



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Über den goldenen Schnitt und den menschlichen Körper

Präsenz der goldenen Zahl im menschlichen Körper

verfasst von / submitted by

Nevena Petrovic

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 406 592 UR

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik
UF Textiles Gestalten/R

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

<i>Einleitung</i>	3
<i>1. Definition des goldenen Schnittes</i>	4
<i>2. Historischer Rückblick</i>	7
<i>2.1. Der Prozess der Namensgebung</i>	7
<i>2.2. Ist die Zahl ϕ in der Cheops-Pyramide?</i>	9
<i>2.3. Die Griechen</i>	11
<i>2.4. Euklid und die platonischen Körper</i>	12
<i>2.5. Die Pythagoreer</i>	15
<i>2.6. Die Bedeutungen des Pentagramms</i>	16
<i>2.7. Leonardo von Pisa</i>	18
<i>2.8. Luca Pacioli und Leonardo da Vinci</i>	19
<i>2.9. Der goldene Zirkel</i>	21
<i>3. Der goldene Schnitt in der Mathematik</i>	22
<i>3.1. Konstruktion des GS</i>	22
<i>3.2. Das regelmäßige Fünfeck</i>	28
<i>3.3. Das goldene Dreieck und die Winkel in dem goldenen Dreieck</i>	31
<i>3.4. Das regelmäßige Zehneck</i>	33
<i>3.5. Das goldene Rechteck</i>	34
<i>3.6. Goldene Spirale und spira mirabilis</i>	35
<i>3.7. Der goldene Winkel</i>	41
<i>3.8. Goldene Ellipse</i>	42
<i>3.9. Goldener Quader</i>	44
<i>3.10. Platonische Körper</i>	45
<i>3.11. Die Irrationalität und Inkommensurabilität</i>	48
<i>3.12. Die goldene Zahl ϕ und Fibonacci</i>	50
<i>3.13. Die Kettenbruchdarstellung und -wurzel</i>	57
<i>3.14. Fraktale</i>	60
<i>3.15. Geometrischer Trugschluss</i>	65
<i>4. Allgemeine Vorkommnisse außerhalb der Mathematik</i>	67
<i>5. Der menschliche Körper</i>	70
<i>5.1. Das Gesicht</i>	72

5.1.1. Ein schönes Lächeln	74
5.2. Die Hand	76
5.3. Der Fuß und die Gehbewegung	77
5.4. Die Organe	79
5.4.1. Die Lunge	79
5.4.2. Das Herz	81
5.4.3. Das Gehirn	84
5.4.4. Fortpflanzung	86
5.6. Die DNA	86
6. Conclusio	88
Abbildungsverzeichnis	89
Literaturverzeichnis	92

Einleitung

Diese Arbeit behandelt eine Erscheinung, die uns stetig im Alltag begleitet. Diese ist ein besonderes Verhältnis, das sogar in der DNA des Menschen eingeschrieben ist und in seiner Anthropometrie mehrfach vertreten ist. Es handelt sich um den goldenen Schnitt.

Es wird von einigen Autoren als ein Maß der Schönheit betrachtet, das im Menschen ein trautes Gefühl auslöst. Dieses Maß weckte seit je her in der Wissenschaft die Fragestellung, in welchen Objekten, Sachgebieten oder Theorien der goldene Schnitt zu finden sei. Hypothesen und Ergebnisse einiger Studien wurden im Laufe der Zeit hinterfragt, bestätigt oder widerlegt. In diesem Fall beschäftigt sich die Arbeit hauptsächlich mit Fakten und Studien, die schon bestätigt oder bisher nicht widerlegt wurden.

Die ersten drei Kapitel befassen sich mit dem geschichtlichen und mathematischen Aspekt des goldenen Schnittes. Im geschichtlichen Rückblick wird auf die verschiedenen Bezeichnung des goldenen Schnittes, archäologische Funde, kurze Biografien essenzieller Persönlichkeiten und die Symbolik des Pentagramms eingegangen. Die Bahnbreite an Themengebieten der Erscheinung des goldenen Schnittes ist überragend. Daher werden einige Beispiele im vierten Kapitel nur gestreift, so dass sich das fünfte Kapitel auf die Vorkommnisse des besonderen Verhältnisses im menschlichen Körper konzentriert. Dieser stellt auch den Schwerpunkt meiner Arbeit dar. Die Conclusio wirft einen Blick in die Zukunft, in der das goldene Verhältnis eine entscheidende Rolle im medizinischen Fortschritt spielen kann.

1. Definition des goldenen Schnittes

Der goldene Schnitt lässt sich wie folgt definieren:

„Wir sagen, eine Strecke sei im Verhältnis des ‚Goldenen Schnittes‘ geteilt, wenn sich die beiden Teilstücke zueinander verhalten wie das längere Teilstück zur ganzen Strecke.“ (Walser, H. (1993). *Der goldene Schnitt* (Einblicke in die Wissenschaft : Mathematik). Stuttgart Zürich: Teubner Verl. d. Fachvereine. 10.)

„Die äußere Teilung konstruiert zu einer gegebene [*sic!*] Strecke einen Punkt auf der Verlängerung der Ausgangsstrecke. Der neue Punkt teilt die verlängerte Strecke zu der Ausgangsstrecke im Goldenen Schnitt.“ (Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). DAS GOLDENE ZEITALTER. 7.)

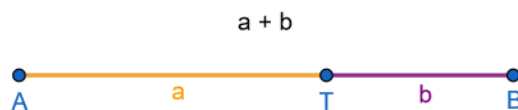


Abbildung 1 innere Teilung im goldenen Schnitt

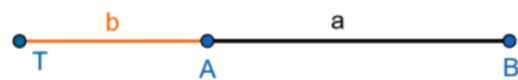


Abbildung 2 äußere Teilung im goldenen Schnitt

Es gibt die innere (Abb. 1) und äußere Teilung (Abb. 2) einer Strecke, so dass die einzelnen Teilstücke im Verhältnis des goldenen Schnittes zueinander stehen. In dem Fall der inneren Teilung wird die Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt T geteilt. Dabei werden die Teilstücke als $a = \overline{AT}$ und $b = \overline{TB}$ und die ganze Strecke als $a + b = \overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB}$ bezeichnet, wobei der Begriff Major für a und Minor für b verwendet wird und aus den lateinischen Wörtern für größer und kleiner abstammen.

Das heißt, dass

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a}$$

eine Teilung einer Strecke im Verhältnis des goldenen Schnittes ist.

Durch Umformen erhält man

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Benennt man das Verhältnis der Teilstücke mit $\phi = \frac{a}{b}$, so erhält man

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Multipliziert man die Gleichung mit ϕ und formt um, so gilt

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Durch die Verwendung der großen Lösungsformel folgt

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \text{ und } \Psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618.$$

Ψ ergibt einen negativen Wert, welcher in der Geometrie als das Verhältnis zweier Längen zueinander als unmöglich erwiesen ist. Man nennt ϕ die „goldene Zahl“. Etwas genauer ausgeschrieben lautet

$$\phi \approx 1,618033988749894848204586834365638117720309179805762862135 \dots$$

Durch Umformen folgt weiter

$$\frac{1}{\phi} = \phi^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618.$$

Analog dazu berechnet man die äußere Teilung mit $a = \overline{AB}$, $b = \overline{TA}$. Man kommt natürlich zum selben Verhältniswert wie bei der inneren Teilung.

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist irrational.

Das wird durch einen indirekten Beweis gezeigt:

Sei $\phi \in \mathbb{Q}$ mit $\phi = \frac{a}{b}$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a > b$ und $\text{ggT}(a,b)=1$. Per Definition ist $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Man setze die beiden Gleichungen gleich $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{b}$. Durch Umformen erhält man $\sqrt{5} = \frac{2a-b}{b}$ $\nexists$, weil die rechte Seite der Gleichung rational ist und $\sqrt{5}$ eine irrationale Zahl ist.

Es wird ein kurzer indirekter Beweis durchgeführt, dass $\sqrt{5}$ irrational ist.

Sei $\sqrt{5} = \frac{c}{d}$ rational mit $c, d \in \mathbb{N}$ und c, d teilerfremd. Durch Quadrieren und Umformen erhält man $5d^2 = c^2$. c^2 ist also durch 5 teilbar. Somit ist auch c durch 5 teilbar mit

$c = 5k$. Das bedeutet, dass $5d^2 = 25k^2$. Das heißt d ist ebenfalls durch 5 teilbar. Weil c und d teilerfremd sind.

Somit ist $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eine irrationale Zahl.

■

(Vgl. Lausch, H. (2009). 119f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 16.).

„In the professional mathematical literature, the common symbol for the Golden Ratio is the Greek letter tau (τ ; from the Greek *topos*, 'to-mi', which means "the cut" or "the section"). However, at the beginning of the twentieth century, the American mathematician Mark Barr gave the ratio the name of phi [...].“ (Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books. 5.)

„ ϕ ist der Anfangsbuchstabe von $\Phi\iota\delta\iota\alpha\varsigma$ (Phidias), einem berühmten griechischen Bildhauer, der etwa von 460 – 430 v. Chr. in Athen tätig war und in dessen Werken der goldene Schnitt oft zum Vorschein kommt.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). *Der goldene Schnitt* (2., überarb. u. erw. Aufl. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 18.)

Die Eigenschaften von ϕ :

$$(a) \phi^2 = \phi + 1 \quad (1.1)$$

$$(b) \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ wobei } \Psi = -\frac{1}{\phi} \quad (1.2)$$

$$(c) \frac{1}{\phi} + \phi = \sqrt{5}$$

$$(d) \Psi + \phi = 1$$

$$(e) \Psi \cdot \phi = -1$$

$$(f) \phi^2 + \frac{1}{\phi^2} = 3$$

Die folgenden Beweise sind ähnlich wie bei Beutelspachter, Verhulst und Pietschmann durchgeführt worden: (a) folgt aus der Umformung der Gleichung $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ aus der obigen Herleitung. Um (b) zu beweisen dividiert man (a) zunächst mit ϕ und formt um, so dass man $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ erhält. Das ergibt

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit (-1), so erhält man

$$-\frac{1}{\phi} = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \psi.$$

Daraus folgt durch Umformen (d) und (e). Aus (b) folgt (c) mit

$$\phi + \frac{1}{\phi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{5}.$$

(f) zeigt man durch Verwendung von (a) und (b):

$$\begin{aligned} \phi^2 + \frac{1}{\phi^2} &= (\phi + 1) + (\phi - 1)^2 = \phi + 1 + \phi^2 - 2\phi + 1 = \phi^2 - \phi + 2 = \\ &= \phi + 1 - \phi + 2 = 3. \end{aligned}$$

■

(Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 18f.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 9, 46.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 3.)

2. Historischer Rückblick

2.1. Der Prozess der Namensgebung

Kepler behauptete: „Die Geometrie birgt zwei große Schätze: Der eine ist der Satz von Pythagoras, der andere der göttliche Schnitt. Den ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den zweiten können wir ein kostbares Juwel nennen.“ (Strick, H. (2018). Mathematik ist wunderschön: Noch mehr Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer. 161.)

Der Begriff „goldene Schnitt“ wird erst seit dem 19. Jahrhundert verwendet und ist damit ziemlich jung. Der Name des besonderen Verhältnisses hat sich seit der Zeit von dem Mathematiker Euklid, also ca. 300 v. Chr., mehrfach verändert. Euklid hat in seinem zweiten Buch beim elften Satz ein Streckenverhältnis beschrieben, welches seitdem das Interesse vieler Mathematiker und Mathematikerinnen weckte und ins lateinische wie folgt übersetzt wurde: „proportio habens medium et duo extrema“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 10.), also „Teilung im inneren und äußeren Verhältnis“ (Walz, G., & Atiyah, M. (2003). Faszination Mathematik. Heidelberg [u.a.]: Spektrum Akad. Verl. 256). Euklid hat eine Teilung die „Stetige Teilung“ genannt, welche sich auf den goldenen Schnitt beziehen sollte. Johannes Kepler (1571-1630) benutzte die letztere Beschreibung auch. Er war jedoch mit der Bezeichnung „Teilung im äußeren und mittleren Verhältnis“ präziser als Euklid. (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 10.)

Zur Zeit der Renaissance hat ein gläubiger venezianischer Mathematiker namens Luca Pacioli (1445-1514) im 16. Jahrhundert, aufgrund seiner Faszination gegenüber dem besonderen Verhältnis, es als „divina proportione“, übersetzt „das Göttliche Verhältnis“, bezeichnet. Er verglich in seinem Buch „Das Göttliche Verhältnis“ im fünften Kapitel die Eigenschaften dieses Verhältnisses mit dem christlichen Gott und versuchte dadurch den Namen zu begründen. Er nannte die folgenden fünf Gründe:

1. Die Einzigartigkeit Gottes spiegelt sich in der Einmaligkeit des Wertes des goldenen Schnittes wieder.
2. Die Definition des goldenen Schnittes besteht aus drei Strecken. Dadurch wird die Dreieinigkeit dargestellt.
3. Die Irrationalität der goldenen Zahl wird mit dem unfassbaren, dem Menschen unbegreiflichen, Gott verglichen.
4. Die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit weist auf Gottes Allgegenwart und Unveränderlichkeit hin.
5. So wie Gott dem Weltall die „Quintessenz“ verleiht, so verhält sich der goldene Schnitt zum Dodekaeder, welche ohne dieses Verhältnis nicht konstruiert werden kann. Pacioli meint auch, dass die anderen vier Elemente der platonischen Körper ohne dem goldenen Schnitt nicht miteinander verglichen werden könnten.

Es wurde in der Folgezeit oft der Name „sectio proportionalis“, das heißt „proportionale Teilung“ verwendet, welcher als erster von dem deutschen Mathematiker und Astronomen Clavius schriftlich aufgezeichnet wurde. Kepler, welcher unter anderem Mathematiker und Astronom war, bediente sich des Namens „divina sectio“, übersetzt „die göttliche Teilung“. Der deutsche Mathematiker Martin Ohm nutzte 1835 den heute weit verbreiteten Ausdruck „Goldene Schnitt“ in seinem Buch „die reine Elementar-Mathematik“, implizierte jedoch, dass dieser Begriff in dieser Zeit schon oral in Gebrauch war. Nach seiner Bucherscheinung tauchte die Bezeichnung vermehrt in der deutschen Literatur auf. Die Ausdrücke „göttlich“ und „golden“ weisen auf die Bewunderung und Einzigartigkeit des Verhältnisses hin (Vgl. Herz-Fischler, R. (1998). 165-170.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 3.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 10.; Walz, G., & Atiyah, M. (2003). 254.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 1.; Strick, H. (2018). 161f.).

2.2. Ist die Zahl ϕ in der Cheops-Pyramide?

Es bestand die Spekulation des Vorhandenseins des goldenen Schnittes in der Cheops-Pyramide von Gizeh. Herodot, ein griechischer Historiker, berichtete über die Maße der Cheops-Pyramide, die er von den ägyptischen Priestern erhielt. Sie lauten: „das Quadrat über ihrer Höhe sei einem Seitendreieck flächengleich.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 140.)

Das bedeutet, dass $h^2 = a \cdot b$, so dass $h^2 = a^2 - b^2$ ist. Somit erhält man $a \cdot b = a^2 - b^2$.

Durch die Division durch b^2 und Umformung der Gleichung gilt $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$. Daraus folgt $\phi = \frac{a}{b}$.

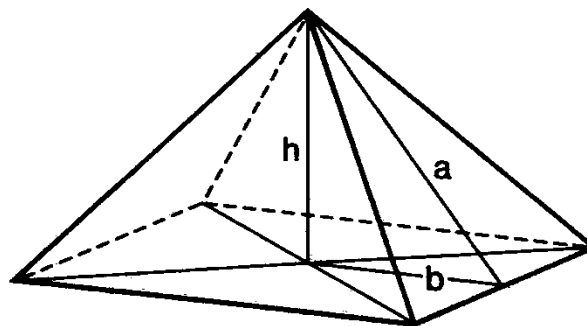


Abbildung 3 Pyramide nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 141.

Diese Theorie stammt von J. Taylors Vorschlag aus dem Jahr 1859. Sie wurde seither zitiert. Der Mathematiker Roger Herz-Fischler untersuchte diese Theorie und nannte einige Einwände. Er kritisierte, dass die Textstelle von Herodots Aufzeichnung nicht eindeutig lesbar sei, da man ihn auch anders interpretieren könne. Er zählte andere Theorien auf, die er geschichtlich authentischer erachtet, da diese anhand archäologischer Ausgrabungen und Papyrusschriften begründet werden. Es gibt keinen schriftlichen Nachweis, dass die Ägypter mit dem goldenen Schnitt vertraut waren. Ein weiterer Kritikpunkt wäre, dass die Mathematik der Ägypter in dieser Zeit nicht in dem Ausmaß fortgeschritten sei.

Roger Herz-Fischler bespricht in seinem Buch „A Mathematical History of the Golden Number“ in einem kurzen Abschnitt über Hieroglyphen, da fünfzackige Sterne, siehe Abbildung 4, darin vorkommen. Spielt das Pentagon oder Pentagramm darin eine Rolle?

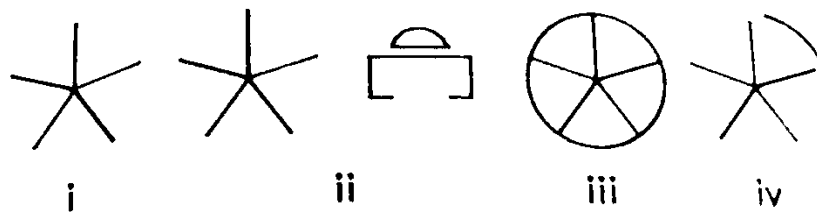


Abbildung 4 Hieroglyphen nach Herz-Fischler, R. (1998). 53.

Die Hieroglyphe (i) stand für einen Stern oder eine Sternkonstellation. Die Hieroglyphe (iii) hatte die Bedeutung „Unterwelt“. Es war auch unter dem Namen „Dukat“ bekannt, welches der Ort der Morgendämmerung war. Die Anzahl der Zacken setzt der Autor mit Zufall und der Tatsache zusammen, dass die Mindestanzahl an Zacken an einem Stern fünf ist. Er nennt Baumgartners Beispiele von Pentagrammen auf Gefäßen, die anscheinend als Markierungen dienten. Diese wurden jeweils in einer durchgehenden Bewegung gemacht (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 140f.; Livio, M. (2008). 58-61.; Herz-Fischler, R. (1998). 52f.).

„Hartnäckigen Gerüchten zum Trotz ist es eher unwahrscheinlich, daß *[sic!]* die ägyptischen Erbauer der Pyramiden (etwa 2000 v. Chr.) den goldenen Schnitt gekannt und ihn beim Bau der Pyramiden verwendet haben“. (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 44.)

2.3. Die Griechen

Die Griechen haben innerhalb von 400 Jahren einen großen Einfluss auf die Weltgeschichte gehabt und unter anderem auch in der Geometrie.

Man sieht bei dem Parthenon (447 - 432 v. Chr.) in der Abbildung 5, welches Perikles bauen ließ, dass die Griechen das goldene Rechteck in ihre Architektur eingebaut haben. In dem Fall in der Vorderfront des Bauwerkes. Livio äußert seine Skepsis, da er behauptet, dass die Maße nicht mit dem goldenen Schnitt übereinstimmen.



Abbildung 5 Das Parthenon im goldenen Rechteck

Diese Verhältnisse kamen in einigen Bauten in Athen, bei Kapitellen und im Gebälk vor. Ein solches Beispiel wäre der Propyläen Tempel, dessen Giebelecke den goldenen Schnitt enthält, siehe Abbildung 6. Laut Cantor ist das mehrfache Auftreten des goldenen Schnittes in den griechischen Bauten kein Zufall, sondern von den Architekten beabsichtigt.

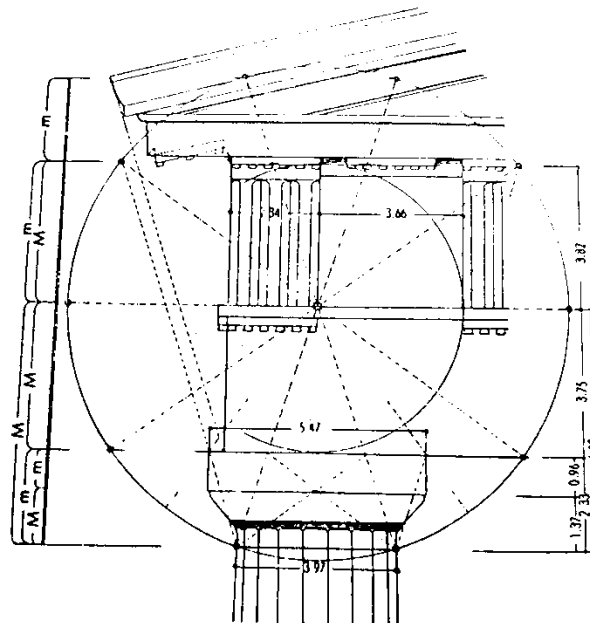


Abbildung 6 Gebälk des Propyläen Tempel nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 143.

Das goldene Rechteck ist mit den platonischen Körpern verknüpft, welche die Griechen als mystisch betrachteten. Plato ist mit dem goldenen Schnitt durch sein Interesse an den platonischen Körpern und der Inkommensurabilität verbunden.

Iosa äußert eine Theorie, die besagt, dass die Griechen den goldenen Schnitt als Richtschnur der Schönheit erachteten, da die Anthropometrie die Approximation der goldenen Zahl beinhaltet, und daraus die Aufmerksamkeit dem goldenen Schnitt galt. Es wird spekuliert, ob der goldene Schnitt in manchen griechischen Skulpturen bewusst eingesetzt wurde oder nicht. Plato definierte die ästhetische Schönheit eines Objektes als dessen Eigenschaft, indem er auf die Reaktion eines jeden „geeigneten“ Betrachters einging. Diese Eigenschaft sollte ein Wohlbefinden in dem genannten Betrachter auslösen und dadurch eine angenehme Erfahrung hinterlassen (Vgl. Iosa, M., Morone, G., & Paolucci, S. (2018). 34.; Livio, M. (2008). 72-75; Huntley, H. (1970). 30f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 141f.).

2.4. Euklid und die platonischen Körper

„Die ebene Geometrie, die man in der Schule lernt, basiert auf den Elementen von Euklid, einem griechischen Mathematiker, der um 300 vor Christus lebte und der einflussreichste Mathematiker des Altertums ist.“ (Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). *Das Zebra-Buch zur Geometrie* (Springer-Lehrbuch). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 250.) Jedoch ist das wenige, das man von seinem Leben erfahren konnte, dass er lediglich in Alexandria als Lehrer tätig war. Er hat neben seinem bekanntesten und bedeutendsten Werk „τα στοιχεία“, übersetzt „die Elemente“, viele weitere Bücher geschrieben, die sich zum Beispiel mit Musik, der Optik und der Mechanik beschäftigten.

„Es ist nach der Bibel das Buch, das in der westlichen Welt am häufigsten produziert und studiert wurde. Seit der Erfindung des Buchdrucks sind mehr als tausend Ausgaben erschienen, dazu sind außerdem viele tausend handschriftliche Kopien im Umlauf.“ (Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). *Das Zebra-Buch zur Geometrie* (Springer-Lehrbuch). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 251.)

Aus seinem (um das Jahr 325 v.Chr.) Werk „die Elemente“, geht hervor, dass er ein bescheidener und gewissenhafter Mathematiker war. Er bezieht keine Anerkennung für jene Teile in seinem Werk, die nicht von ihm stammen. „In fact, he claims no originality whatsoever, in spite of the fact that it is very obvious that he contributed many new proofs, totally rearranged the contents contributed by others to entire volumes, and designed the

whole work.“ (Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books. 76.) Es war sein Bestreben, das mathematische beziehungsweise geometrische Wissen seiner Zeit so weit wie möglich in seinem Werk als deduktive Wissenschaft zu erfassen. Euklid entwickelte anschauliche mathematische Grundaussagen, auch Axiome genannt. Die Elemente bestehen aus dreizehn Büchern, von denen der Inhalt des elften und dreizehnten Buches die geometrische Beschreibung des goldenen Schnittes und die platonischen Körper umfasst. In der Abbildung 7 werden in der Tabelle von G. Aumann einige bedeutsame Proportionen der jeweiligen Bücher aufgelistet.

Prop.	Inhalt
39	Buch XI: Raumlehre
3	Schneiden sich zwei Ebenen, so ist ihr Schnitt eine Gerade.
6	Zwei Lote auf eine Ebene sind parallel.
20	Wird eine Ecke von drei ebenen Winkeln umfasst, so sind zwei beliebige zusammen größer als der dritte.
21	Jede Ecke wird von ebenen Winkeln umfasst, die zusammen kleiner als vier rechte Winkel sind.
18	Buch XII: Volumenmessungen
5	Tetraeder mit gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundflächen.
10	Ein Kegel ist ein Drittel des Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe.
18	Buch XIII: Die Platonischen Körper
Tetraeder, Hexaeder (=Würfel), Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder (siehe Kapitel 4)	
18	Die Kanten der 5 Körper darstellen und miteinander vergleichen.
18a	Außer den besprochenen 5 Körpern gibt es keinen weiteren Körper, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren umfasst wird.

Abbildung 7 Tabelle nach Aumann, G. (2006). 39.

„Er entdeckte den Goldener [*sic!*] Schnitt [...] bei seinen Untersuchungen der platonischen Körper und ebenfalls am Fünfeck.“ (Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). DAS GOLDENE ZEITALTER. 1.) Euklid hat auch Konstruktionen der fünf platonischen Körper angefertigt. Die fünf regulären Polyeder standen für das „Sinnbild der Schöpfung“. Im 14. Jahrhundert wurde wegen des häufigen Auftretens des goldenen Schnittes in den platonischen Körpern dieser der Name „die Göttliche Teilung“ gegeben. Unter all den platonischen Körpern wird das Dodekaeder, aufgrund seiner langen Geschichte und Symbolik, als besonders interessant angesehen. Das älteste Dodekaeder wurde in Padua im Jahr 1885 gefunden, welches etruskischen Ursprunges ist. Somit ist es „aus der ersten Hälfte des ersten Jahrtausends vor Chr. [...]. Die Pythagoreer (500 vor Chr.), die das Pentagramm (den regelmäßigen Fünfeck-Stern) als eine Art Logo verwendeten, kannten laut Plato das Dodekaeder und bewunderten es.“ (Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). *Das*

Zebra-Buch zur Geometrie (Springer-Lehrbuch). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 69.)

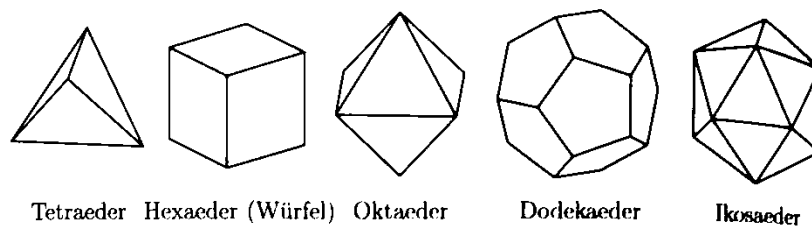


Abbildung 8 die platonischen Körper nach Aumann, G. (2006). 80.

Platon war derjenige, der den regulären Polyedern die Elemente, siehe Abbildung 8 zugeordnet hat. Die Namen wurden anhand der Anzahl der Flächen der jeweiligen Körper in der griechischen Sprache gegeben. So bedeutet zum Beispiel das Tetraeder der Vierflächner, das Dodekaeder der Zwölfflächner und das Ikosaeder der Zwanzigflächner. „Dem Dodekaeder ordnet Platon kein Element zu, sondern das Weltganze. Nach Aristoteles entspricht dem Dodekaeder der unveränderliche Äther, aus dem die Gestirne gebildet sind [...]“. (Aumann, G. (2006). *Euklids Erbe: Ein Streifzug durch die Geometrie und ihre Geschichte*. Darmstadt: Wiss. Buchges. 81.) Die ästhetische Schönheit der platonischen Körper und deren Symbolik zog Menschen in den weiteren Jahrhunderten an. Im Jahr 1596 veröffentlichte Johannes Kepler, der in den Bereichen der Mathematik, Astronomie, evangelischen Theologie und Philosophie tätig war, sein „erstes großes Werk *Prodromus Dissertationum Cosmographicarum continens Mysetrium Cosmographicum*.“ (Aumann, G. (2006). *Euklids Erbe: Ein Streifzug durch die Geometrie und ihre Geschichte*. Darmstadt: Wiss. Buchges. 138.) Darin hat er basierend auf den fünf platonischen Körpern sein Modell eines Sonnensystems, siehe Abbildung 9, aufgebaut. Diese Theorie war jedoch nicht haltbar.

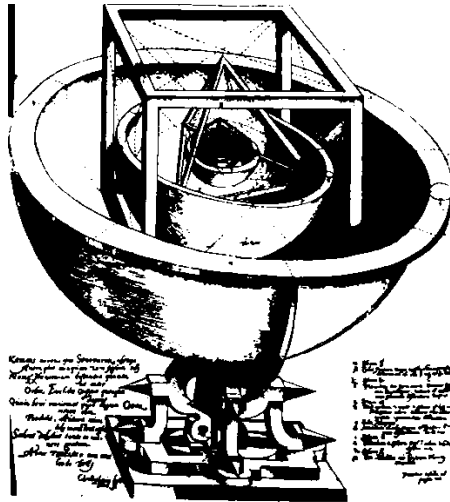


Abbildung 9 Keplers Modell des Sonnensystems nach Aumann, G. (2006). 138.

Die platonischen Körper sind in der toten Natur als Kristalle zu finden und bei der lebendigen Natur als Mikroorganismen. Dadurch sind sie allgegenwärtig. Natürlich sind sie auch in der Kunst, im Design und der Architektur vertreten (Vgl. Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 67. 69. 250f.; Aumann, G. (2006). 33-39. 137f.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 1.; Hoppe, J. P. (2013). 17.; Alsina, C., & Nelsen, R. (2015). 40.; Wagner, J. (2017). 1.).

2.5. Die Pythagoreer

Der bekannte Mathematiker Pythagoras, der um das Jahr 570 v. Chr. geboren wurde, lehrte seine Philosophie und Mathematik in Kroton. Unter seinen Anhängern haben einige hellere Köpfe eine eigene geheime Bruderschaft gegründet, welche heute noch unter dem Namen „die Pythagoreer“ bekannt ist. Sie hatten einen eigenen Lebensstil, in dem sie unter anderem Vegetarier waren und bestimmte tägliche Routinen beim Aufstehen und Schlafen gehen durchführen mussten.

Ein Pythagoreer namens Hippasos, von dem behauptet wird, dass er in der ersten Hälfte des fünften Jahrhunderts vor Christus lebte, ist der erste aller Pythagoreer, der in alten Schriften bezüglich seiner Mathematik verewigt wurde. Er war der Entdecker des goldenen Schnittes und damit der Inkommensurabilität. Er stieß bei seinen Untersuchungen am Fünfeck darauf. Das genaue Datum ist ungewiss. Es wird jedoch dem fünften Jahrhundert vor Christus eingeschrieben. Eine Quelle besagt, dass die pythagoreische Lehre eine tiefe Hochachtung gegenüber den Eigenschaften ganzer und rationaler Zahlen hatte. Sie haben auf diesen Zahlenmengen ihre Weltanschauungen gegründet und ihnen eine wichtige Rolle

in der Weltordnung zugesprochen. Die Entdeckung der irrationalen Zahl habe sie zutiefst erschüttert und eine philosophische Krise verursacht. Sie haben versucht, dieses Wissen geheim zu halten. Der syrische Historiker und Philosoph namens Iamblichos schrieb über die Konsequenzen derjenigen Person, die als erste die neue Erkenntnis mit „unwürdigen“ Menschen teilte. So wurde Hippasos von Metapont, der das Geheimnis verriet, aus der Bruderschaft ausgeschlossen, welche ihm als Statement ein Grabstein zu seinen Lebzeiten erstellte. Als er in hoher See umkam, sahen die Pythagoreer es laut Iamblichos als die Strafe Gottes an.

Die Pythagoreer verwendeten das Pentagramm als eine Art Logo beziehungsweise als das Symbol ihrer Bruderschaft. Sie nannten das Pentagramm „Gesundheit“, welches von manchen mit der griechischen Göttin Hygeia in Zusammenhang gebracht wird.

Iamblichus schrieb über ein Mitglied der Bruderschaft, welcher auf einer Reise erkrankte und von einem Besitzer einer Herberge gepflegt wurde. Der Pythagoreer wusste, dass sein Ende nahte und dass er dem Mann nicht für dessen Freundlichkeit genug bezahlen konnte. Deswegen hat er auf einem Brett ein Pentagramm verewigt und den Besitzer gebeten es auf eine für Passanten sichtbare Stelle zu fixieren. Der Wirt erfüllte dem Sterbenden seinen letzten Wunsch. Nach einiger Zeit erkannte ein Pythagoreer das Symbol und hörte sich die Geschichte diesbezüglich an. Er entschädigte den Wirt, welcher dann das Brett entfernte. Die Dokumentationen der Quellen vieler Geschichten bezüglich der Pythagoreer sind eher spärlich und werden deswegen in manchen Fällen auch als Legenden erachtet.

Die Pythagoreer haben unter anderem die Schönheit der platonischen Körper bewundert. Man nimmt an, dass ihre Begeisterung vom Standort ihrer Schule entstammt, wo sie Pyrit-Kristalle beobachten konnten, welche oft platonische Körper beinhalten (Vgl. Huntley, H. (1970). 30.; Livio, M. (2008). 4f. 24f. 34ff. 70.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 1. Herz-Fischler, R. (1998). 64ff. 56.).

2.6. Die Bedeutungen des Pentagramms

„Ask any child to draw you a star and she will most likely draw a pentagram. This is actually a consequence of the fact that we happen to view stars through Earth's atmosphere. The turbulence of the air bends starlight in constantly shifting patterns, thus causing the familiar

twinkling.“ (Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books. 43.)

Es wird angenommen, dass der Mensch versuchte, das Funkeln der Sterne geometrisch darzustellen und hat so die Zacken als Repräsentation entwickelt. Jedoch ist das Pentagramm ebenfalls in der Tier- und Pflanzenwelt vertreten. Das Pentagramm hat die Besonderheit, dass es ohne den Stift absetzen zu müssen in einem Zug gezeichnet werden kann.

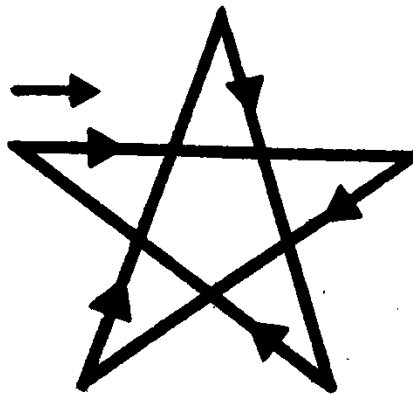


Abbildung 10 Zeichnung eines Pentagramms nach Biedermann, H., & Stöber, O. (1990). 14.

Es veränderte im Laufe der menschlichen Geschichte seine Konnotationen und Symbolik. Bei den Sumerern galt ein fünfzackiger Stern als „die Regionen des Universums“. In Babylon hatte das Pentagramm eine kosmologische Bedeutung und repräsentierte die Venusgöttin Ishtar. Diese Annahme beruht auf der Tatsache, dass die Babylonier die Sterne beobachteten und wahrscheinlich das Venuspentagramm, siehe im Kapitel „Allgemeine Vorkommnisse außerhalb der Mathematik“, entdeckten. Wie schon erwähnt wurde der fünfzackige Stern bei den Pythagoreern als ihr Erkennungszeichen verwendet, während es im Mittelalter den Namen Drudenfuß bekam und eine neue magische Rolle eingenommen hat. Sie haben es als Schutz vor Hexen, Dämonen und anderen bösen Kräften verwendet. So steht in Goethes Werk „Faust“, dass Mephistopheles gehindert war zu Faust zu gelangen, da dieser ein Pentagramm vor der Türschwelle hatte. Dennoch hat er durch Hinterlist es geschafft es zu überwinden. Er befahl einer Ratte eine Ecke abzunagen, so dass es nicht vollkommen war und seine Wirkung verlor. Aus diesen Gründen wurde es in Sakralbauwerken, wie Klöstern, insbesondere in Fensterrosetten eingebaut. Die Konstruktion mit einem Zirkel und Lineal war eine Herausforderung für die Baumeister. Das Pentagramm galt als Heilssymbol, während es auf der anderen Seite für die „schwarze

Magie“ verwendet wird, wenn eine Spitze nach unten zeigt. Um Missverständnisse zu vermeiden, benutzen die Freimaurer den „Flammenden Stern“, dessen Spitze nach oben ausgerichtet ist. Sie haben auch das Lineal und den Zirkel in ihrem Symbol, da man nur das zur Konstruktion des Pentagramms verwenden durfte. Später nahm das ausgefüllte Pentagramm eine politische Symbolik ein. So wurde er als „Sowjetstern“ genutzt. Heute noch ist das Pentagramm in Firmenlogos, auf Flaggen und auf Gebäuden zu sehen. Es wird zur Qualitätskennzeichnung bei Hotels und Restaurants genutzt. Heute wird der ausgefüllte Stern meist mit Stars oder dem Nachthimmel in Verbindung gebracht (Vgl. Livio, M. (2008). 43.; Biedermann, H., & Stöber, O. (1990). 12ff.; Aumann, G. (2006). 51.; Walz, G., & Atiyah, M. (2003). 255.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 4f.; Herz-Fischler, R. (1998). 52. 61.; Becker, G. (1989). 136ff. 182f.).

2.7. Leonardo von Pisa



Abbildung 11 Leonardo von Pisa

Fibonacci ist die verkürzte Version von „Filius Bonacci“, was so viel wie „Sohn des Bonacci“ bedeutet. Sein Geburtsname ist Leonardo von Pisa. Er lebte ungefähr von 1170 bis 1240. Er „ist vielfach als ‚erster moderner Mathematiker‘ des christlichen Europa bezeichnet worden“ (Wußing, H. (2008). 6000 Jahre Mathematik (Vom Zählstein zum Computer). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 313.). Leonardo von Pisa hat durch seine Handelsreisen die Möglichkeit gehabt sich in verschiedenen Ländern deren Rechenverfahren anzueignen. Unter anderem traf er auf die Mathematik des Orients, wo er

sich die indischen Ziffern aneignete. 1202 veröffentlichte er sein bekanntestes Werk „Liber Abaci“. Im Vorwort schreibt er über einzelne Begebenheiten in seinem Leben. Er behandelte die römischen Zahlen und die Fingerzahlen. Dann führte er die indisch-arabische Rechenkunst mit deren Zahlen, die Grundrechenarten und die Brüche anhand von Beispielen aus. Letzten Endes behandelte er das kaufmännische Rechnen. Dieses Buch hat die arabischen Ziffern bzw. Schreibweise der Zahlen und die indische Rechenkunst in Europa eingeführt. Doch seine bekannteste Problemstellung ist das Kaninchenproblem, welches im mathematischen Abschnitt dieser Diplomarbeit näher behandelt wird. Es beinhaltet die Fibonacci-Folge und Fibonacci-Zahlen. Es ist erwähnenswert, dass in seinem bekanntesten Werk auch negative Lösungen in manchen Beispielen in Form von Schulden akzeptiert werden, was in Europa zum ersten Mal geschah (Vgl. Walser, H. (1993). 75.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 15.; Wußing, H. (2008). 313f. 317.).

2.8. Luca Pacioli und Leonardo da Vinci

Aus der Zeit der Renaissance sind einige Künstler noch heute jedermann bekannt. Doch ein Universalgenie sticht am meisten hervor, Leonardo da Vinci (1452-1519). Er war mit dem Mathematiker und Theologen Luca Pacioli (1445–1517) befreundet. Sie haben sogar miteinander kollaboriert, so dass beide von den Fertigkeiten des anderen profitierten. Leonardo da Vinci konnte sein mathematisches Wissen erweitern und zeichnete dafür für Pacioli's Werk „divina proportione“, übersetzt „die göttliche Proportion“, 60 Polyeder. Der Mathematiker hat durch Leonardos anatomische Studien einen Einblick in die Proportionen des menschlichen Körper erhalten.

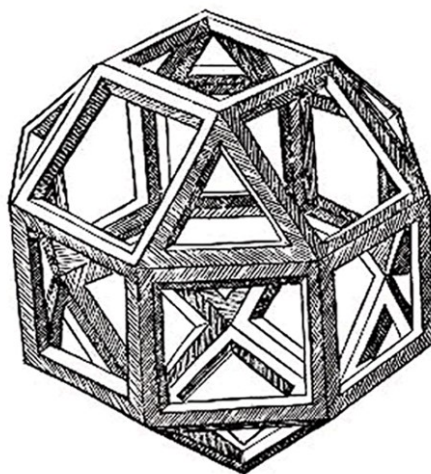


Abbildung 12 Leonardos Zeichnung eines Polyeders

Paciolis Werk beginnt mit einer kurzen Auseinandersetzung der menschlichen Proportionen, obgleich er laut Livio im Gegensatz zu anderen Quellen nicht darauf insistierte, dass der goldene Schnitt im menschlichen Körper enthalten sei. Diese Gedanken beruhen auf dem römischen Architekten Marcus Vitruvius Pollio (70-25 v.Chr.), welcher den Nabel als den Mittelpunkt eines Kreises beschrieb und behauptete, dass die Spitzen der ausgestreckten Hände und Füße auf der Kreislinie liegen würden. Pollio hat die Proportionen eines Menschen wie in Abbildung 13 in Verhältnis gesetzt und ihn in einen Kreis und ein Quadrat eingeschrieben. In der Renaissance haben Gelehrte das als Verbindung der Schönheit und Geometrie betrachtet. Leonardo da Vinci hat die Idee in die heute bekannte Zeichnung des „Vitruvianischen Menschen“ umgesetzt.

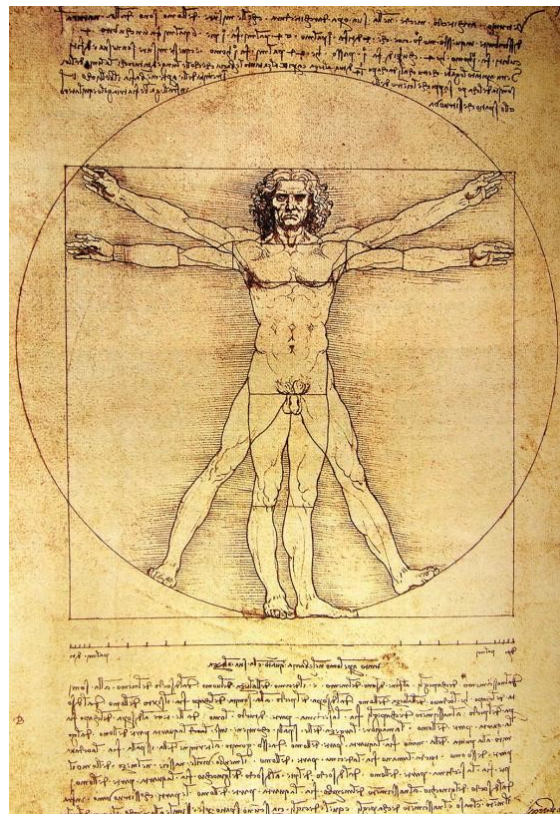


Abbildung 13 Leonardo da Vinci „Vitruvianische Mensch“

Viele behaupten, dass einige Renaissance Künstler, wie zum Beispiel Leonardo da Vinci, den goldenen Schnitt bewusst in ihren Werken eingebracht haben. Sein bekanntestes Werk „Mona Lisa“ wäre eines davon. Auch in Dürers Selbstbildnis wird der goldene Schnitt gefunden. Leonardo habe auch die logarithmische Spirale in Wolken, im Wasser, dem Haargeflecht einer Frau im Werk „Leda mit dem Schwan“ und vielen weiteren Werken

eingebaut (Vgl. Tiller, E. (2011). 7f.; Livio, M. (2008). 88. 134.; Wußing, H. (2008). 319f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 152-158.).

2.9. Der goldene Zirkel

Das mechanische Instrument, welches als goldener Zirkel bezeichnet wird, dient zur Feststellung und Konstruktion des goldenen Schnittes. Er wird unter anderem am häufigsten im Schreinerhandwerk verwendet. Man kann damit die innere und äußere Teilung abschlagen. Der Reduktionszirkel, siehe Abbildung 14, ist das primitivste Modell verglichen mit den Zirkeln in Abbildung 15. Sein Vorläufer existierte in der Antike, da man Exemplare in Pompeji ausgegraben hat.

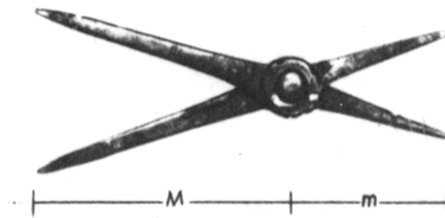


Abbildung 14 Reduktionszirkel nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 26.

Die Verbindungspunkte des Zirkels teilt dessen Schenkel im goldenen Schnitt und erzeugt dadurch einen Minor und einen Major. „Eine Weiterentwicklung [...], bei der die Schenkel von verschiedenen Enden her im Goldenen Schnitt geteilt und zu einem Parallelogramm ergänzt sind, ermöglicht eine schnellere Handhabung.“ (Aumann, G. (2006). Euklids Erbe : Ein Streifzug durch die Geometrie und ihre Geschichte. Darmstadt: Wiss. Buchges. 57.) Die weiterentwickelten Zirkel sind in der Abbildung 15 auf der rechten Hälfte zu sehen (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 26f.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 8.; 57.).

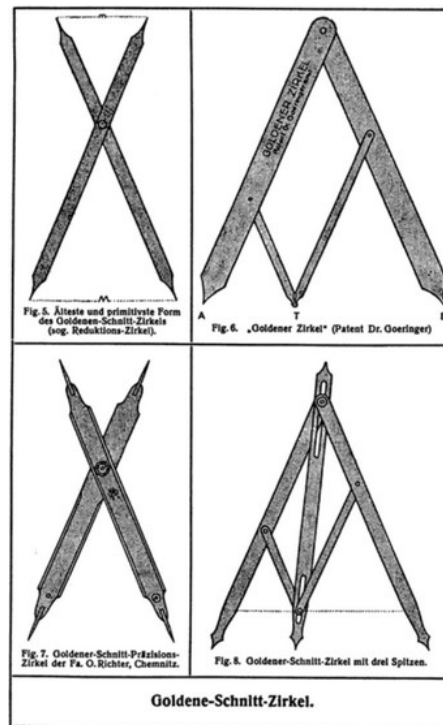


Abbildung 15 Goldene Zirkel nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 27.

3. Der goldene Schnitt in der Mathematik

3.1. Konstruktion des GS

Die Konstruktion des goldenen Schnittes stellt wegen der Irrationalität der goldenen Zahl eine Herausforderung dar. Eine irrationale Zahl ist eine reelle Zahl, die nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen geschrieben werden kann. Vorerst wird gezeigt, dass es möglich ist durch eine klassische Konstruktion, das heißt nur mit Zirkel und Lineal und ohne andere Hilfsmittel, den goldenen Schnitt zu konstruieren (Vgl. Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 9f.). Es existiert eine Vielzahl an verschiedenen Vorgehensweisen bei der Konstruktion des Goldenen Schnittes. Hier werden davon vier angeführt:

- a) Sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Man konstruiere zu dieser im Punkt B eine Senkrechte auf der der Punkt C liegt, so dass $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Daraufhin werden die Punkte A und C verbunden. Ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in C ist und den Radius $\overline{CB}$ besitzt, wird auf der Strecke $\overline{AC}$ abgeschlagen. Dieser Schnittpunkt wird D benannt. Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A und Radius $\overline{AD}$ schneidet $\overline{AB}$ in T. T teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis ϕ (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 21.; Lausch, H. (2009). 121; Verhulst, F., &

Walcher, S. (2010). 10.; Lausch, H. (2009). 121.; Huntley, H. (1970). 27; Wagner, J. (2017). 75f.).

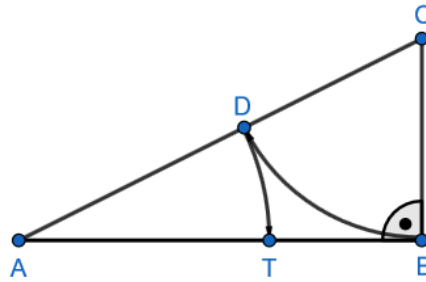


Abbildung 16 Konstruktion des Goldenen Schnittes

Zu beweisen ist, ob $\phi = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}$ ist.

Beweis ist ähnlich wie in Lausch: Durch die Verwendung des Satzes des Pythagoras folgt

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Aus $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2}$ erhält man

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{5}{4}\overline{AB}^2.$$

Durch Wurzelziehen folgt

$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB}.$$

Aus

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{DC},$$

folgt

$$\overline{AT} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AB}.$$

Also ist

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Wegen

$$\overline{TB} = \overline{AB} - \overline{AT} = \frac{2-\sqrt{5}+1}{2}\overline{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\overline{AB}$$

erhält man

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{(3 - \sqrt{5})} \cdot \frac{(3 + \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

■

(Vgl. Lausch, H. (2009). 121f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 21.; Wagner, J. (2017). 76.)

b) „Das folgende Verfahren geht angeblich auf Euklid zurück.“ (Lausch, H. (2009). Fibonacci und die Folge(n). München: Oldenbourg. 122.)

Sei $\overline{AB}$ eine Strecke. Konstruiere eine Senkrechte zu $\overline{AB}$ im Punkt A und schlage den Endpunkt C mit $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ ab. Die Strecke $\overline{AC}$ wird über A hinaus verlängert. Der Kreisbogen mit Mittelpunkt C und Radius $\overline{CB}$ schneidet im Punkt D die „Verlängerung von $\overline{AC}$ “ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl.. 21). Der Kreisbogen mit Mittelpunkt A und Radius $\overline{AD}$ schneidet im Punkt T die Strecke $\overline{AB}$. (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 21f.; Lausch, H. (2009). 122.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 6.)

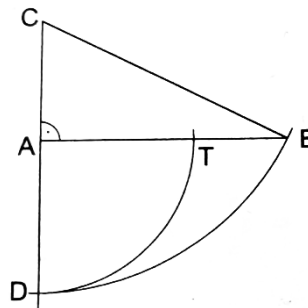


Abbildung 17 Konstruktion nach Euklid (nach Lausch, H. (2009). 122.)

Es wird bewiesen, dass T die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt.

Der Beweis ist ähnlich wie bei Pietschmann: Wegen dem Satz des Pythagoras gilt

$$\overline{CB} = \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB}$$

Also folgt daraus

$$\overline{AT} = \overline{AD} = \overline{CD} - \overline{CA} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{\phi}\overline{AB} = \overline{AB} \cdot \phi^{-1}.$$

Somit folgt

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB} \cdot \phi^{-1}} = \phi.$$

■

(Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 22.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 46; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 6.)

c) „Es existieren eine Vielzahl von Konstruktionen, von denen wir die vom amerikanischen Künstler Georg Odom vorstellen wollen, die erst im Jahr 1982 gefunden worden ist.“ (Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). DAS GOLDENE ZEITALTER. 7.)

Man erstelle ein gleichseitiges Dreieck $\triangle XYZ$ und dessen Umkreis. $\overline{XZ}$ wird durch A und $\overline{YZ}$ durch S halbiert. Man erstelle eine Verlängerung der Strecke $\overline{AS}$ über den Seitenmittelpunkt S hinaus, welche den Kreis im Punkt B schneidet. S teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $\frac{a}{b} = \phi$ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 22.; Lausch, H. (2009). 123.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 7.).

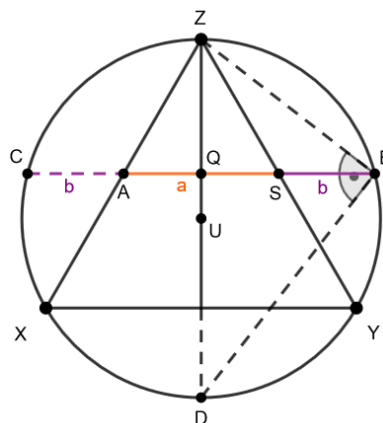


Abbildung 18 Konstruktion nach George Odom

Es wird die letzte Aussage bewiesen.

Der Beweis ähnelt dem von Lausch: Seien die Seitenlängen des gleichseitigen Dreiecks $\triangle XYZ$ $\overline{XZ} = \overline{YZ} = \overline{XY} = 2a$ lang. Somit ist die Länge einer Seitenhälfte $\overline{SZ} = \overline{YS} = a$. Man setze den 2. Strahlensatz ein:

$$a:2a = \overline{AS}:2a \Leftrightarrow \overline{AS} = a.$$

Weil der Punkt B über dem Durchmesser $\overline{ZD}$ auf dem Umkreis liegt, muss das Dreieck $\triangle ZBD$ einen $\sphericalangle$ im Punkt B besitzen. Deshalb verwendet man den Höhensatz:

$$\overline{QB}^2 = \overline{ZQ} \cdot \overline{QD}.$$

Die Höhe h des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist anhand des Satzes von Pythagoras $h = \sqrt{3}a$ lang. Laut des 1. Strahlensatzes ist die Strecke $\overline{ZQ} = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$ lang. Da der Umkreismittelpunkt U die Höhe h im Verhältnis 2:1 teilt, gilt

$$\overline{ZD} = 2 \cdot \overline{UD} = \frac{4}{3}\sqrt{3}a.$$

Also ist

$$\overline{QD} = \overline{ZD} - \overline{ZQ} = \frac{4}{3}\sqrt{3}a - \frac{1}{2}\sqrt{3}a = \frac{8-3}{6}\sqrt{3}a = \frac{5}{6}\sqrt{3}a.$$

Wenn man die Einzelteile in den Höhensatz einfügt, erhält man

$$\overline{QB}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}a \cdot \frac{5}{6}\sqrt{3}a = \frac{5}{4}a^2.$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich

$$\overline{QB} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}.$$

Sei $\overline{SB} = b$ und $\overline{QS} = \frac{1}{2}\overline{AS} = \frac{1}{2}a$, so gilt

$$b = \overline{QB} - \overline{QS} = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

Somit folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi.$$

■

(Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 23.; Lausch, H. (2009). 124.)

d) Diesmal geht man von der Strecke $\overline{AT}$ aus und konstruiert den Punkt B auf der Verlängerung über T , so dass T die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt.

Es werde auf der Strecke $\overline{AT}$ eine Senkrechte im Punkt T erstellt. Vom Punkt T wird die Strecke $\overline{AT}$ auf der Senkrechten abgeschlagen, so dass der Punkt C entsteht. Die Streckensymmetrale von $\overline{AT}$ liefert den Punkt M. Man errichte einen Kreisbogen mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{MC}$, welcher die Verlängerung der Strecke $\overline{AT}$ über T im Punkt B schneidet. Somit ist $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \phi$ (Vgl. Burton, D. (1997). 117, 166.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 23.; Lausch, H. (2009). 122.).

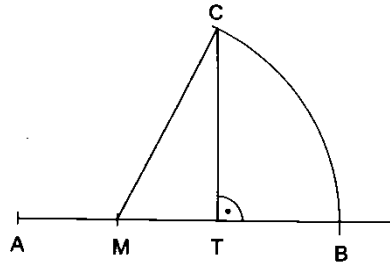


Abbildung 19 Konstruktion des goldenen Schnittes (nach Lausch, H. (2009). 123.)

Der Beweis ähnelt dem von Lausch: Man wende den Satz des Pythagoras an

$$\overline{MC}^2 = \overline{MT}^2 + \overline{TC}^2 = \frac{1}{4}\overline{AT}^2 + \overline{AT}^2 = \frac{5}{4}\overline{AT}^2.$$

Durch Wurzelziehen erhält man

$$\overline{MC} = \overline{MB} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AT}.$$

So ist

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{AT} + \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AT} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\overline{AT}$$

und daher

$$\overline{TB} = \overline{AB} - \overline{AT} = \frac{\sqrt{5} + 1 - 2}{2}\overline{AT} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\overline{AT}.$$

Schlussendlich folgt daraus

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\overline{AT}}{\overline{AT}} = \phi.$$

■

(Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 24. ; Lausch, H. (2009). 123.)

3.2. Das regelmäßige Fünfeck

„In der Tat ist das reguläre Fünfeck das wichtigste mathematische Objekt, das in Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt steht. In den ‚Elementen‘ von EUKLID wird der goldene Schnitt ja vor allem deswegen eingeführt, um ein reguläres Fünfeck konstruieren zu können.“

(Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl.. 31.)

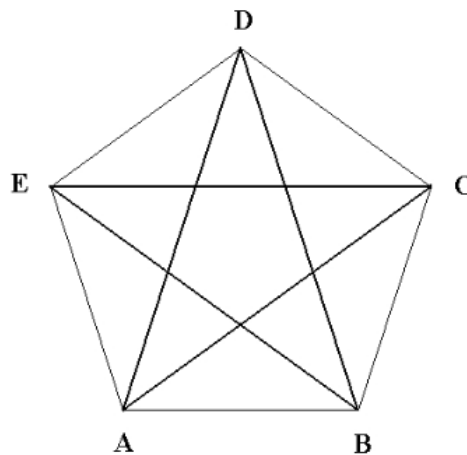


Abbildung 20 Pentagon und Pentagramm nach Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 6.

Satz 3.1.: „In einem regelmäßigen Fünfeck ABCDE gelten:

- (a) Ein Innenwinkel beträgt 108° .
- (b) Alle Diagonalen sind gleich lang.
- (c) Jede Seite ist zu der ihr gegenüberliegenden Diagonale parallel, z. B.
 $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$.
- (d) Je zwei Diagonalen, die sich nicht in einem Eckpunkt schneiden, teilen einander im Verhältnis ϕ des goldenen Schnitts [sic!].

(e) Das Verhältnis der Länge einer Diagonale zur Länge einer Seite ist ϕ .“

(Lausch, H. (2009). Fibonacci und die Folge(n). München: Oldenbourg.

129)

Der Beweis des Satzes 3.1. ist dem von Lausch und Beutelspacher ähnlich:

(a) In einem beliebigen n -Eck beträgt die Innenwinkelsumme immer $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Man erhält bei Anwendung der Formel auf ein Fünfeck $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Weil das Pentagon ein regelmäßiges Fünfeck ist, ist die Größe eines Innenwinkels $540^\circ : 5 = 108^\circ$.

(b) Zwei Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$, welche sich in einem Eckpunkt D treffen sind symmetrisch, da von diesem zur gegenüberliegenden Seite $\overline{AB}$ eine Symmetrieachse erstellt werden kann, welche durch den Mittelpunkt verläuft. Damit haben die beiden Diagonalen die gleiche Länge. Dieses Verfahren wird mit jeder Diagonale durchgeführt, welche den gleichen Eckpunkt mit der benachbarten teilt. Man kommt zum gleichen Ergebnis.

(c) Die Senkrechte auf $\overline{AB}$, welche den Eckpunkt D schneidet, bildet die Symmetrieachse h des Fünfecks. $h \perp \overline{AB} \wedge h \perp \overline{EC} \Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{EC}$. Analog für $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$.

(d) und (e) Man bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{EC}$ als S .

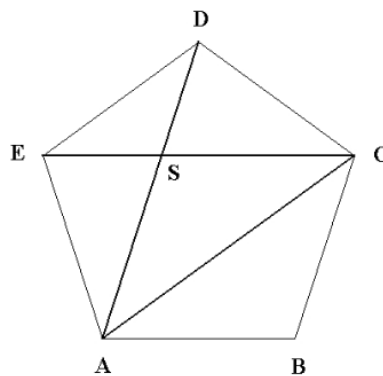


Abbildung 21 Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck nach Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 7.

Das Viereck $ABCS$ ist eine Raute, weil $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ und $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$ nach (c) und die Strecken $\overline{AS}$ und $\overline{SC}$ gleich lang sind. Man kann den Strahlensatz, wegen $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ nach (c), einsetzen:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ED}}$$

Es gilt

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AS}},$$

daraus folgt

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AS}}.$$

Also teilt S die Diagonale $\overline{AD}$ im goldenen Schnitt. Der Beweis für S teilt $\overline{EC}$ im goldenen Schnitt, sowie für jede Diagonale im Fünfeck, wird analog durchgeführt. ■

(Vgl. Lausch, H. (2009). 129f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 31-34.; Neunhäuserer, J. (2015). 46.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 6ff.)

Die Konstruktion eines Pentagons und Pentagramms:

Es existieren verschiedene Ansätze für die Konstruktion eines Pentagons. Davon wird ein Verfahren vorgeführt, siehe Abbildung 22.

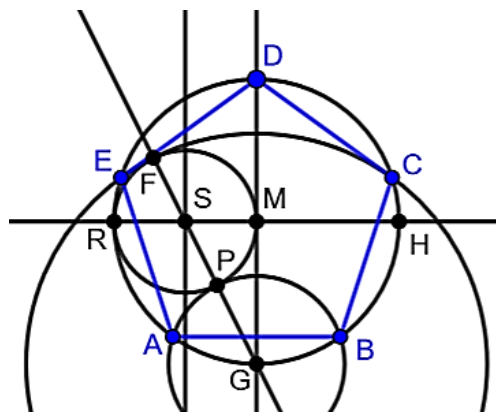


Abbildung 22 Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks

Man konstruiere einen Kreis k_1 dessen Mittelpunkt M benannt wird und zeichne zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein. Diese schneiden den Kreis in den Punkten D, R, G, H. Der Punkt S ist die Streckensymmetrale der Strecke $\overline{MR}$. Man konstruiere einen Kreis k_2 um S mit dem Radius $\overline{SR}$. Die Gerade GS, welche den Kreis k_2 in den Punkten P und F schneidet, wird erstellt. Der Kreis um G mit Radius $\overline{GP}$ schneidet

den Kreis k_1 in den Punkten A und B. Ein weiterer Kreis um G mit Radius $\overline{GF}$ wird konstruiert, welcher die Schnittpunkte C und E mit dem Kreis k_1 teilt. Durch die Verbindung der Punkte A, B, C, D und E erhält man ein regelmäßiges Fünfeck. Die Einzeichnung der Diagonalen in das Pentagon liefert ein Pentagramm, siehe Abbildung 22 (Vgl. Walser, H. (1993). 39.).

Eine amüsante Art ein Pentagon auf eine einfache Weise herzustellen bietet die Papierfaltkunst an.

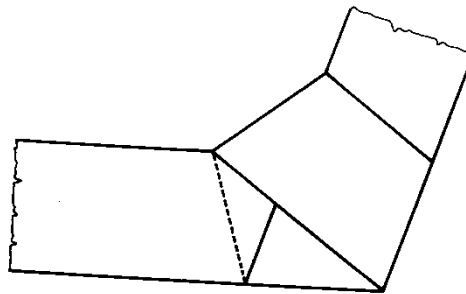


Abbildung 23 Konstruktion durch Faltung eines Papierstreifens nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 40

Man binde einen langen schmalen Papierstreifen in einen Knoten. Diesen drückt man flach. Die herausstehenden Streifenstücke kann man abschneiden. Somit erhält man ein regelmäßiges Fünfeck (Vgl. Coxeter, H. (1963). 200.; Walser, H. (1993). 65f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 40.)

3.3. Das goldene Dreieck und die Winkel in dem goldenen Dreieck

Ein gleichschenkliges Dreieck wird als „goldenes Dreieck“ bezeichnet, wenn das Verhältnis der Schenkellänge zur Basislänge im goldenen Schnitt ist. Es wird zwischen dem spitzen und dem stumpfen goldenen Dreieck anhand der Winkel unterschieden, wobei die Innenwinkelgrößen eindeutig festgelegt sind. Der erstere hat den Basiswinkel 72° und die Winkelgröße 36° an der Spitze, während der letztere den Basiswinkel 36° und die Winkelgröße 108° an der Spitze besitzt (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 34ff.; Lausch, H. 125ff.; Walser, H. (1993). 36ff., 54f.).

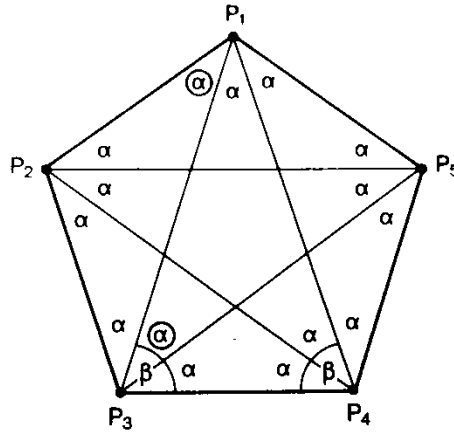


Abbildung 24 Goldene Dreiecke im regelmäßigen Fünfeck nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 37.

Der Beweis ist ähnlich wie in Beutelspachers Werk: Die erste Aussage bezüglich dem Verhältnis der Seiten des goldenen Dreiecks zueinander sind im Grunde schon im Satz 3.1. in (e) bewiesen worden. Deswegen wird der zweite Teil, welcher sich auf die Innenwinkel bezieht, bewiesen. Es existieren verschiedene Herangehensweisen. In Folge wird die von Beutelspacher durchgeführt.

„Sei $\triangle P_1P_3P_4$ ein goldenes Dreieck. Der Trick dieses Beweises besteht darin, zu zeigen, daß *[sic!]* jeder Basiswinkel β genau doppelt so groß ist wie der Winkel α an der Spitze P_1 von $\triangle P_1P_3P_4$.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl., ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl., 36.)

Das goldene Dreieck $\triangle P_1P_3P_4$ befindet sich im regelmäßigen Fünfeck $P_1P_2P_3P_4P_5$, siehe Abbildung 24.

Weil die Dreiecke $\triangle P_3P_1P_4$, $\triangle P_5P_2P_4$, $\triangle P_1P_3P_5$, $\triangle P_2P_4P_1$, $\triangle P_3P_5P_2$ kongruent sind, gilt

$$\alpha = \angle P_3P_1P_4 = \angle P_5P_2P_4 = \angle P_1P_3P_5 = \angle P_2P_4P_1 = \angle P_3P_5P_2$$

Wegen $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{P_3P_5}$ erhält man für die Wechselwinkel $\alpha = \angle P_1P_3P_5 = \angle P_2P_1P_3$. Mit der gleichen Argumentation geht man bei den übrigen Winkeln vor.

Sei $\beta = 2\alpha$. Daraus folgt für die Winkelsumme im Dreieck $\triangle P_1P_3P_4$:

$$\alpha + 2\beta = 5\alpha.$$

Da man $180^\circ = 5\alpha$ in $\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ umformen kann, erhält man somit $\beta = 72^\circ$.

(Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 36f.)

„Umgekehrt ergibt sich, daß [*sic!*] jedes Dreieck mit diesen Innenwinkeln ein goldenes Dreieck ist (denn ein Dreieck mit diesen Innenwinkeln und der Grundseitenlänge a ist kongruent zu dem goldenen Dreieck mit dieser Grundseitenlänge).“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl.. 37)

■

3.4. Das regelmäßige Zehneck

Neben dem regelmäßigen Fünfeck und dem Pentagramm ist das spitze goldene Dreieck auch im regelmäßigen Zehneck zu finden, da beim Einschreiben eines regelmäßigen Zehnecks der Mittelpunktswinkel der Diagonalen mit $360^\circ:10=36^\circ$ bestimmt werden kann und diese somit ein spitzen goldenes Dreieck bilden, siehe Abbildung 25.

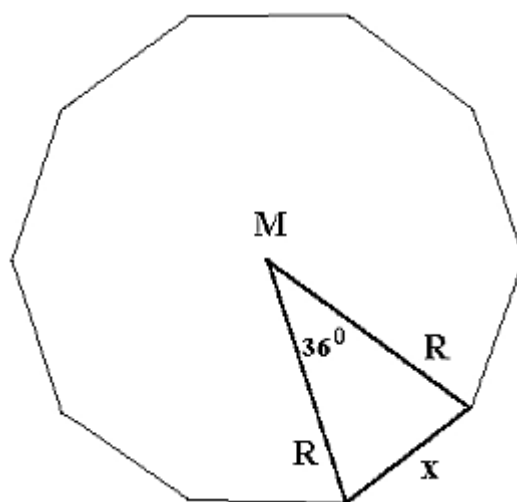


Abbildung 25 goldenes Dreieck im regelmäßigen Zehneck nach Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 21

Da es sich in der Abbildung 25 um ein goldenes Dreieck handelt, gilt

$$R = \phi \cdot x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot x \Leftrightarrow x = R \cdot \frac{1}{\phi} = R \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

wobei R der Umkreisradius ist. Weil man die Seitenlänge eines regelmäßigen Zehnecks durch R und ϕ bestimmen kann, bedeutet dies, „dass wir nun in der Lage sind, in einem gegebenen Kreis ein regelmäßiges Zehneck zu konstruieren, indem wir ausschließlich

Zirkel und Lineal verwenden.“ (Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). *Das Zebra-Buch zur Geometrie* (Springer-Lehrbuch). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 20f.)

Nach der Konstruktion ist es möglich ein regelmäßiges Fünfeck in das regelmäßige Zehneck einzuschreiben, indem jede zweite Ecke miteinander wie in der Abbildung 26 verbunden wird.

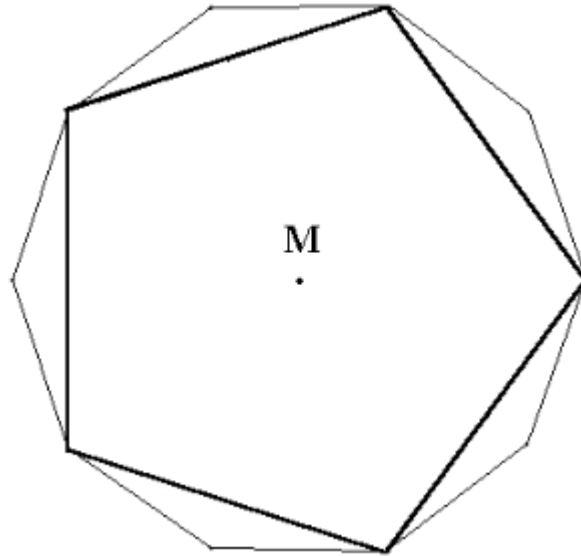


Abbildung 26 Regelmäßiges Fünfeck im regelmäßigen Zehneck nach Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 22

(Vgl. Walser, H. (1993). 36ff.; Lausch, H. (2009). 127f.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 20ff.;)

3.5. Das goldene Rechteck

„Unter dem „Goldenen Rechteck“ verstehen wir das Rechteck mit dem Seitenverhältnis des Goldenen Schnittes.“ (Walser, H. (1993). *Der goldene Schnitt* (Einblicke in die Wissenschaft : Mathematik). Stuttgart Zürich: Teubner Verl. d. Fachvereine. 43.)

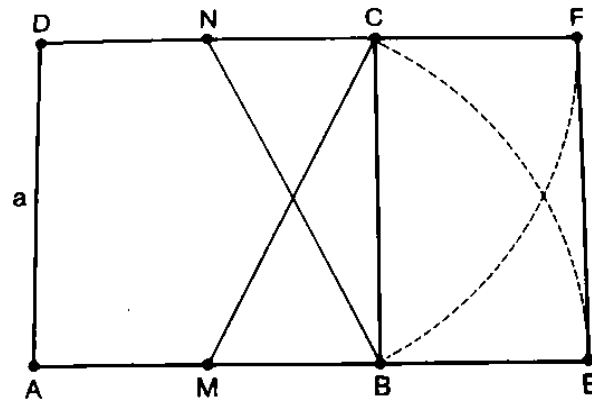


Abbildung 27 Konstruktion des goldenen Rechtecks nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 47

Die Konstruktion:

Das Quadrat ABCD mit der Seitenlänge $a = \overline{AB}$ wird in den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ halbiert. Die entstehenden Mittelpunkte an den Seiten werden als M und N bezeichnet. Man verlängere die Seiten $\overline{AB}$ über B und $\overline{CD}$ über C, so dass die Kreise um M und N mit Radius $\overline{MC}$ diese in den Punkten E und F schneiden. Somit ist AEFD ein goldenes Rechteck.

Der Beweis zu den Seitenverhältnissen steht in 3.5.d) und dass es sich um ein Rechteck handelt ist unbestreitbar. (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 47.; Lausch, H. (2009). 134.; Huntley, H. (1970). 61f.)

„Insbesondere teilt der Eckpunkt B des Quadrats die Rechteckseite $[\overline{AE}]$ im Verhältnis des goldenen Schnitts [sic!], also $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \phi = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$.“ (Lausch, H. (2009). Fibonacci und die Folge(n). München: Oldenbourg. 134.)

3.6. Goldene Spirale und spira mirabilis

„Nature loves logarithmic spirals. From sunflowers, seashells, and whirlpools, to hurricanes and giant spiral galaxies, it seems that nature chose this marvelous shape as its favorite "ornament." The constant shape of the logarithmic spiral on all size scales reveals itself beautifully in nature in the shapes of minuscule fossils or unicellular organisms known as foraminifera.“ (Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story*

of phi, the world's most astonishing number. Broadway Books. 117.)

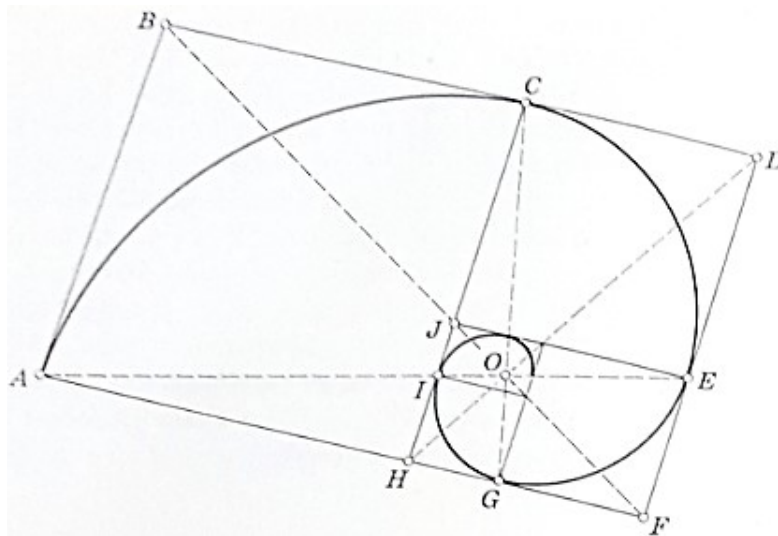


Abbildung 28 Näherung der goldenen Spirale nach Coxeter, H. (1963). 204.

In Abbildung 28 ist ein goldenes Rechteck ABDF dargestellt. Wenn man das Quadrat ABCH von diesem abspaltet, so bleibt anhand der Konstruktion in 3.5 ein weiteres kleineres goldenes Rechteck CDFH übrig. Man teile das Rechteck CDFH wieder in ein Quadrat CDEJ und ein kleineres goldenes Rechteck EFHJ auf. Diesen Vorgang wiederholt man mit den entstehenden kleineren goldenen Rechtecken beliebig oft. Während das Blatt mit der Konstruktion vor der nächsten Teilung gedreht wird, so dass das entstandene Rechteck im Querformat betrachtet wird, steht das abzuspaltende Quadrat immer links. In jedes Quadrat wird wie in Abbildung 28 ein Viertelkreis eingezeichnet. So entsteht eine Approximation der goldenen Spirale (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 57f; Lausch, H. (2009). 134; Coxeter, H. (1963). 203f.; Huntley, H. (1970). 100ff.).

Im nächsten Abschnitt wird die Approximation der goldenen Spirale näher betrachtet.

Dazu wird das goldene Rechteck ABDF in ein Koordinatensystem eingefügt, so dass das Quadrat ABCH ein Einheitsquadrat bildet. Dann besitzen die folgenden Eckpunkte die Koordinaten:

$$A(0|0), B(0|1), C(1|1), H(1|0), D(\phi|1), F(\phi|0).$$

Die übrigen Eckpunkte E, J und G werden bestimmt:

$\overline{DF} = 1$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \phi$; also $\frac{1-\overline{EF}}{\overline{EF}} = \phi$, das bedeutet $\overline{EF}(\phi + 1) = 1$ und wegen der Eigenschaft $\phi^2 = \phi + 1$ gilt $\overline{EF} = \frac{1}{\phi+1} = \frac{1}{\phi^2}$. Daraus folgt

$$E\left(\phi \left| \frac{1}{\phi^2} \right.\right), J\left(1 \left| \frac{1}{\phi^2} \right.\right).$$

Aus $\overline{HF} = \phi - 1$ und $\frac{\overline{GF}}{\overline{HG}} = \phi$ erhält man $\frac{\phi-1-\overline{HG}}{\overline{HG}} = \phi$ und $\phi - 1 = \overline{HG}(\phi + 1)$. Deshalb ist $\overline{HG} = \frac{\phi-1}{\phi+1}$. Damit gilt

$$G\left(1 + \frac{\phi-1}{\phi+1} \left| 0 \right.\right).$$

Nun wird auf die folgenden Geraden näher eingegangen:

$$\text{AE: } y = \frac{1}{\phi^3}x, \text{ BF: } y = -\frac{1}{\phi}x + 1, \text{ HD: } y = \frac{1}{\phi-1}x - \frac{1}{\phi-1}, \text{ CG: } y = -\frac{\phi+1}{\phi-1}x + 2\frac{\phi}{\phi-1}.$$

Durch Einsetzen des Punktes J in die Gerade BF, erkennt man dass dieser auf der genannten Gerade liegt. Das kann man mit allen Eckpunkten innerhalb des ersten goldenen Rechtecks durchführen und wird auf folgenden Schluss kommen:

„Alle im Laufe der Konstruktion auftretenden Ecken goldener Rechtecke liegen auf einer der Geraden AE, BF, CG, DH.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 59.)

Die Geraden AE und BF schneiden einander im Schnittpunkt O. Die x-Koordinaten des Schnittpunktes sind somit:

$$\frac{1}{\phi^3}x = -\frac{1}{\phi}x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\phi^3}{1 + \phi^2}.$$

Die y-Koordinaten erhält man durch das Einsetzen des erhaltenen x-Wertes in die Gleichung von AE oder BF. Somit lauten die Koordinaten des Schnittpunktes O:

$$O\left(\frac{\phi^3}{1 + \phi^2} \left| \frac{1}{1 + \phi^2} \right.\right).$$

Setzt man nun den Schnittpunkt O in die übrigen Geraden ein, so verifiziert man, dass der Punkt O auf allen genannten Geraden liegt. Als nächstes wird behauptet, dass die Geraden

$AO \perp CO$ und $BO \perp DO$ sind. „Denn die Rechtecke ABDF und CDFH sind senkrecht zueinander. Daraus ergibt sich $AE \perp CG$ und damit $AO \perp CO$. Entsprechend folgt die zweite Aussage.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 59.).

Somit ist O der Höhenfußpunkt des rechtwinkligen Dreiecks BDF. Daraus ermittelt man den Ähnlichkeitsfaktor $\phi^{-1} = \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}}$ der ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke $\triangle BOD$ und $\triangle DOF$. Der gleiche Ähnlichkeitsfaktor ϕ^{-1} gilt auch für die ähnlichen Dreiecke $\triangle AGO$ und $\triangle CIO$.

„Die Drehstauchung σ , die aus einer Vierteldrehung nach rechts, gefolgt von einer Streckung mit dem Faktor ϕ^{-1} (also einer Stauchung) besteht, bildet jeden der Punkte A, E, G, I,... und jeden der Punkte B, D, F, H, J,... auf den jeweils nachfolgenden ab.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 60.)

„Ausgehend vom Punkt O - dem sogenannten Pol - kann man die Umkehrabbildung σ^{-1} der Drehstauchung, also die Drehstreckung σ^{-1} , mithilfe von Polarkoordinaten beschreiben. In Polarkoordinaten wird jeder Punkt P mithilfe seines Abstands vom Koordinatenursprung O und des Winkels ϑ zwischen der x-Achse und der Geraden OP beschrieben, d.h. $P=(r; \vartheta)$.“ (Lausch, H. (2009). Fibonacci und die Folge(n). München: Oldenbourg. 136.)

Die Abbildung der Drehstreckung σ^{-1} besteht aus einer Vierteldrehung nach links, also um $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ und der darauf folgenden Streckung um ϕ . So erhält man die Abbildung $\sigma^{-1}P = (\phi r; \vartheta + \frac{\pi}{2})$ mit dem Punkt $P(r; \vartheta)$.

Durch den Einsatz des Punktes $E=(1,0)$, ergibt sich nacheinander:

$$C = \left(\phi; \frac{\pi}{2}\right), A = (\phi^2; \pi), \dots$$

Und auch

$$G = \left(\phi^{-1}; -\frac{\pi}{2}\right), I = (\phi^{-2}; -\pi), \dots$$

„Insgesamt ergibt sich daraus eine unendliche Folge von Punkten $P(r; \vartheta)$ mit $r = \phi^m$, $\vartheta = m \cdot \frac{\pi}{2}$ für $m \in \mathbb{Z}$. aus der zweiten Gleichung folgt $m = \frac{2\vartheta}{\pi}$, sodass man schreiben kann:

$$r = \phi^{\frac{2\vartheta}{\pi}};$$

Diese Gleichung beschreibt eine Spirale, die meist als goldene Spirale bezeichnet wird.“
(Lausch, H. (2009). Fibonacci und die Folge(n). München: Oldenbourg. 137.)

Diese schneidet das goldene Rechteck als Sekante, siehe Abbildung 29. (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 58-61.; Coxeter, H. (1963). 203ff.; Lausch, H. (2009). 134-137.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 39ff.)

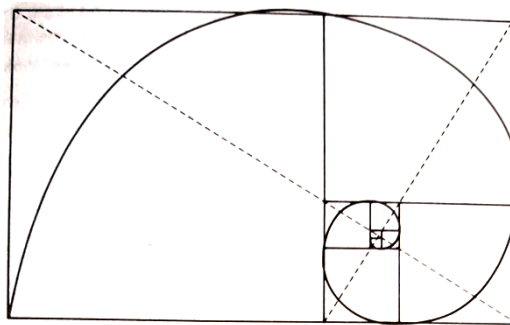


Abbildung 29 goldene Spirale nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 61.

Dieses Verfahren kann man auch an anderen goldenen Vielecken anwenden. Beispielsweise bei dem goldenen Dreieck.

Wie beim goldenen Rechteck, kann man in einem spitzen goldenen Dreieck $\triangle ABC$ ein stumpfes goldenes Dreieck $\triangle BAD$ einzeichnen, so dass man ein kleineres spitzen goldenes Dreieck $\triangle CBD$ erhält, dessen Spitze im Punkt B liegt, siehe Abbildung 30. Dieser Prozess wird im Uhrzeigersinn beliebig oft wiederholt. Ein weiteres Verfahren, welches das gleiche Resultat ergibt, wäre die Konstruktion der Winkelsymmetrale w_β im Punkt B, welche die gegenüberliegende Seite im Punkt D schneidet und dadurch das goldene Dreieck

in ein spitzen und stumpfes goldenes Dreieck teilt. Durch Drehung der Zeichnung gegen den Uhrzeigersinn und einer weiteren Winkelsymmetrale im neu erzeugten spitzen goldenen Dreieck, die immer vom rechten Basiseckpunkt ausgeht, erscheint ein neues spitzen goldenes Dreieck. Auch hier kann dieser Prozess beliebig oft durchgeführt werden.

Daraufhin wird eine goldene Spirale, die „spira mirabilis“, welche die Eckpunkte der goldenen Dreiecke schneidet, errichtet. Da die Invarianz der logarithmischen Spirale aufgrund der Drehstreckungen bestehen bleibt, enthält sie eine Selbstähnlichkeit (Vgl. Walz, G., & Atiyah, M. (2003). 258.).

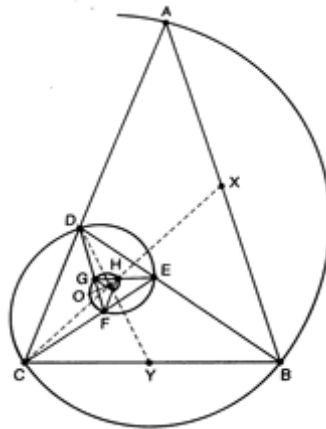


Abbildung 30 spira mirabilis nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 61.

Jacques Bernoulli benannte diese „spira mirabilis“, die „wundersame Spirale“. Seine Bewunderung für dessen Schönheit war offenkundig, so dass er sich auf die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit der logarithmischen Spirale in seiner Grabmalinschrift "Eadem mutato resurgo", übersetzt „Verändert und doch derselbe entstehe/erstehe ich wieder“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 64.), bezog (Vgl. Livio, M. (2008). 116; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 63ff.).

“Jacques wrote that the logarithmic spiral ‘may be used as symbol, either of fortitude and constancy in adversity, or of the human body, which after all its changes, even after death, will be restored to its exact

and perfect self.” (Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books. 116.)

Auch bei dem goldenen Parallelogramm ist es anwendbar.

„Vom Goldenen Parallelogramm mit dem Seitenverhältnis des Goldenen Schnittes und dem spitzen Winkel 60° können zwei gleichseitige Dreiecke abgeschnitten werden, so dass das Restparallelogramm wieder ein Goldenes Parallelogramm ist.“ (Walser, H. (1993). *Der goldene Schnitt* (Einblicke in die Wissenschaft : Mathematik). Stuttgart Zürich: Teubner Verl. d. Fachvereine. 53)

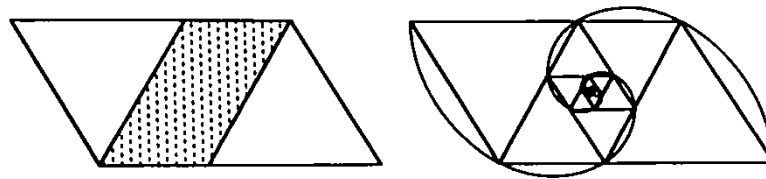


Abbildung 31 goldenes Parallelogramm unterteilt und mit Spiralen versehen nach Walser, H. (1993). 53.

Wenn man in ein regelmäßiges Fünfeck die Diagonalen einzeichnet, so erhält man ein kleineres auf dem Kopf stehendes regelmäßiges Fünfeck sowie fünf stumpfe und fünf spitze goldene Dreiecke. Die Diagonalen bilden ein Pentagramm. Das kann mit dem neu entstandenen kleineren regelmäßigen Fünfecken beliebig oft durchgeführt werden (Vgl. Walser, H. (1993). 55.; 36.).

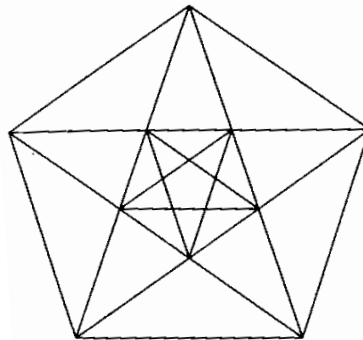


Abbildung 32 Unterteilung eines regelmäßigen Fünfecks mit Diagonalen nach Herz-Fischer, R. (1998). 71.

3.7. Der goldene Winkel

„Das Entstehen von Spiralen mit Fibonacci-Zahlen“ steht im engen Zusammenhang mit dem folgenden Winkel, welcher als der goldene Winkel bezeichnet wird. (Verhulst, F., &

Walcher, S. (2010). *Das Zebra-Buch zur Geometrie* (Springer-Lehrbuch). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 34.). Der goldene Winkel teilt den Vollwinkel, also 360° , im goldenen Schnitt. Da es sich um einen vollen Kreis handelt, erzeugt der goldene Schnitt zwei Winkel, dessen Formeln lauten

$$\varphi_1 = \frac{360^\circ}{\phi} \approx 222,5^\circ \text{ und } \varphi_2 = 360^\circ - \frac{360^\circ}{\phi} \approx 137,5^\circ,$$

wobei φ_2 der goldene Winkel genannt wird.

Dieser Winkel kommt unter anderem in der Pflanzenwelt vor. 1837 kamen die beiden Brüder Bravais zum Schluss, dass die Blattansätze an einem Stängel im Vorhinein bestimmt werden können. Die Phyllotaxis von Pflanzen beinhalten diesen goldenen Winkel und nutzen dadurch den Raum optimal und effizient, da es wegen der Irrationalität von ϕ zu minimalen Blätterüberdeckungen kommt.

3.8. Goldene Ellipse

Immer wieder taucht der goldene Schnitt als die Lösung bei Aufgaben auf, wo Mathematiker ihn nicht erwartet haben.

Eine Ellipse besitzt die Brennpunkte F_1 und F_2 und die Halbachsen a und b . Welches Verhältnis müssen die beiden Halbachsen zueinander haben, damit der Flächeninhalt dieser Ellipse mit dem eines Thaleskreises, der den Durchmesser $\overline{F_1F_2}$ hat, übereinstimmt?

Seien a und b die Halbachsen und F_1 und F_2 die Brennpunkte einer Ellipse. F_1 und F_2 liegen auf einer Kreislinie eines Thaleskreises mit Mittelpunkt M . Der Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Halbachsen. Der Flächeninhalt einer Ellipse lautet $A_1 = ab\pi$.

Sei $e = \frac{\overline{F_1F_2}}{2} = \sqrt{a^2 - b^2}$ der Radius des Kreises. Dann ist der Flächeninhalt des Thaleskreises $A_2 = (a^2 - b^2)\pi$.

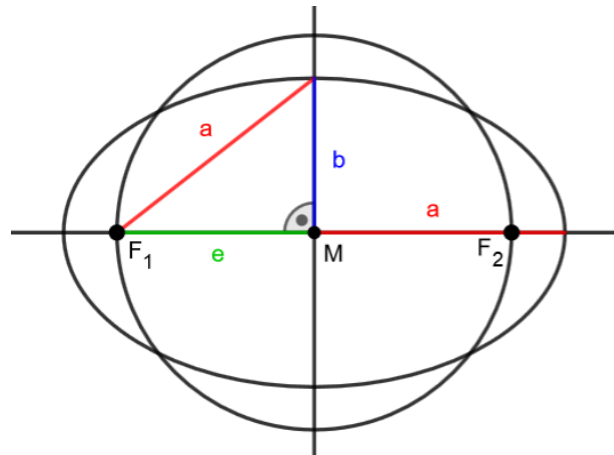


Abbildung 33 Kreis und Ellipse

Dann ist $A_1 = A_2$, also

$$ab\pi = (a^2 - b^2)\pi.$$

Durch Umformen und Dividieren durch b^2 erhält man

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0.$$

Durch Verwendung der großen Lösungsformel erhält man für den positiven Wert

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Somit verhalten sich die Halbachsen im goldenen Schnitt zueinander.

■

Aufgrund dieser Halbachsen kann die Ellipse in ein goldenes Rechteck mit den Seitenlängen $2a$ und $2b$ eingeschrieben werden. Sie wird als die goldene Ellipse bezeichnet.

Das bedeutet:

Eine goldene Ellipse enthält Halbachsen a und b für die $\frac{a}{b} = \phi$ gilt (Vgl. Walser, H. (1993). 57f.; Alsina, C., & Nelsen, R. (2015). 141.; Huntley, H. (1970). 65.).

3.9. Goldener Quader

Es wurde das folgende geometrische Problem gestellt, dessen Lösung Mathematiker positiv überrascht hat, da dieses die goldene Zahl verborgen hielt:

„Wie sieht ein Quader mit Volumen 1 aus, dessen Raumdiagonalen die Länge 2 haben?“
(Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 67.)

Es sei ein Quader mit der Kantenlänge a , b und c gegeben. Dann lautet die Formel für das Volumen und für die Länge der Raumdiagonale:

$$V = a \cdot b \cdot c = 1 \text{ und } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2.$$

Man gehe ausschließlich auf den Fall $b=1$ ein und erhält durch Einsetzen und Umformen

$$a \cdot c = 1 \text{ und } a^2 + c^2 = 3.$$

Weiter ergibt sich durch das Einsetzen von $c = \frac{1}{a}$ in die zweite Gleichung

$$a^4 - 3a^2 + 1 = 0,$$

also

$$a_1^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \phi = \phi^2$$

und

$$a_2^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \Psi \stackrel{(1.2)}{\iff} a_2^2 = 1 - \frac{1}{\phi} \stackrel{(1.2)}{\iff} a_2^2 = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}.$$

Somit ist $a = \phi$ und $c = \phi^{-1}$, wenn man a als die längere Kante annimmt. Die Kantenlängen des Quaders verhalten sich folgendermaßen zueinander:

$$\phi: 1: \phi^{-1}$$

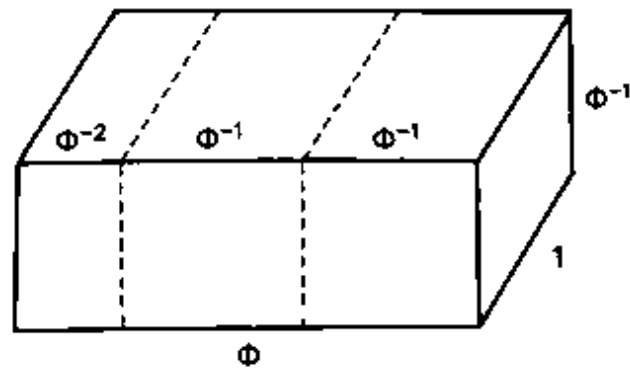


Abbildung 34 goldener Quader nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 68

Aus diesem Grund wird dieser als der goldene Quader bezeichnet. Dessen Seitenflächeninhalte haben ebenfalls das Verhältnis $\phi:1:\phi^{-1}$.

Teilt man den goldenen Quader in je zwei Quader mit der quadratischen Grundfläche $\phi^{-1} \cdot \phi^{-1}$ auf, so bleibt ein kleinerer goldener Quader mit dem Volumen $V = \phi^{-3}$ übrig (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 67f.; Huntley, H. (1970). 98ff.).

3.10. Platonische Körper

Euklid befasste sich im letzten der dreizehn Bücher seiner „Elemente“ mit den platonischen Körpern. Er hat Konstruktionsverfahren aller platonischen Körper angefertigt. Jedoch hat Plato den vier regelmäßigen Polyedern, ausgenommen den Dodekaeder, die folgenden griechischen Urelemente zugeschrieben, weshalb heute noch diese Körper mit ihm assoziiert werden:

- Tetraeder → Feuer
- Würfel oder Hexaeder → Erde
- Oktaeder → Luft
- Ikosaeder → Wasser

Der Dodekaeder wurde mit der Quintessenz des Weltalls in Verbindung gebracht.

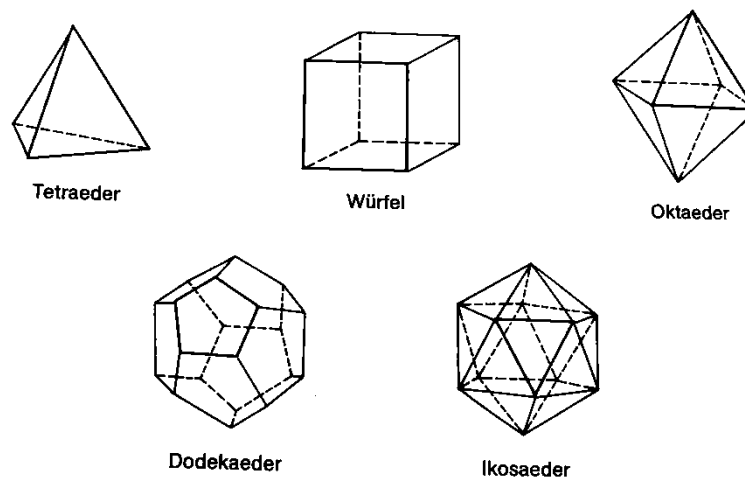


Abbildung 35 die platonischen Körper nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 50.

Die fünf platonischen Körper erfüllen folgende zwei Eigenschaften. Sie bestehen aus konvex aneinander angrenzenden Seitenflächen, welche aus komplementären regelmäßigen Vielecken bestehen und dessen Ecken jeweils die gleiche Eckenanzahl berühren.

Sie besitzen jeweils Dreiecke, Quadrate oder Fünfecke als Seitenflächen (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 50f.; Walser, H. (1993). 101f.; Huntley, H. (1970). 31ff.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 66.; Alsina, C., & Nelsen, R. (2015). 40.).

	Anzahl der Flächen an jeder Ecke	Anzahl der Ecken pro Fläche	Gesamt- zahl der Ecken	Gesamt- zahl der Kanten	Gesamt- zahl der Flächen
Tetraeder	3	3	4	6	4
Würfel	3	4	8	12	6
Oktaeder	4	3	6	12	8
Dodekaeder	3	5	20	30	12
Ikosaeder	5	3	12	30	20

Abbildung 36 Tabelle nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 51.

Euler, einer der größten Mathematiker, hat eine weitere gemeinsame Eigenschaft der platonischen Körper entdeckt, welche er in eine einfache Formel erfasste. Eulers Formel lautet: Sei E die Gesamtzahl der Ecken, K die Gesamtzahl der Kanten und F die Gesamtzahl der Flächen, so gilt $E + F = K + 2$. Durch Einfügen der Daten aus Abbildung 36 kann die Formel überprüft werden (Vgl. Huntley, H. (1970). 32f. 120ff.; Aumann, G. (2006). 84f.).

In dieser Arbeit werden der Dodekaeder und der Ikosaeder näher behandelt. Die folgende Aussage wird bewiesen:

„Die zwölf Ecken eines Ikosaeders sind die zwölf Ecken dreier goldener Rechtecke, die paarweise aufeinander senkrecht stehen.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl., ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 51.)

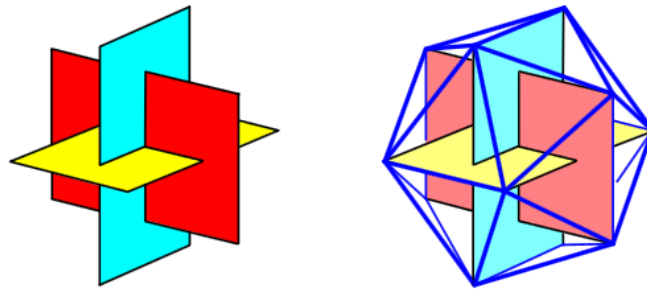


Abbildung 37 goldene Rechtecke als Gerüst des Ikosaeders nach Walser, H. (2013). 20.

Der Beweis ist dem von Beutelspacher ähnlich: Man betrachte fünf benachbarte Dreiecke des Ikosaeders, die allesamt eine gemeinsame Ecke besitzen. Diese bilden eine Pyramide mit einem regelmäßigen Fünfeck als Grundfläche. Man ziehe eine Diagonale in dieser Grundfläche und erstelle von den Eckpunkten dieser Diagonale entlang der Kanten jeweils eine Senkrechte zur Grundfläche. Die Diagonale ist die längere Seite eines Rechtecks und die dazu senkrecht stehende Kante die Breite des Rechtecks. Das bedeutet, dass das Verhältnis der Diagonale zur Ikosaederkante beziehungsweise Fünfeckseite anhand des Satzes 3.1. (e) im goldenen Schnitt steht. Das heißt, es handelt sich um ein goldenes Rechteck. Um die beiden restlichen goldenen Rechtecke analog zu erlangen werden zu dem obigen goldenen Rechteck zwei senkrechte Ebenen erstellt.

■

(Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 52.)

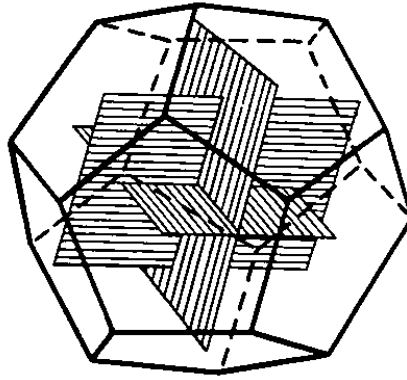


Abbildung 38 goldenes Rechteckgerüst im Dodekaeder nach Huntley, H. (1970). 34.

Anhand dessen kann man schlussfolgern, dass das Ikosaeder in einen Würfel eingeschrieben werden kann. Bei dem Dodekaeder kann man das Gerüst der drei goldenen Rechtecke einschreiben, wobei die Ecken der goldenen Rechtecke die Mittelpunkte und Schwerpunkte der regelmäßigen Fünfecke sind, siehe Abbildung 38. Ein solches Gerüst kann mit drei goldenen Rechtecken aus Karton zusammengesetzt werden, welche wie in Abbildung 39 in der Mitte mit einem ϕ^{-1} langen Längsschlitz zugeschnitten sind. Man erhält ein Ikosaeder, wenn man die Ecken mit einem Faden miteinander verknüpft. Der Faden kann mit Stecknadeln oder einer Heißklebepistole an den Ecken befestigt werden (Vgl. Walser, H. (1993). 102ff.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 52.; Huntley, H. (1970). 33f.; Tiller, E. (2011). 5.; Livio, M. (2008). 72.).

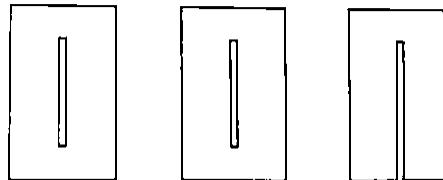


Abbildung 39 Gerüstbauteile des Ikosaeders nach Walser, H. (1993). 103.

3.11. Die Irrationalität und Inkommensurabilität

„The fact that the Golden Ratio cannot be expressed as a fraction (as a rational number) means simply that the ratio of the two lengths [...] cannot be expressed as a fraction. In other words, [...] we cannot find some common measure that is contained, let's say, 31 times in AC and 19 times in CB. Two such lengths that have no common measure are called

incommensurable.“ (Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books. 5)

Die Irrationalität wurde erstaunlicherweise nicht erstmalig bei den Diagonalen im Einheitsquadrat, sondern bei der Studie am Fünfeck entdeckt. Hippasos stellte die Inkommensurabilität und damit die Irrationalität anhand des goldenen Schnittes fest (Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 1.; Walz, G., & Atiyah, M. (2003). 254.; Livio, M. (2008). 5.).

Der alternative Beweis für die Irrationalität von ϕ ähnelt dem von Alsina und Rinkens: Die Irrationalität der goldenen Zahl kann durch den Einsatz des Pentagramms oder des Pentagons bewiesen werden.

Indirekter Beweis:

Man nehme an ϕ sei eine rationale Zahl mit $\phi = \frac{m}{n} \forall m, n \in \mathbb{N} : ggT(m, n) = 1$.

Es sei ein Pentagramm, siehe Abbildung 40.a, mit der Diagonallänge m und der Seitenlänge n gegeben. Aus dem schon behandelten Thema der Ähnlichkeit der Dreiecke bei der spira mirabilis, lässt sich schließen, dass das graue Dreieck in der Abbildung 40.a dem grauen Dreieck aus der Abbildung 40.b ähnelt.

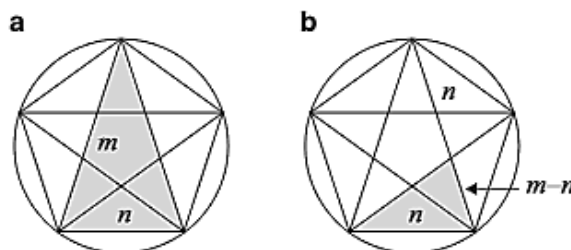


Abbildung 40 Ähnlichkeit der goldenen Dreiecke nach Alsina, C., & Nelsen, R. (2015). 203.

Somit gilt

$$\phi = \frac{n}{m-n} \quad \text{?}$$

Setzt man nämlich die beiden Gleichungen gleich so erhält man mit Umformen

$$n^2 = m^2 - m \cdot n.$$

Aufgrund der Teilerfremdheit bedeutet dies, dass n und m nicht beide gerade sein können. Falls n gerade ist, so wäre die Aussage der Gleichung falsch, da n^2 gerade und das Ergebnis der rechten Gleichungsseite eine ungerade Zahl wäre. Falls n ungerade ist, so

wäre n^2 ungerade und die rechte Seite der Gleichung unabhängig davon, ob m gerade oder ungerade ist, immer gerade und damit ein Widerspruch. Das heißt ϕ ist eine irrationale Zahl (Vgl. Alsina, C., & Nelsen, R. (2015). 203.; Rinkens, H.-D. (2010). 2.).



Somit gilt:

„Das Längenverhältnis zwischen einer Diagonale und einer Seite im regelmäßigen Fünfeck läßt [sic!] sich nicht als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen darstellen.“ (Walz, G., & Atiyah, M. (2003). *Faszination Mathematik*. Heidelberg [u.a.]: Spektrum Akad. Verl. 161.)

3.12. Die goldene Zahl ϕ und Fibonacci

„Leonardo von Pisa [...] verfasste 1202 das Buch 'Liber abaci' (Buch der Rechenkunst, abacus = Rechenbrett, also ein Buch über Zahlen, zählen und rechnen). In diesem Buch beschrieb er unter anderem das folgende“ „Kaninchenproblem“, welches das Buch und damit auch Fibonacci selbst berühmt gemacht hat (Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). *Das Zebra-Buch zur Geometrie* (Springer-Lehrbuch). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 15.). Es wird das Fortpflanzungsverhalten von Kaninchenpaaren und deren Nachkommenschaft betrachtet. Ein Kaninchenpaar besteht immer aus einem Männchen und einem Weibchen.

Die Problemstellung lautet:

Nenne die Anzahl der Kaninchenpaare unter den folgenden Bedingungen:

- (i) Ab der Geburt ist jedes Kaninchenpaar im zweiten Monat gebärfähig.
- (ii) Von dem ersten Wurf an gebiert jedes Weibchen jeden Monat ein neues Kaninchenpaar.
- (iii) Die Kaninchen sind unsterblich.

Dies bedeutet, dass das erste und derzeit einzige Kaninchenpaar im ersten Monat geboren ist und nach 2 Monaten ein neues Paar in die Welt setzt. Im vierten Monat gebiert das erste Kaninchenpaar ein neues Paar. Im fünften Monat gebären die ersten beiden Paare je ein neues Paar. Somit gibt es insgesamt fünf Kaninchenpaare im fünften Monat. Dieser Prozess kann beliebig oft durchgeführt werden.

Die Problemstellung wird mithilfe eines Baumdiagrammes veranschaulicht.

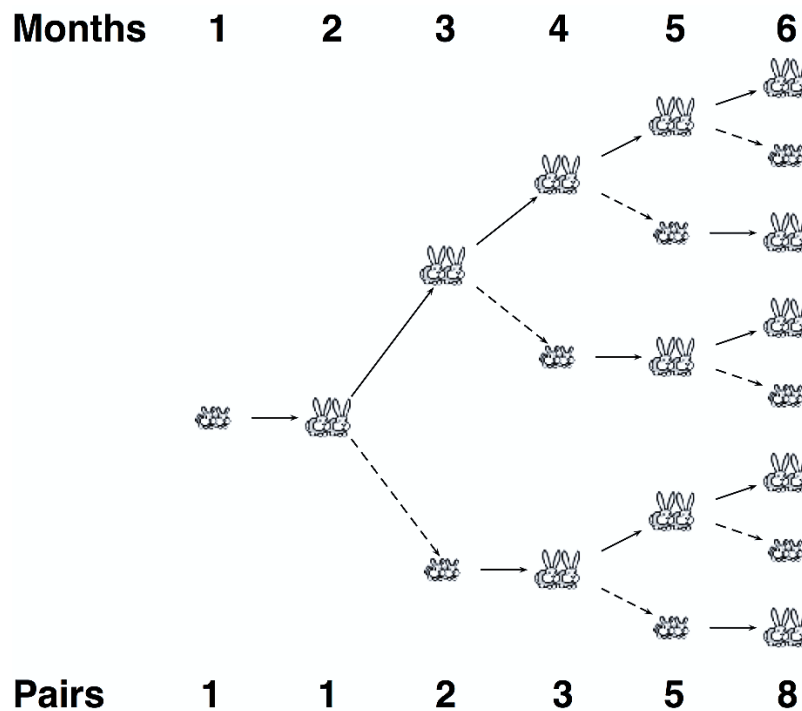


Abbildung 41 Baumdiagramm des Kaninchenproblems

Die Anzahl aller Paare in einem n -ten Monat wird unabhängig vom Alter mit f_n bezeichnet. Aus dem Baumdiagramm können folgende Werte in Form einer Folge herausgelesen werden:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, \dots$$

Durch Erkennen eines Schemas können weitere Folgeglieder ermittelt werden. Dieses lässt sich wie folgt beschreiben: Alle Zahlen nach f_2 werden durch die Summe zweier vorangehender Folgeglieder erhalten.

Formal:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ mit } n \geq 1$$

Beweis nach Beutelspacher: Im $(n+1)$ -ten Monat leben laut der Definition f_{n+1} Paare. Davon sind f_n Paare, aufgrund ihres Alters, gebärfähig. Also gebären insgesamt f_n Kaninchenpaare von f_{n+1} Paaren im $(n+2)$ -ten Monat je ein neues Paar.

Das heißt

„ f_{n+2} = Anzahl der Kaninchenpaare im $(n+1)$ -ten Monat + Anzahl der Paare, die im $(n+2)$ -ten Monat geboren werden = $f_{n+1} + f_n$.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der

goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 88.)

■

(Vgl. Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 10f.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 15f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 87f.; Huntley, H. (1970). 158f.; Herz-Fischler, R. (1998). 144.)

„Eine Folge, deren einzelne Glieder durch einen Term in den vorigen Gliedern erklärt sind, nennt man eine rekursive Folge (von lateinisch *recurrere* – zurücklaufen).

Insbesondere sind Folgen, deren n -tes Glied durch

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

definiert ist, rekursive Folgen. Eine solche Folge ist durch Vorgabe von x_1 und x_2 eindeutig bestimmt, da sich dann Stück für Stück sämtliche Glieder berechnen lassen.“ (Lausch, H. (2009). Fibonacci und die Folge(n). München: Oldenbourg. 2.)

Dieser Abschnitt befasst sich mit einer der bekanntesten rekursiven Folgen. Die spezielle Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,... nennt man die „Fibonacci-Folge“, wobei dessen Glieder als „Fibonacci-Zahlen“, f_n mit $n \in \mathbb{N}$, bezeichnet werden.

Falls die Startwerte $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ gewählt werden, so handelt es sich um die Lucas-Folge

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots,$$

welche neben der Fibonacci-Folge der Rekursionsformel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n \geq 1$ entspricht. Somit ist die Lucas-Folge mit den Startwerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ eine Fibonacci-Folge.

Wenn für die Lucas-Folge die Startwerte $f_1 = a$ und $f_2 = b$ eingesetzt werden, welche für die Verhältnisse $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$ des goldenen Schnittes stehen, so erhält man die Folge

$$a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b, \dots$$

für die man $a=1$ und $b=\phi$ einsetzt. Daraus folgt

$$1, \phi, 1 + \phi, 1 + 2\phi, 2 + 3\phi, 3 + 5\phi, 5 + 8\phi, \dots$$

und wegen (1.1) gilt mit $f_0 = 0$

$$\begin{aligned} 1 &= \phi^0, \phi = \phi^1, 1 + \phi = \phi^2, 1 + 2\phi = (1 + \phi) + \phi = \phi^2 + \phi = \phi(\phi + 1) = \phi \cdot \phi^2 \\ &= \phi^3, \dots \end{aligned}$$

Anschaulicher erhält man

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= 1 \cdot \Phi + 0 = f_1 \cdot \Phi + f_0 \\ \Phi^2 &= 1 \cdot \Phi + 1 = f_2 \cdot \Phi + f_1 \\ \Phi^3 &= 2 \cdot \Phi + 1 = f_3 \cdot \Phi + f_2 \\ \Phi^4 &= 3 \cdot \Phi + 2 = f_4 \cdot \Phi + f_3 \\ \Phi^5 &= 5 \cdot \Phi + 3 = f_5 \cdot \Phi + f_4 \\ \Phi^6 &= 8 \cdot \Phi + 5 = f_6 \cdot \Phi + f_5 \\ &\vdots \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Abbildung 42 zur Linearisierung der Potenzen von ϕ nach Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 13.

Durch Beobachtung erkennt man ein Schema. Ein Folgenglied ϕ^n setzt sich aus den Fibonacci-Zahlen des entsprechenden Fibonacci-Gliedes f_n als Koeffizient von ϕ und dem Summanden des vorigen Fibonacci-Gliedes f_{n-1} zusammen. Die Potenz n bestimmt also die verwendeten Glieder der Fibonacci-Folge. Das bedeutet man kann auch hier die Rekursionsformel anwenden

$$\phi^n = f_n \phi + f_{n-1}$$

und somit gilt

$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6, \dots$$

Die Fibonacci-Folge steht in enger Beziehung mit der goldenen Zahl, da die Quotienten $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ mit $n \geq 1$ sich dem Wert ϕ , siehe Tabelle 1, annähern.

n	f_n	f_{n+1}	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$	n	f_n	f_{n+1}	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	1	1	1	9	34	55	1,6176470588
2	1	2	2	10	55	89	1,618
3	2	3	1,5	11	89	144	1,6179775281
4	3	5	1,6	12	144	233	1,61805
5	5	8	1,6	13	233	377	1,6180257511
6	8	13	1,625	14	377	610	1,6180371353
7	13	21	1,6153846154	15	610	987	1,618032869
8	21	34	1,619047619	16	987	1597	1,6180344478

Tabelle 1

Daraus ergibt sich die Fibonacci-Quotientenfolge

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$$

dessen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$ ist.

Um das zu beweisen, schreibt man zunächst $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ mit $n \geq 1$.

Beweis ist ähnlich wie in Beutelspacher: Sei $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$ mit $n \geq 2$, weil

$$x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Man berechne die Differenz von ϕ und x_n :

$$\phi - x_n = 1 + \frac{1}{\phi} - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1} - \phi}{\phi \cdot x_{n-1}}.$$

Weil x_{n-1} und ϕ positiv sind, gilt somit $|\phi - x_n| = \frac{|\phi - x_{n-1}|}{\phi \cdot x_{n-1}}$.

Daraus folgt aufgrund von $x_{n-1} \geq 1$ die folgende Ungleichung:

$$|\phi - x_n| \leq \frac{|\phi - x_{n-1}|}{\phi},$$

dadurch erhält man

$$|\phi - x_n| \leq \frac{|\phi - x_{n-1}|}{\phi} \leq \frac{|\phi - x_{n-2}|}{\phi \cdot \phi} \leq \dots \leq \frac{|\phi - x_2|}{\phi^{n-2}},$$

also

$$|\phi - x_n| \leq \frac{|\phi - x_2|}{\phi^{n-2}}.$$

Die Differenz $|\phi - x_n|$ wird mit ansteigendem n , wegen $\phi > 1$, beliebig klein. Somit ist die Aussage, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$, gezeigt. ■

Analog kann für eine beliebige Lucas-Folge mit den Anfangswerten x_1 und x_2 , die das gleiche Vorzeichen besitzen, bewiesen werden, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \phi$ (Vgl. Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 10f. 13f.; Wagner, J. (2017). 72ff.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 12-18.; Lausch, H. (2009). 2. 16f.; Huntley, H. (1970). 46f. 141-144.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 87ff. 91ff. 94f.; Walser, H. (1993). 74ff. 81.).

„Ein weiterer bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Fibonacci-Folge und dem Goldenen Schnitt ist die Formel von Binet. Mithilfe dieser können die Fibonacci-Zahlen aus dem Goldenen Schnitt berechnet werden.“ (Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). DAS GOLDENE ZEITALTER. 11.)

Die folgende Formel war schon vor Jacques P. M. Binet (1786-1856) Mathematikern, wie zum Beispiel Abraham de Moivre (1667-1754) und Daniel Bernoulli (1700-1782), bekannt, wurde jedoch nach Binet benannt. Sie ist die „explizite Darstellung des n -ten Folgenglieds f_n der Fibonaccifolge“ (Lausch, H. (2009). Fibonacci und die Folge(n). München: Oldenbourg. 15.).

Die Formel von Binet lautet

$$f_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \stackrel{\text{Def.}}{\iff} f_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}^*.$$

Der Beweis wird ähnlich wie in Lausch mit Induktion nach n durchgeführt:

Sei $n=0$ und $n=1$:

$$\begin{aligned}\frac{\phi^0 - \psi^0}{\sqrt{5}} &= \frac{1 - 1}{\sqrt{5}} = 0 = f_0 \text{ und } \frac{\phi^1 - \psi^1}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 = f_1 \text{ w. A.}\end{aligned}$$

Für $n-1$ und $n-2$ wird angenommen, dass die Formel ebenfalls eine wahre Aussage liefert. Es gilt $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ wegen der Rekursionsformel.

Jetzt wird $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$ und $\psi^n = \psi^{n-1} + \psi^{n-2}$ gezeigt.

$$\phi^{n-1} + \phi^{n-2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

Man hebe $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$ heraus, so dass

$$\begin{aligned}\phi^{n-1} + \phi^{n-2} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right] = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2+2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \phi^n.\end{aligned}$$

Und bei

$$\psi^{n-1} + \psi^{n-2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

wird $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$ herausgehoben, so dass

$$\psi^{n-1} + \psi^{n-2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1\right]$$

Wenn die Eigenschaften $-\Psi = \frac{1}{\phi}$ aus (1.2) und $\phi = 1 - \Psi$ in $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$ aus (1.2) eingesetzt und umgeformt wird, so erhält man $\Psi^2 = \Psi + 1$. Deswegen wird $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ in die Gleichung eingesetzt:

$$\Psi^{n-1} + \Psi^{n-2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} \cdot \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2+2} = \Psi^n.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} &= \frac{\phi^{n-1} - \Psi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-2} - \Psi^{n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi^{n-1} + \phi^{n-2}) - (\Psi^{n-1} + \Psi^{n-2})}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Somit wurde $f_n = \frac{\phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}}$ bewiesen. ■

(Vgl. Walser, H. (1993). 75f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 93f.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 11f.; Huntley, H. (1970). 56f.; Lausch, H. (2009). 15ff.)

3.13. Die Kettenbruchdarstellung und -wurzel

Da sich ϕ schlecht approximieren lässt, wird „ ϕ manchmal auch als die 'irrationalste Zahl' bezeichnet“ (Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). DAS GOLDENE ZEITALTER. 12.). dies ist aufgrund der Kettenbruchdarstellung, welche durch den wiederholenden Einsatz von $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ entsteht:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}$$

Symbolisch wird dieser Kettenbruch mit $\phi = [1, 1, 1, 1, \dots]$ abgekürzt.

Wenn ein Kettenbruch unendlich ist, so ist die dazugehörige Zahl, in diesem Fall ϕ ,

irrational. „Jeder unendliche Kettenbruch ist konvergent und stellt daher eine reelle Zahl dar.“ (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl., ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 100.)

Der allgemeine unendliche Kettenbruch lautet $a = [a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$, wobei

$a_1, a_2, a_3 \dots \in \mathbb{N}$ und $a_0 \in \mathbb{Z}$. Der Kettenbruch konvergiert gegen die irrationale Zahl a . Durch einen Abbruch der Kettenbruchentwicklung an einer beliebigen Stelle erhält man einen Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$, der eine rationale Zahl ist und a von allen rationalen Zahlen dessen Nenner kleiner oder gleich q ist am optimalsten approximiert. Die Näherungsbrüche besitzen Glieder mit geraden und ungeraden n . Es gilt die Eigenschaft $\forall n \in \mathbb{N}_0: q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ (3.4).

Die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ konvergieren gegen a , so gilt $\left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $x_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ für $a = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x_n] = \frac{x_n p_n + p_{n-1}}{x_n q_n + q_{n-1}}$. Wird die Differenz $a - \frac{p_n}{q_n}$ durch Erweiterung auf einen Bruch gebracht, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{(x_n p_n + p_{n-1})q_n - p_n(x_n q_n + q_{n-1})}{q_n(x_n q_n + q_{n-1})} = \frac{q_n x_n p_n + q_n p_{n-1} - q_n x_n p_n - p_n q_{n-1}}{q_n(x_n q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n(x_n q_n + q_{n-1})} \end{aligned}$$

Durch (3.4) erhält man

$$\begin{aligned} a - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{(-1)^n}{q_n(x_n q_n + q_{n-1})}. \\ x_n > a_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{x_n} < \frac{1}{a_{n+1}}, \end{aligned}$$

weil x_n keine natürliche Zahl ist und $a_{n+1} := \lfloor x_n \rfloor$.

Das bedeutet, dass

$$\left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Es wurde gezeigt, dass $\frac{p_n}{q_n}$ gegen x konvergiert.

Somit konvergiert jeder unendliche Kettenbruch.

■

(Vgl. http://www.cits.rub.de/imperia/md/content/may/13/ss13/zahlenss13/17_wiener.pdf;
Werner, B. (2008). Probevorlesung “für Erstsemester.”)

Es wird $\phi = [1,1,1,1, \dots]$ bewiesen.

Beweis ist dem von Beutelspacher ähnlich: Sei $[1,1,1,1, \dots]$ eine reelle Zahl a . Es wird gezeigt, dass $a = \phi$ ist.

Wegen $a > 0$ gilt

$$1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{[1,1,1,1, \dots]} = [1,1,1,1, \dots] = a.$$

Somit ist $a^2 = a + 1$ durch Umformen und dem Einsatz der großen Lösungsformel $a = \phi$.

■

Es ist erstaunlich, dass ϕ „den einfachsten aller unendlichen Kettenbrüche“ besitzt (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl. 100.).

Aufgrund der Fibonacci-Quotientenfolge kann auf der Ebene der Kettenbruchdarstellung wieder ein weiterer Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt erstellt werden, wobei es sich auch hierbei um Näherungsbrüche der goldenen Zahl ϕ handelt.

Wegen $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, erhält man mit dem Anfangswert $x_1 = 1$ die Fibonacci-Quotientenfolge:

$$x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2, x_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}, x_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}, \dots$$

Diese Kettenbruchdarstellung ist wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$ möglich.

Durch Beobachtung ist zu erkennen, dass n die Anzahl der Einsen beim jeweiligen Folgeglied angibt.

Allgemein lässt sich schreiben $[1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1] = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies wird mit der Induktion nach n nach Beutelspacher bewiesen.

Beweis nach Beutelspacher: Für $n=1$ gilt: $[1] = 1 = \frac{1}{1} = \frac{f_2}{f_1}$.

Für $n > 1$ wird der Kettenbruch temporär a_n genannt. n gibt die Anzahl der Einsen in $a_n = [1, 1, 1, \dots, 1]$ an. Also ist

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Die behauptete Aussage. ■

(Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 100f.; Huntley, H. (1970). 140.; Walser, H. (1993). 95ff.; Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 12.; Lausch, H. (2009). 106.; Wagner, J. (2017). 70.; Walz, G., & Atiyah, M. (2003). 256.)

(1.1) lässt sich leicht in die Gleichung $\phi = \sqrt{1 + \phi}$ umformen, welche sich zur folgenden Kettenwurzel entwickelt:

$$\phi = \sqrt{1 + \phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

(Vgl. Lausch, H. (2009). 108.; Wagner, J. (2017). 70.)

3.14. Fraktale

„Unter Fraktalen verstehen wir Figuren, die Selbstähnlichkeiten aufweisen, das heisst *[sic!]*, bei denen Teilfiguren eine verkleinerte Kopie der Gesamtfigur sind.“ (Walser, H. (1993). Der goldene Schnitt (Einblicke in die Wissenschaft: Mathematik). Stuttgart Zürich: Teubner Verl. d. Fachvereine. 14.)

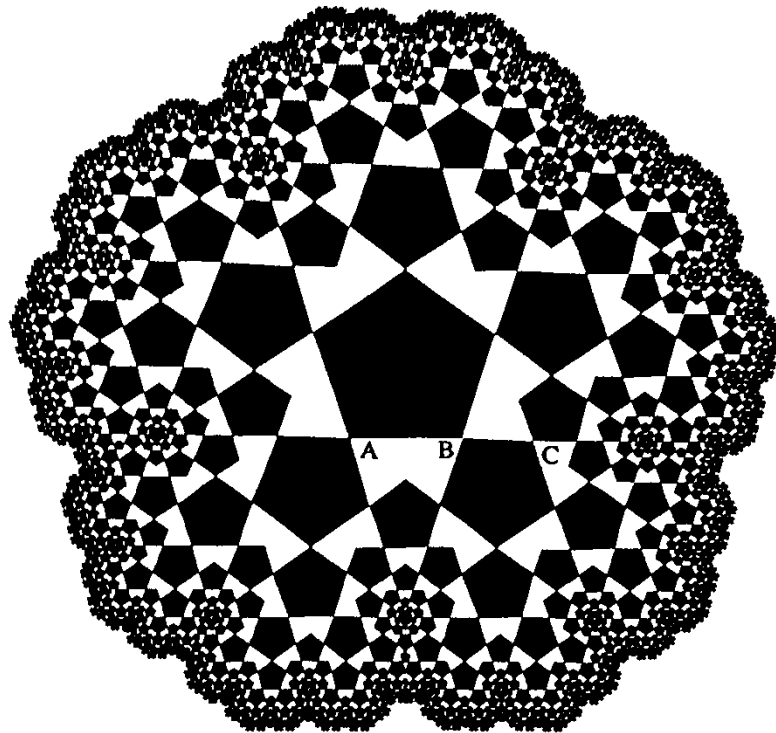


Abbildung 43 Fünfecksfraktal enthält den goldenen Schnitt nach Walser, H. (1993). 11.

Benoît B. Mandelbrot schaffte den Begriff „Fraktal“ mit dessen Eigenschaften und setzte somit wohlgängige Figuren in eine einheitliche Klasse.

Diese können durch Striche und verschiedene Grundfiguren, wie das Quadrat, das gleichseitige Dreieck und das regelmäßige Fünfeck, dargestellt werden. Bei der Verkleinerung wird ein Verkleinerungsfaktor f mit $0 < f < 1$ verwendet. Falls dieser relativ groß ist, so werden sich die Verzweigungen beziehungsweise Äste der neuen Teilfiguren ab einem bestimmten Moment überdecken. Falls er relativ klein ist, so entstehen je nach f kleinere oder größere Zwischenräume. Nach jedem Verkleinerungs- und Kopierprozess wird die neue Teilfigur als die n -te Generation bezeichnet.

Konstruktionsverfahren anhand eines Quadratfraktals:

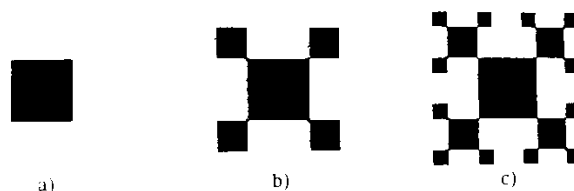


Abbildung 44 Konstruktionsverfahren des Quadratfraktals nach Walser, H. (1993). 24.

Man bestimme für das Ausgangsquadrat die Seitenlänge 1, welche den Verkleinerungsfaktor $f = \frac{1}{2}$ hat. So wie in der Abbildung 44 setze man immer die neuen verkleinerten Teilfiguren an die freistehenden Ecken. Die erste Generation der vier Quadrate hat die Seitenlänge $\frac{1}{2}$ und je drei freistehende Ecken. An diese Ecken wird die zweite Generation mit der Seitenlänge $\frac{1}{4}$ angebracht. Die dritte Generation besitzt die Seitenlänge $\frac{1}{8}$ und drei freistehende Ecken. Dies wird beliebig oft durchgeführt, so dass die Abbildung 45 entsteht.

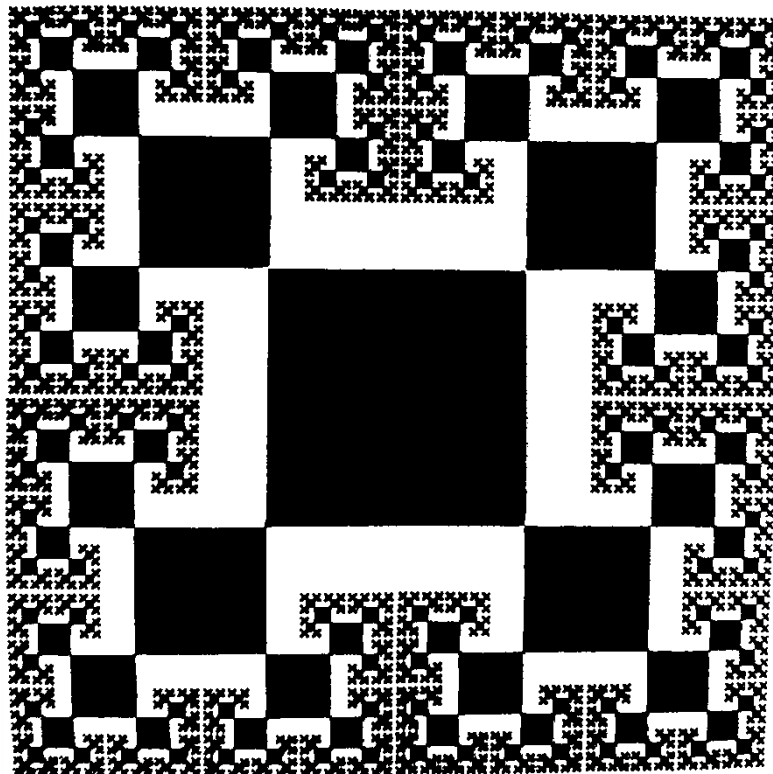


Abbildung 45 Quadratfraktal nach Walser, H. (1993). 24.

Nun kann man diesen Prozess mit einem Dreiecksfraktal durchführen, wobei der Verkleinerungsfaktor so gewählt werden soll, dass es bei den Ästen, so wie bei dem Quadratfraktal, zur Berührung kommt. Die Grundfigur ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 (Abb. 46).

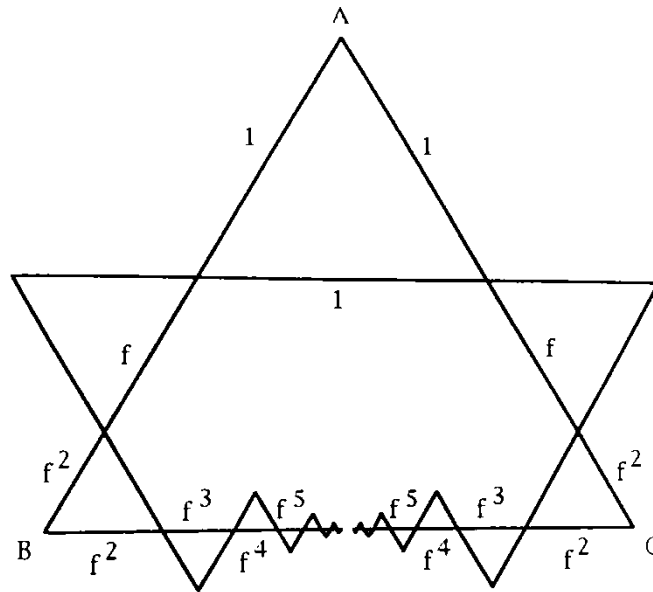


Abbildung 46 Ermittlung des Verkleinerungsfaktors nach Walser, H. (1993). 26.

Da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt, kann man von der Abbildung 46 $\overline{AB} = \overline{AC} = 1 + f + f^2$ entnehmen. So ist ebenfalls $\overline{BC} = 2 \cdot (f^2 + f^3 + f^4 + f^5 + \dots)$ erkennbar. Also gilt:

$$1 + f + f^2 = 2 \cdot (f^2 + f^3 + f^4 + f^5 + \dots)$$

Durch Einsatz der Formel für die geometrische Reihe erhält man

$$1 + f + f^2 = 2 \frac{f^2}{1 - f}$$

und damit

$$f^3 + 2f^2 - 1 = 0$$

Eine Lösung ist $f_1 = -1$. Die Polynomdivision mit $(f + 1)$ ergibt

$$f^2 + f - 1 = 0.$$

Daraus folgt $f_2 = -\phi$ und $f_3 = \phi^{-1}$. Die einzige positive Lösung, $f_3 = \phi^{-1}$, ist auch der Verkleinerungsfaktor bei dem es bei dem Dreiecksfraktal zur Berührung einzelner Verzweigungen kommt (Abb. 47) (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 74ff.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 22ff.; Walser, H. (1993). 23-28.).

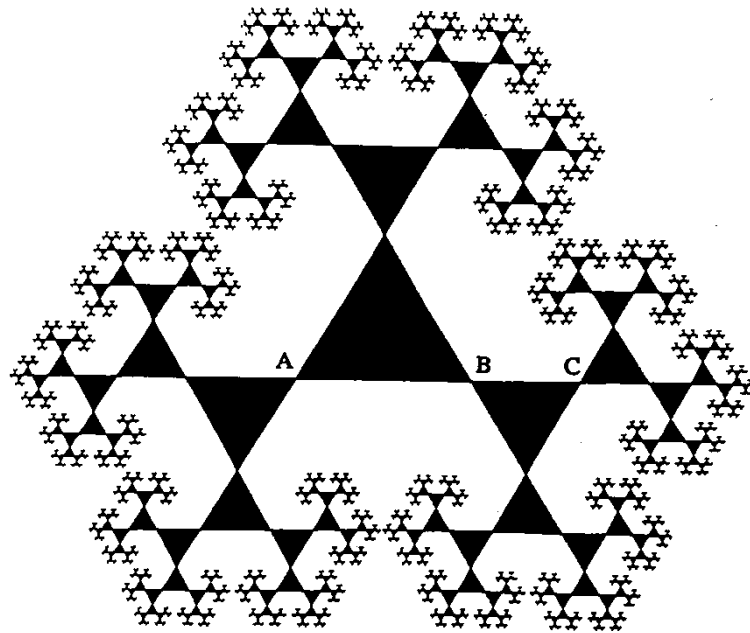


Abbildung 47 goldenes Dreiecksfraktal enthält den goldenen Schnitt nach Walser, H. (1993). 10.

Bei dem goldenen Quadratfraktal kommt man analog zum besprochenen Dreiecksfraktal ebenfalls zu dem Verkleinerungsfaktor $f = \phi^{-1}$. Die Zwischenräume dieses Fraktals, siehe Abbildung 48, sind goldene Rechtecke (Vgl. Walser, H. (1993). 28f.).

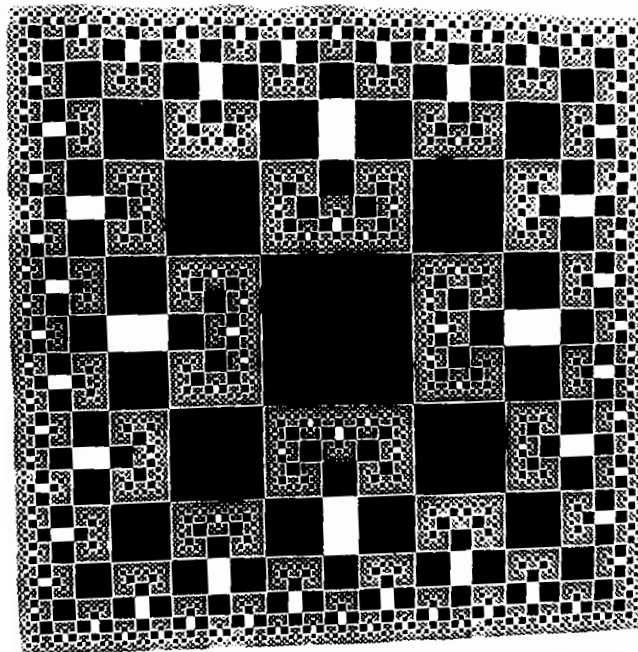


Abbildung 48 goldene Quadratfraktal nach Walser, H. (1993). 30.

3.15. Geometrischer Trugschluss

Es sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 13 gegeben, welche die Summe der aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen 5 und 8 ist. Es werde wie in der Abbildung 49 aufgeteilt und wieder in ein Rechteck mit der Länge 21 und der Breite 8 zusammengestellt. Man vergleiche die Flächeninhalte der beiden Figuren.

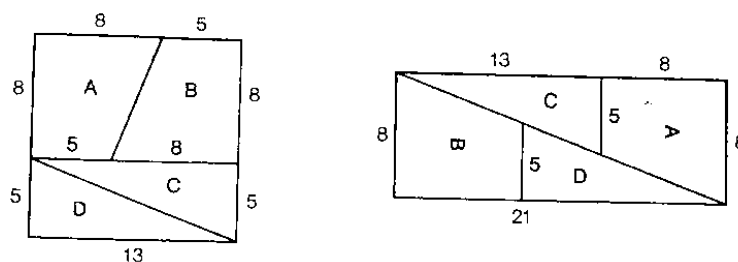


Abbildung 49 geometrische Trugschluss nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 96.

Das Quadrat: $13^2 = 169$

Das Rechteck: $8 \cdot 21 = 168$

Nun stellt sich die Frage, wo die eine Einheit bei dem Rechteck verschwunden ist?

Zunächst wird die Fragestellung mathematisch behandelt.

Diesen Trugschluss kann man auf alle Quadrate mit der Seitenlänge einer Fibonacci-Zahl f_n verallgemeinern. Man teile die Seitenlängen entsprechend der Abbildung 50 in die Summanden f_{n-1} und f_{n-2} auf und füge sie in ein Rechteck zusammen.

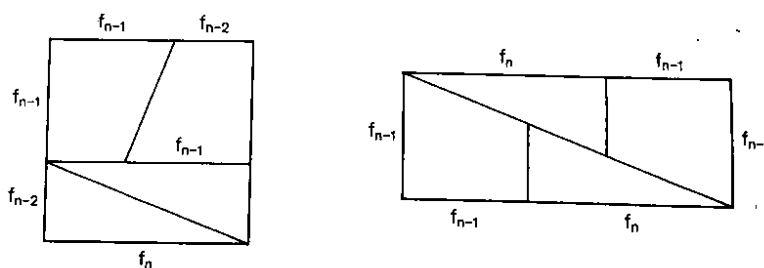


Abbildung 50 Verallgemeinerter geometrischer Trugschluss nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 96.

Man berechne die Flächeninhalte:

Das Quadrat: f_n^2

Das Rechteck: $(f_{n-1} + f_n) \cdot f_{n-1} = f_{n+1} \cdot f_{n-1}$

Es wird durch die Simpson-Identität bewiesen, dass sich die Flächeninhalte der beiden Figuren um eine Einheit unterscheiden.

Die Simpson-Identität besagt: $\forall n \geq 2 : f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.

Es wird ein Beweis ähnlich wie in Beutelspacher mit der vollständigen Induktion nach n durchgeführt.

IA: Sei $n=2$:

$$f_3 \cdot f_1 - f_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2. \quad \text{w. A.}$$

IV: $\forall n \geq 2 : f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

IS: $n+1$ wird gezeigt.

$$\begin{aligned} f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 &= (f_{n+1} + f_n) \cdot f_n - f_{n+1}^2 = f_{n+1} \cdot f_n + f_n^2 - f_{n+1}^2 = \\ &= f_{n+1} \cdot (f_n - f_{n+1}) + f_n^2 = f_{n+1} \cdot (f_n - f_{n+1}) + f_{n+1} \cdot f_{n-1} - (-1)^n = \\ &= f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n-1} - f_{n+1}) + (-1)^{n+1} = f_{n+1} \cdot (f_{n+1} - f_{n+1}) + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

■

Weshalb unterscheiden sich die Flächeninhalte um eine Einheit aus der geometrischen Sicht? Der Trug liegt im zusammengesetzten „Rechteck“. Denn die Teilstücke, die sich bei der Diagonale treffen sollten, passen nicht komplett zusammen. Abhängig von der Fibonacci-Zahl überlappen sie einander oder erzeugen einen sehr schmalen Spalt, so dass der Unterschied von einer Einheit entsteht. Es ist mit bloßem Auge nicht sichtbar, da sich die Steigungen $\frac{f_{n-3}}{f_{n-1}}$, $\frac{f_{n-2}}{f_n}$ und $\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}$ der Geraden entlang der Diagonale, vor allem bei einem großen n , kaum differieren.

Es existiert nur eine Zahlenfolge, dessen Glieder die Summe der vorigen beiden sind, so dass ein richtiges Rechteck zusammengefügt werden kann. Man teile die Seiten des Quadrats, wie in Abbildung 51, im goldenen Schnitt.

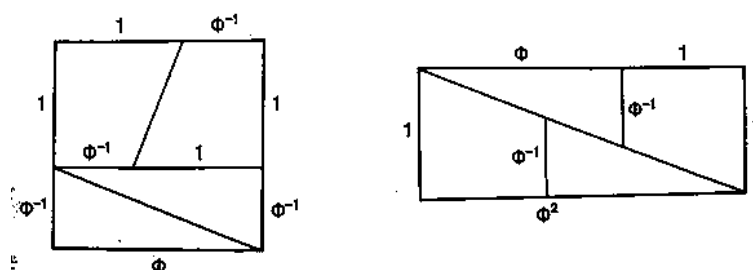


Abbildung 51 Quadrat und Rechteck nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 97.

Es ergeben sich folgende Flächeninhalte:

Das Quadrat: $\phi \cdot \phi = \phi^2$

Das Rechteck: $(\phi + 1) \cdot 1 = \phi^2$

Das kann mit jedem Glied der Zahlenfolge 1, ϕ , $1 + \phi$, $1 + 2\phi$, $2 + 3\phi$, $3 + 5\phi$,... durchgeführt werden (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 95ff.; Huntley, H. (1970). 48f.; Livio, M. (2008). 152f.).

4. Allgemeine Vorkommnisse außerhalb der Mathematik

Der goldene Schnitt taucht in verschiedenen Gebieten der Mathematik und Natur auf und verblüfft und überrascht dadurch die Wissenschaft aufs Neue. Man findet die Fibonacci-Zahlen unter anderem im Energiezustand des Elektrons eines Wasserstoffatoms, in der Phyllotaxis, wie zum Beispiel bei der Ananas, in der Anatomie des menschlichen Körpers, in dessen Anthropometrie und in dessen DNA und im Körperbau einzelner Tiere.

Logarithmische Spiralen: Die Samen von bestimmten Pflanzen, wie die Sonnenblume, besitzen eine dieser spiralförmigen Anordnungen. Ganze Galaxien, wie die Milchstraße, haben diese Form. Naturgewalten, wie zum Beispiel Hurrikans, haben die Form einer logarithmischen Spirale. Schneckengehäuse und die Nautilus Muschel besitzen diese Spirale.

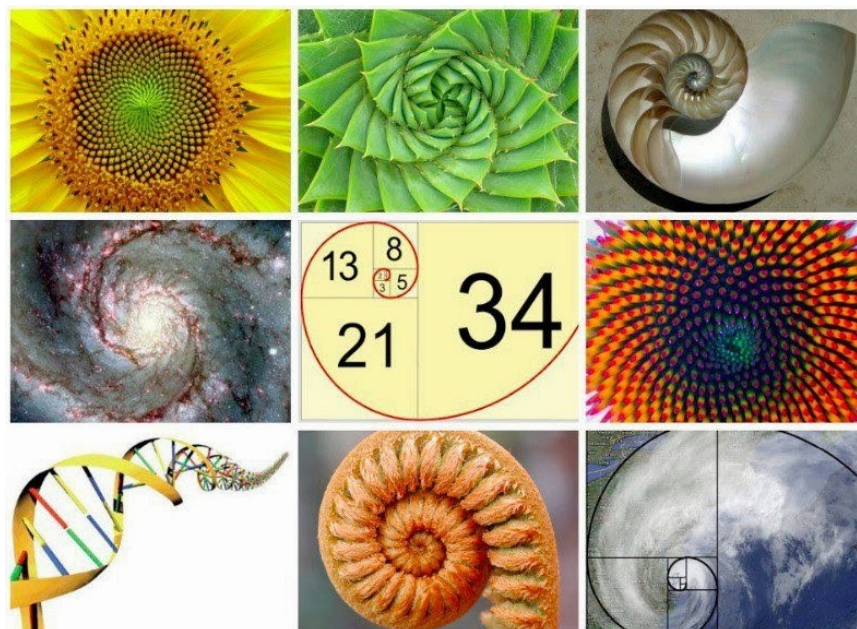


Abbildung 52 Die Vorkommnisse des goldene Schnittes

In der Tierwelt ist der Falkenflug, wenn er auf seine Beute zurast, durch diese Spirale gekennzeichnet. Der Biologe Vance A. Tucker hat sich mit der Frage beschäftigt, weswegen einer der schnellsten Vögel der Welt nicht gerade auf seine Beute zufliegt und ist zu dem folgenden Schluss gekommen. Die Falkenaugen befinden sich seitlich am Kopf des Tieres. Somit müsste der Vogel seinen Kopf zur Seite drehen, um das Beutetier beim Anflug im Visier zu haben. Dadurch würde der Falke enorm an Geschwindigkeit verlieren. Deswegen fliegt er mit einer geraden Kopfhaltung in einer logarithmischen Spirale auf das Beutetier zu, während er die maximale Geschwindigkeit beibehält und die Beute im Visier hat.

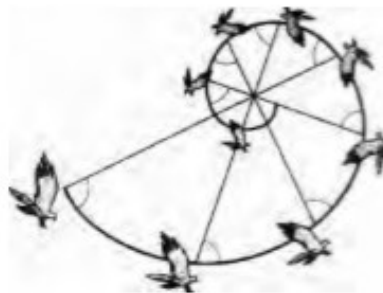


Abbildung 53 Der Falkenflug nach Livio, M. (2008). 119.

Das Pentagramm ist in der Pflanzenwelt und der Astronomie vorhanden. Wenn die beinahe kreisförmig elliptischen Umlaufbahnen der benachbarten Planeten Venus und Erde betrachtet werden, so stellt man fest, dass die Venus die Erde in der „Innenbahn“ wegen ihrer Nähe zur Sonne und ihrer daraus folgenden Geschwindigkeit überholt. In der Zeit, in der die Erde die Sonne acht Mal umrundet hat, hat die Venus den Fixstern dreizehn Mal umrundet. Dadurch kommt es in acht Erdjahren zu fünf Überholmanövern der Venus in gleichen Zeitabständen. Das erhaltene Pentagramm wird auch als „Venuspentagramm“ bezeichnet.

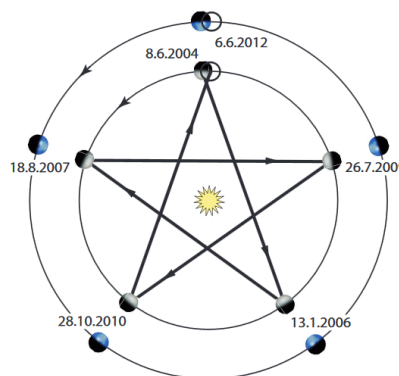


Abbildung 54 Das Venuspentagramm nach Thaller, B. (2009). 28.

Der Mensch nahm das Beispiel der Natur zur Kenntnis. Er baute den goldenen Schnitt in die Architektur, Kunst, Poesie, Technik und Design ein. Es ist ebenso in Musikstücken sowie in Musikinstrumenten, wie die Violine, vorhanden. Zum Beispiel ist das Parthenon in Athen in der Architektur von großer Bedeutung, da die Zahl ϕ nach dem Architekten Phidias benannt wurde, siehe Abbildung 5. Auch in einigen Kathedralen wurde der goldene Schnitt umgesetzt. In der Kunst wird des Öfteren spekuliert, ob ein Werk mit Absicht den Goldenen Schnitt beinhaltet oder nicht. Da Leonardo da Vinci für Luca Pacioli's Buch „Divina Proportioni“ die Körper gezeichnet hat, haben die daraus gewonnenen Erkenntnisse sicher seine darauffolgenden Werke beeinflusst. Bei Salvador Dalis Gemälde „Das letzte Abendmahl“ (1955) ist der goldene Schnitt mehrfach vertreten und seine liebste Form, der Dodekaeder, vorhanden, siehe Abbildung 55. Man findet die goldene Zahl sogar in der Wirtschaft und in Nim-Spielen. Natürlich ist der goldene Schnitt in der Mathematik in verschiedenen Bereichen aufzufinden, jedoch taucht er überraschenderweise auch dort auf, wo man es nicht erwartet.



Abbildung 55 Salvadors Dali „das letzte Abendmahl“

Insgesamt, ist der goldene Schnitt oft der idealste Prozess beziehungsweise die optimalste Form in der Natur (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 26f. 90f. 111ff. 127-172.; Ciullo, B. A., & House, D. (2014). 2f.; Huntley, H. (1970). 156f.; Livio, M. (2008). 3. 9. 68. 73ff. 109. 119f.; Thaller, B. (2009). 26ff.; Iosa, M., Morone, G., & Paolucci, S. (2017). 69.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 69.; Becker, G. (1989). 187-190.).

Im Folgenden konzentriert sich die Arbeit auf die Vorkommnisse des goldenen Schnittes im menschlichen Körper.

5. . *Der menschliche Körper*

Es ist erstaunlich, wie häufig der goldene Schnitt im menschlichen Körper in Erscheinung tritt. Sogar im religiösen Kontext spielt der goldene Schnitt eine signifikante Rolle.

„Und Gott schuf den Menschen als sein Bild, als Bild Gottes schuf er ihn; als Mann und Frau schuf er sie.“ (Bibel, E. (2006). Wuppertal: R. Genesis 1:27)

Kreationisten verbinden den goldenen Schnitt oder die „göttliche Teilung“ mit dem Schöpfer und betrachten die Vorkommnisse der goldenen Zahl ϕ in der Natur als Beweis eines höheren intelligenten Wesens, welches alles designt hat und dieses Verhältnis zu bevorzugen scheint. Insbesondere beim Menschen argumentieren sie, dass dieser als Ebenbild Gottes diese Eigenschaft in vielen Körperteilen beinhalten müsste. Man könnte durch den Bibelvers in Genesis 1:27 erkennen, dass der menschliche Körper vermutlich ähnliche Proportionen mit dem göttlichen Lebewesen teilt. Da Gott fehlerlos, perfekt und heilig dargestellt wird, ist es nicht verwunderlich, dass Sein Erscheinungsbild diese Charakteristiken im goldenen Verhältnis widerspiegelt. Interessant ist, dass wir genau dieses Verhältnis als besonders schön empfinden und diese Schönheit soll nach 1. Mose 1:27 ihren Ursprung in Gott haben. (Vgl. Yetkin, G., Sivri, N., Yalta, K., & Yetkin, E. (2013). 4927.; Ozturk, S., Yalta, K., & Yetkin, E. (2016). 145.; Ilić, I., Stefanović, M., & Sadiković, D. (2018). 128.; Metiu, D. (2014). 52.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 134.; Petruševski, V. M. (2006). 62.; de Campos, D., & da Costa Oliveira, M. (2018). 949.; de Campos, D., Malysz, T., Bonatto-Costa, J. A., Pereira Jotz, G., Pinto de Oliveira Junior, L., & Oxley da Rocha, A. (2015). 703.; Livio, M. (2008). 241.; Iosa, M. (2016). 762f.).

Adolf Zeising, ein deutscher Philosoph, publizierte 1854 sein Werk „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers“. Darin behandelte er den goldenen Schnitt, der in den Verhältnissen des menschlichen Körpers mehrfach vorkommt. So wird zum Beispiel der gesamte aufrecht stehende Körper von der Fußsohle bis zum Scheitel durch den Bauchnabel im goldenen Schnitt geteilt. In der Abbildung 56 sind die gefundenen goldenen Verhältnisse auf einem Blick dargestellt, wobei m für Minor und M für Major steht (Vgl. Frings, M. (2002). 18.; Wittman, E. C. (2013). 155.; Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 36f.; Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 134f.).

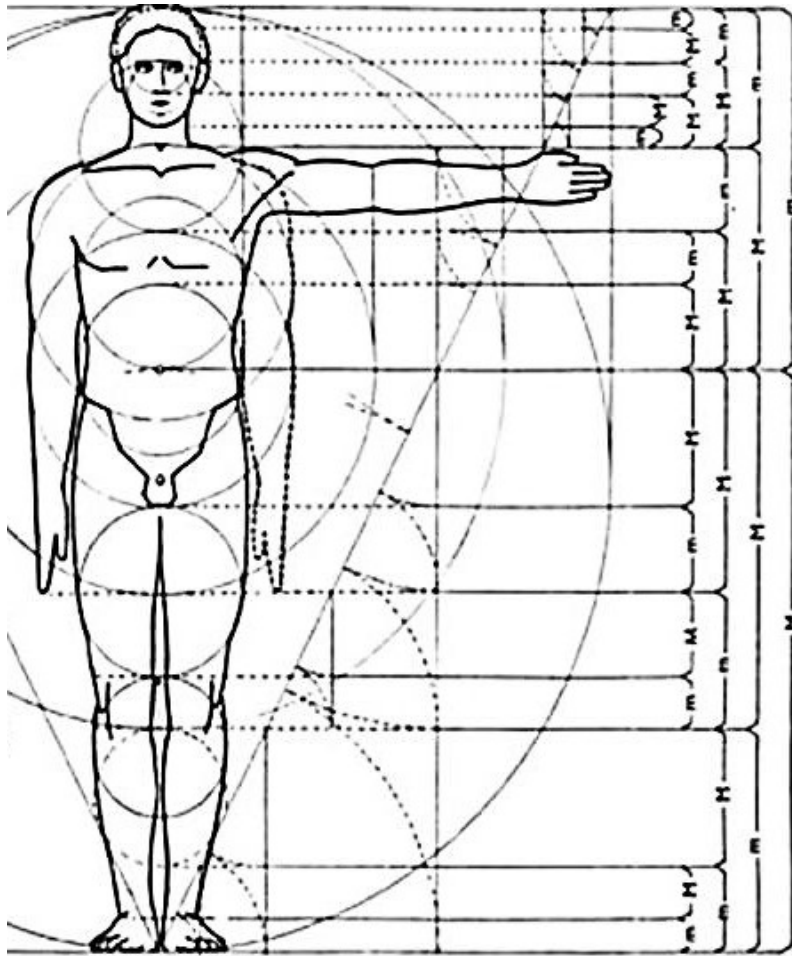


Abbildung 56 Der goldene Schnitt in den Proportionen des menschlichen Körpers nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 135.

Die Fibonacci-Zahlen beziehungsweise Lucaszahlen erscheinen in den einzelnen Körperteilen eines gesunden Menschen. Ciullo nennt hier Beispiele der Symmetrie im Körper: „[...] and our bodies include one head, two hands, three limb segments, and five fingers and toes.“ (Ciullo, B. A., & House, D. (2014). *A Golden Nature*. 2.). Die einzelnen menschlichen Körpersegmente stehen zueinander im goldenen Schnitt, was den homo sapiens in den Augen seiner eigenen Spezies als schön, ästhetisch und damit attraktiv erscheinen lässt (Vgl. Singh, R., & Datta, K. (2008). 6ff.). Bezüglich der Generalisierung der Ästhetik und Attraktivität des Menschen bestehen kontroverse Ansichten. Es wird die Frage gestellt, ob Schönheit im Auge des Betrachters liegt oder ein generelles Schönheitsideal existiert. Dennoch kann durch empirische Beobachtung erkannt werden, dass eine Vielfalt an äußeren Erscheinungsbildern noch heute bestehen und durch Selektion des Ästhetischen beziehungsweise Attraktiven und anderen ausschlaggebenden Faktoren einen zukünftigen Fortbestand haben. Somit gibt es Ausnahmen, welche nicht

unbedingt dem goldenen Schnitt entsprechen, da diese Angelegenheit subjektiv ist, geprägt durch das Umfeld und der persönlichen Präferenzen des Individuums. Daher ist es schwierig die Notwendigkeit des goldenen Schnittes in der Anziehungskraft bei der Auswahl des Partners sowie im generalisierten Schönheitsideal zu beweisen.

Dennoch werden Versuche Schönheit mathematisch, rational und wissenschaftlich zu definieren durch verschiedene Methoden seitens der Wissenschaftler angestrebt, beginnend mit dem Gesicht. Das Gesicht ist ein bedeutender Übermittler von Emotion und deswegen liegt die Aufmerksamkeit zuallererst bei ihm (Vgl. Matthiessen, H. (2008). 39.; Karow, H. (2014). 28).

5.1. Das Gesicht

Murali zählt in seinem Werk „Golden Ratio in Human Anatomy“ (2012) die Erscheinungsformen des goldenen Schnittes in den Gesichtsmaßen auf, welche in diesem Themenbereich auch als „Goldene Proportion“ bezeichnet wird. Er behauptet, dass folgende Verhältnisse die Goldene Zahl beinhalten. Die Länge des Gesichts zur Breite des Gesichtes. Wenn man sich eine vertikale Linie vorstellt, welche das Gesicht in der Mitte teilt, kann man folgende Goldene Proportionen entlang dieser ermitteln:

“•Distance between the lips and where the eyebrows meet / length of nose,

•Length of face / distance between tip of jaw and where the eyebrows meet,

•Length of mouth / width of nose,

•Width of nose / distance between nostrils,

•Distance between pupils / distance between eyebrows.“

(Murali, S. (2012). Golden Ratio in Human Anatomy..15.)

Weitere Beispiele der Goldenen Proportion nennen Gunes und Piccardi 2006 in „Assessing facial beauty through proportion analysis by image processing and supervised learning. International journal of human-computer studies“, wobei sie sich auf die Schönheit von Frauengesichtern beziehen. Darin schreiben sie über folgende Ergebnisse, welche Parris und Robinson 1999 durch Abmessungen des weiblichen Gesichtes entnommen haben.

Diese Verhältnisse beziehen sich ausschließlich auf die senkrechten Abstände, welche durch eine imaginäre Linie in der vertikalen Gesichtshälfte verlaufen.

Description of the distances used when defining the vertical facial ratios.

1	vertical distance between top of the face and tip of the chin
2	vertical distance between pupils and tip of the chin
3	vertical distance between top of the face and nostrils
4	vertical distance between top of the face and pupils
5	vertical distance between nostrils and tip of the chin
6	vertical distance between pupils and central lip line
7	vertical distance between lips and tip of the chin
8	vertical distance between pupils and nostrils
9	vertical distance between nostrils and central lip line
10	vertical distance between top of the face and eyebrows
11	vertical distance between eyebrows and tip of the nose
12	vertical distance between tip of the nose and tip of the chin
13	vertical distance between tip of the nose and lips
14	vertical distance between lips and tip of the chin

Abbildung 57 Gesichtsproportion nach Gunes, H., & Piccardi, M. (2006). 1188.

Parris und Robinson setzen es dann in ein goldenens Verhältnis:

Ratios used in the Golden Proportions method (Parris and Robinson, 1999).

2:4	vertical distance between pupils and tip of the chin to vertical distance between top of the face and pupils
3:5	vertical distance between top of the face and nose to vertical distance between nostrils and tip of the chin
6:7	vertical distance between pupils and central lip line to vertical distance between lips and tip of the chin
5:8	vertical distance between nostrils and tip of the chin to vertical distance between pupils and nostrils
8:9	vertical distance between pupils and nostrils to vertical distance between nostrils and central lip line
7:9	vertical distance between lips and tip of the chin to vertical distance between nostrils and central lip line
mean_ratio	mean of the six aforementioned ratios

Abbildung 58 Gesichtsproportion nach Gunes, H., & Piccardi, M. (2006). 1188.

Diese Anreihung von Verhältnissen reizt zur Nachprüfung am eigenen Gesicht. Die Beschreibungen sind ungenau, da der Haaransatz nicht an allen Gesichtsformen klar erkennbar beziehungsweise kurvenreich verläuft und deswegen nicht an allen Stellen die gleiche Höhe besitzt (Vgl. Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995).135.). Ebenso ist es nicht deutlich, wo sich die Augenbrauen in der Mitte treffen, wegen der Dicke und Form der Augenbrauen. Bei den Beispielen worin die Nasenlänge vorkommt, wird nicht erläutert, ob die Nasenspitze oder das untere Ende der Nasenflügel gemeint ist, sowie die Distanzen der Nasenlöcher genannt werden, da der Abstand der Nasenlöcher an bestimmten Bereichen schmaler oder weiter zueinander liegt. Bezüglich der Pupillen ist nicht klar wo der genaue Ausgangspunkt der Messung stattfindet, besonders weil sich ihre Größe je nach Lichtintensität verkleinern und erweitern. Ansatz der Abmessungen ist dementsprechend ungenau, und dadurch lässt sich viel hineininterpretieren, sprich der Goldene Schnitt könnte eingebracht werden wie es einem beliebt.

Ein schönes Gesicht assoziiert man oft auch mit einem schönen Lächeln.

5.1.1. Ein schönes Lächeln

„An important factor that determining facial aesthetic is based on the tooth appearance which create a beautiful smile [...].“ (Ginting, R. (2017). Comparison of the golden proportion value between the width of maxillary central incisors with the innercanthal distance of Malaysian Indians using golden mean gauge.141.)

Hinter einem schönen Lächeln verbirgt sich oft das goldene Verhältnis. Lombardi schlug 1973 die Existenz von proportionalen Zähnen vor. Levin hat 1978 die Frontzähne abgemessen und ist auf das goldene Verhältnis gestoßen. Studien bestätigten, dass die Frontzähne des Oberkiefers in dem Verhältnis des goldenen Schnittes zueinander stehen. Genauer, die Breite des mittleren Schneidezahnes steht zu der Breite des seitlichen Schneidezahnes im goldenen Verhältnis. Ebenso weist die Breite des seitlichen Schneidezahnes zur Breite des Eckzahnes das goldene Verhältnis auf (Vgl. Persaud, D., & O'Leary, J. P. (2015). 3.). Es existiert ein weiteres Beispiel des goldenen Schnittes bei den Vorderzähnen.



Abbildung 59 Der goldene Schnitt in den Verhältnissen der Zähne

„For example, the total width of the two front teeth in the upper jaw over their height gives a golden ratio.“ (Murali, S. (2012). Golden Ratio in Human Anatomy. 14.)

Wenn diese Verhältnisse im Gebiss eines Menschen vorhanden sind, wird dieses seitens der Zahnärzte und Zahnärztinnen als ästhetisch ideal beziehungsweise schön erachtet. Es existieren weitere Studien über die Verhältnisse der Zähne zum Gesicht und zu Gesichtsteilen und ob sich darin ebenfalls die goldene Proportion versteckt, wobei ein goldener Zirkel, siehe Abbildung 60, benutzt wurde (Vgl. Ginting, R. (2017). 142.; Persaud, D., & O'Leary, J. P. (2015). 3.).



Abbildung 60 goldene Zirkel nach Ginting, R. (2017). 142.

5.2. Die Hand



Abbildung 61 Handproportionen nach Murali, S. (2012). 15.

Beginnend bei der Hand ist diese ein ganz eigenes Studienfeld des goldenen Schnittes. Es existieren verschiedene Meinungen und Erkenntnisse sowie Hypothesen in diesem Gebiet. So schreibt Murali 2012 in „Golden Ratio in Human Anatomy“ über das Vorhandensein der Fibonacci-Zahlen in den Segmenten der Hand. Dabei argumentiert er, dass ein gesunder Mensch mit je zwei Händen ausgestattet ist, welche je fünf Finger besitzen und diese in je drei Segmente unterteilt sind, wobei er auch betont, dass der goldene Schnitt in den Segmenten der Finger, außer dem Daumen, zu finden sei und damit insgesamt acht Finger das goldene Verhältnis beinhalten. Murali erwähnt auch die Verhältnisse des Mittelfingers zum kleinen Finger, welches seines Erachtens ebenfalls im goldenen Verhältnis stehen (Vgl. Murali, S. (2012). Golden Ratio in Human Anatomy. 15.). Persaud und O'Leary veröffentlichten 2015 den Artikel „Fibonacci Series, Golden Proportions, and the Human Biology“ in welchem sie Hamiltons und Dunsmuirs Studie an 197 Menschen, welche 2002 stattfand, erwähnten. Dessen Erkenntnis nach der Abmessung der Röntgenbilder der Hände war, dass die Verhältnisse der Segmente der Finger nicht der goldenen Zahl ϕ entsprechen. Durch die Anmerkung von Hutchison und Hutchison nach der Betrachtung der Studie von Hamilton und Dunsmuir, welche besagt, dass Litters Vorschlag der Segmentverhältnisse in dieser vernachlässigt wurde, haben Hamilton und Dunsmuir durch erneute Analyse der vorhandenen Ergebnisse bestätigt, dass die Fingersegmentverhältnisse sich dem ϕ -Wert 1,618 annähern (Vgl. Persaud, D., & O'Leary, J. P. (2015). 3.; Chan, J. Y., & Chang, G. H. (2009). 3.). Die Werte der Verhältnisse der

Hand bringen Hypothesen und Theorien hervor, die besagen, dass diese mit bestimmten Krankheiten und Veranlagungen in Verbindung gebracht werden können und anhand der Handproportionen Krankheitsvorhersagen getroffen werden könnten. Insbesondere bei Herzkrankheiten, da das Herz ebenfalls mit dem goldenen Schnitt im Zusammenhang steht und versucht wird, die Lucaszahlen, welche in Handproportionen vorhanden sind, auf den gesundheitlichen Zustand des Herzens und der Koronararterien zu übertragen, da der goldene Schnitt bei der idealen Herz- und Handentwicklung eine tragende Rolle spielt (Vgl. Choo, K. Q., Quah, W. K. Chang, G. H., & Chan, J. Y. (2012). 148 f.; Chan, J. Y., & Chang, G. H. (2009). 1ff.; Yetkin, G., Sivri, N., Yalta, K., & Yetkin, E. (2013). 4926f.). Falls diese Annahmen stimmen, könnten zukünftig besonders in Entwicklungsländern mit weniger Budget Diagnosen bezüglich angeborenen Herzfehlern oder intrinsisch erworbenen Herzkrankheiten effizienter durchgeführt werden und damit aufgrund der Erkenntnis, welche die goldenen Proportionen liefern, eine höhere Menge an Menschenleben gerettet werden (Vgl. Chan, J. Y., & Chang, G. H. (2009). 5.).

5.3. Der Fuß und die Gehbewegung

Weiters wird der Fuß betrachtet. Im menschlichen Fußskelett wurde unzählige Male der goldene Schnitt gefunden (Vgl. (Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 137.).

Der vorwärts bewegende Gang des menschlichen Körpers ist ein komplexes Spiel zwischen der Aufrechterhaltung des Gleichgewichts beziehungsweise der Stabilität und dem Vorankommen. Dieser wohlgeformte, effiziente und symmetrische Bewegungsablauf ist durch die harmonische Zusammenarbeit hunderter Muskeln, Knochen und Gelenke möglich. Die goldene Zahl ist nicht nur in den Fußmaßen, sondern auch im Verhältnis der Haltungsphase zur Schwungphase in der rhythmischen Gangmotorik des gesunden Menschen präsent und wird deswegen als „golden gait“, übersetzt der „goldene Gang“, bezeichnet (Vgl. Iosa, M., Morone, G., & Paolucci, S. (2017). 4 ff.; Iosa, M., Morone, G., Bini, F., Fusco, A., Paolucci, S., & Marinozzi, F. (2016). 141 ff.; Iosa, M., Fusco, A., Marchetti, F., Morone, G., Caltagirone, C., Paolucci, S., & Peppe, A. (2013). 1.; ...).

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{\text{swing}}{\text{double support}} = \frac{\text{stance}}{\text{swing}} = \frac{\text{stride}}{\text{stance}} = \frac{\text{stride} + \text{stance}}{\text{stride}} \\ &= \frac{2 \text{ strides} + \text{stance}}{\text{stride} + \text{stance}} = \dots\end{aligned}$$

Studien haben ergeben, dass die künstliche Längenänderung der einzelnen Körperteile der Probanden und Probandinnen, welche zum Gang benutzt werden, sowie bestimmte Krankheiten, wie die Parkinson-Krankheit, die Zeit der Haltungs- und Schwingdauer verändern und dadurch stärker vom goldenen Gang abweichen, während angehängte Körpergewichte das Verhältnis nicht abwandeln (Vgl. Iosa, M., Morone, G., Bini, F., Fusco, A., Paolucci, S., & Marinozzi, F. (2016). 138.; Iosa, M., Morone, G., Fusco, A., Marchetti, F., Caltagirone, C., Paolucci, S., & Peppe, A. (2016). 1540.).

5.4. Die Organe

5.4.1. Die Lunge

„It has also been suggested that the propensity for this ratio to appear in nature maybe because this ratio optimizes the efficiency of packing structures in a limited space in such a way that wasted space is minimized and the supply of energy or nutrients is optimized [...].“
(Chan, J. Y., & Chang, G. H. (2009). The golden ratio optimizes cardiomech form and function. *Journal of Medical Hypotheses and Ideas*, 3, 2. 2.)

Der goldene Schnitt ermöglicht in der Natur, wie zum Beispiel bei der Phyllotaxis, sprich Blattstellung, die optimalste Sonnenlicht- und Regenwasserabsorption sowie Luftzufuhr. Die gleichmäßig auf allen Blättern durch Photosynthese aufgenommene Sonnenenergie wird in Zucker umgewandelt und versorgt damit die Pflanze. Würden die Blätter nicht im goldenen Schnitt angeordnet sein, würden die obersten Blätter die unteren verdecken beziehungsweise überschatten und damit nicht raumsparend und verlustfrei die genannten Elemente aufnehmen (Vgl. Livio, M. (2008). 109ff.; Erbar, C., & Leins, P. (2019). 59.; Böger, P. (1978). 407; Wagner, J. (2017). 70). Dr. A. L. Goldberger fand zwischen 1985 und 1987 diese ideale Proportion auch in der Lungenstruktur des Menschen, welche durch ihren Aufbau dem Körper den idealen Gasaustausch bietet, während sie nicht zu viel Raum einnimmt, sondern diesen durch ihre große Oberfläche hocheffizient nutzt beziehungsweise ausfüllt (Vgl. Murali, S. (2012). 16.). Die beiden Lungenflügel sind unterschiedlich aufgeteilt und asymmetrisch, da der linke, der kleinere der beiden, in zwei

und der rechte in drei Lungenlappen aufgeteilt ist. Bei den Bronchien ist die goldene Zahl stark vertreten.

„One feature of the network of the bronchi that constitutes the lung is that it is asymmetric. For example, the windpipe divides into two main bronchi, one long (the left) and the other short (the right) [...]. This asymmetrical division continues into the subsequent subdivisions of the bronchi. It was determined that in all these divisions the proportion of the short bronchus to the long was always $1/1.618$.“ (Murali, S. (2012). Golden Ratio in Human Anatomy. 16.)

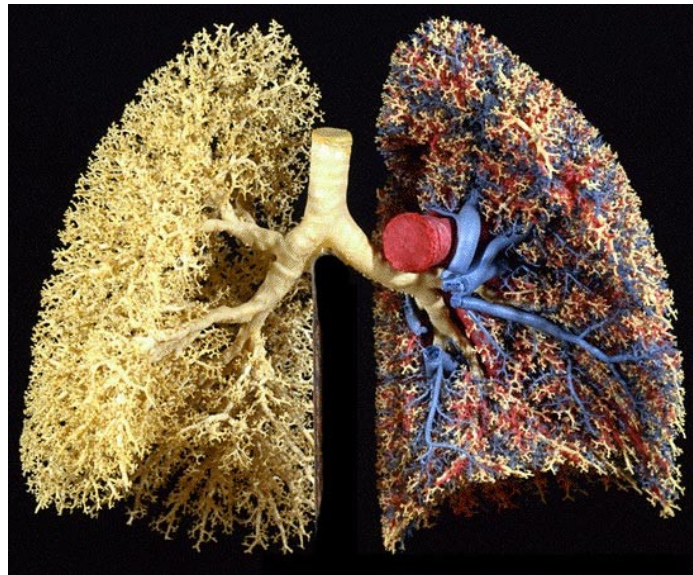


Abbildung 63 Die Lunge

Dieses besondere Verhältnis und Netzwerk der Lunge ist mit den Fraktalen aus der Mathematik zu vergleichen. Hans Walser nennt in seinem Buch „Der Goldene Schnitt“ diese Fraktalerscheinungen „Austauschprofile“ und beschreibt ihre Funktion wie folgt (Vgl. Walser, H. (1993). 14.).

„Bäume mit ihren Verästelungen: das Austauschprofil dient der Assimilation, dem Kohlendioxid- Sauerstoff- Austausch.

Die menschliche Lunge mit ihren Lungenbläschen: Das Austauschprofil dient der Dissimilation, dem Sauerstoff-Kohlendioxid-Austausch.“ (Walser, H. (1993). Der goldene

Schnitt (Einblicke in die Wissenschaft: Mathematik). Stuttgart Zürich: Teubner Verl. d. Fachvereine.15.)

So wie in der Natur Astverzweigungen und Entwässerungssysteme verkleinerte „funktionelle“ Kopien ihrer selbst sind und damit Fraktale darstellen, da sie maximal beziehungsweise optimal den Raum nutzen, so ist die Struktur der Bronchien ebenfalls raumsparend und bildet durch diese Fraktalstruktur die größtmögliche Oberfläche (Vgl. Walser, H. (1993). 14ff.).

5.4.2. Das Herz

Yetkin G. et. al. veröffentlichten 2013 einen Artikel bezüglich der Anwesenheit der goldenen Zahl ϕ im menschlichen Herzschlag. Das wissenschaftliche Team hat dazu eine Studie an 162 gesunden ausgewählten Menschen im Alter zwischen 20 und 40 Jahren durchgeführt. Die Testpersonen ruhten für 15 Minuten in Rückenlage. Daraufhin wurde ein EKG gemacht, um die systolische und diastolische Phase zu erhalten. Die Systole ist eine Phase der Anspannung und der Blut-Ausströmung des Herzens, sprich bei dem EKG die Zeit von der Spitze der R-Zacke zum Ende der T-Welle. Die Diastole ist die Phase, in der das Herz erschlafft und Blut einströmt. Bei der Studie wurde die diastolische Phase durch das Abziehen der systolischen Phase vom R-R-Intervall berechnet. Danach haben sie folgende Ergebnisse durch Divisionen erhalten, wobei sie nur die Herzfrequenz zwischen 60/min und 80/min wegen der Auswirkung der diastolischen Phasendauer berücksichtigt haben:

$$\frac{\text{diastolische Phasendauer}}{\text{systolische Phasendauer}} = 1,611 \quad \text{und} \quad \frac{R-R\text{-Intervall}}{\text{diastolische Phasendauer}} = 1,618$$

Sie kamen zum Schluss, dass das R-R-Intervall zum diastolischen Zeitintervall in der goldenen Zahl ϕ steht und damit das menschliche Herz im Rhythmus des goldenen Schnittes schlägt (Vgl. Yetkin, G., Sivri, N., Yalta, K., & Yetkin, E. (2013). 4926 f..).

„So it is not so surprising for our hearts to beat in a Golden Ratio or namely God ratio. In conclusion, our heart has been beating in a ratio of 1.618, obeying the beautiful order of universe settled by God.“ (Yetkin, G., Sivri, N., Yalta, K., & Yetkin, E. (2013). Golden Ratio is beating in our heart. International journal of cardiology, 168(5). 4927.)

Das pumpende Organ schlägt harmonisch in einem gesunden Menschenkörper. Es ist nicht verwunderlich, dass die bisher genannten Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen dieses harmonische System des goldenen Schnittes mit einem intelligenten Wesen verbinden,

welches dieses ihren Erachtens designat hat (Vgl. Yetkin, G., Sivri, N., Yalta, K., & Yetkin, E. (2013). 4927.).

Ozturk et al. schreiben in einem Artikel über das Vorhandensein des goldenen Schnittes und der Fibonacci-Folge im Herz-Kreislauf-System des Menschen. Unter anderem wird die Studie von Gibson et. al. beschrieben und folgende Ergebnisse dieser evaluiert.

„This is the first study in the literature demonstrating the presence of the Fibonacci Cascade in the distribution of the culprit lesions in coronary arteries. The existence of this ratio may be related to the location of the branches in the coronary anatomy. In terms of beauty in nature, minimization of wasted space and the need for energy, golden ratio seems to be an important player for the regulation of harmony in our universe. We can state that there is a propensity for this ratio to appear in the nature because this ratio provides minimizing of the wasted space and the need for energy and nutrients is optimized.“ (Ozturk, S., Yalta, K., & Yetkin, E. (2016). Golden ratio: A subtle regulator in our body and cardiovascular system?. International journal of cardiology, 223, 143-145. 144.)

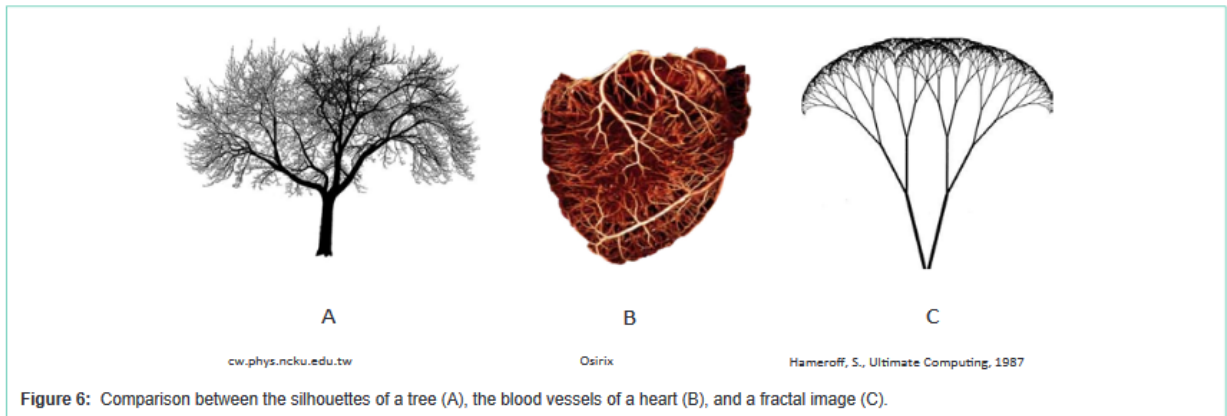


Figure 6: Comparison between the silhouettes of a tree (A), the blood vessels of a heart (B), and a fractal image (C).

Table 2: Table summarizing the number of branching from blood vessels of the Heart showing that branching numbers follow a Fibonacci Series [19].

Number of branches													
2	LCA	RCA											
3	LAD	LCx	RCA										
5	LAD	LCx	RI	AM	PDA								
8	LAD	Ldiag1	LCx	OM1	Sep1	PDA	Rdiag1	AM					
13	LAD	PLV1	PRV1	Sep3	Sep4	OM2	Ldiag2	Sep2	OM3	PLV2	PLV3	PRV2	PRV3

Sequence branching of the coronary arterial tree. LCA: Left Coronary Artery; RCA: Right Coronary Artery; LAD: Left Anterior Descending; LCX: Left Circumflex; OM: Obtuse Marginal; AM: Acute Marginal; PDA: Posterior Descending Artery; PRV: Posterior Right Ventricular (1) = lateral; (2) = intermediate; (3) = medial, Sep: Septal; RI: Ramus Intermedius (authors interpretation).

Abbildung 64 nach Persaud, D., & O'Leary, J. P. (2015). 4.

Die Blutgefäße folgen dem Prinzip der Fraktale, welche die genannten Vorteile zur Geltung bringt. Das bedeutet, dass die Verzweigungen verkleinerte Wiederholungen beziehungsweise Kopien der Blutgefäßsegmente wie bei den Fraktalen aufgebaut sind und sich somit das Gesamtbild in verkleinerter Form wiederkehrt. Auch in dem Fall der Koronararterien sowie der Blutgefäße kann man dessen Verzweigungen mit dem der Bäume vergleichen, da ihr visuelles Erscheinungsbild sowie ihre Grundfunktionen einander ähneln (Vgl. Persaud, D., & O'Leary, J. P. (2015). 3.). Es scheint, dass jeder Aspekt des Herzens seine maximale Leistung durch die harmonischen Verhältnisse der goldenen Proportionen erbringt. Dieses Wissen über die Herzproportionen und dessen Verteilung der Läsionen der Koronararterien können bei zukünftigen Krankheitsbefunden bzgl. ischämischer Herzkrankheiten in Krankenhäusern eine tragende Rolle spielen (Vgl. Chan, J. Y., & Chang, G. H. (2009). 4.).

Ozturk et al. berichten im Artikel über die Studie von Yetkins und erwähnen, dass die linksventrikulären Durchmesser des Herzens der Regel des Goldenen Schnitts entsprechen (Vgl. Ozturk, S., Yalta, K., & Yetkin, E. (2016). 144.).

5.4.3. Das Gehirn

Das Gehirn wird als das komplexeste Organ im menschlichen Körper betrachtet. F. W. Hagen hat verschiedene Körperteile, insbesondere das Gehirn und den Kopf, untersucht und kam zum Schluss, dass die verschiedenen Gehirnteile zueinander im goldenen Schnitt stehen, obgleich er die Schwierigkeiten der Maßabnahmen verdeutlichte. Er fand das goldene Verhältnis in der Hemisphärenlänge des großen Gehirns zur –breite und in der Länge zur Höhe des großen Gehirns (Vgl. Hagen, F. W. (1857). 54. 59 f.).

Auch auf der Ebene der DNA wurde das Vorhandensein der Fibonacci-Zahlen und des goldenen Schnittes ermittelt. Perez schreibt in seinem Artikel folgende Befunde:

„DUF1220 copy number has been linked to both brain size in humans and brain evolution among primates. Remarkably, dosage variations involving DUF1220 sequences have now been linked to human brain expansion, autism severity, total IQ, and cognitive and mathematical aptitude scores.“ (PEREZ, J. C. (2017). Humans Chromosome 1 Fractal periods signature is highly correlated with Intelligence and Brain Evolution. *Journal of Glycomics and Metabolism*, 1(3), 1. 1.)

Die DUF1220 Proteinsequenzen weisen Fibonacciserien und Lucaszahlen auf, welche zum Verhältnis der goldenen Zahl ϕ konvergieren. Das wissenschaftliche Team hat diese neben dem Menschen in anderen Säugetieren untersucht und ist zum Schluss gekommen, dass der homo sapiens bezüglich allen auf der Welt existierenden Spezies die meisten Kopien von DUF122 im menschlichen Genom besitzt, welche mit der Gehirnentwicklung im Zusammenhang stehen (Vgl. PEREZ, J. C. (2017). 2. 29ff.).

„Given the evidence of this numerical relationship, we suggest that this discovery may be one of the major causes of a cognitive development of man superior to that of the great primates.“ (PEREZ, J. C. (2017). Humans Chromosome 1 Fractal periods signature is highly correlated with Intelligence and Brain Evolution. *Journal of Glycomics and Metabolism*, 1(3), 1. 1.)

Der Mensch ist wegen seines Intellekts allen Lebewesen auf diesem Planeten überlegen. Dies zeigt sich unter anderem durch seine Anpassungsfähigkeit, den wissenschaftlichen Errungenschaften, den Sprachschatz und seiner Kreativität.

Wiederum andere Studien befassten sich mit den Frequenzen elektrischer Schwingungen des Gehirns beziehungsweise mit den Gehirnaktivitäten und brachten folgende Ergebnisse hervor:

„One of them is the mean geometrical value of extreme frequencies calculated by the formula $f = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$ where f_1, f_2 are the extreme (boundary) oscillation frequencies. The mean geometrical frequency divides frequency band into high frequency and low frequency areas. The ratio of these frequency bands is a constant for the given wave and is the brain invariant. This invariant was adopted by Sokolov's as the basic characteristic of the brain rhythms. The researcher found out that for the b-rhythm, which corresponds to mental activity, this invariant coincides with the golden proportion!“ (Murali, S. (2012). Golden Ratio in Human Anatomy. 20.)

Diese „Gehirnrhythmen“ sind Frequenzen der elektrischen Gehirnschwingungen, welche in drei verschiedene Gehirnzustände unterteilt werden. Diese sind der Ruhe-, der mental aktive und der Traumzustand (Vgl. Murali, S. (2012). 20.).

Wegen dem faszinierenden Nervenorgan, dessen Aktivitäten das goldene Verhältnis in den genannten Aspekten beinhalten, stellt sich die Frage ob das u.a. der Grund sei, weswegen der Mensch ein Wohlbefinden beim Vorkommen des goldenen Schnittes in seiner Umgebung, sei es visuell oder akustisch, verspürt (Vgl. kommt noch). Da sein Organismus diesen Rhythmus produziert und dessen unterbewusste Spiegelung in anderen Objekten oder Medien das Individuum zu seinem Ursprung oder zu einem erfüllenden Zustand versetzt.

5.4.4. Fortpflanzung

Gynäkologen und Gynäkologinnen haben in einer Studie Ultraschallmessungen von 5546 Gebärmüttern entnommen, welche nicht schwanger waren. Die teilnehmenden Frauen waren in allen Altersgruppen und gesund (Vgl. Verguts, J., Ameye, L., Bourne, T., & Timmerman, D. (2013). 713ff.).

„Conclusions Uterine size in non-pregnant women varies in relation to age and gravidity. Mean length/width ratio conformed to the golden ratio at the age of 21, coinciding with peak fertility.“ (Verguts, J., Ameye, L., Bourne, T., & Timmerman, D. (2013). Normative data for uterine size according to age and gravidity and possible role of the classical golden ratio. *Ultrasound in obstetrics & gynecology*, 42(6), 713.)

Die Aussage, dass der goldene Schnitt in den Maßen von Gebärmüttern der Zeit ihres Fruchtbarkeitsgipfels vorhanden sei ist eine Beobachtung, welche durch einen Vergleich mit einer Studie von Tietze aufgestellt wurde. Diese Studie befasste sich mit Huttererinnen, wegen ihrer rekordhaften Geburtenrate. Die Ergebnisse der Studie besagten, dass von 209 hutterischen Frauen, die vor dem 25. Lebensjahr geheiratet haben, die Mehrheit die erste Empfängnis mit 22,2 Jahren hatten und dessen Unfruchtbarkeitsrate 2,4% betrug und damit wirklich niedrig ist. Ob ein Abweichen von der Zahl 1,618 die Fruchtbarkeit einer jungen Frau senkt ist fragwürdig. (Vgl. Verguts, J., Ameye, L., Bourne, T., & Timmerman, D. (2013). 716., Tietze, C. (1957).89 , 91ff.).

5.6. Die DNA

Benoît B. Mandelbrot hat 1982 als Erster das menschliche Genom, also das Organisationsmuster und die Struktur der DNA, in Bezug auf Fraktale und der Fibonacci-Folgen untersucht. Die Vermutung wurde bestätigt und brachte somit die DNA mit dem goldenen Schnitt in Verbindung. „In 1991, Perez hypothesized that gene coding region sequences in the DNA were strongly related to the golden ratio and Fibonacci series.“ (Ozturk, S., Yalta, K., & Yetkin, E. (2016). Golden ratio: A subtle regulator in our body and cardiovascular system?. *International journal of cardiology*, 223, 144.) Yamagashi et al untermauerten Perezs Theorie 2008, da sie feststellten, dass die Fibonacci-Folge in der Beschaffenheit des kompletten menschlichen Genoms vorhanden ist. Dadurch ist aufs Neue bestätigt worden, dass der goldene Schnitt in der menschlichen DNA präsent ist.

Die schraubenförmige Doppelhelix-Struktur der DNA wird B-DNA genannt. Jeder volle Zyklus enthält in seiner Länge und Breite die Fibonacci-Zahlen 34 Ångström und 21 Ångström. Ihr Verhältnis zueinander ist eine Annäherung zur goldenen Zahl ϕ . Die B-DNA besitzt, da sie leicht versetzt ist, siehe Abbildung 65, zwei Furchen, die große Furche und die kleine Furche, welche 21 Ångström und 13 Ångström groß sind. Ihr Verhältnis zueinander ist ebenfalls eine Approximation zu ϕ .

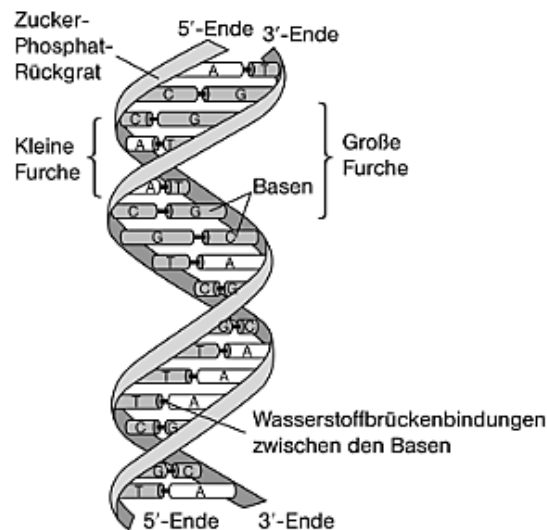


Abbildung 1 B-DNA nach Fletcher, H., Hickey, I., & Horstmann, C. (2013). 4.

Betrachtet man den waagrechten Querschnitt der B-DNA, so erkennt man ein regelmäßiges Zehneck. Da die Ecken eines Zehneckes aus zwei Pentagons, die 36° zueinander gedreht sind, gebildet werden kann, stellt der Querschnitt jeder Spirale der Doppelhelix, siehe Abbildung 66, ein regelmäßiges Fünfeck dar (Vgl. Ozturk, S., Yalta, K., & Yetkin, E. (2016). 144.; Persaud, D., & O'Leary, J. P. (2015). 4.; Murali, S. (2012). 21.; Ciullo, B. A., & House, D. (2014). 2.; Yamagishi, M. E. B., & Shimabukuro, A. I. (2008). 643-653.).



Abbildung 66 nach Murali, S. (2012). 22.

6. Conclusio

Der goldene Schnitt spielt in unzähligen Bereichen eine essenzielle Rolle. Er bietet eine Möglichkeit Schönheit zu Rationalisieren und die Einheit des menschlichen Körpers zu begreifen. Es wird auch spekuliert, dass der goldene Schnitt einige Fachbereiche der Medizin revolutionieren wird. Falls die von J. Y. Chan und G. H. Chang erwähnte Theorie stimmt, bietet diese insbesondere in Entwicklungsländern kostengünstige Methoden angeborene Krankheiten und Entwicklungsdefizite zu diagnostizieren. Durch die Bestimmung von spezifischen Proportionen zeigen sie eine einfache Alternative zu teuren Testungen. Da der goldene Schnitt die effizienteste, idealste und optimalste Form der Natur ist, hat er das Potenzial durch neue Erkenntnisse unzählige Menschenleben zu retten und der Medizin durch weitere Forschung neue Methoden zu eröffnen.

Anhang

Zusammenfassung:

Diese Arbeit erfasst den historischen und mathematischen Rückblick des goldenen Schnittes. Es wird die Symbolik des Pentagramms und dessen geschichtliche Rolle für die Entdeckung der Inkommensurabilität besprochen. Die Abschlussarbeit geht auf verschiedene Konstruktionen, die das goldene Verhältnis betreffen, ein. Der goldene Schnitt erscheint in verschiedenen geometrischen Figuren und steht mit verschiedenen mathematischen Bereichen, wie der Fibonacci-Folge, in Verbindung. Ebenso wird ein Überblick der allgemeinen Vorkommnisse des goldenen Schnittes in der Natur, Zoologie, Astronomie, Architektur und Kunst verschafft. Die Aufmerksamkeit der Arbeit liegt vor allem in den Untersuchungsergebnissen, welche die Präsenz des goldenen Schnittes im menschlichen Körper behandeln. Die Conclusio behandelt die Möglichkeiten, die zukünftige Forschungen in Bezug zu Erscheinungsformen des goldenen Schnittes in menschlichen Proportionen bieten.

Abstract:

This thesis covers the historical and mathematical review of the golden section. It discusses the symbolism of the pentagram and its historical role in the discovery of incommensurability. The thesis deals with different constructions that relate to the golden ratio. The golden section appears in various geometric figures and is related to various mathematical areas, such as the Fibonacci sequence. An overview of the general occurrences of the golden ratio in nature, zoology, astronomy, architecture and art is also given. The attention of the work is mainly focused on the results of studies that deal with the presence of the golden section in the human body. The Conclusio deals with the possibilities offered by future research concerning the manifestations of the golden section in human proportions.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 innere Teilung im goldenen Schnitt.....	4
Abbildung 2 äußere Teilung im goldenen Schnitt.....	4
Abbildung 3 Pyramide nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 141.	9
Abbildung 4 Hieroglyphen nach Herz-Fischler, R. (1998). 53.....	10
Abbildung 5 Das Parthenon im goldenen Rechteck.....	11
https://lewebpedagogique.com/lesmathsautrement/2011/03/28/le-nombre-d%E2%80%99or/ ; Zuletzt aufgerufen: 18.1.2020	
Abbildung 6 Gebälk des Propyläen Tempel nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 143.....	11
Abbildung 7 Tabelle nach Aumann, G. (2006). 39.....	13
Abbildung 8 die platonischen Körper nach Aumann, G. (2006). 80.....	14
Abbildung 9 Keplers Modell des Sonnensystems nach Aumann, G. (2006). 138.	15
Abbildung 10 Zeichnung eines Pentagramms nach Biedermann, H., & Stöber, O. (1990). 14.	17
Abbildung 11 Leonardo von Pisa	18
http://www.library.ethz.ch/ms/Virtuelle-Ausstellungen/Fibonacci.-Un-ponte-sul-Mediterraneo/Biographie-von-Leonardo-Pisano ; Zuletzt aufgerufen am 18.1.2020	
Abbildung 12 Leonardos Zeichnung eines Polyeders.....	19
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Leonardo_polyhedra.png ; Zuletzt aufgerufen: 19.1.2020	
Abbildung 13 Leonardo da Vinci „Vitruvianische Mensch“	20
https://www.wissen.de/leonardo-da-vincis-vitruvianischer-mensch ; Zuletzt abgerufen: 20.1.2020	
Abbildung 14 Reduktionszirkel nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 26.	21
Abbildung 15 Goldene Zirkel nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 27.	22
Abbildung 16 Konstruktion des Goldenen Schnittes.....	23
Abbildung 17 Konstruktion nach Euklid (nach Lausch, H. (2009). 122.)	24
Abbildung 18 Konstruktion nach George Odom	25
Abbildung 19 Konstruktion des goldenen Schnittes (nach Lausch, H. (2009). 123.)	27
Abbildung 20 Pentagon und Pentagramm nach Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 6.	28
Abbildung 21 Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck nach Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 7. ...	29
Abbildung 22 Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks.....	30
Abbildung 23 Konstruktion durch Faltung eines Papierstreifens nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 40	31
Abbildung 24 Goldene Dreiecke im regelmäßigen Fünfeck nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 37.	32
Abbildung 25 goldenes Dreieck im regelmäßigen Zehneck nach Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 21.....	33
Abbildung 26 Regelmäßiges Fünfeck im regelmäßigen Zehneck nach Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). 22	34
Abbildung 27 Konstruktion des goldenen Rechtecks nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 47	35
Abbildung 28 Näherung der goldenen Spirale nach Coxeter, H. (1963). 204.	36
Abbildung 29 goldene Spirale nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 61.....	39
Abbildung 30 spira mirabilis nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 61.	40

Abbildung 31 goldenes Parallelogramm unterteilt und mit Spiralen versehen nach Walser, H. (1993). 53.	41
Abbildung 32 Unterteilung eines regelmäßigen Fünfecks mit Diagonalen nach Herz-Fischer, R. (1998). 71.	41
Abbildung 33 Kreis und Ellipse	43
Abbildung 34 goldener Quader nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 68	45
Abbildung 35 die platonischen Körper nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 50.	46
Abbildung 36 Tabelle nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 51.	46
Abbildung 37 goldene Rechtecke als Gerüst des Ikosaeders nach Walser, H. (2013). 20.	47
Abbildung 38 goldenes Rechteckgerüst im Dodekaeder nach Huntley, H. (1970). 34.	48
Abbildung 39 Gerüstbauteile des Ikosaeders nach Walser, H. (1993). 103.	48
Abbildung 40 Ähnlichkeit der goldenen Dreiecke nach Alsina, C., & Nelsen, R. (2015). 203.	49
Abbildung 41 Baumdiagramm des Kaninchenproblems	51
http://blogs.southcoasttoday.com/numbers/2014/04/29/arabic-numbers-are-not-used-by-arabs/ Zuletzt abgerufen am 16.01.2020	
Abbildung 42 zur Linearisierung der Potenzen von ϕ nach Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). 13.	53
Abbildung 43 Fünfecksfraktal enthält den goldenen Schnitt nach Walser, H. (1993). 11.	61
Abbildung 44 Konstruktionsverfahren des Quadratfraktals nach Walser, H. (1993). 24.	61
Abbildung 45 Quadratfraktal nach Walser, H. (1993). 24.	62
Abbildung 46 Ermittlung des Verkleinerungsfaktors nach Walser, H. (1993). 26.	63
Abbildung 47 goldenes Dreiecksfraktal enthält den goldenen Schnitt nach Walser, H. (1993). 10. 64	
Abbildung 48 goldene Quadratfraktal nach Walser, H. (1993). 30.	64
Abbildung 49 geometrische Trugschluss nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 96.	65
Abbildung 50 Verallgemeinerter geometrischer Trugschluss nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 96.	65
Abbildung 51 Quadrat und Rechteck nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 97.	66
Abbildung 52 Die Vorkommnisse des goldene Schnittes	67
https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fpbs.twimg.com%2Fmedia%2F0F0J4UXdXYAEWb78.jpg&imgrefurl=https%3A%2F%2Ftwitter.com%2Fflyfeblood%2Fstatus%2F1176134747824762882&docid=VAYOB66zGrjvCM&tbnid=ZdISDAWb_sScM%3A&vet=1&w=480&h=360&bih=654&biw=1366&ved=2ahUKEwj-ycLYuJLnAhXF-6QKHwBTDRwQxiAoA3oECAEQIA&iact=c&iactx=1 ; Zuletzt aufgerufen: 12.01.2020	
Abbildung 53 Der Falkenflug nach Livio, M. (2008). 119.	68
Abbildung 54 Das Venuspentagramm nach Thaller, B. (2009). 28.	68
Abbildung 55 Salvadors Dali „das letzte Abendmahl“	69
https://en.wikipedia.org/wiki/The_Sacrament_of_the_Last_Supper ; Zuletzt aufgerufen: 13.01.2020	
Abbildung 56 Der goldene Schnitt in den Proportionen des menschlichen Körpers nach Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). 135.	71
Abbildung 57 Gesichtsproportion nach Gunes, H., & Piccardi, M. (2006). 1188.	73
Abbildung 58 Gesichtsproportion nach Gunes, H., & Piccardi, M. (2006). 1188.	73
Abbildung 59 Der goldene Schnitt in den Verhältnissen der Zähne	75
https://www.zwp-online.info/fachgebiete/cosmetic-dentistry/aesthetik/die-goldene-proportion ; Zuletzt aufgerufen am 20.1.2020	
Abbildung 60 goldene Zirkel nach Ginting, R. (2017). 142.	75

Abbildung 61 Handproportionen nach Murali, S. (2012). 15.....	76
Abbildung 62 Die Gehbewegung nach Iosa, M., Fusco, A., Marchetti, F., Morone, G., Caltagirone, C., Paolucci, S., & Peppe, A. (2013). 2.	78
Abbildung 63 Die Lunge	80
https://fractalfoundation.org/OFC/OFC-1-2.html ; Zuletzt aufgerufen: 25.01.2020	
Abbildung 64 nach Persaud, D., & O'Leary, J. P. (2015). 4.	83
Abbildung 65 B-DNA nach Fletcher, H., Hickey, I., & Horstmann, C. (2013). 4.	87
Abbildung 66 nach Murali, S. (2012). 22.	87

Literaturverzeichnis

- Alsina, C., & Nelsen, R. (2015). Perlen der Mathematik: 20 geometrische Figuren als Ausgangspunkte für mathematische Erkundungsreisen (2015 ed.). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Aumann, G. (2006). Euklids Erbe: Ein Streifzug durch die Geometrie und ihre Geschichte. Darmstadt: Wiss. Buchges.
- Becker, G. (1989). Das Pentagramm - Symbol in Marokko : Religion, Politik und Magie im maghrebinischen Königreich (Wayasbah publication ; 13). Hamburg: Wayasbah.
- Beutelspacher, A., & Petri, B. (1995). Der goldene Schnitt (2., überarb. u. erw. Aufl.. ed.). Mannheim Wien [u.a.]: BI-Wiss.-Verl.
- Bibel, E. (2006). Wuppertal: R.
- Burton, D. (1997). The history of mathematics: An introduction (3.rd ed., International series in pure and applied mathematics). New York, NY [u.a.]: McGraw-Hill.
- Biedermann, H., & Stöber, O. (1990). Der Drudenfuß : Auf den Spuren eines geheimnisvollen Zeichens (Gekürzte Neuausg.]. ed.). Wien [u.a.]: Jugend-u.-Volk-Verl.
- Böger, P. (1978). Photobiologische Umwandlung der Sonnenenergie. *Naturwissenschaften*, 65(8), 407-412.
- Chan, J. Y., & Chang, G. H. (2009). The golden ratio optimizes cardiomech form and function. *Journal of Medical Hypotheses and Ideas*, 3, 2.; <file:///C:/Users/User/AppData/Local/Temp/40-40-1-PB-3.pdf>; Zuletzt aufgerufen: 15.01.2020
- Choo, K. Q., Quah, W. K. Chang, G. H., & Chan, J. Y. (2012). Functional hand proportion is approximated by the Fibonacci series. *Folia morphologica*, 71(3),

148-153.;

https://www.academia.edu/4319235/Functional_hand_proportion_is_approximated_by_the_Fibonacci_series . Zuletzt aufgerufen: 12.12.2019

- Ciullo, B. A., & House, D. (2014). A Golden Nature.; https://dmsp.digital.eca.ed.ac.uk/blog/illuminating2014/files/2014/04/bc_Submission3.pdf; Zuletzt aufgerufen: 22.01.2020
- Coxeter, H. (1963). Unvergängliche Geometrie (Wissenschaft und Kultur ; 17). Basel [u.a.]: Birkhäuser.
- de Campos, D., & da Costa Oliveira, M. (2018). Michelangelo Buonarroti's Code in the Frescoes of the Sistine Chapel—An Allusion to Gematria of the Hebrew/Greek Alphabet and the Golden Ratio. *Clinical Anatomy*, 31(7), 948-955.; https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/ca.23251?casa_token=EjkIKWMyWBgAAAAA:69CyaOGO9_fhEml3djW-FngRVnOaikYpXuuuglxQ5l2rzeQDVLo0gA-cfoT-6tMfNRIfdSh0BD0Xki9 ; Zuletzt aufgerufen:27.01.2020
- de Campos, D., Malysz, T., Bonatto-Costa, J. A., Pereira Jotz, G., Pinto de Oliveira Junior, L., & Oxley da Rocha, A. (2015). More than a neuroanatomical representation in The Creation of Adam by Michelangelo Buonarroti, a representation of the Golden Ratio. *Clinical Anatomy*, 28(6), 702-705.; https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/ca.22580?casa_token=d_E7EMokTasAAAAA:PB5AgSA7c_O0udBYytCFevvkj9SIEhe8nYiDNVFTmvYZ67iqdC4uXL2sUC-yaT0H22_qt_Vj1ZwrRK3q; Zuletzt aufgerufen:27.01.2020
- Erbar, C., & Leins, P. (2019). Ästhetische Ökonomie in der Gestalt der Pflanzen. *Schönheit: Die Sicht der Wissenschaft*, 39.
- Fletcher, H., Hickey, I., & Horstmann, C. (2013). Genetik: für Biologen, Biochemiker, Pharmazeuten und Mediziner. John Wiley & Sons.
- Frings, M. (2002). The golden section in architectural theory. *Nexus Network Journal*, 4(1), 9-32.
- Ginting, R. (2017). Comparison of the golden proportion value between the width of maxillary central incisors with the innercanthal distance of Malaysian Indians using golden mean gauge.; <http://www.oraljournal.com/pdf/2017/vol3issue2/PartC/3-2-3-919.pdf>; Zuletzt aufgerufen: 15.01.2020
- Gunes, H., & Piccardi, M. (2006). Assessing facial beauty

- through proportion analysis by image processing and supervised learning. *International journal of human-computer studies*, 64(12), 1184-1199.; <https://opus.lib.uts.edu.au/bitstream/10453/4141/1/2006005299.pdf>; Zuletzt aufgerufen: 15.01.2020
- Hagen, F. W. (1857). *Der goldene Schnitt in seiner Anwendung auf Kopf-und Gehirnbau, Psychologie und Pathologie*. Engelmann.
 - Hausdorff, J. M., Ashkenazy, Y., Peng, C. K., Ivanov, P. C., Stanley, H. E., & Goldberger, A. L. (2001). When human walking becomes random walking: fractal analysis and modeling of gait rhythm fluctuations. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, 302(1-4), 138-147.
 - Herz-Fischler, R. (1998). A mathematical history of the golden number (Dover ed., 1. publ., unabridged republ. [d. Ausg.] Ontario 1987. ed.). Mineola, NY: Dover Publ. [u.a.].
 - Hoppe, J. P. (2013). *Johannes Kepler* (Vol. 17). Springer-Verlag.
 - Huntley, H. (1970). *The divine proportion : A study in mathematical beauty* (1. publ.. ed.). New York, NY: Dover Publ.
 - Ilić, I., Stefanović, M., & Sadiković, D. (2018). Mathematical determination in nature: The golden ratio. *Acta Medica Medianae*, 57(3), 124-129.; <https://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/0365-4478/2018/0365-44781803124I.pdf>; Zuletzt aufgerufen: 15.01.2020
 - Iosa, M., De Bartolo, D., Morone, G., Boffi, T., Mammucari, E., Vannozzi, G., ... & Paolucci, S. (2019). Gait phase proportions in different locomotion tasks: The pivot role of golden ratio. *Neuroscience letters*, 699, 127-133.
 - Iosa, M., Fusco, A., Marchetti, F., Morone, G., Caltagirone, C., Paolucci, S., & Peppe, A. (2013). The Golden Ratio of Gait Harmony: Repetitive Proportions of Repetitive Gait Phases. *BioMed Research International*, 2013, 7.
 - Iosa, M., Morone, G., Bini, F., Fusco, A., Paolucci, S., & Marinozzi, F. (2016). The connection between anthropometry and gait harmony unveiled through the lens of the golden ratio. *Neuroscience Letters*, 612, 138-144.
 - Iosa, M., Morone, G., Fusco, A., Marchetti, F., Caltagirone, C., Paolucci, S., & Peppe, A. (2016). Loss of fractal gait harmony in Parkinson's Disease. *Clinical Neurophysiology*, 127(2), 1540-1546.

- Iosa, M., Morone, G., & Paolucci, S. (2017). Golden Gait: An Optimization Theory Perspective on Human and Humanoid Walking. *Frontiers in neurorobotics*, 11, 69. file:///C:/Users/User/AppData/Local/Temp/fnbot-11-00069.pdf. Zuletzt aufgerufen: 22.12.2019
- Iosa, M., Morone, G., & Paolucci, S. (2018). Phi in physiology, psychology and biomechanics: the golden ratio between myth and science. *Biosystems*, 165, 31-39.
- Iosa, M. (2016). Golden ratio and the heart, God and the science. *International journal of cardiology*, 222, 762-763.
- Karow, H. (2014). Neurokognitive Rehabilitation bei Fazialisparese – Gesicht ist Emotion. *I2(10)*, 28-30.; <https://www.thieme-connect.com/products/ejournals/html/10.1055/s-0034-1395453>, Zuletzt aufgerufen: 25.01.2020
- Kuo, A. D., Donelan, J. M., & Ruina, A. (2005). Energetic consequences of walking like an inverted pendulum: step-to-step transitions. *Exercise and sport sciences reviews*, 33(2), 88-97.
- Lausch, H. (2009). Fibonacci und die Folge(n). München: Oldenbourg.
- Livio, M. (2008). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books.
- Matthiessen, H. O. (2008). Direkte Wahrnehmung und die fünf Sinne. diplom. de.; [https://books.google.at/books?hl=de&lr=&id=PXZqAQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA2&dq=%E2%80%A2%09Matthiessen,+H.+\(2008\).+Direkte+Wahrnehmung+und+die+fünf+Sinne&ots=iUurvVUQ4P&sig=sCHo3TVT52n305vybh9KFvQFL2g&redir_esc=y#v=onepage&q=%E2%80%A2%09Matthiessen%2C%20H.%20\(2008\).%20Direkte%20Wahrnehmung%20und%20die%20fünf%20Sinne&f=false](https://books.google.at/books?hl=de&lr=&id=PXZqAQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA2&dq=%E2%80%A2%09Matthiessen,+H.+(2008).+Direkte+Wahrnehmung+und+die+fünf+Sinne&ots=iUurvVUQ4P&sig=sCHo3TVT52n305vybh9KFvQFL2g&redir_esc=y#v=onepage&q=%E2%80%A2%09Matthiessen%2C%20H.%20(2008).%20Direkte%20Wahrnehmung%20und%20die%20fünf%20Sinne&f=false); Zuletzt aufgerufen: 10.0.2020
- Metiu, D. (2014). The Golden Ratio-From the oldest to the newest arts. *Cinematographic Art & Documentation*, (13), 52-56.
- Murali, S. (2009). Golden ratio in human anatomy. Unpublished dissertation Retrieved from http://www.researchgate.net/profile/Prasanth_G_Narasimha-Shenoi2/publication/234054763_GOLDEN_RATIO_IN_HUMAN_ANATOMY/links/00b49530f999e53cea000000.; Zuletzt Aufgerufen: 28.01.2020
- Neunhäuserer, J. (2015). *Schöne Sätze der Mathematik: Ein Überblick mit kurzen Beweisen* (2015 ed.). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

- Ozturk, S., Yalta, K., & Yetkin, E. (2016). Golden ratio: A subtle regulator in our body and cardiovascular system?. *International journal of cardiology*, 223, 143-145.
- PEREZ, J. C. (2017). Humans Chromosome 1 Fractal periods signature is highly correlated with Intelligence and Brain Evolution. *Journal of Glycomics and Metabolism*, 1(3), 1.;
<https://openaccesspub.org/article/619/jgm-17-1609.pdf> Zuletzt abgerufen: 22.12.2019
- Persaud, D., & O'Leary, J. P. (2015). Fibonacci Series, Golden Proportions, and the Human Biology.;
https://digitalcommons.fiu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1026&context=com_fa_cpub; Zuletzt aufgerufen: 15.01.2020
- Petruševski, V. M. (2006). The first excited state of the hydrogen atom and the golden ratio: a link or a mere coincidence?. *Macedonian Journal of Chemistry and Chemical Engineering*, 25(1), 61-63.
- Pietschmann, M., & Bünnig, M. (2012). DAS GOLDENE ZEITALTER.;
<http://maphy-berlin.de/wp-content/uploads/downloads/2012/06/Ausarbeitung-Das-goldene-Zeitalter-Der-Goldene-Schnitt-und-seine-Anwendung.pdf>; Zuletzt aufgerufen: 22.01.2020
- Rinkens, H.-D. (2010). Inkommensurabilität und Irrationalität – „Der Schock der Pythagoreer“. Vorlesungsskript. Paderborn.
- Singh, R., & Datta, K. (2008). The golden proportion-God's building block for the world. *The Journal of Indian Prosthodontic Society*, 8(1), 6-9.; <http://www.j-ips.org/article.asp?issn=0972-4052;year=2008;volume=8;issue=1;spage=6;epage=9;aulast=Singh>; Zuletzt aufgerufen: 01.12.2019
- Strick, H. (2018). Mathematik ist wunderschön : Noch mehr Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer.
- Thaller, B. (2009). Leonardo und der Goldene Schnitt.; <https://mug.didaktik-graz.at/images/materialien/fibonacci/fibonacci.pdf>; Zuletzt aufgerufen: 29.12.2019
- Tietze, C. (1957). Reproductive span and rate of reproduction among Hutterite women. *Obstetrical & Gynecological Survey*, 12(5), 727-728.

[https://www.fertstert.org/article/S0015-0282\(16\)32587-0/pdf](https://www.fertstert.org/article/S0015-0282(16)32587-0/pdf) Zuletzt abgerufen: 22.12.2019

- Tiller, E. (2011). „Peroché dal corpo umano ogni misura con sue denominazioni deriva “. Luca Pacioli's *De divina proportione* (1509) und die mathematische Aneignung des Körpers.; <https://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/8291/250.pdf?sequence=1>; Zuletzt aufgerufen: 15.12.2019
- Verguts, J., Ameye, L., Bourne, T., & Timmerman, D. (2013). Normative data for uterine size according to age and gravidity and possible role of the classical golden ratio. *Ultrasound in obstetrics & gynecology*, 42(6), 713-717. <https://obgyn.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/uog.12538> Zuletzt abgerufen: 22.12.2019
- Verhulst, F., & Walcher, S. (2010). *Das Zebra-Buch zur Geometrie* (Springer-Lehrbuch). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Wagner, J. (2017). Einblicke in die euklidische und nichteuklidische Geometrie : Verständlich erklärt vom Abiturniveau aus. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum.
- Walser, H. (1993). *Der goldene Schnitt* (Einblicke in die Wissenschaft: Mathematik). Stuttgart Zürich: Teubner Verl. d. Fachvereine.
- Walser, H. (2013). Der Goldene Schnitt. BoD–Books on Demand.; http://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20180112/Skript_Netz.pdf; Zuletzt aufgerufen: 23.01.2020
- Walz, G., & Atiyah, M. (2003). *Faszination Mathematik*. Heidelberg [u.a.]: Spektrum Akad. Verl.
- Wittman, E. C. (2013). *Elementargeometrie und Wirklichkeit: Einführung in geometrisches Denken*. Springer-Verlag.
- Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik (Vom Zählstein zum Computer)*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Yamagishi, M. E. B., & Shimabukuro, A. I. (2008). Nucleotide frequencies in human genome and Fibonacci numbers. *Bulletin of mathematical biology*, 70(3), 643-653.
- http://www.cits.rub.de/imperia/md/content/may/13/ss13/zahlenss13/17_wiener.pdf; Zuletzt abgerufen am 12.01.2020

