, & 0 \leq x < 10 \\ 40 - 1,5x, & 10 \leq x < 20 \\ 20 - 0,5x, & 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

¹⁷ vgl. [13], 43.

¹⁸ vgl. [13], 43ff.

Aus der Definition Erlösfunktion ergibt sich die folgende Erlösfunktion E :

$$E(x) = p(x) \cdot x = \begin{cases} 30x - 0,5x^2, & 0 \leq x < 10 \\ 40x - 1,5x^2, & 10 \leq x < 20 \\ 20x - 0,5x^2, & 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

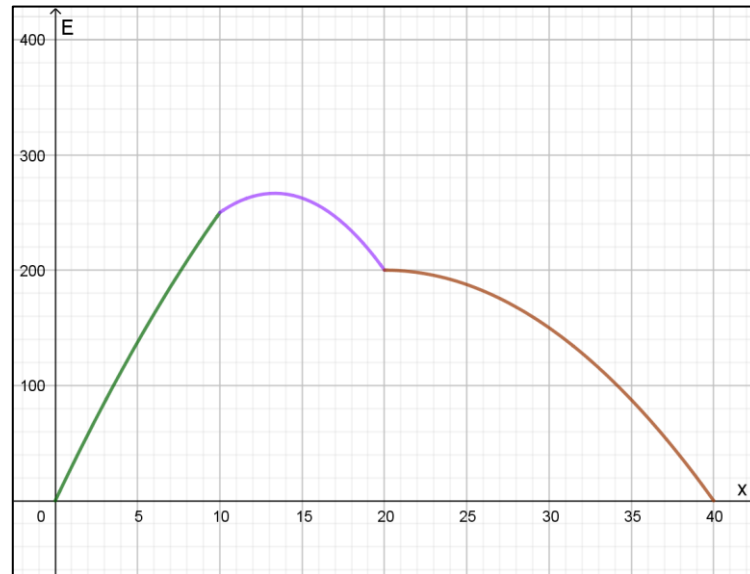


Abbildung 3 Graph einer Erlösfunktion eines polypolistischen Anbieters mit monopolistischen Preisspielraum

Anhand dieses Graphen wird klar, dass Erlösfunktionen in einem praxisnäheren Marktumfeld den Rahmen einfachere Modelle verlassen und in der Folge eine nähere Analyse benötigen.

1.3.3. Kostenfunktion

Wenn ein Anbieter Güter produziert, so verursacht dies durch Einkauf und Verkauf für diesen Kosten. Die Kosten werden durch Ausgaben in Geldeinheiten (GE) in Abhängigkeit von der Beschäftigung beschrieben. Unter dem Begriff Beschäftigung kann das Ausmaß der genutzten Kapazität pro Zeitraum verstanden werden. Damit wird umschrieben, dass die Produktion eines Stückgutes Kosten auf vielen verschiedenen Ebenen verursacht, welche sich in einem Leistungsbereich zusammenfassen lassen. Zusätzlich kann die Kostenart auf Basis verschiedener Beschäftigungen geringere oder größere Auswirkungen auf die Kosten.

Da es sich jedoch aufgrund der notwendigen Vereinfachungen aus meiner Sicht nicht rentiert, diese Überlegungen eines sogenannten Kostenplaners näher zu erläutern, wird auf diesen Aspekt nicht weiter eingegangen. Auf jeden Fall kann zwischen variablen und fixen Kosten differenziert werden.

Auch wenn diese wiederum je nach Art der Beschäftigung variieren können, so lässt sich folgern, dass die fixen Kosten unabhängig von der produzierten und verkauften Menge sind und variable Kosten eben jene Aspekte der komplexen Kostenermittlung vereinen. Aus Sicht eines Unternehmers ist es auf jeden Fall von Bedeutung, wie sich Kosten im Laufe steigender Produktionszahlen verändern. Es wird zwischen 3 Kostenentwicklungen unterschieden¹⁹:

- Proportionale Kostenentwicklung: Die variablen Kosten steigen im gleichen Maße wie die Beschäftigung (Menge)
- Unterproportionale Kostenentwicklung: Der Anstieg der variablen Kosten fällt verhältnismäßig gering aus im Verhältnis zu der steigenden Beschäftigung. Dieser Kostenverlauf wird auch als degressiv bezeichnet.
- Überproportionale Kostenentwicklung: Der Anstieg der variablen Kosten fällt vergleichsweise stark aus im Verhältnis zu der steigenden Beschäftigung. Dieser Kostenverlauf wird auch als progressiv bezeichnet.

¹⁹ vgl. [13], 46f.

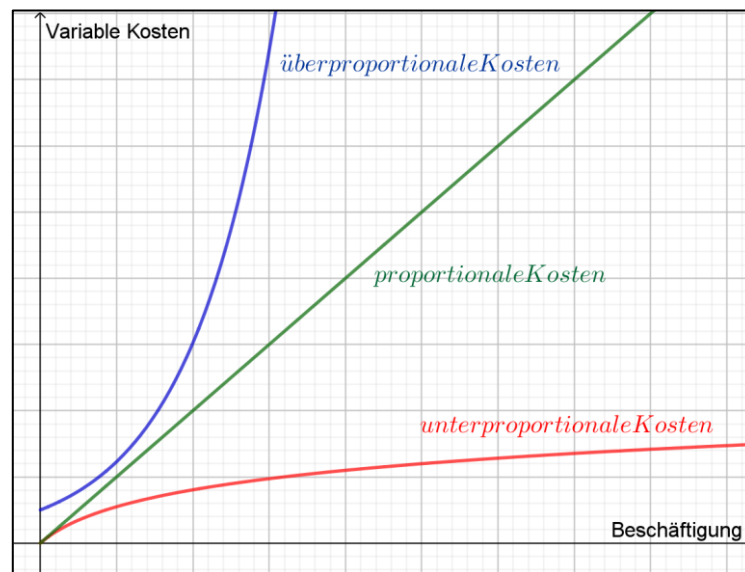


Abbildung 4 Unterschiedliche Verläufe der variablen Kosten in Abhängigkeit von der Beschäftigung

Aus den oben beschriebenen variablen Kosten und den fixen Kosten ergeben sich folglich Mischformen, welche sich in vielfältiger Art und Weise verhalten. Aufgrund einer sinnvollen Reduktion auf für etwaige Modellbildung geeignete Formen, wird zumeist von einer semi-proportionalen verlaufenden Kostenfunktion oder von einer S-förmig verlaufenden Kostenfunktion ausgegangen. Semi-proportionale Kostenverläufe lassen sich als eine lineare Funktion modellieren, wobei S-förmige Kostenverläufe aus einem zunächst unterproportionalen Kostenanstieg bestehen und in der Folge in einen überproportionalen Anstieg übergehen. Für die weitere Verwendung etwaiger Kostenfunktionen ist es notwendig, die schwer messbare Beschäftigung als unabhängige Variabel zu ersetzen und durch greifbarer Werte zu ersetzen. In der Regel geschieht dies durch eine Output-Orientierung in Form einer unabhängigen Variablen, welche die Anzahl der produzierten und verkauften Güter wiedergibt.²⁰

²⁰ vgl. [13], 47f.

Definition Kostenfunktion

Sei x die produzierte Menge, die ein Unternehmen verkauft. Die Funktion $K: \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$ mit $K(x) = K_v(x) + K_f$ heißt Kostenfunktion mit variablen Kosten K_v und fixen Kosten K_f .

Wie bereits festgehalten, kann ein semi-proportionaler Kostenverlauf über eine lineare Funktion angenähert werden. Ein S-förmiger Kostenverlauf wird durch eine Polynomfunktion dritten Grades modelliert und wird als ertragsgesetzliche Kostenfunktion bezeichnet. In der Realität birgt eine solche Vereinfachung jedoch einige Probleme, wie zum Beispiel den Umstand, dass der Verlauf der Kosten nicht bloß vom Output der Produktion abhängig ist. Daher wäre eine Kostenfunktion mit mehreren Variablen ein passenderes Modell. Allerdings beschränke ich mich aus der Notwendigkeit einer didaktischen Reduktion auf ökonomische Funktionen mit einer Variablen. Zusätzlich erfordert die Ermittlung eines Modells für den Kostenverlauf eine entsprechende Erfahrung, da diese Funktion über die Extremwertmethode oder eine Regression ermittelt werden könnte.²¹

1.3.4. Gewinnfunktion

Schlussendlich ist es verständlicherweise für ein gewinnorientiertes Unternehmen von immenser Wichtigkeit zu analysieren, wie sich der Gewinn bei mittelfristiger Entwicklung von Kosten und Erlös verhält. Die Differenz aus Erlös und Kosten wird als Gewinn bezeichnet.

Definition Gewinnfunktion:

Sei x die Menge, die ein Unternehmen verkauft. Die Funktion $G: \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}$ mit $G(x) = E(x) - K(x)$ heißt Gewinnfunktion.

Da sich die Unterschiede der Marktformen in der Modellbildung der Preisfunktion wiedergeben, ist eine weitere Unterscheidung hinsichtlich der Art des Marktes bei der Gewinnfunktion nicht notwendig.

²¹ vgl. [13], 52f.

Der für den Anbieter relevante Bereich ist jener, in welchem für die Funktionswerte $G(x) > 0$ gelten, also wenn der Gewinn nicht negativ ist. Dieses Intervall wird als Gewinnzone bezeichnet. Hierfür ist die Berechnung der Nullstellen der Gewinnfunktion notwendig.²²

Definition untere und obere Gewinngrenze

Seien x_1 und x_2 mit $x_1, x_2 \geq 0$ und $x_1 < x_2$ Lösungen der Gleichung $G(x) = 0$ und sei $E > K$ in $(x_1; x_2)$. Dann heißt x_1 untere Gewinngrenze und x_2 obere Gewinngrenze.

Die untere Gewinngrenze wird auch als Break-Even-Point bezeichnet und deren Ermittlung ist unter dem Namen Break-Even-Analyse bekannt. Aufgrund der Gegebenheiten eines monopolistischen oder polypolistischen Anbieters ergeben sich grundsätzlich verschiedene Gewinnbereiche, bei welchem jener eines polypolistischen Anbieters theoretisch für $x \rightarrow +\infty$ rechtsseitig nicht beschränkt ist. Dies hat den Grund, dass für eine solche Gewinnfunktion eines polypolistischen Anbieters für die Gleichung $G(x) = 0$ nur eine Lösung x_1 existiert und daher der Gewinnbereich $(x_1; +\infty)$ ist.

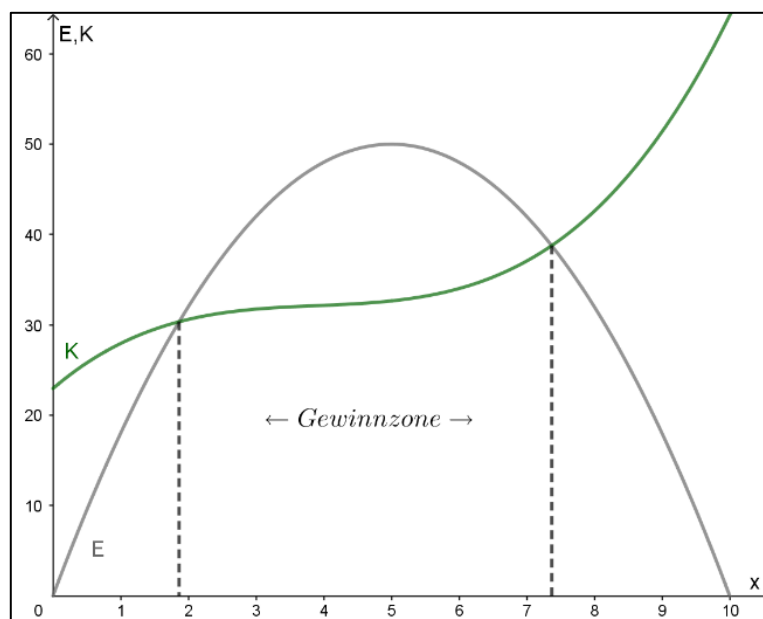


Abbildung 5 Graphen von Erlös- und Kostenfunktion im Polypol

²² vgl. [13], 53.

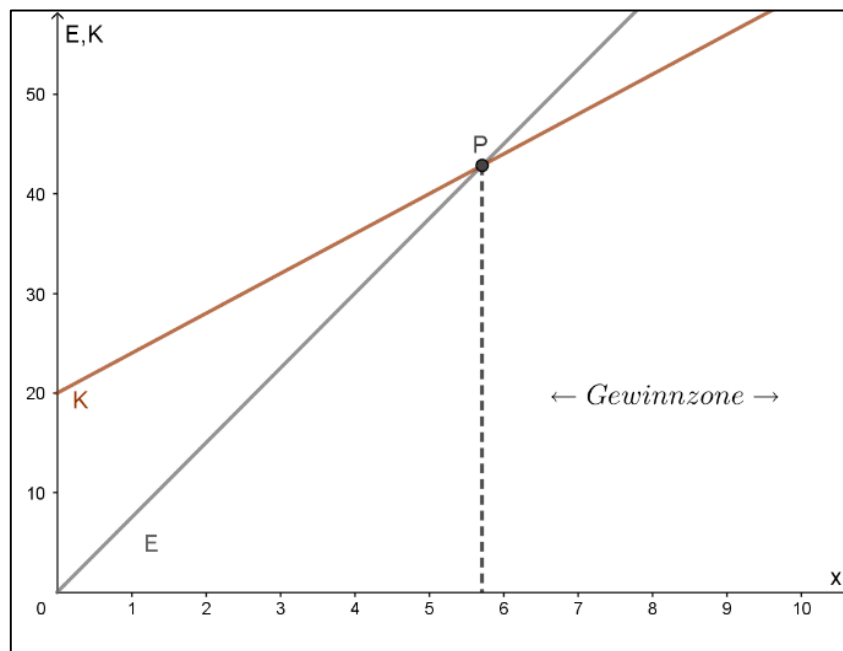


Abbildung 6 Graphen von Erlös- und Kostenfunktion im Monopol

Nachdem festgehalten wurde, dass aus Sicht eines Anbieters jener Bereich relevant ist, der als Gewinnzone zu bezeichnen ist, stellt sich im nächsten Schritt die Frage nach dem Gewinnmaximum.

Da jedoch die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen im Kapitel 2 einen ausreichenden Rahmen erhält, wird an dieser Stelle nur auf jene Menge eingegangen, welche für das Unternehmen den größten Gewinn zur Folge hat. Diese Menge wird als gewinnmaximale Menge bezeichnet. In der Folge ist es von äußerster Wichtigkeit aus Sicht des Anbieters, zu welchem am Markt platzierten Preis dieser maximale Gewinn erzielt werden kann. Durch Einsetzen der gewinnmaximalen Menge in die Preis-Absatzfunktion ergibt sich der entsprechende zu verlangende Preis, welcher gewinnmaximaler Preis heißt. Da diese Menge und der Preis, welche zu einem maximalen Gewinn führen von großer Bedeutung sind, wobei angemerkt werden muss, dass dieser nur bei einem Monopol von Bedeutung ist, werden sie mit einem eigenen Namen bezeichnet: Der Cournotscher Punkt. Dieser wurde nach dem französischen Mathematiker Antoine-Augustin Cournot benannt, welcher in der zweiten Hälfte des 19. Jhd. grundlegende Ideen der mathematischen Wirtschaftstheorie formulierte.

Definition Cournotscher Punkt

Sei x_c die gewinnmaximale Menge und $p(x_c)$ der gewinnmaximale Preis eines Monopolisten. Der Punkt $P(x_c | p(x_c))$ auf dem Graphen der Preis-Absatz Funktion heißt Cournotscher Punkt.

2. Anwendungen der Differentialrechnung für ökonomische Funktionen mit einer Variablen

Die Differentialrechnung stellt unbestritten die Grundlage dar, welche es ermöglicht, Problemstellungen aus der Ökonomie mithilfe ökonomischer Funktionen auf Basis entsprechender Modelle zu beantworten. Hierfür ist es allerdings notwendig, dass zu Beginn Schritte gesetzt werden, welche eine Verwendung der Grundsätze der Differentialrechnung und vor allem jene der Ableitungen für ökonomische Funktionen gestattet. Daher werden im ersten Abschnitt Grundsätze und Definitionen erläutert und bewiesen, welche eine solche Verwendung erlauben und auch auf dieses Anwendungsfeld entsprechend angepasst werden. Im zweiten Abschnitt werden die in der Folge erlaubten Anwendungen der Differentialrechnung für ökonomische Funktionen erläutert.

2.1. Umsetzung der Differentialrechnung mit ökonomischen Funktionen

2.1.1. Interpretation der ersten Ableitung

Zu Beginn werden einige Grundsätze formuliert, um eine Grundlage für die ökonomische Interpretation der ersten Ableitung zu schaffen:²³

Definition Differential von f

Es sei f eine in x_0 differenzierbare Funktion. Unter dem Differential df der Funktion f an der Stelle x_0 zum Zuwachs versteht man:

$$df(dx) := df(x_0)(dx) := f'(x_0)dx$$

Auf Basis der bekannten Grundsätze der Differentialrechnung, kann weiters formuliert werden, dass für kleine Δx die Funktionsdifferenz Δf näherungsweise durch df angegeben werden kann, sprich $df \approx \Delta f$ gilt. Daher kann die folgende Definition als Basis für die ökonomische Interpretation für des Differentials dienen:

²³ vgl. [30], 237ff.

Definition Differential

$$df(dx) := df(x_0)(dx) := f'(x_0)dx$$

gibt für jede Stelle $x \in D$ an, um wie viele Einheiten sich $f(x)$ näherungsweise ändert, wenn die unabhängige Variable x um dx Einheiten geändert wird. Dabei ist die Näherung $\Delta f \approx df$ desto besser, je kleiner die Änderung der unabhängigen Variablen dx gewählt wird.

Nun kann der folgende Satz als Grundlage aller weiteren Überlegungen formuliert werden: ²⁴

Satz Ableitung einer ökonomischen Funktion (Approximation einer Funktion durch Geraden)

Gegeben sei eine ökonomische Funktion f . Sei f eine in x_0 differenzierbare Funktion. Für ein geeignet kleines Δx sei $df \approx \Delta y$. Für $\Delta x = 1$ sei der Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_0 näherungsweise durch die Steigung einer durch Approximation ermittelten Gerade gegeben. Dann gilt:

Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_0 gibt näherungsweise an, um wie viel sich der Funktionswert für $\Delta x = 1$ ändert:

$$f'(x_0) \approx f(x_0 + 1)$$

Der Beweis dieses Satzes basiert auf den folgenden schrittweise ausgeführten Überlegungen, welche eine solche Verwendung der Ableitung als Näherung von Funktionswertänderungen legitimiert. ²⁵

Man betrachte die Gleichung der Tangente t an den Funktionsgraphen f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - a) + f(x_0)$.

Eine beliebige Gerade g mit beliebiger Steigung k , die die Funktion in P schneidet, lautet: $g(x) = k \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

²⁴ vgl. [13], 60ff.

²⁵ vgl. [30], 240f.

Für die Steigung dieser Geraden gelte $k \neq f'(x_0)$. Sowohl die Tangente als auch die beliebige Gerade approximieren die Funktion in einer kleinen Umgebung von P . Man betrachte den Approximationsfehler r , definiert als Differenz zwischen f und g an der Stelle x :

$$\begin{aligned} r(x) &= f(x) - g(x) = \\ &= f(x) - k \cdot (x - x_0) - f(x_0) = \\ &= f(x) - f(x_0) - k \cdot (x - x_0) \\ r(x) &\stackrel{\text{Ausklammern von } (x-x_0)}{=} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k \right) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

Aus $x \rightarrow x_0$ folgt $r(x) \rightarrow 0$. Für $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - k \rightarrow 0$ konvergiert der Approximationsfehler r schneller gegen Null. Für den relativen Fehler $\frac{r(x)}{x-x_0}$ gilt analog:

$$\frac{r(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - k.$$

Für $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gilt, dass $\frac{r(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - k \rightarrow 0$, wobei $k = f'(x_0)$.

Nun folgt eine Definition der Ableitung, welche den Grenzwert Null für den Approximationsfehler als Grundlage nutzt:²⁶

Definition Ableitung

Eine Funktion f heißt in x_0 differenzierbar, wenn es eine Gerade t durch den Punkt $P(x_0|f(x_0))$ gibt, so dass der Approximationsfehler $r(x) = f(x) - t(x)$ der Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$$

genügt. Die Steigung von t heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 .

²⁶ vgl. [13], 62.

Der Approximationsfehler $r(x)$ strebt für $x \rightarrow x_0$ für jede Gerade durch P gegen null. Handelt es sich bei der Geraden um die Tangente mit $k = f'(x_0)$, strebt auch der relative Fehler $\frac{r(x)}{x-x_0}$ gegen null. Folglich ist eine Tangente jene Gerade, die f lokal am besten approximiert.²⁷

Zusammenfassend kann für den Approximationsfehler $r(x)$ formuliert werden:²⁸

$$r(x) = f(x) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) - f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x)$$

Für $x - x_0 = 1$ kann der Approximationsfehler im Zusammenhang mit ökonomischen Funktionen vernachlässigt werden. Daher gilt:

$$f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0).$$

□

Der oben angeführte Beweis wurde auf der Grundlage der lokalen Näherung mittels Ableitung durch lineare Funktionen geführt. Es würden sich an dieser Stelle auch lokale Annäherungen auf Basis Polynome höheren Grades mithilfe von Taylorpolynomen anbieten. Eine solche Verallgemeinerung wird in dieser Arbeit jedoch nicht vorgenommen, da ich primär den Fokus auf den fachlichen Hintergrund auf jene Bereiche lege, welche im Unterricht in der Schule vorgenommen werden und daher einer Vereinfachung standhalten müssen.

2.1.2. Grenzfunktion

In diesem Abschnitt werden weitere Grundlagen für die Anwendung der Differentialrechnung auf ökonomische Funktionen geschaffen.

Definition Ableitungsfunktion

Eine Funktion, die jedem $x \in D$ die Ableitung an dieser Stelle zuordnet, heißt Ableitungsfunktion von f . Sie wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

²⁷ vgl. [13], 62.

²⁸ vgl. [13], 63.

Diese Definition erfüllt primär den Zweck, die Berechnung der Ableitung nicht stets über die Definition des Grenzwerts eines Differenzenquotienten durchzuführen, sondern direkt auf die Ableitungsfunktion zurückzugreifen. Auf Basis der in Abschnitt 2.1.1. festgehaltenen Grundlagen kann nun die folgende Definition der Grenzfunktion formuliert werden:²⁹

Satz Grenzfunktion einer ökonomischen Funktion

Die Grenzfunktion einer ökonomischen Funktion f kann durch ihre erste Ableitung f' beschrieben werden. Der Wert $f'(x)$ der Grenzfunktion gibt näherungsweise den Funktionszuwachs (bzw. die Funktionsabnahme) an, der durch die Erhöhung der unabhängigen Variablen x hervorgerufen wird.

Es ergeben sich in der Folge zwei Veranschaulichungen dieser Grenzfunktion:³⁰

- Mathematisch-ökonomische: Die Grenzfunktion f' ist als Grenzwert des Quotienten aus Funktionsänderung Δy und der zugehörigen Änderung Δx der unabhängigen Variable zu verstehen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Praktisch-ökonomische: Die Grenzfunktion Δf ist als Funktionszuwachs (bzw. Funktionsabnahme) pro zusätzlicher Einheit ($\Delta x = 1$) der unabhängigen Variable zu verstehen

$$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$$

Die mathematisch ökonomische Verwendung der Grenzfunktion dient primär der vereinfachten Berechnung der Grenzfunktion. Die praktisch-ökonomische dient als allgemeine Grundlage für die Interpretation der Grenzfunktion für alle folgenden Anwendungen auf ökonomische Funktionen.

²⁹ vgl. [30], 241.

³⁰ vgl. [30], 241.

2.2. Gewinnmaximierung

Aus Sicht eines Anbieters stellt es zweifelsohne ein entscheidendes Kriterium dar, neben der Gewinnschwelle auch zu analysieren, für welche Mengen der Gewinn als möglichst groß angenommen werden kann. Für diese Überlegung ist es notwendig, den Gewinn als Funktion zu beschreiben, welche in Abhängigkeit von der verkauften Menge modelliert wird und sich aus der Differenz von Erlös und Kosten bildet. Daraus folgt die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$, Diese Funktion kann im Allgemeinen für jegliche Marktsituationen verwendet werden und auch über Polynome n-ten Grades angenähert werden. ³¹

Für die Bestimmung des Gewinnmaximums wird in der Regel die bekannte Berechnung eines lokalen Extremwertes verwendet, welche in der Folge durch einen Nachweis, ob globale Extrema existieren, ergänzt:

Sei x_G die verkaufte Menge, für die der Gewinn maximal wird. Die notwendige Bedingung ist daher $G'(x_G) = 0$.

Der Nachweis, ob globale Extrema existieren erfolgt über die Berechnung der Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x)$. Sofern die Grenzwerte weder $+\infty$ noch $-\infty$ ergeben, existiert ein globales Minimum oder Maximum.

Im Fachgebiet der Analysis stellen diese Berechnungen selbst keine ausreichende Grundlage für die Behauptung dar, dass es sich bei $G(x_G)$ tatsächlich um einen maximalen Gewinn handelt. Zumindest die Überprüfung der Randstellen, welche vor allem bei eingeschränkten Definitionsbereichen in Form von beschränkten Kapazitäten auftreten, sollte durchgeführt werden. Zusätzlich gilt der Umstand zu bedenken, dass Gewinnfunktionen in Anwendungsaufgaben nur für $x \geq 0$ betrachtet werden, was daher immer den unteren Randpunkt $x_a = 0$ zur Folge hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeigt sich jedoch, dass in der Regel das lokale Maximum der Gewinnfunktion mit dem globalen gleichzusetzen ist. ³²

³¹ vgl. [13], 69.

³² vgl. [13], 70.

Im nun folgenden Abschnitt werden Gewinnmaximierungen im Umfeld verschiedener Marktsituation erläutert und bewiesen.

2.2.1. Gewinnmaximierung im Monopol

Satz Gewinnmaximierung im Monopol

Ein monopolistischer Anbieter sehe sich einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G verkauft, für die

1. Grenzerlös und Grenzkosten übereinstimmen: $E'(x_G) = K'(x_G)$ und
2. bei Einsetzen der Randwerte stets $G(x_G) > G(x), \forall x \in D, x \neq x_G$ gilt.

Beweis:

Es gilt für die gewinnmaximierende Menge x_G

$$G'(x_G) = 0 \Leftrightarrow E'(x_G) - K'(x_G) = 0 \Leftrightarrow E'(x_G) = K'(x_G)$$

Ad 2.:

Einsetzen des unteren Randwertes $x_a = 0$ ergibt $G(x_a) = -K_f < 0$.

Es gilt $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (E(x) - K(x)) = 0$. Daher existiert ein globales Maximum.

Einsetzen des oberen Randwertes mit anschließenden Vergleich mit über 1. berechneten kritischen Punkten zeigt, dass x_G die gewinnmaximierende Menge ist.

□

Für diesen Fall, dass ein monopolistischer Anbieter ein Produkt anbietet und sich der Erlös einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gegenübersteht, kann formuliert werden, dass dies den Regelfall in einem Monopol darstellt und auf viele Anwendungsbereiche umgelegt werden kann.³³

³³ vgl. [13], 70f.

Allerdings kann es auch der Fall sein, dass ein solcher monopolistischer Anbieter sich einer linearen Kostenfunktion gegenüberstellt.

Satz Gewinnmaximierung im Monopol mit linearer Kostenfunktion

Ein monopolistischer Anbieter setze sich einer linearen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G verkauft, für die

1. Grenzerlös und Grenzkosten übereinstimmen: $E'(x_G) = K'(x_G)$ und
2. bei Einsetzen der Randwerte stets $G(x_G) > G(x), \forall x \in D, x \neq x_G$ gilt.

Beweis

Ad 1.:

Die notwendige Bedingung $G'(x_G) = 0 \Leftrightarrow E'(x_G) = K'(x_G)$ ist analog zu beweisen wie im Satz Gewinnmaximierung im Monopol.

Ad 2.:

Einsetzen des unteren Randwertes $x_a = 0$ ergibt $G(x_a) = -K_f < 0$.

Es gilt $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (E(x) - K(x)) = 0$. Daher existiert ein globales Maximum.

Einsetzen des oberen Randwertes mit anschließenden Vergleich mit über 1. berechneten kritischen Punkten zeigt, dass x_G die gewinnmaximierende Menge ist.

□

Die folgenden Abbildungen sollen die oben bewiesenen Sätze veranschaulichen und die algebraisch festgehaltenen Bedingungen und Folgerungen graphisch darstellen.³⁴

³⁴ vgl. [13], 72f.

Es ist zu erkennen, dass die Tangentensteigung an die Graphen der Erlös- und Kostenfunktion an der Stelle x_G in beiden Fällen ident ist.

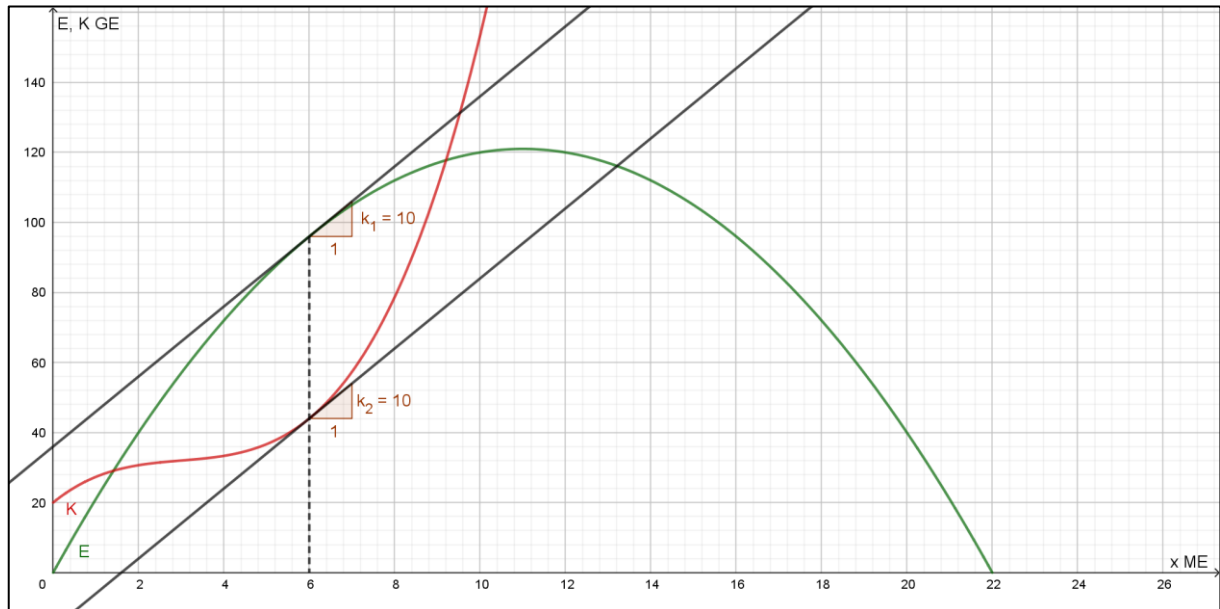


Abbildung 7 Graphische Darstellung der Gewinnmaximierung im Monopol bei einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

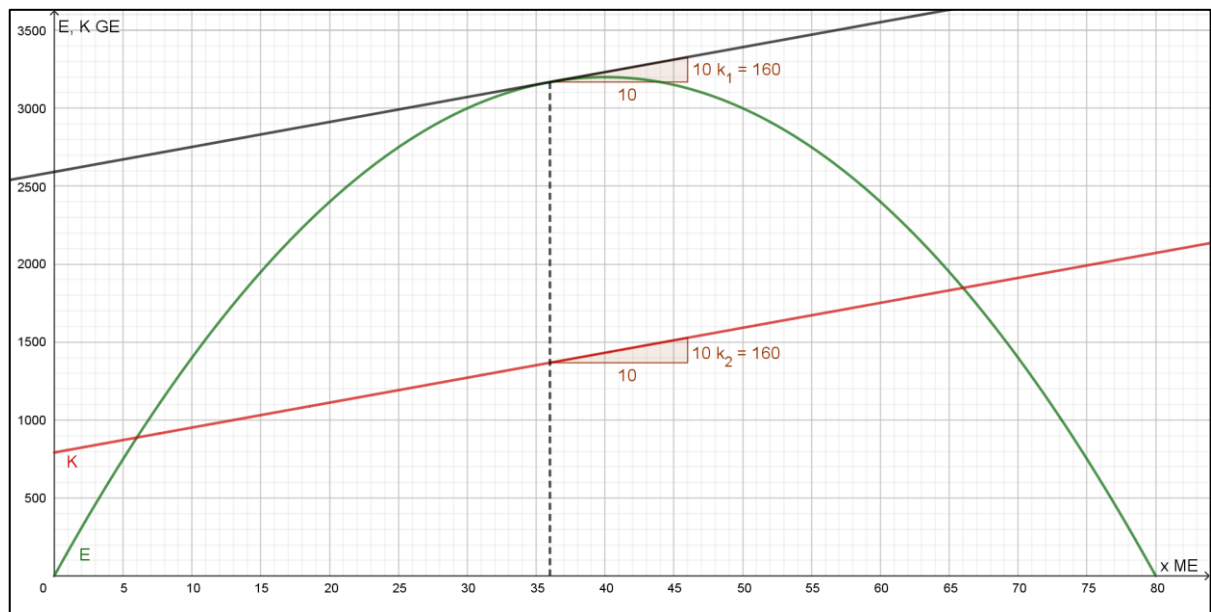


Abbildung 8 Graphische Darstellung der Gewinnmaximierung im Monopol bei einer linearen Kostenfunktion

2.2.2. Gewinnmaximierung im Polypol

Satz Gewinnmaximierung im Polypol

Ein polypolistischer Anbieter sehe sich einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G verkauft, für die

1. die Grenzkosten mit dem Preis übereinstimmen: $K'(x_G) = p_0$ und
2. bei Einsetzen der Randwerte stets $G(x_G) > G(x), \forall x \in D, x \neq x_G$ gilt.

Beweis

Ein polypolistischer Anbieter sieht sich einem konstanten Marktpreis p_0 gegenüber. Daher gilt für die zugehörige Erlösfunktion $E(x) = p_0 \cdot x$. Es gilt $E'(x) = p_0$ und $E''(x) = 0$. Daher gilt für 1.:

$$G'(x_G) = 0 \Leftrightarrow E'(x_G) = K'(x_G) \Leftrightarrow p_0 = K'(x_G).$$

Der Beweis für 2. wurde bereits mehrfach erbracht und ist analog für diesen Satz zu übernehmen.

□

Analog zu einem monopolistischen Anbieter wird nun ein polypolistischer Anbieter betrachtet, welcher sich einer linearen Kostenfunktion gegenüber sieht, was neue Bedingungen für eine gewinnmaximierende Menge notwendig macht.³⁵

Satz Gewinnmaximierung im Polypol bei linearer Kostenfunktion

Ein polypolistischer Anbieter sehe sich einer linearen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G verkauft, die bei Überschreitung der unteren Gewinnschwelle an der Kapazitätsgrenze liegt.

³⁵ vgl. [13], 73f.

Beweis

Sei x_1 die untere Gewinnschwelle, so dass für jedes $x_g > x_1$ gilt: $E(x_g) > K(x_g)$. Da $E(x)$ und $K(x)$ streng monoton steigend sind und $E'(x_g) > K'(x_g)$ gilt, folgt daher:

$$\lim_{x_G \rightarrow \infty} (E(x_G) - K(x_G)) = \left(\lim_{x_G \rightarrow \infty} E(x_G) - \lim_{x_G \rightarrow \infty} K(x_G) \right) > 0.$$

□

Da die Grundlagen, dass in $G(x_G)$ aus Sicht eines polypolistischen Anbieter dieselben sind wie die für einen monopolistischen, erachte ich an dieser Stelle eine graphische Veranschaulichung als nicht notwendig. Für den Fall eines polypolistischen Anbieters, der sich einer linearen Kostenfunktion gegenüber sieht, soll die folgende Abbildung eine Veranschaulichung bieten (Anmerkung: Es wird von einer Kapazitätsgrenze von $x = 20$ ME ausgegangen).³⁶

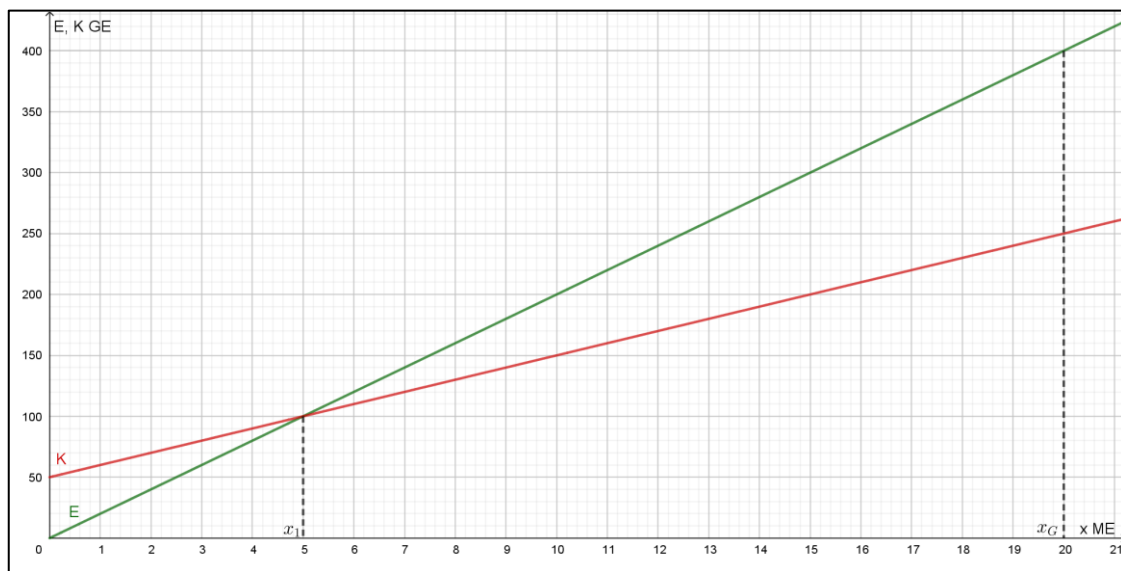


Abbildung 9 Graphische Darstellung der Gewinnmaximierung im Polypol bei einer linearen

³⁶ vgl. [13], 74f.

2.2.3. Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz

Satz Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz bei linearer Kostenfunktion

Ein Anbieter unter monopolistischer Konkurrenz sehe sich einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion sowie einer linearen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G verkauft, für die gilt:

1. Grenzkosten und Grenzerlös sind identisch: $E'(x_G) = K'(x_G)$,
2. $G(x_G)$ ist ein globales Maximum von G .

Beweis

Der Beweis für 1. wurde bereits mehrfach erbracht und ist daher analog auch für diesen Satz anzuwenden.

Ad 2.:

Einsetzen des unteren Randwertes $x_a = 0$ ergibt $G(x_a) = -K_f < 0$.

Es gilt $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (E(x) - K(x)) = 0$. Daher existiert ein globales Maximum.

Einsetzen des oberen Randwertes mit anschließenden Vergleich mit über 1. berechneten kritischen Punkten zeigt, dass x_G die gewinnmaximierende Menge ist

Der Beweis, ob es sich bei den Kandidaten der lokalen Extremstellen um ein globales Maximum handelt, ist durch einfaches Einsetzen in G zu überprüfen.

□

Die folgende Abbildung soll die Gewinnmaximierung im oben beschriebenen Fall graphisch veranschaulichen.³⁷

³⁷ vgl. [13], 75f.

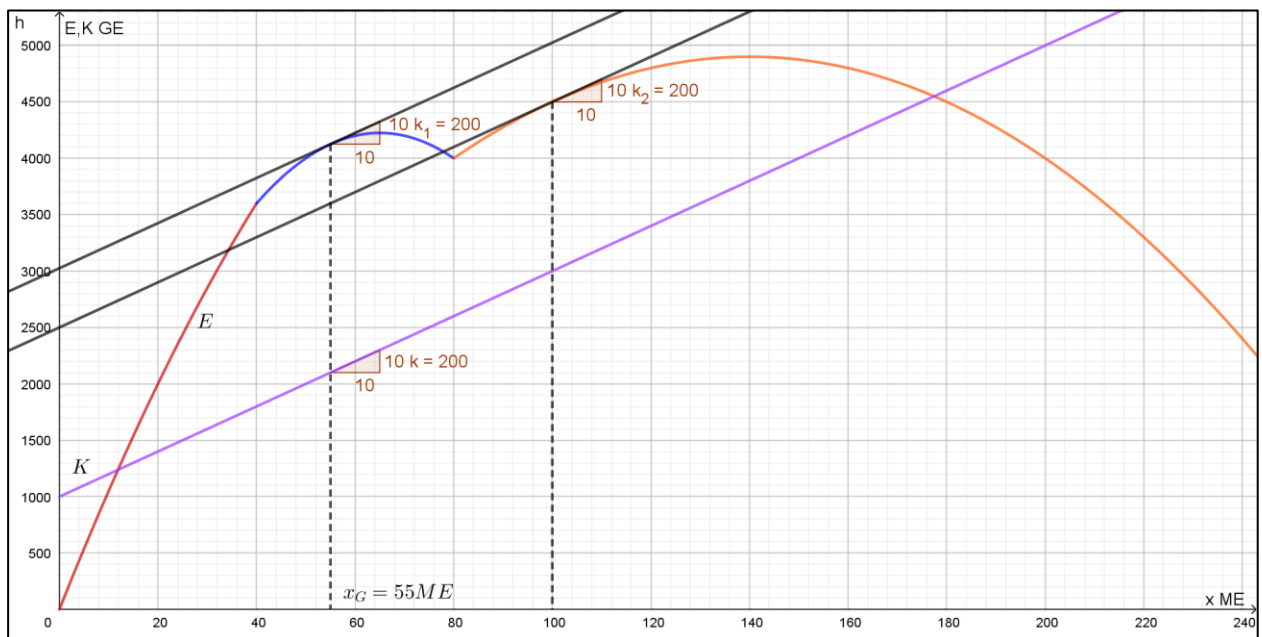


Abbildung 10 Graphische Darstellung der Gewinnmaximierung bei monopolistischer Konkurrenz bei einer linearen Kostenfunktion

2.3. Betriebsminimum- und Optimum

In diesem Abschnitt wird der für Anbieter relevante Aspekt der Kostenoptimierung behandelt. Aus Sicht eines Produzenten sind vor allem die Stückkosten ein geeigneter Wert für weitere Analysen. Daher sind die folgenden Definitionen erforderlich:³⁸

Definition Durchschnittsfunktion

Gegeben sei die Funktion f und $x \neq 0$. Der Quotient

$$\bar{f}(x) := \frac{f(x)}{x}$$

heißt Durchschnittsfunktion von f .

Prinzipiell können für alle bisher erläuterten ökonomischen Funktionen Durchschnittsfunktion gebildet und analysiert werden. An dieser Stelle beschränke ich mich auf jene Durchschnittsfunktion, welche hinsichtlich einer Kostenfunktion notwendig sind.

³⁸ vgl. [13], 77f.

Definition Stückkostenfunktionen

Für eine Gesamtkostenfunktion $K(x) = K_v(x) + K_f$ können die folgenden Durchschnittsfunktionen gebildet werden:

1. Die Durchschnittsfunktion der Kostenfunktion heißt Stückkostenfunktion. Es gilt: $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$.
2. Die Durchschnittsfunktion der variablen Kostenfunktion heißt variable Stückkostenfunktion. Es gilt: $\bar{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$.

In der Folge können die folgenden essentiellen Begrifflichkeiten definiert werden:

Definition Betriebsminimum- und Optimum

Gegeben seien die Funktionen der variablen Stückkosten $\bar{K}_v$ und die Stückkostenfunktion $\bar{K}$.

1. Das Minimum der variablen Stückkostenfunktion $\bar{K}_v$ heißt Betriebsminimum.
2. Das Minimum der Stückkostenfunktion $\bar{K}$ heißt Betriebsoptimum.

Weiters gilt:

3. Das Minimum der variablen Stückkostenfunktion kennzeichnet die kurzfristige Preisuntergrenze.
4. Das Minimum der Stückkostenfunktion kennzeichnet die langfristige Preisuntergrenze.

Die kurzfristige Preisuntergrenze wird mit diesem Funktionswert erreicht, da beim Verkauf eines Produktes zu diesem Preis ausschließlich die variablen Kosten gedeckt werden, langfristig allerdings aufgrund der Fixkosten ein Verlust zu erwarten wäre.

Die langfristige Preisuntergrenze wird mit dem Minimum der Stückkosten deswegen erreicht, da sowohl die Fixkosten, als auch die variablen Kosten mit diesem Preis im Verkauf gedeckt wären.³⁹

Alle bisher erläuterten Informationen können nun mit den bereits beschriebenen Aspekten der Grenzkosten verbunden werden, wodurch sich der folgende Satz formulieren lässt:

Satz Grenzkosten und Stückkosten im Betriebsminimum- und optimum

Sei K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Es gilt:

1. Im Betriebsminimum sind die Grenzkosten und die variablen Stückkosten identisch.
2. Im Betriebsoptimum sind die Grenzkosten und die Stückkosten identisch.

Beweis

Ad 1.:

Da es sich beim Betriebsminimum um einen Extremwert handelt, gilt die notwendige Bedingung $\overline{K}'_v(x) = 0$. Aus der Definition der variablen Stückkosten folgt daher:

$$(\overline{K}_v(x))' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{K_v(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow (K_v(x) \cdot x^{-1})' = 0.$$

Aus der Produktregel folgt:

$$K'_v(x) \cdot x^{-1} + K_v(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = 0$$

Multiplikation mit $x^2 \neq 0$ auf beiden Seiten ergibt:

$$K'_v(x) \cdot x - K_v(x) = 0 \Leftrightarrow K'_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} \Leftrightarrow K'(x) = \overline{K}_v(x).$$

³⁹ vgl. [13], 78f.

Ad 2.:

Da es sich beim Betriebsoptimum um einen Extremwert handelt, gilt die notwendige Bedingung $\bar{K}'(x) = 0$. Aus der Definition der Stückkosten folgt daher:

$$(\bar{K}(x))' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow (K(x) \cdot x^{-1})' = 0.$$

Aus der Produktregel folgt:

$$K'(x) \cdot x^{-1} + K(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = 0$$

Durch Multiplikation mit $x^2 \neq 0$ auf beiden Seiten ergibt sich:

$$K'(x) \cdot x - K(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \Leftrightarrow K'(x) = \bar{K}(x).$$

□

Die folgende Abbildung stellt die algebraische bewiesenen Aussagen dieses Satzes graphisch dar:

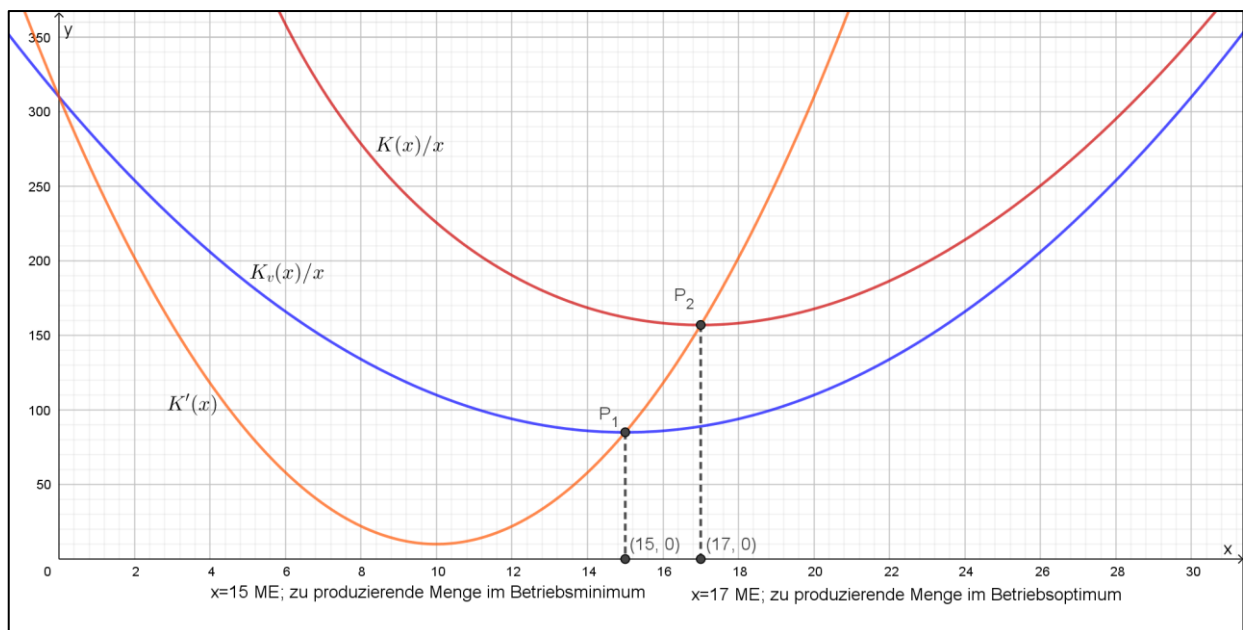


Abbildung 11 Grenzkosten im Betriebsminimum- und Optimum

2.4. Bogen- und Punktelastizität für ökonomische Funktionen

Wie bereits im Abschnitt 2.1. festgehalten, kann mithilfe der Grenzfunktion eine Näherung der absoluten Funktionswertänderung bei Erhöhung der unabhängigen Variablen um eine Einheit ermittelt werden. Allerdings ergeben sich Schwachstellen dieser Berechnung, die aus Sicht eines Anbieters nicht zufrieden stellend sind. Für einen Anbieter ist abgesehen von einer absoluten Änderung diverser Werte auch die relative Änderung von Bedeutung, zum Beispiel wenn das Zusammenspiel von Preisänderungen und Umsatzveränderung betrachtet wird. Hierfür bietet die Bogen- und Punktelastizität ein geeignetes Mittel, nicht nur den Wert einer Änderung zu ermitteln, sondern diesen auch als verhältnismäßig große oder kleine Änderung einzuschätzen.⁴⁰

Definition Bogen-Elastizität

Gegeben sei die Funktion $f(x)$ mit $x \neq 0$ und $f(x) \neq 0$. Ändert sich x um Δx und f dementsprechend um Δf so heißt das Verhältnis $\varepsilon_f(x)$ der relativen Änderungen Bogen-Elastizität von f bezüglich x . Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Obwohl das Ergebnis dieses Quotienten keine Einheit besitzt, also dimensionslos ist, ist dieses aussagekräftig. Der Zahlenwert gibt bei entsprechender Umrechnung an, um wie viel Prozent sich die abhängige Variable durchschnittlich verändert, wenn die unabhängige Variable, ausgehend vom Wert x , um ein Prozent erhöht wird.

Eine vereinfachte Berechnung der Bogen-Elastizität kann über die Betrachtung des Grenzwertes von ε_f für $\Delta x \rightarrow 0$ erreicht werden:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{f} \cdot \frac{x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f} = f' \cdot \frac{x}{f}.$$

⁴⁰ vgl. [30], 302.

Definition Punkt-Elastizität

Sei f eine differenzierbare Funktion mit $f(x) \neq 0$. Dann heißt

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

Punkt-Elastizität von f bezüglich x .⁴¹

Der Zahlenwert der Punkt-Elastizität gibt eine momentane relative Änderung an, welche näherungsweise angibt, um wie viel Prozent sich die unabhängige Variable ändert, wenn die abhängige Variable bezogen auf den Ausgangswert um 1% erhöht wird.⁴²

Obwohl aus ökonomischer Sicht das Ergebnis der Punktelastizität nicht allzu viel Sinn ergibt, so ist die Interpretation der Näherung durchaus aussagekräftig. Daher wird in der Folge vor allem die Punkt-Elastizität verwendet und hierfür bloß der Begriff Elastizität verwendet.⁴³

Aus diesen Überlegungen wird die Elastizität ε_f als Funktion betrachtet. Hinsichtlich ihrer Bedeutung für ökonomische Funktionen wird der Begriff der x – Elastizität von f genutzt. Der Zahlenwert dieser Elastizität wird verwendet, um Aussagen über die Stärke einer Funktionsänderung zu treffen. Setzt man aus Gründen der Übersichtlichkeit eine 1 %-ige Erhöhung der unabhängigen Variable voraus, so ergibt sich die folgende Übersicht der Interpretationen der Funktionswerte:⁴⁴

⁴¹ vgl. [13], 84f..

⁴² vgl. [15], 302.

⁴³ vgl. [13], 85.

⁴⁴ vgl. [13], 86.

Zahlenwert	Reaktion von f	Begriff
$0 < \varepsilon_f(x) < 1$	vergleichsweise geringere relative Änderung	f ist unelastisch bzgl. x
$\varepsilon_f(x) = 0$	keine Änderung	f ist vollkommen unelastisch bzgl. x
$\varepsilon_f(x) > 1$ oder $\varepsilon_f(x) < -1$	vergleichsweise starke relative Änderung	f ist elastisch bzgl. x
$\varepsilon_f(x) = \pm 1$	betragsmäßig gleiche relative Änderung	f ist proportional elastisch bzgl. x
$\varepsilon_f(x) \rightarrow \pm \infty$	unendlich große Änderung	f ist vollkommen elastisch bzgl. x

Abbildung 12 Ökonomische Begriffe für verschiedene Werte der x – Elastizität von f

Als Beispiel soll die Interpretation der Elastizität einer Nachfragefunktion betrachtet werden. Die Elastizität gibt in diesem Fall an, welche Reaktionen bei einer Preiserhöhung eines Produktes zu erwarten sind. Im Falle einer vollkommen unelastischen Nachfrage haben Preiserhöhungen- oder reduktionen keinerlei Auswirkung auf die Nachfrage. Bei einer vollkommen elastischen Nachfrage hat eine 1%-ige Erhöhung des Preises einen unendlich großen Rückgang der Nachfrage zur Folge. Alle weiteren Veränderungen können entweder als vergleichsweise starke Änderung oder betragsmäßig gleiche Änderung interpretiert werden. All diese möglichen Auswirkungen werden als Reagibilität bezeichnet.⁴⁵

In einem weiteren Schritt gilt es zu beurteilen, welche Auswirkungen eine Preiserhöhung auf den Erlös haben könnte.

2.4.1. Elastizität bei Erlösfunktionen

Satz Auswirkungen von Preiserhöhungen auf den Erlös

Gegeben sei eine streng monoton fallende Nachfragefunktion. Es gilt:

1. Liegt für einen Preis eine unelastische Nachfrage vor, so steigt der Erlös bei einer Preiserhöhung.
2. Liegt für einen Preis eine elastische Nachfrage vor, so sinkt der Erlös bei einer Preiserhöhung.

⁴⁵ vgl. [13], 86.

Für den Beweis dieses Satzes wird der folgende benötigt:

Satz Elastizität von Funktion und Durchschnittsfunktion

Zwischen der x – Elastizität einer Funktion f und der x – Elastizität der zugehörigen Durchschnittsfunktion $\bar{f}$ gilt folgender Zusammenhang:

$$\varepsilon_f(x) = \varepsilon_{\bar{f}}(x) + 1$$

Beweis

Es gilt:

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = \bar{f}(x) \cdot x$$

Aus der Produktregel für die 1. Ableitung folgt daher:

$$f'(x) = (\bar{f}(x) \cdot x)' = \bar{f}'(x) \cdot x + \bar{f}(x) \cdot 1 \Leftrightarrow f'(x) = \bar{f}(x) \cdot \left(\frac{\bar{f}'(x)}{\bar{f}(x)} \cdot x + 1 \right).$$

Da der Term $\frac{\bar{f}'(x)}{\bar{f}(x)} \cdot x$ per Definition die x – Elastizität von $\bar{f}$ ist, gilt:

$$f'(x) = \bar{f}(x) \cdot (\varepsilon_{\bar{f}}(x) + 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\bar{f}(x)} = \varepsilon_{\bar{f}}(x) + 1$$

Aus der Definition für die Elastizitätsfunktion ergibt sich:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x)}{\bar{f}(x)}$$

Daher folgt schlussendlich:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{\bar{f}(x)} = \varepsilon_{\bar{f}}(x) + 1$$

□

Für den Beweis des Satzes **Auswirkungen von Preiserhöhungen auf den Erlös** wird auch der Zusammenhang zwischen einer Durchschnittsfunktion und der Preis-Absatzfunktion mit dem Erlös betrachtet. Für $p \neq 0$ gilt:

$$E(p) = x(p) \cdot p \Leftrightarrow x(p) = \frac{E(p)}{p}.$$

Daher gilt aufgrund der Gleichung $\varepsilon_f(x) = \varepsilon_f(x) + 1$:

$$\varepsilon_E(p) = \varepsilon_x(p) + 1$$

Nun folgt mit all den gesammelten Informationen der tatsächliche Beweis für diesen Satz:

Beweis

Fall 1:

Es liege für einen Preis eine unelastische Nachfrage vor, das heißt es gelte $\varepsilon_x(p) > -1$.

Dann folgt:

$$\varepsilon_x(p) + 1 > 0 \Leftrightarrow \varepsilon_E(p) > 0$$

Es liege für einen Preis eine elastische Nachfrage vor, das heißt es gelte $\varepsilon_x(p) < -1$.

Daraus folgt:

$$\varepsilon_x(p) + 1 < 0 \Leftrightarrow \varepsilon_E(p) < 0$$

□

2.4.2. Elastizität bei Kostenfunktionen

Die Elastizität lässt sich auch hinsichtlich von Kostenfunktionen nutzen und lässt weitere Beziehungen erkennen.

Satz Elastizität im Betriebsminimum- und Optimum

Gegeben sei eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Es gelten die folgenden beiden Zusammenhänge:

1. Im Minimum der gesamten Stückkosten (Betriebsoptimum) sind die Gesamtkosten proportional elastisch bezüglich der abgesetzten Menge.
2. Im Minimum der variablen Stückkosten (Betriebsminimum) sind die variablen Stückkosten proportional elastisch bezüglich der abgesetzten Menge.

Beweis

Ad 1.: Für die Elastizitätsfunktion der Kosten gilt für $K(x) \neq 0, x \neq 0$

$$\varepsilon_K(x) = \frac{K'(x)}{K(x)} \cdot x = \frac{K'(x)}{\frac{K(x)}{x}} = \frac{K'(x)}{\bar{K}(x)}$$

Da nach dem Satz Grenzkosten und Stückkosten im Betriebsminimum- und Optimum $K'(x) = \bar{K}(x)$ gilt, folgt daher

$$\varepsilon_K(x) = 1$$

Ad 2.: Für die Elastizitätsfunktion der variablen Kosten gilt:

$$\varepsilon_{K_v}(x) = \frac{K_v'(x)}{K_v(x)} \cdot x = \frac{K_v'(x)}{\frac{K_v(x)}{x}} = \frac{K_v'(x)}{\bar{K}_v(x)}$$

Da nach dem Satz **Grenzkosten und Stückkosten im Betriebsminimum- und Optimum** im Betriebsminimum x_{min} $K'(x) = \bar{K}_v(x)$ gilt und $K'(x) = K_v'(x)$ gilt folgt daher:

$$\varepsilon_{K_v}(x_{min}) = 1.$$

□

Werden die Standardwerke der Wirtschaftsmathematik herangezogen, so wird deutlich, dass die Elastizitätsfunktionen ein Mittel zum Zweck zur Berechnung der notwendigen Werte sind. Allerdings können auf Basis der folgenden Sätze Zusammenhänge zwischen den Elastizitäten der Kosten und Grenzkosten beschrieben werden.⁴⁶

Satz Elastizität von Funktion und Ableitungsfunktion

Es sei die Funktion f im Intervall $[a; b]$ definiert und differenzierbar. Für $x_0 \in [a; b]$ gelte weiterhin $(\varepsilon_f(x_0))' = 0$. Dann gilt:

$$\varepsilon_f(x_0) = \varepsilon_{f'}(x_0) + 1$$

Beweis

Es sei $\varepsilon_f(x)$ differenzierbar, $x \neq 0$ und $f(x) \neq 0$. Aus der Definition der Elastizität folgt:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_f(x_0))' = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} \right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{\bar{f}(x)} \right)' = 0 \\ &\stackrel{\text{Quotientenregel}}{\Leftrightarrow} \frac{f''(x) \cdot \bar{f}(x) - f'(x) \cdot \bar{f}'(x)}{(\bar{f}(x))^2} = 0 \Leftrightarrow f''(x) \cdot \bar{f}(x) = f'(x) \cdot \bar{f}'(x). \end{aligned}$$

Für $\bar{f}'(x)$ gilt nach der Definition für eine Durchschnittsfunktion

$$\bar{f}'(x) = \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}$$

Einsetzen in $f''(x) \cdot \bar{f}(x) = f'(x) \cdot \bar{f}'(x)$ ergibt:

$$f''(x) \cdot \frac{f(x)}{x} = f'(x) \cdot \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} - \frac{f(x)}{f(x)}.$$

⁴⁶ vgl. [13], 89ff.
vgl. [30], 308 ff.

Gemäß der Definition der Elastizität der Grenzfunktion f' und der Elastizität der Funktion f und Einsetzen dieser folgt:

$$\varepsilon_{f'}(x) = \varepsilon_f(x) - 1 \Leftrightarrow \varepsilon_{f'}(x) + 1 = \varepsilon_f(x)$$

□

Kombiniert man den Satz Elastizität von Funktion und Ableitungsfunktion mit dem Satz Elastizität von Funktion und Durchschnittsfunktion erhält man den folgenden Satz:⁴⁷

Satz Elastizität von Ableitungs- und Durchschnittsfunktion

Es sei die Funktion f im Intervall $[a; b]$ definiert und differenzierbar. Für ein $x_0 \in [a; b]$ gelte weiterhin $(\varepsilon_f(x_0))' = 0$. Dann gilt:

$$\varepsilon_{f'}(x_0) = \varepsilon_{\bar{f}}(x_0)$$

Beweis

Für ein x_0 mit $(\varepsilon_f(x_0))' = 0$ gilt nach dem Satz **Elastizität von Funktion und Ableitungsfunktion**:

$$\varepsilon_f(x_0) = \varepsilon_{f'}(x_0) + 1$$

Aus dem Satz **Elastizität von Funktion und Durchschnittsfunktion** ist $\varepsilon_f(x_0) = \varepsilon_{\bar{f}}(x_0) + 1$ bekannt. Durch Gleichsetzen erhält man

$$\varepsilon_{f'}(x_0) = \varepsilon_{\bar{f}}(x_0).$$

□

⁴⁷ vgl. [13], 90f.

Aus $(\varepsilon_K(x_0))' = 0$ folgt durch die Sätze **Elastizität von Ableitungs- und Durchschnittsfunktion und Elastizität von Funktion und Ableitungsfunktion** die folgenden Informationen für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion:⁴⁸

$$1. \varepsilon_K(x_0) = \varepsilon_{K'}(x_0) + 1$$

$$2. \varepsilon_{K'}(x_0) = \varepsilon_{\bar{K}}(x_0).$$

Ergibt sich für den Wert der Ableitung der Elastizitätsfunktion einer Kostenfunktion an der Stelle x_0 null, so sind die Elastizitäten der Grenzkosten und Stückkosten an dieser Stelle gleich und um eins kleiner als die Elastizität der Gesamtkosten. Darüber hinaus ergibt sich der folgende Satz:⁴⁹

Satz Elastizität und Stückkosten

Im unelastischen Bereich der Kosten sinken die Stückkosten.

Beweis

Für die Stückkostenfunktion $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ ist die Definition einer Durchschnittsfunktion erfüllt. Daher gilt:

$$\varepsilon_K(x) < 1 \Leftrightarrow \varepsilon_K(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{\bar{K}}(x) < 0 .$$

□

Analog dazu kann festgehalten werden, dass im elastischen Bereich der Kosten die Stückkosten steigen.

Abschließend für diesen Abschnitt sollen die am Ende zusammengetragenen Informationen anhand eines Beispiels erläutert werden:

⁴⁸ vgl. [13], 92.

⁴⁹ vgl. [13], 92.

Es sei eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100, x \geq 0$$

gegeben.

Zu Beginn werden die Grenzkostenfunktion und die Elastizitätsfunktion der Gesamtkosten, der Grenzkosten und der Stückkosten ermittelt:

$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 60$$

$$\varepsilon_K(x) = \frac{3x^2 - 24x + 60}{x^3 - 12x^2 + 60x + 100} \cdot x$$

$$\varepsilon_{K'}(x) = \frac{6x - 24}{3x^2 - 24x + 60} \cdot x$$

$$\varepsilon_{\bar{K}}(x) = \frac{2x - 12 - \frac{100}{x^2}}{x^2 - 12x + 60 + \frac{100}{x}} \cdot x$$

Es wird ermittelt, dass die Elastizitätsfunktion der Gesamtkosten im unelastischen Bereich zwei lokale Extremstellen $x_1 \approx 1,48$ und $x_2 \approx 3,53$ besitzt sowie im elastischen Bereich bei $x_3 \approx 19,8$ ein (bis auf das Randminimum) globales Extremum erreicht.

Anhand der folgenden Graphik kann gezeigt werden, dass an den Extremstellen von ε_K der Graph von $\varepsilon_{K'}$ genau um den Wert 1 nach unten versetzt ist. Zusätzlich schneiden sich die Graphen der Funktionen von $\varepsilon_{K'}$ und $\varepsilon_{\bar{K}}$.⁵⁰

⁵⁰ vgl. [13], 93f.

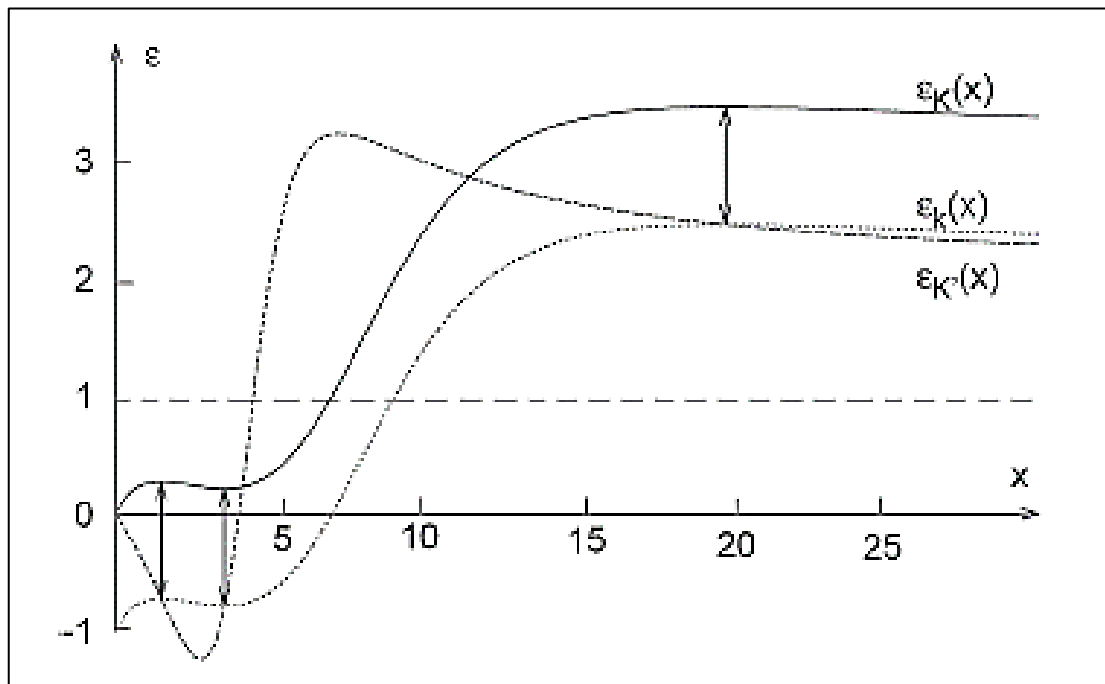


Abbildung 13 Graphen der Elastizitätsfunktionen von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion und zugehöriger Grenzkosten- und Stückkostenfunktion⁵¹.

⁵¹ [13], 94.

3. Aktienkurse und Aktienkursanalyse

3.1. Aktienhandel und Renditen

Bevor dieser Abschnitt verschiedene Modelle erläutert, mithilfe welcher Aktienanalysen durchgeführt werden können, ist es notwendig, einige Grundbegriffe zu klären, welche für Aktienmärkte und deren Handel essentiell sind.

3.1.1. Grundbegriffe

Aktien repräsentieren Eigentumsanteile an einer Aktiengesellschaft. Diese Anteile können durch natürliche Personen oder juristische Personen (Gesellschaften) erworben werden. Addiert man die Werte aller Aktien, so ergibt sich das Grundkapital der Aktiengesellschaft. Als Inhaber einer Aktie, auch Aktionär genannt, hat man Anspruch auf eine an die Ertragslage angepasste Gewinnausschüttung, die Dividende. An dieser Stelle könnten noch weitere wichtige Ebenen einer Aktiengesellschaft sowie deren Aufgabenbereiche erläutert werden, doch beschränke ich mich auf jene Aspekte, welche aus Sicht der weiteren Abschnitte über die mathematische Analyse von Aktienkursen notwendig sind.⁵²

Aufgrund der Vielfalt von Aktien, ist an dieser Stelle eine Übersicht der geläufigsten Arten von Aktien notwendig:

- **Stammaktien:**

Mit dem Besitz einer Stammaktie hat der Inhaber das Recht auf Beteiligungen am Bilanzgewinn, Stimmrecht in der Hauptversammlung und vieles mehr.

⁵² vgl. [12], 55.

- Vorzugsaktien:

Im Vergleich zu Stammaktien hat man als Besitzer einer solchen Vorzugsaktie zwar weniger Mitsprache in diversen Gremien und Bereichen, dafür erhält man in der Regel eine höhere Dividendenauszahlung

- Inhaberaktien:

Diese stellen die Mehrheit der gehandelten Aktien dar, da diese ohne großen Aufwand auf Basis eines Vertrages erworben sowie auch wieder verkauft werden können.

- Namensaktien:

Da diese Aktien auf den Namen des Inhabers ausgestellt werden und auf diese Weise in das Aktienbuch eines Unternehmers eingetragen werden, gestaltet sich der Verkauf schwieriger. Allerdings haben Inhaber von Namensaktien erneut Mitgestaltungsmöglichkeiten bei der Hauptversammlung sowie Anspruch auf eine Dividendenzahlung. Ein Sonderfall stellen sogenannte vinkulierte Namensaktien dar, bei welchen bei Verkaufsüberlegungen eine Zustimmung der Aktiengesellschaft notwendig ist, damit mögliche Verschiebungen der Eigentümerverhältnisse effektiver kontrolliert werden können.⁵³

Der Handel von Aktien wird in der Regel über Aktienmärkte, den Börsen, abgewickelt, hier stehen sich „wörtlich genommen“ Anbieter und Käufer von Aktien gegenüber. In der Praxis gibt es viele verschiedene Arten von Börsen sowie Aktien auch außerhalb bekannter Indizes. Zum einen gibt es neben Präsenzbörsen auch rein elektronisch abgewickelte Aktiengeschäfte sowie Anteile an Aktiengesellschaften, welche aufgrund ihres geringen Wertes außerhalb der bekannten Indizes verkauft werden. Auf diese Sonderformen werde ich allerdings nicht explizit eingehen, da es fachlich wie auch didaktisch für mich sinnvoller erscheint, auf bekannte Indizes sowie bekannte Präsenzbörsen zurückzugreifen. Um an einer Börse zu handeln, benötigt man eine entsprechende Registrierung,

⁵³ vgl. [12], 56.

wobei dies in der Regel durch Banken- und Wertpapierhändler geschieht. An der Börse haben sogenannte Skontroführer die Aufgabe, anhand der eingehenden Aufträge einen marktgerechten Preis für eine Aktie festzulegen. Diesem Thema widme ich mich im Abschnitt 3.1.2. genauer.⁵⁴

Der Preis einer neu ausgegebenen Aktie, der sogenannte Ausgabekurs, kann auf verschiedene Arten ermittelt werden:⁵⁵

- Festpreisverfahren:
Bei dieser Methode einigen sich Inhaber und Vorstand auf einen festgelegten Ausgabepreis.
- Bookbuilding-Verfahren:
Dieses in der Praxis sehr häufig zu findende Verfahren berücksichtigt Wünsche von Inhabern der Aktiengesellschaft und Anleger und gibt eine feste Preisspanne vor, innerhalb dieser der Preis für die neue Aktie anhand der Auftragslage ermittelt wird. Allerdings werden bei diesem Verfahren nur Anbieter als Käufer herangezogen, welche zumindest den tatsächlich ermittelten Ausgabekurs geboten haben.
- Auktion:
Bei dieser Methode wird keine Preisspanne angegeben, sondern es werden alle Angebote absteigend nach ihren Beträgen sortiert. Es werden solange Interessenten mit Aktien ausgestattet, bis alle zu Verfügung stehenden Aktien verteilt sind. Der einheitliche Ausgabekurs ist dann der niedrigste Preis der geboten wurde und noch Anteile erhalten konnte.

Der Kursverlauf von Aktien wird in Form sogenannter Charts graphisch dargestellt. Hierfür wird auf der x – Achse ein bestimmter Zeitpunkt aufgetragen und auf der y – Achse der Kurs, also der zum Zeitpunkt t gültige Wert einer Aktie. Diese Werte können in der Folge durch Linien miteinander verbunden werden, wodurch sich sogenannten Liniencharts ergeben.

vgl. [12], 57.

⁵⁵ vgl. [12], 57f.

Oftmals zur Anwendung kommen auch sogenannte Candlestickcharts, bei welchen die Eröffnungs- und Schlusskurse eines Tages einer Aktie über Rechtecke dargestellt werden. Zusätzlich werden diese Rechtecke farblich befüllt, sofern der Eröffnungskurs über dem Schlusskurs liegt. Die Höchst- und Tiefstkurse innerhalb eines Tages werden durch senkrechte Linien, die an die Rechtecke angeschlossen sind, dargestellt.⁵⁶

3.1.2. Preise von Aktien und der Aktienindex

Die prinzipielle Preisfindung für den Kurs einer Aktie folgt dem allgemeinen Prinzip von Angebot und Nachfrage. Hierfür bündelt der Skontroführer alle eingehenden Kauf- und Verkaufsanträge zu einer Aktie und trägt diese in einem Orderbuch ein. Anhand dieser Daten legt dieser den Preis für eine Aktie fest und veröffentlicht diesen als aktuellen Kurs. Dieser Prozess hat in der Regel eine Dauer von ein paar Sekunden, daher handelt es sich um einen sich ständig veränderlichen Preis auf Basis dieses Prinzips. Da in der Regel ein Ungleichgewicht zwischen der Anzahl an Personen herrscht, welche eine Aktie verkaufen bzw. kaufen möchten, werden diese unterschiedlichen Interessen durch einen Ausgleich des Skontroführers durch einen weiteren Ver- oder Ankauf von Aktien erreicht.⁵⁷

Definition Aktienkurs

Der Aktienkurs einer Aktie AK wird bei gegebener Summe aller Käufer $k(x)$ zu einem bestimmten Preis x und bei gegebener Summe aller Verkäufer $v(x)$ zu einem bestimmten Preis x gemäß der folgenden Formel bestimmt:

$$AK = \max_x \{ \min \{ k(x), v(x) \} \}.$$

Aufgrund der extrem kurzen Zeitfenster, in welchen Aktien ver- und wieder gekauft werden können und der Komplexität dieses Themas, ist es notwendig eine solche Vereinfachung vorzunehmen.

⁵⁶ vgl. [12], 58.

⁵⁷ vgl. [12], 58ff.

Das Gesetz der Nachfrage und das Gesetz des Angebotes sowie das Zusammenspiel von Angebot und Nachfrage bilden eine geeignete Grundlage für diesen Abschnitt. Zusätzlich widmet sich dieses Kapitel primär der Frage, auf Basis welcher Modelle Aktienkurse analysiert werden können und nicht, wie Preise für Aktienkurse entstehen.⁵⁸

In der Praxis werden viele verschiedene Aktien nach unterschiedlichen Kriterien in sogenannten Aktienindizes zusammengefasst. Als Beispiele für solche Indizes sind zum Beispiel der Dow Jones oder der DAX (Deutscher Aktienindex) zu nennen.

Ein Aktienindex gibt an, wie sich der Wert einer Gruppe von Aktien innerhalb dieses Index verändert hat. Es wird zwischen zwei verschiedene Arten von Indizes unterschieden:

- Kursindex:

Bei dieser Art von Index wird nur die Kursveränderung aller Titel abgebildet. Das heißt, es wird die Summe aller gekauften Titel eines Indexes gebildet und mit einem anderen Tag verglichen. Der Dow Jones unterliegt zwar weiteren Berechnungsgesetzen, ist vom Grundprinzip jedoch ein Kursindex.

- Performanceindex:

Bei einem Performanceindex werden zwar wie bei einem Kursindex die Summen aller gekauften Aktien eines Index addiert und durch den Vergleichswert dividiert, doch bei diesem Index wird in die Summe aller Werte auch die Dividendenhöhe hinzugerechnet. Das bedeutet, dass nicht nur die Summe der Verkaufspreise gebildet wird, sondern auch davon ausgegangen wird, dass der Betrag der Dividende erneut in dieselbe Aktie investiert wird und sich somit der Summenwert erhöht.

⁵⁸ vgl. [12], 60.

Die Umsetzung der Berechnung in ein Punktesystem ist bei beiden Indizes gleich, jedoch kann bei einem Performanceindex die Erfolgslage eines Unternehmens effektiver abgebildet werden, da die Höhe der Dividende ein Marker für die Performance eines Unternehmens ist. Es kann folgend definiert werden:⁵⁹

Definition Aktienindex

Für die Berechnung eines Aktienindex I_2 zum Zeitpunkt t_2 bei gegebenen Aktienindex I_1 zur Zeit t_1 und den Gesamtwerten des Aktienkorbes G_1 zur Zeit t_1 und G_2 zur Zeit t_2 gilt für $t_2 > t_1$:

$$I_2 = \frac{G_2}{G_1} \cdot I_1.$$

Aufgrund der unterschiedlichen Facetten, welche eine Analyse von Aktienkursen birgt, sind die reinen Aktienkurse oftmals ungeeignet, um Prognosen zu erstellen. Daher bildet die Rendite einer Aktie ein wirksames Grundgerüst für alle weiteren Überlegungen. Eine einfache Rendite beschreibt das Verhältnis von Gewinn und Einsatz bzw. Verlust und Einsatz für einen beliebigen aber fixen Zeitraum, wie zum Beispiel ein Tag oder ein Jahr: ⁶⁰

Definition einfache Rendite

Die einfache Rendite E_a^b im Zeitraum $[t_a; t_b]$ wird aus den Kursen S_a am Anfang und S_b am Ende des Zeitraums gemäß der folgenden Rechnung berechnet:

$$E_a^b = \frac{S_b - S_a}{S_a}$$

Einfache Renditen haben den Vorteil, dass sie eine anschauliche Vorstellung des Verlaufes einer Aktie liefern, da der prozentuelle Verlust oder Gewinn ermittelt wird.

⁵⁹ vgl. [12], 61ff.

⁶⁰ vgl. [12], 63.

Aufgrund der folgenden Eigenschaften werden in der Praxis jedoch logarithmische Renditen bevorzugt, da sie entscheidende Vorteile mit sich bringen:⁶¹

Definition logarithmische Rendite

Die logarithmische Rendite L_a^b im Zeitraum $[t_a; t_b]$ wird aus den Kursen S_a am Anfang und S_b am Ende des Zeitraums gemäß der folgenden Rechnung berechnet:

$$L_a^b = \ln\left(\frac{S_b}{S_a}\right).$$

Zum einen haben logarithmische Renditen den Vorteil der Symmetrieeigenschaft. Dies bedeutet, dass für den Fall, dass sich für den ersten Zeitraum ein Verlust von -1 ergibt, dieser durch einen Gewinn von $+1$ kompensiert werden. Bei einer einfachen Rendite muss ein Verlust von -50% im ersten Zeitraum durch einen Gewinn von 100% ausgeglichen werden.

Betrachtet man eine logarithmische Rendite bei gegebenen festem Anfangskurs S_a als Funktion des Endkurses $S_b = S_a \cdot n$ mit $n \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$L_a^b(n \cdot S_b) = -L_a^b\left(\frac{1}{n} \cdot S_b\right).$$

Grundlage für diese Aussage sind die Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Die bedeutendere Eigenschaft ist die Additivität logarithmischer Renditen, welche folgend formuliert wird, auf Basis des entsprechenden Rechengesetzes für Logarithmen:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

⁶¹ vgl. [12], 63ff.

Satz Additivität logarithmischer Renditen

Die logarithmische Rendite über einen Gesamtzeitraum ist gleich der Summe der logarithmischen Renditen über Teilzeiträume des Gesamtzeitraumes.

Beweis

Es seien $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n$ die Aktienkurse zu den n aufeinanderfolgenden Zeitpunkten $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n$. Für die Summe der logarithmischen Renditen in den $n - 1$ aufeinanderfolgenden Zeitpunkten $[t_1; t_2], [t_2; t_3], \dots, [t_{n-1}; t_n]$ gilt dann:

$$\begin{aligned} L_1^2 + L_2^3 + \dots + L_{n-1}^n &= \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) + \ln\left(\frac{S_3}{S_2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_3}{S_2} \cdot \dots \cdot \frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{S_n}{S_1}\right) = L_1^n \end{aligned}$$

Dabei ist L_1^n die logarithmische Rendite im Gesamtzeitraum $[t_1; t_n]$.

□

Anmerkung zur Notation der folgenden Abschnitte:

Falls nicht explizit erwähnt, handelt es sich in der Folge bei der Bezeichnung Rendite um logarithmische Renditen. Bei nicht festen Zeiträumen werden einfache Renditen mit E und logarithmische Renditen mit L bezeichnet. ⁶²

3.2. Statistik und Aktien

Für die Analyse von Aktienkurse können verschiedene Modelle herangezogen werden. Diese variieren je nach ihrem fachlichen mathematischen Hintergrund und basieren in der Regeln auf Grundsätzen der Stochastik. Hierbei kann wiederum zwischen statistischen Modellen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen unterschieden werden.

⁶² vgl. [12], 64

Zu Beginn werden zwei wichtige Kenngrößen definiert, welche statistische Aussagen über das Verhalten von Aktienkursen bzw. deren Rendite ermöglichen:⁶³

Definition Drift einer Aktie

Es seien $L_0^1 + L_1^2 + \dots + L_{n-1}^n$ die letzten n logarithmischen Renditen einer Aktie bezogen auf den gleichen Zeitraum. Das arithmetische Mittel

$$\bar{L} = \frac{L_0^1 + L_1^2 + \dots + L_{n-1}^n}{n}$$

bezeichnet man als Drift einer Aktie für diesen Zeitraum.

Definition Volatilität einer Aktie

Es seien $L_0^1 + L_1^2 + \dots + L_{n-1}^n$ die letzten n logarithmischen Renditen einer Aktie bezogen auf den gleichen Zeitraum. Die Standardabweichung über die Grundgesamtheit der logarithmischen Renditen

$$s = \sqrt{\frac{(L_0^1 - \bar{L})^2 + (L_1^2 - \bar{L})^2 + \dots + (L_{n-1}^n - \bar{L})^2}{n}}$$

heißt Volatilität einer Aktie für diesen Zeitraum.

Anmerkung zu der Standardabweichung:

Statistisch gesehen ist die empirische Standardabweichung für Anwendungen geeigneter, da diese die Streuung um den erwartenden Wert passender beschreibt. Diese wäre in diesem Sachzusammenhang durch

$$s = \sqrt{\frac{(L_0^1 - \bar{L})^2 + (L_1^2 - \bar{L})^2 + \dots + (L_{n-1}^n - \bar{L})^2}{n - 1}}$$

gegeben.

⁶³ vgl. [12], 65ff.

Allerdings handelt es sich bei der Berechnung der Volatilität um Anwendungen mit großen n und daher gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n-1}{n}} = 1$$

In der Folge kann festgehalten werden, dass für große n die Volatilität näherungsweise gleich der empirischen Standardabweichung ist.

Der Drift als Zentralmaß gibt die durchschnittliche Kursänderung pro Zeitraum an und kann daher als Trendwert für die Entwicklung eines Aktienkurses herangezogen werden. Die Volatilität hingegen ist ein Streuungsmaß und gestattet daher Aussagen über die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Kursänderungen vom Drift. In der Praxis dient die Volatilität als Gradmesser für das Maß des Risikos.

Bei diesen beiden Werten ist es jedoch notwendig vom selben Zeitraum auszugehen. Im nächsten Schritt erfolgt ein Satz, auf Basis dessen eine Kenngröße bezogen auf einen Zeitraum in die Kenngröße eines anderen Zeitraums umgerechnet werden kann.⁶⁴

Satz Zusammenhang Drift und Volatilität

Bezeichnen $\overline{L}_1$ und s_1 die Drift bzw. die Volatilität einer Aktie bezogen auf den Zeitraum der Länge T_1 sowie $\overline{L}_2$ und s_2 die Drift bzw. die Volatilität einer Aktie bezogen auf den Zeitraum der Länge T_2 , so gilt:

$$1. \quad \overline{L}_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot \overline{L}_1$$

⁶⁴ vgl. [12], 65ff.

Wenn zudem die Korrelation zwischen den Renditen annähernd null ist, gilt näherungsweise:

$$2. \ s_2 \approx \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot s_1$$

Beweis⁶⁵

Ad 1.:

Es seien $T = n \cdot T_1 = m \cdot T_2$, $n, m \in \mathbb{R}$ die Länge des gesamten Zeitraumes der zurückliegenden betrachteten Renditen. Daraus folgt:

$$\frac{n}{m} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Es werden zudem mit $(L_0^1)_1, (L_1^2)_1, \dots, (L_{n-1}^n)_1$ die n aufeinanderfolgenden Renditen bezogen auf einen Zeitraum der Länge T_1 und $(L_0^1)_2, (L_1^2)_2, \dots, (L_{m-1}^m)_2$ die m aufeinanderfolgenden Renditen bezogen auf einen Zeitraum der Länge T_2 bezeichnet. Dann gilt aufgrund der Additivität der logarithmischen Renditen:

$$(L_0^1)_1 + (L_1^2)_1 + \dots + (L_{n-1}^n)_1 = (L_0^1)_2 + (L_1^2)_2 + \dots + (L_{m-1}^m)_2.$$

Weiters gilt:

$$\overline{L_2} = \frac{(L_0^1)_2 + (L_1^2)_2 + \dots + (L_{m-1}^m)_2}{m} = \frac{(L_0^1)_1 + (L_1^2)_1 + \dots + (L_{n-1}^n)_1}{m}$$

$$\overline{L_2} = \frac{n}{m} \cdot \frac{(L_0^1)_1, (L_1^2)_1, \dots, (L_{n-1}^n)_1}{n} = \frac{n}{m} \cdot \overline{L_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \overline{L_1}.$$

Ad 2.:

Für den Beweis dieses Teiles des Satzes bediene ich mich eines konkreten Falles, welcher sich jedoch im Laufe des Beweises verallgemeinern lässt.

⁶⁵ vgl. [1], 64

Man betrachte zwölf Zweiwochenrenditen $(L_0^1)_1, (L_1^2)_1, \dots, (L_{11}^{12})_1$ und deren Drift wird als $\overline{L}_1$ bezeichnet sowie deren Volatilität als s_1 bezeichnet. Zusätzlich werden sechs Vierwochenrenditen $(L_0^1)_2, (L_1^2)_2, \dots, (L_5^6)_2$ betrachtet und deren Drift als $\overline{L}_2$ bezeichnet sowie deren Volatilität als s_2 bezeichnet.

Sei wiederum $T = n \cdot T_1 = m \cdot T_2$, $n, m \in \mathbb{R}$ die Länge des gesamten Zeitraumes der zurückliegenden betrachteten Renditen. So gilt:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{n}{m} = \frac{12}{6} = 2.$$

Aufgrund der Additivität der logarithmischen Renditen gilt daher:

$$\begin{aligned} (L_0^1)_1 + (L_1^2)_1 + \dots + (L_{11}^{12})_1 &= (L_0^1)_2 + (L_1^2)_2 + \dots + (L_5^6)_2 \\ s_2^2 &= \frac{((L_0^1)_2 - \overline{L}_2)^2 + ((L_1^2)_2 - \overline{L}_2)^2 + \dots + ((L_5^6)_2 - \overline{L}_2)^2}{6} = \\ &= \frac{[(L_0^1)_1 + (L_1^2)_1 - 2 \cdot \overline{L}_1]^2 + [(L_2^3)_1 + (L_3^4)_1 - 2 \cdot \overline{L}_1]^2 + \dots + [(L_{10}^{11})_1 + (L_{11}^{12})_1 - 2 \cdot \overline{L}_1]^2}{6} \\ &= \frac{[(L_0^1)_1 - \overline{L}_1 + ((L_1^2)_1 - \overline{L}_1)]^2 + [(L_2^3)_1 - \overline{L}_1 + ((L_3^4)_1 - \overline{L}_1)]^2 + \dots + [(L_{10}^{11})_1 - \overline{L}_1 + ((L_{11}^{12})_1 - \overline{L}_1)]^2}{6}. \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren und Vereinfachen erhält man:

$$\frac{((L_0^1)_1 - \overline{L}_1)^2 + \dots + ((L_{11}^{12})_1 - \overline{L}_1)^2 + 2 \cdot \left[((L_0^1)_1 - \overline{L}_1)^2 \cdot ((L_1^2)_1 - \overline{L}_1)^2 + \dots + ((L_{10}^{11})_1 - \overline{L}_1)^2 \cdot ((L_{11}^{12})_1 - \overline{L}_1)^2 \right]}{6}$$

Falls $((L_0^1)_1 - \overline{L}_1)^2 \cdot ((L_1^2)_1 - \overline{L}_1)^2 + \dots + ((L_{10}^{11})_1 - \overline{L}_1)^2 \cdot ((L_{11}^{12})_1 - \overline{L}_1)^2$ gegen null strebt, erhält man

$$\begin{aligned} &= \frac{((L_0^1)_1 - \overline{L}_1)^2 + ((L_1^2)_1 - \overline{L}_1)^2 \dots + ((L_{11}^{12})_1 - \overline{L}_1)^2}{6} \\ &= 2 \cdot \frac{((L_0^1)_1 - \overline{L}_1)^2 + ((L_1^2)_1 - \overline{L}_1)^2 \dots + ((L_{11}^{12})_1 - \overline{L}_1)^2}{12} = 2 \cdot s_1^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow s_2^2 = 2 \cdot s_1^2$$

Daher gilt:

$$s_2 = \sqrt{2} \cdot s_1$$

Führt man den Wert $2 = \frac{12}{6} = \frac{n}{m} = \frac{T_2}{T_1}$ zurück, erhält man die allgemeine Aussage

$$s_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot s_1$$

□

Zusammengeführt werden können diese statistischen Kenngrößen in eine statistische Untersuchung über das Verhalten von Aktien indem die statistische Verteilung einer Aktienrendite analysiert wird:⁶⁶

Man betrachte die Wochenrendite der Daimler Chrysler-Aktie vom 29.12.2000 bis zum 30.11.2001.⁶⁷

Woche Nr.	Datum	Rendite
0	29.12.2000	
1	05.01.2001	0,031
2	12.01.2001	-0,055
3	19.01.2001	0,101
4	26.01.2001	0,081
5	02.02.2001	-0,070
6	09.02.2001	0,060
7	16.02.2001	0,048
8	23.02.2001	-0,043
9	02.03.2001	0,000
10	09.03.2001	0,060
11	16.03.2001	-0,091
12	23.03.2001	-0,034
13	30.03.2001	0,016
14	06.04.2001	0,026
15	13.04.2001	0,019
16	20.04.2001	0,047
17	27.04.2001	-0,009
18	04.05.2001	0,047
19	11.05.2001	0,000
20	18.05.2001	-0,002
21	25.05.2001	-0,011
22	01.06.2001	-0,051
23	08.06.2001	0,001
24	15.06.2001	-0,052
25	22.06.2001	0,014
26	29.06.2001	0,051
27	06.07.2001	-0,011
28	13.07.2001	0,070
29	20.07.2001	0,001
30	27.07.2001	-0,020
31	03.08.2001	-0,040
32	10.08.2001	-0,032
33	17.08.2001	-0,096
34	24.08.2001	0,080
35	31.08.2001	-0,071
36	07.09.2001	-0,064
37	14.09.2001	-0,256
38	21.09.2001	-0,125
39	28.09.2001	0,057
40	05.10.2001	0,125
41	12.10.2001	0,031
42	19.10.2001	-0,017
43	26.10.2001	0,126
44	02.11.2001	-0,082
45	09.11.2001	0,056
46	16.11.2001	0,077
47	23.11.2001	0,096
48	30.11.2001	-0,048

Abbildung 14 Wochenrenditen der Daimler Chrysler Aktie

⁶⁶ vgl. [12], 64.

⁶⁷ vgl. [1], 52.

Für die Anzahl an Klassen gibt es keine verbindlichen Berechnungsregeln. Ich orientierte mich für die Klassenanzahl k an $k \approx 5 \cdot \log n$ sowie für die Klassenbreite Δx an $\Delta x \approx \frac{1}{k} \cdot (x_{\max} - x_{\min})$. Allerdings passte ich die Berechnungen an, da mir 8 oder 9 Klassen mit der entsprechenden Klassenbreite als zu gering erschien, sodass ich mit 12 Klassen bei einer Klassenbreite von 0,049 arbeitete.

Es ergibt sich die folgende Häufigkeitsverteilung nach Klassen:

Renditebereich	Anzahl Renditen	Relative Häufigkeit
$[-0,300; -0,251]$	1	0,02
$[-0,250; -0,201]$	0	0,00
$[-0,200; -0,151]$	0	0,00
$[-0,150; -0,101]$	1	0,02
$[-0,100; -0,051]$	9	0,19
$[-0,050; -0,001]$	11	0,23
$[0,000; 0,049]$	13	0,27
$[0,050; 0,099]$	10	0,21
$[0,100; 0,149]$	3	0,06
$[0,150; 0,199]$	0	0,00
$[0,200; 0,249]$	0	0,00
$[0,250; 0,300]$	0	0,00

Tabelle 1 Absolute und relative Häufigkeiten der logarithmischen Wochenrendite der DaimlerChrysler Aktie vom 29.12.2000 bis 30.11.2001

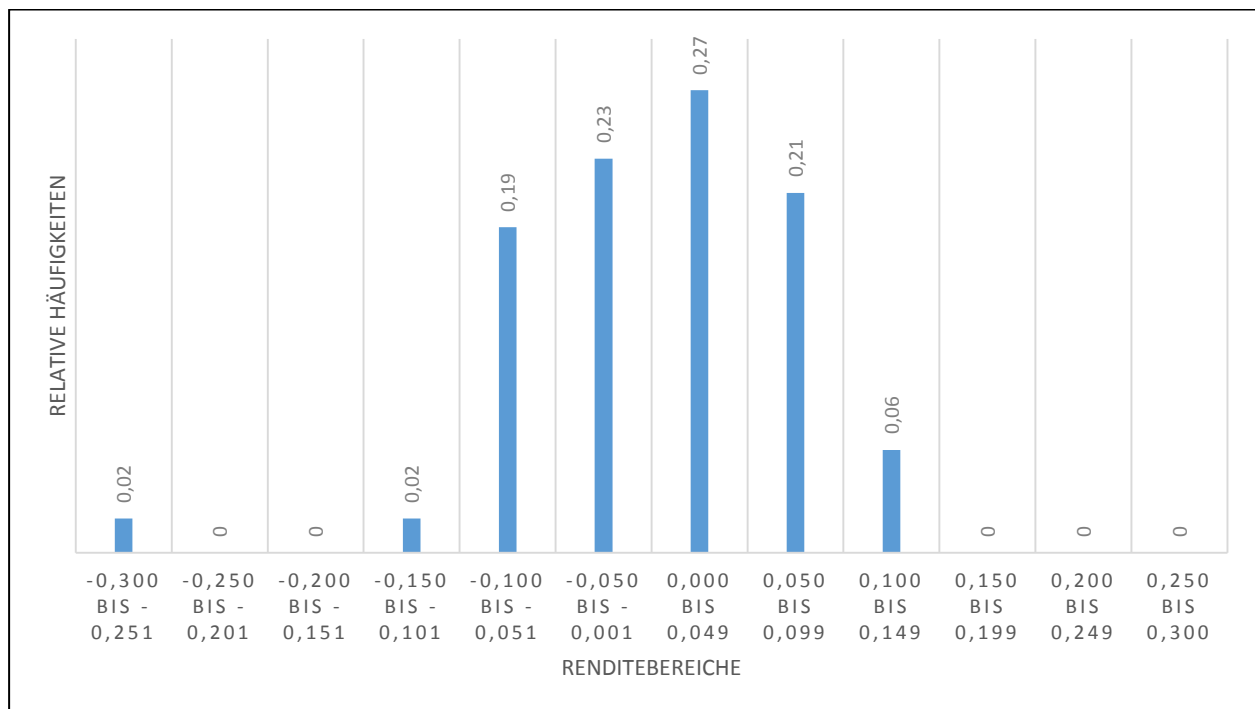


Abbildung 15 Säulendiagramm der logarithmischen Wochenrendite der DaimlerChrysler Aktie von 29.12.2000 bis 30.11.2001

Berechnet man nun den Drift und die Volatilität dieser Wochenrenditen, können aufgrund der sich ergebenden Intervalle Aussagen über das Verhalten des Verlaufes dieser Aktie formuliert werden.

$$\bar{L}_1 = \frac{0,031 + (-0,055) + (0,101) + 0,081 + \dots + 0,056 + 0,077 + 0,096 + (-0,048)}{48}$$

$$\bar{L}_1 = 0,001$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{(0,031 - 0,001)^2 + (-0,005 - 0,001)^2 + \dots + (-0,048 - 0,001)^2}{48}} = 0,070$$

In Anbetracht der Intervalle $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ mit $[-0,069; 0,071]$ in welchem 35 der 48 Renditen liegen und $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ mit $[-0,139; 0,141]$ in welchem 47 der 48 logarithmischen Wochenrenditen liegen, kann formuliert werden, dass die Renditen ziemlich symmetrisch um den Drift dieser Aktie liegen, was auf eine verhältnismäßige geringe Volatilität schließen lässt. Es kann daher festgehalten werden, dass bei dieser Aktie tendenziell keine häufigen großen Schwankungen zu erwarten sind.

3.3. Aktienkurse und Binomialverteilung – Random Walk Modell

An dieser Stelle sei erwähnt, dass es unter keinen Umständen möglich ist, den Verlauf von Aktienkursen hervorzusehen oder zu prognostizieren bzw. ob sich in absehbarer Zeit mehr positive als negative Renditen ergeben. Allerdings bietet die im Abschnitt zuvor erläuterte statistische Analyse der Renditen eine erste Option, um Analysen und Aussagen über die Entwicklung von Renditen zu treffen.

In diesem Abschnitt wird nun ein erstes Modell vorgestellt, mithilfe welchem Wahrscheinlichkeiten berechnet werden können, in welchem Bereich der Wert einer Aktie liegen könnte. Dafür werden die folgenden Annahmen als Basis des Random-Walk Modell formuliert:⁶⁸

- 1. Modellannahme:

Die betrachtete Zeit der Dauer T wird in n Perioden (Tage, Wochen, Jahre) der Länge $\frac{T}{n}$ unterteilt. Der Aktienkurs ändert sich nur am Ende einer Periode, d.h. zu den Zeitpunkten $\frac{T}{n}; 2 \cdot \frac{T}{n}, \dots, (n-1) \cdot \frac{T}{n}; T$.

- 2. Modellannahme:

Nach jeder Kursänderung kann der Kurs S nur jeweils zwei Werte annehmen: Er ist entweder auf uS gestiegen oder auf dS gesunken. Die Aufwärtsbewegung (engl. up) tritt dabei stets mit der Wahrscheinlichkeit p auf, die Abwärtsbewegung (engl. down) mit einer Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$. Dabei seien $0 < d < u$ und der Aktienkurs S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ größer null. Es wird davon ausgegangen, dass auch ein geringeres oder größeres Wachstum, also $1 < d < u$ möglich sei.

- 3. Modellannahme:

In jedem Teilintervall steigt bzw. sinkt der Aktienkurs unabhängig vom bisherigen Kursverlauf.

⁶⁸ vgl. [12], 73.

In der folgenden Abbildung wird ein Baumdiagramm dargestellt, welches die Kursentwicklung einer Aktie in drei Perioden allgemein veranschaulicht:⁶⁹

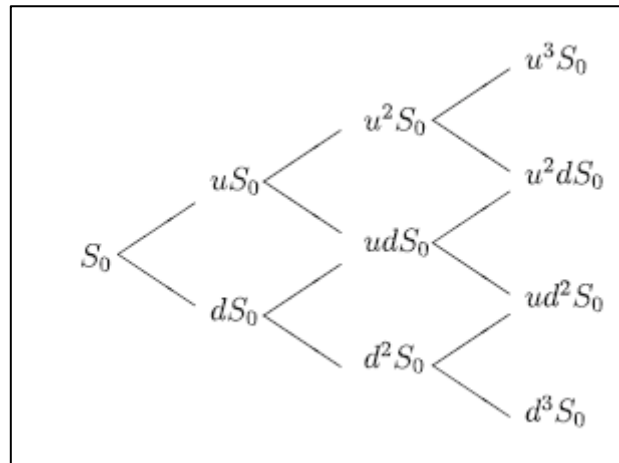


Abbildung 16 Allgemeines Baumdiagramm für die Kursentwicklung einer Aktie mit 3 Perioden im Random Walk Modell⁷⁰

Die Wahrscheinlichkeit für die 4 oben dargestellten Ausgänge kann mithilfe der Pfadregel berechnet werden: Mit $P_{(u^3S_0)}$ wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis bezeichnet, dass die Aktie den Wert u^3S_0 annimmt.

$$P_{(u^3S_0)} = p \cdot p \cdot p = p^3$$

$$P_{(u^2dS_0)} = p \cdot (1-p)^2 + p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p) \cdot p^2 = 3 \cdot p^2 \cdot (1-p)$$

$$P_{(ud^2S_0)} = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot p \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = 3 \cdot p \cdot (1-p)^2$$

$$P_{(d^3S_0)} = (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) = (1-p)^3$$

Offensichtlich handelt es sich bei diesem Zufallsexperiment in diesem Modell bei dem Wert der Aktie zum Zeitpunkt t um eine binomialverteilte Zufallsvariable. Der Aktienkurs im Random-Walk-Modell zum Zeitpunkt $t = T$ ist eindeutig bestimmt durch die Anzahl der Aufwärtsbewegungen, welche binomialverteilt ist mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p . Dies kann formuliert werden, da die einzelnen Bewegungen der Aktie laut der 3. Modellannahme voneinander unabhängig sind. Im Random-Walk-Modell mit n Perioden gilt daher allgemein:

$$P_{(S_T = u^k d^{n-k} S_0)} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ mit } q = 1-p$$

⁶⁹ vgl. [12], 73.

⁷⁰ [12], 73.

Aufgrund der symmetrischen Verteilung von Aktienrenditen um ihren Mittelwert kann daher sinnvollerweise $p = q = \frac{1}{2}$ gewählt werden. Somit ergibt sich für das n – Periodenmodell:

$$P_{(S_T = u^k d^{n-k} S_0)} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Da nun der wahrscheinlichkeitstheoretische Teil geklärt ist, stellt sich weiter die Frage, wie für konkrete Beispiele die Werte für d und u gewählt werden können. Hierfür können die Erkenntnisse aus dem Abschnitt 3.2.1 Aktien und Statistik genutzt werden. Für den Mittelwert der vergangenen logarithmischen Renditen kann der Wert $\bar{L}$ genutzt werden. Da es sich um eine Binomialverteilung handeln soll, wird eine Standardabweichung s_L als „typische“ Abweichung vom Mittelwert festgelegt. Daher kann formuliert werden:⁷¹

- Steigt der Aktienkurs innerhalb eines Zeitraums, so beträgt die „typische“ Rendite $\bar{L} + s_L$.
- Sinkt der Aktienkurs innerhalb eines Zeitraumes, so beträgt die „typische“ Rendite $\bar{L} - s_L$.

Somit gilt für u und d :

$$u = e^{\bar{L} + s_L}$$

$$d = e^{\bar{L} - s_L}$$

Anhand eines einfachen Beispiels kann das Random-Walk-Modell veranschaulicht werden, welches auch in dieser Form direkt für den Unterricht zu verwenden ist:⁷²

⁷¹ vgl. [12], 73f.

⁷² vgl. [12], 74f.

Der Kurs der DaimlerChrysler Aktie schloss am 30.11.2001 bei 47,26€. Der Mittelwert der vergangenen logarithmischen Wochenrenditen lag bei 0,001 und die Standardabweichung bei 0,070. Damit beträgt die logarithmische Rendite im Random-Walk-Modell bei einem Kursanstieg $0,001 + 0,070 = 0,071$ und bei einem Kursabfall $0,001 - 0,070 = -0,069$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $P = 0,50$ steigt der Wert der Aktie auf

$$e^{0,071} \cdot 47,26 = 50,74\text{€}.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = 0,5$ sinkt der Wert der Aktie auf

$$e^{-0,069} \cdot 47,26 = 43,87\text{€}.$$

Setzt man dieses Modell für die Wochen 2 und 3 fort, ergibt sich eine Prognose für den Wert der Aktie mit dem Random-Walk-Modell für diese 3 Wochen, welche in der folgenden Tabelle dargestellt ist:

Aktienkurs am			
Beträge in Euro			
30.11.2001	07.12.2001	14.12.2001	21.12.2001
			58,17
		54,18	
	50,47		50,57
47,26		47,10	
	43,87		43,96
		40,94	
			38,21

Tabelle 2 Random-Walk-Modell für 3 Wochenperioden für die DaimlerChrysler Aktie

Die Wahrscheinlichkeiten für diese Prognosewerte am 21.12.2001 betragen:

$$P_{(58,17)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$$

$$P_{(50,57)} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,375$$

$$P_{(43,96)} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,375$$

$$P_{(38,21)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$$

Das Random-Walk-Modell bietet eine schülergerechte Veranschaulichung dafür, wie mithilfe von einfacher Wahrscheinlichkeitsrechnung der Wert einer Aktie prognostiziert werden könnte. Unabhängig davon, ob in der vorherigen Periode der Aktienkurs gestiegen oder gefallen ist, kann dieser Wert in der nächsten Periode erneut steigen oder sinken. Diese Grundlage bietet eine recht realitätsnahe Vereinfachung dessen, wie sich Aktienkurse verhalten können. Allerdings ist festzuhalten, dass die Berechnung der prognostizierten Werte einer Aktie mit diesem Modell einigen Ungenauigkeiten ausgesetzt ist. Zum einen bleiben die Parameter d und u während aller Prognosen konstant, also statisch.

Dieser Umstand kann als problematisch angesehen werden, da auf kurzfristige Veränderungen wie plötzliche Krisen oder Marktumwälzungen nicht reagiert werden kann und daher das Random-Walk-Modell für langfristige Prognosen eher ungeeignet ist. Zusätzlich basiert dieses Modell auf statistischen Kenngrößen Mittelwert und Standardabweichung, welche wiederum aus Daten der Vergangenheit berechnet wurden. Mithilfe dieser Daten Prognosen für langfristig zu erwartende Werte zu erstellen, ist ebenfalls als problematisch zu betrachten. ⁷³

⁷³ vgl. [12], 75.

3.4. Aktienkurse und Normalverteilung - Black-Scholes Modell

In diesem Abschnitt widme ich mich einem weiteren Modell für mögliche Prognosen von Aktienkursen, welches auf den Grundlagen der Normalverteilung beruht. Daher werde ich anfangs einige Grundbegriffe erklären und mich dann sukzessive dem Black-Scholes Modell annähern. Die Normalverteilung stellt eines der Hauptthemengebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar und bietet die Grundlage für viele Anwendungen aus dem Umfeld der Ökonomie oder den Naturwissenschaften. Für diese Arbeit wird die Normalverteilung als Grundlage für weitere Modelle zur Prognosebildung von Aktienkursen verwendet.

3.4.1. Grundlagen Normalverteilung

Definition normalverteilte Zufallsvariable

Eine stetige Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2 , $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ wenn sie $\forall x \in \mathbb{R}$ folgende Dichte besitzt:

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}.$$

Man schreibt: Eine Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit den Parametern μ, σ^2, X :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Zusätzlich gilt:

Seien μ und σ^2 Parameter einer normalverteilten Zufallsvariable X , $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann gilt:

Erwartungswert $E(X) = \mu$

Varianz $V(X) = \sigma^2$

Die Normalverteilung besitzt die folgenden Eigenschaften:⁷⁴

1. Die Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich $x = \mu$, das heißt es gilt:

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(\mu - x) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(\mu + x)$$

2. Die Dichtefunktion besitzt die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = 0$$

3. Die Funktion φ_{μ,σ^2} besitzt ein Maximum bei $x_m = \mu$ und ihre Wendepunkte liegen bei $x_1 = \mu - \sigma$ und $x_2 = \mu + \sigma$.

4. Eine mit den Parametern μ und σ^2 normalverteilte Zufallsvariable X hat den folgenden Erwartungswert $E(X)$ und die folgende Varianz $V(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) dx = \mu \text{ und } V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) dx = \sigma^2.$$

5. Mit der Dichte der Normalverteilung lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werte von X in einem beliebigen Intervall $[a; b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ liegen, bestimmen:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) dx.$$

Definition Standardnormalverteilung

Die Normalverteilung einer Zufallsvariablen X mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt Standardnormalverteilung. Ihre Dichtefunktion wird mit φ bezeichnet und für diese gilt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

⁷⁴ vgl. [12], 76.

Satz standardnormalverteilte Zufallsvariable

Ist die Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, dann ist die Zufallsvariable $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt.

Beweis

z.z.: $E(Y) = 0$

$$E(Y) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

z.z.: $V(X) = 1$

$$V(Y) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

z.z.: Y ist eine normalverteilte Zufallsvariable

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(a \leq Y \leq b) &= P\left(a \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq b\right) = P(a\sigma + \mu \leq X \leq b\sigma + \mu) \\ &= \int_{a\sigma + \mu}^{b\sigma + \mu} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

Mithilfe der Substitution $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ erhält man:

$$P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \sigma e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y\sigma + \mu - \mu}{\sigma}\right)^2} dy = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Dieses Integral ist das bestimmte Integral der Dichte einer Normalverteilung mit den Parametern 0 und 1.

Daher gilt $Y \sim N(0; 1)$ verteilt.

□

Aus diesem Satz folgt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werte von X in einem beliebigen Intervall $[a; b]$ liegen durch

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

berechnet werden kann.⁷⁵

3.4.2. Normalverteilte Aktienkurse

Als Basis für diesen Abschnitt und die weiteren dieses Kapitels steht die Annahme, dass die Normalverteilung als Modell insofern verwendet werden kann, als dass Aussagen über Wahrscheinlichkeiten getroffen werden können, dass eine beliebige Rendite in ein bestimmtes Intervall fällt.

Anhand eines Beispiels soll eine Modellierung eines Aktienkurses mittels Normalverteilung anschaulich dargestellt werden:

Im Zuge des Beispiels zur logarithmischen Wochenrendite der DaimlerChrysler Aktie wurde bereits ermittelt, dass $\bar{L}_1 = 0,001$ und $s_1 = 0,070$ gilt. Daher gilt für den Erwartungswert $\mu = 0,001$ und für die Varianz $\sigma^2 = 0,0049$ gilt.

Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Wochenrendite zwischen 0,05 und 0,10 liegt:

$$\begin{aligned} P(0,05 \leq X \leq 0,10) &= \Phi\left(\frac{0,10 - 0,001}{0,070}\right) - \Phi\left(\frac{0,05 - 0,001}{0,070}\right) = \Phi(1,4143) - \Phi(0,7) \\ &= 0,920 - 0,758 = 0,162 \end{aligned}$$

Aus der Tabelle 1 kennt man die relative Häufigkeit für eine Rendite im Bereich $[0,05; 0,10]$. Diese beträgt 0,21 und mit dem berechneten Wert 0,162 kann formuliert werden, dass es sich bei diesem Modell um eine recht gute Näherung handelt.

⁷⁵ vgl. [12], 77f.

Diese Näherung und deren Interpretation beruht auf dem Gesetz der großen Zahlen:

Das arithmetische Mittel und die Standardabweichung aus vielen Beobachtungen liegt nahe den Werten für μ und σ . Umgekehrt gilt genauso, dass aus vielen Beobachtungen einer Zufallsgröße Schätzwerte für deren Erwartungswert und deren Varianz ermittelt werden können.⁷⁶

3.4.3. Brownsche Bewegung und Wiener Prozess

Die Brownsche Bewegung ist ein seit dem frühen 19. Jahrhundert bekanntes Phänomen, welches der schottische Botaniker Robert Brown erstmalig beschrieb, als er die Bewegung von Blütenpollen in Wassertropfen beobachtete und feststellte, dass sich diese unregelmäßig hin- und herbewegen. Albert Einstein widmete sich diesem Phänomen aus Sicht der Physik und beschrieb die Brownsche Molekularbewegung eines Teilchens. Im Jahre 1923 beschrieb der US-amerikanische Mathematiker Norbert Wiener erstmalig dieses Phänomen als stochastischen Prozess.

Der sogenannte Wiener Prozess auf Basis der Brownschen Bewegung bietet eine essentielle Grundlage zur Simulation zufälliger Bewegungen, welcher wiederum als Basis des Black-Scholes Modell dient.⁷⁷

⁷⁶ vgl. [12], 79.
vgl. [24], 53ff.

⁷⁷ vgl. [12], 79f.

Definition Wiener Prozess

Sei $W(t)$ mit $t \geq 0$ eine Familie von Zufallsvariablen, die $W(0)$ erfüllt. Wenn $W(t)$ mit $t \geq 0$ eine Brownsche Bewegung ist, dann gilt für alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$:

Die Inkremente

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

sind unabhängig und jede dieser Tafeldifferenzen ist normalverteilt mit

$$\text{Erwartungswert } E(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = 0$$

$$\text{Varianz } V(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = t_{i+1} - t_i.$$

Die Eigenschaft $W(0)$ garantiert, dass der Prozess im Koordinatenursprung beginnt und eine Positionsänderung $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ sowohl in x – als auch in y – Richtung eine normalverteilte Zufallsvariable ist, für die der Erwartungswert null und die Varianz $t - s$ ist. Wichtig ist ebenfalls, dass die Bewegungen in x – als auch in y – Richtung voneinander unabhängig sind. Aus diesen Definitionen und Erläuterungen können weitere Folgerungen formuliert werden:⁷⁸

1. $\forall t \geq 0$ und $h > 0: W_{t+h} - W_t \sim N(0, h)$. Das bedeutet, dass $W_{t+h} - W_t$ normalverteilt ist mit dem Mittelwert 0 und der Varianz h .

Daher gilt: $\Delta W_t := W_{t+\Delta t} - W_t \sim \epsilon \sqrt{\Delta t}$ mit ϵ ist eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.

2. Nun kann das Verhalten von dW_t , also ΔW_t für $\Delta t \rightarrow 0$, untersucht werden.

$$dW_t \sim \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

⁷⁸ vgl. [1], 46ff.

3. Eine Definition für das stochastische Integral für geeignete Funktionen f als Ebenbild zum Ausdruck $dW_t: \int_0^T f(t)dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(t_{j-1}) \cdot (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$ mit $t_j = \frac{jT}{n}$
4. Schritt für Schritt kann nun eine ganze Klasse von stochastischen Prozessen definiert werden, deren Dynamik von einer Brownschen Bewegung bestimmt wird:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t.$$

Allerdings wird in diesem Fall vorausgesetzt, dass $\mu(x, t): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma(x, t): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ deterministische Funktionen sind. Eine deterministische Funktion bestimmt die Funktionswerte dieser Funktion genau, sprich es handelt sich eben bei der Variable x um keine Zufallsvariable. Solche stochastischen Differentialgleichungen und stochastische Prozesse X_t , die $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$ erfüllen, bilden eine essentielle Grundlage für die Modellierung von Aktienkursen.

Satz Itô – Lemma

Ist $f(x, t)$ eine hinreichend glatte Funktion und der stochastische Prozess X durch $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$ definiert, dann gilt für $f(X_t, t)$:

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_t} \mu(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \sigma^2(X_t, t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \sigma(X_t, t) dW_t.$$

3.4.4. Black-Scholes - Modell für Aktienkursprozesse

Wie bereits zuvor beim Random-Walk-Modell handelt es sich beim Black-Scholes-Modell um ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Aktienkursprozessen. Obwohl dieses Modell anfangs noch von der Fachwelt abgelehnt wurde, so zeigte sich, dass mit dieser Methode ein Durchbruch in der Finanzmathematik gelang.

Das Black-Scholes-Modell basiert auf der Annahme, dass eine Renditenentwicklung als stochastischer Prozess beschrieben werden kann, welcher aus einem deterministischen zeitlich linearen und einem zufälligen Anteil besteht. Der deterministische Anteil dieses Renditenprozesses kann als die zu erwartende Rendite verstanden werden. Da allerdings Aktienkurse keinen eindeutig vorgegebenen Muster folgen, sondern einen „random-walk“ vollziehen, unterliegen Renditen einem stochastischen Prozess, der durch den zufälligen Anteil beschrieben wird. Hierfür wird angenommen, dass dieser stochastische Prozess der logarithmischen Renten einem Wiener Prozess folgt:⁷⁹

Defintion Black Scholes Modell

Für den stochastischen Prozess der Renditenentwicklung wird angenommen, dass

$$L_0^t = \mu t + \sigma W_t$$

ist mit $t \geq 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$; μ und σ konstant.

Mit diesem Modell kann die Verteilung der Rendite L_0^t ermittelt werden. Laut Definition der Brownschen Bewegung sowie des Wiener Prozesses gilt $W_0 = 0$ und die Zufallsvariable $W_t = W_t - W_0$ mit den Parametern 0 und t ist normalverteilt. Zusätzlich ist L_0^t linear von W_t abhängig und daher kann mithilfe der Eigenschaften eines Erwartungswertes bzw. einer Varianz für den Erwartungswert formuliert werden:⁸⁰

$$E(L_0^t) = E(\mu t + \sigma W_t) = \mu t + \sigma E(W_t) = \mu t.$$

Analog gilt für die Varianz von L_0^t

$$V(L_0^t) = V(\mu t + \sigma W_t) = \sigma^2(W_t) = \sigma^2 t.$$

⁷⁹ vgl. [12], 80f.

⁸⁰ vgl. [12], 81.

Daher ist die Rendite normalverteilt mit den Parametern μt und $\sigma^2 t$. Weiters sind die Drift $\bar{L}$ und die Volatilität s_L Schätzwerte für die Parameter μ und σ für das Black-Scholes-Modell.

Bei gegebenen Aktienkurs S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ und mit den getroffenen Aussagen über die Wahrscheinlichkeit von L_0^t sind über den Zusammenhang $L_0^t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ Folgerungen über den Kurs S_t für $t > 0$ möglich:

$$S_t = S_0 \cdot e^{L_0^t}.$$

Das folgende Beispiel dient zur Veranschaulichung einer Modellierung eines Aktienkurses mithilfe des Black-Scholes-Modells:

Der Kurs der DaimlerChrysler Aktie schloss am 30.11.2001 bei 47,26€. Der Mittelwert der vergangenen logarithmischen Wochenrenditen lag bei 0,001 und die Standardabweichung bei 0,070.

Da laut Definition die Drift und die Volatilität als Schätzwerte für die Parameter der Normalverteilung verwendet werden können, gilt für den Mittelwert der vergangenen logarithmischen Wochenrenditen der Aktie $\mu_L = 0,001$ und für die Standardabweichung $\sigma_L = 0,070$. Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass der Aktienkurs 4 Wochen später den Wert 48€ übersteigt.

Gemäß dem Black-Scholes-Modell gilt:

$$L_0^4 \sim N(4 \cdot 0,001, 4 \cdot 0,070^2) \text{ sprich } L_0^4 \sim N(0,004; 0,0196).$$

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktienkurs 48€ übersteigt:

$$\begin{aligned} P(S_4 > 48) &= P(e^{L_0^4} \cdot 47,26 > 48) \\ &= P\left(L_0^4 > \ln \frac{48}{47,26}\right) = P(L_0^4 > 0,0155) \stackrel{(*)}{=} 1 - P(L_0^4 < 0,0155) = \\ &= 1 - \phi\left(\frac{0,0155 - 0,004}{\sqrt{0,0196}}\right) = 1 - \phi(0,082) = 1 - 0,5319 = 0,4681. \end{aligned}$$

(*) da $P(L_0^4 > 0,0155) + P(L_0^4 \leq 0,0155) = 1$

$$\Leftrightarrow P(L_0^4 > 0,0155) = 1 - P(L_0^4 \leq 0,0155) \quad \Leftrightarrow \quad P(L_0^4 = 0,0155) = 0$$

$$P(L_0^4 > 0,0155) = 1 - P(L_0^4 < 0,0155)$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 46,81% übersteigt der Kurs der Aktie in 4 Wochen den Wert 48€.

Bis zu diesem Abschnitt wurden bloß Renditen und Kurse im Intervall $[0; t]$ betrachtet. Nun wird die Verteilung der Renditen im Black-Scholes-Modell im Zeitraum $[t; t + u]$ betrachtet:⁸¹

Satz Normalverteilung von Renditen im Intervall $[t; t + u]$

Die Rendite L_t^{t+u} im Zeitraum $[t; t + u]$ ist normalverteilt mit den Parametern μu und $\sigma^2 u$.

Beweis

Es gilt:

$$\ln\left(\frac{S_{t+u}}{S_t}\right) = \ln\left(\frac{\frac{S_{t+u}}{S_0}}{\frac{S_t}{S_0}}\right) = \ln\left(\frac{S_{t+u}}{S_0}\right) - \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = L_0^{t+u} - L_0^t.$$

Man erhält durch $L_0^t = \mu t + \sigma W_t$ (Definition Black-Scholes-Modell):

$$L_0^{t+u} - L_0^t = \mu(t + u) + \sigma W_{t+u} - (\mu t + \sigma W_t) = \mu u + \sigma(W_{t+u} - W_t).$$

Aufgrund von Erwartungswert $E(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = 0$ und

Varianz $V(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = t_{i+1} - t_i$.

⁸¹ vgl. [12], 82f.

ist $\sigma(W_{t+u} - W_t)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern 0 und $\sigma^2 u$. Daher ist die Rendite $L_t^{t+u} = \ln\left(\frac{S_{t+u}}{S_t}\right)$ normalverteilt mit den Parametern μu und $\sigma^2 u$.

□

Heutzutage findet das Black-Scholes-Modell vor allem bei der Berechnung von Optionspreisen praktische Anwendung, da es recht einfach anzuwenden ist. An dieser Stelle ist jedoch darauf hinzuweisen, dass es sich bloß um ein Modell handelt und daher keine exakte Wiedergabe der Realität sein kann, sondern eine je nach Marktsituation passendere oder weniger passendere Annäherung. Folgend sollen einige Schwachstellen sowie moderne Lösungen dieser dargebracht werden:⁸²

- Selbst die Grundvoraussetzung, dass es sich beim Verlauf von Aktienkursen und in der Folge um die Berechnung von Intervallen von Renditen um eine normalverteilte Zufallsvariable handelt, ist dieses Modell aus Sicht statistischer Analysen problematisch. Es hat sich gezeigt, dass die Häufigkeitsverteilung insbesondere in der Nähe des arithmetischen Mittels und an den Rändern im Vergleich zu jener der Normalverteilung wesentlich höher sind. Darunter ist zu verstehen, dass betragsmäßig kleine oder große Kursänderung häufiger auftreten, als dies durch eine Normalverteilung beschrieben wäre.
- Die Annahme, dass während des prognostizierten Zeitraumes die Volatilität konstant bleibt, ist als praxisfern einzuschätzen. Insbesondere bei außergewöhnlicheren Situationen wie Marktumbrüche oder der Informationsfluss vonseiten der Unternehmensführung, ob positiv oder negativ, wird die Volatilität mittelfristig deutlich ändern. Darunter ist zu verstehen, dass trotz Planung die Umsätze deutlich schlechter ausfallen oder eine geplante Fusion das Interesse der Nachfrager erhöht.

⁸² vgl. [12], 82f.

- Damit einhergehend ist auch bei kurzfristiger Prognose des Aktienkursverlaufes zu erwarten, dass aufgrund von zum Beispiel spekulationsbedingten Kurssprüngen die Parameter des Modells unzureichend und unpassend sind.

Im Laufe der Zeit entwickelten sich neue Ideen aus denen Modelle hervorgingen, welche versuchen, diese Problematiken stärker zu berücksichtigen. Ein Ansatz ist zum Beispiel, dass die Volatilität selbst als stochastischer Prozess betrachtet wird. Zusätzlich bietet das Cox-Ross-Rubinstein-Modell eine weitere Möglichkeit, sich trotz des Umstandes, mit diesem erneut ein Binomialmodell zu verwenden, die Volatilität treffender anzunähern.⁸³

3.4.5. Simulation eines Aktienkursprozesses

Abschließend zu diesem Kapitel wird erneut das Black-Scholes-Modell genutzt. In diesem Abschnitt wird die Simulation einer Kursentwicklung auf Basis dieses Modells erläutert und anhand eines Beispiels veranschaulicht.

Es werden erneut die aus dem im Abschnitt 3.2. berechneten logarithmischen Wochenrenditen der DaimlerChrysler Aktie verwendet. Der Kurs der DaimlerChrysler Aktie schloss am 30.11.2001 bei 47,26€ Der Mittelwert der vergangenen logarithmischen Wochenrenditen lag bei 0,001 und die Standardabweichung bei 0,070. Mit diesen möchte ich den Aktienkursprozess für die folgenden 53 Wochen annähern und simulieren

Diese Werte werden erneut als Schätzwerte für die benötigten Parameter μ und σ verwendet. Daher gilt:

$$L_k^{k+1} = 0,001t + 0,070W_t$$

für t in Wochen und W_t ist standardnormalverteilt.

⁸³ vgl. [12], 83

Folglich gilt für die Rendite L_k^{k+1} , dass sie in jedem Zeitintervall $[k; k + 1]$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$L_k^{k+1} = 0,001t + 0,070W_t = 0,001 + 0,070W_t$$

Für den Aktienkurs am Ende eines Zeitintervalls gilt

$$S_{k+1} = S_k \cdot e^{L_k^{k+1}}.$$

Als Startwert für diese Simulation wird der Wert der Aktie in der Höhe von 47,26€ am 30.11.2001 verwendet. Mithilfe eines geeigneten Programmes, ich wählte hierfür Microsoft Office Excel, kann bei Eingabe der entsprechenden Daten über einen Zufallszahlengenerator eine Simulation des Aktienkurses erstellt werden und diese in einem Aktienchart graphisch dargestellt werden.

Notwendige Parameter:

$$S_0 = 47,26\text{€}$$

$$\mu = 0,001$$

$$\sigma = 0,070$$

Anzahl der Variablen: 1

Anzahl der Zufallszahlen: $n = 52$

Verteilung: Standard

Simulation eines Aktienkurses mithilfe des Black-Scholes-Modells			
Woche	Zufallszahlen W_t	Rendite	Aktienkurs in €
0			47,26 €
1	-0,023990038	-0,000679303	47,23 €
2	-0,035739425	-0,00150176	47,16 €
3	0,033103685	0,003317258	47,31 €
4	-0,020532173	-0,000437252	47,29 €
5	-0,142777652	-0,008994436	46,87 €
6	0,020630988	0,002444169	46,98 €
7	0,00601916	0,001421341	47,05 €
8	0,00481192	0,001336834	47,11 €
9	-0,025640782	-0,000794855	47,08 €
10	0,054268593	0,004798802	47,30 €
11	-0,0514283	-0,002599981	47,18 €
12	0,057583531	0,005030847	47,42 €
13	0,016645105	0,002165157	47,52 €
14	0,006781862	0,00147473	47,59 €
15	0,053258315	0,004728082	47,82 €

16	-0,100689284	-0,00604825	47,53 €
17	0,09071715	0,007350201	47,88 €
18	-0,021951497	-0,000536605	47,85 €
19	-0,062945868	-0,003406211	47,69 €
20	-0,027016257	-0,000891138	47,65 €
21	0,058930356	0,005125125	47,89 €
22	0,125055623	0,009753894	48,36 €
23	-0,025969292	-0,00081785	48,32 €
24	0,035381526	0,003476707	48,49 €
25	-0,061624349	-0,003313704	48,33 €
26	0,017772685	0,002244088	48,44 €
27	0,074817864	0,00623725	48,74 €
28	0,009392431	0,00165747	48,82 €
29	0,048603237	0,004402227	49,04 €
30	0,034442154	0,003410951	49,21 €
31	0,011993131	0,001839519	49,30 €
32	-0,001712909	0,000880096	49,34 €
33	0,059330966	0,005153168	49,60 €
34	0,074631486	0,006224204	49,90 €
35	0,000740248	0,001051817	49,96 €

36	-0,050553388	-0,002538737	49,83 €
37	-0,053536315	-0,002747542	49,69 €
38	0,027853979	0,002949779	49,84 €
39	0,070961698	0,005967319	50,14 €
40	-0,033484265	-0,001343899	50,07 €
41	0,049280231	0,004449616	50,29 €
42	-0,017819185	-0,000247343	50,28 €
43	-0,003654123	0,000744211	50,32 €
44	-0,142035322	-0,008942473	49,87 €
45	-0,05979988	-0,003185992	49,71 €
46	-0,050975803	-0,002568306	49,59 €
47	0,157608621	0,012032603	50,19 €
48	-0,126107069	-0,007827495	49,79 €
49	0,027704129	0,002939289	49,94 €
50	0,078822847	0,006517599	50,27 €
51	0,009694519	0,001678616	50,35 €
52	-0,009873839	0,000308831	50,37 €

Tabelle 3 Simulation eines Aktienkursprozesses mit dem Black-Scholes-Modell

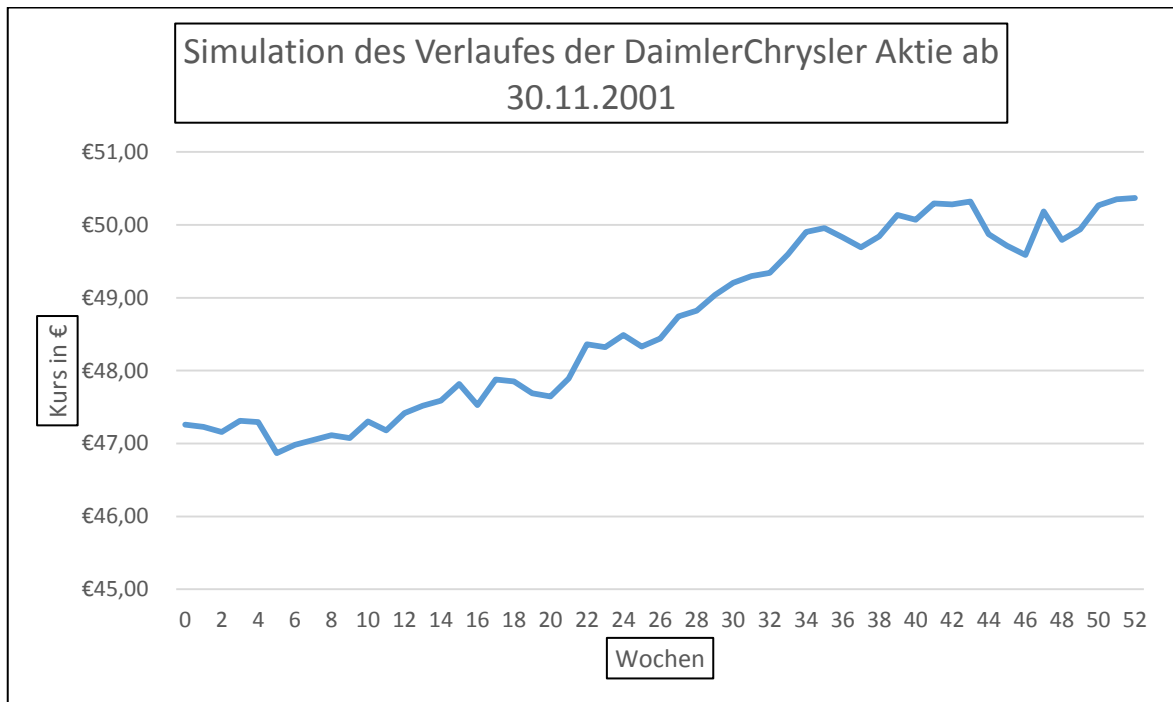


Abbildung 17 Linienchart des simulierten Verlaufes der DaimlerChrysler Aktie

4. Ökonomische Funktionen und Aktienkursanalyse im Mathematikunterricht

In den bisherigen 3 Kapiteln wurden sämtliche fachmathematischen Inhalte dargeboten, welche meiner Meinung nach als Grundlage für eine potentielle Umsetzung im Mathematikunterricht dienen können. Ich widme mich nun der Frage, auf welchen Überlegungen und Ideen meine Absicht basiert, dass die beiden dargestellten Themenfelder der ökonomischen Funktionen und der Analyse von Aktienkursen Möglichkeiten bieten, einen festen Platz im Mathematikunterricht zu erhalten.

4.1. Didaktik der Analysis

4.1.1. Historischer Überblick und Folgen für den Mathematikunterricht

Die Didaktik der Analysis war schon einigen Veränderungen ausgesetzt, welche ausgehend in den 1960er Jahren den primären Fokus auf die Beherrschung rechnerischer Fähigkeiten setzte und diese in teilweise anwendungsfreien Aufgaben unter Beweis gestellt werden mussten. Hierbei ergibt sich allerdings die Problematik, dass die erlernten mathematischen Fähigkeiten „zweckfrei“ durchgeführt werden können, allerdings nicht auf anwendungsbezogene oder gar realitätsnähere Problemstellungen übertragen werden konnten.⁸⁴

Dieser Umstand lässt sich anhand einer üblichen Unterrichtssituation, welche ich selbst bereits öfters erlebte, veranschaulichen: Erteile ich den Auftrag, lokale Extrema, oftmals als Extremwerte bezeichnet, einer Funktion zu berechnen, so ist in der Regel für die Schülerinnen und Schüler klar, wie sie zu einer Lösung kommen.

⁸⁴ vgl. [6], 3.
vgl. [8], 24.

Wird die Aufgabenstellung allerdings über eine Situation dargebracht, dass sich ein Unternehmer einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion und einer Erlösfunktion gegenüber sieht und berechnen möchte, welche der maximal zu erreichende Gewinn sei, so fällt es Schülerinnen und Schülern tendenziell schwer, einen Anfang zu finden und dass die Anwendung der Kriterien eines lokalen Extremum der Weg zum Ziel ist.

In den 1970er Jahren folgte ein Umdenken, welches als die „Neue Mathematik“ bezeichnet wird. Im Zuge dieser Entwicklung wurde der Mathematikunterricht ähnlich einer Einführungsvorlesung einer Universität gestaltet und auf eine mengentheoretische und streng formal geführte Herangehensweise gesetzt. Innerhalb kürzester Zeit wurde allerdings erkannt, dass es Lernenden äußerst schwer fällt, einer formalistischen Logik zu folgen, ohne einen Bezug auf Anwendungen und insbesondere Vorstellungen zu sehen. Aus dieser Kritik heraus entstand ab Mitte der 1970er Jahre eine Denkweise der „Grundvorstellungen“, welche von Rudolf vom Hofe geprägt wurde.⁸⁵

Die Idee der Grundvorstellungen entwickelte sich weiter zu der Leitidee der „fundamentalen Ideen“, welche auch im Teilbereich der Analysis ihre Verwendung finden. Schweiger forderte die Idee der „fundamentalen Ideen“ als aufbauendes Grundmuster für den Unterricht zu verwenden. Darunter ist zu verstehen, dass Grundvorstellungen der Analysis, wie sie etwa über Differenzierbarkeit oder Ableitungen erreicht werden können, spiralförmig im Laufe einer Schulkarriere Anwendung finden und somit Lernende an bisheriges Wissen und vor allem bisherige Grundvorstellungen anknüpfen können und in der Folge auch weiterentwickeln können.⁸⁶

⁸⁵ vgl. [8], 167.

vgl. [32], S.8.

⁸⁶ vgl. [26], 199ff.

vgl. [12], 102.

Schweiger formulierte zusätzlich eine Vorstellung dessen, was unter fundamentalen Ideen verstanden werden kann und wie diese für eine Unterrichtsplanung verwendet werden können:⁸⁷

„Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken, die

- 1. in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,*
- 2. tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern*
- 3. als Idee zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik geeignet erscheinen,*
- 4. den mathematischen Unterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können*
- 5. in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen.“*

Vohns hebt deutlich hervor, dass dieser Prozess der Entwicklung und Veränderung von Grundvorstellungen von entscheidender Bedeutung ist, da anfangs gebildete Grundvorstellungen zu tragfähigeren ausgebaut werden können. Blum präsentiert hierfür die Idee, eine Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate hinsichtlich des Grenzsteuersatzes zu erreichen.⁸⁸

Hussmann und Prediger setzen diese Idee fort und betonen die Grundvorstellung der Ableitung als:⁸⁹

- Lokale Änderungsrate
- Lokale lineare Approximation

⁸⁷ [26], 207.

⁸⁸ vgl. [31], 62.

vgl. [6], 4.

⁸⁹ vgl. [18], 36.

- Tangentensteigung

Alle bisher dargebrachten Informationen bekräftigen mich in der Annahme, dass eine fundamentale Idee der Ableitung über ökonomische Funktionen erreicht werden kann. Die von Hussmann und Prediger erläuterten Grundvorstellungen der Ableitung sind meiner Ansicht nach nicht alle geeignet, um diese auf Grenzfunktionen ökonomischer Funktionen anwenden zu können. Bei der Grundvorstellung als Tangentensteigung ergibt sich die Problematik, dass der Begriff „Tangente“ aufgrund bisheriger Erfahrungen in der Regel als Gerade an einen Kreis mit einem gemeinsamen Punkt wahrgenommen wird und daher die Übersetzung auf einen allgemeinen Ableitungsbegriff problematisch ist.⁹⁰

Die Idee der Ableitung als lokale Linearisierung bietet meiner Meinung nach eine geeignete Möglichkeit, eine Grundvorstellung einer Ableitung über ökonomische Funktionen zu erreichen. Da im Abschnitt 2.1.1. über den Satz **Ableitung einer ökonomischen Funktion** dargebracht wurde, dass in den Wirtschaftswissenschaften der Wert der ersten Ableitung als Näherung für einen Funktionswert bzw. deren Änderung aufgefasst wird, bietet sich meiner Meinung nach auch die Möglichkeit, die Grundvorstellung der lokalen linearen Approximation zu der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate weiterzuentwickeln. Aufgrund der Notwendigkeit, die anfangs über Ableitungen ökonomischer Funktionen dargebrachte lineare Approximation graphisch zu veranschaulichen, ergibt sich automatisch die Möglichkeit, die Tangentensteigung darzubringen. Aufgrund der schrittweisen Einführung weiterer ökonomischer Funktionen folgt die Vorstellung der lokalen Änderungsrate, welche wiederum als Ableitung dazu verwendet werden kann, Inhalte der sogenannten Kurvendiskussion zu erläutern.

Zusammenfassend kann hinsichtlich der Grundvorstellung der Ableitung sowie auf Nutzen bezogen auf ökonomische Funktionen folgendes Konzept dargebracht werden:

⁹⁰ vgl. [34], 27.

Aufgrund der Erfahrungen und Erkenntnisse der Mathematikdidaktik der 1960er und 1970er Jahre ergibt sich meiner Meinung nach die Notwendigkeit, die Idee von Grundvorstellungen und das Konzept der fundamentalen Ideen mit den fachwissenschaftlichen Inhalten der ökonomischen Funktionen zu kombinieren. Das Spiralprinzip nach Bruner bietet eine geeignete Möglichkeit, auf bisherige Grundvorstellungen zurückzugreifen. Schülerinnen und Schüler erfahren bereits im 2. Jahrgang einer weiterführenden höheren Schule den Begriff eines Maximums im Zuge der Auseinandersetzung mit quadratischen Funktionen. Zusätzlich sind ihnen bereits Funktionen höheren Grades und deren fundamentalen Eigenschaften bekannt. Aufgrund der Notwendigkeit, mehr Ökonomie in den Unterricht zu bringen, auf dieses Thema werde ich im Abschnitt 4.1.2. noch näher eingehen, ergibt sich meiner Meinung nach eine Gelegenheit, 3 Inhalte der Oberstufenmathematik einer höheren Schule zu verknüpfen. Ökonomische Funktionen sind im Zuge der Kosten-Preistheorie in der 4. Klasse einer Höheren Lehranstalt für Mode zu lehren. Zusätzlich stellt die Differential- und Integralrechnung ein meiner Ansicht nach ebenfalls sehr umfassendes Themengebiet dar, welches auch in der 4. Klasse unterrichtet werden muss.

Daher würde es sich meiner Ansicht nach anbieten, bevor die Differential- und Integralrechnung besprochen wird, die ökonomischen Funktionen einzuführen. Ihre Eigenschaften können aufgrund des bisher erlernten Wissens über Polynomfunktionen ebenfalls eingeführt werden. In der Folge kann über den Versuch eine Grundvorstellung einer Ableitung zu erlangen die ökonomische Interpretation der ersten Ableitung dargebracht werden, insbesondere deren Bedeutung als Änderung eines Funktionswertes und die Annäherung des Funktionswertes. Für die Notwendigkeit das Themenfeld der sogenannten Kurvendiskussion zu lehren, bietet das bis zu diesem Punkt erarbeitete Fundament die Möglichkeit, sämtliche Inhalte zu verknüpfen und somit den Umstand zu erreichen, anwendungsbezogene Aufgaben zu lösen.

Schlussendlich kann mithilfe des Modellierungsprozesses nach Blum das Ziel erreicht werden, dass annähernd reale Situationen aus dem Bereich der Wirtschaftsmathematik mithilfe ökonomischer Funktionen und der Differentialrechnung gelöst werden können.⁹¹

Die folgenden Abbildungen dienen als theoretische Untermauerung dessen, wie meiner Meinung nach der Anspruch nach anwendungsbezogenen Aufgaben mit der Notwendigkeit einer ökonomischen Grundbildung auf das Konzept fundamentaler Ideen und Grundvorstellungen übertragen werden kann.

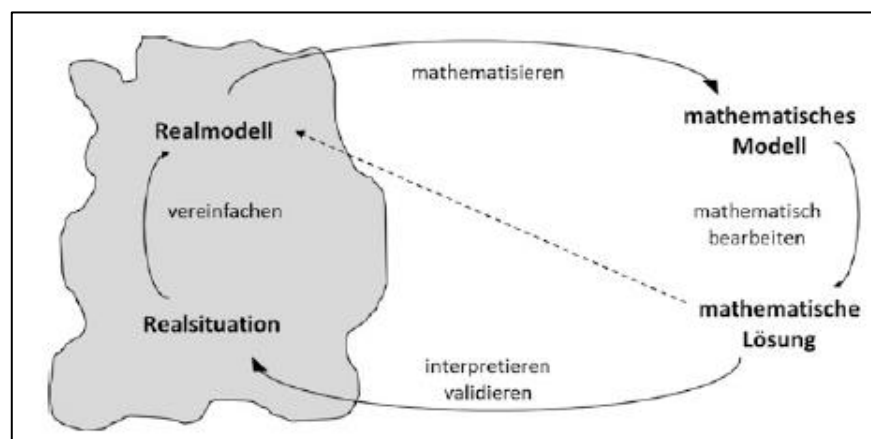


Abbildung 18 Phasen des Modellierungsprozesses nach Blum⁹²

⁹¹ vgl. [9], 26.
vgl. [10], C2.

⁹² [6], 18.

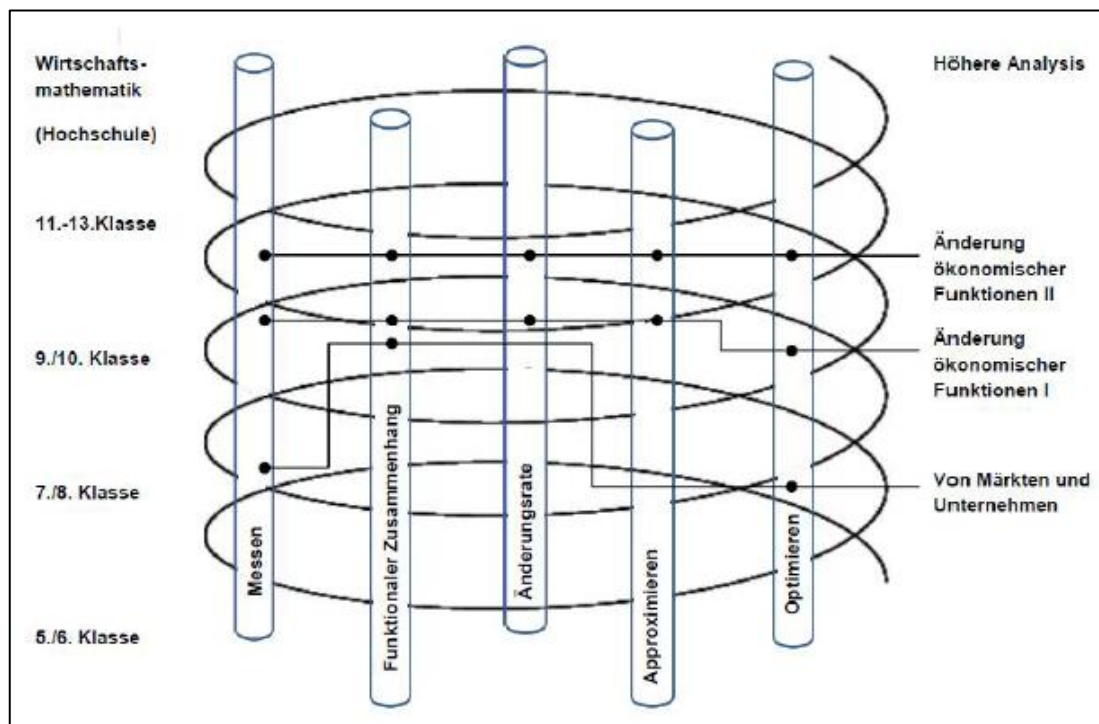


Abbildung 19 Vorschlag eines Spiralcurriculums zur Wirtschaftsmathematik⁹³

Die folgende Abbildung soll zusätzlich eine Übersicht darüber bieten, wie mein Vorschlag der Verknüpfung der in diesem Abschnitt zusammengetragenen Inhalte aussehen könnte:

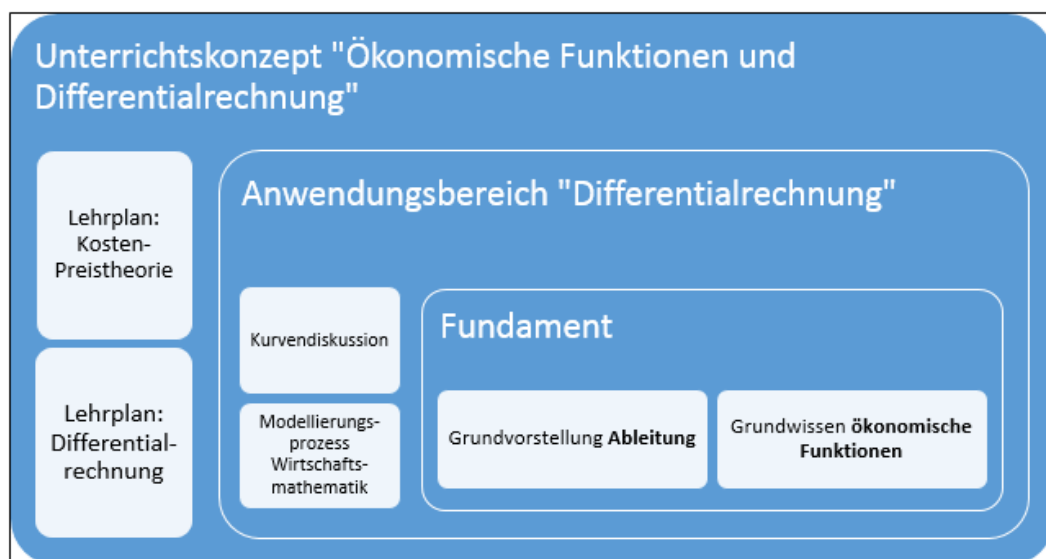


Abbildung 20 Schematische Darstellung eines Unterrichtskonzepts für die Verknüpfung von ökonomischen Funktionen und die Differentialrechnung

⁹³ [14], 119.

4.1.2. Mathematik und ökonomische Allgemeinbildung

Philip Plickert schrieb in einem am 02.05.2016 der Frankfurter Allgemeinen Zeitung erschienen Artikel mit dem Titel „Ein Volk von Ökonomie-Analphabeten“, dass die Mehrheit der Bevölkerung über kaum oder wenig Wissen im Bereich der Ökonomie verfügt. Abschließend hält er fest, dass es auch Aufgabe der schulischen Bildung sei, sich dieser Problematik zu stellen und einer ökonomischen Grundbildung in der Schule mehr Platz zu schaffen.⁹⁴

In diesem Sinne unterstreicht dies meine Absicht, Themenfeldern der Ökonomie eine explizitere Rolle im Mathematikunterricht zu verschaffen. Kombiniert mit dem Umstand, dass auch das Unterrichtsfach „Angewandte Mathematik“ einen Beitrag zu einer Allgemeinbildung leisten soll, können die von Heinrich Winter aufgestellten drei Grunderfahrungen eine Basis für einen als Fundament für ein ökonomisches Grundwissen dienenden Unterricht über ökonomische Funktionen bilden:

(G1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(G2) „mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formen, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“⁹⁵

In (G1) wird darauf Bezug genommen, dass Erfahrungen und Erscheinungen aus dem Alltag als Grundlage für Problemstellungen der Mathematik dienen können. Über diesen Umstand kann klar formuliert werden, dass eine ökonomische Grundbildung aus dem Umfeld des Alltags zu erreichen ist.

⁹⁴ [23], 1.

⁹⁵ [33], 37.

Themenfelder aus dem Bereich der Wirtschaft umgeben auch Jugendliche, ohne sich explizit mit dieser Thematik zu beschäftigen. Man denke an dieser Stelle an frühe Vorstellungen von Selbstständigkeit oder die Konfrontation mit diversen Schlagzeilen über die Performance von Unternehmen.

In (G2) wird die Notwendigkeit beschrieben, die Mathematik in all ihren Facetten kennen zu lernen und zu begreifen. Hier wird klar, dass für eine entsprechende Auseinandersetzung mit Themen der Ökonomie ein Grundwerkzeug mathematischer Fähigkeiten vorhanden sein muss, um überhaupt zu (G3) zu gelangen. Außerdem kann durch diese Grunderfahrung (G2) auch hervorgehoben werden, dass die Mathematik ein eigenes Kulturgut mit eigener Sprache und Schrift ist, welches universell für alle gesprochenen Sprachen dieser Welt zu verwenden ist und durch entsprechende Modelle für (G3) zu verwenden ist.

In (G3) wird der schon festgehaltene Umstand beschrieben, dass Problemlösefähigkeiten anhand anwendungsbezogener Aufgabenstellungen entwickelt werden können. Hierbei steht nicht die reine Anwendung von Rechenregeln im Vordergrund, sondern die Notwendigkeit, aus dem erworbenen Handwerkzeugen Wege und Mittel zu finden, mithilfe entsprechender Modelle Lösungen zu finden. Über diesen anspruchsvollen Schritt kann zusätzlich erreicht werden, dass über die Mathematik hinaus gehende Fähigkeiten erworben werden, was in Bezug auf ökonomische Funktionen automatisch geschieht, da für dieses Thema Grundbegriffe der Ökonomie notwendig sind, welche auch außerhalb des Feldes der Mathematik ihren Nutzen haben.

4.2. Didaktik der Stochastik

An dieser Stelle sei klar festzuhalten, dass für eine Anwendung der Stochastik auf die Analyse von Aktienkursen ein Gerüst an Vorwissen notwendig ist, um Lernende mit dieser Thematik zu konfrontieren. Daher betrachte ich in diesem Abschnitt nicht die Fragestellung, wie mithilfe des Themas „Aktien und Aktienkurse“ fundamentale Ideen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff geschaffen werden können.

Vielmehr erläutere ich, welche fundamentalen Ideen, Grundvorstellungen und in der Folge Ziele des Stochastikunterrichts als Grundlage für eine Auseinandersetzung mit Aktienkursen sein können.

4.2.1. Stochastisches Denken und Ziele des Stochastikunterrichts

Die Bündelung von Fritz Schweiger der These der „fundamentalen Ideen“ nach Bruner wurde bereits im Abschnitt 4.1.1. dargebracht. Da in diesem Abschnitt das stochastische Denken als Grundlage für die Verwendung von Aktienkursanalysen für den Mathematikunterricht näher betrachtet wird, erläutere ich nun auch näher weitere Überlegungen zu fundamentalen Ideen und deren Konsequenzen für den Stochastikunterricht.

Kütting verfasste eine Definition dafür, wie fundamentale Ideen eines allgemeinen Mathematikunterrichtes auf den Stochastikunterricht umgesetzt werden können:

„Die fundamentalen Ideen und Ziele des Stochastikunterrichts sind demnach Leitgedanken, Strategien und Techniken, die essentiell für den Stochastikunterricht sind, die eine Verankerung im Denken des Alltags besitzen, die als durchgängiges Prinzip für Curricula (Spiralprinzip) tragfähig für den Unterricht sind. Darüber hinaus sollen sie historische Bezüge haben.“⁹⁶

Aufgrund dieser Umsetzung der fundamentalen Ideen auf den Stochastikunterricht kann formuliert werden, dass Werkzeuge, die im Laufe eines Unterrichtes auf Basis eines Spiralprinzips erlernt werden, im Alltag verankert sind und einem fundamentalen fachlichen Grundwissen über die Stochastik genügen und darüber hinaus historische Bezüge haben sollten.

Borovcnik versuchte eine weitere Spezifikation dieser fundamentalen Ideen für den Stochastikunterricht, indem er einen expliziten Katalog fundamentaler Ideen skizzierte, welcher einen didaktischen Blick auf diese Thematik zulässt.

⁹⁶ [20], 88-89.

Daher können die folgenden Punkte als Anleitung für einen Stochastikunterricht verstanden werden, welcher die Herausbildung fundamentaler Ideen zulässt:⁹⁷

- Ausdruck von Information über eine unsichere Sache
- Revidieren von Informationen unter neuen (unterstellten) Fakten
- Offenlegen verwendeter Informationen
- Verdichten von Informationen
- Präzision von Informationen – Variabilität
- Repräsentativität partieller Informationen
- Verbesserung der Präzision

Stochastisches Denken wird von Lothar Sachs wie folgt definiert:⁹⁸

„Stochastisches Denken [...] ist die kritische Einschätzung der Variabilität und Unsicherheit, Größen werden als Zufallsvariable gedacht, ihre mögliche Entstehung wird modelliert und im Gegensatz zur deterministischen Mathematik werden unter Einbeziehung der Unsicherheit mithilfe mathematischer Modelle Entscheidungssituationen transparent gemacht, wobei Wahrscheinlichkeitsaussagen resultieren, z.B. als Vertrauensbereich oder anhand von Hypothesentests. Stochastisches Denken ist somit das Bestreben, über Variabilität und Unsicherheit Klarheit zu gewinnen. Unsicheres Wissen mit dem Wissen um Größe und Anteil der Unsicherheit ist nützliches Wissen.“

Sachs ist zusammengefasst der Ansicht, dass die kritische Auseinandersetzung mit Unsicherheiten und die damit verbundene Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen auf Basis von mathematischer Modelle als stochastisches Denken definiert werden kann.

⁹⁷ vgl. [7], 23f.

⁹⁸ [25], 24.

Für diesen Abschnitt kann also festgehalten werden, dass mithilfe von im Alltag verbundener Erfahrungswerte fundamentale Ideen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff geschaffen werden können, welche im Zuge eines entsprechenden Unterrichtes entstehen können. Hierfür steht vor allem die aufgabenbezogene Verarbeitung von Informationen im Vordergrund, welche präzisiert und repräsentativ für Modelle genutzt werden können.

Stochastisches Denken bündelt schlussendlich all diese eben erwähnten Aspekte zu Fähigkeiten, welche eine kritische Auseinandersetzung dieser verarbeiteten Daten erlauben und die auf Basis entsprechender und geeigneter Modelle formulierten Interpretationen, Wissen über Unsicherheiten lukrieren.

4.2.2. Aktienkursanalyse im Stochastikunterricht

Ich bin der Ansicht, dass die Verknüpfung mit dem Alltag insbesondere in der Anfangsphase des Stochastikunterrichts notwendig ist, da Zufallsexperimente sehr einfach im täglichen Leben zu finden sind. Im nächsten Schritt jedoch, auch im Sinne einer anwendungsbezogenen Auswahl von Aufgabenstellungen, kann auch die Beschäftigung mit Aktienkursen einer Verankerung im Alltag standhalten, da der Aktienhandel als Teil der ökonomischen Grundbildung stärker in den Fokus rücken sollte. Das Spiralprinzip kann insofern eingehalten werden, als dass nach einer theoretischen oder anwendungsbezogenen Einführung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Aufgabenstellungen aus dem Bereich der Aktienkursanalyse mithilfe der Binomial- und Normalverteilung gelöst werden können. Das Random-Walk-Modell stellt hierfür sicherlich eine besonders geeignete Möglichkeit dar, da es sich um ein Modell aus der Binomialverteilung handelt und dementsprechend Lernenden gerecht aufgearbeitet werden kann. Hinsichtlich der Normalverteilung und dem Black-Scholes Modell kann festgehalten werden, dass es sich hierbei ohne Zweifel um einen großen fachwissenschaftlichen Sprung handelt, der wohl überlegt und entsprechend aufbereitet werden muss. Allerdings bin ich der Ansicht, dass bei einer reinen Fokussierung auf das Rechenwerkzeug dieses Modells eine Anwendung im Unterricht möglich ist, da der Anspruch der Anwendungsbezogenheit dem entsprechenden Aufwand rechtfertigt.

Humenberger und Reichel unterstreichen allerdings die Notwendigkeit, dass eine zufriedenstellende Anwendungsorientierung nur dann möglich ist, wenn über ausreichende grundlegende mathematische Fähigkeiten verfügt werden kann.⁹⁹

Daher erscheint es unbedingt erforderlich, gerade bei einem anspruchsvolleren Thema, welches tendenziell in keinen Schulbuch Platz findet, ein ausreichendes Grundwissen vorhanden sein muss. Allerdings bin ich auch der Ansicht, dass vor allem am Beginn des Themas Normalverteilung im Unterricht in der Schule einführende Aufgaben besprochen werden, welche aus Sicht von Lernenden derart „anwendungsfremd“ erscheinen, dass eine Verschiebung in Richtung Aktienkurse anzudenken wäre.

Ein weiterer Aspekt der Bedeutung von Aktienkursanalysen im Stochastikunterricht ist die Behandlung von Simulationen. Unter Simulationen kann nach Tietze/Klika/Wolpers „ein Verfahren verstanden werden, dass mithilfe von geeigneten Zufallsgeneratoren eine stochastische Situation „nachspielt“, um so ein Modell für diese Situation zu erhalten, das dann zur weiteren Analyse und zur Prognose eingesetzt werden kann.“¹⁰⁰

Zur Simulation eines stochastischen Prozesses formuliert Kütting das folgende Schema:¹⁰¹

- Entwicklung eines für das Problem passenden Simulationsmodells,
- wiederholte Zufallsexperimente anhand des im ersten Schritt erstellten Modells,
- Auswertung der Ergebnisse und Interpretationen des Schätzwertes als Lösung des Problems.

⁹⁹ vgl. [17], 18.

¹⁰⁰ vgl. [9], 29.

¹⁰¹ [21], 248.

Da es bisher kaum Studien über den Erfolg oder Misserfolg solcher Simulationen im Stochastikunterricht gibt, teile ich an dieser Stelle bloß meine Einschätzung, dass Simulationen eine geeignete Verknüpfung von Inhalten des Mathematikunterrichtes und einem entsprechenden Technologieeinsatz ermöglichen, welche als Veranschaulichung dienen können, jedoch die Modellbildung bloß vereinfachen, aber nicht ersetzen können.¹⁰²

Schlussendlich sei in diesem Abschnitt noch erwähnt, dass die Erarbeitung des Themas Analyse von Aktienkursen auch den Zweck erfüllt, analog zum Thema „Ökonomische Funktionen und Differentialrechnung“, dass sich Schülerinnen und Schüler eingehender mit Themen der Finanzwirtschaft auseinandersetzen.

Anhand einiger Studien wurde erkannt, dass das Wissen um den Aktienmarkt in der Bevölkerung mindestens genauso lückenhaft ist wie das Wissen um ökonomische Grundsätze.

Erschwerend kommt hinzu, dass beim Themenfeld Wirtschaft nicht jede Person im wirklichen Berufsleben damit konfrontiert sein wird und daher eine langfristige Notwendigkeit nicht gesichert ist. Beim Thema „Aktien“ kann aber klar festgehalten werden, dass die finanzielle Grundbildung bei einem fundamentalen Thema wie „Sparen“ beginnt. Dieser Umstand in Verbindung mit der momentanen Ertragslage bei Sparbüchern oder ähnlichen Sparformen macht deutlich, dass eine Auseinandersetzung mit Aktien, unter Wahrung gewisser Grundsätze wie dem Unterschied zwischen Sparen und Spekulieren, durchaus zu einer finanziellen Sicherheit oder zumindest Alternativen darbringt. Zusätzlich kann eine Auseinandersetzung mit dem Thema „Aktien“ auch eine Orientierungshilfe bieten, da heutzutage ein immenses Angebot an alternativen Sparformen herrscht und insbesondere in der Schule kaum Raum geboten wird, diese Unsicherheiten durch Wissen zu lösen.

¹⁰²vgl. [11], 102f.

Schlussendlich bietet die Analyse von Aktienkursen noch die Möglichkeit, gemäß dem Spiralmodell sowie unter dem Blickfeld einer innerhalb der Mathematik vernetzten Lösungskompetenz, dass bereits erlernten Wissen aus der Rentenrechnung oder auch aus einfachster Prozentrechnung für dieses Themenfeld zu nutzen und weiter zu vertiefen. ¹⁰³

¹⁰³ vgl. [11], 65ff.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Versuch unternommen, zwei auf den ersten Blick unterschiedliche Themengebiete fachmathematisch zu erarbeiten um diese in der Folge für didaktische Überlegungen hinsichtlich der Umsetzbarkeit und des Nutzens davon zu verwenden.

Im ersten Teil wurde deutlich, dass ökonomische Funktionen auch ohne großes Hintergrundwissen über die Differentialrechnung eingeführt werden können und vielmehr den Zweck erfüllen, eine ökonomische Grundbildung zu erwirken. In der Folge wurde die Frage beantwortet, auf welche Art und Weise die erste Ableitung für die zuvor erläuterten ökonomischen Funktionen verwendet werden kann und welche Konsequenzen und Folgerungen hinsichtlich des Zusammenhangs von Preis, Kosten, Erlös und Gewinn formuliert werden können.

Im Abschnitt 3 wurde erneut über die Darstellungen essentieller Grundbegriffe den Handel mit Aktien ein Schritt Richtung ökonomischer Allgemeinbildung erwirkt. In der Folge wurden über zum einen statistische Modelle als auch Modelle aus dem Themenfeld der Wahrscheinlichkeitsrechnung fachmathematisch erarbeitet. Das Random-Walk-Modell als auch das Black-Scholes-Modell mit anschließender Simulation wurden als geeignete stochastische Modelle näher herausgearbeitet, um diese auch im Mathematikunterricht verwenden zu können.

Abschließend wurde im Zuge des didaktischen Inputs festgestellt, dass die Bildung einer Grundvorstellung „Ableitung“ mithilfe einer ökonomischen Allgemeinbildung über ökonomische Funktionen erreicht werden kann und zusätzlich das Feld der anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen aus dem Bereich der Differentialrechnung bedient werden kann. Zusätzlich wurde deutlich, dass Modelle für die Analyse von Aktienkursen zwar bereits fundierte Grundvorstellungen benötigen, aber mithilfe eines dem Anspruch erfüllenden Unterrichtes, stochastisches Denken zu bilden und zu fördern, auch anspruchsvollere Modelle gelehrt werden können.

Abstract

In this thesis an attempt was made to develop two mathematical subject areas which at first glance appear different in order to subsequently use them for didactic considerations with regard to the feasibility.

In the first part it became clear that economic functions can also be introduced without deep background knowledge about differential calculus and that they serve the purpose of achieving basic economic education.

Subsequently, the question was answered how the first derivative can be used for the economic functions explained above and what consequences and conclusions can be formulated with regard to the relationship between price, cost, revenue and profit.

In section 3, a step towards general economic education was again achieved through the presentation of essential basic terms for trading stocks. Furthermore, statistical models as well as models from the field of probability calculation were developed on the basis of technical mathematics. The Random-Walk model and the Black-Scholes model with subsequent simulation were presented particularly as suitable stochastic models so that they could also be used in mathematics lessons.

Finally, it was determined in the course of the didactic input that the formation of a basic concept of "derivation" can be achieved with the help of an economic general education about economic functions and that the field of application-related tasks from the area of differential calculus can also be served. In addition, it became clear that models for the analysis of share prices already require well-founded basic ideas, but with the help of teaching which fulfills the requirement to develop and promote stochastic thinking, even more sophisticated models can be taught.

Literaturverzeichnis

- [1] M.ADELMAYER, E.WARMUTH, *Finanzmathematik für Einsteiger. Von Anleihen über Aktien zu Optionen*. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2005.
- [2] H.ALBRECHER, H.BINDER, P.MAYER, *Einführung in die Finanzmathematik*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [3] R.ALLEN, *Mathematik für Volks- und Betriebswirte*. Duncker und Humblot Verlag, Berlin, 1972.
- [4] B.BECK, *Mikroökonomie*. Vdf Hochschulverlag, Zürich, 2001.
- [5] J.BLACK, J. BRADLEY, *Essential Mathematics for Economists*. Wiley Verlag, New York, 1984.
- [6] W.BLUM, *Quo Vadis Analysisunterricht? Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven für das Jahr 2000*. In: ÖMG – Didaktik – Reihe 24: 3-19. Wien, 1995.
- [7] M. BOROVCNIK, *Fundamentale Ideen als Organisationsprinzip in der Mathematik-Didaktik*. In: K. Aspetsberger, Didaktikkommission (Hrsg.), Vorträge der 19. Lehrerfortbildungstagung am 4. April 1997 am Institut für Mathematik an der Universität Wien. Österr. Mathemat. Ges., Wien, 17-32, 1997.
- [8] R.BRUDER, L.HEFENDEHL-HEBEKER, B.SCHMIDT-THIEME, H.-G. WEIGAND, *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer Verlag, Heidelberg, 2015.
- [9] J. BRUNER, *Der Prozess der Erziehung*. Berlin Verlag, Berlin, 1973.
- [10] BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG. *Lehrpläne für berufsbildende Schulen*. [Online]. Available: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20009369> [Zugriff am 09.07.2020]

- [11] P.DAUME, *Finanzmathematik im Unterricht. Aktien und Optionen: Mathematische und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien.* Vieweg und Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [12] P.DAUME, *Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht. Band 1 – Zinsen, Steuern und Aktien.* Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016.
- [13] P.DAUME, *Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht. Band 2 – Optionen und ökonomische Funktionen.* Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.
- [14] J.DENNHARD, *Wirtschaftsmathematik im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I und II. Eine Analyse mathematischer und ökonomischer Inhalte zur Konzeption von Unterrichtseinheiten mit wirtschaftsmathematischer Aufgabenstellung.* Dissertation, Flensburg, 2016.
- [15] H.-M.DIETZ, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.* Springer Verlag, Wiesbaden, 2012.
- [16] H.DILLER, *Preispolitik.* Kohlhammer Verlag, Stuttgart, 2008.
- [17] H.HUMENBERGER, J.REICHEL, *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1995.
- [18] S.HUSSMANN, S. PREDIGER, *Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen.* In: Praxis der Mathematik in der Schule, Jg. 52, Heft 31, 35-38, 2010.
- [19] T.HUTSCHENREUTER, *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre.* Springer Gabler Verlag, Wiesbaden, 2009.

- [20] H. KÜTTING, *Stochastisches Denken in der Schule – Grundlegende Ideen und Methoden. Ausgearbeitete Fassung eines auf der 17. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Koblenz (1983) gehaltenen Vortrags*. In: *Der Mathematikunterricht. Beiträge zu seiner fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung*. Jg. 31. Heft 4, 87-107, 1985.
- [21] H. KÜTTING, *Didaktik der Stochastik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik*. Band 23, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim, 1994.
- [22] W.LACHMANN, *Volkswirtschaftslehre 1*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [23] P. PLICKERT. *Ein Volk von Ökonomie-Alphabeten*. In: *Frankfurter Allgemeinen Zeitung*, 02.05.2020. [Online]. Available: <https://www.faz.net/aktuell/wirtschaft/die-deutschen-haben-eine-wissensluecke-bei-der-wirtschaft-14210013.html> [Zugriff am 06.07.2020]
- [24] A.ROHDE, *Wahrscheinlichkeitstheorie 2. Kapitel 7 – Die Brownsche Bewegung*. Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2006/07. Universität Heidelberg. [Online]. Available: <https://www.math.uni-heidelberg.de/studinfo/rohde/KAPITEL7.pdf> [Zugriff am 06.07.2020]
- [25] L.SACHS, *Einführung in die Stochastik und das stochastische Denken*. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 2006.
- [26] F. SCHWEIGER, *Fundamentale Ideen: Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik*. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, Jg. 13, Heft 2, 199–214, 1992.
- [27] I.TERVEER,S.TERVEER, *Analysis-Brückenkurs für Wirtschaftswissenschaftler*. UVK-Lucius Verlag, Konstanz, 2011.
- [28] U.-P. TIETZE, M.KLIKA, H.WOLPERS, *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*, Vieweg, Wiesbaden, 1982.

- [29] U.-P. TIETZE, H. WOLPRES, M. KILKA, *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3 – Didaktik der Stochastik*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2002.
- [30] J.TIETZE, *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik. Das praxisnahe Lehrbuch – bewährt durch seine brillante Darstellung*. Vieweg-Teuber Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [31] A. VOHNS, *Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen*. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg. 26, Heft 1, 52-79, 2005.
- [32] R.VOM HOFE, *Grundbildung durch Grundvorstellungen*. In: *Mathematik lehren* Nr. 118: 4-8, Hannover, 2003.
- [33] H. WINTER, *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. In: *Mitteilungen und Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Nr.61, 37-46, 1996.
- [34] I.WITZKE, *Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes*. In: *Der Mathematikunterricht*, Jg.60, Heft 2, 19-32, 2014.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Graphen von Angebots- und Nachfragefunktion mit gekennzeichnetem Marktgleichgewicht S.....	11
Abbildung 2 Graph einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion	13
Abbildung 3 Graph einer Erlösfunktion eines polypolistischen Anbieters mit monopolistischen Preisspielraum.....	15
Abbildung 4 Unterschiedliche Verläufe der variablen Kosten in Abhängigkeit von der Beschäftigung	17
Abbildung 5 Graphen von Erlös- und Kostenfunktion im Polypol	19
Abbildung 6 Graphen von Erlös- und Kostenfunktion im Monopol.....	20
Abbildung 7 Graphische Darstellung der Gewinnmaximierung im Monopol bei einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion	30
Abbildung 8 Graphische Darstellung der Gewinnmaximierung im Monopol bei einer linearen Kostenfunktion	30
Abbildung 9 Graphische Darstellung der Gewinnmaximierung im Polypol bei einer linearen	32
Abbildung 10 Graphische Darstellung der Gewinnmaximierung bei monopolitischer Konkurrenz bei einer linearen Kostenfunktion	34
Abbildung 11 Grenzkosten im Betriebsminimum- und Optimum	37
Abbildung 12 Ökonomische Begriffe für verschiedene Werte der x – Elastizität von f	40
Abbildung 13 Graphen der Elastizitätsfunktionen von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion und zugehöriger Grenzkosten- und Stückkostenfunktion.	48
Abbildung 14 Wochenrenditen der Daimler Chrysler Aktie	61
Abbildung 15 Säulendiagramm der logarithmischen Wochenrendite der DaimlerChrysler Aktie von 29.12.2000 bis 30.11.2001.....	63
Abbildung 16 Allgemeines Baumdiagramm für die Kursentwicklung einer Aktie mit 3 Perioden im Random Walk Modell	65
Abbildung 17 Linienchart des simulierten Verlaufes der DaimlerChrysler Aktie	85
Abbildung 18 Phasen des Modellierungsprozesses nach Blum	91

Abbildung 19 Vorschlag eines Spiralcurrrriculums zur Wirtschaftsmathematik	
.....	92
Abbildung 20 Schematische Darstellung eines Unterrichtskonzepts für die	
Verschränkung von ökonomischen Funktionen und die Differentialrechnung.	92

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Absolute und relative Häufigkeiten der logarithmischen Wochenrendite der DaimlerChrysler Aktie vom 29.12.2000 bis 30.11.2001.....	62
Tabelle 2 Random-Walk-Modell für 3 Wochenperioden für die DaimlerChrysler Aktie	67
Tabelle 3 Simulation eines Aktienkursprozesses mit dem Black-Scholes-Modell	84