

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Flexible Rechenstrategien als Basis für die moderne
Didaktik der Arithmetik“

verfasst von / submitted by

Sandra-Antonia Myška

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the
degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 406 445

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik
Unterrichtsfach Biologie und Umweltkunde

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. techn. Bernhard Krön, Privatdoz.

DANKSAGUNG

Ich möchte mich auf diesem Weg bei allen bedanken, die mich während meinem Studium und vor allem in der sehr stressigen Schlussphase unterstützt haben.

Allen voran bei meinem Partner, der bei allen Höhen und Tiefen an meiner Seite ist. Auch wenn wir örtlich eine große Distanz zwischen uns haben, konnte und kann ich immer auf ihn zählen.

Bei meinen Eltern die mir nicht nur finanziell zur Seite gestanden sind, sondern auch dafür gesorgt haben, dass ich kulinarisch versorgt bin.

Auch bei allen Freunden, die, vor allem in der Abschlusszeit, auf mich verzichten mussten und dennoch jederzeit ein offenes Ohr für mich haben. Ab jetzt gibt es nicht mehr nur Absagen von mir, versprochen.

Ein besonderer Dank geht auch an die beiden Personen, die mir direkt mit der Arbeit geholfen haben. Eine der beiden ist eine sehr liebe Freundin die ich während dem Studium kennengelernt habe und mit der immer ein reger Austausch stattfinden konnte, wenn ich einmal nicht weiter wusste oder die Motivation zu schwinden drohte. Die zweite Person ist der Vater meines Partners, der meine Arbeit, nach mir, vermutlich am öftesten gelesen hat um mir bei der Fehlersuche zur Seite zu stehen.

Zum Schluss möchte ich mich bei meinem Betreuer bedanken, der ebenfalls immer für mich erreichbar war und das Thema dieser Arbeit mit mir gestaltet hat.

Vielen Dank!

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG.....	3
KOPFRECHNEN – EINE DEFINITION	5
AUSGANGSLAGE.....	7
RECHNEN – VORRAUSSETZUNG/EN UND VERARBEITUNG IM GEHIRN	9
GEHIRN – Zentralnervensystem(=ZNS).....	11
Funktionell-anatomische Vorstellungen zur mathematischen Verarbeitung im Gehirn.....	12
GEDÄCHTNIS.....	14
Was das Gedächtnis mit dem Kopfrechnen zu tun hat	16
VOM ZÄHLEN ZUM RECHNEN – IN DER SCHULE	21
Lehrplan der Volksschule	23
ZAHLENSINN	25
MENTALE FLEXIBILITÄT	31
ZAHLENVERARBEITUNG BEI ERWACHSENEN	35
STRATEGIEN.....	37
Addieren/Subtrahieren	38
Additionen mit Zehnerübertrag	38
Additionen/Subtraktionen mit zwei- und mehrstelligen Zahlen.....	41
Multiplizieren.....	47
Multiplizieren mit einstelligen Zahlen.....	47
Multiplizieren mehrstelliger Zahlen.....	50
Quadrieren.....	59
Zweistellige Quadratzahlen	63
Dividieren	64
Division zweistelliger Zahlen durch 9.....	64
Division mehrstelliger Zahlen durch 9.....	64
Division durch 5	65
Division durch 25	65
Division durch 11	65
CONCLUSIO.....	69
ABSTRACT.....	71
LITERATURVERZEICHNIS	73
ABBILDUNGSVERZEICHNIS	76

EINLEITUNG

Viele Menschen möchten, nach ihrer Ausbildung, möglichst wenig mit Mathematik konfrontiert werden. Dabei geht es einerseits um die so genannte Schulmathematik, andererseits auch um das Rechnen an sich. Das Thema „Kopfrechnen“ ist hierbei keine Ausnahme. Ich möchte mit dieser Arbeit einerseits aufzeigen, dass aber genau dieses Gebiet der Mathematik sehr nützlich für den Alltag sein kann und Methoden erläutern, die möglichst schnell und einfach verwendet werden können. Andererseits möchte ich auch kurz darauf eingehen, welche Areale im Gehirn im Wesentlichen daran beteiligt sind und welche Anforderungen erfüllt werden müssen.

Beim Kopfrechnen geht es nicht darum Rechenoperationen, wie ein Taschenrechner, in Sekundenschnelle und auf eine bestimmte Kommastelle genau zu rechnen. Es geht vielmehr um die Fähigkeit schnell und individuell zu einem Resultat zu gelangen, auch wenn dieses vielleicht nur eine Annäherung ist. Man lernt mit der Zeit Größenordnungen einzuschätzen, Werte zu vergleichen und zu überschlagen. Diese Fähigkeiten bringen nicht nur im schulischen oder beruflichen Bereich Beachtung auch im privaten Umfeld kann man damit beeindrucken.

Ein Beispiel für das konkrete Anwenden des Kopfrechnens ist der Preisvergleich von Getränken in verschiedenen Literangaben oder ein schneller Überschlag im Supermarkt beim Einkaufen.

Selbst auf den ersten Blick schwierig erscheinende Multiplikationen können im Kopf problemlos berechnet werden. Ein Beispiel:

$$27 \cdot 4 = 25 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 100 + 8 = 108$$

Man zerlegt eine Rechnung in einige kleinere, einfachere Rechenschritte und kommt so, schnell und leicht, zu einem Ergebnis.

Diese und auch einige andere Rechenstrategien möchte ich in der folgenden Arbeit darstellen.

Davor werden eine Beschreibung des Kopfrechnens und ein Überblick über die Entwicklung des Rechnens im Gehirn gegeben.

Eine Voraussetzung für das Kopfrechnen ist es, vom „Zählenden Rechnen“ hin zum Rechnen zu gelangt. Dieser wichtige Entwicklungsschritt ist daher ein besonderes

Thema, welches schon in der Grundschule aufgegriffen und daher auch in dieser Arbeit behandelt wird. In diesem Zusammenhang werden auch variable mentale Bilder der Zahl thematisiert. (Zum Beispiel: Wie kann ich mir die Zahl Sechs vorstellen?)

KOPFRECHNEN – EINE DEFINITION

Im Allgemeinen spricht man von „Kopfrechnen“, wenn man mathematische Aufgaben im Kopf löst, ohne dafür Hilfsmittel (Taschenrechner, Papier, Stift,...) zu benutzen. *„Kennzeichnend für das Kopfrechnen ist die Ermittlung des Ergebnisses im Kopf, selbst wenn die Aufgabe nicht in einem Schritt gelöst werden kann, sondern die Zerlegung in Teilaufgaben nötig ist[...]“* (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018, S. 42)

Es kommen dabei verschiedene Techniken, wie zum Beispiel bestimmte Rechengesetze, zum Einsatz. Das bedeutet, man benötigt ein grundlegendes Verständnis von Zahlen, das man im Regelfall ab dem Beginn der Volksschule erlernt und das intuitiv teilweise auch schon früher vorhanden ist.

Das Kopfrechnen ist eine wichtige Teildisziplin des nicht-algorithmischen Rechnens (Greiler-Zauchner, 2017) und kann, empirischen Befunden folgend, in zwei Klassen eingeteilt werden.

Die erste Klasse beschreibt zwei unterschiedliche Strategien beim Lösen von Aufgaben: die Gedächtnisabruf-Strategie und die Berechnungs-Strategie.

Bei der ersten Strategie wird das Ergebnis einer Rechnung aus dem Gedächtnis abgerufen, bei der zweiten wird mit Hilfe von verschiedenen, dem Individuum bekannten Verfahren, die Aufgabe berechnet.

Die zweite Klasse befasst sich mit dem Effekt der Aufgabengröße, wonach bei Aufgaben mit größeren Zahlen länger für deren Lösung benötigt wird. (Schoppek, 2003)

Dem „nicht-algorithmischen Rechnen“ können vier Charakteristika zugeordnet werden.

1. Es wird kein bestimmter Rechenweg vorgegeben. In Abhängigkeit von Zahlen sowie Rechengesetzen und Rechenvorteilen wird eine passende Strategie gewählt.
2. Aus Punkt eins folgt, dass keine Mechanisierung, sondern explizites Anpassen der Rechenvorteile angestrebt wird.

3. Beim nicht-algorithmischen Rechnen mit Zahlen werden diese als Ganzheiten betrachtet und nicht als Ziffern.
4. Nach Greiler-Zauchner ist es erlaubt, Zwischenschritte, -rechnungen und -ergebnisse zu notieren, um die Gedächtnisleistung zu entlasten. (Greiler-Zauchner, 2017)

Bei Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner heißt es hingegen: Wenn man beim Zerlegen bzw. Verändern der Aufgabe Teilschritte und/oder Zwischenergebnisse notiert, befindet man sich definitionsgemäß im Bereich des „halbschriftlichen Rechnens“. Diese Form des Rechnens zählt ebenso wie das Kopfrechnen zum Zahlenrechnen¹. Beide Formen können Hand in Hand agieren, um gestellte Aufgaben zu vereinfachen, Rechengesetze zu nutzen und Ergebnisse im Kopf schrittweise zu ermitteln.

Voraussetzung für das Kopfrechnen ist unter anderem der Aufbau einer Zahlvorstellung. Dies ist wichtig für Aufgaben, die nicht mehr automatisiert ablaufen, wie das Einmaleins oder Einspluseins, sondern zum Lösen das Zerlegen der Zahlen erfordern. (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018) Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Entwicklung mentaler, mathematischer Flexibilität. Beides wird im Laufe der Arbeit genauer beschrieben.

Schriftliches Rechnen, und zum Teil das Lesen von Zahlen, erfolgt von rechts nach links. Um das Kopfrechnen wesentlich zu vereinfachen nimmt man eine Richtungsänderung vor und arbeitet von links nach rechts.

Bereits im alten Indien und auch im Orient des 9.Jh. wurde empfohlen Additionen und Subtraktionen von links nach rechts zu rechnen. Auch der Mathematiker Carl F. Gauss praktizierte diese Methode bei seinen Berechnungen. (Miller, 1968)

Die Vorteile der Richtungsänderung sind vielfältig, zum einen entspricht es der natürlichen Leserichtung und die Größenordnung des Ergebnisses ist schneller erkennbar, zum anderen ist Kopfrechnen von rechts nach links viel schwieriger

¹ Das schriftliche Rechnen hingegen zählt nicht zum Zahlenrechnen sondern zum Ziffernrechnen. (Selter, 2013)

(Hoffmann & Hoffmann, 2019), da man im Kopf die Ergebnisse (Zwischen- und Endergebnis) erst „umdrehen“ muss um sie zu verbalisieren.

Kopfrechenmethoden zielen darauf ab, komplexe Rechenschritte so zu vereinfachen, dass das Gedächtnis mit wenigen bis gar keinen Zwischenergebnissen belastet und schnell eine gute Annäherung bzw. das Ergebnis gefunden wird.

Bei der Entwicklung von derlei Verfahren muss auf Verschiedenes geachtet werden. Bis auf wenige Ausnahmen, können sich Menschen nur maximal sieben Dinge auf Anhieb merken, diese Regel gilt auch im mathematischen Bereich. Auch wenn es logisch klingt, sollte es dennoch Erwähnung finden, dass es leichter fällt mit kleinen Zahlen zu rechnen als mit großen. Der letzte Punkt, dem man Beachtung schenken sollte, ist, dass das Rechnen im Kopf schwieriger wird, je mehr Zwischenergebnisse in der Rechnung enthalten sind.

AUSGANGSLAGE

„Was ist Rechnen und wie kommen die Zahlen in den Kopf?“ – Das ist die entscheidende Frage für das Kopfrechnen.

Um aber genauer darauf eingehen zu können, wie man den Umgang mit Zahlen lernt, muss klar sein, was das Ziel einer solchen Entwicklung ist. In verschiedenen Gesellschaften wird dies durch kulturelle Konventionen beschrieben, das können zum Beispiel schulische Curricula sein.

Dabei ergibt sich die Herausforderung, dass Menschen verschiedenen Kulturen angehören und es daher verschiedene Variationen an Zahlworten oder gar Zahlräumen gibt. Ein drastisches Beispiel sind Naturvölker. Der im Amazonasgebiet beheimatete Eingeborenstamm der Mundurukù hat einen sprachlichen Zahlenraum der nur für Werte von eins bis fünf konkrete Bezeichnungen vorweist. Dennoch sind sie in der Lage *„größere Mengen zu vergleichen und arithmetische Operationen approximativ zu lösen“* (Grond, Schweiter, & Aster, 2013, S. 42) und somit alle, für sie notwendigen, Berechnungen durchführen zu können.

Richtet man den Blick auf westliche Kulturen, erkennt man, dass es hier in der Art wie Zahlen benannt werden Unterschiede gibt.

Blickt man auf die französische Sprache, erkennt man verschiedene Arten des Zahlwortaufbaus. Im Altfranzösisch (9. bis 15. Jahrhundert) gab es bis in den Zahlenraum 400 ein Vigesimalssystem² mit Ausnahme der Zahlen 200 und 300. Man sprach zum Beispiel für 40 „dvi vijénti“ – „zwei zwanzig“) und für 70 „trës vijéntos et dëce“ – „drei zwanzig und zehn“.

Von diesem System sind heute nur noch Reste vorhanden. Die Zahl 70 wird, wörtlich übersetzt „Sechzig-Zehn“ genannt, die 71 „Sechzig-Elf“. Beträge von 80 bis 99 werden mittels Vigesimalsystems zusammengesetzt (Zum Beispiel 80 „quatre-vingts – „Vier-Zwanzig“). (Bachmann, 2010)

Betrachtet man nun zum Beispiel die Zahl 24 im Englischen „twenty-four“, im Spanischen „veinticuatro“ und im Italienischen „ventiquattro“ oder 124 in den gleichen Sprachen: „one hundred and twenty-four“, „ciento veinticuatro“ und „centoventiquattro“. (Schulz, 2019)

So erkennt man, dass die Einerstelle („four“, „cuatro“, „quattro“) immer zuletzt genannt wird.

Genau umgekehrt ist dies im deutschen Sprachraum, hier wird im Zahlenraum von 13 bis 99 die Einerstelle zuerst benannt. Bei Zahlen größer als 100 wird zuerst die Hunderter-/Tausender-/etc. Stelle benannt danach die zweistellige Zahl angehängt. Somit ist die Zehnerstelle immer die Letztgenannte.

Diese gering erscheinenden Variationen haben erhebliche Auswirkungen darauf, wie man lernt mit Zahlen umzugehen und zu operieren. (Aster, 2013) *„In unserem eigenen Kulturkreis stellten Zahlwortsysteme die gebräuchliche Grundlage für die Kommunikation numerischer Inhalte dar.“* (Aster, 2013, S. 20) Daher ist es besonders wichtig, ein Zahlengefühl zu entwickeln, um sich im mathematischen Kontext verständigen zu können.

² Zahlssystem mit der Basis 20

Auch wenn es, teilweise sehr große, Unterschiede in den Kulturen gibt, so ist die Verankerung der Zahlen und Mengen im Gehirn bei Menschen gleich und wird auf gleiche Weise entwickelt.

RECHNEN – VORRAUSSETZUNG/EN UND VERARBEITUNG IM GEHIRN

Beim Kopfrechnen wird im Frontallappen des Gehirns ein Netzwerk von verschiedenen Gehirnregionen aktiviert, die zur numerischen Berechnung des Ergebnisses beitragen. Es handelt sich dabei um eine komplexe metakognitive Aktivität „...*that relies on the knowledge and basic skills of the individual, the strategies he uses (MacLellan, 2001) and his ability to tell how he works, how he processes and how he retrieves data from his cognitive system.*“ (Mastrothanasis, Geladari, Zervoudakis, & Strakalis, Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction, 2018, S. 44)

Daher handelt der nächste Abschnitt von mentalen und physischen Voraussetzungen für das Kopfrechnen. Es wird ein kurzer Überblick gegeben, was das Gehirn ist und in welche Regionen es eingeteilt wird, um im Anschluss darauf einzugehen, welches der Areale beim Kopfrechnen verwendet wird.

Danach wird ein kurzer Einblick gewährt, wie man vom zählenden Rechnen zum Rechnen gelangt und die beiden dafür wichtigen Fähigkeiten „Zahlensinn“ und „Mentale Flexibilität“ werden genauer erläutert.

GEHRIN – Zentralnervensystem(=ZNS)

Das Gehirn (Encephalon), besteht aus unzähligen Nervenzellen und ist der wichtigste Teil im ZNS. Als Steuerzentrale gehen von ihm wegführende Nervenbahnen in den gesamten Organismus und wieder zurück.

Bei der Geburt wiegt das Gehirn ca. 400g. Im Alter von 10 Jahren ist es voll entwickelt und wiegt zwischen 1100 und 1600g. Die Entwicklung beginnt im Embryonalstadium als Neuralrohr, an dessen vorderen Ende sich drei Hirnbläschen (Vorder-, Mittel-, und Rautenhirn) befinden. Diese drei Strukturen bilden die Basis für die spätere Gliederung des Zentralnervensystems in:

- Telencephalon (Großhirn)
- Diencephalon (Zwischenhirn)
- Mesencephalon (Mittelhirn)
- Pons (Brücke)
- Cerebellum (Kleinhirn)
- Medulla oblongata (verlängertes Mark)

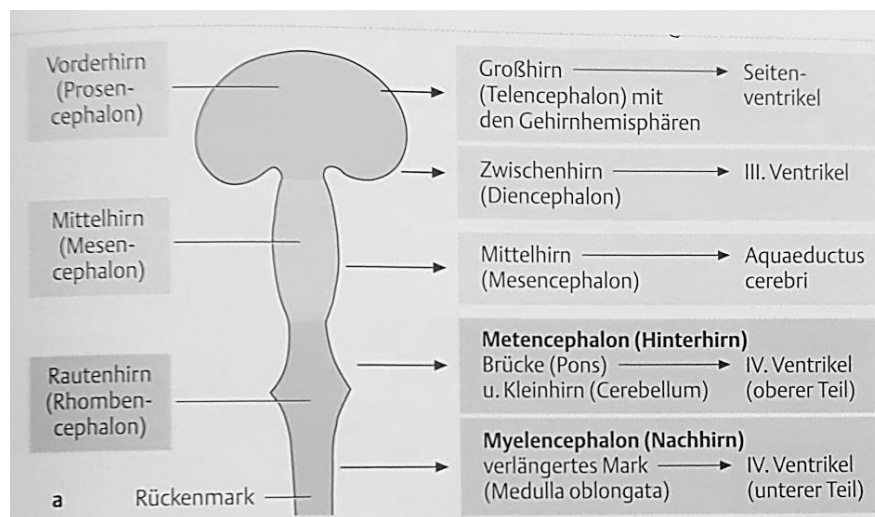


Abbildung 1: Entwicklung des Gehirns (Drei-Bläschen-Stadium)

(Vgl. Faller & Schünke, 2016, S. 167)

Das Großhirn unterteilt man in eine linke und eine rechte Hemisphäre, sie unterscheiden sich in ihrer intellektuellen Leistungsfähigkeit. Das Lesen, Sprechen und Schreiben sind besonders in der linken Hemisphäre ausgeprägt. Zusätzlich gilt sie als geschickter in Bezug auf Mathematik und Logik. In der rechten Hemisphäre dominieren

Gedächtnis, Sprachverständnis, räumliches Vorstellungsvermögen und Musikverständnis.

Am äußeren Rand des Großhirns befindet sich die Großhirnrinde (zerebraler Cortex).

Sie ist der Sitz der folgenden Eigenschaften:

- (fein-)motorische Fähigkeit der Hände
- Sprache (beim Menschen hoch entwickelt)
- Logisches Denken
- Persönlichkeit
- Gewissen

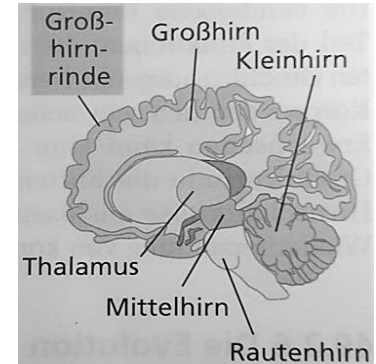


Abbildung 2: Menschliches Gehirn - Schnitt entlang der Medianebene

(Vgl. Reece, et al., 2016, S. 1432)

Eine weitere Aufgabe des zerebralen Cortex ist das Gedächtnis.

Funktionell-anatomische Vorstellungen zur mathematischen Verarbeitung im Gehirn

Studien mit bildgebenden Methoden wie PET³, fMRT⁴ und EEG⁵-Analysen bei gesunden Personen und bei Patienten mit Hirnschädigungen kamen zu der Erkenntnis, dass es drei Gehirnregionen gibt, die bei mathematischen Aufgaben aktiviert werden können:

1. Bilaterales⁶ horizontales Segment des intraparietalen Sulcus (IPS)
2. Linker Gyrus angularis (GA)
3. Bilaterales Segment im superior posterioren parietalen Lobulus (PSPL)

Der IPS ist eine Gehirnfurche die sich lateral⁷ auf dem Parietallappen⁸ befindet. Er zeigt eine Aktivierung bei Aufgabenstellungen, die sich auf die Kardinalität von Zahlen beziehen. Zum Beispiel: Abschätzen/Exaktes berechnen von Additionen; Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen (mit kleinen Zahlen); Numerischer

³ Positronen-Emissions-Tomografie: erstellen von Schichtbildern

⁴ funktionelle Magnetresonanztomographie: Sichtbarmachung des arbeitenden Gehirns via Sauerstoffgehaltmessung

⁵ Elektroenzephalografie: Messung elektrischer Gehirnströme

⁶ „Zweiseitig“

⁷ "seitlich" oder "von der Körpermitte abgewandt"

⁸ anatomischer Teil des Großhirns (Telencephalon) liegt hinter dem Frontallappen

Größenvergleich und Lesen derselben Zahlen (hierbei wird auch häufig stärkere rechtshemisphärische Aktivität gemessen)

Der bilaterale hIPS hat dem zu Folge Bedeutung für die Repräsentation und Verarbeitung numerischer Größeninformationen und wird stellenweise dann aktiviert, wenn Zahlen in symbolischer oder nichtsymbolischer Notation, gezielt oder automatisch, mental verarbeitet werden müssen.

Der GA ist eine Windung der Großhirnrinde und Teil des Scheitellappens. Aufgabenstellungen, die vermehrt sprachliche Lösungen erforderten, führen zur Aktivierung des linken GA. Dabei wird Faktenwissen über Zahlen im sprachlichen Gedächtnis abgerufen. *„Der GA ist bei exakten im Vergleich zu approximativen mentalen Kopfrechenaufgaben stärker aktiviert wie auch bei den Rechenoperationen (insbesondere Multiplikation), die einen direkten Zugriff auf gespeichertes verbal codiertes Wissen erfordern.“* (Karnath & Thier, 2012, S. 517)

Der PSPL ist ebenfalls Teil des Parietallappens und wird beim Ausführen von Operationen mit Zahlen, bei denen eine Auswahl an Lösungsalternativen gegeben ist, aktiviert. Dieser Teil des Gehirns ist nicht nur bei der Zahlenverarbeitung aktiv, sondern auch bei jeder Aufgabenstellung die *„[...] eine Ausrichtung der Aufmerksamkeit auf den Außenraum erfordern. Die zuvor geschilderten Aufgaben zur Zahlenverarbeitung und zum Rechnen erfordern ebenfalls eine verdeckte mentale Ausrichtung und Selektion bezüglich einer mentalen Repräsentation des Zahlenraums.“* (Karnath & Thier, 2012, S. 517)

Bei komplexeren mentalen Berechnungen mit sprachlichen Repräsentationen werden linkshemisphärische Strukturen sowie der dorsolaterale⁹ präfrontale Kortex benötigt. Letzterer zur Auswahl von Bearbeitungsstrategien und zur Planung und Sequenzierung von Zwischenschritten.

Bei Untersuchungen von Patienten mit Hirnschädigungen fand man heraus, dass einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben sowie das approximative Lösen größerer Probleme auch von der isolierten rechten Hemisphäre übernommen werden

⁹ „Zum Rücken hin gelegen und seitlich“

können. Bei weiteren Patientenuntersuchungen wurde festgestellt, dass ebenso ein Teil des präfrontalen Cortex¹⁰ (PFC) während der Verarbeitung arithmetischer Operationen besonders aktiv ist und dass eine Schädigung dieser Region dazu führt, dass Mengen nicht mehr richtig abgeschätzt und verglichen werden können. (Karnath & Thier, 2012)

GEDÄCHTNIS

Mit Hilfe des Gedächtnisses kann der Mensch Informationen speichern und zu einem späteren Zeitpunkt wieder abrufen. Man kann es daher als Prozess und als Struktur betrachten. Abhängig von der Zeitspanne, in der Gedächtnis-Inhalte abrufbar sind, werden drei verschiedene Kategorien unterschieden.

- Ultrakurzzeitgedächtnis (Immediatgedächtnis/sensorisches Gedächtnis)
- Kurzzeitgedächtnis
- Langzeitgedächtnis

Im Ultrakurzzeitgedächtnis werden alle über Sinnesorgane aufgenommenen Informationen gesammelt und für maximal 1,5 Sekunden gespeichert. Im sensorischen Gedächtnis findet noch keine Informationsverarbeitung statt. Kontrollprozesse reagieren auf die einströmenden Informationen und entscheiden, ob sie in den nächsten Speicher weitergegeben werden. Die Aufnahmekapazität ist nahezu unbegrenzt, da, bei gesunden Menschen, viele Informationen als „unwichtig“ eingestuft und vergessen werden. Dies geschieht in Bruchteilen von Sekunden.

Das erste Abspeichern von Daten und Fakten über einen Zeitraum bis zu mehreren Minuten ermöglicht das Kurzzeitgedächtnis. Wenn diese bewusst wiederholt werden, können sie beliebig lange behalten werden. In diesen Zeiträumen findet die erste Informationsverarbeitung statt, die dem Kurzzeitgedächtnis auch den Namen „Arbeitsgedächtnis“ einbringt. Die Aufnahmekapazität in diesem Speicher ist, im Gegensatz zum vorherigen, sehr gering. Es können nur maximal sieben Elemente aufgenommen werden.

¹⁰ PFC ist im vorderen Rindenteil des Frontallappens lokalisiert. Er ist entscheidend am Arbeitsgedächtnis beteiligt.

Über Kontrollprozesse werden aus dem Kurzzeitgedächtnis jene Informationen ins Langzeitgedächtnis geleitet, die als Gedächtnisspuren¹¹ dauerhaft gespeichert werden sollen. Vergleichsweise werden in diesen Speicher nur wenige Elemente weitergeleitet, die aber dauerhaft verbleiben. Da die Aufnahmekapazität, so wie die Verweildauer unbegrenzt ist, wird es auch als „Wissensgedächtnis“ oder im Allgemeinen als das „Gedächtnis“ bezeichnet. (Hobmaier, et al., 2003)

„Zwischen dem Kurzzeitgedächtnis und dem Langzeitgedächtnis besteht ein reger Informationsaustausch.“ (Hobmaier, et al., 2003, S. 130) Das bedeutet, es werden einerseits Informationen aus dem Kurz- in das Langzeitgedächtnis überführt, andererseits können schon länger abgespeicherte Elemente wieder ins Arbeitsgedächtnis gerufen werden. (Hobmaier, et al., 2003)



Abbildung 3: Informationsverarbeitungsweg durch die drei verschiedenen Speicher

(Hobmaier, et al., 2003, S. 131)

Gedächtnisprozesse können keinem bestimmten Gehirnbereich zugeschrieben werden, vielmehr sind sie in vielen verschiedenen Bereichen gleichzeitig aktiv.

Neben der rechten Hemisphäre ist auch ein Teil des limbischen Systems¹², der Hippocampus, für die Gedächtnisleistung von Bedeutung. Er reguliert Aggressions- und Motivationsverhalten sowie Lernvorgänge. In Bezug zu letzteren ist seine Aufgabe, explizite Gedächtnisinhalte vom Kurz- ins Langzeitgedächtnis zu überführen. Unter expliziten Gedächtnisinhalten versteht man jene Inhalte, auf die man bewusst

¹¹ Chemische Verbindungen im Gehirn (Hobmaier, et al., 2003)

¹² Das limbische System setzt sich aus den Strukturen der Amygdala, des Hippocampus und Teilen des Thalamus zusammen und ist um den Hirnstamm lokalisiert. Es hat variable Funktionen: Emotion, Motivation, Geruchswahrnehmung, Verhalten und Gedächtnis. „Im Zentrum des emotionalen Gedächtnisses steht die Amygdala[...]“ (Reece, et al., 2016, S. 1435)

zugreifen kann. Inhalte, die dem Bewusstsein nicht zugänglich sind, werden dem impliziten Gedächtnis zugeschrieben.

Lokalisiert ist das Kurzzeitgedächtnis in der Hirnrinde des Stirnlappens, das Langzeitgedächtnis hingegen ist eine Leistung der gesamten Großhirnrinde. (Faller & Schünke, 2016)

Für Leistungen des Kurz- und Langzeitgedächtnisses spielt, wie schon beschrieben, der Hippocampus eine entscheidende Rolle. *„Beim Kurzzeitgedächtnis erlauben zeitweilige Verknüpfungen oder Assoziationen, die im Hippocampus gebildet werden, den Abruf dieser Informationen. Wenn Erinnerungen ins Langzeitgedächtnis überwechseln, werden die Verknüpfungen im Hippocampus durch dauerhafte Verbindungen im Cortex ersetzt.“* (Reece, et al., 2016, S. 1437)

Für das Kopfrechnen ist neben dem Kurzzeitgedächtnis auch das deklarative Gedächtnis wichtig, da dort unter anderem das Schul- und Faktenwissen abgespeichert ist. Im deklarativen Wissen werden Lösungen grundlegender numerischer Probleme sofort aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen. (Zum Beispiel das Einmaleins)

Bereiche, die dabei im Gehirn aktiv sind, sind daher der Hippocampus, Regionen der linken Gehirnhälfte und verschiedene Teile der Großhirnrinde. (Faller & Schünke, 2016; Hobmaier, et al., 2003; Reece, et al., 2016; Rudolf-Müller, NetDoktor, 2017)

Weiters wurde in Hirnforschungen nachgewiesen, *„dass das Abrufen gespeicherter Ergebnisse, zum Beispiel des kleinen Einmaleins, in einem anderen Areal des Gehirns stattfindet als das eigentliche Kopfrechnen, bei dem tatsächlich ein Ergebnis nicht abgerufen, sondern durch Rechnen ermittelt wird“* (Wehrle, 2018, S. 1013)

Was das Gedächtnis mit dem Kopfrechnen zu tun hat

Das menschliche Gedächtnis besteht, wie im Kapitel „Gedächtnis“ schon erläutert, aus drei Komponenten. Der Informationsfluss durch das Gehirn ist in Abb. 4 dargestellt und verläuft wie folgt:

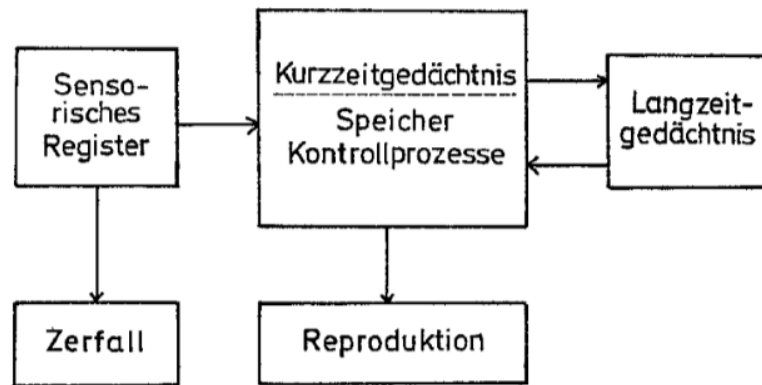


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Zweikomponententheorie

(Flade & Wender, 1974, S. 126)

Die erste Station der Information ist für kurze Zeit der sensorische Speicher, nur von hier kann sie weiter in das Kurzzeitgedächtnis gelangen. Geht die Information im sensorischen Speicher verloren, zum Beispiel durch willkürliche Kontrolle des Menschen (Konzentration auf eine bestimmte Sache und ignorieren von anderen Reizen), kann sie nicht ins Kurzzeitgedächtnis gelangen.

Das Kurzzeitgedächtnis wirkt im Gehirn als Arbeitsspeicher und ist charakterisiert durch begrenzte Speicherkapazität und Verweildauer der Information (In der Regel zwischen 10 und 20 Sekunden, aber auch bis zu mehreren Minuten).

Durch Einprägen (Memorieren) kann diese Zeitspanne jedoch beliebig verlängert werden, dies ist die wichtigste Kontrollfunktion im Kurzzeitgedächtnis.

Auch aus dem Langzeitgedächtnis können Informationen in das Kurzzeitgedächtnis gelangen und dort reaktiviert werden. Beispiel hierfür ist das visuelle Wahrnehmen einer Figur (Information, die über sensorischen Speicher eintritt) und das Erinnern an den Namen dieser Figur (Information, die aus dem Langzeitgedächtnis aktiviert wird). (Flade & Wender, 1974)

„Im Unterschied zum Kurzzeitgedächtnis hat das Langzeitgedächtnis eine unvergleichlich viel größere Kapazität und es scheint, als würde eine einmal darin gespeicherte Information nicht wieder gelöscht werden. Dass eine bestimmte Information zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht reproduziert werden kann, d. h. vergessen wurde, wird als verlorengegangene Zugriffsmöglichkeit interpretiert.“ (Flade & Wender, 1974, S. 127)

Wenn Menschen komplexe kognitive Aufgaben, wie zum Beispiel das Kopfrechnen, ausführen, benötigen sie bestimmte Ressourcen, um diese bewältigen zu können. Der Arbeitsspeicher („working memory“) ist eine solche, hier werden mentale Abläufe organisiert.

Obwohl das Kopfrechnen (mentale Arithmetik) ein mit expliziten Regeln, Fakten und Prinzipien ausgestatteter Bereich der Mathematik ist, werden dennoch die gleichen Strukturen und Speichersysteme im Gehirn angesprochen wie bei anderen kognitiven Aufgaben (z.B.: des Kurzzeitgedächtnisses).

Wenngleich in diesem Bereich die Forschung noch nicht weit vorangeschritten ist, gibt es verschiedene Modelle, die einen Erklärungsversuch darstellen, genauer auf die einzelnen Beschreibungen einzugehen ist nicht Ziel dieser Arbeit. Dennoch sei so viel gesagt, dass

„Any model of working memory must specify)1) how information enters the working memory system,)2) how such information is kept active, and)3) how the information is manipulated.“ (DeStefano & LeFevre, 2010, S. 354)

Stellt man einen Menschen vor die Aufgabe, eine Rechnung im Kopf zu lösen, muss die präsentierte Information im Gehirn kodiert werden, um im Anschluss eine Lösung präsentieren zu können. Die Aktion des Kodierens und Verarbeitens kann das Abrufen von bereits erworbenen Erkenntnissen (Regeln, Algorithmen,...) aus dem Speicher beinhalten.

Wenn eine Berechnung Zwischenergebnisse erfordert, so werden auch diese im „working memory“ gespeichert und von dort zur gegebenen Zeit wieder abgerufen.

Wie viel des Arbeitsspeichers benötigt wird, kommt sowohl auf die Art der Aufgabenstellung als auch auf die Fähigkeiten des Rechners an. Geht man von einem geübten Erwachsenen aus, ergibt sich Folgendes: Einstellige Rechnungen, mit und ohne Zehnerübertrag (1+1 bis 9+9) können anhand vorab abgespeicherter Informationen gelöst werden. Das Ergebnis wird hier größtenteils nicht berechnet, sondern aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen. Für den Arbeitsspeicher ergibt sich so wenig, bis kein Aufwand.

Für die Berechnung mehrstelliger Zahlen ergibt sich ein Mehraufwand je größer die Zahlen werden und je mehr Zehnerüberschritte man sich merken muss. („problem-size effect“) In diesem Zusammenhang benötigt man für Rechnungen ohne Übergang (z.B.: $32 + 44$) weniger Arbeitsspeicher als für Aufgaben mit Übergang (z.B.: $56 + 89$).

DeStevano & LeFevre schreiben in ihrer 2010 veröffentlichten Arbeit (The role of working memory in mental arithmetic), dass Kopfrechnen, genauso wie Lesen und Sprechverarbeitung, komplexe kognitive Aufgaben sind, die mit einem gemeinsamen Arbeitsspeicher arbeiten. Daher kann es in jedem dieser Bereiche zu individuellen Unterschieden kommen. (DeStefano & LeFevre, 2010)

Sowohl ein kombiniertes Auftreten der Lese-Rechtschreibschwäche mit einer Rechenleistungs-Störung als auch dissoziiertes Auftreten beider Leistungsfelder ist möglich. Im Feld der Rechenstörung ist bislang noch kein einheitliches Störungsbild identifiziert. Dennoch gibt es diverse Versuche der Differenzierung in Subtypen. (Landerl, 2007) *„Auch von Aster [43] identifizierte einen Subtyp, der v. a. mit verbalen Rechenkompetenzen (Kopfrechnen, Abzählen von Mengen, Rückwärtszählen) Schwierigkeiten hat.“* (Landerl, 2007, S. 338)

„Ashcraft and Kirk (2001) found that phonological interference was greatest for participants who had the highest levels of math anxiety. They suggested that anxiety acts like a secondary task, consuming attentional resources that could otherwise be devoted to the arithmetic task (see also Ashcraft et al., 1998)“ (DeStefano & LeFevre, 2010, S. 375)

DeStevano & LeFevre gehen dabei von einer Störung in der verbal-phonologischen Verarbeitung aus, während Landerl sich auf Studien bezieht, die Rechenstörungen auf Defizite in der basisnumerischen Verarbeitung sehen.

Butterworth geht in seinem Artikel Developmental Dyscalculia (2005) von einer genetischen Komponente aus die „developmental dyscalculia“ hervorruft. Er betont dabei, dass es sich nicht um einen rein erblichen Gendefekt handeln muss, sondern dieser auch durch umweltbedingte Störungen auftreten kann. (Butterworth, Developmental Dyscalculia, 2005)

VOM ZÄHLEN ZUM RECHNEN – IN DER SCHULE

Da schon im Kindergartenalter ein gewisser Zahlensinn ausgeprägt ist, ist es nicht erstaunlich, dass geschickt in Geschichten verpackte Rechnungen auch in diesem Alter schon lösbar sind.

Zum Beispiel: Du hast zwei Legosteine, Sarah gibt dir noch fünf dazu. Wie viele Steine hast du jetzt?

Diese Rechnung wird noch nicht als Addition gesehen und verstanden, dennoch kann sie, durch zählendes Rechnen, gelöst werden. In der Regel verwendet man im Kindergarten symbolhaft Gegenstände. Oder im obigen Beispiel sogar die Dinge, die in der Geschichte vorkommen.

Aber auch das Fingerzählen hat hier seinen Anfang. Bei dieser Art des zählenden Rechnens sind, wie der Name vermuten lässt, die Finger das Hilfsmittel. Um bei obigem Beispiel zu bleiben, mit der linken Hand werden zwei Finger gezeigt, mit der Rechten fünf. Für das Ergebnis werden die Finger nacheinander abgezählt.

„In children the sense of mental calculations is developed naturally in their early years of age. After the age of four or five, [...], they learn how to manage their minds in more formal ways“ (Mastrothanasis, Geladari, Zervoudakis, & Strakalis, Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction, 2018, S. 44)

Mit dem Einstieg in die Schule sollte das zählende Rechnen, innerhalb des ersten Jahres, dem nichtzählenden Rechnen weichen. (Gaidoschik U. M., Das Recheninstitut - zur Förderung mathematischen Denkens, 2016) Wie man bei Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner lesen kann, herrscht darüber seit Jahren Einigkeit in der Fachdidaktik. Auch Zeljić, Ilić & Jelić beschreiben in ihrer Arbeit „Mental Arithmetic – Subtraction Strategies“ (2018) als „take home message“, dass arithmetische Strategien am idealsten schon im Lehrplan der Primarstufe verankert werden sollten.

„Seit den 90er Jahren hat sich [...] eine deutliche Schwerpunktverschiebung in Richtung des Kopf- und halbschriftlichen Rechnens[...]“ (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018, S. 42) im Mathematikunterricht ergeben.

Zu dieser Veränderung haben folgende Argumente geführt:

- *„Kinder sind sich ihrer Vorgehensweise beim Kopfrechnen bewusster als bei einem schriftlichen Verfahren.*
- *Der Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen wird beim Kopfrechnen deutlicher.*
- *Die unterschiedlichen Vorgehensweisen beim Kopfrechnen ermöglichen den wechselseitigen Austausch und die Diskussion.*
- *Durch die Möglichkeit des interaktiven Lehrens im Bereich des Kopfrechnens kann das Bewusstsein für adäquate und inadäquate Vorgehensweisen geschult werden.*
- *Im Zusammenhang mit wachsendem Können ist es möglich, die Kopfrechenmethoden weiterzuentwickeln und dem entsprechenden Können anzupassen.“*

(Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018, S. 42f)

Gaidoschik beschreibt zwei Arten des nichtzählenden Rechnens, das Abrufen und das Ableiten. Beim Abrufen werden bereits gespeicherte Rechnungen aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen. Diese Art ist in gewisser Weise eine Vorstufe des Ableitens, denn hier ist eine Rechnung, zum Beispiel $4+4$, bekannt und eine andere, $4+5$, wird daraus abgeleitet. ($4+4=8$; also muss $4+5$ eines mehr, also 9 sein) (Gaidoschik U. M., Das Recheninstitut - zur Förderung mathematischen Denkens, 2016)

Thevenot et al. untersuchten in einer 2016 veröffentlichten Studie die Hintergründe des soeben beschriebenen „Abrufens aus dem Gedächtnis“. Man gab Zehnjährigen Additionsaufgaben mit den Operanten Eins bis Vier und verglich Reaktionszeiten. Am Ende ihrer Untersuchungen kamen sie zu dem Schluss, dass es nicht, wie unter anderem von Gaidoschik beschrieben, ein tatsächliches Abrufen von Informationen ist, sondern dass es zu perfektionierten Abzählverfahren kommt, die die Reaktionszeit minimiert.

(Thevenot, Barrouillet, Castel, & Uittenhove, 2016) Der Eindruck des Abrufens könnte daher entstehen, dass im Zuge der Entwicklung, bis zum Erwachsenenalter, diese Verfahren derart optimiert werden, dass es für Außenstehende wirkt, als würde eine Erinnerung abgerufen werden.

In dieser Arbeit wird dennoch auf den Terminus „Abrufen“ zurückgegriffen, immer mit dem Gedanken daran, dass es sich wie in der erwähnten Studie nicht um eine reine Gedächtnisleistung handeln muss.

Da es wenig sinnvoll erscheint, dass Schülerinnen und Schüler im ersten Schuljahr alle Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 20 auswendig lernen, ist es nach fachdidaktischer Meinung unumgänglich, dass das Ableiten so schnell wie möglich erlernt wird, zumal das zählende Rechnen auf Dauer fehleranfälliger und mühsamer ist und dadurch die Freude an Zahlen und am Rechnen mindern kann.

Studien von Gaidoschik zu Folge, sieht die Praxis anders aus, als die Fachdidaktik es beschreibt. Schulbücher an Volksschulen geben nur wenig Anreiz, um das ableitende Rechnen zu erlernen. Abhilfe kann hier eine an der PH Kärnten angebotene Fortbildung sein. Die Fortbildungsmaßnahme „Ein veränderter Elementarunterricht“ (kurz EVEU) strebt an, den Lehrkräften Methoden zu vermitteln, um den Kindern das ableitende Rechnen schon in der ersten Klasse näher zu bringen. Erste Zwischenergebnisse 2014 zeigten dahingehend auch schon einen Erfolg. (Gaidoschik U. M., Das Recheninstitut - zur Förderung mathematischen Denkens, 2016)

Lehrplan der Volksschule

Die soeben angesprochenen Veränderungen im schulischen Bereich in Bezug auf das Kopf- und halbschriftliche Rechnen finden sich auch im Österreichischen Lehrplan der Volksschule (2012) wieder. Hier werden einige Punkte für die Verankerung des „mündlichen Rechnens im Lehrplan“ zitiert:

- Unterpunkt „Rechenoperationen“: *„Durchführen der Rechenoperationen im additiven und im multiplikativen Bereich ohne und mit Notation der Rechengesetze“* (Lehrplan der Volksschule, 2012, S. 148)

- *„das mündliche Rechnen hat Bedeutung für die Förderung des Zahlenverständnisses, der Rechenfertigkeit, des Operationsverständnisses und für das Lösen von Sachproblemen;“* (Lehrplan der Volksschule, 2012, S. 154)
- Explizit Erwähnung findet das hier genannte *„mündliche Rechnen“* im Plan für die 3.Schulstufe in Bezug auf den Zahlenraum bis 1000: *„– Mündliches Rechnen im additiven und multiplikativen Bereich: [...] Lösen einfacher Operationen unter Nutzung vorteilhafter Rechenwege (z.B. durch Tauschaufgaben, Nachbaraufgaben, Umkehraufgaben, Analogieaufgaben, Zerlegungsaufgaben)“* (Lehrplan der Volksschule, 2012, S. 155)
- Auch in der 4.Schulstufe findet das Kopfrechnen Erwähnung *„Mündliches Rechnen im additiven und multiplikativen Bereich“* → *Erweiterungen der 3.Schulstufe*
- Ebenfalls im Lehrplan vermerkt ist der Punkt *„Lösen von Sachproblemen“*, hier wird unter anderem darauf verwiesen, die Aufgabenstellung durch Überschlagen bzw. mittels mündlichen Rechnens zu lösen.
- Im Absatz *„Didaktische Grundsätze“* unter dem Punkt *„Rechenoperationen“* ist zu finden: *„Beim mündlichen und schriftlichen Rechnen ist auf das Verständnis der Zusammenhänge zwischen den Operationen, auf das Erkennen zu Grunde liegender Rechenregeln und das Finden von Lösungsstrategien Wert zu legen“* (Lehrplan der Volksschule, 2012, S. 164)

(Lehrplan der Volksschule, 2012)

ZAHLENSINN

Die Fähigkeit Mengen zu erfassen und Zahlen nach den Regeln der Kardinalität zu sortieren ist nicht allein dem Menschen vorbehalten. Zahlreiche Tierstudien haben sich mit diesem Thema beschäftigt und festgestellt, dass sogar die kleinsten, zum Beispiel Geißeltierchen (=Flagellaten; einzellige, eukaryotische Lebewesen), auf eine Mengenveränderung der Nahrungsquelle reagieren.

“Zudem reagieren Tiere nicht nur auf die Zunahme von Menge, sie können auch Anzahlen diskriminieren und zeigen dieses Verhalten in der Wildnis sowie bei kontrollierten Experimenten im Labor“ (Grond, Schweiter, & Aster, 2013, S. 40)

In einer Laborstudie 1998 zeigten Brannon und Terrace, dass Rhesusaffen in der Lage sind zu lernen, Zahlen von eins bis vier auf einem Monitor der Reihe nach anzutippen. Sie waren auch in der Lage, die Regeln der Kardinalität auf andere Zahlen zu übertragen, was Forscher zu dem Schluss kommen lässt, dass sie ein Konzept für numerische Quantität entwickeln können. (Brannon & Terrace, 1998)

Neben den Affen gab es auch Studien mit anderen Wirbeltieren wie Vögeln¹³ (Pepperberg & Carey, 2012), Fischen¹⁴ (Kaplan, 2011) und Salamandern¹⁵ (Krusche, Uller, & Dicke, 2010). Auch Forschungen mit Wirbellosentieren, wie den Bienen¹⁶ (Gross, et al., 2009), wurden durchgeführt. Alle genannten Autorinnen und Autoren kamen zu dem Ergebnis, dass alle diese Tierarten zählen bzw. Mengen erfassen können.

„Die Fähigkeit, numerische Anzahlen zu erkennen, spiegelt sich auch bei der menschlichen Spezies von Geburt an wider. Erste Hinweise für das Vorhandensein einer numerischen Repräsentation bei Säuglingen konnte mittels Habituationsstudien erbracht werden.“¹⁷ (Grond, Schweiter, & Aster, 2013, S. 41)

¹³ Bericht über Alex den Graupapagei (*Psittacus erithacus*) von der Harvard-Forscherin I.M. Pepperberg

¹⁴ Studie mit Koboldkärpflingen (*Gambusia affinis*)

¹⁵ Studie mit Waldsalamandern (Plethodon)

¹⁶ Studie mit Honigbienen (*Apis*)

¹⁷ Habituation ist die Gewöhnung an Bedingungen bzw. wiederkehrende Reize.

Diese Fähigkeiten sind aber nicht gleichzusetzen mit dem zählenden Rechnen oder gar dem Kopfrechnen, wenngleich sie aber für beide wichtige Bedingungen sind, wie im Folgenden klar wird.

Voraussetzung für das Überwinden vom zählenden Rechnen ist, unter anderem, die Entwicklung eines umfassenden Zahlenbegriffs und dem vorausgehend die (Weiter-) Entwicklung des Zahlenblicks.

Da es viele verschiedene Theorien zum „Zahlenblick“ gibt, ist eine Definition, wie auch schon Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner (2018) in „Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln“ beschreiben, nicht so einfach möglich.

Sie beschreiben weiter, dass in der Literatur Begriffe wie „number sense“/„Zahlensinn“ oder „structure sense“/„Struktursinn“ im gleichen Kontext genannt werden. (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018)

Auch für diese beiden Begriffe gibt es variable Theorien und Studien, die, je nach wissenschaftlichem Ansatz, zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen.

„Ein grundlegender Unterschied im Verständnis von Zahlensinn liegt bei den einzelnen Domänen in der Frage, wie und wann Zahlensinn entsteht [...]“ (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018, S. 78)

Mit neurophysiologischem Ansatz stellt Butterworth (2018) in seinem Artikel fest, dass es verschiedene Studien gibt, die zu dem Schluss kommen, dass es einen genetischen Faktor in der Entwicklung des Zahlensinns gibt, wenn man Zahlensinn als das Erkennen und Vergleichen können von Mengen ohne Zählen versteht. Er stellt daher die These auf, dass dieser Sinn angeboren ist. (Butterworth, Low Numeracy: From Brain to Education, 2018)

Unter gleichen Gesichtspunkten kommt die Fachdidaktik zu dem Schluss, dass es sich bei „number sense“ um eine Fähigkeit handelt, die sich im Kleinkindalter erst entwickeln muss. (Gersten & Chard, 1999)

Eine genaue Definition gibt es in keinem Bereich. Aus fachdidaktischer Sicht könnte man sagen, dass es sich dabei um eine Kompetenz handelt, die einerseits intuitiv ist, aber andererseits auch (weiter-)entwickelt werden kann. (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018)

„Auch mit dem Begriff „Struktursinn“ werden sowohl angeborene beziehungsweise im frühkindlichen Alter natürlich entwickelte Fähigkeiten [...] verbunden.“ (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018, S. 80) Nach Lücken (2010) kann man unter Struktursinn bzw. „structure sense“ unter anderem das Wiedererkennen von Strukturen und Mustern, das Aufteilen von Mustern in Struktureinheiten (Teile), das Erkennen von Beziehungen zwischen Struktureinheiten und das Betrachten des Musters als Ganzes verstehen. (Lücken, 2010)

Es liegt daher nahe, den „Zahlenblick“ als eine Fähigkeit zu sehen, die nicht nur einen besonderen Blick auf Zahlen ermöglicht, sondern auch als Kompetenz, mit der es möglich ist, Strukturen und Muster zu erkennen.

Im Kontext mit dem Zahlenblick verwendet, unter anderem, Gaidoschik (2017) den Blitzblick. Hier ist das schnelle Erkennen einer Anzahl gemeint, wie zum Beispiel die Anzahl der Augen auf einem Würfel. Im Kleinkindalter müssen diese noch jedes Mal abgezählt werden, mit zunehmender Erfahrung kann auf einen Blick gesehen werden, wie viele Punkte man gewürfelt hat. Hierbei spielt die strukturell einheitliche Anordnung der Punkte auf einem Würfel eine wichtige Rolle. (→ Struktursinn).

Die Aus- und Weiterbildung dieses Zahlen- oder Blitzblicks hilft bei der mentalen Vorstellung einer Zahl und ist dementsprechend als Basis zur Ablösung des zählenden Rechnens und im Bereich des Kopfrechnens wichtig.

Es lassen sich zwei Formen beim Anzahlerfassen unterscheiden: simultane und quasi-simultane Anzahlerfassung.

Bereits im Kindergartenalter zeigt sich die Fähigkeit, die Anzahl unstrukturierter Mengen zu bestimmen, die eine maximale Mengengröße von fünf haben. (Sinner, 2016)

Grond, Schweiter, & Aster (2013) beschreiben in ihrem Artikel „Neuropsychologie numerischer Repräsentationen“ Studien, die sich mit der Erforschung der Anzahlerfassung beschäftigen. Sie nennen die simultane Erfassung „Subitizing“ und fassen zusammen, dass Kleinkinder dies bis zu einer Anzahl von drei, Erwachsene bis zu einer Anzahl von vier beherrschen und es bei größer werdenden Mengen zu einem signifikanten Anstieg der Fehlerhäufigkeit kommt. (Grond, Schweiter, & Aster, 2013) Man kann daraus schließen, dass es ab einer bestimmten Mengengröße nicht mehr möglich ist die Anzahl auf einen Blick zu erkennen.

Wie ist es aber möglich, dass man bei einem Würfel, auf Anhieb, erkennt, dass man eine Sechs gewürfelt hat oder, dass jemand acht Finger in die Höhe hält, ohne diese nachgezählt zu haben?

Diese Fähigkeit kann auf die quasi-simultane Anzahlerfassung zurückgeführt werden. Das quasi-simultane Anzahlerfassen bedient sich zu kleinen Teilen dem Struktursinn.

Werden Mengen in kleineren Teilen dargestellt (Zum Beispiel Fünfer-Blöcke) kann auch hier mit nur einem Blick die genaue Menge, anhand der Struktur, erkannt werden.

Der Unterschied zwischen simultaner und quasi-simultaner Anzahlerkennung ist nicht nur die Mengengröße, sondern auch, dass Zweiteres geschult und verbessert werden kann, sodass immer größere Mengen erkannt werden können. (Sinner, 2016)

Für das Kopfrechnen ist das Beherrschen der quasi-simultanen Anzahlerkennung ein großer Vorteil. Es kommt dabei auf die Fähigkeit an Zahlen oder Mengen zu gruppieren, umzugruppieren oder zu bündeln. (Zum Beispiel die 5er-Bündelung oder das Zerlegen von 100/1000/ usw. in 10er/5er/4er/etc. -Blöcke)

Diese Kompetenz ist eine der ersten, die im Laufe der Grundschule gelernt wird. In der Regel werden dazu Punktbilder verwendet, die im Idealfall in verschiedenen Variationen, wie zum Beispiel Würfelbilder oder Reihen- und Blockdarstellung (Abb. 5), zum Einsatz kommen.

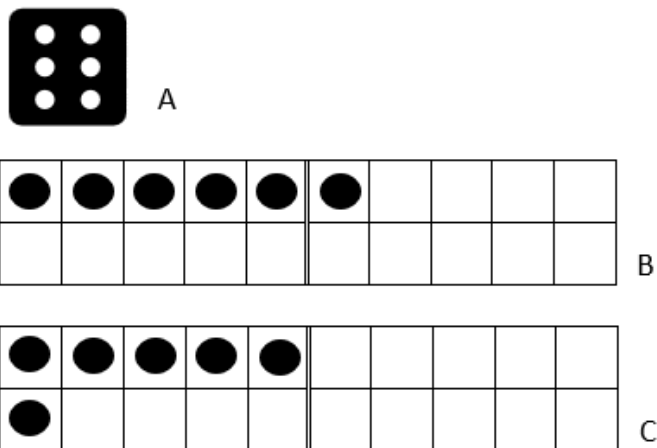


Abbildung 5: Punktedarstellung: A) Würfelbild B) Reihendarstellung C) Blockdarstellung
 Vgl.: Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018

Der Nutzen variabler Darstellungsformen ist der mehrperspektivische Zugang, der beim Sehen einer Zahl und später einer Rechnung wichtig ist, um flexibel auf Anforderungen reagieren zu können.

Diese Fähigkeit wird zunächst im Zehner-/Zwanzigerfeld trainiert und lässt sich im Anschluss analog auf das Hunderterfeld übertragen. Entscheidend ist dabei, auf vorhandenem Wissen aufzubauen und die Entwicklung dieser Kompetenz nicht zu erzwingen.

Eine weitere Kompetenz, die in der Regel im Volksschulalter erlernt wird, ist das Erkennen von bzw. das Wissen um so genannte „Zahlenfreunde“ („Zehnerpärchen“). Hier geht es darum zu wissen, welche Beträge zusammen den Wert „10“ ergeben.

Es ist nicht nur wichtig zu wissen, in welche Teile sich die Zahl Zehn zerlegen lässt, sondern auch wie viel man von einem Betrag weg und zu einem anderen addieren muss, um zu Zehn zu gelangen. Diese Kompetenz ist vor allem beim Rechnen mit Zehnerübertrag sowohl im Bereich der Addition als auch im Bereich der Subtraktion wichtig. (Gaidoschik M. , 2014)

MENTALE FLEXIBILITÄT

Neben dem Gefühl für Zahlen und dem Verständnis für Strukturen ist bei der Ausführung einer Kopfrechnung Flexibilität und Anpassungsfähigkeit erforderlich. Flexibilität ist in der Mathematik eine wichtige Eigenschaft, da sie dazu befähigt, zwischen verschiedenen Werkzeugen zu variieren um einen geeigneten Lösungsweg zu finden.

(Mastrothanasis, Geladari, Zervoudakis, & Strakalis, Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction, 2018)

Bei schriftlichen Standardverfahren konzentriert man sich während der Berechnung auf die Einzelkomponenten (Einer, Zehner,...). Es erfordert Kenntnis grundlegender Fakten und dem entsprechenden Standardalgorithmus.

Im Gegensatz dazu beschäftigt man sich während des Kopfrechnens mit der ganzen Zahl (siehe Hierzu Kapitel " KOPFRECHNEN – EINE DEFINITION") und insbesondere bei mehrstelligen Zahlen ist der Rechengang sehr komplex und erfordert ein tieferes Verständnis von Vorgängen und Zusammenhängen, aber auch Kenntnis von Fakten. (Rathgeb-Schnierer & Green, Desenvolvendo Flexibilidade no Cálculo Mental, 2018)

Die Ausführung einer Kopfrechnung erfordert ebenso Flexibilität und Anpassungsfähigkeit, sowie ein Zahlengefühl und ein Verständnis für Strukturen.

Das Zahlengefühl („sense of number“) *„[...]refers to the general understanding of the numbers and functions of a person along with the ability to use this understanding flexibly in managing numerical situations[...] . Mental calculations promote the development of problemsolving skills, provide techniques for calculating estimates, contribute to understanding the concept of number, and encourage children to manage numbers with ease, establishing the foundation for developing computational skills. Furthermore, mental calculations help pupils understand and evolve written computational methods[...]“* (Mastrothanasis, Geladari, Zervoudakis, & Strakalis, Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction, 2018, S. 44)) Weiter ist zu erwähnen, dass die mentale Arbeit Erklärungsvermögen und Kritikfähigkeit der Schüler fördert und den Sinn für numerische und prozedurale Funktionen aktiviert.

Flexibilität ist in der Mathematik eine wichtige Eigenschaft, die dazu befähigt zwischen verschiedenen Werkzeugen zu variieren um einen geeigneten Lösungsweg zu finden. Um flexible Rechenkompetenzen zu entwickeln muss im Unterricht ein Aufwerten des Zahlen- und Kopfrechnens stattfinden und damit einhergehend ein Zurückstufen der schriftlichen Verfahren. Wie in der Arbeit von Rathgeb-Schnierer „Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs“ beschrieben, findet dies seit den 90er Jahren, in Deutschland, statt. Hier gab es eine Schwerpunktverschiebung in Richtung des Kopf- und halbschriftlichen Rechnens und seit dem neuen Jahrtausend gewinnt auch das flexible Rechnen immer größere Bedeutung. (siehe hierzu auch das Kapitel „KOPFRECHNEN – EINE DEFINITION“)

„Flexible Rechner verfügen über Zahlwissen (number facts), Zahlverständnis (numeration), Schätzkompetenzen und Zahlgefühl (estimation and sense of size of numbers) sowie Wissen im Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen (number and operation) (Heirdsfield und Cooper 2002)“ (Rathgeb-Schnierer, Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2.Schuljahres, 2010, S. 259f)

Während unflexible Rechner auch beim Kopfrechnen auf das Ziffernrechnen zurückgreifen, indem sie sich den schriftlichen Algorithmus vorstellen, haben flexible Rechner eine aufgabenadäquate Vorgehensweise entwickelt, bei der sie den ganzheitlichen Umgang mit Zahlen pflegen. Zusätzlich haben flexible Rechner ein größeres Vertrauen in ihr Wissen und ihre individuell entwickelten Rechenwege als unflexible Rechner, die sich auf vorgegebene Musterlösungen verlassen.

Macintyre und Forrester (2003) haben bei ihren Untersuchungen festgestellt, dass beim Kopfrechnen Merkmale der Flexibilität, besonders das erfinderische Nutzen von Zahlen und ein ausgeprägter Zahlensinn, maßgeblich zum Erfolg beitragen.

Threlfall (2002, 2009) vertritt die Meinung, dass die Strategie vom Kind nicht vor dem Rechnen, sondern während des Rechnens gewählt wird. Laut Rathgeb-Schnierer beschreibt Threlfall flexibles Rechnen *„[...] als situationsabhängige, individuelle Reaktion auf eine spezifische Aufgabenstellung, die aus dem Zusammenspiel von Erkennen und Wissen resultiert und in diesem Sinne einmalig ist. Für das flexible Rechnen sind verschiedene Eigenschaften unumgänglich: ausgeprägtes, altersspezifisches Zahlwissen, Zahl- und Operationsverständnis, gut entwickelte*

Basisfakten, Selbstvertrauen und eine positive Einstellung zur Mathematik.“ (Rathgeb-Schnierer, Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2.Schuljahres, 2010, S. 261)

Schütte (2004) kommt in ihren Studien zu dem Ergebnis, dass die Schulung des Zahlenblicks¹⁸ und einer kindereigenen Rechenwegsnotation wichtige Faktoren beim Erlernen von Flexibilität sind.

(Rathgeb-Schnierer, Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2.Schuljahres, 2010)

Zusammengefasst kann man flexibles Rechnen auf zwei verschiedene Arten beschreiben:

1. Ein ausreichendes Repertoire an Strategien und das Wissen um die Wahl und Anwendung der passenden Taktik um eine Aufgabe adäquat lösen zu können
2. Situationsabhängiges, individuelles Reagieren auf spezifische Aufgabenmerkmale, verbunden mit der Konstruktion von Vorgehensweisen während des Lösungsprozesses

Um eine möglichst hohe Flexibilität zu erreichen, ist das Kennen- und Erlernen möglichst vieler variabler Methoden notwendig. Selter (2013) beschreibt sechs Hauptstrategien für das mentale Addieren und Subtrahieren, die in diesem Zusammenhang Verwendung finden können.

1. Schrittweise
2. Stellen extra
3. Stellen- & Schrittweise
4. Hilfsaufgaben
5. Vereinfachen

¹⁸ „Der Zahlenblick impliziert Kenntnisse über Zahleigenschaften und -beziehungen, Kenntnisse über Aufgabeneigenschaften und -beziehungen sowie metakognitive Kompetenzen. Er soll helfen, „verallgemeinerbare Aspekte in Situationen zu erkennen, Strukturähnlichkeiten zwischen bereits gelösten und neuen Aufgaben zu entdecken und strategische Vorgehensweisen zu übertragen“ (Schütte 2008, S. 103)“ (Rathgeb-Schnierer, Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2.Schuljahres, 2010, S. 262)

6. Ergänzen

In einer Belgrader Studie von Zeljić, Ilić & Jelić zum Thema „Mental Arithmetic – Subtraction Strategies“ wird deutlich, dass ein Drittel, der an der Studie teilgenommen SchülerInnen, die die Aufgaben, die ihnen gestellt worden waren, mittels schriftlicher Kalkulation berechnet hatten, eine höhere Fehlerquote aufwiesen als jene, die die Aufgaben mittels mentaler Strategien lösten. Auch bei dem Versuch die Rechnung ohne Notation zu rechnen wurde auf die Methode der schriftlichen Kalkulation zurückgegriffen und somit gezeigt, dass es ihnen an strategischer Flexibilität mangelt. (Zeljić, Ilić, & Jelić, 2018)

Um situationsabhängig handeln und flexibel auf Aufgabenstellungen reagieren zu können, benötigt man ein Repertoire an Lösungsstrategien. Im letzten Kapitel wird daher eine Auflistung von verschiedenen Kopfrechenmethoden beschrieben, welche nach Rechenart sortiert werden.

ZAHLENVERARBEITUNG BEI ERWACHSENEN

Das „Triple-Code-Modell“ von Dehaene formuliert, wie die geistigen Funktionen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens bei Erwachsenen beschaffen sind. Es besagt, dass Erwachsene über drei unterschiedliche, aber verbundene neuronale Netzwerke (Module) verfügen. Diese Module sind ihren Eigenschaften entsprechend in unterschiedlichen Regionen des Gehirns angesiedelt.

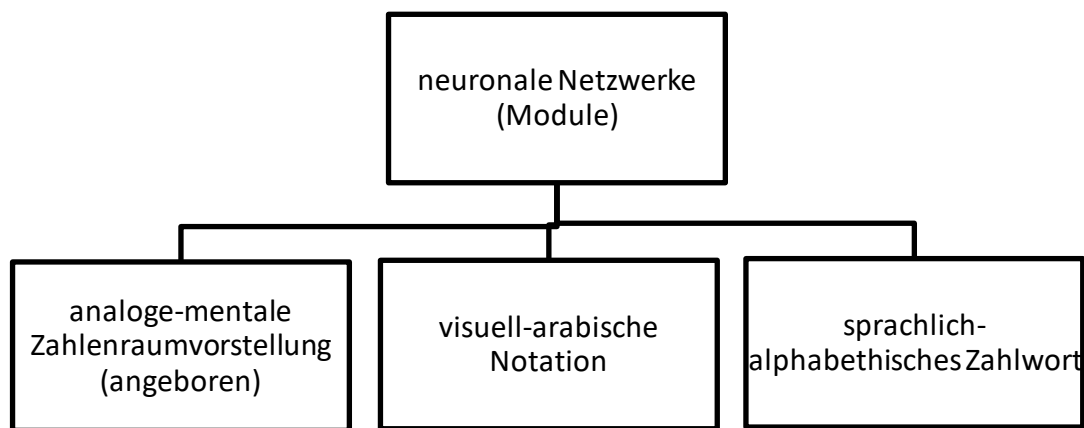


Abbildung 6: Neuronale Netzwerke des Gehirns für Zahlenverarbeitung und Rechnen nach Dehaene

Es gibt je ein Netzwerk für das sprachlich-alphabethische Zahlwort, die visuell-arabische Notation und die analoge-mentale Zahlenraumvorstellung. Das analoge Modul (innerer Zahlenstrahl) ist nach Dehaene ein angeborener Zahlensinn.

Die Entwicklung der zahlenverarbeitenden Hirnfunktionen kann als stufenweiser neuronaler Prozess verstanden werden, bei dem die frühe Fähigkeit der Mengenerfassung den Anfang darstellt. Als zweiten Entwicklungsschritt ergeben sich sprachliche Symbolisierungssysteme, die Zähl- und Abzählfertigkeiten, durch Zahlworte, mit sich bringen und im weiteren Verlauf zur Zahlschreibweise führen. Parallel dazu formt sich im Inneren ein mentaler Zahlenstrahl, er eröffnet die Möglichkeit einer zahlenräumlichen Vorstellung, in der mit verschiedenen Zahlsymbolen operiert werden kann.

Diese mentale Entwicklung ist grundlegend für das rechnerische Denken und arithmetische Manipulieren (Kopfrechnen). (Aster, 2013)

STRATEGIEN

Das Forschungsfeld der *cognitive psychology* hat in den letzten Jahren Fortschritte für den Bereich der mentalen Prozesse gebracht. Forscher haben Kopfrechenstrategien (mental calculation strategies) als spezifische kognitive Prozesse, Aktionen oder Verhaltensweisen charakterisiert, die bewusst implementiert werden, um individuelle Lösungskompetenzen zu entwickeln. Sie haben diesen mentalen Bereich daher als erlernte, zielgerichtete und kontrollierte Handlungsweise verstanden. (Mastrothanasis, Geladari, Zervoudakis, & Strakalis, Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction, 2018)

Kopfrechnen beruht, wie schon mehrfach erwähnt, auf dem Verständnis der grundlegenden Eigenschaften der Zahlssysteme und arithmetischen Operationen sowie einem gut entwickelten Zahlensinn.

Es gibt dabei mentale Strategien, die auch als clevere Berechnungsmethoden gesehen werden können und sich vom algorithmischen Rechnen, wie schon im Kapitel „KOPFRECHNEN – EINE DEFINITION“ beschrieben, unterscheiden. Um diese Merkmale nochmals kurz in Erinnerung zu rufen:

- Mentale Berechnungen sehen Zahlen als Ganzheit und nicht als Ziffern
- Es gibt nicht die eine korrekte Variante, um die Berechnung durchzuführen
- Beim Kopfrechnen gibt es keine Notationen

Ein weiterer noch nicht beschriebener Unterschied ist, dass bei mentalen Berechnungsstrategien die Zahlen normalerweise in einer horizontalen Linie „gesehen“ werden.

Wie ebenfalls schon erwähnt, ist ein wichtiges Merkmal zu „gutem“ Kopfrechnen strategische und mentale Flexibilität in Bezug auf Strategie und Eigenschaften der Zahlen in mathematischen Aufgaben.

Voraussetzung für manche Strategien, vor allem im Bereich der Multiplikation, ist das Einmaleins, das Einspluseins sowie ein bestehendes Gefühl für Zahlen. Letzteres erleichtert es zu erkennen, wie man Zahlen in gleich große Blöcke einteilen kann, um die Rechnung zu vereinfachen. Ein Beispiel dafür ist die Zerlegung der Zahl 100 (oder

1000; etc.) in 10er, 5er, 4er oder 2er Blöcke. (zum Beispiel: 20-40-60-80-100; 25-50-75-100; etc.). Beim Erlernen des Einspluseins können die unter Punkt „Additionen mit Zehnerübertrag“ beschriebenen Methoden hilfreich sein, diese sind im Anschluss stellenweise auch für das Multiplizieren wichtig.

Die nun erklärten Methoden für das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren beziehen sich auf die Menge der Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Im Bereich der Multiplikation und Division kann die Zahlenmenge zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitert werden, da man dabei nur auf etwaige Vorzeichen achten muss (Vorzeichenregeln: Minus $\cdot$ Minus = Plus; etc.) Stellenweise können die Ergebnisse bei den Divisionen in die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ fallen, welche in dieser Abhandlung ausschließlich als Dezimalzahlen dargestellt werden.

Zusätzlich sei noch erwähnt, dass es sich bei den ab „Multiplizieren mehrstelliger Zahlen“ beschriebenen Strategien teilweise nicht nur um Kopfrechenmethoden im engeren Sinn handelt, da manche die Zahlen als Ziffern einzeln betrachten und nicht die Zahl als Ganzes.

Addieren/Subtrahieren

Additionen mit Zehnerübertrag

Es ist wichtig, dass man im Zahlenraum bis 20 über verschiedene Methoden verfügt, die das „Weiterzählen“ bzw. „Fingerrechnen“ ablösen. Hierbei kommt es, gerade am Anfang, vor allem bei den Additionen mit Zehnerübertrag zu Schwierigkeiten. Folgende Varianten von Gaidoschik können beim Rechnen hilfreich sein:

„Kraft der Fünf“

Diese Variante ist beim Einspluseins vor allem im Raum von 6+6 bis 9+9 vertreten.

Würde man, mit einem Partner, die Summanden einzeln mit den Händen visualisieren, wären immer an einer Hand alle 5 Finger ausgestreckt. Es geht also darum die beiden Summanden je als 5+x zu sehen, was in Folge zu einer einfacheren Zwischenrechnung führt.

Der erste Schritt bei dieser Strategie ist es, zu erkennen wie sich beide Summanden zusammensetzen. Im zweiten Schritt addiert man die beiden Fünfer. Der dritte Schritt besteht darin, die beiden Reste zu addieren. Zum Schluss werden beide Teilergebnisse addiert.

Ein Beispiel: $7+8=?$

$$7=5+2 ; 8=5+3 \rightarrow (5+5)+(2+3)=10+5=15$$

(Bei nicht geübtem Kopfrechnen kann man individuell, je nach Gedächtnisleistung, variieren, wie viel von dieser Rechnung tatsächlich aufgeschrieben wird.)

„Verdoppeln plus eins“/„Verdoppeln minus eins“

Eine Voraussetzung für diese Methode sind die abrufbaren Verdopplungen von 6+6 bis 9+9. (Sollte dies nicht der Fall sein, wäre die zuvor beschriebene „Kraft der Fünf“ eine gute Wahl diese zu automatisieren.)

Die Abrufbarkeit ist notwendig, da man bei dieser Methode immer von einer Verdopplung ausgeht und je nach Rechnung eines dazu- oder wegrechnet. (gegebenenfalls kann man auch zwei dazu/wegrechnen.)

Beispiel für „Verdopplung plus eins“: $8+9=? \rightarrow$ die dazugehörige Verdopplung: $8+8$ ist abrufbar, da 9 um eines mehr als 8 ist, ist das Ergebnis ebenfalls um eines größer.

Die gleiche Rechnung kann auch als „Verdopplung minus eins“ verstanden werden. Hier wäre die zugehörige Verdopplung $9+9$. Da 8 um eines kleiner ist als 9, muss das Ergebnis ebenfalls um eines kleiner sein als bei der Verdopplung.

„Kraft der Zehn“ / „Zehnertrick“

Angelehnt an die vorherige Methode ist hier einer der Summanden der Zahl 10 sehr nahe. Am idealsten 9, aber auch 8 ist möglich.

Ein Beispiel: $9+6=?$

Weiß der Lernende nun schon, dass $10+6=16$, kann er mit Hilfe der vorherigen Methode oder durch Anleiten des Lehrenden herausfinden, dass die ursprüngliche Aufgabe lediglich um eines weniger als 16 ist.

„Zehnerstopp“/„Teilschrittverfahren“

Bei dieser Strategie wird ein Summand so zerlegt, dass ein Teil davon den zweiten Summanden auf 10 ergänzen kann. Im untenstehenden Beispiel wird die Zahl 6 als $2+4$ gesehen. Dem Assoziativgesetz folgend kann man nun mit der Rechnung $2 + 8$ beginnen und im Anschluss 4 addieren.

Beispiel: $8+6=? \rightarrow 8+(2+4)=(8+2)+4=10+4=14$

(Gaidoschik U. M., Das Recheninstitut - zur Förderung mathematischen Denkens, 2012)
(Gaidoschik M., 2014)

Unter der Voraussetzung, dass neben dem Einspluseins auch die Methoden „Kraft der Fünf“ und „Zahlenfreunde“ automatisiert ist, haben die soeben beschriebenen Methoden jeweils nur einen geringen Arbeitsspeicheraufwand, es muss lediglich das Wissen aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen und im Kurzzeitgedächtnis verarbeitet werden.

Weiters ist zu erwähnen, dass die von Gaidoschik beschriebenen Methoden, wenn sie beherrscht werden, problemlos auch in höheren Zahlenräumen angewendet werden können. Am besten dafür geeignet, vor allem im Bereich des Kopfrechnens, ist jedoch der „Zehnerstopp“. Bei diesem Verfahren wird die Ausgangszahl als Ganzes gesehen und mit fortlaufender Rechnung erweitert, was zu einem sehr geringen Aufwand für das Arbeitsgedächtnis beiträgt.

Als Gegenbeispiel für eine arbeitsspeicheraufwändige Strategie im hohen Zahlenraum mit Zehnerübertrag kann die „Kraft der Fünf“ genannt werden. Diese Variante angewandt ergäbe schon im 10er Bereich die Zerlegung der Summanden und damit einhergehend 3 separate Rechnungen: Zehner plus Zehner, Einer plus Einer, Ergebnisse der Beiden Additionen ebenfalls Addieren.

Additionen/Subtraktionen mit zwei- und mehrstelligen Zahlen

Selter (2013) und Mastrothanas (et al., 2018) beschreiben mit unterschiedlichen Namensgebungen, gleiche Methoden, um zwei- und mehrstellige Zahlen sowohl zu addieren als auch zu subtrahieren.

Mentale Repräsentation

Eine Strategie für Additionen und Subtraktionen ist die mentale Repräsentation. Dabei verfolgen die Personen, mental, die typische additions-/subtraktionsalgorithmische Strategie des „untereinander Schreibens“. Dies ist allerdings keine effektive Methode und folgt den Regeln des algorithmischen schriftlichen Rechnens. Meist bedienen sich ungeübte Kopfrechner dieser Methode.

„Stellen extra“

Die Trennung von Zehnern und Einern ist eine weitere mentale Strategie und gilt als eine der häufigsten Taktiken im Bereich der Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen. Für diese mentale Operation werden die verwendeten Zahlen in Vielfache von Zehnern und Einern unterteilt. Die Rechnung im Anschluss ist richtungsunabhängig. Achtung: Während bei der Addition jeweils drei „einfachere“ Additionen entstehen, müssen bei der Subtraktion die beiden Differenzen am Ende addiert werden.

Beispiel einer Addition:

$$56 + 32 = ?$$

$$50 + 30 = 80 \quad 6 + 2 = 8 \quad \rightarrow \quad 80 + 8 = 88$$

Beispiel einer Subtraktion:

$$56 - 32 = ?$$

$$50 - 30 = 20 \quad 6 - 2 = 4 \quad \rightarrow \quad 20 + 4 = 24$$

Für den Fall, dass bei der Subtraktion ein Übertrag stattfindet (Einer des Subtrahenden größer als der Einer des Minuenden) scheint diese Methode allerdings nicht zweckmäßig zu sein.

Separationsakkumulation

Von der zuvor beschriebenen Strategie ausgehend, gelangt man zur *separationaccumulation technique* (Separationsakkumulationstechnik). Bei dieser Technik werden die Zehnerstellen der Zahlen wieder aus der Rechnung separiert und addiert/subtrahiert. Im Anschluss werden die beiden Einerstellen separat dazu addiert/subtrahiert.

Beispiel einer Addition:

$$53 + 45 = ?$$

$$50 + 40 = 90 \rightarrow 90 + 3 = 93 \rightarrow 93 + 5 = 98$$

Im Gegensatz zur vorherigen Methode stößt man hier beim Subtrahieren mit Übertrag nicht an eine Grenze. Zu Beginn werden die Zehner separat subtrahiert. Danach wird der Einer des Subtrahenden abgezogen während der Einer des Minuenden addiert wird.

Beispiel einer Subtraktion:

$$53 - 45 = ?$$

$$50 - 40 = 10 \rightarrow 10 - 5 = 5 \rightarrow 5 + 3 = 8$$

Akkumulationsstrategie/Schrittweise

Bei der Akkumulationsstrategie oder auch Sprung- bzw. Schrittweismethode bleibt die erste Zahl unberührt und die Zweite wird in ihre Stellenwerte zerlegt und nacheinander addiert/subtrahiert.

1.Variante: Zehner-Einer Akkumulation

$$25 + 17 = ?$$

$$25 + 10 = 35 \rightarrow 35 + 7 = 42$$

$$25 - 17 = ?$$

$$25 - 10 = 15 \rightarrow 15 - 7 = 8$$

2.Variante: Einer-Zehner Akkumulation

$$25 + 17 = ?$$

$$25 + 7 = 32 \rightarrow 32 + 10 = 42$$

$$25 - 17 = ?$$

$$25 - 7 = 18 \rightarrow 18 - 10 = 8$$

Holistic strategy/ Hilfsaufgabe

Ist die Fähigkeit der Flexibilität und des Zahlensinns bei einer Person gut ausgebildet, kann sie komplexe mentale Manipulationen ausführen und eine holistic strategy (ganzheitliche Strategie) anwenden. Bei diesen Methoden geht es darum, aus den Operanten mittels Addition oder Subtraktion Zahlen zu machen, mit denen man einfacher rechnen kann. Diese besondere Technik wird vor allem bei Zahlen angewandt, die sich nahe bei Vielfachen von Zehn befinden.

Eine Art der ganzheitlichen Strategie ist die Kompensation, bei der eine der beiden Zahlen entweder auf- oder abgerundet wird um den gleichen Betrag am Ende zu subtrahieren oder addieren.

Beispiel einer Addition:

$$45 + 18 = ?$$

$$45 + (18 + 2) = 45 + 20 = 65 \rightarrow 65 - 2 = 63$$

Auch bei dieser Methode muss bei der Subtraktion darauf geachtet werden, dass nicht alle Zwischenschritte in einer Differenz enden, sondern der letzte Schritt eine Addition darstellt.

Beispiel einer Subtraktion:

$$45 - 18 = ?$$

$$45 - (18 + 2) = 45 - 20 = 25 \rightarrow 25 + 2 = 27$$

Balancing/“Vereinfachen“

Das balancing (Ausgleichen) bzw. Vereinfachen ist eine weitere Art der ganzheitlichen Strategien und unterscheidet sich von der vorherigen darin, dass beide Zahlen verändert werden. Wieder geht es darum, die erste Zahl zu einem Vielfachen von Zehn zu machen. Addiert man nun zur ersten Zahl etwas hinzu, wird der gleiche Wert von der zweiten Zahl abgezogen (und umgekehrt). So entsteht ein Gleichgewicht. $[\alpha + \beta = (\alpha - \kappa) + (\beta + \kappa)]$

Beispiel einer Addition:

$$47 + 35 = ?$$

$$47 + 35 = (47 + 3) + (35 - 3) = 50 + 32 = 82$$

Bei der Subtraktion ist darauf zu achten, dass gilt:

$$\alpha - \beta = (\alpha + \kappa) - (\beta + \kappa) \text{ bzw. } \alpha - \beta = (\alpha - \kappa) - (\beta - \kappa)$$

Beispiel einer Subtraktion:

$$37 - 28 = ?$$

$$37 - 28 = (37 + 3) - (28 + 3) = 40 - 31 = 9$$

Schonard & Kokot (2013) beschreiben in ihrem Buch „Der Matheknüller“ das gleiche Verfahren für die Subtraktion, mit dem Unterschied, dass der Subtrahend zu einem Vielfachen von 10 gemacht wird.

Beispiel:

$$37 - 28 = ?$$

$$(37 + 2) - (28 + 2) = 39 - 30 = 9$$

Indirekte Subtraktion

Eine eher selten verwendete Strategie beim Subtrahieren ist die indirekte Subtraktion. Man entfernt allmählich vom Minuenden möglichst einfache Werte bis man beim Subtrahenden angekommen ist. Danach addiert man alle Werte.

Beispiel:

$$65 - 28 = ?$$

$$65 - 5 = 60 \quad 60 - 30 = 30 \quad 30 - 2 = 28 \quad 5 + 30 + 2 = 37$$

Ergänzen

Eine weitere von Selter (2013) beschriebene Methode zum Subtrahieren ist das Ergänzen. Dabei handelt es sich um die in der Volksschule verbreitete „und wieviel?“ Aufgaben.

Beispiel:

$$83 - 25 = ?$$

$$25 + \underline{\quad} = 83 \rightarrow 25 + \mathbf{8} = 33 \qquad 33 + \mathbf{50} = 83$$

$$83 - 25 = \mathbf{8} + \mathbf{50} = 58$$

Die oben beschriebenen Methoden zählen zu den High-Level Strategien, können zu einem besseren Zahlenverständnis beitragen und gelten als besonders effektiv und wirkungsvoll. (Mastrothanas, Geladari, Zervoudakis, & Strakalis, Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction, 2018 ; Selter, 2013)

Subtraktion von einer 10er Basis

(Zehnerbasis nennt man Zahlen der Form 10^n , also 10, 100, 1000, etc.)
Möchte man eine beliebige Zahl x von einer 10er Basis abziehen, so gilt folgende Regel:

Subtrahiert man eine beliebige Zahl von einer Zehnerbasis beginnt man „links“ und ergänzt jede Ziffer des Subtrahenden auf 9 außer die letzte. Hier wird das Kompliment zu 10 gebildet.

Vorteil beim „von links beginnen“ ist, dass man das Ergebnis schon „richtig“ im Kopf hat und nicht erst die Ziffern in die richtige Reihenfolge bringen muss.

Beispiel:

$$1000 - 456 = 544$$

„von links nach rechts rechnen“: beginnend bei der 4 des Subtrahenden ergänzen wir „von links nach rechts“ alle Ziffern auf 9. Die letzte Ziffer, hier 6, wird auf 10 ergänzt. (Schonard & Kokot, Der Matheknüller : schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt ; genial einfach - einfach genial, 2013)

Anmerkung: Das Subtrahieren von einer Zehnerbasis benötigt nur geringen Arbeitsspeicher. Man muss nur die vorherigen Komplemente in Erinnerung behalten, die Anordnung ist schon korrekt.

Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner (2018) haben in ihrer Arbeit „Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln“ wie in 7: Lösungsmethoden beim halbschriftlichen Rechnen“ und Abbildung 8: Weitere Lösungsmethoden“ zu sehen ist, eine an Selter (2013) angelehnte Tabelle erstellt. Darin sind die oben aufgelisteten Lösungsmethoden großteils erwähnt. Nach Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner werden diese Strategien sowohl beim halbschriftlichen Rechenverfahren angewendet als auch von geübten Kopfrechnern, die die Zwischenschritte im Kopf durchführen, etwaige Teilergebnisse werden im Arbeitsspeicher gespeichert. (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln; Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018)

Lösungsmethode	Addition $67 + 28$	Subtraktion $71 - 36$
Stellenwerte extra	$60 + 20$; $7 + 8$; $80 + 15$	$70 - 30$; $1 - 6$; $40 - 5$
Schrittweise	$67 + 20$; $87 + 8$	$71 - 30$; $41 - 6$
Hilfsaufgabe	$67 + 30$; $97 - 2$	$71 - 40$; $31 + 4$
Vereinfachen	$65 + 30$	$70 - 35$
Ergänzen		$36 + \dots = 71$

Abbildung 7: Lösungsmethoden beim halbschriftlichen Rechnen

(Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln; Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018, S. 44)

Lösungsmethode	Addition $67 + 28$	Subtraktion $71 - 36$
	$60 + 20$; $80 + 7$; $87 + 8$	$70 - 30$; $40 + 1$; $41 - 6$

Abbildung 8: Weitere Lösungsmethoden

(Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln; Grundlagen - Förderung - Beispiele, 2018, S. 44)

Multiplizieren

Die grundlegende Fähigkeit für das Multiplizieren im Kopf ist das kleine „Einmaleins“. Auch das Zerlegen von Zahlen kann, wie am Anfang des Kapitels beschrieben, eine Hilfe sein.

Multiplizieren mit einstelligen Zahlen

Läuft das Einmaleins weitestgehend automatisiert ab, gibt es ein paar einfache Methoden mehrstellige Zahlen mit einer einstelligen Zahl multiplizieren zu können.

Multiplizieren mit 2/„Verdoppeln“

1.Variante

Bei der Multiplikation mit 2 handelt es sich um eine einfache Verdopplung. Hierbei bietet es sich, vor allem bei hohen Ausgangszahlen, an, eine Variation des „Zehnerstopps“ bzw. „Kraft der Zehn“ zu verwenden. Dabei ergänzt man den Faktor (der nicht 2 ist) auf die größte ganzzahlige durch Zehn teilbare Zahl und zieht im Anschluss das ergänzte zweimal ab.

Beispiel: $789 \cdot 2 = ?$

$$789 + 11 = 800$$

$$789 \cdot 2 = 800 \cdot 2 - 2 \cdot 11 = 1600 - 22 = 1578$$

Wenn es günstiger ist die Zahl nach unten zu ergänzen, muss im Anschluss an die Multiplikation addiert werden:

$$721 \cdot 2 = ?$$

$$721 - 21 = 700$$

$$721 \cdot 2 = 700 \cdot 2 + 2 \cdot 21 = 1400 + 42 = 1442$$

2.Variante

Beim Verdoppeln mancher Zahlen bietet es sich an, die Zahl als einen Teil einer größeren Zahl zu sehen. Zum Beispiel bei der Zahl 28: $28=25+3$; 25 ist ein Viertel von 100. Wenn 28 verdoppelt werden soll, und man mit den 4er Blöcken von 100 vertraut ist, weiß man, dass $25 \cdot 2 = 50$ und man im Anschluss nur noch die 6 dazu addieren muss.

Beispiel:

$$78 \cdot 2 = 50 \cdot 2 + 28 \cdot 2 = 50 \cdot 2 + 25 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 156$$

Bei obigem Beispiel wurde die Zerlegung der Zahl 100 (25-50-75-100) angewendet. Da auch in höheren Bereichen der „Zehnerüberschritt“ bzw. in diesem Fall der „Hunderterüberschritt“ im Kopf nicht einfach ist. Kann man sich der beiden kleineren Zerlegungen in 50 und 25 bedienen.

Multiplizieren mit 9

Auch hier bedient man sich wieder der gleichen beiden Tricks aus dem Zehnerübergang. Zunächst wird der mehrstellige Faktor mit 10 multipliziert und im Anschluss wird die Zahl einmal abgezogen.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel:} \quad 789 \cdot 9 &= 789 \cdot 10 - 789 \\ &= 7890 - 789 = 7101 \end{aligned}$$

Multiplizieren mit 8

1.Variante

Das Multiplizieren mit 8 funktioniert analog wie die Multiplikation mit 9, mit dem Unterschied, dass am Ende die Zahl zweimal abgezogen werden muss. Bei der Subtraktion kommt die schon beschriebene Methode des Verdoppelns zum Einsatz.

Beispiel:

$$87 \cdot 8 = 87 \cdot 10 - 2 \cdot 87 = 870 - (2 \cdot 90 - 2 \cdot 3) = 870 - (180 - 6) = 696$$

2.Variante

Man kann die Multiplikation mit 8 auch als 3fache Verdopplung sehen.

Beispiel:

$$87 \cdot 8 = ((87 \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2 = (174 \cdot 2) \cdot 2 = 348 \cdot 2 = 696$$

Multiplizieren mit 5

1.Variante

Ähnlich wie bei der Multiplikation mit 9 bzw. 8 wird auch hier zunächst verzehnfacht („eine Null angehängt“). Im Anschluss wird das Zwischenergebnis halbiert.

Beispiel:

$$87 \cdot 5 = \frac{(87 \cdot 10)}{2} = \frac{870}{2} = 435$$

2.Variante

Die Multiplikation mit 5 kann auch als eine zweifache Verdopplung plus einmal die Zahl gesehen werden.

Beispiel:

$$87 \cdot 5 = ((87 \cdot 2) \cdot 2) + 87 = 174 \cdot 2 + 87 = 348 + 87 = 435$$

Multipliziere mit 4 bzw. 6

1.Variante

Man startet mit einer Multiplikation mit 5. Im Anschluss wird die Zahl bei 4 einmal subtrahiert und bei der Multiplikation mit 6 einmal addiert.

Beispiel:

$$28 \cdot 4 = 28 \cdot 5 - 28 = \frac{28 \cdot 10}{2} - 28 = \frac{280}{2} - 28 = 140 - 28 = 112$$

$$28 \cdot 6 = 28 \cdot 5 + 28 = \frac{28 \cdot 10}{2} + 28 = 140 + 28 = 168$$

2.Variante

Bei der Multiplikation mit 4 arbeitet man mit einer zweifachen Verdopplung, bei Multiplikation mit 6 verdoppelt man zweimal und addiert das Doppelte der Zahl.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 28 \cdot 4 &= (28 \cdot 2) \cdot 2 = (30 \cdot 2 - 2 \cdot 2) \cdot 2 = (60 - 4) \cdot 2 = 56 \cdot 2 = \\ &= 60 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 120 - 8 = 112 \end{aligned}$$

$$28 \cdot 6 = ((28 \cdot 2) \cdot 2) + 2 \cdot 28 = (56 \cdot 2) + 56 = 112 + 56 = 168$$

Multiplizieren mehrstelliger Zahlen

Multiplizieren zweistelliger Zahlen, deren Einer zusammen 10 ergeben

Voraussetzung für diese Strategie ist nicht nur, dass die Endziffern der beiden Faktoren addiert 10 ergeben, sondern auch, dass sie die gleiche Zehnerstelle haben. Treffen diese Bedingungen zu, wird wie folgt gerechnet:

Zur Vereinfachung werden die Zahlen in eine „linke Seite“=Zehnerstelle und eine „rechte Seite“ = Einerstelle unterteilt.

Für die linke Seite gilt:

$$z(z + 1)$$

z.....Ziffer an der Zehnerstelle (muss bei beiden gleich sein!)

Für die rechte Seite:

$$E_1 \cdot E_2$$

wobei E_1 = Einerziffer des ersten Faktors ;

E_2 = Einerziffer des zweiten Faktors

Beispiel: $36 \cdot 34 = ?$

linke Seite: $3(3 + 1) = 3 \cdot 4 = 12$

$$\text{rechte Seite} : 6 \cdot 4 = 24$$

$$\rightarrow 36 \cdot 34 = 1224$$

Man kann diese Methode auch bei mehrstelligen Zahlen anwenden, deren Einerziffern zusammen die Zahl 10 ergeben und deren Zehner, Hunderter, etc. Stellen ident sind. Dabei würde sich die „linke Seite“ als schwierig gestalten, da, je größer die Ausgangsfaktoren sind, desto größer auch die Faktoren werden die auf der linken Seite multipliziert werden müssen. Daraus ergäbe sich ein massiver Mehraufwand beim Rechnen und damit auch mehr benötigte Kapazität im Arbeitsspeicher.

Multiplizieren einer zweistelligen Zahl mit der Zahl 11

Ohne Übertrag

Bei der Multiplikation einer zweistelligen Zahl, deren Ziffernsumme kleiner als 10 ist, muss die Ziffernsumme zwischen die beiden Ziffern geschrieben werden (Man erhält eine dreistellige-Zahl).

Beispiel:

$$25 \cdot 11 = ?$$

$$2 + 5 = 7 \quad \rightarrow \quad 25 \cdot 11 = 275$$

Mit Übertrag

Wenn die Ziffernsumme des Faktors, der nicht 11 ist, größer als 10 ist, muss eine zusätzliche Addition durchgeführt werden. Die ersten Schritte werden analog zum soeben gerechneten Beispiel durchgeführt, mit der Ergänzung, dass die Zehnerstelle der Ziffernsumme zur Zehnerstelle des Faktors addiert wird.

Beispiel:

$$57 \cdot 11 = ?$$

$$5 + 7 = 12 \quad \rightarrow \quad 5(12)7 \quad \rightarrow (5 + 1) 2 7 \quad \rightarrow 57 \cdot 11 = 627$$

Multiplizieren mehrstelliger Zahlen mit der Zahl 11

Diese Methode kann analog vom multiplizieren zweistelliger Zahlen mit der Zahl 11 ohne/mit Übertrag abgeleitet werden. Wie zuvor werden Ziffernsummen von Ziffernpaaren berechnet und je nachdem ob ein Übertrag stattfinden muss (wenn die Ziffernsumme größer als 10 ist) werden Stellen erweitert.

Beispiel 1:

$$123 \cdot 11 = ?$$

$$1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5$$

$$1(3)(5)3 \rightarrow 123 \cdot 11 = 1353$$

Beispiel 2:

$$785 \cdot 11 = ?$$

$$7 + 8 = 15; 8 + 5 = 13$$

$$7(15)(13)5 \rightarrow (7 + 1)(5 + 1)35 \rightarrow 785 \cdot 11 = 8635$$

Die Multiplikation von mehrstelligen Faktoren mit der Zahl 11 verläuft analog zu der im obigen Punkt beschriebenen Methode.

Multiplikation mit 9er-Ziffern

(9er Ziffern: Zahlen deren Stellenwerte nur die Ziffer 9 haben. Zum Beispiel: 99; 999; etc.)

Man multipliziert den Faktor mit der, der 9er-Ziffer am nächsten liegenden Zehnerbasis. Im Anschluss wird derselbe Faktor einmal abgezogen (Da er nun einmal „zu viel“ vorliegt)

$$\text{Beispiel: } 246 \cdot 999 = ?$$

$$246 \cdot 999 = 246 \cdot 1000 - 246 = 246000 - 246 = 245754$$

Beispiel: $357 \cdot 99 = ?$

$$357 \cdot 99 = 357 \cdot 100 - 357 = 35700 - 357 = 35343$$

(Schonard & Kokot, Der Matheknüller : schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt ; genial einfach - einfach genial, 2013)

Vedische Mathematik

Andere Länder andere Methoden

Der Begriff „vedisch“ bzw. „veda“ stammt aus dem Hinduismus und hat in Indien die Bedeutung „Wissen“ und bezieht sich sowohl auf das religiöse als auch auf das weltliche Wissen. (Veda, 2019)

Man vermutete, dass die altindische mathematische Methode oder auch Vedische Mathematik genannt, schon seit mehreren tausend Jahren existiert und sie daher die älteste Rechenkunst der Geschichte ist. Im deutschen Sprachraum ist sie dennoch weitgehend unbekannt. Sie erlaubt es den Indern und jedem, der diese Methode erlernt hat, einfach und schnell zu rechnen. (Schonard & Kokot, Der Matheknüller - Warum Inder so verblüffend schnell im Kopfrechnen sind, 2019)

„Die Inder erreichen mit ihrer Rechenkunst eine hohe Effektivität. So müssen sie z.B. das kleine Einmaleins nur bis $5 \cdot 5$ auswendig lernen“ (Schonard & Kokot, Der Matheknüller - Warum Inder so verblüffend schnell im Kopfrechnen sind, 2019, S. 1)

Im Folgenden wird anhand zweier kurzer Rechenbeispiele die Vedische Mathematik zunächst für das Multiplizieren zweier zweistelliger Zahlen und danach für das Multiplizieren mehrstelliger Zahlen, vorgestellt. Beide Varianten können mit etwas Übung neben der halbschriftlichen Rechenweise (wie sie dargestellt wird) auch als reine Kopfrechnen Methoden verwendet werden.

Beispiel (aus Abb.9): Multiplizieren Sie 32 mal 21

Hierfür wird die Zahl 21 so unter den ersten Faktor geschrieben, dass zwischen den Ziffern etwas Platz bleibt.

Danach werden je die übereinander geschriebenen Ziffern multipliziert und direkt darunter geschrieben (ebenfalls mit einem Abstand):

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ \underline{2 \quad 1} \\ 6 \quad 2 \end{array}$$

Im letzten Schritt wird kreuzweise multipliziert und die beiden Produkte addiert:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

Dieses Ergebnis kann nun zwischen die beiden schon vorhandenen geschrieben werden.

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ \underline{2 \quad 1} \\ 6 \quad 7 \quad 2 \end{array}$$

Damit erhält man für die Rechnung **32 · 21** das Ergebnis **672**

Diese Methode kann man relativ einfach und schnell bei Multiplikationen mit zweistelligen Zahlen anwenden, so lange es zu keinen Überträgen kommt.

Ähnlich wie beim zweiten Beispiel in Abb.9 rechnen wir $15 \cdot 23$.

Der erste Schritt, das Untereinanderschreiben, bleibt gleich. Der Unterschied zur vorherigen Rechnung besteht darin, dass es hier bereits beim Multiplizieren der Einer zu einer Zahl größer als 10 kommt. Daher schreiben wir das Ergebnis der Multiplikationen als kleine „Notiz“ vorerst dazu, ebenso wie das Ergebnis der kreuzweisen Multiplikationen und anschließenden Addition:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \\ 2_{(2)} \quad 13_{(13)} \quad 3_{(15)} \end{array}$$

Das Endergebnis setzt sich aus den drei „Notizen“ (2; 13; 15) wie folgt zusammen:

Man kombiniert von rechts nach links alle Zahlen, wobei man die Zehner jeweils zur nächsten Einerstelle addiert:

$$2 \quad 13 \quad 15 \quad \rightarrow \quad 2 + 1 \quad 3 + 1 \quad 5 \quad \rightarrow \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

Damit erhalten wir als Endergebnis der Rechnung $15 \cdot 23 = \mathbf{345}$

Beispiele für die vedische Multiplikation zweier 2-stelliger natürlicher Zahlen

Um das Produkt 32×21 zu bestimmen, schreibt man die vier Ziffern der beiden Faktoren neben- und übereinander, wie in der folgenden Abbildung links dargestellt. Die erste bzw. die letzte Ziffer des Ergebnisses ergibt sich aus dem Produkt der beiden Zehnerziffern bzw. Einerziffern der Faktoren ($3 \times 2 = 6$ bzw. $2 \times 1 = 2$), die mittlere Ziffer des Ergebnisses durch kreuzweise Multiplikation der Ziffern der Faktoren und anschließende Addition der Teilergebnisse ($3 \times 1 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$).

Das sieht verblüffend einfach aus. Wenn aber Überträge auftreten, wird das Ganze schon etwas komplizierter (vgl. Abbildung rechts); bei Faktoren mit mehr als zwei Stellen versagt diese Merkregel.

3	×	2		2	×	7
2	×	1		3	×	4
6 7 2						6 29 28 9 1 8

Abbildung 9: Beispiele für vedische Multiplikation zweistelliger Zahlen (Strick, 2019, S. 27)

Als Beispiel zum Multiplizieren mehrstelliger Zahlen verwenden wir folgende Aufgabe:

Multiplizieren Sie 955 mit 899

A) Herkömmliche (schriftlich/algorithmische) Methode:

$$\begin{array}{r}
 998 \times 899 \\
 \hline
 7984 \\
 8982 \\
 \hline
 8982 \\
 897202
 \end{array}$$

B) Indische Methode:

$$\begin{array}{r}
 998 \quad -2 \\
 899 \quad -101 \\
 \hline
 897 \quad 202
 \end{array}$$

Abbildung 10 Vergleich zweier Rechenmethoden zum Multiplizieren mehrstelliger Zahlen

In Abb.10 A) ist eine herkömmliche Methode für schriftliches Multiplizieren dargestellt. In diesem Beispiel kommt man auf insgesamt neun Multiplikationen (alle aus dem Einmaleins) und eine Addition (die aus fünf Zwischenschritten besteht).

Im Vergleich dazu, hat die in Abb.10 B) beschriebene Methode nur insgesamt drei Subtraktionen und eine Multiplikation wie im Folgenden beschrieben wird:

Für die vedische Mathematik ist es wichtig zu wissen, was eine Zehnerpotenz ist: $10(10^1)$, $100(10^2)$, $1000(10^3)$,...

Im ersten Schritt betrachtet man die zu multiplizierenden Zahlen und sucht die nächstgelegene Zehnerbasis. Im obigen Beispiel ist es 1000. Im zweiten Schritt subtrahiert man die Zehnerbasis von den Zahlen und schreibt das Ergebnis rechts an.

(Abb.10 B) $998 - 1000 = (-2)$; $899 - 1000 = (-101)$)

Danach wird das Produkt der beiden Differenzen gebildet und daruntergeschrieben.

Als letzten Schritt sucht man sich einen der beiden ursprünglichen Faktoren aus und „addiert kreuzweise“ (Abb.10 B) $899 + (-2) = 897$) auch dieses Ergebnis wird darunter notiert.

Zusammen gelesen ergeben die beiden Zahlen das Endergebnis.

(Schonard & Kokot, Der Matheknüller - Warum Inder so verblüffend schnell im Kopfrechnen sind, 2019)

Auf den ersten Blick erscheint die vedische Methode ungewöhnlich, dennoch kann man ihre Effektivität nicht bestreiten, da man gegenüber der „herkömmlichen“ Methode sechs Zwischenschritte spart.

Für das oben genannte Verfahren ist es sinnvoll, wenn die beiden Faktoren nahe einer Zehnerpotenz liegen. Am häufigsten findet diese Methode Anwendung, wenn sich die zu multiplizierenden Zahlen knapp unterhalb einer solchen befinden. Aber wie in Abbildung 11 zu sehen ist, können die Zahlen auch über der Zehnerpotenz liegen, hierbei muss während des Rechnens auf Vorzeichen geachtet werden.

Aufgabe	Faktor vermindert um 1000	Aufgabe	Faktor vermindert um 100
997 × 986	-3 -14	94 × 88	-6 -12
über Kreuz addieren 997 + (-14) oder 986 + (-3)	Produkt (-3) × (-14) = 42	über Kreuz addieren 94 + (-12) oder 88 + (-6)	Produkt (-6) × (-12) = 72
Ergebnis: 983 042		Ergebnis: 82 72	

Aufgabe	Faktor vermindert um 100	Aufgabe	Faktor vermindert um 100
112 × 104	+12 +4	97 × 106	-3 +6
über Kreuz addieren 112 + (+4) oder 104 + (+12)	Produkt (+12) × (+4) = 48	über Kreuz addieren 97 + (+6) oder 106 + (-3)	Produkt (-3) × (+6) = -18
Ergebnis: 116 48		Ergebnis: 102 82	

Abbildung 11 Beispiele für Multiplikation in der Vedischen Mathematik (Strick, 2019, S. 28)

Wenn die Zahlen in den rechten Spalten die gleichen Vorzeichen haben, ergibt sich bei der nachfolgenden Multiplikation in jedem Fall eine positive Zahl. (Vorzeichenregel!) Wie aber in obiger Abbildung an der Rechnung „ $97 \cdot 106$ “ zu sehen ist, muss dies nicht immer zutreffen und man erhält eine negative Zahl ($(-3) \cdot 6 = (-18)$).

Für diese Fälle gilt:

Zu dem entstandenen negativen Produkt, wird die Zehnerpotenz addiert. Im Endergebnis wird die gleiche Zehnerpotenz im Anschluss subtrahiert. (Es gleicht sich also aus)

Hierzu noch ein weiteres Beispiel:

Aufgabe: $95 \cdot 107$

Rechnung wird wie zuvor notiert (Zehnerpotenz: 10^2)

$$\begin{array}{r} 95 \quad - 5 \\ \hline 107 \quad 7 \end{array}$$

Der nächste Schritt ist die Multiplikation, die zu einem negativen Wert führt:

$$(-5) \cdot 7 = (-35)$$

Nun wird die Zehnerpotenz zum Produkt addiert und man erhält den Wert

$$(-35) + 100 = 65. \text{ Dieser kann auch schon notiert werden:}$$

$$\begin{array}{r} 95 \quad - 5 \\ \hline 107 \quad 7 \\ 65 \end{array}$$

Im Anschluss wird wie gewohnt kreuzweise addiert. Zum Beispiel: $107 + (-5) = 102$

Zusammen ergäbe das nun:

$$\begin{array}{r} 95 \quad - 5 \\ \hline 107 \quad 7 \\ \hline \mathbf{102} \quad 65 \end{array}$$

Da aber zuvor in einem Zwischenschritt eine Zehnerpotenz hinzugefügt wurde, muss diese im „Endergebnis“ abgezogen werden, um das richtige Ergebnis zu erhalten:

$$10\ 265 - 100 = \mathbf{10\ 165} = \mathbf{95 \cdot 107}$$

(Strick, 2019)

Quadrieren

Zahlen mit Endziffer 5

Wie zuvor im Beispiel der vedischen Mathematik zu zweistelligen Zahlen, schreibt/denkt man auch hier die Ziffern mit einem Abstand.

$$\text{Beispiel: } 15^2 = ? \quad \rightarrow \quad 1 \quad 5$$

Nun kann man zwischen einer linken Seite (hier 1) und einer rechten Seite (hier 5) unterscheiden. (Auf der linken Seite stehen, unabhängig wie groß die Zahl ist, alle Ziffern außer die Einerstelle.)

Aus der rechten Seite wird bei jeder Quadratzahl mit Endziffer 5, 25.

$$\rightarrow 1 \quad \mathbf{25}$$

Für die linke Seite verwendet man folgende Regel:

$$a(a + 1) \quad a \dots \dots \dots \text{Zahl auf der linken Seite}$$

$$\rightarrow 1(1 + 1) = \mathbf{2}$$

$$\rightarrow 15^2 = \mathbf{225}$$

Für Zahlen mit mehr als 2 Stellen ist diese Strategie für das Kopfrechnen mit einem sehr großen Arbeitsspeicheraufwand verbunden und daher ungeeignet, wie am folgenden Beispiel gezeigt wird:

$$\text{Beispiel: } 125^2 = ?$$

$$12 \quad 5 \quad \rightarrow \quad 12(12 + 1) \quad 25 \quad \rightarrow \quad 12 \cdot 13 \quad 25$$

Wie man leicht erkennen kann, würde man beim Kopfrechnen nun für die Rechnung $12 \cdot 13$ eine weitere Methode (zum Beispiel eine der weiter oben beschriebenen) anwenden müssen, dies erklärt den großen Arbeitsspeicheraufwand. Um an dieser Stelle abzukürzen: $12 \cdot 13 = 156$

Somit hätten wir als Ergebnis: $125^2 = 15625$

Zweistellige Quadratzahlen nahe bei 10 oder 10^2

Das im Kopf quadrieren von Zahlen zwischen 10 und 100 ist am einfachsten, je näher die Zahl bei der Zehnerpotenz liegt.

Je näher der zu quadrierende Betrag bei 50 liegt, desto größer ist, bei dieser Methode, die aufzubringende Gedächtnisleistung beim Kopfrechnen. Im Bereich des halbschriftlichen Rechnens können die beschriebenen Methoden mit mehr oder weniger gleichem Aufwand verwendet werden, da Zwischenergebnisse notiert werden können.

Weiters ist zu beachten, dass es Beträge zwischen 10 und 100 gibt, die mit der schon beschriebenen Strategie „Zahlen mit Endziffer 5“ berechnet werden können. Ebenfalls einfach im Kopf können Vielfache von 10 der Form $x \cdot 10$ $x \in \mathbb{N} \setminus 0$ quadriert werden, indem die dekadische Einheit der Zehnerstelle quadriert wird und für das Endergebnis mit 100 multipliziert wird („2x Null hinten dran hängen“).

Beispiel: $40^2 = (4 \cdot 10)^2 = 4^2 \cdot 10^2 = 1600$

Im folgenden Absatz wird nun unter Variante 1 eine Strategie für das Quadrieren von Zahlen naher der 10 und unter Variante 2 für Zahlen nahe bei 100 beschrieben.

1. Variante

Die zu Quadrierende Zahl liegt nahe bei 10

Ohne Übertrag

Das Ergebnis wird in zwei Schritten ermittelt, die zusammengesetzt das Endresultat ergeben.

1.Schritt: $x + (x - 10)$

2.Schritt: $(x - 10)^2$

für $x =$ zu Quadrierende Zahl und $x > 10$

Das Ergebnis setzt sich dann zusammen aus $x^2 =$
"Ergebnis Schritt 1" "Ergebnis Schritt 2"

Beispiel: $13^2 = ?$

1. Schritt: $13 + (13 - 10) = 16$

2. Schritt: $(13 - 10)^2 = 3^2 = 9$

$13^2 = 169$

Mit Übertrag

„Für die rechte Seite ist wegen der Basis 10 nur **eine** Ziffer zugelassen, ist das Ergebnis auf der rechten Seite zweistellig, wird die Zehnerstelle nach links übertragen und zur vorderen Zahl addiert.“ (Schonard & Kokot, Der Matheknüller : schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt ; genial einfach - einfach genial, 2013, S. 47)

(Im oben angeführten Zitat meint die „linke Seite“ den im obigen Beispiel angeführten „1.Schritt“ und „rechte Seite“ den „2.Schritt“)

Beispiel: $19^2 = ?$

1. Schritt: $19 + (19 - 10) = 28$

2. Schritt: $(19 - 10)^2 = 9^2 = \mathbf{81}$

$\rightarrow 19^2 = (28 + \mathbf{8})1 = 361$

2.Variante

Die zu quadrierende Zahl liegt nahe bei 100.

Ohne Übertrag

Analog wie in Variante 1 wird die Rechnung in zwei Schritte gegliedert, die aneinander gereiht das Endergebnis liefern.

1.Schritt: $x - (100 - x)$

2.Schritt: $(100 - x)^2$

für $x =$ zu Quadrierende Zahl und $x < 100$

Da die Zahl nahe der 10er Basis 100 liegt, sind, im Unterschied zu Variante 1, nun zwei Stellen in Schritt 2 zulässig.

Beispiel: $92^2 = ?$

1. Schritt: $92 - (100 - 92) = 92 - 8 = 84$

2. Schritt: $(100 - 92)^2 = 8^2 = 64$

$$92^2 = 8464$$

Mit Übertrag

Ebenfalls analog wird hier gerechnet. Wenn Schritt 2 (Das Quadrieren der Differenz von 100 und der zu quadrierenden Zahl) zu einer dreistelligen Zahl führt, wird die Hunderterstelle zu dem Ergebnis aus Schritt 1 addiert.

Beispiel: $82^2 = ?$

1. Schritt: $82 - (100 - 82) = 82 - 18 = 64$

2. Schritt: $(100 - 82)^2 = 18^2 = ?$

An dieser Stelle muss, wenn man im Kopf rechnet, mittels Variante 1 das Quadrat von 18 ermittelt werden.

Um an dieser Stelle nicht für Verwirrung zu sorgen, wird das Ergebnis als bekannt angenommen:

2. Schritt: $(100 - 82)^2 = 18^2 = 324$

Zusammengesetzt ergibt sich für $82^2 = (64 + 3)24 = 6724$

Zweistellige Quadratzahlen

Im vorherigen Absatz wurde eine Methode für das Quadrieren zweistelliger Zahlen, die nahe einer Zehnerbasis (10, 100) liegen, erklärt. Die nun beschriebene Strategie ist für alle zweistelligen Zahlen geeignet und setzt sich aus drei Teilschritten zusammen.

1.Schritt: Quadrieren der Zehnerziffer

2.Schritt: Zehnerziffer $\cdot$ Einerziffer $\cdot$ 2

3.Schritt: Quadrieren der Einerziffer

Beispiel 1: $12^2 = ?$

1. *Schritt*: $1^2 = 1$

2. *Schritt*: $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$

3. *Schritt*: $2^2 = 4$

Ergebnis: $12^2 = 144$

Beispiel 2: $23^2 = ?$

1. *Schritt*: $2^2 = 4$

2. *Schritt*: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

3. *Schritt*: $3^2 = 9$

In Schritt 2 ist das Ergebnis größer als 10, die Zehnerstelle wird daher zu Schritt 1 addiert und man erhält das Ergebnis:

$$23^2 = (4 + 1)29 \rightarrow 23^2 = 529$$

Dividieren

Division zweistelliger Zahlen durch 9

Im Folgenden wird eine Strategie erklärt, wie man Zahlen, in denen „9“ nicht immer ohne Rest enthalten ist, durch neun im Kopf dividieren kann.

Das Ergebnis setzt sich dabei aus den Ziffern der Zehnerstelle des Dividenden zusammen und dem eventuell verbleibenden Rest. Letzterer entspricht der Ziffernsumme des Dividenden. Auch hier muss wieder darauf geachtet werden, ob beim Rechnen ein Übertrag stattfindet oder nicht.

Ohne Übertrag

Beispiel: $71:9 = ?$

$$71:9 = 7 \quad (7+1) \text{ Rest} \quad \rightarrow \quad 71:9 = 7 \quad 8 \text{ Rest}$$

Mit Übertrag

Beispiel: $67:9 = ?$

$$67:9 = 6 \quad (6+7) \text{ Rest} \quad \rightarrow \quad 67:9 = 6 \quad 13 \text{ Rest}$$

Da neun im Rest noch einmal enthalten ist, zählt man dies zum Ergebnis hinzu:

$$67:9 = 6 \quad (6+7) \text{ Rest} \quad \rightarrow \quad 67:9 = 6 \quad (9+4) \text{ Rest}$$

$$67:9 = (6+1) \quad 4 \text{ Rest}$$

$$\text{Ergebnis: } 67:9 = 7 \quad 4 \text{ Rest}$$

Division mehrstelliger Zahlen durch 9

Wie bei der Division zweistelliger Zahlen durch 9 setzt sich das Ergebnis aus allen Ziffern des Dividenden zusammen, bis auf den Einer, und dem Rest. Wie der Rest berechnet wird, wird der Einfachheit halber anhand eines Beispiels erklärt.

Beispiel: $123:9 = ?$

$$123:9 = 12 \quad (12 + 3)Rest$$

Die Berechnung des Rests erfolgt durch die Addition der Zahl, ohne der Einerstelle, (die Zehnerstelle des Dividenden wird zur Einerstelle) und der Ziffer der Einerstelle.

Auch in diesem Beispiel ergibt sich so für den Rest eine Zahl größer neun. Dies wird wie oben beschrieben gehandhabt.

$$123:9 = 12 \quad (12 + 3)Rest \rightarrow 123:9 = 12 \quad (9 + 6)Rest$$

$$123:9 = 13 \quad 6Rest$$

Division durch 5

Man kann jede beliebige Zahl durch fünf dividieren, indem man sie zuerst mit zwei multipliziert und im Anschluss durch zehn dividiert.

Beispiel: $124:5 = ?$

$$124:5 = (124 \cdot 2):10 = 248:10 = 24,8$$

Division durch 25

Ein Betrag kann durch 25 im Kopf dividiert werden, indem man ihn zuerst vervierfacht (zweimal verdoppelt) und im Anschluss durch 100 dividiert.

Beispiel: $124:11 = ?$

$$124:11 = (124 \cdot 2 \cdot 2):100 = (248 \cdot 2):100 = 496:100 = 4,96$$

Division durch 11

Die Division durch 11 besteht aus einzelnen Subtraktionen, die von links nach rechts durchgeführt werden.

Dabei schreibt bzw. denkt man sich die erste Ziffer des Dividenden (die gleichzeitig die erste Stelle des Ergebnisses ist) unter die Zweite und subtrahiert sie voneinander. Die Differenz der beiden Ziffern ist die zweite Stelle des Ergebnisses und wird unter die dritte Stelle des Dividenden geschrieben bzw. gedacht. Dies wird bis zur letzten Stelle wiederholt.

Zur Veranschaulichung werden 3 verschiedene Beispiele vorgerechnet.

Beispiel 1: eine Division mit 0 Rest; Beispiel 2: eine Division mit Rest; Beispiel 3: eine Division mit Übertrag bei der Subtraktion.

Beispiel 1: $693:11=?$

1.Schritt: die erste Ziffer „6“ wird unter die Zweite „9“ geschrieben

$$\begin{array}{r} 693 : 11 = \\ 6 \end{array}$$

2.Schritt: die Differenz der beiden Ziffern wird rechts neben die „6“ geschrieben

$$\begin{array}{r} 693 : 11 \\ 63 \end{array}$$

3.Schritt: analog zu Schritt 2, da $3 - 3 = 0$ ergibt ist dies eine Division mit „0 Rest“. („Es gibt keine weitere Ziffer mehr im Dividenden unter die man die „0“ schreiben könnte.

$$\rightarrow 693:11 = 63 \quad 0 \text{ Rest}$$

Beispiel 2: $694:11=?$

Die Schritte werden wie schon erklärt durchgeführt.

$$\begin{array}{r} 694 : 11 \\ 63 (1) \end{array}$$

Weil $4 - 3 = 1$ ist das Ergebnis der Division

$$694 : 11 = 63 \quad 1 \text{ Rest}$$

Beispiel 3: $40249:11=?$

1.Schritt: da die Differenz von 0 und 4 negativ ist, wird die untenstehende Zahl um eins minimiert und die Ziffer im Dividenden um zehn erhöht. Die beiden „neuen“ Zahlen werden wie gewohnt subtrahiert und das Ergebnis neben die „3“ geschrieben.

$$\begin{array}{r} 4\ 0\ 2\ 4\ 9 : 11 \\ 4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 4\ 10\ 2\ 4\ 9 \\ 3\ 7 \end{array}$$

2.Schritt: analog zu Schritt 1

$$\begin{array}{r} 4\ 10\ 12\ 4\ 9 \\ 3\ 6\ 6 \end{array}$$

3.Schritt: analog

$$\begin{array}{r} 4\ 10\ 12\ 14\ 9 \\ 3\ 6\ 5\ 9 \end{array}$$

Ergebnis: $40249 : 11 = 3659\ 0\ Rest$

(Schonard & Kokot, Der Matheknüller : schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt ; genial einfach - einfach genial, 2013)

CONCLUSIO

Aus didaktischer Sicht wäre es von großem Vorteil, die mentale Arithmetik in den Unterricht der Volksschule verbindlich einzuführen. Unter der Voraussetzung, dass die Schülerin oder der Schüler keine frühkindliche Entwicklungsstörung oder einen genetischen Defekt durchleiden muss, würde ein solcher Unterricht zu mehr Selbstvertrauen führen und so auch zu mehr Sicherheit im Umgang mit Zahlen. (Bei einer Erkrankung, beispielsweise mit Dyskalkulie, kann ein zu forderndes Vorgehen beim Kopfrechnen zu Überforderung und so auch zu Blockaden führen, da Menschen mit dieser oder einer anderen Schwäche in der Regel im Kopf auf das zählende Rechnen zurückgreifen.) Im Unterricht gilt es daher besonderes Fingerspitzengefühl zu zeigen.

Auch wenn es eine Forderung nach mehr mentalem Rechnen und auch eine stellenweise Verankerung im Lehrplan gibt, so haben, wie im Text beschrieben, verschiedene Studien gezeigt, dass das Thema Kopfrechnen in den Volksschulen keinen großen Anklang findet und auch in den Schulbüchern nicht adäquat angeleitet wird. Das wird auch in den Studien, die sich speziell mit dem Thema mentale Arithmetik beschäftigen, deutlich.

Besonders wichtig scheint im Zusammenhang mit der Entwicklung auch das Erlernen bzw. Verbessern von Zahlen- und Struktursinn, welche beide für eine mentale Vorstellung der Zahlen Voraussetzung und daher unumgänglich im Bereich der mentalen Arithmetik sind.

Im Themenbereich der Rechenstrategien ist auffällig, dass Zahlen und Rechnungen, so gut es geht, in einfache Teile zerlegt und im Anschluss wieder zusammengefügt werden. Für diese geistige Arbeit ist es wichtig, ein Gefühl für Zahlen verinnerlicht zu haben, um Zerlegungen zu finden, die möglichst hilfreich für das weitere Rechnen sind. Ein Beispiel dafür ist das Wissen um die „Kraft der Fünf“ oder das Zerlegen der Zahl Zehn in die so genannten „Zahlenfreunde“.

Ein weiterer wichtiger und auch logischer Punkt ist, dass es leichter ist, mit kleinen Zahlen zu rechnen. Große Zahlen werden beim Rechnen in mehrere einzelne (kleinere) Aufgaben zerlegt. Diese Zerlegung beansprucht einen enormen Gebrauch des

Arbeitsspeichers im Gehirn. Jenem Teil, dessen Aufnahmekapazität auf sieben Artefakte beschränkt ist. Daraus ist zu folgern, je größer die zu berechnenden Zahlen sind, desto mehr Zwischenrechnungen werden benötigt und desto höher ist die Belastung des Kurzzeitgedächtnisses, was zu vermehrten Fehlern führen kann. Daher ist es wichtig in der gesamten Volksschulzeit im Zahlenraum bis 100 adäquate Kopfrechenstrategien aufzubauen und so zu trainieren, dass das Ableiten für höhere Zahlen weniger fehleranfällig wird und auch im Alltag verwendet werden kann.

ABSTRACT

In dieser Arbeit werden wissenschaftliche Artikel und Bücher zum Thema der mentalen Arithmetik verwendet, um diesem Teilgebiet des Mathematikunterrichts Aufmerksamkeit zu schenken. Sie werden anhand ihrer unterschiedlichen Themenbereiche stellenweise verglichen und miteinander in Verbindung gebracht.

Kopfrechnen (=mentale Arithmetik) ist definitionsgemäß Rechnen ohne Hilfsmittel, wie Taschenrechner, Papier und Stift. Dies ist, wie in der Arbeit beschrieben, jedoch nicht so einfach umzusetzen und wird daher genauer erläutert. Dazu wird das Thema mentale Arithmetik in verschiedene Teilaspekte gegliedert.

Dazu gehört die frühkindliche Entwicklung des Gehirns aus einem Neuralrohr und weiterführend die Entwicklung des Gedächtnisses sowie verschiedene Funktionen von Letzterem vor allem in Bezug auf das Kopfrechnen.

Es wird versucht eine Definition sowohl für den Begriff „Zahlensinn“ als auch für „Zahlstruktur“ zu finden. Beides ist sowohl Voraussetzung für mathematisches Verständnis als auch für die im Kopfrechnen wichtige Flexibilität und werden ab dem Volksschulalter gefördert.

Am Ende werden einige Strategien beschrieben, die das mentale Durchführen von Rechnungen einerseits erleichtern und andererseits, nach einiger Übung, beschleunigen sollen.

(English version)

This paper uses scientific articles and literature that deal with mental arithmetic to focus attention on this specific part of teaching Mathematics. It will compare different topics in these articles and literature and present what connects them.

Mental arithmetic, by definition, is doing arithmetic without aids like calculators or pen and paper. Nevertheless, that is not so easy as this paper will show and explain in further detail. To achieve this end the topic of mental arithmetic will be dealt with in separate sub-aspects.

This includes the presentation of the development of the brain from the neural tube in early childhood to the development of our memory and its different functions in connection with mental arithmetic.

The paper attempts to find definitions of both the terms „number sense“ and „structure sense“. Either of them are requirements for mathematical understanding and for a flexibility that is needed to perform mental arithmetic, therefore they are trained and encouraged from primary education onwards.

Eventually the paper will give examples of a number of strategies, which will make mental arithmetic easier and with some practice more efficient in shorter time.

LITERATURVERZEICHNIS

- Aster, M. v. (2013). Wie kommen die Zahlen in den Kopf. In J. H. Michael Aster, *Rechenstörungen bei Kindern Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (S. 15-38). Vandenhoeck & Ruprecht GmbH & Co.KG.
- Bachmann, A. R. (Hrsg.). (2010). *Form und Struktur in der Sprache : Festschrift für Elmar Ternes*. Tübingen: Narr.
- Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus, R. Ö. (24. Juli 2019). *ISB - Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München*. Von <http://www.isb.bayern.de/schulartspezifisches/materialien/rechenschwierigkeiten> abgerufen
- Brannon, E., & Terrace, H. (23. Oktober 1998). Ordering of the numerosities 1 to 9 by monkeys. *Science*, 282(5389), S. 746-749.
- Butterworth, B. (Jänner 2005). Developmental Dyscalculia. In J. I. Campbell, & P. Press (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Cognition* (S. 455-467). New York.
- Butterworth, B. (Mai 2018). Low Numeracy: From Brain to Education. University College London. Von ResearchGate. abgerufen
- DeStefano, D., & LeFevre, J.-A. (3. Juni 2010). The role of working memory in mental arithmetic. *European Journal Of Cognitive Psychology*, S. 353-386.
- Faller, A., & Schünke, M. (2016). *Der Körper des Menschen - Einführung in Bau und Funktion*. Stuttgart: Georg Thieme Verlag KG.
- Flade, A., & Wender, K. F. (16. Oktober 1974). Der Einfluss der Darbietungsmodalität auf das kurzfristige Behalten. *Psychological Research*, S. 125-142.
- Gaidoschik, M. (September 2014). Erarbeitung nicht-zählender Rechenstrategien.
- Gaidoschik, U. M. (2012). *Das Recheninstitut - zur Förderung mathematischen Denkens*. Abgerufen am 10. Oktober 2019 von Viele Wege führen über den Zehner: <http://www.recheninstitut.at/mathematische-lernschwierigkeiten/fordertips/zehneruberschreitung/>
- Gaidoschik, U. M. (28. Oktober 2016). *Das Recheninstitut - zur Förderung mathematischen Denkens*. Abgerufen am 10. Oktober 2019 von aktuelle Studie: Vom Zählen zum Rechnen: <http://www.recheninstitut.at/2016/10/aktuelle-studie-vom-zaehlen-zum-rechnen/#more-1828>
- Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education*, 33(1), S. 18-28.
- Greiler-Zauchner, M. M. (2017). Nicht-algorithmisches Rechnen im Bereich der Multiplikation im dritten Schuljahr Was ist im unterricht alles möglich? *IMST Fachdidaktik*. Klagenfurt am Wörthersee, Österreich.
- Grond, U., Schweiter, M., & Aster, M. v. (2013). Neuropsychologie numerischer Repräsentationen. In M. Aster, & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern - Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (S. 39-58). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht GmbH & Co. KG.

- Gross, H. J., Pahl, M., Si, A., Zhu, H., Tautz, J., & Zhang, S. (28. Januar 2009). Number-Based Visual Generalisation in the Honeybee. (H. Tanimoto, Hrsg.) *PLoS ONE*, 4(1). Von Biozentrum Universität Würzburg. abgerufen
- Hobmaier, H., Altenthan, S., Betscher-Ott, S., Dirrigl, W., Gotthardt, W., & Ott, W. (2003). *Psychologie*. (H. Hobmaier, Hrsg.) Troisdorf: Bildungsverlag EINS.
- Hoffmann, C., & Hoffmann, J. (24. Juli 2019). *Mathemakustik*. Von <https://www.mathemakustik.de/kopfrechnen/subtraktion/> abgerufen
- Kaplan, M. (8. Januar 2011). *Fish as Good as College Students in Numbers Test*. Abgerufen am 11. Februar 2020 von National Geographic News: <https://www.nationalgeographic.com/news/2011/1/110107-fish-count-numbers-humans-animals-science/>
- Karnath, H.-O., & Thier, P. (2012). *Kognitive Neurowissenschaften*. Berlin, Heidelberg, Deutschland: Springer Berlin Heidelberg.
- Krusche, P., Uller, C., & Dicke, U. (1. Juni 2010). Quantity discrimination in salamanders. *The Journal of experimental biology*, 213(11), S. 1822-1828.
- Landerl, P. D. (23. Februar 2007). Gut im rechnen, schlecht im Lesen! Gemeinsamkeiten und Unterschiede von 2 Entwicklungsstörungen. *Monatsschrift Kinderheilkunde*, S. 337-344.
- Lehrplan der Volksschule. (13. September 2012). Österreich.
- Lüken, M. (2010). Ohne „Struktursinn“ kein erfolgreiches Mathematiklernen – Ergebnisse einer empirischen Studie zur Bedeutung von Muster und Strukturen am Schulanfang. (L. Anke, Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*, S. 573-576.
- Mastrothanas, K., Geladari, A., Zervoudakis, K., & Strakalis, P. (8. August 2018). Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction. *International Journal of Education and Research*, S. 43-56.
- Mastrothanas, K., Geladari, A., Zervoudakis, K., & Strakalis, P. (8. August 2018). Primary school pupils' strategies for mental addition and subtraction. *International Journal of Education and Research*, S. 40-56.
- Methoden und Tipps zum Kopfrechnen*. (8. Februar 2018). Abgerufen am 23. Juli 2019 von [paradisi.de](http://www.paradisi.de/Freizeit_und_Erholung/Bildung/Rechnen/Artikel/10142.php): http://www.paradisi.de/Freizeit_und_Erholung/Bildung/Rechnen/Artikel/10142.php
- Methoden und Tipps zum Kopfrechnen*. (23. Juli 2019). Von [paradisi.de](http://www.paradisi.de/Freizeit_und_Erholung/Bildung/Rechnen/Artikel/10142.php): http://www.paradisi.de/Freizeit_und_Erholung/Bildung/Rechnen/Artikel/10142.php abgerufen
- Miller, M. (1968). *Rechenvorteile*. Leipzig: Teubner.
- Pepperberg, I. M., & Carey, S. (November 2012). Grey parrot number acquisition: The inference of cardinal value from ordinal position on the numeral list. *Cognition*, 125, S. 219-232.
- Rathgeb-Schnierer, E. (19. August 2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2.Schuljahres. *Math Didakt*, S. 257-283.

- Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. G. (2018). Desenvolvendo Flexibilidade no Cálculo Mental. *Educação & Realidade*(44).
- Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln, Grundlagen - Förderung - Beispiele*. Deutschland: Springer Spektrum.
- Reece, J., Urry, L., Cain, M., Wasserman, S., Minorsky, P., & Jackson, R. (2016). *Campbell Biologie*. Hallbergmoos: Pearson Deutschland GmbH.
- Schonard, A., & Kokot, C. (2013). *Der Matheknüller : schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt ; genial einfach - einfach genial*. Göppingen.
- Schonard, A., & Kokot, C. (23. Juli 2019). *Der Matheknüller - Warum Inder so verblüffend schnell im Kopfrechnen sind*. Von Der Matheknüller:
<http://www.matheknueller.de/Indien-Aktuell.pdf> abgerufen
- Schoppek, D. W. (2003). *Kopfrechnen aus der Sicht der ACT-R Theorie*. Bayreuth.
- Schulz, H. (2019). *Zahlen-merken.de*. Abgerufen am 2. März 2020 von Französische Zahlen:
https://www.zahlen-merken.de/franzoesische_zahlen.html
- Selter, C. (20. September 2013). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik*(21), S. 227-258.
- Sinner, D. (2016). *Zählendes Rechnen überwinden - Zahlenraum bis 20*. Augsburg: Auer Verlag.
- Strick, H. K. (2019). *Mathematik ist wunderwunderschön: Noch mehr Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren*. Berlin/Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Thevenot, C., Barrouillet, P., Castel, C., & Uittenhove, K. (Jannuar 2016). Ten-year-old children strategies in mental addition: A counting model account. *Cognition*, 146, S. 48-57.
- Veda. (23. Juli 2019). Von Wikipedia: <https://de.wikipedia.org/wiki/Veda> abgerufen
- Wehrle, M. (2018). Kopfrechnen in der Sekundarstufe: Erste Ergebnisse einer aktuellen Studie. (U. Kortenkamp, & A. Kuzle, Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*, 3, S. 1013-1016.
- Zeljić, M. Ž., Ilić, S. M., & Jelić, M. S. (5. Mai 2018). Mental Arithmetic – Subtraction Strategies. *Teaching Innovations*(30), S. 49–61.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1: Entwicklung des Gehirns (Drei-Bläschen-Stadium)	11
Abbildung 2: Menschliches Gehirn - Schnitt entlang der Medianebene	12
Abbildung 3: Informationsverarbeitungsweg durch die drei verschiedenen Speicher.....	15
Abbildung 4: Schematische Darstellung der Zweikomponententheorie.....	17
Abbildung 5: Punktedarstellung: A) Würfelbild B) Reihendarstellung C) Blockdarstellung Vgl.: Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018	29
Abbildung 6: Neuronale Netzwerke des Gehirns für Zahlenverarbeitung und Rechnen nach Dehaene.....	35
Abbildung 7: Lösungsmethoden beim halbschriftlichen Rechnen	46
Abbildung 8: Weitere Lösungsmethoden	46
Abbildung 9 Beispiele für vedische Multiplikation zweistelliger Zahlen	55
Abbildung 10 Vergleich zweier Rechenmethoden zum Multiplizieren mehrstelliger Zahlen.....	56
Abbildung 11 Beispiele für Multiplikation in der Vedischen Mathematik.....	57