



universität
wien

DIPLOMARBEIT/DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Zugänge zum Vektorbegriff in den Bereichen Mathematik und Physik in der Sekundarstufe I + II und im Diplomstudium Lehramt“

verfasst von / submitted by

Stefanie Hofbauer

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik

Betreut von / Supervisor:

Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich in meinem Studium begleitet haben und mich letztendlich bei der Erstellung dieser wissenschaftlichen Arbeit unterstützt haben:

- Zu Beginn möchte ich mich bei meiner Familie für die Unterstützung, nicht nur im Studium, sondern auf meinem Lebensweg, der mich hier hergebracht hat, bedanken.
- Ein ganz besonderer Dank gilt meinem Lebensgefährten. Er hat mich in schönen, aber auch den schwierigsten Phasen unterstützt und ist mir immer zur Seite gestanden.
- Weiters möchte ich den Eltern meines Lebensgefährten danken. Sie haben mich in ihre Familie aufgenommen und immer unterstützt. Hierfür ein großes Dankeschön.
- Ich möchte mich bei meinen Freundinnen und Freunden bedanken, die immer ein offenes Ohr für mich hatten und ohne die das Studium um einiges schwieriger und unlustiger geworden wäre.
- Eine besondere Erwähnung gilt hier auch meinem Stammlokal, Café Clash. Danke an dessen Team, das immer meinen Stammplatz für mich freihielt und für die etlichen schönen Stunden, die ich mit Freundinnen und Freunden hier verbracht habe.
- Und zu guter Letzt gilt mein Dank ganz besonders meinem hervorragendem Betreuer Franz Embacher. Sein Verständnis für mich, sein schnelles Korrigieren und Antworten auf meine Fragen ist bemerkenswert. Dies möchte ich hier hervorheben und ihm dafür danken.

Abstract

Der Vektorbegriff ist in der Mathematik und in der Physik ein Grundbegriff. Sowohl im Mathematik- und Physikstudium, wie auch im Mathematik- und Physikunterricht werden die Zugänge zum Vektorbegriff unterschiedlich gestaltet.

Im Physikunterricht behandelt man die vektoriellen Größen der Newton'schen Mechanik geometrisch als Pfeile und geht rein phänomenologisch vor. Im Gegensatz dazu wird im Mathematikunterricht der Vektorbegriff in seiner arithmetischen Auffassung als n -Tupel mit einer geometrischen Interpretation als Punkt und Pfeil eingeführt. Die Modelle zur Einführung des Vektorbegriffs stehen aus didaktischer Sicht in Konflikt miteinander. Jedoch benötigt man beide Sichtweisen, um die Tragfähigkeit des Vektorbegriffs in der Schule adäquat zu vermitteln.

Im Mathematikstudium wird der Vektorbegriff axiomatisch eingeführt und ist allgemein gültig.

Im Physikstudium wird zwischen der klassischen und der modernen Physik unterschieden. In der klassischen Physik benötigt man den geometrischen Aspekt des Vektorbegriffs, ähnlich zu jenem in der Schule, um vektorielle Größen zu betrachten. In der modernen Physik wird klar, dass die Komponenten eines Vektors eine Vielfalt an Informationen beinhalten können (Koordinaten, Funktionen, Zeit etc.). Die Mathematik wird in der Physik als Werkzeug eingesetzt und auf Problemstellungen passend angewandt.

Um den Vektorbegriff vollständig erfassen zu können, benötigt man die Sichtweise der Theorie und der Anwendungen.

Abstract in English

The concept of vectors is a basic concept in mathematics and physics. The approaches to the concept of vectors are designed differently in both mathematics and physics studies and in mathematics and physics lessons.

In physics classes in school, the vectorial quantities of newtonian mechanics are treated geometrically as arrows and are purely phenomenological. In contrast to this, the concept of vectors is introduced in its arithmetic view as an n -tuple with a geometric interpretation as point and arrow in mathematics lessons. From a didactic point of view, the models to introduce the concept of vectors conflict with each other. However, you need both perspectives to adequately convey the sustainability of the concept of vectors in school.

The term axiomatic is introduced in mathematics studies and is generally applicable.

In university level physics, a distinction is made between classical and modern physics. In classical physics, the geometric aspect, similar to that in school, is required to consider vectorial quantities. In modern physics it is clear that the components of a vectors can contain a variety of information (coordinates, functions, time, etc.). Mathematics is used as a tool in physics and is applied appropriately to the problems.

In order to be able to fully grasp the concept of vectors, one needs the perspective of theory and applications.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kurzer geschichtlicher Überblick der Vektorrechnung	3
3	Zugang zum Vektorbegriff im Physikunterricht	5
3.1	Lehrplanauszug des Physikunterrichts	5
3.2	Schülerinnen- und Schülervorstellungen in der Mechanik	5
3.2.1	Vorstellungen zur Kinematik	6
3.3	Münchner Konzept der Mechanik	8
3.3.1	Die Beschreibung und Darstellung von Bewegungen	8
3.3.2	Wie schnell? Wohin?	9
3.3.3	Die Zusatzgeschwindigkeit	11
3.3.4	Die Newton'sche Bewegungsgleichung	13
3.4	Schulbücher	16
3.5	Rückblick	17
4	Zugang zum Vektorbegriff im Mathematikunterricht	19
4.1	Lehrplanauszug	19
4.2	Auszug aus dem Katalog von Grundkompetenzen	20
4.2.1	Auszug aus dem erweiterten Katalog von Grundkompetenzen	20
4.3	Grundvorstellungen zur Vektorrechnung	21
4.4	Zugang zum Vektorbegriff in den Schulbüchern Mathematik verstehen 5 und Lösungswege 5	23
4.5	Methoden der Einführung der Vektorrechnung in der AHS	32
4.5.1	Einführung anhand der Vektorraumaxiome	32
4.5.2	Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile	32
4.5.3	Arithmetische Auffassung von Vektoren als n-Tupel	32
4.6	Rückblick	33
5	Bezug zum Vektorbegriff im Physik- und Mathematikunterricht	35
5.1	Vektorkonzepte	35
5.1.1	Das Pfeilklassenmodell	35
5.1.2	Algebraische Vektoren mit geometrischer Deutung	37
5.2	Vektoren in geometrischen und physikalischen Kontexten	38
5.2.1	Geschwindigkeiten und Kräfte - Das Münchner Konzept der Mechanik	38
5.3	Beziehungen zwischen dem algebraischen und dem Pfeilklassenmodell	39
5.3.1	Resümee	42
6	Zugang zum Vektorbegriff im Mathematikstudium	43
6.1	Analytische Geometrie	43
6.1.1	Der Raum - $\mathbb{R}^3$	43
6.1.2	Höhere Dimensionen - $\mathbb{R}^n$	48
6.2	Lineare Algebra	50
6.2.1	Vektorräume	50
6.3	Basis und Dimension	51
6.4	Rückblick	52

7	Bezug zum Vektorbegriff im Mathematikunterricht und im Mathematikstudium	53
7.1	Schulmathematischer Bezug in fachmathematischen Lehrveranstaltungen . .	53
7.2	Unterschiede in der Vorgehensweise in der Schulmathematik und in der Hochschulmathematik	54
7.3	Resümee	55
8	Zugang zum Vektorbegriff im Physikstudium	57
8.1	Grundlagen	57
8.2	Koordinatensysteme	59
8.2.1	Kartesische Koordinaten	59
8.3	Vektoralgebra	60
8.3.1	Gleiche, inverse und parallele Vektoren	60
8.3.2	Vektoraddition und -subtraktion	61
8.3.3	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	62
8.3.4	Skalarprodukt	62
8.3.5	Vektorprodukt	64
8.3.6	Spatprodukt	67
8.4	Lineare Algebra: Vektorräume	69
8.4.1	Reelle Vektorräume	69
8.4.2	Dimension, Linearkombinationen, Basis	70
8.4.3	Komplexe Vektorräume	73
8.4.4	Transformationsverhalten von Vektoren	75
8.5	Rückblick	78
9	Bezug zum Vektorbegriff in der Mathematik und in der Physik	81
9.1	Vektorielle Größen in der Physik	81
9.2	Koordinatentransformation	82
9.3	Resümee	83
10	Resümee	85
	Literaturverzeichnis	89
	Abbildungsverzeichnis	91

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, die unterschiedlichen Zugänge zum Vektorbegriff an den allgemeinbildenden höheren Schulen und an der Universität darzustellen und zu vergleichen.

Ich möchte die verschiedenen Möglichkeiten zur Einführung des Vektorbegriffs im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, aber auch die Möglichkeit der Verwendung eines elementaren Vektorkonzepts im Physikunterricht in der Sekundarstufe I aufzeigen.

In der Schule kann die erste Begegnung mit einem elementaren Vektorkonzept bereits in der 6. Schulstufe (2. Klasse Unterstufe) im Physikunterricht stattfinden. Hierbei wird mithilfe des sogenannten „Münchner Konzepts der Mechanik“ [1] im Kontext der Newton'schen Mechanik ein einfacher Vektorbegriff entwickelt. Dabei liegt das Hauptaugenmerk auf der vektoriellen Größe der Geschwindigkeit, welche als Information des Vektors Richtung und Tempo beinhaltet. In diesem Vektorkonzept wird das Wort „Pfeil“ verwendet und die Schülerinnen und Schüler lernen bereits die Vektorrechnung in einem geometrischen Kontext kennen. Dabei wird eine Bewegung und eine Bewegungsänderung beobachtet, mithilfe einer Kamera aufgenommen und analysiert. Die Analyse findet mithilfe dreier Pfeile (Vektoren) statt, dem Pfeil der Anfangsgeschwindigkeit, der Endgeschwindigkeit und dem Pfeil der Änderung der Geschwindigkeit aufgrund einer Einwirkung. Letzterer wird als Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ bezeichnet. Somit kann man mit der Anfangsgeschwindigkeit und der Zusatzgeschwindigkeit die Endgeschwindigkeit, z.B. eines um die Kurve fahrenden Autos darstellen. Hier findet bereits eine Form der Vektorrechnung, nämlich die Vektoraddition (Anfangsgeschwindigkeit + Zusatzgeschwindigkeit = Endgeschwindigkeit) im geometrischen Kontext statt. In dem didaktischen Konzepts der Mechanik wird dies anschließend für die Newton'sche Bewegungsgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, also *Kraft = Masse · Beschleunigung*, in der Form $\Delta t \cdot \vec{F} = m \cdot \Delta\vec{v}$ (also für $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$) genutzt.

Obwohl man sich bereits in der Sekundarstufe I sehr stark mit Geometrie beschäftigt, begegnet einem der Vektorbegriff im Mathematikunterricht als solchem und laut Lehrplan (siehe [2]) erst in der 9. Schulstufe. Es gibt verschiedene Zugänge, um den Vektorbegriff im Mathematikunterricht einzuführen (siehe [3]). Unter anderem gibt es den geometrischen Zugang, der große Probleme aufgrund des Begriffs der Pfeilklassen aufwirft (siehe [4]). Das Problem des Pfeilklassenmodells ist, dass es ungünstig für die analytische Geometrie ist. Auch in der Physik ist das Pfeilklassenmodell unvorteilhaft, da hier kaum bzw. in der Schulphysik sogar keinerlei Pfeilklassen vorkommen. Der arithmetisch-algebraische Zugang ist heutzutage besonders in der Schule stark verbreitet. Dieser Zugang vermeidet die Schwierigkeit des Pfeilklassenkonzepts und betrachtet nach Malle [4] Vektoren als Zahlenpaare (oder -tripel), also als algebraische Vektoren, welche eine geometrische Deutung besitzen. Abschließend betrachte ich die unterschiedlichen Einführungsmethoden, die seit Aufnahme der Vektorrechnung in der Lehrpläne verwendet worden sind.

An dieser Stelle wäre es mir wichtig, die entwickelten Vektorkonzepte des Mathematikunterrichts und des Physikunterrichts mit der Fragestellung „Ist der Vektorbegriff im Physikunterricht derselbe wie im Mathematikunterricht?“ bzw. „Was benötigt man für einen adäquaten Vektorbegriff in der Schule?“ abzuschließen.

Um die Zugänge zum Vektorbegriff auf dem Bildungsweg von der Schule zur Universität zu vervollständigen, möchte ich zunächst einen Blick auf diese Thematik werfen. Im Laufe des Diplomstudiums Lehramt Mathematik und Physik lernt man den Vektorbegriff erneut in Lehrveranstaltungen kennen. Hier möchte ich den Zugang gemäß typischer Grundvorlesungen erläutern.

Im Mathematikstudium (Diplom Lehramt) lernt man die grundlegenden Strukturen der Algebra und der analytischen Geometrie bereits in der StEOP-Vorlesung und den weiterführenden Lehrveranstaltungen zur linearen Algebra kennen. Da die Vortragenden der Lehrveranstaltungen regelmäßig wechseln, werde ich an dieser Stelle die Darlegung des Mathematikstudiums anhand der gängigen Literatur „Einführung in das mathematische Arbeiten“ [5] und „Lineare Algebra“ [6] tätigen. Im Studium werden nach und nach die Begriffe Gruppe, Ring, Körper und weiterführend die Ebene $\mathbb{R}^2$ und den Raum $\mathbb{R}^3$ bis hin zum Begriff des Vektorraums und die Matrizenrechnung erarbeitet. Hier wird der übliche mathematische Aufbau im Definition-Satz-Beweis-Stil der Grundlehrveranstaltungen des Studiums dargestellt.

Im Physikstudium (Diplom Lehramt) ist der Zugang zum Vektorbegriff deutlich anders gewählt als jener im Mathematikstudium. In den Grundlehrveranstaltungen, welche ich hier mithilfe der Literatur „Skript zur Vorlesung Einführung in die Physikalischen Rechenmethoden I“ [7] und „Mathematische Grundlagen für das Lehramt Physik“ [8] aufzeige, geht man von einem Vektor als gerichtete Größe aus und wählt somit einen geometrischen Zugang. Anschließend geht man auf Koordinatensysteme und in den weiterführenden Lehrveranstaltungen auf die lineare Algebra mit den Gebieten Vektorräume und Matrizenrechnung ein. Abschließend wird noch das Transformationsverhalten von Vektoren besprochen, da dies eine in der Physik viel eingesetzte Eigenschaft ist.

Zuletzt werde ich den Bezug zum Vektorbegriff des Diplomstudiums Lehramt Mathematik und Physik tätigen und auf die physikalischen Anwendungen dessen eingehen.

2 Kurzer geschichtlicher Überblick der Vektorrechnung [9] [10] [11]

Schon in der Antike bzw. einer Schrift von Aristoteles ist die Idee des Kräfteparallelogramms zu finden. Im 16. und 17. Jahrhundert ist das Konzept der Zusammensetzung zweier Bewegungen, welche mit konstanter Geschwindigkeit ablaufen, bei Texten von Naturwissenschaftlerinnen und Naturwissenschaftler wie beispielsweise Galileo Galilei und Isaac Newton zu finden. Damals wurden die physikalischen Größen Kraft und Geschwindigkeit noch nicht vektoriell beschrieben, wobei anschließend erkannt wurde, dass die Beschreibung physikalischer und geometrischer Probleme nicht mehr durch die Angabe eines einzelnen Betrags möglich ist. (vgl. [9])

Der deutsche Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) kritisierte die damalige Analysis, da es keine Möglichkeit gab, Lage, Winkel und Bewegung so auszudrücken, dass sie es direkt ablesbar sind. So postulierte er die Notwendigkeit einer neuen bzw. erweiterten Analysis. Daraufhin schaffte er die „Analysis situs“, welche Ideen zur Entwicklung einer brauchbaren Vektorrechnung beinhaltet. Die moderne Vektorrechnung begründete die Schrift „Die geometrische Analyse“ von Hermann Günther Graßmann aus Stettin (1809-1877), welcher dieses Konzept für einen Preisausschreiben schrieb, welches dazu aufforderte, das Leibniz Konzept für die Geometrie und Physik brauchbar zu machen. Diesen Preis gewann Graßmann mit seinem Beitrag. (vgl. [10])

Laut Malle [9] war William Rowan Hamilton (1805-1865) neben Graßmann bedeutend in der Entstehung der Vektorrechnung. Er beschrieb als Erster die komplexen Zahlen als geordnetes Zahlenpaar und definierte die Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier komplexer Zahlen so, wie sie heute noch gelehrt werden. Er identifizierte die komplexe Zahl $a + ib$ mit dem Zahlenpaar (a, b) und die Zahl i insbesondere mit dem Zahlenpaar $(0, 1)$. Jedoch scheiterte er bei der Ausdehnung seines Konzepts auf den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, aufgrund der Multiplikation zweier Zahlentripel, obwohl er bereits Quaternionen, die aus einem reellen Teil und drei komplexen Teilen bestehen, betrachtete. Laut Hamilton gilt Folgendes:

Für Quaternionen der Form $a + bi + cj + dk$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{lll} i^2 = j^2 = k^2 = -1 & & \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Die Multiplikation zweier Quaternionen läuft wie heutzutage üblich ab, wobei den obigen Vorgaben zu folgen ist. Er definierte in Folge dessen die Rechenoperationen für die Quaternionen (analog zu $\mathbb{C}$). Jedoch gilt für Quaternionen nicht die Kommutativität. In diesem Kontext wurde auch das erste Mal der Begriff „Vektor“, im Sinne von „Sei $\alpha = a + bi + cj + dk$, dann ist a der Skalarteil und $bi + cj + dk$ der Vektorteil“, verwendet. Hamiltons Faszination an seinem Konzept wird oft als die fesselnde Wirkung der Idee der Existenz der Zeit als vierte Dimension neben dem Raum, interpretiert.

Hermann Günther Graßmanns Ideen waren leider seinerzeit nicht anerkannt. In seinen vier Schriften zu seinen Konzepten veröffentlichte er Ideen, die wir bis heute aus der Vektorrechnung kennen. Beispielsweise definierte er die geometrische Gleichheit zweier Strecken durch die Gleichheit ihrer Richtung und ihres Betrags. Die Addition führte er auf geometrische Weise durch. Diese kann auf die Parallelogrammregel (siehe 4.4.12) zurückgeführt werden.

Er interpretierte die Multiplikation zweier gerichteter Strecken bereits auf zwei Arten, als das uns bekannte Skalarprodukt, welches er als lineares Produkt bezeichnete bzw. das Flächeninhalt des von den Strecken aufgespannten Parallelogramms, welches er als geometrisches Produkt beschrieb.

Mit weiteren Schriften zu diesem Thema hatte er erst keinen Erfolg. Dieser Misserfolg ist auf die philosophische Rahmenbedingungen der Texte zurückzuführen.

Er erweiterte sein Konzept auf die n -dimensionale Geometrie aus und beschrieb „eine Art universale Algebra“, also ein Konzept unabhängig der geometrischen Anschauung, welche bei Bedarf geometrisch angewendet werden kann. In der Schrift „Ausdehnungslehre“ (1862) erarbeitete er bereits ein Konzept zum n -dimensionalen Vektorraum, indem er auch Ideen zur linearen (Un-)Abhängigkeit, Basis und Dimension formulierte. (vgl. [10])

Ab der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelte sich die Vektorrechnung aufgrund ihrer Notwendigkeit in der Physik stark weiter. Die Entstehung der modernen Vektorrechnung lässt sich in zwei Phasen einteilen. Die erste Phase besteht hauptsächlich aus der Testung bestehender Vektorsysteme auf ihre Brauchbarkeit in der Physik und kann zeitlich von Hamiltons Tod 1865 bis etwa 1880 eingeordnet werden. Die damaligen Vektorsysteme basierten stark auf dem algebraischen Konzept der Quaternionen, welche im Gegensatz zum physikalischen Konzept der Ausdehnungsgrößen stand. Daher schieden sich hier die Geister. Einige Physikerinnen und Physiker, wie Tait, vertraten die Quaternionentheorie, andere, wie Maxwell und Clifford, zweifelten diese Theorie an und weiters gab es noch einige, wie Kelvin, die dem Konzept der Vektorrechnung skeptisch gegenüberstanden. So entstand eine Grundsatzdiskussion im Hinblick auf die Brauchbarkeit der damaligen Konzepte der Vektorrechnung.

In der zweiten Phase (etwa 1880 bis 1900) konnten die Physiker Gibbs und Heaviside die Weiterentwicklung der Vektorrechnung sehr stark voranbringen. Sie übernahmen nur jene Aspekte der Quaternionentheorie, welche auch für die Physik brauchbar erschienen. So trugen sie besonders zur Entwicklung vektorieller Methoden in der Infinitesimalrechnung bei. Deren Entwicklungen werden in einigen Kreisen als Vollendung der modernen Vektorrechnung bezeichnet (vgl. [9]). Da jedoch zu dieser Zeit verschiedene Standpunkte mit unterschiedlichen Zielen und Vorstellungen gegenüber dem Vektorbegriff present waren, konnte eine klare Definition des Vektorbegriffs erst durch seine Axiomierung durch Guiseppe Peano (1858-1932) um 1900 erzielt werden. Dies ist auch die heute noch übliche Definition, welche besagt, dass ein Vektor ein Element eines Vektorraums ist. (vgl. [10])

Heutzutage ist der Vektorbegriff in Österreich aus den Schulen nicht mehr wegzudenken. Die Vektorrechnung wurde in der Schule erst in den 1960er Jahren eingeführt und findet sich erstmals im Lehrplan 1967 verpflichtend für den Unterricht wieder. Der Begriff des Vektors wird jedoch erst in der Sekundarstufe II explizit erwähnt und behandelt. Seither haben sich die Lehrpläne vier Mal geändert (1978, 1989, 2004, 2018), wobei die Grundideen beibehalten wurden. (vgl. [11])

3 Zugang zum Vektorbegriff im Physikunterricht

In diesem Abschnitt beschäftige ich mich mit einem didaktisch erprobten Modell zur „Einführung in die Mechanik“ in der 6. Schulstufe. Das Konzept wird auch „Münchener Konzept der Mechanik“ oder „Münchener Mechanikkonzept“ genannt.

Die Newton'sche Mechanik wird hier vorab im zweidimensionalen Raum betrachtet. Dafür wird die Geschwindigkeit als vektorielle Größe eingeführt. Dabei erweisen sich Messmethoden wie die Videoanalyse (z.B. frei verfügbare Apps) als sehr hilfreich. Aus der Analyse der aufgenommenen Bewegungen wird der Kernbegriff der „Zusatzgeschwindigkeit“ erarbeitet. Dabei wird sie als eigenständige Größe, welche angibt, wie sich die Geschwindigkeit in einem Zeitintervall Δt verändert, eingeführt. Das Wissen, dass das Einwirken der Zusatzgeschwindigkeit auf einen Körper immer eine Geschwindigkeitsänderung hervorruft, führt zur Formulierung der Newton'schen Bewegungsgleichung. So kann es ermöglicht werden, über komplexe Bewegungen ohne Rückgriff auf den Begriff der Beschleunigung zu diskutieren.

In den folgenden Abschnitten möchte ich den Lehrplanauszug und das „Münchener Konzept der Mechanik“ vorstellen.

3.1 Lehrplanauszug des Physikunterrichts [2]

Hier folgt nun ein Auszug aus dem Lehrplan der Sekundarstufe I im Unterrichtsfach Physik für den Bereich der Bewegung:

Die Welt in der wir uns bewegen:

Ausgehend von unterschiedlichen Bewegungsabläufen im Alltag, im Sport, in der Natur bzw. in der Technik sollen die Schülerinnen und Schüler ein immer tiefer gehendes Verständnis der Bewegungsmöglichkeiten, der Bewegungsursachen und der Bewegungshemmungen von belebten und unbelebten Körpern ihrer täglichen Erfahrungswelt sowie des eigenen Körpers gewinnen. Weg und Geschwindigkeit; die gleichförmige und die gleichförmig beschleunigte Bewegung; Masse und Kraft; Masse und Trägheit; Gewichtskraft und Reibungskraft.

- Bewegungsfördernde und bewegungshemmende Vorgänge verstehen und anwenden. [2, S.63]

3.2 Schülerinnen- und Schülervorstellungen in der Mechanik [12, S.64-86]

Schülerinnen- und Schülervorstellungen sind Alltagsvorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu bestimmten Begriffen. So werden oft Begriffe oder Aussagen aus dem Alltag in den Physikunterricht mitgenommen und beeinflussen dort die Verarbeitung der korrekten Definitionen und Begriffe.

Ein Beispiel dafür wäre, dass Kraft im Alltag oft mit der Fähigkeit, auf etwas einzuwirken und nicht mit dem Vorgang des Einwirkens gleichgesetzt wird. Aber auch die Begriffe „Geschwindigkeit“ und „Beschleunigung“ werden als schnell/langsam bzw. Schnellerwerden verstanden. Nach dem Unterrichten wird zum Teil auch Langsamerwerden als Beschleunigung gesehen.

Der im Unterricht eingeführte und in der Physik zentrale Vektorcharakter wird von Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I und II oftmals als untergeordnete, zusätzliche Eigenschaft mit wenig Bedeutung angesehen. Das ist besonders im weiteren Unterrichtsverlauf, beispielsweise bei Kreisbewegungen, ein Problem, da hier die Schülerinnen und Schüler eine nach innen gerichtete Beschleunigung erkennen sollen.

Im nächsten Abschnitt werden die Schülerinnen- und Schülervorstellungen der Mechanik des Forschungsstandes 2018 vorgestellt.

3.2.1 Vorstellungen zur Kinematik [12, S.65-69]

- „Geschwindigkeit ist Schnelligkeit.“[1, S.65]
Schülerinnen und Schüler setzen das Tempo mit der Geschwindigkeit gleich. Die Richtung wird im Alltag meist nur als bergauf/bergab angegeben oder als Ziel verstanden - z.B. „Sie fährt mit einer Geschwindigkeit von $100 \frac{km}{h}$ auf der Bundesstraße nach Salzburg.“
- „Große Beschleunigung heißt hohes Tempo.“[1, S.66]
Angaben wie „Der Porsche beschleunigt von 0 auf 100 in 2,6 Sekunden.“ stellen den Betragsaspekt der Beschleunigung als den Zeitraum und die Tempoänderung dar. Dabei ist die Beschleunigung eine eigenständige Verhältnisgröße, die die Geschwindigkeit und die dabei vergangene Zeit durch Quotientenbildung in Zusammenhang setzt. Für Schülerinnen und Schüler ist die Beschleunigung oftmals eine der Geschwindigkeit oder dem Tempo ähnliche Größe. Das führt dazu, dass sie manche Problemstellungen zur Beschleunigung behandeln, als würde es sich um Tempo oder Geschwindigkeit handeln. Das führt weiters zu dem Problem, dass sie so nicht zwischen verschiedenen Bewegungsarten, wie beispielsweise der gleichförmigen und der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, unterscheiden können.
- „Beschleunigung ist Schnellerwerden.“[1, S.66]
Problematisch ist hier die Gleichsetzung von Beschleunigung mit der Aussage des Schnellerwerdens, welche häufig im Alltag Verwendung findet. Eine negative Beschleunigung erscheint somit unlogisch, wobei negative Werte beim Rechnen akzeptiert werden, jedoch ohne dass das Verständnis der Beschleunigung weiterentwickelt wird.
- „Beschleunigung ist Tempoänderung.“[1, S.66]
Schülerinnen und Schüler setzen Beschleunigung oftmals mit der Änderung des Geschwindigkeitsbetrags gleich und verstehen unter „positiver Beschleunigung“ das Schnellerwerden und unter „negativer Beschleunigung“ das Langsamerwerden. Jedoch hängt das Vorzeichen vom gewählten Koordinatensystem ab. Im Alltag wird der Richtungsaspekt der Beschleunigung jedoch oft nicht erkannt. In der Physik ist hingegen jede Änderung des Geschwindigkeitsvektors, also Betrag und/oder Richtung, eine Beschleunigung. So ist es für die Schülerinnen und Schüler sehr schwer vorstellbar, dass bei einer Kreisbewegung eine ständige Beschleunigung herrscht, ohne dass sich das Tempo ändert. Für Schülerinnen und Schüler bleibt somit Beschleunigung oftmals die Änderung des Tempos.

- „Zu einem Zeitpunkt kann keine Beschleunigung vorliegen.“ [1, S.67]
Da Beschleunigung als Änderung des Geschwindigkeitsbetrags ($v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$) verstanden wird, kann sich die Beschleunigung, nach Meinung der Lernenden, nicht auf einen Zeitpunkt beziehen. Diese Vorstellung zeigt sich bei Aufgaben, bei denen sie an Umkehrpunkten keine Beschleunigung angeben (siehe Abbildung 1). Sie gehen davon aus, dass der Ball im Zenit eine sehr kleine Zeit lang stillsteht und sich dann die Geschwindigkeit wieder ändert. Die Lernschwierigkeit liegt im nicht vollzogenen Grenzübergang von sehr kleinem Zeitraum zum Zeitpunkt. Denn die Beschleunigung bezieht sich auf den Zeitpunkt. Dieser Übergang war auch in der Wissenschaft eine enorme gedankliche Leistung, die auf Leibniz und Newton zurückzuführen ist.

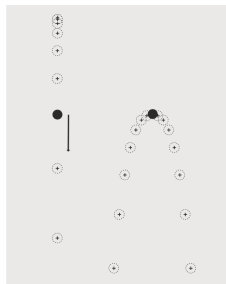


Abbildung 1: „Ein Jongleur arbeitet mit zwei Bällen gleichzeitig. Die Bälle befinden sich gerade in der Luft auf der gleichen Höhe. Zeichnen Sie die Beschleunigung ein!“ [12, S.67]

- „Für einen Zeitpunkt kann man keine Geschwindigkeit bestimmen.“ [1, S.68]
Diese Vorstellung entspricht der obigen. Sie beruht auf dem selben Problem des Grenzwerts der immer kleiner werdenden Zeitintervalle. Schülerinnen und Schüler sind der Meinung, dass ein Körper zu einem Zeitpunkt keinen Weg zurücklegt und man somit auch nicht von einer Geschwindigkeit sprechen kann.
- „Die Bewegungsform prägt sich dem bewegenden Objekt ein.“ [1, S.69]
Hier sind Schülerinnen und Schüler verleitet, dass beispielsweise der Ball in Abbildung 2 nach dem Loslassen der Bahnkurve A folgt. Tatsächlich folgt der Ball gemäß dem ersten Newtonschen Axiom der Bahnkurve B, also fliegt er tangential weiter. Diese Schülerinnen- und Schülervorstellung hängt mit der Idee zusammen, dass die in einem Körper gespeicherte „innere Kraft“ ihn dazu bringt, trotz des Wirkens von äußeren Kräften, seine Bewegungsform anfänglich beizubehalten.

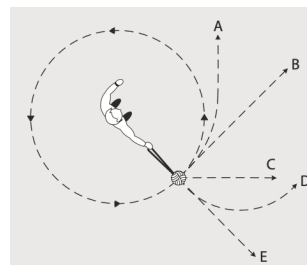


Abbildung 2: „Ein im Kreis herumgeschwungener Ball wird losgelassen.“ [12, S.69]

Um diese Schülerinnen- und Schülervorstellungen im Unterricht aufzugreifen und zu korrigieren bzw. auszuarbeiten, setzt man an dieser Stelle das Münchner Konzept der Mechanik ein.

3.3 Münchner Konzept der Mechanik [1]

Das „Münchner Konzept der Mechanik“ ist ein didaktisch erprobtes Konzept zum Unterrichten der „Einführung in die Mechanik“ in der Sekundarstufe I. Die Mechanik beobachtet und analysiert Bewegungen und deren Ein- und Auswirkung auf Gegenstände. Die (klassische) Mechanik wurde von Isaac Newton im 17. Jahrhundert begründet. Das „Münchner Konzept der Mechanik“ betrachtet die einzelnen Informationen und Komponenten, die man zur Beschreibung von Bewegungsabläufen, also kontinuierliche Bewegungen und Bewegungsänderungen, benötigt. So können beispielsweise Fragen der Art „Mit welcher Stärke und Richtung muss man einen Ball treffen, damit er ins Tor fliegt?“ beantwortet werden.

3.3.1 Die Beschreibung und Darstellung von Bewegungen [1, S.2-3]

Um beispielsweise die Bewegung eines Zugvogels auf seiner Reise in den Süden zu beschreiben, werden die Aufenthaltsorte des Zugvogels in zeitlich regelmäßigen Abständen benötigt. Diese Informationen können in eine Karte übertragen werden, um die Flugroute sichtbar zu machen.



Abbildung 3: Flugroute eines Storchs [1, S.2]

Um die Bewegung eines Gegenstandes zu beschreiben, muss zu bestimmten Zeitpunkten der Ort des Gegenstandes festgestellt werden. Die Messung von Zeit und Ort sollte dabei genaust möglich erfolgen. Die Beschreibung der Bewegung wird genauer, je kürzer die Zeitabstände zwischen den Messungen und je präziser die Ortsbestimmung ist. Mithilfe von Stroboskopbildern kann die Bewegung eines Gegenstandes leicht aufgezeichnet (z.B. Smartphone-App) und im Unterricht verwendet werden. Ein Stroboskopbild ist ein Bild, in dem mehrere zeitlich äquidistante Aufnahmen gemacht und übereinandergelegt werden (siehe Abbildung 4). Das bedeutet, dass sich Stroboskopbilder für die Beschreibung von Bewegungsabläufen gut eignen, da Ort und Zeitpunkt eines bewegten Gegenstandes darauf gut ersichtlich sind.

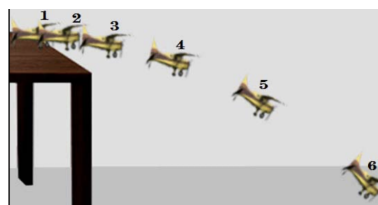


Abbildung 4: Stroboskopbild eines Miniaturflugzeugs [1, S.2]

3.3.2 Wie schnell? Wohin? [1, S.3-9]

Zur Beschreibung einer Bewegung ist jedoch Zeit und Ort nicht ausreichend. Um den Schülerinnen und Schülern das aufzuzeigen, kann ein simpler Versuch mit ihnen durchgeführt werden.

VERSUCH: Auf dem Boden ist eine vorgegebene Strecke für ein ferngesteuertes Auto abgesteckt (siehe Abbildung 5). Eine Schülerin oder ein Schüler soll mit dem Auto die vorgegebene Strecke abfahren. Jedoch darf die Person die Strecke nicht sehen und muss auf die Anweisungen der Mitschülerinnen und Mitschüler hören.



Abbildung 5: „Ferngesteuertes Auto auf einer vorgegebener Route“ [1, S.3]

Mit diesem Versuch wird klargestellt, dass Angaben wie „schneller“ oder „langsamer“ sowie Richtungsanweisungen gegeben werden müssen, um auf der Strecke zu bleiben. Zur Beschreibung einer Bewegung muss dem Gegenstand demnach zu jedem Zeitpunkt eine Richtung und ein Tempo zugeordnet werden.

Tempo

Das Tempo beschreibt in der Physik wie schnell sich ein Gegenstand bewegt. Es ist die Schnelligkeit, die man beispielsweise an einem Tacho ablesen kann. Das Tempo ist der Quotient der zurückgelegten Strecke Δs und der dafür benötigten Zeit Δt .

$$\text{Tempo} = \frac{\text{zurückgelegte Strecke}}{\text{dafür benötigte Zeit}}$$
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Es hat das Formelzeichen v und die Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dabei gilt folgende Umrechnung:

$$10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Richtung

Wie bereits oben erwähnt, benötigt man zur Beschreibung einer Bewegung auch deren Richtung. Die Bewegungsrichtung ist neben Ort und Tempo ausschlaggebend für die Bewegungsbeschreibung. Sie wird als Pfeil dargestellt.

In Abbildung 6 sind Fahrzeuge und deren Bewegungsrichtungen dargestellt. Die drei Autos mit den gelben Pfeilen weisen die gleiche Bewegungsrichtung auf, wobei sie nicht das gleiche Ziel haben.



Abbildung 6: „Pfeile bei verschiedenen Fahrzeugen “ [1, S.6]

Die vier anderen Fahrzeuge haben das gleiche Ziel, den Kreisverkehr, dafür voneinander verschiedene Bewegungsrichtungen.

Die Bewegungsrichtung kann sich im Laufe der Zeit ändern (z.B. Zufahrt). Das kann spielerisch im Unterricht mit einer Modelleisenbahn, auf der ein Pfeil klebt, gezeigt werden.

Geschwindigkeit

Nun sind alle Informationen zur Beschreibung einer Bewegung vorhanden. Eine Bewegung eines Objekts wird durch sein Tempo und seine Richtung beschrieben. Nun kann noch die Länge der Pfeile proportional zum Tempo gewählt werden, um die Gesamtinformationen einer Bewegung graphisch darzustellen.

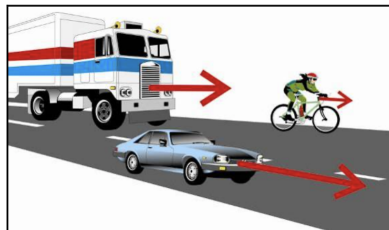


Abbildung 7: „Geschwindigkeitspfeile verschiedener Fahrzeuge “ [1, S.7]

„In der Physik werden die beiden Informationen Tempo und Richtung zusammengefasst: die **Geschwindigkeit** $\vec{v}$ eines Gegenstands setzt sich zusammen aus seinem Tempo und seiner Bewegungsrichtung. Sie wird durch einen **Geschwindigkeitspfeil** dargestellt. Seine Richtung gibt die Richtung der Bewegung, seine Länge das Tempo der Bewegung an.“ [1, S.7]

$$\text{Geschwindigkeit } \vec{v} \begin{cases} \text{Tempo} \\ \text{Richtung} \end{cases}$$

3.3.3 Die Zusatzgeschwindigkeit [1, S.10-16]

Die Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ ist jene Geschwindigkeit, die aufgrund einer Einwirkung an einem Gegenstand auftritt und dessen Geschwindigkeit ändert.

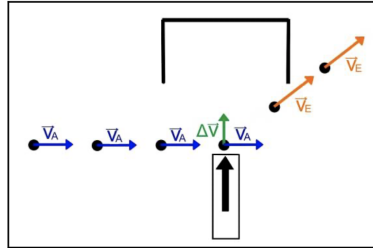


Abbildung 8: Anfangs-, End- und Zusatzgeschwindigkeit einer Kugel [1, S.11]

In Abbildung 8 sieht man wie eine Kugel mit Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_A$ durch einen Stoß abgelenkt wird. Die Stoßrichtung ist gleich der Richtung der Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$. Nach dem Stoß rollt die Kugel mit der Endgeschwindigkeit $\vec{v}_E$ weiter. Die Verknüpfung der drei Geschwindigkeitspfeile wird nun besprochen.

Konstruktion der Endgeschwindigkeit

Die Bestimmung der Endgeschwindigkeit $\vec{v}_E$ aus der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_A$ und der Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ kann mithilfe der Geschwindigkeitspfeile, wie in Abbildung 9 dargestellt, nachvollzogen werden.

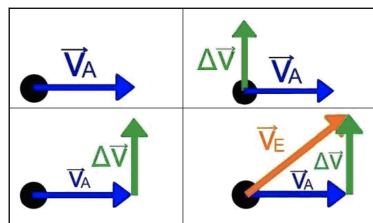


Abbildung 9: Konstruktion der Endgeschwindigkeit [1, S.12])

KONSTRUKTION:

- Die Kugel hat eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_A$.
- Durch den Stoß erhält die Kugel zusätzlich eine bestimmte Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$, die in Richtung des Stoßes zeigt.
- An die Pfeilspitze von $\vec{v}_A$ wird die Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ angehängt.
- Es wird der Pfeilfuß von $\vec{v}_A$ mit der Pfeilspitze von $\Delta\vec{v}$ verbunden. Der resultierende Pfeil ist der Pfeil der Endgeschwindigkeit $\vec{v}_E$.

Konstruktion der Zusatzgeschwindigkeit

Aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit wird die Zusatzgeschwindigkeit konstruiert. Die Zusammensetzung der Geschwindigkeitspfeile von $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_E$, zur Bestimmung von $\Delta\vec{v}$, kann anhand Abbildung 10 nachvollzogen werden.

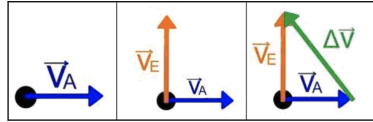


Abbildung 10: Konstruktion der Zusatzgeschwindigkeit [1, S.12]

KONSTRUKTION:

- Die Kugel hat eine gegebene Geschwindigkeit $\vec{v}_A$.
- Nach dem Stoß hat die Kugel die Endgeschwindigkeit $\vec{v}_E$.
Gesucht ist der Pfeil der Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$.
- Der Pfeil der Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ schaut von der Pfeilspitze von $\vec{v}_A$ zur Pfeilspitze von $\vec{v}_E$.

„Durch eine **Einwirkung** erhält ein Körper eine **Zusatzgeschwindigkeit** $\Delta\vec{v}$. Die Richtung der Einwirkung und die Richtung der Zusatzgeschwindigkeit sind gleich. Die Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ wird durch einen Pfeil dargestellt. Der Pfeil von $\Delta\vec{v}$ zeigt von der Pfeilspitze von $\vec{v}_A$ zur Pfeilspitze von $\vec{v}_E$.

Konstruktionstipp: Wenn du einen der Geschwindigkeitspfeile konstruierst, dann kannst du die vorgegebenen Geschwindigkeitspfeile beliebig verschieben. Beachte, dass du dabei die Richtung und die Länge der Pfeile nicht veränderst.“ [1, S.13]

Sonderfall: Eindimensionale Bewegungen

Von einer eindimensionalen Bewegung ist dann die Rede, wenn alle drei Geschwindigkeitspfeile ($\vec{v}_A$, $\vec{v}_E$, $\Delta\vec{v}$) auf einer Linie liegen, also sie entweder in die gleiche oder in die entgegengesetzte Richtung zeigen. So gibt es bei einer eindimensionalen Bewegung eines Objektes die folgenden vier Fälle:

- In Abbildung 11 ist zu sehen, dass die Einwirkung und die Anfangsgeschwindigkeit die selbe Richtung aufweisen und somit die Endgeschwindigkeit größer als die Anfangsgeschwindigkeit und gleich orientiert ist. Dies wird als Erhöhen des Tempos bezeichnet.
- In Abbildung 12 ist zu sehen, dass die Einwirkung entgegengesetzt der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit ist. Die Endgeschwindigkeit zeigt die selbe Richtung wie die Anfangsgeschwindigkeit auf und ist kleiner. Das wird als Verringern des Tempos bzw. Bremsen bezeichnet.
- In Abbildung 13 ist zu sehen, dass die Einwirkung gleich groß, aber entgegengesetzt der Anfangsgeschwindigkeit ist. Hier wird die Bewegung gestoppt.
- In Abbildung 14 ist zu sehen, dass die Einwirkung größer und entgegengesetzt der Anfangsgeschwindigkeit ist. Die Endgeschwindigkeit zeigt, dass das Objekt wieder zurückkommt (z.B. ein Fußball der zurückgekickt wird).

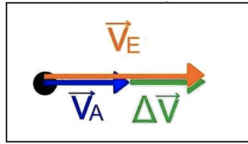


Abbildung 11: „Erhöhen des Tempos“ [1, S.15]

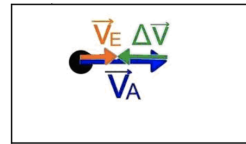


Abbildung 12: „Bremsen“ [1, S.15]

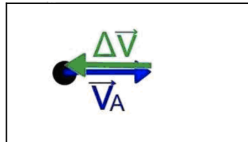


Abbildung 13: „Stoppen“ [1, S.15]

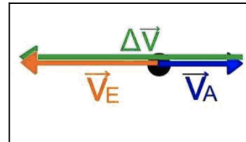


Abbildung 14: „Zurück“ [1, S.15]

3.3.4 Die Newton'sche Bewegungsgleichung [1, S.17-20]

Aus den vorherigen Abschnitten kann gesagt werden, fügt eine Einwirkung der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_A$ eine Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ hinzu, so ergibt sich daraus die Endgeschwindigkeit $\vec{v}_E$. Da die Einwirkrichtung gleich der Richtung der Zusatzgeschwindigkeit ist, muss es einen bestimmten Zusammenhang zwischen der Einwirkung und der Zusatzgeschwindigkeit geben.

Einwirkung und Zusatzgeschwindigkeit

Wird eine Kugel unterschiedlich stark gestoßen, so kann festgestellt werden, dass beim stärkeren Stoß, also der stärkeren Einwirkung, das Tempo der Zusatzgeschwindigkeit größer ist.

Allgemein kann folgende Aussage getroffen werden: Je größer die Einwirkungsstärke auf ein Objekt ist, desto größer ist das Tempo der Zusatzgeschwindigkeit, die das Objekt bekommt.

Das heißt, dass bei größerer Einwirkungsstärke der Pfeil der Zusatzgeschwindigkeit länger ist.

Somit kann der Begriff der Einwirkung genauer festgemacht werden. Die Einwirkung ist definiert durch ihre Richtung und ihre Stärke.

„In der Physik werden die „Einwirkungsstärke“ und die „Einwirkungsrichtung“ zusammengefasst; dafür verwendet man den Begriff **Kraft** (Symbol $\vec{F}$, vom englischen Wort force)“ [1, S.17]

$$\text{Kraft } \vec{F} \begin{cases} \text{Einwirkungsstärke} \\ \text{Einwirkungsrichtung} \end{cases}$$

Einwirkungsdauer und Zusatzgeschwindigkeit

Wie in Abbildung 15 dargestellt, wird das Tempo der Zusatzgeschwindigkeit größer, wenn die Einwirkdauer länger wird (zwei Föhns hintereinander statt einem).

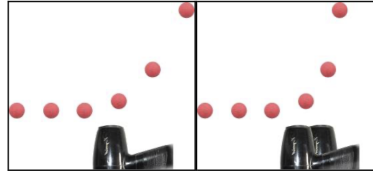


Abbildung 15: „Eine Kugel wird durch den Luftstrom eines Föhns (links) bzw. zwei nebeneinander liegender Föhns (rechts) abgelenkt.“ [1, S.18]

Das bedeutet, dass eine kleine Kraft über einen langen Zeitraum ausgeübt, die gleiche Zusatzgeschwindigkeit wie eine große Kraft, die nur einen kurzen Moment lang ausgeübt wird, bewirkt.

Masse und Zusatzgeschwindigkeit

Werden unterschiedlich schwere Kugeln immer gleich stark angestoßen, so ist erkennbar, dass das Tempo der Zusatzgeschwindigkeit dabei direkt proportional zur Masse der Kugel ist.

„Allgemein gilt: Je größer die **Masse** eines Gegenstands ist, auf den eine Kraft ausgeübt wird, desto kleiner ist das Tempo der Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$, die der Körper erhält.“ [1, S.19]

Die Newton'sche Bewegungsgleichung

Nun sind alle Faktoren, welche die Zusatzgeschwindigkeit beeinflussen, dargelegt worden. So kann nun gesagt werden, dass die Kraft (Einwirkungsstärke und -richtung), die Zeitdauer und die Masse die Zusatzgeschwindigkeit bestimmt. All diese Einflussfaktoren können nun in einen mathematischen Zusammenhang in Form der **Newton'schen Bewegungsgleichung** gebracht werden.

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta\vec{v} \quad (3.1)$$

Die Newton'sche Bewegungsgleichung $\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$ sagt aus:

1. Wenn auf einen Körper eine Kraft $\vec{F}$ ausgeübt wird, erhält dieser eine Zusatzgeschwindigkeit $\Delta \vec{v}$ (d.h. die Geschwindigkeit des Körpers ändert sich).
2. Die Richtung der Kraft und die Richtung der Zusatzgeschwindigkeit sind gleich.
3. Je größer die Einwirkungsstärke der Kraft $\vec{F}$ ist, desto größer ist das Tempo der Zusatzgeschwindigkeit $\Delta \vec{v}$ (bei jeweils gleicher Einwirkungsdauer und Masse).
4. Je länger die Einwirkungsdauer Δt ist, desto größer ist das Tempo der Zusatzgeschwindigkeit $\Delta \vec{v}$ (bei jeweils gleicher Kraft und Masse).
5. Je größer die Masse m des Körpers ist, desto kleiner ist das Tempo der Zusatzgeschwindigkeit $\Delta \vec{v}$ (bei jeweils gleicher Kraft und Einwirkungsdauer).

[1, S.20]

Die Kraft hat die Maßeinheit Newton (N). Sie kann mithilfe der Einheiten der anderen Faktoren der Newton'schen Bewegungsgleichung ausgedrückt werden. Es gilt:

$$1N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Zusammenfassend kann nun gesagt werden, dass die Kraft, wie auch die Geschwindigkeit, als Pfeil dargestellt wird. Dabei entspricht der Betrag der Länge des Pfeils, welcher gleichbedeutend mit der Einwirkungsstärke (bzw. dem Tempo) ist. Die Richtung des Pfeils entspricht der Einwirkrichtung (bzw. der Bewegungsrichtung).

Hier möchte ich die Bearbeitung der „Einführung in die Mechanik“ nach dem „Münchener Konzept der Mechanik“ [1] beenden, da nun die wichtigsten Begriffe für einen grundlegenden Vektorbegriff im Physikunterricht vorhanden sind. Abschließend für dieses Kapitel werde ich noch einen kurzen Einblick in einige Physikschulbücher für die 6. Schulstufe zu diesem Thema geben.

3.4 Schulbücher [13] [14] [15] [16]

Hier möchte ich nur kurz einige wichtige Punkte erwähnen. Im Folgenden wurden die Schulbücher „Physik verstehen 2“ [13], „Big Bang 2“ [14], „Impuls Physik“ [15] und „Physik 2“ [16] zum Thema Mechanik und im Vergleich zum „Münchener Konzept der Mechanik“ untersucht und Folgendes festgestellt:

Alle hier untersuchten, in Österreich zugelassenen Schulbücher haben eine große Gemeinsamkeit. Keines dieser Schulbücher unterscheidet die Begriffe „Geschwindigkeit“ und „Tempo“. In jedem Schulbuch wird die Geschwindigkeit äquivalent zum Tempo (siehe Abschnitt 3.3) definiert.

Sie verwenden in der Mechanik auch alle das Wort „Pfeil“. Jedoch wird dieser Begriff in drei von vier Büchern (exkl. [14]) erst beim Kraftbegriff und hier lediglich im Abschnitt der Darstellung von Kräften verwendet.

Anders ist hier das Schulbuch „Big Bang 2“. In diesem wird zwar die Geschwindigkeit auch äquivalent zum Tempo definiert, jedoch wird hier darauf eingegangen, dass in der Physik die Geschwindigkeit mit einem Pfeil dargestellt wird, dessen Länge der „Größe der Geschwindigkeit“, also dem Tempo entspricht. Weiters wird auch erwähnt, dass der Fachausdruck für den Pfeil „Vektor“ ist und dieser sich mit dem Objekt in Bewegungsrichtung mitverschiebt.

Der Vektorbegriff (Pfeil) wird in diesem Schulbuch konzeptuell auch im Kontext von beschleunigten Körpern weitergeführt.

Erwähnenswert ist: Auch wenn alle Schulbücher die Themen der Newton'schen Mechanik (Bewegungsgleichung, Trägheit, Wechselwirkung) enthalten, ist „Big Bang 2“ das einzige, das dies auch namentlich anspricht.

Keines der Schulbücher beinhaltet den Begriff „Zusatzgeschwindigkeit“, dafür arbeiten sie mit dem Begriff „Beschleunigung“.

Die Schulbücher unterscheiden folgende Bewegungsarten:

„Physik verstehen 2“ und „Big Bang 2“:

- unbeschleunigte/gleichförmige Bewegung = Geschwindigkeit konstant
- beschleunigte/ungleichförmige Bewegung = Geschwindigkeitsänderung (Tempo oder Richtung)

„Impuls Physik 2“ und „Physik 2“:

- gleichförmige Bewegung = konstante Geschwindigkeit
- beschleunigte Bewegung = positive Geschwindigkeitsänderung (Beschleunigung)
- verzögerte Bewegung = negative Geschwindigkeitsänderung (Bremsen)

Wobei hier erwähnt werden muss, dass ohne Definition des Bezugssystems die Richtung der Geschwindigkeitsänderung (pos., neg.) nicht aussagekräftig ist.

Auf weitere Unterschiede der Schulbücher möchte ich hier nicht eingehen. Mir war es nur wichtig zu zeigen, dass nicht alle Schulbücher in allen Bereichen gleich gut sind. Aus fachlicher Sicht würde ich das Schulbuch „Big Bang 2“ [14] empfehlen.

3.5 Rückblick

ad Schülerinnen- und Schülervorstellungen in der Mechanik

Der zentrale Vektorcharakter von Größen wie Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft wird im Unterricht mithilfe des Münchner Konzepts der Mechanik eingeführt. Jedoch wird dieser von Schülerinnen und Schülern oft als untergeordnete Eigenschaft mit wenig Bedeutung angesehen, was zu Problemen im weiteren Unterricht, z.B. bei Kreisbewegungen, führen kann.

So wird der Betragsaspekt, der Richtungsaspekt und der Vektorcharakter von den in der Mechanik üblichen vektoriellen Größen auch in den Schülerinnen- und Schülervorstellungen immer wieder als von den Schülerinnen und Schülern nebensächlichen Aspekt oder falsch interpretierten Begriff beschrieben. So trifft man im Alltag auf Aussagen wie „Sie fährt mit einer Geschwindigkeit von $80 \frac{km}{h}$ über die Nordbrücke in die Stadt.“ oder „Der Porsche 918 Spyder beschleunigt von 0 auf 100 in 2,6 Sekunden.“. Klar ersichtlich ist hier, dass häufig über den Betragsaspekt, also das Tempo, geredet und die Begriffe Geschwindigkeit, Tempo und Beschleunigung durcheinandergebracht wird. So kann das „Münchner Konzept der Mechanik“ im Unterricht dabei helfen, den zentralen Vektorcharakter sichtbar zu machen.

ad Münchner Konzept der Mechanik

Das Münchner Konzept der Mechanik ist ein Unterrichtskonzept, welches sich speziell auf den Vektorcharakter der Bewegung konzentriert. So kann es bereits als erste Begegnung mit einem elementaren Vektorbegriff dazu beitragen, im Späteren den Vektorbegriff mit seinem Betrags- und Richtungsaspekt zu verinnerlichen. Es handelt sich um ein rein phänomenologisch aufgebautes Konzept für die Sekundarstufe I.

Das Münchner Konzept der Mechanik führt zum Vektorbegriff hin, indem die beiden Aspekte, Betrag und Richtung, im Kontext der Bewegung, genauer der Geschwindigkeit, betrachtet werden. Anschließend werden Tempo und Richtung (Betrag und Richtung) zum Begriff der Geschwindigkeit (Vektor) zusammengesetzt.

Die Geschwindigkeit wird im Kontext der Bewegungsänderung betrachtet und der Begriff „Zusatzgeschwindigkeit“ $\Delta \vec{v}$ wird eingeführt. Nun können geometrisch die drei Geschwindigkeiten (Anfangs-, Zusatz- und Endgeschwindigkeit) konstruiert werden und z.B. die Endgeschwindigkeit durch Addition von Anfangs- und Zusatzgeschwindigkeit eruiert werden. Anschließend wird der Zusammenhang zwischen Zusatzgeschwindigkeit und Einwirkung erörtert. Hier werden die verschiedenen Abhängigkeiten der Einwirkung untersucht. Diese Zusammenhänge vereint die Newton'sche Bewegungsgleichung.

ad Schulbücher

Hier wurde ein kurzer Einblick in folgende Schulbücher im Bezug zum Vorgehen der Newton'schen Mechanik in Abschnitt 3.3 gewährt:

- „Physik verstehen 2“ [13]
- „Big Bang 2“ [14]
- „Impuls Physik 2“ [15]
- „Physik 2“ [16]

4 Zugang zum Vektorbegriff im Mathematikunterricht

Da die Vektorrechnung seit 1967 aus dem Mathematiklehrplänen nicht mehr wegzudenken ist, folgt hier nun der Zugang zu diesem Thema im Mathematikunterricht. Anfangs wird ein Auszug des aktuellen Lehrplans (siehe [2]) aus dem Jahr 2018 und aus dem (erweiterten) Grundkompetenzkatalog (siehe [17] und [18]) der Vektorrechnung für die Sekundarstufe II dargestellt. Anschließend werden die Grundvorstellungen zur Vektorrechnung betrachtet. Danach werden sich die in Österreich zugelassenen Schulbücher für den Mathematikunterricht der 9. Schulstufe mit den wichtigsten Definitionen und Merksätzen untersucht und verglichen. Abschließend werden die unterschiedlichen Methoden zur Einführung in die Vektorrechnung besprochen.

4.1 Lehrplanauszug [2]

Hier folgt nun ein Auszug aus dem Lehrplan der Sekundarstufe II für allgemeinbildende höhere Schulen im Fach Mathematik für den Bereich der Vektorrechnung [2, S.168-170]:

5. Klasse (9. Schulstufe); 1. und 2. Semester

Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^2$

- Vektoren addieren, subtrahieren, mit reellen Zahlen multiplizieren und diese Rechenoperationen geometrisch veranschaulichen können
- Einheitsvektoren und Normalvektoren ermitteln können
- Mit dem Skalarprodukt arbeiten können; den Winkel zwischen zwei Vektoren ermitteln können
- Geraden durch Parameterdarstellungen in $\mathbb{R}^2$ und durch Gleichungen (Normalvektordarstellungen) in beschreiben, Geraden schneiden und die gegenseitige Lage von Geraden ermitteln können
- Abstände ermitteln können (Punkt-Punkt, Punkt-Gerade)

[2, S.168]

6. Klasse (10. Schulstufe), 4. Semester: Kompetenzmodul 4

Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^3$; Vektoren in $\mathbb{R}^n$

- Die aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie bekannten Begriffe und Methoden auf den dreidimensionalen Fall übertragen können (insbesondere Geraden durch Parameterdarstellungen beschreiben können)
- Normalvektoren ermitteln können; Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen (Normalvektordarstellungen) beschreiben können
- Lineare Gleichungssysteme in drei Variablen lösen können
- Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und deren Rechenoperationen kennen, in Anwendungskontexten interpretieren und verständlich einsetzen können

[2, S.170]

4.2 Auszug aus dem Katalog von Grundkompetenzen [17]

Nun folgt ein Auszug des Katalogs der Grundkompetenzen für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik im Bereich Vektorrechnung bzw. lineare Algebra [17]:

Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (AG)

Bildungstheoretische Orientierung:

Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Zahlentupel (Vektoren) und die Festlegung von zweckmäßigen Regeln zur operativen Verknüpfung dieser neuen mathematischen Objekte führt zu einer wichtigen Verallgemeinerung des Zahl- bzw. Variablenbegriffs.

Durch die Einführung von Koordinaten ist es möglich, Punkte in der Ebene oder im Raum so zu verorten, dass geometrische Objekte algebraisch durch Vektoren beschrieben werden können, und sich so von rein geometrisch- anschaulichen Betrachtungsweisen (mit Winkel, Länge oder Volumen) zu lösen und geometrische Probleme mithilfe der Algebra zu behandeln.

Dieser Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie ermöglicht es aber nicht nur, geometrische Sachverhalte mit algebraischen Mitteln darzustellen (z. B. Vektoren als algebraische Darstellung von Pfeilen oder Punkten) und zu bearbeiten, sondern auch umgekehrt algebraische Sachverhalte geometrisch zu deuten (z.B. Zahlentripel als Punkte oder Pfeile im Raum) und daraus neue Einsichten zu gewinnen. Solche Deutungen algebraischer Objekte in der Geometrie wie auch Darstellungen geometrischer Objekte in der Algebra und ein flexibler Wechsel zwischen diesen Darstellungen bzw. Deutungen sind in verschiedensten Kommunikationssituationen – und somit bildungstheoretisch – von großer Bedeutung.

[17, S.3]

4.2.1 Auszug aus dem erweiterten Katalog von Grundkompetenzen [18]

Mit dem erweiterten Grundkompetenz-Katalog [18] werden die Grundkompetenzen für die standardisierte schriftliche Reifeprüfung (mit -M gekennzeichnet) um sogenannte Grundkompetenzen für den Lehrplan (mit -L gekennzeichnet) erweitert. Der erweiterte Grundkompetenz-Katalog im Bereich Vektorrechnung bzw. lineare Algebra lautet wie folgt:

AG 3: Vektoren und analytische Geometrie

AG-M 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können

AG-M 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können

AG-M 3.3 Definitionen der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können

AG-M 3.4 Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können

AG-M 3.5 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

„Anmerkungen:

Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.“

„Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$. Geraden sollen in Parameterform, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.“

AG-L 3.6 Die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts kennen und den Winkel zwischen zwei Vektoren ermitteln können

AG-L 3.7 Einheitsvektoren ermitteln, verständig einsetzen und interpretieren können

AG-L 3.8 Definition des Vektorprodukts und seine geometrische Bedeutung kennen

AG-L 3.9 Wissen, wodurch Ebenen festgelegt sind und Ebenengleichungen aufstellen können

AG-L 3.10 Lagebeziehungen und Abstände im Raum ermitteln können

[18, S.4]

4.3 Grundvorstellungen zur Vektorrechnung [19] [20]

Zuerst werden die Begriffe Aspekt und Grundvorstellung definiert.

„Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.“ [19, S.17]

Mehrere Aspekte gemeinsam bilden den fachlichen Kern eines Begriffs, also können sie einen mathematischen Begriff auf fachlicher Ebene definieren und charakterisieren. Das Konzept der Grundvorstellung eines Aspekts eines mathematischen Begriffs ist von fachdidaktischer Natur.

„Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.“ [19, S.17]

Mit Hilfe von Grundvorstellungen können mathematische Begriffe bzw. deren Aspekte erfasst und in einem sinnhaften Kontext mit einer Bedeutung versehen werden. Sie sind das tragfähige mentale Modell, welches für das Erlernen mathematischer Begriffe und Operationen unumgänglich ist.

Für den Bereich der Vektorrechnung sind folgende Grundvorstellungen (siehe [20, S.19-20]) validiert worden:

- GV 1: Ein Vektor (des $\mathbb{R}^n$) ist ein n -Tupel von reellen Zahlen.
- GV 2: Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind Verallgemeinerungen von reellen Zahlen („höherdimensionale Rechenzahlen“). Man kann mit ihnen nach bestimmten Regeln rechnen.
- GV 3: Bei einem Vektor aus $\mathbb{R}^n$ werden n reelle Zahlen zu einem neuen Denkobjekt zusammengefasst. Die Bezeichnung von Vektoren mit Buchstaben erlaubt übersichtliche Darstellungen.
- GV 4: Ein Vektor des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ kann als Punkt oder Pfeil in der Ebene bzw. Raum gedeutet werden (siehe Abbildung 16 und Abbildung 17). Jedem Vektor entsprechen unendlich viele Pfeile (die alle gleich lang, parallel und gleich orientiert sind). Umgekehrt entspricht jedem Pfeil genau ein Vektor.
- GV 5: Die Addition von Vektoren des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ kann auf zweifache Weise geometrisch gedeutet werden: Punkt-Pfeil-Addition (siehe Abbildung 21) oder Pfeil-Pfeil-Addition (siehe Abbildung 22).
- GV 6: Die Multiplikation eines Vektors des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ mit einer reellen Zahl kann geometrisch als Streckung eines Pfeils gedeutet werden.
- GV 7: Das Skalarprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^n$ ist eine Verallgemeinerung des Produkts in $\mathbb{R}$. Es ist genau dann gleich 0, wenn die zugehörigen Pfeile miteinander einen rechten Winkel einschließen.
- GV 8: Der Betrag eines Vektors des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist die Länge eines zugehörigen Pfeils.
- GV 9: Sei $X = P + t \cdot \vec{g}$. Durchläuft t alle reellen Zahlen, dann durchläuft X alle Punkte einer Geraden.
- GV 10: Eine Gleichung der Form $ax + by = c$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ stellt eine Gerade in der Ebene dar. Dabei ist (a, b) ein Normalvektor der Geraden.

[20, S.19-20]

Es ist nicht ausreichend nur eine Grundvorstellung zu einem Begriff zu erwerben. Um einen mathematischen Begriff voll erfassen zu können, müssen mehrere Grundvorstellungen aufgebaut werden. Wichtig ist zu wissen, dass Grundvorstellungen nicht als „Merkspruch“ verstanden werden können, sondern tatsächlich als mentales Konzept verinnerlicht werden müssen. Um einen mathematischen Begriff in seinen Facetten zu erfassen, müssen die Grundvorstellungen zu diesem Begriff durch die Beschäftigung mit diesen z.B. durch kognitive Aktivierungen aufgebaut werden.

4.4 Zugang zum Vektorbegriff in den Schulbüchern Mathematik verstehen 5 [21] und Lösungswege 5 [22]

Mathematik verstehen 5 [21]

VEKTOREN

VEKTOREN IM $\mathbb{R}^2$

Definition 4.4.1 1. Die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1|a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

2. Ein geordnetes Zahlenpaar $(a_1|a_2) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet man als Vektor in $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten a_1 und a_2 . [21, S.200]

Definition 4.4.2 (Gleichheit von Vektoren)

Für zwei Vektoren $(a_1|a_2)$ und $(b_1|b_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ gilt $(a_1|a_2) = (b_1|b_2) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$ [21, S.200]

RECHNEN MIT VEKTOREN

Definition 4.4.3 (Summe, Differenz und Vielfache von Vektoren in $\mathbb{R}^2$)

Es seien $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}$. Man setzt:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix},$$

$$A-B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix},$$

$$r \cdot A = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

[21, S.202]

Lösungswege 5 [22]

VEKTOREN

AUFSTELLEN VON VEKTOREN

Definition 4.4.4 Vektor

Ein Vektor ist ein n -Tupel von reellen Zahlen ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Die Menge aller n -Tupel wird $\mathbb{R}^n$ genannt: $\mathbb{R}^n = \{(a_1|a_2|a_3|\dots|a_n) | a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ [22, S.203]

RECHNEN MIT VEKTOREN

Definition 4.4.5 Rechenregeln für Vektoren

Seien $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) und k eine reelle Zahl (auch Skalar genannt),

dann gilt: $A+B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

$$A-B = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \dots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ \dots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Bei der Addition bzw. Subtraktion zweier Vektoren und der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (einer reellen Zahl) erhält man als Ergebnis wieder einen Vektor. [22, S.206]

Definition 4.4.6 Gegenvektor und Nullvektor

Den Vektor $-A = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ nennt man

Gegenvektor von A .

Addiert man einen Vektor mit seinem Gegenvektor, dann erhält man den Nullvektor. [22, S.207]

Merke

- „Vektoren werden addiert (subtrahiert), indem man die einander entsprechenden Koordinaten addiert (subtrahiert).“
- Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede Koordinate des Vektors mit der reellen Zahl multipliziert.

[21, S.203]

Definition 4.4.7 (1) Der Vektor $0 = (0|0)$ heißt Nullvektor in $\mathbb{R}^2$.

- (2) Ist $A = (a_1|a_2)$, dann heißt der Vektor $-A = (-a_1|-a_2)$ der Gegenvektor von A oder der inverse Vektor zu A .

[21, S.205]

Grundlegende Gesetze für Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Addition von Vektoren in $\mathbb{R}^2$:

Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ gilt:

- (1) $A+B=B+A$ (Kommutativgesetz der Addition)
- (2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (Assoziativgesetz der Addition)
- (3) $A+0=A$ (Gesetz vom neutralen Element)
- (4) $A+(-A)=0$ (Gesetz von den inversen Elementen)

[21, S.205]

Definition 4.4.8 Skalares Produkt zweier Vektoren

$$\text{Seien } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Dann nennt man $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$ das skalare Produkt dieser beiden Vektoren.

Das Ergebnis der Multiplikation zweier Vektoren ist eine reelle Zahl (Skalar).

[22, S.209]

GEOMETRISCHE INTERPRETATION VON VEKTOREN IM $\mathbb{R}^2$

Proposition 4.4.1 Darstellung von Vektoren

Ein Vektor kann als Punkt oder Pfeil dargestellt werden. Einem Vektor kann man genau einen Punkt oder unendlich viele, gleich lange, parallele Pfeile mit gleicher Orientierung zuordnen. Umgekehrt wird ein Punkt bzw. Pfeil durch genau einen Vektor beschrieben.

[22, S.213]

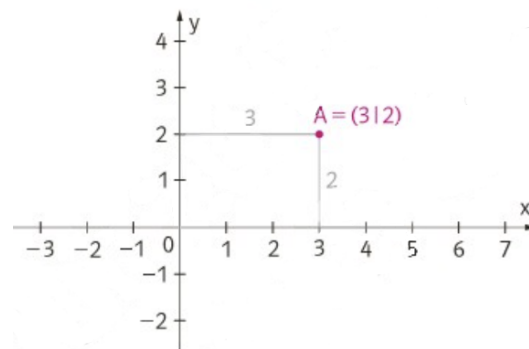


Abbildung 16: Darstellung als Punkt [22, S.212]

Multiplikation eines Vektors in $\mathbb{R}^2$ mit einer reellen Zahl:

Für alle $A, B \in \mathbb{R}^2$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
(Distributivgesetz 1)
- (2) $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$
(Distributivgesetz 2)
- (3) $(r \cdot s) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$
(Quasiassoziativgesetz)
- (4) $1 \cdot A = A$
(Gesetz vom neutralen Element)
[21, S.205]

SKALARPRODUKT VON VEKTOREN

Definition 4.4.9 Es seien $A, B \in \mathbb{R}^2$. Die reelle Zahl

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

heißt skalares Produkt bzw. Skalarprodukt der Vektoren A und B .

[21, S.206]

Rechengesetze für das Skalarprodukt:

Satz 4.4.1 Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt:

- (SP1) $A \cdot B = B \cdot A$ (Kommutativgesetz)
- (SP2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
(Distributivgesetz)
- (SP3) $(r \cdot A) \cdot B = r \cdot (A \cdot B)$
(Quasiassoziativgesetz)
[21, S.208]

Satz 4.4.2 Für alle $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- (2) $A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$
- (3) $(r \cdot A) \cdot B = A \cdot (r \cdot B) = r \cdot (A \cdot B)$
- (4) $(r \cdot A) \cdot (s \cdot B) = (r \cdot s) \cdot (A \cdot B)$
- (5) $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot (A \cdot B) + B^2$
- (6) $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot (A \cdot B) + B^2$
[21, S.208]

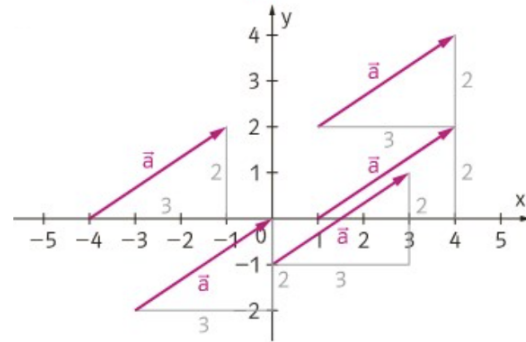


Abbildung 17: Darstellung als Pfeil [22, S.212]

Satz 4.4.3 Zeichnet man einen Pfeil von einem Punkt A zu einem Punkt B , dann nennt man den zu diesem Pfeil gehörigen Vektor $\vec{AB}$. [22, S.214]

Definition 4.4.10 Berechnen eines Vektors (Spitze-minus-Schaft-Regel)

Sind zwei Vektoren $P = (x_P | y_P)$, $Q = (x_Q | y_Q) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{QP} &= P - Q = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_P - x_Q \\ y_P - y_Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Spitze minus Schaft oder Endpunkt minus Anfangspunkt). Weiters gilt:

$$\vec{QP} = -\vec{PQ}. \quad [22, S.214]$$

Definition 4.4.11 Betrag eines Vektors

Unter dem Betrag eines Vektors (auch Länge eines Vektors) versteht man die Länge der dazugehörigen Pfeile. Diese Länge kann mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras berechnet werden. Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$, dann gilt für seinen Betrag/seine Länge ($|\vec{a}|$):

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} \quad [22, S.216]$$

GEOMETRISCHE DARSTELLUNG VON VEKTOREN UND DEREN RECHENOPERATIONEN

DARSTELLUNGEN VON VEKTOREN IN $\mathbb{R}^2$ ALS PUNKTE ODER PFEILE IN DER EBENE

Satz 4.4.4 Darstellung von Vektoren

- Jedem Vektor aus $\mathbb{R}^2$ entspricht genau ein Punkt der Ebene. Umgekehrt entspricht jedem Punkt der Ebene genau ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$.
- Jedem Vektor aus $\mathbb{R}^2$ entsprechen unendlich viele Pfeile der Ebene, die alle gleich lang und (vom Nullvektor abgesehen) auch Parallel und gleich gerichtet sind. Umgekehrt entspricht jedem Pfeil der Ebene genau ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$.
[21, S.215]

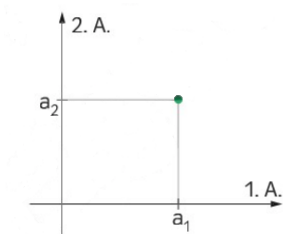


Abbildung 18: „Darstellung als Punkt.“ [21, S.214]

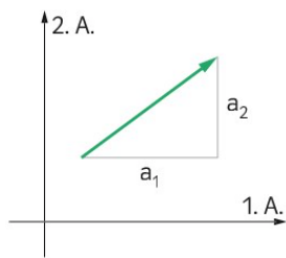


Abbildung 19: „Darstellung als Pfeil.“ [21, S.214]

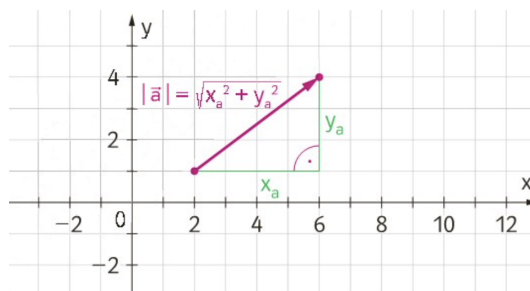


Abbildung 20: Darstellung des Betrages eines Vektors[22, S.216]

GEOMETRISCHE INTERPRETATION DER RECHENOPERATIONEN

„Die Rechnung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann auch geometrisch interpretiert werden.“[22, S.218]

Satz 4.4.5 Interpretation als Punkt-Pfeil Addition (Abbildung 21)

Bei der Punkt-Pfeil-Addition wird der erste Vektor als Punkt $A = (1 | -1)$ und der zweite Vektor als Pfeil $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ interpretiert, der vom Punkt A aus eingezeichnet wird. Das Ergebnis dieser Addition ergibt einen Punkt:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (4|1)$$

[22, S.218]

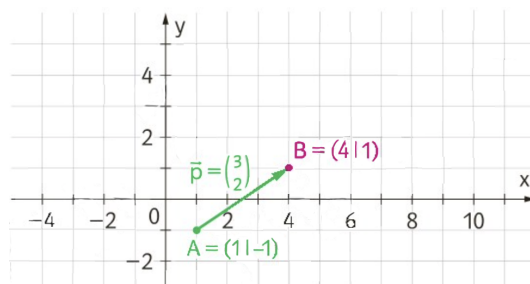


Abbildung 21: Punkt-Pfeil-Darstellung [22, S.218]

Definition 4.4.12 Bezeichnung von Vektoren

Vektoren bezeichnen wir entsprechend ihrer geometrischen Deutung:

- Wird ein Vektor als Punkt gedeutet, so bezeichnen wir ihn mit einem Großbuchstaben, zB $A, B, C, \dots$
- Wird ein Vektor als Pfeil gedeutet, so bezeichnen wir ihn mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$
[Lies: a Pfeil, b Pfeil, c Pfeil,...]

Insbesondere:

- Wird der Nullvektor $(0|0)$ als Punkt (Ursprung des Koordinatensystems gedeutet, bezeichnen wir ihn mit dem Buchstaben O .
- Wird der Nullvektor $(0|0)$ als Nullpfeil gedeutet, bezeichnen wir ihn mit $\vec{o}$ [lies: o(h) Pfeil].

Wird ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$ als Pfeil vom Punkt A zum Punkt B gedeutet, bezeichnen wir ihn auch mit $\overrightarrow{AB}$ [lies: AB Pfeil].
[21, S.215]

Definition 4.4.13 Berechnung eines Vektors aus Anfangs- und Endpunkt

„Für alle $A, B \in \mathbb{R}^2$ setzen wir: $\overrightarrow{AB} = B - A$ “ [21, S.217]

„**Merke:** „Vektor = Endpunkt minus Anfangspunkt“ [21, S.217]

Satz 4.4.6 „Für alle $A, B \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ “ [21, S.217]

Satz 4.4.7 Interpretation als Pfeil-Pfeil-Addition (Abbildung 22)

Bei der Pfeil-Pfeil-Addition werden beide Vektoren als Pfeile interpretiert. Das Ergebnis ist wieder ein Pfeil (vom Schaft des ersten Pfeils zur Spitze des zweiten Pfeils):

$$\vec{a} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [22, S.218]$$

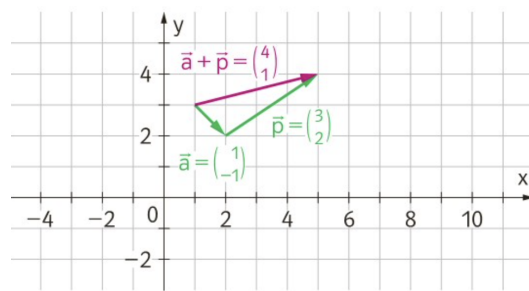


Abbildung 22: Pfeil-Pfeil-Darstellung [22, S.218]

Satz 4.4.8 Subtraktion als Addition des Gegenvektors (Abbildung 25)

Die Subtraktion kann als Addition mit dem Gegenvektor dargestellt werden:

$$\vec{a} - \vec{p} = \vec{a} + (-\vec{p})$$

$$\vec{a} + (-\vec{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

geometrisch:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad [22, S.218]$$

GEOMETRISCHE DARSTELLUNG DER ADDITION UND SUBTRAKTION VON VEKTOREN

Satz 4.4.9 Punkt-Pfeil-Darstellung der Vektoraddition (Abbildung 23)

Für alle $A, B \in \mathbb{R}^2$ gilt: $A + \overrightarrow{AB} = B$

Dies kann man so deuten:

Wird ein Vektor durch einen Punkt und ein zweiter Vektor durch einen an diesen Punkt angehängten Pfeil dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Endpunkt des angehängten Pfeils. [21, S.218]

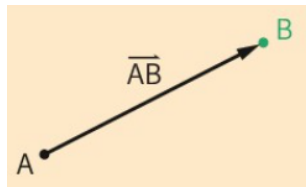


Abbildung 23: Punkt-Pfeil-Darstellung [21, S.218]

Satz 4.4.10 Pfeil-Darstellung der Vektoraddition (Abbildung 24)

Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Dies kann man so deuten:

Werden zwei Vektoren durch aneinandergehängte Pfeile dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Pfeil vom Anfangspunkt des ersten Pfeiles zum Endpunkt des zweiten Pfeiles. [21, S.218]

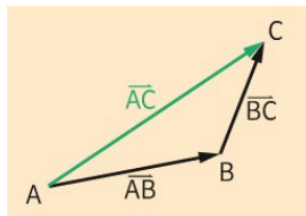


Abbildung 24: Pfeil-Darstellung [21, S.218]

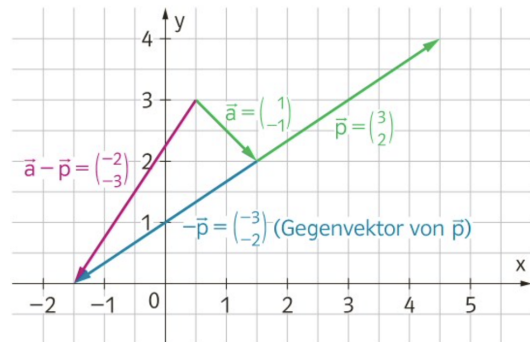


Abbildung 25: Pfeil-Pfeil-Darstellung [22, S.219]

Satz 4.4.11 Multiplizieren mit einem Skalar (Abbildung 26)

Multipliziert man einen Vektor mit einer reellen Zahl $r (\neq 0)$, dann werden die zum Vektor dazugehörigen Pfeile mit dem Faktor r gestreckt bzw. gestaucht.

Ist $|r| > 1$, dann werden die Pfeile gestreckt.

Ist $|r| < 1$, dann werden die Pfeile gestaucht.

Multipliziert man den Vektor mit einer negativen Zahl, dann ändert sich auch die Orientierung der zum Vektor gehörigen Pfeile. [22, S.221]

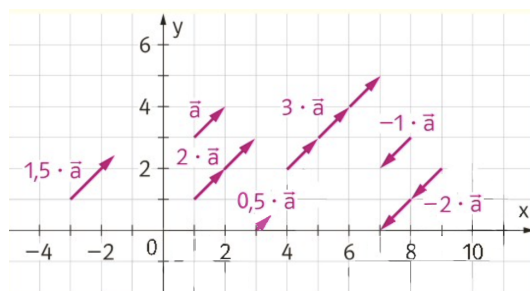


Abbildung 26: Darstellung von Multiplizieren mit einem Skalar [22, S.221]

Satz 4.4.12 Werden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch zwei Pfeile mit gleichem Anfangspunkt dargestellt, dann gilt:

Parallelogrammregel

Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ entspricht dem Diagonalpfeil des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms wie in Abbildung 27.

Differenzregel

Die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ entspricht dem Diagonalpfeil des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms wie in Abbildung 28. [21, S.221]

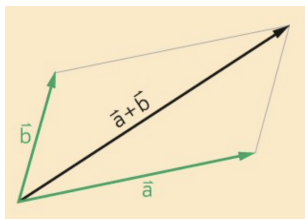


Abbildung 27: Parallelogrammregel [21, S.221]

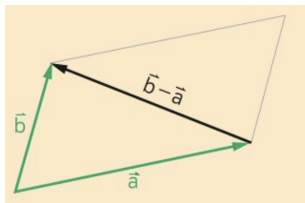


Abbildung 28: Differenzregel [21, S.221]

DARSTELLUNG DER MULTIPLIKATION EINES VEKTORS MIT EINER REELLEN ZAHL

Satz 4.4.13 Multiplikation mit einem Skalar (Abbildung 29)

Wird ein vom Nullvektor verschiedener Vektor aus $\mathbb{R}^2$ durch einen Pfeil dargestellt, dann entspricht der Multiplikation dieses Vektors mit einer reellen Zahl r eine Streckung des Pfeils mit dem Faktor r . [21, S.223]

Satz 4.4.14 Parallelitätskriterium

Zwei Vektoren nennt man parallel, wenn die zu den Vektoren gehörigen Pfeile parallel sind.

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist, d.h. wenn eine reelle Zahl $k \neq 0$ existiert mit:

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

[22, S.222]

WINKEL ZWISCHEN ZWEI VEKTOREN

Definition 4.4.14 Vektor-Winkel-Formel

Für den Winkel α zwischen zwei (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

[22, S.232]

Definition 4.4.15 Normale Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ stehen normal aufeinander, wenn die dazugehörigen Pfeile normal aufeinander stehen.

[22, S.234]

Satz 4.4.15

Orthogonalitätskriterium

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ stehen genau dann normal aufeinander, wenn ihr skalares Produkt null ergibt:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

[22, S.234]

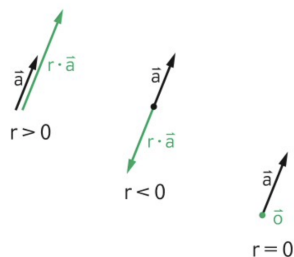


Abbildung 29: Multiplikation mit einem Skalar [21, S.223]

BETRAG EINES VEKTORS

Definition 4.4.16 Betrag eines Vektors

„Unter dem Betrag des Vektors $\vec{a} = (a_1|a_2) \in \mathbb{R}^2$ versteht man die reelle Zahl $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.“ [21, S.227]

Merke

„Dem Betrag eines Vektors entspricht geometrisch die Länge eines dem Vektor zugeordneten Pfeils.“ [21, S.227]

Satz 4.4.16 (Rechengesetz für den Betrag)

- (1) Für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt:
 $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$
- (2) Für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ gilt: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$
[21, S.227]

Merke

„Das Quadrat des Betrags eines Vektors ist gleich dem Quadrat des Vektors.“ [21, S.227]

Satz 4.4.17 Abstand zweier Punkte (Abbildung 30)

„Sind A und B zwei Punkte der Ebene, dann gilt: $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |B - A|$ “
[21, S.228]

FINDEN VON NORMALVEKTOREN

Definition 4.4.17 Ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben, dann gilt:

$\vec{n}_a^l = \begin{pmatrix} -y_a \\ x_a \end{pmatrix}$ (nach links gekippter Normalvektor von $\vec{a}$)

$\vec{n}_a^r = \begin{pmatrix} y_a \\ -x_a \end{pmatrix}$ (nach rechts gekippter Normalvektor von $\vec{a}$) [22, S.236]

In diesem Schulbuch folgt nun der Abschnitt „Geraden“ [22, S.244-265], um das gesamte Kapitel der Vektorrechnung in der 9. Schulstufe AHS abzuschließen, welche hier nicht mehr behandelt werden.

Hier folgen nun die letzten Abschnitte des Schulbuchs „Mathematik verstehen 5“ [21].



Abbildung 30: Abstand zweier Punkte [21, S.228]

PARALLELE UND NORMALE VEKTOREN

Definition 4.4.18 *Parallele Vektoren*

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^2$ nennen wir zueinander parallel, wenn die zugehörigen Pfeile parallel sind.

Wir schreiben kurz: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ [21, S.229]

Satz 4.4.18

(Parallelitätskriterium)

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^2$ sind genau dann zueinander parallel, wenn $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ mit $r \in \mathbb{R}$ gilt. [21, S.229]

Merke

„Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen ist.“ [21, S.229]

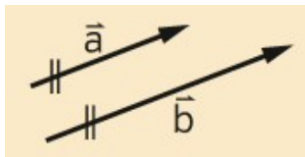


Abbildung 31: Zwei zueinander parallele Vektoren [21, S.229]

Definition 4.4.19 *Normale Vektoren (Abbildung 32)*

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^2$ nennen wir zueinander normal bzw. zueinander orthogonal, wenn die zugehörigen Pfeile zueinander normal sind.

Wir schreiben kurz: $\vec{a} \perp \vec{b}$ [21, S.230]

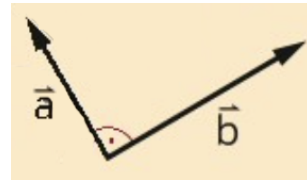


Abbildung 32: Normale Vektoren [21, S.230]

Satz 4.4.19 Den Übergang von $\vec{a} = (a_1 | a_2)$ zu

- $\vec{n}_1 = (-a_2 | a_1)$ entspricht einer Drehung des zu $\vec{a}$ gehörigen Pfeils um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn („Linkskippung“).
- $\vec{n}_2 = (a_2 | -a_1)$ entspricht einer Drehung des zu $\vec{a}$ gehörigen Pfeils um 90° im Uhrzeigersinn („Rechtskippung“).

[21, S.230]

Satz 4.4.20

Orthogonalitätskriterium

„Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann zueinander normal, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist.“ [21, S.231]

Satz 4.4.21 „Ist $(a_1 | a_2)$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$, dann sind $(-a_2 | a_1)$ und $(a_2 | -a_1)$ Normalvektoren dieses Vektors mit gleichem Betrag.“ [21, S.230]

In diesem Schulbuch folgen nun die Abschnitte „Geraden in $\mathbb{R}^2$ “ [21, S.238-257] und „Weitere Anwendungen von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ “ [21, S.258-269], um das gesamte Kapitel der Vektorrechnung in der 9. Schulstufe AHS abzuschließen, welche hier nicht behandelt werden.

4.5 Methoden der Einführung der Vektorrechnung in der AHS [3]

4.5.1 Einführung anhand der Vektorraumaxiome [3, S.89]

Besonders in den 1970er Jahren war es in der AHS üblich, den Vektorbegriff mithilfe der Vektorraumaxiome einzuführen. Dies ist mathematisch korrekt und elegant, aber in den Hochschulen und Universitäten üblich. Hier wurde nicht darauf geachtet, wie sich das Begriffsverständnis von Lernenden herausbildet. Es geschieht auf Wegen der Verallgemeinerung und Zusammenfassung von Beispielen und Spezialfällen. Einen Begriff mithilfe von Abstraktion herzuleiten, fordert ein bereits bestehendes Grundverständnis des Begriffs an sich, sowie das Operieren mit konkreten Vektormodellen. Auch wenn dieser Ansatz für den Schulunterricht aus didaktischer Sicht nicht geeignet ist, so gibt es doch einige Vorgehensweisen (z.B. der Strukturaufbau) und Parallelen, die auf die Hochschulmathematik (wie im Kapitel (6) beschrieben) verweisen.

4.5.2 Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile [3, S.88]

Bis in die Mitte der 2010er Jahre war es üblich die Einführung des Vektorbegriffs über das System der Pfeilklassen zu gestalten. Das Wort „Pfeilklassse“ wird oftmals nicht mehr verwendet, dafür wird am Konzept der Verschiebung festgehalten. So wurde der Begriff „Vektor“ auch wie folgt definiert:

„In der Geometrie meint man mit der Bezeichnung Vektor den Spezialfall einer Verschiebung; deshalb wird ein Vektor in der Geometrie durch eine Menge zueinander paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile beschreiben. (Lambacher Schweizer, 2009, S. 255)“ [3, S.88]

Hier treten mehrere Probleme gleichzeitig auf. Als erstes möchte ich ein sprachlich - inhaltliches Problem erwähnen. Hier wird der Begriff der Äquivalenzklasse benötigt, jedoch vermieden. Vektoren werden hier lediglich als einzelne Pfeile dargestellt. Dies wird dem Begriff eines Vektors nicht gerecht, da er viel mehr sein kann. Das Pfeilklassenkonzept weist auf ein grundsätzliches Problem hin. Die anschaulichen Vorstellungen können die Entwicklung eines intuitiven Begriffsverständnisses fördern und gleichzeitig den Blick auf das Wesen des Strukturbegriffes verstellen. Daher musste es zu einem Umschreiben des Pfeilklassenkonzepts kommen. Hierbei spielte Günther Malle eine sehr große Rolle.

4.5.3 Arithmetische Auffassung von Vektoren als n-Tupel [3, S.89]

Da das Pfeilklassenkonzept viele Schwierigkeiten birgt, plädieren u.a. Günther Törner und Günther Malle für einen primär arithmetisch-algebraischen Zugang zum Vektorbegriff. So führt beispielsweise Malle Vektoren als Zahlenpaare bzw. -tripel ein, welche für geometrische Anwendungen genutzt werden, also als Pfeile dargestellt werden. Einen solchen Ansatz verfolgen einige Schulbücher (u.a. „Mathematik verstehen“ [21] und „Lösungswege“ [22]). Hierbei wird der Vektor samt Rechenoperationen als Strukturelement eingeführt, aber danach geometrisch als Pfeil (oder Punkt) interpretiert und hauptsächlich in geometrischen Anwendungen betrachtet. Hierbei geht der Vektorbegriff in seiner arithmetischen Auffassung mit der Zeit zurück, wenn nicht im folgenden Unterricht immer wieder in entsprechenden Kontexten damit gearbeitet wird.

4.6 Rückblick

ad Lehrplan und Grundkompetenzen

Der Lehrplan ist die gesetzliche Rahmengestaltung des Unterrichts, an die sich zu halten ist. Die Themen, die hier aufgeführt sind, müssen im Unterricht besprochen werden. In wie weit die Ausführung gehen kann, ist nicht vorgeschrieben. Zusätzlich zu diesen Themen können Punkte oder Themengebiete (z.B. Matrizenrechnung) als Ergänzungscurriculum im Unterricht behandelt werden.

Im Lehrplan der fünften und sechsten Klasse im Bereich Vektoren werden die algebraischen und geometrischen Aspekte eines Vektors bezüglich Definition, Operationen, besondere Vektoren (Normalvektor, Einheitsvektor), Geraden, Ebenen und lineare Gleichungssysteme im zwei- bzw. dreidimensionalen Raum verlangt.

Der Katalog der Grundkompetenzen [17] bzw. der erweiterten Grundkompetenzen [18] ist ein fixer Bestandteil im Mathematikunterricht, welcher als Teilmenge der Schulmathematik identifizierbar ist. Kompetenzen sind auch ein Medium, welches abgeprüft werden kann, welches bei der standardisierten Diplom- und Reifeprüfung (SDRP) auch geschieht. Dies ist der Grund, warum es Grundkompetenzen nur für die SDRP und zusätzlich eine Erweiterung für den gesamten Lehrplan gibt. Wenn man die Grundkompetenzen zum Vektorbegriff und den dazugehörigen Lehrplan vergleicht, wird man feststellen, dass zu jedem Punkt bzw. Begriff im Lehrplan eine Grundkompetenz ausformuliert ist. Die Abstimmung von Lehrplan, Katalog der Grundkompetenzen und der Art der Aufgabenstellung der SDRP ist gewollt und von einem Team aus Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern ausgearbeitet worden.

ad Schulbücher

Mathematik verstehen 5: Vektoren werden im Schulbuch „Mathematik verstehen 5“ als Zahlenpaar definiert. Die Operationen werden in Anlehnung an die axiomatische Vorgehensweise dargestellt und zuletzt in den $\mathbb{R}^n$ übergeführt. Bei der anschließenden geometrischen Interpretation im $\mathbb{R}^2$ werden Vektoren sowohl als Punkte als auch Pfeile diskutiert. Die Punkt- und Pfeil-Interpretation wird zur Darstellung der Vektoraddition, -subtraktion und der Multiplikation mit einem Skalar verwendet. Dabei werden die zugehörigen Regeln (z.B. Differenzregel) angeführt.

Lösungswege: Das Schulbuch „Lösungswege 5“ definiert den Vektor als n-Tupel und führt auch die Rechenregeln für den $\mathbb{R}^n$ ein. Bei der geometrischen Interpretation von Vektoren wird nun in den $\mathbb{R}^2$ übergegangen. Die Darstellung eines Vektors sowohl als Punkt als auch als Pfeil wird besprochen. Bei der Interpretation als Pfeil wird der Betrag als Länge des Pfeils verstanden. Sowohl die Interpretation als Punkt als auch als Pfeil wird einzeln und in Kombination zur geometrischen Darstellung der Addition, Subtraktion und Multiplikation genutzt.

5 Bezug zum Vektorbegriff im Physik- und Mathematikunterricht [4] [3, S.87-145]

Das „Münchner Konzept der Mechanik“ [1] liefert bereits in der Sekundarstufe I einen rudimentären Zugang zum Vektorbegriff. Es verwendet einen geometrischen, rein phänomenologischen Ansatz zur Erklärung der Newton'schen Mechanik. Das heißt, es basiert auf der Methode der geometrischen Einführung in die Vektorrechnung, also dem Pfeilklassenmodell. Im Gegensatz dazu wird heutzutage im Mathematikunterricht, basierend auf den Schulbüchern „Mathematik verstehen 5“ [21] und „Lösungswege 5“ [22], die Methode der algebraischen Vektoren mit geometrischer Deutung verwendet, um die Vektorrechnung einzuführen.

Da im Schulunterricht verschiedene Ansätze praktiziert werden, werden diese nun genauer betrachtet.

5.1 Vektorkonzepte

5.1.1 Das Pfeilklassenmodell

Pfeilklassen nennt man das Modell mit welchem man Vektoren auf geometrischer Basis mathematisch einführen kann. Dieses Modell ist mit der letzten Lehrplanumstellung (2018) aus dem Mathematikunterricht entfernt worden. Vektoren entsprechen in dem Modell, wie der Name sagt, Pfeilklassen. Eine Pfeilklassse besteht aus allen (unendlich-vielen) gleich langen und gleich orientierten Pfeilen. Jeder dieser Pfeile ist ein Repräsentant dieser Pfeilklassse. Auch die Rechenoperationen werden mithilfe dieser Repräsentanten eingeführt (siehe Abbildung 33). Man kann beweisen, dass die Pfeilklassen des zwei- bzw. dreidimensionalen Raums einen reellen Vektorraum bilden, jedoch sind die Rechengesetze über geometrische (teils aufwendige) Überlegungen mithilfe dieser Repräsentanten zu zeigen.

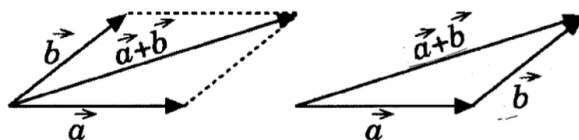


Abbildung 33: Addition im Pfeilklassenmodell mithilfe von Repräsentanten [4, S.2]

Wichtig ist beim Pfeilklassenmodell, die Klarstellung, dass Vektoren nicht ausschließlich Pfeilklassen sind. Man kann hierbei Formulierungen verwenden, wie „In der Geometrie meint man mit der Bezeichnung Vektor eine Pfeilklassse“. Im Allgemeinen ist der Begriff des Vektors viel größer zu fassen und hat andere Deutungen, die auch nicht geometrisch sind.

Didaktische Schwierigkeiten mit Vektoren im Pfeilklassenmodell

Schülerinnen und Schüler arbeiten schon sehr lange mit Punkten, ohne dass sie Vektoren kennengelernt haben. Daher wird bei der Einführung mithilfe des Pfeilklassenmodells auch auf Punkte zurückgegriffen. In der Geometrie werden daher, wie zum Beispiel in Abbildung 21, Pfeile an Punkte angetragen bzw. Pfeile zu Punkten addiert. Diese Art der Addition basiert nicht auf der üblichen Definition der Addition mit dem Pfeilklassenmodell (siehe Definition 5.3.2).

Bei der Pfeil-Pfeil-Addition (siehe Abbildung 24) wird eine Kette zweier Vektoren einem Vektor zugeordnet und bei der Punkt-Pfeil-Addition entsteht durch Antragen eines Pfeils an einen Punkt ein anderer Punkt. Um Missverständnisse bezüglich der Darstellungen von Vektoren zu vermeiden, sollte jedoch

1. „der Unterschied zwischen der Vektoraddition und der „Punkt-Vektor-Addition“ klar herausgearbeitet werden.“[3, S.106]
2. „auf die geometrische Interpretation Wert gelegt werden: $A + \vec{u} = B$ bedeutet, dass B das Bild des Punktes A bei der Verschiebung um den Vektor $\vec{u}$ bzw. die „Pfeilspitze“ eines an den Punkt A angetragenen, den Vektor $\vec{u}$ repräsentierenden Pfeils mit dem Anfangspunkt A ist.“[3, S.106]

Das Pfeilklassenmodell ist rein mathematisch betrachtet vollkommen korrekt, jedoch aus didaktischer Sicht für den Unterricht wegen den folgenden Punkten ungeeignet:

1. Das Pfeilklassenmodell ist für die analytische Geometrie nicht geeignet, da hier mit Punkten und Pfeilen und nicht mit Pfeilklassen gearbeitet wird.
Beispiel: Bei einem Parallelogramm ABCD sind die Eckpunkte A, C und D. Ermittle die Koordinaten vom Eckpunkt B.
2. Das Pfeilklassenmodell ist nicht für die Physik geeignet. Fast alle in der (Schul-)Physik vorkommenden Vektoren sind keine Pfeilklassen.
Beispiel: Es macht einen großen Unterschied in der Physik wo eine Kraft greift, also an welchem Punkt der Kraftvektor ansetzt.
3. Die für das Pfeilklassensystem zufällige Eigenschaft der Unterscheidung zwischen Klassen und Repräsentanten erweckt bei einigen Schülerinnen und Schülern den Eindruck der Notwendigkeit dieser Eigenschaft für den Vektorbegriff. Dabei ergibt diese Unterscheidung bei fast allen Vektoren keinen Sinn und ist in der Definition eines Vektorraums nicht vorhanden.
4. Die Einführung und die Beweise der Rechengesetze sind algebraisch für Zahlenpaare bzw. -tripel leicht durchführbar. Im Gegensatz dazu ist dies auf geometrische Weise nicht der Fall. Im Pfeilklassenmodell ist das sehr aufwendig und auf Schulniveau nicht akkurat durchführbar.
5. Die oft auftretenden Widersprüchlichkeiten im Pfeilklassenmodell, welche durch häufige „Verwässerung“ verursacht sind, bereiten Schülerinnen und Schülern enorme Schwierigkeiten. Besonders die Diskrepanz, dass Vektoren als Pfeilklassen eingeführt und definiert werden, jedoch im weiteren Verlauf des Unterrichts wie Einzelpfeile behandelt werden, führt zu Verständnisproblemen.

Aufgrund dieser Missverständnisse wurde das Pfeilklassenmodell aus den Mathematikschulbüchern entfernt und mit der Methode der algebraischen Vektoren mit geometrischer Deutung ersetzt.

5.1.2 Algebraische Vektoren mit geometrischer Deutung

Die Methode der Einführung des Vektorbegriffs mithilfe algebraischer Vektoren mit geometrischer Deutung findet seit Mitte bis Ende der 2010er Jahren statt. In den aktuellen Schulbüchern für die fünfte Klasse Oberstufe AHS wird der Vektorbegriff mit dieser Methode eingeführt (siehe Abschnitt 4.4). Im Gegensatz zum Pfeilklassenmodell sind Vektoren algebraische Objekte, nämlich Zahlentupel, in der Schulmathematik somit Zahlenpaare oder -tripel. Hierbei wird die Ebene mit einem fixen Koordinatensystem verstanden. Ein Zahlenpaar (analog für Zahlentripel) kann geometrisch gesehen als Punkt oder Pfeil in der Ebene interpretiert werden. Daher rührt die Definition 4.4.1, die besagt:

- Jedem Zahlenpaar (Vektor) entspricht genau ein Punkt in der Ebene und jeder Punkt entspricht genau einem Zahlenpaar (Vektor). (Bijektivität)
- Jedem Zahlenpaar (Vektor) entsprechen unendlich viele Pfeile in der Ebene und jeder Pfeil entspricht genau einem Zahlenpaar (Vektor). (Surjektivität)

Die geometrische Deutung wird auf die Bezeichnung der Vektoren übertragen, damit im späteren Verlauf direkt der Kontext dieser herauslesbar ist. Die Symbole dafür sind Großbuchstaben für Punkte und Kleinbuchstaben mit einem Pfeil darüber für Pfeile. So wird z.B. ein Vektor, der von Punkt A nach Punkt B zeigt, als $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet. Die Rechenoperationen werden in diesem Modell algebraisch definiert und geometrisch gedeutet. Bei der geometrischen Deutung der Addition wird dabei auf Grundvorstellungen der Addition mit reellen Zahlen auf der Zahlengeraden, wie in Abbildung 34 dargestellt, zurückgegriffen.

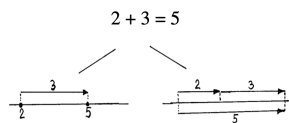


Abbildung 34: Addition reeller Zahlen im Eindimensionalen [4, S.7]

Das hier beschriebene Konzept behandelt Vektoren als algebraische Objekte (Zahlentupel). Da jedoch der Vektorbegriff und seine Rechenoperationen hauptsächlich in der Geometrie Anwendung finden, wird dieser nach und nach zu einem geometrischen Objekt verwandelt. Die Schülerinnen und Schüler identifizieren einen Vektor mit dem zugehörigen Punkt, anstelle des Punktes, der dem Vektor zugeordnet ist. Sie ordnen dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ den Pfeil von A nach B zu, anstatt diesem Pfeil den Vektor zuzuordnen. Diese Zuordnungen sind nicht falsch, sie sind sogar erwünscht, da es das Sprechen erleichtert. Dabei geht der algebraische Charakter eines Vektors in einen geometrischen Charakter über. Dies ist von Vorteil für den Unterricht. Da hier keinerlei Rechenoperationen für geometrische Objekte eingeführt werden, wird die Geometrie nicht in einem eigenen Vektorraum eingeführt, sondern die Objekte nur als eine Art anschauliche geometrische Deutung von algebraischen Sachverhalten gesehen. Die Einschränkungen dieses Konzepts sind für der Schule völlig ausreichend. Es ist auch „aufwärts-kompatibel“.

5.2 Vektoren in geometrischen und physikalischen Kontexten [3]

5.2.1 Geschwindigkeiten und Kräfte - Das Münchner Konzept der Mechanik

Wie im Kapitel 3.3 dargelegt, sollten Schülerinnen und Schüler bereits seit dem Physikunterricht der Sekundarstufe I mit gerichteten bzw. vektoriellen Größen wie z.B. Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft vertraut sein. Diese Größen werden in den aktuellen Schulbüchern für die Sekundarstufe I durch eine Maßzahl (z.B. Tempo) und deren Maßeinheit (z.B. $\frac{km}{h}$) bestimmt. Zusätzlich sind jedoch die Richtung (z.B. Bewegungsrichtung) bzw. der Richtungssinn von großer Bedeutung. Diese zusätzliche, für den vektoriellen Charakter dieser Größen wichtige Eigenschaft wird lediglich im „Münchner Konzept der Mechanik“ (siehe Abschnitt 3.4) eingeführt.

Addition von Vektoren

Im „Münchner Konzept der Mechanik“ wird die Addition von Kräften durch phänomenologisch erklärte Beispiele eingeführt. Ein solches Beispiel wird nun betrachtet. Wenn ein Öltanker geschleppt wird, so geschieht dies normalerweise mit mindestens zwei Schiffen. Für dieses Szenario werden nun die wirkenden Kräfte analysiert. Wie in Abbildung 35 zusehen ist, hängt die resultierende Kraft $\vec{F}$ von den Richtungen (und den Beträgen) der Teilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ab. So kann die resultierende Kraft $\vec{F}$ geometrisch auf zwei Arten ermittelt werden: Durch die Pfeil-Pfeil-Darstellung, wie es in der Abbildung 35 (unterhalb des Schiffs) und der geometrischen Deutung der Addition (siehe Satz 4.4.10) der Fall ist; und durch das Kräfteparallelogramm, wie es in der Abbildung 35 (am Bug des Schiffs) und in Satz 4.4.12 der Fall ist. Im „Münchner Konzept der Mechanik“ wird für die Addition von vektoriellen Größen die Pfeil-Pfeil-Darstellung, wie in Abbildung 9, verwendet.

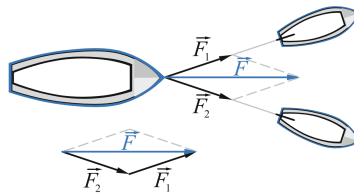


Abbildung 35: Addition von an einem Boot greifenden Kräften [3, S.92]

Mithilfe der Ausführungsschritte für die Konstruktion der Endgeschwindigkeit kann diese auch auf die geometrische Anfertigung der Zusatzgeschwindigkeit umgelegt werden. So gelangt man rein phänomenologisch von der Vektoraddition auf die Vektorsubtraktion. Dabei können unterschiedliche Szenarien für die Addition (bzw. Subtraktion) zweier Vektoren mit (un-)gleichen Beträgen und (un-)gleichen und sogar entgegengesetzten Richtungen angesprochen werden.

Das „Münchner Konzept der Mechanik“ verwendet statt dem Wort „Vektor“ das Wort „Pfeil“. Dieser Pfeil hat eine bestimmte Länge und eine bestimmte Richtung. Um klarzustellen, dass Geschwindigkeiten und Kräfte im Allgemeinen an verschiedenen Punkten angreifen können, wird das Prinzip der Verschiebung verwendet, welches typisch für das Pfeilklassenmodell ist. Damit physikalische Gesetze ubiquitär gelten, ist es jedoch entscheidend, dass die Vektoren bzgl. eines Objektes stets den selben Anfangspunkt besitzen müssen. D.h. dass der Pfeil immer an einem bestimmten Punkt am Objekt fixiert ist und sich in Bewegungsrichtung des Objektes zeitlich mit verschiebt. Es wird einen starren Körper, der um einen Punkt drehbar ist betrachtet (siehe Abbildung 36).

Werden nun die Kraftvektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ so parallelverschoben, dass sie an dem Drehpunkt (in der Mitte) greifen, so heben sich die beiden Kräfte dort auf und der Körper steht still. Die Kraftpfeile an einem Körper dürfen nicht ändern. Lediglich die Position des Objektes kann so modifiziert werden, dass mit den Kraftvektoren besser hantiert bzw. gerechnet werden kann. Es kann jedoch das Koordinatensystem um den Körper, aber nicht die Vektoren selbst, verschoben werden. Um dies zu bewerkstelligen, müsste das Transformationsverhalten von Vektoren untersucht werden, was über das Ziel der Schulphysik hinausschießt.

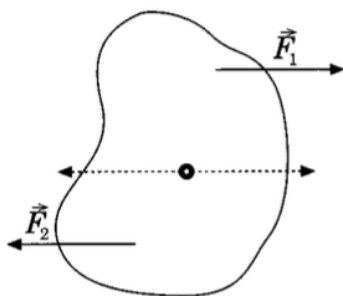


Abbildung 36: Vektoren dürfen nicht beliebig verschoben werden [4, S.82]

5.3 Beziehungen zwischen dem algebraischen und dem Pfeilklassenmodell

Definition 5.3.1 Als Pfeilkasse bezeichnet man eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation „parallelgleich“, d.h., eine Pfeilkasse $\vec{u}$ ist die Menge aller zu dem Pfeil $\vec{u}$ parallelgleichen Pfeile der Ebene bzw. des Raumes:

$$\vec{u} = \{\vec{x} | \vec{x} \text{ ist parallelgleich zu } \vec{u}\}$$

Jeder Pfeil $\vec{x} \in \vec{u}$ heißt Repräsentant der Pfeilkasse $\vec{u}$. [3, S.95]

Das bedeutet, dass jeder Pfeil einer Pfeilkasse angehört, jedoch jede Pfeilkasse unendlich viele Pfeile enthält.

Definition 5.3.2 Pfeilkasse - Summe Es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Pfeilklassen sowie $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ und $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$ Repräsentanten dieser Pfeilklassen (welche so gewählt sind, dass der Anfangspunkt des Repräsentanten von $\vec{v}$ gleich dem Endpunkt des Repräsentanten von $\vec{u}$ ist). Als Summe der Pfeilklassen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wird die Pfeilkasse bezeichnet, welche den Pfeil $\overrightarrow{AC}$ als einen Repräsentanten besitzt:

$$\vec{u} + \vec{v} = \{\vec{x} | \vec{x} \text{ ist parallelgleich zu } \overrightarrow{AC}\}$$

[3, S.96]

Die Addition wurde soeben mit Äquivalenzklassen anhand von Repräsentanten definiert. Ist dies bei einer Operation der Fall, so muss abgesichert werden, dass solche Definitionen repräsentantenunabhängig sind. Hier kann die Addition der Bruchrechnung aufgegriffen werden. Die beiden gebrochenen Zahlen $\frac{1}{3}$ und $\frac{3}{4}$ können mithilfe verschiedener Repräsentanten addiert werden, z.B. $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$ und $\frac{3}{9} + \frac{12}{16} = \frac{156}{144}$. Beide Ergebnisse (Brüche) sind äquivalent, sie repräsentieren dieselbe gebrochene Zahl. Da dies für beliebige Repräsentanten von beliebigen gebrochenen Zahlen zutrifft, ist die Addition der gebrochenen Zahlen repräsentantenunabhängig.

Satz 5.3.1 *Die Definition 5.3.2 der Summe von Pfeilklassen ist repräsentantenunabhängig, d.h.: Sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{PQ}$ Repräsentanten einer Pfeilklassse $\vec{u}$ sowie $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{QR}$ Repräsentanten einer Pfeilklassse $\vec{v}$, so sind $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{PR}$ Repräsentanten ein und derselben Pfeilklassse.* [3, S.97]

Dies ist in Abbildung 37 veranschaulicht. Dieser Satz bildet eine zentrale Grundlage für den Vektorbegriff, da in der vektoriellen analytischen Geometrie oft mit Repräsentanten gearbeitet wird. Die Aussage dieses Satzes ist überaus essentiell, dass die Repräsentantenunabhängigkeit in der Schule thematisiert und beispielsweise mit Abbildung 37 veranschaulicht darzustellen ist.

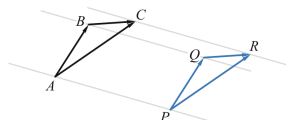


Abbildung 37: Repräsentantenunabhängigkeit der Summe von Pfeilklassen [3, S.97]

Definition 5.3.3 Pfeilklassse - skalare Multiplikation *Es seien $\vec{u}$ eine Pfeilklassse der Ebene oder des Raumes mit einem Repräsentanten $\overrightarrow{AB}$ sowie λ eine reelle Zahl. Als Produkt $\lambda\vec{u}$ der Pfeilklassse $\vec{u}$ mit der Zahl λ bezeichnet man die Pfeilklassse, die durch den Pfeil $\overrightarrow{AC}$ mit folgenden Eigenschaften repräsentiert wird:*

- $|AC| = |\lambda| \cdot |AB|$
- Falls $\lambda > 0$ ist, so gehört C dem Strahl AB und $\lambda < 0$ dem zu AB entgegengesetzten Strahl (mit demselben Anfangspunkt A) an.

[3, S.98]

Definition 5.3.4 Algebraische Operationen

Es seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ n -Tupel und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Als Summe der n -Tupel $\vec{x}$ und $\vec{y}$ bezeichnet man das n -Tupel, welches durch Addition der einander entsprechenden Komponenten von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ entsteht:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

- Als Produkt des n -Tupels $\vec{x}$ mit der reellen Zahl λ wird das n -Tupel bezeichnet, das durch Multiplikation jeder Komponente von $\vec{x}$ und λ entsteht.“

$$\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

[3, S.112]

Gemeinsamkeiten in den Rechengesetzen der unterschiedlichen Modelle

Die obigen Definitionen der Rechenoperationen lassen sich entweder geometrisch (für das Pfeilklassenmodell) oder algebraisch ausführen. Jede dieser Operationen ist für Schülerinnen und Schüler gut zugänglich. Jedoch ist die Vorstellung, dass die Wesensmerkmale eines Vektors bereits über diese Operationen bestimmt werden abstrakt. Da keine Bezugnahme mehr auf die konkreten Modelle erforderlich ist, wird diese Entwicklungsstufe des strukturellen und mathematisch formalen Begriffsverständnisses in der Schule im Allgemeinen nicht erreicht.

Es sei ein Koordinatensystem in der Ebene bzw. dem Raum gegeben, dann lässt sich jede Pfeilklassse $\vec{p}$ eindeutig einem Zahlenpaar bzw. -tripel wie folgt zuordnen:

Sei $\overrightarrow{AB}$ ein beliebiger Repräsentant der Pfeilklassse $\vec{p}$, so wird $\vec{p}$ dem Zahlenpaar bzw. -tripel zugeordnet, welches der Koordinatendifferenz der beiden Punkte A und B entspricht.

$$\vec{p} \rightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{p} \rightarrow \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Für einzelne Punkte P wird als Repräsentant der Pfeil mit dem Anfangspunkt im Koordinatenursprung (Nullvektor) verwendet und die Zuordnung lautet:

$$\vec{p} \rightarrow \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{p} \rightarrow \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$

So kann auch umgekehrt jedes Zahlenpaar bzw. -tripel in einem gegebenen Koordinatensystem eindeutig einer Pfeilklassse der Ebene bzw. des Raums zugeordnet werden. Hierfür

wird das Zahlenpaar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. Zahlentripel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (mit $x, y, z \in \mathbb{R}$) als Punkt in der

Ebene bzw. Raum gesehen, welches dem Pfeil mit dem Anfangspunkt des Koordinatenursprungs und dem Endpunkt des Zahlenpaars bzw. -tripels zugeordnet wird. Um zwischen Pfeilklassen und n -Tupeln eine strukturelle Übereinstimmung zu erzielen, reicht die eindeutige Zuordnung aus. Es müssen die Rechenoperationen beider Modelle zum selben Ergebnis führen. Dies ist in beiden Schulbüchern (Abschnitt 4.4) zu sehen.

5.3.1 Resümee

Da sowohl im Lehrplan ([2]) als auch in den Schulbüchern ([21] und [22]) direkt vor dem Kapitel Vektoren (nicht-)lineare Funktionen und anschließend lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen erarbeitet werden, ist es sinnvoll die Vektorrechnung in Zusammenhang mit n -Tupel einzuführen. Nach der Einführung als n -Tupel wird der Vektorbegriff geometrisch gedeutet und es wird in die analytische Geometrie übergeleitet. Dies führt zu einer freieren Bedeutung des Vektorbegriffs. Die Vektoren als n -Tupel lassen sich auf unterschiedliche Weise geometrisch interpretieren und umgekehrt lassen sich beispielsweise Punkte oder Pfeile arithmetisch erfassen, wobei der Begriff des Vektors dabei an das n -Tupel gebunden bleibt. Dieses Konzept ermöglicht eine leichte Übertragung vom $\mathbb{R}^2$ über den $\mathbb{R}^3$ bis hin zum $\mathbb{R}^n$, sowohl im arithmetischen wie auch im geometrischen Sinn. So kann das Konzept der n -Tupel als Bindeglied zwischen der Geometrie und der angewandten linearen Algebra fungieren.

Interessant sind hierbei die Ergebnisse empirischer Untersuchungen von Gerald Wittmann, aus denen hervorgeht, dass die Einführungsmethode die Vorstellungen und individuellen Konzepte von Schülerinnen und Schülern sehr wenig beeinflusst, dafür sind die Kontexte, mit welchen in Bezug auf Vektoren gearbeitet wird ausschlaggebend. (vgl. [3])

Das „Münchener Konzept der Mechanik“ (Abschnitt 3.3) arbeitet rein geometrisch und nutzt somit die Einführungsmethode des Pfeilklassenmodells. Diese Methode eignet sich in der Sekundarstufe I, da Schülerinnen und Schüler erst nach der Erarbeitung des „Münchener Konzepts der Mechanik“ im Unterrichtsfach Mathematik erstmals Koordinatensysteme kennen lernen. Häufig wird mathematisches Vorwissen im Physikunterricht benötigt, um Sachverhalte besser verstehen zu können, welche jedoch im Mathematikunterricht erst später behandelt werden. So ist das auch hier der Fall. Daher wird rein graphisch und mit vielen Experimenten der Vektorbegriff im Kontext der Geschwindigkeit und Kraft behandelt. Der Vektor wird als eine Größe (z.B. Geschwindigkeit) mit Länge (Betrag) und Richtung definiert.

Hier wird der Vektorbegriff im Kontext eines beobachtbaren Phänomens als etwas Reales, Sichtbares und Anschauliches eingeführt. Die Einführung von Vektoren als geometrische Größe birgt als sehr große Schwierigkeit, dass kein Vorwissen über Koordinatensysteme bei den Schülerinnen und Schülern vorhanden ist. Um das Pfeilklassenmodell an die Sekundarstufe I anzupassen, werden unter anderem Vektoren als Pfeile bezeichnet und von der Konstruktion der End- oder Zusatzgeschwindigkeit und nicht von Pfeil-Addition (oder Vektor-Addition) gesprochen.

Um Schülerinnen und Schülern einen adäquaten Einblick in die Tragweite und die Bedeutung des Vektorbegriffs darzustellen, ist weder das arithmetische noch das geometrische Vektormodell alleine ausreichend. Um ein umfassendes Begriffsverständnis zu gewinnen, ist es notwendig vielfältige Beispiele in den unterschiedlichsten Kontexten zu bearbeiten und deren Gemeinsamkeiten zu erkennen und auszuarbeiten.

6 Zugang zum Vektorbegriff im Mathematikstudium

In diesem Abschnitt arbeite ich mich über reelle Vektorräume hin zur Definition des Vektorraums und betrachte die Begriffe „Basis“ und „Dimension“ aus der linearen Algebra. Hierfür verwende ich die Bücher „Einführung in das mathematische Arbeiten“[5] und „Lineare Algebra - Eine Einführung für Studienanfänger“[6].

Die Voraussetzungen für dieses Thema bilden einerseits die grundlegende Algebra mit den Strukturelementen wie Gruppen, Ringe und Körper und andererseits die Zahlenmengen, insbesondere die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

6.1 Analytische Geometrie [5]

In diesem Abschnitt wird genauer auf die reellen Räume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$ eingegangen, um einen Schritt in die „reale Welt“ und deren mathematischen Probleme zu gehen. Der Zugang zum Vektorbegriff ohne den geometrischen Objekte wie Strecke, Gerade und Ebene besprochen.

Geschichtliche Anekdote [5, S.361-362]

Schon den Ägyptern und Sumerern war bekannt, dass Probleme der Wirklichkeit mit mathematischen Methoden gelöst werden kann. Beispiele dafür sind die Architektur, Verwaltungsangelegenheiten oder die Zeitmessung. Mit Pythagoras (ca. 570-509 v.Chr.) begann man die Mathematik als Wissenschaft der Untersuchung abstrakter Denkoobjekte zu begreifen, wobei Eudoxos (ca. 408-355 v.Chr.) Untersuchungen geometrischer Beziehungen als Proportionslehre begründete. Euklid (ca. 325-265 v.Chr.) und Archimedes (ca. 287-212 v.Chr.) schärften den Umgang mit Geometrie und wendeten sie auf Naturphänomene an. Erst Ende des 15. Jahrhunderts begann man in Europa mithilfe der Übersetzungen von archimedischen Schriften und Euklids „Elemente“ die mathematischen Methoden zur Beschreibung der Welt und ihrer Phänomene, besonders in der Physik, zu verwenden. Angeführt von Galileo Galilei (1564-1642) wurden die Ideen von Aristoteles durch eine neue quantitative Physik ersetzt. Grundlage für diese beschreibende Physik bildeten die Methoden von René Descartes (1596-1650). Er führte unter anderem das rechtwinkelige Koordinatensystem ein.

6.1.1 Der Raum - $\mathbb{R}^3$ [5, S.407-453]

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Operatoren und deren Eigenschaften im Dreidimensionalen besprochen. Die für den Vektorbegriff wichtigsten Definitionen und Sätze werden angeführt, um auf den Kern des Vektorbegriffs zu kommen.

Definition 6.1.1 (Mathematischer Raum) *Der mathematische oder dreidimensionale Raum, auch Anschauungsraum, ist die Menge $\mathbb{R}^3$ aller reellen Zahlentripel. Wir nennen ein Element $A = (A_1, A_2, A_3)$ des Raumes Punkt und (A_1, A_2, A_3) seine (kartesischen) Koordinaten. Der Punkt $O = (0, 0, 0)$ heißt der Ursprung.* [5, S.407]

Der Unterschied zwischen Ebene und Raum ist lediglich die dritte Komponente (Koordinate). Somit wird der zweidimensionalen Raum - die Ebene nicht und der Raum hier nur im Schnelldurchlauf durchgenommen wird.

Definition 6.1.2 (Operationen im $\mathbb{R}^3$) Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Addition in $\mathbb{R}^3$ und die Multiplikation mit einem Skalar komponentenweise durch

$$\begin{aligned}x + y &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ \lambda x &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).\end{aligned}$$

Wiederum schreiben wir $-x$ für $(-1)x$ und $x - y$ für $x + (-y)$. [5, S.408]

Im dreidimensionalen reellen Raum gibt es für seine Elemente (Vektoren) die beiden geometrischen Interpretationen als Punkt und Pfeil.

Proposition 6.1.1 (Rechenregeln für $\mathbb{R}^3$) Die Rechenoperationen $+: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ haben folgende Eigenschaften:

(+) Das Paar $(\mathbb{R}^3, +)$ bildet eine abelsche Gruppe mit Nullelement $(0, 0, 0)$.

(NG) Es gilt $1x = x$.

(DG₁) Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(AG) Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ finden wir $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(DG₂) Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ finden wir $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

[5, S.408]

Definition 6.1.3 (Standardbasis, Linearkombination)

(i) Die Menge $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ nennen wir die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Eine Darstellung der Form $X = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$ nennen wir Linearkombination der Standardbasisvektoren e_1, e_2, e_3 mit Koeffizienten x_1, x_2, x_3 .

Es lässt sich also jedes $x \in \mathbb{R}^3$ eindeutig als Linearkombination der Standardbasisvektoren schreiben. [5, S.409]

Nun wird die Gleichung der Form

$$\lambda u + \mu v + \nu w = 0. \quad (6.1)$$

betrachtet.

Es besteht hier ein Zusammenhang zwischen der Frage, ob sich einer der Vektoren als Linearkombination der anderen schreiben lässt und der Lösbarkeit der Gleichung. Diese Idee kann für eine endliche Menge von Vektoren verallgemeinert werden.

Definition 6.1.4 (Lineare (Un-)Abhängigkeit) Sei eine Menge von Vektoren $M := \{u_1, \dots, u_m\} \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben.

(i) Wir sagen, dass M linear unabhängig ist (oder dass die Vektoren $u_1, \dots, u_m$ linear unabhängig sind), wenn die Gleichung

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ besitzt.

- (ii) Sind die Vektoren nicht linear unabhängig, so nennen wir sie linear abhängig.
- (iii) Wir sagen der Vektor u ist linear abhängig von den Vektoren $u_1, \dots, u_m$, wenn es $\mu_i \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$u = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i,$$

sich also u als Linearkombination der u_i schreiben lässt.

Offensichtlich gilt für die Situation (iii), dass die Menge $\{u, u_1, \dots, u_m\}$ linear abhängig ist. [5, S.418]

Das bedeutet aber auch, dass zwei nichtverschwindende Vektoren genau dann linear abhängig sind, wenn sie kollinear sind. Zwei Vektoren v und w sind zueinander kollinear, wenn es ein Skalar $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $v = \lambda w$ gilt, also die beiden Vektoren gleich orientiert sind.

Nun werden die Begriffe „inneres Produkt“, „Norm“ und „Abstand“, sowie ihre Zusammenhänge besprochen, da diese für viele Gebiete der Mathematik Schlüsselbegriffe sind.

Definition 6.1.5 (Skalarprodukt, Norm und Abstand im $\mathbb{R}^3$)

Seien P, Q, v, w in $\mathbb{R}^3$.

- (i) Wir definieren das (standard) innere Produkt oder auch (Standard-)Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ von v und w durch

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^3 v_i w_i.$$

- (ii) Die euklidische Norm $\|v\|$ von v definieren wir durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

- (iii) Wir definieren den (euklidischen) Abstand bzw. die (euklidische) Distanz $d(P, Q)$ der Punkte P und Q durch

$$d(P, Q) := \|Q - P\|.$$

Wiederum bezeichnen wir die Abbildung $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ als die (euklidische) Metrik. [5, S.423]

Proposition 6.1.2 (Eigenschaften des inneren Produkts) Das innere Produkt auf $\mathbb{R}^3$ hat für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften:

- (IP1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ und $\langle z, x + y \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle$,
- (IP2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$, (Bilinearität)
- (IP3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, (Symmetrie)
- (IP4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und aus $\langle x, x \rangle = 0$ folgt $x = 0$. (positive Definitheit)
- [5, S.423]

Ein sehr wichtiger Zusammenhang von Skalarprodukt und Norm ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Proposition 6.1.3 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) Das innere Produkt auf $\mathbb{R}^3$ erfüllt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y kollinear sind. [5, S.424]

Aufgrund der Formulierung kann erkannt werden, dass die Cauchy-Schwarz-Ungleichung unabhängig von der Komponentenschreibweise des Skalarprodukts ist und somit auch für den n -dimensionalen Fall geeignet.

Proposition 6.1.4 (Eigenschaften der Norm) Die euklidische Norm $\|\cdot\|$ hat für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften:

(N1) $\|x\| \geq 0$ und aus $\|x\| = 0$ folge $x = 0$, (positive Definitheit)

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, (Homogenität)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Dreiecksungleichung)

Mit Hilfe der Norm können wir wiederum zu einem gegebenen Vektor $v \neq 0$ einen kollinearen, gleich orientierten Vektor v' der Länge 1 angeben: $v' = \frac{1}{\|v\|}v$ heißt normierter Vektor oder Einheitsvektor in Richtung von v . [5, S.425]

Zuletzt werden nun die Eigenschaften des Abstands im Raum betrachtet.

Proposition 6.1.5 (Eigenschaften der Metrik) Der Abstand auf $\mathbb{R}^3$ besitzt für alle $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ die Eigenschaften:

(D1) $d(P, Q) \geq 0$ und aus $d(P, Q) = 0$ folgt $P = Q$, (positive Definitheit)

(D2) $d(P, Q) = d(Q, P)$, (Symmetrie)

(D3) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$. (Dreiecksungleichung) [5, S.426]

Nun sind alle Definitionen und Eigenschaften, um den Winkel und die Orthogonalität zu besprechen, zusammengetragen.

Definition 6.1.6 (Winkel, Orthogonalität)

(i) Seien $P, v, w \in \mathbb{R}^3$, und seien die Strahlen s_{P_v} und s_{P_w} gegeben. Der von den beiden Strahlen eingeschlossene Winkel α ist festgelegt durch den Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren v und w der durch

$$\cos \alpha := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

und $0 \leq \alpha \leq \pi$ definiert ist.

(ii) Die beiden Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ heißen orthogonal, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ gilt. In Zeichen schreiben wir $v \perp w$. [5, S.428]

Es ist im $\mathbb{R}^3$ leicht zu einem Vektor v , einen orthogonalen Vektor w zu finden. Es gilt nämlich unter anderem $v \perp w$, wenn w kollinear zu $(-v_2, v_1, 0)$ ist. Im Gegensatz zum $\mathbb{R}^2$, in dem es nur zwei mögliche Normalvektoren gibt, gibt es im $\mathbb{R}^3$ unendlich viele nicht kollineare Normalvektoren zu v , z.B. $(0, v_3, v_2) \perp v$.

Proposition 6.1.6 (Normalvektoren im $\mathbb{R}^3$) Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ und seien w und w' zueinander nicht kollineare Normalvektoren auf v . Dann ist jeder Normalvektor u von v linear abhängig von w und w' . [5, S.428]

Jetzt ist die Möglichkeit einen Normalvektor zu einem gegebenen Vektor zu finden vorhanden. Nun werden folgende Beziehung bearbeitet: gibt es zu zwei gegebenen nicht kollinearen Vektoren einen Vektor, der auf die beiden gegebenen orthogonal steht? Diese Frage beantwortet der nächste Begriff mit Ja.

Definition 6.1.7 (Kreuzprodukt) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren. Wir definieren das Kreuzprodukt oder Vektorprodukt $u \times v$ von u und v durch

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

[5, S.430]

Proposition 6.1.7 (Eigenschaften des Kreuzprodukts) Das Kreuzprodukt erfüllt für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ die folgenden Rechenregeln:

- (i) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$,
- (ii) $u \times (\lambda v) = (\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$,
- (iii) $u \times v = -v \times u$, (Antisymmetrie)
- (iv) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$, (Jacobi-Identität)
- (v) $u \perp (u \times v) \wedge v \perp (u \times v)$.

Eigenschaft (v) in der Proposition besagt, dass das Kreuzprodukt $w = u \times v$ tatsächlich ein gemeinsamer Normalvektor auf u und v ist. Außerdem beobachten wir, dass das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist, denn Jacobi-Identität, Antisymmetrie und Assoziativität schließen einander aus: Hätten wir alle drei Eigenschaften, dann wäre für beliebige $u, v, w \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} 0 &= u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) \\ &= (u \times v) \times w + v \times (w \times u) - (u \times v) \times w = v \times (w \times u), \end{aligned}$$

was natürlich falsch ist.

[5, S.430]

Die Länge des Kreuzprodukts $\|u \times v\|^2$, also die Norm des Kreuzprodukts entspricht der Fläche des von den Vektoren u und v aufgespannten Parallelogrammes, wobei u und v die Seiten bilden.

Nun wird noch ein kurzer Blick über den Tellerrand hinaus auf die höheren Dimensionen geworfen.

6.1.2 Höhere Dimensionen - $\mathbb{R}^n$ [5, S.454-569]

Viele der Zusammenhänge können vom dreidimensionalen auf den endlichdimensionalen Fall übertragen werden. Wie weit dies möglich ist, wird in diesem Abschnitt behandelt. Hier geht es um die Verallgemeinerung der Theorien und Gesetze des vorherigen Abschnitts. Da ich die mathematischen Grundlagen lediglich für die in der Schule angewandten Bereiche untersuche, werde ich nur die einfachsten Verallgemeinerungen, wie beispielsweise Rechenregeln anführen.

Definition 6.1.8 (Operationen in $\mathbb{R}^n$) Auf der Menge $\mathbb{R}^n$ der reellen n -Tupel definieren wir die beiden Operationen $+$, die Addition, und die Skalarmultiplikation für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda x &= \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).\end{aligned}$$

[5, S.455]

Die Rechenregeln sind vollkommen analog zu $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$:

Proposition 6.1.8 (Rechenregeln für $\mathbb{R}^n$) Die Rechenoperationen $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ haben die folgenden Eigenschaften:

(+) Das Paar $(\mathbb{R}^n, +)$ bildet eine abelsche Gruppe mit Nullelement 0.

(NG) Es gilt $1x = x$.

(DG₁) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(AG) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ finden wir $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(DG₂) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ finden wir $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

[5, S.455]

Die Begriffe wie Standardbasis und lineare (Un-)Abhängigkeit können leicht vom $\mathbb{R}^3$ auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen werden.

Definition 6.1.9 (Standardbasis) Sei e_i das n -Tupel, das an der i -ten Stelle den Eintrag 1 hat und bei dem alle anderen Einträge verschwinden (d.h. gleich 0 sind), $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Die Menge $\{e_i | i = 1, \dots, n\}$ nennen wir die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Offensichtlich lässt sich jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eindeutig als Linearkombination der Elemente e_i schreiben,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

[5, S.456]

Definition 6.1.10 (Lineare (Un-)Abhängigkeit) Sei eine Menge von Vektoren $M := \{u_1, \dots, u_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben.

- (i) Wir sagen, dass M linear unabhängig ist (oder dass die Vektoren $u_1, \dots, u_m$ linear unabhängig sind), wenn die Gleichung

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ besitzt.

- (ii) Sind die Vektoren nicht linear unabhängig, so nennen wir sie linear abhängig.

- (iii) Wir sagen der Vektor u ist linear abhängig von den Vektoren $u_1, \dots, u_m$, wenn es $\mu_i \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$u = \sum_{i=1}^m \mu_i u_i,$$

sich also u als Linearkombination der u_i schreiben lässt.

Zwei linear abhängige Vektoren $v, w \neq 0$ nennen wir wiederum kollinear. [5, S.457]

Auch die Begriffe „Skalarprodukt“, „Normen“ und „Abstand“, sowie ihre Eigenschaften hängen nicht von der Einschränkung der Dimensionen ab - siehe Definition 6.1.5, Proposition 6.1.2, Proposition 6.1.3, Proposition 6.1.4 und Proposition 6.1.5. Auch die Definition des Winkels und der Orthogonalität zweier Vektoren kann von $\mathbb{R}^3$ übernommen werden - siehe Definition 6.1.6.

Die Auffindung eines Normalvektors mittels des Kreuzprodukts wie in Proposition 6.1.6 ist lediglich bis zum $\mathbb{R}^3$ gültig.

Letztendlich werden noch einige strukturerhaltende Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ betrachtet.

Definition 6.1.11 (Lineare Abbildungen) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt linear oder lineare Abbildung, falls gilt:

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

[5, S.464]

Nun sind alle notwendigen Grundlagen, um sich von den reellen n -Tupeln zu lösen und eine neue algebraische Struktur zu definieren, zusammengetragen worden.

6.2 Lineare Algebra [5] [6] [23]

6.2.1 Vektorräume [5] [6] [23]

Definition 6.2.1 (Vektorraum) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $(V, +)$ eine abelsche Gruppe, auf der zusätzlich eine Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ definiert ist mit den folgenden Eigenschaften:

(NG) Es gilt $1x = x$.

(AG) Für alle $x \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ finden wir $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(DG₁) Für $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(DG₂) Für alle $x \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ finden wir $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Dann nennen wir V einen Vektorraum über dem (Skalaren)Körper $\mathbb{K}$ und bezeichnen die Elemente von V als Vektoren.

Ist der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so nennen wir V einen reellen Vektorraum, gilt $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist V ein komplexer Vektorraum, und ist $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ oder ein anderer endlicher Körper, dann können wir sogar endliche Vektorräume definieren, das sind Vektorräume mit endlich vielen Elementen, die vor allem in der Kodierungstheorie und Kryptologie wichtige Anwendung haben. [5, S.468]

Definition 6.2.2 Sei V ein K -Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_n \in V$ gegeben. Ein Vektor der Form $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$ heißt Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ mit den Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Die lineare Hülle von $v_1, \dots, v_n$ ist die Menge

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\}.$$

Sei M eine Menge und sei für jedes $m \in M$ ein Vektor $v_m \in V$ gegeben. Die Gesamtheit dieser Vektoren, auch das entsprechende System von Vektoren genannt, sei bezeichnet mit $(v_m)_{m \in M}$. Dann ist die lineare Hülle des Systems $(v_m)_{m \in M}$, bezeichnet mit $\text{Span}(v_m)_{m \in M}$, definiert als die Menge aller $v \in V$, die Linearkombinationen von endlich vielen Vektoren des Systems sind. Wir sagen auch, dass $\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ das Erzeugnis der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ist oder dass die Menge von den Vektoren $v_1, \dots, v_n$ „aufgespannt“ wird. Letzteres erklärt die Bezeichnung „Span“. [23, S.107]

Definition 6.2.3 Lineare Unabhängigkeit Sei V ein K -Vektorraum. Eine endliche Familie $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls gilt: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ und ist

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0,$$

so folgt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$

Anders ausgedrückt bedeutet das, daß sich der Nullvektor nur trivial aus den $v_1, \dots, v_r$ linear kombinieren läßt.

Eine beliebige Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls jede Teilfamilie linear unabhängig ist. [6, S.81] [sic!]

6.3 Basis und Dimension [6, S.86-100]

Definition 6.3.1 Basis Eine Familie $B = (v_i)_{i \in I}$ in einem Vektorraum V heißt Erzeugendensystem von V , wenn

$$V = \text{span}(v_i)_{i \in I},$$

d.h. wenn jedes $v \in V$ Linearkombination von endlich vielen v_i ist.

Eine Familie $B = (v_i)_{i \in I}$ in V heißt Basis von V , wenn sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

V heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem (d.h. eine endliche Familie $B = (v_1, \dots, v_n)$ mit $V = \text{span}(v_i)$ gibt. Ist B eine endliche Basis, so nennt man die Zahl n die Länge der Basis. [6, S.86]

Satz 6.3.1 Basisauswahlsatz „Aus jedem endlichen Erzeugendensystem eines Vektorraumes kann man eine Basis auswählen. Insbesondere hat jeder endlich erzeugte Vektorraum eine endliche Basis.“ [6, S.88]

Theorem 6.3.1 „Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.“ [6, S.88]

Aufgrund des Austauschsatzes (siehe [6, S.89-90]) besitzt jeder Vektorraum (unendlich) viele Basen.

Definition 6.3.2 Dimension Ist V ein K -Vektorraum, so definieren wir

$$\dim_K V := \begin{cases} \infty, & \text{falls } V \text{ keine endliche Basis besitzt,} \\ r, & \text{falls } V \text{ eine Basis der Länge } r \text{ besitzt.} \end{cases}$$

$\dim_K V$ heißt Dimension von V über K . Falls klar ist, welcher Körper gemeint ist, schreibt man auch $\dim V$. [6, S.91]

In weiterer Folge könnte man nun tief in die lineare Algebra eintauchen, was hier nicht gemacht wird. Hiermit ist den Zugang zum Vektorbegriff im Diplomstudium Lehramt Mathematik beendet.

6.4 Rückblick

ad Analytische Geometrie

Für den Abschnitt der analytischen Geometrie werden das Wissen über Gruppen, Ringe und Körper benötigt. Natürlich ist von dem Vorwissen der Zahlenmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$, reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auszugehen.

In der analytischen Geometrie werden die wichtigsten Vektorräume, der Raum $\mathbb{R}^3$ und der reelle höherdimensionale Raum $\mathbb{R}^n$, ohne die Definition eines Vektorraums zu kennen, sondern mit dem Vorwissen der bereits erlernten Strukturen und Bezügen zur „realen Welt“, besprochen.

Der Raum $\mathbb{R}^3$ und höhere Dimensionen $\mathbb{R}^n$

Im Abschnitt des dreidimensionalen reellen Raums $\mathbb{R}^3$ wurden im Schnelldurchlauf Operatoren, Rechenregeln und Eigenschaften für (dreidimensionale reelle) Vektoren, wie z.B. Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Norm, Abstand, Normalvektoren und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und ihre Bedeutung für dieses Gebiet, besprochen.

Im darauffolgenden Abschnitt wurden alle möglichen Definitionen und Eigenschaften vom $\mathbb{R}^3$ übernommen und die Themen so ergänzt, dass die Verallgemeinerung in den $\mathbb{R}^n$ geschieht. So wird beispielsweise der Begriff „Lineare Abbildungen“ ergänzt.

ad Lineare Algebra

Hier ist der zentrale Begriff und auch das Ziel dieses Kapitels die Definition des Vektorraums. Diese steht direkt am Anfang dieses Abschnitts und die lineare Algebra wird noch ein wenig weitergeführt. So wird der Begriff der linearen Unabhängigkeit genau definiert und die Begriffe Basis und Dimension vorgestellt.

Mit diesem Wissensstand wird nun der Zugang zum Vektorbegriff im Diplomstudium Lehramt Mathematik beendet. Die Lineare Algebra wird in weiterer Folge in den höheren Semestern bzw. höheren Kursen im Studium weitergeführt und vertieft.

7 Bezug zum Vektorbegriff im Mathematikunterricht und im Mathematikstudium [5] [6] [21] [22] [24]

In den Grundlehrveranstaltungen im Bereich der linearen Algebra ist oftmals die Relevanz für den späteren Mathematikunterricht, abgesehen von den offensichtlichen Überschneidungen, fragwürdig. Selbstverständlich ist im Lehramtsstudium allein die Berücksichtigung von Schulbezügen kein ausreichendes Kriterium der Güte einer fachmathematischen Grundvorlesung, es bietet sich lediglich als solches an. So werden hier die schulmathematischen Bezüge in diesen Grundvorlesungen untersucht. Dazu verwende ich die Literatur und das Wissen aus den vorherigen Kapitel 4 und 6.

7.1 Schulmathematischer Bezug in fachmathematischen Lehrveranstaltungen [5] [6] [21] [22] [24]

Das Mathematikstudium beginnt mit den mathematischen Strukturen angefangen vom Gruppoid bis hin zum Körper. Diese Begriffe werden in der Schulmathematik nicht verwendet. In der Sekundarstufe II haben diese Themen nicht viel zu suchen, dafür können die Grundlagen in etwa mit der Sekundarstufe I verglichen werden. Hier kommen die Themenbereiche Zahlenmengen, Umgang mit Symmetrien, wie auch Untersuchungen der Rechenregeln beispielsweise für Potenzen mit rationalen Exponenten vor. In den Grundvorlesungen im Bereich der linearen Algebra gibt es keine direkten Schulbezüge. Jedoch müssen die Grundlagen immer zuerst gelehrt bzw. gelernt werden.

Nun betrachten wir die schulmathematischen Kontext in der linearen Algebra im Bezug zum Vektorbegriff und die Schwierigkeiten, die sie aufwerfen können.

In Kapitel 6 werden die essentiellen Objekte aller nachfolgenden fachmathematischen Lehrveranstaltungen zum Thema lineare Algebra eingeführt. Diese sind allgemeine Vektorräume über einem Körper K , dessen Eigenschaften und Operationen, also die strukturerhaltenden Abbildungen.

Im Mathematikunterricht wird der Begriff des Vektors und seine algebraischen Eigenschaften herausgearbeitet, jedoch wird die Definition des Vektors als Element des Vektorraums nicht erwähnt. In den beiden besprochenen Mathematik-Schulbüchern in Abschnitt 4.4 werden Vektoren als reelle Zahlenpaare bzw. -tripel und selten auch sogar als reelle n -Tupel behandelt. Vektorräume über anderen Körpern werden darin nicht behandelt. Die beiden Schulbücher (siehe Abschnitt 4.4) führen den Vektorbegriff arithmetisch ein und deuten diesen anschließend geometrisch.

Der Zugang zum Vektorbegriff sollte bestenfalls beide Sichtweisen enthalten, um die Grundvorstellungen des Vektorbegriffs als Gesamtes zu vermitteln. Dabei ist es für Studierende am Anfang des Studiums oftmals schwierig zu akzeptieren, dass die Vorstellungen des Vektorbegriffs, den sie aus der Schule kennen, lediglich ein Spezialfall ist. Sie müssen diese Vorstellungen nun mit dem axiomatischen Zugang in Einklang bringen. Die Schwierigkeit liegt darin die schulmathematischen Konzepte als untergeordnete Sonderfälle zu verstehen und nicht als eigenständig zu betrachten. Das ist nicht immer einfach, da diese Schwierigkeit einerseits mit einer gewissen Lernanstrengung verbunden ist, aber sich auch die Frage nach der Motivation stellt. Denn warum sollten Bemühungen investiert werden dies umzusetzen, wenn salopp formuliert, sich die Hochschulmathematik über die Schulmathematik zu stellen scheint. Dieses Spannungsverhältnis, von allgemeinem Zugang und Spezialfall aufgrund eines bereits vorhandenen tragfähigen Begriffsverständnisses zum Vektorkonzept der Studierenden, auch in Hinsicht auf den Beruf, ist ganz natürlich.

An dieser Stelle wirft es die Frage auf, wie im Rahmen des Lehramtsstudiums das schulische Vektorkonzept zugunsten des fachmathematischen abgelöst werden kann, ohne die Relevanz für die Schule zu vernachlässigen. Hier muss eine Lehrperson an der Hochschule genauso wie eine Lehrperson an der Sekundarstufe I+II handeln. Die Präkonzepte der Studierenden müssen aufgegriffen und in sinnvoller Weise damit gearbeitet werden. So wird dies beispielsweise im Lehrbuch „Einführung in das mathematische Arbeiten“ [5] gemacht, indem sich von der Ebene $\mathbb{R}^2$ über den Raum $\mathbb{R}^3$ bis hin zu den reellen höheren Dimensionen $\mathbb{R}^n$ und dem allgemeinen Vektorraum K^n hinaufgearbeitet wird. Wichtig ist hier den konzeptuellen Übertrag ins Allgemeine zu verdeutlichen. Weiters sollten neben den reellen Vektorräumen auch „besondere Vektorräume“, wie den Vektorraum der Polynome oder der magischen Quadrate berücksichtigt werden. Damit soll verdeutlicht werden, dass das Vektorkonzept mehr als nur den $\mathbb{R}^n$ umfasst. Die schulische Perspektive, der Vektoren der unterschiedlichen geometrischen Interpretationen als Punkte bzw. Pfeile, kann hierfür genutzt werden.

7.2 Unterschiede in der Vorgehensweise in der Schulmathematik und in der Hochschulmathematik [5] [6] [21] [22] [24]

Das Vorgehen in den untersuchten Schulbüchern (siehe Abschnitt 4.4) unterscheidet sich voneinander und auch vom üblichen hochschulmathematischen Vorgehen. Diese Unterschiede werden in diesem Abschnitt betrachtet.

Das Schulbuch „Lösungswege 5“ [22] beginnt mit der Definition des Vektors und seinen Rechenoperationen ganz allgemein im $\mathbb{R}^n$, wobei das Schulbuch „Mathematik verstehen 5“ [21] die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ betrachtet. Das Schulbuch „Mathematik verstehen 5“ [21] ist dem axiomatischen Aufbau in der Hochschule nachempfunden. Zum Beispiel kommen darin die Rechengesetze der Addition zweier Vektoren und der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar vor. In beiden Schulbüchern wird zuerst das Skalarprodukt eingeführt und dann ein Längenbegriff für Vektoren (Betrag) über den Satz von Pythagoras hergeleitet. In der Hochschulmathematik wird der Winkel zwischen zwei Vektoren bezüglich des Skalarprodukts aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (siehe 6.1.3) gefolgert. In den Schulbüchern wird an dieser Stelle auf das Vorwissen des Kosinussatzes zurückgegriffen und die Definition 6.1.6 geometrisch hergeleitet. Das Skalarprodukt kann in der Schule sinnvoll im Bezug zur Länge und dem Winkelmaß eingeführt werden. Das führt ähnlich wie die Einführung des Vektorbegriffs dazu, dass das Skalarprodukt allgemein formuliert und die schulmathematische Perspektive als einer von unterschiedlichen möglichen Spezialfällen angesehen wird. Auch hier bietet es sich an den schulmathematischen Begriff als Ausgangspunkt für die Formalisierung zu verwenden. Dabei ist es sinnvoll die beiden Zugänge, algebraisch über die Addition des komponentenweisen Produkts, wie auch geometrisch über den Kosinus, zu diskutieren und anschließend in Beziehung zu setzen, bevor die allgemeinen Bilinearformen betrachtet wird.

7.3 Resümee

Der Schulbezug der linearen Algebra ist meist nicht direkt ersichtlich, jedoch unerlässlich für den Unterricht, besonders als Bedingung für einen gelingenden Lehr-Lern-Prozess. So sollen Vorlesungen im Lehramtsstudium nicht nur direkte Schulinhalte vermitteln. Sie sollen die Möglichkeiten des konzeptuellen Aufbaus und der Vernetzung der schulmathematischen Inhalte hochschulmathematisch darstellen und Zugänge dafür bieten.

In einem neuen-semesterigen Studium (Diplom Lehramt) ist es nur natürlich nicht ausschließlich schulmathematische Inhalte kennen zu lernen. Es ist die Pflicht einer Lehrperson ein größeres Fachwissen als zum Zeitpunkt der Diplom- und Reifeprüfung zu besitzen. Somit ist es auch die Pflicht des Studiums, neben den für den Lehrberuf wichtigen schulmathematischen, fachdidaktischen Inhalten, auch fachmathematische Inhalte zu allen Themen der Schulmathematik zu inkludieren. Dies ist das Hauptaugenmerk des Curriculums des Studiums. Zu jedem Themenbereich der Mathematik gibt es Fachvorlesungen (Grund- und Aufbauvorlesungen) und die dazugehörigen schulmathematischen Vorlesungen, um das Wissen der Hochschulmathematik nun auf die Schulmathematik anzuwenden.

8 Zugang der Vektorrechnung im Physikstudium [7, S.35-66]

In diesem Abschnitt beschäftige ich mich mit den mathematischen Definitionen und Grundlagen der Vektorrechnung, welche im Physikstudium Diplom Lehramt in typischen Grundvorlesungen gelehrt werden. Hierfür verwende ich das Skriptum zur Vorlesung „Einführung in die Physikalischen Rechenmethoden I+II“ [7], sowie das Buch zur Lehrveranstaltung „Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik“ [8].

8.1 Grundlagen [7, S.35-37]

In der Physik ist es oftmals notwendig, von einigen Größen nicht nur den Betrag, sondern auch die Richtung zu kennen. Beispielsweise ist, wie in Kapitel „Zugang zur Vektorrechnung im Physikunterricht“ bzw. im Abschnitt „Münchner Konzept der Mechanik“ gezeigt wurde, für das Fahren mit einem Auto sowohl die Bewegungsrichtung als auch der Betrag, also das Tempo, unserer Geschwindigkeit wichtig. Solche Größen nennt man Vektoren. Beispiele für Vektoren findet man in der Physik etliche, wie z.B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Impuls, Drehmoment und viele mehr. Größen ohne Richtung nennen wir Skalare. Physikalische Grundgrößen wie Zeit, Masse, Volumen, aber auch Größen wie elektrische Ladung, Energie und Dichte sind Skalare. Der Begriff eines Vektors wird definiert.

Definition 8.1.1 *Ein Vektor ist eine gerichtete Größe. Er wird durch eine Richtung und eine Länge (einen Betrag) beschrieben.* [7, S.35]

Üblicherweise werden vektorielle Größen mit einem Pfeil angegeben, z.B. $\vec{v}$ für die Geschwindigkeit oder $\vec{F}$ für eine Kraft. Man findet in der Literatur aber auch die Konvention, Vektoren mithilfe des Fettdrucks anzugeben, z.B. $\mathbf{v}$ und $\mathbf{F}$. Hier wird in Folge die erste Konvention verwendet.

Besonders im Alltag wird von physikalischen Vektorgrößen meist nur den Betrag betrachtet, wie z.B. „Die Geschwindigkeit beträgt $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ “. D.h. zur Beschreibung einer Maßeinheit, welche den Betrag symbolisiert, benötigt es die Maßzahl und die Einheit. Im obigen Beispiel ist die Maßzahl 100 und die Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Rein symbolisch kann dies wie folgt geschrieben werden: $|\vec{v}| = v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Den Betrag, also die Länge des Vektors, wird hier mithilfe des Symbols $|\cdot|$ ausgedrückt.

Graphisch können wir einen Vektor als Pfeil mit einer bestimmten Länge und Richtung darstellen. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem kann ein Vektor $\vec{r}$ als Pfeil mithilfe seiner Komponenten dargestellt werden (siehe Abbildung 38). Im zweidimensionalen Fall können hierfür die Komponenten Δx und Δy aus der Komponentenschreibweise für Vektoren $\vec{r} = (\Delta x, \Delta y)$ herausgelesen und in das Koordinatensystem eingezeichnet werden. Für einen durch den Anfangspunkt Q und Endpunkt P eindeutig festgelegten Vektor, wird $\overrightarrow{QP}$ geschrieben.

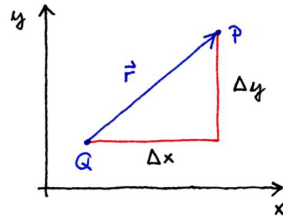


Abbildung 38: Ein geometrisch dargestellter Vektor, wie oben beschrieben [7, S.35]

Wird der Anfangspunkt Q mit dem Ursprung $(0,0,0)$ des Koordinatensystems gleichgesetzt, so kann der Vektor $\vec{r}$ des Punktes $P = P(x, y, z)$ geschrieben werden als

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

(in kartesischen Koordinaten). Oftmals ist auch die Schreibweise $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ üblich. Diesen Vektor kann man als Ortsvektor des Punktes P deuten (siehe Abbildung 39). Der Ortsvektor $\vec{r}$ gibt die Lage eines Punktes P relativ zum Ursprung an.

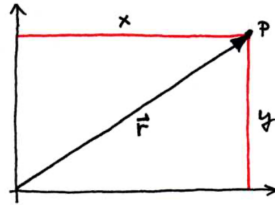


Abbildung 39: Deutung als Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes $P = (x, y)$ [7, S.36]

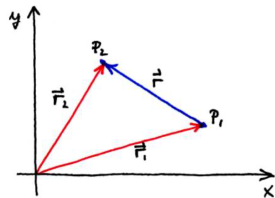


Abbildung 40: Der Verschiebungsvektor $\vec{r}$ [7, S.36]

In Abbildung 40 ist zu sehen, dass Vektoren auch als Verschiebungsvektoren eingesetzt bzw. beschrieben werden können. Hierbei ist der Verschiebungsvektor $\vec{r}$ der Verbindungsvektor zwischen den Punkten P_1 und P_2 mit den zugehörigen Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Somit kann der Verschiebungsvektor $\vec{r}$ als Differenz der Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ geschrieben werden:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Die Bedeutung der Differenz zweier Vektoren wird später betrachtet.

(Bemerkung) Bezüglich der graphischen Darstellung gehören Pfeile mit gleicher Richtung und gleichem Betrag, aber unterschiedlichen Anfangspunkten zum selben Vektor. D.h. dass man durch Parallelverschieben weder Richtung noch Betrag ändert und somit der Vektor gleich bleibt (siehe Abbildung 41).

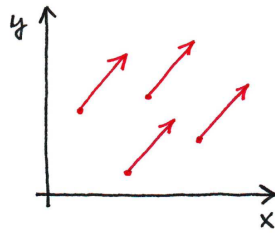


Abbildung 41: Ineinander Überführung von Pfeilen durch Parallelverschiebung [7, S.37]

Besondere Bedeutung haben der Nullvektor und der Einheitsvektor:

Proposition 8.1.1 Nullvektor: $\vec{0}$, $|\vec{0}| = 0$, hat Länge Null und keine Richtung.

Einheitsvektor: $\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$, hat Länge 1, wird verwendet, um Richtungen anzugeben (z.B. Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ entlang der Achsen eines kartesischen Koordinatensystems). Einheitsvektoren werden auch als normiert bezeichnet. [7, S.36 – 37]

8.2 Koordinatensysteme [7, S.37-44]

Häufig wird, wie bisher, das kartesische Koordinatensystem zur Darstellung von Vektoren verwendet. Aber auch andere Koordinatensystem können hier, je nach Problemstellung von Vorteil sein. Die unterschiedlichen Möglichkeiten der Darstellung eines Vektors werden im folgenden Abschnitt besprochen.

8.2.1 Kartesische Koordinaten

Unter einem kartesischen Koordinatensystem wird ein rechtwinkeliges Koordinatensystem verstanden. Die Achsen stehen also senkrecht aufeinander. Das kann für beliebig viele Dimensionen definiert werden. In Abbildung 42 ist ein zwei- und ein dreidimensionales kartesische Koordinatensystem dargestellt.

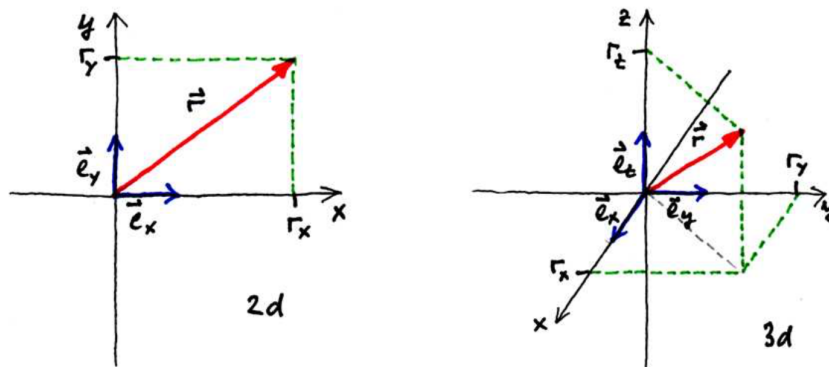


Abbildung 42: Zwei- und dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem [7, S.38]

Die Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, auch Basisvektoren genannt, geben die Richtungen der Koordinatenachsen an. So kann der Ortsvektor $\vec{r}$ als sogenannte Linearkombination dargestellt werden:

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r_x, r_y, r_z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

Proposition 8.2.1 *Der Betrag (Länge) des Vektors lässt sich im kartesischen Koordinatensystem mithilfe des Satzes von Pythagoras ermitteln:*

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2},$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}.$$

(vgl. [7, S.37])

Definition 8.2.1 *Ein Einheitsvektor hat die Länge 1 und die Richtung des zugehörigen Vektors. So hat der Einheitsvektor $\vec{e}_r$ die Richtung des Vektors $\vec{r} \neq 0$ und ist definiert durch*

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

(vgl. [7, S.37])

Beispiel 8.2.1

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ r = |\vec{r}| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} \\ \vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In der Physik wird ein Koordinatensystem so gewählt, dass sie möglichst gut zu den unterschiedlichen Problemstellungen passen. Das wird gemacht, um besser damit umgehen zu können und die Berechnungen einfacher zu gestalten. Dafür wird normalerweise ein passendes Koordinatensystem definiert. Neben den kartesischen Koordinaten bieten sich dafür auch Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten an. Diese werden an dieser Stelle jedoch nicht weiter ausgeführt.

8.3 Vektoralgebra [7, S.44-47]

Nun werden die Rechenregeln von Vektoren im kartesischen Koordinatensystem besprochen.

8.3.1 Gleiche, inverse und parallele Vektoren

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, wenn sie in Betrag und Richtung ident sind.
- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind invers, wenn sie gleichen Betrag aber entgegengesetzte Richtungen haben, d.h. $\vec{a} = -\vec{b}$
- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind (gleichsinnig) parallel, wenn sie gleiche Richtung haben, d.h. $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ für ein $\lambda > 0$, dann schreibt man $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind antiparallel oder gegensinnig parallel, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben, d.h. $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ für ein $\lambda < 0$.

- Der zum Vektor $\vec{a}$ zugehörige inverse Vektor $-\vec{a}$ hat gleichen Betrag aber entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$. Man schreibt komponentenweise:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$$

8.3.2 Vektoraddition und -subtraktion

Die Addition zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, also $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, kann graphisch durch Aneinanderhängen dargestellt werden. Dazu wird an den Endpunkt von $\vec{b}$ der Anfangspunkt von $\vec{a}$ (bzw. umgekehrt) durch Parallelverschieben angehängt (siehe Abbildung 43). Der resultierende Vektor $\vec{c}$ ist dann jener Pfeil, der sich vom Anfangspunkt des ersten bis zum Endpunkt des zweiten Pfeils erstreckt.

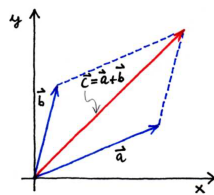


Abbildung 43: Vektoraddition [7, S.45]

Die Vektoraddition zweier Vektoren in kartesischen Koordinaten erfolgt komponentenweise:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}.$$

Der Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element der Addition, d.h. es gilt $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Die Addition eines Vektors mit seinem inversen Element (Gegenvektor) ergibt den Nullvektor.

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Die Subtraktion ist die Umkehrfunktion der Addition, daher addiert man den inversen Vektor:

$$\vec{a} - (\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}.$$

Außerdem gelten das Kommutativgesetz $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ und das Assoziativgesetz $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

8.3.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar α ist auf eine wiederholte Addition zurückzuführen, die einer α -fachen Aneinanderreihung von $\vec{a}$ entspricht (siehe Abbildung 44). Dabei verändert sich die Länge, jedoch nicht die Richtung des Vektors.

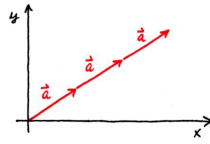


Abbildung 44: Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (hier: $\alpha = 3$) [7, S.47]

Die komponentenweise Multiplikation mit einem Skalar: $\alpha \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}$

Für den Betrag von $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ gilt:

$$|\vec{b}| = |\alpha \vec{a}| = \sqrt{(\alpha a_x)^2 + (\alpha a_y)^2 + (\alpha a_z)^2} = \sqrt{\alpha^2(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)} = |\alpha| |\vec{a}|.$$

Die Division ist die Umkehrfunktion der Multiplikation, daher entspricht die Division durch ein Skalar λ einer Multiplikation mit dem Skalar $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Weiters gilt das Distributivgesetz $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ und $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$ und das Assoziativgesetz $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

8.3.4 Skalarprodukt [7, S.48-53]

Definition

Das Skalarprodukt oder innere Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird wie folgt berechnet

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha, \quad (8.1)$$

wobei $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ die Beträge der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind und α der von ihnen eingeschlossene Winkel (siehe Abbildung 45). Das Ergebnis eines Skalarprodukts ist ein Skalar, also eine (reelle) Zahl. Eine weitere Schreibweise, vor allem in der Quantenmechanik verwendet, ist die Bra-Ket-Notation $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$.

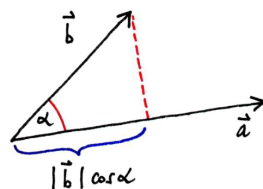


Abbildung 45: Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [7, S.48]

In Abbildung 45 ist zu sehen, dass das Skalarprodukt geometrisch betrachtet das Produkt des Betrages von $\vec{a}$ und dem Betrag des Anteils von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$ bzw. umgekehrt ist.

Rechenregeln

Für das Skalarprodukt gelten:

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Assoziativgesetz: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}$
- Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Diese Gesetze können auch aus der geometrischen Definition des Skalarprodukts abgeleitet werden, welche im Skript zur Vorlesung „Einführung in die Physikalischen Rechenmethoden I+II“ [7, S.48-49] zu finden sind.

Komponentenweise Darstellung

Das Skalarprodukt ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Anwendungen

Das Skalarprodukt hat eine Vielzahl von Anwendungen. Es kann beispielsweise der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ mithilfe des Skalarprodukts berechnet werden:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \underbrace{\cos \alpha}_{=1} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Eine der häufigsten Anwendungen des Skalarprodukts ist das Prüfen auf Orthogonalität zweier Vektoren. Da rechtwinkelig bedeutet, dass der Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\cos \alpha = 0$ gilt, muss laut Definition des Skalarprodukts 8.1 gelten:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Ein Beispiel hierfür wäre:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 - 12 + 6 = 0$$

Wenn damit zwei Vektoren auf Orthogonalität überprüft werden, so kann das Skalarprodukt auch zur Bestimmung des eingeschlossenen Winkels genutzt werden. Aus 8.1 folgt nämlich:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung 6.1.3, aber auch der Kosinussatz (siehe Abbildung 46) benötigen das Skalarprodukt und sind so weitere Anwendungen davon.

Der Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

setzt zwei Seiten eines Dreiecks mit dem eingeschlossenen Winkel in Verbindung. Die Schreibweise $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ und $c = |\vec{c}|$ wird hier verwendet.

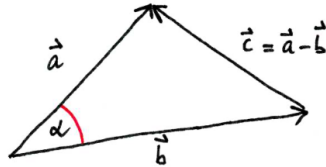


Abbildung 46: Der Kosinussatz [7, S.51]

8.3.5 Vektorprodukt [7, S.53-59]

Definiton

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, oder auch Kreuzprodukt genannt, wird geschrieben als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Der Betrag des Vektorprodukts lautet $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$, wobei α der von den zwei Vektoren eingeschlossene Winkel ist. Zu beachten gilt es, dass durch das Vektorprodukt der Vektor $\vec{c}$ orthogonal auf die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. So bilden die drei Vektoren ein Rechtssystem (siehe Abbildung 47). Die sogenannte „Rechte-Hand-Regel“ dient dazu, sich zu merken, dass die drei Vektoren des Vektorprodukts zueinander stehen wie der gespreizte Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand (siehe Abbildung 48).

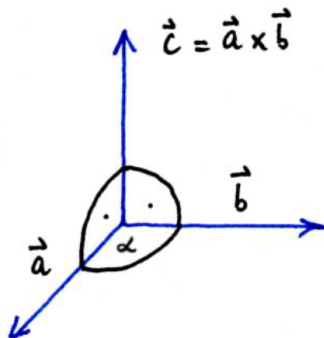


Abbildung 47: Das Vektorprodukt bildet ein Rechtssystem [7, S.53]

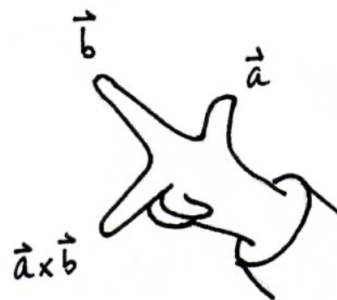


Abbildung 48: Die „Rechte-Hand-Regel“ als Merkhilfe für die Richtung des Vektorprodukts [7, S.53]

Üblicherweise wird in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ein Rechtssystem verwendet. Ein Linkssystem wird jedoch analog dazu definiert. Dazu werden lediglich die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Rechtssystems vertauscht.

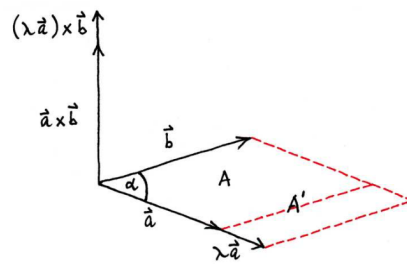


Abbildung 49: Die Fläche eines von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms
[7, S.54]

Der Betrag eines Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ kann geometrisch dargestellt werden als die Fläche eines Parallelogramms, welche von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird (siehe Abbildung 49).

$$\begin{aligned} A &= |\vec{a}|h \\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \end{aligned} \tag{8.2}$$

Somit kann die Fläche dieses Parallelogramms berechnet werden.

Rechenregeln

Für das Vektorprodukt gelten folgende Rechenregeln:

- Das Vektorprodukt ist NICHT kommutativ. Es gilt das Antikommutativgesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

- Assoziativgesetz:

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}$$

- Distributivgesetz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Die Herleitung der Rechenregeln kann im Skript zur Vorlesung „Einführung in die Physikalischen Rechenmethoden I+II“ [7, S.55-57] nachgelesen werden.

Komponentenweise Darstellung

Das Vektorprodukt kann komponentenweise wie folgt ausgedrückt werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der Komponenten läuft wie folgt ab: Die zu berechnende Komponente wird abgedeckt und wie folgt gerechnet:

- x - und z -Komponente: (links oben mal rechts unten) minus (links unten mal rechts oben)
- y -Komponente: (links unten mal rechts oben) minus (links oben mal rechts unten)

Anwendungen

Die häufigsten Anwendungen sind das Überprüfen, ob zwei Vektoren parallel zueinander stehen und das Konstruieren eines Vektors, welcher normal auf zwei weitere Vektoren stehen soll.

Wenn $\vec{a}$ zu $\vec{b}$ parallel steht, so verschwindet der eingeschlossene Winkel α . Daraus folgt, dass $\sin \alpha = 0$ und für das Vektorprodukt gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Hier folgt nun ein Beispiel zur Konstruktion eines Vektors, der auf zwei weitere Vektoren normal stehen soll (aus [7, S.59]):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ |\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} \end{aligned}$$

Den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmen wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{14}} = 0,185... \\ \alpha &= 10,67^\circ \end{aligned}$$

Wenn die Rechnung korrekt ist, sollten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ orthogonal stehen, was durch Berechnen der entsprechenden Skalarprodukte überprüft wird:

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 + 8 - 6 = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 + 16 - 10 = 0.$$

[7, S.59]

8.3.6 Spatprodukt [7, S.59-61]

Definition

Das Spatprodukt oder auch gemischtes Produkt dreier Vektoren ist definiert durch:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (8.3)$$

und ergibt ein Skalar. Der Betrag des Spatprodukts ist geometrisch gesehen das Volumen eines Parallelepipeds, auch Spat genannt, welches von drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

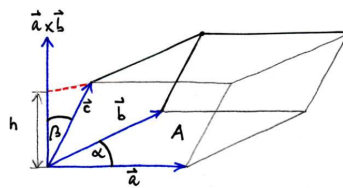


Abbildung 50: Das Spatprodukt [7, S.54]

Abbildung 50 soll dazu dienen, die beschriebene Situation zu veranschaulichen. Das Volumen des Parallelepipeds ist durch $V = Ah$ gegeben, wobei A die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms und h die Höhe des Parallelepipeds (siehe Abbildung 50) bezeichnet. Die Fläche A erhält man durch das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$. Bei der Höhe h handelt es sich um die Projektion von $\vec{c}$ in Richtung $\vec{a} \times \vec{b}$, also das Skalarprodukt von $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c}$. Damit die Höhe keine negativen Werte annehmen kann, wird der Betrag gebildet:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Komponentenweise Darstellung

Das Spatprodukt sieht für kartesische Koordinaten wie folgt aus:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \\&= c_x(a_y b_z - a_z b_y) + c_y(a_z b_x - a_x b_z) + c_z(a_x b_y - a_y b_x)\end{aligned}$$

Rechenregeln und Anwendungen

- Da das Vektorprodukt nicht kommutativ ist, folgt daraus für das Spatprodukt:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = -[\vec{b}\vec{a}\vec{c}].$$

- Das Spatprodukt bleibt bei zyklischer Vertauschung der Vektoren unverändert:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = [\vec{b}\vec{c}\vec{a}] = [\vec{c}\vec{a}\vec{b}],$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

- Aus der zyklischen Vertauschung der Vektoren und der Kommutativität des Skalarprodukts folgt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

- Das Spatprodukt kann als Determinante dargestellt werden:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

- Mit dem Spatprodukt kann überprüft werden, ob die drei Vektoren komplanar sind. D.h. dass die Vektoren $\vec{a}$ zu $\vec{b} \times \vec{c}$ orthogonal sind, also alle Vektoren in der selben Ebene liegen.

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ komplanar.}$$

Im Skriptum zur Vorlesung „Einführung in die Physikalischen Rechenmethoden I+II“ folgen an dieser Stelle Anwendungsbeispiele für Vektoren [7, S.61-66]. Unter anderem werden Strömungen durch eine Fläche, Rotation eines Körpers und das Volumen einer Einzelzelle besprochen.

8.4 Lineare Algebra: Vektorräume [8, S.230-252]

In der linearen Algebra wird der kleine Pfeil über dem Symbol eines Vektors nicht geschrieben.

8.4.1 Reelle Vektorräume [8, S.230-235]

Unter dem Begriff Vektor wurden bisher nur zwei- bzw. dreikomponentige Objekte, der Form

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

die Pfeile in der Ebene bzw. im Raum darstellen, besprochen. Rein formal betrachtet, handelt es sich um ein Objekt, welches eine Liste mit zwei bzw. drei Zahlen aufweist. Die Menge aller reellen Vektoren mit zwei Komponenten wird mit $\mathbb{R}^2$ und jene mit drei Komponenten mit $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Allgemein (mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$) gilt, dass die Menge aller reellen Vektoren mit n Komponenten, also Listen von n reellen Zahlen, als $\mathbb{R}^n$ bezeichnet wird.

Vektoren können addiert und auch mit reellen Zahlen, also Skalaren multipliziert werden, d.h. reelle Vielfache von Vektoren bilden.

- Für die Addition gilt: Die Summe zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ kann geschrieben werden als $u + v$.

Es gelten folgende Rechenregeln für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad (\text{Assoziativgesetz 1})$$

$$u + v = v + u \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

- Für die Skalarmultiplikation, also die Multiplikation eines Vektors $u \in \mathbb{R}^3$ und einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ (einem Skalar), wird λu geschrieben.

Es gelten folgende Rechenregeln für $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad (\text{Assoziativgesetz 2})$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad (\text{Distributivgesetz 1})$$

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \quad (\text{Distributivgesetz 2})$$

Als Nullvektor 0 wird jener Vektor bezeichnet, dessen Komponenten alle 0 sind. Die Menge V , für deren Elemente eine Addition und Skalarmultiplikation definiert ist und die oben stehenden Regeln erfüllt, wird reeller Vektorraum (oder Vektorraum über $\mathbb{R}$) genannt.

Beim Wort Vektorraum handelt es sich um einen Begriff, der eine abstrakte Struktur der Addition von Elementen und der Multiplikation von Elementen mit Skalaren zulässt, ohne sonstige Eigenschaften zu berücksichtigen. D.h. hier geht es um die lineare Struktur dieser Operationen, welche der linearen Algebra ihren Namen verleiht. Die Eigenschaft der Linearität und somit auch ihre Abstraktheit wird in sehr viele Gebieten der Physik, aber auch in anderen Wissenschaften genutzt.

Beispiel 8.4.1 Ein Polynom $P \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$P : (2x^2 - 3x + 2) + (3x^2 + 5x - 7) = 5x^2 + 2x - 5$$

kann wie folgt aufgefasst werden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Angesichts der Vektorraumstruktur, muss nicht zwischen P oder $\mathbb{R}^3$ unterschieden werden. Das bedeutet, dass die beiden Vektorräume zueinander isomorph sind. Der Isomorphismus zwischen P und $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

In der linearen Algebra ist ein Vektor als Element eines Vektorraums definiert. Daher kann jedes Polynom als Vektor aufgefasst werden. (vgl. [8, S.234])

8.4.2 Dimension, Linearkombinationen, Basis [8, S.236-243]

Nun folgt die Begutachtung der Struktur der Vektorräume. Dazu werden nun einige Definitionen und grundlegende Eigenschaften reeller Vektorräume (ohne Beweise) betrachtet.

Sei V ein reeller Vektorraum.

- „Kann jedes Element eines reellen Vektorraums eindeutig durch die Angabe von n reellen Zahlen festgelegt werden (und beschreibt umgekehrt jede beliebige Liste von n Zahlen ein Element von V), so nennen wir n die **Dimension** von V .“ [8, S.236] (Bemerkung: Für unendlichdimensionale Vektorräume ist die Funktionalanalysis zuständig. D.h. hier sind wir auf endlichdimensionale Vektorräume beschränkt.)
- „Sind $u, v, \dots \in V$ und $\lambda, \mu, \dots \in \mathbb{R}$, so nennen wir eine (endliche) Summe der Form

$$\lambda u + \mu v + \dots$$

eine **Linearkombination** (der Vektoren $u, v, \dots$ mit Koeffizienten $\lambda, \mu, \dots$). Vektorräume stellen genau die Struktur zu Verfügung die zum Bilden von Linearkombinationen nötig ist (und das ist, andersrum betrachtet, der Grund dafür, warum Vektorräume so wichtig sind).“ [8, S.236]

- „Ist n die Dimension von V , so kann eine Menge $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ von n Vektoren gewählt werden mit der Eigenschaft, dass jedes $u \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination ihrer Elemente dargestellt werden kann. Das bedeutet: Jeder gegebene Vektor $u \in V$ kann in der Form

$$u = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ne_n = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad (8.4)$$

geschrieben werden, wobei $c_1, c_2, \dots, c_n$ eindeutig bestimmte reelle Zahlen sind.

- Jede solche Menge B heißt **Basis** von V . Da sich jeder Vektor u bezüglich einer Basis B in der Form (8.4) schreiben lässt, sagen wir, dass eine Basis „den Vektorraum V aufspannt“.
- Die Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_n$ sind die Komponenten (oder Entwicklungskoeffizienten) des Vektors u bezüglich der Basis B . Die Aussage (8.4) drücken wir verbal so aus, dass u „in die Basis B entwickelt“ wird.

Tatsächlich besitzt jeder Vektorraum endlicher Dimension nicht nur eine Basis, sondern (unendlich) viele.“[8, S.236-237]

- „Der Sinn einer Basis besteht darin, einen Vektor durch seine Entwicklungskoeffizienten zu charakterisieren. Aufgrund der Entsprechung

$$u = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n \in V \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (8.5)$$

ergibt sich, dass jeder n -dimensionale reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann (d.h. zu diesem isomorph ist). Den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

dessen Komponenten die Entwicklungskoeffizienten des Vektors u in der Basis B sind, nennen wir die (Matrix-)Darstellung von u bezüglich der Basis B . Benötigen wir dafür eine eigene Bezeichnung, so schreiben wir

$$[u]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Die Identifizierung von V mit $\mathbb{R}^n$ ist dann durch die Abbildung $u \rightarrow [u]_B$ gegeben. Kurz zusammengefasst: Ist eine Basis B gegeben, so kann jedes Element von V durch einen (Spalten-)Vektor aus reellen Zahlen dargestellt werden.“[8, S.237-238]

Ein Vektorraum ist sehr abstrakt definiert, jedoch kann mithilfe der Identifizierung (8.5) Berechnungen im $\mathbb{R}^n$ (oder einer Teilmenge davon) durchgeführt werden. Konkrete Problemstellungen führen uns oft zu linearen Gleichungen bzw. lineare Gleichungssysteme im $\mathbb{R}^n$ (oder einer Teilmenge davon).

Skalarprodukt, Norm und Orthonormalbasis

Sei V ein (endlichdimensionaler) reeller Vektorraum, dann gilt für das Skalarprodukt, auch inneres Produkt genannt, der beiden Vektoren $u, v \in V$, angeschrieben als $u \cdot v$, folgendes: Seien $u, v, w \in V$ Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar.

$$u \cdot u \geq 0$$

$$u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$u \cdot v = v \cdot u$$

$$u \cdot (v + \lambda w) = u \cdot v + \lambda u \cdot w$$

Das Skalarprodukt ist die mathematische Grundlage für folgende Begriffe:

- Der Betrag eines Vektors, auch Norm eines Vektors genannt, ist definiert durch:
 $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
Es gilt:
 - $\|u\| \geq 0$
 - $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
 - u wird als Einheitsvektor (oder normierter Vektor) bezeichnet, wenn gilt: $\|u\| = 1$.
- Zwei Vektoren $u, v \in V$ stehen normal aufeinander, bzw. werden als zueinander orthogonal bezeichnet, wenn $u \cdot v = 0$ gilt.

In jedem n -dimensionalen reellen Vektorraum V kann eine Basis gewählt werden. Ist in diesem Vektorraum V zusätzlich ein Skalarprodukt definiert, wenn die Elemente der Basis Einheitsvektoren und diese (paarweise) orthogonal zueinander sind. So heißt eine Basis Orthonormalbasis (kurz ONB). Die Verwendung einer Orthonormalbasis zur Lösung konkreter Problemstellungen ist von großem Vorteil. Einige dieser Vorteile werden nun erwähnt:

- Durch die beiden Eigenschaften (Einheitsvektoren und paarweise orthogonal zueinander) kann „einfach“ eine ONB und damit eine Basis für jeden reellen Vektorraum gebildet werden. Bei n -dimensionalen Vektorräumen muss überprüft werden, ob die Basisvektoren linear unabhängig sind. (Bemerkung: Eine Menge heißt linear unabhängig, wenn keine trivialen linearen Beziehungen zwischen ihren Elementen bestehen.)
- Wenn eine ONB von V , welche auch Basis $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ von V ist, gut ermittelt wird, dann kann anschließend jeder Vektor $u \in V$ als Linearkombination ihrer Elemente dargestellt werden. So können die Entwicklungskoeffizienten $c_1, c_2, \dots, c_n$ mithilfe der Darstellung $c_j = e_j \cdot u$ leicht ermittelt werden. Das bedeutet, dass die Entwicklungskoeffizienten durch Bildung des Skalarprodukts mit dem entsprechenden Basisvektor berechnet werden kann.

- Die Identifizierung jedes n -dimensionalen reellen Vektorraums mit dem $\mathbb{R}^n$ (8.5) umfasst bezüglich einer Basis das Skalarprodukt, wenn eine ONB verwendet wird. Sei $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$ und $v = b_1e_1 + b_2e_2 + \dots + b_ne_n$, dann gilt:

$$u \cdot v = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

was genau dem Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ entspricht:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Mithilfe der Schreibweise für Basisvektoren $[u]_B$ und $[v]_B$ kann also die Gleichheit der oben stehenden Formeln geschrieben werden als:

$$u \cdot v = [u]_B \cdot [v]_B$$

8.4.3 Komplexe Vektorräume [8, S.244-247]

In Bereichen der Physik, wie beispielsweise der Quantentheorie, ist es notwendig Probleme in komplexen Vektorräumen (bzw. Vektorräumen über $\mathbb{C}$) zu betrachten. Hierbei gelten ähnliche Regeln wie in reellen Vektorräumen. Der große Unterschied besteht darin, dass die Skalare nun komplexe Zahlen sind.

Ein komplexer Vektorraum ist die Menge $\mathbb{C}^n$ aller n -komponentigen Listen komplexer Zahlen

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $u_n \in \mathbb{C}$. Die Rechenregeln für die Addition bzw. die Skalarmultiplikation von Vektoren im reellen Vektorraum, kann direkt für Vektoren im komplexen Vektorraum übernommen werden. So können auch die Begriffe Dimension, Linearkombination und Basis übernommen werden. Die einzige Änderung hierbei besteht darin, dass Skalare nun komplexe Zahlen sind.

Beim Skalarprodukt, im Komplexen besser inneres Produkt genannt, ist Vorsicht geboten. Statt $u \cdot v$ schreiben wir $\langle u, v \rangle$.

Seien $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im $\mathbb{C}^n$, dann ist deren inneres Produkt definiert als

$$\langle u, v \rangle = u_1^*v_1 + u_2^*v_2 + \dots + u_n^*v_n.$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Komponenten des ersten Vektors komplex zu konjugieren sind (komplex konjugiert = u^*). Somit ist das innere Produkt $\langle u, u \rangle$ immer reell (und ≥ 0).

Der Betrag (bzw. die Norm) $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ des komplexen Vektors u ist gegeben durch

$$\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_n|^2}$$

und ebenfalls reell (und ≥ 0).

Rechenregeln für das innere Produkt:

Seien $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$$

$$\langle v + \lambda w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \lambda^* \langle w, u \rangle$$

Auch die Orthonormalbasis der komplexen Vektorräume kann von der der reellen Vektorräumen übernommen werden. Jedoch wird die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten nun wie folgt angeschrieben:

$$c_j = \langle e_j, u \rangle$$

Als endlichdimensionaler Hilbertraum wird ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit innerem Produkt bezeichnet. Diese Art an Räumen ist essentiell für die Quantentheorie, da ihre Elemente Zustände beschreiben, die ein System einnehmen kann. Der wohl einfachste, aber nichttriviale Hilbertraum ist der $\mathbb{C}^2$. Er wird dazu verwendet, die einfachsten aller Systeme, beispielsweise Qubits (z.B: der Spin des Elektrons), zu beschreiben. Um das Rechnen hierbei zu erleichtern, hat sich folgende Schreibweise eingebürgert:

Die (Dirac'sche) Bra-Ket-Schreibweise im $\mathbb{C}^2$

Die Standardbasis (bzw. ONB) des $\mathbb{C}^2$ bilden die zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, welche in der Quantentheorie mit den Symbolen

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, da dies eine Ja-Nein-Funktion charakterisieren. Eine Ja-Nein-Funktion beschreibt das Verhalten der einfachsten quantenmechanischen Systeme, der Qubits. Das Symbol $|\rangle$ ist typisch für die Physik, bzw. die Quantentheorie. Nun wird in der Bra-Ket-Schreibweise jedes Element $u \in \mathbb{C}^2$ in der Form $|u\rangle$ angeschrieben und Ket genannt. Das innere Produkt wird nun als $\langle u|v\rangle$ angeschrieben.

Für die Basisvektoren gilt

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1 \text{ und } \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0,$$

wobei das nur bedeutet, dass es sich um eine ONB handelt. So kann jedes Element des Hilbertraums $\mathbb{C}^2$ mithilfe dieser Basis entwickelt werden, d.h.

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle$$

bzw. umgekehrt gilt auch:

$$a = \langle 0|u\rangle \text{ und } b = \langle 1|u\rangle.$$

Lautet nun zusätzlich ein weiteres Element des Hilbertraums

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = r|0\rangle + s|1\rangle$$

dann ist das innere Produkt $\langle u|v\rangle$ definiert durch:

$$\langle u|v\rangle = a^*r + b^*s.$$

So wird $\langle u|$ als Bra bezeichnet und fordert somit auf das innere Produkt zu bilden.

Anschließend werden in dem hier verwendeten Buch „Mathematische Grundlagen im Lehramtsstudium Physik“ [8] die Themen Matrizen, lineare Gleichungssysteme, lineare Operatoren, Eigenwerte und Eigenvektoren im Rahmen des Gebiets der linearen Algebra behandelt. Diese Themen werden hier nicht mehr besprochen, da sie für diese Arbeit nicht relevant sind.

8.4.4 Transformationsverhalten von Vektoren [5] [6]

Das Transformationsverhalten von Vektoren ist in der Physik eine häufig verwendete Eigenschaft. In diesem Abschnitt ist davon auszugehen, dass die Definitionen und Rechenregeln der Matrizenrechnung bekannt sind (nachzuschlagen in „Mathematische Grundlagen für das Lehramt Physik“ [8, Kapitel 16]). Mit der Methode der Transformation versucht man „Indizesschlachten“ beim Rechnen zu vermeiden.

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Da jeder Vektorraum eine Basis besitzt, z.B. die Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\} \in V$, gibt es eindeutig bestimmte Elemente (z.B. Zahlen) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in V$, sodass gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

bzw. als Spaltenvektor in einfachster Form dargestellt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Aus der Definition der Basis ergibt sich, dass eine zweite Basis für denselben Vektorraum gefunden werden kann. Diese zweite Basis wird als $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ definiert.

So gibt es wieder Elemente $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$, sodass gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v'_i.$$

Daher muss $[v]_B = [v']_{B'}$ gelten. Da sowohl die v_i als auch die v'_i im selben Vektorraum liegen, können die v_i bzgl. B' dargestellt werden. Es gibt also nun Elemente $t_{ij} \in V \times V$ um $v_1, \dots, v_n$ bzgl. B' eindeutig darzustellen.

$$v_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} v'_j$$

Dabei kann auch geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}.$$

Da sowohl v_i als auch v'_i im selben Vektorraum enthalten sind, gilt auch, dass v'_i bzgl. B dargestellt werden kann. Dazu werden lediglich die Elemente $\tilde{t}_{ji}$ bzgl. der Basis B benötigt und es kann geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{11} & \dots & \tilde{t}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{t}_{n1} & \dots & \tilde{t}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Da diese wieder linear unabhängig bzgl. B' sind, gilt $\tilde{T} = T^{-1}$ (für T = Matrix mit den Einträgen t_{ij} , also eine Transformationsmatrix). Nun kann die Transformation ineinander einfach angeschrieben werden als:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n t_{ij} v'_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) v'_j.$$

Das gesuchte Transformationsverhalten ist also:

$$\lambda'_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \lambda_i.$$

Da $T_{ij} = T_{ij}^\dagger$ gilt, kann vereinfacht

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $S = T^\dagger$ oder kurz $[v']_{B'} = S \cdot [v]_B$ geschrieben werden.

Eine der einfachsten Anwendungen einer Basistransformation ist eine Koordinatentransformation beispielsweise vom kartesischen Koordinatensystem zum Koordinatensystem der Polarkoordinaten. Typische Koordinatentransformationen bzgl. der kartesischen Koordinaten sind:

- Verschiebung (Translation): $v' = v + c$ mit der Verschiebungskonstanten c

- Rotation: $v' = Rv$ mit der Drehmatrix $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

und $R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ um den Drehwinkel α

- Spiegelung: $v' = Sv$ mit der Spiegelungsmatrix $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

und $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Es können mehrere Transformationen hintereinander ausgeführt werden. So ist beispielsweise die Drehspiegelung eine Hintereinanderausführung einer Drehung und einer Spiegelung.

Es ist wichtig zu beachten, dass eine Transformation der Basisvektoren auch immer eine Transformation der Koordinaten des betrachteten Vektors zur Folge hat. Dabei bleibt die Information des Vektors erhalten.

Sehr häufig wird das Transformationsverhalten von Vektoren (bzw. Matrizen) in der Relativitätstheorie verwendet, da hier oftmals zwischen Bezugssystemen gewechselt wird.

Ein in der Physik oft verwendeter Operator ist das Kronecker-Delta δ_{ij} . Das Kronecker-Delta definiert eine symmetrische Matrix in jedem $\mathbb{R}^n$, $n > 0$ mit der Transformationseigenschaft $\delta'_{ij} = t_{ik}t_{jl}\delta_{kl} = t_{ik}t_{jk} = \delta_{ij}$ und ist ein Tensor zweiter Stufe.

Exkurs: Tensorrechnung

Das Transformationsverhalten kann auf Tensoren verschiedener Stufe angewandt werden. Es folgt nun ein kurzer Einblick in die Tensorrechnung.

Größen, mit deren Hilfe man Skalare, Vektoren, Matrizen bzw. weitere Größen (analoge Struktur) in ein einheitliches Schema einordnet, um physikalische und mathematische Zusammenhänge zu beschreiben, sind Tensoren. Sie sind durch ihre Transformationseigenschaften bzgl. orthogonalen Transformationen definiert. Bei diesen Transformationen handelt es sich beispielsweise um Drehungen oder Drehspiegelungen. Primär wird die Frage „Was ändert sich bzw. was ändert sich nicht, wenn sich das Bezugssystem ändert?“ behandelt.

Tensoren die in Grundlehrveranstaltungen gelehrt werden:

- Tensor 0ter Stufe: Skalar
- Tensor 1ter Stufe: Vektor
- Tensor 2ter Stufe: Matrix

So hat im $\mathbb{R}^3$ ein Tensor 0ter Stufe $3^0 = 1$ Komponente (Skalar), ein Tensor 1ter Stufe $3^1 = 3$ Komponenten (Vektor im $\mathbb{R}^3$) und ein Tensor 2ter Stufe $3^2 = 9$ Komponenten (3×3 -Matrix). Wenn dies weitergeführt wird, so ergibt es, dass ein Tensor n ter Stufe 3^n Komponenten.

8.5 Rückblick

ad Grundlagen

In der Physik ist der Begriff des Vektors grundlegend und essentiell. Es gibt sehr viele Gebiete, angefangen bei der klassischen Mechanik, die bereits in jungen Jahren in der Schule gelehrt wird, in denen die Vektorrechnung angewandt wird. So wird hier vorerst der Begriff des Vektors definiert und seine unterschiedlichen Interpretationen erörtert.

ad Koordinatensysteme

In diesem Abschnitt wird darauf eingegangen, dass unterschiedliche Problemstellungen in der Physik unterschiedliche Lösungsansätze benötigen, um besser damit umgehen zu können und die Berechnungen einfacher zu gestalten. Dafür wird normalerweise ein passendes Koordinatensystem definiert. Um hier einige Beispiele und auch die Grundlagen dafür darzulegen, wird in diesem Abschnitt das kartesische Koordinatensysteme im zwei- bzw. dreidimensionalen reellen Raum besprochen.

ad Vektoralgebra

In diesem Abschnitt geht es primär um die Rechenoperationen und Eigenschaften, die für das Hantieren mit Vektoren benötigt werden. So werden die Eigenschaften von Vektoren wie parallel, invers oder gleich definiert. Nach der Besprechung der Vektoraddition (-subtraktion) und der Multiplikation mit einem Skalar - graphisch und arithmetisch, die Definitionen, Rechenregeln werden die Darstellungen und Anwendungen der folgenden Operationen erarbeitet.

- Skalarprodukt
- Vektorprodukt
- Spatprodukt

ad Lineare Algebra: Vektorräume

Hier wird als Erstes der reelle Vektorraum besprochen. Nachdem der Begriff Vektor bisher eher im geometrischen Sinn verwendet wurde, folgt eine Erörterung dessen und der zugehörigen Rechenregeln für die Addition zweier Vektoren und der Multiplikation mit einem Skalar rein formal. Anschließend wird klargestellt, dass ein Vektor nicht nur ein geometrisches Objekt sein muss, sondern auch Polynome darstellen kann, da auch ein Funktionsraum ein Vektorraum ist.

Nun wird mehr in die üblichen Bereiche der linearen Algebra eingegangen und allgemein die Begriffe Dimension, Linearkombinationen und Basis für n -dimensionale reelle Vektorräume betrachtet. Es folgen Definitionen, sowie die Operatoren Skalarprodukt und Norm im Allgemeinen. Die Orthonormalbasis (kurz: ONB) stellt nun die Verbindung von Basis und Skalarprodukt her. In der Physik sind passende Orthonormalbasen sehr gefragt, um „schöne“ Vektorräume zur Bearbeitung von Problemstellungen zu erzeugen.

Ein in der Physik, insbesondere in der Quantentheorie, häufig verwendeter Vektorraum, zur Bearbeitung von Problemstellungen, ist der komplexe Vektorraum. Man kann Definitionen, Rechenregeln und Eigenschaften fast vollständig aus den reellen Vektorräumen übernehmen.

Natürlich sind die Einträge der Vektoren komplex, also in $\mathbb{C}$ und somit sind die Vektoren selbst komplex, daher auch in $\mathbb{C}^n$. Besonders bei der Ausführung des inneren Produkts ist Achtsamkeit geboten.

Da in der Quantentheorie hauptsächlich in komplexen Vektorräumen gearbeitet wird, hat sich die sogenannte Dirac-Schreibweise, auch Bra-Ket-Schreibweise genannt, eingebürgert. Es wird noch in groben Zügen dargestellt wie diese Schreibweise funktioniert und eingesetzt wird.

Abschließend für diesen Abschnitt wird das Transformationsverhalten von Vektoren allgemein bzgl. einer Basistransformation beschrieben und anschließend einige Beispiele wie auch ein kurzer Exkurs in die Tensorrechnung gegeben.

9 Bezug zum Vektorbegriff in der Mathematik und in der Physik

Es ist nicht einfach einen Vektor außerhalb der Hochschulmathematik zu definieren. In der Mathematik ist ein Vektor axiomatisch definiert und nichts Anderes als ein Element eines Vektorraums ($\vec{v} \in V$). Die Darstellung von Vektoren ist in der Physik und Mathematik sehr ähnlich. Für einen Vektor wird das Symbol $\vec{v}$ verwendet und für den Betrag wird $v = |\vec{v}|$ geschrieben. Wenn in der Mathematik klar ist, dass sich die lineare Algebra momentan nur mit Vektoren befasst, so wird der Pfeil über dem Symbol für Vektoren prinzipiell nicht geschrieben.

In der Physik werden Vektoren ähnlich behandelt wie in der Mathematik. Es gelten die gleichen Rechenregeln und Eigenschaften. Jedoch werden Vektoren in der Physik spezifisch eingesetzt. Darauf möchte ich nun eingehen.

9.1 Vektorielle Größen in der Physik [4] [7] [8] [25] [26]

Sowohl in der Schule als auch am Anfang des Studiums wird sich mit sogenannten vektoriellen Größen beschäftigt. Dazu zählen in der klassischen Physik beispielsweise Geschwindigkeit, Kraft, Impuls und elektromagnetische Felder. Diese vektoriellen (oder gerichteten) Größen sind an geometrische Objekte (z.B. starrer Körper) gebunden und können graphisch dargestellt werden. Dabei kann der vektorielle Charakter dieser Größen geometrisch interpretiert und die vektoriellen Größen als Punkt oder Pfeil dargestellt werden. Vektorielle Größen sind über ihren Betrag und ihre Richtung definiert. Da sie trotzdem Vektoren sind, hat die Definition 8.1.1 eine Einschränkung des allgemeinen Vektorbegriffs zu Folge. Das bedeutet, dass mit vektoriellen Größen rein mathematisch gesehen wie üblich gerechnet werden kann, sie jedoch Besonderheiten aufweisen. Den ausschlaggebenden Unterschied macht die Eigenschaft der Verschiebung. Dies ist am einfachsten anhand eines Beispiels zu veranschaulichen. Dazu verwenden wir Abbildung 36 aus Kapitel 5.

In Abbildung 36 ist ein starrer Körper zu sehen, der mittig einen Drehpunkt besitzt und an dem zwei gleichgroße Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ an unterschiedlichen Punkten angreifen. Durch die Positionen der Kräfte dreht sich dieser Körper. Werden nun diese beiden Kraftpfeile zum Drehpunkt, an die in Abbildung 36 strichlierte Linie, parallel verschoben, so steht dieser Körper nun still, da sich ja die Kräfte am Drehpunkt aufheben. Das bedeutet, dass auch wenn in der Physik vektorielle Größen als Pfeile zur Veranschaulichung in räumlichen Skizzen eingetragen werden, stehen diese nicht für eine räumliche Verschiebung.

Erklärt werden kann die Unverträglichkeit des Parallelverschiebens wie folgt: Die Kräfte, die an dem starren Körper greifen, sind keine Elemente des Ortsraumes (Vektorraum in der sich der Körper befindet), sondern eines eigenen Vektorraums. Dieser ist im Allgemeinen einem Punkt im Ortsraum zugewiesen, üblicherweise jenem Punkt im Raum, an dem sich der Anfangspunkt des Kraftvektors am Körper befindet. Das heißt, dass zwei Kräfte die an unterschiedlichen Punkten an einem Körper greifen, sich in zwei unterschiedlichen Vektorräumen befinden. Zwei Vektoren können nur dann miteinander interagieren (Rechenoperationen durchführen), wenn sie Element desselben Vektorraums sind. Das kann durch Parallelverschieben erzielt werden. Dafür können vektorielle Größen jedoch nur entlang ihrer Wirkungslinien (Verlängerung des Vektorpfeils in die selbe Richtung) verschoben werden.

9.2 Koordinatentransformation [6] [25]

Die Komponenten eines Vektors müssen nicht immer Koordinaten sein. Seine Informationen können, wie in Abschnitt 8.4 gezeigt, auch Funktionen darstellen. Üblicherweise werden spezielle Transformation verwendet, bei denen bestimmte Voraussetzungen, wie beispielsweise Differenzierbarkeit, Stetigkeit oder Formtreue, berücksichtigt werden müssen.

In einem beliebig gewählten Koordinatensystem kann jeder Vektor durch seine Komponenten eindeutig bestimmt werden. Damit sind die wesentlichen Eigenschaften wie Gleichheit und Addition, aber auch die Invarianz von Vektoren bzgl. einer Koordinatentransformation klar ersichtlich. Somit sind die Transformationseigenschaften eines Vektors festgelegt. Ein Vektor mit den Komponenten x_i im Koordinatensystem mit den Basisvektoren v_i muss in eindeutiger und definierter Weise mittels der Transformationsvorschrift, also mithilfe der Transformationsmatrix, im Koordinatensystem mit den Basisvektoren v'_i , die Komponenten x'_i aufweisen. Das bedeutet, dass ein Vektor als Objekt mit seinen Informationen beim Wechsel des Koordinatensystems unverändert bleibt. Das gilt auch bei einem Wechsel von beispielsweise kartesischen zu nicht-kartesischen Koordinatensystemen (z.B. Polarkoordinaten). Das bedeutet unter anderem auch, dass Vektorgleichungen unabhängig vom Koordinatensystem sind. So gilt beispielsweise die Newton'sche Bewegungsgleichung in jedem Koordinatensystem.

Passend zur Problemstellung wird ein Koordinatensystem in einem Raum gewählt und eingeführt. In Zusammenhang damit wird in jedem Punkt des Raumes ein Basisvektorsystem definiert. Das bedeutet, dass für jeden Punkt in diesem Raum ein Satz zugehöriger Basisvektoren zu finden ist. Wird nun eine Transformation von einem Koordinatensystem in ein anderes durchgeführt, so werden beim gleichen Punkt im Raum im Allgemeinen andere Basisvektoren vorhanden sein. D.h. eine Transformation des Koordinatensystems hat eine Transformation der Basisvektoren zu Folge. Man kann nun auch das Koordinatensystem wählen und dann ergeben sich mit dem oben genannten Zusammenhang die Basisvektoren passend dazu.

Wenn nun in einem Raum ein Vektor dargestellt wird, muss er sich auf die Basisvektoren und somit auch auf das Koordinatensystem beziehen. Nachdem mit diesem Vektor anschließend in ein anderes Koordinatensystem übergegangen wird, hat die Koordinatentransformation auch eine Basisvektortransformation zu Folge. Das bedeutet, dass sich passend zur Transformation die Komponenten des Vektors ändern. Die Komponenten des Vektors beziehen sich wieder auf die Basisvektoren. Wird nun von einem Basisvektorsystem in ein anderes übergegangen, so ändern sich dementsprechend die Komponenten des betrachteten Vektors. Diese Basisvektoren sind nun eben jene, auf die sich die Vektoren beziehen, die man betrachtet. Sie beziehen sich nicht direkt auf die Koordinaten, sondern auf die Basisvektoren, die man diesem Koordinatensystem zuordnen kann.

Wird z.B. ein Vektorfeld, als ein Feld, das in jedem Punkt einen Vektor besitzt, wie beispielsweise ein elektrisches Feld, betrachtet, dann werden die Vektoren an den jeweiligen Punkten durch ihre Komponenten in Bezug auf die dort vorhandenen Basisvektoren beschrieben. Bei kartesischen Koordinaten ist dieses Problem einfach zu handhaben, da hier die Basisvektoren überall gleich sind, jedoch sind die Basisvektoren bei beispielsweise ebenen Polarkoordinaten überall anders. Das heißt, dass in ebenen Polarkoordinaten, gleiche Vektoren (gleiche Länge, gleiche Richtung) an unterschiedlichen Stellen im Raum unterschiedliche Komponenten aufweisen.

Für die meisten Probleme sind kartesische Koordinaten nicht geeignet. Ein Koordinatensystem wird so gewählt, dass es zur Problemstellung passt. Dazu werden oftmals Symmetrien verwendet, beispielsweise sphärische Symmetrien, bei denen bestimmte Koordinatensysteme, z.B. Kugel- oder Zylinderkoordinaten, von Vorteil sind.

Weitere Transformationen

Es folgt nun eine kurze Erläuterung verschiedener Transformationen.

Grob kann zwischen geometrischen Transformation, Koordinatentransformation, Integraltransformation und diskrete Transformation unterschieden werden.

Unter geometrische Transformationen werden Transformationen verstanden, welche unter anderem auch in der Schule unterrichtet werden, wie z.B. Translation, Rotation und Verschiebung.

Unter Koordinatentransformationen werden beispielsweise die Zusammenhänge bei einer Änderung des Koordinatensystems verstanden (siehe oben).

Integraltransformationen gibt es mehrere. Dazu zählen die Fourier-, Laplace- und Hamilton-Transformation. Hierbei ist es wichtig, dass der Integralkern eine Funktion mit ihrer Ziel- und Zeitvariablen ist.

Zu den diskreten Transformationen zählen unter anderem die diskreten Fouriertransformationen.

9.3 Resümee [8] [25] [26]

Es ist nicht außer Acht zu lassen, dass die Mathematik für die Physik lediglich ein Werkzeug ist. In der Geschichte hat sich schon häufig gezeigt, dass die Probleme der Physik, wie z.B. die Beschreibung von Kräften, die Mathematik vorangetrieben haben. Auf der anderen Seite hat auch die Mathematik schon unzählige Erkenntnisse erlangt, die für die Physik vorantreibend waren. Unter anderem lag dies daran, dass es viele Persönlichkeiten in der Geschichte gab und heute noch gibt, die in beiden Wissenschaftsfeldern tätig waren bzw. sind.

Die Anwendungen der linearen Algebra und speziell des Vektorbegriffs sind in der Physik unermesslich.

Neben den vektoriellen Größen, die besonders in der klassischen Physik notwendig sind, gibt es noch den allgemeinen Begriff der Vektoren. Dieser findet in der Relativitätstheorie und Quantenphysik Anwendung. Der Vektorbegriff ist für einige Anwendungen in der Physik nicht ausreichend. Daraus entwickelte sich unter anderem die Funktionalanalysis. Sehr wichtig ist dabei das Transformationsverhalten von Vektoren. Hierbei ist der Kern der Sache, dass die Informationen eines Vektors, wie z.B. Koordinaten, Funktionen, Operatoren etc. bei der Transformation erhalten bleiben. Somit können die Informationen je nach Problemstellung in einem Bezugssystem geändert werden, so dass die Bearbeitung dieses Problems vereinfacht wird.

10 Resümee

Der Vektorbegriff ist sowohl in der Mathematik als auch in der Physik ein essentieller Grundbegriff der linearen Algebra.

Erste Berührungspunkte mit einem elementaren Vektorkonzept können bereits in der Sekundarstufe I im Physikunterricht stattfinden. Dabei wird beim Thema der Newton'schen Mechanik auf die vektoriellen Größen geachtet und mithilfe des „Münchener Konzepts der Mechanik“ die ersten konzeptuellen Schritte der geometrischen Vektoraddition eingeführt. Die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler liegen bei diesem Thema besonders beim Richtungsaspekt des Vektorcharakters. Dieser verschwindet häufig und ist auch in kaum einem der betrachteten Schulbücher zu finden. So wird darin auch kein Unterschied zwischen dem Betragsaspekt und dem Vektor, beispielsweise bei Geschwindigkeit und Tempo, getätigt. Durch die Nichtunterscheidung bzw. untergeordneten Charaktereigenschaften des Vektorbegriffs kommt es häufig zu Problemen im Unterricht, wie beispielsweise bei der Beschreibung von Kreisbewegungen. Aus fachlicher und fachdidaktischer Sicht, ist hier darauf zu achten, dass die Newton'sche Mechanik korrekt und altersgerecht aufbereitet wird.

In der Sekundarstufe II ist im Mathematikunterricht die Vektorrechnung laut Lehrplan ein verpflichtendes Themengebiet. Dabei wird mittels des Lehrplans und des (erweiterten) Katalogs der Grundkompetenzen sehr genau vorgegeben was gelehrt werden muss und was Schülerinnen und Schüler nach dem Unterricht können sollen. Diese werden teilweise auch in der standardisierten Diplom- und Reifeprüfung (SDRP) abgefragt. Momentan (Stand 2019) werden über die „Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG“ die beiden Schulbücher „Mathematik verstehen 5“ und „Lösungswege 5“ für die neunte Schulstufe angeboten. Diese haben prinzipiell einen sehr ähnlichen Aufbau. Beide Schulbücher verwenden die arithmetische Auffassung von Vektoren als n -Tupel und interpretieren die daraus folgenden Zahlenpaare bzw. -tripel geometrisch als Punkt und Pfeil. Anschließend wird auf die Rechenregeln und die Anwendungen von Vektoren eingegangen. Der wesentliche Unterschied zwischen den Büchern ist, dass das Buch „Lösungswege 5“ den Vektor als n -Tupel und das Buch „Mathematik verstehen 5“ den Vektor als Zahlenpaar definiert.

Da im Mathematikunterricht zumeist lineare Gleichungssysteme vor der Vektorrechnung erarbeitet werden, ist der algebraische Ansatz, der sich auch in den aktuellen Schulbüchern findet, sinnvoll. Im Physikunterricht wird hauptsächlich der Zugang des Pfeilklassenmodells genutzt, da hier rein phänomenologisch und somit geometrisch argumentiert wird. Um einen angemessenen Einblick in die Größe des Vektorbegriffs zu geben, ist es sinnvoll sowohl das arithmetische als auch das Pfeilklassenmodell anzuwenden. Ein Modell alleine kann nicht die Vielfältigkeit des Vektorbegriffs in der Mathematik und in der Physik vermitteln.

In den Grundlehrveranstaltungen des Diplomstudiums Lehramt Mathematik wird der Vektorbegriff als Grundbegriff der linearen Algebra kennengelernt. Dabei wird der Begriff vom zwei- bzw. dreidimensionalen reellen Raum auf den endlich-dimensionalen reellen Raum verallgemeinert und anschließend der Schritt zum allgemeinen Vektorbegriff getätigt. Der Vektor wird als Element eines Vektorraums (über einem Körper) definiert. Es handelt sich hier um einen axiomatischen Zugang. Das bedeutet, dass von den algebraischen Grundlagen wie den Körperaxiomen über die analytische Geometrie und den Vektorraum die Säulen der linearen Algebra aufgebaut wird.

Die lineare Algebra ist im Schulstoff nie direkt präsent, jedoch sind ihre Grundlagen im Mathematikunterricht indirekt vorhanden. Der Aufbau der Zahlenmengen, die Rechenregeln von Vektoren oder die geometrischen Eigenschaften von Geraden werden im Mathematikunterricht behandelt. Natürlich ist der Aufbau im Mathematikstudium axiomatisch und nicht unbedingt intuitiv. Im Diplomstudium Lehramt Mathematik wird nicht nur gelehrt direkte Schulinhalte zu vermitteln, sondern lernt auch die hochschulmathematischen Darstellungen und Zugänge für die schulmathematischen Themengebiete kennen. Das Augenmerk des Curriculums liegt darauf zu jedem Themenbereich neben den hochschulmathematischen Lehrveranstaltungen, die dazugehörigen schulmathematischen Vorlesungen und Übungen anzubieten. Somit wird neben dem Erwerb des hochschulmathematischen Wissens, die fachdidaktischen Aspekte der Themengebiete in Bezug auf das Berufsleben gelehrt.

In den Grundlehrveranstaltungen des Diplomstudiums Lehramt Physik lernt man den Vektorbegriff erstmals als geometrischen Begriff, nämlich in Bezug zu vektoriellen Größen kennen. Der anfängliche Aufbau ist ähnlich zum Zugang des Pfeilklassenmodells, welches bis vor einigen Jahren im Mathematikunterricht verwendet wurde. Mit der Abstraktion in den endlich-dimensionalen reellen Raum bzw. dann auch komplexen Vektorraum findet die lineare Algebra Einzug in das Physikstudium. Dabei wird sehr darauf geachtet, nach der Einführung einer Eigenschaft sofort eine Anwendung damit zu verknüpfen. Dabei ist das Transformationsverhalten von Vektoren wohl eines der größten Anwendungsgebiete in der Physik.

Die Mathematik ist das Werkzeug der Physik. Die in der Mathematik vorherrschenden Definitionen und Eigenschaften des Vektorbegriffs bzw. der linearen Algebra sind auch in der Physik allgemein gültig. Es ist nicht außer Acht zu lassen, dass im Bereich der linearen Algebra die Mathematiker und Mathematikerinnen und Physiker und Physikerinnen in der Vergangenheit sehr eng zusammengearbeitet haben und dieses Themengebiet von den Bedürfnissen der Physik vorangetrieben worden ist. In der Newton'schen Mechanik bzw. der klassischen Physik ist der geometrische Aspekt des Vektorbegriffs essentiell, unter anderem auch für die Darstellung der Szenarien. Dabei muss jedoch aufgepasst werden, dass das Modell der Verschiebung von Vektoren bei den vektoriellen Größen nicht immer korrekt ist.

In der Physik wird versucht passend zu Problemstellungen Vektorräume zu definieren. Dazu werden gerne Symmetrien oder andere Eigenschaften wie z.B. Stetigkeit oder Differenzierbarkeit der Funktionen vorausgesetzt. Dazu ist eines der wichtigsten Werkzeuge aus der Mathematik die Koordinatentransformation.

Somit kann man den Vektorbegriff, um ihn in all seinen Facetten zu verstehen, nicht nur von einer Seite aus betrachten. Sowohl die Mathematik als auch die Physik bzw. sowohl die arithmetische Auffassung als auch das Pfeilklassenmodell wird zur Betrachtung und Untersuchung des Vektorbegriffs benötigt. Das bedeutet, dass sowohl die Theorie als auch die Anwendung des Vektorbegriffs für ein umfassendes Verständnis notwendig sind.

Literatur

- [1] Prof. Dr. Martin Hopf; Prof. Dr. habil. Thomas Wilhelm; Dr. Christine Waltner; Dr. Verena Tobias; Prof. Dr. Dr. Hartmut Wiesner. Einführung in die Mechanik. Abgerufen am 01.01.2020.
- [2] Rechtsinformationssystem Bundesrecht. Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne - allgemeinbildende höhere Schulen - Anlage A. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2018-09-01>, Fassung vom 01.09.2018. Abgerufen am 30.12.2019.
- [3] Hans-Wolfgang Henn; Andreas Filler. *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015.
- [4] Günther Malle. Ein didaktisch orientiertes Vektorkonzept. *ÖMG (Österreichische Mathematische Gesellschaft) Didaktikheft Band 40*, 2007. Abgerufen am 03.01.2020.
- [5] Hermann Schichl; Roland Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. edition, 2011.
- [6] Gerd Fischer. *Lineare Algebra - Eine Einführung für Studienanfänger*. VIEWEG+TEUBNER, 17. edition, 2010.
- [7] Univ. Prof. Dr. Christoph Dellago. Skript zur Vorlesung Einführung in die Physikalischen Rechenmethoden I. [YouTube] <https://www.youtube.com/playlist?list=PLrWrjvhC1dob86eUq7ZE2JqCmi2WKosrm>, Stand: 15.06.2016. Abgerufen am 01.01.2020.
- [8] Franz Embacher. *Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik*. Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2. edition, 2011.
- [9] Günther Malle. Was ist ein Vektor? Antworten aus der Geschichte der Mathematik. *ÖMG (Österreichische Mathematische Gesellschaft) Didaktikheft Band 29*, 1998. <https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1998%20Band%2029/Malle1998.pdf>, Abgerufen am 03.01.2020.
- [10] Sonja Mayrhofer. Die Vektorrechnung als Stoffgebiet in der österreichischen AHS. Diplomarbeit, Universität Wien, 2016.
- [11] Heidi Redelsteiner. Die Entwicklung der Vektorrechnung in der Oberstufe von der Schulreform 1967 bis zur Zentralmatura. Diplomarbeit, Universität Wien, 2011.
- [12] Prof. Dr. HorstSchecker; Prof. Dr. Thomas Wilhelm; Univ.-Prof. Dr. Martin Hopf; Prof. Dr. Dr. h.c. Reinders Duit. *Schülervorstellungen und Physikunterricht: Ein Lehrbuch für Studium, Referendariat und Unterrichtspraxis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. edition, 2018.
- [13] Christian Mašin; Gerald Grois. *Physik verstehen 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 1. edition, 2019.
- [14] Martin Apolin. *Big Bang 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 1. edition, 2016.
- [15] Peter Novak Johannes Reitingner; Bernhard Fischer. *Impuls Physik 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 1. edition, 2015.

- [16] OStR Dr. Franz Gollenz; HR Mag. Gustav Breyer; Mag. Hans-Haimo Tentschert; Dr. Erich Reichel. *Physik 2*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 1. edition, 2012.
- [17] BMBWF (Bundesministerium für Bildung Wissenschaft und Forschung). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=861&token=96731e3efb9cea71397b3063054a604396f213a7>, Stand: April 2019. Abgerufen am 30.12.2019.
- [18] Lehrplangruppe Mathematik AHS Modulare Oberstufe. Erweiterter Grundkompetenz-Katalog AHS Oberstufe. <https://www.bg-rams.ac.at/fileadmin/bgrams/Gegenstaende/Mathematik/grundkompetenzen-erweitert-20130924.pdf>, Stand: September 2013. Abgerufen am 30.12.2019.
- [19] Gilbert Greefrath; Reinhard Oldenburg; Hans-Stefan Siller; Volker Ulm; Hans-Georg Weigand. *Didaktik der Analysis : Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. edition, 2016.
- [20] Privatdoz. Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger. Skript zur Vorlesung Einführung in die Fachdidaktik. Moodle-Zugang der Universität Wien, Wintersemester 2018/19.
- [21] Bernhard Salzger; Andreas Ulovec Günther Malle; Maria Koth; Helge Woschitz; Sonja Malle. *Mathematik verstehen : 5, Schülerbuch*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 1. edition, 2017.
- [22] Philipp Freiler; Julia Marsik; Markus Olf; Rainer Schmid-Zartner; Markus Wittberger. *Lösungswege Mathematik 5, Schülerbuch*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2. edition, 2015.
- [23] Jörg Liesen; Volker Mehrmann. *Lineare Algebra - Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [24] Björn Schwarz; Philip Herrmann. Bezüge zwischen Schulmathematik und Linearer Algebra in der hochschulischen Ausbildung angehender Mathematiklehrkräfte - Ergebnisse einer Dokumentenanalyse. *Mathematische Semesterberichte) Didaktikheft Band 29*, 2015.
- [25] ao. Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. Paul Wagner. Skript zur Vorlesung Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung I. [YouTube] <https://www.youtube.com/playlist?list=PLrWrjvhC1doYFByG82bJp5mGw-ZV00CUm>, Stand: 01.12.2018. Abgerufen am 25.01.2020.
- [26] Prof. Dr. Heinz-Wilhelm Alten; Dr. Alireza Djafari Naini; Prof. Dr. Bettina Eick; Prof. Dr. Menso Folkerts; Pfor. Dr. Hartmut Schlosser; Dr. habil. Karl-Heinz Schlote; Heiko Wesemüller-Kock; Prof. Dr. Hans Wußring. *4000 Jahre Algebra; Geschichte-Kulturen-Menschen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. edition, 2014.

Abbildungsverzeichnis

1	„Ein Jongleur arbeitet mit zwei Bällen gleichzeitig. Die Bälle befinden sich gerade in der Luft auf der gleichen Höhe. Zeichnen Sie die Beschleunigung ein!“ [12, S.67]	7
2	„Ein im Kreis herumgeschwungener Ball wird losgelassen.“ [12, S.69]	7
3	Flugroute eines Storchs [1, S.2]	8
4	Stroboskopbild eines Miniaturflugzeugs [1, S.2]	8
5	„Ferngesteuertes Auto auf einer vorgegebener Route“ [1, S.3]	9
6	„Pfeile bei verschiedenen Fahrzeugen “ [1, S.6]	10
7	„Geschwindigkeitspfeile verschiedener Fahrzeuge “ [1, S.7]	10
8	Anfangs-, End- und Zusatzgeschwindigkeit einer Kugel [1, S.11]	11
9	Konstruktion der Endgeschwindigkeit [1, S.12])	11
10	Konstruktion der Zusatzgeschwindigkeit [1, S.12]	12
11	„Erhöhen des	
	Tempos“ [1, S.15]	13
12	„Bremsen“	
	[1, S.15]	13
13	„Stoppen“	
	[1, S.15]	13
14	„Zurück“ [1, S.15]	13
15	„Eine Kugel wird durch den Luftstrom eines Föhns (links) bzw. zwei nebeneinander liegender Föhns (rechts) abgelenkt.“ [1, S.18]	14
16	Darstellung	
	als Punkt [22, S.212]	24
17	Darstellung	
	als Pfeil [22, S.212]	25
18	„Darstellung	
	als Punkt.“ [21, S.214]	26
19	„Darstellung	
	als Pfeil.“ [21, S.214]	26
20	Darstellung des Betrages eines Vektors [22, S.216]	26
21	Punkt-Pfeil-	
	Darstellung [22, S.218]	26
22	Pfeil-Pfeil-	
	Darstellung [22, S.218]	27
23	Punkt-Pfeil-	
	Darstellung [21, S.218]	28
24	Pfeil-	
	Darstellung [21, S.218]	28
25	Pfeil-Pfeil-	
	Darstellung [22, S.219]	28
26	Darstellung von Multiplizieren mit einem Skalar [22, S.221]	28
27	Parallelogrammregel [21, S.221]	29
28	Differenzregel [21, S.221]	29
29	Multiplikation mit einem Skalar [21, S.223]	30
30	Abstand zweier Punkte [21, S.228]	31
31	Zwei zueinander parallele Vektoren	
	[21, S.229]	31

32	Normale Vektoren [21, S.230]	31
33	Addition im Pfeilklassenmodell mithilfe von Repräsentanten [4, S.2]	35
34	Addition reeller Zahlen im Eindimensionalen [4, S.7]	37
35	Addition von an einem Boot greifenden Kräften [3, S.92]	38
36	Vektoren dürfen nicht beliebig verschoben werden [4, S.82]	39
37	Repräsentantenunabhängigkeit der Summe von Pfeilklassen[3, S.97]	40
38	Ein geometrisch dargestellter Vektor, wie oben beschrieben [7, S.35]	58
39	Deutung als Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes $P = (x, y)$ [7, S.36]	58
40	Der Verschiebungsvektor $\vec{r}$ [7, S.36]	58
41	Ineinander Überführung von Pfeilen durch Parallelverschiebung [7, S.37]	59
42	Zwei- und dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem [7, S.38]	59
43	Vektoraddition [7, S.45]	61
44	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (hier: $\alpha = 3$) [7, S.47]	62
45	Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [7, S.48]	62
46	Der Kosinussatz [7, S.51]	64
47	Das Vektorprodukt bildet ein Rechtssystem [7, S.53]	64
48	Die „Rechte-Hand-Regel“ als Merkhilfe für die Richtung des Vektorprodukts [7, S.53]	64
49	Die Fläche eines von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms [7, S.54]	65
50	Das Spatprodukt [7, S.54]	67