



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Wahrscheinlichkeitsrechnung in den USA und
England – Folgerungen für die Sekundarstufe I in
Österreich“

verfasst von / submitted by

Andreea Bugoiu

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 412 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Physik UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Danksagung

In erster Linie möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz bedanken, der diese Diplomarbeit erst ermöglicht hat und der durch sein hilfreiches Feedback, seine Geduld sowie seine kompetente und zuverlässige Unterstützung bei jedem Schritt des Schreibprozesses wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Mein besonderer Dank gilt auch meinen Eltern und meiner Schwester, die mich jahrelang tatkräftig unterstützt haben und deren anhaltender Glaube an einen erfolgreichen Abschluss dieses Projekts mich motiviert und bestärkt hat.

Außerdem möchte ich mich bei allen Freunden und Studierenden bedanken, die mir durch gute Ratschläge, Tipps und Gespräche ermutigend zur Seite gestanden haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Fachdidaktische Grundlagen	3
2.1	Begriffsbestimmungen	3
2.2	Das Spiralprinzip und fundamentale Ideen	5
3	Gründe für einen frühen Stochastikunterricht	9
4	Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes beim Kind	14
4.1	Studie, die eine späte Entwicklung aufzeigt.....	14
4.1.1	Perlenversuch	16
4.1.2	Versuche mit „Fälschung“	17
4.1.3	Urnen mit Spielmarken	18
4.1.4	Fazit	19
4.2	Studien, die eine frühe Entwicklung aufzeigen.....	21
4.2.1	Studien von Yost, Siegel und Andrews und von Goldberg.....	21
4.2.2	Studie von Fischbein, Pampu und Manzat	25
4.2.3	Weitere Studien	28
4.3	Fazit	30
5	Stochastikunterricht zur Bewältigung von Fehlvorstellungen	31
5.1	Fehlvorstellungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung	31
5.1.1	Modell der Urteilsheuristiken.....	32
5.1.2	Repräsentativitätsheuristik	33
5.1.3	Verfügbarkeitsheuristik	35
5.1.4	Zusammenstellung der häufigsten Fehlvorstellungen	38
5.2	Studien, die positive Auswirkungen des Unterrichts belegen.....	40
5.2.1	Studie von Fischbein und Gazit	41
5.2.2	Studie von Shaugnessy	45
5.2.3	Fazit	48
6	Nuffield-Bericht und fachdidaktische Empfehlungen.....	49

7	Stochastikunterricht im Ländervergleich	54
7.1	Lehrplanvergleich.....	54
7.1.1	Hintergrundinformationen zu den Lehrplänen	54
7.1.2	Hintergrundinformationen zu Schulbüchern	56
7.1.3	Primarstufe	58
7.1.4	Sekundarstufe I.....	62
7.1.5	Sekundarstufe II	78
7.1.6	Fazit des Ländervergleichs.....	79
8	Einbettung in den österreichischen Lehrplan	81
8.1	Voraussetzungen aus der Primarstufe	81
8.2	Einbettung in den AHS-Lehrplan der Sekundarstufe I	82
8.2.1	Technologieeinsatz in der Sekundarstufe I	86
8.3	Ausblick auf die Sekundarstufe II.....	89
9	Resümee	91
	Literaturverzeichnis.....	95
	Zusammenfassung	101
	Anhang	102

1 Einleitung

Nur ca. 30 % der 15- bis 16-jährigen Schülerinnen und Schüler in Österreich und Deutschland waren im Jahr 2003 in der Lage, PISA-Fragen zur Stochastik, wie beispielsweise die folgende, richtig zu beantworten (Bryant & Nunes, 2012b): „Consider two boxes, A and B. Box A contains three marbles, of which one is white and two are black. Box B contains seven marbles, of which two are white and five are black. You have to pick a marble from one of the boxes with your eyes covered. Which box should you choose if you want a white marble?“ Dieses Ergebnis überrascht nicht, denn Wahrscheinlichkeitsrechnung ist im österreichischen Lehrplan weder in der Unterstufe noch in der Volksschule vorgesehen - im internationalen Vergleich ist Österreich damit eher eine der Ausnahmen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik haben eine Vielzahl von wichtigen Anwendungen. Schon früh lernen Heranwachsende das Phänomen „Zufall“ im täglichen Leben kennen, indem sie Wetten abschließen, Würfel- und Brettspiele spielen, sich mit Fahrplänen beschäftigen oder an einer Tombola teilnehmen. Im Berufsleben werden dann Entscheidungen und Vorhersagen mit Hilfe von statistischen Daten und wahrscheinlichkeitstheoretischen Urteilen getroffen. Bei falschen Interpretationen und Fehleinschätzungen können sich schwerwiegende Konsequenzen ergeben. Aus der kognitiven Psychologie sind außerdem zahlreiche intuitive Fehlvorstellungen in Bezug auf das Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten bekannt, die das Erlernen von stochastischen Konzepten für viele Schülerinnen und Schüler erschweren. Es ist daher Gegenstand der Forschung, ab welchem Alter und in welchem Umfang Stochastik in der Grundschule bzw. in der Sekundarstufe I unterrichtet werden soll.

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es, eine wissenschaftliche Begründung für eine frühere Einbettung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im österreichischen Lehrplan zu diskutieren und Rückschlüsse darauf zu ziehen, an welcher Stelle im österreichischen Lehrplan der Sekundarstufe I bestimmte stochastische Inhalte eingeführt werden können.

Um dieser Zielsetzung zu entsprechen, werden einerseits Ergebnisse der empirischen Forschung aus der Mathematikdidaktik und der kognitiven Psychologie sowie fachdidaktische Prinzipien herangezogen. Andererseits wird die Implementierung der Stochastik in den Lehrplänen und Unterrichtsmaterialien englischsprachiger Länder (USA und England) mit dem Schwerpunkt der Sekundarstufe I verglichen. Dieses Bild wird durch ein paar Beispiele für unterstützenden Technologieeinsatz aus diesen Ländern abgerundet.

Nach dieser Einleitung werden im zweiten Kapitel Begriffe definiert und fachdidaktische Konzepte wie das Spiralprinzip und die fundamentalen Ideen erschlossen, die für die Thematik wesentlich sind, sowie die aktuelle Lage bzgl. der Lehrpläne in Österreich geschildert. Im nächsten Abschnitt findet sich eine Übersicht zu den Gründen für (und gegen) einen frühen Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kapitel 3), gefolgt von ausführlichen Schilderungen zweier Argumente: Zum einen die Frage, ab welchem Alter Kinder überhaupt eine erste Vorstellung vom Zufalls- bzw. Wahrscheinlichkeitsbegriff entwickeln (Kapitel 4), und andererseits, die Rolle von frühem Stochastikunterricht bei der Bewältigung von intuitiven Fehlvorstellungen (Kapitel 5).

Im darauffolgenden Ländervergleich (Kapitel 7) werden außerdem die Lehrpläne aus den USA und England verglichen und durch geeignete Aufgaben aus Lehrbüchern und Arbeitsblättern veranschaulicht. Exemplarisch wird auch die Verwendung von Technologie, um den Stochastikunterricht bei jüngeren Kindern zu erleichtern, geschildert. Schließlich werden die aus den vorgestellten Kapiteln resultierenden Erkenntnisse genutzt, um im Kapitel 8 eine mögliche Einbettung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den österreichischen Lehrplan vorzuschlagen.

2 Fachdidaktische Grundlagen

2.1 Begriffsbestimmungen

Der Begriff „Stochastik“ wird von verschiedenen Autoren teilweise unterschiedlich definiert. Da er öfters verwendet werden wird, soll im Folgenden kurz umrissen werden, was in dieser Arbeit darunter zu verstehen ist. Eine mögliche Umschreibung besteht darin, „Stochastik“ als Oberbegriff mehrerer Disziplinen aufzufassen (Krüger et al., 2015, S. 2–3):

- *beschreibende bzw. deskriptive Statistik*: Bereits im Römischen Reich beschäftigte man sich im Rahmen von Volkszählungen mit diesem Teilbereich, sie stellt also die wohl älteste Teildisziplin der Stochastik dar.
- *Wahrscheinlichkeitsrechnung*: galt zu Beginn als eine Disziplin, die wie beispielsweise die Akustik sehr eng mit ihren Anwendungen verflochten war. Sie entstand zwar im 17. Jahrhundert, aber ihre systematische, axiomatische Beschreibung wurde erst im 20. Jahrhundert entwickelt.
- *mathematische (beurteilende, schließende, induktive) Statistik*: hat „als eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Auswertung von Daten“ vielfältige Anwendungsbereiche. Sie entstand am Anfang des 20. Jahrhunderts mit Hilfe von wichtigen Beiträgen aus den USA und England.
- *explorative Datenanalyse*: entwickelte sich als Erweiterung der Methoden und Vorgehensweisen der deskriptiven Statistik zur Zeit der 70er Jahre des 20. Jahrhundert in den USA.

In dieser Arbeit wird „Stochastik“ hauptsächlich als Sammelbezeichnung für Wahrscheinlichkeitsrechnung und (deskriptive sowie induktive) Statistik verstanden, wobei der Schwerpunkt für diese Arbeit auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung gesetzt wird. Die Kombinatorik wird hier zwar nicht als Teildisziplin der Stochastik aufgefasst, von ihren Ergebnissen und Methoden macht die Stochastik jedoch Gebrauch (Krüger et al., 2015, S. 3–4).

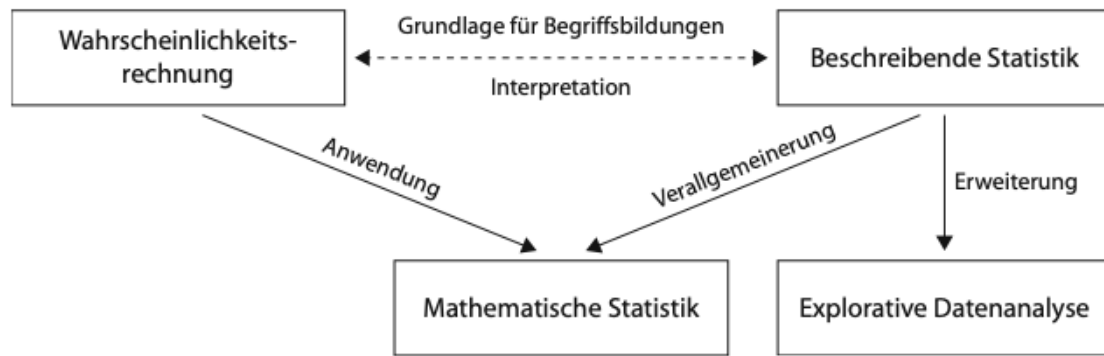


Abbildung 1: Teildisziplinen der Stochastik (Krüger et al., 2015, S. 4)

Das Zusammenspiel der unterschiedlichen Disziplinen ist in Abbildung 1 dargestellt (Krüger et al., 2015, S. 3–4). Die beschreibende Statistik stellt eine Grundlage zur Entwicklung der Konzepte aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie beispielsweise die der Zufallsvariable und des Erwartungswertes sowie der Wahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeitsverteilung, dar (Krüger et al., 2015, S. 3–4). Andererseits können diese Begriffe von einem statistischen Standpunkt aus mit Hilfe der Häufigkeiten interpretiert werden. In Ausweitung der Verfahren der deskriptiven Statistik hat die explorative Datenanalyse als neue Richtung besondere Bedeutung – vor allem beim Umgang mit Massendaten – gewonnen (Krüger et al., 2015, S. 3–4).

Über die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gibt es außerhalb und innerhalb der Mathematik unterschiedliche Auffassungen. An dieser Stelle werden die wichtigsten mathematischen Definitionen der „Wahrscheinlichkeit“ wiedergegeben, denn sie werden im Laufe dieser Arbeit immer wieder relevant sein.

Die *klassische Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses entspricht dem relativen Anteil jener Versuchsausgänge, die zum gefragten Ereignis gehören, an allen möglichen Versuchsausgängen, vorausgesetzt alle Versuchsausgänge sind gleich wahrscheinlich (Biehler & Engel, 2015a, S. 223). Dazu gehört sowohl der Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff als auch die geometrische Wahrscheinlichkeit (Verhältnis von Flächen) (Biehler & Engel, 2015a, S. 223). Es handelt sich hierbei um Überlegungen, die man a-priori machen kann, also noch vor der Durchführung des Zufallsexperiments.

Der *frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff* ist über die Näherung durch die relative Häufigkeit des Ereignisses bei sehr vielen Versuchen definiert (Biehler & Engel, 2015a, S. 223). Diese Wahrscheinlichkeit kann nur nach dem Durchführen der Zufallsversuche, also a-posteriori, bestimmt werden.

Die *subjektive Wahrscheinlichkeit* entspricht dem Ausmaß des subjektiven Vertrauens in das Eintreten eines bestimmten Ereignisses (Biehler & Engel, 2015a, S. 223).

Die frequentistische Wahrscheinlichkeit eignet sich beispielsweise gut, um Bestimmungen, die zunächst mit Hilfe der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition gemacht wurden, nach der Durchführung des Zufallsversuchs zu überprüfen.

2.2 Das Spiralprinzip und fundamentale Ideen

Ein zur Anordnung von Lehrinhalten im Lehrplan wesentliches fachdidaktisches Werkzeug ist das *Spiralprinzip*. Es wird maßgeblich vom Psychologen Jerome Bruner (1970) in seinem Buch „The Process of Education“ geprägt, das ursprünglich im Jahr 1960 veröffentlicht wurde.

Nach Bruner (1970, S. 44) basiert das Spiralprinzip auf folgender Hypothese: „Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden.“ Dabei ist der Schwerpunkt darauf zu legen, den Lernenden die Struktur der zu vermittelnden Wissenschaft und die Forschungshaltung der jeweiligen Disziplin beizubringen (Bruner, 1970). Nach Bruner (1970) dürften sich die Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Lernprozess zwar dem Niveau, aber nicht der Art nach von der im jeweiligen Gegenstand erforderten Einstellung einer/eines Forschenden unterscheiden. Mit der Forderung nach intellektueller Redlichkeit ist gemeint, dass die Inhalte zwar vereinfacht, aber nicht verfälscht werden sollen (Bruner, 1970). Daraus folgt aber auch, dass grundsätzlich, mit Hilfe geeigneter didaktischer Methoden, alle Teilbereiche der Schulmathematik schon ab der Primarstufe unterrichtet werden sollten (Bruner, 1970).

Zu diesem Zweck soll nach dem Spiralprinzip ein bestimmter Lerninhalt im Verlauf der Schuljahre immer wieder in zunehmendem Schwierigkeitsgrad aufgerollt und fortschreitend abstrahiert werden (Bruner, 1970). Dabei ist nach Bruner stets an das Vorwissen der Heranwachsenden anzuknüpfen und es hat eine Entwicklung von der intuitiven Ebene zu zunehmender Formalisierung hin zu erfolgen (genetisches Prinzip). Außerdem sollen die Lernziele auf einige wenige grundlegende Ideen, den sogenannten *fundamentalen Ideen* zurückgeführt werden, die sich wie ein roter Faden durch den Lehrplan ziehen (Bruner, 1970). In der Primarstufe könnten die Kinder die der fundamentalen Idee entsprechenden Phänomene kennenlernen, in der Sekundarstufe werden danach Begriffe erschlossen und die wesentlichen Merkmale betrachtet, wobei damit begonnen wird, die Konzepte zu formalisieren (Bruner, 1970). Im Studium wird diese fundamentale Idee schließlich abstrahiert und formalisiert. Die (Fach-)Expert/innen der betreffenden Disziplin sollten nach Bruner (1970) eine Liste fundamentaler Ideen zusammenstellen, die die Struktur ihres Faches widerspiegeln soll.

Bruner zitiert Piaget (1973, zitiert in Borovcnik, 1997, S. 18–19), der meint, dass die gedankliche Struktur, die bei den Lernenden entsteht, in erster Linie dem axiomatischen Aufbau des jeweiligen Faches entspricht. Dies sind einige der Überlegungen, die in der New Math-Reformbewegung aufgingen (auch wenn sich Bruner selbst gegen eine frühe Abstraktion aussprach), die mengentheoretisch-axiomatische Grundlagen in der Schulmathematik forcierte (Borovcnik, 1997, S. 19). Die Legitimation der Lehrplaninhalte entsprang dabei vor allem der Tatsache, dass sie Bestandteile der axiomatischen Struktur der Mathematik darstellten (Borovcnik, 1997, S. 19).

Wittenberg kritisiert, dass bei diesem Ansatz „völlig verkannt wird, daß die frappanten äußerlichen Züge der modernen Mathematik [...] ihr allmähliches Zustandekommen nicht einer Laune der Mathematiker, sondern organischen Notwendigkeiten verdanken, die dem begrenzten Erfahrungsbereich des Gymnasiasten größtenteils fremd bleiben müssen“ (Wittenberg, 1990, S. 55–56). Es macht für viele Schülerinnen und Schüler kaum Sinn, sich mit strukturmatischen Konzepten wie z. B. „Gruppen“ oder „Vektorräumen“ zu beschäftigen, wenn die Funktion und Leistungsfähigkeit dieser Konzepte nicht im Aufbau weiterer Begriffe, der Anwendung oder Vernetzung innerhalb der für sie erfahrbaren Schulmathematik erkennbar wird. Dieses Sinnproblem mathematischer Aktivitäten greift – unter anderem – Schreiber (2011, S. 63–71) auf und betont, dass Mathematik nicht nur als „fertiges“ Produkt im Hinblick auf die Axiomatik zu sehen ist, sondern für die Lernenden auch als Prozess erfahrbar sein sollte. Zu diesem Zweck formuliert er einerseits folgende Kriterien für fundamentale Ideen: „(1) Weite“, „(2) Fülle“, „(3) Sinn“ (Schreiber, 2011, S. 72–92). Er argumentiert also, dass fundamentale Ideen logisch möglichst allgemein sowie in vielen Teilbereichen der Mathematik anwendbar und bedeutungsvoll sein und einen Bezug zur Alltagswelt haben sollten. Andererseits verknüpft Schreiber das Konzept der fundamentalen Ideen mit der geschichtlichen und kulturellen Tradition der Mathematik, die den Prozesscharakter des Faches für die Schülerinnen und Schüler verdeutlichen soll (Schreiber, 2011, S. 63–71). Nach Schreiber sind fundamentale Ideen außerdem quer zum axiomatischen Aufbau des Faches zu betrachten.

Tietze (1979) nennt die Ausdrücke *Leitidee*, *bereichsspezifische Strategie* und *zentrale Mathematisierungsmuster* als Bestandteile des Begriffs der fundamentalen Idee. Der Begriff der „Leitidee“ orientiert sich bei ihm – in gewissen Grenzen – an der axiomatischen Struktur des jeweiligen mathematischen Teilbereiches: „Leitideen der wissenschaftlichen Mathematik können für die Schule ihren Anspruch nur erfüllen, wenn sie auch innerhalb der Schulmathematik eine Vielfalt von Phänomenen ordnen und inhaltlich verbinden“ (Tietze et

al., 1982, S. 42). Die bereichsspezifischen Strategien hingegen beziehen sich auf Mathematik als Prozess, auf „Strategien des Problemlösens, insbesondere des Beweisens“ (Tietze et al., 1982, S. 41). Unter zentralen Mathematisierungsmustern sind zum einen „Mathematisierungssituationen in anwendenden Wissenschaften“ und zum anderen die „Mathematisierung allgemeiner Erfahrungen [...] (z. B. Raum, Abstand, Richtung, Winkel, Ausdehnung, Orientierung“ (Tietze et al., 1982, S. 42) zu verstehen. Diese stellen einen Bezug zu den Anwendungen der Mathematik her. Somit verbindet Tietze fachmathematische, anwendungsbezogene und auf das Problemlösen bezogene Aspekte der Schulmathematik in seinem Konzept.

Nach Vollrath (1978) sollten fundamentale Ideen, unter anderen Kriterien, das Wesentliche eines Lehrinhalts sichtbar machen, das Potential des eigenen Denkens erlebbar machen und dazu beitragen, dass sich Lernende den Stoff besser einprägen können. Das Konzept der fundamentalen Ideen kann als didaktische Reaktion auf eine Unmenge an Lerninhalten, die teils voneinander isoliert sind, sowie als Versuch, Zusammenhänge sichtbar zu machen, betrachtet werden (Vollrath, 1978).

„All diesen Ansätzen gemeinsam ist nun die Abkehr von der zentralen Gleichstellung von axiomatischen und mentalen Strukturen, die genannten Ideen werden allgemeiner. Weiters ist den Ansätzen gemein, daß sie fundamentale Ideen als subjektiv geprägt sehen und ihren vorläufigen d. h. ausbaufähigen Charakter betonen. Ein Katalog fundamentaler Ideen muss wachsen und persönlich geprägt sein, damit er für den Unterricht oder für didaktische Grundsatzüberlegungen wirksam werden kann“ (Borovcnik, 1997, S. 20). Die Legitimation von Stoffinhalten wird nun nicht mehr daran fest gemacht, dass ein bestimmtes Thema Teil des axiomatischen Aufbaus der Mathematik ist, sondern außerhalb des Spiralprinzips gesucht: zum Teil in der historischen Entwicklung der Mathematik, aber vor allem in der Relevanz für Allgemeinbildung (im Sinne der drei Winterschen Grunderfahrungen, siehe Abschnitt 3), Alltag und Beruf sowie für die Kommunikation mit Expertinnen und Experten (nach Fischers Bildungstheoretischem Orientierungsprinzip, siehe Abschnitt 3). Allerdings behält das Spiralprinzip bis heute seine wesentliche Bedeutung als Methode zur Gliederung des Lehrplans und der fachdidaktisch sinnvollen Anordnung der spezifischen Lerninhalte.

Als Beispiele für konkreten fundamentale Ideen nennt Jung (1978) die Idee des *Algorithmus*, die Idee des *Unendlichen* und die Idee des *Messens* (er plädiert dafür, dass die Ideen möglichst vage und der Katalog möglichst kurz bleiben soll). Ein Bezug zur Stochastik ist über die Idee des Messens möglich, denn der Wahrscheinlichkeitsbegriff kann als Maß für die Gewissheit

des Eintretens eines zufälligen Ereignisses verstanden werden und ist somit als eine fundamentale Idee der Mathematik zu sehen.

3 Gründe für einen frühen Stochastikunterricht

Heinrich Winter beschreibt den Beitrag der Mathematik zur Allgemeinbildung folgendermaßen (Winter, 1995, zitiert nach Bruder et al., 2015, S. 68):

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt – als einzigartiges mathematisches Werkzeug zur Beschreibung des Phänomens „Zufall“ – einen Bestandteil der Mathematik dar, der wesentlich zur Bedeutung dieser für die Allgemeinbildung beiträgt.

Es gibt heutzutage keine Natur- oder Humanwissenschaft bzw. Wirtschafts- oder Sozialwissenschaft, die zum Zweck der empirischen Forschung ohne statistische Methoden und den damit eng verbundenen wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen auskommt. Die Stochastik ist daher im Sinne der ersten Winter'schen Grunderfahrung für das Verständnis von Natur, Mensch und Gesellschaft unerlässlich. Vom Wetter, über die Beschreibung von Elementarteilchen in der Quantenphysik, bis hin zur Ausbreitung und Risiken von Erkrankungen in der Medizin, gibt es unzählige Phänomene, für die der Zufall eine wichtige Rolle spielt. Man setzt sich immer wieder im privaten, beruflichen und öffentlichen Leben mit Expertisen auseinander, die es zum Zweck der eigenen Entscheidungsfindung zu verstehen, interpretieren und beurteilen gilt. Nach Fischers Bildungstheoretischem Orientierungsprinzip, ist die Befähigung zur Kommunikation mit Expertinnen und Experten als Kernpunkt der Legitimation von Stoffinhalten zu betrachten (Fischer, 2012), und gerade in dieser Funktion ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung besonders leistungsfähig. Des Weiteren sind auch außerhalb der Wissenschaften, in der Wirtschafts- bzw. Finanzwelt Entscheidungen aufgrund von stochastischen Überlegungen zu treffen, deren Fehlinterpretation oder Manipulation weitreichende Folgen haben können.

Außerdem werden Aussagen zu politischen bzw. gesellschaftlich relevanten Themen in den Medien und der Politik oft durch die Angabe statistischer Argumente und Wahrscheinlichkeiten untermauert. Ein kritisches Hinterfragen solcher Behauptungen ist ohne grundlegende Kompetenzen auf diesem Gebiet nicht denkbar.

Mit Alltagsproblemen in Bezug auf Würfel- und Brettspielen, Wetten, Glücksrad und ähnlichem, als kulturelle Phänomene, setzen sich viele Kinder schon früh im Leben auseinander. Bei solchen Fragestellungen ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Entscheidungshilfe gefragt. Piaget und Inhelder stellen fest: „Almost every common action seems, in fact, to require the notion of chance as well as a sort of spontaneous estimate of the more or less probable character of feared or expected events” (Piaget & Inhelder, 1975, S. xv). Man weiß z. B., dass die Wahrscheinlichkeit, einen verlorenen Gegenstand in einem kleineren Zimmer zu finden höher ist als in einem größeren und, wenn man über die Straße geht, schätzt man in jedem Augenblick aufgrund der scheinbaren Geschwindigkeiten und Entfernungen der Autos die Chancen ab, nicht angefahren zu werden (Piaget & Inhelder, 1975, S. xv).

Ein Blick in die österreichischen Lehrpläne zeigt jedoch, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung recht spät im Laufe der Schulzeit auftaucht. Im Lehrplan der Volksschulen sind gar keine wahrscheinlichkeitstheoretischen Lernziele vorgesehen (BMBWF, 2012). Lediglich das Beschreiben bzw. Diskutieren von Datenmaterial bzw. grafischen Darstellungen in der dritten und vierten Klasse kann der Stochastik zugeordnet werden. In den Lehrplänen der AHS-Unterstufe und der Neuen Mittelschule (NMS) sind für die Stochastik nur Lehrinhalte aus der beschreibenden Statistik vorgesehen (BMBWF, 2018, 2019a). In der AHS-Oberstufe wird in der zehnten Schulstufe die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt und in der elften kommen diskrete Zufallsvariablen bzw. Verteilungen inklusive der Binomialverteilung hinzu (BMBWF, 2019a). Lernziele zu stetigen Zufallsvariablen und Verteilungen, zur Normalverteilung und zur schließenden Statistik wurden der zwölften Schulstufe zugeteilt. Die Lehrpläne der Handelsakademien (HAK) und der Höheren Technischen Lehranstalten (HTL) beinhalten Stoffinhalte aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung (BMBWF, 2014, 2019b).

Für die Sicherung des Beitrags der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Allgemeinbildung ist aus fachdidaktischen und kognitionspsychologischen Gründen ein früher Stochastikunterricht sinnvoll. Im folgenden Teil des Kapitels werden einige dieser Gründe erörtert.

Da eine große Anzahl österreichischer Schülerinnen und Schüler gar keine AHS- Oberstufe oder BHS (Berufsbildende Höhere Schule) besuchen, würden sie infolgedessen im Laufe ihrer Schullaufbahn nie mit Wahrscheinlichkeitsrechnung in Berührung kommen. Dies betrifft

zumindest den, nach einem Bericht aus dem Jahr 2016, im OECD-Schnitt recht hohen Anteil von ca. 33 % der österreichischen Jugendlichen im Alter von 15 bis 19 Jahren, die sich für eine Lehre entscheiden (DER STANDARD, 2016). In den Lehrplänen der Berufsschulen, die diese Jugendlichen zusätzlich zur praktischen Ausbildung in den Betrieben besuchen (Lehrlingsportal, o. J.), ist lediglich deskriptive Statistik für berufsspezifische Anwendungen, aber keine Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgesehen (Berufsbildende Schulen, o. J.).

Um international wettbewerbsfähig zu bleiben, ist es Aufgabe des österreichischen Schulsystems, die Lernenden entsprechend vorzubereiten. Es ist nicht realistisch von 15- bzw. 16-jährigen heimischen Schülerinnen und Schülern zu erwarten, PISA-Beispiele zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (siehe z. B. Abbildung 2) lösen zu können (OECD, 2015), wenn die entsprechenden Inhalte überhaupt nicht in der Unterstufe bzw. in der Grundschule gelehrt werden. Heranwachsende aus anderen Ländern sind hier im Vorteil, denn im internationalen Vergleich wird Wahrscheinlichkeitsrechnung früher, entweder in der Primar- oder in der ersten Sekundarstufe, eingeführt. Dies betrifft nicht nur PISA, sondern vor allem auch die Berufsqualifikation im internationalen Vergleich: Je länger (und eingehender) sich die Heranwachsenden während ihrer Schulzeit mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepten und Vorgehensweisen befasst haben, desto sicherer werden sie als Erwachsene deren Anwendungen im Berufsleben meistern können.

M509: ERDBEBEN	
Frage 1: ERDBEBEN	M509Q01
Ein Dokumentarfilm über Erdbeben und darüber, wie oft Erdbeben auftreten, wurde gesendet. Er enthielt eine Diskussion über die Vorhersagbarkeit von Erdbeben. Ein Geologe erklärte: „In den nächsten zwanzig Jahren liegt die Wahrscheinlichkeit, dass in Zedstadt ein Erdbeben auftritt, bei zwei zu drei.“ Welche der folgenden Aussagen gibt die Bedeutung <i>der Aussage des Geologen</i> am besten wieder?	
A $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13,3$, deshalb wird es in 13 bis 14 Jahren von jetzt an gerechnet in Zedstadt ein Erdbeben geben. B $\frac{2}{3}$ ist mehr als $\frac{1}{2}$, deshalb kann man sicher sein, dass es in Zedstadt irgendwann während der nächsten 20 Jahre ein Erdbeben geben wird. C Die Wahrscheinlichkeit, dass es in Zedstadt irgendwann während der nächsten 20 Jahre ein Erdbeben geben wird, ist höher als die Wahrscheinlichkeit für kein Erdbeben. D Man kann nicht sagen, was passieren wird, weil niemand sicher sein kann, wann ein Erdbeben auftritt.	

Abbildung 2: PISA-Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (OECD, 2015)

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt, unter anderem, deswegen als schwierig zu erlernendes Fachgebiet der Mathematik, weil es zahlreiche Fehlvorstellungen gibt, die sowohl bei Kindern

als auch bei Erwachsenen nachgewiesen werden konnten (siehe Abschnitt 5.1). Biehler und Engel (2015a) bemerken dazu: „Der Intuition widersprechende Ergebnisse sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung schon auf elementarem Niveau anzutreffen, wohingegen man in anderen Gebieten der Mathematik der Intuition zuwiderlaufende Resultate meist erst auf einem hohen Abstraktionsniveau begegnet“ (S. 228). Daher ist es überraschend, dass gerade diese Teildisziplin so sehr vernachlässigt wird, dass für eine Zeitspanne von ungefähr zwei Drittel der Schulzeit kein Versuch unternommen wird, entsprechende Lernziele im Unterricht zu verfolgen. Es erscheint plausibel, etwas mehr – *nicht weniger* – Unterrichtszeit für jene Bereiche der Mathematik aufzuwenden, bei denen besonders viele Verständnisschwierigkeiten bekannt sind.

Biehler und Engel (2015a) stellen Folgendes fest: „Stochastisches Denken unterscheidet sich vom Denken in einer zweiwertigen Logik, weil es häufig nicht darauf ankommt, einer Aussage die Werte „wahr“ oder „falsch“ zuzuweisen, sondern darauf, den Grad der Gewissheit bezüglich eines zufälligen Ereignisses einzuschätzen“ (S. 228). Nach Parsons und Osherson (2001, zitiert nach Kipman, 2014) wird außerdem „vermutet, dass unterschiedliche Gehirnsysteme dem deduktiven und dem stochastischen Denken zugrunde liegen“ (S. 54). Fischbein (1976, zitiert nach Shaughnessy, 1977, S. 314) behauptet, dass die Verbindung zwischen dem Notwendigen und dem Möglichen, als Grundlage probabilistischen Denkens, nicht spontan hergestellt wird. Er stellt außerdem fest, dass die naturwissenschaftliche Schulbildung in erster Linie das deterministische Denken fördert, und die Erforschung von stochastischen Situationen vernachlässigt. Aus diesem Grund sind nach Fischbein die intuitiven Vorstellungen vieler Menschen vom Zufallsbegriff verzerrt. Weil sich stochastisches Denken so grundlegend vom deterministischen bzw. logisch-deduktiven unterscheidet und kaum im naturwissenschaftlichen Schulunterricht (oder in anderen Teildisziplinen der Mathematik) vorkommt, kann es im Wesentlichen nur im Rahmen des wahrscheinlichkeitstheoretischen Unterrichts erlernt werden, welcher aber in den österreichischen Lehrplänen zu kurz kommt.

Als eine fundamentale Idee der Mathematik sollte das Konzept des „Zufalls“ bzw. der „Wahrscheinlichkeit“ (siehe Abschnitt 2.2) – dem Spiralprinzip entsprechend – im Laufe der Schuljahre immer wieder auf steigendem Schwierigkeits- und Formalisierungsniveau aufgerollt werden, und zwar ab der Primarstufe. An dieser Stelle sei, in Bezug auf das Argument der in diesem Bereich auftretenden Lernschwierigkeiten, darauf hingewiesen, dass das Spiralprinzip auch die fachdidaktische Funktion hat, Stoffinhalte vor dem Vergessen zu bewahren: Das wiederholte Aufgreifen, *über die gesamte Schullaufbahn* verteilt, hilft den Lernenden sich die

Konzepte und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung besser einzuprägen, was für die Abrufbarkeit des entsprechenden Wissens und Könnens im Erwachsenenalter wesentlich ist.

Situationen, die vom Zufall geprägt werden, sind schon früh in der Lebenswelt der Heranwachsenden relevant, regen zu Fragen an und stellen Ansatzpunkte für vielfältige Anwendungen der Mathematik dar. Wenn man die mathematische Beschreibung solcher Situationen im Mathematikunterricht ignoriert, wird eine wertvolle Gelegenheit außer Acht gelassen, den Schülerinnen und Schülern die Alltagsrelevanz der Mathematik zu vermitteln.

Da Spiele vor allem bei jüngeren Kindern zur Steigerung intrinsischer Motivation führen können, lässt man bei späterer Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine wichtige Gelegenheit aus, die Lernenden früh für Mathematik zu begeistern. Für viele Oberstufenschüler/innen sind einfache Brett- oder Würfelspiele vielleicht nicht mehr so interessant oder werden gar als kindisch empfunden.

Früher Stochastikunterricht kann dazu genutzt werden, die Schülerinnen und Schüler über die objektiv gesehen sehr niedrigen Gewinnchancen bei vielen Glücksspielen zu informieren. Im Rahmen solcher Überlegungen kann auch die Gefahr der Spielsucht thematisiert werden.

Zwei wichtige Argumente für einen frühen wahrscheinlichkeitstheoretischen Unterricht werden in Kapitel 4 und 5 ausführlich diskutiert. Es wird auf ein mögliches Gegenargument von Piaget und Inhelder eingegangen, deren Untersuchungen auf eine spätere Entwicklung des Zufalls- bzw. Wahrscheinlichkeitsbegriffs hinweisen. Dazu wird mit Hilfe von Ergebnissen empirischer Forschung nachgewiesen, dass Kinder, schon recht früh ein gewisses Verständnis vom Zufall und von Wahrscheinlichkeiten zeigen, und daher durch geeigneten Stochastikunterricht durchaus einen Lernzuwachs erzielen können. Außerdem wird das Problem stochastischer Fehlvorstellungen näher unter die Lupe genommen, zu deren Bewältigung der Stochastikunterricht einen wesentlichen Beitrag leistet.

4 Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes beim Kind

Die Frage nach der Entstehung der ersten Vorstellungen vom Zufall bzw. von Wahrscheinlichkeit bei den Heranwachsenden hängt mit der Möglichkeit des Stochastikunterrichts zusammen. Die Entwicklungspsychologen Jean Piaget und Bärbel Inhelder (Piaget & Inhelder, 1975) waren einige der ersten Forschenden, die sich in den Fünfzigerjahren des 20. Jahrhunderts mit dieser Frage auseinandersetzten. Die von ihnen durchgeführte Untersuchung weist auf eine eher späte Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes hin und wird in diesem Kapitel daher eingehend beschrieben, wobei, gemäß dem Thema dieser Arbeit, der Schwerpunkt auf jene Versuche gesetzt wurde, die die Wahrscheinlichkeitsrechnung (nicht Statistik) betreffen. Ab den Fünfzigerjahren folgten viele weitere Studien, die sich – oft auch kritisch – mit den Ergebnissen von Piaget und Inhelder beschäftigten und zu einer differenzierteren Darstellung führten. „Die Feststellung allein, daß der Erwerb des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ein entwicklungsbedingtes Phänomen ist, sagt aber noch nichts darüber aus, wie sich Kinder bei gezielter Unterweisung in konkreten Lernsituationen verhalten“ (Kütting, 1994, S. 76–77). Diese Feststellung, die Kütting in seiner „Didaktik der Stochastik“ im Jahr 1994 macht, wurde durch zahlreiche vorhergehende (aber auch danach stattfindende) Studien, die der Frage nachgingen, ab welchem Alter Kinder vom Stochastikunterricht profitieren können, bestätigt. Aus einer Fülle von verschiedenen Studien aus diesem Bereich wurden einige für diese Arbeit relevante ausgewählt und eingehend in Abschnitt 4.2 beschrieben, um letztlich Rückschlüsse darauf zu erlauben, welche Lernziele schon in der Primar- bzw. Sekundarstufe I umgesetzt werden können.

4.1 Studie, die eine späte Entwicklung aufzeigt

In ihrem 1951 veröffentlichten Buch „La genese de l’idée de hasard chez l’enfant“ beschreiben Piaget und Inhelder mehrere Versuche zur Entwicklung des stochastischen Denkens bei Kindern unterschiedlichen Alters. In diesem Abschnitt wird die spätere Auflage der englischen Übersetzung dieses Werkes aus dem Jahr 1975 zitiert.

Drei der von Piaget beobachteten Stadien der kognitiven Entwicklung von Heranwachsenden sind, als theoretische Rahmenbedingung für die Einordnung der experimentellen Ergebnisse, wesentlich und werden daher kurz hier beschrieben (Piaget & Inhelder, 1975, in: Kütting, 1994, S. 86–87):

- Die präoperationale Phase (von ca. zwei bis sieben Jahren): Kinder in diesem Alter sind nicht in der Lage, sich gedanklich mit Operationen zu beschäftigen (Piaget & Inhelder, 1975, in: Kütting, 1994, S. 86–87).
- Die konkret-operationale Phase (von ca. sieben bis zehn Jahren): Die Heranwachsenden besitzen die Fähigkeit, sich in Gedanken mit konkreten Objekten auseinander zu setzen (konkrete Operationen), dies bezieht sich jedoch nur auf greifbare Dinge in der realen Welt (Piaget & Inhelder, 1975, in: Kütting, 1994, S. 86–87). Weiters sind in diesem Stadium reversibles Denken sowie das Erfassen der Teilmengenbeziehung zum Ganzen möglich.
- Die formal-operationale Phase (ab ca. elf oder zwölf Jahren): Den Kindern sind nun Schlussfolgerungen aus reinen Hypothesen bzw. aus rein mündlichen Aussagen (formale Operationen) zugänglich und sie sind imstande, mit (mathematischen) Symbolen umzugehen und kombinatorische Berechnungen durchzuführen (Piaget & Inhelder, 1975, in: Kütting, 1994, S. 86–87).

Unter dem Begriff „Operationen“ versteht Piaget „cognitive actions“ wie z. B. die Aufteilung der Elemente einer Menge in Untermengen mit gemeinsamen Merkmalen (Piaget & Inhelder, 1975, S. 250). Konkrete Operationen werden von realen Gegenständen gestützt, die gegenwärtig sind oder beobachtet werden können, durchgeführt, während formale das hypothetisch-deduktive Denken betreffen und dem Operieren mit Operationen entsprechen (Piaget & Inhelder, 1975, S. 250–251).

Diese Entwicklungsstufen bauen zwar aufeinander auf, sind jedoch zeitlich nicht scharf abgegrenzt (Piaget & Inhelder, 1975, in: Kütting, 1994, S. 86–87): Es können auch Überschneidungen und individuelle Ausnahmen auftreten. Im Rahmen der Schilderung von Versuchsergebnissen war es stellenweise erforderlich, die Phasen jeweils weiter auszudifferenzieren.

In ihren Versuchen befragten Piaget und Inhelder (1975) pro Versuch ungefähr 20 Kinder im Alter von vier bis zwölf Jahren (Piaget & Inhelder, 1975, in: Kütting, 1994, S. 87). Die angewendete Interviewtechnik bestand darin, die Experimente zu erklären und die Befragten mögliche Ergebnisse bzw. Gewinnchancen voraussagen zu lassen (Piaget & Inhelder, 1975). Durch Nachfragen der Versuchsleitung ergaben sich Gespräche mit den Kindern, es handelte sich also um eine Art Interviews. Protokolle stellten die Grundlage für die Auswertung dar, die nicht statistisch erfolgte.

4.1.1 Perlenversuch

Nach Piaget und Inhelder (1975, S. xix) ist der Zufall als wesentliches Merkmal einer irreversiblen Mischung zu sehen. Das Problem bestand also darin, festzustellen, ob das Kind angesichts einer offensichtlichen Durchmischung von Gegenständen, die sukzessiv zunehmende Unordnung bzw. den irreversiblen Charakter dieses Prozesses erkennen oder ob es die verschiedenen Objekte als durch unsichtbare Verbindungen verknüpft sehen würde (Piaget & Inhelder, 1975, S. 2).

Eine rechteckige Schachtel war bei diesem Experiment auf einer Wippe gelagert (Piaget & Inhelder, 1975, S. 2). Darin befanden sich acht rote und acht weiße Perlen, die durch ein Brettchen getrennt waren. „Before the box is first tipped [...], the child is asked a question: What will be the arrangement of the balls when they return to their starting places? Will the red ones stay on one side and the white ones on the other? Or will they get mixed up, and in approximately what proportion? (Piaget & Inhelder, 1975)“ Danach wurde eine erste Wippbewegung durchgeführt. Das Kind beobachtete das Ergebnis und sollte vor dem nächsten Wippen erneut eine Voraussage treffen. „After some tries he is asked to predict the result of a large number of moves of the box. (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 3)“ Die Befragten wurden sollten außerdem, die möglichen Bahnen der Kugeln und ihre endgültigen Positionen skizzieren.

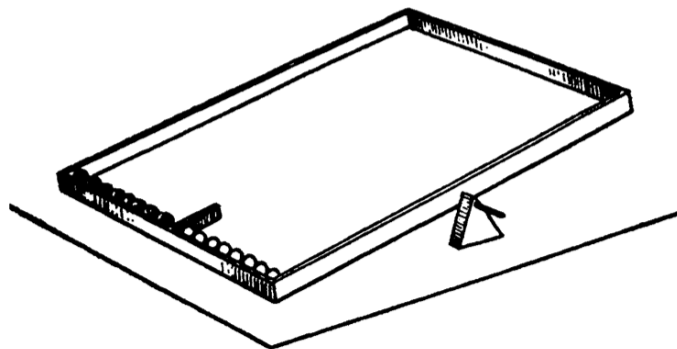


Abbildung 3: Wippe mit Perlen (Piaget & Inhelder, 1975, S. 2)

Bei Kindern im Alter von *vier bis sieben Jahren* überwiegt vor der Durchführung des Versuchs die Annahme, dass jede Perle in ihre ursprüngliche Position zurückkehren wird (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 8). Konfrontiert mit der Tatsache der Durchmischung der Kugeln halten sie daran fest, dass weitere Wippbewegungen letztlich von selbst zu einem Zustand der Ordnung führen werden, bei dem die Kugeln entweder in die exakten Ausgangspositionen zurückkehren oder bei dem die roten und die weißen Kugeln geschlossen Platz tauschen (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 9).

Im Alter von *sieben bis elf Jahren* machen die Heranwachsenden zunehmend richtige Vorhersagen bzgl. der fortschreitenden Durchmischung, und erkennen bereits, dass viele verschiedene Kugelmischungen als Ergebnis der Wippbewegungen in Frage kommen (Piaget & Inhelder, 1975, S. 12–13). Im Unterstadium IIA (von ca. *sieben bis neun Jahren* und zehn Monaten) erscheint den Kindern die Rückkehr in die Ausgangslage bzw. der Platztausch roter und weißer Kugeln wahrscheinlicher als bei IIB. Sie akzeptieren die Zufälligkeit, weil sie die vielen Möglichkeiten bei den Kugelbewegungen erkennen können und diese als gleichwertig betrachten (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 18), aber sie urteilen, dass eine sukzessive Durchmischung dazu führen wird, dass die Kugeln schlussendlich wieder in die Ausgangslage zurückkehren (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 19). Ein wenig ältere Kinder im Unterstadium IIB (von ca. *neun bis elf Jahren*) betrachten die vollständige Rückkehr in die ursprünglichen Positionen zwar als möglich, aber nur als eine Art unwahrscheinlicher Ausnahmefall (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 16), sie zeigen jedoch noch kein Verständnis des Gesetzes der großen Zahlen (Piaget & Inhelder, 1975, S. 22–23).

Mit *elf bis zwölf Jahren* erkennen die Probanden die irreversible Eigenschaft der Mischung sowie die zunehmende Durchmischung bei aufeinanderfolgenden Versuchen und es lässt sich feststellen, dass sie das Gesetz der großen Zahlen erfasst haben (Piaget & Inhelder, 1975, S. 23–25).

4.1.2 Versuche mit „Fälschung“

Es wurden drei Arten von Versuchen durchgeführt, die jeweils durch eine Fälschung manipuliert wurden. Zunächst wurden 20 Spielmarken, die einen Kreis auf der einen und ein Kreuz auf der anderen Seite besaßen, in die Luft geworfen (Piaget & Inhelder, 1975, S. 96–97). Die Kinder sollten prognostizieren, ob beim einmaligen Wurf Kreuz oder Kreis auftreten würden bzw. wie oft diese jeweils beim gleichzeitigen Werfen von 10 bis 20 Spielmarken auftreten würden. Anschließend wurden die Spielmarken, ohne Wissen der Befragten, gegen „gefälschte“ ausgewechselt, die alle auf beiden Seiten ein Kreuz hatten, und das Experiment wurde mehrmals durchgeführt, um die Reaktion der Kinder auf dieses „Wunder“ festzustellen. Anschließend wird den Befragten der „Trick“ erklärt. Ein letzter Versuch wird auf folgende Weise durchgeführt, wobei mit dem englischen Ausdruck „counters“ die Spielmarken gemeint sind (Piaget & Inhelder, 1975, S. 96–97): „Without his knowing whether we are using the fixed set or not, we throw one by one the trick counters [...]. Then we try to catch at what moment and thanks to what reasoning the subject recognizes for sure that it is an experiment with the homogeneous, or fixed, elements.“ Piaget und Inhelder (Piaget & Inhelder, 1975, S. 96–97,

109) berichten außerdem von analogen Versuchen mit Hilfe einer Urne, die rote und blaue Kugeln enthielt, bei denen jeweils auch „Fälschungen“ verwendet wurden. Da die beiden Experimente analog durchgeführt wurden, wird im Folgenden nur auf das Spielmarkenexperiment eingegangen.

Kinder im Alter von *zwei bis sieben Jahren* nehmen entweder einen Wechsel von einem vorherrschenden Ergebnis oder eine Fortsetzung des gleichen Versuchsausgangs an. Diese Befragten wurden kaum durch das Experiment mit den ausgewechselten Spielmarken überrascht. Obwohl dieses Ergebnis als „Trick“ deklariert wurde, gingen die Versuchspersonen davon aus, dass es mit normalen Spielmarken repliziert werden könnte (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 97). Im Alter von *sieben bis elf Jahren* weigerten sich die Befragten entweder sofort oder nach wenigen Versuchsdurchführungen, das Ergebnis mit den „gefälschten“ Spielmarken zu akzeptieren (Piaget & Inhelder, 1975, S. 103–106). Sie glaubten nicht daran, dass dies ohne einen „Trick“ eintreten kann. Diese Reaktion wurde frühestens bei ein paar sechsjährigen, aber hauptsächlich bei siebenjährigen Kindern beobachtet. Versuchspersonen im Alter von *elf bis zwölf Jahren* machten exakter werdende quantitative Voraussagen bzgl. der Wahrscheinlichkeiten, wobei sich ein Verständnis des Gesetzes der großen Zahlen zeigt (Piaget & Inhelder, 1975, S. 106–109). Der „Trick“ wurde von dieser Gruppe meistens gleich als manipuliertes Experiment identifiziert.

4.1.3 Urnen mit Spielmarken

Bei diesem Versuch sollten die Kinder für einmaliges Ziehen aus zwei verschiedenen Urnen entscheiden, bei welcher der beiden größere Gewinnchancen auftreten würden (Piaget & Inhelder, 1975, S. 132–134). Die beiden Urnen enthielten Spielmarken, die entweder auf beiden Seiten unmarkiert oder auf einer Seite mit einem Kreuz (entsprach der Gewinnfarbe) gekennzeichnet waren. Die unterschiedlichen Zusammensetzungen der Urnen waren den Befragten genau bekannt. Die Tabelle in Abbildung 4 zeigt die bei diesem Experiment untersuchten Mischungsverhältnisse „x/y“, wobei „x“ die Anzahl der Spielmarken mit einem Kreuz und „y“ die Gesamtzahl aller Marken in einer Urne darstellen.

		Günstige/Mögliche	
Aufgabe	Beschreibung	Urne 1	Urne 2
1.	Doppelte Unmöglichkeit	0/3	0/3
2.	Doppelte Sicherheit	2/2	4/4
3.	Sicherheit - Unmöglichkeit	2/2	0/2

4.	Möglichkeit - Sicherheit	1/2	1/1
5.	Möglichkeit - Unmöglichkeit	1/2	0/2
6.	Identische Zusammensetzungen	1/2	1/2
7.	Proportionale Zusammensetzungen	1/3	2/6
8.	Ungleichheit günstiger Fälle – Gleichheit möglicher Fälle	1/4	2/4
9.	Gleichheit günstiger Fälle – Ungleichheit möglicher Fälle	1/2	1/3
10.	Ungleichheit günstiger und möglicher Fälle ohne Proportionalität	1/2	2/3

Abbildung 4: Zusammensetzungen der Urnen (in Anlehnung an Piaget & Inhelder, 1975a, S. 132–133)

Kinder im Alter von vier bis sieben Jahren waren kaum imstande, die Gewinnchancen in irgendeiner Weise quantitativ zu vergleichen, im Alter von *vier bis sechs Jahren* oft auch dann nicht, wenn die Urnen insgesamt gleich viele Spielmarken enthielten, wie z. B. bei $1/3$ und $2/3$ (siehe Abbildung 4) (Piaget & Inhelder, 1975, S. 132–144). Von *sechs bis sieben Jahren* konnten die Versuchspersonen Fragen mit einer Variablen (es änderte sich entweder die Anzahl der günstigen oder die der möglichen Fälle) bei auffälliger Disproportion gelegentlich richtig beantworten, scheiterten jedoch weitgehend an Aufgaben (7. und 10.) mit zwei Variablen (Piaget & Inhelder, 1975, S. 132–144).

Bei Probanden im Alter von sieben bis elf Jahren wurden die Ergebnisse auch ausdifferenziert: Von *sieben bis neun Jahren* kam es vermehrt zu richtigen Lösungen bei Aufgaben mit einer Variablen, während jene mit zwei Variablen noch nicht korrekt beantwortet wurden (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 149–153). Von *neun bis elf Jahren* waren die Befragten vermehrt imstande, auch auf diese Fragestellungen richtige Antworten zu liefern (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 153–157). Dies geschah jedoch auf der Grundlage empirisch-optischer Vorstellungen, nicht aufgrund formaler Berechnungen (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 153–157).

Versuchspersonen im Alter von *elf bis zwölf Jahren* hatten keine Probleme, alle Fragen weitgehend richtig zu beantworten und führten quantitative Berechnungen durch (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 157–160).

4.1.4 Fazit

Piaget und Inhelder kommen aufgrund ihrer Untersuchungen zu zwei wesentlichen Ergebnissen:

Sie folgerten, unter anderem, aus den Versuchen in Abschnitt 4.1.1 und 4.1.2, dass der Zufallsbegriff bei den Heranwachsenden im Unterstadium IIA, also mit ca. sieben Jahren, entsteht (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 12, 17).

Nach Piaget und Inhelder entwickelt sich der von ihnen untersuchte Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff erst mit ca. elf Jahren. Dies wird auf mehrere Arten begründet: Erstens, ziehen sie diesen Schluss aufgrund der experimentellen Ergebnisse aus Abschnitt 4.1.1 und 4.1.2. Zweitens, ist für den Umgang mit den für Wahrscheinlichkeitsberechnungen wichtigen Proportionen die Fähigkeit zum Operieren mit Operationen notwendig, die Kinder erst auf der formal-operationalen Entwicklungsstufe besitzen (Piaget & Inhelder, 1975a, S. 134). Drittens müssen kombinatorische Überlegungen, die auch erst in dieser Phase nachweisbar sind, angestellt werden, um einen quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff erschließen zu können.

Die Ergebnisse von Piaget und Inhelder schließen einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Unterricht in der Sekundarstufe I also nicht aus. Allerdings hängt die Zuordnung der für diese Jahrgänge geeigneten Lernziele davon ab, wann die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe frühestens eingeführt werden kann und in welchem Ausmaß. Es ist außerdem anzumerken, dass sich Piaget und Inhelder hauptsächlich für Aussagen über einen Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff interessierten, und andere Konzepte der Wahrscheinlichkeit fast gar nicht vorkamen. Wenn zwischen einem beginnenden intuitiven Verständnis von Wahrscheinlichkeit und dem Verwenden seiner quantitativen Definition unterschieden wird, ergibt sich ein differenzierteres Bild (Kütting, 1994, S. 94). Der Nachweis des Zufallsbegriffs ab sieben Jahren würde grundsätzlich ein Beschäftigen mit Zufallsphänomenen in der Primarstufe zulassen, aber nach Kütting (1994, S. 94) ist anhand der Gesprächsprotokolle von Piaget und Inhelder mit Kindern im Alter von zwei bis sieben Jahren bereits eine „erste Intuition vom Zufall“ feststellbar. Des Weiteren, verdient auch die fachdidaktisch motivierte Frage danach, ab welchen Alter Stochastikunterricht positive Auswirkungen auf die Entwicklung dieser Konzepte bei den Schülerinnen und Schülern haben kann, eine gesonderte Betrachtung. Im Hinblick auf diese Fragen wurden die Ergebnisse von Piaget und Inhelder durch zahlreiche weitere Studien verfeinert und zum Teil aufgrund wissenschaftlich begründeter Kritikpunkte modifiziert. Da diese Aspekte vor allem für die Einteilung von stochastischen Inhalten im Lehrplan durchaus relevant sind, werden einige dieser Untersuchungen in den folgenden Abschnitten näher beschrieben.

4.2 Studien, die eine frühe Entwicklung aufzeigen

4.2.1 Studien von Yost, Siegel und Andrews und von Goldberg

In einer Veröffentlichung von Yost, Siegel und Andrews (1962) werden die von Piaget und Inhelder bei den im vorhergehenden Abschnitt geschilderten Methoden kritisch betrachtet. Die Arbeit von Yost, Siegel und Andrews stellte auch einen Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen dar (Kütting, 1994, S. 94). Dabei beziehen sich Yost et al. (1962, S. 769) auf einen Artikel von Piaget aus dem Jahr 1950 über die Vorstellungen der Heranwachsenden vom Zufall.

Insbesondere wird darin ein Versuch mit Spielmarken unterschiedlicher Farben in einer undurchsichtigen Urne geschildert: 14 Jungen und Mädchen im Alter von fünf bis zwölf Jahren sollten vorhersagen, welche Farbe „most likely“ also am wahrscheinlichsten, gezogen werden würde (Piaget, 1950, in: Yost et al., 1962, S. 769). Dabei lag eine zum Urneninhalt identische Anordnung von Spielmarken vor den Probanden auf dem Tisch. Ältere Kinder sollten bei aufeinanderfolgenden Ziehungen ohne Zurücklegen die wahrscheinlichste Reihenfolge der gezogenen Farben angeben (Piaget, 1950, in: Yost et al., 1962, S. 769).

Eine Analyse der Piaget'schen Methoden führte Yost, Siegel und Andrews zu folgenden Kritikpunkten (Yost et al., 1962, S. 771):

- Die von Piaget durchgeführte Befragung hing stark von den sprachlichen Fähigkeiten der Probanden ab, weil sie zum einen begreifen mussten, was unter dem Begriff „most likely“ zu verstehen sei, und, zum anderen, ihre Antwort selbstständig in Worte fassen sollten. Dies würde vor allem bei jüngeren Kindern zum Problem werden.
- Beim Vorgehen von Piaget könnten Farbvorlieben der Kinder das erwartete Ergebnis beeinflussen.
- Es gab bei Piaget keinen Anreiz für richtige Antworten, was zur anhaltenden Motivation der Befragten wichtig gewesen wäre.
- Piaget führte keine statistische Auswertung der Ergebnisse durch.
- Die in obigem Experiment am Tisch ausgelegten Spielmarken könnten die Versuchspersonen verwirren: Sie waren nicht gemischt worden und Überlegungen bzgl. der Position einzelner Spielmarken (z. B. räumliche Nähe) könnten die Entscheidungen der Kinder beeinflussen.

Yost et al. (1962) entwickelten eine andere Vorgehensweise, die sogenannte „decision-making-technique“, und führten eine Untersuchung durch, um die Hypothese zu prüfen, dass jüngere

Kinder mit dieser Methode mehr korrekte Antworten beim oben geschilderten Versuch erzielen würden als mit der Methode von Piaget.

Zu diesem Zweck wurden 20 Kinder, darunter je zehn Buben und Mädchen, im Alter von vier Jahren und zehn Monaten bis fünf Jahren und acht Monaten zwei Tests mit jeweils unterschiedlichen experimentellen Bedingungen unterzogen (Yost et al., 1962, S. 774). Es wurden zwei gleiche Gruppen aus jeweils fünf Mädchen und Jungen gebildet, von denen Yost et al. eine nach der „decision-making-technique“ (DM) und die andere nach einer Abwandlung der Piaget’schen Methode (P) testeten. Jedes Kind aus dieser Studie absolvierte beide Tests individuell an zwei verschiedenen Tagen, sodass jeder/m Versuchsteilnehmer/in 24 Fragen bzgl. unterschiedlicher Mischungsverhältnisse gestellt wurden. Zuvor wurde aus drei Farben durch mehrere Vergleiche von je zwei Farben die vom Kind bevorzugte und am wenigsten bevorzugte Farbe bestimmt (Yost et al., 1962, S. 774). Die Hälfte der Probanden begann zuerst mit den Versuchen unter der experimentellen Bedingung P, die andere Hälfte unter Bedingung DM (Yost et al., 1962, S. 774).

Die „decision-making-technique“ (DM) von Yost et al. (1962, S. 775) wurde folgendermaßen durchgeführt: Aus zwei transparenten Behältern mit verschiedenen, dem Kind bekannten, Mischungsverhältnissen der Lieblings- und der am wenigsten bevorzugten Farbe sollte das Kind jenen Behälter durch Zeigen auswählen, aus dem es ziehen wollte. Davor konnte die Versuchsperson eine Belohnung auswählen, die dann neben einer Spielmarke in der Gewinnfarbe auf den Tisch gelegt wurde. Nachdem das Kind eine Voraussage getroffen hatte, wurden die gewählte Schachtel geschüttelt, aus der dann eine Spielmarke blind gezogen wurde (Yost et al., 1962, S. 775). Falls die Gewinnfarbe gezogen wurde, durfte die Versuchsperson die versprochene Belohnung behalten und sie erhielt positive mündliche Bestärkung (Yost et al., 1962, S. 775). Falls die Behälterauswahl des Probanden objektiv richtig war, aber nicht die Gewinnfarbe gezogen wurde, gab es zwar mündliches Lob aber keinen Preis (Yost et al., 1962, S. 775). Wählte der/die Befragte die mathematisch betrachtet falsche Box, aber die Gewinnfarbe wurde trotzdem gezogen, konnte er/sie die Belohnung behalten, es gab jedoch keine mündliche Bestärkung (Yost et al., 1962, S. 775). In dem Fall, dass weder gezogene Farbe noch ausgewählte Schachtel richtig waren, waren von Yost et al. (1962, S. 775–776) weder ein Preis noch mündliches Lob vorgesehen.

Unter Versuchsmethode P wurde die Vorgangsweise von Piaget durch Yost et al. (1962, S. 774–775) modifiziert: In einer transparenten Plastischachtel wurden Spielmarken der Lieblingsfarbe und der beim Befragten am wenigsten beliebten Farbe in einem bestimmten

Verhältnis für das Kind sichtbar hineingelegt. Die Schachtel wurde durch Schütteln gemischt. Die Versuchsperson sollte dann angeben, welche Farbe bei einmaliger blinder Ziehung größere Gewinnchancen hatte (Yost et al., 1962, S. 774–775). Dies wurde durch Zeigen auf eine von zwei Spielmarke in den beiden Farben bewerkstelligt. Es gab keine Belohnungen und aufgrund des transparenten Behälters war es nicht nötig, die Spielmarken im Mischungsverhältnis aus der Schachtel vor dem Kind auszulegen (Yost et al., 1962, S. 774–775).

Die statistische Auswertung der Studie ergab folgende Ergebnisse:

Gruppe	Ergebnisse beim ersten Test	Ergebnisse beim zweiten Test
Gruppe P	Unter Bedingung P: 12	Unter Bedingung DM: 19
Gruppe DM	Unter Bedingung DM: 18	Unter Bedingung P: 18

Abbildung 5: Versuchsergebnisse zum Methodenvergleich (in Anlehnung an Yost et al., 1962, S. 778)

Die Ergebnisse sind in der obigen Tabelle (siehe Abbildung 5) dargestellt. Insgesamt konnte jede Versuchsperson, falls die Konzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchgehend korrekt angewandt wurden, 24 Punkte erreichen, wobei eine Punktezahl von zwölf Punkten ein Hinweis für eine Leistung auf Zufallsniveau war (Yost et al., 1962, S. 778).

Um die Hypothese zu testen, dass die Teilnehmenden mit Methode DM ein größeres Verständnis für Wahrscheinlichkeiten an den Tag legen als mit der Methode P, wurden zunächst nur die ersten Testungen P1 und DM1 verglichen (Yost et al., 1962, S. 779). Die Differenz zwischen diesen beiden Verteilungen stellte sich als hochsignifikant heraus. Wenn man jede Versuchsperson als ihre/seine eigene Kontrollgruppe auffasst, und die Differenz der Punktezahlen mit der Methode P und DM betrachtet, dann ergibt sich wieder insgesamt ein hochsignifikanter Unterschied (Yost et al., 1962, S. 779). Mit der „decision-making-technique“ DM sind also nach Yost et al. bei vier- bis fünfjährigen Kindern signifikant mehr richtige Antworten als mit der abgewandelten Piaget-Methode P feststellbar. Aus diesen Ergebnissen schlossen die Autorinnen der Studie, dass, mit nicht-verbalen Methoden und geeigneten experimentellen Kontrollen, sogar bei Vier- bzw. Fünfjährigen ein gewisses Verständnis für Wahrscheinlichkeiten erkennbar ist.

Der Median der Punktezahl erhöhte sich, wenn die Befragten zuerst den Test unter Versuchsbedingung P und danach den unter DM absolvierten (Yost et al., 1962, S. 779). Für jene Gruppe, in der die Reihenfolge umgekehrt war, änderte sich der Median aber nicht (Yost et al., 1962, S. 779). Dies deutet darauf hin, dass das im Test mit der Methode DM Gelernte in der danach stattfindenden Session mit der Methode P angewendet wurde. Ein weiterer Hinweis dafür, dass Kinder in diesem Alter bestimmte Konzepte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

erlernen können, war die Tatsache, dass „mental age“ (Yost et al., 1962, S. 779) und Punktezahl unter der Versuchsbedingung DM signifikant korreliert waren. Es ist also sogar bei Heranwachsenden im Alter von vier bis fünf Jahren ein Lernprozess erkennbar ist (Yost et al., 1962, S. 779). Da jedoch die Anzahl der Versuche pro Test zu klein war, war es in Rahmen dieser Studie nicht möglich (und auch nicht beabsichtigt), den Lernzuwachs innerhalb einer Test-Sitzung festzustellen, weil dafür nicht genug Fragen pro Test zur Verfügung standen (Yost et al., 1962, S. 779–780).

Diese Ergebnisse stellten die von Piaget und Inhelder (1975) vertretene Position, dass Kindern in diesem Alter kein Arbeiten mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff möglich sei, infrage. Außerdem zeigt diese Vergleichsstudie die Wichtigkeit der Verwendung von geeigneten experimentellen Kontrollen, um den Einfluss von Parametern wie Sprachkompetenz, Motivation, Farbvorlieben usw. zu reduzieren und zu einem möglichst aussagekräftigen Ergebnis zu gelangen. Kütting (1994, S. 96) schildert ebenfalls diese Untersuchung und macht folgende Anmerkungen dazu: Der Wahrscheinlichkeitsbegriff, um den es bei dieser Untersuchung von Yost et al. ging, entsprach nicht der von Piaget und Inhelder untersuchten quantitativen Laplace'schen Definition der Wahrscheinlichkeit, sondern einer (teils vergleichenden) intuitiven Einschätzung von Gewinnchancen (Kütting, 1994, S. 96).

Da die Versuchspersonen nur bei der Versuchsbedingung DM Preise erhielten, hat es bei diesen einen zusätzlichen positiven Effekt auf die Leistung der Probanden gegeben, der unter den Bedingungen bei P gefehlt hat (Kütting, 1994, S. 96).

Wenn Yost et al. das Buch von Piaget und Inhelder aus dem Jahr 1951 verwendet hätten, dann wäre ein Vergleich mit dem Versuch in Kapitel V (Piaget & Inhelder, 1975, S. 116–130) naheliegender gewesen, weil dieser dem Chancenvergleich unter der DM-Methode am ähnlichsten ist (Kütting, 1994, S. 96).

Eine Untersuchung von Goldberg (1966, S. 162), übernahm die „decision-making-technique“ von Yost et al., sah aber bei der abgewandelten Piaget'schen Methode (P) ebenfalls Belohnungen vor. Bei den Versuchspersonen dieser Studie handelte es sich um 32 Kinder (16 davon Mädchen) im Alter von vier bis fünf Jahren, die zu Themen der Wahrscheinlichkeitsrechnung befragt wurden.

Die Ergebnisse von Goldberg (1966) sind in Übereinstimmung mit jenen von Yost et al. (1962), weil sie zeigen, dass – je nach Bedingungen des Versuchs – bereits bei vier- bis fünfjährigen Schülerinnen und Schüler ein Wahrscheinlichkeitsbegriff vorhanden ist. Außerdem konnte Goldberg Folgendes feststellen: „[...] even when reinforcement conditions are equivalent, DM

elicits better performance than P [...] The present result demonstrates that the difference in reinforcement conditions alone would not account for the observed difference in performance between P and DM“ (Goldberg, 1966, S. 164). Bei Durchführung des Experiments mit der „decision-making-technique“ waren bei Goldberg signifikant mehr korrekte Lösungen erkennbar als mit der abgewandelten Methode von Piaget, aber die Unterschiede zwischen den Ergebnissen waren nicht so stark wie bei Yost et al. (1962). Im Rahmen einer Fehleranalyse stellte sich heraus, dass eine signifikante Anzahl falscher Antworten bei der DM-Methode durch Entscheidungen aufgrund der Anzahl und nicht des Anteils, bzw. durch Farbvorlieben bei der P-Methode, zustande kamen (Goldberg, 1966, S. 157).

4.2.2 Studie von Fischbein, Pampu und Manzat

Eine Untersuchung von Fischbein, Pampu und Manzat (1970) ließ Kinder unterschiedlichen Alters aus zwei Schachteln mit Murmeln in zwei verschiedenen Farben jene Schachtel auswählen, aus der ihrer Meinung nach mit einer größeren Wahrscheinlichkeit eine Murmel vorgegebener Farbe gezogen werden würde. Diese Studie hatte, unter anderem, folgende Ziele:

- die Entwicklung der präoperationalen, konkret-operationalen und formal-operationalen Phasen in Abhängigkeit vom Alter des Kindes zu erschließen;
- spontane Entscheidungen der Kinder, aber auch den Einfluss vorhergehender systematischer Unterweisungen zu studieren;
- mögliche Unterschiede zwischen den Geschlechtern zu untersuchen (Fischbein et al., 1970, S. 377–378).

Bei den insgesamt 180 Versuchspersonen handelte es sich um Vorschulkinder (Alter: fünf Jahre bis sechs Jahre und 4 Monate) sowie Schülerinnen und Schüler der dritten (Alter: neun bis zehn Jahre) und sechsten Schulstufe (Alter: zwölf Jahre und vier Monate bis 13 Jahre und sieben Monate) aus Bukarest (Fischbein et al., 1970, S. 378). Diese drei Gruppen mit jeweils 60 Kindern, die nur Noten im Bereich von sechs bis zehn (wobei „zehn“ hier die höchste Note ist und Noten kleiner als „sechs“ mit „Nicht Genügend“ gleichzusetzen sind) aufzuweisen hatten, bestanden zu gleichen Anteilen aus Mädchen und Buben. Jede Altersklasse wurde außerdem noch in drei weitere Versuchsgruppen I₁, I₂ und I₃ zu je 20 Kindern aufgeteilt, die vor der Befragung unterschiedliche Instruktionen erhielten (Fischbein et al., 1970, S. 378).

Jedes der Kinder hatte 18 Aufgaben (siehe Abbildung 6) alleine zu lösen: Es wurden ihm/ihr zwei Urnen mit teils unterschiedlichen (dem Kind bekannten) Mischungsverhältnissen weißer und schwarzer Kugeln präsentiert (Fischbein et al., 1970, S. 378–380). Die Befragten sollten jene Urne auswählen, für die, bei einer Ziehung, die Chance eine weiße bzw. schwarze Kugel

zu ziehen, größer sein würde (Fischbein et al., 1970, S. 378–380). Eine weitere Antwortmöglichkeit bestand darin, dass die Gewinnchancen für beide Schachteln gleich sind. In der Tabelle in Abbildung 6 sind die Mischungsverhältnisse für jede Aufgabe angeführt, wobei „w/s“ das Mischungsverhältnis von weißen zu schwarzen Murmeln für eine Urne bezeichnet (Fischbein et al., 1970, S. 378–380). Bei der Hälfte einer 20er-Gruppe war die Gewinnfarbe jeweils schwarz, bei der anderen weiß, um den Einfluss der Lieblingsfarbe herauszufiltern (Fischbein et al., 1970, S. 378–380). Die Aufgaben wurden von jedem Kind in völlig zufälliger Reihenfolge bearbeitet (Fischbein et al., 1970, S. 378–380).

	Aufgabe	Mischungsverhältnisse: Urne1 (w/s) : Urne 2 (w/s)	Aufgabe	Mischungsverhältnisse: Urne 1 (w/s) : Urne 2 (w/s)
C ₁	1	1/2 : 5/2	2	2/4 : 10/4
	3	3/1 : 3/2	4	6/2 : 6/4
	5	2/2 : 6/3	6	4/4 : 12/6
C ₂	7	6/2 : 10/5	8	12/4 : 20/10
	9	2/1 : 5/2	10	4/2 : 10/4
	11	4/2 : 5/3	12	8/4 : 10/6
C ₃	13	2/4 : 1/2	14	4/8 : 2/4
	15	3/1 : 6/2	16	6/2 : 12/4
	17	4/2 : 2/1	18	8/4 : 4/2

Abbildung 6: Mischungsverhältnisse (in Anlehnung an Fischbein et al., 1970, S. 379)

Die Aufgaben lassen sich in drei Fragenkategorien C₁, C₂ und C₃ einteilen: Bei C₁ wurde die gleiche Anzahl einer Farbe oder in einer Urne gleich viele weiße wie schwarze Kugeln gewählt, während sich in der Kategorie C₂ beliebige und bei C₃ gleiche Mischungsverhältnisse finden (Fischbein et al., 1970, S. 379–380).

Den Kindern in Gruppe I₁ wurde das Grundprinzip des Versuches erläutert und anhand von Beispielen aufgezeigt, welche Antwortmöglichkeiten zur Auswahl stehen (rechte oder linke Urne im Vorteil oder gleiche Chancen für beide Urnen) (Fischbein et al., 1970, S. 379–381).

Die Teilnehmenden in Versuchsgruppe I₂ erhielten die gleiche Erklärung wie bei I₁ und eine 30- bis 60-minütige individuelle Unterweisung: Es wurde (ohne eine Regel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten anzugeben) erläutert, dass nicht nur die Anzahl der Murmeln in der Gewinnfarbe, sondern auch die Gesamtzahl an Murmeln in der Urne ausschlaggebend ist (Fischbein et al., 1970, S. 379–381). Den Kindern wurde auch eine Gruppierungstechnik beigebracht: Die Mischungsverhältnisse 4w/1s und 8w/2s sind gleichwertig, weil man sie zu

4w/1s und 4w/1s + 4w/1s umformen kann (Fischbein et al., 1970, S. 379–381). Dadurch kann man z. B. bei 4w/1s und 9w/2s durch Gruppieren den Überschuss in der zweiten Urne erkennbar machen. In einem kurzen Experiment wurde gezeigt, dass z. B. 4w/1s und 8w/2s äquivalent sind, da bei 20 Ziehungen aus jeder Urne in etwa viermal so viele weiße wie schwarze Kugeln gezogen wurden (Fischbein et al., 1970, S. 379–381).

Für die Befragten aus Gruppe I₃ wurde zusätzlich zu den Erklärungen aus I₂ die Gruppierungstechnik durch weitere Beispiele veranschaulicht (Fischbein et al., 1970, S. 379–381).

	I ₁			I ₂			I ₃		
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₁	C ₂	C ₃	C ₁	C ₂	C ₃
Vorschulkinder	4,25	2,70	1,00	4,35	2,70	2,10	3,90	2,80	1,75
dritte Klasse	5,05	2,65	2,95	5,35	4,00	4,50	5,45	3,50	4,35
sechste Klasse	5,65	4,55	4,90	5,85	5,35	5,65	5,70	5,65	5,90

Abbildung 7: Ergebnisse (in %) zu Fischbein et al. (in Anlehnung an Fischbein et al., 1970, S. 382)

In Abbildung 7 ist die durchschnittliche Anzahl richtiger Antworten pro Fragenkategorie C_i (i = 1, 2, 3) mit je sechs Fragen, d. h. maximal sechs korrekte Antworten, dargestellt. Da sich gezeigt hat, dass der Aspekt des Geschlechts keinen signifikanten Einfluss ausübt, wurde er in dieser Tabelle nicht mehr berücksichtigt (Fischbein et al., 1970, S. 381). Die Versuchspersonen wurden außerdem dazu aufgefordert, ihre jeweiligen Entscheidungen zu begründen und diese Erklärungen wurde in drei Kategorien eingeteilt: (1) Vergleich der Anzahl günstiger Kugeln in der linken und rechten Urne, (2) Berücksichtigung der relativen Häufigkeiten der günstigen Farbe in beiden Urnen ohne explizite Quantifizierung und (3) ähnlich zu (2), aber *mit* expliziter Quantifizierung (Fischbein et al., 1970, S. 385–386). Aus der Statistik der mittleren Anzahl korrekter Antworten und deren Begründungen konnten folgenden Ergebnisse ermittelt werden (Fischbein et al., 1970, S. 386–387):

- Die Anzahl korrekt gelöster Aufgaben nahm mit dem Alter signifikant zu.
- Die Anzahl richtiger Antworten stieg mit dem Ausmaß der Instruktion.
- Bei den Drittklässlern bewirkten die Unterweisungsformen I₂ und I₃ im Gegensatz zu I₁ einen erheblichen Zuwachs an korrekten Lösungen. Dies ließ sich nicht bei den Vorschulkindern oder bei den Schülerinnen und Schülern der 6. Schulstufe feststellen.
- Bei den Vorschulkindern war die Begründung (1) vorherrschend, während bei den Kindern aus der 6. Klasse die Herangehensweise (3) dominierte. Der spontane Lösungsansatz (ohne Unterweisung) der Befragten aus der 3. Klasse ähnelte dem der

Vorschulkinder. Bei den Instruktionsformen I_2 und I_3 vollzieht sich bei den Drittklässlern ein signifikanter Wechsel zum Lösungsansatz (3) mittels quantifizierter relativer Häufigkeiten.

Als wesentliches Ergebnis ist festzuhalten, dass bereits Kinder im Alter von neun bis zehn Jahren, also jene auf der Primarstufe, nach maximal einstündiger Unterweisung imstande sind, Wahrscheinlichkeitsvergleiche erfolgreich mit Hilfe eines quantifizierten Wahrscheinlichkeitsbegriffs durchzuführen, obwohl sie vor der Unterrichtsphase nicht dazu fähig waren (Fischbein et al., 1970, S. 387). Fischbein et al. (1970, S. 388) empfehlen aufgrund dieses Ergebnisses, dass der Stochastikunterricht bereits in der Primarstufe beginnen sollte.

4.2.3 Weitere Studien

Untersuchung von Davies

Eine Studie von Davies (1965) verwendete verbale und nonverbale Tests, um die Entstehung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bei Heranwachsenden zu erforschen. Davies befragte 112 Kinder von drei bis neun Jahren, die in sieben Altersklassen zu je 16 Versuchspersonen eingeteilt wurden. Ein eigens entworfener „two-choice lever-pressing“ Apparat ermöglichte die nonverbale Testung. Diese Untersuchung sollte unter anderem der Frage nachgehen, wie sich verbales und nonverbales Verständnis von Wahrscheinlichkeiten bei Kindern zeitlich entwickeln.

Alter in Jahren	bei keinem Test erfolgreich	beim nonverbalen Test erfolgreich	Bei beiden Tests erfolgreich
3	50	50	0
4	31	69	0
5	19	81	31
6	0	100	31
7	0	100	75
8	0	100	88
9	0	100	100

Abbildung 8: Ergebnisse (in %) verbaler und nonverbaler Tests (in Anlehnung an Davies, 1965, S. 785)

Die Tabelle in Abbildung 8 enthält die Anzahl der Heranwachsenden, die die jeweiligen Tests erfolgreich absolvieren konnten. Davies (1965) konnte feststellen, dass Kinder, die beim verbalen Test erfolgreich abschnitten, dies auch beim nonverbalen bewerkstelligten. Da die Anzahl derjenigen, die bei beiden Tests versagten, mit zunehmendem Alter abnahm, schloss Davies (1965, S. 784–786), dass das zunehmende Verständnis für Wahrscheinlichkeiten ein

entwicklungsbedingter Prozess ist. Außerdem ist erkennbar, dass mit zunehmendem Alter eine immer größere Anzahl von Versuchspersonen den nonverbalen Test bestanden, wobei bereits Kinder im Alter von sechs Jahren die volle Punktezahl erreichten (Davies, 1965, S. 784–786). Des Weiteren, zeigt diese Studie, dass bei den Heranwachsenden ein korrekter nonverbaler Umgang mit Wahrscheinlichkeiten auftritt, bevor sie imstande sind, sprachlich erfolgreich mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zu arbeiten (Davies, 1965, S. 786). In Bezug auf die präoperationale Entwicklungsphase von Piaget, im Alter von ca. drei bis sechs Jahren, hält Davies (1965, S. 786) fest, dass 48, also ca. 75 %, der 64 Kinder in dieser Altersklasse den nonverbalen Test bestanden, wobei zehn davon auch am verbalen Test erfolgreich teilnahmen. Nach Davies (1965, S. 786) ist es möglich, dass diese zehn Kinder frühzeitig von der präoperationalen in die konkret-operationale Phase übergegangen sind. Nach Piagets Erklärungen zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, folgert Davies (1965, S. 786), dass sich jene Kinder dieser Altersklasse, die den verbalen Test nicht bestanden haben, also 54 der 64 drei- bis sechsjährigen Kinder, im präoperationalen Entwicklungsstadium befinden. Von diesen 54 Heranwachsenden bestanden 38 bzw. ca. 70 % ausschließlich den nonverbalen Test, während die restlichen dieser 54 Kinder keinen der beiden Tests bestanden. Die Ergebnisse dieser Untersuchung deuten also darauf hin, dass ungefähr 70 % der Kinder aus der präoperationalen Phase nonverbal mit Wahrscheinlichkeiten umgehen können (Davies, 1965, S. 786).

Untersuchung von Kipman

Eine vom ehemaligen Unterrichtsministerium bm:ukk finanzierte Untersuchung von Kipman (2014, S. 7, 9) setzte sich mit dem stochastischen Wissen und Können von Kindern aus der Primarstufe und Sekundarstufe I und die Auswirkungen handlungsorientierter Unterweisung auf diesem Gebiet auseinander. Bei den Versuchspersonen handelte es sich um ca. 1000 Schülerinnen und Schüler (617 davon aus der Grundschule) aus Österreich, Deutschland, Ungarn und der Schweiz, die vor und nach dem Stochastikunterricht getestet wurden (Kipman, 2014, S. 7). Die Fragen dieser Tests sollten ermitteln, ob die Lernenden imstande waren, Tabellen und Grafiken zu deuten, Zufallsversuche und Risiken einzuschätzen und kombinatorische Überlegungen anzustellen (Kipman, 2014, S. 8). Die Versuchspersonen wurden in drei Gruppen eingeteilt: zwei Interventionsgruppen, von denen eine mit Arbeitsblättern und die andere – im Hinblick auf die gleichen Lernziele – handlungsorientiert unterrichtet wurden, und eine Kontrollgruppe, die gar keinen Stochastikunterricht erhielt (Kipman, 2014, S. 11). Für die handlungsorientierte Unterrichtsreihe wurde ein Koffer mit Materialien für stochastische Schülerexperimente entwickelt (Kipman, 2014, S. 11).

Die statistische Auswertung der Ergebnisse zeigte, dass beim Test vor der Unterrichtsreihe keine signifikanten Unterschiede zwischen den Versuchsgruppen festgestellt werden konnten (Kipman, 2014, S. 20). Des Weiteren, war eine signifikante Leistungssteigerung in beiden Interventionsgruppen erkennbar (Kipman, 2014, S. 20), insbesondere zeigte sich, dass Schülerinnen und Schüler, die handlungsorientierten Unterricht erhielten, in allen Bereichen der Stochastik bessere Ergebnisse erzielten als jene, die mittels Arbeitsblättern unterwiesen wurden (Kipman, 2014, S. 20). Diese Verbesserungen waren bei jüngeren Kindern stärker als bei älteren (Kipman, 2014, S. 20). Außerdem berichteten über 90 % der Lehrkräfte, die den handlungsorientierten Unterricht durchführten, dass die Schülerinnen und Schüler mehr Freude am Unterricht hatten, eigene Aufgaben erfanden und vermehrt Fragen stellten (Kipman, 2014, S. 21). Ähnliche Rückmeldungen gab es nur von 50 % der mit Arbeitsblättern Lehrenden (Kipman, 2014, S. 21). Kipman schließt aus diesen Ergebnissen, dass Stochastikunterricht bereits ab der Primarstufe sinnvoll ist: „Handlungsorientierter Unterricht in Stochastik führt schon im Grundschulalter zu deutlichen Lernzuwächsen und bereitet den Kindern zudem wesentlich mehr Freude als der Unterricht mit Arbeitsblättern“ (Kipman, 2014, S. 22). Geeignete Unterrichtsmaterialien sollten die Schülerinnen und Schülern dabei unterstützen, Zufallsphänomene und Fragen der Kombinatorik auf der haptischen Ebene kennenzulernen (Kipman, 2014, S. 22).

4.3 Fazit

Obwohl Piaget und Inhelder (1975) die Entstehung des Zufallsbegriffs im siebten und die des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im elften Lebensjahr vermuteten, führten Studien unter genauer kontrollierten Bedingungen zu dem Schluss, dass Kinder schon auf der Primarstufe Verhalten an den Tag legen, das den Wahrscheinlichkeits- bzw. Zufallsbegriff voraussetzt (Davies, 1965; Goldberg, 1966; Yost et al., 1962). Außerdem wurde nachgewiesen, dass auch Heranwachsende in dieser Altersgruppe bereits einen Lernzuwachs vor allem durch handlungsorientierten Stochastikunterricht erfahren können (Fischbein et al., 1970; Kipman, 2014).

5 Stochastikunterricht zur Bewältigung von Fehlvorstellungen

5.1 Fehlvorstellungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Fehlurteile bei probabilistischen Fragestellungen sind ein Forschungsgebiet, zu dessen Erschließung sowohl Mathematikdidaktiker/innen als auch kognitive Psycholog/innen seit den 50er-Jahren beitragen. Zur Interpretation der Resultate dieser Untersuchungen dienen theoretische Modelle wie das bereits angeführte Modell der kognitiven Entwicklung von Piaget (siehe Abschnitt 4.1) oder das Modell der Urteilsheuristiken der Psychologen David Kahneman und Amos Tversky, auf das in diesem Kapitel genauer eingegangen wird. Während vonseiten der Psychologie vor allem das Lernverhalten und die Entscheidungsfindung von Menschen angesichts von Situationen der Ungewissheit im Mittelpunkt stehen, interessierte sich die Mathematikdidaktik für das Lernen und Lehren von Wahrscheinlichkeitsrechnung und erhielt klare Argumente für deren frühe und umfangreiche Einbettung in die Lehrpläne (Jones et al., 2007, S. 910).

Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, auf alle Fehlvorstellungen, die bei Schülerinnen und Schülern auftreten können, näher einzugehen. Allerdings werden nach einer Einführung des theoretischen Hintergrunds zum Modell der Urteilsheuristiken einige davon genauer unter die Lupe genommen. Es werden dabei Ergebnisse empirischer Forschung angeführt, die zeigen, dass sich diese Fehlvorstellungen schon relativ früh bilden, sodass sie in der Sekundarstufe II – also zu der Zeit, ab der in Österreich der Unterricht zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung erst beginnt – bereits in der Denkweise vieler Schülerinnen und Schüler verankert sind. Nach einem kürzeren Ausblick auf weitere häufig auftretende Fehlvorstellungen, werden auch Kritikpunkte am Modell der Heuristiken diskutiert, um eine differenzierte Interpretation dieser Forschungsergebnisse sicherzustellen. In einem weiteren Schritt wird in diesem Abschnitt mit Hilfe von Forschungsergebnissen gezeigt, dass früher Stochastikunterricht das Auftreten von Fehlvorstellungen deutlich reduzieren kann.

Als zusätzliche Information zu den Untersuchungen, die in diesem Kapitel angeführt werden, ist noch zu nennen, dass fast alle Teilnehmenden wenige bis gar keine Vorkenntnisse auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorzuweisen hatten, als diese Studien vor Beginn der 90er-Jahre durchgeführt wurden. Der Grund dafür liegt darin, dass im englischsprachigen Raum die ersten Lehrpläne, die die Stochastik als eigenständigen, wesentlichen Bereich der Mathematik enthielten, ungefähr um 1990 eingeführt wurden (Jones et al., 2007, S. 911). Falls

es sich bei den Befragten um Personen mit umfangreichen stochastischen Kenntnissen handeln sollte, so wird dies aus der Beschreibung der Studie erkennbar sein.

5.1.1 Modell der Urteilsheuristiken

In der empirischen Forschung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich bei speziellen Fragestellungen, die probabilistische Urteile erfordern, typische Fehler nachweisen, die dadurch erklärt werden können, dass sich die Befragten oft auf sogenannte „(Urteils-) Heuristiken“ oder „Fehlvorstellungen“ stützen, statt die Wahrscheinlichkeitsrechnung mathematisch korrekt anzuwenden (Biehler & Engel, 2015a, S. 233). Die meisten Fehlvorstellungen, die für die Wahrscheinlichkeitsrechnung relevant sind, werden in erster Linie durch das theoretische Modell der Heuristiken erklärt, das aus der kognitiven Psychologie stammt und maßgeblich durch die Forschungsarbeit der Psychologen Daniel Kahneman und Amos Tversky geprägt wurde.

In einigen ihrer frühen Veröffentlichungen zu diesen Themen aus den Jahren 1972, 1973 und 1974 definieren sie – unter anderem – die Bezeichnungen „Repräsentativitäts-“ und „Verfügbarkeitsheuristik“, aber nicht den Begriff der „(Urteils-)Heuristik“ selbst. Dieser wird dadurch umschrieben, dass seine Anwendungen dargestellt und Vermutungen über dessen Zweck angestellt werden. Die eigentliche Definition folgt aber erst in ihrer Publikation aus dem Jahr 1983: Der Ausdruck „Urteilsheuristik“ entspricht einer Strategie, die sich – bewusst oder unbewusst – auf eine intuitive Einschätzung stützt, um ein Urteil zu fällen oder eine Vorhersage zu machen. Ein Merkmal von Heuristiken ist, dass andere Erwägungen weitgehend vernachlässigt werden (Tversky & Kahneman, 1983, S. 294). Eine solche intuitive Einschätzung könnte – unter anderem – darin bestehen, ein Ereignis als umso wahrscheinlicher zu beurteilen, je leichter sich Beispiele seines Eintreffens in Erinnerung rufen lassen. Wenn es einer Person nicht schwerfällt, sich an Bekanntschaften zu erinnern, die z. B. an Darmkrebs leiden, könnte sie das Risiko einer solchen Erkrankung als besonders hoch einschätzen, obwohl sie dafür keine objektive Begründung hat.

Kahneman und Tversky (1972, S. 451) nehmen an, dass Urteilsheuristiken vor allem dann eine wichtige Rolle spielen, wenn das zu lösende Problem komplex erscheint oder es gar keine „korrekte“ Antwort gibt. Allerdings kämen sie nicht nur deswegen zur Anwendung, weil sie die kognitive Anstrengung reduzieren sollen, sondern auch deswegen, weil sie öfter zu erfolgreichen Beurteilungen als zu Fehleinschätzungen führen würden und dadurch eine gewisse Erfolgsquote aufzuweisen hätten (Kahneman & Tversky, 1972, S. 452).

5.1.2 Repräsentativitätsheuristik

Kahneman und Tversky (1972, S. 431) definieren die Heuristik der Repräsentativität als Fehlvorstellung, die dazu führt, dass Personen die Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses, wie z. B. der Ziehung einer bestimmten Stichprobe, danach beurteilen, wie (i) sehr es in seinen wesentlichen Eigenschaften der Gesamtpopulation ähnelt, und (ii) es die auffälligen Merkmale jenes Prozesses widerspiegelt, durch den es entstanden ist. Nach dieser Denkweise, wäre also ein Ereignis A wahrscheinlicher als ein Ereignis B, wenn A die Gesamtpopulation besser repräsentiert als B (Kahneman & Tversky, 1972, S. 431).

Diese Denkweise kann sich in der Annahme äußern, dass bereits Stichproben von geringem Umfang der Gesamtpopulation ähneln, und es wird „dabei oft die Zufallsvariabilität besonders bei kleinen Stichproben“ vernachlässigt (Biehler & Engel, 2015a, S. 233).

Beim mehrmaligen Münzwurf, mit den beiden möglichen Ergebnissen „K“ für Kopf und „Z“ für Zahl, wird beispielsweise eine offensichtlich regelmäßige Abfolge wie KZKZKZKZ im Vergleich zu einer Abfolge ZZKKZZKK von Schülerinnen und Schülern als weniger wahrscheinlich eingeschätzt (Tune 1964; Wagenaar 1970 in: Kahneman & Tversky, 1972, S. 434). Ein Grund dafür könnte sein, dass solche systematischen Muster weniger zufällig erscheinen und damit, intuitiv betrachtet, den Zufall – als den Entstehungsprozess dieser Stichprobe – nicht so gut widerspiegelt (siehe Aspekt (ii) oben) (Kahneman & Tversky, 1972, S. 434).

Die Ergebnisse der folgenden Untersuchung menschlicher Intuitionen zum Begriff des Zufalls von Kahneman und Tversky (1972) lassen sich mit Hilfe der Repräsentativitätsheuristik erklären. Es wurden 1500 Personen befragt, von denen ein Teil Schülerinnen und Schüler von 15 bis 18 Jahren aus der 10., 11. und 12. Klasse israelischer High Schools und ein zweiter Teil Undergraduate-Studierende an einer amerikanischen Universität im Alter von 20 bis 25 Jahren ausmachten. Die Untersuchung wurde in Form von Fragebögen durchgeführt, die pro Person zwei bis vier Fragen enthielten und für deren Bearbeitung zirka zwei Minuten benötigt wurden. Vor der Durchführung der Befragung wurden den Teilnehmenden der Studie die Fragen mündlich erklärt. Die meisten Fragen, die an die Schülerinnen und Schüler gerichtet wurden, wurden auch den Studierenden gestellt. Die Ergebnisse der Befragung dieser beiden Gruppen waren fast ununterscheidbar (Kahneman & Tversky, 1972, S. 431–432).

Folgende Frage war Teil dieser Untersuchung („G“ steht dabei für die Geburt eines Mädchens und „B“ für die eines Jungen.) (Kahneman & Tversky, 1972, S. 432):

All families of six children in a city were surveyed. In 72 families the exact order of births of boys and girls was GBGBBG.

What is your estimate of the number of families surveyed in which the exact order of births was BGBBBB?

75 von 92 Schülerinnen und Schülern schätzten die Geburtenfolge BGBBBB als weniger wahrscheinlich ein, obwohl beide Folgen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Jene Geburtenfolge, die fünf Burschen und ein Mädchen enthält, erscheint weniger repräsentativ für die Gesamtpopulation (Kahneman & Tversky, 1972, S. 432).

Als die Schülerinnen und Schüler aufgefordert wurden, die relative Häufigkeit der Folgen BBBGGG und GBBGBG zu vergleichen, schätzten sie die erste Geburtenfolge signifikant als unwahrscheinlicher ein. Dies zeigt nach Kahneman und Tversky, dass nicht nur die prognostizierte relative Häufigkeit in der Grundgesamtheit, sondern auch die „Unregelmäßigkeit“ der Reihenfolge in der Stichprobe ausschlaggebend für die Einschätzung ihrer Repräsentativität ist (Kahneman & Tversky, 1972, S. 432).

Ebenfalls im Rahmen ihrer weiter oben beschriebenen Untersuchung (Kahneman & Tversky, 1972) wurden Schülerinnen und Schüler im Alter von 15 bis 18 Jahren gefragt, welche der folgenden Verteilungen (siehe Abbildung 9) häufiger als Ergebnis auftreten würde, wenn in jeder Spielrunde 20 Murmeln zufällig auf fünf Kinder aufgeteilt werden – unter der Voraussetzung, dass dieses Spiel viele Runden hat.

	Verteilung I	Verteilung II
Alan	4	4
Ben	4	4
Carl	5	4
Dan	4	4
Ed	3	4

Abbildung 9: Repräsentativität - Verteilung von Murmeln (in Anlehnung an Kahneman & Tversky, 1972, S. 434)

36 von 52 Schülerinnen und Schüler waren der Meinung, dass Verteilung I häufiger auftreten würde als Verteilung II, obwohl mathematisch gesehen Verteilung II, bei vielen Wiederholungen, aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen öfters auftreten sollte. Allerdings erscheint Verteilung II zu regelmäßig, um repräsentatives Ergebnis eines Zufallsprozesses zu sein (Kahneman & Tversky, 1972, S. 434).

Viele Lernende erwarten intuitiv, dass der Zufall zwar unvorhersehbar, aber im Grunde fair ist, sodass z. B. auch kurze Folgen von Münzwürfen in etwa die gleiche Anzahl von Kopf bzw.

Zahl aufweisen. Kahneman und Tversky definieren die hier auftretende, sogenannte *lokale Repräsentativität* als die Überzeugung vom „*law of small numbers*“, d. h. die irrtümliche Idee, dass das Gesetz der großen Zahlen – ohne weitere Einschränkungen – auch für Stichproben von kleinem Umfang gültig sei. Eine dem Prinzip der lokalen Repräsentativität entsprechende Stichprobe weicht jedoch systematisch von einer tatsächlich zufällig generierten Stichprobe ab: Sie enthält zu viele Abwechslungen unterschiedlicher Versuchsausgänge und zu kurze Abfolgen mit dem gleichen Wert. Die Heuristik der lokalen Repräsentativität äußert sich z. B. auch als „*gambler's fallacy*“ bzw. „*negative-recency effect*“, also in der Annahme, dass auf eine lange Abfolge mit dem gleichen Versuchsausgang, der andere Versuchsausgang folgen muss, damit das Gleichgewicht wiederhergestellt wird (Kahneman & Tversky, 1972, S. 435).

Die Heuristik der (lokalen) Repräsentativität manifestierte sich auch bei der Beantwortung folgender Fragestellung: In einer Stadt gibt es zwei Spitäler, ein kleines und ein größeres, mit jeweils ca. 15 bzw. 45 Geburten pro Tag. Es wird angenommen, dass mit ungefähr 50 %-iger Wahrscheinlichkeit ein Bub geboren wird, wobei der genaue Prozentsatz von Tag zu Tag variiert. Für den Zeitraum eines Jahres zeichnet jedes Spital die Tage auf, an denen mehr als 60 % der Neugeborenen Knaben waren. Es ist zu schätzen, welches Spital mehr solche Tage registriert. Die Undergraduate-Studierenden sollten diese Frage im Multiple-Choice-Format beantworten, indem sie ankreuzten, welches der beiden Krankenhäuser mehr solche Tage verzeichnen oder ob die Anzahl der Einträge mit überdurchschnittlich vielen Jungengeburten in den beiden Geburtsstationen ungefähr gleich sein sollten (Kahneman & Tversky, 1972, S. 443–444). Die Mehrheit, 53 von 95 der Befragten, hielt die Anzahl der Tage, an denen mehr als 60 % der Neugeborenen Jungen sind, bei beiden Spitälern für ungefähr gleich groß (Tversky & Kahneman, 1974, S. 1125). Da die Varianz in einer Stichprobe mit der Größe des Stichprobenumfangs abnimmt, sollte es leicht sein, zu erkennen, dass eher im kleinen Spital mehr Tage auftreten sollten, an denen mehr als 60 % Neugeborene männlich sind. Kahneman und Tversky folgerten, dass im Sinne des „*law of small numbers*“ von den meisten Schülerinnen und Schülern angenommen wird, dass das Gesetz der großen Zahlen im gleichen Ausmaß sowohl für kleine als auch für große Stichproben gilt (Kahneman & Tversky, 1972, S. 443–444).

5.1.3 Verfügbarkeitsheuristik

Die Repräsentativität eines Ereignisses ist nicht die einzige Fehlvorstellung, derer sich Menschen bedienen, um zufällige Ereignisse kognitiv zu erschließen. Eine weitere solche Heuristik wurde von Kahneman und Tversky (1972) als Verfügbarkeit identifiziert. Diese

Urteilsheuristik geht von der Annahme aus, dass ein Ereignis umso wahrscheinlicher ist, desto leichter man sich Fälle seines Eintreffens in Erinnerung rufen bzw. vorstellen kann. Es werden also die Anzahl der Beispiele, die einem zum betreffenden Ereignis einfallen, und die Leichtigkeit, mit der man sich diese Beispiele ins Gedächtnis rufen kann, als wesentliche Hinweise bei der Beurteilung seiner Wahrscheinlichkeit bzw. Häufigkeit verwendet (Kahneman & Tversky, 1972, S. 451).

Ein prägnantes Beispiel für diese Denkweise liefert die Frage, ob es im Englischen mehr Wörter (aus mindestens drei Buchstaben) gibt, die mit dem Buchstaben „k“ beginnen oder solche, bei denen dieser Buchstabe an dritter Stelle steht. Nach Kahneman und Tversky versuchen die Befragten oft, sich an Wörter, die mit „k“ beginnen, wie z. B. „key“, und an solche, bei denen „k“ an dritter Stelle auftritt, wie beispielsweise „like“, zu erinnern. Da es leichter ist, sich Wörter in Erinnerung zu rufen, die mit „k“ beginnen, schließt die Mehrheit der Menschen dann, dass solche Wörter häufiger auftreten, obwohl es im Englischen gerade umgekehrt ist (Kahneman & Tversky, 1972, S. 451).

Kahneman und Tversky (Tversky & Kahneman, 1973, S. 213) stellten den Befragten ihrer Untersuchung unter anderem folgende Frage: Gibt es mehr Pfade im Gitter A oder im Gitter B und wie viele gibt es jeweils (siehe Abbildung 10)?

Ein „Pfad“ (siehe z. B. gestrichelte Linie in Abbildung 11) wurde bei dieser Frage als Abfolge von Strecken definiert, die in der ersten Zeile beginnen, durch jede Zeile verlaufen und in der letzten Zeile enden, wobei immer nur genau ein Kreuz aus jeder Zeile mit genau einem Kreuz der nächsten Zeile verbunden wird (Tversky & Kahneman, 1973, S. 213).

Gitter A	Gitter B
xxxxxxxx	xx
xxxxxxxx	xx
xxxxxxxx	xx
	xx
	xx
	xx
	xx
	xx
	xx



Abbildung 11: Beispiel für einen Pfad im Gitter (in Anlehnung an Tversky & Kahneman, 1973, S. 213)

Abbildung 10: Verfügbarkeit – mögliche Pfade in zwei Gittern (in Anlehnung an Tversky & Kahneman, 1973, S. 213)

46 von 54 der Befragten antworteten, dass sich im Gitter A mehr Pfade finden lassen, obwohl es eigentlich in beiden Strukturen gleich viele, nämlich $8^3 = 2^9 = 512$, Pfade gibt. Die Autoren der Studie begründen das Auftreten dieses Fehltrails mit der erhöhten Verfügbarkeit der Pfade in Gitter A. Insbesondere nennen sie mehrere Arten, durch die sich diese „availability“ äußert (Tversky & Kahneman, 1973, S. 213):

- Struktur A hat acht Spalten, während B nur zwei aufweisen kann. Dies spielt deswegen eine Rolle, weil die Pfade entlang einer Spalte besonders einfach zu bilden sind.
- Unter solchen Pfaden, die zwischen den Spalten wechseln, sind jene in A schwerer zu verwechseln: Zwei Pfade im Gitter A haben im Mittel nur ein Achtel ihrer Elemente gemeinsam, während jene in B durchschnittlich die Hälfte ihrer Elemente gemeinsam haben.
- Da die Pfade in Struktur A kürzer als jene in B sind, ist es leichter, sie sich bildlich vorzustellen.

Shaughnessy (1977, S. 312–313) konnte dieses Ergebnis mit einer ähnlich formulierten Frage replizieren.

Die Versuchspersonen der Studie von Tversky und Kahneman (1974, S. 1127–1128) wurden auch aufgefordert, aus einer Gruppe von zehn Personen kleinere Gruppen mit jeweils k Mitgliedern zu bilden. Sie sollten angeben, wie viele unterschiedliche Gruppen mit k Mitgliedern es gibt, wenn $2 \leq k \leq 8$ (Tversky & Kahneman, 1974, S. 1127).

Der Median der Schätzungen für die Zweiergruppen lag bei einer Anzahl von 70, jener für die Achtergruppen bei 20, obwohl es mathematisch betrachtet gleich viele solcher Gruppen gibt: Jede Gruppe mit zwei Mitgliedern legt nämlich stets auch eine Gruppe mit $10 - 2 = 8$ Nicht-Mitgliedern fest (Tversky & Kahneman, 1974, S. 1127–1128).

Laut Tversky und Kahneman (1974, S. 1128) könnten folgende Gründe für die bessere Verfügbarkeit der Zweiergruppen sprechen (Tversky & Kahneman, 1974, S. 1128) (Kütting, 1994, S. 84):

- Zweiergruppen kann man sich gedanklich leichter vorstellen als Achtergruppen.
- Eine Zehnergruppe lässt sich z. B. leicht in fünf disjunkte Zweiergruppen aufteilen, während man nur eine einzige disjunkte Achtergruppe daraus bilden kann. Die Achtergruppen könnten „weniger unterschiedlich“ erscheinen, weil bei je zwei Achtergruppen stets sechs Mitglieder gleich sind.

5.1.4 Zusammenstellung der häufigsten Fehlvorstellungen

Da es den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, alle Urteilsheuristiken, die im Stochastikunterricht auftreten können, näher zu untersuchen, sollen hier die gängigsten Fehlvorstellungen im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammengefasst werden. Die meisten davon werden von Biehler und Engel (Biehler & Engel, 2015a, S. 233–235) in ihrem Übersichtsartikel angeführt, während andere Beschreibungen den Publikationen anderer Forscher entnommen sind.

- Repräsentativität: siehe Abschnitt 5.1.2
- Verfügbarkeit: siehe Abschnitt 5.1.3
- Gleichverteilungsverzerrung bzw. „equiprobability bias“:

Denkweise, nach der bei einem Zufallsexperiment prinzipiell alle Ergebnisse als gleichwahrscheinlich angesehen werden (Lecoutre, 1992, S. 557, 564).

- Ergebnisorientierung bzw. „outcome approach“:

Bei Fragen zur Wahrscheinlichkeit eines ungewissen Ereignisses geben manche Personen einen einzigen Versuchsausgang zur Antwort, der von einer deterministischen Perspektive aus als sicher betrachtet wird. Wenn jemand z. B. gefragt wird, was die Aussage bedeutet, dass es am nächsten Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % schneien könnte, antwortet die Person, dass es am Tag darauf schneien wird (Konold, 1989, S. 61, 63, 68).

- Fehlvorstellung bezüglich bedingter Wahrscheinlichkeiten:

Bei dieser Urteilsheuristik werden bedingendes und bedingtes Ereignis verwechselt, und es wird nicht zwischen kausaler und stochastischer Abhängigkeit unterschieden (Falk, 1979, S. 65–66).

- Fehlvorstellung bzgl. synchroner und diachroner Situationen:

Hierbei handelt sich um eine Heuristik, bei der manche Menschen in gleichzeitig bzw. hintereinander ausgeführten – synchronen bzw. diachronen – Zufallsexperimenten nicht die gleiche mathematische Struktur erkennen. Dabei würde beispielsweise das simultane Werfen von drei Münzen und das drei Mal nacheinander ausgeführte Werfen einer Münze nicht als probabilistisch gleichwertige Situationen erkannt werden (Fischbein et al., 1991, S. 531).

- Fehlvorstellung bzgl. der Rolle der Stichprobengröße bzw. „local representativeness“: siehe Abschnitt 5.1.2
- Fehlvorstellung durch Vernachlässigung der Basisrate:

Urteilsheuristik, bei der im Zuge der Beurteilung einer Wahrscheinlichkeit die relativen Häufigkeiten in der Gesamtpopulation ignoriert werden (Biehler & Engel, 2015b, S. 235). Ein fiktives Individuum, dass als schüchtern, zurückgezogen, ordentlich und detailorientiert beschrieben wird, wurde von Befragten mit höherer Wahrscheinlichkeit für ein Bibliothekar gehalten als für einen Bauern, obwohl der relative Anteil der Bauern an der Gesamtbevölkerung höher ist als der der Bibliothekare (Kahneman & Tversky, 1973, S. 238–239).

- Fehlvorstellungen zu unabhängigen Ereignissen:

Tendenz, ein eigentlich unabhängiges Ereignis aus einer Reihe von Versuchsausgängen nicht isoliert von den anderen Ergebnissen zu betrachten, sondern eine Abhängigkeit von diesen anzunehmen (Cohen & Hansel, 1961, S. 22–23).

- „gambler’s fallacy“ bzw. „negative recency effect“ (S. 35):
- „positive recency effect“:

Annahme, dass ein bestimmter Versuchsausgang mit höherer Wahrscheinlichkeit eintritt, wenn er bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment bereits mehrmals aufgetreten ist (Cohen & Hansel, 1961, S. 32–34).

- „sample space misconception“:

Fälschliche Annahme, dass die Ergebnismenge entweder aus nur einem Ergebnis besteht oder dass einige Ergebnisse nicht mehr vorkommen könnten, weil sie bereits bei einem vorhergehenden Versuch beobachtet wurden (z. B. beim einmaligen Wurf eines Würfels) (Jones, Langrall, Thornton und Mogill 1999 in: Jones et al., 2007, S. 920).

- Gleichgewichts- und Ausgleichsgrundsatz (vgl. „gambler’s fallacy“ bzw. „negative recency effect“ S. 35):

Annahme, dass jenes Ereignis am unwahrscheinlichsten ist, das – zusammen mit den vorhergehenden Ergebnissen einer Versuchsreihe – eine unausgewogene bzw. asymmetrische Verteilung hervorbringen würde (Cohen & Hansel, 1961, S. 113).

- Fehlvorstellungen bzgl. „Zauberei“:

Denkweise, nach der sich der Zufall durch die eigenen Gedanken und Wünsche bzw. durch „Zauberei“ beeinflussen lässt. Dem liegt manchmal die Idee zugrunde, dass es ein Wesen gäbe, das die stochastische Situation kontrollieren und das man eventuell beeinflussen könnte. „Wesensvorstellungen zur Wahrscheinlichkeit kennzeichnen wir durch die subjektive Auffassung, dass sich im Entstehen der Versuchsergebnisse eines Zufallsexperimentes ein bewusstes Wesen autonom äußert“ (Cohen & Hansel, 1961, S. 32–34; Wollring, 1993, S. 399)

- Fehlvorstellungen bzgl. Lieblingsfarbe bzw. -Zahl:

Manche Personen nehmen an, dass bestimmte Farben bzw. Zahlen bei einem Zufallsversuch wahrscheinlicher sind, weil sie ihre Lieblingszahlen bzw. -farben darstellen oder weil diese ihnen Glück bringen (Fleischhacker, 2000, S. 31).

Ein weiterer Grund für Fehltritte bei probabilistischen Fragen können sprachliche Missverständnisse sein, die dadurch zustande kommen, dass Kinder manche Begriffe nicht immer entsprechend ihrer mathematischen bzw. sprachlichen Definitionen verwenden. In Situationen, in denen ein Ereignis grundsätzlich möglich ist, verwenden Schülerinnen und Schüler – im englischsprachigen Raum – manchmal den Ausdruck „50-50 chance“, um Unsicherheit auszudrücken, auch dann, wenn sie nicht wissen, ob die Versuchsausgänge gleich wahrscheinlich sind (Amir & Williams, 1999, S. 101). Des Weiteren wurden von Batanero et al. (1997 in: Jones et al., 2007, S. 921) bei Schülerinnen und Schülern im Alter von 14-15 Jahren verschiedene kombinatorische Fehlvorstellungen festgestellt und klassifiziert, die beim Zählen der Versuchsausgänge eines Zufallsversuchs auftreten können.

5.2 Studien, die positive Auswirkungen des Unterrichts belegen

Nachdem in Abschnitt 4.2 gezeigt wurde, dass Stochastikunterricht schon relativ früh zu einem Lernzuwachs bei Kindern führen kann, soll in diesem Abschnitt speziell auf den Einfluss wahrscheinlichkeitstheoretischer Lernphasen auf die Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler unterschiedlichen Alters eingegangen werden. Kahneman und Tversky (1972, S. 433) konnten feststellen, dass sogar Psychologen mit fundierten Kenntnissen in Stochastik die Tendenz zeigen, auf Urteilsheuristiken zurückzugreifen. Angesichts dieser Tatsache und der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Vielzahl von Verzerrungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, stellt sich die Frage, ob Stochastikunterricht überhaupt eine Verminderung von Fehlvorstellungen bewirken kann. Diese Frage für alle Fehlvorstellungen zu beantworten, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Aus diesem Grund wird im

Folgenden der Schwerpunkt exemplarisch auf die Repräsentativitäts- und Verfügbarkeitsheuristik gelegt.

5.2.1 Studie von Fischbein und Gazit

Fischbein und Gazit (1984) führten eine Untersuchung mit Kindern der fünften, sechsten und siebten Schulstufe durch, um die Effekte einer Unterrichtsreihe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zu studieren, insbesondere sollten deren Auswirkungen auf verschiedene Fehlvorstellungen analysiert werden.

Die Befragten wurden in zwei Gruppen, eine Versuchs- und eine Kontrollgruppe zu je 285 bzw. 305 Personen, aufgeteilt (Fischbein & Gazit, 1984, S. 3). Die Versuchsgruppe bestand aus 70 Kindern aus der fünften, 160 aus der sechsten und 55 aus der siebten Schulstufe, während die Kontrollgruppe 50 Lernende aus der fünften, 200 aus der sechsten und 55 aus der siebten Schulstufe enthielt (Fischbein & Gazit, 1984, S. 3).

Die Versuchsgruppe absolvierte eine Unterrichtsreihe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die aus zwölf Unterrichtseinheiten bestand, während die Kontrollgruppe keine Unterweisung erhielt (Fischbein & Gazit, 1984, S. 20). Folgende Lerninhalte wurden handlungsorientiert (oft durch Vergleichen berechneter Wahrscheinlichkeiten und empirisch bestimmter relativer Häufigkeiten) vermittelt: sichere, mögliche und unmögliche Ereignisse, das Vergleichen von Gewinnchancen, die Vorgehensweise beim Berechnen von Wahrscheinlichkeiten im Falle gleichwahrscheinlicher Ereignisse, relative Häufigkeiten und deren Zusammenhang mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit sowie einfache und zusammengesetzte Ereignisse (Fischbein & Gazit, 1984, S. 20).

Die Auswirkungen der Unterrichtsreihe wurden mit Hilfe der Fragebögen A und B bei den Teilnehmenden der Versuchsgruppe bewertet, während die Kontrollgruppe nur den Fragebogen B beantworten sollte (Fischbein & Gazit, 1984, S. 4–5). Fragebogen A sollte feststellen, ob die Schülerinnen und Schüler die Lerninhalte erfasst haben und enthielt Fragen zu allen weiter oben erwähnten Lehrzielen (Fischbein & Gazit, 1984, S. 4–5). Fragebogen B sollte überprüfen, welche intuitiven Fehlvorstellungen bei allen Kindern vorlagen und – speziell bei der Versuchsgruppe – welchen indirekten Einfluss der Stochastikunterricht auf diese hatte (Fischbein & Gazit, 1984, S. 3–4).

Es gab vier Items in Fragebogen B, die sich auf Fehlvorstellungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung bezogen: 4B setzt sich mit der Repräsentativitätsheuristik auseinander, 5B mit dem „negative recency effect“, 2B und 3B mit der Idee des Glücks und 7B

mit einer Urteilsheuristik nach der Kinder annehmen, dass die Fähigkeiten des Spielenden den Ausgang eines Glücksspiels beeinflussen (Falk et al., 1980, zitiert nach Fischbein & Gazit, 1984, S. 7).

Bei *Item 2B* sollten die Befragten ihre Meinung dazu äußern, ob man bessere Chancen hat, gute Noten zu erzielen, wenn man das Klassenzimmer mit dem rechten Fuß zuerst betritt (Fischbein & Gazit, 1984, S. 5). Die Kinder wurden bei *3B* aufgefordert, zu der Idee Stellung zu nehmen, dass Zahlen, die sich bei einer Lotterie einmal als erfolgreich erwiesen haben, auch in Zukunft bessere Gewinnchancen haben (Fischbein & Gazit, 1984, S. 5).

Frage 4B lautet folgendermaßen:

Ruth prefers, when she participates in a lottery, to choose consecutive numbers like 1, 2, 3, 4, 5, 6. She claims that, in this way she increases her chance of winning. On the other hand, Jenny claims that the chance of getting six consecutive numbers like 1, 2, 3, 4, 5, 6 is smaller than that of getting a random sequence of numbers. She says that a lottery is something chancy and therefore there is no chance of getting a sequence of consecutive numbers. What is your opinion with regard to the two attitudes, that of Ruth and that of Jenny? (Fischbein & Gazit, 1984, S. 5–6)

Bei *Frage 5B* ist Folgendes gefragt:

Gil has participated in a weekly lottery during the last two months. So far he has never won but he has decided to go on for the following reason: 'Lottery is a game based on chance and sometimes you win sometimes you lose. I have already played many times and I have never won. Therefore, I am sure more than before that I shall win in one of the next games'. What is your opinion with regard to Gill's explanation? (Fischbein & Gazit, 1984, S. 6)

Bei *Frage 7B* werden zwei Personen geschildert, die aus zwei Urnen mit äquivalenten Verhältnissen weißer und schwarzer Murmeln jeweils eine davon blind ziehen (Fischbein & Gazit, 1984, S. 6). Es wird behauptet, dass die ältere Person klüger ist und daher größere Chancen hat, die Gewinnfarbe zu erhalten, und die Befragten sollten ihre Meinung dazu angeben (Fischbein & Gazit, 1984, S. 6).

Im Rahmen der Auswertung ihrer Studie interessierten sich Fischbein und Gazit (1984, S. 20–23) sowohl für die direkten Auswirkungen der Unterrichtsreihe auf die Stochastikkompetenzen der Schülerinnen und Schüler (Fragebogen A), als auch für den indirekten Einfluss der Unterweisung auf ihre intuitiven Einschätzungen und Fehlvorstellungen in diesem Bereich (Fragebogen B). Es stellte sich heraus, dass es nicht möglich war, die Resultate des zweiten

Fragebogens korrekt zu interpretieren, ohne die des ersten zu analysieren (Fischbein & Gazit, 1984, S. 20–21).

Ergebnisse des Fragebogens A

Mit steigendem Alter ließ sich in der Regel ein klarer Fortschritt bzgl. der Anzahl richtiger Antworten bei allen Fragen feststellen (Fischbein & Gazit, 1984, S. 21). Dabei waren 60 - 70 % der Kinder aus der sechsten und 80 - 90 % derer aus der siebten Schulstufe imstande, die ihnen beigebrachten Konzepte zu verstehen und richtig anzuwenden (Fischbein & Gazit, 1984, S. 21). Für die Schülerinnen und Schüler der fünften Klasse scheinen die Lerninhalte jedoch – bis auf die Begriffe der sicheren, möglichen und unmöglichen Ereignisse – zu schwierig gewesen zu sein (Fischbein & Gazit, 1984, S. 21).

	5. Schulstufe		6. Schulstufe		7. Schulstufe	
Antworten	Versuchsgruppe	Kontrollgruppe	Versuchsgruppe	Kontrollgruppe	Versuchsgruppe	Kontrollgruppe
kein Zusammenhang (korrekt)	21,2	38,8	27,4	24,2	32,7	12,8
größere Chance bei zufälligen Zahlen	28,2	34,7	44,0	52,5	42,3	41,8
Lotterie ist ein Glücksspiel	5,6	10,2	16,1	10,4	25,0	40,0
keine Antwort	45,0	16,3	12,5	12,9	0	5,4

Abbildung 12: Ergebnisse (in %) von Frage 4B (in Anlehnung an Fischbein & Gazit, 1984, S. 16)

	5. Schulstufe		6. Schulstufe		7. Schulstufe	
Antworten	Versuchsgruppe	Kontrollgruppe	Versuchsgruppe	Kontrollgruppe	Versuchsgruppe	Kontrollgruppe
Nein (korrekt)	18,3	18,4	44,6	33,7	73,1	49,0
Ja	12,7	22,4	10,7	21,3	5,8	14,5
Lotterie ist ein Glücksspiel	18,3	28,5	23,8	23,2	9,6	14,5
unentschieden	9,9	12,2	14,9	16,8	7,7	18,2
keine Antwort	40,8	18,5	6,0	5,0	3,8	3,8

Abbildung 13: Ergebnisse (in %) von Frage 5B (in Anlehnung an Fischbein & Gazit, 1984, S. 17)

Ergebnisse des Fragebogens B

Die Resultate aus der fünften Schulstufe wurden aus zwei Gründen weder als ausreichend zuverlässig noch als relevant genug eingestuft: Erstens waren die direkten Auswirkungen des

Unterrichts in dieser Studie zu gering und daher auch dessen indirekter Einfluss auf intuitive Einstellungen der Befragten nicht feststellbar (Fischbein & Gazit, 1984, S. 21–22). Zweitens hatten diese Kinder auch Probleme damit, die Fragen zu verstehen und antworteten teils gar nicht oder durch Raten (Fischbein & Gazit, 1984, S. 21–22). Die folgende Auswertung befasste sich infolgedessen hauptsächlich mit den Schülerinnen und Schülern der sechsten und siebten Klasse (Fischbein & Gazit, 1984, S. 21–22).

Bei jenen Fragen (4B, 5B, 3B und 2B), die sich auf Fehlvorstellungen bezogen, zeigte sich eine positive indirekte Auswirkung der Unterweisung auf die entsprechenden Urteilsheuristiken (Fischbein & Gazit, 1984, S. 22). Für diesen Teil des Fragebogens ließ sich auch feststellen, dass ältere Kinder sowohl in der Versuchs- als auch in der Kontrollgruppe besser abschneiden konnten als jüngere Kinder. Der Einfluss des Lehrprogramms war mit jenem des Alters vergleichbar (Fischbein & Gazit, 1984, S. 22). Die einzige Ausnahme bzgl. der Verbesserung mit dem Alter bildete Frage 4B (Repräsentativitätsheuristik) in der Kontrollgruppe: Hier fiel der relative Anteil richtiger Antworten mit zunehmendem Alter (Fischbein & Gazit, 1984, S. 22). Dies galt nicht für die Teilnehmenden aus der Versuchsgruppe. Unter diesen Kindern hatten sowohl der Unterricht als auch das Alter einen positiven Effekt auf die durch Heuristiken bedingten Fehler (Fischbein & Gazit, 1984, S. 22).

Einzigste Ausnahme bildete dabei Frage 7B (Wahrscheinlichkeit, ein reines Glücksspiel aufgrund von Intelligenz zu gewinnen): Das Lehrprogramm übte einen negativen Einfluss auf die Anzahl korrekter Antworten aus (Fischbein & Gazit, 1984, S. 22). Fischbein und Gazit (1984, S. 22) nahmen an, dass die Unterweisung den Schülerinnen und Schülern gezeigt hat, dass auch angesichts vom Zufall geprägter Situationen bestimmte Berechnungen und gewisse Voraussagen möglich sind. Dies könnte die Verallgemeinerung nahelegen, dass Wissen und Intelligenz die Gewinnchancen bei einem reinen Glücksspiel verbessern (Fischbein & Gazit, 1984, S. 22).

Die Versuchsgruppen schneiden im Allgemeinen bei jenen Fragen, die die Kompetenzen beim Rechnen mit Verhältnissen überprüfen, schlechter als die Kontrollgruppe ab (Fischbein & Gazit, 1984, S. 22–23). Fischbein und Gazit (1984) gehen von folgender Hypothese aus: “Probabilistic thinking and proportional reasoning are based on two distinct mental schemata. [...] for example, Yost et al. (1962) and Goldberg (1966) have shown that one can identify, even in preschool children, correct probability estimations while proportional reasoning is still deficient” (S. 22). Da beide jedoch, laut den Autoren der Studie, eine gemeinsame Wurzel in der „*intuition of relative frequency*” (Fischbein & Gazit, 1984, S. 23) haben, könnte

Stochastikunterricht einen störenden Einfluss auf den Umgang der Kinder mit Verhältnissen haben.

Als Folgen für die Fachdidaktik werden, unter anderen, zwei Punkte genannt: Einerseits könnte der eher negative Effekt in Bezug auf das Rechnen mit Verhältnissen, laut den Autoren der Untersuchung, durch spezielle Übungsaufgaben, die die Beziehungen zwischen den Berechnungen mit Verhältnissen und den Einschätzungen der Wahrscheinlichkeit aufzeigen sollen, kompensiert werden (Fischbein & Gazit, 1984, S. 24). Andererseits konnten die positiven Auswirkungen der handlungsorientierte Unterrichtsreihe auf die Vorurteile und Fehlvorstellungen der Kinder in Bezug auf probabilistische Fragestellungen nachgewiesen werden (Fischbein & Gazit, 1984, S. 23–24).

5.2.2 Studie von Shaughnessy

Vor dem Hintergrund der Forschungsarbeiten von Kahneman und Tversky (1972; 1973), die das Auftreten verschiedener Urteilsheuristiken aufzeigten, setzte sich Shaughnessy (1977) im Rahmen dieser Studie mit der Frage auseinander, wie Stochastik unterrichtet werden sollte, um den Lernenden dabei zu helfen, Fehlvorstellungen zu überwinden. Von besonderem Interesse für diese Arbeit ist die in der Forschungsfrage von Shaughnessy implizierte Hypothese, dass geeigneter Stochastikunterricht imstande ist, zur Bewältigung von Fehlvorstellungen beizutragen.

80 zufällig ausgewählte Undergraduate-Studierende der Michigan State University, 32 davon weiblich, wurden in zwei Gruppen aufgeteilt, von denen eine durch typischen Vorlesungsbetrieb und die andere, die Experimentiergruppe, in Kleingruppen von je vier bis fünf Mitgliedern eingeteilt, durch eigenständiges Lösen von Übungsaufgaben unterrichtet wurde (Shaughnessy, 1977, S. 300–301). Der Lehrstoff war für beide Gruppen weitgehend gleich: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kombinatorik, Spieltheorie und Statistik (Shaughnessy, 1977, S. 300–301). Die von den Versuchspersonen zu Beginn der Untersuchung beantworteten Fragebögen ergaben, dass sie definitiv keinen mathematischen Hintergrund und fast kein stochastisches Vorwissen besaßen (Shaughnessy, 1977, S. 300–301). Beide Gruppen wurden sowohl vor als auch (vier Wochen) nach dem Stochastikunterricht getestet, wobei der Einfluss der Repräsentativitäts- bzw. Verfügbarkeitsheuristik und einige Lernziele der Unterrichtsphase überprüft wurden (Shaughnessy, 1977, S. 308–309). Die meisten Fragen zu Fehlvorstellungen entsprachen jenen, die von Kahneman und Tversky in ihren Studien aus den Jahren 1972 und 1973 gestellt wurden, erforderten jedoch zusätzlich, dass die Befragten ihre Antworten begründen sollten (Shaughnessy, 1977, S. 309).

In der Experimentiergruppe sollten die Studierenden im Rahmen von insgesamt neun Übungsstunden eigenständig Zufallsversuche durchführen, Daten sammeln sowie diese Daten organisieren, analysieren und miteinander diskutieren, um letztlich zu einem Ergebnis, z. B. einer selbst „entdeckten“ kombinatorischen Formel, zu gelangen (Shaughnessy, 1977, S. 298–301). Ziel war es nicht, dass die Teilnehmenden ein „fertiges“ System von Axiomen erlernen, sondern durch angeleitetes, aber selbstständiges Modellieren und experimentelles Überprüfen der eigenen Hypothesen den Wissenserwerb als Prozess erleben. Dabei wurden die Versuchspersonen von einer Lehrkraft unterstützt, die als Organisator/in, Diagnostiker/in, Kritiker/in und in der Rolle des *Advocatus diaboli* agierte.

Im Folgenden werden beispielhaft einige der Fragen zu Fehlvorstellungen mit ihren Ergebnissen genauer beschrieben.

	Vortest				Nachttest			
Frage R2	BMMBMB	BBBGGG	gleich 3 Bs	gleich richtig	BMMBMB	BBBGGG	gleich 3 Bs	gleich richtig
Vorlesungsgruppe	15	0	11	8	9	1	13	16
Experimentier- gruppe	13	0	12	9	4	0	8	26
Insgesamt	28	0	23	17	13	1	21	42

Abbildung 14: Tabelle der Ergebnisse von Frage R2 (in Anlehnung an Shaughnessy, 1977, S. 310)

Frage R2 ist analog zur Frage aus Abschnitt 5.1.2, aber Buben (B) und Mädchen (G) sind vertauscht: „(same assumption as R1) Which sequence is more likely to occur for having six children? (a) BGGBGB, (b) BBBGGG, (c) about the same chance. Give a reason for your answer“ (Shaughnessy, 1977, S. 309). (Bei Frage R1 wird festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Junge geboren wird, ungefähr $\frac{1}{2}$ ist.)

Die Ergebnisse sind der Tabelle in Abbildung 14 zu entnehmen. Bei Kahneman und Tversky (1972) wurde die erste Option stark bevorzugt, weil die Abfolge BBBGGG intuitiv weniger repräsentativ für den Zufallscharakter des Vorgangs zu sein scheint, aber auch weil es die Antwortmöglichkeit (c) nicht gab (Shaughnessy, 1977, S. 310). In dieser Studie wählten einige Studierende die Antwort (c), aber begründeten dies mit “because each outcome has 3 boys and 3 girls” (Shaughnessy, 1977, S. 310). Diese Argumentation ist auch durch die Repräsentativitätsheuristik geprägt, weil die Wahrscheinlichkeit einer Stichprobe allein aufgrund der Ähnlichkeit ihrer relativen Anteile zu jenen der Gesamtpopulation beurteilt wird. Diese Antworten (in Abbildung 14, in der Spalte „gleich 3Bs“ erkennbar) wurden aufgrund der Begründung als falsch bewertet (Shaughnessy, 1977, S. 310). Im Nachttest (Spalte „gleich

richtig“, rechts außen in Abbildung 14) lässt sich feststellen, dass die Experimentiergruppe deutlich stärker dazu tendierte, nicht nur die mathematisch korrekte Lösung anzugeben, sondern diese auch richtig zu begründen (Shaughnessy, 1977, S. 310).

Item R5 entsprach der Spital-Frage aus Abschnitt 5.1.2, aber mit der zusätzlichen Antwortoption (c) „für beide Spitäler gleich“ und es war wieder eine Begründung anzugeben (Shaughnessy, 1977, S. 311–312). Die Ergebnisse finden sich in Abbildung 15.

	Vortest			Nachtest		
	kleines Spital	großes Spital	gleich	kleines Spital	großes Spital	gleich
Frage R5						
Vorlesungsgruppe	6	9	25	14	3	22
Experimentiergruppe	11	6	23	27	1	12
Insgesamt	17	15	48	41	4	34

Abbildung 15: Tabelle der Ergebnisse von Frage R5 (in Anlehnung an Shaughnessy, 1977, S. 311)

Der Einfluss der Repräsentativitätsheuristik veranlasst 48 Befragte im Vortest zu der falschen Annahme, dass der Stichprobenumfang keine Rolle spielt, denn die Ergebnisse beider Spitäler sollten – so die Überlegung – repräsentativ für den Anteil der Jungen an der Gesamtbevölkerung sein (Shaughnessy, 1977, S. 311–312). 27 von 40 Teilnehmenden der Experimentiergruppe wählten im Nachtest (richtig) das kleinere Spital (Shaughnessy, 1977, S. 311–312). Für diese Gruppe lässt sich hier ein deutlich verminderter Einfluss der Repräsentativitätsheuristik feststellen. In der Vorlesungsgruppe ging im Nachtest die Zahl der Studierenden, die die falsche Antwortoption (c) wählten kaum zurück (Shaughnessy, 1977, S. 311–312).

	Vortest			Nachtest		
	gleich	Gitter A	Gitter B	gleich	Gitter A	Gitter B
Frage A1						
Vorlesungsgruppe	7	25	5	13	17	6
Experimentiergruppe	8	28	3	22	12	1
Insgesamt	15	53	8	35	29	7

Abbildung 16: Tabelle der Ergebnisse von Frage A1 (in Anlehnung an Shaughnessy, 1977, S. 312)

Item A1 entsprach ungefähr der Pfade/Gitter-Frage aus Abschnitt 5.1.3, wobei es zusätzlich die Antwortoption (c) „für beide ca. gleich viele Pfade“ gab und eine Begründung verlangt wurde (Shaughnessy, 1977, S. 312).

Der Vortest (Ergebnisse siehe Abbildung 16) bestätigt die Ergebnisse von Kahneman und Tversky bzgl. der Verfügbarkeitsheuristik, denn 53 von 76 Teilnehmenden bevorzugten das Gitter A, während nur acht Gitter B wählten (Shaughnessy, 1977, S. 312). Auch im Nachtest

war eine Tendenz zu Gitter A hin erkennbar, doch diese war bei der Experimentiergruppe weniger stark ausgeprägt (Shaughnessy, 1977, S. 312).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Studierenden in der Lage waren, probabilistische Modelle und Formeln mittels in Kleingruppen durchgeführter Zufallsversuche entdeckend zu erlernen (Shaughnessy, 1977, S. 313–314). Die Ergebnisse des Vortests unterstützten die Hypothesen von Kahneman und Tversky (1972; 1973), dass Lernende ohne vorhergehenden Stochastikunterricht auf die intuitiven Fehlvorstellungen der Repräsentativitäts- und Verfügbarkeitsheuristik zurückgreifen, um Wahrscheinlichkeiten anzugeben (Shaughnessy, 1977, S. 313–314). Der Stochastikunterricht hatte überwiegend positive Auswirkungen auf die Fehlvorstellungen der Teilnehmenden (Shaughnessy, 1977, S. 313–314). Der Nachtest zeigte insbesondere, dass die Experimentiergruppe erfolgreicher darin war, die Repräsentativitäts- bzw. Verfügbarkeitsheuristik zu überwinden als die Vorlesungsgruppe (Shaughnessy, 1977, S. 308). Diese Untersuchung zeigt auch, dass die Wahl der Unterrichtsmethoden im Stochastikunterricht eine wichtige Rolle dabei spielt, den Lernenden dabei zu helfen, sich von Urteilsheuristiken zu lösen und tragfähige eigene Vorstellungen zu entwickeln (Shaughnessy, 1977, S. 314).

5.2.3 Fazit

Es zeigt sich, dass Stochastikunterricht positive Auswirkungen auf die Tendenz von Lernenden hat, auf bestimmte Urteilsheuristiken zurückzugreifen. Insbesondere konnten Fischbein und Gazit (1984, S. 22) feststellen, dass, zumindest für die Altersklassen von der fünften bis zur siebten Schulstufe, ältere Kinder weniger auf Urteilsheuristiken zurückgreifen als jüngere. Die positive Wirkung der Lehrreihe war in dieser Studie mit jener des Alters vergleichbar (Fischbein & Gazit, 1984, S. 22). Die Untersuchung von Shaughnessy (1977, S. 308) zeigte, dass insbesondere der handlungsorientierte Stochastikunterricht, im Vergleich zu jenem im Vorlesungsstil, einen stärkeren positiven Einfluss auf die Repräsentativitäts- und Verfügbarkeitsheuristik ausübte.

6 Nuffield-Bericht und fachdidaktische Empfehlungen

Im Jahr 2012 ist von der Nuffield-Foundation ein Literaturbericht veröffentlicht worden, in dem Peter Bryant und Terezinha Nunes von der University of Oxford die wichtigsten Forschungsergebnisse zum kindlichen Verständnis von Wahrscheinlichkeit erörtern (Bryant & Nunes, 2012b). Im Folgenden werden einige der für diese Arbeit relevanten Erkenntnisse, auf die Bryant und Nunes dabei gestoßen sind zusammenfassend beschrieben.

Obwohl Zufall und Wahrscheinlichkeit Konzepte darstellen, die eine wesentliche Rolle im Alltagsleben spielen, weisen Bryant und Nunes darauf hin, dass sowohl Kinder als auch Erwachsene oft große Schwierigkeiten damit haben, korrekte rationale Überlegungen zu Wahrscheinlichkeiten anzustellen und diese zu quantifizieren (Bryant & Nunes, 2012a, S. 3). Bryant und Nunes identifizieren darin vier kognitive Anforderungen, die ein richtiges Verständnis von Wahrscheinlichkeit und Zufall an die Lernenden stellt: die Natur und die Konsequenzen des *Zufalls verstehen*, alle möglichen Ergebnisse des *Ereignisraums ausarbeiten* können, Verhältnisse verwenden um *Wahrscheinlichkeiten quantitativ auszurechnen* sowie zu vergleichen und – darauf aufbauend – *verstehen*, wann eine *Korrelation* zwischen zwei Arten von Ereignissen besteht (Bryant & Nunes, 2012a, S. 3–4).

Forschungsergebnisse deuten darauf hin, dass junge Kinder im Allgemeinen mehr Schwierigkeiten damit haben, das Konzept des *Zufalls zu erfassen* (Bryant & Nunes, 2012a, S. 4). Manche Aspekte des Zufalls könnten allerdings intuitiv leichter zugänglich sein als andere: Denison und Xu (2009, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 4) konnten feststellen, dass sogar Säuglinge Entscheidungen von Personen, die nicht sehen können, was sie tun, als zufällig einordnen, und solche von Personen, die sehen können, was sie tun, nicht als willkürlich betrachten. Zum Perlenversuch von Piaget und Inhelder (siehe Abschnitt 4.1.1) bemerken Bryant und Nunes, dass der für die Kinder fremdartige Kontext des Experiments der Grund dafür sein könnte, dass junge Kinder nicht imstande waren, die fortschreitende farbliche Durchmischung der Kugeln vorauszusehen. Eine Durchführung des Versuchs mit Hilfe vertrauterer Formen der Randomisierung, wie beispielsweise das Durchmischen von Spielkarten, wäre ihrer Meinung nach aussagekräftiger (Bryant & Nunes, 2012a, S. 5). Eine Studie, die mit Hilfe von Computer-Mikrowelten durchgeführt wurde (Pratt & Noss, 2002; Papanastasiou et al., 2008; Watson et al., zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 5), konnte feststellen, dass im Alter von ca. zehn Jahren viele Heranwachsende begriffen haben, dass es eine Assoziation zwischen Zufälligkeit und Fairness gibt und dass Mischen eine effektive

Methode dafür darstellt, eine gerechte Aufteilung sicherzustellen (Bryant & Nunes, 2012a, S. 5).

Den *Ereignisraum* mit allen möglichen Versuchsausgängen auszuarbeiten ist, nach Bryant und Nunes (2012a, S. 6), ein wichtiger, aber für viele Kinder ebenfalls schwieriger, erster Schritt bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Es gibt ausreichend Untersuchungen, die zeigen, dass Erwachsene und Kinder bei der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten Fehler machen, die darauf zurückzuführen sind, dass sie über keine ausreichende Kenntnis des entsprechenden Ereignisraums verfügen (Fischbein & Gazit, 1984; LeCoutre & Durand, 1988; LeCoutre, 1992; Van Dooren et al., 2003, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 5). Dennoch gibt es relativ wenige wissenschaftliche Studien, die sich direkt mit der Fähigkeit von Kindern auseinandersetzen, vollständige Listen alternativer zukünftiger Ereignisse zu erstellen (Bryant & Nunes, 2012a, S. 6). Eine besondere Schwierigkeit bei der Bestimmung aller möglichen Versuchsausgänge stellt die sogenannte Aggregation dar. Darunter verstehen Bryant und Nunes (2012a, S. 6) das Klassifizieren der Versuchsausgänge, nachdem sie bestimmt wurden: Beim gleichzeitigen Werfen zweier Würfel gibt es z. B. 36 gleichwahrscheinliche Ergebnisse (36 Zahlenpaare), aber wenn man diese als Augensummen der beiden Würfel aufzeichnet, ergeben sich nur elf mögliche Ergebnisse (das sind die Zahlen von zwei bis zwölf), die nicht mehr gleichwahrscheinlich sind. Viele Schülerinnen und Schüler nehmen auch im zweiten Fall fälschlicherweise Gleichwahrscheinlichkeit an. Den Autoren des Literaturberichts zufolge wären weitere Untersuchungen nötig, um mit den Problemen der Lernenden bei der Aggregation besser umgehen zu können (Bryant & Nunes, 2012a, S. 6).

Quantitativ werden *Wahrscheinlichkeiten* durch Anteile beschrieben, die entweder als Dezimalzahl, in Prozent, als Bruchzahl oder als Zahlenverhältnis ausgedrückt werden (Bryant & Nunes, 2012a, S. 6). Der Umgang mit Anteilen gestaltet sich für junge Kinder auch außerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung als schwierig (Bryant & Nunes, 2012a, S. 6). Im Bereich der Stochastik lässt sich das an der klassischen Aufgabe illustrieren, aus zwei Urnen jene auszuwählen, für die z. B. die Ziehung einer weißen Kugel wahrscheinlicher ist (Bryant & Nunes, 2012a, S. 6). Urne A könnte dabei eine weiße und zwei schwarze Kugeln enthalten, Urne B zwei weiße und fünf schwarze Kugeln (Bryant & Nunes, 2012a, S. 6–7). Martignon und Krauss (2009, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 6) zitieren eine Studie, nach der eine Mehrheit von 15-Jährigen diese Frage falsch beantworten, denn die Antwort ist nicht durch Ermitteln der absoluten Häufigkeiten der weißen Kugeln, sondern nur über einen Vergleich ihrer Anteile möglich (Bryant & Nunes, 2012a, S. 6). Mehrere Untersuchungen haben zwar gezeigt, dass Lernende mit fortschreitendem Alter besser mit Proportionen umgehen lernen

(Piaget & Inhelder, 1975; Falk et al., 1980; Fischbein & Gazit, 1984; Falk & Wilkening, 1998, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 7), aber es gibt keinen Nachweis dafür, dass alle Erwachsenen eventuell dazu fähig werden (Bryant & Nunes, 2012a, S. 7).

Man kann einen Anteil auf zwei Arten angeben: entweder als Teil eines Ganzen (also als Bruch- oder Dezimalzahl) oder als Verhältnis eines Teils zu einem anderen Teil (also als Zahlenverhältnis) (Bryant & Nunes, 2012a, S. 7). Es gibt gute Belege dafür, dass sich bei Heranwachsenden das Verständnis von Anteilen als Verhältnisse ganzer Zahlen vor dem Verständnis von Anteilen als Bruchzahlen entwickelt (Nunes & Bryant, 1996, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 7). Ebenso zeigte sich bei einigen Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass jene Befragten, die richtige Antworten lieferten, diese mit Hilfe von Zahlenverhältnissen und nicht mit Bruchzahlen begründeten (Fischbein, 1987; Fischbein und Gazit, 1984, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 7). Weiters konnte festgestellt werden, dass sowohl Kinder als auch Erwachsene Aufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten eher lösen können, wenn die Informationen in der Fragestellung in Form von Verhältnissen ganzer Zahlen und nicht als Dezimalzahlen angegeben werden (Hoffrage et al., 2002; Zhu & Giegerenzer, 2006, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 7). Eine mögliche fachdidaktische Implikation wäre es, Wahrscheinlichkeiten bei ihrer Einführung im Unterricht als Zahlenverhältnisse anzugeben, aber Bryant und Nunes (2012a, S. 8, 9) merken an, dass mehr Forschung notwendig ist, um zu überprüfen, ob Zahlenverhältnisse oder Brüche für die Schülerinnen und Schüler effektiver zur Darstellung und Berechnung von Anteilen geeignet sind. Allerdings ist an dieser Stelle anzumerken, dass in Österreich weniger mit Zahlenverhältnissen gearbeitet wird als im englischsprachigen Raum und es daher kaum vorteilhaft sein wird, Wahrscheinlichkeiten im Stochastikunterricht in dieser Form anzugeben.

Bei einem häufigen Zusammentreffen zweier Ereignisse kann man sich fragen, ob sich die Ausnahmen des Zusammenhangs zufällig ergeben könnten oder ob eine *Korrelation* zwischen den Ereignissen besteht. Die Bestätigungstendenz bezeichnet den Hang von Menschen beim Abwägen der Belege für und gegen eine Korrelation, Argumente gegen eine Korrelation eher zu ignorieren (Bryant & Nunes, 2012a, S. 8). Inhelder und Piaget (1958, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 8–9) zeigten, dass manche Jugendliche lernen können, den Zusammenhang zwischen den Argumenten für und gegen eine Korrelation proportional zu erarbeiten, aber es bleibt unklar, wie allgemein gültig dieses Ergebnis ist. Es könnte sein, dass sich nur eine Minderheit diese Kompetenz aneignen kann (Adi et al., 1978; Karplus et al., 1980; Batanero et al., 1996, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 9) und auch nur in Situationen, in denen eine Quantifizierung und ein Vergleich der Belege für bzw. gegen eine Korrelation möglich sind

(Ross & Cousins, 1993, zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 9). Wenn dies tatsächlich der Fall ist, dann kommt dem Unterricht eine besondere Bedeutung darin zu, den Lernenden bei der Bewältigung dieser kognitiven Anforderung zu helfen (Bryant & Nunes, 2012a, S. 9).

Zusätzlich zu diesen Forschungsergebnissen, die hauptsächlich aus der Psychologie stammen, sind auch fachspezifische didaktische Strategien für die Gestaltung eines effektiven Stochastikunterrichts wesentlich für die weiteren Überlegungen in dieser Arbeit in den folgenden Kapiteln. Die Vielzahl von Quellen, die es dazu gibt, zu berücksichtigen würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Aus diesem Grund werden exemplarisch die „Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts“ des Arbeitskreises Stochastik der GDM (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) aus dem Jahr 2003 herausgegriffen, die die wichtigsten Erkenntnisse aus der Fachdidaktik in diesem Bereich zusammenfassen (AK-Stochastik GDM, 2003). Bei den Mitgliedern dieses Arbeitskreises handelte es sich um Hochschuldozenten aus der Fachdidaktik und Lehrpersonen, die nach einer zwei Jahre langen Arbeitsphase zum Zweck eines verbesserten Stochastikunterrichts zu diesem Thema Stellung nahmen (AK-Stochastik GDM, 2003, S. 21).

Aufgrund seiner zunehmenden gesellschaftlichen und damit auch bildungspolitischen Bedeutung sollte, den Autorinnen und Autoren des Arbeitskreises zufolge, dem Stochastikunterricht ein größerer Anteil am Auftrag der Mathematik, zur Allgemeinbildung beizutragen, eingeräumt werden (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 21). Weiters sollten auch andere Bereiche des Mathematikunterrichts stärker mit stochastischen Vorgehensweisen verknüpft werden, insbesondere eignet sich die Datenanalyse im Sinne der auf Daten aufbauenden Modellbildung, z. B. in der Geometrie oder in der Analysis, dazu (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 21).

Außerdem sollten von Beginn an Anwendungen und Projekte Teil des Stochastikunterrichts sein, insbesondere sollte eine Einführung in ein stochastisches Themengebiet möglichst „ansprechend, typisch und einprägsam“ sein (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22). Bei der Aneignung stochastischen Wissens und Könnens soll das entsprechende mathematische Kalkül sparsam – nicht auf Vorrat – angeeignet werden (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22). Insbesondere sollte die Kombinatorik als Hilfsdisziplin betrachtet werden: nur die wenigen Abzähltechniken und Formeln, die tatsächlich für den Stochastikunterricht notwendig sind, sollten eingebunden werden (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22).

Besonderes Augenmerk ist auf experimentelles Arbeiten, Demonstrationen, Simulationen (z. B. mit Zufallsgeneratoren), Datenbeschaffung aus dem Internet und selbstständige

Datenerhebungen durch die Lernenden zu legen (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22). Weiters sollten die im Unterricht verwendeten Daten möglichst aus der Alltagswelt der Schülerinnen und Schüler stammen oder selbstständig von diesen erhoben werden bzw. von statistischen Ämtern, Lexika oder aus den Medien eingeholt werden (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22). Im Rahmen des Stochastikunterrichts sind verbale Erklärungen und Begründungen besonders wichtig, weil die Lösung selten z. B. aus einer einzigen statistischen Kennzahl besteht, diese muss meist durch weitere Erläuterungen in Bezug zum eigentlichen Problem gesetzt werden (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22). Die Schülerinnen und Schüler sollten immer wieder ein Problem mit Hilfe verschiedener stochastischer Methoden lösen und diskutieren, damit deutlich wird, dass es oft nicht nur eine Lösung gibt (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22). Im Unterricht sollten Behauptungen aus dem Umfeld der Lernenden, insbesondere aus den Medien, die mit Hilfe von Methoden der Stochastik begründet wurden, regelmäßig kritisch reflektiert werden (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22). Es sollten außerdem in allen Schulstufen Verbindungen zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung hergestellt werden (AK-Stochastik GDM, 2002, S. 22).

7 Stochastikunterricht im Ländervergleich

7.1 Lehrplanvergleich

Der Schwerpunkt dieser Betrachtungen liegt, gemäß dem Thema dieser Arbeit, auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der fünften bis achten Schulstufe, doch es soll auch das Gesamtbild des curricularen Aufbaus im Sinne des Spiralprinzips thematisiert werden. Aus diesem Grund wird – nach der Schilderung einiger Hintergrundinformationen zu den Lehrplänen bzw. Bildungsstandards sowie zu den Schulbüchern – ein detaillierter Vergleich für die Sekundarstufe I und eine überblicksartiger für die Primarstufe und Sekundarstufe II erfolgen. Das Ganze wird zur Veranschaulichung durch passende Aufgaben aus den jeweiligen Ländern ergänzt.

7.1.1 Hintergrundinformationen zu den Lehrplänen

United Kingdom

Im Jahr 2014 wurde der derzeit gültige, gesetzlich verpflichtende Lehrplan für England (National Curriculum for England) in den meisten Jahrgängen der Primar- bzw. Sekundarstufe eingeführt (DfE, 2014a). Wales, Schottland und Nordirland verfügen über eigene Lehrpläne, die nur im Fall von Schottland stärker von dem englischen Lehrplan abweichen. Mit öffentlichen Mitteln finanzierte Schulen in England sind verpflichtet, die Stoffinhalte des Lehrplans in allen Fächern zu unterrichten, sie können jedoch eigene Unterrichtsthemen und -fächer in die Planung und den Entwurf des eigenen Erziehungsprogramms miteinbeziehen (DfE, 2014a). Der Lehrplan soll die Kernkompetenzen umreißen, auf deren Grundlage aufbauend Lehrkräfte das Wissen und die Fähigkeiten der Heranwachsenden im Rahmen eines weitreichenderen schulspezifischen Lehrplanes fördern sollen (DfE, 2014a). Nach seiner Berufung zum Bildungsminister in 2010 hat Michael Gove eine Expertenkommission damit beauftragt, ein Rahmenmodell für einen neuen nationalen Lehrplan zu erarbeiten (DfE, 2011). Die Begutachtung wurde im Dezember 2011 abgeschlossen und im erstellten Bericht wurden weitreichende Veränderungen des ursprünglichen nationalen Lehrplans vorgeschlagen (DfE, 2011). Der endgültige Lehrplan wurde 2013 veröffentlicht und 2014 wurde er erstmals verpflichtend in den Schulen eingesetzt. Dieser aktuell gültige Lehrplan sieht die Aufteilung der Schulstufen für fünf- bis 16-jährige Schülerinnen und Schüler in sogenannte Key Stages vor, für die jeweils ein vorgeschriebener Katalog an Fächern unterrichtet werden soll (DfE, 2014a). Key Stage 1 bezeichnet die erste und zweite Schulstufe (im Alter von fünf bis sieben Jahren), Key Stage 2 die dritte bis sechste Schulstufe (im Alter von sieben bis elf), Key Stage

3 die siebte bis neunte Schulstufe (im Alter von elf bis 14) und Key Stage 4 umfasst die zehnte und elfte Schulstufe (im Alter von 14 bis 16) (DfE, 2014a). Am Ende der Key Stage 4 treten Schülerinnen und Schüler in England zur Prüfung für den General Certificate of Secondary Education (GCSE) an, die den Pflichtschulabschluss darstellt (DfE, 2014a). Danach können sie zwar die Sekundarstufe verlassen, müssen sich aber in irgendeiner Form (College, Lehre, Grammar School usw.) bis zum 18. Geburtstag in Ausbildung befinden. Die (nicht verpflichtende) Key Stage 5 von der 12. bis zur 13. Schulstufe (im Alter von 16 bis 18 Jahren) endet mit den A-Levels, die zum Besuch einer tertiären Bildungseinrichtung berechtigen.

United States of America

Das Schulsystem in den USA gliedert sich in die Primary School von der ersten bis zur fünften Schulstufe (im Alter von ca. sechs bis elf Jahren), die Middle School von der sechsten bis zur achten Klasse (im Alter von ca. elf bis 14 Jahren) und die High School, von der neunten bis zur zwölften Schulstufe (im Alter von ca. 14 bis 18 Jahren), deren Abschluss durch die Verleihung des High School Diploma die Hochschulreife kennzeichnet.

In den USA gibt es keinen einheitlichen Lehrplan, die Bundesstaaten legen vielmehr ihre Lehrpläne selbst fest, wobei diesen inzwischen in den meisten Fällen von der Bundesregierung festgelegte und geförderte Bildungsstandards, die sogenannten *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM), zugrunde liegen. Die Übernahme dieser Bildungsstandards durch die einzelnen Bundesstaaten erfolgt (wenn man vom Verlust bzw. Verzicht auf bestimmte Förderungen absieht) auf freiwilliger Basis und es gibt ein paar Bundesstaaten, die ihre Umsetzung gesetzlich verhindert und stattdessen eigene Standards entwickelt haben bzw. nach einer ursprünglichen Einführung den CCSSM inzwischen ablehnend gegenüberstehen. Im Dezember 2019 hatten 41 der 50 US-Bundesstaaten und der District of Columbia die CCSSM übernommen, während Alabama, Oklahoma, Texas, Virginia, Alaska, Nebraska, Indiana, South Carolina und Minnesota dies nicht getan hatten (CCSSI, 2010b).

Es ist anzumerken, dass die CCSSM keinen Lehrplan darstellen und sich daher die eigentlichen Lehrpläne jener Bundesstaaten, die diese implementiert haben, voneinander unterscheiden können (CCSSI, 2010b). Sie sollen in erster Linie einen einheitlicheren und durch standardisierte Testung vergleichbaren Unterricht sicherstellen, der bestimmte Kompetenzen beim High-School-Abschluss sichert (CCSSI, 2010b). Die CCSSM gehen auf eine Bildungsinitiative (CCSSI, d. h. Common Core State Standards Initiative) aus dem Jahr 2010 zurück, die für die ersten zwölf Schuljahre jene Kompetenzen definiert, über die Heranwachsende in den Fächern Englisch und Mathematik am Ende jeder Schulstufe verfügen

sollten (CCSSI, 2010b). Diese wird von der National Governors Association (NGA) und dem Council of Chief State School Officers (CCSSO) gesponsert und hat außerdem zum Ziel, sicherzustellen, dass Schülerinnen und Schüler nach ihrem High School-Abschluss darauf vorbereitet sind, erfolgreich ein College zu besuchen oder in die Arbeitswelt einzusteigen (CCSSI, 2010b). Bei der Entstehung der CCSSM haben – unter anderem – Lehrkräfte, Experten im Bereich der Bildungsstandards und auch das *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) mitgewirkt (CCSSI, 2010b).

Beim NCTM handelt es sich um die weltweit größte Vereinigung von Mathematiklehrenden, die unter anderem für die ersten Lehrplanentwürfe zu Beginn der Neunzigerjahre verantwortlich ist, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, beginnend mit der ersten Sekundarstufe, als wesentliche Bestandteile der Schulmathematik enthielten. Im Jahr 2000 veröffentlichte das NCTM einen weiteren curricularen Entwurf, die *Principles and Standards for School Mathematics* (PSSM). Die ebenfalls vom NCTM 2006 herausgegebenen *Curriculum Focal Points* sollten die wichtigsten Bildungsstandards des PSSM genauer unter die Lupe nehmen und darlegen, welche Kompetenzen die Heranwachsenden in den jeweiligen Schulstufen auf jeden Fall beherrschen sollten. Diese „Grundlagen“ trugen, neben anderen Überlegungen, zur Formulierung der CCSSM bei. Die vom NCTM erstellten PSSM wurden von vielen Schulbuchverlagen (das NCTM empfiehlt allerdings keine Schulbücher) und Bildungsbehörden der US-Regierung übernommen. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel auch die PSSM des NCTM gemeinsam mit den CCSSM diskutiert werden.

7.1.2 Hintergrundinformationen zu Schulbüchern

USA

Um die Lage bezüglich Schulbücher in den USA einschätzen zu können, wurden verschiedene Informationsquellen zu Rate gezogen. Einerseits informieren die Bildungsbehörden der amerikanischen Bundesstaaten auf ihren Websites über die in dem jeweiligen Bundesstaat akzeptierten Mathematik-Schulbücher (wobei das manchmal nur auf lokaler Ebene, innerhalb der jeweiligen Schulbezirke festgelegt wird), andererseits gibt es auch Informationen in Lehrerforen, die darauf hindeuten, welche Schulbücher von Lehrenden benutzt werden. Nach dieser Information wurden das *Teacher2Teacher*- und das *MyNCTM*-Forum durchsucht, in denen mehrere Schulbücher erwähnt werden. Die *Connected Mathematics*-Schulbuchreihe des Pearson-Verlages sowie die *Springboard*-Schulbuchreihe des College Board Verlages gelten als einige der „modernerer“ Schulbücher, weil sie stark auf die Implementierung der CCSSM ausgerichtet und anwendungsorientiert sind, weiters als für regelmäßige Gruppenarbeit gut

geeignet gelten. Im „Teacher2Teacher“-Forum gab es auch Lehrpersonen, die Schwierigkeiten damit hatten, mit Hilfe dieses Buches zu unterrichten. Dies wurde von anderen als Anlass genommen, darauf hinzuweisen, dass es regelmäßige Treffen von Mathematiklehrenden des jeweiligen Bezirks gibt, die sich mit dem Unterrichten nach der „*Connected Mathematics*“-Schulbuchreihe auseinandersetzen und den Lehrpersonen Hilfestellungen anbieten können. Auf der anderen Seite des fachdidaktischen Spektrums liegt die *Saxon*-Schulbuchreihe, die unter den Lehrenden als eher kalkülorientiert und kaum anwendungsbezogen gelten. Von den Lehrpersonen, die diese Schulbücher bevorzugen, wird gelobt, dass auch mathematisch schwache Schülerinnen und Schüler durch das quantitativ umfangreiche Üben des mathematischen Kalküls Erfolge in Mathematik erzielen können, und dass es auch bei den Eltern, die Heimunterricht durchführen, beliebt ist. Auf der anderen Seite wird an dieser Schulbuchreihe kritisiert, dass Lernende, die damit unterrichtet wurden und danach einen herkömmlichen Mathematikunterricht, in dem auch Anwendungen ihren Platz haben, besuchen, immer wieder einen Notenabfall zu verzeichnen haben und umlernen müssen.

Für diese Arbeit war eine Betrachtung jener Schulbücher, die anwendungsbezogen sind und regelmäßige Gruppenarbeiten erleichtern, aus folgenden Gründen relevant: Die meisten Berechnungen mit größeren Zahlen und komplizierteren Termen oder Funktionen können heutzutage leicht mit Hilfe von Computeralgebrasystemen durchgeführt werden. Grundlegende Kenntnisse des mathematischen Kalküls sind zwar wichtig, aber die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist eine sehr anwendungsbezogene Teildisziplin der Mathematik und daher wären Einschnitte bzgl. der Anwendungen in diesem Bereich besonders problematisch. Außerdem zeigen die in den Abschnitten 4.2.3 und 5.2 diskutierten Forschungsergebnisse, dass Lernende bei handlungsorientiertem Stochastikunterricht insgesamt signifikant besser abschneiden (Kipman, 2014) und auch stärker dazu befähigt werden, Fehlvorstellungen zur Stochastik zu überwinden (Shaughnessy, 1977). In dieser Arbeit wurden die Unterrichtsbeispiele für die USA aus dem PSSM- bzw. dem CCSSM-Dokument, ein interaktives online-Schulbuch, *Flexbooks* genannt, dass die CCSSM implementiert, und die *GoMath!*-Schulbuchreihe herangezogen. Da es nicht das Ziel dieser Arbeit war, einen vollständigen Schulbuchvergleich durchzuführen, konnten nicht alle Schulbücher berücksichtigt werden. Der Schwerpunkt lag hier auf dem exemplarischen Veranschaulichen der unterrichtlichen Umsetzung der Bildungsstandards bzw. der Lehrpläne.

UK

Bezüglich britischer Schulbücher wurde im Lehrerforum *TES* recherchiert und auch beim britischen Department of Education per E-Mail nachgefragt. Laut den Informationen im Lehrerforum wird in britischen Schulen hauptsächlich mit Hilfe von Arbeitsblättern unterrichtet. Die *CGP*-Schulbuchreihe und die Schulbuchreihe des *Elmwood*-Verlages wurden oft von den Lehrpersonen im TES-Lehrerforum erwähnt. Für diese Arbeit wurden Unterrichtsmaterialien, die aus dem TES-Lehrerforum downgeloaded wurden, die Schulbuchreihe des Elmwood-Verlages und verschiedene Schulbücher der Oxford University Press, wie z. B. die *Discovering Mathematics*- und die *Complete Mathematics*-Schulbuchreihe, berücksichtigt.

7.1.3 Primarstufe

USA

Die PSSM und CCSSM sehen bis einschließlich der fünften Schulstufe verschiedene Bildungsstandards in der Stochastik vor und – obwohl der Schwerpunkt dieser Arbeit in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellt – sollen hier teilweise auch die statistischen Standards angeführt werden, weil die beiden Teildisziplinen eng zusammenhängen.

Vom Kindergarten bis zur zweiten Schulstufe sollen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung den PSSM entsprechend ein informeller Wahrscheinlichkeits- und Zufallsbegriff aufgebaut werden, indem Aussagen wie „Es ist unwahrscheinlich (auf engl. „unlikely“), dass es heute regnen wird“ oder „Wir werden wahrscheinlich (auf engl. „probably“) am Nachmittag Pause haben“ besprochen werden (NCTM, 2000, S. 51). In diesen Schulstufen sind auch Zufallsversuche mit konkreten Gegenständen, wie das Ziehen von farbigen Spielchips aus einem Sack, vorgesehen (NCTM, 2000, S. 51).

In der dritten bis fünften Klasse sollten die Schülerinnen und Schüler nach den PSSM Erfahrungen damit gemacht haben, Fragen zu formulieren, die mit Hilfe von Daten beantwortet werden können, sowie Daten zu sammeln, zu organisieren und darzustellen. Sie sollten routiniert Darstellungen wie Tabellen, Liniendiagramme, Balkendiagramme bzw. Histogramme sowie Linien-Plots (auf engl. „line plots“: dabei werden oberhalb der Zahlengeraden oder -Strahl mit Hilfe von Punkten oder Kreuzen die Häufigkeiten der einzelnen Werte dargestellt; siehe Abbildung 17) und Zentral- und Streuungsmaße wie Median, Modus und Spannweite für eine einzelne Population kennen und anwenden können (NCTM, 2000, S. 249).



Abbildung 17: Linien-Plot zur Häufigkeit von Pflanzen unterschiedlicher Höhe (NCTM, 2000, S. 180)

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist in diesen Schulstufen nach den PSSM vorgesehen, dass die Schülerinnen und Schüler Ereignisse mit bekannten theoretischen Wahrscheinlichkeiten als wahrscheinlich (auf engl. „likely“) oder unwahrscheinlich (auf engl. „unlikely“) bezeichnen sowie zwischen sicheren, gleich wahrscheinlichen und unmöglichen Ereignissen differenzieren können (NCTM, 2000, S. 176). Sie sollten außerdem lernen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Zahl von Null bis Eins dargestellt werden kann, insbesondere dass Null die Wahrscheinlichkeit eines unmöglichen Ereignisses und Eins die eines sicheren Ereignisses darstellt (NCTM, 2000, S. 176, 181). Ereignisse, die weder sicher noch unmöglich sind, sollten die Lernenden mit Hilfe von gewöhnlichen Bruchzahlen wie $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4}$ ausdrücken können (NCTM, 2000, S. 181). Mittels dieser Begriffe, die auf dieser Stufe einer beginnenden Quantifizierung unterliegen, sollen sie die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse einfacher Zufallsversuche, wie solche mit Würfeln oder Münzen, abschätzen (ohne sie zu berechnen) und diese Vorhersagen testen (NCTM, 2000, S. 176). Dies könnte anhand von Zufallsversuchen geschehen, die nur wenige mögliche Ergebnisse haben, wie z. B. vorhersagen, wie wahrscheinlich es ist, dass der Zeiger beim Glücksrad mit verschieden gefärbten Sektoren auf einem bestimmten Sektor zu stehen kommt (NCTM, 2000, S. 181). Als Vorgehensweise, die Vorhersagen erlauben soll, wird das Sammeln und Untersuchen von Daten genannt: Die Heranwachsenden sollen beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, eine Werbeeinschaltung zu erwischen, wenn sie den Fernseher einschalten, abschätzen, indem sie Daten dazu sammeln, wie viele Minuten Werbung pro Stunde im Fernsehen zu verzeichnen sind (NCTM, 2000, S. 181).

Die CCSSM sehen bis inklusive der sechsten Klasse keinerlei Bildungsstandards aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor und auch zur (deskriptiven) Statistik ist es bis inklusive der fünften Schulstufe nur vorgesehen, dass die Lernenden Daten darstellen und interpretieren können (CCSSI, 2010a):

In der dritten Schulstufe sollten die Heranwachsenden lernen, Bilddiagramme und Balkendiagramme mit skalierten Achsen zu erstellen (CCSSI, 2010a, S. 25). Das könnte beispielsweise ein Balkendiagramm sein, in dem jedes Quadrat in einem Balken fünf Haustiere darstellt (CCSSI, 2010a, S. 25). Dazu werden Fragen der Art „Wie viele mehr?“ bzw. „Wie viele weniger?“ an die Kinder gestellt (CCSSI, 2010a, S. 25). Es werden in dieser Schulstufe auch Daten generiert, indem Längen gemessen und deren absolute Häufigkeiten in Linien-Plots eingezeichnet werden (CCSSI, 2010a, S. 25) (vgl. Abbildung 17).

In der sechsten Klasse sollten die Schülerinnen und Schüler nach den CCSSM lernen, dass statistische Fragen dann gegeben sind, wenn Veränderbarkeit in den auf diese Frage bezogenen Daten zu erwarten ist (CCSSM, 2010a, S. 45). Die Frage „Wie alt sind die Kinder in meiner Schule?“ ist demnach eine statistische Frage während „Wie alt bin ich?“ keine ist (CCSSM, 2010a, S. 45). Die Lernenden werden damit vertraut gemacht, dass die zur Beantwortung solcher statistischer Fragen gesammelten Daten eine Verteilung bilden, die durch ihren Median, ihre Spannweite und allgemein durch ihre Form beschrieben werden kann (CCSSM, 2010a, S. 45). Außerdem werden in dieser Schulstufe numerische Daten in Linien-Plots, Punktdiagrammen, Histogrammen und Boxplots dargestellt (CCSSM, 2010a, S. 45). Der Datensatz soll unter Bezugnahme auf seinen Kontext zusammengefasst werden: die Anzahl der Beobachtungen soll aufgezeichnet werden, das untersuchte Merkmal sowie seine Messart und die verwendeten Maßeinheiten beschrieben werden und die Bestimmung von Median bzw. Mittelwert sowie Quartilabstand bzw. mittlere absolute Abweichung und das Gesamtmuster der Verteilung sowie eventuelle Abweichungen davon auf den Kontext bezogen werden, in dem die Daten gesammelt wurden (CCSSM, 2010a, S. 45).

UK

In England sieht das National Curriculum vor der siebten Schulstufe hauptsächlich Lernziele zur deskriptiven Statistik, aber keine Lernziele zur Wahrscheinlichkeitsrechnung vor. Ab der zweiten Schulstufe werden Bilddiagramme, Strichlisten, Balkendiagramme und einfache Tabellen verwendet und es wird nach Kategorien summiert und verglichen (DfE, 2013b, S. 16). In der dritten Klasse kommen „one-step-“ und „two-step-questions“ dazu, wie beispielsweise die Fragen „Um wie viel mehr?“ und „Um wie viel weniger?“, die auf absolute Häufigkeiten aus skalierten Stabdiagrammen, Bilddiagrammen und Tabellen bezogen werden (DfE, 2013b, S. 23). In den folgenden Schulstufen werden die Kompetenzen zum Vergleich und zur Interpretation von Daten unter anderem um den Mittelwert und den Median erweitert und es werden auch Kreisdiagramme und Liniendiagramme verwendet (DfE, 2013b, S. 38, 45).

Bemerkungen

Die völlige Abwesenheit der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis inklusive der sechsten Schulstufe ist, wie in den Kapiteln 4, 5 und 6 diskutiert, weder entwicklungspsychologisch noch fachdidaktisch zu rechtfertigen und ein deutlicher Mangel sowohl im Konzept der CCSSM als auch des britischen Lehrplans. Es widerspricht klar dem Spiralprinzip, nach dem sich der Wahrscheinlichkeits- bzw. Zufallsbegriff als fundamentale Idee der Mathematik möglichst durch alle Jahrgangsstufen ziehen sollte, selbst wenn das zu Beginn hauptsächlich auf intuitiver und informeller Ebene geschehen sollte. Darüber hinaus werden Forschungsergebnisse (siehe Abschnitt 4.2) ignoriert, die zeigen, dass auch Kinder aus der Primarstufe Lernerfolge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung erzielen können (Kipman, 2014) und fachdidaktische Empfehlungen, dass dies besser gelingt, wenn die vielen Verknüpfungen von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zur Geltung kommen können und Stochastik von Anfang an als Einheit unterrichtet wird (AK-Stochastik GDM, 2003). Sogar nach den einer frühen Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kritisch gegenüberstehenden Resultate von Piaget und Inhelder (1975) entwickelt sich der Zufallsbegriff ab dem Alter von sieben Jahren, was einer intuitiven Erschließung von Zufallsphänomenen in der Primarstufe nicht widerspricht. Das Konzept des NCTM zeigt, wie dies umgesetzt werden kann: Es wurden (fast) von Beginn an allen Jahrgangsstufen Standards aus allen Teildisziplinen der Stochastik zugewiesen. Die Bildungsstandards, die das NCTM der Datenanalyse und Wahrscheinlichkeit zuordnet, werden vom Kindergarten an bis zum Abschluss der High School konsequent in folgende Bereiche eingeteilt:

- „Formulate questions that can be addressed with data and collect, organize, and display relevant data to answer them
- Select and use appropriate statistical methods to analyze data
- Develop and evaluate inferences and predictions that are based on data
- Understand and apply basic concepts of probability“ (NCTM, 2000, S. 176).

Diese Bereiche entsprechen ungefähr der Einteilung in die Teilbereiche deskriptive und beurteilende Statistik, explorative Datenanalyse und Wahrscheinlichkeitsrechnung und diese in allen Schulstufen gegenwärtige Struktur ermöglicht einerseits das Herstellen von Verknüpfungen zwischen den Teildisziplinen der Stochastik und beschreibt andererseits die Stochastik als Einheit. Im Rahmen der CCSSM und des englischen Lehrplans ist es schließlich nicht nur die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die in den Jahrgängen bis zur sechsten Klasse vernachlässigt wird, sondern auch die explorative Datenanalyse fehlt fast völlig. Folglich ist es

nach diesen Modellen bis zur sechsten Schulstufe auch nicht möglich, Verknüpfungen zwischen allen Teildisziplinen herzustellen, und das Gesamtbild, das sich die Schülerinnen und Schüler von der Stochastik machen, verarmt durch die einseitige Betonung der deskriptiven Statistik.

7.1.4 Sekundarstufe I

In der Tabelle in Abbildung 18 werden die Bildungsstandards bzw. der Lehrplan aus den USA und aus England in zusammengefasster und übersetzter Form angeführt, um einen Vergleich zu erleichtern.

(1) US – Common Core State Standards	7. Schulstufe
(a) verstehen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses eine Zahl zwischen 0 und 1 ist: liegt diese Zahl nahe bei 0 so beschreibt sie unwahrscheinliche Ereignisse, liegt sie um $\frac{1}{2}$ herum dann bezeichnet sie Ereignisse, die weder wahrscheinlich noch unwahrscheinlich sind, und liegt sie nahe bei 1 beschreibt sie wahrscheinliche Ereignisse (CCSSI, 2010a, S. 50)	
(b) Approximieren der Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses, indem zum Zufallsprozess, der es erzeugt, Daten gesammelt, langfristige relative Häufigkeiten beobachtet werden und umgekehrt Voraussagen über die ungefähren relativen Häufigkeiten aufgrund gegebener Wahrscheinlichkeiten gemacht werden (CCSSI, 2010a, S. 51)	
(c) Modelle entwickeln, um die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zu bestimmen; Wahrscheinlichkeiten aus dem Modell und beobachtete Häufigkeiten vergleichen und, falls die Ergebnisse nicht gut übereinstimmen, die möglichen Gründe für Diskrepanzen erklären (CCSSI, 2010a, S. 51):	
(d) Modell zur Gleichwahrscheinlichkeit entwickeln, indem allen Ergebnissen gleiche Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, und dieses dazu verwenden, die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zu bestimmen (CCSSI, 2010a, S. 51).	
(e) unter Beachtung der Häufigkeiten in den durch ein Zufallsexperiment generierten Daten, ein Wahrscheinlichkeitsmodell entwickeln (in welchem die Versuchsausgänge nicht gleichwahrscheinlich sein müssen) (CCSSI, 2010a, S. 51)	
(f) Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsversuchen unter Verwendung von geordneten Listen, Tabellen, Baumdiagrammen und Simulationen bestimmen (CCSSI, 2010a, S. 51):	
(g) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei einem mehrstufigen Zufallsversuch als Bruchteil jener Versuchsausgänge des Ereignisraums verstehen, die diesem Ereignis entsprechen (CCSSI, 2010a, S. 51)	
(h) Ereignisräume für mehrstufige Zufallsversuche mit Hilfe von geordneten Listen, Tabellen und Baumdiagrammen darstellen; für ein Ereignis in der Alltagssprache (z. B. „zwei Sechser würfeln“) entsprechende Versuchsausgänge im Ereignisraum identifizieren, aus denen sich dieses Ereignis zusammensetzt (CCSSI, 2010a, S. 51)	
(i) Eine Simulation zum Generieren von Häufigkeiten von Ergebnissen mehrstufiger Zufallsversuche erstellen und verwenden (CCSSI, 2010a, S. 51)	
(2) US – NCTM-Standards	6. bis 8. Schulstufe (Middle School)
(a) angemessene mathematische Fachbegriffe, die komplementäre und sich gegenseitig ausschließende Ereignisse beschreiben, verstehen und verwenden (NCTM, 2000, S. 248)	
(b) grundlegendes Verständnis von Wahrscheinlichkeiten und Verhältnissen verwenden, um Vermutungen über die Ergebnisse von Experimenten und Simulationen anzustellen und zu testen (NCTM, 2000, S. 248):	
(c) Computersimulationen verwenden, um Daten zu generieren, zu sammeln und zu modifizieren (z. B. indem Balkendiagramme und Histogramme für relative Häufigkeiten erstellt werden), mit dem Ziel, experimentelle Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und Diskrepanzen zwischen Vorhersagen und Ergebnissen zu erklären (NCTM, 2000, S. 254-255)	

(d) Daten sollen auch mit tatsächlich von den Schülerinnen und Schülern durchgeführten Zufallsexperimenten, bei ähnlicher Vorgangsweise wie im vorhergehenden Absatz beschrieben, generiert werden (NCTM, 2000, S. 254-255)	
(e) Wahrscheinlichkeiten bei einfachen mehrstufigen Zufallsversuchen mit Hilfe von geordneten Listen, Baumdiagrammen und Überlegungen zu geometrischen Wahrscheinlichkeiten („area models“) berechnen (NCTM, 2000, S. 248)	
(3) UK – National Curriculum	7. bis 9. Schulstufe (Key Stage 3)
(a) Unter Verwendung angemessener Sprache und einer Wahrscheinlichkeitsskala von 0 bis 1 sollen die Häufigkeiten der Ergebnisse einfacher Zufallsversuche, unter Beachtung von Zufälligkeit, Fairness sowie gleichwahrscheinlicher und nicht gleichwahrscheinlicher Versuchsausgänge, aufgezeichnet, beschreiben und analysiert werden (DfE, 2013c, S. 9)	
(b) verstehen, dass sich die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsversuchs zu 1 addieren (DfE, 2013c, S. 9)	
(c) Mengen und Vereinigungen/Schnitte von Mengen mit Hilfe von Tabellen, Gittern und Venn-Diagrammen systematisch aufzählen (DfE, 2013c, S. 9)	
(d) theoretische Ereignisräume für einzelne und kombinierte Ereignisse mit gleichwahrscheinlichen, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen erstellen und diese verwenden, um theoretische Wahrscheinlichkeiten zu berechnen (DfE, 2013c, S. 9).	

Abbildung 18: Vergleich von Standards und Lehrplänen aus den USA und dem UK (Zitate in der Tabelle)

Die Null-Eins-Wahrscheinlichkeitsskala

Zunächst ist anzumerken, dass alle Länder die Null-Eins-Wahrscheinlichkeitsskala für den Wert einer Wahrscheinlichkeit in ihre Standard- bzw. Lehrplandokumente aufgenommen haben, wenn auch in unterschiedlichen Darstellungsarten. Es fällt auf, dass vom NCTM die Null-Eins-Skala in der dritten bis fünften Schulstufe eingeführt wird (siehe vorhergehenden Abschnitt), während diese bei den CCSSM und im britischen Lehrplan erst in bzw. ab der siebten Schulstufe aufscheint (siehe Tabelle in Abbildung 18). In den CCSSM wird zwar eine konkrete „Null-Eins-Wahrscheinlichkeitsskala“ nicht explizit erwähnt, sie kommt aber in den entsprechenden Schulbüchern als bildliche Darstellung vor, z. B. im interaktiven Schulbuch Flexbooks im Abschnitt „7.1 Understanding Likelihood“ (CK-12 Foundation, o. J.). Wie in den Abschnitten 4 bis 6 durch zahlreiche Forschungsergebnisse belegt wurde, gibt es keinen entwicklungspsychologischen Grund dafür, so lange mit dieser „Halbquantifizierung“ zu warten. Die Null-Eins-Wahrscheinlichkeitsskala mit den einfachsten Brüchen als Zwischenwerte zum Abschätzen und Vergleichen von Wahrscheinlichkeiten stellt keine quantifizierte Berechnung der Wahrscheinlichkeit im Sinne von Laplace dar. Sogar nach den einem frühen Stochastikunterricht gegenüber kritisch eingestellten Ergebnissen von Piaget und Inhelder (Piaget & Inhelder, 1975) wären die Kinder bereits ab elf Jahren fähig, einen quantifizierten Laplace’schen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu erfassen. Als Folge könnte dieses „halbquantifizierte“ Wahrscheinlichkeitskonzept bereits ab zehn Jahren, also sicher schon ab der vierten oder fünften Klasse, sozusagen als Übergangsstufe hin zur vollen Quantifizierung, eingeführt werden. Da jedoch viele Untersuchungen zur Modifizierung der

Forschungsergebnisse von Piaget und Inhelder geführt haben, wäre dies vielleicht schon früher möglich. Es wäre auch vorstellbar die Skala nur mit Null und Eins als Werte unmöglicher bzw. sicherer Ereignisse sowie $\frac{1}{2}$ als eine 50:50-Chance einführen, also vorerst ohne weitere Bruchzahlen dazwischen, und damit Wahrscheinlichkeitsvergleiche und -Schätzungen von Ereignissen und bei einfachen Zufallsversuchen bekannter Wahrscheinlichkeit durchführen, wie z. B. dem Münzwurf. Bei Verwendung im Primarbereich würden vor allem die im Nuffieldbericht angeführten Forschungsergebnisse zum leichteren Umgang der Schülerinnen und Schüler mit ganzzahligen Verhältnissen (im Vergleich zu Bruchzahlen) sprechen (siehe Abschnitt 6). Da bei Verwendung der Null-Eins-Wahrscheinlichkeitsskala jedoch nicht konkret mit Brüchen gerechnet wird, wird es nicht unbedingt ein Problem darstellen, wenn die Mitte der Skala mit $\frac{1}{2}$ (statt mit 1:1) beschriftet wird.

Ein Blick in mehrere Schulbücher aus den USA bzw. aus England zeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsskala jeweils nur einmal bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zum Veranschaulichen verwendet wird, nicht aber um Wahrscheinlichkeiten in konkreten Aufgaben einzuschätzen oder anzuzeigen. In jenen Schulstufen, in denen die Berechnung der Laplace'schen Wahrscheinlichkeiten ohnehin vorgesehen ist, wird kein weiterer Gebrauch von dieser Skala gemacht, weil sie auch nicht mehr notwendig ist. Der eigentliche Nutzen als Hilfestellung, Wahrscheinlichkeiten auch ohne einen (völlig) quantifizierten Wahrscheinlichkeitsbegriff, einigermaßen einzuschätzen und vergleichen zu können, geht dabei verloren. Dieser kann nur in der Konzeption des NCTM zur Geltung kommen, weil dort die Wahrscheinlichkeitsskala schon mindestens einen Jahrgang vor der Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit in der dritten bis fünften Klasse eingeführt wird.

Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten

Da, wie in Abschnitt 5 diskutiert, beim Erlernen stochastischer Konzepte eine Vielzahl an Fehlvorstellungen auftreten, ist experimentelles, handlungsorientiertes Arbeiten in diesem Teilgebiet der Mathematik besonders wichtig, um Urteilsheuristiken zu überwinden (Kipman, 2014; Shaughnessy, 1977), weil es Schülerinnen und Schülern erlaubt, ihre Vermutungen bzw. intuitiven Vorurteile, aber auch ihre Berechnungen theoretischer Wahrscheinlichkeiten, anhand der Ergebnisse von Zufallsversuchen zu überprüfen. Der konkrete Vergleich der experimentell bestimmten relativen Häufigkeiten und der berechneten Laplace'schen Wahrscheinlichkeiten und Überlegungen zu eventuell dabei auftretenden Diskrepanzen der Ergebnisse wird sowohl in den PSSM als auch in den CCSSM explizit verlangt (siehe Tabelle in Abbildung 18). Die CCSSM sehen vor, dass berechnete Wahrscheinlichkeiten verwendet werden, um Vorhersagen

zu den relativen Häufigkeiten eines Zufallsversuchs anzustellen. Wenn beispielsweise beim 600-maligen Würfeln vorherzusagen ist, wie oft eine Sechs oder eine Drei gewürfelt werden wird, wäre die Vermutung aufgrund der berechneten Wahrscheinlichkeit ca. 200, aber beim konkreten Versuch wird wahrscheinlich nicht genau 200 Mal eine Sechs oder Drei gewürfelt werden (CCSSI, 2010a, S. 51). Außerdem gebrauchen die CCSSM die Laplace'sche bzw. die experimentelle Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten um Wahrscheinlichkeitsmodelle im Falle gleichwahrscheinlicher bzw. nicht-gleichwahrscheinlicher Versuchsausgänge zu entwickeln (CCSSI, 2010a, S. 51). Ein ähnliches Vorgehen ist bei den PSSM erkennbar, allerdings werden hier zusätzlich Balken- bzw. Säulendiagramme und Histogramme als geeignete Darstellungsformen für die relativen Häufigkeiten der experimentellen Ergebnisse empfohlen (NCTM, 2000, S. 254–255). Das PSSM-Dokument des NCTM führt auch ausdrücklich den Umgang mit Fehlvorstellungen als Grund für die Durchführung des Vergleichs theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten an (NCTM, 2000, S. 254). Ein weiterer Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass beim Erstellen, Interpretieren und Analysieren der Diagramme und dem Vergleich mit berechneten Wahrscheinlichkeiten Verknüpfungen zwischen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik hergestellt werden, die Lernenden dabei helfen, den Nutzen sowohl der Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch der Statistik für innermathematische Teilgebiet außerhalb ihrer selbst zu erkennen und die Stochastik als Einheit wahrzunehmen. Dies entspricht den im Abschnitt 6 beschriebenen Empfehlungen (AK-Stochastik GDM, 2003, S. 22).

Es ist interessant, dass obwohl der britische Lehrplan in der Sekundarstufe I sowohl die Berechnung theoretischer (siehe Tabelle in Abbildung 18 (3) (c)) als auch experimenteller Wahrscheinlichkeiten (siehe Tabelle in Abbildung 18 (3) (a)) vorsieht, der Vergleich der beiden nicht explizit verlangt wird, denn er ist erst ab der Sekundarstufe II vorgesehen. Aus kognitionspsychologischen und fachdidaktischen Gründen verspielt man sich dadurch eine besonders effektive Möglichkeit, um die Lernenden beim Überwinden von Fehlvorstellungen zu unterstützen (siehe Abschnitt 4.2.3 und 6). Einige britische Schulbücher (Elmwood-Schulbuchreihe) beinhalten trotzdem einen Vergleich experimenteller und Laplace'scher Wahrscheinlichkeiten, denn die mathematischen Vorkenntnisse dazu sind bereits ab der Sekundarstufe I gegeben.

Simulationen

Aufgrund der weiter oben bereits erwähnten, wesentlichen Stellung experimentellen Arbeitens im Stochastikunterricht, wurde vom Arbeitskreis für Stochastik der GDM empfohlen, dass

Zufallsversuche auch mit Hilfe von Computersimulationen durchgeführt werden (siehe Kapitel 6). Experimentelles Arbeiten im Allgemeinen und insbesondere das Durchführen von Versuchsreihen mit hunderten von Versuchen kann zeitlich sehr aufwändig sein, ist aber vor allem auch zum Demonstrieren der Beziehung zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten wichtig. Diese Problematik wird dadurch noch verstärkt, dass die Ergebnisse dieser Versuche aufgezeichnet und graphisch dargestellt werden sollen, um den im vorhergehenden Absatz diskutierten Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten durchführen zu können. Infolgedessen ist der Einsatz von Simulationen hier besonders sinnvoll und spart wertvolle Unterrichtszeit. Im PSSM-Dokument des NCTM (siehe Tabelle in Abbildung 18 (2) (b) (c)) werden Simulationen beim Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten (im britischen Lehrplan und in den CCSSM werden Simulationen an dieser Stelle nicht ausdrücklich verlangt, siehe Tabelle in Abbildung 18 (1), (3)) als wesentliches Werkzeug angeführt, dessen Verwendung damit gerechtfertigt wird, dass mit Computern nicht nur sehr große Datenmengen schnell und einfach generiert, sondern auch graphisch dargestellt und analysiert werden können (NCTM, 2000, S. 248, 254). Außerdem können sich die Schülerinnen und Schüler so besser auf die Datenanalyse konzentrieren, anstatt durch den Aufwand der Datengenerierung und -darstellung abgelenkt zu werden (NCTM, 2000, S. 254). Hinzu kommt, dass bei großen Stichproben das Risiko falscher Schlussfolgerungen reduziert wird, weil die Verteilung der Stichprobe näher an der eigentlichen Verteilung der Gesamtpopulation liegt (NCTM, 2000, S. 254). Das NCTM weist jedoch darauf hin, dass auch tatsächliche Zufallsexperimente durchgeführt werden sollen, wobei die Ergebnisse aller Lernenden einer Klasse als ein Datensatz aufgefasst werden können, um den Aufwand zu erleichtern (NCTM, 2000, S. 254). Den CCSSM zufolge sollten Simulationen bei mehrstufigen Zufallsexperimenten angewendet werden, aber es wird nicht explizit verlangt, dass sie ausschließlich dafür verwendet werden (siehe Tabelle in Abbildung 18 (1) (i)) (CCSSM, S. 51).

Fehlvorstellungen

Im CCSSM-Dokument und im britischen Lehrplan fehlen direkte Bezüge zu Fehlvorstellungen (siehe Tabelle in Abbildung 18). In PSSM-Dokument werden die Fehlvorstellungen zwar nicht in jenen Abschnitten, die in Abbildung 18 beschrieben werden, erwähnt, finden sich jedoch in den detaillierteren Ausführungen zur Stochastik für die sechste bis achte Schulstufe: „To correct misconceptions, it is useful for students to make predictions and then compare the predictions with actual outcomes“ (NCTM, 2000, S. 254), zu welchem Zweck die Durchführung von Computersimulationen und tatsächlichen Zufallsexperimenten durch die Schülerinnen und Schüler empfohlen wird. Diese Absicht des NCTM, den Fehlvorstellungen

der Lernenden durch eine Gegenüberstellung Laplace'scher und empirischer Wahrscheinlichkeiten (siehe Abbildung 18 (2) (b)) zu begegnen, ist in Übereinstimmung mit den bereits geschilderten fachdidaktischen Empfehlungen und den Forschungsergebnissen zur Überlegenheit handlungsorientierten, experimentellen Arbeitens (siehe Abschnitte 6, 4.2.3 und 5.2.2) (AK-Stochastik GDM, 2003; Kipman, 2014; Shaughnessy, 1977). Da ein solcher Vergleich auch nach den CCSSM vorgesehen ist (siehe diesen Abschnitt weiter oben), sind auch in diesem Konzept Maßnahmen, die teils zur Bewältigung von Urteilsheuristiken beitragen, vorgesehen, auch wenn diese nicht explizit als solche genannt werden (siehe Abbildung 18 (1) (c)). Auch diese indirekte Vorgehensweise, die Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit Fehlvorstellungen helfen kann, fehlt im britischen Lehrplan, weil dieser den Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten in der Sekundarstufe I nicht explizit verlangt (siehe Abbildung 18 (3)), sondern erst in der Sekundarstufe II dazu kommt (siehe Abschnitt 7.1.5). Dafür gibt es eigentlich von den mathematischen Voraussetzungen her keinen Grund und zumindest in manchen Schulbüchern ist dieses Thema Stoff der Sekundarstufe I, wie das Beispiel weiter unten zeigt.

Ein Beispiel, das das Aufgreifen von Fehlvorstellungen illustriert, findet sich im PSSM-Dokument des NCTM: Die Schülerinnen und Schüler sollen zu Beginn die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Versuchsausgänge beim 60-maligen Werfen zweier Münzen vorhersagen (NCTM, 2000, S. 254). Dabei kann es Lernende geben, die fälschlich annehmen werden, dass es drei gleichwahrscheinliche Versuchsausgänge geben wird: zweimal Kopf, zweimal Zahl oder je eines von beiden (ohne Rücksicht auf die Reihenfolge) (NCTM, 2000, S. 254). Bei einer tatsächlichen Durchführung des Zufallsexperiments (also nicht als Simulation) in Gruppen, könnten diese ihre Ergebnisse zum gemeinsamen Datensatz der ganzen Klasse hinzufügen und auf dieser Grundlage ein Balkendiagramm für die relativen Häufigkeiten erstellen (NCTM, 2000, S. 254). Anhand dieses Balkendiagramms kann diskutiert werden, ob die relativen Häufigkeiten mit den Vorhersagen übereinstimmen (NCTM, 2000, S. 254). Die Diskrepanzen können die Schülerinnen und Schüler dann dazu veranlassen, nach Alternativlösungen zu suchen, was von der Lehrperson genutzt werden kann, um geordnete Listen, Baumdiagramme und Flächendiagramme als Hilfestellung einzuführen (NCTM, 2000, S. 255).

Es gibt bei diesem Unterrichtsbeispiel mehrere Elemente, die fachdidaktisch sinnvoll sind: Es wird Bezug genommen auf Fehlvorstellungen bzgl. der vollständigen Erarbeitung des Ereignisraums und zwar mit den Mitteln experimentellen Arbeitens, die das Problem besonders greifbar für die Lernenden machen und das Potential besitzen, Neugierde zu wecken, und es

werden anhand des Balkendiagramms und seiner Interpretation hinsichtlich der Wahrscheinlichkeiten Verknüpfungen mit der beschreibenden Statistik hergestellt. Außerdem wird versucht, mit den Erläuterungen zu den Darstellungsformen mehrstufiger Zufallsversuche Fragen zu beantworten, die die Schülerinnen und Schüler selbst stellen. Dies ist im Mathematikunterricht nicht immer möglich: meist sollen die Lernenden nach Lösungen zu Problemen suchen, die von außen an sie herangetragen werden.

Ein dazu ähnliches Beispiel aus der Elmwood-Schulbuch-Reihe aus England lautet folgendermaßen: „Carry out experiments to work out the experimental probability (relative frequency) of some of the following events. Use a tally chart to record your results. [...] Toss two coins. What is the chance of tossing two tails? Perform 100 trials.“ (Rayner & White, 2019, S. 199). Es ist interessant, wie stark kleine Unterschiede in der Formulierung der Fragestellung hier eine ganz andere Richtung vorgeben als im vorhergehenden Beispiel des NCTM. Dies zeigt aber auch, dass es Beispiele gibt, für die kleine Umformulierungen reichen würden, um Fehlvorstellungen hervortreten zu lassen.

In Abschnitt „Ereignisraum bei mehrstufigen Zufallsexperimenten“ findet sich ein weiteres Beispiel dafür, wie mit Fehlvorstellungen zu mehrstufigen Zufallsversuchen umgegangen werden kann (Papierflieger) (NCTM, 2000, S. 255).

Begriffe und ihre Verwendung

Bei der Frage, welche Begriffe wie im Stochastikunterricht der Sekundarstufe I verwendet werden, kann man zwischen Alltagsbegriffen, die in der Mathematik mehr oder weniger von der alltäglichen Bedeutungen abweichende Definitionen haben, und Fachbegriffen, die in dieser Form gar nicht im täglichen Leben vorkommen, unterscheiden. Zur ersten Kategorie kann man z. B. die Ausdrücke gerecht („fair“), wahrscheinlich („likely“), zufällig („by chance“, „random“) und Chance bzw. Zufall („chance“). Eher zu den mathematischen Fachbegriffen zählen die Begriffe Wahrscheinlichkeit („likelihood“, „probability“), sicheres bzw. unmögliches Ereignis („certain/impossible event“), Gegenereignis („complementary event“), gleichwahrscheinliche Ereignisse („equally likely events“), sich gegenseitig ausschließende Ereignisse („mutually exclusive events“), Ereignisraum („sample space“) und Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsversuchs („compound/combined event“). Allerdings ist die genaue Unterscheidung für das Thema dieser Arbeit nicht so wesentlich wie der Zeitpunkt und die Art und Weise der Einführung dieser Begriffe. Die Konzepte mehrstufiger Zufallsversuche und des dazugehörigen Ereignisraums sowie das damit zusammenhängende Auftreten von Begriffen

aus der Mengenlehre werden im Abschnitt „Ereignisraum bei mehrstufigen Zufallsexperimenten“ näher ausgeführt und daher an dieser Stelle nicht mehr erörtert.

In den USA werden Begriffe wie „(un)likely“ oder „more/less likely“ für das deutsche Wort „wahrscheinlich“ verwendet, allerdings werden „more/less likely“ im Standardmodell des NCTM schon sehr früh, ungefähr zu Beginn der Primarstufe, gebraucht, um im Sinne eines nicht-formalen Umgangs die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zu umschreiben (NCTM, 2000, S. 114). Es soll also z. B. gefragt werden: „Is it likely to snow tomorrow?“ (NCTM, 2000, S. 114). Die CCSSM definieren diese Begriffe in der Sekundarstufe I und zwar folgendermaßen: „a probability near 0 indicates an unlikely event, one near 1 indicates a likely event“ (CCSSI, 2010a, S. 50) (siehe Abbildung 18 (1) (a)). Im britischen Lehrplan kommen diese Begriffe nicht vor (DfE, 2013c, S. 9). Da es sich bei den Ausdrücken um qualitative Abstufungen der Wahrscheinlichkeit handelt, wird ihr Potential kaum ausgeschöpft, wenn diese ungefähr zur gleichen Zeit definiert werden, in der auch der quantitative Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt wird. Dem Spiralprinzip zufolge sollte ein Übergang von der intuitiven, informellen Ebene in der Primarstufe hin zu zunehmender Quantifizierung und Formalisierung in der Sekundarstufe stattfinden (siehe Abschnitt 2.2). Dem entspricht das Vorgehen des NCTM am ehesten. Eine weitere Überlegung, die hier eine Rolle spielen dürfte, besteht darin, dass „likely“ im Englischen leichter für die Kinder verständlich sein dürfte als „probably“.

In der Sekundarstufe I wird in beiden Ländern der Wahrscheinlichkeitsbegriff („probability“) verwendet, allerdings ist vom NCTM eine Einführung als „probability as a measurement of the likelihood of events that can be represented by a number from 0 to 1“ (NCTM, 2000, S. 181, 176) in der dritten bis fünften Schulstufe (also eher in der Primarstufe) vorgesehen. Gleichzeitig werden auch den Wahrscheinlichkeiten des unmöglichen bzw. sicheren Ereignisses, die in den Schuljahren davor bereits informell verwendet werden sollen, die Werte Null bzw. Eins zugeordnet und Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse, die dazwischen liegen, werden mittels bekannter Bruchzahlen wie z. B. $\frac{1}{2}$ abgeschätzt (NCTM, 2000, S. 181, 176). Die Ausdrücke des sicheren bzw. unmöglichen Ereignisses werden in den CCSSM und im britischen Lehrplan nicht verwendet (CCSSI, 2010a; DfE, 2013c). Die CCSSM definieren den Wahrscheinlichkeitsbegriff folgendermaßen: „Understand that the probability of a chance event is a number between 0 and 1 that expresses the likelihood of the event occurring“ (CCSSI, 2010a, S. 50). Im britischen Lehrplan wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht explizit definiert, aber in den Schulbüchern der Elmwood-Reihe wird er z. B. auf folgende Art beschrieben: „The probability of an event is a measure of the chance of it happening. Probability

is measured on a scale from 0 to 1“ (White, 2015, S. 247). Danach wird dies entsprechend der Formel in Abbildung 19 noch ergänzt (White, 2015, S. 249).

$$\text{Expected probability} = \frac{\text{the number of ways the event can happen}}{\text{the number of possible outcomes}}$$

Abbildung 19: Wahrscheinlichkeitsdefinition eines britischen Schulbuchs (in Anlehnung an Rayner & White, 2008, S. 181)

Alle obigen Definitionen der Wahrscheinlichkeit legen ihren Wert im Bereich von Null bis Eins fest. Offensichtlich muss im Konzept des NCTM die Wahrscheinlichkeit früher definiert werden, weil auch schon früher damit gearbeitet wird (NCTM, 2000, S. 176, 181). Die CCSSM gebrauchen den Begriff „chance event“ in ihrer Formulierung, aber vermutlich wird es für die meisten Schülerinnen und Schüler auch ohne weitere Erklärung des Begriffs kein Problem darstellen, zu verstehen, dass es sich um ein zufälliges Ereignis handelt.

Der dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zugrunde liegende Zufallsprozess wird kaum näher unter die Lupe genommen, es wird allerdings, den Schulbüchern zufolge, meist an einigen wenigen Aufgaben untersucht, ob Vorgänge fair sind. Allein im britischen Lehrplan werden die Elemente der Zufälligkeit („randomness“) und „fairness“ explizit thematisiert, die im Rahmen von Zufallsexperimenten und ihrer Auswertung Beachtung finden sollen (DfE, 2013c, S. 9). Die Frage danach, ob bzw. wann z. B. ein Würfel fair oder unfair ist, kann schon anhand einer recht simplen Reihe von Zufallsversuchen diskutiert und beantwortet werden. Dieser Zusammenhang zwischen Zufälligkeit und Fairness wird im Nuffield-Bericht als eines der wesentlichen Konzepte genannt, das den Lernenden dabei helfen soll, eine Vorstellung vom Zufall zu bekommen, und das Kinder im Alter von zehn Jahren normalerweise entwickelt haben (Pratt & Noss, 2002; Paparistodemou et al., 2008; Watson et al., zitiert nach Bryant & Nunes, 2012a, S. 5). Das Aufrollen dieser Thematik ist daher an dieser Stelle des Curriculums, also für Kinder von elf bis 14 Jahren, möglich, könnte aber auch etwas früher in der fünften oder sechsten Schulstufe stattfinden, denn der Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff ist nicht unbedingt Voraussetzung dafür. Man könnte auch anhand absoluter Häufigkeiten abschätzen, ob die verschiedenen Versuchsausgänge in etwa gleich häufig sind. Obwohl die CCSSM und die Standards des NCTM den weiter oben beschriebenen Aspekt der „fairness“ nicht ausdrücklich thematisieren, sind im interaktiven Schulbuch Flexbooks, dass auf der Grundlage der CCSSM basiert, im Abschnitt „7.3 Discerning Between Equally Likely and Non-Equally Likely Outcomes“ Beispiele zu fairen Vorgängen zu finden (CK-12 Foundation, o. J.).

Die Fachbegriffe des Gegenereignisses und einander ausschließenden Ereignisse kommen Standardmodell des NCTM in der sechsten bis achten Schulstufe hinzu (NCTM, 2000, S. 253–

255). Die beiden zuletzt genannten Ausdrücke könnten nach dem NCTM anhand von folgender Aufgabe erläutert werden:

Suppose you have a box containing 100 slips of paper numbered from 1 through 100. If you select one slip of paper at random, what is the probability that the number is a multiple of 5? A multiple of 8? Is not a multiple of 5? Is a multiple of both 5 and 8? (NCTM, 2000, S. 254)

Nachdem sie die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet haben, dass die gezogene Nummer ein Vielfaches von fünf ist, sollte, dem NCTM zufolge, mit den Schülerinnen und Schülern darüber gesprochen werden, dass das Ziehen einer Zahl, die kein Vielfaches von fünf ist, das Gegenereignis dazu darstellt (NCTM, 2000, S. 254). Außerdem kann anhand dieses Beispiels thematisiert werden, dass die Ziehung eines Vielfachen von acht und jene eines Vielfachen von fünf keine einander ausschließenden Ereignisse sind, weil 40 sowohl ein Vielfaches von fünf als auch von acht ist (NCTM, 2000, S. 254). Der Begriff einander ausschließender Ereignisse („mutually exclusive events“) wird dann verwendet, um zwei Ereignisse in Relation zueinander zu setzen, die nicht gleichzeitig auftreten können (dabei kann es insgesamt auch mehr als zwei Versuchsausgänge geben und ihre Wahrscheinlichkeiten müssen sich nicht zu Eins addieren). Das Gegenereignis („complementary event“) wird verwendet, wenn zwei einander ausschließende Ereignisse vorliegen, die außerdem zusammen den gesamten Ereignisraum ausmachen, und deren Wahrscheinlichkeiten sich daher zu Eins addieren. Im britischen Lehrplan kommen einander ausschließende Ereignisse vor (DfE, 2013c, S. 9). Das Gegenereignis wird zwar nicht erwähnt, wohl aber, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Versuchsausgänge gleich Eins ist (DfE, 2013c, S. 9). Die letzte Aussage ist für einander ausschließende Ereignisse und bei zwei möglichen Versuchsausgängen äquivalent zur Beziehung von Gegenereignissen. Die Begriffe des Gegenereignisses und der einander ausschließenden Ereignisse werden in den CCSSM nicht explizit angeführt, obwohl sie als Bedingungen für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten durchaus eine wichtige Rolle spielen (CCSSI, 2010a, 50–51).

Insgesamt betrachtet fällt auf, dass im Modell der Common Core-Standards – verglichen mit dem des NCTM – innerhalb der Sekundarstufe I in etwa gleich viele neue Begriffe hinzukommen, wie beim Konzept des NCTM über die Primarstufe und erste Sekundarstufe hindurch aufgebaut werden (auch wenn etwas unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt werden). Noch dazu sind bei den CCSSM alle für die Sekundarstufe I vorgesehenen Themen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ausschließlich in der siebten Schulstufe durchzunehmen (CCSSI, 2010a, S. 50–51). Trotzdem werden insgesamt im Grunde gleichwertige Stoffinhalte

abgedeckt. Einerseits aufgrund des Spiralprinzips, andererseits um eine mögliche Überforderung der Schülerinnen und Schüler zu verhindern, wäre eine Aufteilung der Stoffinhalte auf mehrere Schulstufen, wie sie vom NCTM umgesetzt wurde, fachdidaktisch effektiver. Der britische Lehrplan teilt zwar die zu den bisher diskutierten amerikanischen Standards vergleichbaren Inhalte in der Sekundarstufe I auf drei Schulstufen auf, sieht aber eigentlich für ca. die Hälfte der Schulzeit auch keine Wahrscheinlichkeitsrechnung vor. Das Problem der Mengenlehre, die im britischen Lehrplan bei der Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum ersten Mal auftaucht, wird im nächsten Abschnitt thematisiert.

Ereignisraum bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

Das vollständige Identifizieren all jener Versuchsausgänge, die den Ereignisraum bilden, ist ein wichtiger Schritt zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, bereitet jedoch vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten (Bryant & Nunes, 2012a, S. 5–6). Vor allem bei mehrstufigen Zufallsexperimenten wird der Ereignisraum komplexer, was dazu veranlasst, systematische Vorgehensweisen und graphische Hilfsmittel im Unterricht zu verwenden, die das vollständige Erschließen des Ereignisraums erleichtern sollen.

Sowohl die CCSSM als auch die Standards des NCTM sehen zu diesem Zweck geordnete Listen und Baumdiagramme vor, während im britischen Lehrplan und in den Common Core-Standards auch Tabellen verwendet werden (CCSSI, 2010a, S. 51; NCTM, 2000, S. 255; DfE, 2013c, S. 9). Im britischen Lehrplan fällt auf, dass die Baumdiagrammen in der Sekundarstufe I fehlen (in der Sekundarstufe II sind sie dann vorgesehen), dafür aber Venn-Diagramme verwendet werden (DfE, 2013c, S. 9). Außerdem sollen auch Schnitt- und Vereinigungsmengen an dieser Stelle im Lehrplan durchgenommen werden (siehe Tabelle in Abbildung 18 (3) (c)) (DfE, 2013c, S. 9). Es handelt sich dabei um Inhalte, die im britischen Lehrplan an dieser Stelle zum ersten Mal vorkommen (DfE, 2013c). Aufgrund des relativ hohen Abstraktionsgrades ist die Mengenlehre für viele Schülerinnen und Schüler an sich kein einfaches Thema. Dieses dann auch noch mitten im Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, für die zahlreiche Fehlvorstellungen auftreten und ebenfalls ein völlig neues Thema darstellt, einzubauen scheint fachdidaktisch wenig sinnvoll und könnte das Verständnis für die Wahrscheinlichkeitsrechnung stark einschränken. Der Arbeitskreis zur Stochastik der GDM spricht sich dagegen aus, in der Stochastik „Wissen auf Vorrat“ (AK-Stochastik GDM, 2003, S. 22) zu lehren und in den beiden amerikanischen Bildungsstandardmodellen kommen die Venn-Diagramme nicht vor, denn der Ereignisraum der mehrstufigen Zufallsversuche wird hier

hauptsächlich anhand von Baumdiagrammen und geordneten Tabellen erschlossen. Der Vorteil von Baumdiagrammen besteht darin, dass sie mehrstufige Zufallsversuche gut veranschaulichen, ohne einen derart breiten theoretischen Rahmen aus der Mengenlehre erforderlich zu machen, und recht intuitiv sind (die Zweig-Notation ist relativ leicht zu verstehen im Vergleich zu den Konzepten der Schnitt- bzw. Vereinigungsmenge). In den Schulbüchern aus der Elmwood-Serie werden mathematische Fachbegriffe wie „einander ausschließende Ereignisse“, „Gegenereignis“ usw. sogar völlig ohne Mengenlehre erläutert (White, 2015, S. 249, 252) und danach wird die Mengenlehre ohne Bezug auf diese Konzepte (weder im Theorieteil noch in den Angabetexten der Aufgaben) für (einstufige) Wahrscheinlichkeitsberechnungen verwendet (White, 2015, S. 254–258).

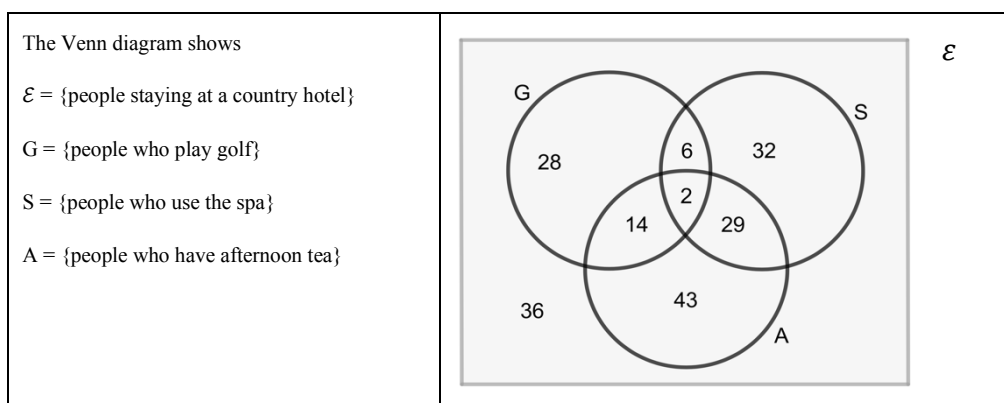


Abbildung 20: Venn-Diagramm zu Freizeitaktivitäten (in Anlehnung an White, 2015, S. 257)

In Abbildung 20 ist eine solche Aufgabe dargestellt: Darunter sind z. B. folgende, typischen Fragen zu finden: „If one person is chosen at random then find (a) p (golf) (b) p (golf and afternoon tea) (c) p (spa but no golf) (d) p (no afternoon tea)“ (White, 2015, S. 257). Die Mengenoperationen, auf die sich die hier in Klammern stehenden Ereignisse beziehen, wurden großteils in vorhergehenden Abschnitten dieses Schulbuchs ohne Elemente der Mengenlehre definiert (White, 2015, S. 249, 252).

Die Mengenlehre könnte für das Verständnis mehrstufiger Zufallsversuche und ihrer Ereignisräume hilfreich sein, aber sie ist (auf dem niedrigen Schwierigkeitsgrad der Sekundarstufe I) einerseits nicht zwingend notwendig und andererseits wäre es besser, wenn sie getrennt von der Wahrscheinlichkeitsrechnung erarbeitet wird. Unabhängige und abhängige Ereignisse können anhand des Ziehens mit bzw. ohne Zurücklegen modelliert werden und Symbole aus der Mengenlehre können auch mit „und“ bzw. „oder“ ausgeschrieben werden. In der Aufgabe zur Teilbarkeit vom NCTM, die im vorhergehenden Abschnitt geschildert wurde, ist auch erkennbar, wie Konzepte wie Gegenereignis und einander ausschließende Ereignisse,

für deren Erläuterung auch die Mengenlehre herangezogen werden könnte, anhand einfacher Beispiele verständlich gemacht werden können (NCTM, 2000, S. 254).

In der folgenden Aufgabe, die sich im PSSM-Dokument des NCTM findet, wird gezeigt, wie auf anschauliche Weise mit zweistufigen Zufallsexperimenten umgegangen werden kann:

Für einen Papierflieger, der mit einer Heftklammer versehen wurde, und für den die relative Häufigkeiten verschiedener Flugweiten in einem Histogramm (siehe Abbildung 21) dargestellt wurden, soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass genau einer der beiden nächsten Flüge ein Misserfolg und der andere ein Erfolg sein wird (NCTM, 2000, S. 255). Der Erfolg wird dabei als Flugweite von min. 21 Fuß und der Misserfolg als das Gegenereignis dazu definiert (NCTM, 2000, S. 255).

In zwei vorhergehenden Abschnitten der PSSM (NCTM, 2000, S. 249–251) wird ein Versuch mit Papierfliegern (einer wurde mit einer, der andere mit zwei Heftklammern versehen) geschildert, der als Unterrichtsvorschlag zur beschreibenden Statistik für die sechste bis achte Schulstufe präsentiert wird. Die Ergebnisse des Versuchs mit einer Heftklammer (siehe Abbildung 22) sollen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung analysiert und im Sinne der obigen Fragestellung weiterverarbeitet werden (NCTM, 2000, S. 255). Aus dem Histogramm können die Lernenden erkennen, dass sich die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg zu ca. 45% und die für einen Erfolg zu ca. 55% ergibt (siehe Abbildung 22) (NCTM, 2000, S. 255).

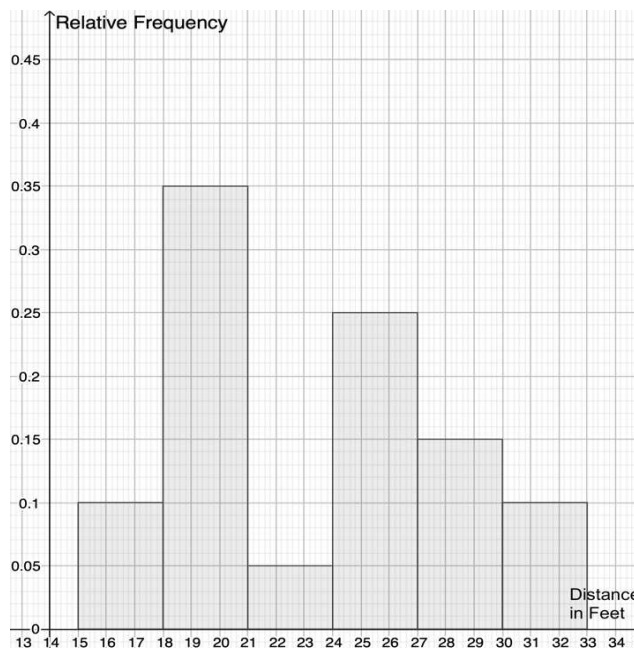


Abbildung 21: relative Häufigkeiten der Flugweiten beim Papierflieger mit einer Heftklammer (eigene Darstellung, mit GeoGebra erstellt)

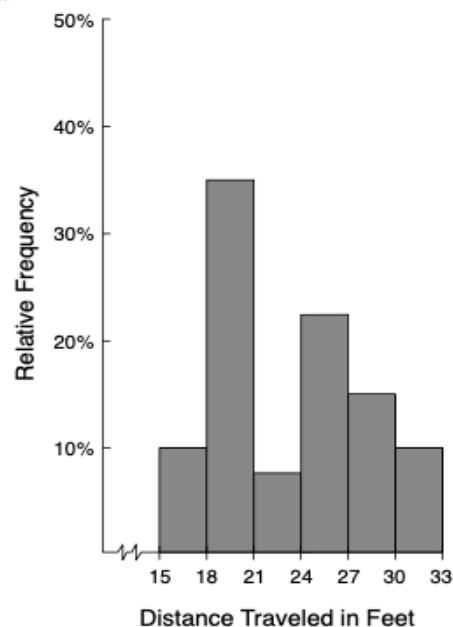


Abbildung 22: relative Häufigkeiten der Flugweiten beim Papierflieger mit einer Heftklammer (NCTM, 2000, S. 250)

Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten und einer Methode zur systematischen Erschließung des Ereignisraums, wie z. B. dem Baumdiagramm in Abbildung 21, könnten manche Lernende zu dem darin dargestellten Ergebnis gelangen (NCTM, 2000, S. 255). Es könnte aber auch sein, dass manche Schülerinnen und Schüler – aufgrund einer Fehlvorstellung bzgl. des Ereignisraums – die zwei der Reihenfolge nach unterschiedlichen Möglichkeiten für das Ereignis, dass es genau einen Erfolg und einen Misserfolg gibt, noch nicht voneinander unterscheiden können. Die fachdidaktischen Vorteile, die sich aus dieser Aufgabe ergeben, bestehen also nicht nur in der Verbindung zur beschreibenden Statistik und Datenanalyse, sondern auch darin, dass Fehlvorstellungen bzgl. des Ereignisraums adressiert werden (NCTM, 2000, S. 255). Allerdings ist es problematisch, dass sich im Histogramm in Abbildung 22 die Aufteilung auf die 20 Flugversuche (siehe Abbildung 23) nicht ganzzahlig ausgeht: Wenn man annimmt, dass 100 % auf 20 Flugversuche aufgeteilt werden (vgl. mit dem Baumdiagramm in Abbildung 23), so müsste ein einzelner Flugversuch 5 % ausmachen; damit scheinen im Histogramm aus Abbildung 22 beim dritten und beim vierten Balken ungefähr halbe Flugversuche auf, was nicht sinnvoll ist. Abbildung 21 soll zeigen, wie ein zum Baumdiagramm aus Abbildung 23 passendes Histogramm stattdessen aussehen könnte, wobei für den dritten Balken von links ein Flugversuch (5 %) und für den vierten fünf Flugversuche (25 %) angenommen wurden (Konstruktionsprotokoll siehe Anhang).

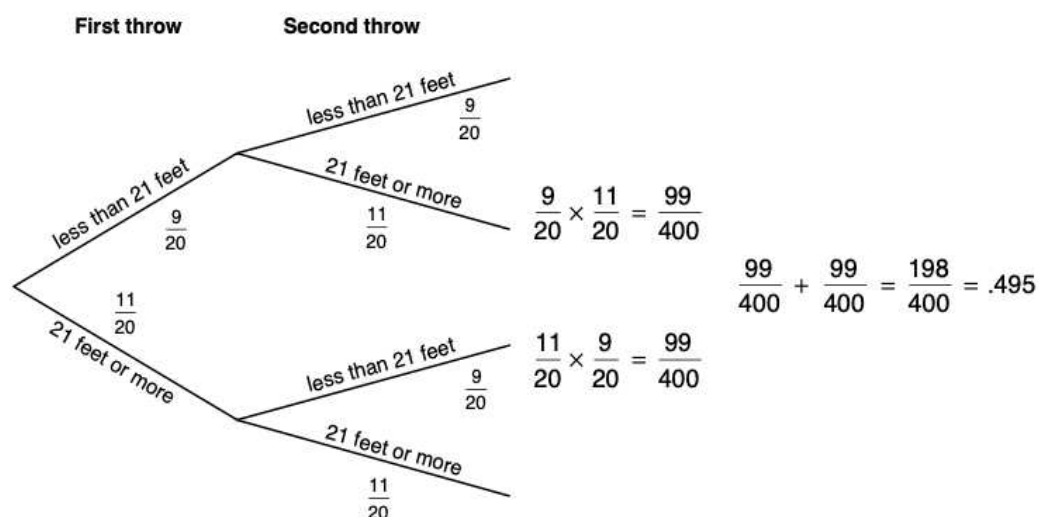


Abbildung 23: Baumdiagramm für das Beispiel zum Papierflieger (NCTM, 2000, S. 255)

Anwendungsbezug

Nicht nur die Stochastik als Wissenschaft, sondern auch ihr historischer Werdegang werden wesentlich von ihren Anwendungen geprägt. In diesem Sinne und aufgrund der in den Abschnitten 4 bis 6 erörterten Argumente ist auch für den Stochastikunterricht die Nähe zu den

Anwendungen und experimentelles Arbeiten, insbesondere im Hinblick auf Fehlvorstellungen zur Stochastik, zu empfehlen. In diesem Abschnitt wurde ein Blick in unterschiedliche Schulbücher aus den USA und aus England geworfen, um zu vergleichen, wie der Bezug zu den Anwendungen hergestellt und experimentelles Arbeiten umgesetzt wird. Im Lehrplan bzw. in den Bildungsstandards finden sich vor allem jene Hinweise zu dieser Fragestellung, die im Abschnitt „Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten“ in Bezug auf die Rolle von Zufallsversuchen bereits diskutiert wurden (siehe auch Abbildung 18 (1) (b) (c) (e) (f) (i), (2) (b) (c) (d), (3) (a)) (siehe Abschnitt 7.1.4).

In den britischen Schulbüchern der Elmwood-Reihe finden sich hauptsächlich Aufgaben, die zwar einen Sachkontext schaffen, aber in denen der Alltagsbezug nicht ernsthaft durchdacht wird, und letztlich nicht die reale Situation im Mittelpunkt zu stehen scheint, sondern vielmehr das Einüben des mathematischen Kalküls. Ein Beispiel dafür ist folgende Aufgabe:

„A pencil case contains pencils of the following colours:- 6 red, 3 black, 1 green and 1 blue. A pencil is selected without looking. Find the probability that the pencil is: (a) red (b) black (c) green” (Rayner & White, 2008, S. 183).

Man kann sich bei dieser Angabe fragen, was drei schwarze und erst recht sechs rote Stifte überhaupt bringen sollen, und man sollte sich vonseiten der Schülerinnen und Schüler auf die Frage gefasst machen, was einem im Alltag die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit überhaupt bringen würde. Wieso würde jemand blind in ein Federpenal greifen, wenn er eigentlich eine bestimmte Farbe haben will? Würde jemand im wirklichen Leben bei einer solchen blinden Ziehung tatsächlich Wahrscheinlichkeiten ausrechnen? Man kann etliche ähnliche Beispiele für solche eingekleideten Aufgaben finden: Es sollen ein Fisch aus einem Teich (in dem sich auch ein paar Piranhas befinden) oder eine Wäscheklammer bestimmter Farbe blind gezogen werden, usw. (Rayner & White, 2008). Es besteht dabei die Gefahr, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik als unrealistisch erleben und daraus schließen, dass es nicht viel bringt sich damit zu beschäftigen.

Der Arbeitskreis für Stochastik empfiehlt, wie in Abschnitt 6 erwähnt, anwendungsorientierte Aufgaben aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler in den Unterricht einzubinden (AK-Stochastik GDM, 2003, S. 22). Einerseits sind jene Beispiele, bei denen es ums Würfeln, Ziehen von Karten, Drehen von Glücksrädern und ähnlichen Problemstellungen aus dem Glückspielbereich geht, auf den ersten Blick Teil des Erfahrungsbereiches vieler Schülerinnen und Schüler, andererseits haben sie oft durch die Ausrichtung auf das Einüben mathematischer Kalküle auch an Anwendungsbezug verloren. Die Lernenden selbst zu fragen, die sie im Alltag

interessieren, Daten sammeln zu lassen, mit denen dann im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht gearbeitet werden kann, wird auch vom Arbeitskreis für Stochastik empfohlen (AK-Stochastik GDM, 2003, S. 22).

Auf der Homepage des NCTM finden sich in der Zeitschrift „Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12 MTLT“ einige anwendungsorientierte Unterrichtsvorschläge, wie der folgende zum Thema Sichelzellenanämie für die sechste Schulstufe:

Sickle cell disease is a very common disease throughout the world. [...] Using Punnett squares, activities guide students' evaluation of inheritance using theoretical probability. Then, students perform trials using tools to compare theoretical and experimental probabilities. (Bloom et al., 2020)

Unter einem „Punnett square“ ist eine Tabelle gemeint, in die die Allele des Vaters (in diesem Fall ist dieser erkrankt und weist daher ein krankes Allel auf) und die der (gesunden) Mutter sowie alle möglichen Kombinationen eingetragen werden, um die theoretischen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, dass das Kind an Sichelzellenanämie erkrankt (Bloom et al., 2020, S. 152–153). In diesem Fall ist der Erkenntnisgewinn aus dem „Punnett square“ nicht besonders hoch, da sich zwei gesunde Genotypen AA und zwei Genotypen AS mit je einem kranken Allel ergeben, was auch ohne die Tabelle leicht nachvollziehbar wäre. Danach werden die experimentellen Wahrscheinlichkeiten zu demselben Problem bestimmt, indem die Kinder zunächst je 20 Ziehungen aus zwei Säckchen (eine Ziehung für das Allel von der Mutter und die andere für das vom Vater) vornehmen (Bloom et al., 2020, S. 154). Es folgt eine Diskussion darüber, ob die Ergebnisse übereinstimmen (dies ist nicht der Fall) und wie die Diskrepanzen zu erklären sind, worauf hin weitere Ziehungen folgen und die Daten der ganzen Klasse letztlich gemeinsam ausgewertet werden (Bloom et al., 2020, S. 154–155). Diese Unterrichtseinheit verbindet den Anwendungsbezug zur Biologie und Genetik (Bloom et al., 2020, S. 154) mit dem Vergleich des experimentellen und theoretischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs und der Datenanalyse. Außerdem haben die Schülerinnen und Schüler vielfältige Gelegenheiten untereinander und in der Klassendiskussion, ihre Standpunkte mathematisch zu begründen und zu den Überlegungen ihrer Mitlernenden Stellung zu nehmen. Solche Unterrichtsstunden nehmen mehr Zeit in Anspruch als die Bearbeitung der weiter oben beschriebenen eingekleideten Aufgaben, aber sie besitzen das Potential, Interesse zu wecken und mathematische Gespräche zu provozieren, die die Einsicht der Schülerinnen und Schüler steigern können.

7.1.5 Sekundarstufe II

Es ist zwar nicht der Schwerpunkt dieser Arbeit, aber im Sinne einer abgerundeten Gesamtdarstellung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Unterrichts wird im Folgenden ein kurzer vergleichender Überblick dazu gegeben, welche mathematischen Begriffe und Methoden nach der Sekundarstufe I in den Standarddokumenten bzw. im Lehrplan der beiden Länder vorkommen.

In der Sekundarstufe II haben sowohl das amerikanische als auch das britische Konzept gemeinsam, dass nicht nur Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ereignisse bei mehrstufigen Zufallsexperimenten, sondern auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten dazukommen (CCSSI, 2010a; DfE, 2014b; NCTM, 2000). In den USA sind außerdem Berechnungen zu Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Erwartungswerten in unterschiedlichen Ausmaßen vorgesehen (CCSSI, 2010a; DfE, 2014b; NCTM, 2000).

Sowohl die US-Standards als auch der britische Lehrplan sehen in den neunten bis zwölften bzw. zehnten bis elften Schulstufen eine Ausdifferenzierung der Berechnungen bei mehrstufigen Zufallsexperimenten durch die Abgrenzung unabhängiger Ereignisse von abhängigen Ereignissen, wobei für letztere die Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten nötig wird (CCSSI, 2010a, S. 82; DfE, 2014b, S. 45; NCTM, 2000, S. 331). Dies impliziert normalerweise die Verwendung der Additions- bzw. Multiplikationsregel in verallgemeinerter Form, obwohl diese nur in den CCSSM explizit genannt werden (die verallgemeinerte Multiplikationsregel wird dabei zum Erweiterungsbereich gezählt) (CCSSI, 2010a, S. 82). Außerdem werden auch die Methoden zur Bestimmung des Ereignisraums bei mehrstufigen Zufallsversuchen erweitert: Im britischen Lehrplan tauchen nun erstmals Baumdiagramme auf (DfE, 2014b, S. 45), die in den US-Bildungsstandards schon ab der Sekundarstufe I vorgesehen sind (CCSSI, 2010a, S. 51, NCTM, 2000, S. 255), außerdem werden in den CCSSM und im britischen Lehrplan auch Kontingenztabellen eingeführt (allerdings im UK nur für den Erweiterungsbereich) (CCSSI, 2010a, S. 82, DfE, 2014b, S. 46). Als weitere Hilfestellung zur Erschließung des Ereignisraums wird in den amerikanischen Bildungsstandards auch zum ersten Mal explizit das Berechnen der Anzahl von Kombinationen bzw. Permutationen genannt (in den CCSSM nur im Erweiterungsbereich) (NCTM, 2000, S. 331, CCSSI, 2010a, S. 82). Begriffe aus der Mengenlehre kommen an dieser Stelle in den CCSSM, anders als im britischen Lehrplan, der diese in der Sekundarstufe I einführt, dazu (CCSSI, 2010a, S. 82, DfE, 2013c, S. 9).

In den USA ist sowohl vom NCTM als auch in den CCSSM vorgesehen, dass außerdem Zufallsvariablen definiert und ihre Erwartungswerte berechnet und interpretiert werden, als auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen sowohl mit Hilfe berechneter theoretischer als auch experimentell bestimmter empirischer Wahrscheinlichkeiten entwickelt werden (CCSSI, 2010a, S. 82–83; NCTM, 2000, S. 324). Ob es sich dabei nur um diskrete oder auch um stetige Zufallsvariablen bzw. Verteilungen handelt, geht aus dem CCSSM-Dokument nicht hervor. Im Standardkonzept des NCTM sind jedoch sowohl einfache diskrete, insbesondere die Binomialverteilung, als auch stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen vorgesehen (NCTM, 2000, S. 333).

Im britischen Lehrplan finden sich außer den Inhalten zu mehrstufigen Zufallsexperimenten und bedingten Wahrscheinlichkeiten nur noch folgende Stoffinhalte:

- die Eigenschaft, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten einer vollständigen Menge sich gegenseitig ausschließender Ereignisse Eins ergibt, anwenden;
- ein Wahrscheinlichkeitsmodell verwenden, um die Ergebnisse zukünftiger Experimente vorherzusagen; verstehen, dass unverzerrte empirische Stichproben mit zunehmendem Stichprobenumfang zu theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen hinstreben werden (DfE, 2014b, S. 45).

Beim zweiten Punkt handelt es sich um den in der Sekundarstufe I fehlenden Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten, der die Lernenden hier wohl vor allem zum Gesetz der großen Zahlen hinführen soll. Der erste Punkt wird aufgrund der darin erwähnten einander gegenseitig ausschließenden Ereignisse hauptsächlich bei mehrstufigen Zufallsexperimenten unabhängiger Ereignisse zur Anwendung kommen, die im letzten Absatz genannt wurden. Weder Zufallsvariablen noch Erwartungswerte scheinen im britischen Lehrplan vorgesehen zu sein und die im zweiten obigen Punkt erwähnten theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden nicht näher erläutert. Ein Blick in die Lehrpläne für die GCSE bzw. A-Levels zeigt, dass in Großbritannien tatsächlich für den Pflichtschulabschluss im Sinne der GCSE die bisher beschriebenen Inhalte vorgesehen sind, während für die A-Levels diskrete sowie stetige Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen (inklusive Binomial- und Normalverteilung) sowie Hypothesentests vorgesehen sind (DfE, 2013a, 2016).

7.1.6 Fazit des Ländervergleichs

In beiden Ländern lässt sich ab der sechsten bzw. siebenten Schulstufe eine Quantifizierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs feststellen. Allein im Entwurf des NCTM wird der Zufalls- und

Wahrscheinlichkeitsbegriff auf informeller Ebene bereits in der Primarstufe eingeführt. Vonseiten der kognitiven Entwicklung der Kinder und der Fachdidaktik ist dieses Vorgehen, wie in den Abschnitten 4.2, 2.2 und 6 anhand von Forschungsergebnissen gezeigt wurde, zu empfehlen. Eine wesentliche positive Auswirkung dieser frühen Einführung besteht darin, dass etliche mathematische Fachbegriffe besser auf die Jahrgangsstufen aufgeteilt werden können. Beim späteren Erlernen der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit müssen nicht alle Fachbegriffe auf einmal eingeführt werden und das Thema ist im Grunde nicht völlig ungewohnt für die Lernenden. Diesen Vorteil können die CCSSM und der britische Lehrplan nicht nutzen und riskieren, vor allem durch die gleichzeitige Einführung der Mengenlehre in Großbritannien, die Überforderung der Schülerinnen und Schüler bei einem komplexen Thema, bei dem die Intuition oft fehlt oder irreführend ist.

8 Einbettung in den österreichischen Lehrplan

In diesem Kapitel werden die in den vorhergehenden Kapiteln diskutierten wissenschaftlichen Forschungsergebnisse sowie die Einsichten und Schlussfolgerungen aus dem Ländervergleich genutzt, um ein Konzept für die Einbettung verschiedener Inhalte der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den österreichischen AHS-Lehrplan auszuarbeiten. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Umsetzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I, wobei für die Voraussetzungen auch die Primarstufe relevant ist und schließlich auch ein kurzer Ausblick auf die Fortführung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepte bis hin zur Reifeprüfung erfolgen soll. Es wurden in diesem Kapitel auch fachdidaktische Quellen aus dem deutschsprachigen Raum mit einbezogen, weil hier sprachspezifische Aspekte, vor allem was die Verwendung von Fachbegriffen angeht, von Bedeutung sind, die nicht durch den Ländervergleich abgedeckt werden können.

8.1 Voraussetzungen aus der Primarstufe

Nicht nur die Bildungsstandards in den USA, sondern auch die Empfehlungen des Arbeitskreises für Stochastik der GDM und der deutsche Lehrplan sehen wahrscheinlichkeitstheoretische Stoffinhalte ab der Primarstufe vor. Da es aufgrund ihrer zunehmenden Bedeutung für die Allgemeinbildung in vielen Ländern Bestrebungen gibt, die Wahrscheinlichkeitsrechnung früher, schon ab der Volksschule einzuführen, ist es sinnvoll anzunehmen, dass die zukünftige Lehrplangestaltung auch in Österreich in diese Richtung verlaufen wird. Im Folgenden wird von der Annahme ausgegangen, dass in der Volksschule erste, informelle Überlegungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung stattfinden.

Entsprechend dem Konzept des NCTM könnte in der Primarstufe folgende Bildungsstandards integriert werden (NCTM, 2000, S. 114, 176, 181) (Der Arbeitskreis der GDM empfiehlt ein dazu sehr ähnliches Vorgehen für die Primarstufe (AK-Stochastik GDM, 2003, S. 22–23)): Zunächst Fragen über die Wahrscheinlichkeit verschiedener konkreter Ereignisse aus der Alltagswelt der Kinder qualitativ mit den Ausdrücken „passiert eher“ bzw. „passiert eher nicht“ (als Pendant zum englischsprachigen „more/less likely“) beantwortet werden (NCTM, 2000, S. 114; AK-Stochastik GDM, 2003, S. 22–23). Diese Begriffe können durch, zunächst informelle, Versuche mit Zahlenwürfeln, Glücksrädern und Ähnlichem (und der Aufzeichnung von Häufigkeiten unterschiedlicher Ergebnisse) damit in Verbindung gebracht werden, wie oft bzw. selten bestimmte Ergebnisse auftreten (NCTM, 2000, S. 114). Wenn man dies z. B. mittels Aneinanderreihung von Steckwürfeln auf enaktiver Ebene und später mit Strichlisten

durchführt, ist als Voraussetzung zu Beginn lediglich der 20er-Zahlenraum notwendig (Sill & Kurtzmann, 2019). Der Schritt zur Definition des sicheren bzw. des unmöglichen Ereignisses als immer bzw. niemals auftretendes Ereignis ist an dieser Stelle naheliegend (NCTM, 2000, 114, 181), allerdings wird vonseiten der Fachdidaktik im deutschsprachigen Raum die Verwendung des Begriffs Ergebnis statt Ereignis empfohlen (Sill & Kurtzmann, 2019). Gegen Ende der Primarstufe werden Ansätze der Quantifizierung, die z. B. mit Hilfe der Null-Eins-Wahrscheinlichkeitsskala aus dem britischen Lehrplan zur Veranschaulichung unterstützt werden können, gemacht (DfE, 2013c, S. 9). Die Begriffe „wahrscheinlich“ bzw. „unwahrscheinlich“ sowie ein erster Wahrscheinlichkeitsbegriff können indirekt anhand von Beispielen eingeführt werden und dem sicheren bzw. unmöglichen Ergebnis können die Wahrscheinlichkeiten Eins bzw. Null zugeordnet werden (NCTM, 2000, 176, 181).

8.2 Einbettung in den AHS-Lehrplan der Sekundarstufe I

Als gemeinsamer Nenner aus dem Ländervergleich haben sich in den ersten beiden Jahrgängen der Sekundarstufe I die Einführung der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit im Zusammenspiel mit der experimentellen Wahrscheinlichkeit und in den letzten beiden Jahrgängen das Kennenlernen zwei- bis mehrstufiger Zufallsexperimente herauskristallisiert. Aufgrund des Spiralprinzips sollten idealerweise in jeder Schulstufe Lernziele zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zugeordnet werden, dies hat jedoch unter Berücksichtigung der mathematischen Kompetenzen aus vorhergehenden Jahrgängen zu geschehen.

Die vollständige Quantifizierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist mit dem Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten besonders effektiv, wie sowohl der Ländervergleich als auch Forschungsergebnisse und fachdidaktische Empfehlungen zeigen (siehe Abschnitte 4.2.3, 5.2.2 und 6), und soll auf diese Weise auch das Gesetz der großen Zahlen für die Lernenden erfahrbar machen. Voraussetzung dafür ist, dass Bruchzahlen, Dezimalzahlen und Prozente insoweit von den Schülerinnen und Schülern beherrscht werden, dass einerseits einfache Werte für Wahrscheinlichkeiten in diesen Schreibweisen angegeben und ineinander umgewandelt werden können, und andererseits auch Größenvergleiche positiver rationaler Zahlen möglich sind. Als weitere Voraussetzungen sind vor allem der Begriff der relativen Häufigkeiten und, aus der deskriptiven Statistik, z. B. Histogramme, Balkendiagramme, Liniendiagramme, Säulendiagramme zur Darstellung dieser relativen Häufigkeiten zu nennen. Es ist zu beachten, dass konkretes Rechnen mit Brüchen kaum eine Voraussetzung für das erste Arbeiten mit dem Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff ist,

sondern eher für Berechnungen im Sinne der ersten und zweiten Pfadregel, die bei mehrstufigen Zufallsversuchen etwas später relevant werden.

Im derzeitigen österreichischen Lehrplan sind (positive) Dezimal- und Bruchzahlen ab der fünften Schulstufe vorgesehen, wobei zunächst noch die Darstellung der Zahlen und der Aufbau von Grundvorstellungen im Mittelpunkt stehen (BMBWF, 2019a, S. 83). Es werden zunächst nur leichte Aufgaben mit Bruchzahlen gerechnet (BMBWF, 2019a, S. 83). Danach erfolgt eine sukzessive Weiterentwicklung des Rechnens mit positiven rationalen Zahlen (BMBWF, 2019a). Insbesondere werden in der sechsten Schulstufe die Prozentrechnung, das Umformen von Brüchen in Dezimalzahlen und umgekehrt und die relativen Häufigkeiten mit entsprechenden graphischen Darstellungsformen eingeführt (BMBWF, 2019a, S. 8384). In der siebten Schulstufe sollten Schülerinnen und Schüler rationale Zahlen auf der Zahlengeraden darstellen, Größenvergleiche mit rationalen Zahlen anstellen und mit rationalen Zahlen Rechnungen durchführen, die die vier Grundrechnungsarten miteinander verknüpfen (BMBWF, 2019a, S. 84). Im Sinne der weiter oben beschriebenen Voraussetzungen, könnte mit dem Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff auf alle Fälle ab der siebten Schulstufe gearbeitet werden. Allerdings wäre dies auch ab der sechsten Schulstufe gut machbar, denn in dieser Klasse sind den Lernenden zum ersten Mal Dezimalzahlen, Bruchzahlen, Prozente, das Umwandeln zwischen Brüchen und Dezimalzahlen sowie relative Häufigkeiten (mit passenden Diagrammen) bekannt (BMBWF, 2019a, 83–84). Man müsste dabei Abstriche beim Größenvergleich von Bruchzahlen und ihrer Darstellung auf der Zahlengeraden in Kauf nehmen, aber da das Umwandeln in Dezimalzahlen bekannt sein sollte, könnte man die entsprechenden Dezimalzahlen vergleichen bzw. auf der Zahlengeraden einzeichnen (z. B. bei Histogrammen, die relative Häufigkeiten darstellen), und auch das sichere Rechnen mit Brüchen ist nicht unbedingt eine Voraussetzung. In der fünften Schulstufe wäre dies im österreichischen Lehrplan schon schwieriger zu rechtfertigen: Man müsste vor allem auf Prozente und relative Häufigkeiten, aber auch auf die Umformungen zwischen Bruch- und Dezimalzahlen verzichten (BMBWF, 2019a, 82–83), womit der so wesentliche Vergleich experimenteller und theoretischer Wahrscheinlichkeiten nicht mehr möglich wäre, aber auch eine mangelhafte Interpretation der Werte von Ergebnissen bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen zu befürchten wäre. Infolgedessen wäre es wenig sinnvoll, den Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff im österreichischen Lehrplan in dieser Schulstufe einzuführen. Im Folgenden wird daher von einer Einführung der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit ab der sechsten oder siebten Schulstufe ausgegangen.

Das Durchführen von Computersimulationen bei Zufallsexperimenten sollte (zusätzlich zu den tatsächlich von den Lernenden durchgeführten Zufallsversuchen) auch spätestens ab dieser Schulstufe stattfinden, denn für die Bestimmung experimenteller Wahrscheinlichkeiten und auch für das Erschließen des Gesetzes der großen Zahlen ist die Generierung, das Bearbeiten und die Darstellung großer Datenmengen wesentlich. Dies kann, wie in Abschnitt 7.1.4 erörtert, weitaus schneller und einfacher mit Hilfe des Computers geschehen, was den Schülerinnen und Schülern helfen kann, sich ganz auf die Interpretation der Ergebnisse zu konzentrieren (NCTM, 2000, S. 254).

Durch die ungefähre Festlegung des quantifizierten Wahrscheinlichkeitsbegriffs ab der sechsten oder siebten Schulstufe lassen sich auch für die fünfte bis sechste Schulstufe Lernziele zuordnen. Dazu ist eine Orientierung an einen Teil jener Inhalte, die das NCTM in der dritten bis fünften Schulstufe vorsieht bzw. an den fachdidaktischen Qualitätskriterien des Arbeitskreises für Stochastik möglich (NCTM, 2000, S. 176, 181; AK-Stochastik GDM, 2003, S. 22). In der fünften bis sechsten Schulstufe können die ersten Ansätze zur Quantifizierung aus der Primarstufe noch weiter ausgebaut werden, indem Wahrscheinlichkeiten mit einfachen Brüchen, Dezimalzahlen und später mit Prozenten abgeschätzt und mit den aus den ersten einfachen Zufallsversuchen gewonnen oder im Rahmen des Sammelns von Daten aus der Alltagswelt der Kinder aufgezeichneten relativen Häufigkeiten verglichen werden (NCTM, 2000, S. 181). Obwohl die Verwendung der Null-Eins-Wahrscheinlichkeitsskala ab dem Zeitpunkt der Quantifizierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs weniger effektiv ist, kann sie davor ein geeignetes Hilfsmittel darstellen, um den Prozess der schrittweisen Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit zu unterstützen, indem einfache, bekannte Bruch- und Dezimalzahlen darauf eingezeichnet und sozusagen zur fortschreitenden Verfeinerung des Maßstabs genutzt werden (NCTM, 2000, S. 176, 181). Dies kann auch die Verknüpfung von Dezimal- mit Bruchzahlen auf der anschaulichen Ebene unterstützen. Es kann aber auch damit begonnen werden, wichtige Fachbegriffe der Stochastik wie z. B. das Gegenereignis und einander ausschließende Ereignisse in anschaulicher Weise zu definieren, wobei das theoretische Begriffsgefüge möglichst klein gehalten werden soll (AK-Stochastik GDM, 2003, S. 22).

Nach der Einführung der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit sind die Weichen gelegt, um auch Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten (zunächst ohne bedingte Wahrscheinlichkeiten) im Mathematikunterricht einzubringen. Voraussetzungen für das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten ist die Laplace'sche Wahrscheinlichkeit, der Begriff des Gegenereignisses sowie einander ausschließender Ereignisse (und damit verallgemeinernd im Zusammenhang stehend: dass die

Summe aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich Eins ist, sofern es sich dabei um einander ausschließende Ereignisse handelt). Aus mathematischen Teilbereichen außerhalb der Stochastik wäre spätestens jetzt das Rechnen mit rationalen Zahlen, vor allem mit Bruchzahlen, zusätzlich den Voraussetzungen für den Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff notwendig, um Berechnungen mit Hilfe der ersten bzw. zweiten Pfadregel durchführen zu können. Baumdiagramme, die in beiden Standard-Dokumenten aus den USA und im britischen Lehrplan (auch wenn erst in der Sekundarstufe II) auftreten, stellen hier ein wesentliches Werkzeug zum Erschließen des Ereignisraums dar. Aber auch geordnete Listen oder Tabellen können anschaulich sein, wobei die Tabellen auf zweistufige Zufallsversuche beschränkt bleiben (siehe Abbildung 24). Baumdiagramme haben den Vorteil, dass weder die Anzahl der Stufen noch die der Zweige wirklich begrenzt ist, außer durch die Einschränkungen der graphischen Darstellung, was sie zu einem Hilfsmittel macht, das sowohl für zweistufige als auch für mehrstufige Zufallsexperimente verwendet werden kann. Davon, die Mengenlehre extra für die Wahrscheinlichkeitsrechnung oder in der gleichen Unterrichtsphase einzuführen, ist aufgrund der im Abschnitt 7.1.4 zum Ereignisraum bei mehrstufigen Zufallsversuchen diskutierten Probleme abzuraten. Da selbst in den im Abschnitt 7.1.4 betrachteten britischen Schulbüchern die weiter oben erwähnten Begriffe, die für das Erschließen mehrstufiger Zufallsexperimente notwendig sind, ausschließlich ohne mengentheoretische Begriffe erläutert werden, ist die Mengenlehre nicht als Voraussetzung für dieses Thema zu betrachten (White, 2015, S. 249, 252).

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Abbildung 24: mögliche Versuchsausgänge beim Werfen zweier Würfel (eigene Darstellung)

Ab der sechsten oder siebten Schulstufe sind – dem österreichischen Lehrplan zufolge – die Voraussetzungen bzgl. des Rechnens mit Bruch- und Dezimalzahlen sowie mit Prozenten erfüllt (BMBWF, 2019a, S. 83–85). Falls in der sechsten oder siebten Schulstufe mit der Laplace'schen Wahrscheinlichkeit gearbeitet wird, dann ist die Einbindung mehrstufiger Zufallsversuche ohne weiteres ab der siebten oder achten Schulstufe möglich.

Besonders Augenmerk ist dabei auch auf das im Nuffield-Bericht vorgestellte Problem der Aggregation zu richten, das sich darin äußert, dass viele Lernende Schwierigkeiten damit haben, zu verstehen, wieso z. B. beim Werfen zweier Würfel die möglichen Augensummen nicht gleichwahrscheinlich sind, obwohl es die Augenzahl-Paare schon sind (siehe Abschnitt 6) (Bryant & Nunes, 2012a, S. 6). Fehlvorstellungen zum Ereignisraum, bei denen Versuchsausgänge wie z. B. (1, 2) und (2, 1) beim Werfen zweier Würfel von manchen Schülerinnen und Schülern nicht voneinander unterschieden werden, sollten im Unterricht Beachtung finden. Eine Beispiel vom NCTM, das zeigt, wie dies umgesetzt werden kann, findet sich in Abschnitt 7.1.4 im Bereich zu „Fehlvorstellungen“ (NCTM, 2000, S. 254). Bevor der zugehörige Zufallsversuch durchgeführt wird, sollen die Lernenden vorhersagen, welche Versuchsausgänge bzw. Wahrscheinlichkeiten zu erwarten sind, wenn man zwei Münzen 60 Mal wirft (NCTM, 2000, S. 254). Dabei kann die fälschliche Annahme mancher Schülerinnen und Schüler, dass es nur drei gleichwahrscheinliche Ergebnisse gibt (zwei Mal Kopf, zwei Mal Zahl und je einmal Kopf bzw. Zahl), zu Abweichungen von den experimentellen Wahrscheinlichkeiten (i. e. relativen Häufigkeiten) führen, was wiederum eine Gelegenheit darstellen kann, dieses Problem zu thematisieren (NCTM, 2000, S. 254). Diese Aufgabe eignet sich auch, um Baudiagramme als Lösungshilfe für die Ausarbeitung des Ereignisraums bei mehrstufigen Zufallsversuchen im Unterricht vorzustellen (NCTM, 2000, S. 254). Obwohl es schwierig sein kann, Aufgaben zu finden, die Fehlvorstellungen adressieren, können herkömmliche Aufgaben durch kleine Umformulierungen oder offenere Fragestellungen insbesondere in Verbindung mit experimentellem Arbeiten (siehe Abschnitte 5.2, 6 und 7.1.4 unter „Fehlvorstellungen“) zu Verbesserungen führen. Daher sind auch bei mehrstufigen Zufallsexperimenten Simulationen weiterhin von Bedeutung, um den Lernenden Möglichkeiten zu bieten, ihre Annahmen und Voraussagen zu überprüfen (siehe Abschnitt 8.2.1).

8.2.1 Technologieeinsatz in der Sekundarstufe I

Das Durchführen von Zufallsexperimenten nimmt im Stochastikunterricht eine besondere Stellung ein, weil gezeigt werden konnte, dass es einerseits hilft, Fehlvorstellungen zu bewältigen und andererseits den Lernzuwachs im Stochastikunterricht vor allem bei jüngeren Lernenden signifikant erhöht (siehe Abschnitte 4.2.3 und 5.2.2). Außerdem zweigt auch der Ländervergleich, wie zentral das Arbeiten mit Simulationen sowohl in Großbritannien als auch in den USA ist (siehe Abschnitt 7.1.4).

Dazu eignet sich in Österreich vor allem die dynamische Geometriesoftware GeoGebra aus folgenden Gründen gut: Da GeoGebra sowohl für die Tabellenkalkulation, als auch als CAS (Computeralgebrasystem) sowie für die dynamische Geometriesoftware verwendet werden kann, und GeoGebra all diese Funktionen integriert anbietet, stellt es ein wirkungsvolles Hilfsmittel dafür dar, Terme, Berechnungen und Daten auch bildlich darzustellen. Die Benutzeroberfläche ist gut geeignet für den Gebrauch durch Schülerinnen und Schüler dieser Altersgruppe und die Software darf auch bei der Reifeprüfung benutzt werden (nach § 18 Abs. 3 der Prüfungsordnung AHS ab dem Haupttermin 2018) (SRDP, o. J.). Es ist also vorteilhaft, wenn die Lernenden bis zur Reifeprüfung möglichst vielfältige Erfahrungen mit GeoGebra gesammelt haben.

In diesem Sinne werden ein paar Möglichkeiten geschildert, wie die in Abschnitt 7.1.4 geschilderten Simulationen mit GeoGebra verwirklicht werden können. Es ist bereits unter Verwendung von einigen wenigen Befehlen möglich, Zufallszahlen mit GeoGebra zu generieren und diese graphisch darzustellen. Das Erlernen dieser Fertigkeiten kann relativ schnell und z. B. in Partnerarbeit, mit Hilfe eines Tutorials erfolgen, das die Schülerinnen und Schüler mit etwas Anleitung durch die Lehrperson im Unterricht durcharbeiten. Als Quelle für die folgende Beschreibung einer Simulation wurde ein Tutorial von Sebastian Voß auf der Homepage von GeoGebra verwendet (Voß, o. J.).

Mit dem Befehl *Zufallszahl(<minimaler Wert>, <maximaler Wert>)* kann im CAS-Fenster von GeoGebra eine ganzzahlige Zufallszahl erzeugt werden. Es gibt auch die Alternative, mit dem Befehl *ZufallszahlGleichverteilt(<minimaler Wert>, <maximaler Wert>)* eine gleichverteilte Zufallszahl aus dem Intervall [*<minimaler Wert>, <maximaler Wert>*] zu erzeugen (für eine normalverteilte Zufallszahl wird der Befehl *ZufallszahlNormalverteilt(<Mittelwert>, <Standardabweichung>)* verwendet). Dabei stehen die Bezeichnungen minimaler bzw. maximaler Wert für den kleinsten bzw. höchsten Wert, den diese Zufallszahl annehmen darf. Im Falle eines fairen Würfels wären dies die Werte Eins und Sechs und beim fairen Münzwurf könnte man für Kopf Null und für Zahl Eins einsetzen. Die erzeugte Zufallszahl könnte im ersten Fall z. B. Fünf, in zweiten Fall z. B. Null (Kopf) sein. Meist will man nicht nur einen Zufallsversuch, sondern eine ganze Reihe davon simulieren. Dazu kann man mit dem Befehl *Folge((<Ausdruck>, <Variable>, <Startwert>, <Endwert>),*

sofern für *<Ausdruck>* der obige Befehl *Zufallszahl(<minimaler Wert>, <maximaler Wert>)* eingesetzt wird, eine Folge von solchen Zufallszahlen generieren. Für das Werfen eines Würfels, welches 100-mal durchgeführt wird, könnte dies folgendermaßen lauten:

Folge(Zufallszahl(1, 6), i, 1, 100). Das Ergebnis, das daraufhin von GeoGebra ausgegeben wird, ist eine Liste von Zufallszahlen wie beispielsweise:

Liste1 = {3, 5, 3, 2, 6, 1, 1, 4, 3, 6, 6, 5, 4, 2, 4, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 5, 6, 1, 4, 4, 4, 1, 3, 2, 3, 5, 4, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 6, 5, 6, 1, 4, 4, 2, 5, 1, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 5, 4, 2, 1, 1, 5, 2, 2, 4, 3, 1, 6, 6, 4, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 1, 5, 6, 4, 6, 3, 3, 5, 3, 4, 4, 2, 5, 2, 1, 5, 1}

Wenn man nun wissen will, wie oft die 4 gewürfelt wurde, kann man die mit dem Befehl *ZähleWenn(x=4, <Liste>)* bewerkstelligen, wobei *<Liste>* für den Namen steht, den GeoGebra der im vorhergehenden Schritt erzeugten Liste von Zufallszahlen zugeteilt hat. Als Ergebnis erhält man die Anzahl aller Vierer in der Liste1, was hier z. B. 20 ist. Soll nun ein Balkendiagramm erstellt werden, das die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse darstellt, so kann dazu der Befehl

Balkendiagramm(<Liste>, <Balkenbreite>, <vertikaler Skalierungsfaktor (optional)>)

angewendet werden. Das würde in unserem Beispiel den Befehl *Balkendiagramm(Liste1, 1, 1/100)* ergeben. Wenn man im *<vertikalen Skalierungsfaktor>* durch die Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente dividiert (um von der absoluten Häufigkeit ausgehend die relative zu erhalten), also in unserem Fall 1/100 eingibt, erhält man ein Balkendiagramm mit der relativen Häufigkeit auf der vertikalen Achse. Das auf diese Weise erzeugte Balkendiagramm ist in Abbildung 25 zu sehen (Konstruktionsprotokoll siehe Anhang). Bei Wahl von Eins für den *<vertikalen Skalierungsfaktor>* ergibt sich ein Balkendiagramm für die absoluten Häufigkeiten.

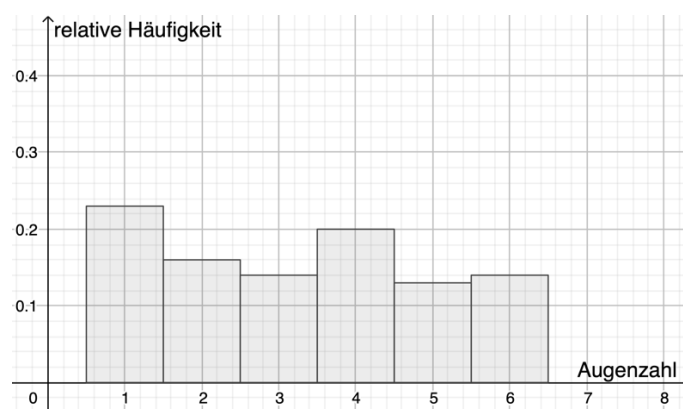


Abbildung 25: Balkendiagramm der relativen Häufigkeiten beim Werfen eines Würfels (eigene Darstellung, mit GeoGebra erstellt)

Für die Generierung einer relativ großen Menge an Daten und die graphische Darstellung der dazugehörigen relativen Häufigkeiten sind im Grunde nur zwei Befehlszeilen nötig gewesen. Anhand solcher Simulationen können Schülerinnen und Schüler mit etwas Übung in ein paar Minuten experimentelle Wahrscheinlichkeiten anschaulich darstellen und die eigenen

Vermutungen überprüfen. Will man die Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente schrittweise vergrößern, um im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen zu veranschaulichen, dass die relativen Häufigkeiten sich den Werten der Laplace'schen Wahrscheinlichkeiten nähern, bieten sich zahlreiche bereits erstellte Simulationen auf der Homepage von GeoGebra an. Ein Beispiel dafür ist die in Abbildung 26 erkennbare Simulation eines Münzwurfs bei unterschiedlicher Anzahl von Versuchen, die von Mathias Hornof erstellt wurde (Hornof, o. J.).

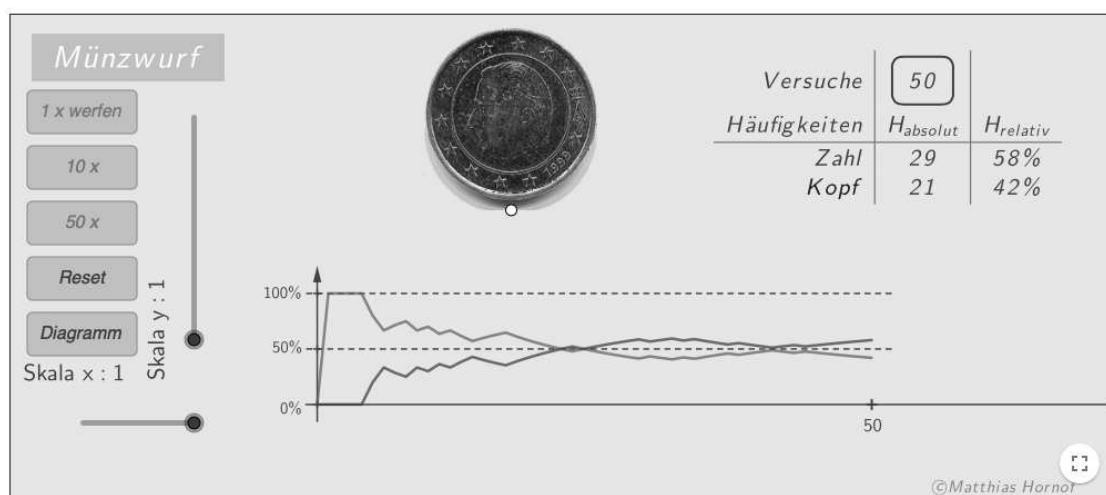


Abbildung 26: GeoGebra-Simulation zum Münzwurf (Hornof, o. J.)

Eine weitere Möglichkeit, den Unterricht durch Technologieeinsatz fachdidaktisch effektiver zu gestalten, stellt eine von Victoria Döller geschaffene Software (ProVis) dar, die ein Hilfsmittel beim Erstellen von Baumdiagrammen bietet. Dadurch wird es für Schülerinnen und Schüler, die über weniger stark ausgeprägte zeichnerische Kompetenzen verfügen, möglich, sich ganz auf das Modellieren des Zufallsprozesses zu konzentrieren. Außerdem können auch Zufallsexperimente mit vielen Stufen leicht mit dem Computer erstellt und mit den Schülerinnen und Schülern analysiert werden.

8.3 Ausblick auf die Sekundarstufe II

Da die Sekundarstufe II nicht den Schwerpunkt dieser Arbeit darstellt, werden die wahrscheinlichkeitstheoretischen Stoffinhalte aus diesen Jahrgängen im Folgenden nur kurz gestreift. Aus dem Ländervergleich ergeben sich als wichtigste theoretische Meilensteine aus dem Stochastikunterricht der Sekundarstufe II die Einführung bedingter Wahrscheinlichkeiten in Abgrenzung zum Konzept der unabhängigen Ereignisse, (diskrete und stetige) Zufallsvariablen mit ihren Wahrscheinlichkeitsverteilungen (insbesondere die Binomial- bzw. Normalverteilung), Kenngrößen wie z. B. der Erwartungswert und Hypothesentests (sowie Signifikanzniveau, Fehler 1. und 2. Art) (siehe Abschnitt 7.1.5). Vor allem bei den Inhalten aus

der schließenden Statistik variieren die länderspezifischen Anforderungen, vor allem hinsichtlich dessen, welche der Inhalte dem Kern- und welche dem Erweiterungsbereich zuzuordnen sind. Der Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten ist bei den Wahrscheinlichkeitsverteilungen weiterhin von Bedeutung und wird auch in den Bildungsstandards aus den USA als auch im britischen Lehrplan erwähnt (siehe Abschnitt 7.1.5). Stetige Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilungen (insbesondere die Normalverteilung) können aufgrund des österreichischen Lehrplans ab der zwölften Schulstufe eingeführt werden, weil erst ab diesem Zeitpunkt die dafür nötigen Grundlagen aus der Integralrechnung gegeben sind (BMBWF, 2019a, S. 171–172). Das ist aber im derzeitigen Lehrplan ohnehin so vorgesehen (BMBWF, 2019a, S. 171–172). Bedingte Wahrscheinlichkeiten und die damit zusammenhängenden Stoffinhalte können ab der neunten Schulstufe eingeführt werden, denn sie erfordern die Betrachtung mehrstufiger Zufallsversuche mit einander ausschließenden Ergebnissen als Voraussetzung, welche in der siebten oder achten Schulstufe eingebunden werden können (siehe Abschnitt 8.2). In der zehnten und elften Schulstufe können diskrete Zufallsvariablen, Erwartungswert und diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen – insbesondere die Binomialverteilung – thematisiert werden. Mit Hypothesentests bei stetigen Zufallsvariablen und den damit verbundenen mathematischen Begriffen und Verfahren kann erst nach der Einführung der stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der zwölften Schulstufe gearbeitet werden. Als wichtigste Voraussetzungen für das Berechnen und Interpretieren von Konfidenzintervallen, die in den USA in den Bildungsstandards des NCTM explizit als Stoff der neunten bis zwölften Schulstufe erwähnt werden (NCTM, 2000, S. 331), sind stetige Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen (insbesondere die Normalverteilung) sowie damit zusammenhängenden Kenngrößen wie z. B. der Erwartungswert zu nennen. Daher ist die Einführung der Konfidenzintervalle in der zwölften Schulstufe, wie es auch im derzeit gültigen AHS-Lehrplan vorgesehen ist, als sinnvoll zu betrachten (BMBWF, 2019a, S. 172, 540–541).

9 Resümee

Im internationalen Vergleich erfolgt der erste Kontakt von Kindern mit Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen des Schulunterrichts (sehr) früh, teilweise ab der Primarstufe. Wie aus dem Ländervergleich zwischen den USA und England ersichtlich, ist eine solche Umsetzung ab der Primarstufe durchaus machbar, aber die Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgt allerspätestens in der Sekundarstufe I (siehe Abschnitt 7.1). Die im Jahr 2004 in Deutschland erlassenen Bildungsstandards sehen ebenfalls vor, dass Wahrscheinlichkeitsrechnung ab der Primarstufe durchgehend einen festen Teil der Schulmathematik darstellt. Dies wird bildungspolitisch vor allem durch die zunehmende gesellschaftliche Bedeutung der Stochastik gerechtfertigt. Ziel dieser Arbeit war es, eine mögliche wissenschaftliche Begründung für einen Stochastikunterricht ab der Sekundarstufe I zu erkunden und aus dem Vergleich der Umsetzung im englischsprachigen Raum Rückschlüsse auf Möglichkeiten zur Implementierung im österreichischen Mathematikunterricht zu ziehen. Gründe für einen frühen Stochastikunterricht in Österreich gibt es viele (siehe Kapitel 3): Die internationale Wettbewerbsfähigkeit des heimischen Schulsystems würde leiden, wenn dieses für die Allgemeinbildung so wichtige Teilgebiet der Mathematik in deutlich geringerem Ausmaß unterrichtet wird, als dies in anderen Ländern der Fall ist. Außerdem ist in Österreich der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die früh einen berufsorientierten Bildungsweg einschlagen (und daher keine AHS-Oberstufe besuchen) vergleichsweise hoch, was zur Folge hätte, dass viele während ihrer Schullaufbahn gar nicht mit Wahrscheinlichkeitsrechnung in Berührung kommen. Weiters verspielt man sich bei Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe II wesentliches Motivationspotential, dass durch die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Alltagswelt der Kinder und durch Brett- und Würfelspiele schon früh gegeben ist.

Zunächst stellt sich die Frage, ab welchem Alter bei Kindern überhaupt von entwicklungspsychologischer Seite her die Voraussetzungen gegeben sind, um eine sinnvolle Auseinandersetzung mit dem Konzept des Zufalls bzw. der Wahrscheinlichkeit zu erwägen. Die dazu von Piaget und Inhelder durchgeführten Versuche führten diese zu den Schlussfolgerungen, dass sich bei Kindern der Zufallsbegriff ab ca. sieben und der quantifizierte Wahrscheinlichkeitsbegriff ab ca. elf Jahren entwickelt (siehe Abschnitt 4.1). Durch nachfolgende wissenschaftliche Untersuchungen wurde dieses Ergebnis etwas modifiziert (siehe Abschnitt 4.2): Es zeigte sich, dass Kinder einerseits schon früh, in der Primarstufe, (vor allem nonverbal) mit einem (nicht quantifizierten) Konzept von Zufall bzw.

Wahrscheinlichkeit umgehen können, andererseits wurde durch eine mehrere Studien nachgewiesen, dass Kinder in der Primarstufe durch Stochastikunterricht einen Lernzuwachs erzielen können. Im Rahmen der Diskussion wissenschaftlicher Forschungsergebnisse für bzw. gegen einen frühen Stochastikunterricht gab es auch wichtige Hinweise darauf, welche fachdidaktischen Aspekte bei der Umsetzung Beachtung finden sollten. Insbesondere ließen sich bei handlungsorientiertem Unterricht, im Rahmen dessen die Lernenden reichlich Gelegenheiten zum experimentellen Arbeiten hatten, signifikant bessere Ergebnisse erzielen als bei herkömmlichem Unterricht mit Arbeitsblättern (siehe Abschnitt 4.2.3).

Studien aus der kognitiven Psychologie konnten zeigen, dass Kinder (und Erwachsenen) zahlreiche intuitive Fehlvorstellungen haben, wenn es um Fragen zum Zufall bzw. zu Wahrscheinlichkeiten geht (siehe Abschnitt 5.1). Im Rahmen verschiedener Forschungsarbeiten wurde jedoch auch festgestellt, dass Stochastikunterricht eine positive Auswirkung hinsichtlich Fehlvorstellungen zu stochastischen Fragen haben kann (siehe Abschnitt 5.2). Dies stellt ein weiteres wesentliches Argument für einen frühen Stochastikunterricht dar. Dabei konnte gezeigt werden, dass selbstständiges, experimentelles Arbeiten in Kleingruppen besser dazu geeignet war, Fehlvorstellungen zu überwinden, als ein Unterricht im Vorlesungsstil (siehe Abschnitt 5.2.2). Im Rahmen des auf Experimente ausgerichteten Unterrichtsstils bekamen die Lernenden oft Gelegenheiten dazu, ihre intuitiven Vorurteile zum Zufallsbegriff anhand von Versuchen zu überprüfen und aus den sich ergebenden Widersprüchen zu lernen (siehe Abschnitt 5.2.2).

Untersuchungen, die im Literaturbericht der Nuffield-Foundation beschrieben werden, zeigen weitere Schwierigkeiten auf, die Kinder (und teilweise auch Erwachsene) beim Verstehen des Zufalls- bzw. Wahrscheinlichkeitsbegriffs haben, wie z. B. den Ereignisraum systematisch und vollständig zu erschließen und Probleme bei der Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten (siehe Abschnitt 6).

Zum Zweck der fachdidaktischen Umsetzung des Stochastikunterrichts ist das Spiralprinzip ein leitender Grundsatz bei der Einbettung wahrscheinlichkeitstheoretischer Lernziele in den Lehrplan (siehe Abschnitt 2.2): Dabei ist auf einen sukzessiven Anstieg des Schwierigkeitsgrades sowie des Abstraktionsniveaus von intuitiven, informellen und eher qualitativen Überlegungen in der Primarstufe hin zu einer zunehmenden Formalisierung, Quantifizierung und Abstraktion in der Sekundarstufe hin, zu achten. Dies impliziert, dass für jede Teildisziplin in jeder Schulstufe eine Zuordnung von Lernzielen stattfinden sollte. Für die

Stochastik bedeutet dies, dass unter anderem sowohl die Statistik als auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung von der Primarstufe an unterrichtet werden sollten.

Für den Ländervergleich wurden zwei verschiedene Bildungsstandard-Konzepte aus den USA und der britische Lehrplan gegenübergestellt. Zu den Gemeinsamkeiten ist zu nennen, dass in allen drei Modellen der quantifizierte Wahrscheinlichkeitsbegriff ab der sechsten oder siebten Schulstufe eingeführt wird, dass in der Sekundarstufe I auch zumindest zweistufige Zufallsexperimente (ohne bedingte Wahrscheinlichkeiten) sowie dass tatsächliche und simulierte Zufallsversuche durchgeführt werden sollen (siehe Abschnitt 7.1). Alle drei Konzepte sehen außerdem das Vergleichen experimenteller und theoretischer Wahrscheinlichkeiten vor, auch wenn der britische Lehrplan dies erst in der Sekundarstufe II explizit verlangt (siehe Abschnitt 7.1.4). Der wichtigste Unterschied besteht darin, dass der britische Lehrplan und die CCSSM vergleichbare wahrscheinlichkeitstheoretische Inhalte in einem bzw. in drei Jahren (also nur in der Sekundarstufe) abdecken während das NCTM diese Stoffinhalte auf alle Schulstufen bis zur achten aufteilt (siehe Abschnitt 7.1.4). Letzteres erscheint aus mehreren Gründen sinnvoller: Es entspricht eher dem Spiralprinzip und hat daher den Vorteil, dass nicht so viele mathematische Fachbegriffe innerhalb einer relativ kurzen Zeit neu dazukommen, was zur Überforderung der Lernenden führen kann. Die Schülerinnen und Schüler haben dabei die Möglichkeit über längere Zeit hinweg (von der Primarstufe an) Intuitionen für den Zufall bzw. für Wahrscheinlichkeiten zu entwickeln, welche vor allem in der Stochastik nicht als selbstverständlich zu betrachten sind. Eine solche Anordnung der Lehrinhalte ist auch deswegen tragfähiger für die Aneignung Kompetenzen, weil das Wiederaufgreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf unterschiedlichen Schulstufen das langfristige Merken unterstützen.

Die Einbettung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab der Primarstufe ist den diskutierten Forschungsergebnissen aus der Entwicklungspsychologie und der Fachdidaktik zufolge zu empfehlen (siehe Abschnitte 2.2, 4, 5 und 6). Dabei kann qualitativ, informell und handlungsorientiert mit einem intuitiven Zufalls- bzw. Wahrscheinlichkeitsbegriff gearbeitet werden (siehe Abschnitt 8.1). In der fünften Schulstufe können eine zunehmende Exaktifizierung der stochastischen Fachbegriffe und erste Ansätze zur Quantifizierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs stattfinden (siehe Abschnitt 8.2). Aufgrund der Gegebenheiten des österreichischen Lehrplans wäre eine Einführung des quantifizierten Wahrscheinlichkeitsbegriffs ab der sechsten oder siebten Schulstufe möglich (siehe Abschnitt 8.2). Dabei sollte der Vergleich theoretischer und experimenteller Wahrscheinlichkeiten anhand tatsächlicher oder mit Computern simulierter Zufallsversuche im Hinblick auf den

Umgang mit Fehlvorstellungen besondere Beachtung finden (siehe Abschnitt 8.2). Zwei- bis mehrstufige Zufallsexperimente können ab der siebten oder achten Schulstufe in den Unterricht eingebunden werden, wobei Baumdiagramme ein wichtiges Hilfsmittel zur systematischen Erschließung des Ereignisraums darstellen (siehe Abschnitt 8.2). Das Vergleichen mit den relativen Häufigkeiten bei Zufallsversuchen (z. B. mit Hilfe von Simulationen) sollten auch hier weiterhin eine wichtige Rolle spielen (siehe Abschnitt 8.2).

Es hat sich bei der Betrachtung der englischsprachigen Schulbücher gezeigt, dass sowohl Aufgaben, die Fehlvorstellungen konkret adressieren, als auch anwendungsorientierte Aufgaben aus der Alltagswelt der Schülerinnen und Schüler schwer zu finden sind (siehe Abschnitt 7.1.4). Das Üben ist quantitativ oft recht umfangreich, beschränkt sich aber hauptsächlich auf Probleme aus dem Glücksspielbereich und das in eher kalkülorientierter Form, bei der der Bezug zur realen Situation nicht im Vordergrund steht (siehe Abschnitt 7.1.4). Es kann dabei leicht der Eindruck entstehen, dass Wahrscheinlichkeitsrechnung nur z. B. das Ziehen von Kugeln aus Urnen oder das Würfeln betrifft (siehe Abschnitt 7.1.4). Die Tatsache, dass Wahrscheinlichkeitsrechnung alle Lebensbereiche durchzieht, geht dabei unter. Darin wird ein gewisser Aufholbedarf bei der Entwicklung anwendungsorientierter Aufgaben gesehen, die dem täglichen Leben der Schülerinnen und Schüler in unterschiedlichen Bereichen näher stehen. Es besteht außerdem ein Bedarf für die Entwicklung solcher Aufgaben, die Fehlvorstellungen zutage treten lassen.

Literaturverzeichnis

AK-Stochastik GDM (2003). Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule*, 23(3), 21–26.

Amir, G. S., & Williams, J. S. (1999). Cultural Influences on Children's Probabilistic Thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(1), 85–107. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00018-8](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00018-8)

Berufsbildende Schulen (o. J.). *Lehrpläne berufsbildender Schulen*. Berufsbildende Schulen. <https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/downloads/>

Biehler, R., & Engel, J. (2015a). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2015. Aufl., S. 221–251). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8>

Bloom, P., Kurz, T. L., & Yanik, H. (2020). Probabilities of Sickle Cell Disease. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12 MTLT*, 113(2), 152–155. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0062>

BMBWF (2012). *Lehrplan der Volksschule, BGBl. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 303/2012*. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. https://www.bmbwf.gv.at/dam/jcr:b89e56f6-7e9d-466d-9747-fa739d2d15e8/lp_vs_gesamt_14055.pdf

BMBWF (2014). *Lehrplan der Handelsakademie, BGBl. II Nr. 209/2014 vom 27. August 2014*. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. https://www.hak.cc/files/syllabus/Lehrplan_HAK_2014.pdf

BMBWF (2018). *Lehrpläne—Neue Mittelschulen, BGBl. II Nr. 185/2012 zuletzt geändert durch BGBl. II Nr. 230/2018*. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/Bundesnormen/NOR40207228/NOR40207228.pdf>

BMBWF (2019a). *Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, BGBl. Nr. 88/1985*. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10008568/Lehrpl%3%a4ne%20%e2%80%93%20allgemeinbildende%20h%3%b6here%20Schulen%2c%20Fassung%20vom%2013.01.2020.pdf>

BMBWF (2019b). *Lehrpläne der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten, BGBl.*

II Nr. 262/2015. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20009288>

Borovcnik, M. (1997). Fundamentale Ideen als Organisationsprinzip in der Mathematikdidaktik. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, 27, 17–32.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (Hrsg.). (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2015. Aufl.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8>

Bruner, J. S. (1970). *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin-Verl. [u.a.]. <https://ubdata.univie.ac.at/AC01247178>

Bryant, P., & Nunes, T. (2012a). *Children's understanding of probability: A literature review (summary report)*. Nuffield Foundation. https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/11/NUFFIELD_FOUNDATION_CUoP_SUMMARY_REPORT.pdf

Bryant, P., & Nunes, T. (2012b). *Children's understanding of probability: An intervention study*. Nuffield Foundation. https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/11/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf

CCSSI (2010a). *Common Core Standards for Mathematics*. Common Core State Standards Initiative. http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

CCSSI (2010b). *Common Core State Standards in Mathematics. Frequently Asked Questions*. Common Core State Standards Initiative. <http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/FAQs.pdf>

CK-12 Foundation (o. J.). *CK-12 Interactive Middle School Math 7 for CCSS*. CK-12. <https://flexbooks.ck12.org/cbook/ck-12-interactive-middle-school-math-7-for-ccss/>

Cohen, J., & Hansel, M. (1961). *Glück und Risiko: Die Lehre von der subjektiven Wahrscheinlichkeit*. Europ. Verl.-Anst. <https://ubdata.univie.ac.at/AC02430212>

Davies, C. M. (1965). Development of the Probability Concept in Children. *Child Development*, 36(3), 779. <https://doi.org/10.2307/1126923>

DER STANDARD (2016, September 16). *Österreich: Hoher Anteil an berufsbildenden Schülern*. Der Standard. <https://www.derstandard.at/story/2000044473947/oesterreich-hoher-anteil-an-berufsbildenden-schuelern>

DfE (2011). *The Framework for the National Curriculum. A report by the Expert Panel for the National Curriculum review.* Department for Education. https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/175439/NCR-Expert_Panel_Report.pdf

DfE (2013a). *Mathematics. GCSE subject content and assessment objectives.* Department for Education.

https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/254441/GCSE_mathematics_subject_content_and_assessment_objectives.pdf

DfE (2013b). *Mathematics programmes of study: Key stage 1 and 2. National curriculum in England.* Department for Education. https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/335158/PRIMARY_national_curriculum_-_Mathematics_220714.pdf

DfE (2013c). *Mathematics programmes of study: Key stage 3. National curriculum in England.* Department for Education. https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239058/SECONDARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf

DfE (2014a). *National curriculum in England: Framework for key stages 1 to 4. Statutory Guidance.* Department for Education. <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-framework-for-key-stages-1-to-4/the-national-curriculum-in-england-framework-for-key-stages-1-to-4>

DfE (2014b). *National curriculum in England: Mathematics programmes of study. Statutory Guidance.* Department for Education. <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>

DfE (2016). *Mathematics. AS and A level content.* Department for Education. https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/516949/GCE_AS_and_A_level_subject_content_for_mathematics_with_appendices.pdf

Falk, R. (1979). Revision of probabilities and the time axis. *Proceedings of the third international conference for the psychology of mathematics education*, 64–66. <http://www.igpme.org/publications/current-proceedings/>

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the Teaching of Probability Improve Probabilistic Intuitions? An Exploratory Research Study. *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1–24.

- Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 523–549. <https://doi.org/10.1007/BF00312714>
- Fischbein, E., Pampu, I., & Mânzat, I. (1970). Comparison of Ratios and the Chance Concept in Children. *Child Development*, 41(2), 377–389. <https://doi.org/10.2307/1127038>
- Fischer, R. (2012). *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung*. Trauner. <https://ubdata.univie.ac.at/AC09347766>
- Fleischhacker, V. (2000). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und beurteilende Statistik in der Unterstufe*. <https://ubdata.univie.ac.at/AC02996045>
- Goldberg, S. (1966). Probability Judgments by Preschool Children: Task Conditions and Performance. *Child Development*, 37(1), 157. <https://doi.org/10.2307/1126436>
- Hornof, M. (o. J.). *Münzwurf*. GeoGebra. Abgerufen 20. Februar 2020, von <https://www.geogebra.org/m/BHqy5C2G>
- Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in Probability—Responding to Classroom Realities. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 909–957). Information Age Publishing.
- Jung, W. (1978). Zum Begriff einer mathematischen Bildung – Rückblick auf 15 Jahre Mathematikdidaktik. *mathematica didactica*, 1, 161–176.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3(3), 430–454. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(72\)90016-3](https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90016-3)
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1973). On the psychology of prediction. *Psychol Rev*, 80(4), 237–251.
- Kipman, U. (2014). *Kompetenzen von Kindern in den Bereichen Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit feststellen und fördern: Welche Faktoren begünstigen den Erfolg und was kann handlungsorientierter Unterricht in der Grundschule und der Sekundarstufe I leisten?* <https://permalink.obvsg.at/AC10777313>
- Konold, C. (1989). Informal Conceptions of Probability. *Cognition and Instruction*, 6(1), 59–98. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0601_3
- Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*.

Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>

Kütting, H. (1994). *Didaktik der Stochastik*. BI-Wiss.-Verl.

Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in „purely random“ situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 557–568. <https://doi.org/10.1007/BF00540060>

Lehrlingsportal (o. J.). Lehrberuf. *Lehrlingsportal.at*. <https://www.lehrlingsportal.at/tipps-infos/die-lehre/lehrberufe/>

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. [https://www.nctm.org/store/Products/NCTM-Principles-and-Standards-for-School-Mathematics,-Full-Edition-\(PDF\)/](https://www.nctm.org/store/Products/NCTM-Principles-and-Standards-for-School-Mathematics,-Full-Edition-(PDF)/)

OECD (2015). Freigegebene Aufgaben aus den PISA-Tests. *BIFIE – Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens*. <https://www.bifie.at/material/internationale-studien/pisa/freigegebene-aufgaben-aus-den-pisa-tests/>

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The Origin of the idea of chance in children*. W. W. Norton & Company Inc. <http://permalink.obvsg.at/AC13677933>

Rayner, D., & White, M. (2008). *Essential Maths 7C*. Elmwood Press.

Rayner, D., & White, M. (2019). *Essential Maths 7 Higher*. Elmwood Education.

Schreiber, A. (2011). *Begriffsbestimmungen: Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung*. Logos-Verl. <https://ubdata.univie.ac.at/AC08882132>

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics*, 8(3), 295–316. <https://doi.org/10.1007/BF00385927>

Sill, H.-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7>

SRDP (o. J.). *SRDP Mathematik*. Standardisierte Reife- Und Diplomprüfung. <https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik>

Tietze, U. P. (1979). Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie. *mathematica didactica*, 2, 137–163.

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (1982). *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*. Vieweg. <https://ubdata.univie.ac.at/AC01046090>

- Tversky, A., & Kahneman, D. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology*, 5(2), 207–232. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(73\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0010-0285(73)90033-9)
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, 185(4157), 1124–1131. <https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124>
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychol Rev*, 90(4), 293–315.
- Vollrath, H. J. (1978). Rettet die Ideen! *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 8, 449–455.
- Voß, S. (o. J.). *Tutorial: Simulieren mit Geogebra (Jg. 8)*. GeoGebra. <https://www.geogebra.org/m/xqk9y69g>
- White, M. (2015). *Essential Maths 9 Core*. Elmwood Education.
- Wittenberg, A. I. (1990). *Bildung und Mathematik: Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach* (2. Aufl.). Klett. <https://ubdata.univie.ac.at/AC00790684>
- Wollring, B. (1993). Über Wesensvorstellungen junger Kinder zur Wahrscheinlichkeit. In K. P. Müller & Bundestagung für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 27. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 22. Bis 26.3.1993 in Freiburg, Schweiz* (S. 398–401). Franzbecker.
- Yost, P. A., Siegel, A. E., & Andrews, J. M. (1962). Nonverbal Probability Judgments by Young Children. *Child Development*, 33(4), 769–780. <https://doi.org/10.2307/1126888>

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist es, eine wissenschaftliche Begründung für eine frühere Einbettung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der österreichischen Schulmathematik zu diskutieren und Rückschlüsse darauf zu ziehen, an welcher Stelle im österreichischen Lehrplan der Sekundarstufe I bestimmte stochastische Inhalte eingeführt werden können.

Um dieser Zielsetzung zu entsprechen, werden einerseits Ergebnisse der empirischen Forschung aus der Mathematikdidaktik und der kognitiven Psychologie sowie fachdidaktische Prinzipien herangezogen. Andererseits wird die Implementierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Lehrplänen und Unterrichtsmaterialien englischsprachiger Länder (USA und England) mit dem Schwerpunkt der Sekundarstufe I verglichen. Dieses Bild wird durch ein paar Beispiele für unterstützenden Technologieeinsatz im Stochastikunterricht abgerundet.

Abstract

The aim of this thesis is to debate the scientific arguments for an earlier introduction of probability into Austrian school mathematics and to draw inferences about the grades at which certain stochastic content could be introduced into the Austrian lower secondary curriculum.

For this purpose, results of empirical research from the disciplines of mathematics didactics and cognitive psychology as well as didactical principles will be discussed. Furthermore, the implementation of probability in the standards, curricular documents and teaching materials of anglophone countries (the US and England) will be compared with special regards to lower secondary education. Additionally, examples for the use of technology to support stochastics education will be presented.

Anhang

Konstruktionsprotokoll zu Abbildung 21:

Name	Definition	Wert
Zahl a		a = 3
Row	Input	Output
#1	a:=Histogramm({15,18,21,24,27,30,33}, {0.1,0.35,0.05,0.25,0.15,0.1})	a:=Histogramm({15, 18, 21, 24, 27, 30, 33}, {exact(0.1), exact(0.35), exact(0.05), exact(0.25), exact(0.15), exact(0.1)})
#2		

Created with [GeoGebra](#)

Konstruktionsprotokoll zu Abbildung 25:

Name	Definition	Wert
Liste Liste1	Folge(Zufallszahl(1, 6), 1, 100)	Liste1 = {3, 5, 3, 2, 6, 1, 1, 4, 3, 6, 6, 5, 4, 2, 4, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 5, 6, 1, 4, 4, 4, 1, 3, 2, 3, 5, 4, 3, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 6, 5, 6, 1, 4, 4, 2, 5, 1, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 5, 4, 2, 1, 1, 5, 2, 2, 4, 3, 1, 6, 6, 4, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 1, 5, 6, 4, 6, 3, 3, 5, 3, 4, 4, 2, 5, 2, 1, 5, 1}
Zahl a	ZähleWenn(x $\neq$ 4, Liste1)	a = 20
Zahl b	Balkendiagramm(Liste1, 1, 1 / 100)	b = 1

Created with [GeoGebra](#)