



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Über Strukturen und Abstraktion

Eine Abhandlung über Abstraktionsprinzipien und strukturelle
Zusammenhänge in der Philosophie der Mathematik

verfasst von / submitted by

Jessica Goryczka

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Philosophie (Mag.phil.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Psychologie
und Philosophie

Betreut von / Supervisor:

Ass.-Prof. Mag. Mag. Dr. Georg Schiemer

DANKSAGUNG

Allen voran, möchte ich mich bei der ausgezeichneten Betreuung von Herrn Dr. Schiemer bedanken, welcher sich ausreichend Zeit für mehrere Treffen und Besprechung des Themas sowie Feedback genommen hat. Vielen Dank für die Ermöglichung dieser Diplomarbeit in diesem Fachbereich und dem äußerst hilfreichen fachlichen Input.

Außerdem möchte ich allen danken die mir beim Verfassen und Fertigstellen dieser Arbeit geholfen haben, sei es mit seelischem Beistand oder Diskussion einiger aufgekommener Fragestellungen während des Arbeitsprozesses, darunter meiner Mitbewohnerin Tina Feichtinger, Josef Küstner und Matthew Yetts. Meine Studienkolleginnen und –kollegen, die das Fortschreiten des Studiums erleichtert haben, möchte ich ebenfalls erwähnen, darunter Katrin Tuppinger, Lina Martin, Lara Küstner, Johannes Klien, Julia Fröhle, Viktoria Thyri und Florian Kaltseis.

Zuletzt möchte ich mich noch bei meiner Familie, vor allem bei Andrea, Eduard und Lukas, bedanken, die mir ermöglichen konnten zu studieren und mich bei der Fertigstellung des Studiums so gut wie möglich unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Strukturalismus	3
1.1 Der Beginn des Strukturalismus um Benacerraf	4
1.2 Erklärungen und Terminologie	6
1.3 Eliminativer Strukturalismus	10
1.4 Non-eliminativer Strukturalismus	14
1.5 Eine neue Perspektive für den Strukturalismus?	17
1.6 Dedekinds Beschreibungen zur Zahl in strukturalistischer Perspektive	19
1.6.1 Weitere Ausführungen und philosophische Überlegungen zu Dedekind	23
1.7 Abschließende Anmerkungen	26
2 Abstraktion im historischen Kontext	27
2.1 Freges Grundlagen der Arithmetik	28
2.1.1 Arithmetische Sätze genauer betrachtet	30
2.1.2 Wie können wir mathematische Objekte erfassen?	31
2.1.3 Definition mithilfe von Abstraktion – Freges Grundlagen der Arithmetik §64	33
2.1.4 Von Gleichheit zur Anzahl	36
2.1.5 Probleme mit Freges Innovationen	38
2.2 Abstraktionsprinzipien vor und rund um Freges Grundlagen der Arithmetik	40
2.2.1 Der Wert der Abstraktionsfunktion	40
2.2.2 Äquivalenzrelation, Bikonditional und Gleichheit	50
2.3 Fazit	55
3 Aktuelle Debatten rund um Abstraktionsprinzipien	57
3.1 Neue Chancen für Frege – Hale und Wright über Abstraktionsprinzipien	58
3.1.1 Die Lösung für Caesar?	59
3.1.2 Hume's Principle genauer betrachtet	61
3.2 Dynamische Abstraktion	64
4 Strukturelle Abstraktion	68
4.1 Modelltheorie und weitere Terminologie	72
4.2 Strukturelle vs. nicht strukturelle Eigenschaften	73
4.3 Instantiation und Uniqueness	76
4.4 Dynamische Abstraktion für strukturelle Abstraktion	80
4.4.1 Prädikative vs. imprädikative Abstraktion	80
4.4.2 Mögliche Welten als Systeme und strukturelle Invarianz	82
4.4.3 Mögliche Welten und Kripke Modelle	85
Conclusio	87
Bibliografie	90
Abstract	94

EINLEITUNG

Mit der Frage „Was ist Mathematik?“, oder „Was untersucht die Mathematik?“ sieht man sich mit einer Frage konfrontiert, die gar nicht so leicht zu beantworten scheint. Man hat eventuell Beispiele und Bilder im Kopf, von Zahlen und Funktionen und geometrischen Figuren, für die tatsächliche Essenz der Mathematik scheint man in der ersten Überlegung jedoch keine brauchbare Definition zu finden.

Verschiedene Mathematikerinnen und Mathematiker, sowie Philosophinnen und Philosophen werden diese Frage mitunter auch unterschiedlich beantworten. Für manche ist es eine reine Formelsprache mit deren wir Aussagen machen können und physikalische Gegebenheiten erklären. Andere werden behaupten, dass die Objekte, die in den Formeln vorkommen und auf die verwiesen wird, auch tatsächlich existierende Objekte sind. In physikalischen Kontexten ist es anschaulicher nachzuvollziehen, was der Gegenstand der Wissenschaft ist. In der Mathematik wird es hier schon schwieriger.

Wie werden in der Mathematik neue Erkenntnisse gewonnen und Forschungsfortschritte gemacht? Von welchen Objekten handelt sie eigentlich und wie können wir sie verstehen? Ich glaube, dass wir mit der Untersuchung von Abstraktionsprinzipien einige interessante Antworten auf solche philosophisch-mathematische Fragen geben können.

Mit der Formalisierung der Mathematik Mitte des 19. Jahrhunderts wurden Mathematiker und Mathematikerinnen auch immer mehr auf die Wichtigkeit von mathematischen Zusammenhängen, Strukturen und abstrakten Objekten aufmerksam. Dabei ist der Vorgang der Abstraktion von jeglichen nicht relevanten Eigenschaften der mathematischen Objekte hinsichtlich struktureller Gegebenheiten zentral. Die Idee der mathematischen Abstraktion hat sich von Dedekind über Frege und Peano immer mehr entwickelt. Abstraktionsprinzipien und deren Vorläufer haben Mathematiker und Mathematikerinnen immer wieder beschäftigt, vor allem bei der Einführung von neuen Entitäten. Durch Arbeiten wie von Dedekind und Benacerraf hat sich die Strömung des Strukturalismus entwickelt, welche besagt, dass sich Mathematik vordergründig mit der Untersuchung von Strukturgefügen beschäftigt. Durch Verwendung geeigneter Abstraktionsprinzipien können wir den Zugang zu strukturellen Eigenschaften mathematischer Objekte erhalten.

In moderner Mathematik müssen sich Abstraktionsprinzipien immer wieder neuen Einwänden und Problemen stellen, deshalb untersuchen Philosophinnen und Philosophen verschiedene Möglichkeiten und Zugänge zu Abstraktion und den damit zusammenhängenden Strukturen.

Vor allem die Betrachtung von abstrakten Objekten und Strukturen bringen oft epistemische Postulate mit sich.

In dieser Arbeit wird es meine Aufgabe sein, ein philosophisch motiviertes Bild der Mathematik als die Investigation von strukturellen Beziehungen und Konstrukten zu zeichnen. Dabei stehen Abstraktionsprinzipien im Zentrum meiner Forschung und Analyse. Folgende Fragen sind von essenzieller Bedeutung, die ich mithilfe meiner Arbeit zu beantworten versuchen werde: Wie können wir Zugang zu mathematischen bzw. abstrakten Objekten erhalten und welche Objekte liefern uns Abstraktionsprinzipien? Welchen Einfluss hat Abstraktion heute und wie ist sie zu verstehen?

Wie kommen wir von struktureller Abstraktion zu reinen Strukturen und welche Probleme ergeben sich? Welche ontologischen Erkenntnisse können wir aus struktureller Abstraktion schöpfen?

Nach einer Einführung und Erklärung der philosophischen Strömung des Strukturalismus, widme ich mich zunächst den historischen Wurzeln der Abstraktion, um dann im dritten und vierten Kapitel auf aktuelle Debatten rund um Abstraktionsprinzipien einzugehen. Dabei wird es zentral sein die Entstehung und Entwicklung der Abstraktion im historischen Kontext aufzuarbeiten und philosophische Überlegungen, sowie logische Probleme in der modernen Debatte aufzugreifen. Des Weiteren argumentiere ich, dass einige logische Probleme in der neo-logischen Ansicht zu groß scheinen und der Weg eines neuen, dynamischen Ansatzes mit neuen metaphysischen Überlegungen zu Abstraktion gelegt werden kann. Im letzten Teil der Arbeit werde ich Ansätze und Hindernisse einer strukturellen Abstraktion beschreiben und untersuchen, ob ein dynamischer Ansatz für strukturelle Abstraktionsprinzipien sowohl in logisch-mathematischer Hinsicht funktionieren als auch neue philosophische Erkenntnisse bringen kann.

1 STRUKTURALISMUS

Neben Ansichten, dass die Mathematik eine reine Formelsprache oder die Wissenschaft von Zahlen und Anzahl ist, gibt es einen weiteren weit verbreiteten philosophischen Ansatz, dem wir uns nun nähern wollen: der Strukturalismus. Wie auch in anderen Disziplinen, beschäftigt sich der Strukturalismus in der Philosophie der Mathematik mit Strukturgefügen und -zusammenhängen.

[M]athematics is concerned principally with the investigation of structures of various types in complete abstraction from the nature of individual objects making up those structures. (Hellmann 1989, vii)

Wie der Name bereits vermuten lässt, ist der Strukturalismus eine Ansicht, dass sich die Mathematik essenziell mit den vorherrschenden Strukturen, in denen die mathematischen Objekte eingebettet sind, beschäftigt. Um zu diesen Strukturen zu gelangen, abstrahieren wir von der individuellen Natur der Objekte, die diese Struktur „ausfüllen“. Dies suggeriert, dass Mathematik sich im Grundlegenden nicht mit den mathematischen Objekten per se auseinandersetzt, sondern damit, wie sie zueinander in Beziehung stehen. Dazu ein weiteres Zitat von Parsons:

By the “structuralist view” of mathematical objects, I mean the view that reference to mathematical objects is always in the context of some background structure, and that the objects have no more to them than can be expressed in terms of the basic relations of the structure. (Parsons 1990, S. 303)

Parsons geht sogar so weit zu sagen, dass mathematische Objekte keinerlei Eigenschaften besitzen, außer jene, die die zugehörige Struktur ihnen zuschreibt. Es kann nur mit Hinblick auf den strukturellen Kontext über mathematische Objekte gesprochen werden. Reck und Price formulieren drei „intuitive“ Thesen, welche die Kernidee, beziehungsweise die Vorgehensweise des Strukturalismus definieren sollen:

- 1) Mathematik beschäftigt sich in erster Linie mit der „Investigation der Strukturen“
- 2) Dazu abstrahieren wir von der individuellen Natur der Objekte
- 3) Mathematische Objekte haben keine anderen Eigenschaften, außer diese hinsichtlich der grundlegenden Beziehungen in der Struktur

(vgl. Reck und Price 2000, S. 341-342)

1.1 DER BEGINN DES STRUKTURALISMUS UM BENACERRAF

Der Startschuss für die strukturalistische Debatte wird oft den in den 1960er Jahren erschienenen Veröffentlichungen von Paul Benacerraf und Hilary Putnam zugeschrieben. Diesen Publikationen folgend, haben noch weitere Philosophen die Diskussion vorangetrieben, darunter Stewart Shapiro, Michael Resnik und Charles Parsons. Für sie war Benacerrafs Artikel „What Numbers Could Not Be“ ein zentrales Werk für ihre Ausführungen des Strukturalismus. Die vorherrschende mathematische Position zur Zeit Benacerrafs war die axiomatische Mengentheorie, welche es uns erlaubt, alle mathematischen Objekte mit Mengen zu identifizieren. Benacerraf wollte diese Ansicht in Frage stellen. (vgl. Reck und Schiemer 2019)

Seine essenzielle These war auf der Überlegung aufgebaut, ob wir Zahlen als Mengen identifizieren können. Dazu bringt er uns in literarischer Manier die (Aus-)Bildung zweier Jungen Ernie und Johnny näher, die aufgrund ihrer Väter als Logiker, welche anstatt in herkömmlicher Weise über die Zahlen zu lernen, zuerst in Logik unterrichtet werden und die Axiome der natürlichen Zahlenreihe erlernen. Sie beschreiben die Zahlen mit unterschiedlichen Mengen, nach der Form:

Account I: $0 = \emptyset$
 $1 = \{\emptyset\}$
 $2 = \{\{\emptyset\}\}$
 $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\} \dots$

Account II: $0 = \emptyset$
 $1 = \{\emptyset\}$
 $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \dots$ (vgl. Horsten 2019)

Der erste Ansatz beschreibt die *Zermelo-Fraenkel* Ordinalzahlen mit der Nachfolgerfunktion $f: x \rightarrow \{x\}$ und der zweite die *von Neumann* Zahlen mit der Nachfolgerfunktion $f: x \rightarrow x \cup \{x\}$, welche jedem Objekt ein eindeutig Nachfolgendes zuordnet. Strukturell gesehen, sind beide Ansätze gleichwertig für die Beschreibung der natürlichen Zahlen. Bei manchen Aussagen in ihren Systemen tun sich allerdings Uneinigkeiten auf, beispielsweise bei der Frage ob " $1 \in 3$ " ist. Ernie und Johnny haben darauf unterschiedliche

Antworten. (vgl. Benacerraf 1965, S. 54) Dies führt uns zu einem Problem Zahlen mit Mengen gleich zu setzen, da es nicht möglich ist, dass zugleich $3 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$ und $3 = \{ \{ \{ \emptyset \} \} \}$. (vgl. Benacerraf 1965, S.56) Wir stehen somit vor einem Dilemma, da einerseits keine der beiden möglichen Zahlensysteme dem anderen überlegen ist, jedoch nicht beide korrekt sein können. Aus Benacerrafs Argumenten folgt, dass keine der beiden Möglichkeiten wahr ist. Andere ähnliche Überlegungen mit anderen Systemen stoßen auf die gleichen Probleme, somit kommen wir zu der Hypothese, dass die natürlichen Zahlen nicht mit Mengen gleichgesetzt werden können. Benacerraf argumentiert, dass natürliche Zahlen nicht nur keine Mengen, sondern überhaupt keine mathematischen Objekte per se sind. Sie sind die Positionen in der Struktur der natürlichen Zahlen. (vgl. Benacerraf 1965, S. 70)

Diese Kritik an mengentheoretischen Überlegungen zu den natürlichen Zahlen führt uns zu der Annahme, dass die Arithmetik kein bestimmtes System von mathematischen Objekten beschreibt, sondern lediglich die Beziehung zwischen ihnen. Dies veranlasste weitere Philosophinnen und Philosophen wie Shapiro und Resnik, eine neue philosophisch-mathematische Ansicht zu formulieren, nämlich den Strukturalismus. Sie behaupten, dass sowohl algebraische, wie auch nicht-algebraische Theorien (wie z. B. die Arithmetik), ausschließlich die Struktur beschreiben. (vgl. Horsten 2019) Die vorhin beschriebenen Zahlensysteme sind nur *mögliche* Instanziierungen der natürlichen Zahlenstruktur und nehmen die Positionen der Zahlen ein, *sind* aber nicht die Zahlen selbst. Fragen wie " $1 \in 3$ " sind nun irrelevant, da sie sich nicht auf die strukturellen Eigenschaften beschränken. 1 und 3 sind die Positionen in der natürlichen Zahlenstruktur und können nicht mit einer mengentheoretischen Relation in Beziehung gesetzt werden. (Vorausgesetzt wir interpretieren die abstrakte Struktur nicht mengentheoretisch.)

Bevor wir uns der strukturalistischen Debatte etwas genauer nähern, müssen wir uns noch die zugehörige Terminologie, sowie einige Zusammenhänge ansehen, um die folgende Diskussion besser zu verstehen.

1.2 ERKLÄRUNGEN UND TERMINOLOGIE

Zunächst ist es wichtig, ein paar grundlegende Begriffe zu klären. Wenn wir von mathematischen Strukturen sprechen, meinen wir im Grunde die Beziehungen unter den mathematischen Objekten in einem System. Ein System besteht aus einer grundlegenden Menge an Elementen, die in dem System vorkommen, genannt „Domain“, mit Relationen und Funktionen auf dieser Domain. Die *strukturellen* Eigenschaften eines Objekts sind diese, die es in der Beziehung zu anderen Elementen des Systems aufweist. Die *abstrakte* Struktur ist durch diese strukturellen Eigenschaften charakterisiert. (vgl. Benacerraf 1965, S. 70) Die (reine) Struktur ist die abstrakte Form eines Systems, die wir durch Abstraktion von jeglichen nicht-strukturellen Eigenschaften erhalten. (vgl. Shapiro 1997, S. 74) Die strukturellen Eigenschaften der Objekte sind somit auch diese, die von den Objekten aller anderen Systeme, die die gleiche Struktur aufweisen, gleichermaßen erfüllt werden. Systeme können eine bestimmte Struktur *exemplifizieren*, das bedeutet, dass ihre Objekte genau deren strukturellen Eigenschaften aufweisen. Dabei sagen wir, die Objekte eines Systems nehmen die entsprechenden *Positionen* in der Struktur ein. Objekte, die diese Positionen einnehmen, können ebenfalls über Eigenschaften verfügen, die nichts mit dem Strukturgefüge zu tun haben. So hat z. B. die Zahl „3“ die Eigenschaft die dritte Position in der natürlichen Zahlenstruktur zu sein, könnte aber jedoch auch andere Eigenschaften haben, wie „die Zahl 3 ist meine Lieblingszahl“, oder „die Zahl 3 ist Element der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ “, die nicht strukturell sind. (vgl. Reck 2003, S. 373 und Linnebo 2017, S. 162-163) Dahingehend könnte man zwischen *extrinsischen* und *intrinsischen* Eigenschaften unterscheiden. „Die Zahl 3 ist meine Lieblingszahl“ wäre eine extrinsische Eigenschaft, die nichts mit dem Wesen der Zahl an sich zu tun hat. „Die Zahl 3 ist die 3. Position in der natürlichen Zahlenstruktur“ wäre eine intrinsische Eigenschaft. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 271)¹ Wir sehen hiermit, dass Parsons Behauptung, dass Objekte nur strukturelle Eigenschaften innehaben, eventuell etwas zu weit gegriffen ist und die dritte Bedingung von Reck und Price eventuell vernachlässigt werden muss.

Haben ganzheitlich gesehene Strukturen auch nicht-strukturelle Eigenschaften? So könnte ich doch auch sagen, dass die natürliche Zahlenstruktur eines der beliebtesten Beispiele in der strukturalistischen Debatte darstellt. Das ist eindeutig ebenfalls keine strukturelle Eigenschaft.

¹ Eine klare Unterscheidung von extrinsischen und intrinsischen Eigenschaften der Objekte ist oft nicht eindeutig. Wir werden uns mit den der Unterscheidung von strukturellen und nicht-strukturellen Eigenschaften, noch genauer in dem Kapitel zur strukturellen Abstraktion beschäftigen.

Eine häufige Antwort auf diesen Einwand ist, dass abstrakte Strukturen nur strukturelle Eigenschaften als deren *konstitutive* Eigenschaften haben. (vgl. Reck und Schiemer 2019) Konstitutive Eigenschaften eines Objekts, sind solche, die eng an die Identität des Objektes gebunden sind, also die Natur des Objektes ausmachen. So ist eine konstitutive Eigenschaft der Zahl 3, dass sie der Nachfolger der Zahl 2 ist. (vgl. Reck 2003, S. 407) Die Essenz einer Struktur, also das, was sie ausmacht, sind demnach nur deren strukturelle Eigenschaften. Dieses Argument könnte auch für die einzelnen Objekte gelten: Die konstitutiven Eigenschaften der Objekte sind deren strukturellen Eigenschaften.^{2 3} Die Linie zwischen intrinsischen und extrinsischen bzw. konstitutiven Eigenschaften ist oft nicht so leicht zu ziehen und deshalb wird auch in unterschiedlicher Literatur oft verschieden argumentiert, welche Eigenschaften tatsächlich als strukturell gelten sollen. Wir werden uns diesen Überlegungen in der Diskussion struktureller Abstraktion noch genauer annehmen. So viel steht allerdings fest, dass die These, dass Strukturen und deren Positionen gar keine nicht-strukturellen Eigenschaften aufweisen, nicht hält.

Zwei Systeme können die gleichen strukturellen Eigenschaften aufweisen. Mathematisch sagen wir, wenn zwei Systeme die selbe Struktur innehaben, sind sie *isomorph* zueinander. Sehen wir uns das mathematisch konkretisiert an.

Dazu nehmen wir zwei Systeme an, welche die gleichen strukturellen Eigenschaften aufweisen sollen. Dabei postulieren wir ein System S mit einer Domain D , welche Elemente enthält, und verschiedene Relationen R_i auf dieser Domain mit Stelligkeit i . Unser System sieht dann so aus: $S = \langle D, R_1, \dots, R_n \rangle$. Wir definieren ein weiteres System $S' = \langle D', R'_1, \dots, R'_n \rangle$ mit gleicher Stelligkeit von R_i und R'_i .

Wir sagen S und S' sind *isomorph* ($S \cong S'$) genau dann, wenn es eine Funktion f mit $f : D \rightarrow D'$ gibt, sodass:

- i) f ist bijektiv
- ii) wenn R_i eine k -stellige Relation ist, dann

$$(\forall x_1, \dots, x_k \in D) [R_i(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow R'_i(f(x_1), \dots, f(x_k))].$$

Dabei ist es wichtig zwischen der „reinen“ (abstrakten) Struktur und den Systemen, von denen sie abstrahiert ist, zu unterscheiden. Die reine Struktur ist das Ergebnis einer

² Für eine ausführlichere Diskussion struktureller Eigenschaften von Objekten siehe Korbmacher und Schiemer (2018) oder auch Linnebo (2008)

³ Linnebo und Pettigrew geben ein ähnliches Argument und sagen, dass die intrinsischen Eigenschaften der Objekte diese sind, die sie mit den entsprechenden Objekten anderer isomorpher Systeme teilen. (siehe Linnebo und Pettigrew 2014, S. 271)

Abstraktion von einer Klasse von Systemen, die paarweise isomorph sind. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 269-270) Angenommen R_i ist eine binäre Relation, dann gibt es eine „Übersetzung“ f zu einem anderen System, sodass $f(R_i)$ die Relation im zweiten System ist. Sind m, n zwei Elemente aus dem ersten System und es gilt mR_in , dann gilt $f(R_i)$ (für R_i) zwischen $f(n)$ und $f(m)$. Isomorphie zwischen zwei Systemen wahrt die Struktur. Wir können sagen, dass ein Isomorphismus die Struktur „aufrecht erhält“. (vgl. Shapiro 1997, S. 91)

Wenn wir von Strukturalismus und Abstraktion sprechen, wird immer wieder auf Beispiele der Arithmetik zurückgegriffen, insbesondere auf die natürliche Zahlenstruktur. Dahingehend ist es für die weitere Diskussion von Vorteil, wenn wir uns ansehen, was genau damit gemeint ist, wenn wir über sie sprechen. In kontemporärer Mathematik ist es üblich, die natürliche Zahlen-Struktur mit den Dedekind-Peano-Axiomen zu beschreiben, auf welchen die Arithmetik aufgebaut ist. Herkömmlicherweise werden die Axiome in der Sprache der Logik zweiter Stufe formuliert, mit den beiden nicht-logischen Symbolen „0“ als Konstante (man könnte auch „1“ als initiales Objekt nehmen) und eine Funktion erster Ordnung „s“, als „successor-function“. Wir können folgende drei Axiome verfassen:

$$(A1) \forall x [0 \neq s(x)]$$

$$(A2) \forall x \forall y [(x \neq y) \rightarrow (s(x) \neq s(y))]$$

$$(A3) \forall X \left[\left(X(0) \wedge \forall x (X(x) \rightarrow X(s(x))) \right) \rightarrow \forall x X(x) \right].$$

Wir nennen die Konjunktion dieser drei Axiome PA_2 . (vgl. Reck und Price 2000, S. 343) Wir haben ein Ursprungselement „0“, welches kein Nachfolger einer Zahl ist. Demnach ist „0“ die erste natürliche Zahl. (A2) besagt, dass die Nachfolgerfunktion s injektiv ist. Für jede natürliche Zahl gibt es nur einen einzigen Nachfolger. (A3) garantiert die Geschlossenheit aller Elemente der natürlichen Zahlen. Wenn „0“ ein Element des Systems ist, und ebenfalls alle Nachfolger Elemente des Systems sind, gehören alle Elemente dem System zu. Dies garantiert, dass alle Nachfolger ebenfalls natürliche Zahlen sind. Alle Systeme, die diese Axiome erfüllen, nennen wir natürliche Zahlen-Systeme und sie sind isomorph zueinander.⁴ Shapiro schreibt dazu:

The essence of a natural number is its relations to other natural numbers. The subject

⁴ Wir sagen PA_2 ist *kategorisch*, da alle instanziiierende Systeme isomorph sind. (siehe Reck und Price 2000, S. 344) Eine mathematische Theorie T ist κ -*kategorisch*, wenn T bis auf Isomorphie genau ein Modell der Mächtigkeit κ hat.

matter of arithmetic is a single abstract structure, the pattern common to any infinite collection of objects that has a successor relation with a unique initial object and satisfies the (second-order) induction principle. (Shapiro 1997, S.74)

Nach Shapiro ist der Hauptgegenstand der Arithmetik die abstrakte natürliche Zahlenstruktur, und die eigentliche Essenz der natürlichen Zahlen liegt in ihren strukturellen Beziehungen zueinander. Die Relationen, die zwischen den Positionen in der Struktur vorherrschen, sind damit ganz essenziell.

Wir können uns nun auch andere Systeme überlegen, welche die gleichen strukturellen Gegebenheiten aufweisen, wie etwa die Zermelo-Fraenkel Zahlen. In diesem System gibt es ebenfalls ein initiales Objekt $\emptyset$ und die Nachfolgerfunktion $s : x \mapsto \{x\}$. Wir erhalten dadurch ein System, welches PA_2 erfüllt und somit die gleiche Struktur aufweist. Die Position der Zahl 2 in der Struktur wird gleichermaßen von der natürlichen Zahl 2, wie auch von $\{\{\emptyset\}\}$ ausgefüllt. Dies gilt auch für andere einfach unendliche Systeme, wie die von Neumann-Zahlen. Wenn der Strukturalist oder die Strukturalistin über die Position 2 in der abstrakten Struktur spricht, ist es irrelevant, welches Objekt tatsächlich diese Position einnimmt. Shapiro schreibt, dass es einen Unterschied gibt, ob von der Identität eines Objekts gesprochen wird oder ob wir sagen, welches Objekt die Position einnimmt. Insofern wir über die Position der Zahl 2 in der natürlichen Zahlen Struktur sprechen, und sagen $\{\{\emptyset\}\}$ ist 2, oder $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (von Neumann-Zahlen) ist 2, dann verwenden wir ein prädikatives „ist“; prädikativ im Bezug auf ein System, das diese Struktur exemplifiziert. $\{\{\emptyset\}\}$ nimmt die Rolle der Zahl 2 in dem Zermelo-Fraenkel Zahlensystem und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ die Rolle in den endlichen von Neumann Ordinalzahlen ein. (vgl. Shapiro 1997, S. 83) Wir können unendlich viele solcher einfach unendlichen Zahlensysteme formulieren.

Trotz einer einheitlichen, grundlegenden Philosophie, Mathematik als die Wissenschaft der vorherrschenden Strukturen der Systeme zu verstehen, lässt sich die strukturalistische Debatte jedoch nicht über einen Kamm scheren. Einer der größten Unterschiede in der Literatur besteht darin, ob wir die abstrakten Strukturen als ontologisch verpflichtende, eigenständige Objekte sehen wollen, oder ob der Begriff nur als bloßes „Hilfsmittel“ zur Beschreibung verwendet wird, aber keinen Anspruch auf tatsächliche Existenz erhebt. Charles Parsons schlug vor, dahingehend eine Unterteilung in zwei Hauptrichtungen des Strukturalismus vorzunehmen, die heute immer noch etabliert ist: den *eliminativen* und *non-eliminativen* Ansatz.

Bei der Vielzahl an Literatur zu strukturalistischen Überlegungen ist es oft schwierig, eine klare Linie zwischen den unterschiedlichen Strömungen zu ziehen. Reck und Price haben in einem Artikel in der Zeitschrift *Synthese* im Jahr 2000 eine Unterscheidung in vier Hauptströmungen unternommen, die ich für sehr übersichtlich und angemessen halte. Es sei noch festzuhalten, dass die allgemeine strukturalistisch-mathematische Ansicht relativ neutral sämtlichen metaphysischen und semantischen Fragen gegenüber steht. Für mathematische und wissenschaftliche Zwecke mag dies sogar ein Vorteil sein, philosophisch gesehen interessieren uns die Antworten auf diese Fragen allerdings sehr wohl. (vgl. Reck und Price 2000, S. 347)

Bei den folgenden Ausführungen der verschiedenen strukturalistischen Strömungen erhebe ich keinen Anspruch eine vollständige Beschreibung aller Positionen und deren Formen zu geben. Ich möchte allerdings einige zentrale Unterschiede hervorheben, die für das Verständnis der weiteren Diskussion von Vorteil sein werden.

1.3 ELIMINATIVER STRUKTURALISMUS

Wie wir gesehen haben, sind wir im Strukturalismus vordergründig mit der Investigation von Strukturzusammenhängen beschäftigt. Eine Frage, die die Ansicht verschiedener Strukturalistinnen und Strukturalisten scheidet, ist, ob und wie reine Strukturen unabhängig von den Systemen, die sie exemplifizieren, existieren. Eliminative Strukturalistinnen und Strukturalisten werden es vermeiden, sich auf die Existenz von Strukturen festzulegen. Wenn davon gesprochen wird, dass zwei (oder mehrere) Systeme ein und dieselbe Struktur besitzen, dann meinen sie lediglich, dass sie isomorph sind. Für den eliminativen Strukturalisten existiert die „reine“ Struktur nicht unabhängig von den sie instanziiierenden Systemen. Es macht nur Sinn über diese Struktur zu sprechen, wenn es auch (zumindest) ein System gibt, welche diese strukturellen Eigenschaften aufweisen. Für die natürliche Zahlenstruktur brauchen wir demnach mindestens ein einfach unendliches System, welches die Dedekind-Peano Axiome (PA_2) erfüllt. Wir sehen uns sogleich mit zwei dringenden Fragen konfrontiert: Gibt es genau *ein* privilegiertes natürliches Zahlensystem, oder macht es einen Unterschied, welches wir auswählen? Und, was passiert, wenn wir eine Struktur haben, zu dem es kein instanziiierendes System gibt?

Zu der ersten Frage gibt es zwei gegenüberstehende Ansichten. Der *relativistische* Strukturalismus antwortet, dass zwar jedes Modell, welches PA_2 erfüllt, genauso gut wie jedes andere isomorphe Modell ist, wir allerdings ein beliebiges als „unser“ privilegiertes natürliche Zahlensystem *auswählen*.

Any objects will serve as numbers so long as the arithmetical operations are defined for them and the laws of arithmetic are preserved. (Quine 1969, S. 81)

Für die natürliche Zahlenstruktur brauchen wir nur zwei nicht-logische Symbole zu postulieren: das initiale Element und die Nachfolgerfunktion. Je nachdem welches System wir auswählen, beziehen sich unsere Symbole und alle arithmetischen Aussagen auf dieses festgelegte System. Was somit mit den „natürlichen Zahlen“ (bzw. der natürlichen Zahlen-Struktur) gemeint ist, ist unser spezielles, ausgesuchtes System. (vgl. Reck und Price 2000, S. 249-350) Im Gegensatz zu der relativistischen Ansicht, werden im *universalistischen* Strukturalismus, wenn von natürlichen Zahlen gesprochen wird, *alle* Systeme, die die Dedekind-Peano Axiome erfüllen, miteinbezogen. Wenn wir also über das initiale Element „1“ in der natürlichen Zahlen-Struktur sprechen, meinen wir *alle* initialen Elemente der Modelle, die PA_2 erfüllen. Wir quantifizieren somit über alle möglichen natürlichen Zahlensysteme. Selbst eine arithmetische Formel der Form „ $2 + 3 = 5$ “ ist nicht einfach eine Aussage in einem System, sondern gilt universal in allen Systemen und soll auch so gedacht werden. Reck und Price sprechen hier von einem *Generalisierungsprozess*. (vgl. Reck und Price 2000, S. 356) Generalisiert wird ebenfalls in dem Hinblick, dass nicht nur alle Aussagen in allen isomorphen Systemen gelten, sondern auch der psychologische Vorgang, dass alle Systeme in die Vorstellung miteinbezogen werden.

Bei der relativistischen Ansicht stellt sich die Frage, nach welchen Kriterien ein System ausgesucht werden sollte. Auch wenn es von keiner Relevanz zu sein scheint, welches isomorphe System wir tatsächlich auswählen, mag es doch naheliegen für anschauliche oder pragmatische Zwecke ein dafür passendes auszusuchen. Für den universalistischen Strukturalismus stellt sich diese Frage nicht, weil wir, wenn wir Aussagen in einem System tätigen, immer auch alle anderen isomorphen Systeme miteinbeziehen.

Kommen wir nun zu unserer zweiten Frage: Wie soll der eliminative Strukturalist oder die Strukturalistin antworten, wenn wir eine Struktur vorfinden, für die es eventuell kein instanziiierendes System gibt? Nehmen wir wieder die natürliche Zahlenstruktur her. Die eliminative Ansicht braucht dafür mindestens ein einfach unendliches System, welches PA_2

erfüllt. Können wir die Existenz einer unendlichen Domain einfach voraussetzen? Selbst wenn wir auf physikalische Objekte schauen, ist es nicht garantiert, dass das Universum unendlich viele Objekte aufweist. In der strukturalistischen Literatur wird dieses Problem unter „the problem of model existence“ beschrieben. Gibt es kein solches System, haben wir es mit einer Tautologie von arithmetischen Aussagen φ zu tun, da zugleich φ und $\neg\varphi$ gilt.⁵ (vgl. Linnebo 2017, S. 159 und Reck und Price 2000, S. 358-359)

Mengentheoretische Strukturalisten und Strukturalistinnen können auf dieses Problem eine klare Antwort geben, in dem wir die Mengentheorie als zugrunde liegende Theorie für alle mathematischen Strukturen festlegen. Dies hat einige Vorteile. Zunächst können wir sämtliche natürliche, reelle und komplexe Zahlensysteme rein mengentheoretisch beschreiben. Eine praktische Lösung wäre, Modelle so auszuwählen, dass eine reelle Zahl beispielsweise nur eine besondere komplexe Zahl ist. Aber die Reichweite der Mengentheorie endet nicht hier. Wir können sämtliche mathematische Theorien mit ihr beschreiben und bringen somit alle mathematischen Bereiche „auf einen Nenner“, machen sie vergleichbar. (vgl. Reck und Price 2000, S. S. 351) Wählen wir für die natürliche Zahlenstruktur die Zermelo-Fraenkel Zahlen, können wir uns auf das Unendlichkeitsaxiom berufen. Wir brauchen uns mit dieser Vorgehensweise zu nur einer Art von mathematischen Entitäten verpflichten: Mengen (und eventuell Urelementen bzw. initialen Elementen). Diese Ansicht wird ebenfalls der eliminativen Richtung zugeordnet, da wir nur mengentheoretische Objekte einführen müssen, und jedes isomorphe System gleichwertig verwendet werden kann. Wir benötigen keine Postulation einer abstrakten Struktur, die Struktur wird nicht als ein *sui generis* Objekt verstanden. (vgl. Reck und Schiemer 2019, Hellman und Shapiro 2019, S. 37)

Jedoch werfen Reck und Price in ihrem Artikel einige Fragen bezüglich dieser strukturalistischen Ansicht auf. Wieso können wir die Existenz von Mengen einfach voraussetzen, und wenn wir das tun, warum ist das nicht auch für andere mathematische Objekte möglich? Einige Philosophen (darunter Goddman, Field und frühere Werke von Quine) fanden einen Ausweg mit einem *nominalistischen* Ansatz. Hierbei wird die Existenz von jeglichen mathematischen Objekten zurückgewiesen. Natürlich treten bei einer solchen Ansicht wieder andere Probleme auf, darunter wie wir eine unendliche Menge finden sollen. (vgl. Reck und Price 2000, S. 352)

⁵ In der Literatur zu strukturalistischen Debatte, wird dieses Problem auch als „non-vacuity problem“ beschrieben. (vgl. Reck und Price 2000, S. 359)

Ein weiterer Ansatz um das Problem der „model existence“ zu umgehen, stellt eine modale Variante des Strukturalismus dar, beschrieben durch Hellman in *Mathematics without numbers* aus 1989 und „Structuralism without Structures“ 1996. Für Hellman sollten arithmetische Aussagen der Form „ $2 + 3 = 5$ “ folgendermaßen verstanden werden:

Notwendigerweise, für alle relationalen Systeme M , wenn M ein Modell der Dedekind-Peano Axiome, dann $2_M + 3_M = 5_M$.

Um einer Tautologie vorzubeugen, behaupten wir außerdem:

Es ist *möglich*, dass ein M existiert, das die Dedekind-Peano Axiome erfüllt

(vgl. Reck und Schiemer 2019, Hellman und Shapiro 2019, S. 63)

Anstatt über alle Systeme quantifizieren wir über alle *möglichen* Systeme. Welch Einwände man auch gegen diese Vorgehensweise von mathematischer Wahrheit haben kann, sticht einer für mich dabei besonders heraus. Wenn wir der modalen Denkweise folgen, sind alle mathematischen Wahrheiten eigentlich modale Wahrheiten. Auch wenn in der mathematischen Praxis mit Notwendigkeiten gearbeitet wird, wollen wir jegliche Aussagen in der Mathematik nur als Sätze über Möglichkeiten sehen?

Alle bisher beschriebenen Ansätze haben trotz der Unterschiede jedoch zwei essenzielle Dinge gemeinsam. Einerseits wird die Existenz der abstrakten Struktur unabhängig von den instanziiierenden Systemen zurückgewiesen, andererseits versuchen alle Positionen metaphysischen und ontologischen Fragen zu den Strukturen entgegenzukommen. Wir können diesen Formen somit die Klassifizierung des „*philosophischen* Strukturalismus“ oder „*metaphysischen* Strukturalismus“ zukommen lassen. Dies unterscheidet sich von einer strukturalistischen Ansicht, die näher an mathematischer Praxis orientiert ist, den *methodologischen* Strukturalismus. (vgl. Reck und Schiemer 2019)

Wie der Name schon vermuten lässt, ist die Methodologie in der Mathematik von vordergründiger Bedeutung. Es werden strukturelle Zusammenhänge in der Mathematik studiert, jegliche intrinsischen Eigenschaften der mathematischen Objekte werden jedoch zurückgewiesen. Nach Reck und Price gehören dazu jegliche Formen eines *formalistischen* Strukturalismus. Sie geben, im Gegensatz zu den „metaphysischen“ bzw. „philosophischen“ Formen, „dünne“ Antworten auf Fragen zur Referenz und Existenz von Objekten, entziehen sich also jeglichem Existenzanspruch. Manche Mathematikerinnen und Mathematiker werden behaupten, dass wir es in der Mathematik mit einer reinen „Formelsprache“ zu tun haben, sich

deren Symbole also auf „nichts“ wirklich beziehen. Eine andere Möglichkeit folgt einem mathematischen *Deduktivismus*, also zu sagen, was die Mathematik tatsächlich untersucht sind nicht die Objekte und deren Eigenschaften, sondern mathematische Schlussfolgerungen. Es gilt zu analysieren (mit der vorhandenen mathematischen Sprache) was (und was nicht) wir aus fundamentalen Prinzipien folgern können. (vgl. Reck und Price 2000, S. 347) Es stellt sich jedoch zugleich die Frage, welche Prinzipien das sein und auf was für Objekte sich die Schlussfolgerungen beziehen sollen.

1.4 NON-ELIMINATIVER STRUKTURALISMUS

Im Gegensatz zu der eliminativen Ansicht, sehen Vertreterinnen und Vertreter des non-eliminativen Strukturalismus die Strukturen, die von Systemen instanziiert werden, als eigenständige Entitäten. Ein Begründer der non-eliminativen Ansicht ist Stewart Shapiro, der die strukturalistische Debatte deutlich prägte. Ein Zitat von ihm dazu aus seinem Werk *Philosophy of Mathematics: Ontology and Structure* haben wir bereits kennengelernt:

The subject matter of arithmetic is a single abstract structure, the pattern common to any infinite collection of objects that has a successor relation with a unique initial object and satisfies the (second-order) induction principle. (Shapiro 1997, S. 72)

Es gibt eine gemeinsame Struktur, die von zueinander isomorphen Systemen ausgefüllt wird. Die betrachtete Struktur ist hier eine „neue“ abstrakte Entität, dessen Eigenschaften wir untersuchen können. Wenn wir über die natürlichen Zahlen sprechen, meinen wir damit eigentlich nicht die instanziiierenden Systeme, sondern die abstrakte Struktur. Wenn ich von der Zahl „2“ spreche, meine ich nicht das Objekt in einem bestimmten System, oder die zweite Position in allen Systemen, die die Dedekind-Peano Axiome erfüllen, sondern die *sui generis* zweite Position in der natürlichen Zahlenstruktur.

Dies geht einher mit Benacerrafs Ansicht, dass die natürlichen Zahlen nicht mit den Elementen verschiedener Systeme identifiziert werden sollten, sondern sie die entsprechenden Positionen in der Struktur sind. Resnik geht noch einen Schritt weiter zu sagen, dass mathematische Objekte eigentlich nur Positionen in der Struktur sind:

In mathematics, I claim, we do not have objects with an „internal“ composition arranged in structures, we have only structures. The objects of mathematics [...]

are structureless points or positions in structures. As positions in structures, they have no identity or features outside a structure. (Resnik 1981, S. 530)

Dabei sei zu erwähnen, dass Resnik im Einklang zur dritten von Reck und Price formulierten Bedingung zur Definition des Strukturalismus steht. Mathematische Objekte sind nach Resnik ebenfalls „nur“ Positionen in der Struktur. Zahlenaussagen der Form „0“, „1“, „2“, usw. sind damit singuläre Terme, die auf die entsprechenden Positionen in der Struktur verweisen.⁶

Shapiro (1997) nimmt dabei eine Differenzierung vor, wie wir die Positionen in den Strukturen verstehen können. Wenn wir über Positionen in Strukturen im Kontext von ein oder mehreren diese Struktur instanziiierenden Systemen sprechen, nennen wir diese Perspektive, nach Shapiro, „places-are-offices perspective“. Die Positionen in der abstrakten Struktur sind „Offices“, die von verschiedenen Objekten eingenommen werden können. Die Offices dienen lediglich als „Platzhalter“ für die mathematischen Objekte, erheben jedoch keinen eigenständigen Existenzanspruch. Hiefür brauchen wir eine zugrunde liegende Menge an Objekten, die diese „Offices“ ausfüllen können. Shapiro meint sogar, dass Positionen anderer Strukturen diese Plätze einnehmen könnten. Im Kontrast dazu steht die „places-are-objects“ Perspektive, bei der Positionen in der Struktur als eigenständige Objekte gesehen werden. Hierbei werden Aussagen über die jeweilige Struktur getroffen, unabhängig davon, welche Systeme sie realisieren. Wenn wir die natürlichen Zahlen mit der Struktur identifizieren wollen, wie zuvor beschrieben, müssen wir, nach Shapiro, einer „places-are-objects“ Perspektive folgen. (vgl. Shapiro 1997, S. 82-83)

Sehen wir uns noch etwas genauer an, wie wir die Natur einer abstrakten Struktur verstehen wollen. Nach Shapiro sind Strukturen „a one-over-many“. Mehrere Systeme können ein und dieselbe Struktur exemplifizieren. Die betrachtete Struktur ist hier eine „neue“, abstrakte Entität, dessen Eigenschaften wir untersuchen können. In diesem Sinne ist eine Struktur ein „Universal“, da sie über alle möglichen instanziiierende Systeme (die „particulars“)

⁶ Wir sehen hier Uneinigkeiten unter Philosophinnen und Philosophen bezüglich der Eigenschaften, die mathematische Objekte aufweisen können. Ansichten wie die von Resnik oder Benacerraf, erkennen mathematischen Objekten jegliche nicht-strukturellen bzw. externen (außerhalb der Struktur) Eigenschaften ab. Die Forderung der Abstraktion von jeglichen nicht-strukturellen Eigenschaften mathematischer Objekte, hat ihre Wurzeln bei Dedekind. Er schlägt vor alle „fremden“ Eigenschaften zu eliminieren und nur deren strukturellen Eigenschaften beizubehalten. Jedoch haben wir gesehen, dass Objekte mitunter auch andere Eigenschaften außerhalb der Struktur haben können. (siehe Reck 2003, S. 406-407) Russell argumentiert, dass wenn wir die Existenz mathematische Objekte voraussetzen wollen, müssen sie eine intrinsische Natur haben. (siehe Russell 1903, S. 242) Das selbe gilt für die Strukturen an sich. Wie zuvor besprochen, können wir auch nicht-strukturelle Eigenschaften finden. Der non-eliminative Strukturalismus muss auf solche Einwände Antworten finden.

quantifiziert ist. Verschiedene Objekte („tokens“) teilen einen gemeinsamen „type“. (vgl. Shapiro 1997, S. 84) Shapiro schreibt außerdem:

[...] a structure is a one-over-many. [...] a structure is a pattern, the form of a system.

A system, in turn, is a collection of related objects. Thus, structure is to structured as pattern is to patterned, as universal is to subsumed particular, as type is to token.

(Shapiro 1997, S. 84)

Shapiro argumentiert, folgend nach Plato, dass die Universalien vorrangig und unabhängig von den instanziiierenden Individuen bestehen. Ein häufig angeführtes Beispiel ist das Merkmal der roten Farbe: auch wenn es keine Objekte gibt, die diese Farbe aufweisen, würde die Klassifikation „die Farbe rot“ trotzdem existieren. Diese Form des Strukturalismus wurde unter dem *ante rem* Strukturalismus bekannt. (vgl. Shapiro 1997, S. 84) Im Gegensatz dazu steht der *in re* Strukturalismus, bei dem die einzelnen Systeme der Struktur vorausgehen. In der strukturalistischen Debatte scheint es üblich zu sein den *ante rem* Strukturalismus mit der non-eliminativen Position gleich zu setzen und analog *in re* mit der eliminativen. Diese Klassifikation ist jedoch etwas vorschnell getroffen. Wenn wir beispielsweise Parsons Strukturalismus betrachten, sehen wir, dass wir eine non-eliminative Position einnehmen können, ohne sich einem Realismus à la Shapiro zu verpflichten. (vgl. Reck und Schiemer 2019)⁷ Shapiro selbst nimmt eine genauere Unterscheidung der beiden realismusorientierten Positionen innerhalb des non-eliminativen Strukturalismus vor. So kann ich (folgend Aristoteles) einen *in re* Realismus folgen, dahingehend ich annehme, dass Strukturen existieren, sie jedoch ontologisch von den Systemen abhängen. Negiere ich alle natürlichen Zahlensysteme, muss ich auch die zugehörige Struktur aufgeben. (vgl. Shapiro 2018) Wir bemerken, dass wir hier wieder dem Einwand der „model existence“ ausgesetzt sind.

Sowohl für Resnik als auch für Shapiro ist die Isomorphie zwischen Systemen essenziell für ihre Ansicht des Strukturalismus. Wie gehen wir allerdings mit Strukturen um, die instanziiierende Systeme besitzen, die nicht zueinander isomorph sind? Manche Mathematikerinnen und Mathematiker lockern dafür den Begriff der Struktur etwas. Shapiro liefert eine andere Methode. Er unterteilt die Systeme in algebraische und nicht-algebraische Theorien. (Mathematische Systeme wie Gruppen, Ringe und Körper sind Teil der algebraischen Theorien und besitzen oft nicht-isomorphe Instanzierungen für die gleiche Struktur.) Laut Resnik und Shapiro sollten algebraische Theorien in einer anderen Weise

⁷ Siehe dafür Parsons 1990 und 2008

gehandhabt werden als nicht-algebraische. Ihre Ansicht des Strukturalismus findet hauptsächlich auf nicht-algebraischen Theorien Anwendung, wie etwa auf die Arithmetik. (vgl. Reck und Schiemer 2019 und Horsten 2019)

Ein Merkmal des non-eliminativen Strukturalismus (vor allem für dessen *ante rem* Variante) ist, dass mathematische Objekte von der zugrunde liegenden Struktur abhängig sind. Positionen existieren nur in der Struktur. Demnach gehen Strukturen den Positionen ontologisch voraus. Die Zahl „3“ beispielsweise, ist ontologisch abhängig von der natürlichen Zahlenstruktur. Shapiro argumentiert, dass mathematische Objekte (wie auch physikalische Objekte) auch voneinander abhängig sind. (Damit folgt er einer platonistischen Ansicht von Objekten.) Somit ist die Zahl „3“ beispielsweise auch von der Zahl „2“ und „4“ abhängig. Dieses Merkmal mathematischer Objekte in einer non-eliminativ strukturalistischen Ansicht, wird mit dem „Dependence Claim“ beschrieben. (vgl. Linnebo 2008, S. 66-68) Einige Philosophinnen und Philosophen darunter Linnebo, MacBride und Hellman haben jedoch einige Einwände gegen diese Form der Abhängigkeit. Eine davon ist, wie genau wir die „Abhängigkeit“ definieren wollen, da zirkuläre Abhängigkeit zwischen zwei Objekten nicht möglich sein kann. (vgl. Linnebo 2008, S. 68-69) MacBride argumentiert, dass wenn wir Objekte *in re* sehen, also ontologisch abhängig von der Struktur, sind wir mit einer „Unvollständigkeit“ mathematischer Objekte konfrontiert, was sich als ungünstig zur mathematischen Praxis herausstellt.^{8 9}

1.5 EINE NEUE PERSPEKTIVE FÜR DEN STRUKTURALISMUS?

Ein Ansatz, der in den letzten zwanzig Jahren mehr und mehr Aufmerksamkeit erregte, ist eine strukturalistische Position, welche auf der Kategorientheorie gründet. Kategorientheorie ist ein Zweig der Mathematik, der in den 1940er Jahren vordergründig von Eilenberg und McLane entwickelt wurde. Die kategorien-strukturalistische Debatte gründet auf diesen Entwicklungen und wurde unter anderem von Awodey und Landry vorangetrieben. (vgl. Reck

⁸ Für eine ausführlichere Beschreibung zum Problem der „Dependence Claim“ siehe u.a. Linnebo (2008) und MacBride (2005)

⁹ Bei der „Unvollständigkeit“ (engl.: „incompleteness“) der Objekte ist gemeint, dass es nur ein bestimmtes Spektrum an Prädikaten gibt, die auf die Objekte Anwendung finden und dessen Wahrheitsgehalt wir untersuchen können. (vgl. Parsons 1990, S. 334)

und Schiemer 2019) Inwiefern können wir einen Strukturalismus auf der Kategorientheorie gründen?

In der Kategorientheorie teilen wir, wie der Name schon sagt, eine Menge von Objekten in verschiedene Kategorien ein. Ein *Kategorie* C besteht aus einer Domain an Objekten $A, B, C, \dots$, Morphismen zwischen den Objekten $f, g, h, \dots$ (mit $f: A \rightarrow B, \dots$) und Kompositionen von Morphismen $f \circ g: A \rightarrow C$. Kompositionen sind assoziativ. Jedes Element B verfügt über die Identität 1_B für die gilt $f \circ 1_B = f$.

Mit dem kategorischen Isomorphismus können wir ausdrücken, dass zwei Objekte die selbe Struktur aufweisen. In jeder Kategorie C ist ein Morphismus $f: A \rightarrow B$ ein *Isomorphismus*, genau dann, wenn für $g: B \rightarrow A$ gilt: $f \circ g = 1_B$ und $g \circ f = 1_A$. Wir schreiben dafür $A \cong B$ und sagen A und B sind isomorph. (vgl. Awodey 1996, S. 212-214) Eine Eigenschaft P eines Objektes A in der Kategorie C ist strukturell, wenn sie invariant unter dem Isomorphismus in C ist, also wenn: $P(A) \leftrightarrow P(f(A))$, für alle Isomorphismen f . (vgl. Reck und Schiemer 2019)

Kategorientheorie bietet uns somit jegliche Rahmenbedingungen Mathematik in strukturalistischer Hinsicht zu verstehen. Ein großer Vorteil sticht uns sogleich ins Auge: Mit den eben beschriebenen isomorphen Abbildungen in einer Kategorie, bietet uns Kategorientheorie eine klare Antwort, wie wir strukturelle von nicht-strukturellen Eigenschaften unterscheiden können. Daraufhin argumentiert Awodey:

Since all categorical properties are thus structural, the only properties which a given object in a given category may have, qua object in that category, are structural ones.

(Awodey 1996, S. 214)

Einige Einwände können allerdings auch zu dieser Position gefunden werden. Ich möchte hier nur zwei zentrale Beispiele anführen. Die Kategorientheorie soll uns als eine grundlegende Theorie zur Beschreibung mathematischer Strukturen dienen. Ihre Stärke liegt in der Unabhängigkeit von anderen zugrunde liegenden Theorien, wie der Mengentheorie. Einige Philosophen, darunter Hellman, Linnebo und Pettigrew, argumentieren, dass die Kategorientheorie allerdings nicht unabhängig von der Mengentheorie ist. Außerdem, aufgrund ihrer Wurzeln in der Algebra, fehlt es der Kategorientheorie an einigen essenziellen Axiomen, wie dem Existenzaxiom, die ein fundamentales System allerdings aufweisen müsste. (vgl. Reck und Schiemer 2019)

Nach der Einführung und grundlegenden Erklärungen bezüglich strukturalistischer Positionen, möchte ich mich dem Begriff nun auch historisch annähern, um noch ein vollständigeres Bild der philosophischen Strömung zu zeichnen. Die Wurzeln von strukturalistischen Überlegungen reichen bis zu Dedekind zurück. Seine Erläuterungen zu der natürlichen Zahlenreihe in *Was sind und was sollen die Zahlen?*, sowie die dedekindschen Schnitte zur Formulierung der reellen Zahlen in *Stetigkeit und irrationale Zahlen* inspirierten die strukturalistische Strömung in der Mathematik maßgeblich. (vgl. Shapiro 1997, S. 14)

Um die Wurzeln der strukturalistischen Strömung näher zu untersuchen widme ich mich diesen beiden Hauptwerken Dedekinds. Dabei werden zentrale Punkte herausgearbeitet, die sowohl heutige mathematisch philosophische Ansichten, als auch den Strukturalismus vielfach prägten. Ich werde mich außerdem auch auf Argumentationen Recks in seiner Veröffentlichung „Dedekind’s Structuralism: An Interpretation And Partial Defense“ stützen, um Schlüsselstellen in Dedekinds Werken zu argumentieren und logische, semantische und metaphysische Aspekte zu beleuchten.

1.6 DEDEKINDS BESCHREIBUNGEN ZUR ZAHL IN STRUKTURALISTISCHER PERSPEKTIVE

Viele der heutigen Anhänger der strukturalistischen Position sehen den Ursprung der strukturellen Überlegungen bei Dedekind. Hellman schreibt dazu:

The idea that mathematics is concerned principally with the investigation of structures of various types in complete abstraction from the nature of individual objects making up those structures is not a novel one, and can be traced at least as far back as Dedekind’s classic essay, “Was sind und was sollen die Zahlen?”

(Hellman 1989, S. vii)

Dedekind betrachtet in diesem Werk das natürliche Zahlen-System mit der Abstraktion von nicht relevanten Eigenschaften der einzelnen Objekte. Er schreibt dazu in Aussage 73:

73. Erklärung. Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur ihre Beziehungen auffasst, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zu einander gesetzt sind, so

heißen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen, [...] In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraction) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen. (Dedekind 1923, S. 21)

In dieser Textstelle stecken bereits viele essenzielle Passagen. Zum Einen spricht Dedekind von Abstraktion mit der „Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt“, sowie, dass er „von der Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht“ und nur ihre Eigenschaften bezüglich der Beziehungen zueinander beibehält. Die reinen strukturellen Gegebenheiten und die Anordnung der Elemente nennt er „natürliche Zahlen“ oder „Ordinalzahlen“. Er impliziert damit, dass den natürlichen Zahlen eine allgemeine Struktur innewohnt, die von jeglichen Eigenschaften der Zahlen außerhalb der Struktur getrennt zu betrachten ist. Er nennt die Zahlen außerdem eine „freie Schöpfung des menschlichen Geistes“ und deutet damit an, dass Zahlen abstrakte Objekte sind, die nur in der menschlichen Vorstellung existieren. Und weiter, schreibt er:

Die Beziehungen oder Gesetze, welche [...] in allen geordneten einfach unendlichen Systemen immer dieselben sind, wie auch die den einzelnen Elementen zufällig gegebenen Namen lauten mögen [...], bilden den nächsten Gegenstand der *Wissenschaft von den Zahlen* oder der *Arithmetik*. (Dedekind 1923, S.21)

Er weist somit bereits auf allgemein formulierte „Axiome“ hin (auch wenn er diesen Begriff noch nicht verwendet), welche die allgemeine Struktur, die alle geordneten, einfach unendlichen Systeme teilen, beschreiben. Dabei ist es egal welchen „Namen“ wir den einzelnen Elementen geben. In moderner strukturalistischer Ansicht kann dies so interpretiert werden, dass verschiedene Objekte die Positionen der Struktur ausfüllen können, solange das instanziiierende System die strukturellen Beziehungen und Gesetze aufweist. Dieses Konstrukt der natürlichen Zahlen (also die Struktur der natürlichen Zahlen, auch wenn er diesen Begriff ebenfalls noch nicht verwendet) nennt er den Gegenstand der Arithmetik. Dabei sieht er alle einfach unendlichen Systeme als „ähnlich“ zueinander.

132. Satz. Alle einfach unendlichen Systeme sind der Zahlenreihe N und folglich (nach 33) auch einander ähnlich. [...]

133. Satz. Jedes System, welches einem einfach unendlichen System und folglich (nach 132, 33) auch der Zahlenreihe N ähnlich ist, ist einfach unendlich.

(Dedekind 1923, S. 40-41)

Dedekind ist hier nicht gänzlich eindeutig über den hier involvierten Isomorphismus zwischen zwei Systemen. (vgl. Reck 2003, S. 377) In Satz 26 definiert er eine „ähnliche“ Abbildung, wenn zwei verschiedene Elemente a, b eines Systems S auch verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$ bzw. $b' = \varphi(b)$ haben. Dies gilt für jedes Element von S . Analog bei der inversen Funktion, entspricht jedem Bild nur ein Element in der Definitionsmenge $\bar{\varphi}(s') = s$. (vgl. Dedekind 1923, S. 8-9) Was Dedekind hier beschreibt ist eine injektive Abbildung; er gibt uns allerdings keine weiteren Hinweise (beziehungsweise formuliert es nicht aus) zur Surjektivität (jedem Element in der Bildmenge entspricht *mindestens* ein (Ur-)Element der Definitionsmenge). Für einen Isomorphismus würde man allerdings eine bijektive Abbildung (injektiv + surjektiv) brauchen. Was Dedekind hier eigentlich beschreibt, ist, dass die Bedingungen (Axiome) für die natürlichen Zahlen *kategorisch* sind.¹⁰ (vgl. Reck 2003, S. 377 und Hellmann 1989, S. 38) Sehen wir uns dazu zunächst einmal an wie Dedekind die natürliche Zahlenreihe einführt:

71. Erklärung. Ein System N heißt einfach unendlich, wenn es eine solche ähnliche Abbildung φ von N in sich selbst gibt, dass N als Kette (44) eines Elementes erscheint, welches nicht in $\varphi(N)$ enthalten ist. Wir nennen dies Element, das wir im Folgenden durch das Symbol 1 bezeichnen wollen, das Grundelement von N und sagen zugleich, das einfach unendliche System N sei durch diese Abbildung φ geordnet. [... D]as Wesen eines einfach unendlichen Systems N in der Existenz einer Abbildung φ in N und eines Elementes 1, die den folgenden Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ genügen:

- α . $N' \supset N$.
- β . $N = 1_0$
- γ . Das Element 1 ist nicht in N' enthalten.
- δ . Die Abbildung φ ist ähnlich.

(Dedekind 1923, S. 20)

Hier erkennen wir sehr deutlich die Vorläufer der Dedekind-Peano Axiome. Weiters schreibt Dedekind noch, dass in jedem unendlichen System S ein einfach unendliches System N enthalten ist. (vgl. Dedekind 1923, S. 20) Alles deutet bereits auf ein Verständnis des natürlichen Zahlen-Systems als allgemein beschreibbare Struktur hin. Dazu noch ein Zitat von Dedekind:

¹⁰ Eine mathematische Theorie T ist κ –*kategorisch*, wenn T bis auf Isomorphie genau ein Modell der Mächtigkeit κ hat. Dies bedeutet für die natürliche Zahlenstruktur, dass alle einfach unendlichen Systeme, welche die Dedekind-Peano Axiome erfüllen, isomorph zueinander sind.

134. Bemerkung. Zuzufolge der beiden vorhergehenden Sätze 132, 133 bilden alle einfach unendlichen Systeme eine Klasse im Sinne von 34. Zugleich leuchtet mit Rücksicht auf 71, 73 ein, daß jeder Satz über die Zahlen, d.h. über die Elemente n des durch die Abbildung φ geordneten einfach unendlichen Systems N , und zwar jeder solche Satz, in welchem von der besonderen Beschaffenheit der Elemente n gänzlich abgesehen wird und nur von solchen Begriffen die Rede ist, die aus der Anordnung φ entspringen, ganz allgemeine Gültigkeit auch für jedes andere durch eine Abbildung θ geordnete einfach unendliche System Ω und dessen Elemente v besitzt, und daß die Uebertragung von N auf Ω (z.B. auch die Uebersetzung eines arithmetischen Satzes aus einer Sprache in eine andere) durch die in 132, 133 betrachtete Abbildung ψ geschieht, welche jedes Element n von N in ein Element v von Ω , nämlich in $\psi(n)$ verwandelt. Dieses Element v kann man das n -te Element von Ω nennen, und hiernach ist die Zahl n selbst die n -te Zahl der Zahlenreihe N .

(Dedekind 1923, S. 42-43)

Dedekind spricht von der Einteilung in Klassen von ähnlichen Systemen. Laut seiner Erklärung 34 können alle Systeme in eine gemeinsame Klasse eingeteilt werden, die (nach seiner Definition einer ähnlichen Abbildung) einem Repräsentanten der Klasse ähnlich sind. (vgl. Dedekind 1923, S. 10) Jeder Satz in einem einfach unendlichen System, welcher nur die strukturellen Gegebenheiten voraussetzt, trifft auch für jedes andere einfach unendliche System zu. Wichtig dabei ist, dass von der „besonderen Beschaffenheit der Elemente n gänzlich abgesehen wird“. Jedes einfach unendliche System gehört zur gleichen Klasse und folgt den gleichen arithmetischen Sätzen. Wichtig sind nur solche Eigenschaften, die aus der Anordnung φ hervorgehen. Wir können somit zu Sätzen gelangen die „ganz allgemeine Gültigkeit“ besitzen. Das hört sich schon sehr nach modernen Aussagen zu strukturellen Eigenschaften an. Weiters kann ein System mit einer ähnlichen Abbildung in ein anderes einfach unendliches System (und eventuell in eine andere arithmetische Sprache) übertragen werden. Was Dedekind hiermit behauptet ist dies: alle einfach unendlichen Systeme sind, vom strukturellen Gesichtspunkt her, äquivalent. Jedes einzelne Element in einem jeden solchem System nimmt die gleiche Rolle und Position in der Struktur ein. Reck interpretiert die Passage dahingehend, dass Dedekinds *kategorisches* Verständnis von „einfach unendlich“ *logische* Äquivalenz aller zugehörigen Modelle impliziert. (vgl. Reck 2003, S.377-378) Es ist einfach zu sehen, wie sehr Dedekinds Aussagen mit strukturalistischen Auffassungen übereinstimmen. Dedekind schuf ein neues Verständnis von strukturellen Zusammenhängen in mathematischen Modellen.

1.6.1 WEITERE AUSFÜHRUNGEN UND PHILOSOPHISCHE ÜBERLEGUNGEN ZU DEDEKIND

Zunächst ist festzuhalten, dass Dedekind seine Bedingungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für einfach unendliche Systeme nicht „Axiome“ nennt und, streng gesehen, Modelle nicht im Sinne einer uninterpretieren, formalen Sprache sieht. Er beschreib eher ein *Konzept* (bzw. einen Begriff), unter welches verschiedene Systeme fallen. Reck interpretiert Dedekinds Vorgehensweise nach einem konzeptuellen Ansatz. Dahingehend unterscheidet er sich von kontemporären strukturalistischen Ansichten. (vgl. Reck 2003, S. 378 und Yap 2009, S. 166)

Weiters bedient sich Dedekind nicht des „Unendlichkeitsaxioms“ und versucht stattdessen mit seinem Theorem 66 zu beweisen, dass unendliche Systeme existieren. Sein berühmtes Zitat dazu: „Meine Gedankenwelt, d.h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich.“ (Dedekind 1923, S. 17) Jeder Gedanke über einen Gedanken in S ist wieder Element von S , und so weiter. Aus heutiger Sicht stellt sich der Beweis als problematisch dar, da einerseits psychologische Überlegungen miteinbezogen werden, sowie *Russell's Paradox*¹¹ darauf Anwendung findet.¹²

Unter Beachtung der dargelegten Passagen aus „Was sind und was sollen die Zahlen?“ könnte man Dedekinds Verständnis von Abstraktion und den natürlichen Zahlen ebenfalls psychologisch deuten. Reck schreibt dazu:

The psychologism in question involves one or both of the following theses: (i) that the “abstraction” and the “creation” Dedekind talks about are fundamentally psychological processes; (ii) that numbers, as the result of such processes, turn out to be psychological, or mental, objects. (Reck 2003, S. 387)

Wenn Zahlen mentale Dinge sind, entspringen sie allerdings menschlicher Geisteskraft und haben somit immer einen Urheber, nämlich den, der sie denkt. Kann es sein, dass jeder Mensch sein eigenes Modell der natürlichen Zahlen denkt? Laut Reck ist dies nur möglich, wenn alle diese Modelle auch *isomorph* sind. Außerdem müssten Menschen in der Lage sein unendliche viele Objekte denken zu können. (vgl. Reck 2003, S. 388) Ob Dedekind seine Vorgehensweise tatsächlich rein psychologisch verstanden hat, lässt Zweifel übrig. Zum Einen spricht er in dem Vorwort zu *Was sind und was sollen die Zahlen?* von einem logischen

¹¹ Kurz erklärt: Russell formulierte eine Klasse (bekannt als Russell-Klasse), mit der sich ein logisches Paradoxon ergibt, als die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten. Das Paradoxon resultiert daraus, dass die Menge sich gleichzeitig selbst enthalten, wie nicht enthalten müsste. Eine genauere Ausführung des Paradoxons findet sich auf den Seiten zu Problemen mit Freges Abstraktionsprinzipien.

¹² Für eine ausführlichere Diskussion von Dedekinds Beweis von Theorem 66 siehe Sieg und Schlimm (2005) S. 146-150

Aufbau der Wissenschaft über die Zahlen, zum Anderen davon, dass wir das „Reich der Zahlen“ mithilfe unserer Fähigkeit Dinge auf Dinge zu beziehen untersuchen können. (vgl. Dedekind 1923, iii-iv) Mit psychologischen Prozessen könnte er somit einfach unsere Vorgehensweise wie wir denken und Schlüsse ziehen gemeint haben. Er ist sich dessen bewusst, dass Leser seiner Schrift bereits Vorstellungen von den natürlichen Zahlen haben. Er schreibt dazu in seinem Vorwort:

Ich erblicke dagegen gerade in der Möglichkeit, [...] einen überzeugenden Beweis dafür, dass [der] Besitz oder der Glaube an die [natürlichen Zahlen] niemals unmittelbar durch innere Anschauung gegeben, sondern immer nur durch eine mehr oder weniger vollständige Wiederholung der einzelnen Schlüsse erworben ist.

(Dedekind 1923, v)

Dies gibt Anlass anzunehmen, dass Dedekinds Zugang zu den natürlichen Zahlen nicht rein psychologisch ist, sondern die logischen Schlüsse ganz essenziell sind. Er sieht die natürlichen Zahlen beziehungsweise die Arithmetik als einen Teil der Logik und sein Konzept der Zahl für „gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit“. (vgl. Dedekind 1923, iii) Sieg und Schlimm (2005) argumentieren ebenfalls gegen eine zu psychologische Interpretation von Dedekinds Abstraktionsvorgang. Die Begriffe und Eigenschaften, die aus $\varnothing$ entspringen, sowie die Gesetze, die wir aus den Axiomen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ableiten können, erhalten wir durch reine Logik, auch wenn Dedekind den involvierten logischen Vorgang nicht explizit angibt. (vgl. Sieg und Schlimm 2005, S. 154-155) Ich werde auf diese Überlegungen zum Verständnis von Zahl und Abstraktionsprozessen noch näher in den Kapiteln zur Abstraktion eingehen. Zunächst noch ein letzter wichtiger Punkt für die strukturalistische Debatte: Was versteht Dedekind genau unter den natürlichen beziehungsweise den reellen Zahlen?

In *Stetigkeit und irrationale Zahlen* führt er die reelle Zahlenreihe mithilfe von dedekindschen Schnitten ein. Ein Schnitt ist die Einteilung eines Zahlensystems in zwei Klassen (A_1, A_2) in der jede Zahl in der Klasse A_1 kleiner ist als jedes Element in der Klasse A_2 . Etwas später schreibt er:

Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl α , welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definiert ansehen; wir werden sagen, daß

die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder daß sie diesen Schnitt hervorbringt.

(Dedekind 1965, S. 21)

Dedekind kreiert „neue“ Objekte, irrationale Zahlen, jedoch setzt er diese nicht gleich mit seinem Schnitt. Vielmehr werden sie durch diesen Schnitt definiert, beziehungsweise die neue Zahl „entspricht“ diesem Schnitt. Es gibt auch Schnitte für die rationalen Zahlen, mit der Ergänzung durch die irrationalen Zahlen möchte er die *Stetigkeit* der Zahlenreihe erreichen. Er sieht diese neu „erschaffene“ Menge als die reellen Zahlen an. Dies sieht Dedekind ebenfalls bei den natürlichen Zahlen vor. Dazu schreibt er in einem Brief an Weber:

Möchte man deinen Weg einschlagen [...] so möchte ich doch rathen, unter Zahl (Anzahl, Cardinalzahl) lieber nicht die Classe (das System) aller einander ähnlichen Systeme selbst zu verstehen, sondern etwas Neues (dieser Classe entsprechendes), was der Geist erschafft.

(Dedekind 1932, S. 489)

In demselben Brief schreibt er, dass er den Schnitt auf keinen Fall mit den rationalen Zahlen identifizieren möchte und weiters, dass die Schnitte über Eigenschaften verfügen, die den entsprechenden Zahlen nicht innewohnen. Wenn wir die neuen Zahlen mit den Systemen an Objekten, die sie definieren, gleichsetzen, werden diese zusätzliche Eigenschaften aufweisen, die nichts mehr mit der Struktur zu tun haben, was Dedekind offensichtlich vermeiden wollte. Der „Schnitt“ legt genau alle strukturellen Eigenschaften und Relationen der reellen Zahl fest. (vgl. Yap 2009, S. 165) Wir sollten Dedekinds Verständnis von der natürlichen und reellen Zahlenreihe somit dehingehend deuten, dass wir den Fokus auf die Beziehung der einzelnen Elemente zueinander legen. (vgl. Reck 2003, S. 386-387) Für Dedekind gibt es *ein* distinguiertes natürliches, wie auch reelles Zahlen-System.

In einer Veröffentlichung nach *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, formuliert Dedekind drei Kriterien, die die Definition von neuen Objekten erfüllen muss:

- 1) Wenn die Definition neuer Objekte in einer zugrundeliegenden Domain vornehmen, darf die Definition sich nur den Eigenschaften (bzw. den „Phänomenen“) dieser Domain bedienen.
- 2) Die Definition muss eindeutig und uniform gelten (Alle neuen Objekte werden von ein und der selben Definition gleichermaßen hervorgebracht.)
- 3) Die Definition der neuen Objekte soll uns auf natürliche Weise auch zu einer Definition der Operationen auf diese Objekte führen.

Dedekinds Definition der reellen Zahlen erfüllt alle drei Kriterien. (vgl. Yap 2009, S. 160-161) Dedekind „erschafft“ die neuen Objekte, die reellen Zahlen, nur mithilfe der (kleineren) Domain der rationalen Zahlen.

1.7 ABSCHLIEßENDE ANMERKUNGEN

In den letzten Seiten habe ich anhand einiger Schlüsselstellen von Dedekinds Werken dargelegt, inwiefern seine Ausführungen mit einer heutigen strukturalistischen Ansicht identifizierbar sind. Hierbei sind zwei Punkte zentral. Erstens sieht Dedekind die Essenz der natürlichen Zahlen in deren strukturellen Beziehungen. Alle einfach unendlichen Systeme, die seinen Bedingungen mit Abbildung φ , also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, genügen, sind gleichwertig. Jedes natürliche Zahlensystem ist genau so gut wie jedes andere. Aufgrund Dedekinds axiomatischer Vorgehensweise könnte man seinen Standpunkt eventuell mit einem eliminativen Strukturalismus à la Hilbert identifizieren. Allerdings weisen einige Passagen ebenfalls auf einen non-eliminativen Strukturalismus hin, darunter, dass Dedekind nicht ein System oder die Klasse aller natürlichen Zahlensysteme mit den Zahlen identifizieren wollte, sondern ein neues dem Geiste entspringendes Objekt. Man könnte Dedekind auch so interpretieren, dass es sich dabei um eine abstrakte Struktur handelt. (vgl. Hellman und Shapiro 2019, S.19, 52) Zweitens, stellt für Dedekind der Vorgang der Abstraktion ein essenzielles Konzept dar, um zu den strukturellen Eigenschaften zu kommen. Die logischen Einzelheiten, wie die Abstraktion vonstatten gehen soll, enthält er uns allerdings vor. Jedoch liefert er in einem späteren Werk eine Beschreibung, wie wir neue Objekte definieren sollen.

Neben dem Isomorphismus zwischen Systemen ist der Abstraktionsprozess zentral für ein strukturalistisches Verständnis in der Mathematik. Mit geeigneten Abstraktionsprinzipien können wir von allgemeinen Systemen zu deren abstrakter Struktur gelangen. In den folgenden Kapiteln möchte ich untersuchen, wie wir zu so einer geeigneten Abstraktion kommen können. Dazu werde ich mich auch dem Entstehen und den Entwicklungen von Abstraktionsprinzipien widmen.

2 ABSTRAKTION IM HISTORISCHEN KONTEXT

Philosophisch betrachtet, bedeutet es, eine „Abstraktion“ vorzunehmen, wenn man von einer Menge von Objekten eine gemeinsame Eigenschaft „extrahiert“, im Hinblick derer sie äquivalent sind. So kann ich zum Beispiel von verschiedenen Gegenständen die Eigenschaft der Farbe rot extrahieren und sie daraufhin vergleichen. Auch wenn die Objekte über andere, weitere Eigenschaften verfügen, sind sie bezüglich dieser einen Eigenschaft „gleich“. Ich „abstrahiere“ von allen (für mein Vorhaben) „nicht relevanten“ Eigenschaften. (vgl. Linnebo 2017, S. 30) Formal geschrieben ist ein Abstraktionsprinzip eine Formel der folgenden Form:

$$F(a) = F(b) \leftrightarrow a \sim b$$

wobei a und b der selben Menge (Domain) angehören und F eine Funktion ist. Wichtig hierbei ist die binäre Äquivalenzrelation $\sim$, die über die Domain quantifiziert ist. Die Äquivalenzrelation fängt eine ganz bestimmte Eigenschaft ein, hinsichtlich derer beide Objekte oder Elemente äquivalent sind. Alle anderen individuellen Eigenschaften werden dabei „ignoriert“, wir abstrahieren von allen nicht relevanten Eigenschaften. Objekte, die zueinander in der Äquivalenzrelation stehen, werden in paarweise disjunkte Klassen eingeteilt, sodass alle Objekte, die mit $\sim$ zueinander in Beziehung stehen, nur einer einzigen Klasse angehören. Diese Klassen nennen wir „Äquivalenzklassen“. Eine Äquivalenzrelation $\sim$ erfüllt die Bedingungen der Reflexivität ($a \sim a$), Symmetrie ($a \sim b = b \sim a$) und Transitivität ($a \sim b \wedge b \sim c \rightarrow a \sim c$).

Die Funktion F abstrahiert von den individuellen Merkmalen der Entitäten a und b und gibt für sie den gleichen Wert $F(a)$ ($= F(b)$) aus. Dieser Wert stimmt überein da a und b in Relation $\sim$ stehen und somit mit Hinblick auf $\sim$ nicht zu unterscheiden sind, sie sind dahingehend *äquivalent*. (vgl. Mancuso 2016, S. 14-15) Des Weiteren besteht zwischen der rechten und linken Seite des Abstraktionsprinzips ein „Bikonditional“, welcher uns zeigt, dass wir von beiden Seiten auf die je andere schließen können; der Wahrheitsgehalt ist auf beiden Seiten gleich. (Logisch betrachtet, stellt der Bikonditional die Negation des „ausschließenden Oder“ dar.) Diese Bedingung muss für das Abstraktionsprinzip gegeben sein. Wir sagen auch, dass die linke Seite *hinreichend* für die rechte, und die rechte Seite *notwendig* für die linke ist.

Das meist rezitierte Beispiel für ein Abstraktionsprinzip mithilfe einer Äquivalenzrelation, findet sich bei Frege:

$$d(l_1) = d(l_2) \leftrightarrow l_1 \parallel l_2$$

(vgl. Linnebo 2017, S. 30)

„ d “ beschreibt hier eine Funktion, welche die Richtung der Gerade ausgibt. Die Richtung der ersten und zweiten Gerade ist ident, genau dann, wenn die beiden Geraden parallel sind. Jegliche anderen Besonderheiten der Linien sind nicht relevant, wir sehen uns nur die spezielle Beziehung der beiden Linien zueinander an, nämlich ob sie parallel sind oder nicht. Dies ist ein sehr anschauliches Beispiel, und, mit Rücksicht auf Freges Hintergrund als Mathematiker und Geometer, naheliegend. Wir können uns intuitiv wahrnehmbar zwei parallele Linien vorstellen, oder diese aufzeichnen und es ist leicht nachvollziehbar, dass wenn wir einen Richtungsoperator auf diese Linien anwenden, dieser die gleiche Richtung ausgeben muss. Die Äquivalenzrelation ist in diesem Fall die Parallelität zweier Linien.

In der Philosophie der Mathematik werden Abstraktionsprinzipien heutzutage oft mit Freges aufgestelltem Prinzip in Verbindung gebracht. Freges Ausführungen zur Arithmetik und Logik in seinen *Grundlagen der Arithmetik* (1884), welche auch zu seiner Definition mithilfe von Abstraktion führte, waren für die damalige Mathematik bahnbrechend. (Auch wenn sein Werk zu seiner Zeit noch nicht so viel Zuspruch erhielt.) Seine Überlegungen zu Zahl, Anzahl und eins-zu-eins Korrelationen haben sich in heutiger philosophisch-mathematischer Wissenschaft bereits etabliert. Jedoch gab es auch schon vor Frege einiges an Arbeit und Ausführungen zu ähnlichen Überlegungen und Annäherungen an Abstraktionsprinzipien. In folgendem Teil möchte ich eine genauere Untersuchung Freges Werkes vornehmen, um zu sehen, welche Überlegungen ihn zu seinem aufgestellten Prinzip zu Richtungen und parallelen Geraden veranlassten. Im Zuge dessen werden wir auch sehen, welche Probleme sich mit dem von Frege aufgestellten Abstraktionsprinzip ergeben.

2.1 FREGES GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK

Frege beginnt in der Einleitung seiner *Grundlagen* mit der Frage „Was ist die Zahl 1?“, bzw. was bedeutet das Zahlzeichen „1“? Die grundlegende Motivation, auf welche sich alle weiteren Bearbeitungen in dem Werk beziehen, sind offensichtlich an Grundfragen der Arithmetik geknüpft. Frege bevorzugte eine strengere, formale Herangehensweise in der

Mathematik und wollte diese auf die grundlegende Arithmetik ausweiten. Freges Beweggründe kamen nicht von ungefähr. In der Mathematik des 19. Jahrhunderts gab es eine Trendwende zuvor auf intuitive Wahrnehmung basierende mathematische Wahrheiten auf ein theoretisch, formales Konstrukt abzubilden, um diese rein analytisch beweisen zu können.

Seit Euklid (ca. 300 Jahre v. Chr.) war die Mathematik auf ein System von *Axiomen* gestützt. Axiome sind fundamentale Wahrheiten, die keines weiteren Beweises bedürfen, jedoch als Grundprinzipien in einem mathematischen System gelten, auf welche wir in anderen Beweisen zurückgreifen können und von denen wir Theoreme und Sätze ableiten. Vor dem 19. Jahrhundert wurden Axiome durch geometrische Anschauung aufgestellt oder dadurch begründet, dass sie intuitiv evident waren. Ein besonders anschauliches Beispiel stellt der *Zwischenwertsatz* dar. Wenn eine stetige Funktion (das heißt, informal erklärt, eine Funktion, die ohne abzusehen gezeichnet werden kann, also keine Lücken besitzt) einen Wert a kleiner als einen bestimmten Wert c annimmt und an einer anderen Stelle einen Wert b größer als c , dann muss die Funktion irgendwo dazwischen (mindestens einmal) genau den Wert c annehmen. Zuvor war dieser Satz als geometrisch intuitiv wahr angenommen worden bis Bernard Bolzano 1817 einen analytischen Beweis für diesen Satz lieferte. Seine Motivation war hier ebenfalls, fundamentale Wahrheiten genau zu untersuchen und zu beweisen. Auch andere Mathematiker wie Cauchy und Weierstraß trieben dieses Unterfangen voran. (vgl. Linnebo 2017, S. 22-23)

Als Frege seine akademische Karriere begann, waren mathematische Formalisierungen bereits im Gange. Freges erster Beitrag dazu war seine 1878 erschienene *Begriffsschrift*, in welcher er sich der Schlussfolgerung, welche uns von Axiomen zu Theoremen führt, widmet. Dabei ist es ihm wichtig, die genaue Vorgehensweise zu untersuchen und Lücken in der Beweiskette zu schließen, dass sich keine intuitiven Schlussfolgerungen einschleichen. Um dies zu erreichen, entwickelte er eine „Formelsprache“, welche sich auf die Logik stützt. Sein Ziel war ein rein formales System mit klar formulierten Regeln und Axiomen mit mathematischer Präzision. Die *Begriffsschrift* lieferte einen erheblichen Beitrag zur modernen formalen Logik. (vgl. Linnebo 2017, S. 24)

Bevor wir uns genauer den Abstraktionsprinzipien, und allen voran die zu Beginn dieses Teils beschriebene Definition mithilfe von Abstraktion von Richtungen in §64 der *Grundlagen*

widmen, möchte ich zuvor noch einige erwähnenswerte Punkte dieser Abhandlung diskutieren.

2.1.1 ARITHMETISCHE SÄTZE GENAUER BETRACHTET

Um (arithmetischen) Wahrheiten auf den Grund zu gehen, bedarf es nach Frege einer Untersuchung von analytischen und synthetischen Wahrheiten. So schreibt er gleich ganz zu Beginn:

Jene Unterscheidung von a priori und a posteriori, synthetisch und analytisch betreffen nun nach meiner Auffassung nicht den Inhalt des Urteils, sondern die Berechtigung zur Urteilsfällung. [...] Wenn man einen Satz in meinem Sinne a posteriori oder analytisch nennt, so urteilt man nicht über die psychologischen, physiologischen und physikalischen Verhältnisse, [...] sondern darüber, worauf im tiefsten Grunde die Berechtigung des Fürwahrhaltens beruht.

(Frege 1987, S. 27)

Analytische Wahrheiten sind dabei solche, deren Beweis nur mit logischen Gesetzen und Definitionen geführt werden kann. Wenn ein Beweis jedoch nicht mit ausschließlich logischen Schlussfolgerungen zu führen ist und sich auf Wahrheiten besonderer Wissensgebiete stützt, ist der Satz ein synthetischer. (vgl. Frege 1987, S. 27-28) Um arithmetische Sätze analytisch zu beweisen brauchen wir eine lückenlose analytische Beweiskette.

Zu Beginn des Werkes beleuchtet Frege die Beschreibungen einiger Philosophen und Mathematiker und wie man den Zugang zu arithmetischen Sätzen und Anzahlen schaffen könnte. Er verneint die Aussagen, dass die „Eins“ mit „Einheit“ gleichzusetzen wäre, oder, dass Anzahlen wie Eigenschaften von Dingen sind, etwas Physikalisches oder Zahlen nur durch Addition von mehreren Einsen entstehen. Frege sieht die Lösung dieser Schwierigkeit in *Zahlzuschreibungen von Begriffen*.

Damit wird uns als Antwort auf die erste Frage des vorigen Paragraphen nahegelegt, daß die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte. Am deutlichsten ist dies vielleicht bei der Zahl 0. Wenn ich sage: „die Venus hat 0 Monde“, so ist gar kein Mond oder Aggregat von Monden da, von dem etwas ausgesagt werden könnte; aber dem *Begriffe* „Venusmond“ wird dadurch eine Eigenschaft beigelegt, nämlich

die, nichts unter sich zu befassen. Wenn ich sage: „der Wagen des Kaisers wird von vier Pferden gezogen“, so lege ich die Zahl vier dem Begriffe „Pferd, das den Wagen des Kaisers zieht“ bei. (Frege 1987, S. 81)

Die Zahlangabe sagt etwas über den Begriff aus. Je nachdem wie viele Objekte unter diesen Begriff fallen, schreiben wir ihm eine Zahl zu. Sei F ein solcher Begriff, dann können wir sagen „die Zahl aller F 's ist x “. In Freges Beispiel könnte F bedeuten „Pferd, das den Wagen des Kaisers zieht“ und dann wäre $x = 4$, wenn es viert genau solcher Pferde gibt. Jeglichem Begriff, handle er noch von zeitlichen, räumlichen oder nicht-zeitlich und nicht-räumlichen Objekten, kann eine Zahl zugeschrieben werden. Nicht die Gegenstände sind dabei die Träger der Zahl, sondern der Begriff. Frege vermeidet es dabei, eine Zahlzuschreibung *Eigenschaft* eines Begriffes zu nennen. In §57 in dem Kapitel „Der Begriff der Anzahl“ hält er fest, dass jede Zahl ein eigenständiger Gegenstand ist. Betrachten wir wieder einen Begriff F und sagen „dem Begriff F kommt die Zahl 0 zu“. Die Zahl 0 ist nur ein Teil der Aussage und somit eigenständig. Die Eigenständigkeit kommt in der Arithmetik überall vor, z. B. in der Gleichung $1 + 1 = 2$. Die Aussage „die Zahl der Jupitermonde ist vier“ ist nicht zu verwechseln mit der Attribuität von „der Himmel ist blau“. Dass die Zahl in dem allgemeinen Sprachgebrauch auch beschreibend benutzt wird, soll nicht davon ablenken, dass sie eigentlich eigenständig ist. (vgl. Frege 1987, S. 90)

2.1.2 WIE KÖNNEN WIR MATHEMATISCHE OBJEKTE ERFASSEN?

Wir nähern uns nun der Frage, die wir uns schon zu Beginn gestellt haben und welche eine äußerst Wichtige darstellt. Was *sind* mathematische Objekte?

Dass Zahlen Gegenstände sein sollen, könnte erst mal verwirrend klingen. Nicht alle objektiven Gegenstände haben eine raum-zeitliche Position; Zahlen (wie alle mathematischen Objekte) sind abstrakte, keinen physikalisch angreifbaren, Objekte. Jedoch stellt sich die Frage wie wir sie dann begreifen sollen, vor allem wenn Frege den Zugang durch Intuition und Wahrnehmung ausschließt. Frege beschreibt dazu eine Methode, wie er diese Frage beantworten will:

Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muß man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen. [...]

§62. [...] Nur im Zusammenhange eines Satzes bedeuten die Wörter etwas. Es wird also darauf ankommen, den Sinn eines Satzes zu erklären, in dem ein Zahlwort vorkommt. (Frege 1987, S. 94)

Nur ganze Sätze treffen Aussagen, die wir als wahr oder falsch beurteilen können. Dies wurde unter dem *Kontextprinzip* bekannt. (vgl. Zalta 2019) Wir können nach Frege außerhalb eines Kontextes somit nicht untersuchen was Zahlen sind. Anstatt die Zahl selbst zu erklären, versuchen wir den Sinn eines Satzes zu erklären in dem ein Zahlwort vorkommt. Dabei ist es nach Frege wichtig, Sätze, die ein „Wiedererkennen“ ausdrücken, zu untersuchen. Wir nähern uns somit der Frage nach Identität und Gleichheit an. Für Freges Untersuchung handelt es sich um arithmetische Identitäten und er postuliert die Aussage: „Die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist dieselbe, welche dem Begriffe G zukommt.“ (Frege 1987, S. 94) Es gilt den Sinn dieses Satzes zu erklären, indem der Inhalt dessen in anderer Weise wiedergegeben wird.

Damit geben wir ein allgemeines Kennzeichen für die Gleichheit von Zahlen an.
Nachdem wir so ein Mittel erlangt haben, eine bestimmte Zahl zu fassen und als dieselbe wiederzuerkennen, können wir ihr ein Zahlwort zum Eigennamen geben.

(Frege 1987, S. 94)

Mit der Erklärung der Gleichheit von Zahlen, können wir uns dem Objekt der Zahl nähern. Wir verwenden dazu eine Identität der Form „die Zahl der *F*s ist gleich der Zahl der *G*s“, in formaler Schreibweise " $\#x Fx = \#x Gx$ ".¹³ Zur Erklärung dieses Satzes nennt er ein Mittel, welches schon Hume beschrieben hatte und als *Hume's Principle* bekannt ist: eine eindeutige eins-zu-eins Zuordnung der Zahlen, sodass jede Einheit von *F* einer von *G* entspricht. In symbolischer Schreibweise:

$$(HP) \quad \#x Fx = \#x Gx \leftrightarrow F \approx G$$

(vgl. Linnebo 2017, S. 29)

$F \approx G$ steht für die oben beschriebene eins-zu-eins Zuordnung. Als Beispiel kann man sich einen gedeckten Tisch vorstellen, bei dem jeder Gabel genau ein Messer zugeordnet wird. Ist die eindeutige Zuordnung erfolgreich und bleibt kein Messer oder Gabel übrig, stimmt die Zahl der Messer und Gabeln überein. Es scheint eine elegante Lösung unseres Problems. Wir können die Gleichheit zeigen, ohne dafür den Begriff der Zahl erklären zu müssen. (vgl. Linnebo 2017, S. 29)

Daraufhin bemerkt Frege, dass der Begriff der Gleichheit dem der Gleichheit von Anzahl vorausgeht und nur mit der Untersuchung der Gleichheit auch im allgemeineren Sinne kann

¹³ Ich halte mich bei den formalen, modernen Schreibweisen an Linnebo (2017)

der Begriff vollends beleuchtet werden. Denn nur mit dem Feststehen der beiden Begriffe „Gleichheit“ und „Anzahl“ kann die „Gleichheit von Anzahlen“ bestehen. Zu diesem Zeitpunkt im Fortschritt des Buches ist der Begriff der Anzahl noch nicht erklärt. Wir haben lediglich ein Mittel gefunden die Gleichheit von Anzahlen zu untersuchen. Um den Begriff der Gleichheit zu erklären, sieht es Frege als Möglichkeit Gleichheit unter schon bekannten Begriffen zu untersuchen. Als Beispiel dazu nimmt er die Parallelität von Linien.

2.1.3 DEFINITION MIT HILFE VON ABSTRAKTION – FREGES GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK §64

In §64 der *Grundlagen* bedient sich Frege einem Beispiel aus der Geometrie, um sich dem Begriff der Gleichheit anzunähern. Dazu abstrahiert er eine besondere Eigenschaft zweier Linien, die er dann gleichsetzen kann. Sehen wir uns zunächst einmal an, was er dazu am Beginn von §64 schreibt:

§64. Das Urteil „Die Gerade a ist parallel der Gerade b“, in Zeichen:

$$a // b,$$

kann als Gleichung aufgefaßt werden. Wenn wir dies tun, erhalten wir den Begriff der Richtung und sagen: „Die Richtung der Gerade a ist gleich der Richtung der Gerade b.“ Wir ersetzen also das Zeichen // durch das allgemeinere =, indem wir den besonderen Inhalt des ersteren an a und b verteilen. Wir zerspalten den Inhalt in anderer als der ursprünglichen Weise und gewinnen dadurch einen neuen Begriff.

(Frege 1987, S. 95-96)

Dies und die weitere Ausführung in §65 stellt genau unser am Anfang des Kapitels beschriebenes Abstraktionsprinzip für Richtungen von Geraden dar:

$$d(l_1) = d(l_2) \leftrightarrow l_1 \parallel l_2$$

Wir abstrahieren eine gemeinsame Eigenschaft, die zwei Geraden haben, wenn sie parallel sind: ihre Richtung. Wichtig zu erwähnen ist hierbei, dass Frege „Richtung einer Gerade“ als einen neuen Begriff sieht. Die Parallelität zweier Geraden ist durch geometrische Anschauung gegeben, durch diese wir dann den Begriff der Richtung definieren können. Die Umkehrung, von der Richtung auf die Parallelität zweier Geraden zu schließen, gilt nach Frege allerdings nicht, obwohl dies zur Zeit Freges ebenfalls üblich war. So kann man beispielsweise in einem Lehrbuch der Geometrie zur Zeit Freges lesen:

§21. Erklärung. Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche ohne sich zu decken, gleiche Richtung haben, heißen *parallele* oder *gleichlaufende* Linien.

(Fischer 1835, S. 8)

Aber auch in weiteren späteren Lehrbüchern ist ein solcher Zugang zu finden. Freges Anmerkung ist vielleicht nicht zuletzt daraufhin zurückzuführen, dass die grundlegenden Begriffe, wie Parallelität und ob sie Intuition oder Konzept seien, im Deutschland des 19. Jahrhunderts viel diskutiert waren. So schreibt Frege dazu am Ende von §64 ein paar Zeilen, die sehr an Grassmann, einen anderen Mathematiker der Zeit, der sich mit der Beschreibung von geometrischen Figuren beschäftigte, erinnern:

Aus der geometrischen Ähnlichkeit geht der Begriff der Gestalt hervor, so daß man z.B. statt „Die beiden Dreiecke sind ähnlich“ sagt „Die beiden Dreiecke haben die gleiche Gestalt“ oder „Die Gestalt des einen Dreiecks ist gleich der Gestalt des andern“. So kann man auch aus der kollinearen Verwandtschaft geometrischer Gebilde einen Begriff gewinnen, für den ein Name wohl noch fehlt.

(Frege 1987, S. 96)

Doch kommen wir nochmals darauf zurück, was Frege zur konzeptuellen Ordnung von Parallelität und Richtung in §64 sagt. Die Umkehrung sei deswegen nicht gegeben, weil wir keine intuitive Vorstellung von der Richtung einer Gerade haben, dagegen von zwei parallelen Geraden aber schon. Der Begriff der Richtung „wird erst durch eine an die Anschauung anknüpfende Tätigkeit gefunden.“ (Frege 1987, S. 96) Auch wenn viele Mathematiker zu dieser Zeit (wie etwa Schlämlich, den Frege in seinen *Grundlagen* auch erwähnt und dessen Werke er kannte) von der Richtung zweier Geraden darauf schließen, ob sie parallel sind oder nicht, steht für Frege die konzeptuelle Reihenfolge außer Frage.¹⁴

Um auf unsere Abstraktion zurückzukommen, werfen sich doch noch einige Fragen auf. Wie genau ist Frege hier zu verstehen? Zunächst sagt er, dass die linke Seite mit der rechten Seite „gleichbedeutend“ ist. Der Inhalt wird nur „zerspalten“ und in anderer Weise aufgeschrieben. Der besondere Inhalt (die Richtung) wird an *a* und *b* verteilt und somit können wir das Zeichen // durch ein „=“-Zeichen ersetzen, weil wir die abstrahierte Eigenschaft vergleichen. Wie genau „abstrahieren“ wir jedoch diese Eigenschaft? Stellen wir alleine durch psychologische Überlegungen und aufgrund der Anschauung, die wir von parallelen Geraden haben, ein neues Konzept auf? Frege würde dieser psychologischen Herangehensweise

¹⁴ Eine ausführliche Diskussion der konzeptuellen (ontologischen) Ordnung der Richtung und Parallelität von Geraden in der Mathematik des 19. Jahrhunderts findet sich in Mancuso (2016) S. 66-88.

vielleicht eher kritisch gegenüber stehen, ist er doch bemüht ein rein formales, mathematisches System aufzustellen. Er nimmt die Anschauung der rechten Seite des Abstraktionsprinzips, „zerspaltet“ den Inhalt und verteilt ihn respektive an die beiden Geraden. Die linke Seite zeigt den gleichen Inhalt in anderer Weise und wartet damit mit einem neuen Konzept, dem der Richtung, auf. Wie genau diese „Zerspaltung“ vonstatten geht, beschäftigt auch noch die moderne philosophische Debatte.

Frege ist sich der möglichen Unklarheit für seine Leser offensichtlich bewusst, denn er geht darauf in §65 näher ein. Dazu schreibt er:

Diese Erklärung weicht insofern von dem Gewohnten ab, als sie scheinbar die schon bekannte Beziehung der Gleichheit bestimmt, während sie in Wahrheit den Ausdruck „die Richtung der Gerade a “ einführen soll, der nur nebensächlich vorkommt.

(Frege 1987, S. 97)

Er erinnert uns daran, dass das Ziel seines Abstraktionsprinzips die Einführung der Richtung einer Gerade ist und bemerkt gleich danach, dass man in einen etwaigen Konflikt mit den bekannten Gesetzen der Gleichheit kommen kann. Dies löst Frege mit einem Verweis auf Leibniz:

„Eadem sunt, quorum unum potest subsitui alteri salva veritate.“ (Frege 1987, S.97)

Def.1. [...] Dieselben sind, wovon eines für das andere unbeschadet der Wahrheit eingesetzt werden kann.

(Künne 2010, S.110)

Frege nimmt diese Erklärung für die Gleichheit an und erwähnt, dass etwaige sprachliche Unterschiede wie „dasselbe“ oder „gleich“ nicht so wichtig seien. Entscheidend ist, dass durch allgemeine Ersetzbarkeit eines Ausdrucks durch einen anderen, deren Gleichheit gegeben ist. Für unseren Fall bedeutet dies, dass die Richtung von a mit der Richtung von b ausgetauscht werden könnte. Dies sei nach Frege ein leichtes Unterfangen, da man ja zunächst nichts wüsste, außer, dass die Richtungen von zwei Geraden übereinstimmen, wenn sie parallel zueinander stehen. Es müsse nur die Ersetzbarkeit in dieser Gleichheit nachgewiesen werden, für alle anderen Aussagen von Richtungen wird es nötig sein erst Definitionen aufzustellen und dafür können wir uns Regeln formulieren. (vgl. Frege 1987, S. 98)

Frege erhebt allerdings noch ein weiteres Bedenken und zwar was auf beiden Seiten des „=“-Zeichens in der Formel stehen muss. In dem Satz „Die Richtung von a ist gleich die

Richtung von b “ ist die „Richtung von a “ ein Gegenstand, der mit dem Gegenstand auf der anderen Seite des „ $=$ “-Zeichens vergleichbar sein muss. Deshalb muss auf der anderen Seite auch eine Richtung gegeben sein, sonst ist ein Vergleich nicht möglich.

2.1.4 VON GLEICHHEIT ZUR ANZAHL

Frege findet sich zunächst in einer Sackgasse. Er bemerkt, dass er mit seinem aufgestellten Prinzip über Parallelität und Richtungen nicht weiter kommt um einen klar begrenzten Begriff der Richtung anzugeben und versucht einen anderen Weg um Aussagen über Gleichheiten und somit über Anzahlen zu treffen. Dies will er mit dem „Umfang eines Begriffes“ lösen. Was Frege damit meint, ist eigentlich eine Klasse an Entitäten. Für das Beispiel zu Richtungen ist die „Richtung von a “ der Umfang des Begriffes „parallel der Gerade a “. Alle Geraden, die parallel zu a sind, sind darin enthalten. Für die beiden parallelen Geraden ist der fregeische Umfang eines Begriffes „Gerade parallel der Gerade b “ gleich des Umfangs des Begriffes „Gerade parallel der Gerade a “, und umgekehrt analog, wenn die gerade genannten Umfänge der Begriffe gleich sind, ist a parallel zu b . (vgl. Frege 1987, S. 100) Dies scheint auf den ersten Blick nur eine technische Penibilität darzustellen, jedoch hebt Frege seine Logik über Begriffe damit auf eine höhere Stufe. Der Umfang des Begriffes „parallel der Gerade a “ bezieht alle Geraden, die zu a parallel sind, ein. Dieses Prinzip wurde aufgrund der hauptsächlich vorherrschenden englischen Literatur unter dem „second-order principle“ bekannt.¹⁵ (vgl. Zalta 2019)

Wenn wir dies auf unsern Fall anwenden wollen, so haben wir an die Stelle der Geraden [...] Begriffe zu setzen und an die Stelle des Parallelismus [...] die Möglichkeit, die unter den einen den unter den andern Begriff fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuzuordnen. (Frege 1987, S. 100)

Wir sehen uns wieder zurückgekehrt zur eindeutigen Zuordnung der Gegenstände, die unter den jeweils andern Begriff fallen. Geändert hat sich nur, dass wir anstatt von der Gleichheit von Begriffen nun Klassen von Begriffen gesetzt haben, dessen Objekte wir gegenseitig zuordnen können. Sehen wir uns an, wie Frege diese Idee auf Aussagen über Anzahlen überträgt. Wenn wir die jeweiligen Begriffe der beiden Klassen erfolgreich einander zuordnen können, liegt eine „Gleichzahligkeit“ zwischen dem

¹⁵ Die sogenannte „second-order“ Logik erlaubt es uns neben Variablen auch über Funktionen zu quantifizieren. (vgl. Zalta 2019)

Begriff F und dem Begriff G vor. Frege definiert:

Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes „gleichzählig dem Begriffe F“.
(Frege 1987, S. 100)

Der Umfang des Begriffes „gleichzählig dem Begriffe F“ ist eine Logik zweiter Stufe, denn er stellt eine Klasse dar, in der alle Begriffe, die gleichzählig mit F sind, enthalten sind. In moderner Schreibweise können wir dieses Prinzip nun folgendermaßen aufschreiben:

$$\#x Fx = \{G \mid F \approx G\}$$

(vgl. Linnebo 2017, S. 36)

Mit diesem Schritt könne man nun untersuchen ob zwischen zwei Begriffsumfängen eine *Gleichheit* besteht, oder ob der eine umfassender ist als der andere. Frege wählt als Veranschaulichung ein wie von uns zuvor beschriebenes Beispiel: die eindeutige Zuordnung von Messern und Tellern auf einem Tisch. Frege fährt fort mit einer allgemeinen Definition von Zuordnungen. Wir nehmen dazu zwei Begriffe F und G an, und wir sagen „a fällt unter den Begriff F“ für alle Gegenstände die unter den Umfang des Begriffes fallen und analog für b und G. Dazu definieren wir uns eine Funktion φ , die die Gegenstände, die unter F fallen, den Gegenständen unter G zuordnet. Formal ausgedrückt:

$$\varphi: a \rightarrow b, \quad \forall a \in F, \forall b \in G$$

Der Satz „Der Begriff F ist gleichzählig mit dem Begriffe G“ ist genau dann wahr, wenn die Funktion φ alle Gegenstände, die unter F und G fallen beiderseits genau eindeutig zuordnet. Diese Vorgehensweise wurde unter Freges „Basic Law V“ bekannt. Sehen wir uns dieses Gesetz allgemein in formaler Schreibweise an:

(BLV) $\{x \mid Fx\} = \{x \mid Gx\} \leftrightarrow \forall x (Fx \leftrightarrow Gx)$

(vgl. Linnebo 2017, S. 36)

Wobei $\{x \mid Fx\}$ die Klasse aller Objekte, die unter F fallen, darstellt (analog für G).

Wir erinnern uns, dass dies genau die Methode von *Hume's Principle* ist. Freges Basic Law V stellt eine Innovation für Abstraktionsprinzipien dar. Die erhaltenen „Abstrakta“ der Abstraktion sind die entsprechenden Äquivalenzklassen und können mit Hilfe der oben genannten Definition der Äquivalenz (eindeutige Zuordnung der Gegenstände

unter F und G) aufstellt werden. (vgl. Linnebo 2017, S. 36 und Tennant 2017) ¹⁶

Nach der analytischen Investigation von Aussagen über Anzahlen, sieht sich Frege nun bereit Erklärungen über die einzelnen Zahlen zu geben. Wir erinnern uns daran, dass es Freges Ziel ist, die Arithmetik mit rein logischen Prinzipien zu erklären. Mit der Untersuchung von *Hume's Principle* und Gleichheit, sowie mithilfe seines Kontextprinzips von Aussagen über Anzahlen, ist es Frege gelungen einen rein analytischen Zugang zu finden.

Auf den nächsten Seiten ab §74 bis §86 versucht Frege die endlichen (und darauffolgend unendlichen) Zahlen auf rein logisch-formale Weise zu beweisen. Dabei legt er zunächst besonderen Augenmerk auf die Zahl 0 und 1 und will anschließend arithmetische Sätze beweisen, die an die heute bekannten Dedekind-Peano Axiome erinnern. Die Axiome stellen eine arithmetische Theorie dar, die in einer logischen Sprache zweiter Stufe formuliert sind.

Freges Unterfangen eine rein analytische Vorgehensweise zu beschreiben, um die Arithmetik zu erklären, scheint mit seinen Ausführungen in den *Grundlagen* zunächst erfolgreich gewesen zu sein. Jedoch braucht es nicht lange bevor sich erste Probleme mit Freges Logik auftun. ¹⁷

2.1.5 PROBLEME MIT FREGES INNOVATIONEN

Freges Abstraktionsprinzip stützt sich stark auf Hume's Principle, welches folgende Identitätsstatement enthält: $\#x Fx = \#x Gx$. Wie ist dieses allerdings zu interpretieren, wenn wir eine der beiden Seiten mit einem anderen Ausdruck versehen, der nicht arithmetisch ist? Nehmen dafür eine beliebige Variable t und schreiben: $\#x Fx = t$. Traditionellerweise wird als Beispiel für einen solchen Ausdruck „Julius Caesar“ angegeben, wodurch dieses Problem unter „Julius Caesar Problem“ bekannt wurde. Auch wenn wir zunächst sagen könnten, dass die Identität in diesem Fall einfach verneint werden müsste, weil „Julius Caesar“ von jeder Zahl verschieden ist, erklärt uns *Hume's Principle* aber nicht wie mit einem solchen Fall

¹⁶ Hierbei sei zu erwähnen, dass Frege sein Basic Law V (oder Axiom V) erst explizit in seiner späteren Abhandlung *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) formuliert. Interessant ist außerdem, dass er in dieser Abhandlung nach dieser Formulierung keinen Gebrauch der „Umfänge von Begriffen“ in dieser Form mehr macht. (vgl. Heck 1993, S. 581)

¹⁷ Für eine kurze Einführung in Freges *Grundlagen der Arithmetik* siehe auch Schirn, 1988.

umzugehen ist. (vgl. Linnebo 2017, S. 35 und MacBride 2003, S. 105) Dieses Problem wird von Frege selbst in §66 angesprochen und er erklärt, dass Richtungen nur mit Richtungen verglichen werden können. Diese Schwierigkeit mit *Hume's Principle* veranlasst Frege zu seinem zuvor beschriebenen Gesetz *Basic Law V* (BLV).

Doch noch eine weitere Kritik an seinen Ausführungen wartet auf, die ihm selbst zunächst nicht aufgefallen war. 1902, kurz vor Veröffentlichung seines Werkes *Grundgesetze der Arithmetik*, erhielt Frege einen Brief des Logikers Bertrand Russell, der mit einem Problem aufwartete, welches heute unter dem Namen „Russell's Paradox“ bekannt ist. Dieses Problem betrifft die naive Mengentheorie. Das Aussonderungssaxiom besagt, dass es für jede Formel $\phi(x)$ eine Menge $\{x \mid \phi(x)\}$ gibt, mit allen Elementen, die $\phi(x)$ erfüllen. Als Beispiel, wenn die Formel $\phi(x)$ für „ x ist eine Primzahl“ steht, dann ist $\{x \mid \phi(x)\}$ die Menge aller Primzahlen. Genau hier findet Russell's Paradox Anwendung. Angenommen $\phi(x)$ steht für $x \in x$, also alle Elemente, die sich selbst enthalten, dann definieren wir die Russellklasse als die Negation $R = \{x \mid \neg\phi(x)\}$, wobei $\neg$ das Negationssymbol darstellt. R ist die Menge aller Objekte, die sich selbst nicht enthalten. Die ausschlaggebende Frage lautet: Ist R nun ein Element von sich selbst? Wenn dies der Fall ist, muss sie die Bedingung erfüllen, sich selbst nicht zu enthalten. Wenn sie sich selbst nicht enthält, erfüllt sie allerdings ihre eigene Bedingung und enthält sich wiederum selbst. Wir erhalten somit $r \in r \wedge r \notin r$, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Dieses Paradoxon zeigt, dass Freges BLV, welches einfache mengentheoretische Relationen enthält, inkonsistent ist. (vgl. Irvine und Deutsch 2016 und Tennant, 2017)

Frege schien in seinen späteren Jahren sein Projekt aufgeben zu haben und sein Logizismus war für ungefähr ein halbes Jahrhundert nicht viel beachtet. Nichtsdestotrotz gab es modernere Philosophinnen und Philosophen, die seine Ideen wieder aufgegriffen und sich an der Arbeit eines Neo-Logizismus nach Frege verschrieben haben. Allen voran Crispin Wright, der 1983 Freges Unternehmungen neu aufrollte. Wir werden uns diesen Versuchungen, die fregische Logik und auch Abstraktionsprinzipien neu zu interpretieren, in dem zweiten Teil zur modernen Debatte widmen. Zunächst sei festgehalten, dass Freges Versuchungen in den *Grundlagen der Arithmetik* einen großen Schritt vollzogen und einen großen Beitrag dazu geleistet haben, wie wir Abstraktionsprinzipien verstehen.

2.2 ABSTRAKTIONSPRINZIPIEN VOR UND RUND UM FREGES GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK

Rund um Freges *Grundlagen der Arithmetik* gab es eine lebhafte Debatte zu Abstraktionsprinzipien in der Mathematik. Der Begriff „définition par abstraction“ wurde in der Peano-Schule erst um 1894 geprägt, obwohl alle erforderlichen Werkzeuge und Konzepte schon früher vorhanden waren. Einige Mathematiker wie Kronecker und Helmholtz kamen der Situation schon vorher auf die Spur. Das große mathematische Interesse an Abstraktionsprinzipien geht auch auf die vorhergehende mathematische Praxis zurück. So wies die Peano Schule darauf hin, dass die ersten Definitionen mithilfe von Abstraktion bereits bei Euklid zu finden sind. Eine interessante Aufarbeitung früherer mathematischer Arbeiten in denen Definitionen mithilfe von Abstraktion zu finden sind, vor allem im 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts, gibt es in Paolo Mancusos Werk *Abstraction and Infinity* (2016). Dabei widmet sich Mancuso vor allem der Frage, welche Werke Frege maßgeblich beeinflusst haben könnten, sowie logischen und semantischen Unterschieden der Abstraktionsprinzipien.

Auf den folgenden Seiten möchte ich anhand einiger von Mancuso untersuchten Werke ein paar wesentliche Unterschiede der Abstraktionsprinzipien im historischen Kontext herausarbeiten. Dabei werde ich systematisch nach einzelnen Komponenten des Abstraktionsprinzips vorgehen, um die Entwicklung der Abstraktion und deren Verständnis in der heutigen philosophisch-mathematischen Debatte nachzuzeichnen. Zuerst werde ich mich der Diskussion der Abstraktionsfunktion und danach dem Verständnis der einzelnen in den Abstraktionsprinzipien vorkommenden Beziehungen wie der Äquivalenzrelation, Gleichheit und dem Bikonditional widmen.

2.2.1 DER WERT DER ABSTRAKTIONSFUNKTION

Wie zu Beginn des Kapitels beschrieben, sind Abstraktionsprinzipien mathematische Formeln der Form „ $F(a) = F(b) \leftrightarrow a \sim b$ “, wobei $F(a)$ eine Funktion darstellt. In mathematischer Praxis sind Funktionen Zuordnungen oder Abbildungen, die jedem Wert aus einer Definitionsmenge Werte aus der Bildmenge (oder Wertemenge) zuordnet. Dabei stammt a aus der Definitionsmenge und der Wert von $F(a)$ ist ein Element der Bildmenge. Wie bereits besprochen, abstrahiert die Abstraktionsfunktion F von den nicht relevanten Eigenschaften (nicht relevant im Bezug auf die Äquivalenzrelation) und fängt eine bestimmte Eigenschaft ein, die von den Elementen der Äquivalenzklasse geteilt wird. Sie hat somit einen eindeutigen

Wert, sodass $F(a) = F(b)$ gilt. Dabei ist essenziell festzuhalten, dass der Wert der Abstraktionsfunktion bei allen Elementen, die in der Äquivalenzrelation zueinander stehen, gleich ist. Die Verwendung und Beschreibung solcher Funktionen können wir schon vor explizit ausformulierten Abstraktionsprinzipien finden. Mancuso verweist auf ein Werk von Kronecker aus 1889 „Zur Theorie der elliptischen Functionen“ in dem er einige interessante Bemerkungen zu Invarianten eines Systems gibt.¹⁸ Kronecker bemerkte auch, dass der Kern der mathematischen Wissenschaft darin bestehe, Äquivalenzen zu erkennen und die diesbezüglichen Invarianten herauszufinden. Dazu eine Schlüsselstelle von Kronecker:

Denn jede Abstraction, z.B. die von gewissen Verschiedenheiten, welche eine Anzahl von Objecten darbietet, statuirt eine Aequivalenz, und der aus der Abstraction hervorgehende Begriff, z.B. ein Gattungsbegriff, bildet die „Invariante der Aequivalenz“.

(Kronecker 1889, S. 58-59)

Kronecker zufolge gibt es Funktionen, die für Elemente aller äquivalenten Systeme den gleichen Wert haben. (vgl. Mancuso 2016, S. 15-17)

Nun stellt sich die Frage, um was für Objekte es sich bei dem Wert der Abstraktionsfunktion handelt. Wie wir bei Freges *Grundlagen der Arithmetik* gesehen haben, definierte er Anzahlen mit dem Umfang aller gleichzähligen Begriffe, welche als Äquivalenzklassen interpretiert werden können. Des Weiteren werden wir sehen, dass wir Beispiele von Abstraktionsprinzipien finden können, deren Abstraktionsfunktion andere Objekte liefern, nämlich entweder einfach ein repräsentatives Objekt aus der Äquivalenzklasse oder sogar neue, abstrakte Objekte.

2.2.1.1 Äquivalenzklassen als Wert der Abstraktionsfunktion

Die Einteilung in Äquivalenzklassen können wir vielerorts bereits vor Freges *Grundlagen* finden. Trotz noch lückenhafter Terminologie wurden Objekte schon im 18. Jahrhundert mithilfe einer entsprechenden Äquivalenzrelation in Klassen eingeteilt. Auch Gauss in seinen *Disquisitiones arithmeticae* (1801) sprach von quadratischen Formen, die hinsichtlich ihrer Determinante äquivalent sind und in Klassen gegliedert werden können. (vgl. Mancuso 2016, S. 30)¹⁹ In Dirichlets Vorlesungen zur Zahlentheorie sehen wir ebenfalls eine paradigmatische

¹⁸ Unter der Invariante eines Systems versteht man eine Größe, die sich, wenn bestimmte Operationen oder Funktionen auf sie angewandt werden, nicht ändert.

¹⁹ Mehr zu der Entwicklung der Äquivalenzrelation in dem folgenden Kapitel zur Äquivalenzrelation und Gleichheit bei Abstraktionsprinzipien

Verwendung solcher Klassen. Die Einteilung in disjunkte Äquivalenzklassen ist vor allem bei Kongruenzklassen sehr anschaulich. Dabei werden Zahlen, die bezüglich eines Modus k kongruent sind, der gleichen Klasse zugeordnet. (Es ist schnell gezeigt, dass die Kongruenz alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt.) Die entstehenden Äquivalenzklassen sind disjunkt und es gibt genau $(k - 1)$ Äquivalenzklassen. Jede Zahl a ist kongruent zu eine der k Zahlen: $0, 1, 2, \dots, (k - 1)$. (Wobei $k \equiv 0 \pmod{k}$).²⁰ Die Zahl a kann außerdem nur zu einer dieser Zahlen kongruent sein, andernfalls wären die beiden Zahlen respektiv kongruent zueinander. Dabei ist interessant, dass Dirichlet bemerkt, dass den Elementen einer Äquivalenzklasse einige gleiche Eigenschaften zukommen und dahingehend füreinander gleichermaßen eingesetzt werden können. (vgl. Lejeune Dirichlet 2014, S. 36-37)

Wir haben schon früher gesehen, dass jede Zahl, welche in einer Congruenz als Summand oder als Factor auftritt, unbeschadet der Richtigkeit der Congruenz durch jede andere ihr congruente, d.h. der selben Classe angehörige Zahl ersetzt werden darf. (Lejeune Dirichlet 2014, S. 36-37)

Trotz der vielfachen Verwendung in der Zahlentheorie, war es vor Frege nicht üblich Äquivalenzklassen als erhaltenen Wert einer Abstraktion zu sehen. (vgl. Mancuso 2016)

Eine weitere Beschreibung dieser Zeit als erhaltenes Abstrakta die Äquivalenzklasse zu sehen, lässt sich bei Russell finden. Russells Beitrag zur Arbeit rund um Abstraktionsprinzipien ist heute unbestritten. Wie Frege war er der Ansicht, dass die Mathematik auf die Logik reduzierbar sei. Russell trat in die Diskussion um Abstraktionsprinzipien nach einer Reise nach Paris in 1900, zu dem internationalen Kongress der Philosophie, die er mit seinem Lehrer und Kollegen Whitehead besuchte, ein, bei der er auf Peano traf. Er war beeindruckt von dem Wissenstand und den Ausführungen von Peano und seinen Schülern. Er selbst beschrieb das Jahr 1900 als eines der wichtigsten in seinem intellektuellen Fortschritt. Zurückgekehrt beschäftigte sich Russell intensiv mit Peanos Werken und so ist es kein Wunder, dass seine Veröffentlichung 1901 Peanos Notation folgt. Aber auch später in seinen *Principia Mathematica* lässt sich noch der Einfluss Peanos erkennen. (vgl. Russell 1956, S.1)

²⁰ Kongruenz: zwei Zahlen sind kongruent modulo k , wenn sie den gleichen „Rest“ besitzen. So ist etwa $3 \equiv 15 \pmod{4}$ Für jede Zahl a gilt $a = nk + r$ und r ist einer der Zahlen $0, 1, \dots, (k-1)$. (vgl. Dirichlet 2014, S. 32-33)

Russells Essay aus 1901 beschäftigt sich mit der *Logic of Relations*. Dabei zieht er Arbeiten von Pierce und Schröder, aber auch Peano heran. Er will mit Peanos Notation die Logik der mathematischen Relationen vereinfachen. Dies soll dem leichteren Verständnis und der Generalisation von mathematischen Theorien dienen. Es soll außerdem möglich sein alle Definitionen explizit anzugeben. (vgl. Russell 1956, S. 4) Ein interessanter Punkt ist, dass Russell eine *many-one Relation* definiert. Wenn x zu y in Relation steht, geschrieben xRy , und x gegeben ist, dann gibt es nur ein mögliches y , zu dem es in Relation stehen kann, wenn allerdings y gegeben ist, dann gibt es eine Kardinalzahl von x , die zu y in Relation stehen, also der Formel xRy genügen. Wenn eine Relation transitiv, symmetrisch und nicht-null ist, kann sie als Produkt einer many-one Relation (und deren Konverse $xR^{-1}y$) analysiert werden. Das Konverse der Relation xRy ist vorausgesetzt in einer Definition mithilfe von Abstraktion und Russell meint, dies solle zeigen, dass solche Definitionen kein individuelles Objekt, sondern eine Klasse ausgeben, denn genau genommen ist die Klasse aller Relationen S kein einfaches Element. Das möchte er in den folgenden Teilen noch genauer anhand von Beispielen ausführen. Der zweite Teil des Essays widmet sich der Definition von Kardinalzahlen. (vgl. Russell 1956, S. 8-10) Davor bemerkt er aber noch:

Meanwhile, we can always take the class ϕx , which appears in the demonstration of Prop 6.2 [die Umkehrung der many-one Relation], as the individual indicated by the definition by abstraction; thus for example the cardinal number of a class u will be the class of classes similar to u .
(Russell 1956, S. 10)

Dies, so Russell, sei die Methode eine explizite Definition der Kardinalzahl einer Klasse zu geben (zusammen mit dem Konzept der Kardinalität). Soll die Kardinalzahl durch Abstraktion definiert werden, folgt Russell Freges Ausführungen:

If we wish to define cardinal number by abstraction, we can only define it as a class of classes, of which each has a one-one correspondence with the class „cardinal number“ and to which belong every class that has such a correspondence.
(Russell 1956, S. 10-11)

Vor allem in späteren Werken fokussiert sich Russell darauf solche Definitionen mithilfe von Abstraktion durch explizite Definitionen zu ersetzen. Für Russell, genau wie Frege, ist der Wert einer Abstraktionfunktion eine Klasse, kein Individuum.

2.2.1.2 Repräsentanten der Äquivalenzklasse als Wert der Abstraktionsfunktion

In mathematischen Werken vor Frege waren, eventuell auch aufgrund der vorherrschenden mathematischen Praxis, Äquivalenzklassen als Wert einer Funktion eher nicht zu finden. Nach den Beschreibungen Freges und Russells wurde dies jedoch immer geläufiger. Eine solche Ansicht wurde von manchen Mathematikern allerdings abgelehnt oder sogar kritisiert. Als Peano 1901 Kardinalzahlen mit einer Definition mithilfe von Abstraktion definiert (dafür steht $Num(a)$ für die Kardinalzahl der Klasse a), verneint er dabei die Vorstellung die Kardinalzahl $Num(a)$ mit der Klasse, die alle Klassen, die in eins-zu-eins Zuordnung zu a stehen, anzusehen. Er meint, dass die eben angesprochene Klasse und $Num(a)$ verschiedene Eigenschaften besitzen. (vgl. Mancuso 2016, S. 100 und Russell 1996, S. 115) Weyl, der es als eine psychologische „Ungeheuerlichkeit“ ansah, sich bei beispielsweise der Kardinalzahl „3“ die Klasse aller gleichmächtiger Mengen vorstellen zu müssen, reihte sich in die Gruppe der Kritiker. Für ihn ist die Verwendung von Äquivalenzklassen bei der Abstraktion von Kardinalitäten nicht standhaft. (vgl. Weyl 1910, S. 303)

In der Mathematik war es vor allem üblich ein repräsentatives Objekt der Äquivalenzklasse auszuwählen, zu welchem die Objekte in der Klasse reduzierbar sein müssen. Es wird mit einem Repräsentanten gearbeitet und nicht mit der Klasse selbst. Diese Methode ist in der Zahlentheorie des 19. Jahrhunderts besonders üblich. (vgl. Mancuso 2016, S. 30-31) Kommen wir zurück zu Dirichlets Vorlesungen. Wir haben gesehen, dass wir alle kongruenten Zahlen in Klassen einteilen können, beim Modus k in $(k - 1)$ disjunkte Klassen. Ich folge Mancusos Notation und somit sieht die zur Zahl a zugehörige Klasse so aus:

$\alpha = \{ a + nk : n \in \mathbb{Z} \}$. Wenn wir mit Repräsentanten und nicht mit den Äquivalenzklassen arbeiten, brauchen wir jedoch eine Funktion F mit $F(a) = \alpha$ bei der α das repräsentative Objekt für alle Objekte in der Äquivalenzklasse α ist. Im Falle der Kongruenz wählt man der Einfachheit wegen die Funktion, welche den „niedrigsten“ Rest modulo k ergibt und kommt somit auf die die Zahlen $0, 1, 2, \dots, (k - 1)$. Vor allem in dieser Situation gibt es einige Vorteile mit Repräsentanten zu arbeiten. Zunächst bietet sie ebenfalls eine Definition durch Abstraktion mit $\alpha = \beta \Leftrightarrow a \sim b \pmod{k}$ und in der mathematischen Praxis erlaubt uns die Funktion $F(a)$ ein explizites Ergebnis. (Beispielsweise $F(35) = 0$ im Falle modulo 5) Wenn wir ausschließlich mit den Äquivalenzklassen arbeiten, ist uns dies nicht mehr möglich. Das ist mitunter ein vorstellbarer Grund warum Frege oder die Peano-Schule zahlentheoretische Fälle wie diese nicht als Beispiele von Definitionen mithilfe von Abstraktion nannten. (vgl. Mancuso 2016, S. 32-33)

Kronecker und seine Beschreibungen der Invarianten eines Systems können hier ebenfalls eingeordnet werden. Dies lässt sich mitunter auch durch Kroneckers Einflüsse aus der Zahlentheorie erklären. So liefern uns seiner Ansicht nach die Funktionen Repräsentanten für jede Äquivalenzklasse. (vgl. Mancuso 2016, S. 17-18) Für Repräsentanten eines Systems wird in der Mathematik oft die *Normalform* bzw. *kanonische Form* herangezogen. Dies hat auch einfach praktische Gründe. So werden z. B. bei der Kongruenz Modulo 3, die kleinsten Zahlen als Repräsentanten der Klasse hergenommen, nämlich 0, 1, 2 und nicht etwa 36, 37, 38. Alle Elemente der gleichen Äquivalenzklasse können auf die kanonische Form reduziert werden.

Weyl bemerkt, dass es in vielen Fällen, wie etwa bei Kroneckers Ausführungen zu quadratischen Formen, durchaus mühsam sein kann repräsentative Objekte zu finden, zu welchen die anderen Objekte reduzierbar sein müssen. Einen Ausweg hatte man darin gesehen „das zuweisende Ding α als die Gesamtheit der mit dem Objekte a äquivalente zu erklären“, was uns wieder zurück zu den Äquivalenzklassen bringt. (Weyl 1910, S. 303) Wie wir zuvor bemerkt haben, kritisierte er gleichzeitig auch diese Ansicht. Zu Weyls Zeiten in 1910 war es allerdings durchaus etabliert in den meisten Fällen (mit Ausnahme bei mengentheoretischen Paradoxien) von Äquivalenzklassen, und nicht von Repräsentanten, als ausgegebenes Objekt der Abstraktionsfunktion zu sprechen. (vgl. Mancuso 2016, S. 38)

Ein weiterer Einwand zu Abstraktionen wie bei Kronecker oder Dirichlet ist, dass es nicht klar ist, ob uns das Abstraktionsprinzip tatsächlich neue mathematische Begriffe bzw. Objekte liefert. Die Abstraktionsfunktionen liefern uns Objekte aus der ursprünglichen Domain, somit ist nicht eindeutig ob wir tatsächlich einen Erkenntnisgewinn (mit der Definition eines vorher nicht bekannten Objektes) vollzogen haben. Definitionen durch Abstraktion, die tatsächlich neue Begriffe oder Objekte einführen, beschreiben wir mit Definitionen „in a thick sense“; Abstraktionen, die uns Objekte liefern, die schon zuvor bekannt waren, also bereits mit einer expliziten Definition eingeführt wurden, nennen wir Definitionen „in a thin sense“. (vgl. Mancuso 2016, S. 19-24)

Laut Weyl, stellen sich beide zuvor beschriebenen Möglichkeiten als problematisch dar. Eine dritte ist zu sagen, dass wir mithilfe der Abstraktionsfunktion tatsächlich neue abstrakte Objekte erhalten, die nicht als Äquivalenzklassen zu verstehen sind.

2.2.1.3 Neue Objekte durch Abstraktion?

Was wenn die Abstraktionsfunktion weder Äquivalenzklassen noch Repräsentanten der Äquivalenzklassen liefert? Können wir historische Beispiele finden, bei denen wir mithilfe einer Definition durch Abstraktion tatsächlich neue abstrakte Objekte erhalten?

Voraussetzung ist natürlich wieder, dass der mathematische Vorgang als eine Definition mithilfe von Abstraktion identifizierbar ist. Der Wert der Abstraktionsfunktion muss uns außerdem für jedes Element aus der Domain ein abstraktes Objekt liefern, das weder mit der Äquivalenzklasse, noch mit einem Element der Äquivalenzklasse übereinstimmt.

Mancuso sieht in Cantors Beschreibungen zu Grenzwerten eine solche Definition. Cantors Theorie der irrationalen Zahlen trug maßgeblich zu Freges Schaffen bei. Genau genommen verweist Frege sogar auf Cantor, als er eine Möglichkeit der Definition der Zahl mithilfe von Abstraktion beschreibt. Er sieht in Cantors Vorgehensweise einen vielversprechenden logischen Prozess, nämlich die Festlegung der *Identität von Anzahl* mithilfe einer *Äquivalenzrelation*. (vgl. Mancuso 2016, S. 38) In einem Artikel aus 1872 beginnt Cantor mit der Einführung von Cauchy-Folgen und Grenzwerten. Eine kurze Erklärung dazu sei hier angebracht: (Nicht Cantors Notation)

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt konvergent mit Grenzwert (Limes) $b \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |a_n - b| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

Man schreibt dafür $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ (Forster 2013, S.36)

Anschaulich erklärt, bedeutet eine Folge (a_n) ²¹ konvergiert gegen den Grenzwert b , wenn in jeder noch so kleinen ε -Umgebung von b fast alle Folgenglieder liegen. Wir wählen dabei N entsprechend nach ε . (vgl. Forster 2013, S. 36) Die Einführung des Grenzwertes b erhalten wir durch einen Abstraktionsprozess. Haben wir eine weitere Folge $(a_n)'$ mit Grenzwert b' so gibt es laut Cantor drei sich gegenseitig ausschließende Möglichkeiten: $b = b'$, $b > b'$ und $b < b'$. Analog gilt dies auch für eine beliebige rationale Zahl a . (vgl. Cantor 1872, S. 124) Für zwei Folgen (a_n) und $(a_n)'$ mit $|a_n - a_n'| \rightarrow 0$ bei steigendem n , welche wir respektive mit s und s' beschreiben, können wir $s \sim s'$ setzen, wenn obige Bedingung erfüllt ist. Hier haben wir es mit einer Äquivalenzrelation zu tun und können schreiben:

$$b = b' \Leftrightarrow s \sim s'$$

²¹ Cantor beschreibt $(a_n) = a_1, a_2, \dots$ in seinem Text als Reihe von rationalen Zahlen.

Wobei b das Ergebnis einer Abstraktion durch den Grenzwertoperator $\lim(s) = b$ (analog für b') ist. (vgl. Mancuso 2016, S. 40 und Cantor 1872, S. 123-124) Wir können Cantors Definition des Grenzwertes somit dahingehend als Abstraktionsprinzip mit der Abstraktionsfunktion $\lim(s)$ identifizieren. Ist der Grenzwert b nun tatsächlich als ein neues abstraktes Objekt zu interpretieren? Mancuso argumentiert, dass von einem fregischen Standpunkt die Einführung des Limes eher unbefriedigend ist, da er rein formal als Zeichen postuliert scheint. (vgl. Mancuso 2016, S. 40) Sehen wir uns dazu eine Schlüsselstelle von Cantor an:

Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: „Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze b .“

Es haben also diese Worte zunächst keinen anderen Sinn, als den eines Ausdruckes für jene Beschaffenheit der Reihe, und aus dem Umstande, dass wir mit der Reihe (1) ein besonderes Zeichen b verbinden, folgt, dass bei verschiedenen derartigen Reihen auch verschiedene Zeichen $b, b', b'', \dots$ zu bilden sind. (Cantor 1872, S.124)

Tatsächlich schreibt Cantor, dass „ $b, b', b'', \dots$ “ bloß besondere Zeichen sind, die mit den entsprechenden Reihen assoziiert werden. Allerdings können wir mithilfe des Limes auch „neue“ irrationale Zahlen definieren, wie z. B. die eulersche Zahl. Den Grenzwert als bloßes Symbol zu sehen ist somit eventuell etwas vorschnell getroffen. Es handelt sich immer noch um ein neues Objekt, welches weder mit einem Repräsentanten noch mit der Äquivalenzklasse aller äquivalenten Folgen gleichzusetzen ist.

Ein ähnliches Beispiel stellen die dedekindschen Schnitte dar. In diesem Fall schreibt Dedekind explizit, dass die neuen irrationalen Zahlen nicht mit den Schnitten gleichgesetzt werden sollen. Dedekind spricht sich für die „Erschaffung“ einer neuen Zahl, also eines neuen Objektes aus.

Mancuso verweist noch auf einen weiteren Text von Grassmann, bei dem wir den Wert der Abstraktionsfunktion tatsächlich als neues Abstrakta auffassen können, und zwar auf die *Geometrische Analyse* aus 1847. Inspiration für diese Abhandlung sah Grassman in Leibniz (der auch eine Inspirationsquelle für Frege darstellte) und dessen Ausführungen zur geometrischen Analyse und Berechnung. Ich nehme nun ein Beispiel für ein Abstraktionsprinzip aus diesem Werk heraus und zwar formuliert für ähnliche Figuren:

So können wir z.B. bei ähnlichen Figuren sagen, ihre Gestalt sei gleich, und können also statt:

$$abc \sim def$$

schreiben

$$form(a, b, c) = form(d, e, f)$$

So können wir die Gleichheit des Flächenraums zwischen je 3 Punkten oder die Gleichheit des Körperraums zwischen je 4 Punkten oder auch die Affinität durch besondere Zeichen ausdrücken. (Grassmann 1847, S. 6)

Es lassen sich jedoch noch weitere solcher Formulierungen in diesem Werk finden. Anders als bei den beschriebenen Abstraktionsprinzipien in der Zahlentheorie sind die Werte der Funktionen nicht bloß repräsentative Objekte aus der Äquivalenzklasse oder gar die Äquivalenzklasse selbst. Grassmanns Beschreibung suggeriert, dass wir es hier tatsächlich mit neuen, abstrakten Objekten zu tun haben. Außerdem ist wichtig zu erwähnen, dass Grassmann bedacht war die Substitution durch andere äquivalente Objekte zu gewährleisten. Mancuso behauptet, dass diese Passagen aus der *Geometrischen Analyse* eine der Schlüsselquellen für Freges *Grundlagen* darstellen. (vgl. Mancuso 2016, S. 51)

Eine explizite Beschreibung können wir in Peanos nach Frege erschienenem Werk *Notations de Logique Mathématique* finden. (Übersetzung aus Mancuso 2016, S. 90)

Let u be an object; by abstraction one obtains a *new object* ϕu ; [...] since ϕu is a new object whose nature is completely different from all those that have hitherto been considered. (Peano 1894, S.45)

Laut Peano erhalten wir durch Abstraktion ein neues Objekt, dessen Natur komplett anders als die der Objekte, die wir schon kennen, ist. Damit ist es ausgeschlossen, dass Peano ein repräsentatives Objekt oder die gesamte Äquivalenzklasse als Wert der Abstraktionsfunktion sieht. Mancuso weist auf einen interessanten Unterschied zu einer früheren Ausführung von Peano aus 1888 hin, in der er als Beispiel einer Abstraktion Kongruenzen aus der Zahlentheorie verwendet. In der *Notations de Logique Mathématique* suchen wir so ein Beispiel vergeblich. (vgl. Mancuso 2016, S. 91) Das könnte daraufhin zurückzuführen sein, dass Abstraktionsprinzipien mit Kongruenzen nicht tatsächlich ein neues Objekt einführen und Peano die Beispiele aus der Zahlentheorie überdachte. Wie wir gesehen haben, war es in der Zahlentheorie üblich, einen Repräsentanten aus der Äquivalenzklasse als erhaltenes Objekt der Abstraktion zu nehmen.

2.2.1.4 Eindeutigkeit der Abstraktionsfunktion

Russell hat eine große Beanstandung, die sich gegen die Eindeutigkeit der Abstraktionsfunktion richtet:

Now this definition by abstraction, and generally the process employed in such definitions, suffers from an absolutely fatal formal defect: it does not show that only one object satisfies the definition. Thus instead of *one* common property of similar classes, which is *the* number of the classes in question, we obtain a class of such properties, with no means of deciding how many terms this class contains.

(Russell 1996, S. 114)

In Russells Diskussion zum Problem der „Uniqueness“ der Abstraktionsfunktion reiht sich Padoa mit einem Artikel aus 1908. Für ihn haben Abstraktionsprinzipien folgende Form: Sei K eine Klasse und R eine Äquivalenzrelation auf dieser Klasse (hierbei ist anzumerken, dass Padoa dieser Relation das erste Mal einen expliziten Namen „equaliforme“ gibt). Wenn es zwei (individuelle) Objekte a, b gibt mit „ a, b enthalten in K “, dann gilt:

$$Fa = Fb \text{ bedeutet } aRb$$

wobei F die Funktion ist, die wir definieren wollen. Zum Beispiel: Wenn K die Klasse der Polygone ist und a und b sind Polygone, dann gilt: " $area\ of\ a = area\ of\ b$ " bedeutet a ist äquivalent zu b . Padoa merkt an, dass es nicht eindeutig sei, welche Eigenschaft F uns liefert. Somit könnte F uns auch andere Eigenschaften ausgeben wie etwa „*two times the area of*“. Eine Definition dieser Form kann uns also unendlich viele verschiedene Bedeutungen und Eigenschaften liefern. Dies führt uns zu einem Problem, denn es scheint nicht möglich alle Eigenschaften zu finden, welche die Definition erfüllen und mit „*area of*“ austauschbar sind. (vgl. Mancuso 2016, S. 103-105) In der weiteren Diskussion wird es auch nötig sein zu untersuchen, ob die Abstraktionsfunktion eindeutig bzw. einzigartig in dem Sinne ist, dass sie uns *eine* bestimmte Eigenschaft bzw. *ein* eindeutiges Objekt liefert.

Fassen wir nun das wichtigste nochmals zusammen. Die Abstraktionsfunktion steht im Zentrum des Abstraktionsprozesses, da sie von allen nicht relevanten Eigenschaften absieht und uns eine bestimmte Eigenschaft der Objekte, die in der Äquivalenzrelation zueinander stehen, liefert. Wir extrahieren eine *gemeinsame* Eigenschaft. Die Werte der Abstraktionsfunktion dieser Objekte ist *gleich*. Aus der mathematischen Praxis des 19. Jahrhunderts lässt sich entnehmen, dass wir drei verschiedene mathematische Objekte durch

Abstraktion erhalten können: ein repräsentatives Objekt aus der Äquivalenzklasse, die gesamte Äquivalenzklasse oder ein anderes, neues abstraktes Objekt (um was für ein Objekt es sich auch immer handeln soll). War die Äquivalenzklasse als erhaltenes Objekt der Abstraktionsfunktion zu Freges Zeit noch eher unüblich, wurde sie in späteren Beschreibungen (wie z. B. Russell) jedoch immer geläufiger. Folgen wir dieser Ansicht, müssen wir bei Abstraktionsprinzipien wie Freges Basic Law V allerdings einige logische Einwände aufarbeiten. Andere Mathematiker und Mathematikerinnen favorisieren Abstraktionen in „a thick sense“ und sehen den Wert als ein neues abstraktes Objekt, dessen Wesen wir nicht beschreiben können (oder müssen).

2.2.2 ÄQUIVALENZRELATION, BIKONDITIONAL UND GLEICHHEIT

Bei einem Abstraktionsprinzip der Form $F(a) = F(b) \leftrightarrow a \sim b$ haben wir es mit einigen logischen Relationen und Beziehungen zu tun: einerseits die Gleichheit der Werte der Abstraktionsfunktion, die Äquivalenzrelation und schließlich noch die logische Verbindung der rechten und linken Seite des Abstraktionsprinzips durch ein Bikonditional. Ich möchte mir nun nach der Reihe die einzelnen Komponenten auch in historischer Perspektive ansehen und mit dem modernen logischen Verständnis vergleichen.

2.2.2.1 Gleichheit

Wie Frege bemerkte, ist der Begriff und das Verständnis von Gleichheit essenziell für seinen Vorgang der Abstraktion. Mit einer genaueren Untersuchung was genau es für zwei Objekte bedeutet „gleich zu sein“, will er der Analyse der „Gleichheit von Anzahlen“ näher kommen. Dafür verweist er auf einen Satz von Leibniz:

„Eadem sunt, quorum unum potest subsitui alteri salva veritate.“ (Frege 1987, S.97)

Def.1. [...] Dieselben sind, wovon eines für das andere unbeschadet der Wahrheit eingesetzt werden kann. (Künne 2010, S.110)

Das bedeutet, dass wir „gleiche Objekte“ gegeneinander austauschen (substituieren) können, und der Wahrheitsgehalt der Aussage, in der sie vorkommen, bestehen bleibt. Im Fall von Freges Abstraktionsprinzip für Richtungen bedeutet das, dass wir die „Richtung der Gerade a “ jederzeit mit der „Richtung der Gerade b “ ersetzen können.

Mancuso gibt einige Beispiele aus der mathematischen Praxis, die Freges Beschreibung zur Gleichheit sehr ähneln, und ihn mitunter auch zu seinem aufgestellten Abstraktionsprinzips von Richtungen inspirierten. Eine von ihm vorgestellte Passage aus Grassmanns *Ausdehnungslehre* halte ich dabei für besonders aufschlussreich:

Es ist hier zuerst der Begriff der Gleichheit und der Verschiedenheit festzustellen. [...] so scheint es bei oberflächlicher Betrachtung nöthig, verschiedene Beziehungen der Gleichheit und der Verschiedenheit aufzustellen; so würde z.B. bei Vergleichung zweier begrenzter Linien die Gleichheit der Richtung oder der Länge, oder der Richtung und Länge, [...] u.s.w. ausgesagt werden können, und bei andern zu vergleichenden Dingen würden wieder andere Beziehungen der Gleichheit hervortreten. Aber schon, dass diese Beziehungen andere werden je nach der Beschaffenheit der zu vergleichenden Dinge, liefert den Beweis dafür, dass diese Beziehungen nicht dem Begriff der Gleichheit selbst angehören, sondern den Gegenständen, auf welche derselbe Begriff der Gleichheit angewandt wird. In der That von zwei gleich langen Strecken z.B. können wir nicht sagen, dass sie an sich gleich sind, sondern nur, dass ihre Länge gleich sei, und diese Länge steht dann eben auch in der vollkommenen Beziehung der Gleichheit. Somit haben wir den Begriff der Gleichheit seine Einfachheit gerettet, und können denselben dahin bestimmen, dass gleich dasjenige sei, von dem man stets dasselbe aussagen kann oder allgemeiner, was in jedem Urtheile sich gegenseitig substituirt werden kann. Wie hierhin zugleich ausgesagt liegt, dass wenn zwei Formen einer dritten gleich sind, sie auch selbst einander gleich sind, und dass das auch dem Gleichen auf dieselbe Weise erzeugte wieder gleich sei, liegt am Tage. (Grassmann 1844, S. 1-2)

Grassmann fasst auf diesen Zeilen zusammen, was wir unter der Gleichheit zwischen Objekten verstehen sollen. Die Parallelen zu Frege sind nur unschwer erkennbar und, gegeben, dass Frege Grassmanns Werke vermutlich kannte, auch nicht verwunderlich. Grassmann bemerkt hier, dass (beim Vergleich zweier Linien) Gleichheit nicht im Sinne der Linien an sich besteht, sondern einer bestimmten Eigenschaft der Linien, in etwa der Länge. Die Länge der beiden Strecken wird verglichen und steht somit in Beziehung. Zwei Strecken können verschieden sein, aber deren Länge (oder Richtung) ist ident. Was daher wirklich gleich ist, und nach Grassmann jeweilig gegenseitig substituiert werden kann, ist die bestimmte (abstrakte) Eigenschaft. Ein Beispiel für eine Gleichartigkeit liefert er in §14 bei der Parallelität von Linien. Zuvor beschreibt er die Erzeugung von Linien mithilfe eines erzeugenden Punktes, welcher gleiche Änderungen erfährt und nennt diese

Ausdehnungsgebilde. Wenn zwei unterschiedliche erzeugende Punkte gleichermaßen eine *Grundänderung* erfahren, das heißt zwei Ausdehnungsgebilde auf gleiche Weise erzeugt werden, können sie gleichgesetzt werden. Grassmann definiert *gleiche* Strecken als begrenzte Linien, die *gleiche Länge* und *Richtung* haben. (vgl. Grassmann 1844, S. 17-18) Auch wenn die Strecken an sich nicht ident sind, besteht für ihn die Gleichheit aufgrund der zwei Eigenschaften. Wir haben es hier eindeutig mit einer Abstraktion zu tun. Die Methode, eine bestimmte Eigenschaft eines Objektes zu abstrahieren, welches wir dann vergleichen können, ist hier klar beschrieben. Mancuso argumentiert sogar, dass Grassmanns Beschreibung von gleichen Strecken als gleichbedeutend mit der Definition von Vektoren mithilfe von Abstraktion ist. (vgl. Mancuso 2016, S. 49) Mancuso sieht in Grassmanns *Ausdehnungslehre* eine ausgezeichnete Quelle für Definitionen mithilfe von Abstraktion. Obwohl sich Freges Abstraktionsprinzip in der heutigen philosophisch-mathematischen Debatte durchgesetzt hat und ausgiebig diskutiert wird, ist seine Schrift allerdings kein Einzelfall einer exemplarischen Beschreibung einer Abstraktion.

Wir können uns laut Frege keinen Sinn aus dem Satz „die Richtung von $a = q$ “ für q machen, da wir nicht wissen ob q eine Richtung ist oder nicht. Es ist somit für die Gleichheit auch essenziell, dass wir zwei Objekte *gleicher Art* vergleichen. So können wir beispielsweise den Satz $|\{2, 3\}| = 2$ überprüfen, $\{2, 3\} = 2$ macht für uns dagegen weniger Sinn.²² Dies veranlasste Frege auch zur Formulierung seiner Umfänge von Begriffen, da wir nicht nur ein bloßes Zeichen q einführen wollen, von dem wir nichts weiter wissen. (vgl. Frege 1987, S. 99-100)

2.2.2.2 Äquivalenzrelation

Wie wir gesehen haben, ist es für eine Definition durch Abstraktion eine Notwendigkeit, dass eine Äquivalenzrelation zwischen zwei mathematischen Objekten vorliegt. In der heutigen Mathematik und Logik erfüllt eine Äquivalenzrelation folgende Bedingungen: Reflexivität ($a \sim a$), Symmetrie ($a \sim b = b \sim a$) und Transitivität ($a \sim b \wedge b \sim c \rightarrow a \sim c$).

Die Entwicklung zu einer expliziten, einheitlichen Festlegung hat allerdings etwas gedauert und geht gar nicht so weit zurück wie man vielleicht meinen mag. Auch wenn der Begriff „Äquivalenz“ in mathematischen Arbeiten immer wieder auftauchte (in Werken der Zahlentheorie wie bei Gauss, Dirichlet, Dedekind, oder auch in der Algebra bei Cauchy und

²² $|A|$ einer Menge A , gibt uns die Kardinalität der Menge an. Eine alternative Schreibweise stellt die Funktion „#“ dar.

Weber, etc.), hatte es jedoch über ein Jahrhundert gedauert, bis sich der Terminus auch für Äquivalenzrelationen durchsetzte. Die Peano-Schule mit Padoa legte dann 1908 mit dem Begriff „relazione egualiforme“ erstmals den Namen für eine Relation, die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität erfüllt, fest. (vgl. Mancuso 2016, S. 21-22)

Allerdings können wir unabhängig von einer klaren Benennung des Begriffes auch unterschiedliche Beschreibungen der Bedingungen finden, wie etwa $a \sim b \wedge a \sim c \rightarrow b \sim c$.

Äquivalenzrelationen der angeführten Beispiele waren etwa die Parallelität von Linien, eins-zu-eins Zuordnung der Objekte einer Menge, oder auch die Kongruenz. Hierbei möchte ich gleich einen wesentlichen Unterschied zur Gleichheit am Beispiel der Kongruenz hervorheben. Wenn wir sagen die Zahl 3 ist kongruent zu 11 modulo 4 ($3 \equiv 11 \pmod{4}$), ist das keinesfalls mit einer Gleichheit bezüglich des Modus 4 zu verwechseln. Dies kritisierte auch Grassmann in seiner *Geometrischen Analyse* an der Vorgehensweise Leibniz, der seine Beschreibungen von Gleichheit auf den Grund von Kongruenzen gestützt hatte. Somit könne man in einer Kongruenzgleichung keinesfalls jeden Ausdruck mit dem ihm kongruenten ersetzen. (vgl. Grassmann 1847, S. 5) Wie ich in dem vorigen Teil zur Abstraktionsfunktion beschrieben habe, bräuchte es eine Funktion, die jeder kongruenten Zahl das gleiche Objekt zuweist, damit man eine Gleichheit aufstellen könnte. Gleich ist, wie Grassmann deutlich kommuniziert, eine bestimmte Eigenschaft der Objekte, nicht die Objekte selbst. Genau genommen stützt sich unser Abstraktionsprozess doch genau auf den Vorgang, von zwei (verschiedenen) Objekten, die in einer Äquivalenzrelation zueinander stehen, eine Eigenschaft auszumachen, die wir dann auch mithilfe einfacher Gleichheit vergleichen können.

2.2.2.3 Der Bikonditional

Der Bikonditional „ $\Leftrightarrow$ “ (oder in der Literatur auch oft „ $\leftrightarrow$ “) ist eine binäre logische Relation, die zwei Aussagen dahingehend verbindet, dass sie entweder beide wahr oder beide falsch sind. In logischer Hinsicht hat der Bikonditional die gleichen Wahrheitswerte wie die Negation des ausschließenden Oder. Bei einem Beweis müssen „beide Richtungen“ ($A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$) gezeigt werden. Der Bikonditional drückt somit sowohl eine hinreichende als auch notwendige Bedingung aus.

Obwohl beide Seiten des Bikonditionals den selben Wahrheitsgehalt aufweisen, bedeutet dies nicht, dass sie den selben Inhalt bzw. Bedeutungsgehalt haben. Wir haben es auf der linken

Seite unseres Abstraktionsprinzips mit anderen mathematischen Objekten zu tun, als auf der rechten Seite.

In Peanos Werken kann man etliche Beispiele und Beschreibungen zu Abstraktionsprinzipien finden. Mancuso bietet eine recht ausführliche Beschreibung von Abstraktionsprinzipien rund um die Peano Schule. Ich möchte hier nur auf einige Besonderheiten hinweisen. Peanos 1894 erschienene Werk *Notations de Logique Mathématique* enthält eine recht aufschlussreiche Ausführung zu Abstraktionsprinzipien. Genau genommen spricht Peano nicht explizit von „Definitionen mithilfe von Abstraktion“, räumt jedoch ein, dass man neue Konzepte durch Abstraktion erhält und dafür eine Äquivalenz definiert. Er schreibt, dass man durch eine Abstraktionsfunktion (angewandt auf ein Objekt u) ein neues Konzept erhält und schreibt dafür „ ϕu “. Da ϕu ein völlig neuer Begriff ist, welchen wir nicht mit einem expliziten bekannten Ausdruck definieren können, müssen wir eine Gleichheit mit dem gleichem gleichen Begriff aufstellen. Er definiert das Abstraktionsprinzip folgendermaßen:

$$h_{u,v} \rightarrow : \phi u = \phi v = p_{u,v}$$

Wir schreiben $h_{u,v}$ für die Annahme, die wir für u und v aufstellen, $\phi u = \phi v$ ist die Gleichheit die definiert wurde, und $p_{u,v}$ steht für eine Bedingung oder Relation zwischen den beiden Objekten. Hierbei ist interessant zu sehen, dass Peano statt dem Bikonditional ein „ $\rightarrow$ “-Zeichen setzt und stellt damit die Behauptung auf, dass die rechte und die linke Seite des Abstraktionsprinzips die gleiche Bedeutung beziehungsweise denselben Inhalt haben. Diese logische Schreibweise wird von vielen Anhängern der Peano-Schule angenommen und wiederholt (darunter z. B. Burali-Forti), allerdings von vielen anderen Mathematikern kritisiert werden. (vgl. Mancuso 2016, S. 90) Padoa in seinen 1908 „Dell’astrazione matematica“ beschreibt den Abstraktionsprozess allerdings genau mit einem Bikonditional, in dem er schreibt $Fa = Fb$ dann, und nur dann, wenn " aRb ". (vgl. Mancuso 2016, S. 106)

Nun sind alle Komponenten eines Abstraktionsprinzips der Form $F(a) = F(b) \leftrightarrow a \sim b$ besprochen. Ich möchte noch einmal festhalten, dass das, was wir damit tatsächlich definieren wollen, die Funktion F ist.²³ Wir haben es hier mit einer *impliziten*²⁴ Definition innerhalb

²³ In weiterer Folge werde ich auch von einem Abstraktionsoperator sprechen.

²⁴ Eine implizite Definition ist die Stipulation eines Satzes, in der das zu Definierende enthalten ist und legen fest, wie mit dem Definiendum „umzugehen“ ist. Bei Abstraktionsprinzipien geschieht dies durch das Aufstellen einer Gleichheit. Eine explizite Definition, für ein neues Objekt x wäre Aussage der Form $x = \varphi$ mit einem Satz φ , dessen Bedeutung wir kennen und in dem das zu Definierende nicht enthalten ist. (vgl. Christopolou 2014, S. 36)

eines Kontextes zu tun, in der die Objekte auf der rechten Seite des Abstraktionsprinzips uns bereits bekannt sind. Essenziell ist dabei, dass beide Seiten mit einem Bikonditional verbunden sind, somit der Wahrheitsgehalt der linken und rechten Seite übereinstimmt. Einige Mathematiker darunter Russell und Anhänger der Peano-Schule stellten Versuchen an Definitionen mithilfe von Abstraktion in *explizite* Definitionen zu überführen. Dies stellte sich vor allem bei Kardinalitäten als problematisch dar, da sie zu dem von Russell formulierten Paradoxon führen. Auch für Peano und einen seiner Schüler Burali-Forti stand fest, dass die Definition der Zahl eine explizite sein sollte, jedoch räumten beide ein, dass man mit den zu ihrer Zeit vorliegenden Erkenntnissen, Cantors Theorie der Kardinal- und Ordinalzahlen auf keine expliziten Definitionen reduzieren könne. (vgl. Mancuso 2016, S. 97-98) Auch Frege versuchte, mithilfe seiner vorhin formulierten impliziten Definition, eine explizite Definition von Anzahlen aufzustellen, die ihn zu der Formulierung der Umfänge von Begriffen führte. Doch auch in seinem Basic Law V ist das zu Definierende nicht explizit definiert. Wright später argumentierte, dass es bei einer Definition mithilfe von Abstraktion nicht möglich sei das Definiendum in allen Sätzen des Definiens²⁵ zu eliminieren. Eine explizite Definition der Form $q = N \approx G$, also die eins-zu-eins-Zuordnung der Elemente zweier Begriffe, kann nur aufgestellt werden, wenn q die gleiche Form hat. In der heutigen Diskussion steht also fest, dass Abstraktionsprinzipien implizite Definitionen sind. (vgl. Christopoulou 2014, S. 37-38)

2.3 FAZIT

Wir kommen nun zum Ende des Kapitels. Wie wir gesehen haben, hat die Methode der Abstraktion in der Mathematik lange Tradition, auch schon bevor Frege und folgend andere Mathematiker deren erkenntnistheoretischen Möglichkeiten für die Mathematik erkannten. Waren Beschreibungen rund um den Abstraktionsvorgang noch von intuitiven bzw. psychologischen Vorgängen gekennzeichnet, wurde der Prozess jedoch immer weiter konkretisiert und mit logischen Prinzipien untermauert.

Der große Punkt in dem sich die Interpretationen der Abstraktionsprinzipien verschiedener Mathematiker unterscheiden, ist der Wert, den die Abstraktionsfunktion ausgibt. Dies hat

²⁵ Definiendum = das zu definierende; Definiens = das definierende; in einer expliziten Definition der Form „Frau = ein erwachsener, weiblicher Mensch“ ist „Frau“ das Definiendum und „erwachsener, weiblicher Mensch“ das Definiens.

mitunter auch damit zu tun, welcher mathematischen Disziplin sie dienen soll. So war es vor allem in der Zahlentheorie üblich, Repräsentanten der Äquivalenzklasse zu verwenden. Die Äquivalenzklasse selbst als Wert der Abstraktionsfunktion zu sehen, war vor Freges *Grundlagen der Arithmetik* unüblich, wurde allerdings von vielen Mathematikern danach aufgegriffen. Eine weitere Innovation Freges auf diesem Gebiet war seine Logik zweiter Stufe mit seinen „Umfängen von Begriffen“, die später von Russell als „Klassen von Klassen“ formuliert wurden. Freges Werk ist deshalb auch so interessant, da er mithilfe von Abstraktionsprinzipien ein zusammenhängendes, logisches System der Arithmetik aufbauen wollte. Frege war der Ansicht, dass beim Zugang zu abstrakten Objekten keine Intuition zugelassen werden durfte.

Wir erinnern uns an Dedekind und seine Vorgehensweise zu einer Definition von natürlichen Zahlen. Auch Dedekind hat sich einem Programm zur Erklärung der Arithmetik verschrieben. Seine Methode war allerdings mehr an die Beschreibung der natürlichen Zahlenstruktur geknüpft. Dedekinds Abstraktion drückt sich rein darin aus von „den besonderen Eigenschaften der Elemente n (eines Zahlensystems) abzusehen“, also alle Eigenschaften, außer deren Beziehung zueinander, wegzurationalisieren. Eine explizite Beschreibung der logischen Regeln und Bedingungen bleibt bei ihm aus.

So vielversprechend Abstraktionsprinzipien scheinen, gibt es doch einige Punkte, derer sich Mathematiker und Logiker noch nicht einig werden konnten. Zum Einen wird die Frage aufgeworfen ob wir als Wert einer Abstraktionsfunktion Äquivalenzklassen sehen oder ob es sich um „einfache“ Entitäten handelt. Wie wir gesehen haben, favorisieren einige Mathematiker Abstraktionen in „a thick sense“ und sehen den Wert als ein neues abstraktes Objekt, dessen Wesen wir nicht beschreiben können (oder müssen). Zweitens herrschen Unstimmigkeiten zu semantischen Überlegungen, wie die Unbestimmtheit und Bedeutung der durch Abstraktion erhaltenen Begriffe. Definiert eine Abstraktionsfunktion nur einen bestimmten Begriff? Oder doch mehrere? Ist die Bedeutung der rechten und linken Seite der Abstraktionsprinzipien gleich oder doch in anderer Weise zu interpretieren?

Wie wir diese Fragen beantworten, wirkt sich auch auf das Verständnis von mathematischen Strukturen im Strukturalismus aus und die Debatte darüber reicht bis in die heutige Zeit. Auch die moderne Diskussion muss sich diesen Fragen und weiteren Problemen wie *Russell's Paradox* und dem *Julius Caesar Problem* stellen.

3 AKTUELLE DEBATTEN RUND UM ABSTRAKTIONSPRINZIPIEN

Zunächst sei einmal zusammengefasst, was wir über Abstraktion bis jetzt wissen. Wann immer zwei Objekte in einer Äquivalenzrelation zueinander stehen, können wir eine gemeinsame Eigenschaft extrahieren, hinsichtlich derer sie gleich sind. Dieses Prinzip wurde von Frege anschaulich am Beispiel der Parallelität von Geraden erfasst.

$$d(l_1) = d(l_2) \leftrightarrow l_1 \parallel l_2$$

Diese Art des Erkenntnisgewinns über neue Konzepte bzw. Objekte stellt einen zentralen Punkt dar, wie wir Mathematik verstehen wollen. Was uns in der Mathematik interessiert, sind auftretende Äquivalenzen bzw. Invarianzen mathematischer Objekte. Frege spricht bei seinem Abstraktionsprinzip von einer „Zerspaltung“ des Inhalts der rechten Seite, um, anders aufgeschrieben auf der linken Seite, einen neuen Begriff zu erhalten. Dabei muss die Anschauung von parallelen Geraden bereits gegeben sein, um die linke Seite begreifen zu können. Die Eigenschaft der Parallelität zweier Linien wird auf die Eigenschaft der Richtung „übertragen“, bzw. „vererbt“. Dabei ist wichtig zu erwähnen, dass es von keiner Relevanz ist, welche Geraden wir auswählen, solange sie die Äquivalenzrelation erfüllen. Wie wir gesehen haben, herrschten bei den Mathematikern und Philosophen des 19. und 20. Jahrhunderts Uneinigkeiten über den Wert der Abstraktionsfunktion, in diesem Beispiel exemplifiziert durch d . Wie verstehen wir den neuen Begriff der Richtung? Einfach als „leere“ Funktion, als einen Begriff bzw. ein Konzept oder gar als ein neues abstraktes Objekt? Auch die Bedeutung der „Zerspaltung des Inhalts“ ist unter Philosophen und Philosophinnen heutzutage noch viel diskutiert.

Wenn wir Freges Konzeption folgen, stoßen wir sehr bald auf Probleme, wie das *Julius Caesar Problem* und *Russell's Paradox*. Russell und Whitehead formulierten daraufhin in ihrer *Principia Mathematica* eine neue Theorie, die diesem Problem entgegenwirken sollte, namentlich der „Theory of Types“. Aufgrund der Komplexität der Theorie folgt eine Skizzierung einer simplifizierten Methode, der „Simple Theory of Types“ (STT), propagiert durch Ramsey. Die STT unterscheidet scharf zwischen verschiedenen mathematischen Objekten und teilt sie in Gruppen nach Stufen ein: Einfache Entitäten bilden somit die Gruppe der Stufe Null, Klassen von einfachen Entitäten die Stufe eins, Klassen von Klassen von einfachen Entitäten die Stufe zwei, usw. Dabei hat jede Stufe ihre eigene Menge an Variablen und Konstanten. Eine Aussage der Form $s \in t$ wird nur zugelassen, wenn t genau eine Stufe höher als s ist. Das Statement $x \notin x$ der Russelklasse ist damit nicht zulässig. Das Problem

von *Russell's Paradox* wird somit durch eine starke Einschränkung der mathematischen Sprache gelöst. (vgl. Ramsey 1931 S. 46-47 und Linnebo 2017, S. 130) Eine weitere Stärke der STT ist, dass mathematische Abstraktion mit der Ausgabe von Äquivalenzklassen ermöglicht wird. Wir vergleichen beispielsweise die Anzahlen von Objekten gleicher Stufe und nehmen als Wert der Abstraktionsfunktion die Klasse aller Objekte, die zueinander in eins-zu-eins Korrelation stehen.

Von einem logischen Standpunkt her wurde diese Theorie von Mathematikern und Mathematikerinnen allerdings als nicht befriedigend bewertet und mit der Mengentheorie durch Zermelo und Fraenkel ersetzt. Die syntaktische Einschränkung, schließt auch Freges Argument von unendlicher Anzahl aus (§84, *Grundlagen der Arithmetik*). Mit einer Einführung des Unendlichkeitsaxioms würden wir allerdings den Boden der reinen Logik verlassen. (vgl. Linnebo 2017, S. 131 und Tennant, 2017)

In meinen weiteren Ausführungen möchte ich mich zentralen Möglichkeiten der Abstraktion widmen, die in der modernen Debatte viel diskutiert werden. Nach einem kurzen Überblick der neo-fregischen Abstraktion und folgend dynamischer Abstraktion, widmen wir uns bereits Ansätzen struktureller Abstraktionsprinzipien. Dabei werde ich unter anderem zentrale Werke und Essays von Hale und Wright, sowie Linnebo und Pettigrew heranziehen, wobei sich Letztere vordergründig einer strukturellen Abstraktion widmen.

3.1 NEUE CHANCEN FÜR FREGE – HALE UND WRIGHT ÜBER ABSTRAKTIONSPRINZIPIEN

Freges Abstraktionsprinzip mithilfe *Hume's Principle* (HP) und seine Beschreibung von Umfängen von Begriffen zur Definition von Anzahlen, stießen auf Probleme, die schließlich in dem Rückzug seines Unternehmens im Dienste der Logik mündeten. Wright macht in seinem 1983 erschienenem Werk *Frege's Conception Of Number as Objects* einen bahnbrechenden, jedoch gewagten Vorschlag. Wenn wir keine Lösung für Russell's Paradox hinsichtlich der Klassen von Begriffen finden können, warum lassen wir diesen Schritt nicht einfach weg? Das bedeutet Freges aufgestelltes Basic Law V aufzugeben und uns mit der ersten Form seines Abstraktionsprinzips nach *Hume's Principle* zu begnügen. Wrights Idee mündete schließlich in einer neuen philosophischen Position des Neo-Fregeanismus (oder

Neo-Logizismus), die vorrangig von Wright und Hale konzipiert wurde. (vgl. Linnebo 2017, S. 132)

Zwei zentrale Punkte müssen gezeigt werden, wenn wir Freges BLV vernachlässigen wollen. Wenn BLV, wie von Russell gezeigt, keine rein logische Wahrheit darstellt, wie sieht es dann mit *Hume's Principle* aus? Und: brauchen wir eine neue Strategie wie wir *Caesar's Problem* entgegenwirken können?

3.1.1 DIE LÖSUNG FÜR CAESAR?

Hale und Wright widmen sich diesem Problem in ihrem Essay „To Bury Caesar...“ aus 2001. Es wird gleich zu Beginn des Artikels bemerkt, dass Freges Überleitung, von dem Abstraktionsprinzip folgend *Hume's Principle*, zu *Basic Law V*, *Caesar's Problem* gar nicht umgeht, stellt das Letztere doch nur eine allgemeinere Beschreibung des gleichen Prinzips dar. (vgl. Hale und Wright 2001, S. 339) Sie gehen noch weiter zu sagen, dass das eigentliche Interesse *Hume's Prinzip* gewidmet sein solle. Alles was Frege mit seinem *Basic Law V* zu zeigen versuchte, war eigentlich HP zu beweisen. *Hume's Principle*, als einziges, hinzugefügtes Axiom mit einer Standardlogik zweiter Stufe bringt uns eine konsistente Theorie, von welchen wir die Dedekind-Peano Axiome ableiten können. Dieses Ergebnis wurde als *Freges Theorem* unter George Boolos bekannt. (vgl. Hale und Wright 2001, S. 340 und Zalta 2019)

Hale und Wright geben sich *Caesar's Problem* gegenüber zunächst skeptisch. Sie bemerken, dass sogenannte „mixed identity“-Statements der Form "Julius Caesar" = 3, in der Arithmetik gar nicht vorkommen, bzw. nicht von Relevanz sind.

Why should an account be reckoned as incomplete which fails to resolve such outré questions? What importance do they have for the understanding of number theory?

(Hale und Wright 2001, S. 340)

Jedoch hatte Frege, neben der Sorge für „mixed-identity“-Statements, auch noch im Sinn die Essenz der Zahlen als mathematische Objekte zu definieren. Er sah Zahlen als „selbstständige Gegenstände“, vertrat also einen Objekt-Realismus gegenüber den Zahlen. Wenn wir dies berücksichtigen, ist es doch wichtig zu klären, worin sie sich von anderen Objekten unterscheiden und deren Anwendung genau zu definieren. Somit kann es nicht unbestimmt

bleiben, wie wir mit solchen Statements, die *Hume's Principle* zulässt, umgehen sollen. Hale und Wright sprechen außerdem das *Generality Constraint* von Gareth Evans an. Danach muss, wenn *Hume's Principle* für Aussagen der Form $\#x Fx = \#x Gx$ gilt, auch für jegliche abgeleiteten Sätze mit Permutation der einzelnen Bestandteile, also z.B. „3“ durch „Julius Caesar“, gelten. (vgl. Hale und Wright 2001, S. 341-342) Wenn wir diese Einwände berücksichtigen, müssen wir tatsächlich einen genaueren Blick auf dieses Problem werfen und es nicht einfach beiseite wischen.

Hale und Wright versuchen, darauf mit „kategorischer Angemessenheit“ zu antworten. Die angesprochene *Generality Constraint* verlangt vermeintlich größere Generalität in der Anwendung, als tatsächlich nötig ist. Sie argumentieren, dass Prädikaten in natürlichen Sprachen ein gewisses Spektrum an Objekten zu Verfügung steht, für die es Sinn macht, ihnen dieses Prädikat zuzuschreiben. Wenn ich über eine Identität zwischen zwei Objekten nachdenke, muss diese Identität nur eine Antwort liefern, wenn sich die beiden Objekte in derselben Kategorie befinden, oder anders gesagt in dem relevanten Spektrum der „kategorischen Angemessenheit“. (vgl. Hale und Wright 2001, S. 344)

[...] the point remains that the „single“ *atomic predicate* in question here is „... = ...“, and the thought dies hard that identity is categorially appropriate simply to any *objects* – numbers, polar explorers, emperors, directions, the Equator, whatever. (Hale und Wright 2001, S. 344)

Wir müssen demnach untersuchen, wann Identitätsstatements Sinn machen. Dafür verwenden Hale und Wright ein passende „Identitätskriterien“. Wenn wir eine Aussage wie Frege von Gleichheit von Richtungen tätigen, erhalten wir eine eindeutige Eigenschaft, die beide Objekte teilen: die Richtung. Verschiedene Prädikate, oder Begriffe gelten für gewisse Objekte, demnach können wir sie voneinander unterscheiden. Hale und Wright geben einige Beispiele für sortale Konzepte, wie Berg, Fluss, Person, Zahl, etc., unter die beispielsweise respektive folgende Objekte fallen: Mount Everest, die Donau, Queen Elizabeth, oder die Zahl 3. Die sortalen Konzepte werden assoziiert mit ihrem Identitätskriterium. (vgl. Hale und Wright 2001, S. 388)

All pure sortal concepts are in this way associated with their own specific criteria of identity: what counts as establishing – or wherein consists – the truth of an identity statement depends upon what (pure) sort of thing the claim of identity concerns.

(Hale und Wright 2001, S. 388)

Verschiedene sortale Konzepte stehen oft in Assoziation mit dem gleichen Identitätskriterium, und sind nur in ihrer Anwendung unterscheidbar. Als Beispiel nennen Hale und Wright einen „Tiger“ und einen „Tiger mit einem Dorn in der Pfote“. Beide teilen das Identitätskriterium „Katze“ oder „Säugetier“. Demnach sollten wir ein „maximally extensive“ sortales Konzept verwenden, das bedeutet, ein Konzept und alle Unter-Konzepte teilen das gleiche Identitätskriterium, aber alle Objekte, die nicht unter dieses Konzept fallen, besitzen auch nicht dessen Identitätskriterium. Ein solches „maximally extensive“ sortales Konzept, nennen wir Kategorie. (vgl. Hale und Wright 2001, S. 388-389)

Mit dieser Form von Identitätskriterium können wir nun *Caesar's Problem* entgegenwirken. Alle Objekte der gleichen Kategorie finden auf das gleiche Identitätskriterium Anwendung. Die Kategorie der „Zahlen“ wird mit einem Identitätskriterium folgendend *Hume's Principle* assoziiert. Eine andere Kategorie, beispielsweise von „Person“, wird mit einem Identitätskriterium assoziiert, welche die Identität von Personen festlegt. Wir können beispielsweise Personen nicht mit dem Identitätskriterium von *Hume's Principle* vergleichen, oder Objekte verschiedener Kategorien. (vgl. Hale und Wright 2001, S. 389)

Zwei Formen der Kritik stellen sich allerdings gegen diesen Lösungsvorschlag. Einerseits sehen manche Mathematikerinnen und Mathematiker es als nützlich Identitätsaussagen zwischen Objekte verschiedener sortaler Konzepte zu machen (wie etwa den natürlichen, reellen und komplexen Zahlen). Auch Linnebo (2018) spricht sich gegen eine völlige Ablehnung von Identitätsaussagen von Objekten unterschiedlicher Kategorien aus. Andererseits wird argumentiert, dass Hale und Wrights Ansatz kein angemessenes „criterion of application“ für HP liefert.²⁶ (vgl. MacBride 2003, S. 129-130)

3.1.2 HUME'S PRINCIPLE GENAUER BETRACHTET

So viel zur Entgegnung zu *Caesar's Problem* im Neo-Logizismus. Widmen wir uns nun noch kurz *Hume's Principle* selbst. Wenn es eine logische Wahrheit darstellen soll, muss es in allen Modellen wahr sein. *Hume's Principle* ist jedoch nur in unendlichen Modellen wahr. Anhänger und Anhängerinnen des Neo-Fregeanismus berufen sich oft darauf, dass *Hume's Principle* „nur“ ein *a priori* Prinzip sein muss, dessen Aufgabe es ist, Identität zwischen

²⁶ **Criterion of Application:** Ein Kriterium, dass zwischen Objekten unterscheidet, auf welche unser Konzept (in etwa HP) angewandt werden kann und auf welche nicht (vgl. MacBride 2003, S. 128). Für nähere Information zu Kritik rund um Hale und Wrights Ansatz, siehe MacBride (2003).

Kardinalzahlen nicht zu *definieren*, sondern lediglich zu *erklären*. (vgl. Linnebo 2017, S. 134 und Hale und Wright 2001, S. 137)

Zwei Punkte untermauern diese Behauptung. Erstens sah Frege in seinem Prinzip eine „Zerspaltung“ des Inhalts der rechten Seite um einen neuen Begriff auf der linken Seite zu erhalten. Der „besondere“ Inhalt wird dermaßen auf beide Objekte verteilt, um ein „=“-Zeichen zwischen sie setzen zu können. (vgl. Frege 1987, S. 96) Wie doch bereits erwähnt, wird heute noch diskutiert, wie genau das verstanden, oder konkretisiert werden soll.²⁷ Der zweite ist, dass *Hume's Principle* eine *implizite* Definition der Zahl darstellt. (Dies steht im Gegensatz zu Unternehmungen früherer Mathematiker, die versuchten, Definitionen mithilfe von Abstraktion in explizite Definitionen zu überführen.) Nichtsdestotrotz, wenn die implizite Definition hält, liefert sie uns eine a priori Erkenntnis über Zahlen und deren Eigenschaften. Es sei allerdings dazu gesagt, dass implizite Definitionen mit einer vorhergehenden, substanziellen Annahme einhergehen.²⁸ Sieht unsere Definition mit *Hume's Principle* der gleichen Problematik ins Auge? (vgl. Linnebo 2017, S. 134)

In ihrem 2009 erschienenem Artikel „Metaontology of Abstraction“ widmen sich Hale und Wright den Fragen, wie wir sichergehen können, dass der Übergang von der rechten zur linken Seite des Bikonditionals des Abstraktionsprinzips den Wahrheitsgehalt bewahrt und wie die Welt (also die vorherrschende Ontologie) sein muss, dass die „guten“ Abstraktionsprinzipien standhalten. Wenn wir es mit impliziten Definitionen wie bei den Abstraktionen zu tun haben, finden wir zwei Seiten (verbunden mit dem Bikonditional) mit unterschiedlichen syntaktischen Sätzen vor, deren Wahrheitsgehalt übereinstimmen muss. Wir kommen zurück zu Hale und Wrights Beschreibungen zu Identitätskriterien. Wie wir gesehen haben, argumentierten Hale und Wright, dass *Hume's Principle* nur auf Identitäten zwischen (An-)Zahlen antworten muss, es stellt ein Identitätskriterium für Zahlen dar. Dabei ist der Wahrheitsgehalt der rechten Seite des Abstraktionsprinzips konzeptuell hinreichend für den Wahrheitsgehalt der linken Seite. Metaphysisch gesehen gibt es keinen „Spalt“ zwischen den beiden Statements. Diese Ansicht ist in der Vorstellung der Aufspaltung des Inhalts in neuer Weise auf der linken Seite eingebettet und führt uns somit wieder zu Freges Beschreibungen zurück. (vgl. Hale und Wright 2009, S. 193)

²⁷ Siehe dazu unter anderem Hale (2001) für eine neo-logische Diskussion

²⁸ Für eine ausführliche Diskussion impliziter Definitionen im neo-logischen Verständnis, siehe Hale und Wrights „Implicit Definition and the a Priori“ in Hale und Wright (2001).

Die „Zerspaltung“ des Inhalts auf anderer Weise stellt uns bei *Hume's Principle* allerdings vor ein semantisches Problem. Wie wollen wir eine Funktion verstehen, die (gleichzahligen) Begriffen ein und das selbe Objekt zuordnet, namentlich die Funktion „#“ von einem Begriff *F*? Natürlich könnte man die Abstraktionsfunktion mengentheoretisch interpretieren. Hale und Wright sehen das in dem Unternehmen ihres Abstraktionsansatzes allerdings für nicht wünschenswert. (vgl. Hale und Wright 2009, S. 196)

Zunächst sei festgehalten, dass Abstraktionen vorgeben *fundamentale* Eigenschaften der Objekte zugänglich zu machen, zu denen wir zuvor keinen Zugang hatten. Wir können eine Funktion „#“ *stipulieren*, die gleichmächtigen Mengen das selbe Objekt und nicht gleichmächtigen Mengen verschiedene Objekte zuordnet. Wichtig dabei ist zu bedenken, dass in der Formulierung von HP die Bedeutung der Funktion # eindeutig festgelegt sein muss. Laut Hale und Wright müssen wir also die Referenz der Funktion untersuchen. Für Frege stellen funktionale Aussagen, wie „die Zahl von...“ unvollständige Sätze dar, die erst mit der Einsetzung eines singulären Terms auf ein Objekt abbilden bzw. hinweisen. Ob die Funktion nun auf ein gewisses Objekt hinweist, hängt davon ab, ob wir die Aussage der Funktion mit der entsprechenden Eigenschaft assoziieren können. Und davon über welche Objekte wir die Funktion legen können. (vgl. Hale und Wright 2009, S. 196-199) Dazu noch ein abschließendes Zitat:

It cannot just be a given that reference is secured [...]. Rather, this is something which needs to be verified as a by-product by our, so to say, *finding* a range of objects 'out there' to which the conception embodied in the principle is (necessarily) faithful. And of course if that is to be possible, the objects in question must first be given to us under some *other* mode of presentation. (Hale und Wright 2009, S. 206)²⁹

Interessant ist, dass Hale und Wright bemerken, dass uns, damit Freges Abstraktion funktionieren kann, gewisse Objekte schon vorher zugänglich sein müssen, mithilfe einer „anderen Art von Präsentation“. Diese Überlegung gründet auf Freges Behauptung, dass die Anschauung der Parallelität durch Intuition bereits gegeben ist und dem Konzept der Richtung vorausgeht. Zusammengefasst lässt sich sagen, dass Hale und Wrights Metaontologie der Abstraktion darauf gründet, dass die Bedeutung von singulären Ausdrücken für deren Referenz nicht ausreicht, sie müssen auch in einem

²⁹ Schon in einem früheren Essay argumentierten Hale und Wright, dass implizite Definitionen allein nicht die Referenz der erhaltenen Objekte ausmachen können, sondern nur deren *Bedeutung*. Gewisse Konzepte müssen wir als gegeben annehmen. (vgl. Hale und Wright 2001, S. 137)

(zusammenhängenden) Satz vorkommen, der als wahr gilt. (vgl. Hale und Wright 2009, S. 207-208)³⁰

Entgegen aller Bemühungen *Hume's Principle*, auf dem Freges Abstraktion gründet, mit logischen und semantischen Überlegungen zu untermauern, muss der Neo-Logizismus doch einigen Problemen entgegentreten. Auch wenn *Hume's Principle* konsistent ist, gilt dies nicht für alle Abstraktionsprinzipien der Form $\S(\alpha) = \S(\beta) \leftrightarrow \alpha \sim \beta$ ³¹, es befindet sich demnach in sogenannter „schlechter Gesellschaft“. Diese Metapher führte zur Prägung des Namens des „Bad Company Problem“. Einige Formen führen zu *Russell's Paradox* oder dem von Burali-Forti formulierten Paradoxon³², welches noch vor Russells formuliert wurde und einer ähnlichen Idee folgt. Wir müssen uns auf einige Formen der fregischen Abstraktion beschränken und können nicht alle Abstraktionen dieser Form uneingeschränkt zulassen. Ist dies ein befriedigender Ansatz für ein Abstraktionsprinzip, wenn wir manche Formen exkludieren müssen? Trotz dieser Hürden riss das Interesse an Freges Abstraktion nicht ab. Eine Entgegnung auf das *Bad Company Problem*, das in neuester philosophischer Literatur vermehrt auftaucht, ist der Ansatz einer dynamischen Abstraktion. Dazu möchte ich zunächst einen kurzen Überblick geben, bevor wir uns Abstraktionen im strukturalistischen Kontext widmen. Einen anschaulichen Überblick der Vorgehensweise dynamischer Abstraktion bietet Øystein Linnebo in seinen *Thin Objects* (2018).³³

3.2 DYNAMISCHE ABSTRAKTION

Wie wir gesehen haben, ist ein zentraler Punkt neo-fregischer Abstraktionsprinzipien, zu erklären, welche Formen zulässig sind und welche nicht. Um die auftretenden inkonsistenten Abstraktionen zu umgehen, nimmt die dynamische Abstraktion an, dass die durch Abstraktion erhaltenen Objekte *außerhalb* der Domain liegen, von der wir abstrahieren. Anstatt „gute“

³⁰ Für eine Diskussion und Kritik von Hale und Wrights (2009) Artikel, siehe Eklund (2016)

³¹ Wobei $\S$ ein Abstraktionsoperator, ähnlich der Abstraktionsfunktion F .

³² Burali-Forti Paradoxon: Burali-Forti entgegnete mit seinem Paradoxon der Zahlenlehre Cantors aus 1883. Er behauptet dabei, dass die Klasse aller Ordinalzahlen linear geordnet und damit die Klasse selbst wohlgeordnet sei. Die Klasse wäre somit *ähnlich* (bzw. „Ordnungs-isomorph“) zu einem echten initialen Teilsegment ihrer selbst, was zu einer Kontradiktion mit einem Theorem wohlgeordneter Mengen führt. (vgl. Cantini und Bruni, 2017) Leach-Krouse argumentiert, dass Burali-Forti ein falsches Verständnis von Cantors wohlgeordneten Mengen hatte. (vgl. Leach-Krouse 2019, S. 887)

³³ Eine weitere Ausführung der Probleme der neo-logistischen Position und Ansatz einer dynamischen Abstraktion auch in Studd (2016)

von „schlechten“ Abstraktionen zu unterscheiden, kennt dieser Ansatz alle Abstraktionsprinzipien an. Wie wir gesehen haben, ist bei den zuvor besprochenen Abstraktionsprinzipien das Abstrakta Teil der zugrundeliegenden Domain. Diese Formen der Abstraktion sind somit in gewisser Weise „statisch“. (vgl. Linnebo 2017, S. 136 und Studd 2016, S. 589) Wenn beispielsweise Richtungen durch eine Abstraktion von parallelen Geraden erhalten werden, gibt es keinen Grund anzunehmen, dass Richtungen bereits in der Domain, mit der wir begonnen haben, enthalten waren. Dies stellt sich gegen die neo-logische Annahme, dass die ursprüngliche Domain, bereits alle Objekte enthält. (vgl. Studd 2016, S. 597) Ein dynamischer Zugang zu Abstraktionsprinzipien erlaubt uns von jeglichen Objekten, die in einer Äquivalenzrelation zueinander stehen, zu abstrahieren, ohne Einschränkungen machen zu müssen. (vgl. Linnebo 2018, S. 52)

Die „Zerspaltung“ des Inhalts in anderer Weise führt als nicht nur zu „neuen“ Objekten im Sinne von neuer Erkenntnis, sondern auch zu einer „neuen“ bzw. „erweiterten“ Domain. Obwohl in neo-logizistischer Literatur der metaphysische Anspruch der rechten und linken Seite des Abstraktionsprinzips als „gleich stark“ gesehen wird, sprechen sich einige Philosophinnen und Philosophen darunter Linnebo und Studd für ein „asymmetrischeres“ Verständnis des Abstraktionsprinzips aus. Dies hat mitunter mit inkonsistenten Abstraktionsprinzipien wie BLV, die einem Paradoxon erliegen, oder auch solchen, die zwar je für sich konsistent sind, jedoch nicht beide gemeinsam realisierbar sind, zu tun.³⁴ Studd argumentiert außerdem, dass der neo-logische Anspruch von gleicher ontologischer Stärke, und gleicher Mächtigkeit der Domains, der linken und rechten Seite des Abstraktionsprinzips, nicht standhaft ist.³⁵ (vgl. Studd 2016, S. 590) Ein weiterer Punkt, in dem Linnebo ein Problem sieht und der für den Ansatz einer neuen Methode spricht, sind die immer komplexer werdenden technischen Beschreibungen um Bedingungen zu finden, konsistente von inkonsistenten Abstraktionsprinzipien zu unterscheiden. (vgl. Linnebo 2018, S. 55)

Wie könnte ein dynamischer Zugang zu Abstraktion aussehen? Zunächst müssen wir uns überlegen, wie wir die Domain erweitern können. Jede Frage zu den Abstrakta steht in Verbindung zu den Entitäten, von denen wir abstrahieren. Sehen wir uns das zunächst am Beispiel von Freges BLV an. Wie wir wissen, erliegt es einer Kontradiktion hinsichtlich der

³⁴ Eine kurze Ausführung weiterer anschaulicher Beispiele sogenannter „schlechter“ Abstraktionsprinzipien in Linnebo (2018) S. 54-55.

³⁵ Beispielsweise bei dem Abstraktionsprinzip von BLV und grundlegender Domain mit Mächtigkeit κ , gibt es 2^κ Äquivalenzklassen und somit mindestens genausoviele Abstrakta. (siehe Studd 2016, S. 590)

Russell Klasse. Es kommt allerdings darauf an, wie wir die „Zielmenge“ definieren. Die Russell Klasse r ist die Menge aller Dinge, die sich selbst nicht enthalten. Wenn wir r selbst in die ursprüngliche Domain miteinbeziehen, müsste sie sich gleichzeitig selbst enthalten, und nicht selbst enthalten. Wenn wir die Zielmenge allerdings *extensional* definieren, also als ein neues Objekt, zum Beispiel als eine Liste, die alle solche nicht-selbstenthaltenden Objekte lediglich anführt, gibt es keinen solchen Einwand. Es gibt kein logisches Problem einer Menge, die als simple Auflistung fungiert. Diese Menge ist somit ein „neues“ Objekt jenseits der „alten“ Domain. (vgl. Linnebo 2018, S. 57)

Welche neuen Überlegungen bzw. Vorteile bringt uns dynamische Abstraktion? Der wohl augenscheinlichste und vielversprechenstscheinende ist der, der Überwindung des Bad Company Problem und Forderungen zu den Kardinalitäten der zugrunde liegenden Domain „vor“ und „nach“ der Abstraktion. (vgl. Studd 2016, S. 597) Die meisten Ansätze für neologische Abstraktionen sind damit beschäftigt inkonsistente Formen auszumachen und ihre Abstraktionsprinzipien dahingehend zu beschränken. Die dynamische Abstraktion scheint dieses Problem auf besonders elegante Weise zu umgehen. Doch auch abgesehen von technischer Einfachheit und Universalität der Anwendung (die besonders in philosophischer Hinsicht attraktiv ist), bietet sie noch weitere Vorzüge, auch wie wir durch Abstraktion erhaltene Objekte verstehen wollen. Neben logischer Konsistenz, (siehe Linnebo 2018 und Studd 2016) bietet die Abbildung der Abstraktionsfunktion auf eine neue Domain auch noch ontologische bzw. semantische neue Einsichten. Eine Abstraktion auf uns bekannte Objekte, erweitert unsere „Domain of Knowledge“ um Objekte, die uns vor der Abstraktion in der alten Domain nicht zugänglich waren.

This approach [dynamische Abstraktion] ensures that every question about the “new” objects reduces to one about the “old” ontology [...]. (Linnebo 2018, S. 57)

Wie Linnebo mehrmals erwähnt, ist ein weiterer Vorteil, dass jegliche Fragen zu den „neuen“ Objekten sich auf Fragen zu den „alten“ Objekten reduzieren lassen. Dies hat mitunter zur Folge, dass die neuen Objekte präzise gemäß der alten definiert werden können. Eigenschaften der neuen Abstrakta sind somit hinsichtlich der alten Ontologie eindeutig definiert. Das ist eine Stärke, mit der, seiner Meinung nach, der statische Ansatz nicht mithalten kann. (vgl. Linnebo 2018, S. 60)

Darüberhinaus bietet der Vorgang der Erweiterung der Domain ein äußerst interessantes Merkmal. Ich kann auf jede erweiterte Domain wieder eine Erweiterung vornehmen. Diese

Iteration bietet immer wieder eine neue Ansammlung von Objekten und ich kann unendlich lange fortfahren. Auch wenn dynamische Abstraktion nicht mit Freges Argument zur Konstruktion unendlicher Zahlen vereinbart werden kann, können wir mithilfe der Iteration von Hume's Principle unendliche Domains erreichen. (vgl. Linnebo 2018, S. 60)

Wie wir gesehen haben, bietet dynamische Abstraktion einige Vorteile gegenüber logischer Einschränkungen neo-logischer Zugänge. Auch wenn die Diskussion noch relativ neu ist, denke ich, dass eine weitere Investigation nicht nur technische Fortschritte, sondern auch philosophisch neue Erkenntnisse bringen könnte. Inwieweit ein dynamischer Zugang zu Abstraktion sich auf die Abstraktionsprinzipien zu Strukturen auswirken könnte, möchte ich im Zuge des nächsten Kapitels beleuchten.

4 STRUKTURELLE ABSTRAKTION

Zu Beginn dieser Arbeit haben wir uns mit der Frage nach der eigentlichen Essenz der Mathematik beschäftigt, die uns zu der Beschreibung von Strukturen mathematischer Systeme führte. Mathematik, so die strukturalistische These, ist primär mit der Untersuchung der Beziehungen zwischen mathematischen Objekten, also strukturellen Gegebenheiten, beschäftigt. Um zu diesen rein strukturellen Eigenschaften und Beziehungen vorzudringen, müssen wir von allen anderen „nicht relevanten“ (also nicht-strukturellen) Eigenschaften der Objekte abstrahieren. Die Aufgabe dieses Kapitels wird es sein, zu untersuchen, welche Bedingungen Abstraktionsprinzipien erfüllen müssen, um die strukturalistische These zu stützen. (In der Literatur wird dies auch unter dem Begriff „abstraction based structuralism“ betitelt.) Dabei wird es zentral sein folgende Punkte zu untersuchen, die ein strukturelles Abstraktionsprinzip liefern muss:

- 1) ein Kriterium, dass strukturelle von nicht-strukturellen Eigenschaften unterscheidet
- 2) (für den non-eliminativen Ansatz) ein geeignetes Prinzip um reine Strukturen und deren Positionen zu erhalten
- 3) das aufgestellte Abstraktionsprinzip muss logisch konsistent sein

Essentiell ist, dass unser Abstraktionsprinzip die strukturellen Beziehungen isomorpher Systeme einfängt. Wie wir in dem ersten Kapitel gesehen haben, gibt es einige Philosophinnen und Philosophen wie Resnik und Parsons, die mathematischen Objekten sämtliche nicht-strukturellen Eigenschaften aberkennen wollen. Jedoch können wir auch einige Eigenschaften der abstrakten Strukturen und deren Positionen finden, die nicht-strukturell sind. Jegliche Argumentationen von intrinsischen und konstitutiven Eigenschaften geben mitunter keine logisch universalen Bedingungen mit deren Hilfe wir strukturelle von nicht-strukturellen Eigenschaften unterscheiden können. Somit sehen wir uns an, ob wir ein Abstraktionsprinzip aufstellen können, welches uns das logische Werkzeug an die Hand gibt.

Wenn wir ein logisch konsistentes Abstraktionsprinzip finden, können wir ebenfalls die Referenz und somit Existenz der Struktur festlegen. Damit distanzieren wir uns allerdings von einem *ante rem* Strukturalismus nach Shapiro, deren Ansicht nach die Existenz der Struktur den einzelnen Systemen vorausgehen muss. (vgl. Schiemer und Wigglesworth 2018, S. 1206) Folgen wir einem *ante rem* Strukturalismus, kann uns kein Abstraktionsprinzip allein die Existenz der abstrakten Struktur garantieren. Wir folgen hier also einer *in re* Ansicht, in derer

die abstrakte Struktur zwar tatsächlich als abstrakte Entität existieren kann, jedoch nicht unabhängig von den sie instanzierenden Systemen mit deren Objekten.³⁶ Wollen wir uns einem Realismus gegenüber der Struktur verpflichten (damit wären wir in der Sparte des sogenannten non-eliminativen Strukturalismus), muss uns das Abstraktionsprinzip ebenfalls abstrakte Strukturen und Positionen ausgeben. Wenn wir an die Diskussion der Werte der Abstraktionsfunktion des vorigen Kapitels zurückdenken, muss die Funktion also neue, abstrakte Objekte liefern. Was genau für Objekte das sein sollen, gilt es noch zu untersuchen.

Linnebo und Pettigrew beschreiben in ihrem Artikel aus 2014 „Two types of abstraction for structuralism“ zwei Zugänge zu Abstraktionen, die für die strukturalistische These geeignet sein sollen. Wir haben uns bis jetzt auf die fregische Abstraktion konzentriert, welches ein Abstraktionsprinzip der Form $F(a) = F(b) \leftrightarrow a \sim b$ darstellt, mit einer Äquivalenzrelation auf einer Seite des Bikonditionals und einer Gleichheit bzw. Identität zweier Objekte auf der anderen Seite. Linnebo und Pettigrew untersuchen jedoch auch eine Abstraktionsform nach Dedekind. Dedekind Abstraktion wurde von William Tait, folgend Dedekinds Beschreibungen von Systemen und abstrakter Struktur, eingeführt:

There is another method of obtaining new types which derives from Dedekind (1888) and which we may refer to as ‘*Dedekind abstraction*’. For example, in set theory we construct the system $\langle \omega, \varphi, \sigma \rangle$ of finite von Neuman [sic] ordinals, where $\sigma(x) = x \cup \{x\}$. We may now abstract from the particular nature of these ordinals to obtain the system $\mathcal{N}$ of natural numbers. In other words, we introduce $\mathcal{N}$ together with an isomorphism between the two systems. In the same way, we can introduce the continuum, for example, by Dedekind abstraction from the system of Dedekind cuts. In this way, the arbitrariness of this or that particular ‘construction’ of the numbers or the continuum, noted in connection with the numbers by Benacerraf (1965), is eliminated. (Tait 1986, S. 369)

Auch wenn Dedekinds „ähnliche Systeme“ noch nicht vollends einer modernen Konzeption eines Isomorphismus entsprechen, folgt das von Tait beschriebene Prinzip doch Dedekinds Überlegungen.

Die dedekindsche Abstraktion stützt sich zentral auf die Isomorphie zwischen Systemen. Eine abstrakte Struktur wird mit isomorphen Systemen eingeführt. Wie wir wissen, sah Dedekind

³⁶ Das ist auch bekannt unter der „dependence claim“, die von Philosophinnen und Philosophen verschiedener strukturalistischer Ansichten vieldiskutiert wird. Siehe unter anderem Linnebo (2008) für eine Analyse.

die natürlichen Zahlen als etwas Unabhängiges von den zueinander „ähnlichen“ Systemen (analog bei den reellen Zahlen und seinen Schnitten).³⁷ Wir können hier somit eindeutig für einen non-eliminativen, strukturalistischen Ansatz argumentieren. Anders als Frege jedoch, liefert uns Dedekind in seinen *Was sind und was sollen die Zahlen?* keine explizite Beschreibung wie wir von „der besonderen Beschaffenheit“ der Objekte abstrahieren sollen, um nur deren Beziehungen zueinander beizubehalten. Mit der fregeschen Abstraktion haben wir ein logisch explizites Prinzip zur Hand, anhand dessen wir ein geeignetes, formales und strukturelles Abstraktionsprinzip aufstellen können. Sehen wir uns dazu ein strukturelles Abstraktionsprinzip nach Frege von Linnebo und Pettigrew (2014) an.³⁸

Ein Abstraktionsprinzip für abstrakte Strukturen folgend nach Frege, können wir folgendermaßen schreiben: Seien S und S' zwei isomorphe Systeme, dann gilt

$$[S] = [S'] \Leftrightarrow S \cong S'$$

Zwei Systeme haben die gleiche, abstrakte Struktur genau dann, wenn sie isomorph zueinander sind. Wobei die Äquivalenzrelation $\cong$ für die Isomorphie zwischen den Systemen und $[.]$ für die Abstraktionsfunktion (bzw. den Abstraktionsoperator) steht, der die abstrakte Struktur des Systems ausgibt. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 274) Linnebo und Pettigrew sprechen gleich daraufhin ein Problem an, dem wir schon zuvor bei Freges Abstraktionen begegnet sind. Schränken wir diese Form der Abstraktion nicht ein, gibt es Formen, die zu dem Burali-Forti Paradoxon führen. Um die Konsistenz zu gewährleisten, behaupten wir, dass die Systeme Mengen darstellen (oder es eine isomorphe „Kopie“ des Systems als Menge gibt) und deren Abstrakta $[S]$ eigenständige mathematische Objekte. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 274 und Schiemer und Wigglesworth 2018, S. 1207) Wie zuvor beschrieben sind wir genau auf der Suche nach *sui generis* Objekten als Abstrakta. Für den non-eliminativen Ansatz muss die abstrakte Struktur isomorph zu den Systemen sein, von der sie abstrahiert wurde, also es sollte gelten $S \cong [S]$. (vgl. Wigglesworth 2018, S. 4) Es gilt also herauszufinden ob dieser Ansatz einer strukturellen Abstraktion diese Bedingung erfüllt.

³⁷ Dedekind will mit seinem Ansatz die natürlichen Zahlen nicht einfach *stipulieren*, sondern argumentiert, dass die Zahlen schon vorher existieren und wir sie, mit dem Prozess der Abstraktion, lediglich „herausfinden“ bzw. als solche „identifizieren“.

³⁸ Ich folge in meiner Schreibweise ebenfalls der Notation von Linnebo und Pettigrew aus 2014.

Mit Freges Abstraktion in dieser Form erhalten wir reine Strukturen und Referenten für die Phrasen „die natürlichen Zahlen“, oder „ $\mathbb{N}$ “, aber leider nicht für einzelne Objekte bzw. Positionen, wie die Numerale „4“ (oder „0,543“ in der reellen Zahlen Struktur“), oder für das Symbol „<“. In Linnebo und Pettigrews Artikel werden dazu zwei neue Abstraktionsprinzipien eingeführt. Das Erste für Positionen in den abstrakten Strukturen, das Zweite für Relationen auf diesen Strukturen. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 274)

Freges Abstraktionsprinzip für Positionen in reinen Strukturen

Gegeben sind Systeme S und S' und Elemente x in S und x' in S'

$$[x]_S = [x']_{S'} \leftrightarrow \exists f (f : S \cong S' \text{ und } f(x) = x')$$

Zwei Elemente nehmen genau dann die selbe Position in einer Struktur ein, wenn es eine isomorphe Funktion gibt, die die Elemente des ersten Systems auf die Elemente des zweiten Systems abbildet. Zum Beispiel ist $0_{\mathbb{N}}$ das Nullelement von $\mathbb{N}$ und $\emptyset$ das Nullelement von den von Neumann-Zahlen und $[0_{\mathbb{N}}]_{\mathbb{N}} = [\emptyset]_{vNO}$. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 274-275)

Um die Relationen eines Systems zu untersuchen, schauen wir uns zunächst die Abstraktion der Domain an:

Abstrakte Domains in Freges Abstraktion

Sei $S = \langle D, R_1, \dots, R_n \rangle$ ein System, dann

$$[D]_S = \{[x]_S : x \in D\}$$

Relationen auf abstrakten Domains

Wir nehmen an S ist ein System und Φ ist eine n -stellige Relation auf D von S . Dann gilt

$[\Phi]_S(x_1, \dots, x_n)$ genau dann, wenn es Elemente $u_1, \dots, u_n \in D$ gibt, sodass für jedes i $[u_i]_S = x_i$, und $\Phi(u_1, \dots, u_n)$.

$[\Phi]_S$ ist die Eigenschaft der Position in der abstrakten Struktur und das ausfüllende Objekt dieser Position hat die Eigenschaft Φ . Die Relation Φ identifiziert hierbei die entsprechenden Positionen in der Struktur. Das heißt nicht, dass die Elemente der verschiedenen Systeme, die diese Position einnehmen, alle die gleiche Eigenschaft haben. Die Eigenschaft Φ soll lediglich die entsprechenden Positionen in der Struktur und den instanziiierenden Systemen identifizieren. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 275)

Linnebo und Pettigrews Ansatz bietet uns eine genaue Herangehensweise und Beschreibung, wie wir die abstrakten Strukturen und deren Bestandteile erhalten. So weit klingt das aufgestellte Prinzip attraktiv. Bevor wir uns einer genaueren Untersuchung und Einzelheiten widmen, sei noch eine kurze Erklärung weiterer Terminologie angebracht, die für die folgende Diskussion hilfreich sein wird.

4.1 MODELLTHEORIE UND WEITERE TERMINOLOGIE

In der Philosophie der Mathematik wird meist auf die Modelltheorie zurückgegriffen um die Objekte, von denen gesprochen wird, mathematisch zu beschreiben. Ich möchte hier nur einen kurzen Überblick und Einführung geben. Sehen wir uns zunächst an, wie eine Struktur in der Modelltheorie definiert wird.

Jede Struktur bzw. jedes System hat eine bestimmte Sprache, die festlegt, welche Symbole vorkommen können. Eine *Sprache*³⁹ $\mathcal{L}$ ist eine Menge von Konstanten, Funktions- und Relationszeichen, die eine gewisse (positive) Stelligkeit haben. Die Konstanten, wie z. B. $c_1, c_2, \dots$, beschreiben die jeweiligen Elemente bzw. Entitäten in der Domain. Wie wir bereits wissen, verwenden wir für Relationen die Schreibweise R_i , für die i-te Relation auf der Domain. Eine $\mathcal{L}$ -Struktur $\mathcal{M}$ besteht nun aus:

- einer nicht-leeren Menge M , welche die Domain der Struktur ist
- einem Objekt $c^{\mathcal{M}} \in M$, für jede Konstante c aus $\mathcal{L}$
- einer Relation $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ für jedes n-stellige Relationssymbol aus $\mathcal{L}$ und
- einer Funktion $f^{\mathcal{M}}: M^n \rightarrow M$ für jedes n-stellige Funktionssymbol aus $\mathcal{L}$
(mit $M^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in M\}$)

(vgl. Button und Walsh 2018, S. 8)

Hierbei ist zu beachten, dass mit „Struktur“ nicht die reine, abstrakte Struktur gemeint ist, sondern Systeme, die eine gewisse Struktur innehaben. Wir können stattdessen auch $\mathcal{L}$ -System schreiben. Und wir können einen Isomorphismus als eine strukturerhaltende Abbildung zwischen zwei $\mathcal{L}$ -Systemen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ definieren.

³⁹ Button und Walsh schreiben statt „Sprache“ „Signatur“.

Die *Signatur* eines Systems besteht aus einer Reihe von Relationen, wobei die erste meist eine monadische Relation (ein Prädikat) ist, und die anderen verschiedenstellige Relationen und Konstanten, die auf die zugrundeliegende Domain angewandt werden. So kann ich beispielsweise sagen, ein natürliches Zahlensystem hat die Signatur N (das Prädikat), die Ordnungsrelation „ $<$ “ und Konstante „ 0 “. (vgl. Leach-Krouse 2016, S. 50)

Eine Theorie T ist eine Menge von (mathematischen) Sätzen einer bestimmten, von uns betrachteten, Logik. Wir sagen $\mathcal{M}$ ist ein *Modell* von T , oder $\mathcal{M} \models T$, genau dann, wenn gilt: $\mathcal{M} \models \varphi$ für *alle* Sätze φ von T . (Analog sagen wir $T \models \varphi$ gilt genau dann, wenn $\mathcal{M} \models T \rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$ für alle Strukturen $\mathcal{M}$.) (vgl. Button und Walsh 2018, S. 26)

Systeme, die diese Voraussetzungen einer Theorie erfüllen, werden also Modelle dieser Theorie genannt.

4.2 STRUKTURELLE VS. NICHT STRUKTURELLE EIGENSCHAFTEN

Essenziell für die strukturalistische These ist herauszufinden, welche Eigenschaften der Objekte strukturell sind und welche nicht, und ob wir ein Prinzip aufstellen können, dass diese voneinander unterscheidet. Intuitiv werden strukturelle Eigenschaften entweder als Beziehungen, die zwischen den Objekten in einem System vorherrschen, beschrieben, oder als solche, die den entsprechenden Objekten aller isomorphen Systeme gleichermaßen innewohnen. Den reinen Strukturen bzw. Positionen werden von einigen Vertreterinnen und Vertretern des Strukturalismus oft deren nicht-strukturellen Eigenschaften aberkannt. Sie meinen, dass diese *ausschließlich* über strukturelle Eigenschaften verfügen. Wie wir bereits gesehen haben, gibt es allerdings einige Einwände, warum dies nicht der Fall sein kann.⁴⁰

Reck (2003) stellt eine Lösung vor, die zwischen konstitutiven und nicht-konstitutiven Eigenschaften unterscheidet.

Basically, a constitutive property of an object is one that is tied to its very identity, i.e., one without which the object wouldn't be the object it is, perhaps not even the same kind of object. All other properties are considered non-constitutive.

(Reck 2003, S. 407)

⁴⁰ siehe etwa Reck (2003), Linnebo und Pettigrew (2014) und Burgess (1999)

Die Eigenschaft „die Zahl 3 ist Dedekinds Lieblingszahl“ beispielsweise, wäre damit eine nicht-konstitutive Eigenschaft. Wir könnten somit sagen, dass die Zahlen nur strukturelle Eigenschaften als deren konstitutive Eigenschaften haben. Diese Unterscheidung scheint bei mathematischen Objekten präzise zu treffen, allerdings gestaltet es sich als schwieriger bei physikalischen Objekten. (vgl. Reck 2003, S. 407-408)

Eine andere Möglichkeit besteht darin, sich auf *intrinsische* Eigenschaften zu beschränken.⁴¹ Das würde bedeuten zu sagen, dass die Positionen in der reinen Struktur keine anderen intrinsischen Eigenschaften haben, als diese, die sie mit anderen Elementen isomorpher Systeme teilen. Wie Linnebo und Pettigrew allerdings selbst bemerken, stellt sich ein solcher Vorgang als problematisch dar, da wir einerseits keine eindeutige Unterscheidung von extrinsischen und intrinsischen Eigenschaften vornehmen können und andererseits, ein non-eliminativer Strukturalismus oft verlangt, dass die abstrakten Positionen eben *keine* intrinsischen Eigenschaften besitzen. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 271)

Strukturalistinnen und Strukturalisten definieren strukturelle Eigenschaften entweder hinsichtlich der vorherrschenden Relationen in einem System oder als solche, die sich Objekte strukturgleicher Systeme teilen. Die erste Variante hängt somit mit den axiomatischen Bedingungen einer mathematischen Theorie zusammen und Eigenschaften sind in der Sprache dieser Theorie definierbar. Die zweite Variante gelangt zu ihren strukturellen Eigenschaften mithilfe von Abstraktion. (vgl. Korbmacher und Schiemer 2017, S. 296) Korbmacher und Schiemer in ihrem Artikel aus 2017 widmen sich explizit diesen beiden Ansichten von strukturellen Eigenschaften und untersuchen respektive den „Definitions-basierten“ (für die erste Variante) und „Invarianz-basierten“ (für die zweite Variante) Ansatz. Interessant ist dabei, dass uns diese beiden Möglichkeiten verschiedene Ergebnisse liefern. (vgl. Korbmacher und Schiemer 2017) Ich argumentiere, dass reine Strukturen und deren Positionen ebenfalls nicht strukturelle Eigenschaften aufweisen können. Wir werden untersuchen, ob wir mithilfe von Abstraktion solche strukturellen Eigenschaften definieren können. Sehen wir uns dazu zunächst den Zugang Linnebo und Pettigrews an.

Linnebo und Pettigrew identifizieren die gewünschten strukturellen Eigenschaften, die wir explizit machen wollen, mit einer Klasse sogenannter „fundamentaler“ Relationen. Für ihr

⁴¹ siehe Linnebo (2008) und Linnebo und Pettigrew (2014)

„structuralist target“ haben sie drei Bedingungen formuliert, die ein Abstraktionsprinzip erfüllen muss, eines davon betrifft die fundamentalen Eigenschaften, nämlich Purity.

Purity: Wir nehmen eine Position a in $[S]$ und eine Eigenschaft Φ an. Wenn Φ eine *fundamentale* Eigenschaft von a ist, dann gilt für jedes System S' mit $f : S \cong S'$, dass Φ auch eine Eigenschaft von $f(a)$.

Somit wäre das Merkmal der additiven Identität in einem geordneten Körper eine fundamentale Eigenschaft des Nullelements in der Struktur der reellen Zahlen. (Linnebo und Pettigrew bemerken dabei, dass *Purity* eine notwendige, keinesfalls aber eine hinreichende Bedingung darstellen muss.) (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 272-273)

Um *Purity* zu gewährleisten, brauchen wir eine fundamentale Eigenschaft. Mit dem formulierten, fregeischen Abstraktionsprinzip für Relationen können wir fundamentale Relationen, die zwischen den Positionen vorherrschen, ausmachen. Fundamentale Relationen zwischen den Positionen sind genau solche, die ebenfalls zwischen den entsprechenden Elementen aller instanziiierenden Systeme der abstrakten Struktur gelten. Wir erhalten die fundamentalen Relationen mithilfe von Abstraktion von den Systemen. Linnebo und Pettigrew definieren fundamentale Relationen folgendermaßen:

Fundamentale Relationen zwischen Positionen

Sei Φ eine Relation auf den Positionen von $[S]$. Φ ist *fundamental* wenn es eine Relation Ψ auf der Domain von S gibt, sodass $[\Psi]_S = \Phi$.

Demnach können wir *Purity* zeigen:

Sei S ein rigides⁴² System und $x_1, \dots, x_n$ die Elemente von S , dann gilt:

$$(P) \quad [\Psi]_S([x_1], \dots, [x_n]) \Leftrightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n)$$

(vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 276-277)

Wenn $[\Psi]_S$ eine fundamentale Eigenschaft ist, dann gilt sie für alle Objekte, die $[x]_S$ entsprechen, in allen Systemen, die die Struktur $[S]$ innehaben. Hier kommen wir allerdings gleich zu einem Widerspruch. Laut Linnebo und Pettigrews beschriebener *Purity*-Bedingung gilt für jede fundamentale Eigenschaft Φ , dass diese sowohl von einer reinen Position a in einer Struktur $[S]$ als auch von den entsprechenden Objekten, die diese Position in den instanziiierenden Systemen einnehmen, erfüllt wird. Dies steht im Widerspruch mit ihrer

⁴² Damit Linnebo und Pettigrews Ansatz konsistent ist, müssen wir uns auf rigide Systeme beschränken. Doch mehr dazu im nächsten Unterkapitel.

Definition von Relationen auf reinen Strukturen bei der $[\Phi]_S$ die Eigenschaft der Position in der reinen Struktur und Φ von dem ausfüllenden Objekt ist. (vgl. Schiemer und Wigglesworth 2018, S. 1210)

Wir sehen, dass Linnebos und Pettigrews Ansatz im Hinblick auf der Abgrenzung von strukturellen Eigenschaften nicht ausreicht. Wir werden bei der Beschreibung eines neuen (bzw. überarbeiteten, erweiterten) Ansatzes auf dieses Problem zurückkommen.

4.3 INSTANTIATION UND UNIQUENESS

Widmen wir uns zunächst noch der Frage, wie ein strukturelles Abstraktionsprinzip gewährleistet werden kann. Wir haben bereits einen Abstraktionsansatz kennengelernt, der uns sowohl reine Strukturen, sowie auch deren Positionen liefert. Wie zuvor besprochen, brauchen wir einen Ansatz, der $S \cong [S]$ erfüllt. Linnebo und Pettigrew geben dieser Bedingung den Namen „Instantiation“.

Instantiation: S ist isomorph zu $[S]$, geschrieben $S \cong [S]$.

Wenn wir auf ein System S das Abstraktionsprinzip anwenden, erhalten wir eine abstrakte Struktur $[S]$, die vom selben Isomorphietyp ist. Wenn wir beispielsweise eine Abstraktion auf zwei spezielle natürliche Zahlensysteme, wie die natürlichen Zahlen oder die von-Neumann-Zahlen, anwenden, erhalten wir die gleiche abstrakte Struktur.

(vgl. Linnebo&Pettigrew 2014, S. 272)

Instantiation garantiert uns, dass unser Abstraktionsprinzip auch tatsächlich eine entsprechende abstrakte Struktur ausgibt. Wir wollen außerdem festlegen, dass dieses Prinzip eindeutig ist (eine Forderung, die wir schon im historischen Kontext mit Russell und Padoa erwähnt haben) und fordern nach Linnebo und Pettigrew „Uniqueness“:

Uniqueness: $[S]$ ist die *einzige* Struktur, die *Instantiation* und *Purity* erfüllt.

Diese Voraussetzung ist für den non-eliminativen Strukturalisten und die non-eliminative Strukturalistin unabdingbar. Gäbe es etwa zwei verschiedene (abstrakte) Strukturen, die eine wohlgeordnete, einfach unendliche Menge darstellen und die gleichen strukturellen Eigenschaften aufweisen, könnte man beispielsweise keine „echte“ natürliche Zahlenstruktur postulieren.

(vgl. Linnebo&Pettigrew 2014, S. 273)

Uniqueness ist leicht gezeigt. Wenn wir festlegen, dass jede abstrakte Struktur ein Ergebnis der Frege-Abstraktion ist, gilt für jedes System S und S' , die zueinander isomorph sind, dass $[S] = [S']$. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 277)

Linnebo und Pettigrew stoßen mit ihrer Forderung nach *Instantiation* allerdings auf ein Problem, welches mit dem in der philosophisch-mathematischen Literatur bekannten „Identitätsproblem“ von Strukturen zusammenhängt. (Dieses Problem stellt sich gegen einen non-eliminativen, vor allem aber den von Shapiro beschriebenen *ante rem* Ansatz.) Wenn wir behaupten, dass mathematische Objekte lediglich über strukturelle Eigenschaften (im Gegensatz zu weiteren intrinsischen Eigenschaften) verfügen, müssen diese auch die Identität der Objekte ausmachen. Keränen (2001)⁴³ forderte daraufhin *ante rem* Strukturalistinnen und Strukturalisten (vordergründig Shapiro) dazu auf ein geeignetes Identitätskriterium für Positionen in Strukturen aufzustellen. Was Keränen also eigentlich verlangt ist ein Identitätskriterium der Form $\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \varphi)$ für eine Aussage φ . Keränen argumentiert, dass der *ante rem* Strukturalist für dieses Identitätskriterium nur mit einem Satz φ aufwarten kann, der über rein intra-strukturelle Eigenschaften verfügt.⁴⁴ (vgl. Keränen 2001 und Keränen 2006, S. 147) Dies führt jedoch in einigen Systemen bzw. Strukturen zur Ununterscheidbarkeit mancher ihrer Elemente. Eines der bekanntesten Beispiele stellen die beiden imaginären Einheiten i und $-i$ in dem Körper der komplexen Zahlen dar (vgl. Burgess 1999, S. 288) Es gibt bereits verschiedene Lösungsansätze für dieses Problem,⁴⁵ jedoch möchte ich beschreiben, inwieweit es auf unser strukturelles Abstraktionsprinzip Anwendung findet. Auch wenn wir jegliche nicht-strukturellen Eigenschaften reiner Strukturen nicht verneinen wollen, stößt unser struktureller Abstraktionsansatz auf Probleme in genau solchen Systemen, in denen die Eindeutigkeit der Elemente nicht besteht.

Die beschriebenen Beispiele, die dem Identitätsproblem unterliegen, sind solche von nicht-rigiden Strukturen mit nicht-trivialen Automorphismen. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus eines Systems auf sich selbst. Nicht trivial ist dieser, wenn der Isomorphismus nicht die Identitätsabbildung darstellt, also wenn gilt $f(x) \neq x$. (vgl. Wigglesworth 2018, S. 5) Wir betrachten somit Permutationen von Systemen, bei denen ein Automorphismus

⁴³ Es gibt noch weitere Ausführungen des Problems unter anderem von Burgess (1999), jedoch ist Keränens (2001) Artikel die anschaulichste Beschreibung für unser Vorhaben, somit halte ich mich an diese Beschreibung.

⁴⁴ Intra-strukturelle Eigenschaften der Objekte eines Systems sind solche, die genau aus den strukturellen Zusammensetzungen dieses Systems entstehen.

⁴⁵ Siehe beispielsweise Leitgeb und Ladyman (2008)

zutrifft. Wir sagen, ein System ist *rigide*, wenn es keine nicht-trivialen Automorphismen aufweist. Sehen wir uns das anhand eines einfachen Beispiels aus der Graphentheorie, von Linnebo und Pettigrew selbst beschrieben, an.

Nehmen wir einen Graphen G folgendermaßen an:⁴⁶

$$G := \langle D = \{m, n\}, R = \{\langle m, n \rangle, \langle n, m \rangle\} \rangle$$

Wir haben zwei verschiedene Objekte in der Domain und eine symmetrische, irreflexive Relation zwischen ihnen, visuell dargestellt durch zwei Knoten und deren Abbildungen. Wir können nun einen Automorphismus auf G aufstellen, also eine Funktion f auf sich selbst, sodass $f(m) = n$ und $f(n) = m$. Wir haben somit eine Permutation der beiden Objekte vorgenommen und einen Graphen erhalten, der zu dem ursprünglichen isomorph ist. (vgl. Wigglesworth 2018 S. 5-6 und Linnebo und Pettigrew 2014, S. 276) Mit Linnebo und Pettigrews Ansatz zur Abstraktion von reinen Strukturen und deren Positionen, erhalten wir, dass $[m]$ und $[n]$ ident sein müssten, dies gilt jedoch in dem System G nicht. Die reine Struktur verfügt über nicht so viele Objekte wie das System, somit erhalten wir $[S] \not\cong S$. (vgl. Linnebo und Pettigrew 2014, S. 276)

Linnebo und Pettigrew beschränken daraufhin ihren Ansatz auf rigide Systeme, für die ihre Vorgehensweise konsistent ist. Es stellt sich jedoch die Frage, ob wir jegliche nicht-rigiden Systeme für den abstraktionsbasierten Strukturalismus aufgeben wollen. Vor allem mathematische Systeme, wie die komplexen Zahlen, oder die euklidische Ebene, die ebenfalls einen solchen nicht trivialen Automorphismus aufweisen, sind mathematisch gesehen äußerst interessant und aus der mathematischen Praxis nicht wegzudenken. Auch wenn die Einschränkung in der strukturalistischen These nicht so groß scheint, hat sie doch große Auswirkungen auf die mathematische Praxis.

Womit wir es hier tatsächlich zu tun haben, liegt also im Kern des Identitätsproblems: die Unterscheidbarkeit der Objekte eines Systems, auf dem eine Abstraktion vorgenommen wird. Wie wir im ersten Kapitel dieser Arbeit gesehen haben, sah es schon Dedekind als eine Notwendigkeit an der Unterscheidbarkeit der einzelnen Entitäten festzuhalten. (vgl. Dedekind 1923, S.21) Die Lösung muss also darin bestehen, ein Prinzip aufzustellen, um die Objekte solcher nicht rigider Systeme voneinander unterscheiden zu können. (vgl. Wigglesworth

⁴⁶ Diese Beschreibung folgt vordergründig der von Wigglesworth (2018) verwendeten Notation.

2018, S. 7) Wir brauchen somit geeignete Identitätskriterien für Objekte innerhalb einer Struktur.

Leitgeb und Ladyman (2008) liefern einen Lösungsansatz für dieses Problem. Sie argumentieren, dass jegliche Identitätsrelationen nur aus den Systemen bzw. der Struktur selbst entspringen können. (vgl. Leitgeb und Ladyman 2008, S. 390, 393) Wigglesworth argumentiert allerdings, dass selbst wenn wir Identitäts- und „Nicht-Identitäts“-Relationen in die Systeme miteinbeziehen, wir aufgrund der Symmetrie der Relationen vor den nicht-trivialen Automorphismen nicht gefeit sind. (vgl. Wigglesworth 2018, S. 9-10) Er schlägt stattdessen vor, eine Erweiterung der Sprache eines Systems vorzunehmen, die eine monadische Relation für jedes Objekt in der Domain beinhaltet. Diese Relation ist somit ein Prädikat, eine Eigenschaft, die die Unterscheidbarkeit der Objekte garantieren soll. Ein System mit der Sprache $\mathcal{L}$ wird um diese Relationen auf die Sprache $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ erweitert. Wir betrachten den Graph G von zuvor mit zwei solchen Prädikaten P_n und P_m , die jeweils auf $\{n\}$ und $\{m\}$ abgebildet werden. Es gibt nun keinen nicht trivialen Automorphismus mehr, da $n \in \{n\} \Leftrightarrow f(n) \in \{n\}$ (analog für m) nicht mehr gegeben ist.⁴⁷ (vgl. Wigglesworth 2018, S. 10) Wir lösen dieses Problem somit mit einer Unterbindung des nicht trivialen Automorphismus. Wigglesworth spricht an, dass der Strukturalist oder die Strukturalistin mitunter in Sorge sein kann, die Struktur mit einer Sprache in Verbindung bringen zu müssen. Jedoch können wir einige weitere Ansätze von struktureller Abstraktion finden, die Systeme und Strukturen in Verbindung mit einer $\mathcal{L}$ -Sprache bringt. Ein weiterer abstraktionsbasierter Ansatz von Leach-Krouse (2015) stellt seine strukturelle Abstraktion ebenfalls in Relation mit der zugrunde liegenden Sprache der Systeme.⁴⁸ Auch in Exemplifikation eines dynamischen Abstraktionsprozesses sind wir an die entsprechenden Sprachen gebunden. In Beschreibung der Systeme und Strukturen wird meist auf die Modelltheorie zurückgegriffen, was die Verbindung mit einer Sprache naheliegend macht. Jedoch möchte ich hier nicht weiter auf die philosophischen Überlegungen zur Abhängigkeit der Sprache eingehen und überlasse diese Diskussion anderen.

So viel steht allerdings fest, dass wenn wir einer Konzeption Linnebo und Pettigrews einer strukturellen Abstraktion basierend auf Frege folgen wollen, müssen wir uns dem Problem der nicht rigiden Systeme annehmen.

⁴⁷ Für eine genauere Beschreibung des Ansatzes siehe Wigglesworth (2018)

⁴⁸ Hierbei sei zu erwähnen, dass Leach-Krouse einem axiombasierten Ansatz für sein Abstraktionsprinzip folgt, demnach strukturelle Äquivalenz eng mit den Axiomen in einer Theorie in Verbindung steht.

4.4 DYNAMISCHE ABSTRAKTION FÜR STRUKTURELLE ABSTRAKTION

Auch wenn Linnebo und Pettigrews Ansatz eingeschränkt ein formal konsistentes Prinzip liefert, wie wir zu abstrakten Strukturen und Positionen kommen können (ihr Zugang zu Relationen stellt sich allerdings als problematisch heraus, wie wir oben bemerkt haben), liefert ihr Ansatz jedoch keine klare Antwort auf die Frage was genau für abstrakte Objekte diese sein sollen. Zwar argumentieren sie, dass sie keine Mengen sein sollen, da wir sonst dem Burali-Forti Paradoxon ausgesetzt sind, und *sui generis* Objekte, weiter geht ihre Ausführung jedoch nicht. (vgl. Schiemer und Wigglesworth 2018, S. 2017) Ihre Einschränkung betrifft damit nicht nur die Rigidität der Systeme, sondern auch der erhaltenen Abstrakta, da wir sonst zu dem neo-logischen *Bad Company Problem* zurückkehren. Es ist somit doch Zeit, einen neuen Weg der Abstraktion einzuschlagen, namhaft dem bereits vorgestellten Prinzip einer dynamischen Abstraktion. Ein solcher Ansatz könnte uns nicht nur vor logischen Paradoxien à la Russell und Burali-Forti bewahren, sondern auch philosophisch interessante Erkenntnisse zu den Strukturen bringen. Auf den nächsten Seiten möchte ich deshalb beschreiben, wie ein solcher Ansatz aussehen könnte.

4.4.1 PRÄDIKATIVE VS. IMPRÄDIKATIVE ABSTRAKTION

Zusätzlich zu der Idee der dynamischen Abstraktion möchte ich noch eine Unterscheidung zwischen prädikativen und imprädikativen Abstraktionen vornehmen. Eine Definition ist imprädikativ, wenn sie über die Gesamtheit der Domain, zu der sowohl die bereits bekannten Objekte sowie das Definiendum gehört, quantifiziert. Andernfalls ist die Definition prädikativ. (vgl. Linnebo 2018, S. 96) Das Abstraktionsprinzip der Form $\S(a) = \S(b) \leftrightarrow a \sim b$ ist imprädikativ, wenn die Objekte der linken Seite in Reichweite der Quantoren auf der rechten Seite sind. Andernfalls ist das Abstraktionsprinzip prädikativ. Freges Abstraktion von Richtungen ist damit prädikativ, da l_1 und l_2 nur über Linien bzw. Geraden reichen, nicht aber über Richtungen. HP dagegen ist imprädikativ, da die Identität der linken Seite durch die rechte Seite definiert ist. (vgl. Linnebo 2018, S. 98)

Kehren wir nochmals zurück zu einer fregischen Abstraktion, wie $d(l_1) = d(l_2) \leftrightarrow l_1 \parallel l_2$. Wie bereits in dem Teil zur neo-logischen Debatte beschrieben, sehen Neo-Logizistinnen und Logizisten keinen metaphysischen „Spalt“ zwischen der rechten und linken Seite des Abstraktionsprinzips. Dennoch muss erklärt werden wie genau wir die Abstrakta mit der

rechten Seite in Verbindung bringen können. (Damit meine ich nicht nur den gleichen Wahrheitsgehalt aufgrund des Bikonditionals, sondern explizit wie wir von den Objekten der rechten Seite, Abstrakta auf der linken Seite erhalten.) Beim Vorgang der dynamischen Abstraktion haben wir eine zugrunde liegende Sprache $\mathcal{L}_0$ mit den Objekten und Relationen vor der Abstraktion. Im Zuge der Abstraktion wird die Domain und somit die Sprache erweitert auf $\mathcal{L}_1$, die unser Abstraktionsprinzip und die dadurch erhaltenen Abstrakta enthält. Laut Linnebo (2018) brauchen wir eine geeignete Übersetzung, eine Funktion, die alle Objekte von $\mathcal{L}_1$ auf die „unproblematischen“ Objekte in $\mathcal{L}_0$ abbildet. Eine solche Übersetzung kann gefunden werden, wenn die Abstraktion prädikativ ist. (vgl. Linnebo 2018, S. 95, 98)

Linnebos Grundidee lautet wie folgend: Wir haben eine Basissprache $\mathcal{L}_0$ mit Objekten $x_0, x_1, \dots$ und $x'_0, x'_1, \dots$ und eine erweiterte Sprache $\mathcal{L}_1$ mit $x_0, x_1, \dots$ aus der Basissprache und $y_0, y_1, \dots$ für die „neuen“ Objekte. Durch diese Trennung garantieren wir, dass die Quantoren der beiden Seiten nur über ihre eigene Ontologie reichen. Das bedeutet auch, die Argumente eines zusammenhängenden Satzes nur jeweils von Termen einer Sprache ausgefüllt werden können. Angenommen wir haben einen Satz φ in der Sprache $\mathcal{L}_0$, der nicht unter den Objekten, die in der $\sim$ -Relation zueinander stehen, unterscheidet. Dann können wir einen Satz φ^* in $\mathcal{L}_1$ einführen, sodass die Argumente von den jeweiligen Objekten der zugehörigen Sprache ausgefüllt werden:

$$\varphi^*(\S x_1, \dots, \S x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

Wobei $\S$ der Abstraktionsoperator und $\S x_1$ eines der neuen Objekte y_1 in $\mathcal{L}_1$. (vgl. Linnebo 2018, S. 99) Linnebo definiert die Übersetzungsfunktion τ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\tau(x_i) &= x_i \\ \tau(y_i) &= x'_i\end{aligned}$$

und für allgemeines t :

$$\tau(\S t) = t$$

(vgl. Linnebo 2018, S. 100)

Die Übersetzungsfunktion hat somit eine eindeutige Zuordnung und ist bijektiv. Anschließend definiert Linnebo noch die Übersetzung von Sätzen und Formeln, sodass ein Satz φ in der erweiterten Sprache $\mathcal{L}_1$ auf die entsprechende Aussage $\tau(\varphi)$ in $\mathcal{L}_0$ abgebildet wird.⁴⁹

⁴⁹ Für eine genauere Ausführung siehe Linnebo (2018) zu dem Kapitel „Predicative vs. Impredicative Abstraction“

Auf den nächsten Seiten zeigt Linnebo, dass eine solche Übersetzung für eine prädikative Abstraktion gefunden werden kann, aber nicht immer für imprädikative Abstraktionsprinzipien. Wenn wir annehmen, dass Strukturen und deren Positionen bzw. Relationen neue Objekte sind, die, im Falle einer Abstraktion, nicht von den Quantoren der rechten Seite des Abstraktionsprinzips erreicht werden, könnte diese Form der Abstraktion ein geeignetes Konstrukt für die strukturelle Abstraktion liefern. Bei einem dynamischen Vorgang struktureller Abstraktion erweitern wir unsere Sprache durch die reinen Strukturen [S].

4.4.2 MÖGLICHE WELTEN ALS SYSTEME UND STRUKTURELLE INVARIANZ

Motiviert durch eine Überarbeitung struktureller Relationen aus Linnebo und Pettigrews 2014 Artikel beschreiben Schiemer und Wigglesworth (2018) einen neuen formalen Ansatz für die strukturelle Abstraktion im Dienste der strukturalistischen These. Ihr formales Konstrukt stützt sich dabei auf die Verwendung von *Kripke Modellen*. Um zu untersuchen inwiefern dies für eine dynamische Version der strukturellen Abstraktion hilfreich ist, sei eine kurze Erklärung von Kripke Modellen und des Ansatzes angebracht.

Ein Kripke Modell ist ein modelltheoretisches Tupel bestehend aus „möglichen Welten“, welche als Systeme dargestellt werden, mit zugehörigen Domains und einer binären Relation zwischen den Welten. Wir benötigen außerdem eine Funktion, die verschiedenen Systemen ihre Domain zuweist sowie eine Funktion für die Interpretation der Relationen in den jeweiligen Systemen. (vgl. Schiemer und Wigglesworth 2018, S. 1212 und Ilik et.al. 2010, S. 1368)

Ein Kripke Modell für strukturelle Abstraktion könnte damit nach Schiemer und Wigglesworth wie folgt aussehen: Wir nehmen ein Kripke Modell als Quadrupel an $\mathcal{M} = \langle D, W, \sim, v \rangle$ mit D als nicht-leere, universale Domain, W als nicht-leere Menge möglicher Welten und $\sim$ eine binäre Relation auf W . Die Funktion v interpretiert die Relationen und weist jeder Welt $w \in W$ eine Domain $D_w \subseteq D$ zu. Wir können jedes $w \in W$ als ein relationales System mit zugrundeliegender Sprache $\mathcal{L}$ interpretieren und zwei Systeme stehen zueinander in der Relation $\sim$ genau dann, wenn sie isomorph sind. Wir haben somit, wie bei Linnebo und Pettigrews Ansatz, ein Modell verschiedener $\mathcal{L}$ -Systeme mit eigener Domain und Relationen, wobei manche zueinander isomorph sind. (vgl. Schiemer und

Wigglesworth 2018, S. 1212-1214) Wir können nun wieder eine Abstraktion auf den Systemen vornehmen, sodass wir eine reine Struktur erhalten:

$$[w_1] = [w_2] \Leftrightarrow w_1 \sim w_2$$

Dadurch, dass dies ein dynamischer Abstraktionsvorgang sein soll, ist $[w_1]$ nicht in W enthalten. Wir nehmen eine Erweiterung der Domain vor und nehmen, zusätzlich zu unseren möglichen Welten, W_S (mit $W \cap W_S = \emptyset$) für die neuen Objekte (die reinen Strukturen) hinzu. Wir definieren W_S wie folgt: $W_S = \{[w] \mid w \in W\}$. Wir können die Welten vereinigen und schreiben dafür $W' = W \cup W_S$. Der Abstraktionsoperator bildet damit von W auf W' ab: $[\cdot] : W \rightarrow W'$. Analog können wir das Prinzip für reine Positionen formulieren:

$$[a]_{w_1} = [b]_{w_2} \Leftrightarrow \exists f (f : w_1 \sim w_2 \text{ und } f(a) = b)$$

mit $a \in D_{w_1}$, $b \in D_{w_2}$ und $[\cdot]_{w_i} : D \rightarrow D_P$. Die Domain der reinen Positionen ist analog definiert mit $D_P = \{[a]_{w_i} \mid a \in D\}$ und es gilt $D \cap D_P = \emptyset$ und $D' = D \cup D_P$. Um Instantiation zu garantieren, müssen wir die Reichweite von $\sim$ erweitern. Sei $w_1, w_2 \in W'$:

$$w_1 \sim' w_2 \Leftrightarrow w_1 \sim w_2 \vee w_1 = [w_2] \vee w_2 = [w_1]$$

(vgl. Schiemer und Wigglesworth 2018, S. 1215-1216)

Lass uns zunächst kurz innehalten. Wir haben im Zuge der Abstraktion eine Erweiterung der Domain und somit benötigten Sprache vorgenommen. Hat sich die zugrunde liegende Ontologie zuerst auf $\mathcal{M}$ beschränkt, vergrößert sich unser Kripke Modell auf $\mathcal{M}' = \langle D', W', \sim', v' \rangle$. *Uniqueness* gilt, da $[w_i] = [w_j]$ für $w_i \sim w_j$ und für rigide Systeme ist *Instantiation* gleichermaßen, wie bei Linnebo und Pettigrew, erfüllt.

Zuletzt gilt es einen Übergang von v auf v' zu erklären. Schiemer und Wigglesworth bieten eine ebenso formale wie philosophische Beschreibung des Vorgangs. Ich möchte mich auf eine vereinfachte, gekürzte Version beschränken, die ausreicht um philosophische Erkenntnisse zu diskutieren. Schiemer und Wigglesworth argumentieren, dass Linnebo und Pettigrew ihre Relationen auf Domains *extensional* verstehen. Das bedeutet, dass zwei Relationen gleich sind, wenn sie das gleiche „Ergebnis“ haben, also die gleiche Menge von Objekten, auf die die Relation zutrifft. Dies scheint jedoch für das strukturalistische Vorhaben nicht vorteilhaft, da wir nach Relationen suchen, welche für die gleichen Positionen gelten. Folgen wir Linnebo und Pettigrews Definition für fundamentale Relationen, dann stellen sich

alle Eigenschaften und Relationen der reinen Struktur als fundamental und somit strukturell dar. (vgl. Schiemer und Wigglesworth 2018, S. 1212) Ich habe allerdings bereits argumentiert, dass reine Strukturen und deren Positionen sehr wohl auch nicht-strukturelle Eigenschaften aufweisen können. Linnebos und Pettigrews Definition muss dahingehend überarbeitet werden. Wenn wir Relationen strukturell betrachten wollen, sollte man laut Schiemer und Wigglesworth diese *intensional* verstehen. Wir erweitern aufgrund von dynamischer Abstraktion die Relationen von v auf v' . Wir müssen somit untersuchen, wie von den Relationen von v auf die Relationen auf den Positionen in der reinen Struktur abgebildet wird. Was dadurch übereinstimmen muss, sind nur die lokalen Extensionen, also die entsprechenden Objekte der Positionen in der Struktur.⁵⁰ Eine Relation Q in einem System kann nur innerhalb eines Systems definiert werden, also mit einer Formel in der Sprache des Systems, die in dem System als wahr gilt. Ist diese Relation Q nun in einem System definierbar und eine Relation R in gleicher Stelligkeit einer reinen Struktur hat die gleiche *lokale* Extension in demselben System, dann ist die Relation fundamental, wie für Linnebo und Pettigrews Ansatz benötigt.⁵¹ (vgl. Schiemer und Wigglesworth 2018, S. 1218-1221)

Einige Punkte sind hier noch erwähnenswert. Zuerst war das Augenmerk von Schiemer und Wigglesworth auf die Definition von fundamentalen Eigenschaften gerichtet, um die *Purity* Bedingung, und damit die strukturalistische These mithilfe geeigneter Abstraktion, beibehalten zu können. Nach Schiemer und Wigglesworth sind fundamentale Eigenschaften Relationen der reinen Strukturen, die die Relationen der exemplifizierenden Systeme *erweitern*. Dies geht einher mit einem dynamischen Abstraktionsverständnis. Durch die Exemplifikation mithilfe von Kripke Modellen ist der Abstraktionsansatz eng mit einem modelltheoretischen Verständnis von Systemen, Strukturen und Relationen verbunden. Wie bereits zuvor erwähnt, könnte man einen Einwand gegen eine solche Sprachen- bzw. Modellrelativität erheben. Philosophisch gesehen, kann sich dies andererseits auch äußerst attraktiv darstellen. Mehr dazu im nächsten Unterkapitel.

Erhalten wir durch Kripke Modelle auch eine Lösung für nicht-rigide Systeme? Auch wenn wir für die Strukturen eine Erweiterung des Kripke Modells vornehmen, löst dies unser Problem für nicht-triviale Automorphismen nicht. Es bleibt zu untersuchen ob die

⁵⁰ Dies war auch Linnebo und Pettigrews Vorhaben, allerdings erfüllt ihre Definition von fundamentalen Eigenschaften und Relationen reiner Strukturen nicht dieses Kriterium. (siehe Linnebo und Pettigrew 2018, S. 275)

⁵¹ Für eine genauere Beschreibung und formale Definitionen siehe Schiemer und Wigglesworth (2018)

Erweiterung durch Prädikate zur Unterscheidbarkeit für die einzelnen Elemente der Systeme in einer formalen Umgebung von Kripke Modellen ebenfalls funktionieren würde.

Neben technischen Verbesserungen bietet uns eine dynamische Abstraktion dieser Form auch substanziellere Erkenntnisse. Mit einer prädikativen Abstraktion können wir die non-eliminative These stützen, dass die reine Struktur und deren Positionen tatsächlich existierende Entitäten sind. Aufgrund des dynamischen Abstraktionsprozesses können die neu erhaltenen reinen Strukturen die gleiche Art modelltheoretischer Konstrukte sein, wie die Systeme selbst, ohne einer logischen Kontradiktion ausgesetzt zu sein.

4.4.3 MÖGLICHE WELTEN UND KRIPKE MODELLE

Wie sieht eine Grundlage von Kripke Modellen für Abstraktionen von Strukturen in philosophischer Hinsicht aus? Betrachten wir die Formalisation von Kripke Modellen nun mit den philosophischen Beschreibungen von Referenz in möglichen Welten von Saul Kripke. In *Naming and Necessity* beschreibt Kripke, wie wir Referenz von Objekten, Personen, usw. festlegen können. Er stellt sich dabei gegen eine deskriptive Vorstellung von Referenz, demnach wir eine Referenz von beispielsweise einer Person festlegen, indem wir ihr verschiedene Eigenschaften zuschreiben. Wenn wir die Referenz von „Sokrates“ definieren als „der Lehrer von Plato“, kann dies mitunter in einer anderen möglichen Welt nicht mehr wahr sein, wodurch wir unsere Definition verloren hätten. Obwohl eine Eigenschaft in der aktuellen Welt wahr ist, könnte sie in anderen kontrafaktischen Welten nicht wahr sein und kann deswegen, laut Kripke, nicht als Definition fungieren. Was er als eindeutige Referenz beschreibt, sind sogenannte „rigid designators“, also ein *starrer Designator*, der in allen möglichen Welten auf dasselbe Objekt hinweist.

In einem formalen Kripke Modell haben wir eine Menge W solcher möglichen Welten. Jedes andere System, also jede andere Welt aus W , weist mitunter unterschiedliche kontrafaktische Situationen und Gegebenheiten auf. Formal gesehen, sind isomorphe Welten solche, die die gleiche Struktur aufweisen. Wir können gewisse (strukturelle) Invarianzen zwischen den Systemen mithilfe eines Abstraktionsprinzips extrahieren. Ich möchte nun ein kleines Gedankenexperiment aufstellen und mir die Systeme aus W als mögliche Parallelwelten der aktuellen, faktisch vorherrschenden Welt vorzustellen. Kripkes starre Designatoren müssen in allen solchen Welten auf dieselben Objekte hinweisen, auch wenn sich die situativen

Gegebenheiten anders darstellen, vorausgesetzt die strukturellen Gegebenheiten sind die selben. Ich denke, dass sich dies mit einem Verständnis von struktureller Invarianz verbinden lässt. Strukturelle Eigenschaften weisen in allen isomorphen Systemen auf die entsprechenden Objekte der gleichen Positionen hin. Starre Designatoren nach Kripke könnten wir somit strukturell argumentieren. Nicht die besonderen Namen, die wir den Objekten zueinander isomorpher Systeme geben, legen damit die Referenz fest, sondern die strukturellen Eigenschaften. In einer anderen Welt, in der wir beispielsweise die von Neumann-Zahlen als unser bevorzugtes natürliche Zahlensystem in der Arithmetik und dessen Exemplifikation verwenden, wäre die Referenz der natürlichen Zahlen immer noch garantiert.

Auch wenn eine vollständigere metaphysische Untersuchung in dieser Arbeit nicht mehr Platz finden kann, denke ich doch, dass die Verwendung von Kripke Modellen nicht nur mathematisch-logische, sondern ebenfalls metaphysische Erkenntnisse bringt und auf sprachlich-philosophische Bereiche ausgeweitet werden könnte.

CONCLUSIO

Wir kommen nun zum Ende dieser Arbeit. Ich habe argumentiert, dass die Ansicht des Strukturalismus in der Philosophie der Mathematik eng mit einem geeigneten Abstraktionsprozess verbunden ist. Dabei war es meine Aufgabe Entwicklung und aktuelle Erkenntnisse zu Abstraktionsprinzipien zu diskutieren. Wenn wir reine Strukturen als tatsächliche, *sui generis* mathematische Objekte ansehen und wir dessen Zugang mithilfe von Abstraktion erhalten wollen, müssen wir entsprechende Abstraktionsprinzipien finden.

Nach einer kurzen Diskussion verschiedener strukturalistischer Positionen haben wir gesehen, dass diese philosophische Strömung vielseitig ist, und nicht über einen Kamm geschert werden kann. Ein großer substanzieller Unterschied besteht darin, wie wir über abstrakte Strukturen sprechen wollen. Sehen wir die Strukturen der Systeme nicht bloß als einen „leeren“ Begriff, als eine „facon-de-parler“, sondern als eine existierende Entität, folgen wir einem non-eliminativen strukturalistischen Ansatz. Wenn wir uns dieser Ansicht anschließen, müssen wir uns allerdings auch überlegen, was für Objekte Strukturen darstellen.

Meine These war, dass wir mithilfe geeigneter Abstraktionsprinzipien reine Strukturen erhalten können. Zunächst war es meine Aufgabe, Abstraktionen im historischen Kontext zu untersuchen. Wie wir gesehen haben, können wir Definitionen, die von einer Abstraktion Gebrauch machen, schon in früher mathematischer Praxis finden, vermehrt allerdings im Zuge der Formalisierung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Gottlob Frege wird oft als einer der wichtigsten Begründer mathematischer Abstraktion bezeichnet und mit der Investigation seines Werkes *Grundlagen der Arithmetik*, konnte ich zeigen, dass diese Abhandlung einige zentrale Überlegungen zu Abstraktionsprinzipien beinhaltet, die sich auf die Entwicklung der Abstraktion bis heute auswirkten. Doch auch in anderen mathematischen Schriften dieser Zeit können wir Definitionen mithilfe von Abstraktion finden, deren Einflüsse auf Frege und den Fortschritt der Abstraktionsprinzipien im Allgemeinen nicht zu unterschätzen sind. Kurz nach Freges *Grundlagen* gab es bereits eine viel diskutierte Debatte rund um Abstraktionsprinzipien und impliziter Definitionen. Ein großer wesentlicher Unterschied verschiedener Beschreibungen des 19. Jahrhunderts betreffen den Wert der Abstraktionsfunktion. So können wir Beispiele finden, wo wir das Definiendum der Definitionen mithilfe von Abstraktion entweder die Repräsentanten der Äquivalenzklassen, die gesamte Äquivalenzklasse oder gar neue, abstrakte Objekte sind. Vor allem bei

Abstraktionen, die die Äquivalenzklasse als Abstrakta haben, ergeben sich einige logische Probleme wie *Russell's Paradox* oder das Paradoxon von Burali-Forti.

Moderne neo-logische Ansätze versuchen die Abstraktionsprinzipien dahingehend einzuschränken um logische Konsistenz zu gewährleisten. Einige aktuelle Artikel und Werke beschreiben jedoch eine neue Möglichkeit, Abstraktionen zu verstehen. Die dynamische Abstraktion umgeht logische Inkonsistenz, indem sie sich einer sogenannten „two-sorted language“ bedient. Sie stellt sich damit gegen eine neo-logische Ansicht, die alle Objekte in die ursprüngliche Domain miteinbezieht. Durch die Erweiterung der Sprache im Zuge des Abstraktionsprozesses, können wir auch „schlechte“ Abstraktionsprinzipien, wie etwa Freges *Basic Law V*, wieder miteinbeziehen. Neben logischer Beständigkeit bringt uns dynamische Abstraktion allerdings noch weitere philosophische Einsichten. Mit der Idee der Erweiterung der Sprache, erweitert sich auch unsere Ontologie. Wir bekommen neue Symbole hinzu, die auf neue Entitäten verweisen, die wir wiederum untersuchen können. Linnebo argumentiert, dass jegliche Fragen zu den neuen Objekten hinsichtlich der „alten“ Objekte, also der alten Ontologie beantwortet werden können. Sämtliche Fragen zu Referenz und Existenz sind auf die bereits vor der Abstraktion bekannten Entitäten zurückführbar. Linnebo definiert dafür Übersetzungsfunktionen von der neuen Domain auf die alte. Wenn wir prädikative Abstraktionen verwenden, die einem dynamischen Ansatz folgen, gibt es solche geeigneten Übersetzungsfunktionen.

Die Erkenntnisse der dynamischen Abstraktion sind auch auf strukturelle Abstraktionsprinzipien überführbar. Wir haben zwei Ausführungen struktureller Abstraktion kennengelernt, die beide reine Strukturen mit deren Positionen und Relationen liefern wollen. Ein dynamischer Ansatz mithilfe von Kripke Modellen bringt eine Überarbeitung struktureller Eigenschaften des ersten Ansatzes. Jedoch muss auch dieser auf rigide Systeme beschränkt werden, da sonst die Bedingung der *Instantiation* nicht erfüllt ist.

Ein dynamischer Abstraktionsansatz mit möglichen Welten als Kripke Modelle liefert auch substanziellere Einsichten zu reinen Strukturen, sowie deren Positionen und Relationen. Wenn wir Systeme modelltheoretisch interpretieren, können wir sie, folgend des formalen Konstruktes der Kripke Modelle, als Mengen darstellen. Bei einem statischen Abstraktionsprozess hieße das, dass Strukturen aufgrund der logischen Inkonsistenz keine Mengen sein können. Der dynamische Ansatz kennt solche Einschränkungen allerdings nicht,

und Strukturen dürfen die gleiche Art von Entitäten sein, wie die Systeme, von denen wir abstrahieren.

Wir sehen somit, dass der dynamische Abstraktionsprozess einen vielversprechenden neuen Ansatz für Abstraktionsprinzipien darstellt und auch non-eliminative strukturalistische Ansichten stützen kann.

BIBLIOGRAFIE

- Awodey, S. (1996) „Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective“ in: *Philosophia Mathematica* Vol. 4(3), 209-237
- Benacerraf, P. (1965) „What Numbers Could Not Be“ in: *The Philosophical Review*, Vol. 74(1), 47-73
- Burali-Forti, C. (1899) „Sur l'égalité, et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science“, in: *L'Enseignement Mathématique*, Vol.1(1), 246-260
- Button, T. und Walsh, S. (2018) *Philosophy and Model Theory*. Oxford University Press, Oxford
- Burgess, J. (1999) „Book Review: Stewart Shapiro. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.“ in: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 40(2), 283-291
- Cantini, A. and Bruni, R. (2017) "Paradoxes and Contemporary Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta [ed.],
<<https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/paradoxes-contemporary-logic/>>
(Feb. 2020)
- Cantor, G. (1872): „Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“. in: *Mathematische Annalen*. Vol. 5(1), 123-132
- Christopoulou, D. (2014) „Weyl on Fregean Implicit Definitions: Between Phenomenology and Symbolic Construction“ in: *Journal for General Philosophy of Science*, Vol. 45(1), 35-47
- Dedekind, R. (1923) *Was sind und was sollen die Zahlen?* 5. unver. Aufl., Vieweg & Sohn, Braunschweig
- Dedekind, R. (1932) *Gesammelte Mathematische Werke. Volumes I-3*. Hrsg.: Fricke, R. [et al.], Vieweg & Sohn, Braunschweig
- Dedekind, R. (1965) *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Vieweg & Sohn, Braunschweig
- Eklund, M. (2016) „Hale and Wright on the Metaontology of Neo-Fregeanism“ in: *Abstractionism: Essays in Philosophy of Mathematics*. Hrsg.: Ebert, P. A. und Rossberg, M., Oxford University Press, Oxford
- Euklid (1789) *Euklid's Elemente. Fünfzehn Bücher*, 2.Aufl., Hrsg.: Lorenz, J. F., Waisenhaus Buchhandlung, Halle
- Fischer, E. G. (1835) *Auszug aus dem Lehrbuch der ebenen Geometrie für Schulen*. 2. Aufl. Nauck, Berlin/Leipzig
- Forster, O. (2013) *Analysis I: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Springer, Wiesbaden
- Frege, G. (1987) *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Hrsg.: Schulte, J., Reclam, Stuttgart
- Grassmann, H. (1844) *Die Wissenschaft der extensiven Grösse, oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disziplin*. Otto Wigand, Leipzig

- Grassmann, H. (1847) *Geometrische Analyse*. Weidmansche Buchhandlung, Leipzig
- Hale, B. (2001) „A response to Potter and Smiley: Abstraction by Recarving“ in: *Proceedings of the Aristotelian Society*, Vol. 101, 339-358
- Hale, B. und Wright, C. (2001) *The Reason's Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Clarendon, Oxford
- Hale, B. und Wright, C. (2009) „The metaontology of abstraction“. in: Chalmers, D. (et al.) *Metaphysics: New Essays on the Foundation of Ontology*. Oxford University Press, Oxford, 178-212
- Hellman, G. (1989) *Mathematics Without Numbers*. Oxford University Press, Oxford
- Hellman, G. und Shapiro, S. (2019) *Mathematical Structuralism*. Cambridge University Press, Cambridge
- Horsten, L. (2019) "Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/philosophy-mathematics/>> (Feb. 2020)
- Ilik, D. [et. al] (2010) „Kripke models for classical logic“ in: *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 161, 1367-1378
- Irvine, A.D. und Deutsch, H. (2016) "Russell's Paradox", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), <<https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/russell-paradox/>> (Feb. 2020)
- Keränen, J. (2001) „The identity problem for realist structuralism“ in: *Philosophia Mathematica*, Vol. 9(3), 308-330
- Keränen, J. (2006) „The Identity Problem for Realist Structuralism II: A Reply to Shapiro“ in: *Identity and Modality*. Hrsg.: MacBride, F., Clarendon Press, Oxford
- Korbmacher, J. und Schiemer, G. (2018) „What are structural properties?“ in: *Philosophia Mathematica*, Vol. 26(3), 295-323
- Kripke, S. (2016) *Naming and Necessity*. Blackwell Publishing, Oxford [u.a.]
- Künne, W. (2010). „Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate. Leibniz über Identität und Austauschbarkeit.“ in: *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen*, 2009, 110-119
- Leach-Krouse, G. (2015) „Structural Abstraction Principles“ in: *Philosophia Mathematica*, Vol. 25(1), 45-72
- Leach-Krouse, G. (2019) „Burali-Forti as a Purely Logical Paradox“ in: *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 48(5), 885-908
- Leitgeb, H. und Ladyman, J. (2008) „Criteria of Identity and Structuralist Ontology“ in: *Philosophia Mathematica*, Vol. 16(3), 388-396
- Lejeune Dirichlet, P. G. (2014) *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Hrsg.: Dedekind, R., Cambridge University Press, Cambridge
- Linnebo, Ø. (2008) „Structuralism and the notion of Dependence“ in: *Philosophical Quarterly*, Vol. 58(230), 59-79

- Linnebo, Ø. (2017) *Philosophy of Mathematics*. Princeton University Press, Princeton [u.a.]
- Linnebo, Ø. (2018) *Thin Objects: An Abstractionist Account*. Oxford University Press, Oxford
- Linnebo, Ø. und Pettigrew, R. (2014) "Two types of abstraction for structuralism", in: *Philosophical Quarterly*, Vol. 64, 267-283
- MacBride, F. (2003) „Speaking with Shadows: A Study of Neo-Logicism“, in: *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 54(1), 103-163
- MacBride, F. (2005) „Structuralism Reconsidered“ in: *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. Hrsg.: Shapiro, S. [u.a.] Oxford University Press, Oxford
- Mancuso, P. (2016) *Abstraction and Infinity*. Oxford University Press, Oxford
- Padberg, F. und Büchter, A. (2015) *Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik*. 2. Aufl., Springer, Berlin/Heidelberg
- Parsons, C. (1990) „The Structuralist View of Mathematical Objects“. in: *Synthese* 84, 303–346
- Parsons, C. (2008) *Mathematical Thought and its Objects*. Cambridge University Press, Cambridge
- Peano, G. (2000) *Geometric Calculus. According to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann*. übers.: Kannenberg, L. C., Birkhäuser, Boston
- Peano, G. (1894) *Notations de Logique Mathématique: introduction au formulaire de mathématique publ. par la „Rivista di matematica“*. Guadagnini, Turin
- Pöschel, J. (2014) *Etwas Analysis: Eine Einführung in die eindimensionale Analysis*. Springer Fachmedien, Wiesbaden
- Quine, W.V. (1969) *Set theory and its logic. rev. ed.* Oxford University Press, Oxford
- Quine, W.V. (1969a) *Ontological Relativity and other essays*. Columbia University Press, New York
- Ramsey, F. P. (1931) *The Foundation of Mathematics*. Braithwaite, R. B. [ed.] Trubner & Co, London
- Reck, E. (2003) „Dedekind’s Structuralism: An Interpretation And Partial Defense“, in: *Synthese* 137, 369-419
- Reck, E., und Price, M. (2000) "Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics", in: *Synthese* 125, 341-383
- Reck, E. und Schiemer, G. (2019) "Structuralism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta [ed.],
<<https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/structuralism-mathematics/>>
(Feb. 2020)
- Resnik, M. (1981) „Mathematics as a Science of Patterns“ in: *Nôus*, Vol. 15(4), 529-550
- Russell, B. (1956) *Logic and Knowledge: essays 1901 – 1950*. Hrsg.: Marsh, R.C., 1. Aufl., Allen&Unwin, London

- Russell, B. (1996) *The Principles of Mathematics*. Norton&Company, New York/London
- Scheel K. und Sonar T. (2014) *Der Briefwechsel Richard Dedekind – Heinrich Weber. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Hamburg*. De Gruyter Oldenbourg, Berlin/München/Boston
- Schiemer, G. und Wigglesworth, J. (2018) „The Structuralist Thesis Reconsidered“ in: *The British Journal for Philosophy of Science*, Vol. 70(4), 1201-1226
- Schirn, M. (1988) „Review: Gottlob Frege, Christian Thiel: Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl“ in: *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 53(3), 993-999
- Shapiro, S. (1997) *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford University Press, Oxford
- Shapiro, S. (2018) „Mathematical Structuralism“ in: *The Internet Encyclopedia of Philosophy*, ISSN 2161-0002, <https://www.iep.utm.edu/m-struct/> (Feb. 2020)
- Sieg, W. und Schlimm, D. (2005) „Dedekind’s Analysis of Number: Systems and Axioms“ in: *Synthese*, Vol. 147(1), 121-170
- Studd, J. P. (2016) „Abstraction Reconceived“ in: *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 67(2), 579-615
- Tait, W. W. (1986) „Truth and Proof: The Platonism in Mathematics“, in: *Synthese*, Vol. 69(12), 341–370
- Tennant, N. (2017) "Logicism and Neologicism", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta, E. N. (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/logicism/>> (Feb. 2020)
- Weyl, H. (1910) „Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe“, in: *Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter* 7, reprinted in: 1968, 298–304.
- Wigglesworth, J. (2018) „Non-eliminative Structuralism, Fregean Abstraction, and Non-rigid Structures“ in: *Erkenntnis*, 1-15
- Yap, A. (2009) „Predicativity and Structuralism in Dedekind’s Construction of the Reals“ in: *Erkenntnis*, Vol. 71(2), 157-173
- Zalta, E. N. (2019) „Gottlob Frege“ in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <<https://plato.stanford.edu/archives/win2019/entries/frege/>> (Feb. 2020)

ABSTRACT

Was ist Mathematik? Verschiedene moderne Philosophinnen und Philosophen werden unterschiedliche Antworten darauf haben. Viele davon werden behaupten, dass Mathematik vordergründig mit der Investigation von vorherrschenden Strukturgefügen ist. Was ist damit gemeint? Um zu den strukturellen Gegebenheiten mathematischer Systeme vorzudringen, müssen wir von allen „nicht-relevanten“ Eigenschaften abstrahieren. Von früher Mathematik bis aktueller Literatur wurden Abstraktionsprinzipien verwendet, um mathematische Objekte und deren Relationen zueinander zu untersuchen. Meine Frage ist nun: Wie funktionieren Abstraktionsprinzipien in der Mathematik und wie führen uns diese zu reinen Strukturen? Welche ontologischen und semantischen Fragen tun sich auf, wenn wir auf Strukturen und (abstrakte) Objekte, die wir durch Abstraktion erhalten, blicken?

Das Ziel dieser Arbeit wird es sein die Entwicklung der Abstraktionsprinzipien im Laufe der Zeit und etwaige Probleme, die auftreten, zu untersuchen. Ich werde außerdem eine Verbindung zu einer der vorherrschenden philosophischen Ansichten in der Philosophie der Mathematik herstellen: dem Strukturalismus. Um dies zu vollbringen, werde ich zunächst einige semantische und ontologische Unterschiede der strukturalistischen Positionen beleuchten, um geeignete Bedingungen struktureller Abstraktionsprinzipien aufzustellen. Ich werde außerdem verschiedene Probleme und Lösungsansätze, die im Zuge der Abstraktion auftreten, beschreiben. Zuletzt werde ich mich auf strukturelle Abstraktionsansätze fokussieren und wie wir reine Strukturen erhalten können. Ich argumentiere, dass die neuen Möglichkeiten der dynamischen Abstraktion viele Vorteile mit sich bringen, nicht nur im Bezug auf logische und technische Konsistenz, sondern auch auf semantische und epistemische Ansichten.

ENGLISH VERSION

What is the essence of mathematics? Modern philosophers say that mathematics is principally concerned with the investigation of structures. But what do we mean by this? To obtain structure we must „abstract-away“ from certain „non-relevant“ properties that mathematical objects have. From early mathematics to recent literature certain abstraction principles have been used to investigate mathematical objects and their relation to each other. My question is, how do we understand abstraction in mathematics and how does it lead to pure structures?

What ontological and semantical questions can be raised when we look at structures and abstract objects that we receive through abstraction?

The goal of this thesis will be to look at the development of abstraction principles over time and certain of the problems it faces. I also intend to make a connection between a prominent view in philosophy of mathematics, namely structuralism, and abstraction principles. To do that I'll have to look at certain semantical and ontological differences between various positions on structuralism. Furthermore I'll discuss what challenges abstraction principles face and different ways that they can be overcome. Finally I'll focus on structural abstraction principles and the methods of obtaining pure structures through them. I'll argue that the use of dynamic abstraction has many advantages concerning logical technicalities of the principles itself and also semantical and epistemical views.