



universität
wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Einfluss geschichtlicher Aspekte auf die
Sinnkonstruktion von Schülerinnen und Schülern“

verfasst von / submitted by

Dennis Hausberger, BSc, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2020 / Vienna 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 520 523 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB)
UF Mathematik UF Physik

Betreut von / Supervisor:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
2	Sinnbegriff und Sinnkonstruktion.....	4
2.1	Der Sinnbegriff.....	4
2.2	Sinn als Motivation für Lernprozesse	6
2.3	Der Begriff Sinnkonstruktion	7
2.4	Sinn und Mathematik	10
2.5	Sinnkonstruktion im Mathematikunterricht	12
2.6	Schlussfolgerungen für diese Arbeit.....	14
3	Das IGMU-Prinzip	15
3.1	Argumente für und gegen das IGMU-Prinzip	16
3.2	Wie lässt sich das IGMU-Prinzip verwirklichen?	18
3.2.1	Direkte historische Informationen	19
3.2.2	Das genetische Prinzip.....	19
3.2.3	Bewusstsein für Mathematik	21
4	Unterrichtskonzept – Der pythagoreische Lehrsatz in unterschiedlichen Kulturen	23
4.1	Mathematik in Mesopotamien.....	24
4.2	Mathematik im alten Ägypten	29
4.3	Mathematik in der griechischen Antike (ionische Periode)	32
4.3.1	Thales.....	33
4.3.2	Pythagoras und die Pythagoreer	35
4.4	Die Stationen im Überblick.....	41
4.4.1	Station – Die Tontafeln der Babylonier	41
4.4.2	Station – Mathematik bei den alten Ägyptern	41
4.4.3	Station – Auf den Spuren von Pythagoras.....	42
4.4.4	Station – Der Beweis der Pythagoreer	42
5	Methodik	43
6	Ergebnisse.....	46
6.1	Ergebnisse zur persönlichen Relevanz des Unterrichts.....	46
6.2	Ergebnisse zum Nutzen bzw. der Anwendbarkeit von Mathematik	47
6.3	Ergebnisse zu den Stationen	48
6.4	Ergebnisse nach Geschlecht und Erstsprache Deutsch	49
7	Diskussion.....	50
8	Fazit und Ausblick.....	55

9	Quellen	58
9.1	Literaturverzeichnis	58
9.2	Abbildungsverzeichnis	60
9.3	Internetquellen	61
10	Anhang	62
10.1	Abstract	62
10.2	Daten aus Fragebogen	63
10.3	Fragebogen zur Unterrichtseinheit	64
10.4	Material zu der Station – „Die Tontafeln der Babylonier“	65
10.5	Material zu der Station – Mathematik bei den alten Ägyptern	68
10.6	Material zu der Station – Auf den Spuren von Pythagoras	71
10.7	Material zu der Station – Der Beweis der Pythagoreer	73

1 Einleitung

Wie sind die unterschiedlichen Teilgebiete der Mathematik entstanden? Wer waren die Menschen, die dazu beigetragen haben und nach denen Sätze benannt sind? Wann und unter welchen Umständen haben sie gelebt? Welches Wissen stand ihnen zur Verfügung, um ihre Sätze formulieren zu können? Welche Motivation hatten sie sich mit Mathematik zu beschäftigen? Wie wirkte sich ihr Beitrag auf die Gesellschaft und die weitere Wissenschaft aus?

Das sind Fragen, die ich mir im Laufe meines Studiums gestellt habe und die sich meines Erachtens nur durch eine historische Betrachtung der Mathematik beantworten lassen. Aus diesem Grund habe ich Literatur zu dieser Thematik gelesen und dabei ist mir Folgendes bewusst geworden: In der Geschichte der Mathematik liegt ein Potential für den Unterricht vergraben, mit der Möglichkeit für Schülerinnen und Schüler, aber auch für Lehrerinnen und Lehrer, den Blick auf die Mathematik zu verändern; weg von der Ansicht des fertigen Produkts, dem rigiden Konstrukt aus Regeln und Definitionen, hin zur Prozesshaftigkeit der Mathematik; zu den Irrwegen und einstigen Grenzen, zu ihrer Entwicklung, zurück zu ihrer Lebendigkeit. So antwortet beispielsweise Robert Kaplan (2006) auf die Frage was Mathematik eigentlich sei, mit:

„Eine Mischung aus Herumprobieren und Inspiration; eine Idee, auf die jemand stößt und die dann vielleicht Jahrhunderte schläft, nur um plötzlich hier und dort in einem veränderten geistigen Klima wieder hervorzukommen; eine fortlaufende Unterhaltung zwischen Raten und Rechtfertigen, zwischen Phantasie und Logik.“ (Kaplan 2006, S.12)

Im regulären Unterricht wird Mathematik meist als fertiges Produkt behandelt, den dahinterliegenden langen Weg von einer ersten Idee bis zum fertigen Konzept wird dabei unterschlagen, ebenso die Tatsache, dass hinter der heutigen Notation und Symbolik eine lange Entwicklung liegt. Besonders drastisch scheint mir aber, dass die Verwobenheit mit der Gesellschaft und der Nutzen, den die Mathematik für deren Fortschritt liefert(e), oftmals gar nicht thematisiert werden. Dadurch kann bei Lernenden schnell der Eindruck entstehen, dass Mathematik realitätsfern ist. Dieser Eindruck wird durch die zunehmende Abstraktion der Themen, die mit höheren Schulstufen einhergeht, verstärkt. Aus diesem Grund ist es nicht verwunderlich, dass das Schulfach Mathematik oftmals als sinnlos erlebt wird und die Auseinandersetzung mit ihr unter anderem dadurch zur Frustration führt. Die Infragestellung

der Sinnhaftigkeit bzw. des Nutzens der Mathematik zeigt sich auch in einer Frage, die Lehrpersonen dieses Fachs durchaus bekannt sein dürfte – zumindest wurde sie mir von Schülerinnen bzw. Schülern schon öfters gestellt: „Wozu braucht man das eigentlich?“ In dieser unscheinbaren, aber durchaus legitimen Frage verbirgt sich nicht nur das Verlangen der Lernenden nach Zweck, nach Nutzen, nach Sinn, schlimmer noch: der Allgemeinbildungsgedanke von Mathematik wird hinterfragt. Ich denke, dass ein geschichtlicher Zugang zur Mathematik dabei sinnstiftend im Unterricht eingesetzt werden kann und eine mögliche Antwort auf diese Sinnfrage darstellt. Indem Mathematik mit realen, historischen Geschehnissen, aber auch die damit verbundenen Persönlichkeiten verknüpft wird, und ihre Anwendung in der Gesellschaft und damit ihr Nutzen aufgezeigt wird, sollte ein Realitätsbezug hergestellt werden können, der ein Sinnangebot für Lernende darstellt.

Muss man dafür aber die Vergangenheit aufarbeiten? Könnte und sollte man den Realitätsbezug nicht anhand der Gegenwart demonstrieren? Fakt ist: erhebliche Teile der heute zum Einsatz kommenden Mathematik sind anspruchsvoll und für das Individuum unsichtbar hinter Computerprogrammen mit komplexen Algorithmen versteckt. Je weiter man jedoch in die Vergangenheit blickt, desto intuitiver, nachvollziehbarer und lebendiger wird die zum Einsatz kommende Mathematik und umso offensichtlicher tritt ihr Nutzen für die Gesellschaft in Erscheinung. Dass aus dieser Einsicht heraus die Sinnhaftigkeit für die Existenz des Schulfachs Mathematik vom Lernenden eingesehen und damit der Allgemeinbildungsgedanke gerechtfertigt wird, scheint mir naheliegend und deswegen möchte in dieser Masterarbeit folgende Hypothese überprüfen:

Die Integration geschichtlicher Aspekte in den Mathematikunterricht hat einen positiven Einfluss auf das Sinnempfinden seitens der Schülerinnen und Schüler.

An dieser Stelle möchte ich das didaktische Anliegen, die Geschichte der Mathematik in den Unterricht zu integrieren, im Weiteren als das IGMU-Prinzip (Integration der **G**eschichte in den **M**athematik**U**nterricht) bezeichnen. Bei der Suche nach Literatur zum IGMU-Prinzip bin ich zwar auf didaktische Bestrebungen in diese Richtung gestoßen, allerdings konnte ich keine für Lehrkräfte praktikable Unterrichtskonzepte finden. Deshalb habe ich den Entschluss gefasst mit dieser Masterarbeit ein eigenes Unterrichtskonzept mithilfe theoretischer Grundlagen und historischer Recherche zu erarbeiten, dieses dann im Rahmen meiner Schulpraxis durchzuführen, um letztlich dann durch eine Befragung der Schülerinnen und Schüler meine

Hypothese empirisch zu untersuchen. Die Wahl für das Thema des Unterrichtskonzepts fällt auf den pythagoreischen Lehrsatz und ist bedingt durch die Gegebenheiten an der Schule. Wie ich aber später noch ausführen werde, ist gerade dieser Lehrsatz prädestiniert für eine historische Betrachtung.

Die Entscheidung, den vielschichtigen Sinnbegriff in meine Masterarbeit zu inkludieren und zu beleuchten, entspringt meinem Wunsch für die zukünftige Lehrtätigkeit, einen Mathematikunterricht anbieten zu können, der von den Schülerinnen und Schülern als sinnvoll erlebt wird. Im Rahmen meiner Recherche zur empirischen Untersuchung von Sinn im schulischen Kontext, bin ich dabei auf den Begriff „Sinnkonstruktion“ gestoßen. Da es zu diesem im Fach Mathematik bereits theoretische und empirische Grundlagen gibt, habe ich beschlossen an diese anzuknüpfen und in diesem Sinne den Titel meiner Masterarbeit gewählt.

Zusammenfassend möchte ich einen Überblick meiner Masterarbeit geben, in der folgende Fragen beantwortet werden sollen:

- Auf welche Weise lässt sich das IGMU-Prinzip verwirklichen?
- Wie wirkt sich ein Unterricht gemäß dem IGMU-Prinzip auf das Sinnempfinden von Schülerinnen und Schüler aus?

Ausgehend von diesen Leitfragen sind folgende Ziele Gegenstand dieser Arbeit:

- Die Recherche theoretischer und didaktischer Konzepte zum Begriff der Sinnkonstruktion (Kapitel 2) und dem IGMU-Prinzip (Kapitel 3),
- die daran anschließende Erarbeitung eines Unterrichtskonzepts gemäß dem IGMU-Prinzip (Kapitel 4) und die Erstellung eines Methodenwerkzeugs zur Untersuchung der Hypothese (Kapitel 5),
- die Durchführung von Unterricht mit nachfolgender Befragung und Auswertung der Daten (Kapitel 6) und letztlich
- die Verifikation bzw. Falsifikation meiner Hypothese (Kapitel 7).

2 Sinnbegriff und Sinnkonstruktion

In diesem Abschnitt soll das theoretische Gerüst der Arbeit gebaut werden. In diesem Kapitel wird dabei auf theoretische Konzepte zum Sinnbegriff und seine Bedeutung für die Pädagogik und den Mathematikunterricht eingegangen, die Grundlagen für das Methodenwerkzeug zur Beantwortung der Hypothese darstellen.

2.1 Der Sinnbegriff

Etymologisch betrachtet stammt das Wort „Sinn“ von dem Althochdeutschen „Sinnan“ ab, das mit reisen, gehen oder streben übersetzt werden kann. Im Neuhochdeutschen wurde daraus „sinnen“: geistig oder gedanklich einer Sache nachgehen (vgl. Combe & Gebhard 2007, S. 12).

Heute ist der Sinnbegriff nicht einfach zu fassen, da dieser, je nach wissenschaftlicher Disziplin, unterschiedliche Bedeutungen hat und zusätzlich durch den alltäglichen Gebrauch getrübt wird. Vollstedt & Vorhölter (2008, S. 30) analysieren die Vielschichtigkeit des Sinnbegriffs und nennen dabei Bedeutung, Nutzen, Ziel, Zweck und Wert als Synonyme für den Sinn, den ein Gegenstand oder eine Handlung für ein Individuum haben kann.

Auch Koller (2008, S. 15) bemüht sich um eine Klärung des Sinnbegriffs und zeigt dabei vier Dimensionen auf, die er der Brockhaus Enzyklopädie (1998) entnimmt. Darin erscheint Sinn als:

1. Fähigkeit zur Wahrnehmung bestimmter Reize oder Inhalte
2. Bedeutung von Worten und Sätzen, Ereignissen und Zeichen
3. Zweck, Endabsicht oder Ziel menschlichen Handelns
4. Bedeutung und Gehalt einer Sache, einer Handlung oder eines Erlebnisses für einen Menschen in einer bestimmten Situation

Jede dieser Dimensionen ist nach Koller (ebd., S. 15) einer bestimmten Theorietradition zuzuordnen, so lässt sich die erste der Wahrnehmungsphysiologie und -psychologie zuweisen, die zweite der Hermeneutik, die dritte der Soziologie bzw. der Psychologie und die vierte der Philosophie bzw. der Theologie. Wie aber lässt sich der Sinnbegriff in der Pädagogik verstehen und welche Bedeutung hat er im schulischen Kontext, im Speziellen für den Mathematikunterricht?

Systematische Abhandlungen dazu sind in der Literatur überschaubar und eher jüngerer Datums. Für diese Masterarbeit relevant sind die Untersuchungen von Biller (1991), Gebhard (2003), Koller (2008), Gedaschko & Lechte (2008), Vollstedt & Vorhölter (2008) und Vollstedt (2011).

Biller (1991) beschäftigt sich ausführlich mit dem Sinnbegriff und erarbeitet zu ihm neun Bedeutungsaspekte, die mit den zuvor genannten Sinnbegriffen von Vollstedt & Vorhölter (2008) und Koller (2008) im Einklang stehen. Er ordnet diese Bedeutungsaspekte zwei einander gegenüberstehenden Polen zu: einem subjektiven (z.B.: Sinn als physischer Aspekt, als Fähigkeit der Wahrnehmung) und einem objektiven (z.B.: Sinn als logischer Aspekt, als Sinngehalt oder Bedeutung). Demgemäß umfasst für Biller „Sinn“ die subjektive, als auch die objektive Welt. „Sinn“ ist in diesem Zusammenhang für ihn *„Vermittlungs- oder Bindeglied zwischen Subjekt und Welt“* (1991, S. 9).

Er nennt drei Argumente für die Thematisierung von „Sinn“ in der Pädagogik: ein zeitgeschichtliches, ein anthropologisches und ein wissenschaftstheoretisches.

Unter dem ersten, zeitgeschichtlichen Argument versteht er das bereits damalige (1991) Überangebot an Sinnmöglichkeiten Heranwachsender – und dieses Thema ist aktueller denn je – bei gleichzeitigem Sinn-Defizit im Bereich von Unterricht und Erziehung. Das Überangebot an Sinnmöglichkeiten begründe sich in der Tendenz zu mehr Freiheiten, materiellem Wohlstand und qualitativ hochwertigen Bildungsangeboten, welche die moderne Industriegesellschaft ermögliche, meint Biller (ebd., S. 11). Trotzdem oder vielleicht eben deswegen sehen vor allem im schulischen Kontext viele Schülerinnen und Schüler keinen Sinn im Unterricht und stellen die in der Einleitung bereits aufgeworfene Sinnfrage: „Wozu braucht man das eigentlich?“ Wenn die Antwort auf diese Frage nicht überzeugend sei und zu einem Dauerzustand führe, so bestehe nach Biller (ebd., S. 12) die Gefahr des schulischen Unbehagens und deswegen müsse sich die Pädagogik mit dieser Thematik auseinandersetzen.

Das zweite, anthropologische Argument versteht den Menschen grundlegend als sinnfähiges und sinnstrebiges Wesen. Da es, so Biller (1991, S. 12), der zentrale Gegenstand der Pädagogik sei, den Menschen zu erziehen und ihn zur Lebensbewältigung zu befähigen, müsse sie diesem Wesenszug gerecht werden.

Das dritte, wissenschaftstheoretische Argument bezieht sich direkt auf die Pädagogik selbst, als „*sinnverstehende Disziplin*“ (ebd., S. 17). Nach Biller stehe das Bemühen um Sinn in ihrem Zentrum und äußere sich durch ihre sinnerschließende Methodik, die Hermeneutik. Des Weiteren sei der Sinnbegriff ein zentrales Konzept namhafter geisteswissenschaftlicher Pädagogen (Dilthey, Spranger, Nohl) (ebd., S. 16ff.). Letztlich bündelt Biller seine drei Argumente für die Thematisierung von Sinn in der Pädagogik zusammen:

„Erziehung ist auf das Subjekt bezogen, das sein Leben sinnerfüllt verbringen soll. Sinn und Erziehung bedingen folglich einander: Die Erziehung trägt wesentlich zur Sinnvermittlung bei und ‚Sinn‘ rechtfertigt erzieherisches Geschehen.“ (1991, S. 19)

2.2 Sinn als Motivation für Lernprozesse

Im Einklang mit Biller (1991) begreift auch Gebhard (2003) den Menschen als sinnbedürftiges Wesen:

„Die Welt als bedeutungsvoll und sinnhaft zu interpretieren bzw. dies zu wollen oder geradezu zu müssen, kann als ein spezifisch menschliches Bedürfnis verstanden werden.“ (2003, S. 209)

Das „*Sinnverlangen an die Realität*“ sei ein zentrales Motiv, das implizit auch in „modernen Motivationstheorien“ aufgegriffen werde, ohne jedoch den Sinnbegriff zu verwenden, so Gebhard. (ebd., S. 209) Insofern ist es nicht verwunderlich, dass Gebhard das „*Sinnmotiv*“, wie er es nennt, mit dem Motivationsbegriff verbindet:

„Motivation (im Hinblick auf Lernprozesse) [...] ist ein aktiver subjektiver Interpretationsvorgang, gemäß dessen wir unsere Wahrnehmung und Verarbeitung der äußeren Welt mit Bedeutung versehen und damit als sinnvoll interpretieren.“ (ebd., S. 209)

Unter den zuvor bezeichneten „modernen Motivationstheorien“ bezieht sich Gebhard insbesondere auf die Selbstbestimmungstheorie der Motivation von Deci und Ryan. In ihr werden drei psychologische Grundbedürfnisse genannt, die für die Förderung der intrinsischen Motivation essenziell erscheinen: soziale Eingebundenheit, Kompetenz und Autonomie (vgl. Deci & Ryan 1993).

Gebhard greift diese drei Grundbedürfnisse auf und verknüpft sie mit dem Sinnbegriff. Ihm zufolge ist subjektiv empfundener Sinn in Lernprozessen nur dann möglich, wenn der Kontakt mit der sozialen Umgebung bestehen bleibe bzw. hergestellt werde (soziale

Eingebundenheit), Kompetenz als sinnkonstituierendes Verstehen relevanter Umweltausschnitte begriffen werde (Kompetenz) und schließlich die Anerkennung des selbstbestimmten Lernens zugleich die Anerkennung von subjektiven Wegen und Interpretationen darstelle (Autonomie) (vgl. Gebhard, S. 210).

Im Weiteren sieht Gebhard die intrinsische Motivation *„als eine Motivation, die dem Sinnbedürfnis des Subjekts entspringt“* (ebd., S. 211) und unterstreicht damit den engen Zusammenhang von Sinn und Motivation. Erscheint ein Lerngegenstand als sinnvoll, kann dies die Motivation fördern sich mit diesem auseinanderzusetzen und zu nachhaltigem Wissen führen:

„Nur wenn es den Subjekten gelingt, Lernprozesse mit einer Erfahrungsbewegung zu verbinden, nur wenn es schließlich den Subjekten gelingt, ihre Auseinandersetzung mit (Lern-)gegenständen als sinnvoll zu interpretieren, werden persönlichkeitswirksame Lernprozesse nachhaltig stattfinden.“ (Combe & Gebhard 2007, S. 7)

Gebhard sieht es deswegen als zentrale Aufgabe der Didaktik bzw. der Lehrpersonen an Lernsituationen sinnstiftend zu gestalten, sodass diese *„als sinnhaft erlebt werden bzw. zum Aufbau von Sinn beitragen.“* (Gebhard 2003, S. 211)

2.3 Der Begriff Sinnkonstruktion

Der Begriff Sinnkonstruktion ist im Rahmen des Projekts Bildungsgangforschung entstanden, dessen zentrales Anliegen *„die Erforschung von Entwicklungs-, Lern- und Bildungsprozessen im Kontext der Institution Schule“* (Koller 2008, S. 7) darstellt. Insbesondere liegt dabei der Fokus auf der Untersuchung von Lernprozessen aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler und die Einbettung dieser Lernprozesse in deren lebensgeschichtliche Zusammenhänge. Ein wesentlicher Schwerpunkt liegt dabei auf der Frage, *„in welcher Weise und unter welchen Bedingungen Schülerinnen und Schüler den Inhalten und Formen schulischen Unterrichts biographisch bedeutsamen Sinn zuschreiben.“* (ebd., S. 7)

Dem Begriff der Sinnkonstruktion liegt eine konstruktivistische Auffassung des Lernens zugrunde:

„Wissen oder Lernstoff hat nicht eine Bedeutung ‚an sich‘, sondern der Lernende konstituiert konstruktiv eine Bedeutung, gewissermaßen eine Interpretation der Wirklichkeit, die es gestattet, diese [...] zu verstehen und sich in ihr zurechtzufinden.“ (Gebhard 2003, S. 211)

Des Weiteren schreibt Gebhard (2003, S. 11), dass Sinn nicht als fertiger von außen verabreicht werden könne, sondern immer wieder von neuem subjektiv erzeugt werden müsse.

Demnach sind Sinnkonstruktionen immer subjektiv, individuell und kontextgebunden, wie auch Vollstedt & Vorhölter (2008) und Vollstedt (2011) festhalten. Die Subjektivität und Individualität von Sinn und Sinnkonstruktionen ist auch der Anlass für die Wahl eines Kriteriums, das empirische Untersuchungen zu dieser Thematik ermöglichen soll, ohne die Vielschichtigkeit des Sinnbegriffs zu verlieren, nämlich das Kriterium der persönlichen Relevanz:

„Wenn also jemand einen Sinn in einem Gegenstand [bzw. einer Handlung] oder der Auseinandersetzung mit diesem sieht, besagt dies, dass diese Person erkennt, inwiefern dieser Gegenstand für sie in ihrem Leben relevant ist bzw. sein könnte.“ (Vollstedt & Vorhölter 2008, S. 30)

Lechte (2008) hat eine ähnliche Auffassung des Sinnbegriffs, nämlich *„Sinn als subjektiv erlebte Bedeutsamkeit.“ (Gedaschko & Lechte 2008, S. 54)*

Wichtig ist festzuhalten, dass Sinnkonstruktionen von Menschen in der Regel nicht verbalisiert werden und diese ihnen oftmals auch nicht bewusst, sondern diese nur als „latente Strukturen“ vorhanden sind. Jedoch konnten Sinnkonstruktionen durch Reflexion in Rahmen geeigneter Forschungsmethoden rekonstruiert werden (vgl. Vollstedt & Vorhölter 2008; Gedaschko & Lechte 2008; Vollstedt 2011).

Vollstedt (2011) generiert ein theoretisches Rahmenmodell (siehe Abb. 1) zum Begriff der Sinnkonstruktion. Maßgeblich ist in diesem eine Lernsituation, für unsere Zwecke der schulische Unterricht, in der sich das Individuum befindet. Die Entstehung einer Sinnkonstruktion ist durch persönliche und Hintergrundmerkmale beeinflusst, wobei unter ersterem alle Aspekte subsumiert werden, die Teil des Individuums sind, wie Charaktereigenschaften, Denkstile, und Überzeugungen und letztere, die nicht Teil des Individuums sind, wie Familie und Kultur. Eine vorgenommene Sinnkonstruktion hat Auswirkungen auf die Bewertung der Lernsituation, als auch auf darauffolgende Handlungen.

Ist eine Lernsituation für das Individuum sinnvoll bzw. persönlich relevant, können Bewertungen und Handlungen stattfinden, die normativ (!) als positiv gewertet würden, wie beispielsweise eine weitere Auseinandersetzung mit fachlichen Inhalten. Ist eine Lernsituation für das Individuum nicht sinnvoll bzw. nicht persönlich relevant, können Bewertungen und Handlungen stattfinden, die normativ (!) als negativ gewertet würden und sich beispielsweise als mangelnde Beteiligung im Unterricht äußern können (vgl. Vollstedt 2011, S. 48ff.).

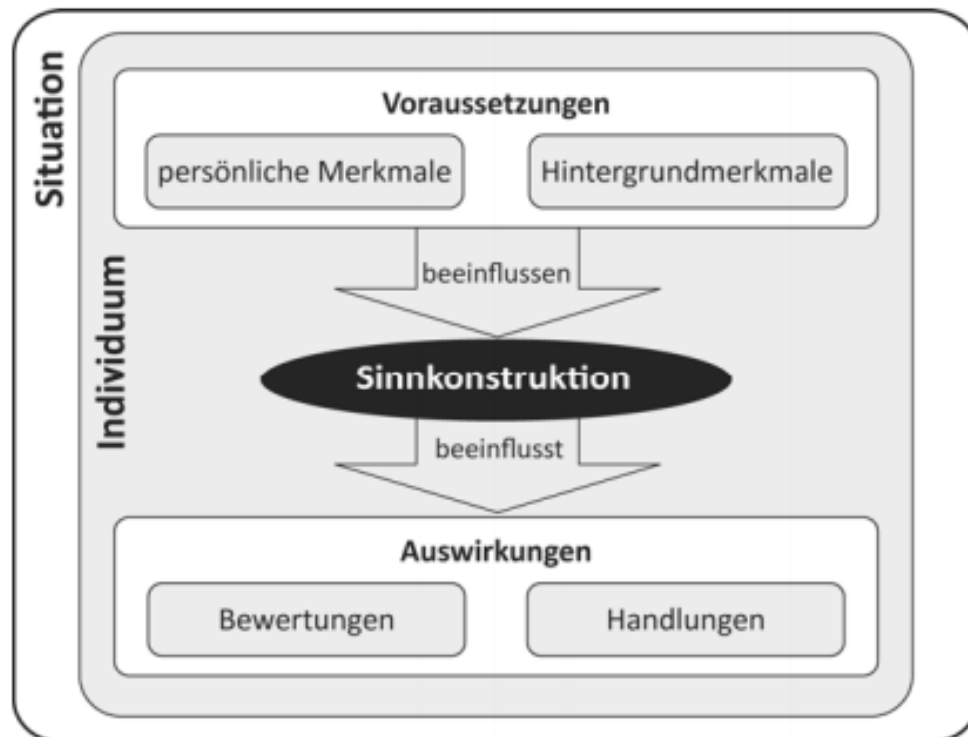


Abb. 1: Zum theoretischen Rahmen einer Sinnkonstruktion

2.4 Sinn und Mathematik

Aufgrund der Abstraktheit ist gerade der Mathematikunterricht gefährdet, „sinnlos“ bzw. persönlich nicht relevant zu erscheinen. Werden mathematische Inhalte nicht mit der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler verknüpft, ist die in der Einleitung betrachtete Frage „Wozu braucht man das eigentlich?“ vorprogrammiert. Mit dieser Frage wird der Sinn von Mathematik unter dem Nützlichkeitsaspekt aufgeworfen, der in der Literatur ausführlich diskutiert wird.

So beschreibt beispielsweise Niss (1994, S. 368f.) drei verschiedene Arten, wie Mathematik für das Individuum bzw. die Entwicklung der Gesellschaft nützlich sein kann:

1. Mathematik als angewandte Wissenschaft ist die Grundlage anderer wissenschaftlicher Disziplinen, Methoden und technischer Verfahren. Dazu zählen nicht nur die Naturwissenschaften, sondern auch die Wirtschafts- und Sozialwissenschaften bis hin zur Linguistik.
2. Darüber hinaus spielt Mathematik eine Rolle in angewandten Verfahren, wie beispielsweise die Nutzung und Verteilung unterschiedlichster Ressourcen, die Beschreibung und Vorhersage naturwissenschaftlicher Phänomene oder die Regulation industrieller und sozio-technischer Systeme.
3. Letztlich ist Mathematik ein integraler Bestandteil des täglichen Lebens in der Gesellschaft, der oftmals gar nicht mehr als ein solcher wahrgenommen wird: Geldgeschäfte, der Kalender, die Messung von Zeit, Raum, Masse und Währung, graphische Darstellungen und Repräsentationen von Daten, Formen von Objekten; das und vieles mehr wäre ohne mathematisches Wissen nicht handhabbar.

In ähnlicher Weise, aber mit einem historischen Zugang, betrachten Loos & Ziegler (2015) Mathematik als einen integralen Bestandteil der Gesellschaft anhand folgender Dimensionen:

- **Mathematik als Wissenskultur:** Mathematik begleitet die Menschheit seit Jahrtausenden und war zunächst bei Hochkulturen (z.B.: Ägypter, Babylonier) in erster Linie ein Werkzeug zur Lösung konkreter Probleme. Sie kam zum Einsatz in der Landvermessung oder der Planung und Ausführung von Bauvorhaben (vgl. Kapitel 4). Im antiken Griechenland wurde Mathematik als „zweckfreie“ Wissenschaft betrieben und war in Verbindung mit dem logischen Argumentieren in der Philosophie eine Form

der Kunst. In der Neuzeit reformiert die Mathematik mit dem Dezimalsystem und der Zinsrechnung das europäische Bankenwesen und den Handel, auf der Entwicklung der Perspektive basiert die Kunst der Renaissance. Nach der Entstehung der reellen Analysis finden zahlreiche neue Werkzeuge Anwendung in Astronomie und Ingenieurwissenschaft, die Entwicklung der Statistik ermöglicht Staaten aufgrund von bestimmten Kennzahlen politische Maßnahmen zu treffen und selbst das Glücksspiel und der Zufall werden mathematisiert (vgl. Loos & Ziegler 2015, S. 10f.).

- **Mathematik als Werkzeug:** wie im vorherigen Punkt bereits erwähnt, war Mathematik schon immer ein Werkzeug, das in unterschiedlichen Bereichen der Gesellschaft Anwendung findet, wie auch Niss (1994) zuvor beschrieb.
- **Mathematik als Wissenschaft:** Diese Dimension ist vergleichsweise relativ jung, sofern die griechische Antike als Ausnahme betrachtet wird. Erst mit dem Aufkommen wissenschaftlicher Akademien war es Mathematikerinnen und Mathematikern möglich, losgelöst von finanziellem Druck mathematische Forschung zu betreiben. Durch das Entstehen von Wissenschaftsjournalen verlagerte sich die Mathematik von privaten Korrespondenzen in die Öffentlichkeit. Im 20. Jahrhundert stiegen die Veröffentlichungen exponentiell an und es kam zu einer Differenzierung von Fachgebieten, sodass die Mathematik heute hochspezialisiert geworden ist und keine Generalisten mehr kennt.(vgl. Loos & Ziegler 2015, S. 13f.).

Niss (1994), Gellert & Jablonka (2007) und Loos & Ziegler (2015) sind der Ansicht, dass Mathematik die Gesellschaft geprägt und zu ihrem Fortschritt beigetragen hat. Gleichzeitig stellen die Autoren fest, dass das Individuum diese objektive Relevanz der Mathematik subjektiv nicht feststellt. Niss (1994, S. 371) bezeichnet dies als das Relevanzparadoxon der Mathematik. Der Grund dafür ist, dass in vielen Anwendungen, in denen Mathematik heutzutage eine Rolle spielt, diese verborgen liegt, wie Gellert und Jablonka (2007) beschreiben:

„Most people need to carry out less mathematics explicitly. Technology is more effective. The existence of materialised mathematics in the form of black boxes reduces the importance of mathematical skills and knowledge for the individual’s professional and social life.“ (ebd., S. 8)

Um es mit den Worten von Niss zusammenzufassen:

„[...] mathematics is invisible because it is hidden, not because it is absent.“ (Niss 1994, S. 372)

Aus nicht zuletzt diesem Grund gibt es Bestrebungen der Mathematikdidaktik Realitätsbezüge durch Anwendungs- und Modellierungsaufgaben herzustellen. Denn dadurch kann der Nutzen beziehungsweise ein Sinn der Mathematik aufgezeigt werden und dazu führen, dass ein positiveres Bild von Mathematik bei den Schülerinnen und Schülern entsteht.

2.5 Sinnkonstruktion im Mathematikunterricht

Das Sinnbedürfnis nach Realitätsbezug im Mathematikunterricht konnte auch von Vollstedt (2011) in Form einer Sinnkonstruktion festgestellt werden. So konnte sie im Rahmen von Interviews mit Schülerinnen und Schülern insgesamt 17 solcher Sinnkonstruktionen im Mathematikunterricht rekonstruieren. Neben den drei psychologischen Grundbedürfnissen der Selbstbestimmungstheorie (vgl. Deci & Ryan 1994) Autonomie, Kompetenz und soziale Eingebundenheit erleben, emotional-affektive Bindung an die Lehrperson, kognitive Herausforderung und Berufsvoraussetzung, rekonstruiert sie auch die Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“. Diese charakterisiert sie folgendermaßen:

„Die Beschäftigung mit Mathematik bzw. das Lernen von Mathematik ist für das Individuum sinnvoll / persönlich relevant, wenn es eine Anwendungsmöglichkeit von Mathematik im Leben erkennt, einen Allgemeinbildungsgedanken von Mathematik vertritt oder das eigene Lernen von Mathematik anhand von realitätsbezogenen Aufgaben erleichtert wird.“ (ebd., S. 128)

Damit diese Sinnkonstruktion im Individuum entstehen kann, müsse ein Realitätsbezug zur Mathematik festgestellt werden, im Unterricht oder in der Lebenswelt, so Vollstedt (2011). Aus den Interviews zeigte sich, dass Schülerinnen und Schüler mit dieser Sinnkonstruktion einen Allgemeinbildungsgedanken von Mathematik vertraten und deren grundlegende Bedeutung für die Gesellschaft erkannten. So sei ihnen zufolge ohne Mathematik eine Teilnahme am gesellschaftlichen Leben nur eingeschränkt möglich und sie sei für jeden Menschen notwendig bzw. die Voraussetzung, um eine mündige Bürgerin bzw. Bürger zu sein oder zu werden. Die Interviews zeigten auch, dass Schülerinnen und Schüler, die diese Sinnkonstruktion besaßen, Anwendungsbereiche der Mathematik außerhalb der Schule nannten – diese gingen aber selten über das Einkaufen hinaus. Einige Schülerinnen und Schüler waren der Ansicht, dass nur Grundrechnungsarten und einige weitere, basale mathematische Fähigkeiten (z.B.: Prozentrechnung) im Leben angewendet würden und untermauern damit das Relevanz-Paradoxon. Es gebe aber auch Schülerinnen und Schüler, die

Mathematik in anderen Lebensbereichen oder in den Wissenschaften verorten. Im Schulleben spiele Mathematik für die Schülerinnen und Schüler oft eine interdisziplinäre Rolle für andere, meist naturwissenschaftliche Unterrichtsfächer. Im Mathematikunterricht schätzen sie anwendungsorientierte Aufgaben, das mache das Lernen und Verstehen der Inhalte leichter und wecke persönliches Interesse. Die Aufgaben seien darüber hinaus durch einen Anwendungsbezug im Leben nicht so künstlich und teilweise gaben Lernende an, dass sie sich mehr anstrengen würden, wenn eine Aufgabe einen Anwendungsbezug habe. Abb. 2 veranschaulicht modellhaft diese Ausführungen zur Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ (vgl. Vollstedt 2011, S. 159ff.).

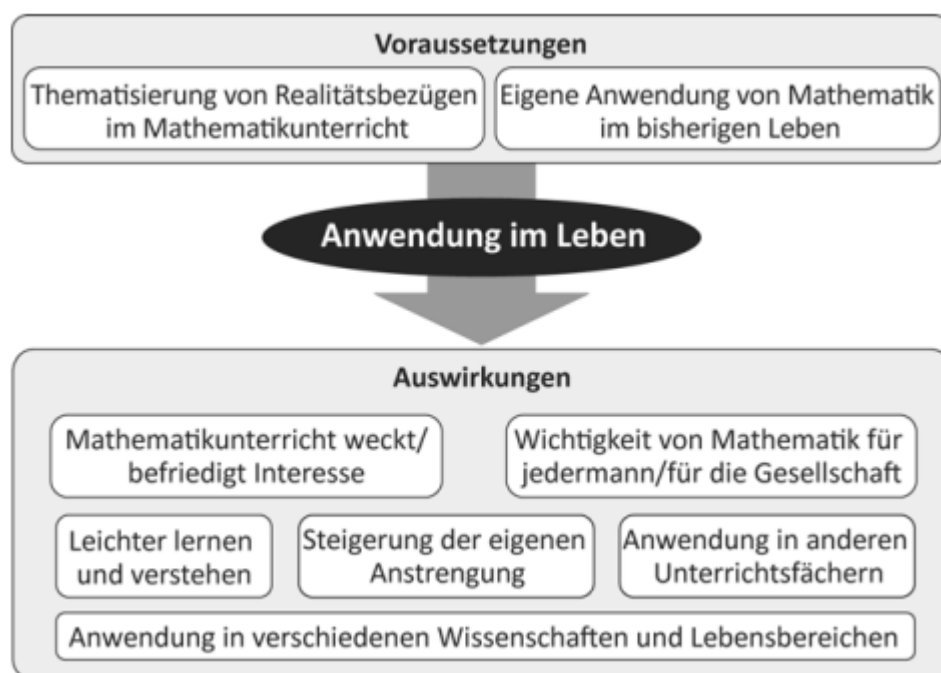


Abb. 2: Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ im Überblick

Hervorzuheben ist, dass die von Vollstedt interviewten Schülerinnen und Schüler realen Anwendungsbezug von Mathematik schätzen und dass sie an solche Aufgaben motivierter herangehen.

2.6 Schlussfolgerungen für diese Arbeit

Für das didaktische Anliegen dieser Arbeit spielt die Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ eine zentrale Rolle. Denn die Geschichte der Mathematik in den Unterricht zu integrieren, bedeutet in gewisser Weise einen Realitätsbezug der Mathematik aufzuzeigen; seien es persönliche Informationen über berühmte Mathematikerinnen und Mathematiker, ihre Anwendungen von Mathematik zur Welterschließung bzw. die daraus resultierenden technologischen Möglichkeiten oder mathematisches Wissen und deren Anwendung in einstigen Kulturen. Das IGMU-Prinzip liefert hierbei einen Ansatz den Nutzen – als Bedeutungsaspekt des Sinnbegriffs – der Mathematik für das Individuum bzw. die Gesellschaft herauszuschälen, den Bezug zu anderen Wissenschaften und diversen Lebensbereichen herzustellen und damit durch reale Geschehnisse und Personen einen anregenden Mathematikunterricht zu gestalten, der möglicherweise einen Allgemeinbildungsgedanken von Mathematik fördert und so zu einem subjektiven Sinnempfinden von Mathematik beitragen kann. Dadurch könnte das IGMU-Prinzip auch eine Lösung für das Niss'sche Relevanz-Paradoxon darstellen, denn je weiter man in der Menschheitsgeschichte zurückgeht, desto verständlicher und intuitiver wird die Mathematik und umso offensichtlicher tritt ihr Nutzen im Zusammenhang mit der Gesellschaft in Erscheinung. Somit könnte durch eine historische Betrachtung der Nutzen einfacher aufgezeigt werden als in der heutigen Zeit, in der die Mathematik komplex und, wie Niss meint, „verborgen“ liegt.

Für diese Masterarbeit verbleiben nun die in der Einleitung aufgeworfenen Fragen, die an dieser Stelle präzisiert werden sollen:

- Wie kann das IGMU-Prinzip realisiert werden? Das ist Gegenstand von Kapitel 3 und 4.
- Wie kann der Einfluss auf die Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ empirisch untersucht werden? Das ist Gegenstand des Kapitels 5.

3 Das IGMU-Prinzip

Die Überlegung die Geschichte der Mathematik in den Unterricht zu integrieren ist keine neue. So sprachen sich nach Jankvist (2009, S. 248) berühmte Mathematiker, darunter Poincaré, Klein, Polya und Weil dafür aus. Otto Toeplitz kritisierte schon 1927, im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, die Behandlung von Kernbegriffen der Infinitesimalrechnung wie beispielsweise der Konvergenz und des Differentialquotienten als „Requisiten“. Dabei vermisste er folgende Fragen:

„Warum so? Wie kommt man zu ihnen? Alle diese Requisiten also müssen doch einmal Objekte eines spannenden Suchens, einer aufregenden Handlung gewesen sein, nämlich damals, als sie geschaffen wurden. Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würde der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.“ (Toeplitz 1927, S. 92f.)

Auch wenn er sich dabei auf die Universitätsvorlesungen im Mathematikstudium bezieht, scheint sein Lehransatz – den er als das genetische Prinzip (vgl. Kapitel 3.2.2) bezeichnet – erst recht auf den Schulunterricht übertragbar. Selbst im österreichischen Lehrplan ist das IGMU-Prinzip an mehreren Stellen verankert. So steht im ersten Teil der allgemeinen Bildungsziele dazu:

„Es ist bewusst zu machen, das gesellschaftliche Phänomene historisch bedingt und von Menschen geschaffen sind und dass es möglich und sinnvoll ist, auf gesellschaftliche Entwicklungen konstruktiv Einfluss zu nehmen.“ (vgl. Lehrplan, Internetquelle 1)

Im Lehrplan des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I steht unter dem Aspekt „historische Betrachtungen“ zusätzlich Folgendes:

„Den Schülerinnen und Schülern ist an geeigneten Themen Einblick in die Entwicklung mathematischer Begriffe und Methoden zu geben. Sie sollen einige Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte kennen lernen. Die Mathematik soll als dynamische Wissenschaft dargestellt und ihre Bedeutung bei der Entwicklung der abendländischen Kultur gezeigt werden.“ (vgl. Lehrplan, Internetquelle 1)

Auch in der Sekundarstufe II wird auf einen kulturell-historischen Aspekt verwiesen:

„Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens – insbesondere eng verknüpft mit der Naturwissenschaft – macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung.“ (vgl. Lehrplan, Internetquelle 1)

Wenn der Lehrauftrag explizit an mehreren Stellen auf das IGMU-Prinzip verweist, warum findet es dann im Regelunterricht wenig Beachtung? Die Gründe dafür liefert das anschließende Kapitel.

3.1 Argumente für und gegen das IGMU-Prinzip

Das IGMU-Prinzip wird in fachdidaktischen Kreisen durchaus thematisiert und ist sogar Gegenstand mehrerer ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) Studien. In einer dieser ICMI Studien analysieren Tzanakis und Arcavi (2002, S. 203f.) Argumente für und gegen dieses Prinzip. Dabei gehen diese zunächst von Einwänden (objections) aus, um diese dann anschließend den dafürsprechenden Argumenten entgegenzustellen – dieser Ansatz soll auch hier verfolgt werden:

- **Zeitmangel (lack of time):** Es sei bereits jetzt schon schwierig den Mathematikstoff unterzubringen – würde man die Geschichte auch noch in den Unterricht integrieren, verbliebe letztlich noch weniger Zeit.
- **Ressourcenmangel (lack of resources):** Selbst wenn Lehrkräfte sich dafür entscheiden sollten das IGMU-Prinzip zu unterrichten, es mangle an geeigneten Unterrichtsmaterialien.
- **Kompetenzmangel (lack of expertise):** Die Lehrkräfte seien nicht dazu ausgebildet, es fehle ihnen an historischem und interdisziplinärem Wissen.
- **Beurteilungsmangel (lack of assessment):** Selbst wenn Lehrkräfte sich dafür entscheiden sollten, gebe es keine klaren Beurteilungskriterien und wenn diese nicht existierten, sei die Mitarbeit der Schülerinnen und Schüler gefährdet.

Im Anschluss daran nennen Tzanakis und Arcavi (2002, S. 203ff.) Domänen, die durch das IGMU-Prinzip unterstützt, bereichert und verbessert werden könnten:

- **Das Lernen von Mathematik selbst:** Im traditionellen Mathematikunterricht, wie zuvor von Toeplitz (1927) kritisiert, wird Mathematik meist deduktiv vermittelt, sodass

diese als starres Konstrukt erscheint. Tzakanis und Arcavi (2002) bemerken dazu treffend:

„questions and problems which constituted basic motivations for the development of an idea, as well as any doubts along the way, remain hidden under a linearly organised, deductive body of knowledge, in which new results seem to be simply added in a cumulative way.“ (ebd., S. 204)

Das IGMU-Prinzip biete hierbei die Möglichkeit grundlegende Ideen bzw. Konzepte und deren Motivation aufzudecken und so den prozesshaften Charakter der Mathematik offen zu legen. Dabei liefere die Geschichte der Mathematik ein gewaltiges Reservoir (history as a resource) an Fragestellungen und Problemen, deren Beleuchtung das Potential hat SchülerInnen zu motivieren, zu engagieren und ein überfachliches Interesse zu entwickeln, da die Mathematik schließlich auch Brücken zu anderen Disziplinen schlage, die andernfalls so nicht zur Geltung kommen würden. Hier stellt zum einen der zuvor gebrachte Einwand des Kompetenzmangels von Lehrkräften klare Grenzen auf, zum anderen jedoch wird die Befürchtung mangelnder Schülerbeteiligung entkräftet. Darüber hinaus können durch den historischen Zugang Fähigkeiten gefördert werden, die eher untypisch für den Mathematikunterricht seien: das Lesen historischer Texte, Recherchearbeiten, Diskussionen und in diesem Zusammenhang vor allem das Reden über Mathematik, anstelle des Mathematikbetreibens.

- **Das Bild von Mathematikerinnen und Mathematiker / Affektivität zur Mathematik:**

Durch das Anwenden des IGMU-Prinzips könne das Bild der Mathematik und die Beschäftigung mit dieser bereichert werden:

„Students may learn that mistakes, heuristic arguments, uncertainties, doubts, intuitive arguments, blind alleys, controversies and alternative approaches to problems are not only legitimate but also an integral part of mathematics in the making.“ (ebd., S. 205)

Das IGMU-Prinzip könne außerdem das menschliche Bemühen und die damit verbundenen intellektuellen Anstrengungen im Umgang mit herausfordernden Fragen und Problemstellungen aufzeigen und den Lernenden Mut im Umgang mit Fehlern und Missverständnissen machen. Darüber hinaus zeige sich der Wert auf Ideen zu

beharren, sie weiterzuentwickeln, sie Fragen zu unterziehen und kreative Wege einzuschlagen, um eine Lösung zu erhalten.

- **Vergrößerung des didaktischen Repertoires:** Durch die Beschäftigung mit dem IGMU-Prinzip können alternative Beispiele und Erklärungsansätze, aber auch neue Präsentationsmöglichkeiten für Lehrkräfte gewonnen werden. Zusätzlich könne durch diese Tätigkeit die mathematische Bildung (mathematical literacy), aber auch die persönliche Wertschätzung für das Fach erhöht werden und somit möglicherweise zu einem größeren Enthusiasmus der Lehrperson im Unterricht beitragen. Letztlich zeigen sich durch den historischen Zugang die Schwierigkeiten und Hindernisse im Begreifen mathematischer Konzepte; dieses Wissen könne für die Arbeit im Klassenraum profitabel genutzt werden.
- **Wertschätzung der Mathematik als kulturelles Erbe:** Wie bereits zuvor erwähnt, ist die Mathematik kein starres Konstrukt, sondern ein sich ständig entwickelndes System, das auf menschlichen Bemühungen beruht und das eng mit anderen Wissenschaftsdisziplinen, der Kultur und Gesellschaft verbunden ist. So gebe die geschichtliche Betrachtung Einblicke in die vielfältigen Gründe sich mit Mathematik zu beschäftigen, sei es Neugier, Ästhetik, Herausforderung oder für die persönliche Zufriedenheit. Durch den historischen Zugang könnten außerdem die Perspektiven und Kenntnisse vergangener Zivilisationen und Nationen aufgegriffen und somit die Bedeutung der Mathematik als kulturelles Erbe in den Mittelpunkt gestellt werden. Letztlich sei die Entwicklung der Mathematik auch auf den Einfluss gesellschaftlicher und kultureller Ansprüche zurückführen.

3.2 Wie lässt sich das IGMU-Prinzip verwirklichen?

Tzakanis und Arcavi (2002, S. 208) stellen auch dazu hilfreiche Überlegungen an, die sich mit denen in der Literatur decken (vgl. Nickel 2013).

Sie differenzieren drei einander ergänzende Domänen, die in den folgenden Abschnitten näher beleuchtet werden:

- Geschichte durch historische Informationen lernen
- Mathematik mithilfe des genetischen Prinzips lernen
- Bewusstsein für Mathematik selbst und ihre Rolle in der Gesellschaft entwickeln

3.2.1 Direkte historische Informationen

Unter diesem Aspekt verstehen Tzakanis und Arcavi (2002, S. 208) die Einbindung historischer Fakten wie Namen, Daten, biographische Informationen, berühmte Probleme und Fragen. Dabei gelte es in erster Linie den Zusammenhang von Mathematik und Geschichte aufzuzeigen, die Vermittlung mathematischer Inhalte selbst werde dabei nicht geändert, wobei ein fließender Übergang zu den beiden anderen Domänen nicht auszuschließen sei.

Nickel (2013) hebt dabei den Einsatz von Anekdoten explizit hervor, die im Mathematikunterricht eine auflockernde Wirkung erzielen, aber auch tröstenden Charakter besitzen können. So zählt er zu ersterem beispielsweise die Geschichte vom Schüler Gauß, der durch eine genial einfache Lösung einer mühseligen Aufgabe seinen Lehrer überrascht und zu letzterem den mühevollen Weg zur Akzeptanz der imaginären Zahlen, die erst über 200 Jahre nach Cardanos Tod stattfindet (vgl. Nickel 2013, S. 255f.).

3.2.2 Das genetische Prinzip

Das genetische Prinzip basiert auf der Annahme, dass ein Gegenstand bzw. Konzept motivierend auf Lernende wirkt, wenn sie in dessen historische Entwicklung eintauchen können. Wichtig hierbei ist Tzakanis und Arcavi (2002, S. 209), dass neueingeführte Konzepte eine Lösung für bestehende Probleme darstellen, sodass solche den Lernenden als notwendig und sinnvoll erscheinen.

Otto von Toeplitz (1927) unterscheidet dabei zwischen einem direkten und indirekten genetischen Prinzip. Unter ersterem versteht er einen evolutionären Unterricht, bei dem sich an eine Stelle in der Vergangenheit begeben wird und vorwärtsgerichtet Probleme angegangen werden:

„[...] man könnte den Studenten direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführen und solcherart die Fragestellungen, Begriffe und Tatsachen vor ihnen entstehen lassen [...]“ (ebd., S. 93)

Unter zweiterem versteht Toeplitz einen rückwärtsgerichteten Unterricht, bei dem man vom heutigen Wissensstand ausgeht und in die Vergangenheit blickt:

„[...] man könnte für sich selbst aus solcher historischer Analyse lernen, was der eigentliche Sinn, der wirkliche Kern jedes Begriffs ist, und könnte daraus Folgerungen für das Lehren dieses Begriffs ziehen, die als solche nichts mehr mit der Historie zu tun haben [...]“ (ebd., S. 93)

Tzakanis und Arcavi (2002, S. 210) ergänzen, dass sich diese beiden Gestaltungsformen, die sie als „explicit and implicit use of history“ bezeichnen, einander nicht ausschließen müssen und sprechen ihnen einen dualen Charakter zu. Sie geben auch hier einen Weg vor, wie an dieses genetische Prinzip aus Lehrerperspektive heranzugehen sei:

- (1) Die Lehrkraft müsse sich zunächst mit der Geschichte und ihrer Entwicklung auseinandersetzen, um von dort aus
- (2) Grundideen (key ideas), Fragestellungen und Probleme der Thematik zu identifizieren.
- (3) Entscheidende Gedankengänge seien zu rekonstruieren, wobei die Inhalte didaktisch geeignet für den Unterricht angepasst werden sollen.
- (4) Diese aufeinander aufbauenden Überlegungen seien im Unterricht von den Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten.

Tzakanis und Arcavi (2002), aber auch Nickel (2013) sehen in diesem Ansatz mehrere Vorteile: so helfe das genetische Prinzip neue Konzepte gelungen zu motivieren, Lernende könnten eine forschende Rolle einnehmen, der Zusammenhang von Mathematik mit anderen Wissenschaften könne geschickt aufgezeigt werden, es gebe die Möglichkeit je nach Klasse Schwerpunkte bei historischen oder mathematischen Aspekten zu setzen und letztlich entgehe man künstlich geschaffenen Beispielen:

„In this way, the solution of exercises becomes an essential ingredient of learning, leading to the construction of the necessary technical knowledge on the basis of interesting problems and not on the basis of exercises artificially constructed.“ (Tzakanis und Arcavi 2002, S. 210)

Diesen Argumenten sind gewiss der zeitliche Aufwand und die mangelnde Expertise von Lehrkräften entgegenzuhalten. Es fehlt aber auch in der Literatur an geeigneten Vorlagen, die für den schulischen Unterricht geeignet wären. Pionierarbeit im Bereich des genetischen Prinzips liefert Toeplitz (1949) für die Infinitesimalrechnung, allerdings ist diese Ausarbeitung sehr umfangreich und zu anspruchsvoll für schulische Zwecke. Hairer und Wanner (2011) beleuchten ebenfalls die Analysis auf genetische Weise, teilen aber dasselbe Problem mit Toeplitz. Davon abgesehen ist es fragwürdig, ob der reguläre Schulalltag mit seinem 50 Minuten Takt eine geeignete Lernumgebung für diese Art von Unterricht darstellt. Allenfalls ließe sich ein solches Vorhaben im Wahlpflichtfach oder Rahmen von Projekttagen realisieren.

3.2.3 Bewusstsein für Mathematik

Die Geschichte liefert unzählige Möglichkeiten ein Bewusstsein für Mathematik und ihre Bedeutung für die Gesellschaft zu schaffen. Dabei unterscheiden Tzakanis und Arcavi (2002, S. 211) zwischen intrinsischen und extrinsischen Aspekten.

Zu ersteren zählen sie zentrale Probleme bzw. Fragestellungen und die damit verbundene Motivation, die zur Entwicklung und Entstehung mathematischer Bereiche beigetragen haben, aber auch die Veränderung von Notation und Terminologie im Laufe der Zeit. Ebenso ließen sich hier die Bedeutung von Zweifel, Intuition, Widersprüchlichkeiten und die Schwierigkeiten beim Entstehen mathematischer Konzepte zuordnen.

Zu letzterem zählen sie die Rolle der Mathematik im Zusammenhang mit der Gesellschaft, mit der Kunst (Musik, Architektur, ...) und mit anderen Wissenschaften. Mathematik sei und war schon immer ein integraler Bestandteil der menschlichen Kultur und enthalte Praktiken unterschiedlicher Zivilisationen, Nationen und ethnischer Gruppen. Unter diesem Aspekt zeige sich auch, dass gesellschaftliche Prozesse fördernde, aber auch hemmende Wirkungen auf den Fortschritt der Mathematik haben können.

Es sei erwähnt, dass die Übergänge zwischen diesen drei Domänen fließend verlaufen, der Fokus in jeder Domäne aber ein anderer ist: so steht in der ersten ein geschichtliches Lernen im Mittelpunkt, in der zweiten ein Mathematiklernen mithilfe der Geschichte und in der dritten gilt es ein Bewusstsein für mathematische Denkweisen zu schaffen und den Zusammenhang zur Gesellschaft unter Einbezug der Geschichte aufzuzeigen. Die zuletzt genannte Domäne „Bewusstsein für Mathematik“ scheint im Zusammenhang mit der Hypothese besonders attraktiv zu sein.

Ein geschichtlich motiviertes Lernen kann nach Tzanakis und Arcavi (2002, S. 212) nur mithilfe von Bezugsquellen stattfinden, wobei sie zwischen primären, sekundären und didaktisch aufbereiteten Quellen unterscheiden. In der Literatur mangelt es am meisten an letzteren, wobei es hier im angloamerikanischen Raum Bemühungen gibt, Lehrkräften Material zur Verfügung zu stellen, wie beispielsweise die Materialsammlungen von Shell-Gellasch (2007) und Barbin (2018). Eine genauere Betrachtung dieser Werke zeigt, dass sie zwar anregende Ideen für einen Unterricht im Sinne des IGMU-Prinzips liefern, jedoch einen zusätzlichen Mehraufwand für Lehrpersonen darstellen. Das liegt nicht nur daran, dass sie in englischer Sprache verfasst sind und deshalb Übersetzungsarbeit geleistet werden müsste, sondern im

Wesentlichen an der Tatsache, dass es sich bei den vorliegenden Materialien bestenfalls um Unterrichtsskizzen handelt – es liegen also keine konkreten Arbeitsaufträge oder Materialien vor. Damit bewahrheiten sich die in Kapitel 3.1 erläuterten Einwände gegen das IGMU-Prinzip (Ressourcen- und Kompetenzmangel). Aus diesem Grund soll im nächsten Kapitel dieser Masterarbeit ein konkretes Unterrichtskonzept erarbeitet werden – nicht nur, um die aufgestellte Hypothese zu überprüfen, sondern auch einen ersten Schritt dahingehend zu setzen Lehrpersonen geeignetes Unterrichtsmaterial zur Verfügung zu stellen und damit Hemmungen gegenüber dem IGMU-Prinzip abzubauen.

4 Unterrichtskonzept – Der pythagoreische Lehrsatz in unterschiedlichen Kulturen

Geschichtliche Aspekte der Mathematik lassen sich in jeder Schulstufe und Schulform in den Unterricht integrieren. Da die empirische Phase dieser Masterarbeit im Rahmen der Schulpraxis an einer NMS in Wien stattfindet, in der drei Klassen der 8. Schulstufe zu unterrichten sind, fällt die Wahl des Unterrichtsstoffes auf den pythagoreischen Lehrsatz. Diese Wahl hat einige gute Gründe:

- Der pythagoreische Lehrsatz hat eine historisch lange und umfangreiche Geschichte, aus der sich schöpfen lässt.
- Es besteht die Möglichkeit, das Leben eines berühmten Namensgebers – und davon gibt es nicht viele in der Sekundarstufe I – biographisch zu betrachten.
- Der pythagoreische Lehrsatz wurde bereits in der vorherigen Schulstufe eingeführt und findet in der jetzigen und in weiteren Schulstufen erneut Einsatz. Das bietet die Möglichkeit über ihn zu reflektieren und nachhaltiges Wissen zu schaffen.
- Der pythagoreische Lehrsatz, als Teil der antik-griechischen Mathematikkultur ist ein Wendepunkt in der Mathematikgeschichte: zuvor wurde Mathematik – soweit der heutige Wissensstand – „rezeptartig“ praktiziert. Pythagoras und andere brachten allgemeingültige Sätze und deren Beweis in die Mathematik und verhalfen ihr zur Wissenschaft. Auch wenn Beweise in der Schule wenig Beachtung finden, so ist es bemerkenswert, dass im Lehrplan nur beim pythagoreischen Lehrsatz vermerkt ist: *„eine Begründung des Lehrsatzes des Pythagoras verstehen“*.
- Zuletzt sei erwähnt, dass der pythagoreische Lehrsatz in unterschiedlichen Kulturen Einsatz fand. Dies ermöglicht einen Einblick in unterschiedliche Zugänge zur Mathematik, zeigt aber gleichzeitig auch die Gemeinsamkeiten dieser bedeutsamen „Wissenskultur“ (vgl. Loos & Ziegler 2015).

Im Hinblick auf die Analyse von Tzanakis & Arcavi (2002), wie das IGMU-Prinzip umzusetzen sei, liegt der Fokus des hier zu erstellenden didaktischen Konzepts auf den Domänen „direkte historische Informationen“ und „Bewusstsein für Mathematik“. Der Unterricht wird für zwei Schulstunden als „Lernbuffet“/Stationenbetrieb gestaltet, d. h. die Schülerinnen und Schüler holen sich wie von einem Buffet Unterrichtsmaterialien, die sie dann am Sitzplatz bearbeiten sollen.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst grundlegende, historische Aspekte zur Mathematik in Mesopotamien, bei den alten Ägyptern und den Griechen aus der Literatur zusammengetragen, wobei der pythagoreische Lehrsatz im Mittelpunkt steht. Dabei dienen die Werke von Gericke (1984), Maor (2007), Wußing (2008), Scriba & Schreiber (2010) und Breidbach (2015) als Informationsquellen.

4.1 Mathematik in Mesopotamien

Als Mesopotamien (heutiger Irak) bezeichnet man das fruchtbare Land zwischen den Strömen Euphrat und Tigris, das als eines der bedeutendsten Entwicklungszentren der Menschheitsgeschichte gilt. Ausgehend von den Sumerischen Stadtstaaten (3000 - 2700 v. Chr.) war diese Region ein Schmelztiegel verschiedener Völker und hat dementsprechend eine komplizierte Geschichte (vgl. Wußing 2008 S. 122ff.; Breidbach 2015 S. 35). Als herausragende Blütezeit gilt das altbabylonische Reich (1900 – 1600 v. Chr.) mit seinem kulturellen Zentrum, der Stadt Babylon. Aus dieser Zeit stammen die wichtigsten mathematischen Texte und deswegen ist oft auch von der „babylonischen Mathematik“ die Rede (vgl. Gericke 1984, S. 16).

Über die Mathematik in Mesopotamien wissen wir heute besonders viel, da schon die Sumerer die Keilschrift entwickelten und ihre Kenntnisse auf Tontafeln festhielten. Zur Darstellung von Zahlen wurde ein senkrechter Keil für die Zahl 1 und eine quer stehende Kerbe für die Zahl 10 verwendet. In Abb. 3 sind die Zahlen 1 bis 59 dargestellt.

𐎶 1	𐎶𐎶 11	𐎶𐎶𐎶 21	𐎶𐎶𐎶𐎶 31	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 41	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 51
𐎶𐎶 2	𐎶𐎶𐎶 12	𐎶𐎶𐎶𐎶 22	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 32	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 42	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 52
𐎶𐎶𐎶 3	𐎶𐎶𐎶𐎶 13	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 23	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 53
𐎶𐎶𐎶𐎶 4	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 54
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 55
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 56
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 57
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 58
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 59
𐎶𐎶𐎶 10	𐎶𐎶𐎶𐎶 20	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 30	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 40	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶 50	

Abb. 3: Darstellung der Zahlen 1 bis 59 in der Keilschrift

Für die Zahl 60 wurde wieder das Symbol der Zahl 1 verwendet, aber um eine Stelle nach links verschoben. Das Stellenwertsystem der Babylonier hatte also die Basis 60 (Sexagesimalsystem) und dieses ist heute noch bei der Angabe der Uhrzeit oder des Vollwinkels präsent (Wußing 2008, S. 130). Für die übersichtliche Darstellung von Sexagesimalzahlen ist es gegenwärtig üblich die Stellen durch ein Komma (,) zu trennen und das tatsächliche Komma durch ein Semikolon (;). So beschreibt beispielsweise das Zeichen «« die Sexagesimalzahl 20,20, die die (Dezimal)-Zahl $20 \cdot 60 + 20 = 1220$ repräsentiert. Gleichzeitig könnte dieses Zeichen aber auch die Sexagesimalzahl 20; 20 beschreiben, welches die (Dezimal)-Zahl $20 + \frac{20}{60} = 20, \dot{3}$ darstellt. Hier wird die Mehrdeutigkeit der babylonischen Zahlendarstellung deutlich, die noch zusätzlich durch die Unkenntnis der Zahl 0 erschwert wird. So könnte es sich beim Zeichen «« neben der naheliegenden Zahl $20 \cdot 60 + 20 = 1220$ auch um die Zahl $20 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 20 = 72020$ handeln. Meist musste die „richtige“ Zahl aus dem Kontext erschlossen werden (Breidbach 2015, S. 38f.).

Aus den unzählig ausgegrabenen Tontafeln geht hervor, dass die mesopotamische Mathematik eng mit praktischen Problemen verbunden war und dass Lösungen zu diesen als Rechenschemata bzw. Rechenvorschriften ohne nähere Begründung angegeben wurden. Die Betrachtung derartiger praktischer Aufgaben wirft nach Wußing (2008, S. 131f.) ein Licht auf gesellschaftliche Bedürfnisse zu jener Zeit. So zeige sich anhand der Aufgabenstellungen die Bedeutung von Mathematik besonders deutlich im Bauwesen, in der Landwirtschaft, aber auch deren Einsatz für militärische Zwecke:

„Berechnung von Dämmen, die meist trapezförmigen Querschnitt besaßen, wo nach der Neigung der Böschung, der Breite der Dammkrone und der Zahl der benötigten Arbeiter bei einer mittleren Arbeitsleistung gefragt wird; Berechnung von ringförmigen Wallbauten, von Tempelfundamenten, von Befestigungsgräben, von Kanälen, von Brunnenziegeln. Ferner geht es um die Fläche von Feldern, kombiniert mit Rechnungen: Die Gesamterträge der Ländereien erscheinen abhängig auch vom „spezifischen Ertrag“, als Funktion der Güte des Bodens.“ (Wußing 2008, S. 132)

Den Babyloniern waren Rechenschemata zur Bestimmung einer Vielzahl von Flächen- und Rauminhalten bekannt – Formeln mit Variablen im heutigen Sinne verwendeten sie aber nicht, sondern sie rechneten mit konkreten Zahlen wie das folgende auf einer Tontafel gefundene Beispiel zeigt:

„Ein Balken, 30 [Gar]. Von oben ist er 6 herabgekommen. Von unten was hat er sich entfernt? 30 quadriere, 15[,0] siehst du. 6 von 30 abgezogen, 24 siehst du. 24 quadriere, 9,36 siehst du. 9,36 von 15[,0] ziehe ab. 5,24 siehst du. 5,24 hat was als Quadratwurzel? 18. 18 am Boden hat er sich entfernt.“ (Gericke 1984, S. 33, Anmerkung: Die Zahlen mit Komma entsprechen Zahlen im Hexagesimalsystem)

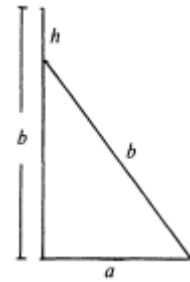


Abb. 4: Darstellung des an der Wand lehenden Balkens

Gerechnet wurde gemäß Abb. 4 also:
$$a = \sqrt{b^2 - (b - h)^2}$$

Diese in der Geschichte immer wiederkehrende und auch heute noch beliebte Aufgabe zum pythagoreischen Lehrsatz zeigt, dass die Babylonier diesen berühmten Lehrsatz also schon weit vor Pythagoras kannten, der erst über tausend Jahre später geboren wurde. Mit diesem Lehrsatz konnten sie auch einen Näherungswert für die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ angeben, indem sie die Diagonale des Einheitsquadrates bestimmten (Wußing 2008, S. 134; Maor 2007, S. 6).

Gericke (1984, S. 33) vermutet bei den Babyloniern sogar einen „Beweis“ des pythagoreischen Lehrsatzes für den Sonderfall des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks, anhand der in Abbildung 5 veranschaulichten Figur, die auf einer Tontafel entdeckt wurde. Der dazugehörige Beweis wird in Abb. 14 (S. 39, links) behandelt.

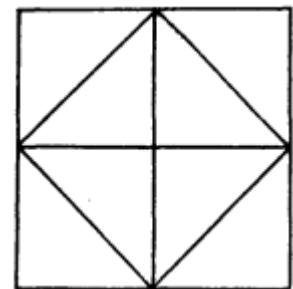


Abb. 5: Quadrat in acht gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt

Zu einem der bedeutendsten Funde im Hinblick auf den pythagoreischen Lehrsatz stellt die Tontafel Plimpton Nr. 322 dar, die in Abb. 6 (links). Sie wurde am Anfang des 19. Jahrhunderts ausgegraben und 1936 von George Plimpton an die Columbia University übergeben (vgl. Internetquelle 1). Die zweite und dritte Spalte tragen die Überschriften „Lösungszahl der Breite“ und „Lösungszahl der Diagonale“ und in ihnen befinden sich in fünfzehn Zeilen Zahlen im Sexagesimalsystem. Diese gelten nach Otto Neugebauer, wenn auch in der Literatur umstritten (vgl. Wußing 2008, S. 136; Scriba 2010, S. 22), jeweils als die Kathete und Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Abb. 6 (rechts) zeigt auch eine lesbarere Variante der Tontafel in Sexagesimaldarstellung.



$(c/a)^2$	b	c
[1,59,0,]15	1,59	2,49
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49
[1,]38,33,36,36	9,1	12,49
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1
1,33,45	45	1,15
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49
[1,]23,13,46,40	56	53

Abb. 6: links: Bild der Tontafel Plimpton Nr.322, die auf etwa 1800 v.Chr. datiert wurde. Rechts: „moderne“ Sexagesimalzahldarstellung der Tontafel Plimpton Nr.322. Die Zahlen in eckigen Klammern wurden rekonstruiert.

Die erste Zeile enthält die Zahlen $b = 1,59$ und $c = 2,49$, welche die Zahlen $1 \cdot 60 + 59 = 119$ und $2 \cdot 60 + 49 = 169$ repräsentieren. Verwendet man nun den pythagoreischen Lehrsatz, so ergibt die Kathete $a = \sqrt{169^2 - 119^2} = \sqrt{14400} = 120$. Das Zahlentripel $(119, 120, 169)$ bezeichnet man dabei als pythagoreisches Tripel. Darunter versteht man drei Zahlen $(a, b, c) \in \mathbb{N}$, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Bis auf Fehler in den Zeilen 9, 13 und 15 deuten alle Zeilen dieser Tontafel auf pythagoreische Tripel hin, von denen fraglich ist, wie die Babylonier diese überhaupt gefunden haben. So liefert beispielsweise Zeile drei das erstaunlich große pythagoreische Tripel $(4601, 4800, 6649)$ (vgl. Maor 2007, S. 8f.).

Die Überschrift der ersten Spalte ist unklar und das Fehlen des linken oberen Teils der Tontafel erschwert das Auffinden ihrer tatsächlichen Bedeutung. Der Mathematiker und Historiker Otto Neugebauer vermutete, dass die Zahlen der ersten Spalte dem Verhältnis $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ entsprächen. Für die erste Zeile der Tontafel erhielte man dann $\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{169}{120}\right)^2 \approx 1,983$. Tatsächlich entspricht dieser Wert der in der ersten Zeile angegebenen Zahl 1;59,0,15, denn $1 + \frac{59}{60} + \frac{0}{60^2} + \frac{15}{60^3} \approx 1,983$. Dieser Sachverhalt lässt sich auch in allen anderen fehlerlosen Zeilen bestätigen.

Folgende Fragen resultieren für Maor (2007, S. 10f.) aus diesem Zusammenhang:

1. Ist die Reihenfolge der Zeilen zufällig gewählt oder verbirgt sich dahinter ein Muster?
2. Wie fanden die Babylonier diese pythagoreischen Tripel?
3. Wofür wurde diese Tafel verwendet und welche Rolle spielt das Verhältnis $\left(\frac{c}{a}\right)^2$?

Vergleicht man die Werte der ersten Spalte, so fällt auf, dass diese gleichmäßig von 1,983 auf den Wert 1,387 abfallen. Das Verhältnis $\frac{c}{a}$ entspricht der Winkelfunktion Kosekans, also $\csc \alpha = \frac{c}{a}$ – der Kehrwert-Funktion der Sinusfunktion. Überträgt man diese Erkenntnis auf die erste Spalte der Tabelle, so ergeben sich daraus Winkel, die von etwa 45° beginnend auf etwa 58° anwachsen. Sollte also die Hypothese Neugebauers stimmen und es sich tatsächlich bei der ersten Spalte um das Verhältnis $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ handeln, dann stellt diese Tontafel die älteste, bekannte trigonometrische Tabelle dar (ebd., S. 11).

Für Maor (2007, S. 11) gibt es auf die zweite Frage nur eine plausible Antwort: die Babylonier mussten bereits einen Algorithmus zum Auffinden pythagoreischer Tripel haben, ähnlich zu dem erst 1500 Jahre später formalisierten Satz in Euklids Elementen. Bundschuh (2008, S. 168) gibt Euklids Satz über pythagoreische Tripel wie folgt an:

Satz. *Alle primitiven (teilerfremden) pythagoreischen Tripel (a, b, c) mit geradem b sind durch folgende Parameterdarstellung gegeben*

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2$$

mit teilerfremden natürlichen u, v , so dass die Differenz $a - b$ positiv und ungerade ist.

Sollte die Hypothese Neugebauers stimmen, so zeige dies nach Maor (ebd., S. 11), dass die Babylonier nicht nur den pythagoreischen Lehrsatz kannten, sondern auch rudimentäre Zahlentheorie betrieben haben mussten, und das bereits vor etwa 4000 Jahren.

Abschließend sei gesagt, dass die Mehrdeutigkeit der babylonischen Zahlenschreibweise im Zusammenhang mit dem fehlenden Teil der Tontafel einen großen Interpretationsspielraum zulässt. In Abb. 6 (rechts) lässt sich außerdem erkennen, dass in den meisten Zeilen Zahlen hinzukonstruiert wurden und dass in drei Zeilen „Fehler“ – auch wenn es sich bei einem davon um einen offensichtlichen Abschreibfehler handelt – der Hypothese Neugebauers widersprechen.

Letztlich bleibt die Frage offen, ob es sich bei der Tontafel Plimpton Nr. 322 wirklich um eine trigonometrische Tabelle handelt oder ob sie einen gänzlich anderen Zweck erfüllte.

4.2 Mathematik im alten Ägypten

Die altägyptische Kultur zählt zu einem der Schätze der Menschheitsgeschichte und beeindruckte schon die antiken Griechen (Wußing 2008, S. 108). Besonders berühmt sind die Bauwerke der alten Ägypter; die Pyramiden und Tempel, die Prachtentfaltung der Herrschenden, aber auch ihre Schriftzeichen, die Hieroglyphen, deren Erfindung auf etwa 3000 v. Chr. zurückgeht. Zu dieser Zeit beginnen die beiden Königreiche Ober- und Unterägypten zu verschmelzen und den Beginn eines goldenen Zeitalters einzuläuten, das sogenannte „alte Reich“ (2700 – 2170 v. Chr.), in welchem auch die Pyramiden entstanden (vgl. Wußing 2008, S. 104ff.; Breidbach 2015, S. 57ff.).

Im Gegensatz zu den Babyloniern, schrieben die alten Ägypter auf dem weitaus fragileren Material Papyrus, sodass wir über ihre mathematischen Kenntnisse weitaus weniger wissen. Im Detail verraten uns nur zwei erhaltene Papyrus-Schriftrollen etwas über die Mathematik der alten Ägypter: der Papyrus Rhind und der Papyrus Moskau, die beide aus der Zeit des „mittleren Reiches“ (2040 – 1794 v. Chr.) stammen. Aus ihnen geht hervor, dass die alten Ägypter bereits rudimentäres Bruchrechnen (nur mit Stammbrüchen) beherrschten, lineare Gleichungen lösen konnten und Formeln für viele Flächen- und Rauminhalte besaßen (Wußing 2008, S. 114ff.). Dabei ist zu erwähnen, dass – wie bei den Babyloniern – keine heute üblichen mathematischen Symbole und Formeln verwendet wurden, sondern kryptische Rechenvorschriften wie die Folgende:

„Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9 ht [altes ägyptisches Längenmaß]. Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm $\frac{1}{9}$ von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64.“ (aus dem Papyrus Rhind nach Gericke 1984, S. 55)



Abb. 7: Landkarte des altägyptischen Reiches. Die strichlierte Linie stellt die Grenze zwischen Ober- und Unterägypten dar.

Aus diesem Beispiel geht die Flächeninhaltsformel des Kreises als

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2$$

hervor. Damit zeigt sich, dass die alten Ägypter bereits einen Näherungswert für π kannten, nämlich

$$\pi \approx \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 4 \approx 3,16.$$

Gericke (1984, S. 62) beschreibt aber auch „Backverhältnis“-Aufgaben, in denen nach der Anzahl Brote oder Biere gefragt wird, die bei einem Backverhältnis (=„Pefsu“) aus einem Hektat (ca. 4,8 l) Korn hergestellt werden können, aber auch Verteilungsaufgaben, wie zum Beispiel:

„Verteile 100 Brote unter 10 Männern, von denen je einer ein Bootsmann, ein Werkführer und ein Torwächter ist, die doppelte Portionen erhalten.“ (ebd., S. 62)

Damit zeigt sich, ähnlich wie bei den Babyloniern, dass die Verwendung von Mathematik stark an alltägliche Probleme geknüpft war. Noch deutlicher wird dies, wenn der Zweck der beiden Papyrusschriftrollen zum Vorschein tritt. Die Vermutung liegt nahe, dass diese als Lehrbücher fungierten und somit die ältesten, bekannten Mathematiklehrbücher darstellen. So beginnt der Papyrus Rhind mit den Worten:

„Genaues Rechnen. Einführung in die Kenntnis aller existierenden Gegenstände und aller dunklen Geheimnisse.“ (ebd., S. 50)

Dieses mathematische Wissen war zusammen mit dem Lesen und Schreiben einer bestimmten Berufsgruppe vorbehalten, den sogenannten „Schreibern“ (Abb. 8). Sie waren die ausführenden Organe des Staates und für die Verwaltung des Reiches zuständig – ein Ergebnis der fortschrittlichen Arbeitsteilung im alten Ägypten. Zu ihren Aufgaben zählten das Eintreiben von Steuern, das Dirigieren von Arbeitsheeren, aber auch die Ausübung der Gerichtsbarkeit (Wußing 2008, S. 114).

Die gefundenen Papyri versteht Wußing (2008) als ein mathematisches Nachschlagewerk für Schreiber, um beispielsweise folgende Berufsaufgaben zu lösen:

„Probleme der Feldvermessung (erforderlich nach den jährlich wiederkehrenden Nilüberschwemmungen), Berechnung der Steuern und Abgaben, Berechnung der Verpflegung für die Heere, Berechnung der Größe von Vorratsbehältern, Projektierung von Bauwerken – dazu sollte ein erfahrener Schreiber imstande sein.“ (Wußing 2008, S. 114)



Abb. 8: links: Skulptur eines Schreibers. Rechts: ein Ausschnitt aus dem Papyrus Rhind

Das Anforderungsprofil eines Schreibers zeigt nach Breidbach (2015, S. 70), dass die technologischen und architektonischen Leistungen der Ägypter auf einer wohldurchdachten Organisation beruhten, welche wiederum die Mathematik als ihr Fundament hatte:

„Das Mathematische ist also nicht etwa nur in der Proportionslehre der entstehenden Bauten, sondern in viel umfassenderem Sinne eben auch in dem Wissensmanagement dieser Kultur abzulesen.“ (ebd., S. 70)

Dass Mathematik für die alten Ägypter ein bedeutendes Kulturwerkzeug war, zeigt sich auch an den jährlichen Nilüberschwemmungen: Der Fluss Nil war schon immer die Lebensader Ägyptens und schon früh wurde an ihm Landwirtschaft betrieben. Um die jährlichen Hochwasser – die übrigens die fortwährende Fruchtbarkeit des Ackerlandes garantierten – vorhersehen zu können, führten die alten Ägypter mithilfe astronomischer Beobachtungen bereits 3000 v. Chr. einen Kalender ein. Dieser unterteilte das Jahr bereits in 365 Tage und wurde in drei Jahreszeiten mit je vier Monaten und fünf zusätzlichen Tagen zergliedert. Die Jahreszeiten waren auf den Nil abgestimmt: Überschwemmungszeit, Wachstumszeit und Erntezeit. Dieser Kalender wurde später von den Römern unter Einbezug des Schaltjahres als

julianischer Kalender 238 v. Chr. übernommen und erst 1582 vom – heute üblichen – gregorianischen Kalender abgelöst. (Gericke 1984, S. 47f.; Wußing 2008, S. 111f.)

Kannten die alten Ägypter den pythagoreischen Lehrsatz? Von den 84 Aufgaben im Papyrus Rhind, behandeln 20 geometrische Fragestellungen, wobei fünf davon die Pyramiden betreffen – jedoch gibt es keine Anzeichen für den pythagoreischen Lehrsatz, auch nicht im Papyrus Moskau. (Maor 2007, S. 14)

Ein Blick in gängige Schulbücher (zum Beispiel Genial Mathematik 3, 2015, 6. Auflage, S. 150 oder thema mathematik 3, 2019, 3. Auflage, S. 190) zeigt, dass im Zusammenhang mit den alten Ägyptern oftmals das 12-Knotenseil erwähnt wird. Dabei handelt es sich um ein Werkzeug zur Konstruktion eines rechten Winkels, welches auf dem pythagoreischen Tripel (3, 4, 5) beruht (siehe Abb. 9). Dieses soll auch zur Neuvermessung von Grundstücken nach den Nilüberschwemmungen zum Einsatz gekommen sein. Maor (2007) bezweifelt, dass die alten Ägypter tatsächlich ein solches Seil zur Vermessung verwendet haben:



Abb. 9: Darstellung des 12-Knotenseils

„Of course, the absence of evidence is not evidence of absence [...]. Still, in all likelihood the Rhind Papyrus represented a summary of the kind of mathematics a learned person [...] might encounter in his career, and the absence of any reference to the Pythagorean theorem strongly suggests that the Egyptians did not know it.“ (ebd., S. 14)

4.3 Mathematik in der griechischen Antike (ionische Periode)

Die griechische Antike (800 – 200 v. Chr.) stellt einen weiteren Meilenstein der Menschheitsgeschichte dar. In nahezu allen gesellschaftlichen Lebensbereichen vollziehen sich bedeutende Entwicklungen: in der Kunst und Philosophie, im Staatswesen, in den Naturwissenschaften, in der Baukunst, der Technik, aber natürlich auch in der Mathematik. Viele namhafte Persönlichkeiten dieser Zeit prägten den weiteren Verlauf der Geschichte: der Epiker Homer; die Philosophen Sokrates, Platon und Aristoteles; der Welteroberer Alexander der Große; die Mathematiker Thales, Pythagoras, Euklid, Archimedes, Heron und Diophantos – um nur wenige zu nennen.

Im Gegensatz zu den alten Ägyptern und den Babyloniern, die Mathematik empirisch und rezeptartig betrieben, bemühten sich die Griechen um die Allgemeingültigkeit

mathematischer Aussagen (Sätze), die es zu definieren und in logischen Schritten zu beweisen galt. Durch Logik und Deduktion verhalfen sie der Mathematik zur eigenständigen Wissenschaft, wobei Wußing (2008) die besondere Bedeutung der Geometrie hervorhebt:

„Das von ihnen [den Griechen] geschaffene System der Geometrie wurde für zwei Jahrtausende das große Vorbild für den deduktiven Aufbau einer wissenschaftlichen Disziplin schlechthin und sollte sogar in der Neuzeit die Entwicklung der Mathematik nach Stil und Methode prägen.“
(ebd. 2008, S. 147)

Die Entwicklung der griechischen Mathematik umfasst einen Zeitraum vom 7./6. Jahrhundert v. Chr. bis etwa zum 5. Jahrhundert n. Chr. und wird in vier Perioden geteilt, von denen hier aber nur die erste, sogenannte ionische Periode (700 – 500 v. Chr.) betrachtet werden soll. In ihr wird ein Grundstein für die Herausbildung der Mathematik als selbstständige Wissenschaft gelegt, der aus der ionischen Naturphilosophie heraus entsteht. Als bedeutende Mathematiker aus dieser Periode gelten Thales und Pythagoras, deren Leben in den folgenden beiden Abschnitten näher betrachtet wird (Wußing 2008, S. 149f.).

Leider gibt es kaum Aufzeichnungen zu diesen Persönlichkeiten aus jener Zeit und so sind wir auf die Zuschreibungen späterer Philosophen und deren Schriften angewiesen. Einer von diesen ist Euklid (um 300 v. Chr.), der es sich damals zur Aufgabe gemacht hatte das kumulative mathematische Wissen geordnet niederzuschreiben. Das Ergebnis sind die berühmten Elemente des Euklid, das aus dreizehn Kapiteln besteht und als Standardwerk der Mathematik gilt. Es zählte bis ins 20. Jahrhundert als das meistverbreitete Buch nach der Bibel und bietet einen Einblick in den Wissensstand der damaligen Mathematik. Dadurch liefert es – besonders durch eine kommentierte Version des Spätantiken Philosophen Proklos – Anhaltspunkte zu den Mathematikern Thales und Pythagoras. Ebenso berichten Platon und Aristoteles über diese Persönlichkeiten (Gericke 1984, S. 72ff.; Schreiber & Scriba 2010 S. 49ff.).

4.3.1 Thales

Thales von Milet (624 – 546 v.Chr.), einer der „sieben Weisen“, gilt als der erste griechische Philosoph, Mathematiker und Astronom. Er soll bis nach Ägypten und Babylon gereist, politisch tätig gewesen sein und sich dann den Naturwissenschaften gewidmet haben. Laut Aristoteles fragte Thales nach den natürlichen Ursachen der Erscheinungen und zählt damit

als der Begründer der ionischen Naturphilosophie, die es sich zur Aufgabe genommen hatte, Phänomene auf allgemeine Naturgesetze zurückführen – hier zeigt sich bereits der Grundgedanke der modernen Naturwissenschaften, der konträr zu den mythologischen Vorstellungen der damaligen Zeit stand:

„Die Natur und ihre Erscheinungen, wie Tag und Nacht, der Sternenhimmel, die Erde, das Meer, die Berge, Flüsse und Winde werden durchgehend noch als persönliche, göttliche Wesen teils männlichen, teils weiblichen Geschlechts gedacht, die durch Zeugung von anderen göttlichen Personen [...] abstammen.“ (Wußing 2008, S. 158 zitiert nach Capelle 1940, S. 25f.)

Besonders die Frage nach dem Aufbau der Materie war ein zentrales Anliegen, das Thales mit seinen Anhängern, wozu Anaximander zählte, in seiner Schule in Milet diskutierte. Aristoteles zufolge soll Thales Wasser als den Grundstoff aller Dinge genannt haben. Herodot berichtet außerdem, dass er eine Ursache für die regelmäßigen Nilüberschwemmungen in Ägypten angegeben und eine Sonnenfinsternis im Jahre 585 v. Chr. vorhergesagt haben soll (Gericke 1984, S. 72ff.).

In der Mathematik werden ihm nach Proklos, folgende Sätze zugesprochen, die in Euklids Elementen aufgenommen und bewiesen wurden. Thales soll zu ihnen ebenfalls eine Begründung angegeben haben (Scriba & Schreiber 2010, S. 31f.):

- Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich.
- Die Scheitelwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden sind gleich.
- Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt, oder anders: Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, stimmen in allen Stücken überein.
- Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.

Der zuletzt genannte Satz, ist auch als Satz des Thales bekannt und aus einer anderen Quelle überliefert, die aufgrund unterschiedlicher Interpretation der Übersetzung als unsicher gilt (vgl. Gericke 1984, S. 75f.).

Wie die konkreten Begründungen der angegebenen Sätze nach Thales lauten, ist unbekannt und ob es sich tatsächlich um mathematische Beweise handelt, wird von Gericke (1984) angezweifelt:

„Proklos sagt: ‚Man sagt, dass Thales ... bewiesen habe.‘ Proklos wusste also nicht, ob Thales den Satz überhaupt bewiesen hat. Also kann er nicht gewusst haben, wie Thales den Satz bewiesen hat.“ (Gericke 1984, S. 78)

Der Autor vermutet, dass Thales Plausibilitätsbetrachtungen angestellt habe, die als erste bekannte Versuche gelten, einen mathematischen Satz zu begründen. Das „zum mathematischen Beweis erforderliche Rüstzeug“ (ebd., S. 78) würde seiner Ansicht nach „erst in den folgenden Jahrhunderten entwickelt“ werden (ebd., S. 78).

4.3.2 Pythagoras und die Pythagoreer

Über das tatsächliche Leben von Pythagoras (ca. 560 – 480 v. Chr.) wissen wir relativ wenig, viele Mythen ranken sich um seine Persönlichkeit. Angeblich wurde er auf der Insel Samos (siehe Abb. 10) geboren. Nicht weit davon liegt die Küstenstadt Milet und so nimmt Maor (2007, S. 17) an, dass Pythagoras bei Thales über Philosophie und Mathematik gelernt hatte.



Abb. 10: Landkarte des Mittelmeerraums zur Zeit der griechischen Antike

Ebenfalls überliefert ist, dass Pythagoras Reisen nach Ägypten und vermutlich auch nach Babylon unternommen hat, um sich dort Wissen anzueignen. Als er um 530 v. Chr. zurückkehrt, herrscht in seiner Heimat der Tyrann Polycrates, woraufhin Pythagoras nach Unteritalien auswandert. In Kroton gründet er eine Schule, dessen Anhänger als die „Pythagoreer“ in die Geschichte eingehen. Beim Eintritt in diese vor allem religiös-philosophische Lebensgemeinschaft – heutzutage würde eine solche als Sekte bezeichnet werden – musste der gesamte Besitz aufgegeben und sich auf eine asketische Lebensweise eingestellt werden. Zusätzlich war man der Verschwiegenheit über Entdeckungen innerhalb dieses Bunds verpflichtet. Pythagoras wurde schon zu Lebzeiten von seinen Anhängern als Gott verehrt, wie Breibach (2015, S. 113f.) berichtet:

„mit der Formel ‚Autos epha‘ – er hat gesagt – wurden seine Aussagen als verbindliche Normen tradiert, die nun als Glaubenswahrheiten in seiner Schule weitergetragen wurden.“ (ebd., S. 113)

Weiters berichtet Breidbach (2015, S. 114) über Legenden, die nach seinem Tode entstanden sind. So soll er Aristoteles zufolge bei einem Besuch der olympischen Spiele aufgestanden sein und gezeigt haben, dass er goldene Schenkel besäße. Die Glorifizierung seiner Persönlichkeit und die Tatsache, dass der Bund der Pythagoreer ihr Wissen nur mündlich und intern weitergab, machen es aus heutiger Sicht unmöglich zu beurteilen, welche Leistungen Pythagoras selbst und welche seine Anhänger vollbrachten, zumal es üblich war alle Erkenntnisse dem Meister zuzuschreiben. Bereits Platon und Aristoteles berichteten meistens nur noch über „die Pythagoreer“ und kaum von Pythagoras selbst (vgl. Gericke 1984, S. 80; Maor 2007, S. 17f.; Scriba 2010, S. 35).

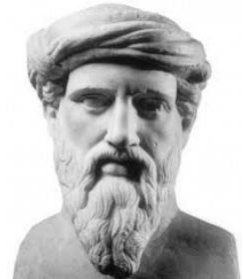


Abb. 11:
Pythagoras von
Samos

Nach van der Waerden (1977, S. 7) gab es unter den Pythagoreern die Gruppe der „Mathematikoi“, die sich gemäß Aristoteles als erstes mit den mathematischen Wissenschaften befassten und diese weiterentwickelten. Die vier praktizierten Wissenschaften („Mathemata“) waren die Arithmetik, die Geometrie, die Harmonik (Musiktheorie) und die Astronomie. Diese galten später als das sogenannte Quadrivium, mit dem sich jeder Gebildete an der Universität bis in die Neuzeit auseinandersetzen musste. Bereits hier zeigt sich der enorme Einfluss der Pythagoreer auf die folgende Wissenschaftsgeschichte.

Aus dem Gebiet der Harmonik wird von Iamblichos überliefert (vgl. Gericke 1984, S. 80) dass Pythagoras an einer Schmiede vorbeiging und das Zusammenklingen von Hämmern ihn zu musikalischen Untersuchungen anregten, die zu der Erkenntnis führten, dass wohlklingende, harmonische Töne mathematisch durch einfache Zahlenverhältnisse zu erklären sind. Diese Entdeckung soll Pythagoras veranlasst haben die Natur mithilfe von Zahlen beschreiben zu wollen und mit diesem Gedanken legte er das Fundament für die modernen Naturwissenschaften. Demgemäß wird Pythagoras und seinen Anhängern auch der Leitspruch „Alles ist Zahl“ zugesprochen. So berichtet Aristoteles:

„Da sie (die Pythagoreer) erkannten, dass die Eigenschaften und Verhältnisse der musikalischen Harmonie auf Zahlen beruhen und da auch alle anderen Dinge ihrer ganzen Natur nach den Zahlen zu gleichen schienen, so meinten sie, die Elemente der Zahlen seien die Elemente aller Dinge und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl.“ (Gericke 1984, S. 81)

Maor (2007, S. 19) merkt an, dass die von den Pythagoreern bereits entdeckte enge Verbindung von Mathematik und Musik auch ein Grund für den mathematischen Einsatz des Wortes „harmonisch“ ist, wie zum Beispiel bei den Begriffen harmonische Reihe, harmonisches Mittel und harmonische Funktion.

Die Pythagoreer gelten außerdem als die Begründer der Zahlentheorie, auch wenn diese zunächst spirituell – ähnlich der jüdischen Kabbala – geprägt ist. In ihrem Fokus lagen natürliche und rationale Zahlen, die oft auch zusätzliche symbolische Bedeutungen hatten. So galt die 1 als Erzeugerin aller Zahlen, da mit ihr jede natürliche Zahl durch Addition gebildet werden kann. Die Zahlen 2 und 3 galten als weiblich und männlich und ihre Summe, die Zahl 5, für deren Vereinigung bzw. die Ehe. Die Zahl 5 stand aber auch für die fünf Elemente Feuer, Erde, Luft, Wasser und die alles umgebende Himmelskugel, welche nach den damaligen Vorstellungen das Universum bildeten. Diese fünf Elemente wurden mit den bereits bekannten fünf regulären Körpern (Abb. 12) assoziiert. Die Zahl 5 spielte damit eine tragende Rolle für die Pythagoreer und sollte deswegen auch ihr „Ordenszeichen“ in Form des Pentagramms werden (Maor 2007, S. 20ff.).

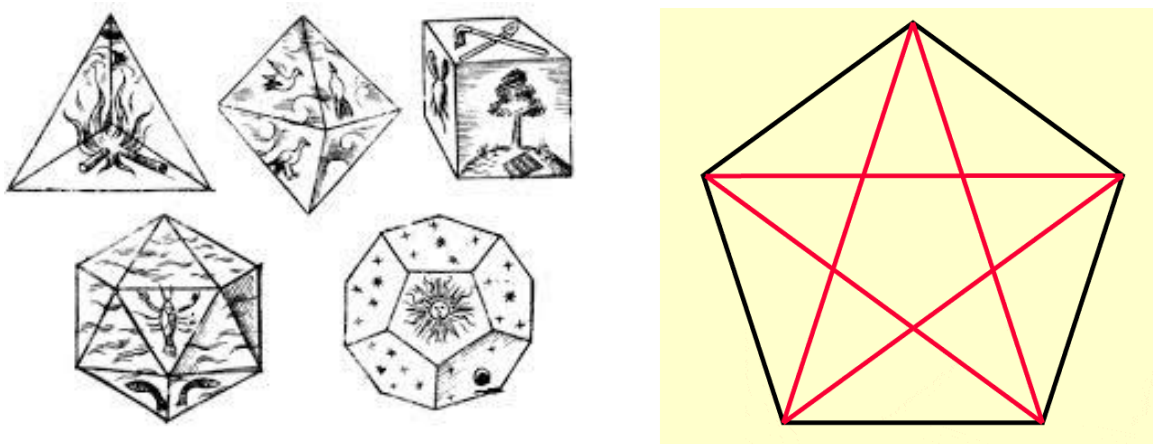


Abb. 12: links: die fünf regulären bzw. platonischen Körper: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Rechts: Das Ordenszeichen der Pythagoreer

Die Zahl 6 war für die Pythagoreer eine besondere Zahl, weil sie die erste „vollkommene“ Zahl ist. Eine natürliche Zahl heißt vollkommen, wenn sie die Summe ihrer Teiler ohne die Zahl

selbst ist ($1 + 2 + 3 = 6$). Die Griechen kannten insgesamt die vier vollkommenen Zahlen 6, 28, 496 und 8128. Bis heute ist es offen, ob es unendlich viele vollkommene Zahlen gibt (Maor 2007, S. 20ff.).

Mehrere Bücher von Euklids Elementen sind nach Gericke (1984, S. 81ff.), Wußing (2008, S. 175f.) und Scriba & Schreiber (2010, S. 49ff.) – zumindest teilweise – auf die Pythagoreer zurückzuführen, insbesondere das Buch IX, in welchem Sätze zu geraden und ungeraden Zahlen deduktiv formuliert und bewiesen wurden. Gericke (1984) ist der Ansicht, dass die Pythagoreer die deduktive Methode entwickelt haben:

„Trotzdem ist die Methode, die hier zum ersten Mal sichtbar wird, wohl den älteren Pythagoreern zuzuschreiben: Jeder Satz ist aus den vorangegangenen logisch abgeleitet, und man kommt auf diese Weise von einfachen Ausgangssätzen zu tiefliegenden Resultaten.“ (ebd., S. 85)

Die Pythagoreer beschäftigten sich auch mit sogenannten „figurierten Zahlen“ (siehe Abb. 13). Dabei handelt es sich um aus Punkten bestehende Zahlen, die zu geometrischen Figuren gebildet und je nach ihrer Form benannt werden. So erkannten sie aus diesen figurierten Darstellungen unmittelbar, dass beispielsweise die Quadratzahlen – dieser Begriff hat sich bis heute gehalten – als Summen der ersten ungeraden Zahlen geschrieben werden können, bzw. dass umgekehrt diese Summen immer Quadratzahlen ergeben. Heute würde man diesen Zusammenhang mit der Gleichung

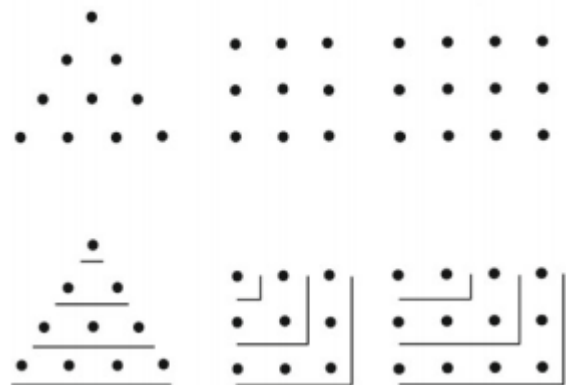


Abb. 13: Darstellung der Dreiecks-, Quadrat-, und Rechteckzahlen. Die Striche trennen die einzelnen Summanden. Im Falle des Quadrats werden die ungeraden Zahlen summiert. Die Summe entspricht dann der Gesamtpunkteanzahl (= Flächeninhalt) des Quadrats.

$$\sum_{i=0}^n (2i + 1) = n^2$$

beschreiben. Es zeigt sich damit, dass die Pythagoreer durch solche geometrischen Darstellungen erste zahlentheoretische „Beweise“ formulieren konnten (Maor 2007, S. 22f.; Wußing 2008, S. 174f.).

Berühmt ist Pythagoras jedoch für den Satz, der seinen Namen trägt. Angeblich soll er diesen als erster bewiesen haben. Wie zuvor beschrieben, ist es aber fraglich, ob Pythagoras selbst oder einer seiner Anhänger einen Beweis erbrachte und wie dieser ausgesehen haben könnte. Im ersten Buch von Euklids Elementen sind zwei Beweise zum pythagoreischen Lehrsatz angegeben, von denen Maor (2007, S. 25) jedoch zeigt, dass diese aufgrund der verwendeten Mathematik nicht von ihm stammen können. Der Autor vermutet jedoch, dass Pythagoras, aufgrund seiner Reisen nach Babylon, einem Beweis für den Sonderfall des gleichschenkelig, rechtwinkligen Dreiecks begegnet sein könnte (siehe Abb. 14, links). In weiterer Folge sei es naheliegend, dass Pythagoras sich nicht mit dem Sonderfall zufriedengab und nach einer Verallgemeinerung strebte. Dieses Streben könnte ihn zum Beweis (siehe Abb. 14, rechts) geführt haben (Maor 2007, S. 25f.).

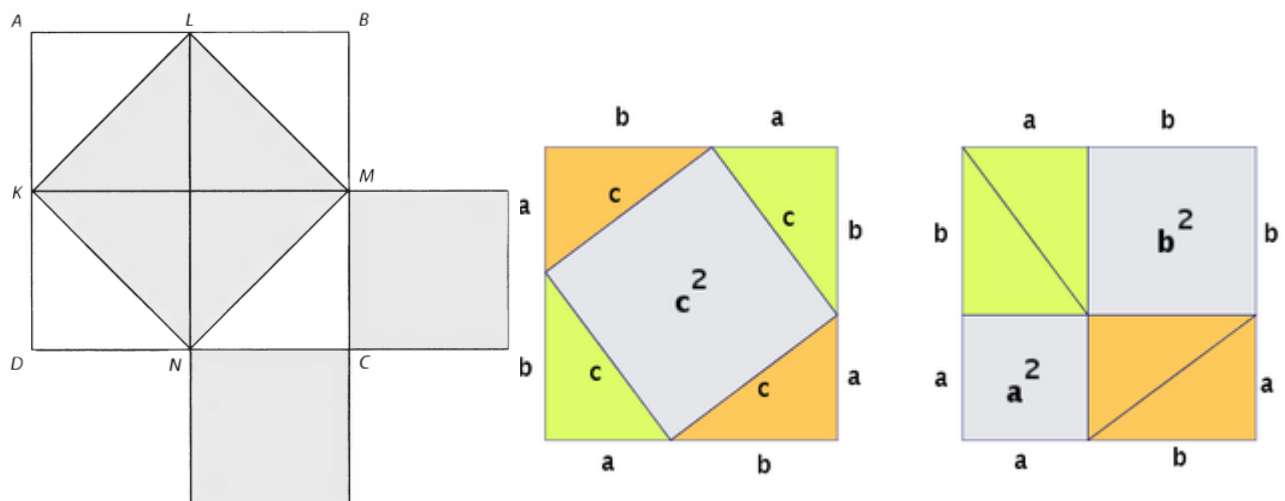


Abb. 14: Links: Der Flächeninhalt des Quadrats NMLK (aus vier kongruenten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken bestehend) über der Hypotenuse NM des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks NCM entspricht der Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate (jeweils aus zwei kongruenten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken bestehend) über den Katheten NC und CM. Rechts: Vergleicht man die Quadrate mit der Seitenlänge $a + b$, so zeigt sich, dass sich in beiden vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten a , b und c befinden und sie denselben Flächeninhalt besitzen. Bei dem von den vier rechtwinkligen Dreiecken eingeschlossene graue Viereck handelt es sich um ein Quadrat, da sich die spitzen Winkel benachbarter Dreiecke, die in den Eckpunkten des Vierecks zusammenlaufen, auf 90° ergänzen. Daraus resultiert, dass das Quadrat mit dem Flächeninhalt c^2 der Summe der beiden Quadrate mit den Flächeninhalten a^2 und b^2 entspricht und somit der pythagoreische Lehrsatz für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a , b und c erfüllt ist.

Wie auch immer der Beweis der Pythagoreer lautete, feststeht, dass mit ihnen die Mathematik neu gedacht wurde wie Maor (2007) beschreibt:

„no longer could one simply discover a new relation between mathematical objects; one had to prove it by a logically consistent argument. This change marked the transition from the empirical nature of pre-Greek mathematics to the deductive discipline it is today.“ (Maor 2007, S. 26)

In weiterer Folge machten die Untersuchungen der Pythagoreer die antike Welt auf ein schwerwiegendes Problem aufmerksam, das zur Entdeckung der irrationalen Zahlen führte: Angeblich soll der Pythagoreer Hippasos (um 450 v. Chr.) am Pentagramm – dem Ordenszeichen der Pythagoreer – einen Beweis der Inkommensurabilität von Seitenlänge und Diagonale gezeigt haben. Die Pythagoreer sollen über diese Entdeckung bestürzt gewesen sein, da die Vorstellung zweier Zahlen, die kein gemeinsames Maß besaßen, nicht in ihr zahlenfixiertes Weltbild passte. Daraufhin sollen sie Hippasos zur Verschwiegenheit ermahnt haben. Dieser wollte jedoch seine Entdeckung der Welt verkünden und so soll er der Legende nach von ihnen ermordet worden sein. Es ist bis heute unklar, ob die Inkommensurabilität zuerst am Quadrat oder am Pentagramm gezeigt wurde (Gericke 1984, S. 100f.; Scriba & Schreiber 2010, S. 35ff.).

Zusammenfassend sei gesagt, dass die Pythagoreer den weiteren Verlauf der Mathematik und der Naturwissenschaften revolutioniert haben. Es gibt neben ihren zahlreichen mathematischen Errungenschaften aber auch Schattenseiten. Maor (2007) sieht in ihrer tiefüberzeugten Zahlenbesessenheit folgenden Makel, der die weitere Wissenschaftsgeschichte stark geprägt hat:

„Their uncompromising belief in the supremacy of numbers – whether in musical harmony or in the physical universe – blinded the Pythagoreans to other ideas that might have better explained the workings of nature.“ (Maor 2007, S. 20)

Am besten zeige sich das am fast 2000-jährigen Bestehen des geozentrischen Weltbilds, das mit den Pythagoreern begann. Das Beharren auf kreisförmigen Umlaufbahnen der Himmelskörper führte zu abstrusen Theorien (ebd., S. 20). Selbst Johannes Kepler (1571 - 1630) verwendete noch Jahrzehnte seines Lebens, um mit pythagoreischen Theorien den Aufbau des Sonnensystems zu erklären. Letztlich entdeckte er, losgelöst von diesen, die elliptischen Umlaufbahnen der Planeten (ebd., S. 28).

4.4 Die Stationen im Überblick

Für den Unterricht wurden vier Stationen erstellt, die unterschiedliche Aspekte des pythagoreischen Lehrsatzes in den zuvor beschriebenen antiken Kulturen behandeln, wobei auf eine Differenzierung in der Schwierigkeit der Arbeitsmaterialien geachtet wurde: drei der Stationen sind verpflichtend zu absolvieren, die vierte Station stellt eine Wahlaufgabe für schnellere Schülerinnen und Schüler dar.

Im Folgenden werden die vier Unterrichtsstationen vorgestellt. Im Anhang sind sämtliche Materialien einzusehen.

4.4.1 Station – Die Tontafeln der Babylonier

Im Zentrum dieser Station steht der Fund der Tontafel Plimpton Nr. 322: Mithilfe einer Nachstellung dieser sollen Zahlen babylonischer Schreibweise in die arabische Schreibweise übersetzt und im Hinblick auf den pythagoreischen Lehrsatz untersucht werden, wobei aus didaktischen Gründen nur auf Zahlen des Zahlenraums 1-59 zurückgegriffen wird. In weiterer Folge zeigt sich, dass die Zeilen der Tabelle pythagoreische Tripel darstellen – der tatsächliche Wert $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ der ersten Spalte wird zur Vereinfachung unterschlagen. Diese Tripel sollen dann geometrisch überprüft werden, indem Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken zu ergänzen sind. Hierbei soll die oftmals vernachlässigte Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes „erfüllen drei Zahlen den pythagoreischen Lehrsatz, so entsprechen sie den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks“ zum Vorschein kommen.

4.4.2 Station – Mathematik bei den alten Ägyptern

Die altägyptische Kultur wird im Geschichtsunterricht ausführlich behandelt und so soll diese Station einen möglichen Anknüpfungspunkt für Schülerinnen und Schüler darstellen. Dabei soll vor allem ein Bewusstsein für die Gegenwärtigkeit der Mathematik in dieser Kultur geschaffen und ihr Nutzen aufgezeigt werden.

Dazu werden zwei gängige Aufgabenformate kombiniert: der Lückentext und das Laufdiktat. Mithilfe eines Informationstextes, der an einer Wand in der Klasse befestigt wird, sollen die Schülerinnen und Schüler den Lückentext zur Mathematik bei den alten Ägyptern ausfüllen. Die Informationen des Textes sollen dabei im Kopf behalten werden, um dann am Sitzplatz den Lückentext zu vervollständigen. Wenn alle Lücken ausgefüllt wurden, sollen im Anschluss

dazu Fragen beantwortet werden. Die Fragen sollen nicht nur das sinnerfassende Lesen fördern, sondern auch verhindern, dass die Lücken nur „blind“ kopiert werden.

Bei dieser Station wird nicht nur die Merkfähigkeit durch das Laufdiktat und die Lesekompetenz gefördert, sondern es bietet durch den Einsatz des „12-Knotenseils“ eine praktische Anwendung die Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes haptisch nachzuvollziehen. Auch wenn aus der Recherche hervorging, dass die alten Ägypter dieses Seil vermutlich nicht verwendeten und den pythagoreischen Lehrsatz nicht kannten, stellt es eine großartige Möglichkeit zur Veranschaulichung des Lehrsatzes dar, das auch aufgrund des vorkommenden pythagoreischen Tripels (3, 4, 5) eine Brücke zum Arbeitsauftrag „Die Tontafeln der Babylonier“ schlägt – deswegen soll das 12-Knotenseil ein Bestandteil dieser Station sein.

4.4.3 Station – Auf den Spuren von Pythagoras

Der Fokus dieser Station liegt auf der Domäne „direkte historische Informationen“. Es sollen einige wichtige Lebensabschnitte von Pythagoras beleuchtet werden, um so Einblicke in seine Biografie zu erhalten. Die einzelnen Abschnitte auf dem Arbeitsblatt sind zunächst auszuschneiden, chronologisch richtig anzuordnen und letztlich auf ein leeres Blatt zu kleben.

Bei dieser Tätigkeit wird neben der Feinmotorik und organisatorischen Fähigkeiten auch das sinnerfassende Lesen gefördert. Als Hilfestellung dient für Schülerinnen und Schüler, die Deutsch nicht als Erstsprache haben, ein „Lexikonauszug“, in dem bestimmte Begriffe kurz erklärt werden.

4.4.4 Station – Der Beweis der Pythagoreer

Diese optionale Station für schnellere Schülerinnen und Schüler soll zunächst eine Grundvorstellung für den Begriff der Quadratzahl vermitteln, den die Pythagoreer bereits in Form der figurierten Zahlen besaßen. Der Zusammenhang solcher Quadratzahlen mit dem pythagoreischen Lehrsatz soll veranschaulicht und verbalisiert werden. Im Anschluss daran soll der Legebeweis zum pythagoreischen Lehrsatz (Abb. 14, rechts) erarbeitet werden. In fünf Schritten soll der Lückentext-Beweis nachvollzogen und ausgefüllt werden, indem parallel dazu vorgegebene Figuren zu Quadraten gelegt werden.

5 Methodik

Ziel dieses Abschnitts ist das Auffinden einer Methode zur Untersuchung folgender Hypothese:

Die Integration geschichtlicher Aspekte in den Mathematikunterricht hat einen positiven Einfluss auf das Sinnempfinden seitens der Schülerinnen und Schüler.

Der Sinnbegriff soll dabei konstruktivistisch unter dem Kriterium der persönlichen Relevanz von Vollstedt & Vorhölter (2008) verstanden werden. Der Ausgangspunkt für die methodische Untersuchung ist die von Vollstedt (2011) empirisch untersuchte Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ (vgl. Abschnitt 2.5 und 2.6), wobei im Speziellen der Nutzen bzw. die Anwendbarkeit von Mathematik (vgl. Abschnitt 2.4) im Vordergrund steht.

Die Hypothese soll mithilfe folgender zwei Leitfragen beantwortet werden:

- Finden Schülerinnen und Schüler geschichtliche Inhalte der Mathematik im Unterricht sinnvoll bzw. persönlich relevant?
- Kann der Nutzen bzw. die Anwendbarkeit der Mathematik in einem solchen Unterricht aufgezeigt werden?

Um diese Fragen zu klären und Einblicke in die Sinnkonstruktionen von Schülerinnen und Schülern zu gewinnen, werden üblicherweise qualitative Forschungsmethoden in Form von Interviews durchgeführt, aus denen dann durch Analysen der Gespräche Rückschlüsse über Sinnkonstruktionen gewonnen werden können, wie etwa bei Vollstedt & Vorhölter (2008) und Vollstedt (2011). In dieser Masterarbeit wird jedoch die Meinung bzw. das Sinnempfinden zu einem spezifischen Unterrichtskonzept betrachtet und deshalb sollte die Befragung zeitnah und in den Schulalltag integrierbar sein. Außerdem ist es fraglich, ob Interviews in dieser Altersstufe (13- bis 14-Jährige) unter der zusätzlichen Berücksichtigung des hohen Anteils an Personen mit Deutsch als Nicht-Erstsprache ertragreich sind. Deswegen wird eine quantitative Forschungsmethode in Form eines geschlossenen Fragebogens verwendet. Als Orientierungspunkt für die Erstellung der Items dienen die Auswirkungen der Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ aus Abb. 2 in Kapitel 2.5. Die Bewertung der Items in diesem Fragebogen soll Rückschlüsse über diese Sinnkonstruktion geben. Ob mit dieser Methode die aufgestellte Hypothese überprüft werden kann, soll im Anschluss an die Ergebnisse in Kapitel 7 diskutiert werden.

Da die persönliche Einschätzung von Schülerinnen und Schülern der 8. Schulstufe befragt wird, scheint eine vierstufige Skala (trifft zu, trifft eher zu, trifft weniger zu, trifft gar nicht zu) ein passendes und zumutbares Antwortformat für die Items zu sein, die zusätzlich die „Tendenz zur Mitte“ umgeht. Manche Items werden auch negativ formuliert, um der „Jasage-Tendenz“ entgegenzuwirken. Problematisch für die Untersuchung der Hypothese könnte allerdings die Tatsache sein, dass dieselbe Person Ersteller und Durchführer des Unterrichts als auch des Fragebogens ist. Der Druck einer „sozialen Erwünschtheit“ bei den Antworten des Fragebogens könnte das Ergebnis verfälschen (vgl. Aschemann-Pilshofer 2001).

Die folgenden zehn Items werden für die spätere Auswertung gemäß der beiden Leitfragen in zwei Kategorien geteilt:

- Sinn bzw. persönliche Relevanz der Unterrichtsinhalte:
 - Mathematik zählt zu meinen Lieblingsfächern (Item 1).
 - Geschichte zählt zu meinen Lieblingsfächern (Item 2).
 - Ich würde in Zukunft gerne öfters etwas über die Geschichte von Mathematik erfahren (Item 3).
 - Die Geschichte von Mathematik interessiert mich nicht (Item 5).
 - Der Unterricht hat meine Einstellung zur Mathematik positiv beeinflusst (Item 9).
 - Der Unterricht hat meine Einstellung zur Mathematik verbessert (Item 10).
- Mathematik und ihr Nutzen für die Gesellschaft bzw. Anwendbarkeit von Mathematik:
 - Der Unterricht hat mir gezeigt, wie wichtig Mathematik für die Menschen war (Item 7).
 - Der Unterricht konnte mir den Nutzen von Mathematik für die Menschheit aufzeigen (Item 4).
 - Das durch den Unterricht erworbene Wissen ist in anderen Unterrichtsfächern anwendbar (Item 6).
 - Das durch den Unterricht erworbene Wissen ist außerhalb der Schule anwendbar (Item 8).

Zusätzlich sollen drei Items Informationen zu den Pflichtstationen liefern, die nicht eindeutig den beiden Leitfragen zugeordnet werden können, aber eine Auskunft über das verwendete Material geben sollen:

- Es war interessant etwas über das Leben von Pythagoras zu erfahren (Item 11).
- Es war interessant etwas über die Mathematik der alten Ägypter zu erfahren (Item 12).
- Es war interessant etwas über die Mathematik der Babylonier zu erfahren (Item 13).

Neben den Items sollen auch die demografischen Daten Geschlecht, Klasse, Anzahl der geschafften Stationen und Informationen zur Erstsprache aufgenommen werden. Letztere könnten sich auf das Ergebnis auswirken, da der Unterricht und der Fragebogen sprachintensiv gestaltet sind.

Am Ende des Fragebogens soll zusätzlich in zwei offenen Fragen Platz für Rückmeldungen zum Unterricht gegeben werden:

- Das hat mir am Unterricht gut gefallen:
- Das könnte man am Unterricht noch verbessern:

Der fertige Fragebogen ist im Anhang (S. 64) einzusehen.

Für die Auswertung des Fragebogens werden der vierstufigen Skala Zahlen zugeordnet (trifft zu = 1, trifft eher zu = 2, trifft weniger zu = 3, trifft gar nicht zu = 4). Von jedem Item werden dann der arithmetische Mittelwert und die Standardabweichung bestimmt. Für die Analyse stellt der Mittelwert 2,5 jedes Items den Grenzwert zwischen einer positiven ($<2,5$) und negativen ($>2,5$) Antworttendenz dar: Mittelwerte unter 2,5 befürworten also eher die Aussage eines Items, Mittelwerte über 2,5 lehnen diese eher ab. Für das negativ formulierte Item 5 sind die Antworttendenzen dementsprechend vertauscht zu behandeln.

6 Ergebnisse

Insgesamt nahmen 62 Personen (36 m und 26 w) aus drei Klassen am Unterricht teil, wobei 16 % (6 m und 4 w) von ihnen Deutsch als Erstsprache hatten. 61% schlossen drei oder mehr Stationen ab, 21% alle vier Stationen. Im Durchschnitt wurden 2,7 Stationen absolviert. Die Standardabweichung ist bei allen Items nahezu gleich (0,9 - 1,0) und soll deswegen im Folgenden nicht explizit angegeben werden. Im Anhang (S. 63) sind die vollständigen Daten in einer Tabelle zur Einsicht bereitgestellt.

6.1 Ergebnisse zur persönlichen Relevanz des Unterrichts

Es zeigt sich, dass das Fach Geschichte (2,1) eher zu den Lieblingsfächern zählt als das Fach Mathematik (2,5).

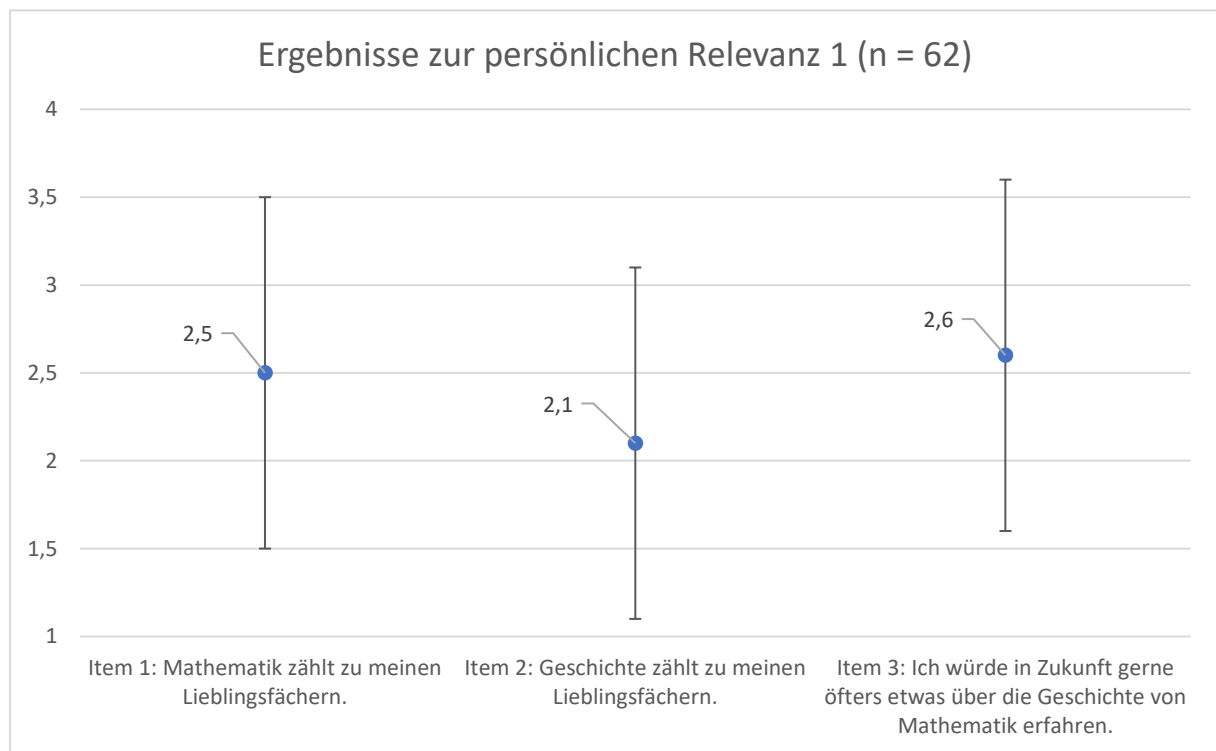


Abb. 15: Erster Teil der Ergebnisse zur persönlichen Relevanz des Unterrichts

Eine positive Antworttendenz lässt sich bei den Items 9 (2,3) und 10 (2,2) verorten (siehe Abb. 16), welche erfragen, ob sich das Bild von Mathematik bzw. die Einstellung zur Mathematik durch den Unterricht verbessert hat. Die Befürwortung dieser Items wird auch in der offenen Frage deutlich. So hat den Schülerinnen und Schülern beispielsweise gefallen, dass „*wir Mathe und Geschichte gemischt*“ und, „*dass die Stationen Spaß gemacht haben*“. Die Abwechslung zum Regelunterricht wurde ebenfalls angemerkt: „*Es war einmal etwas anderes als normales*

Mathe“, und die geschichtlich aufbereiteten Inhalte wurden von einer Person mit *„es war sehr interessant“* kommentiert.

Auffällig bei der offenen Frage waren auch Bemerkungen hinsichtlich der Gestaltung des Unterrichts. So gefiel einer Schülerin beispielsweise, *„dass wir Stationen machen und allein arbeiten durften“* und einem Schüler, *„dass wir viel allein arbeiten konnten“*.

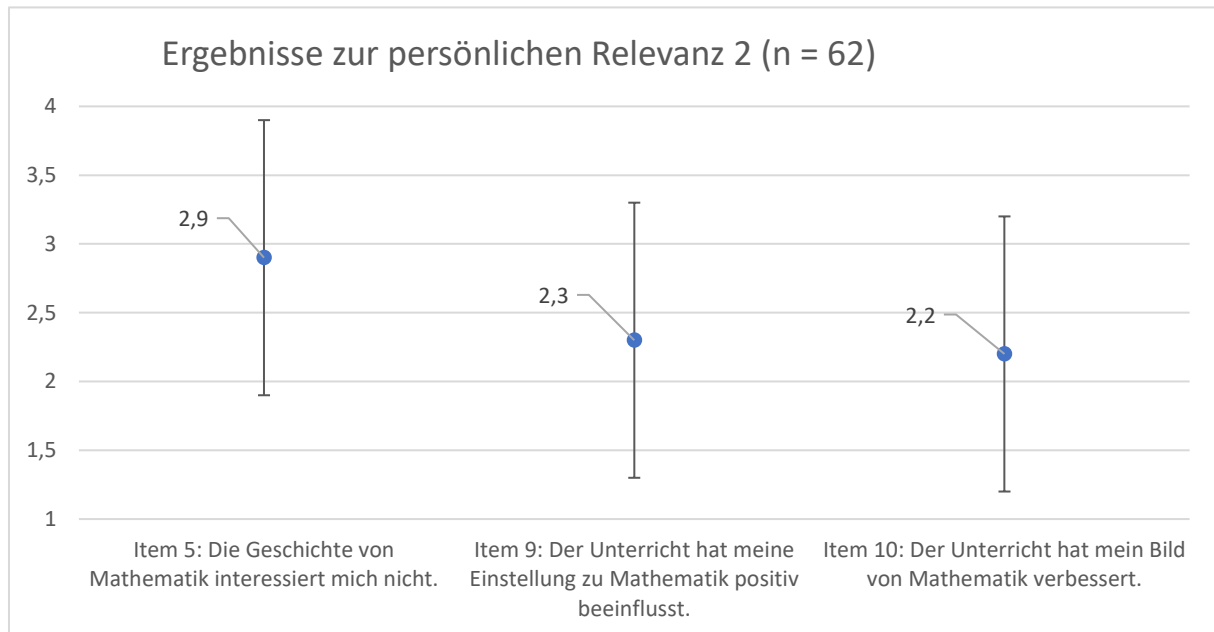


Abb. 16: Zweiter Teil der Ergebnisse zur persönlichen Relevanz des Unterrichts

Negative Antworttendenzen finden sich bei Item 5 (2,9; Abb. 16) und Item 3 (2,6; Abb. 15), die auf das Interesse an der Verknüpfung von Geschichte und Mathematik abzielen.

6.2 Ergebnisse zum Nutzen bzw. der Anwendbarkeit von Mathematik

Die Anwendbarkeit von Mathematik außerhalb des Mathematikunterrichts, wird in den Items 6 (2,3) und 8 (2,5) erfragt, die in Abb. 17 einzusehen sind. Es zeigt sich hier eine leicht positive Antworttendenz bezüglich anderer Unterrichtsfächer und eine neutrale Antworttendenz bezüglich der Anwendung außerhalb der Schule. Die Antworttendenzen zum Nutzen von Mathematik für die Gesellschaft, die in Item 4 (2,3) und Item 7 (1,9) erfragt werden, fallen beide positiv aus.

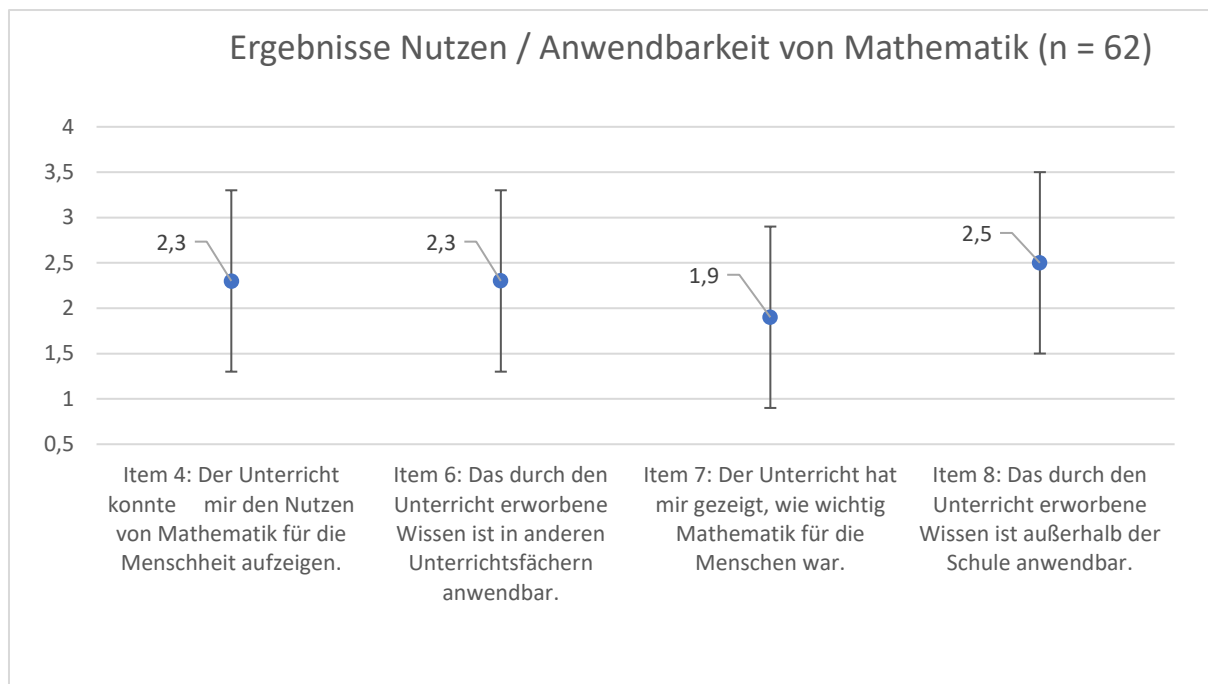


Abb. 17: Ergebnisse zum Nutzen und der Anwendbarkeit von Mathematik

6.3 Ergebnisse zu den Stationen

In Abb. 18 erkennt man, dass von den drei Pflichtstationen die alten Ägypter am besten abschnitten (1,9), gefolgt von Pythagoras (2,1) und den Babyloniern (2,2). Auch bei der offenen Frage wurde die Station zu den alten Ägyptern explizit positiv vermerkt. So gefiel beispielsweise einem Schüler, „dass wir etwas über Ägypten gelernt haben“.

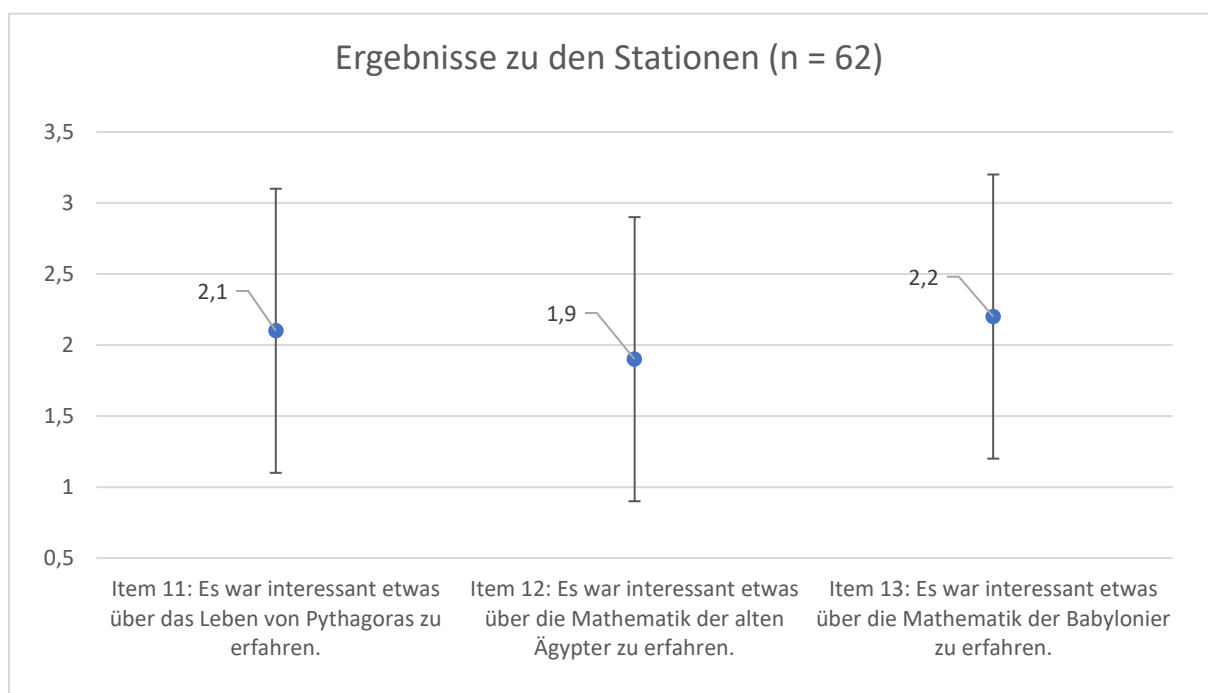


Abb. 18: Ergebnis zu den Stationen des Unterrichts

6.4 Ergebnisse nach Geschlecht und Erstsprache Deutsch

Werden die Mittelwerte separat nach Geschlecht und Erstsprache gebildet, zeigen sich geringfügige Unterschiede in den Daten. Es sollen nur diejenigen Items hier betrachtet werden, bei denen die Differenz der nach Geschlecht und Sprache getrennten Mittelwerte größer als 10 % der ursprünglichen Mittelwerte sind.

Während Mädchen durchschnittlich 2,9 Stationen absolvierten, waren es bei den Jungen 2,6. Das Fach Geschichte ist bei Jungen (1,9) deutlich beliebter als bei Mädchen (2,3). Außerdem hat der Unterricht Jungen (1,8) eher als den Mädchen (2,1) gezeigt, wie wichtig Mathematik für die Menschen war. Dafür sehen Mädchen (2,3) gegenüber Jungen (2,6) außerhalb der Schule eher eine Anwendbarkeit des Gelernten. Die Station zu den Babyloniern war bei Jungen (2,1) beliebter als bei Mädchen (2,4). Generell zeigt sich bei den Jungen eine positivere Antworttendenz bei den Items. Im Gegenzug ist die Standardabweichung bei den Mädchen größer.

Schülerinnen und Schüler mit Erstsprache Deutsch konnten im Durchschnitt 2,9 Stationen abschließen, im Gegensatz zu denjenigen mit anderen Erstsprachen (2,7). Bei Letzteren ist jedoch das Fach Mathematik beliebter (2,4 vs. 2,8). So zeigen sich bei den Schülerinnen und Schülern mit nichtdeutscher Erstsprache auch deutlich positivere Antworttendenzen bezüglich der persönlichen Relevanz des Unterrichts und zum Nutzen von Mathematik: Sie würden in Zukunft gerne öfters etwas über die Geschichte der Mathematik erfahren (2,5 vs. 3,1), der Unterricht habe ihnen eher gezeigt, wie wichtig Mathematik für die Menschen war (1,9 vs. 2,2) und ihre Einstellung zu Mathematik eher positiv beeinflusst (2,2 vs. 2,5) bzw. ihr Bild von Mathematik verbessert (2,1 vs. 2,9). Auch die zu absolvierenden Stationen wurden von ihnen besser bewertet, wobei sich bei der „unbeliebtesten“ Station zu den Babyloniern die größten Unterschiede (2,2 vs. 2,6) zeigten.

7 Diskussion

Die in der Einleitung aufgestellte Hypothese, dass ein Unterricht nach dem IGMU-Prinzip einen positiven Einfluss auf das Sinnempfinden seitens der Schülerinnen und Schüler hat, kann bestätigt werden. Die Aussagekraft dieser Hypothese wird durch den Stichprobenumfang verstärkt: das Unterrichtsmaterial wurde in drei Klassen an 62 Personen getestet. In weiterer Folge sollen nun die vorliegenden Daten aus Kapitel 6 analysiert werden.

Zunächst sollen die Ergebnisse zur persönlichen Relevanz des Unterrichts (Kapitel 6.1) diskutiert werden: die positive Antworttendenz bei Item 9 und 10, die die verbesserte Einstellung zur Mathematik behandeln, könnte durch den historischen Realitätsbezug der Unterrichtsinhalte erklärt werden: die biographischen Aspekte zu Pythagoras, das Entziffern der babylonischen Steintafel, der Einsatz von Mathematik bei den alten Ägyptern – anhand dieser Materialien hatten die Schülerinnen und Schüler die Gelegenheit zu erleben, welche Rolle Mathematik für antike Kulturen spielte, dass hinter einem Namen eine spannende Lebensgeschichte stehen kann und dass der pythagoreische Lehrsatz die Menschheit schon lange begleitet. Dabei beruhen diese Stationen auf den theoretischen Konzepten von Tzakanis und Arcavi (2002), im Speziellen auf den in Kapitel 3 vorgestellten Domänen „direkte historische Information“ (vgl. Kapitel 3.2.1) und „Bewusstsein für Mathematik“ (vgl. Kapitel 3.2.3), die für die Erstellung des Materials vom großer Bedeutung waren. Es erscheint nicht abwegig, dass mit der positiven Antworttendenz zu diesen Items die Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ angesprochen wurde, in der es heißt:

„Die Beschäftigung mit Mathematik bzw. das Lernen von Mathematik ist für das Individuum sinnvoll / persönlich relevant, wenn es eine Anwendungsmöglichkeit von Mathematik im Leben erkennt, einen Allgemeinbildungsgedanken von Mathematik vertritt oder das eigene Lernen von Mathematik anhand von realitätsbezogenen Aufgaben erleichtert wird.“ (vgl. Vollstedt 2011, S. 128)

Der Grund für die positive Antworttendenz bei diesen Items kann aber nicht nur an den Inhalten selbst, sondern auch an deren Gestaltung liegen, wie die Kommentare in der offenen Frage am Schluss des Fragebogens vermuten lassen. Der offene Unterricht in Form des Stationenbetriebs ermöglichte ein autonomes und leistungsdifferenziertes Arbeiten, das von manchen Schülerinnen und Schülern sichtlich wertgeschätzt wurde. Daraus geht hervor, dass persönliche Relevanz nicht nur durch Inhalte, sondern auch durch die Gestaltung des

Unterrichts erfolgen könnte. Auf die dahinterstehende Sinnkonstruktion „Autonomie“, die ebenfalls von Vollstedt (2011) rekonstruiert werden konnte, soll in dieser Arbeit aber nicht weiter eingegangen werden.

Besonderer Diskussionsbedarf besteht bei Item 3 („Ich würde in Zukunft gerne öfters etwas über die Geschichte von Mathematik erfahren.“), das vor der Befragung als besonders aussagekräftig für die Hypothese angenommen wurde: Auch wenn die Antworttendenz nur leicht über dem neutralen Grenzwert 2,5 liegt, widerspricht Item 3 den anderen, durchwegs positiv ausfallenden Items, im Speziellen Item 5 („Die Geschichte von Mathematik interessiert mich nicht.“). Möglicherweise liegt das an der Formulierung des Items selbst. Für weitere Untersuchungen zum Thema könnte das zusätzliche Item „Ich würde im Unterricht gern wieder etwas über Mathematik und Geschichte erfahren.“ Aufschluss über die Aussagekraft von Item 3 geben. Andererseits ist es nicht auszuschließen, dass mit den positiven Antworttendenzen von Item 9 und 10 nicht die Inhalte, sondern die Gestaltung des Unterrichts bewertet wurden und dass die Negation von Item 5 überlesen wurde. Die deutlich positive Bewertung der Stationen selbst spricht jedoch dagegen. Letztlich könnte auch der Umstand, dass dieselbe Person Ersteller und Durchführer des Unterrichts als auch des Fragebogens war, zu einer Verzerrung der Daten geführt haben. So könnte beim Ausfüllen des Fragebogens Sympathie gegenüber der Lehrperson die Schülerinnen und Schüler dazu veranlasst haben, positivere Antworten anzugeben (Tendenz zur sozialen Erwünschtheit). An diesem Punkt erschöpft sich allerdings die Aussagekraft der gewählten Forschungsmethode. Für weiterführende Untersuchungen zum Thema empfiehlt sich vermutlich ein Wechsel zu qualitativen Forschungsmethoden in Form von Interviews, wie etwa bei Vollstedt & Vorhölter (2008) und Vollstedt (2011). Eine solche Methode könnte eine tiefergehende Analyse der Hypothese erlauben und somit zu ihrer Klärung beitragen. Anhand der Datenlage lässt sich jedenfalls festhalten, dass für einige Schülerinnen und Schüler der Unterricht nach dem IGMU-Prinzip persönlich relevant und damit sinnvoll erscheint.

Betrachtet man die Ergebnisse zum Nutzen bzw. zur Anwendbarkeit von Mathematik (Kapitel 6.2), scheint die positive Bewertung von Item 7 („Der Unterricht hat mir gezeigt, wie wichtig Mathematik für die Menschen war.“) besonders aussagekräftig. Das zeigt, dass der Nutzen von Mathematik für die Gesellschaft durch das IGMU-Prinzip vermittelt werden kann und dieses Prinzip eine Antwort auf das in Kapitel 2.4 dargelegte Niss'sche Relevanz-Paradoxon

darstellt. Das heißt auch, dass die Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ durch den Unterricht angesprochen wurde, denn die Zustimmung zu diesem Item ist mit einem Allgemeinbildungsgedanken von Mathematik verknüpft, der einen Teil dieser Sinnkonstruktion darstellt. Dass das inhaltlich ähnliche Item 4 („Der Unterricht konnte mir den Nutzen von Mathematik für die Menschheit aufzeigen.“) negativer bewertet wurde (2,3 vs. 1,9), könnte an der Formulierung liegen: Item 4 ist deutlich abstrakter als Item 7, dementsprechend könnte es deswegen „neutraler“ beantwortet worden sein. Generell sind die Items, dieser Kategorie – mit Ausnahme des Item 7 – sprachlich anspruchsvoller und gedanklich abstrakter formuliert. Dies zeigte sich auch bei der Ausfüllung des Fragebogens, bei der bei Item 6 und 8 Verständnisprobleme auftauchten. Für weitere Untersuchungen mit der gewählten Methode in dieser Zielgruppe empfiehlt es sich daher diese Items zu adaptieren bzw. erscheint es im Nachhinein fraglich, welche Aussagekraft Item 6 und 8 haben: klar ist, dass diese Items auf die Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ abzielen, allerdings spielen sie für die Hypothese eine untergeordnete Rolle. Deswegen sollten sie durch neuformulierte Items – wie zum Beispiel das vorhin in Anlehnung an Item 3 erwähnte – ersetzt werden, um so den zu untersuchenden Zusammenhang besser abzubilden.

Die Ergebnisse zum Geschlechtervergleich zeigen, dass der Unterricht nach dem IGMU-Prinzip eher Jungen anspricht: das Fach Mathematik (2,4 vs. 2,6), als auch das Fach Geschichte (1,9 vs. 2,3) sind bei ihnen beliebter und bei den meisten Items weisen sie positivere Antworttendenzen auf. Gleichzeitig zeigt sich Persistenz und Fleiß bei den Mädchen: obwohl sich bei ihnen vergleichsweise negativere Antworttendenzen zeigen, haben diese im Durchschnitt mehr Stationen absolviert (2,9 vs. 2,6). Diese Datenlage scheint wenig überraschend, da sich in einer historischen Betrachtungsweise die Geschlechterrollen ebenfalls widerspiegeln – die Beschäftigung von Mathematik war lange Zeit Männern vorbehalten. Ein historischer Zugang kann aber eben diese Missstände aufzeigen.

Analysiert man die Daten bezüglich der Erstsprache Deutsch, ergibt sich durch die Sprachlastigkeit des Unterrichts, dass Schülerinnen und Schüler mit Erstsprache Deutsch einen Vorteil mitbringen, der sich geringfügig bei den durchschnittlich erreichten Stationen bemerkbar macht (2,9 vs. 2,7). Auffällig ist jedoch die größere Lernbereitschaft der Schülerinnen und Schüler, die Deutsch nicht als Erstsprache haben. Für diese hatte der Unterricht eine höhere persönliche Relevanz und sie erkannten durch ihn eher den Nutzen

bzw. die Anwendbarkeit von Mathematik. Dies könnte zum einen daran liegen, dass die Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund dem Unterricht wertschätzender gegenüberstehen – diese Beobachtung konnte auch in anderen Unterrichtsstunden der Schulpraxis festgestellt werden –, zum anderen könnte die größere Lernbereitschaft am herkunftsbedingten Bezug liegen: viele der unterrichteten Schülerinnen und Schüler stammen aus dem arabischsprachigen Raum und haben somit einen persönlichen Zugang zur ägyptischen und mesopotamischen Kultur. Mit dieser Betrachtung lässt sich auch die Diskrepanz bei der Beurteilung der Station zu den Babyloniern erklären (2,2 vs. 2,6).

Generell fiel die Bewertung zum Interesse an den einzelnen Stationen deutlich positiv aus (1,9; 2,1; 2,2). Anhand dieser Bewertung liegt es nahe, dass die Stationen den Schülerinnen und Schülern persönlich relevant erschienen und damit als sinnvoll empfunden wurden. Auffällig ist die besonders positiv bewertete Station zu den alten Ägyptern (1,9). Möglicherweise lässt sich diese Tatsache dadurch erklären, dass die altägyptische Kultur besonders intensiv im geschichtlichen Unterricht behandelt wird und somit ein Vorwissen bei den Schülerinnen und Schülern vorhanden ist, an welches angeknüpft werden kann. Die Vernetzung von Wissen durch einen interdisziplinären Unterricht könnte sich demgemäß positiv auf das Sinnempfinden im Mathematikunterricht auswirken und der Grund für die durchwegs positiven Antworttendenzen sein. Erwartungsgemäß spricht ein Unterricht nach dem IGMU-Prinzip höhere Klassenstufen eher an, da in solchen tendenziell mehr Vorwissen vorhanden ist und sich somit eine Verknüpfung von Wissen leichter bewerkstelligen lässt. Weitere Forschungen zum Einfluss von interdisziplinärem Unterricht und seine Auswirkung auf die Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ bei Schülerinnen und Schülern könnten Aufschluss über diese Annahme geben. Ein zweiter plausibler Erklärungsversuch für die besonders positiv bewertete Station zu den alten Ägyptern ist – wie zuvor schon angedeutet – der kulturelle Bezug, den einige Schülerinnen und Schüler mitbringen. Ein Unterricht nach dem IGMU-Prinzip, der die im Klassenraum vertretenen Kulturen aufgreift und beleuchtet, scheint eine Möglichkeit zu sein einen positiven Einfluss auf das Sinnempfinden seitens der Schülerinnen und Schüler zu bewirken – zumindest für diejenigen die einen Bezug zur besagten Kultur aufweisen.

Überraschenderweise konnten 21 % der unterrichteten Personen Station 4 abschließen. Da mit einem so hohen Prozentsatz nicht gerechnet wurde, wurde auch kein eigenes Item

erschaffen, das das Interesse an dieser Station einholt. Bei weiteren Testungen des Materials wäre die Einbeziehung dieser Station in den Fragebogen in Form eines Items sinnvoll.

Abschließend sei gesagt, dass die in der Einleitung aufgestellte Hypothese mit dieser Masterarbeit bestätigt werden konnte. Die Stichprobengröße ($n = 62$) trägt zwar zur Aussagekraft bei, jedoch wäre es interessant das Unterrichtsmaterial an anderen Standorten zu testen, im Speziellen an einer AHS, um so die Daten dann mit den vorliegenden aus der NMS vergleichen zu können. Dabei könnte ein Wechsel zu qualitativen Forschungsmethoden die aufgestellte Hypothese untermauern. Generell wäre es ein Forschungsdesiderat weitere Unterrichtskonzepte gemäß dem IGMU-Prinzip zu erstellen und zu testen – die Erkenntnisse diese Masterarbeit sprechen dafür.

8 Fazit und Ausblick

In dieser Masterarbeit konnte mithilfe theoretischer Grundlagen ein Unterrichtskonzept erarbeitet werden, das mittels geschichtlich motivierter Inhalte einen konstruktiven Beitrag zum Sinnerlebnis von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht liefert. Aufgrund der mangelnden Ressourcen zu dieser Thematik war die Erarbeitung des Unterrichtskonzepts mit hohem Aufwand verbunden – einem Aufwand, der sich im Schulalltag von einer Lehrperson nur schwer bewerkstelligen lässt. Insofern bewahrheiten sich die in Kapitel 3.1 angesprochenen Argumente gegen das IGMU-Prinzip: Es gibt in der Literatur zu wenig konkrete Vorlagen bzw. didaktisches Material (Ressourcenmangel) und es bedeutet einen Mehraufwand für Lehrpersonen historische Recherche zu betreiben (Kompetenzmangel) – vom zeitlichen Aufwand eines solchen Unternehmens abgesehen. Diese Masterarbeit stellt dabei einen ersten Schritt dar, Hemmungen bezüglich des IGMU-Prinzips abzubauen, indem Lehrpersonen ein ausgearbeitetes und erprobtes Unterrichtskonzept zur Verfügung gestellt wird. Es sollte ein zukünftiges Ziel der Didaktik sein, in diesem Bereich weitere Forschungen zu betreiben und diesem Beispiel zu folgen. Der Grund hierfür liegt in der Gelegenheit, ein Sinnangebot für den Mathematikunterricht zu kreieren. Die Erkenntnisse dieser Masterarbeit legen nahe, dass sich ein Unterricht gemäß dem IGMU-Prinzip positiv auf das Sinnempfinden seitens der Schülerinnen und Schüler auswirkt und dass das Fach Mathematik von der Beliebtheit des Fachs Geschichte profitieren kann: Nicht nur, dass der Unterricht nach dem IGMU-Prinzip die Einstellung zur Mathematik verbessert hat, er hat auch den Allgemeinbildungsgedanken von Mathematik gestärkt und die Wichtigkeit und den Nutzen von Mathematik für die Gesellschaft hervorgehoben. Damit ist dieses Prinzip auch eine mögliche Antwort auf das Niss'sche Relevanz-Paradoxon (vgl. Kapitel 2.4). Insbesondere kann mit einem solchen interdisziplinären Unterricht die Sinnkonstruktion „Anwendung im Leben“ (vgl. Kapitel 2.5) angesprochen werden und damit ein Sinnangebot liefern, das von den Schülerinnen und Schülern auch angenommen wird, wie sich aus den Daten schließen lässt. Dabei hat sich angedeutet, dass die Gestaltung des Unterrichts einen nicht unwesentlichen Einfluss auf das Sinnerlebnis in der Schule haben kann. Die Entscheidung den Unterricht in Form eines Stationenbetriebs abzuhalten, bot die Gelegenheit für ein leistungsdifferenziertes und autonomes Arbeiten, das von manchen Schülerinnen und Schülern sichtlich wertgeschätzt wurde. Weiters geht aus den Daten hervor, dass der Unterricht nach dem IGMU-Prinzip Jungen eher anspricht als Mädchen. Hierbei könnte die Thematisierung von

Geschlechterrollen anhand historischer Betrachtungsweisen dabei genutzt werden, um gesellschaftliche Missstände aufzuzeigen.

Als bedeutende Erkenntnis hat sich außerdem herauskristallisiert, dass in der Geschichte der Mathematik ein enormes Potential vergraben liegt, das besonders Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund ansprechen dürfte: das Aufzeigen von mathematischem Wissen unterschiedlicher Kulturen. Der herkunftsbedingte Bezug zu solchen Kulturen – im Falle des absolvierten Unterrichts handelte es sich dabei um die alten Ägypter und die Babylonier – schafft Interesse und damit Motivation sich mit diesen Inhalten auseinanderzusetzen, kurz: der Unterricht wird dadurch für einige Schülerinnen und Schüler persönlich relevant bzw. sinnvoll.

Für weiterführende Untersuchungen zur Hypothese dieser Masterarbeit wäre eine Adaption der Forschungsmethode sinnvoll. Sollte die bisherige Methode beibehalten werden, empfiehlt sich eine Überarbeitung der Items, wie in Kapitel 7 vermerkt. Dabei sollten auch Informationen zu Station 4 eingeholt werden. Für eine tiefergehende Analyse der Hypothese sollte auf qualitative Forschungsmethoden in Form von Interviews umgestiegen werden: durch eine ausführlichere Befragung der Schülerinnen und Schüler könnte sich nicht nur zeigen, ob der in dieser Masterarbeit untersuchte Zusammenhang rekonstruierbar ist, sondern dadurch auch die Hypothese untermauert werden.

Da der Unterricht zum IGMU-Prinzip an einer NMS getestet wurde, wäre es vergleichsweise interessant, wie dieses Konzept an einer AHS angenommen wird. Außerdem wäre es aufschlussreich für andere Themengebiete und Schulstufen Unterrichtskonzepte nach diesem Prinzip zu erstellen und zu testen. So könnte man beispielsweise in der Unterstufe, anknüpfend an die römischen Zahlen, die Darstellung von Zahlen in anderen Kulturen thematisieren bzw. die Entstehung der arabischen Ziffern aufzeigen. Für die Oberstufe bietet sich ein geschichtlicher Abriss zur Entwicklung und Motivation der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Infinitesimalrechnung an oder die Behandlung der Trigonometrie in Verbindung mit der Navigation in der Seefahrt. Ein mittelfristiges Ziel könnte dann das Anlegen einer Materialsammlung im Sinne des IGMU-Prinzips sein (in Anlehnung an ähnliche Sammelwerke im angloamerikanischen Raum), die aus jeder Schulstufe zumindest ein zum Lehrplan passendes Thema enthält. Diese Sammlung könnte man Lehrpersonen zur Verfügung stellen und somit die Argumente gegen das IGMU-Prinzip entkräftigen. Aufschlussreich in

diesem Zusammenhang wäre auch die Untersuchung der Annahme, ob aufgrund des größeren Vorwissens in höheren Schulstufen ein Unterricht gemäß dem IGMU-Prinzip sinnvoller empfunden wird als in niedrigeren Schulstufen.

Abschließend sei erwähnt, dass ein Unterricht nach dem IGMU-Prinzip eine Ergänzung zum Mathematikunterricht darstellen soll: eine historische Betrachtung kann beispielsweise zu Beginn als Motivation für ein neues Thema dienen, aber auch reflektiv – wie in dieser Masterarbeit – eingesetzt werden, um bisheriges Wissen unter einem neuen Gesichtspunkt zu sehen. Das Ziel ist keinesfalls den herkömmlichen Unterricht komplett historisch aufzubauen, wie es beispielsweise das genetische Prinzip (Kapitel 3.2.2) verfolgt. Das wäre im schulischen Kontext auch gar nicht realisierbar. Von Zeit zu Zeit eingesetzt, könnte ein solcher Unterricht aber der Motivation sich mit Mathematik zu beschäftigen dienlich sein, da er den Allgemeinbildungsgedanken von Mathematik aufzeigen und somit ein Sinnangebot liefern kann.

9 Quellen

9.1 Literaturverzeichnis

Aschemann-Pilshofer, B. (2001): Wie erstelle ich einen Fragebogen? Ein Leitfaden für die Praxis. Wissenschaftsladen Graz.

Barbin, E. (2018): Let History into the Mathematics Classroom. Verlag Springer.

Biller, K. (1991): Habe Sinn und wisse Sinn zu wecken! Sinntheoretische Grundlagen der Pädagogik. Verlag Hohengehren.

Breidbach, O. (2015): Geschichte der Naturwissenschaften. I: Die Antike. Verlag Springer.

Bundschuh, P. (2008): Einführung in die Zahlentheorie. Verlag Springer.

Combe, A. & Gebhard, U. (2007): Sinn und Erfahrung: zum Verständnis fachlicher Lernprozesse in der Schule. Verlag Barbara Budrich.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993): Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Zeitschrift für Pädagogik, 39 (2), S. 223-238.

Gebhard, U. (2003): Die Sinndimension im schulischen Lernen: Die Lesbarkeit der Welt – Grundsätzliche Überlegungen zum Lernen und Lehren im Anschluss an PISA. In Moschner, B. et al. (Hrsg.): PISA 2000 als Herausforderung: Perspektiven für Lehren und Lernen. Schneider Verlag Hohengehren. S. 205-223.

Gedaschko, A. & Lechte, M. A. (2008): Sinnerfahrung und -konstruktion im Physikunterricht. In Koller, C. (Hrsg.): Sinnkonstruktion und Bildungsgang. Verlag Barbara Budrich. S. 47-63.

Gellert, U. & Jablonka, E. (2007): Mathematisation – Demathematisation. In: Gellert, U. & Jablonka E. (Hrsg.): Mathematisation and Demathematisation. Social, philosophical and educational ramifications. Verlag Rotterdam: Sense Publishers. S. 1-18.

Gericke, H. (1984): Mathematik in Antike und Orient. Verlag Springer.

Hairer, E. & Wanner, G. (2011): Analysis in historischer Entwicklung. Verlag Springer.

Jankvist, U. (2009): A categorization of the „whys“ and „hows“ of using history in mathematics education. In: Educational Studies in Mathematics 71(3), S. 235-261.

Kaplan, R. (2006): Die Geschichte der Null. Verlag Piper.

Koller, H. (2008): Sinnkonstruktion und Bildungsgang. Zur Bedeutung individueller Sinnzuschreibungen im Kontext schulischer Lehr-Lern-Prozesse. In Koller, C. (Hrsg.): Sinnkonstruktion und Bildungsgang. Verlag Barbara Budrich. S. 13-24.

Loos, A. & Ziegler, G. (2015): Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. In Bruder, R. et al. (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Verlag Springer. S. 3-17.

- Maor, E. (2007): The Pythagorean theorem: a 4000-year history. Princeton University Press.
- Nickel, G. (2013): Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium. In Allmendinger, H. et al. (Hrsg.): Mathematik verständlich unterrichten. Verlag Springer. S. 253-266.
- Niss, M. (1994): Mathematics in society. In R. Biehler et al. (Hrsg.): Mathematics education library: Vol. 13. Didactics of mathematics as a scientific discipline. Verlag Dordrecht: Kluwer. S. 367-378.
- Scriba C. & Schreiber P. (2010): 5000 Jahre Geometrie. Verlag Springer.
- Shell-Gellasch, A. (2007): hands on history: A resource for teaching mathematics. Mathematical Association of America.
- Toeplitz, O. (1927): Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XXXVI, S. 88-100.
- Toeplitz, O. (1949/1972): Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Verlag Springer.
- Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2002): Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In Fauvel, J. et al. (Hrsg.): History in Mathematics Education. The ICMI Study. Verlag Kluwer Academic Publishers. S. 201-240.
- Van der Waerden, B. L. (1977): Die vier Wissenschaften der Pythagoreer. Westdeutscher Verlag.
- Vollstedt, M. & Vorhölter, K. (2008): Zum Konzept der Sinnkonstruktion am Beispiel von Mathematiklernen. In Koller, C. (Hrsg.): Sinnkonstruktion und Bildungsgang. Verlag Barbara Budrich. S. 25-46.
- Vollstedt, M. (2011): Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong. Eine rekonstruktiv-empirische Studie. Verlag Teubner.
- Wußing, H. (2008): 6000 Jahre Mathematik – Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Verlag Springer.

9.2 Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Vollstedt, M. (2011): Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong. Eine rekonstruktiv-empirische Studie. Verlag Teubner. S. 49.

Abb. 2: Vollstedt, M. (2011): Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong. Eine rekonstruktiv-empirische Studie. Verlag Teubner. S. 160.

Abb. 3: Breidbach, O. (2015): Geschichte der Naturwissenschaften. I: Die Antike. Verlag Springer. S. 38.

Abb. 4: Gericke, H. (1984): Mathematik in Antike und Orient. Verlag Springer. S. 33.

Abb. 5: Gericke, H. (1984): Mathematik in Antike und Orient. Verlag Springer. S. 33.

Abb. 6: links: <https://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/> Stand 23.04.2020, 08:31

rechts: Maor, E. (2007): The Pythagorean theorem: a 4000-year history. Princeton University Press. S. 9.

Abb. 7: Wußing, H. (2008): 6000 Jahre Mathematik – Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Verlag Springer. S. 105.

Abb. 8: links: Wußing, H. (2008): 6000 Jahre Mathematik – Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Verlag Springer. S. 113.

rechts: <http://www.spasslernen.de/geschichte/ges2.htm> Stand 23.04.2020, 08:31

Abb. 9: <http://ecole-hopital-nantes.over-blog.com/article-la-corde-a-treize-noeuds-manon-4eme-110595406.html> Stand 23.04.2020, 08:31

Abb. 10: <https://www.anderegg-web.ch/phil/philosophen-allgemeines.htm> Stand 23.04.2020, 08:31

Abb. 11: <http://totallyhistory.com/pythagoras/> Stand 23.04.2020, 08:31

Abb. 12: links: http://tom.haimath.at/downloads/_files/Platonische_Koerper.pdf Stand 23.04.2020, 08:31

rechts: <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/pythagoreer> Stand 23.04.2020, 08:31

Abb. 13: Wußing, H. (2008): 6000 Jahre Mathematik – Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Verlag Springer. S. 175.

Abb. 14: links: Maor, E. (2007): The Pythagorean theorem: a 4000-year history. Princeton University Press. S. 25.

Rechts: <https://math.stackexchange.com/questions/563359/is-there-a-dissection-proof-of-the-pythagorean-theorem-for-tetrahedra> Stand 23.04.2020, 08:31

Abb. 15 - Abb. 18: erstellt aus den Daten des Fragebogens mit Microsoft Excel

9.3 Internetquellen

Internetquelle 1:

<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568> Stand 23.04.2020, 08:31

Internetquelle 2: <https://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/> Stand 23.04.2020, 08:31

10 Anhang

10.1 Abstract

Mathematik wird im schulischen Kontext oft als fertiges, abstraktes Produkt behandelt und dabei der dahinterliegende Entwicklungsprozess und ihre Verwobenheit mit der Gesellschaft oftmals außer Acht gelassen. Nicht zuletzt deswegen gilt Mathematik für viele Schülerinnen und Schüler als realitätsfern und wird dadurch nicht selten als sinnlos empfunden.

Um dem zu entgegen, ist das Ziel dieser Masterarbeit einen Realitätsbezug im Mathematikunterricht durch die Integration geschichtlicher Aspekte herzustellen und damit ein Sinnangebot für dieses Schulfach zu liefern. In diesem Zusammenhang wurde die zu untersuchende Hypothese aufgestellt, dass die Integration geschichtlicher Aspekte in den Mathematikunterricht einen positiven Einfluss auf das Sinnempfinden seitens der Schülerinnen und Schüler hat. Um diese Hypothese empirisch zu überprüfen, wurde unter Einbezug theoretischer Grundlagen und historischer Recherche ein Unterrichtskonzept erstellt, mit drei Schulklassen durchgeführt und im Anschluss daran mit einem Fragebogen getestet. Dabei hat sich der aus der Literatur stammende Begriff „Sinnkonstruktion“, zu dem es empirische Untersuchungen im Mathematikunterricht gibt, als anschlussfähig herausgestellt.

Die Ergebnisse dieser Masterarbeit legen nahe, dass ein Unterricht gemäß dem verfolgten Ansatz zu einem positiven Einfluss des Sinnempfindens beitragen kann, indem unter anderem der Nutzen von Mathematik für die Gesellschaft aufgezeigt wird. Die Inklusion geschichtlicher Aspekte in den Mathematikunterricht ist daher zu empfehlen, wobei weitere Untersuchungen aufschlussreich sein könnten, wie beispielsweise die Anfertigung und Evaluierung ähnlicher Unterrichtskonzepte.

10.2 Daten aus Fragebogen

Allgemeine Daten	gesamt	m	w	Erstsprache Deutsch	Andere Erstsprachen
Anzahl der Personen	62	36	26	10	52
Deutsch als Erstsprache	10	6	4	-	-
Durchschnittlich absolvierte Stationen	2,7 ± 0,9	2,6 ± 0,8	2,9 ± 1,1	2,9 ± 0,6	2,7 ± 1,0
Ergebnisse zu den Items					
1 Mathematik zählt zu meinen Lieblingsfächern.	2,5 ± 1,0	2,4 ± 1,0	2,6 ± 1,1	2,8 ± 1,0	2,4 ± 1,0
2 Geschichte zählt zu meinen Lieblingsfächern.	2,1 ± 0,9	1,9 ± 0,9	2,3 ± 1,0	2,2 ± 1,0	2,0 ± 0,9
3 Ich würde in Zukunft gerne öfters etwas über die Geschichte von Mathematik erfahren.	2,6 ± 0,9	2,5 ± 0,7	2,7 ± 1,1	3,1 ± 0,9	2,5 ± 0,9
4 Der Unterricht konnte mir den Nutzen von Mathematik für die Menschheit aufzeigen.	2,3 ± 0,9	2,3 ± 0,9	2,2 ± 1,0	2,4 ± 0,8	2,3 ± 0,9
5 Die Geschichte von Mathematik interessiert mich nicht.	2,9 ± 1,0	2,8 ± 0,9	2,9 ± 1,1	2,6 ± 0,7	2,9 ± 1,0
6 Das durch den Unterricht erworbene Wissen ist in anderen Unterrichtsfächern anwendbar.	2,3 ± 0,8	2,4 ± 0,8	2,2 ± 0,9	2,2 ± 0,6	2,3 ± 0,9
7 Der Unterricht hat mir gezeigt, wie wichtig Mathematik für die Menschen war.	1,9 ± 1,0	1,8 ± 0,9	2,1 ± 1,1	2,2 ± 0,8	1,9 ± 1,0
8 Das durch den Unterricht erworbene Wissen ist außerhalb der Schule anwendbar.	2,5 ± 0,9	2,6 ± 1,0	2,3 ± 0,8	2,6 ± 0,7	2,4 ± 1,0
9 Der Unterricht hat meine Einstellung zu Mathematik positiv beeinflusst.	2,3 ± 0,9	2,3 ± 0,9	2,3 ± 0,9	2,5 ± 1,1	2,2 ± 0,9
10 Der Unterricht hat mein Bild von Mathematik verbessert.	2,2 ± 1,0	2,3 ± 0,9	2,1 ± 1,1	2,9 ± 1,0	2,1 ± 1,0
11 Es war interessant etwas über das Leben von Pythagoras zu erfahren.	2,1 ± 1,0	2,2 ± 1,0	2,1 ± 1,0	2,3 ± 0,7	2,1 ± 1,0
12 Es war interessant etwas über die Mathematik der alten Ägypter zu erfahren.	1,9 ± 0,9	1,9 ± 0,8	1,9 ± 1,0	2,0 ± 0,8	1,9 ± 0,9
13 Es war interessant etwas über die Mathematik der Babylonier zu erfahren.	2,2 ± 1,0	2,1 ± 0,9	2,4 ± 1,1	2,6 ± 1,2	2,2 ± 1,0

10.3 Fragebogen zur Unterrichtseinheit

Fragebogen zur Unterrichtseinheit

Geschlecht: ☐ m ☐ w

Klasse: ☐ 4a ☐ 4b ☐ 4c

Deutsch ist meine Erstsprache (Muttersprache): ☐ ja ☐ nein

So viele Stationen habe ich geschafft: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

1. Mathematik zählt zu meinen Lieblingsfächern.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
2. Geschichte zählt zu meinen Lieblingsfächern.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
3. Ich würde in Zukunft gerne öfters etwas über die Geschichte von Mathematik erfahren.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
4. Die Unterrichtseinheit konnte mir den Nutzen von Mathematik für die Menschheit aufzeigen.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
5. Die Geschichte von Mathematik interessiert mich nicht.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
6. Das durch die Unterrichtseinheit erworbene Wissen ist in anderen Unterrichtsfächern anwendbar.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
7. Die Unterrichtseinheit hat mir gezeigt, wie wichtig Mathematik für die Menschen war.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
8. Das durch die Unterrichtseinheit erworbene Wissen ist außerhalb der Schule anwendbar.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
9. Die Unterrichtseinheit hat meine Einstellung zur Mathematik positiv beeinflusst.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
10. Die Unterrichtseinheit hat mein Bild von Mathematik verbessert.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
11. Es war interessant etwas über das Leben von Pythagoras zu erfahren.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
12. Es war interessant etwas über die Mathematik der alten Ägypter zu erfahren.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu
13. Es war interessant etwas über die Mathematik der Babylonier zu erfahren.
☐ trifft zu ☐ trifft eher zu ☐ trifft weniger zu ☐ trifft gar nicht zu

Das hat mir an der Unterrichtseinheit gut gefallen:

Das könnte man an der Unterrichtseinheit verbessern:



Die Tontafel „Plimpton Nr.322“ wurde am Anfang des 19.Jahrhunderts ausgegraben und befindet sich heute im Besitz der Columbia University (New York). Der Name stammt von George Plimpton, der sie zusammen mit vielen weiteren Steintafeln 1936 der Universität überreichte. Sie ist um 1800 v. Chr. entstanden.

 = 1

 = 10

Die Tontafeln der Babylonier – Lösung zur Selbstkontrolle

Das altbabylonische Reich (1900 – 1600 v. Chr.) mit seinem Zentrum, der Stadt Babylon, lag im sogenannten Zweistromland, zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris (heutiger Irak). Mathematik war für die Babylonier ein Werkzeug, das sie nutzten, um Berechnungen für Bauwerke und Bewässerungssysteme durchzuführen, aber auch für militärische Zwecke.

Die Babylonier hatten kein Papier, sondern ritzen in Keilschrift Wörter und Zahlen in Tontafeln ein, die sie dann trocknen ließen. Wir wissen heute viel über das babylonische Reich und ihre Mathematik, da viele solcher Tontafeln ausgegraben wurden, darunter auch „Plimpton Nr. 322“.



Welche Zahlen sind in der nachgebildeten Tontafel dargestellt? Übertrage sie in diese Tabelle:

3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29
12	35	37

Die Zahlen jeder Zeile haben eine besondere Eigenschaft: sie erfüllen den pythagoreischen Lehrsatz! Mit den Zahlen 3, 4 und 5 ist das vorgezeigt. Überprüfe das auch für zwei andere Zeilen der Tontafel und schreibe hier auf:

$3^2 + 4^2 = 5^2$ $9 + 16 = 25$ $25 = 25$	$5^2 + 12^2 = 13^2$ $25 + 144 = 169$ $169 = 169$	$8^2 + 15^2 = 17^2$ $64 + 225 = 289$ $289 = 289$
---	--	--

Drei Zahlen, die den pythagoreischen Lehrsatz erfüllen, heißen **pythagoreisches Tripel**. Ein solches Tripel entspricht also den Seitenlängen eines **rechtwinkligen Dreiecks**. Damit sind die erste und zweite Spalte der Tabelle die **Katheten** und die dritte Spalte die **Hypotenuse** eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Babylonier kannten also bereits den pythagoreischen Lehrsatz, weit vor Pythagoras!

Folgende Dreiecke haben pythagoreische Tripel als Seitenlängen (in mm). Vervollständige die Konstruktionen (mit Bleistift und Geodreieck!) und gib die Seitenlängen an. Überprüfe mit dem Geodreieck, ob es sich dabei wirklich um rechtwinklige Dreiecke handelt.



10.5 Material zu der Station – Mathematik bei den alten Ägyptern

Mathematik bei den alten Ägyptern

Du weißt wahrscheinlich bereits einiges über das alte Ägypten (3000 – 300 v.Chr.), über ihre berühmten Bauwerke, den Pyramiden und über den Fluss Nil. Sie wussten aber auch bereits einiges über Mathematik: dazu zählten Formeln für die Berechnung von Flächen und Körpern, rechnen mit Brüchen und sie hatten sogar einen Näherungswert der Kreiszahl π ($\frac{256}{81}$).

Wir wissen das heute, weil alte Papyrus-Schriftrollen gefunden wurden, auf denen die Ägypter schrieben. Die darin enthaltenen Hieroglyphen (Schrift der Ägypter) konnte man übersetzen. Diese Schriftrollen sind etwa um 1800 v. Chr. entstanden und damit die ältesten bekannten „Mathematikbücher“.



Landkarte von Ägypten



Skulptur eines Schreibers

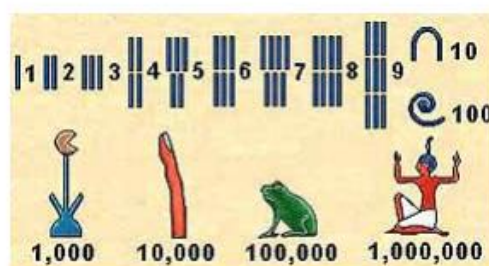
Mathematik wurde zusammen mit dem Lesen und Schreiben damals nur einer Berufsgruppe beigebracht, den sogenannten „Schreibern“. Sie waren für die Verwaltung des Reiches zuständig, die ohne Mathematik nicht möglich gewesen wäre. Zu ihren Aufgaben zählten beispielsweise das Berechnen von Steuern, das Neuvermessen von Feldern nach Überschwemmungen des Nils und die Berechnung der Größe von Vorratsbehältern.

Die alten Ägypter konnten sogar mithilfe von Sonnen- und Sternbeobachtungen und ihrem mathematischen Wissen das Jahr in 365 Tage unterteilen. Dieser Kalender ermöglichte es ihnen sich auf die jährlichen Nilüberschwemmungen vorzubereiten.

Um die Felder nach den Nilüberschwemmungen neu zu vermessen, verwendeten die Ägypter vermutlich ein sogenanntes 12-Knotenseil.



Mathematischer Text auf Papyrus-Schriftrolle



Zahlen bei den Ägyptern

Mathematik bei den alten Ägyptern

Du weißt wahrscheinlich bereits einiges über das alte Ägypten (3000 – 300 v.Chr.), über ihre berühmten Bauwerke, den _____ und über den Fluss _____. Sie wussten aber auch bereits einiges über Mathematik: dazu zählten Formeln zur Berechnung von _____, rechnen mit _____ und sie hatten sogar einen Näherungswert der _____



($\pi = \frac{256}{81} \approx \underline{\hspace{2cm}}$). (runde auf 2 Nachkommastellen)

Wir wissen das heute, weil alte _____-Schriftrollen gefunden wurden, auf denen die Ägypter schrieben. Die darin enthaltenen _____ (Schrift der Ägypter) konnte man übersetzen. Diese Schriftrollen sind etwa um _____ entstanden und damit die ältesten bekannten _____ der Menschheit.

Mathematik wurde zusammen mit dem Lesen und Schreiben damals nur einer Berufsgruppe beigebracht, den sogenannten _____. Sie waren für die _____ zuständig, die ohne Mathematik nicht möglich gewesen wäre. Zu ihren Aufgaben zählten beispielsweise das Berechnen von _____, das _____ nach Überschwemmungen des Nils und die Berechnung der _____.

Die alten Ägypter konnten sogar mithilfe von _____ und ihrem mathematischen Wissen das Jahr in _____ unterteilen. Dieser _____ ermöglichte es ihnen sich auf die _____ vorzubereiten.

Um die Felder nach den Nilüberschwemmungen neu zu vermessen, verwendeten die Ägypter vermutlich ein sogenanntes _____:



Partnerarbeit: Spannt das 12-Knotenseil (gelbe Perlen sind Knoten) wie am Bild gemeinsam mit den Fingern auf. Es entsteht ein _____ Dreieck. Überprüft das mit einem Geodreieck! Wie lang sind die drei Seiten dieses Dreiecks, wenn die Länge zwischen zwei Knoten 1 beträgt?



12-Knotenseil

Die Ägypter konnten mithilfe dieses Seils rechte Winkel konstruieren und somit leichter die Fläche von Feldern vermessen.



in rechtwinklige Dreiecke zerlegtes Feld



Beantworte folgende Fragen zum Text:

Was wussten die alten Ägypter über Mathematik? Gib drei Beispiele an.

Wie alt sind in etwa die Papyrusschriftrollen?

Wie hieß die Berufsgruppe, die lesen, schreiben und rechnen konnte und was waren ihre Aufgaben?

Wofür brauchten die alten Ägypter einen Kalender?

Welches Hilfsmittel verwendeten die alten Ägypter, um rechte Winkel zu konstruieren?

Mathematik bei den alten Ägyptern – Lösung zur Selbstkontrolle

Du weißt wahrscheinlich bereits einiges über das alte Ägypten (3000 – 300 v.Chr.), über ihre berühmten Bauwerke, den **Pyramiden** und über den Fluss **Nil**. Sie wussten aber auch bereits einiges über Mathematik: dazu zählten Formeln zur Berechnung von **Flächen und Körpern**, rechnen mit **Brüchen** und sie hatten sogar einen Näherungswert der **Kreiszahl π** ($\frac{256}{81} \approx 3,16$).

Wir wissen das heute, weil alte **Papyrus**-Schriftrollen gefunden wurden, auf denen die Ägypter schrieben. Die darin enthaltenen **Hieroglyphen** (Schrift der Ägypter) konnte man übersetzen. Diese Schriftrollen sind etwa um **1800 v. Chr.** entstanden und damit die ältesten bekannten „**Mathematikbücher**“ der Menschheit.

Mathematik wurde zusammen mit dem Lesen und Schreiben damals nur einer Berufsgruppe beigebracht, den sogenannten „**Schreibern**“. Sie waren für die **Verwaltung des Reiches** zuständig, die ohne Mathematik nicht möglich gewesen wäre. Zu ihren Aufgaben zählten beispielsweise das Berechnen von **Steuern**, das **Vermessen von Feldern** nach Überschwemmungen des Nils und die Berechnung der **Größe von Vorratsbehältern**.

Die alten Ägypter konnten sogar mithilfe von **Sonnen- und Sternbeobachtungen** und ihrem mathematischen Wissen das Jahr in **365 Tage** unterteilen. Dieser **Kalender** ermöglichte es ihnen sich auf die **jährlichen Nilüberschwemmungen** vorzubereiten.

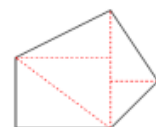


Partnerarbeit: Spannt das 12-Knotenseil (gelbe Perlen sind Knoten) wie am Bild gemeinsam mit den Fingern auf. Es entsteht ein **rechtwinkliges** Dreieck. Überprüft das mit einem Geodreieck! Wie lang sind die drei Seiten dieses Dreiecks, wenn die Länge zwischen zwei Knoten 1 beträgt? **3, 4 und 5**

Die Ägypter konnten mithilfe dieses Seils rechte Winkel konstruieren und somit leichter die Fläche von Feldern vermessen.



12-Knotenseil



in rechtwinklige Dreiecke
zerlegtes Feld



Beantworte folgende Fragen zum Text:

Was wussten die alten Ägypter über Mathematik? Gib drei Beispiele an.

Formeln zur Berechnung von Flächen und Körpern, rechnen mit Brüchen, die Kreiszahl π

Wie alt sind in etwa die Papyrusschriftrollen?

3800 Jahre

Wie hieß die Berufsgruppe, die lesen, schreiben und rechnen konnte und was waren ihre Aufgaben?

Schreiber. Steuern berechnen, Vermessen von Feldern, Berechnung der Größe von Vorratsbehältern

Wofür brauchten die alten Ägypter einen Kalender?

Um sich auf die jährlichen Nilüberschwemmungen vorzubereiten.

Welches Hilfsmittel verwendeten die alten Ägypter, um rechte Winkel zu konstruieren?

Ein 12-Knotenseil

Auf den Spuren von Pythagoras – Lösung zur Selbstkontrolle

Pythagoras zählt zu einen der einflussreichsten und geheimnisvollsten Mathematikern. Jeder Schüler und jede Schülerin auf der ganzen Welt muss seinen berühmten Lehrsatz lernen. Doch wer war er? Finde es heraus, indem du die folgenden Abschnitte mit einer Schere trennst und in die zeitlich richtige Reihenfolge bringst. **Bevor** du sie auf ein A4 Blatt klebst, kontrolliere mithilfe des Lösungsblatts. Unterstrichene Wörter findest du unten im Lexikon erklärt.



Skulptur von Pythagoras

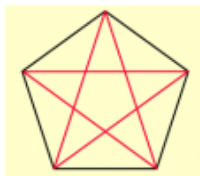
Pythagoras wurde auf der Insel Samos (heutige Türkei, suche die Insel auf der Karte) 560 v. Chr. geboren. Mathematik hat er in seiner Jugend beim berühmten Denker *Thales von Milet* (nach ihm ist der Thales-Kreis benannt) gelernt. Er hatte jedoch einen unermesslichen Wissensdurst und wollte mehr über Mathematik erfahren.

Deswegen reiste er nach Ägypten und zu den Babyloniern und lernte dort alles was es damals zu wissen gab, dazu zählte auch der nach ihm benannte pythagoreische Lehrsatz! Legenden zufolge soll er sogar bis nach Indien gekommen sein.

Als er mit etwa 40 Jahren von seinen Reisen in seine Heimat zurückkehrte, herrschte dort ein Tyrann und deswegen wanderte er nach Kroton (heutiges Unteritalien, suche die Stadt auf der Karte) aus.



Landkarte vom Mittelmeerraum



Das Symbol der Pythagoreer

In Kroton gründete Pythagoras den Geheimbund der „Pythagoreer“. Aus heutiger Sicht würde man diesen Geheimbund als Sekte bezeichnen: Jeder Anhänger musste seinen ganzen Besitz aufgeben und war der Verschwiegenheit verpflichtet. Mitglieder, die das geheime Wissen der Pythagoreer nach außen verrieten, wurden umgebracht. Sie lebten ähnlich wie Mönche im Kloster und hatten als Erkennungssymbol ein Pentagramm.

Die Pythagoreer beschäftigten sich intensiv mit Mathematik und revolutionierten diese. Ihr Motto lautete „Alles ist Zahl“: sie waren der Überzeugung, dass die Natur und das Universum mit Zahlen beschrieben werden kann. Dieser Gedanke ist also etwa 2500 Jahre alt und die Grundlage für die modernen Naturwissenschaften.

Auch nach dem Tod von Pythagoras um 480 v.Chr. blieb der Geheimbund der Pythagoreer bestehen und ihre Überzeugungen hatten großen Einfluss auf viele folgenden Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler.

Lexikon

Tyrann: grausamer Gewaltherrscher

Verschwiegenheitspflicht: Pflicht zur Geheimhaltung von Informationen

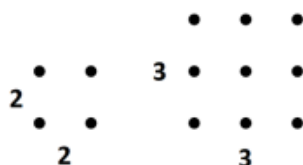
revolutionieren: von Grund auf umgestalten, verändern

Naturwissenschaften: Physik, Chemie, Biologie, ...

10.7 Material zu der Station – Der Beweis der Pythagoreer

Der Beweis der Pythagoreer

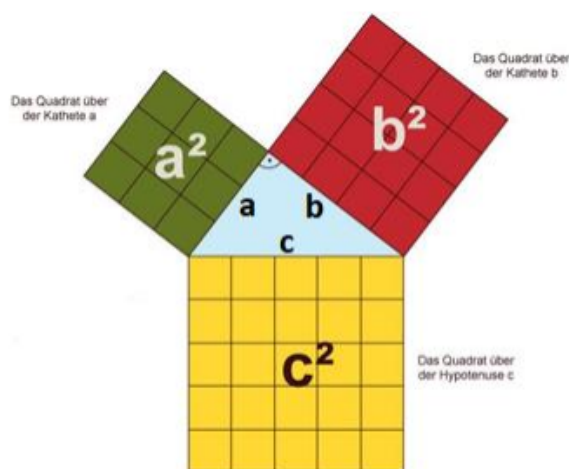
Die Pythagoreer ordneten den natürlichen Zahlen bestimmten Formen zu. Die Quadratzahlen (der Name hat sich bis heute gehalten) heißen deshalb so, weil sie sich als Quadrat anordnen lassen und gleichzeitig den Flächeninhalt des Quadrats darstellen. Die Quadratzahlen $4 = 2^2$ und $9 = 3^2$ sind bereits als Punkte angeordnet. Zeichne die Quadratzahlen $16 = 4^2$ und $25 = 5^2$ daneben selbst ein:



Die Quadratzahlen sind auch für den pythagoreischen Lehrsatz wichtig. In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die beiden kürzeren Seiten a und b als _____ und die längste Seite c als _____.

Als Formel lautet der pythagoreische Lehrsatz:

Formuliere mithilfe des Bildes den pythagoreischen Lehrsatz in eigenen Worten:



Wie du zuvor erfahren hast, kannten bereits die Ägypter und Babylonier diesen Lehrsatz. Warum ist er dann nach Pythagoras benannt? Der Grund dafür ist, dass Pythagoras und seine Anhänger Mathematik anders betrachteten als alle anderen zuvor. Sie fragten sich, ob es einen „Beweis“ dafür gibt, dass der pythagoreische Lehrsatz in ALLEN rechtwinkligen Dreiecken gilt. Unter einem Beweis versteht man mehrere logische Schritte, die die Richtigkeit einer Aussage zeigen sollen. Die Pythagoreer fanden einen Beweis zum pythagoreischen Lehrsatz und deshalb trägt er seinen Namen! Ihr Beweis lautet so (verwende die farbigen Figuren zum Legen des Beweises):



Schritt 1: Lege aus vier rechtwinkligen Dreiecken und den Quadraten a^2 und b^2 ein zusammengesetztes Quadrat. Die Seitenlänge von diesem Quadrat beträgt _____.

Schritt 2: Lege nun aus den anderen vier rechtwinkligen Dreiecken und dem Quadrat c^2 ebenfalls ein zusammengesetztes Quadrat. Die Seitenlänge von diesem Quadrat beträgt _____.

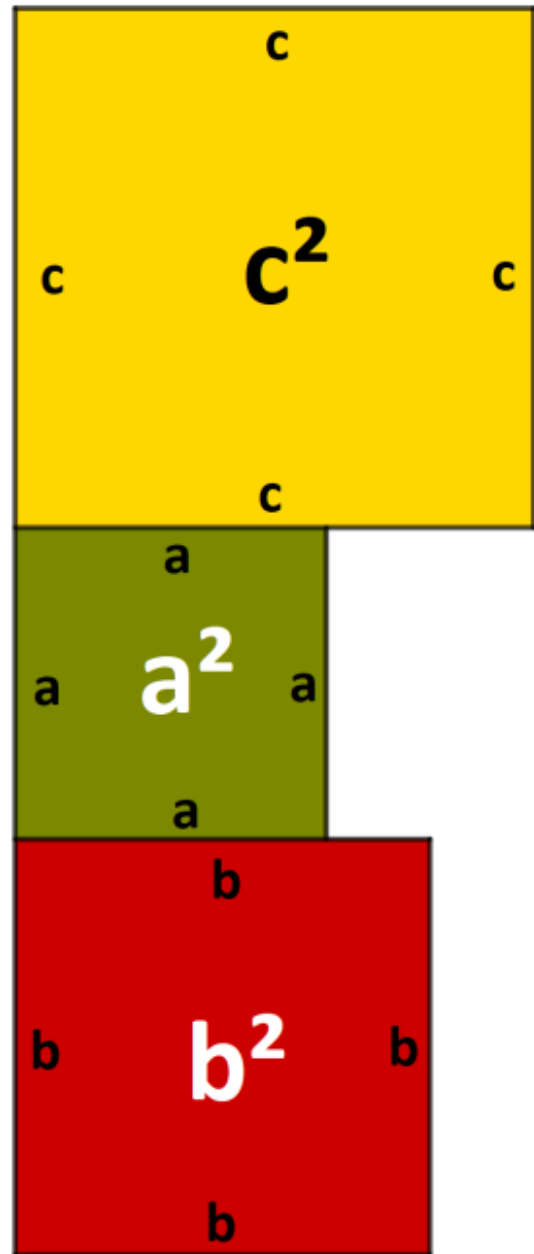
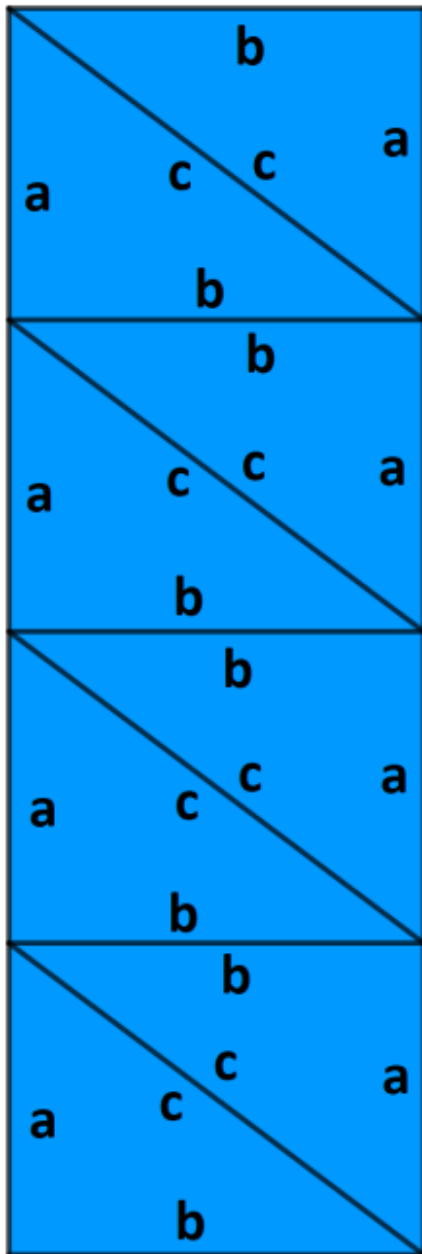
Schritt 3: Weil beide zusammengesetzten Quadrate dieselbe _____ haben, haben sie auch dieselbe _____.

Schritt 4: Nimmt man von beiden zusammengesetzten Quadraten _____ rechtwinklige Dreiecke weg, bleibt bei beiden dieselbe Restfläche über. Deshalb gilt: _____.

Schritt 5: Jedes rechtwinklige Dreieck kann auf diese Weise gelegt werden und deswegen gilt der pythagoreische Lehrsatz für alle rechtwinkligen Dreiecke.

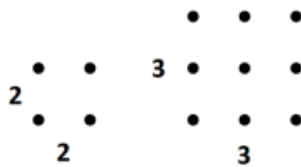
Wenn eine mathematische Aussage bewiesen ist, können andere Mathematikerinnen und Mathematiker sie ohne Bedenken verwenden. Seit Pythagoras konnten so viele neue Entdeckungen gemacht werden.

Figuren zum Legebeweis



Der Beweis der Pythagoreer – Lösung zur Selbstkontrolle

Die Pythagoreer ordneten den natürlichen Zahlen bestimmten Formen zu. Die Quadratzahlen (der Name hat sich bis heute gehalten) heißen deshalb so, weil sie sich als Quadrat anordnen lassen und gleichzeitig den Flächeninhalt des Quadrats darstellen. Die Quadratzahlen $4 = 2^2$ und $9 = 3^2$ sind bereits als Punkte angeordnet. Zeichne die Quadratzahlen $16 = 4^2$ und $25 = 5^2$ daneben selbst ein:

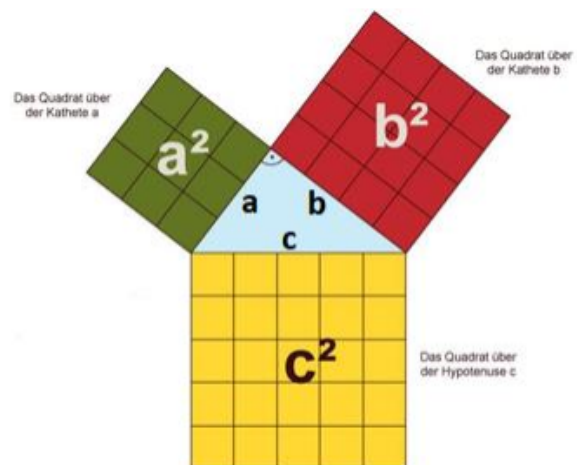


Die Quadratzahlen sind auch für den pythagoreischen Lehrsatz wichtig. In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die beiden kürzeren Seiten a und b als **Katheten** und die längste Seite c als **Hypotenuse**.

Als Formel lautet der pythagoreische Lehrsatz:
 $a^2 + b^2 = c^2$

Formuliere mithilfe des Bildes den pythagoreischen Lehrsatz in eigenen Worten:

Die Summe aus dem Quadrat über der Kathete a und dem Quadrat über der Kathete b ergeben das Quadrat über der Hypotenuse c .



Wie du zuvor erfahren hast, kannten bereits die Ägypter und Babylonier diesen Lehrsatz. Warum ist er dann nach Pythagoras benannt? Der Grund dafür ist, dass Pythagoras und seine Anhänger Mathematik anders betrachteten als alle anderen zuvor. Sie fragten sich, ob es einen „Beweis“ dafür gibt, dass der pythagoreische Lehrsatz in ALLEN rechtwinkligen Dreiecken gilt. Unter einem Beweis versteht man mehrere logische Schritte, die die Richtigkeit einer Aussage zeigen sollen. Die Pythagoreer fanden einen Beweis zum pythagoreischen Lehrsatz und deshalb trägt er seinen Namen! Ihr Beweis lautet so (verwende die farbigen Figuren zum Legen des Beweises):



Schritt 1: Lege aus vier rechtwinkligen Dreiecken und den Quadraten a^2 und b^2 ein zusammengesetztes Quadrat. Die Seitenlänge von diesem Quadrat beträgt $a + b$.

Schritt 2: Lege nun aus den anderen vier rechtwinkligen Dreiecken und dem Quadrat c^2 ebenfalls ein zusammengesetztes Quadrat. Die Seitenlänge von diesem Quadrat beträgt $a + b$.

Schritt 3: Weil beide zusammengesetzten Quadrate dieselbe **Seitenlänge** haben, haben sie auch dieselbe **Fläche**.

Schritt 4: Nimmt man von beiden zusammengesetzten Quadraten **vier** rechtwinklige Dreiecke weg, bleibt bei beiden dieselbe Restfläche über. Deshalb gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.

Schritt 5: Jedes rechtwinklige Dreieck kann auf diese Weise gelegt werden und deswegen gilt der pythagoreische Lehrsatz für alle rechtwinkligen Dreiecke.

Wenn eine mathematische Aussage bewiesen ist, können andere Mathematikerinnen und Mathematiker sie ohne Bedenken verwenden. Seit Pythagoras konnten so viele neue Entdeckungen gemacht werden.