



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Spezielle Kreise in der Dreiecksgeometrie“

verfasst von / submitted by

Melek Aras

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 412 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Physik UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Ao. Univ. - Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Überblick über die Geschichte der Dreiecksgeometrie	3
2.1 Elementargeometrie in der Urgeschichte.....	3
2.2 Elementargeometrie in Ägypten.....	4
2.3 Elementargeometrie in Mesopotamien.....	7
2.4 Geschichte der griechischen Elementargeometrie.....	10
2.4.1 Die Ionische Periode.....	11
2.4.2 Die Athenische Periode.....	17
2.4.3 Die Alexandrinische Periode.....	18
2.4.4 Spätantike.....	20
2.5 Euklid und seine Elemente.....	21
2.6 Geometrie nach Euklid.....	25
3. Grundlagen der Dreiecksgeometrie.....	28
3.1 Besondere Punkte und Linien im Dreieck.....	28
3.2 Sätze am Kreis.....	43
4. Die Eulersche Gerade	52
4.1 Leonhard Euler.....	52
4.2 Satz über die Eulersche Gerade.....	53
5. Der Feuerbachkreis	55
5.1 Karl Wilhelm Feuerbach	55

5.2 Der "kleine Satz von Feuerbach"	56
5.3 Der Neunpunktekreis.....	57
5.3.1 Jean Victor Poncelet.....	57
5.3.2 Charles - Julien Brianchon.....	58
5.3.3 Der Satz des Neunpunktekreises.....	59
5.4 Der "große Satz von Feuerbach"	64
 6. Die Malfatti - Kreise	67
6.1 Gianfrancesco Malfatti.....	67
6.2 Das Malfatti - Problem.....	67
6.3 Das Zeichnen der Malfatti - Kreise.....	69
6.3.1 "Konstruktion nach Malfatti"	69
6.3.2 "Konstruktion nach Steiner - Petersen"	71
6.3.3 "Konstruktion nach Lob und Richmond"	72
6. 4 Weitere berühmte Kreise.....	74
6.4.1 Das Apollonische Berührproblem.....	74
6.4.2 Der Pferchkreis.....	79
 7. Exkurs: Kreisketten	82
7.1 Die Pappus - Kette.....	82
7.2 Die Steiner - Kette.....	85
7.3 Der Sieben - Kreise - Satz.....	87
 8. Quellenverzeichnis	89
 9. Abbildungsverzeichnis	93

Danksagung

Zu aller erst bedanke ich mich bei meinen Kindern Ipek, Melike und Tarık Aziz, weil sie der Grund dafür sind, warum ich nie aufgegeben habe, mein Studium zu beenden.

Ein besonderer Dank gilt an meinen Ehemann Şaban. Ohne seine Unterstützung hätte ich nie mein Studium beenden können. Er gibt mir stets Rückhalt und kann mich immer zum Lachen bringen, auch wenn mir nicht danach ist.

Ein großes Dankeschön an meine Eltern Ayşana und Selahattin, die mich motiviert haben und zeitweise auch meine Kinder betreut haben, während ich mich meinem Studium widmete. Des Weiteren bedanke ich mich bei meinen Geschwistern Dilek und Yasemin, die stets an mich geglaubt haben.

Ich bedanke mich bei meinem Professor Peter Raith, der sich dafür bereit erklärt hat, meine Diplomarbeit zu betreuen. Ich konnte mich immer auf seine raschen Antworten verlassen. Alle meine Fragen wurden immer exakt und sehr schnell beantwortet.

Vielen Dank an meine Freundin Meryem für die schönen Momente während der Studienzeit. Sie hat immer ein offenes Ohr für mich und hilft mir immer wieder, positiv zu denken.

Ich bedanke mich bei allen Familienmitgliedern und Freunden, die während meines Studiums für mich da waren.

Abstract

Die Intention der vorliegenden Diplomarbeit war es, einige wichtige ausgewählte Kreise in der Elementargeometrie vorzustellen. Für die eigenen Konstruktionen wurde GeoGebra verwendet.

Dabei wurde zunächst ein geschichtlicher Abriss über die Dreiecksgeometrie verfasst. Danach wurden im nächsten Kapitel die Grundlagen der Dreiecksgeometrie vorgestellt, ohne die man die nächsten Kapitel nicht hätte verstehen können. Als nächstes Kapitel wird die Eulersche Gerade vorgestellt, die man noch aus der Schule kennt. Danach werden unterschiedliche ausgewählte Kreise, wie zum Beispiel der Feuerbachkreis und die Malfatti - Kreise vorgestellt. Im letzten Kapitel geht es um drei Kreisketten. Es werden auch einige Biographien von Mathematikern kurz dargelegt.

Es gibt viele interessante Kreise und Aufgabenstellungen. All diese Probleme zu erläutern, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Diese Diplomarbeit soll nur einige Kreise vorstellen und vielleicht bei einem oder anderen die Neugierde für die Elementargeometrie wecken.

Abstract

The intention of this diploma thesis was to present some important selected circles in the elementary geometry. GeoGebra was used for the own constructions.

First a historical outline of the triangle geometry was drawn up. Afterwards, the basics of triangle geometry were presented in the next chapter, without which the following chapters could not have been understood. The next chapter introduces the Euler line, which is still none from school. Then different selected circles are presented, for example the n-point circle and the malfatti-circles. The last chapter is about three circular chains. Some biographies of mathematicians are briefly presented.

There are many interesting circles and tasks. To explain all the problems would go beyond the scope of this work. This diploma thesis is only intended to introduce a few circles and perhaps arouse curiosity about the elementary geometry of one or the other.

1. Einleitung

Die Geometrie ist das älteste Thema in der Mathematikgeschichte. In der Schule lernt man im Fach Mathematik die Definition des Kreises, den Thaleskreis, den In- und Umkreis des Dreieckes und die Eulersche Gerade kennen. In der Universität habe ich außer dem Feuerbachkreis auch nicht viel über besondere Kreise kennengelernt. Doch in meinem Selbststudium habe ich erfahren, dass es noch weitere besondere Kreise und Kreisketten gibt, die mein Interesse geweckt haben. Genau mit diesem Thema beschäftigt sich diese Diplomarbeit.

Kapitel zwei beschäftigt sich mit der Frage, wie sich die Elementargeometrie im Verlauf der Jahre entwickelt hat. Die Elementargeometrie in der Urzeit, in Ägypten, in Mesopotamien und in Griechenland werden dargestellt. Danach wird kurz und bündig beschrieben, wie sich die Geometrie nach Euklid weiterentwickelt hat und welche Teilgebiete der Geometrie entstanden sind.

In Kapitel drei werden einige Definitionen und Sätze aufgelistet, dem Lehrbuch "Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 7.Auflage" von Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. aus dem Jahre 2018 folgend.

Kapitel vier befasst sich mit der Eulerschen Gerade und dem Mathematiker Leonhard Euler.

Über Karl Wilhelm Feuerbach und dem Feuerbachkreis geht es im fünften Kapitel. In diesem Kapitel wird auch erwähnt, dass der Feuerbachkreis eigentlich nur ein Satz ist, der schon in einem anderen Satz, nämlich dem Satz über den Neunpunktekreis, enthalten ist.

Der sechste Kapitel befasst sich mit dem Mathematiker Malfatti und seinen Malfatti - Kreisen. In diesem Kapitel wird auch dargestellt, dass es außer den vorgestellten Kreisen noch weitere interessante Kreise gibt. Als Beispiel werden das Apollonische Berührproblem und der Pferchkreis vorgestellt.

Im letzten Kapitel geht es um drei Kreisketten, nämlich der Pappus- Kette, der Steiner - Kette und der Sieben - Kreise- Satz, die kurz vorgestellt werden.

2. Überblick über die Geschichte der Dreiecksgeometrie

Der erste Kapitel stellt einen kurzen historischen Überblick über die Elementargeometrie des Dreiecks und des Kreises in der Steinzeit dar. Es geht dabei um die Elementargeometrie im Zweidimensionalen. Berechnungen von Volumina werden nicht dargestellt. In dem Kapitel wird die Geometrie aus dem Orient und aus den altamerikanischen Kulturen außer Acht gelassen. Es wird lediglich die Anfänge der Geometrie bei den Ägyptern und Babyloniern dargestellt, weil sich die griechische Geometrie hauptsächlich aus diesen Beiden entwickelt hat.

2.1 Elementargeometrie in der Urgeschichte

Die Urgeschichte der Menschen umfasst die Zeit, in der die ersten Steinwerkzeuge erfunden wurden, bis hin zur Erfindung der Schrift - auch wenn diese von verschiedenen Kulturen in unterschiedlichen Zeiten erfolgte. In dem Buch „Mathematik in Antike, Orient und Abendland“ von Helmuth Gericke wird erwähnt, dass Striche in einigen Knochen von Mammuts eingeritzt worden sind. Dies lässt vermuten, dass man damals schon zählen konnte. Aus der Frühgeschichte sind viele Gefäße und Gefäßstücke aus Ton oder Keramik erhalten geblieben, die unterschiedliche geometrische Figuren darstellen. Im Orient hat man kleine „Kugeln, Scheibchen, Kegel, Zylinder und andere Figuren“ (Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag. Seite 1) aus Ton ausgegraben. Manche dieser Körper wurden in kleinen Gefäßen mit einem Deckel darauf gefunden. Beim „Weben und Flechten entstehen einfache zweidimensionale Muster“ (Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 6) und bei der Anfertigung von Schmuck bediente man sich geometrischen Figuren.

Aus der Natur hat man viel Geometrisches entdecken können. Des Weiteren waren geometrische Figuren in unterschiedlichen Bauwerken von großer Bedeutung - sei es beim Hausbau oder bei den Denkmälern, wie die Stonehenge (etwa 3. oder 2. Jahrtausend) oder die Woodhenge (ca. 1800 v. Chr.). Die meisten dieser Denkmäler haben einen Kreis bzw. eine Ellipse als Grundriss. Forscherinnen und Forscher vermuten, dass es sich um Gräber handelt, die auch für kultische

Zwecke verwendet wurden. In der Zeit um 1800 v. Chr. konnten die Babylonier bereits pythagoreische Zahlentripel ausrechnen. Es muss aber auch erwähnt werden, dass man dort schon lange schreiben konnte. Die Interpretationen sind lange nicht sicher und man wird wahrscheinlich noch darüber diskutieren, wie und wofür die Bauwerke gemacht wurden.

2.2 Elementargeometrie in Ägypten

Um 2900 v. Chr. erfanden die Ägypter die Hieroglyphen, somit haben Forscher_innen schriftliche Quellen über den mathematischen Wissensstand in Ägypten. Der Moskauer Papyrus und der Papyrus Rhind sind die beiden bedeutendsten Schriften. Diese waren Handbücher für den Unterricht. Verfasst wurden die Papyri von Lehrern, den sogenannten Schreibern der Beamenschulen, die in dieser Zeit hohe Staatsbeamte waren. Inhaltlich geht es um eine Sammlung von Aufgaben mit einer Rechenvorschrift. Bei einigen Aufgaben hat man auch geprüft, ob die dazugehörige Vorschrift in den einzelnen Fällen auch stimmt. Die Forscher_innen sind sich einig, dass die Ägypter nicht gefragt haben, warum die Rechenvorschriften gelten. Mit den vier Grundrechnungsarten konnten sie bereits rechnen.

Papyrus Rhind

Der Papyrus Rhind ist eine 5,34 m x 33 cm große Rolle und ist etwas jünger als der Papyrus Moskau. Insgesamt gibt es 84 Aufgaben, die in drei Themen unterteilt sind. Im ersten Teil geht es um 40 algebraische und arithmetische Fragestellungen. Es gibt eine Tabelle, die Brüche darstellt. Es geht auch um Berechnungen von Gleichungen, die linear oder reinquadratisch sind und eine Unbekannte haben. In 20 Aufgaben werden einige Sachverhalte über die Geometrie beschrieben. (vgl: Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_02.pdf, 03. 07. 19).

Flächenberechnungen

In Ägypten waren die Kenntnisse über Flächenberechnungen bekannt. Für die Flächenberechnung des Rechtecks haben die Ägypter, wie wir heutzutage, die Länge mit der Breite multipliziert. Eine Aufgabe bezieht sich auf die Fläche eines Kreises. Wenn A die Fläche des Kreises ist und d der dazugehörige Durchmesser, dann gilt

$$„A = (d - \frac{d}{9})^2“$$

(Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_02.pdf, 03. 07. 19)

Wenn man das Ganze umformt, ergibt sich ein Näherungswert für die Zahl π .

$$A = d^2 - \frac{2d^2}{9} + \frac{d^2}{81} = A = d^2 \cdot (1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{81}) = d^2 \cdot (\frac{81 - 18 + 1}{81}) = d^2 \cdot \frac{64}{81}$$

Nun muss man d^2 vierteln, damit man den Radius des Kreises erhält.

$$A = \frac{d^2}{4} \cdot \frac{4 \cdot 64}{81} = (\frac{d}{2})^2 \cdot \frac{4 \cdot 64}{81}$$

Daraus folgt, dass wir für π den Näherungswert $\frac{256}{81}$ erhalten. Dieser Wert ist eine gute Näherung

für die damalige Zeit. (vgl: Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_02.pdf, 04. 07. 19)

Es gibt unterschiedliche Interpretationen, wie die Ägypter zu der Zahl 9 kamen. Doch ganz genau weiß man es bis heute nicht.

In einer anderen Aufgabenstellung geht es um die Fläche eines Dreiecks. Hierbei wird diese auf die Fläche eines Rechtecks zurückgeführt. „Es wird angegeben, dass eine Seite halbiert werden soll ,um es rechteckig zu machen‘ und diese Hälfte mit der anderen Seite multipliziert werden soll.“ (Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag. Seite 58)

Somit kommt man auf die Formel

$$„A = a \cdot \frac{b}{2}“$$

(Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_02.pdf, 04. 07. 19)

A stellt den Flächeninhalt des Dreiecks dar. Die Seite b wird halbiert und mit der Seite a multipliziert.

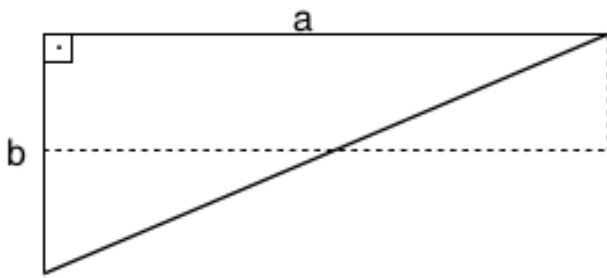


Abb. 1 Flächenberechnung eines Dreiecks (vgl.: Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag. Seite 58)

Für ein rechtwinkliges Dreieck würde diese Anweisung stimmen. Aus der Skizze im Papyrus kann man jedoch nicht wirklich feststellen, ob das Dreieck einen rechten Winkel hat. Für den Flächeninhalt eines Trapezes gibt es die Anweisung

$$„\frac{a+b}{2} \cdot h”$$

(Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag. Seite 58)

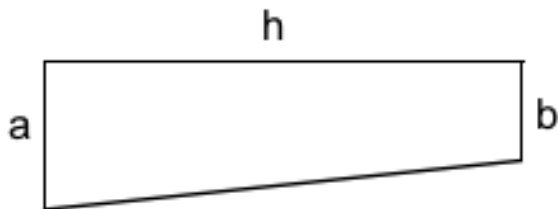


Abb. 2 Flächeninhalt eines Trapezes (vgl.: Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag. Seite 58)

Papyrus Moskau

Der Papyrus Moskau ist eine 5,44 m x 8 cm breite Schrift. Es beinhaltet 25 Aufgaben. Die Rolle zeigt, dass die Ägypter auch schwierigere Aufgaben lösen konnten. In einer Aufgabe geht es um die Berechnung der Seite eines Rechtecks. Dabei wird der Flächeninhalt und das Verhältnis der Länge mit der Breite verwendet.

Darstellung der Zahlen

Die Ägypter haben mit positiven rationalen oder ganzen Zahlen gerechnet. Dargestellt wurden die natürlichen Zahlen mit dem Dezimalsystem, wobei es unterschiedliche Symbole für die zehner Potenzen gab. Um eine Zahl zu schreiben, musste man einfach diese Zeichen aneinanderreihen. Die positiven rationalen Zahlen „wurden als Summen von Stammbrüchen (d.h. $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$)

geschrieben.“ (Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_02.pdf, 04. 07. 19)

2.3 Elementargeometrie in Mesopotamien

Aufgrund der Tatsache, dass die meisten Quellen aus dem Babylonischen Reich überliefert wurden, spricht man von der babylonischen Mathematik. Etwa 1800 v. Chr. gewann Babylon an Stärke. Aus dieser Zeit kommen die bedeutendsten mathematischen Texte. Weil die Babylonier nicht auf Papyrusrollen, sondern auf Tontafeln geschrieben haben, ist mehr von dem Material erhalten geblieben als von den Ägyptern. Auch den Babyloniern waren die vier Grundrechnungsarten bekannt. Man arbeitete viel mit Tabellen von Quadratzahlen, Reziprokwerten und Vielfachen. Es wurde auch mit linearen, quadratischen und kubischen Gleichungen gearbeitet. Manche Aufgaben haben Lösungen und andere Lösungsanweisungen. Die Aufgaben waren, wie bei den Ägyptern alltagsnahe Probleme. Einige der geometrischen Kenntnisse werden hier dargestellt.

Plimpton 322

Die Plimpton 322 ist eine der wichtigsten Tontafeln aus der babylonischen Zeit. Die Tafel dürfte um etwa 1800 v. Chr. im heutigen Irak entstanden sein. Es handelt sich dabei um eine Tabelle mit vier Spalten, in der 15 pythagoreische Tripel eingetragen worden sind. Die Zahlen sind immer ganze Zahlen. Einige der Spalten auf der linken Seite sind nicht erhalten geblieben. Von den drei Spalten ist eine Spalte mit „Quadratseite der Breite“ (b)“ (Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 21), die andere Spalte mit „Quadratseite der Diagonale“ (d)“ (Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 21) für die Hypotenuse überschrieben. Die vierte Spalte ist eine Nummerierung von eins bis 15. In der ersten Spalte sind die Verhältnisse angegeben als

$$„\frac{d^2}{h^2} = \frac{h^2 + b^2}{h^2} = 1 + \frac{b^2}{h^2}”$$

(Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 21)

Das bedeutet, dass (b, h, d) pythagoreische Tripel sind. Es gibt unterschiedliche Interpretationen, wofür diese Tripel damals verwendet wurden. Eine etwas neue Interpretation von dem australischen Forscher Mansfield besagt, dass es sich um eine trigonometrische Tabelle handelt, welche auch bei der Feldvermessung oder beim Bau von Gebäuden verwendet wurde. Doch dies ist für viele andere Forscherinnen und Forscher jedoch nicht glaubhaft.

Flächenberechnungen

Die Babylonier konnten auch, wie die Ägypter, die Fläche eines Dreiecks und eines Rechtecks ausrechnen. Der Flächeninhalt für ein Trapez lautet, wie bei den Ägyptern

$$„\frac{a + b}{2} \cdot h”$$

(Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_03.pdf, 05. 07. 19)

Nicht sehr oft kommt die folgende Anweisung für das allgemeine Viereck vor

$$„\frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}”$$

(Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag. Seite 35)

Diese Vorschrift kennt man bereits von den Ägyptern. Allerdings ist die Formel falsch. Für den Flächeninhalt des Kreises hat man den Umfang des Kreises verwendet. „Man solle ein Zwölftel des Quadrates des Umfangs nehmen, also

$$„F = \frac{u^2}{12}”$$

(Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 18)

Der Umfang des Kreises wurde als $u = 3 \cdot d$ angenommen. Wenn man dies in die obige Vorschrift einsetzt, dann erhält man

$$F = \frac{u^2}{12} = \frac{(3 \cdot d)^2}{12}$$

Weil $3 \cdot d = 6 \cdot r$ gilt, folgt

$$F = \frac{(6 \cdot r)^2}{12} = \frac{36 \cdot r^2}{12} = 3 \cdot r^2$$

Aufgrund der uns heute bekannten Formel für den Flächeninhalt des Kreises

$$F = r^2 \cdot \pi$$

Erhält man eine Näherung für die Zahl π , nämlich 3. (vgl: Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 18) Die Zahl 3 ist jedoch keine gute Näherung für die Zahl π . In Konstantentabellen findet man einen verbesserten Kreis. Dann wäre die Näherung für π

$$„\pi \approx \frac{25}{8} = 3 + \frac{1}{8}“$$

(Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_03.pdf, 10. 07. 19)

Vergleicht man den letzten Näherungswert mit dem Wert der Ägypter, dann erkennt man, wer die bessere Näherung gemacht hat. Subtrahiert man die Zahl π von der Näherung der Ägypter, dann erhält man

$$\frac{256}{81} - \pi \approx 0,01890117...$$

Und subtrahiert man die verbesserte Näherung der Babylonier mit der Zahl π dann erhält man

$$\pi - (3 + \frac{1}{8}) \approx 0,01659265...$$

Die Babylonier haben also eine bessere Näherung für die Zahl π finden können.

Darstellung der Zahlen

Für die Darstellung der Zahlen hat man das Sexagesimalsystem verwendet. Dies ist ein Stellenwertsystem, welches eine Basis von 60 hat. Es ist ein Gemisch aus dem Sechziger- und Zehnersystem. Die Zahlen von Eins bis 59 hat man mit nur zwei Zeichen (Keil- und Winkelhaken) dargestellt. Zahlen, die größer waren als 59, wurden durch eine Zusammensetzung dieser Zahlen dargestellt. Obwohl das Sexagesimalsystem viele Nachteile hat, hat sie heute noch ihre Spuren hinterlassen. Auch heute hat ein voller Kreis 360 Grad. Eine Stunde ist unterteilt in 60 Minuten und diese wiederum ist unterteilt in 60 Sekunden.

2.4 Geschichte der griechischen Elementargeometrie

In diesem Kapitel geht es auch um die ebene Geometrie und Berechnungen der Volumina werden wieder nicht dargestellt. Die Griechen haben viele Kenntnisse über die Geometrie sowohl aus Babylonien als auch aus Ägypten übernommen. Sie haben die Vorschriften und Regeln begründet und zusammengefasst und wurden damit "zu den Urhebern der wissenschaftlichen Mathematik". (Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 27)

Doch bei den Griechen steht die Frage nach dem *Warum?* im Vordergrund. Man versucht Beweise für jede Behauptung zu finden. Es wurde reine Mathematik betrieben. Es ist wichtig zu wissen, dass keine Originalwerke der Mathematiker erhalten geblieben sind. Nur einige Papyrusschriften um etwa 200 n. Chr. ermöglichen einen Einblick in die Kenntnisse der Griechen. Eine gesamte Ausfertigung der Werke sieht man in der griechischen Mathematik ab Euklid. "Die Elemente von Euklid sind im 4. Jh. n. Chr. von Theon von Alexandria bearbeitet worden." (Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag. Seite 70)

Deswegen ist es manchmal nicht klar, was Theon selbst ergänzt hat und was Euklid geleistet hat. Wie bei der Mathematik in Babylonien und Ägypten, muss man auch hier die Entwicklung der Mathematik aus Kommentaren und Zitaten aus späteren Zeiten herausfinden. Was man aber gut weiß, ist die abgeschlossene griechische Mathematik. Die Griechen haben nur Konstruktionen mit Lineal und Zirkel erlaubt, welche jedoch keine Markierungen hatten. Dabei waren nur bestimmte Konstruktionsschritte erlaubt:

- durch zwei unterschiedliche Punkte durfte man eine Gerade legen
- durch den Mittelpunkt und einem Punkt auf dem Kreis bestimmten Kreis zeichnen
- den Schnittpunkt von zwei Geraden bestimmen, die nicht parallel sind
- den Schnittpunkt oder die Schnittpunkte von einer Gerade mit einem Kreis bestimmen
- den Schnittpunkt oder die Schnittpunkte von zwei Kreisen bestimmen

(vgl: Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_04.pdf, 20.09.19)

Allerdings gibt es Schriften, die zeigen, dass einige Mathematiker auch unerlaubte Konstruktionen gezeichnet haben. Die Griechen haben vor allem versucht, drei Probleme der Geometrie, die "drei klassischen Probleme der Geometrie" (Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_04.pdf, 20.09.19) zu lösen. Man weiß heute allerdings, dass diese mit Lineal und Zirkel nicht gelöst werden können. Man kann mit einem Zirkel und einem Lineal die vier Grundrechnungsarten ausführen. Des Weiteren kann man die Quadratwurzel ziehen. Mehr kann man nur mit diesen zwei Hilfsmitteln nichts machen.

Die Probleme waren die Quadratur des Kreises, die Winkeldreiteilung und die Würfelverdoppelung. Die Mathematik in der griechischen Antike kann man in vier Perioden unterteilen. In jeder Periode lebten einige wichtige Mathematiker_innen, die hier vorgestellt werden.

2.4.1 Die Ionische Periode

Nachdem die mykenische Kultur- "die erste Hochkultur des europäischen Festlands" ([online]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Mykenische_Kultur#Folgezeit, 23.07.19) unterging, zog sich die Urbevölkerung in die Westküste Kleinasiens und die Inseln zurück. Dadurch entstanden unterschiedliche Stämme und Völker, die sich unterschiedlich entwickelten. Stadtstaaten wurden gebildet. Die Städte waren die Brennpunkte der griechischen Wissenschaft und Kultur.

In der ionischen Periode sind besonders die aller ersten Naturphilosophen Thales, Anaximenes (Schüler des Anaximander) und Anaximander (Schüler des Thales) berühmt. In dieser Periode bildet sich "das deduktive Vorgehen in der Mathematik" (Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 28).

Aus späteren Kommentaren erschließt man, dass Thales von Milet der erste griechische Mathematiker und Philosoph war. Weitere wichtige Mathematiker aus der ionischen Zeit sind Hippokrates von Chios und auch Pythagoras von Samos.

Thales von Milet

Thales ist höchstwahrscheinlich 624 v. Chr. in Milet auf die Welt gekommen und starb etwa 545 v. Chr. Nachdem er als politischer Ratgeber tätig war, widmete er sich der Wissenschaft zu. Thales war viel auf Reisen und brachte die wissenschaftlichen Erkenntnisse der Ägypter nach Griechenland. Aus der Überlieferung von Aristoteles soll Thales mit Hilfe seiner Kenntnisse in der Astronomie reich geworden sein. Er soll eine ertragreiche Ölernte vorausgesehen haben und deswegen einen großen Gewinn erwirtschaftet haben. Der Naturphilosoph soll auch eine Sonnenfinsternis vorhergesagt haben. Thales zählt zu den Philosophen vor Sokrates. Er versuchte die Welt und die Ereignisse rational zu erklären und suchte nach natürlichen Gründen der Erscheinungen. Neben der Philosophie hat Thales auch einige wichtige mathematische Erkenntnisse gewonnen. Er hat versucht allgemeine Sätze zu bilden und beschäftigte sich manchmal auch mit der Gültigkeit dieser Sätze.

Ab 400 v. Chr. zählt Thales von Milet zu den Sieben Weisen der Griechen. Dem Thales von Milet werden sechs Aussagen zugeschrieben, vier davon wurden von Proklos überliefert. Proklos kommentierte unter anderem das I. Buch von den Elementen des Euklid und ermöglichte somit einen Einblick in die Entwicklung der Mathematik bei den Griechen.

"In Kurzform werden diese Sätze oft sinngemäß wie folgt wiedergegeben:

1. Die Basis im gleichschenkligen Dreieck sind gleich (Euklid, Elemente I, 5)

2. Die Scheitelwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden sind gleich (Euklid, Elemente I, 15)
3. Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt, oder anders: Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, stimmen in allen Stücken überein (Euklid, Elemente I, 26)
4. Der Durchmesser halbiert den Kreis."

Proklos kommentiert, Thales habe den ersten Satz "als erster erkannt und ausgesprochen" (Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 32).

Ob damit gemeint ist, dass Thales von Milet als erster diese Sätze explizit formuliert, oder ob er erste Beweise dafür erbracht, ist leider nicht klar. Es gibt noch zwei weitere Aussagen von Thales, "wovon der zweite heute vor allem mit dem Namen des Thales in Verbindung gebracht wird:

5. Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich und halbieren einander.
6. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter."

(Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 32)

Neben den Elementen des Punktes, des Kreises und der geraden Linie, taucht bei Thales zum ersten Mal das Element des Winkels auf. Dieser wird durch einen Schnitt von zwei Geraden gebildet. Dass der rechte Winkel eine besondere Rolle spielt, hat man auch damals und vorher schon gewusst. In den Elementen des Euklid wird gezeigt, wie man dies zeichnen kann.

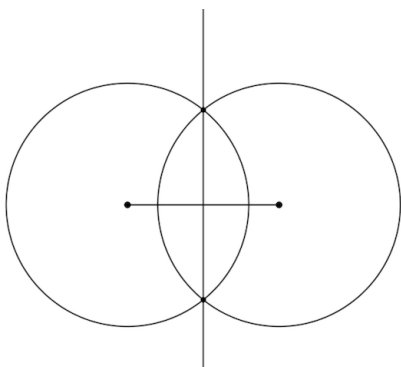


Abb. 3 Konstruktion des rechten Winkels (vgl.: Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 33)

Man hat eine dazugehörige Zeichnung in den Elementen des Euklid gefunden. Von einer Strecke, die gegeben ist, zieht man mit einem Zirkel zwei Kreise von den Endpunkten der Strecke. Der Zirkel hat dabei die selbe Öffnung. Danach zieht man eine Linie, die die Schnittpunkte der beiden Kreise berührt. Wegen der Symmetrie steht diese Linie in einem rechten Winkel zur anfänglich gegebenen Strecke.

In Abb. 3 sieht man eine derartige Konstruktion, die mit GeoGebra gezeichnet wurde. Wegen der Zeichnung aus Abb. 3, kann man sehr einfach einen Rechteck zeichnen. Man wusste, dass die gegenüberliegenden Seiten die selbe Länge haben. Die Länge der Diagonalen ist ebenfalls gleich lang. Sie halbieren sich auch gegenseitig. Ein Kreis, der eine Ecke von dem Rechteck berührt, berührt auch die restlichen Eckpunkte des Dreiecks. In Abb.4 sieht man eine derartige Konstruktion, ebenfalls gezeichnet mit GeoGebra. Aus dieser Zeichnung kann man die Sätze des Thales von Milet zeigen.

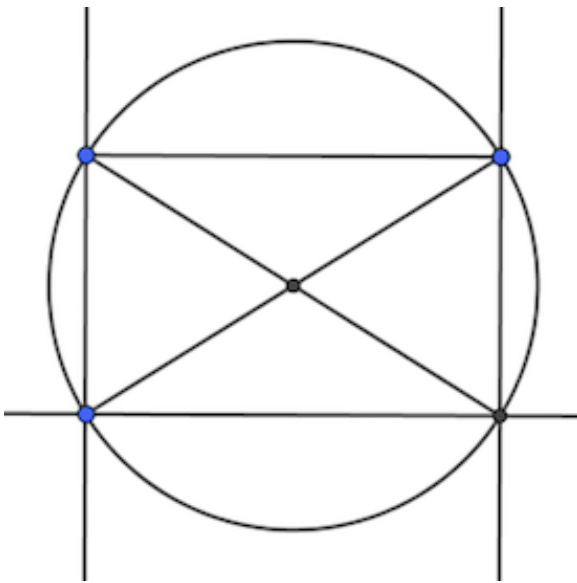


Abb. 4 Konstruktion eines Rechtecks mit seinem Umkreis (vgl.: Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 33)

Es wird auch besagt, dass Thales die Höhen der Pyramiden mit Hilfe deren Schatten ausgerechnet hat. Zu diesem Zweck soll er auf die Zeit gewartet haben, wo sein Schatten dieselbe Länge hat, wie seine Körperlänge. Daraus könnte man schlussfolgern, dass Thales sich mit Ähnlichkeiten auskannte.

Hippokrates von Chios

Ein weiterer wichtiger Mathematiker und Astronom aus der Antike war Hippokrates von Chios. Er ist etwa 470 vor Christus auf der Insel Chios, in Griechenland auf die Welt gekommen und starb um etwa 410 vor Christus. Es wird berichtet, dass Hippokrates ein Kaufmann in Athen war. Doch während einer Reise im See verlor er sein ganzes Geld wegen eines Piratenüberfalls. Ob das wirklich die Wahrheit ist, weiß man leider immer noch nicht.

Hippokrates von Chios befasste sich mit der Kreisquadratur, der Würfelverdoppelung und der Winkeldreiteilung. Hippokrates soll ein Lehrbuch abgefasst haben, das allerdings nicht mehr erhalten geblieben ist. Für ihn war eine strenge Beweisführung sehr wichtig.

Des weiteren hatte er viele weitere Kenntnisse über die Elementargeometrie. Für die Ausrechnung der Kreisquadratur führte er die berühmten "Möndchen des Hippokrates" ([online]. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/hippokrates-von-chios/3984>, 25. 07. 19) ein. Die Kreisquadratur ist ihm aber trotzdem nicht gelungen.

Möndchen des Hippokrates

Zum ersten Mal wurde eine Fläche quadriert, die keine Begrenzung durch Geraden hat. Hippokrates wurde für diese Kreisbögen, die Möndchen, berühmt. Addiert man die Flächen M_1 und M_2 der Möndchen, so ist dies so groß, wie der Flächeninhalt D des rechtwinkligen Dreiecks. Beweisen kann man diese Behauptung mit Pythagoras, was wir hier nicht näher erläutern werden. In der folgenden Zeichnung mit Hilfe von GeoGebra sieht man die Möndchen und seine Erkenntnis.

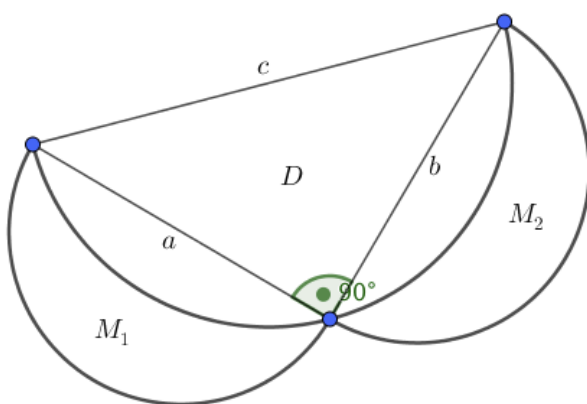


Abb. 5 Die Möndchen des Hippokrates (vgl: Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_05.pdf, 20.09.19)

Die Pythagoreer und Pythagoras

Pythagoras ist in Samos, einer griechischen Insel, ungefähr um 6. Jhdt vor Christus auf die Welt gekommen. Er reiste nach Babylon und Ägypten, wo er vermutlich sein mathematisches Wissen gewonnen hat. Danach reiste er auch nach Kroton, eine Stadt in Süditalien. Kroton war von den Griechen besiedelt. Dort gründete Pythagoras eine Sekte, die religiös-philosophisch war. Die Zahl war der Kern seiner Lehre. Pythagoras und die Pythagoreer hatten auch eine politische Bedeutung in Kroton. Dies löste einen großen Aufstand aus und es kam zur Vertreibung von Pythagoras und seinen Anhängern. Viele wurden auch ermordet. (vgl: Kronfellner, M. 2017, Geschichte der Mathematik [online]. URL: http://www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/Geschichte_der_Mathematik/Antike-nur_Text.pdf, 21. 09. 19)

100 nach Christus kamen die Neupythagoreer. Durch die Neupythagoreer hat man viele Informationen über die eigentlichen Pythagoreer gewonnen. Welche Erkenntnisse der Pythagoreer wirklich von Pythagoras stammen, weiß man bis heute nicht genau. Die Pythagoreer gründeten eigene Schulen, wo sie ihre Lehren verbreiten konnten.

Sie hatten bestimmte Anweisungen im Alltag, die sie zu befolgen hatten. Die Pythagoreer glaubten, dass "die Götter die Welt nach Zahlen und Zahlenverhältnissen geordnet hatten. Ihrer Lehre nach besteht die Welt aus Gegensätzen." (Kronfellner, M. 2017, Geschichte der Mathematik [online]. URL: http://www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/Geschichte_der_Mathematik/Antike-nur_Text.pdf, 21. 09. 19)

Einheit in diese Gegensätzlichkeit liefert die Harmonie, die Einfachheit, und bündelt sie zu einem Universum. Ganze Zahlen und ihre Verhältnisse sind von großer Bedeutung. Des Weiteren haben die Pythagoreer geglaubt, dass ganze Zahlen größer als die Einheit 1 magische Kräfte hätten, die auch bestimmte Absichten und Eigenschaften hätten. Hauptsächlich wurde Zahlentheorie betrieben. Doch als sie erkannt haben, dass es neben den kommensurablen Größen auch inkommensurable Größen gibt, kam es zu einer wichtigen Krise in der Mathematik. Inkommensurable Größen sind Strecken, wo die Längen irrationales Verhältnis zueinander haben. Nach dieser Krise haben sich die Pythagoreer mit der Geometrie beschäftigt. (vgl: Kronfellner, M. 2017, Geschichte der Mathematik [online]. URL: http://www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/Geschichte_der_Mathematik/Antike-nur_Text.pdf, 21. 09. 19)

In die Geometrie haben sie eine gewisse Ordnung gebracht. Es "werden Arten von Figuren erklärt; Gerade, Kreis, Dreieck, Viereck, Quadrat usw." (Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag. Seite 91)

Doch vor allem bekannt wurden die Pythagoreer durch den Höhensatz, den Kathetensatz und dem pythagoreischen Lehrsatz. Letzteres hat man auch vor den Griechen gewusst, aber bewiesen wurde es von den Pythagoreern.

2.4.2 Die Athenische Periode

Die Athenische Periode dauerte von etwa 450 v. Chr. bis ungefähr 300 v. Chr. an. Zentrum dieser Periode war in Athen. Unter den Stadtstaaten war Athen in führender Macht. Die Philosophenschule von Platon, auch Akademie genannt, stammt aus dieser Zeit. In der Akademie "wurde das Idealbild der Mathematik als einer rein deduktiv herleitbaren Wissenschaft ausgebildet". (Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag. Seite 38)

Das Hauptproblem in dieser Periode war die Erkenntnis der irrationalen Zahlen. Deswegen beschäftigten sich viele Mathematiker mit der Geometrie. Einer der wichtigsten mathematischen Vertreter der athenischen Periode war Eudoxos von Knidos.

Eudoxos von Knidos

Eudoxos ist in Knidos, in Griechenland geboren. Wann er genau geboren wurde, ist nicht genau bekannt. Er reiste nach Süditalien, wo er von Archytas, einem Nachfolger des Pythagoras von Samos, erste Lehren erhielt. Berichten zufolge war er auch in Athen um in der Akademie astronomische Kenntnisse zu erlangen. Danach gründete er an der Küste des Marmarameers eine Schule und erlangte somit viele Lernende. Als er Athen zum zweiten Mal besuchte, diesmal mit seinen Schülern, wurde er zu einem geschätzten Bürger. Später kehrte er nach Knidos zurück und errichtete ein Observatorium.

Hauptsächlich ist er berühmt dafür, dass er das Problem mit den irrationalen Zahlen aufgelöst hatte. Euklid übernahm dann seine Proportionenlehre in seinen Elementen. Bei den Pythagoreern sah die Proportionenlehre folgendermaßen aus:

Für das Verhältnis von zwei Zahlen a und b , bzw. c und d gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m \cdot a = n \cdot c \text{ und } m \cdot b = n \cdot d$$

Eudoxos von Knidos definierte aber

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} :$$

$$m \cdot a < n \cdot c \Rightarrow m \cdot b < n \cdot d,$$

$$m \cdot a = n \cdot c \Rightarrow m \cdot b = n \cdot d,$$

$$m \cdot a > n \cdot c \Rightarrow m \cdot b > n \cdot d$$

(vgl: Kronfellner, M. 2017, Geschichte der Mathematik [online]. URL: http://www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/Geschichte_der_Mathematik/Antike-nur_Text.pdf, 22. 09. 19)

Durch diese Erkenntnis befreite er die Geometrie von der Einschränkung auf die rationalen Zahlen. Eudoxos von Knidos hat sich auch mit dem Kreis beschäftigt. Mit der Exhaustionsmethode bewies er, dass das Volumen des Kreises zum Durchmesserquadrat proportional ist. Die Exhaustionsmethode ist eine Methode, wo man einem Kreis regelmäßige Vielecke einschreibt, bis die Fläche des Kreises annähernd abgedeckt wird.

Es gab in dieser Zeit noch viele weitere Wissenschaftler, die sich vor allem mit den "klassischen Problemen" befasst haben, doch dies wird hier nicht weiter besprochen. Die Athenische Periode endet ungefähr mit Euklid und seinen Elementen, wo er nur Zeichnungen mit Lineal und Zirkel bearbeitet hat. Weil die Elemente des Euklid viel ausführlicher erläutert werden, wird es ein eigenes Kapitel dafür geben.

2.4.3 Die Alexandrinische Periode

Auch die Alexandrinische Periode dauerte ungefähr 100 Jahre lang an und zwar ungefähr zwischen dem 3. Jhdt v. Chr. und dem 2. Jhdt v. Chr. Alexander der Große war damals der Feldherr. Er besiegte die Perser und unterwarf die heutige Türkei, Ägypten, Syrien und Palästina. Er eroberte

außerdem Persien und Babylon. Dadurch entstanden viele Gründungen von Städten. Die Stadt Alexandria wurde gegründet und dies war für die Wissenschaft von großer Bedeutung. Auch die Bibliothek wurde gegründet, wo fast alle wissenschaftlichen Werke verfügbar waren.

Euklid, Apollonius und Archimedes waren die wichtigsten wissenschaftlichen Vertreter dieser Zeit. Der Astronom Aristarch lebte auch zu dieser Zeit. Dieser formulierte als erster das Kopernikanische Weltbild, wo die Sonne im Zentrum steht.

Archimedes von Syrakus

Archimedes stammte aus einer vornehmen Familie. Sein Vater war ein Astronom und er studierte höchstwahrscheinlich in Alexandria. Er beschäftigte sich vor allem mit der Bestimmung von Flächen- und Volumeninhalten. Dafür benutzte Archimedes die Exhaustionsmethode von Eudoxos von Knidos. Unter anderem zeigte Archimedes, dass "sich der Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser genauso verhält, wie die Fläche des Kreises zum Quadrat des Radius." ([online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes>, 23. 09. 19)

Die Werke von Archimedes waren um 1600 und 1700 nach Christus für die höhere Analysis von großer Bedeutung. Archimedes entwickelte Maschinen, die beim Krieg gegen die Römer eingesetzt wurden. Als Syrakus erobert wurde, wurde Archimedes von einem Soldaten der Römer getötet.

Apollonius von Perge

Apollonius von Perge ist etwa 260 v. Chr. in Perge, einer Stadt nahe zu Antalya, auf die Welt gekommen und starb im Jahre 190 v. Chr. Er studierte in Alexandria und unterrichtete dort auch. Sein berühmtestes Werk ist die Conica (Über Kegelschnitte). Dieses Werk besteht aus acht Büchern. In seinem Werk formuliert er die Sätze und gibt anschließend Beweise dafür. Apollonius beschäftigte sich auch mit Zeichnungen mit Lineal und Zirkel. Berühmt ist er aber auch durch den "Kreis des Apollonius" und das "Apollonische Problem". Das "Apollonische Problem" wird in einem anderen Kapitel näher erläutert.

Der Apollonische Kreis

Normalerweise wird der Kreis folgender Maßen definiert: "Die Menge aller Punkte, die von einem bestimmten Punkt M (=Mittelpunkt) denselben Abstand r (=Radius) haben, ergeben einen

Kreis." ([online]. URL: <https://www.mathe-lexikon.at/geometrie/ebene-figuren/kreis/allgemeines.html>, 24. 09. 19)
Apollonius von Perge definiert den Kreis aber anders.

"Satz: Die Menge aller Punkte C , für die $\overline{AC} : \overline{BC} = k > 0$ konstant ist, ist der Kreis k (Kreis des Apollonius) über dem Durchmesser EF mit $TV(ABE) = -k$, $TV(ABF) = k$." ([online]. URL: https://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/lva/gmu/gmu05_07.pdf, 24. 09. 19) Wobei das Teilverhältnis als TV bezeichnet wird.

2.4.4 Spätantike

Die Spätantike dauerte etwa von 150 v. Chr. bis zum Niedergang des römischen Imperiums in der Zeit der Völkerwanderung (300 n. Chr. bis 600 n. Chr.). Nach 150 vor Christus gibt es im Wesentlichen keine neuen Erkenntnisse im Bereich der Mathematik. Man hat lediglich versucht, die bisherigen Errungenschaften zu verstehen. Außerdem haben die Mathematiker_innen versucht, die früheren Lehren zusammenzufassen.

Ungefähr ab 300 nach Christus wurden die Christen geduldet. Danach wurde das Christentum Staatsreligion. Deswegen wurden viele Akademien und Schulen aufgrund der Verbreitung heidnischer Lehren geschlossen. Wichtige Vertreter der Elementargeometrie aus dieser Zeit waren Heron von Alexandria und Hypatia.

Heron von Alexandria

Wann er ungefähr geboren ist, weiß man bis heute nicht, aber man vermutet, dass er Ende 100 n. Chr. in Alexandria tätig war. Er war sowohl Mathematiker als auch ein begabter Ingenieur. Heron baute auch viele Maschinen. Eines seiner Ziele war es, die bisherigen Werke zu sammeln. Für ihn waren neben der reinen Mathematik auch praktische Zwecke von Bedeutung.

Berühmt ist er heutzutage wegen der Heron'schen Dreiecksformel. Wenn die Seiten eines beliebig gewählten Dreieckes mit den Seiten a, b, c und die Hälfte des Umfanges $s = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ gegeben sind, dann gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

(vgl: [online]. URL: <https://de.bettermarks.com/mathe/heron-von-alexandria/>, 24. 09. 19)

Hypatia von Alexandria

Hypatia wurde etwa 350 nach Christus als Tochter des Theon von Alexandria geboren. Theon war ein Mathematiker und Astronom. Er brachte Hypatia Vieles über die Wissenschaft bei. So kam es, dass auch Hypatia anfang Mathematik, Astronomie und Philosophie zu lehren. Ihre Werke sind leider nicht erhalten geblieben, doch sie schrieb wahrscheinlich Kommentare über die Kegelschnitte von Apollonius und auch über andere wissenschaftliche Erkenntnisse. Sie baute auch astronomische Instrumente. Hypatia wurde etwa 415 nach Christus aufgrund religiös - politischer Streitigkeiten brutal ermordet und danach in Teilen zerstückelt. (vgl: Hypatia von Alexandria. Ein Kurzportrait einer Technikerin. 2011. [online]. URL: https://htu.at/alt-schiarches-foswiki/pub/Presse/Ausgabe201105/htu_info-201105-web.pdf, 26. 09. 19

2.5 Euklid und seine Elemente

Wie schon bereits erwähnt, endet die Athenische Periode ungefähr mit Euklid und seinen Elementen, wo er nur Zeichnungen mit Lineal und Zirkel bearbeitet hat. Euklid von Alexandria lebte ungefähr von 365 v. Chr. bis 300 v. Chr. Höchstwahrscheinlich wurde er in der Akademie Platons unterrichtet. Er arbeitete im Museion in Alexandria und verdiente einen hohen Lohn. Es ist leider nicht viel über Euklid bekannt. Ob er in Alexandria geboren wurde ist auch nicht sicher.

Wichtig aber ist sein Hauptwerk "die Elemente". "Die von Euklid ausgehende anhaltende Prägung der Mathematik bestand darin, dass er anhand eines von ihm aufgestellten Axiomengerüsts das verfügbare mathematische Wissen in eine systematische Ordnung und damit die Geometrie in Form einer axiomatischen Theorie brachte." (Zürn, U. 2010. Vergleich der Dreiecksgeometrie in der Euklidischen und Hyperbolischen Ebene, [online]. URL: <https://www.math.uni-tuebingen.de/user/loose/studium/Diplomarbeiten/SA.Zuern.pdf>, 05. 10. 19)

"Am Anfang einer mathematischen Theorie stehen die unbewiesen bleibenden Axiome. Dann folgen die Sätze und deren Beweis. In jedem Beweis darf dabei (außer den Axiomen) nur verwendet werden, was vorher bereits bewiesen wurde." (Froese, N. 2007. Euklid und die Elemente[online]. URL: <https://www.swisseduc.ch/mathematik/geometrie/euklid/docs/euklid.pdf>, 05. 10. 19)

In dem Buch "5000 Jahre Geometrie" von Scriba und Schreiber wird sehr gut dargestellt, wie das Werk aufgebaut ist. In den Elementen gibt es 13 Bücher oder auch Kapitel, die am Beginn immer Definitionen haben.

Buch I

In Buch I wird die ebene Geometrie axiomatisch aufgebaut, und beruht hauptsächlich auf die Erkenntnisse der Pythagoreer. In Buch I gibt es neben den Definitionen - "insgesamt 131" ([online]. URL: http://userpage.fu-berlin.de/aconstant/EG/EG_VL1slides.pdf, 06. 10. 19) auch noch "5 Postulate und 5-10 Axiome... Danach kommt in jedes Buch eine Folge von Satz und Beweis." ([online]. URL: http://userpage.fu-berlin.de/aconstant/EG/EG2018_bisHeute.pdf, 06. 10. 19)

Einige, für diese Arbeit wichtige Definitionen, Grundbegriffe aus Buch I (insgesamt 23 Definitionen in diesem Buch) lauten wie folgt: "

1. Punkt ist, was ohne Teil ist.
2. Linie ist Länge ohne Breite.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
- ...
10. Bildet eine Gerade, auf eine andere Gerade gestellt, gleiche Nebenwinkel, so sind die beiden gleichen Winkel Rechte. Die Gerade heißt senkrecht zu der, auf der sie steht.
11. Stumpf ist ein Winkel, der größer als ein Rechter ist.
12. Spitz, wenn kleiner als ein Rechter.
- ...
15. Kreis ist eine ebene Figur, von einer Linie umfasst, so dass alle Strecken, die von einem im Inneren bis zur Linie laufen, einander gleich sind.
16. Mittelpunkt des Kreises heißt der Punkt.
17. Durchmesser des Kreises ist jede Strecke, die durch den Mittelpunkt geht und auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzt ist; eine solche Strecke halbiert den Kreis.
18. Halbkreis ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfasste Figur.
- ...
20. Unter den Dreiseiten hat das gleichseitige Dreieck drei gleiche Seiten, das gleichschenklige Dreieck nur zwei gleiche Seiten, das ungleichseitige Dreieck drei verschiedene Seiten.
- ...

23. Parallelen sind Geraden, die in der selben Ebene liegen und sich auch bei Verlängerung nach beiden Seiten ins Unendliche nicht treffen."

(Geyer. W. -D. 2011. Vorlesung über antike Mathematik. Eulid: Die Elemente - eine Übersicht. [online]. URL: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf>, 08. 10. 19)

Die 5 **Postulate**, welche geometrische Zeichnungen behandeln, lauten wie folgt:

"

1. Von jedem Punkt zu jedem anderen kann man die Strecke ziehen.
2. Jede Strecke kann man zu einer Geraden verlängern.
3. Zu Mittelpunkt und Radius (Abstand) kann man den Kreis zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind
5. [Das bis zu Beginn des 19. Jh. umstrittene, fundamentale PARALLELENAXIOM:] Stufenwinkel an Parallelen sind gleich. Wörtlich: Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf der selben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann werden sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind."

(Geyer. W. -D. 2011. Vorlesung über antike Mathematik. Eulid: Die Elemente - eine Übersicht. [online]. URL: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf>, 08. 10. 19)

"**Axiome 1 - 5:** Allgemeine Regeln der Gleichheit:

1. Was dem selben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
2. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.
3. Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, so bleibt Gleiches übrig.
4. Was sich deckt ist gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil."

(Geyer. W. -D. 2011. Vorlesung über antike Mathematik. Eulid: Die Elemente - eine Übersicht. [online]. URL: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf>, 08. 10. 19)

Außerdem beinhaltet das Buch insgesamt 48 Konstruktionen. Einige Beispiele sind Zeichnungen eines gleichseitigen Dreiecks, Streckenhalbierung, Winkelhalbierung, Kongruenzsatz SSS, SWS, WWS, die Dreiecksungleichung oder einen Beweis des Satzes von Pythagoras.

Buch II befasst sich mit der geometrischen Algebra. Es geht um Flächeninhalte, was hier nicht näher erläutert wird.

Buch III befasst sich mit der Kreisgeometrie. Es gibt elf Definitionen und 37 Lehrsätze und Aufgaben.

Einige wichtige Definitionen lauten wie folgt:

1. Kreise sind gleich, wenn Durchmesser oder Halbmesser gleich sind.
2. Eine Gerade berührt einen Kreis, wenn sie ihn nur in einem Punkt trifft (wörtlich: sie trifft, aber schneidet nicht).
3. Kreise berühren sich, wenn sie sich treffen, aber nicht schneiden.

...

7. Der (Sehnen-Tangenten-) Winkel eines Abschnittes ist der zwischen Sehne und Kreisbogen.
8. Peripheriewinkel eines Abschnittes ist der Winkel an einem Punkt des Kreisbogens über der Sehne."

(Geyer. W. -D. 2011. Vorlesung über antike Mathematik. Eulid: Die Elemente - eine Übersicht. [online]. URL: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf>, 08. 10. 19)

In den Sätzen und Aufgaben werden beispielsweise der Satz von Thales, der Sehnensatz, der Peripheriewinkelsatz, der Zentriwinkelsatz oder der Sekanten - Tangenten - Satz erörtert.

Buch IV beinhaltet Zeichnungen des In- und Umkreises von einem Dreieck, Quadrat oder Fünfeck.

In **Buch V** geht es um die Proportionenlehre des Eudoxos von Knidos. Es gibt 18 Definitionen und 25 Lehrsätze und Aufgaben.

Dieses Buch wird für das **Buch VI** benötigt, um die Proportionenlehre in der Geometrie zu verwenden. Denn Buch VI handelt von der Ähnlichkeitslehre.

Buch VII handelt von Teilern, ggT, Vielfachen, kgV und Primzahlen.

Um geometrische Folgen geht es in den **Büchern VIII und IX**.

Mit dem **Buch IX** beginnt die Zahlentheorie.

In **Buch X** geht es um quadratische Irrationalitäten. Es geht um Ausdrücke geschachtelter Quadratwurzeln. **Buch XI** handelt von der Raumlehre. **Buch XII** befasst sich mit der "nichtelementaren Berechnung von Volumina." (Geyer. W. -D. 2011. Vorlesung über antike Mathematik. Eulid: Die Elemente - eine Übersicht. [online]. URL: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf>, 08. 10. 19)

Der letzte Kapitel **Buch XIII** befasst sich mit Platonischen Körpern (vgl: Geyer. W. -D. 2011. Vorlesung über antike Mathematik. Eulid: Die Elemente - eine Übersicht. [online]. URL: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf>, 08.10.2019).

2.6 Geometrie nach Euklid

Nach Euklid wurde die Geometrie weiterentwickelt. In dem Artikel "Raumformen - Formen im Raum. Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie" von Walther L. Fischer, veröffentlicht bei Matreier Gespräche wird die Geometrie nach Euklid gut geschildert. Er schreibt, dass es nach Euklid drei Entwicklungslinien gibt.

In der ersten Entwicklungslinie wurde das Axiomensystem von Euklid erweitert, indem man viele neue Begriffe und Sätze gefunden hat.

In der zweiten Entwicklungslinie sind verschiedene Geometrien entstanden, weil man eben neue Sätze und Begriffe gefunden hat. Dadurch wurden auch die Axiome abgeändert. Diese unterschiedlichen Geometrien unterscheiden sich von dem Aufbau von Euklids Axiomensystem. Somit entstand die "nach - euklidische Geometrie" (Fischer, W. L. 2017, Raumformen - Formen im Raum. Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie. [online]. URL: https://www.zobodat.at/pdf/Matreier-Gespraech_2005_0323-0348.pdf, 08. 10. 19).

Zu dieser Geometrie gehört beispielsweise die analytische Geometrie, die von Descartes im 17. Jhdt konstruiert wurde. "Punkte werden dort in Bezug auf ein Koordinatensystem durch Zahlen, Zahlenpaare, ..., Zahlen n - Tupel repräsentiert. Geraden werden durch lineare Gleichungen (Funktionen) dargestellt, der Kreis und die Kegelschnitte durch quadratische Gleichungen

(Funktionen) usw..." (Fischer, W. L. 2017, Raumformen - Formen im Raum. Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie. [online]. URL: https://www.zobodat.at/pdf/Matreier-Gespraeche_2005_0323-0348.pdf, 08. 10. 19)

Später entstand die darstellende Geometrie, erschaffen von Monge, der 1746 in Frankreich auf die Welt kam. In der Architektur und in der Kunst spielt die darstellende Geometrie eine bedeutende Rolle. Hier werden "ebene Bilder von räumlichen Gegenständen" (Fischer, W. L. 2017, Raumformen - Formen im Raum. Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie. [online]. URL: https://www.zobodat.at/pdf/Matreier-Gespraeche_2005_0323-0348.pdf, 08. 10. 19) konstruiert.

Poncelet, der 1788 auf die Welt kam, entwickelte die projektive Geometrie. Und nach der Entdeckung der Infinitesimalrechnung wurde dann die Differentialgeometrie von Gauß erschaffen.

Die dritte Entwicklungslinie entstand dadurch, dass viel Kritik an die Axiomensysteme der unterschiedlichen Geometrien ausgeübt wurde. 1899 schrieb D. Hilbert das Buch "Grundlagen der Geometrie". Hier wird die Geometrie ausführlich und streng begründet. "Zugleich führte sein Werk zu einer für die gesamte Mathematik beispielgebenden Form der Axiomatik als formales System. Die Grundbegriffe werden in solchen Systemen nicht mehr explizit definiert, sondern - wie die Figuren in einem Spiel durch die Spielregeln - implizit durch die Gesamtheit der Axiome, in denen sie bzw. durch die sie fungieren." (Fischer, W. L. 2017, Raumformen - Formen im Raum. Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie. [online]. URL: https://www.zobodat.at/pdf/Matreier-Gespraeche_2005_0323-0348.pdf, 08. 10. 19).

Wegen der Kritik der Axiome wurde schon im 18. Jhdt und 19. Jhdt. die "nichteuclidische Geometrie" (Fischer, W. L. 2017, Raumformen - Formen im Raum. Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie. [online]. URL: https://www.zobodat.at/pdf/Matreier-Gespraeche_2005_0323-0348.pdf, 08. 10. 19) entwickelt.

"Im Verlaufe der Jahrhunderte bemühte man sich u.a. um die Frage, ob die Axiome des Euklid voneinander unabhängig, ob gewisse dieser Axiome aus anderen ableitbar sind. Aus dem erfolglosen Bemühen, den Aussagegehalt des sogenannten „Parallelenaxioms“ aus den übrigen Axiomen zu beweisen, erwuchsen schließlich die sogenannten „nichteuclidischen Geometrien“. Das für die euklidische Geometrie zentrale Parallelenaxiom besagt (in unserer heutigen Sprechweise):

In jeder Ebene gibt es zu jeder Geraden durch jeden Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, genau eine Parallele.

Durch Abänderung dieses Axioms entstanden im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts die nichteuklidischen Geometrien, (1) die „hyperbolische Geometrie“ (Bolyai 1829, Lobatschevski 1830) und (2) die „elliptische Geometrie“ (Gauss, Riemann). Man forderte:

(1) In einer Ebene gibt es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mindestens zwei Parallelen.

(2) In einer Ebene gibt es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden keine Parallele.

Diese Forderungen stehen, wie man fand, nicht im Widerspruch zu den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie, führen aber zu anderen Formen der Geometrie." (Fischer, W. L. 2017, Raumformen - Formen im Raum. Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie. [online]. URL: https://www.zobodat.at/pdf/Matreier-Gespraeche_2005_0323-0348.pdf, 08. 10. 19)

3. Grundlagen der Dreiecksgeometrie

Um die besonderen Kreise rund um das Dreieck besser verstehen zu können, braucht man einige Grundlagen über Dreiecke und Kreise. Mit diesen Grundlagen wird sich dieses Kapitel beschäftigen. Dieses Kapitel orientiert sich nach dem Lehrbuch "Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. 7.Auflage" von Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. aus dem Jahr 2018. Hierbei geht es nicht um eine ganz strenge Axiomatik, sondern vielmehr um die Sätze und deren Beweise, die für die späteren Kapitel gebraucht werden.

3.1 Besondere Punkte und Linien im Dreieck

Drei verschiedene Punkte in einer Ebene, welche aber nicht auf der selben Geraden sind, werden paarweise mit Hilfe von Strecken verbunden. Dann bekommt man ein Dreieck.

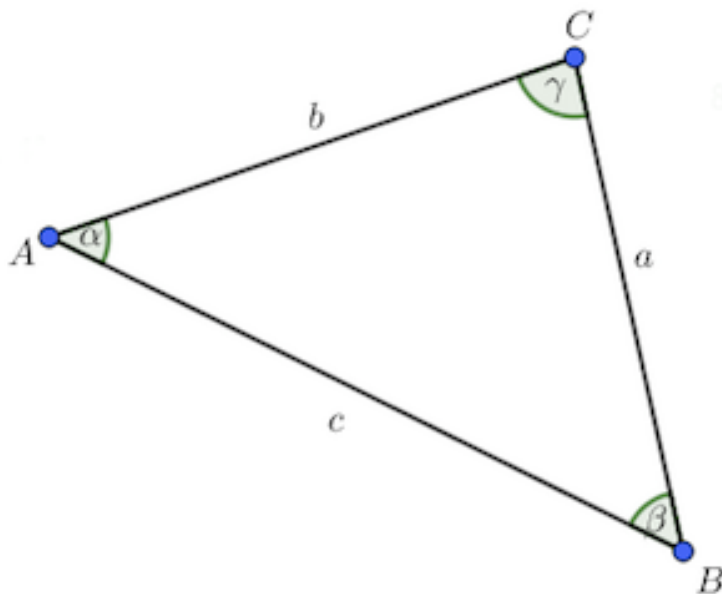


Abb. 6 Dreieck

Die Eckpunkte des Dreiecks werden A, B und C bezeichnet. Die Bezeichnung erfolgt dem Uhrzeigersinn entgegen. Die Seiten bezeichnet man mit a, b und c . Die Innenwinkel bezeichnet man üblicherweise mit α, β und γ . In Abb. ist ein Dreieck abgebildet, gezeichnet mit GeoGebra.

Satz 1:

Werden zwei Parallele Geraden von einer anderen Gerade geschnitten, entstehen Stufenwinkel. Diese Stufenwinkel sind gleich groß.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 178)

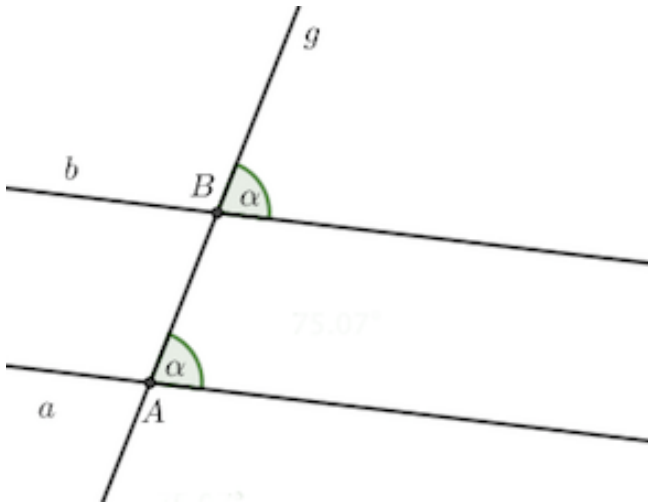


Abb. 7 Stufenwinkel (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 178)

Satz 2:

Werden zwei Parallele Geraden von einer anderen Gerade geschnitten, entstehen Wechselwinkel. Diese Wechselwinkel haben die selbe Winkelgröße.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 178)

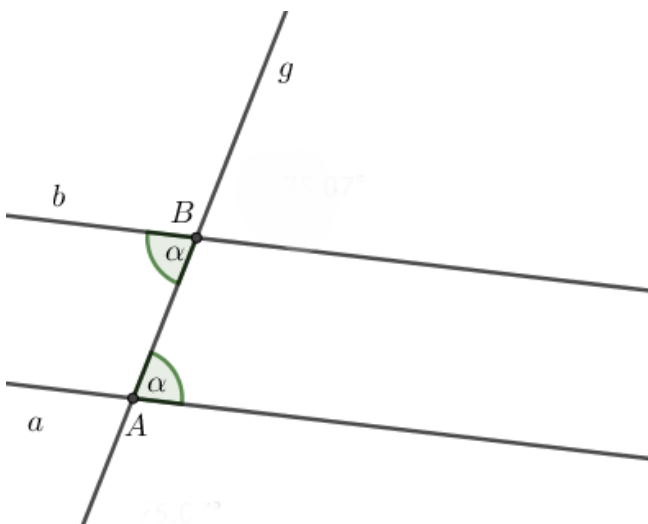


Abb. 8 Wechselwinkel (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 178)

Satz 3:

In einem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel 180° .

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 296)

Beweis:

Zeichnet man durch den Punkt C eine Parallele zur Seite c , die nach dem 5. Axiom des Euklids (Parallelenaxiom) eindeutig bestimmt ist, entstehen neben γ zwei Winkel, die gleich groß sind, wie α und β (Wechselwinkel aus Satz 2). Dann bildet α , β und γ einen Winkel, der gestreckt ist. Somit gilt:

$$"\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ"$$

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 296)

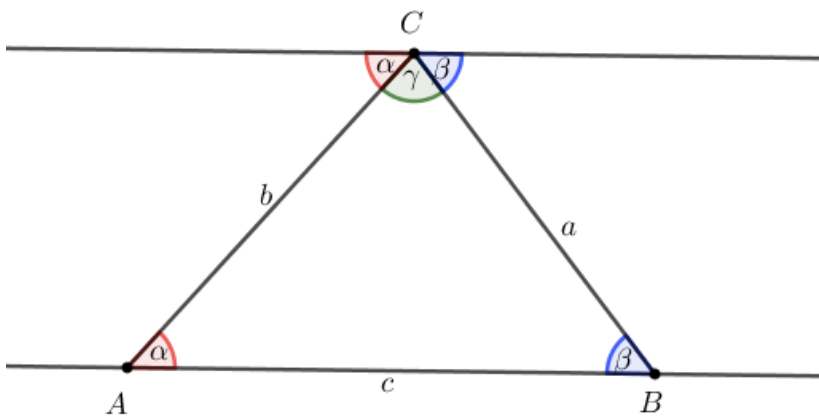


Abb. 9 Summe der Innenwinkel

Neben den Innenwinkeln gibt es auch die Außenwinkel.

Satz 4:

Der Außenwinkel und die Summe von den zwei nicht anliegenden Innenwinkeln von einem Dreieck ist immer gleich groß. (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 297)

Beweis:

Formal ausgedrückt, muss also Folgendes bewiesen werden:

$$"\alpha' = \beta + \gamma", "\beta' = \alpha + \gamma" \text{ und } "\gamma' = \alpha + \beta"$$

Hier wird nur $"\gamma' = \alpha + \beta"$ bewiesen. Die anderen werden analog bewiesen und hier nicht gezeigt.

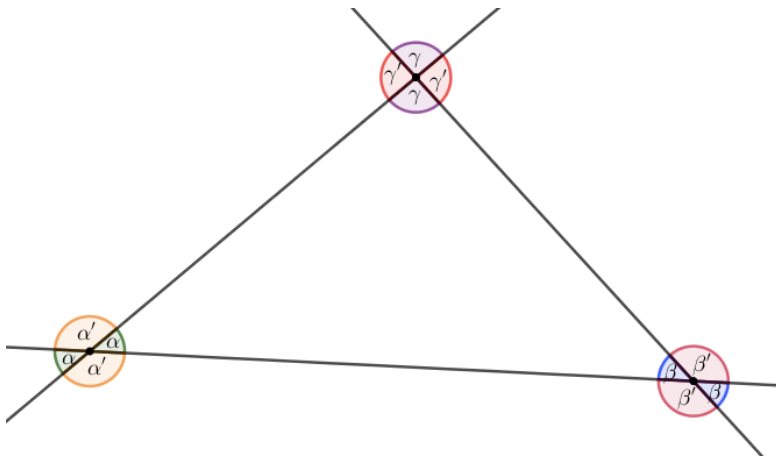


Abb. 10 Außenwinkel (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 297)

Aus Satz 3 ist bereits bekannt, dass

$$"\alpha + \beta + \gamma = 180°"$$

Nach umformen nach α erhält man

$$"\Rightarrow \alpha = 180° - \beta - \gamma"$$

Weil ein gestreckter Winkel eine Größe von $180°$ aufweist, folgt

$$"\alpha + \alpha' = 180°"$$

$$\Rightarrow \alpha' = 180° - \alpha"$$

Weil $"\alpha = 180° - \beta - \gamma"$, folgt:

$$" \Rightarrow \alpha' = 180^\circ - (180^\circ - \beta - \gamma) "$$

Umrechnen dieser ergibt:

$$" \Rightarrow \alpha' = \beta + \gamma "$$

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 297)

Nachdem einige, für uns einfache Definitionen über Winkel geklärt sind, werden im Folgenden Sätze über die Streckensymmetralen, die Winkelsymmetralen, die Höhen und die Seitensymmetralen bewiesen, wieder dem Lehrbuch von Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. "Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018" folgend.

Satz 5:

Die Streckensymmetralen (Mittelsenkrechte) von einem Dreieck schneiden sich in M, welcher der Mittelpunkt des Umkreises von dem Dreieck ist.(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 299)

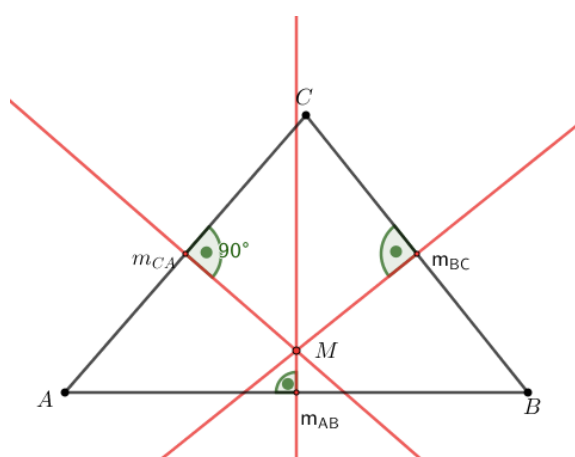


Abb. 11 Streckensymmetrale und der Umkreismittelpunkt (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 297)

In Abb. 11 ist die dazugehörige Zeichnung abgebildet, konstruiert mit GeoGebra. Somit hat die Streckensymmetrale $m_{\overline{AB}}$ den selben Abstand zu A und B . Und alle auf der Streckensymmetralen $m_{\overline{AB}}$ liegenden Punkte haben von dem Punkt A und B den selben Abstand, was hier nicht extra bewiesen wird. (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, 299)

Beweis:

Um Satz 5 zu beweisen, wird hier $m_{\overline{AB}}$, $m_{\overline{BC}}$ und M näher betrachtet. M ist sowohl auf der Gerade $m_{\overline{AB}}$, also auch auf $m_{\overline{BC}}$. M ist in gleicher Entfernung von Punkt A wie auch von Punkt B . Genauso ist M in gleicher Entfernung von Punkt B wie von dem Punkt C . Formal ausgedrückt:

$$|MA| = |MB| \text{ und } |MB| = |MC|$$

Wegen der Transitivität folgt

$$|MA| = |MC|$$

M hat also den selben Abstand von C wie von Punkt A . Deswegen liegt M auch auf $m_{\overline{AC}}$. Und alle Streckensymmetralen $m_{\overline{AB}}$, $m_{\overline{BC}}$ und $m_{\overline{AC}}$ schneiden sich in M . Die Eckpunkte A , B und C liegen auf dem selben Kreis (dem Umkreis), weil M gleichen Abstand von A , B und C hat. (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 299-300)

Satz 6:

Die Höhenlinien von einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt H , der Höhenschnittpunkt genannt wird.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 300)

Die Streckensymmetralen in einem Dreieck schneiden sich ja in einem Punkt (Satz 5). Wenn man beweist, dass die Höhen von einem Dreieck die Streckensymmetralen von einem anderen Dreieck sind, dann wäre auch Satz 6 bewiesen.

Beweis:

Wenn man die Punkte M_a , M_b und M_c mit einander verbindet, dann entsteht das Mittendreieck, welcher innerhalb des ursprünglichen Dreieckes liegt. Zuerst zeigen wir Folgendes:

Alle Seiten von dem Mittendreieck sind zu den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ parallel. Hier wird dies bewiesen mit dem ersten Strahlensatz.

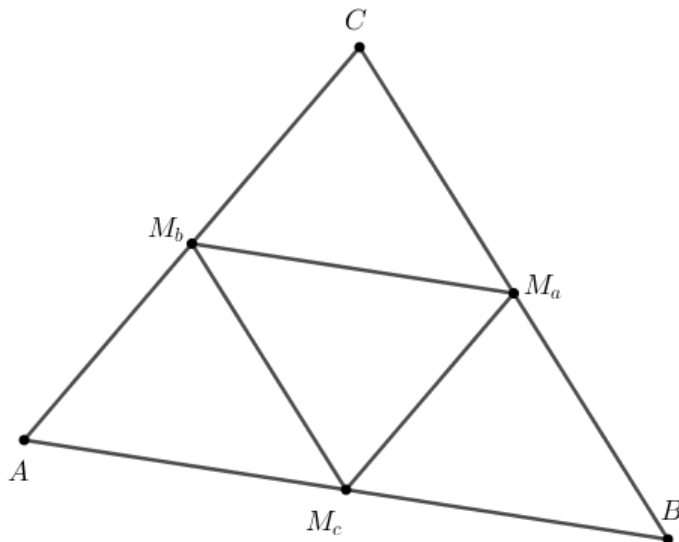


Abb. 12 Mittendreieck

Der Punkt C wird als das Zentrum gewählt. M_a ist der Mittelpunkt der Seite a und analog liegt M_b auf der Mitte der Seite b . Deswegen gilt:

$$1(\overline{CM_a}) : 1(\overline{CB}) = 1(\overline{CM_b}) : 1(\overline{CA}) = 1 : 2$$

Es folgt:

$$"M_a M_b \parallel AB" \text{ und } "M_a M_b \parallel \overline{AB}"$$

Mit dem zweiten Strahlensatz kann man folgendes schließen:

$$1(\overline{CM_b}) : 1(\overline{CA}) = 1(\overline{M_b M_a}) : 1(\overline{AB}) = 1 : 2$$

Daraus folgt schließlich:

$$|\overline{AB}| = 2 \cdot |\overline{M_b M_a}|$$

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 300-301)

Genau so beweist man, dass auch die anderen zwei Seiten von dem Mittendreieck parallel zu den Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind. Und, dass die Seiten des ursprünglichen Dreiecks doppelt so lang sind, wie die Seiten des Mittendreiecks, wird ebenfalls analog bewiesen.

"Jedes Dreieck $\triangle ABC$ ist nun seinerseits das Mittendreieck eines eindeutig bestimmten anderen Dreiecks $\triangle XYZ$. Die Höhen von $\triangle ABC$ sind die Mittelsenkrechten von $\triangle XYZ$, und diese schneiden sich in einem Punkt... Genau dies wollten wir zeigen."

(Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 300-301)

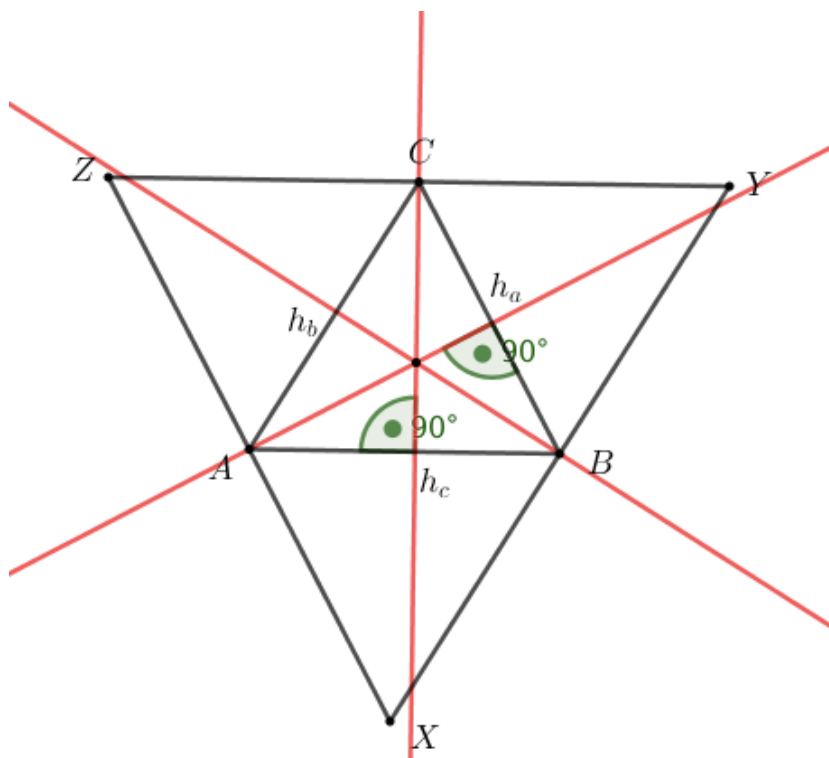


Abb. 13 Höhenlinien und der Höhenpunkt (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 301)

Satz 7:

Schneidet man die Schwerlinien (Seitenhalbierende) eines Dreiecks, dann entsteht Punkt S, der Schwerpunkt genannt wird. Außerdem teilen sich die Schwerlinien im Verhältnis von 1 : 2.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 301)

Beweis:

Aus Satz 6 sind bereits Folgendes bekannt:

" $\overline{M_a M_b} \parallel \overline{AB}$ " und

" $1(\overline{AB}) = 2 \cdot 1(\overline{M_b M_a})$ "

Somit gilt auch

" $1(\overline{M_b M_a}) = \frac{1}{2} 1(\overline{AB})$ "

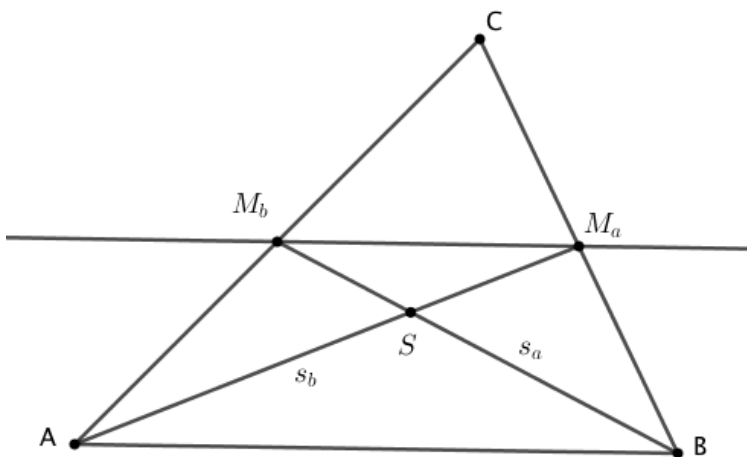


Abb. 14 Schwerlinien und Schwerpunkt (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 301)

Aus Abb. 14 kann man aus den Strahlensätzen folgendes schreiben:

$$|1(\overline{SM_a}) : 1(\overline{SA}) = 1(\overline{SM_b}) : 1(\overline{SB})$$

/ 1. Strahlensatz

$$\wedge |1(\overline{SM_b}) : 1(\overline{SB}) = 1(\overline{M_aM_b}) : 1(\overline{AB})$$

/ 2. Strahlensatz

$$\wedge |1(\overline{M_aM_b}) : 1(\overline{AB}) = 1 : 2$$

/Teilbeweis von Satz 6

$\Rightarrow$ S teilt also die Seitenhalbierenden s_a, s_b im Verhältnis 1 : 2."

(Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 302)

Wenn man sich nun den Schnittpunkt S' zwischen s_a und s_c anschaut, dann gelten auch wegen Satz 6 folgende Sachverhalte:

$$|\overline{M_aM_c} \parallel \overline{AC}|$$

$$|1(\overline{M_aM_c}) = \frac{1}{2}1(\overline{AC})|$$

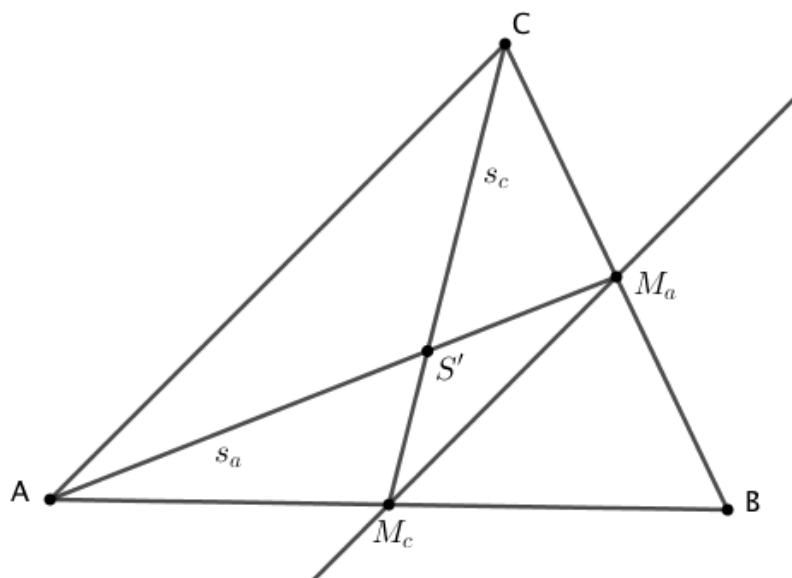


Abb. 15 Schnittpunkt S' zwischen s_a und s_c (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 302)

"Es gilt:

$$1(\overline{S'M_c}) : 1(\overline{S'C}) = 1(\overline{S'M_a}) : 1(\overline{S'A}) \quad / 1. \text{ Strahlensatz}$$

$$\wedge 1(\overline{S'M_a}) : 1(\overline{S'A}) = 1(\overline{M_aM_c}) : 1(\overline{AC}) \quad / 2. \text{ Strahlensatz}$$

$$\wedge 1(\overline{M_aM_c}) : 1(\overline{AC}) = 1 : 2 \quad / \text{Teilbeweis von Satz 6}$$

$\Rightarrow$ S teilt also die Seitenhalbierenden s_a, s_c im Verhältnis 1 : 2."

(Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 302)

Wenn also S' und S die Schwerlinie s_a 1 : 2 teilt, dann gilt, dass $S' = S$. Somit ist auch Satz 7 bewiesen.

Satz 8:

Der Punkt P ist genau dann auf w_α , der Winkelsymmetralen des Winkels α , wenn der Punkt P den gleichen Abstand von den beiden Schenkeln hat. Die Winkelsymmetrale wird auch Winkelhalbierende genannt.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 303)

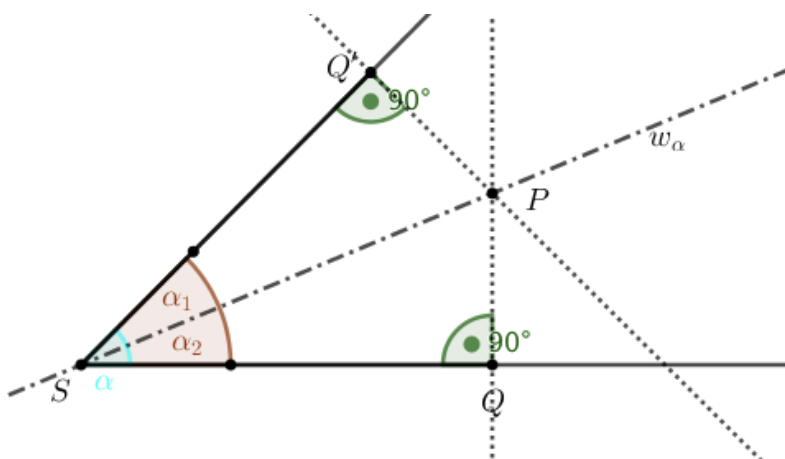


Abb. 16 Winkelhalbierende (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 303)

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Die Voraussetzung ist, dass P auf w_α liegt. Man muss zeigen, dass " $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ ".

Aus Abb. 16 ist ersichtlich, dass $\overline{SP}$ die Seite ist, die sowohl eine Seite beim Dreieck $\triangle SPQ$ als auch eine Seite beim Dreieck $\triangle SPQ'$ ist. Weil Q' und Q Lotfußpunkte sind, haben die Winkel $\angle PQS'$ und $\angle PQS$ einen rechten Winkel.

Des Weiteren gilt, dass α_1, α_2 gleich groß sind, weil w_α ja die Winkelsymmetrale ist. Somit haben die Dreiecke $\triangle SPQ$ und $\triangle SPQ'$ gleiche Innenwinkel.

Nun kann man den Kongruenzsatz WSW anwenden. Der Kongruenzsatz WSW besagt Folgendes:

Wenn jeweils eine Seite der Dreiecke $\triangle SPQ'$ und $\triangle SPQ$ gleich lang sind und die zwei anliegenden Winkel gleich groß sind, hier α_1, α_2 , und $\angle PQ'S$, so sind die Dreiecke zueinander kongruent.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 184).

Also stimmen $\triangle SPQ'$ und $\triangle SPQ$ in seinen Bestimmungsstücken überein, also gilt " $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ ".

" $\Leftarrow$ ": es wird vorausgesetzt, dass $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$.

Man muss zeigen, dass $P \in w_\alpha$. Wir wissen bereits:

- Weil Q' und Q Lotfußpunkte sind, haben die Winkel $\angle PQS'$ und $\angle PQS$ einen rechten Winkel.
- $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ ist Voraussetzung.
- $\overline{SP}$ ist die gemeinsame Seite von $\triangle SPQ'$ und $\triangle SPQ$.

Wegen diesen drei Punkten sind die Dreiecke $\triangle SPQ'$ und $\triangle SPQ$ kongruent, weil der Kongruenzsatz SSW Folgendes besagt:

Wenn die Dreiecke $\Delta SPQ'$ und ΔSPQ zwei gleich lange Seiten haben und die Winkel, welcher der größten Seite gegenüberliegt gleich sind, dann sind die beiden Dreiecke $\Delta SPQ'$ und ΔSPQ zueinander kongruent. Die Hypothenuse im rechtwinkligen Dreieck ist immer länger als die anderen beiden Seiten.

Hier sind $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ und $\overline{SP}$ ist in beiden Dreiecken eine Seite. Des Weiteren sind ja $\angle PQS'$ und $\angle PQS$ gleich groß. Somit ist $\alpha_1 = \alpha_2$. Also ist $\overline{SP} = w_\alpha$.

Daraus folgt, dass $P \in w_\alpha$.

Satz 9:

Die Innenwinkelsymmetralen von einem Dreieck schneiden sich im Punkt W, welcher der Mittelpunkt von dem Inkreis des Dreieckes ist.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 304)

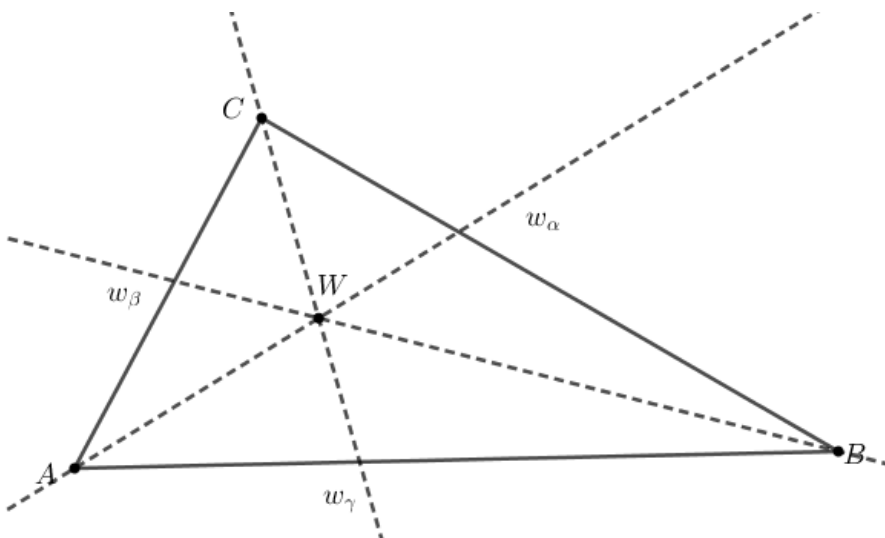


Abb. 17 Inkreismittelpunkt W (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 304)

Beweis:

Aus Satz 8 ist bereits bewiesen, dass alle Punkte auf der Winkelsymmetralen von den Winkelschenkeln den gleichen Abstand haben.

Für die Winkelsymmetralen w_α , w_β und für den Schnittpunkt W von diesen beiden gilt:

" $W \in w_\alpha \Rightarrow W$ hat den selben Abstand von AC wie von AB ." / Satz 8 " $\Rightarrow$ "

$\wedge W \in w_\beta \Rightarrow W$ hat den selben Abstand von AB wie von BC . / Satz 8 " $\Rightarrow$ "

$\Rightarrow W$ hat den selben Abstand von AC wie von BC . / Transitivität

$\Rightarrow W$ liegt also auch auf der Winkelhalbierenden w_γ . / Satz 8 " $\Leftarrow$ "

Da W von allen Dreiecksseiten denselben Abstand hat, ist er Mittelpunkt des Kreises, der diesen Abstand als Radius hat und der daher alle drei Seiten des Dreiecks berührt. Dieser Kreis heißt Inkreis des Dreiecks." (Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 304)

Satz 10:

"Die Außenwinkelhalbierenden durch je zwei Ecken eines Dreiecks und die Innenwinkelhalbierende durch die dritte Ecke schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Ankreises des Dreiecks."

(Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 304)

Ankreise, sind die Kreise, die eine Seite des Dreiecks "und die Verlängerung der beiden anderen Dreiecksseiten berühren." (Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 304)

Beweis:

Für den Beweis werden die Winkelsymmetralen w'_α , w'_γ von den Außenwinkeln α' und γ' verwendet. Der Schnittpunkt zwischen diesen Winkelhalbierenden wird ebenfalls gebraucht. Genau wie im Beweis für den Inkreis, wird Satz 8 (Alle Punkte auf der Winkelsymmetralen haben von den Winkelschenkeln den gleichen Abstand.) verwendet.

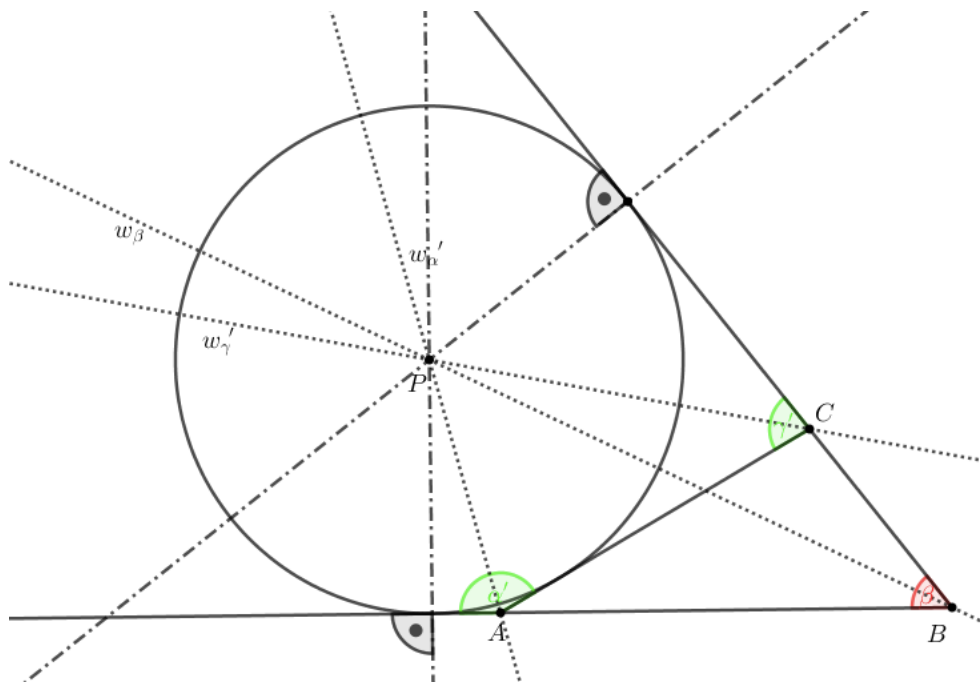


Abb. 18 Ankreis (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 304)

"Dann gilt :

$P \in w'_\alpha \Rightarrow P$ hat den selben Abstand von AB wie von AC . / Satz 8 " $\Rightarrow$ "

$\wedge P \in w'_\gamma \Rightarrow P$ hat den selben Abstand von AC wie von BC . / Satz 8 " $\Rightarrow$ "

$\Rightarrow P$ hat den selben Abstand von AB wie von BC . / Transitivität

$\Rightarrow P$ liegt also auch auf w_β . / Satz 8 " $\Leftarrow$ "

Da P denselben Abstand von AB , AC und BC hat, berührt der Kreis um P mit diesem Abstand als Radius die genannten Geraden. Dieser Kreis heißt Ankreis." (Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 305)

Für die anderen Innen- und Außenwinkel geht der Beweis analog.

3.2 Sätze am Kreis

Bei den Sätzen am Kreis werden zwei verschiedene Sätze bewiesen. Zu aller erst wird der Umfangswinkelsatz vorgestellt und bewiesen. Danach kommt der Thaleskreis. Die Biographie von Thales von Milet wurde bereits in Kapitel "2.4 Geschichte der griechischen Elementargeometrie" zusammengefasst.

Satz 11:

Umfangswinkelsatz

In einer Ebene liegen zwei unterschiedliche Punkte A und B. Durch einen beliebigen Punkt P, der außerhalb von der Strecke $\overline{AB}$ liegt, wird der Umkreis von dem Dreieck $\triangle ABP$ gezeichnet. M ist der Mittelpunkt von dem Umkreis. So ist der Winkel $\angle APB$, der Umfangswinkel genannt wird, halb so viel, wie der Winkel $\angle AMB$, der Mittelpunktswinkel genannt wird. Der Mittelpunktswinkel wird von den Radien $\overline{BM}$ und $\overline{AM}$ des Umkreises eingeschlossen. Diese liegen auf dem Teil des Kreises, der dem Punkt P abgewandt ist.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 314)

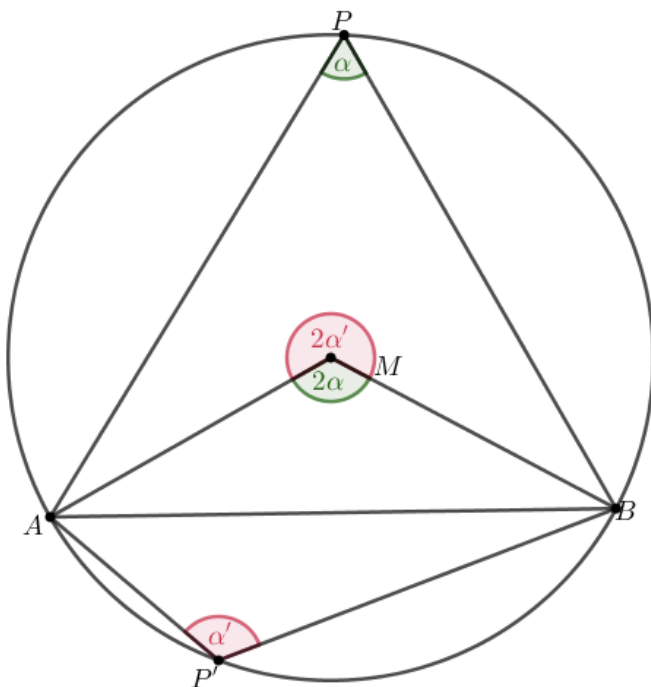


Abb. 19 Umfangswinkel (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 314)

Aus Satz 11 kann man schließen, dass der Umfangswinkel α "über einer festen Sehne $\overline{AB}$, die in derselben durch AB gebildeten Halbebene liegen, untereinander gleich groß sind, da sie alle halb so groß sind wie der zu ihnen gehörende Mittelpunktswinkel. Außerdem kann man folgern, dass sich zwei Umfangswinkel α und α' in verschiedenen Halbebenen derselben Sehne $\overline{AB}$ zu 180° ergänzen, denn die zugehörigen Mittelpunktswinkel 2α und $2\alpha'$ ergänzen sich zu 360° ." (Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 315-316)

Beweis:

Für diesen Beweis muss man einen Fallunterschied machen. Die drei unterschiedlichen Fälle sind:

- Fall 1: M ist auf der Sehne $\overline{AB}$.
- Fall 2: M ist innerhalb von dem Dreieck $\triangle ABP$.
- Fall 3: M ist außerhalb von dem Dreieck $\triangle ABP$.

Zuerst wird Fall 1 bewiesen: M ist auf der Sehne $\overline{AB}$.

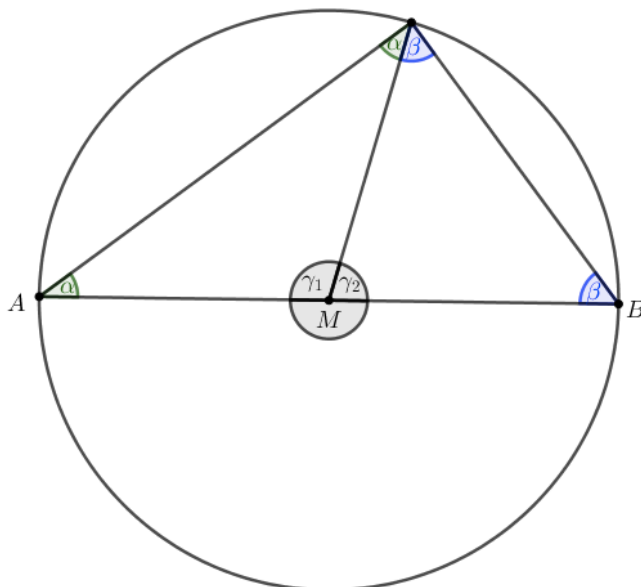


Abb. 20 Umfangswinkel Fall 1 (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 315)

Es gilt:

" $1(\overline{AM}) = 1(\overline{BM}) = 1(\overline{PM})$ ", weil alle drei Strecken der Radius vom Umkreis sind.

Daraus folgt, dass das Dreieck $\triangle AMP$ und das Dreieck $\triangle BMP$ gleichschenkelig sind. Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich groß.

Somit gilt wegen der Winkelsummen in den Dreiecken $\triangle AMP$ und $\triangle BMP$

" $2\alpha + \gamma_1 = 180^\circ$ " und " $2\beta + \gamma_2 = 180^\circ$ "

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 315)

Wenn man die Gleichungen addiert, erhält man

$$\Rightarrow 2\alpha + \gamma_1 + 2\beta + \gamma_2 = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) + \gamma_1 + \gamma_2 = 360^\circ$$

Weil M auf $\overline{AB}$ liegt, gilt ferner:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) + 180^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

Der Umfangswinkel ist also halb so groß wie der gestreckte Mittelpunktswinkel." (Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 315)

Nun wird Fall 2 diskutiert: M ist innerhalb von dem Dreieck $\triangle ABP$. Weil wieder gilt $1(\overline{AM}) = 1(\overline{BM}) = 1(\overline{PM})$, gilt auch, dass die Dreiecke $\triangle BPM$, $\triangle ABM$ und $\triangle PAM$ gleichschenkelig sind. Die dazugehörige Abbildung wird in Abb. 21 dargestellt.

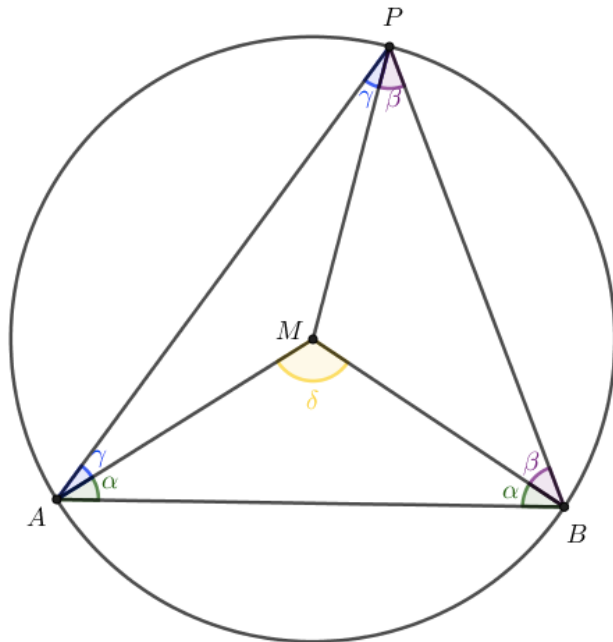


Abb. 21 Umfangswinkel Fall 2 (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 316)

Im großen Dreieck $\triangle ABP$ gilt für die Winkel:

$$"2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ "$$

Und für das Dreieck $\triangle ABM$ gilt:

$$"2\alpha + \gamma = 180^\circ "$$

Umformen ergibt:

$$" \Rightarrow 2\alpha = 180^\circ - \delta "$$

Wenn man die letzte Gleichung $2\alpha = 180^\circ - \delta$ in die erste Gleichung $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ einsetzt, erhält man:

$$180^\circ - \delta + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$$

Wenn man diese Gleichung nach δ umformt erhält man:

$$\Rightarrow 2\beta + 2\gamma = \delta$$

$$\Rightarrow 2(\beta + \gamma) = \delta$$

Somit ist der Umfangswinkel halb so groß, wie der Mittelpunktswinkel. (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 316)

Zu letzt wird Fall 3 bewiesen: M ist außerhalb von dem Dreieck $\triangle ABP$

Auch in diesem Fall sind die Dreiecke $\triangle BPM$ und $\triangle APM$ wieder gleichschenkelig. In Fall 3 betrachten wir auch wieder die Winkelsummen.

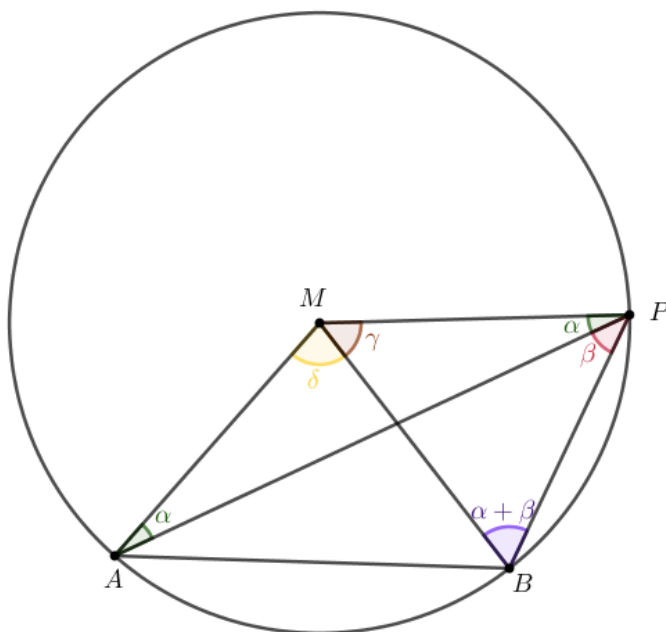


Abb. 22 Umfangswinkel Fall 3 (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 316)

Man betrachte die Winkelsumme im Dreieck $\triangle BMP$:

$$(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) + \gamma = 180^\circ$$

Wenn man die Gleichung umformt erhält man:

$$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

Das Dreieck $\triangle APM$ hat folgende Winkelsumme:

$$2\alpha + \gamma + \delta = 180^\circ$$

In diese Gleichung setzt man die Gleichung $\gamma = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$ ein und formt um

$$\Rightarrow 2\alpha + \delta + 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \delta + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \delta = 2\beta$$

Der Mittelpunktswinkel ist also doppelt so groß, wie der Umfangswinkel. (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 316)

Satz 12:

Satz des Thales

Ein Dreieck ist durch die Eckpunkte A , B und C gegeben. Der Mittelpunkt von der Strecke $\overline{AB}$ ist M . γ ist genau dann ein rechter Winkel, wenn der Punkt C auf einem Kreis mit Mittelpunkt M und mit dem Radius $1(\overline{AM})$ ist.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 319)

Beweis:

" $\Leftarrow$ " zu beweisen ist: Wenn der Punkt C auf einem Kreis mit Mittelpunkt M und mit dem Radius $1(\overline{AM})$ ist, so ist $\gamma = 90^\circ$.

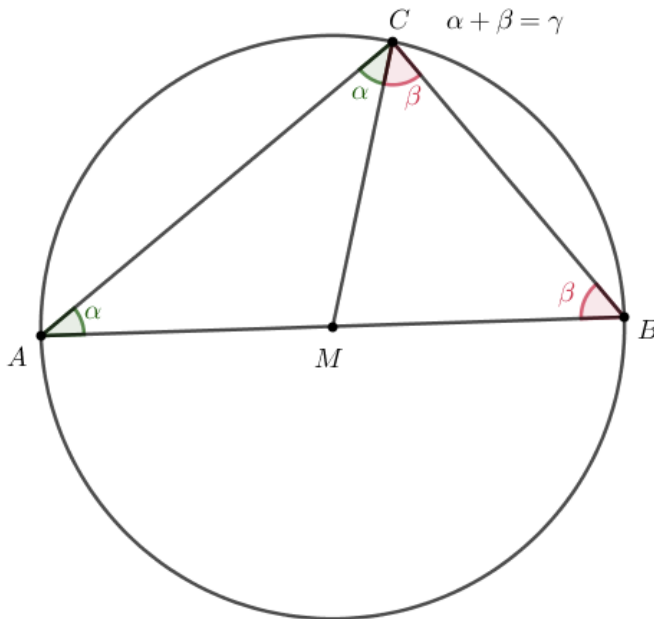


Abb. 23 Beweis des Thaleskreises " $\Leftarrow$ " (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 319)

Es gilt:

$$1(\overline{AM}) = 1(\overline{BM}) = 1(\overline{CM})$$

Deswegen sind die Dreiecke $\triangle BCM$ und $\triangle AMC$ gleichschenkelig.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ gilt:

$$" \alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ "$$

Nach umformen ergibt:

$$" \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 180^\circ "$$

Weil " $\gamma = \alpha + \beta$ " gilt, können wir das in die Gleichung " $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$ " einsetzen:

$$\Rightarrow 2\gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 319)

Beim Beweisen des Satzes für den Umfangswinkel (Fall 1) wurde genau dies bewiesen: Wenn Punkt M auf der Strecke $\overline{AB}$ ist, so ist der Umfangswinkel um die Hälfte kleiner als der dazugehörige gestreckte Mittelpunktswinkel.

Nun wird " $\Rightarrow$ " bewiesen. Zu beweisen ist, dass wenn der Winkel γ rechtwinklig ist, so ist C auf einem Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $1(\overline{AM})$. (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 319)

Dieser Beweis wird indirekt gezeigt.

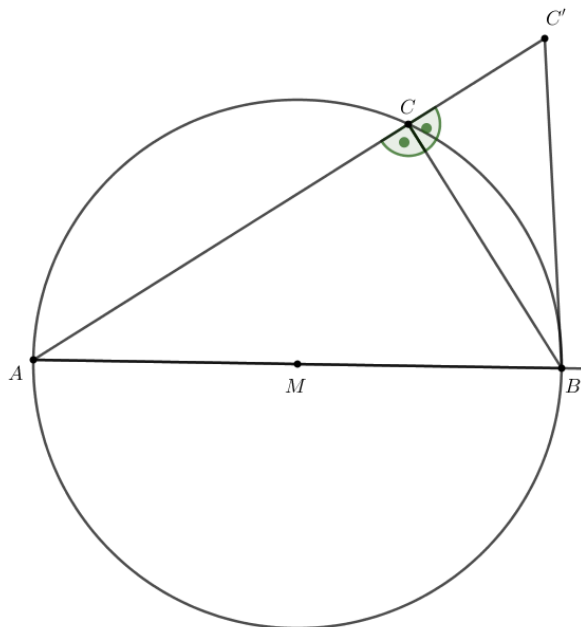


Abb. 24 Beweis des Thaleskreises " $\Rightarrow$ " (vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 320)

"Annahme: $w(\gamma) = 90^\circ$ und C liegt nicht auf dem Kreis um M mit dem Radius $1(\overline{AM})$. Dann sind zwei Fälle möglich: C liegt außerhalb des Kreises oder C liegt innerhalb. Wir betrachten zunächst den ersten Fall.

- Wir verbinden C und A . $\overline{AB}$ schneidet den Kreis um M mit dem Radius $1(\overline{AM})$ in C' .
- Nach Teil " $\Leftarrow$ " dieses Beweises ist $\angle AC'B$ ein rechter Winkel. Dann muss auch $\angle BC'C$ ein rechter Winkel sein, den C' liegt auf $\overline{AC}$ (und $\angle AC'C$ ist gestreckt)
- Wenn $\angle BC'C$ ein rechter Winkel ist und die Winkelsumme in $\triangle BC'C$ 180° beträgt, dann muss jeder der Winkel bei B und C (γ) kleiner als 90° sein.

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass γ eine Größe von 90° hat. Es folgt die Behauptung.

Den zweiten Fall (C innerhalb des Kreises) führt man analog zum Widerspruch. Dabei ist die Strecke $\overline{AC}$ über C hinaus zu verlängern, bis sie den Kreis in C' schneidet."

(Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 320)

4. Die Eulersche Gerade

Die Eulersche Gerade wurde von Leonhard Euler entdeckt, welche den Schwerpunkt, den Umkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt miteinander in Verbindung bringt. Des Weiteren liegt noch ein Punkt auf der Eulerschen Gerade, nämlich der Mittelpunkt von dem Neunpunktekreis. Doch dieser Kreis wird später noch detaillierter besprochen. Aber zuerst wird das Leben des Leonhard Euler kurz erörtert.

4.1 Leonhard Euler

Der Schweizer Physiker und Mathematiker wurde 1707 in der Schweiz, in Basel geboren. Bereits mit 13 Jahren studierte er an der Universität in Basel und beendete sein Studium nach vier Jahren mit dem Magisterabschluss. Später wurde Euler an der Akademie der Wissenschaften, welcher in St. Petersburg ist, ein Mathematikprofessor. Er veröffentlichte in St. Petersburg viele Arbeiten über die Zahlentheorie, die Algebra und die Integralrechnung. Aufgrund politischer Probleme in Russland, verließ er St. Petersburg und reiste nach Berlin ab. Dort wurde er ein Direktor der Berliner Akademie. (vgl: [online]. URL: <https://www.vismath.eu/de/blog/leonhard-euler/>, 09. 12. 19)

Leonhard Euler hat sich viel im Bereich der Differential- und Integralrechnung beschäftigt. Deswegen gilt er als "der Begründer der Analysis". ([online]. URL: <https://www.vismath.eu/de/blog/leonhard-euler/>, 09. 12. 19)

Nach 25 Jahren kehrte Leonhard Euler wieder nach St. Petersburg zurück und verfasste im Bereich der Astronomie, Physik und Mathematik zahlreiche Arbeiten. Auch nachdem Euler fast vollständig erblindete, hörte er nicht auf seine wissenschaftlichen Arbeiten zu veröffentlichen. Mit 76 Jahren verstarb Leonhard Euler. (vgl: [online]. URL: <https://www.vismath.eu/de/blog/leonhard-euler/>. 09. 12. 19) Nach ihm ist auch der berühmte Satz über die Eulersche Gerade benannt, welches im Folgenden behandelt wird.

4.2 Satz über die Eulersche Gerade

Satz 11:

Sei M der Umkreismittelpunkt, S der Schwerpunkt und H der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks. M , S und H liegen auf der selben Geraden, der sogenannten Eulerschen Geraden. Der Punkt S liegt zwischen H und M . Es gilt auch das Verhältnis: $\frac{1}{2} \cdot (\overline{HS}) = 1(\overline{SM})$

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 306)

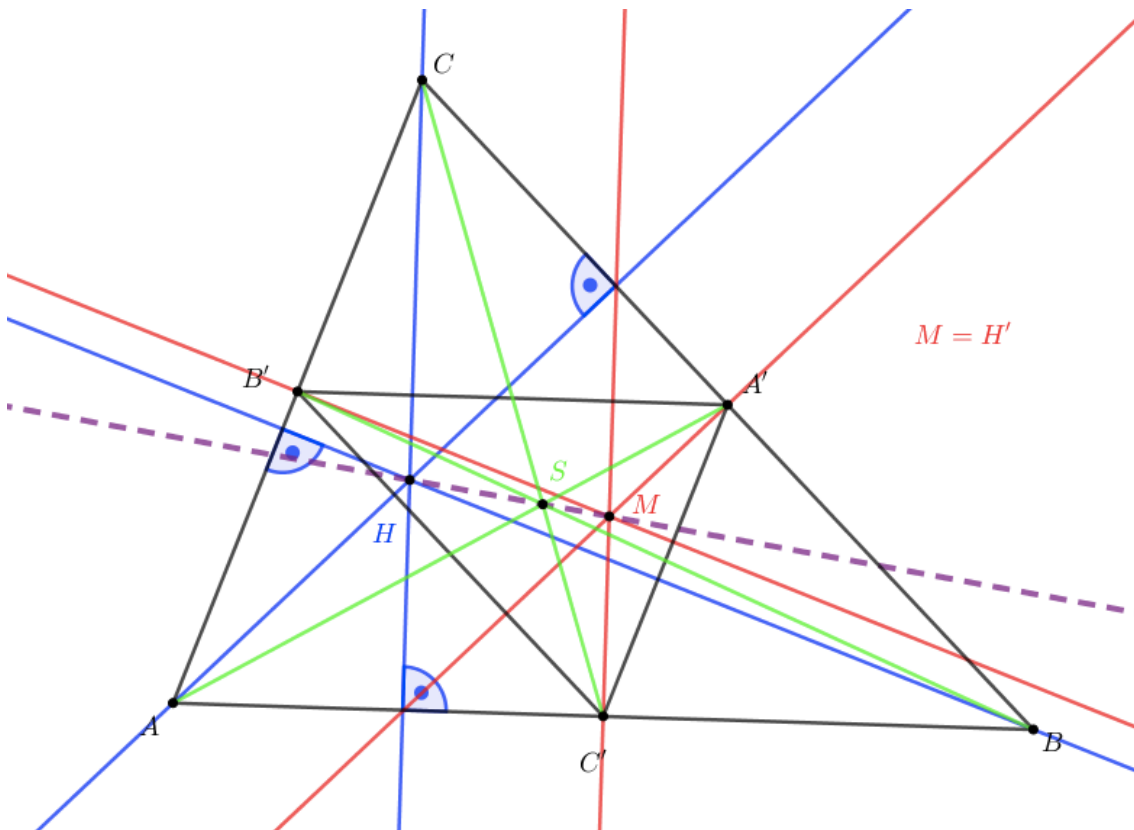


Abb 25. Die Eulersche Gerade (vgl: Zeuge, W. Nützliche und schöne Geometrie: eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 63)

Beweis:

Hier wird das Dreieck $\triangle ABC$ und das dazugehörige Mittendreieck $\triangle A'B'C'$ betrachtet. Die Dreiecke $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ sind ähnlich. Des Weiteren sind die Seiten von $\triangle ABC$ zwei mal so lang, wie die Seiten von $\triangle A'B'C'$. Wegen des Strahlensatzes liegen die entsprechenden Seiten der Dreiecke parallel zueinander. Es gilt:

$$1(\overline{AB}) : 1(\overline{A'B'}) = 1(\overline{BC}) : 1(\overline{B'C'}) = 1(\overline{CA}) : 1(\overline{C'A'}) = 2 : 1$$

Die Höhenlinien des Mittendreiecks $\Delta A'B'C'$ sind gleichzeitig auch die Streckensymmetrale des Dreiecks ΔABC (Satz 6). Somit gilt:

$$H' = M$$

(vgl: Zeuge, W. Nützliche und schöne Geometrie: eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 64)

"Die entsprechenden Punkte des großen und des kleinen Dreiecks liegen auf einer Geraden durch den gemeinsamen Schwerpunkt S und ein Punkt des großen Dreiecks hat den doppelten Abstand vom Schwerpunkt wie der entsprechende Punkt des kleinen Dreiecks, also liegen z. B. die Punkte A , S und A' auf einer Geraden und es gilt":

(Zeuge, W. Nützliche und schöne Geometrie: eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 64)

$$1(\overline{AS}) = 2 \cdot 1(\overline{SA'})$$

Deswegen gilt auch

$$1(\overline{HS}) = 2 \cdot 1(\overline{SH'})$$

Weil ja gilt $H' = M$, ist die strichlierte Gerade die Eulersche Gerade von dem großen Dreieck ΔABC und es gilt:

$$1(\overline{HS}) = 2 \cdot 1(\overline{SM})$$

Was zu beweisen war.

(vgl: Zeuge, W. Nützliche und schöne Geometrie: eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 64)

5. Der Feuerbachkreis

Dieser Abschnitt der Arbeit widmet sich dem deutschen Mathematiker Karl Wilhelm Feuerbach und dem Feuerbachkreis. Bewiesen wird der Neunpunktesatz. In der Arbeit "Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie" von Darij Grinberg aus dem Jahre 2004 werden die Beweise sehr ausführlich dargestellt. Online ist der Artikel unter dem URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf> zu finden.

In der Schule wird der Feuerbachkreis üblicherweise nicht thematisiert. Dieses Kapitel soll zeigen, dass die Elementargeometrie nicht mit der Eulerschen Geraden aufhört, sondern dass es noch viele unzählige Sätze gibt.

Der Feuerbachkreis wird auch der Neunpunktekreis genannt. Grund dafür ist, dass vor der Arbeit von Feuerbach, zwei andere Mathematiker bereits ein Satz veröffentlicht haben, welcher den Satz des Feuerbach enthält. Diese Mathematiker waren Jean Victor Poncelet und Charles - Julien Brianchon. Doch der Name Feuerbachkreis wird im deutschsprachigen Raum immer noch oft verwendet.

5.1 Karl Wilhelm Feuerbach

Karl Wilhelm Feuerbach lebte von 1800 bis 1834 in Deutschland. Er war ein "Mitbegründer der Dreiecksgeometrie." (Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 1) Feuerbach studierte in Freiburg und promovierte. Er schrieb die Arbeit "Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch - trigonometrische Abhandlung." (Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 1)

Analytisch - trigonometrisch bedeutet, "dass - im Unterschied zur synthetischen Methode - die Sätze vor allem durch trigonometrische Rechnung bewiesen werden und nicht durch geometrische

Überlegungen à la Euklid. Allerdings gibt Feuerbach im letzten der sechs Abschnitte die synthetischen (d. h. rein geometrischen) Beweise von neun Ergebnissen, die er vorher analytisch gezeigt hat." (Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.uni-lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 1)

Danach unterrichtete er Mathematik in einem Gymnasium in Erlangen, Deutschland. Doch, weil er während seines Studiums politisch aktiv war, wurde er verhaftet. Im Gefängnis versuchte er sich zwei mal umzubringen. Doch er beschäftigte sich weiterhin mit der Mathematik. Nach einem Jahr im Gefängnis wurde er entlassen und unterrichtete in einer anderen Schule Mathematik. "1830 musste er den Schuldienst verlassen, als er vor einer Schulklasse mit einem Schwert erschien und drohte, jedem den Kopf abzuschlagen, der eine Gleichung nicht lösen konnte." (Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.uni-lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 2).

1834 starb Karl Wilhelm Feuerbach.

5.2 Der "kleine Satz von Feuerbach"

(Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.uni-lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 2)

Man betrachtet ein Dreieck $\triangle ABC$, das beliebig ist. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ werden A' , B' und C' genannt. Und die Höhenfußpunkte von $\triangle ABC$ werden H_c , H_b und H_a genannt.

Der "kleine Satz von Feuerbach" (Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.uni-lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 2) lautet folgendermaßen:

Satz:

"Die Punkte A' , B' , C' , H_a , H_b und H_c liegen auf einem Kreis."

(Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.uni-lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 2)

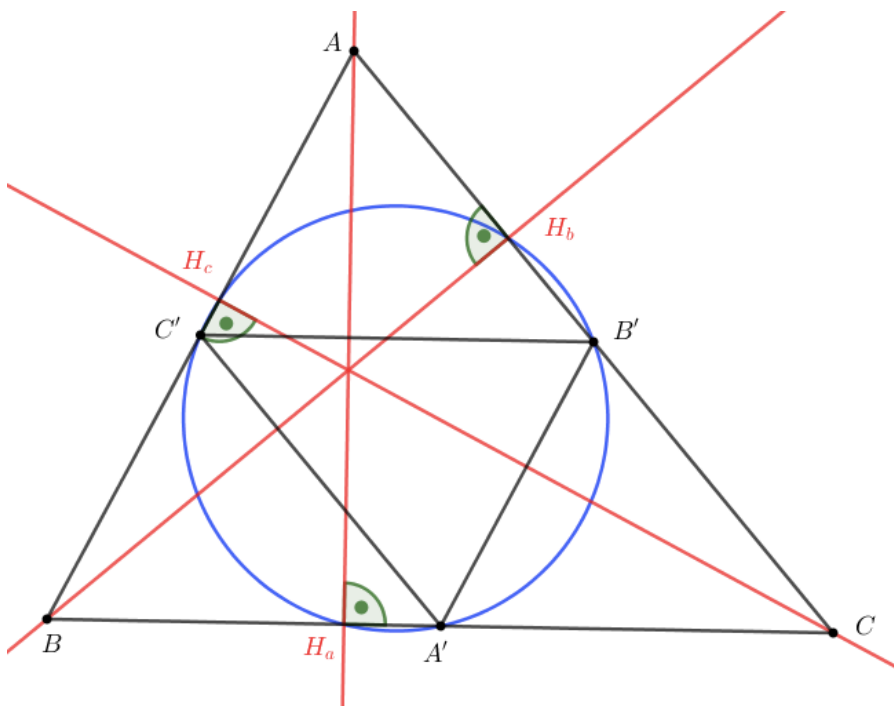


Abb. 26 Der kleine Satz von Feuerbach (vgl: Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 3)

Feuerbach bewies also, dass die Eckpunkte des Mittendreiecks und die Höhenfußpunkte von dem Dreieck $\triangle ABC$ auf dem selben Kreis liegen.

5.3 Der Neunpunktekreis

Wie schon bereits erwähnt, war der Satz von Feuerbach in einer Arbeit von Poncelet und Brianchon bereits erkannt worden. Zuerst werden die Biographien von Poncelet und Brianchon kurz dargestellt. Die Biographien sind deswegen wichtig, weil man nicht vergessen sollte, dass hinter all den Sätzen, Definitionen und Beweisen, sehr viel Arbeit, Mühe und Hinhabe von wichtigen Mathematikern und (leider sehr wenigen) Mathematikerinnen steckt. Des Weiteren hatten viele Mathematikerinnen und Mathematiker ein sehr interessantes Leben, was die Neugierde der Lernenden wecken würde.

5.3.1 Jean Victor Poncelet

Jean Victor Poncelet wurde 1788 in Metz, eine Stadt im Nordosten von Frankreich, geboren. Er kam als ein uneheliches Kind auf die Welt. Obwohl die Eltern nach einigen Jahren heirateten,

wohnte Jean Victor Poncelet trotzdem in einer Pflegefamilie Nahe Metz. Mit 15 zog er wieder nach Metz. Dort wurde er von erfolgreichen Lehrern unterrichtet, auch von Charles - Julien Brianchon.

Nachdem er einen Teil seines Studiums abschloss, entschied er sich zum Militär zu gehen.

(vgl: Jean - Victor Poncelet (1788 - 1867) - er bahnte Napoleon den Weg nach Moskau. [online]. URL: <https://www.spektrum.de/wissen/jean-victor-poncelet-er-bahnte-napoleon-den-weg-nach-moskau-frei/1573020>, 10. 12. 19)

Inzwischen wurde er Leutnant der Armee und Ingenieur. 1812 bekam Victor Poncelet den Auftrag, gemeinsam mit der Grande Armée, bestehend "aus 600 000 Soldaten" (Jean - Victor Poncelet (1788 - 1867) - er bahnte Napoleon den Weg nach Moskau. [online]. URL: <https://www.spektrum.de/wissen/jean-victor-poncelet-er-bahnte-napoleon-den-weg-nach-moskau-frei/1573020>, 10. 12. 19) im Krieg gegen Russland zu kämpfen und wurde auch als Kriegsgefangener von den Russen festgenommen. Nach einigen Monaten wurde er schließlich auf Grund eines Friedensabkommens in die Heimat zurückgeschickt.

Während seiner Gefangenschaft widmete er sich der Geometrie, wobei er überhaupt keine Literatur verwenden konnte. Auch nach der Gefangenschaft arbeitete er als Hauptmann und unterrichtete auch Mechanik. Des Weiteren veröffentlichte er viele Arbeiten über die Geometrie, vor allem die Projektive Geometrie. Später übernahm Poncelet auch die Arbeit als Professor für angewandte Mechanik. Ein Grund dafür war auch, dass er viel Kritik über seine Projektive Geometrie erhielt.

(vgl: Jean - Victor Poncelet (1788 - 1867) - er bahnte Napoleon den Weg nach Moskau. [online]. URL: <https://www.spektrum.de/wissen/jean-victor-poncelet-er-bahnte-napoleon-den-weg-nach-moskau-frei/1573020>, 11. 12. 19)

"Während der Arbeit an einer Zusammenstellung seiner Beiträge zur angewandten Mechanik stirbt er. Nur ein kleiner Teil der Unterlagen wird später von einem seiner Schüler herausgegeben; der Rest geht während des Kriegswirren 1914 bis 1918 verloren." (Jean - Victor Poncelet (1788 - 1867) - er bahnte Napoleon den Weg nach Moskau. [online]. URL: <https://www.spektrum.de/wissen/jean-victor-poncelet-er-bahnte-napoleon-den-weg-nach-moskau-frei/1573020>, 11. 12. 19)

5.3.2 Charles - Julien Brianchon

Brianchon war auch ein Mathematiker aus Frankreich. Er lebte von 1783 bis 1864. Wie Poncelet studierte auch Brianchon an der "Ecole polytechnique in Paris". ([online]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Julien_Brianchon, 14. 12. 19).

Die Seitenmitten, also die Punkte, wo sich die Streckensymmetralen mit den dazugehörigen Strecken schneiden, die Höhenfußpunkte von dem Dreieck und die Mittelpunkte zwischen dem Höhenschnittpunkt und den Ecken des Dreiecks liegen auf dem selben Kreis. (vgl: Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 5)

Dieser Satz wird nun bewiesen.

Beweis:

Zunächst ist zu zeigen, dass die Seitenmitten A' , B' und C' und die Mittelpunkte der Strecken $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ und $\overline{HC}$ D , E und F auf einem Kreis sind.

Wenn man beweist, dass die Vielecke $DEA'B'$ und $EFB'C'$ Rechtecke sind, so ist auch bekannt, dass die Ecken dieser Rechtecke in einem Kreis, dem Umkreis, sind. Die Vierecke $DEA'B'$ und $EFB'C'$ haben die selbe Diagonale, nämlich $\overline{EB'}$. Deswegen müssen die Umkreise der beiden Vierecke der selbe Umkreis sein. So liegen auf diesem Kreis die Punkte A' , B' , C' , D , E und F .

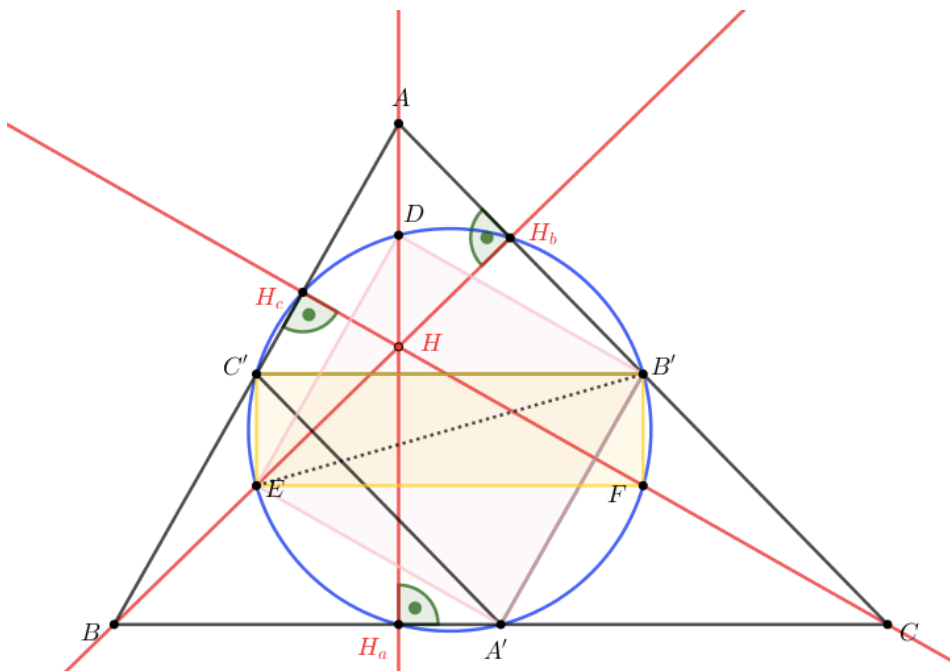


Abb. 28 Umkreis der Vielecke $DEA'B'$ und $EFB'C'$

Der Punkt D ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{HA}$. Es gilt:

$$1(\overline{HD}) : 1(\overline{HA}) = 1 : 2$$

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{HB}$. Es gilt:

$$1(\overline{HE}) : 1(\overline{HB}) = 1 : 2$$

Wegen der Umkehrung des ersten Strahlensatzes, gilt $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Aus Satz 6 ist bekannt, dass $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$. Daraus folgt, dass $\overline{DE} \parallel \overline{A'B'}$.

Der Punkt B' ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Es gilt:

$$1(\overline{AB'}) : 1(\overline{AC}) = 1 : 2$$

Der Punkt D ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AH}$. Es gilt:

$$1(\overline{AD}) : 1(\overline{AH}) = 1 : 2$$

Wegen der Umkehrung des ersten Strahlensatzes gilt $\overline{DB'} \parallel \overline{HC}$.

Der Punkt A' ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Es gilt:

$$1(\overline{BA'}) : 1(\overline{BC}) = 1 : 2$$

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BH}$. Es gilt:

$$1(\overline{BE}) : 1(\overline{BH}) = 1 : 2$$

Wegen der Umkehrung des Strahlensatzes gilt $\overline{EA'} \parallel \overline{HC}$.

Wenn $\overline{DB'} \parallel \overline{HC}$ und $\overline{EA'} \parallel \overline{HC}$ so ist auch $\overline{DB'} \parallel \overline{EA'}$.

Wenn $\overline{DE} \parallel \overline{A'B'}$ und $\overline{DB'} \parallel \overline{EA'}$ dann hat das Viereck $DEA'B'$ zwei Seiten, die parallel sind. $\overline{DB'}$ und $\overline{EA'}$ sind ja parallel zur Strecke $\overline{HC}$. Und die Strecke $\overline{HC}$ ist orthogonal zur Strecke $\overline{AB}$. Die

Weil die Rechtecke $DEA'B'$ und $EFB'C'$ eine gemeinsame Diagonale, nämlich $\overline{EB'}$, haben, so müssen sie auch den selben Umkreis haben, auf der die Punkte A', B', C' und D, E, F liegen.

Der Punkt D liegt auf der Höhenlinie h_a , der orthogonal zu der Strecke $\overline{BC}$ ist. Also ist der Winkel $\angle DH_a A'$ rechtwinkelig. Wegen des Satzes des Thales gilt, dass H_a auf dem Kreis liegt mit Radius $\frac{1}{2} \cdot 1(\overline{DA'})$.

Der Punkt E liegt auf der Höhenlinie h_b , der orthogonal zu der Strecke $\overline{AC}$ ist. Also ist der Winkel $\angle EH_b B'$ rechtwinkelig. Wegen des Satzes des Thales gilt, dass H_b auf dem Kreis liegt mit Radius $\frac{1}{2} \cdot 1(\overline{EB'})$.

Der Punkt F liegt auf der Höhenlinie h_c , der orthogonal zu der Strecke $\overline{AB}$ ist. Also ist der Winkel $\angle FH_c C'$ rechtwinkelig. Wegen des Satzes des Thales gilt, dass H_c auf dem Kreis liegt mit Radius $\frac{1}{2} \cdot 1(\overline{DC'})$.

Also liegen insgesamt die Punkte H_a, H_b und $H_c; D, E$ und $F; A', B'$ und C' auf einem Kreis, dem Neunpunktekreis.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 307-309)

Die Dreiecke $\Delta H_a H_b H_c$, $\Delta A' B' C'$ und ΔDEF werden jeweils Höhenfußdreieck, Mittendreieck und Eulerdreieck von dem Dreieck ΔABC genannt. Der Feuerbachkreis ist der Umkreis vom Höhenfußdreieck, des Eulerdreiecks und des Mittendreiecks. (vgl: Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 6)

Es werden noch zwei Sätze vorgestellt, welche den Mittelpunkt und den Radius des Feuerbachkreises beinhalten.

Satz:

Der Feuerbachkreis des Dreiecks ΔABC hat den Mittelpunkt N und liegt auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks ΔABC . Wenn U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC ist und der Höhenschnittpunkt als H bezeichnet wird, dann liegt N genau in der Mitte der Strecke $\overline{HU}$. Außerdem gilt: $\overline{US} : \overline{SN} = 2$.

(vgl: Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 8)

Satz:

Wenn der Umkreisradius des Dreiecks $\triangle ABC$ als r bezeichnet wird, dann ist $\frac{r}{2}$ die Radiuslänge

des Feuerbachkreises, also ist der Umkreisradius doppelt so groß, wie der Feuerbachkreisradius.

(vgl: Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 8)

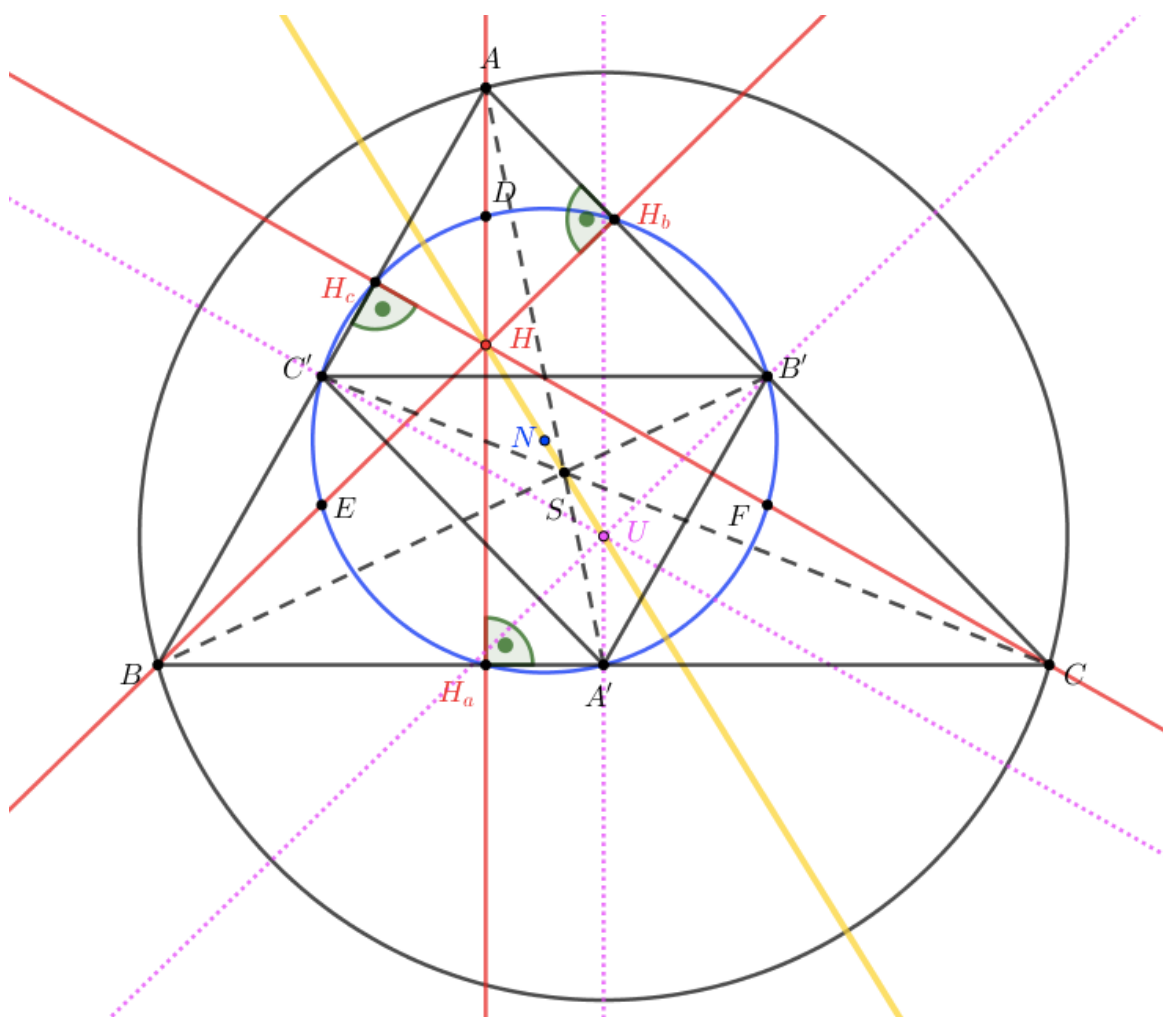


Abb. 30 Mittelpunkt des Neunpunktekreises (vgl: Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 8)

5.4 Der "große Satz von Feuerbach"

(Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 9)

Bei dem "großen Satz von Feuerbach" (Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 9) geht es um die In - und Ankreise eines Dreiecks.

Satz:

Der Inkreis eines Dreiecks $\triangle ABC$ wird immer innerlich und die drei Ankreise des Dreiecks $\triangle ABC$ werden immer äußerlich von dem Feuerbachkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ berührt.

(vgl: Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 9)

Die dazugehörige Zeichnung ist recht kompliziert, und wegen den vielen Winkelsymmetralen ein wenig schwierig zu erkennen. Der Beweis für diesen Satz ist viel komplizierter als die Zeichnung selbst.

Kurz zur Wiederholung gelten die Sätze 9 und 10 für den Inkreis und die Ankreise:

Satz 9:

Die Innenwinkelsymmetralen von einem Dreieck schneiden sich im Punkt W, welcher der Mittelpunkt von dem Inkreis des Dreiecks ist.

(vgl: Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 304)

Satz 10:

"Die Außenwinkelhalbierenden durch je zwei Ecken eines Dreiecks und die Innenwinkelhalbierende durch die dritte Ecke schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Ankreises des Dreiecks."

(Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7.Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018, Seite 304)

Die dazugehörige Zeichnung für den Beweis vom "großen Satz des Feuerbach" ist in Abb. 31 dargestellt.

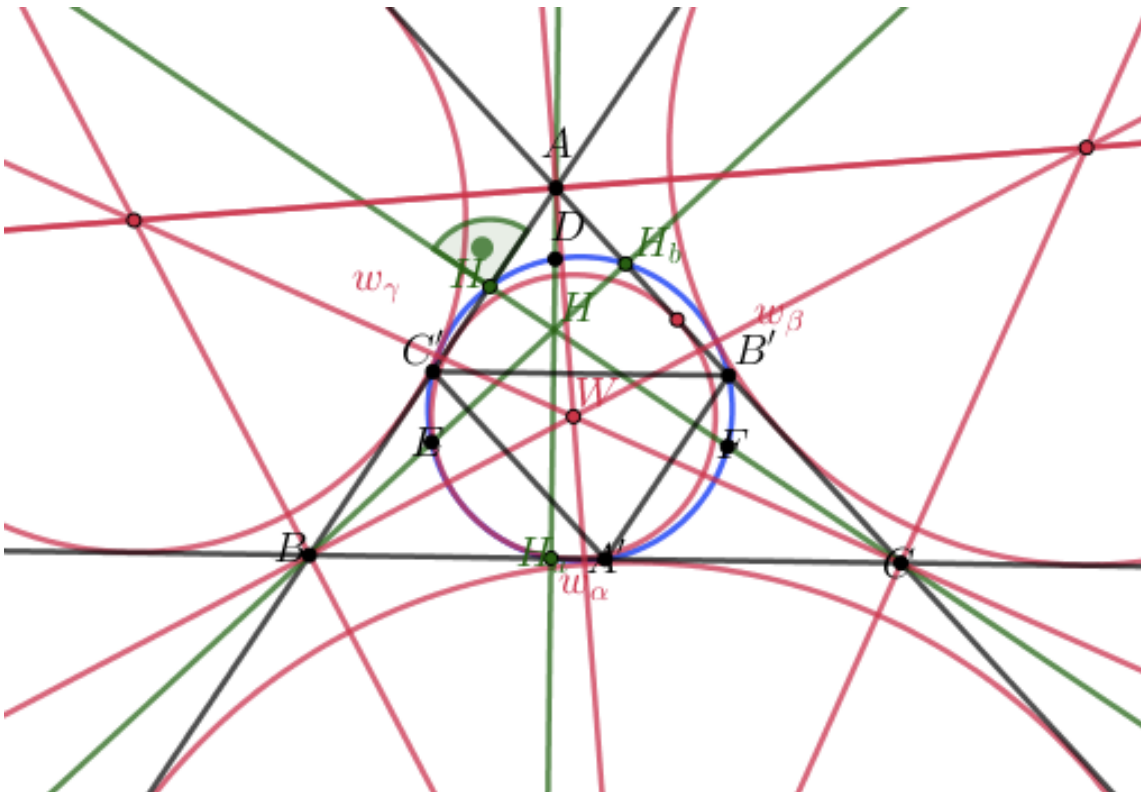


Abb.31 Der große Satz von Feuerbach (vgl: Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>, 08. 12. 19, Seite 9)

Die rosa gezeichneten Geraden sind die Innen - und Außenwinkelhalbierenden der jeweiligen Seiten. Der Punkt W ist der Inkreismittelpunkt. Der blaue Kreis ist der Feuerbachkreis und berührt die rosa Kreise. Der Inkreis wird von innen und die Ankreise werden von außen berührt.

Man könnte noch sehr viel über den Feuerbachkreis schreiben, wie zum Beispiel die Berührungspunkte des Feuerbachkreises, doch in dieser Arbeit wird das Thema des Feuerbachkreises mit dem "großen Satz von Feuerbach" beendet.

6. Die Malfatti - Kreise

In diesem Kapitel geht es um das berühmte Problem der drei Kreise in einem Dreieck, die "Malfatti - Kreise". Es gibt verschiedene Konstruktionen dafür, welche hier vorgestellt werden.

6.1 Gianfrancesco Malfatti

Gianfrancesco Malfatti wurde 1737 in Italien geboren und starb im Jahre 1807. Er unterrichtete Physik und Mathematik in einer Schule, die er selbst gegründet hatte. Später wurde er auch Professor an einer Universität. Eine Konstruktion einer "Lösung spezieller Gleichungen fünften Grades mit der später genannten Malfatti - Resolvente" ([online]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gianfrancesco_Malfatti, 14. 12. 19) machte ihn namhaft . Berühmt wurde er aber auch wegen der Malfatti - Kreise, die hier näher erläutert werden. Sehr informativ und interessant für dieses Kapitel ist die Arbeit "Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung" von Ingmar Lehmann, online unter dem URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf> zu finden.

6.2 Das Malfatti - Problem

1803 formulierte Malfatti "ein Problem, das auf die folgende Aufgabe hinauslief: In ein gegebenes Dreieck sind drei Kreise so einzufügen, dass ihre Fläche maximal wird." (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag.)

Malfatti behauptete, dass sich die Kreise gegenseitig und jeweils zwei Seiten des Dreiecks berühren müssen. Diese Kreise wurden Malfatti - Kreise genannt.

Der Mathematiker Bernoulli, der zwischen 1654 und 1705 gelebt hat, hat sich mit diesem Problem beim gleichschenkligen Dreieck beschäftigt. Steiner, der zwischen 1796 und 1863 gelebt hat, hat eine Konstruktion für beliebige Dreiecke gefunden. Erst im Jahre 1929 wurde von den Mathematikern Lob und auch Richmond festgestellt, "dass Malfatti sich für den Fall des

gleichseitigen Dreiecks geirrt hat. Malfattis Lösung für den Fall des gleichseitigen Dreiecks erreicht eine Bedeckung von fast 73 % ..." (Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 14. 12. 19)

Die beiden Mathematiker haben eine Bedeckung von fast 74 % geschafft. Die Voraussetzung, dass die Kreise sich gegenseitig und genau zwei Dreiecksseiten berühren müssen, wurde somit fallen gelassen. (vgl: Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 14. 12. 19)

Im Jahre 1965 entdeckt der Mathematiker Howard Eves, der im Jahre 2004 verstorben ist, folgendes: Bei einem rechtwinkligen Dreieck, der sehr schmal, aber lang ist, kann man sehr leicht erkennen, dass die Lösung von Malfatti einfach nicht stimmen kann.

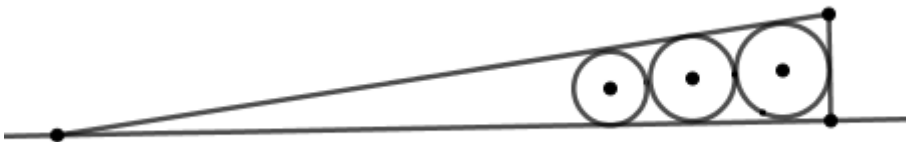


Abb. 32 Malfatti - Kreise im schmalen, langen rechtwinkligen Dreieck (vgl: Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 14. 12. 19)

Im Jahre 1967 bewies Michael Goldberg, der zwischen 1902 und 1990 lebte, dass die Lösung von Malfatti für gar kein Dreieck richtig ist. Damit man das Malfatti - Problem richtig lösen kann, muss man immer den Inkreis des Dreiecks als einer der drei Kreise verwenden. Das bedeutet, dass ein Kreis alle Seiten des Dreiecks berühren muss. So eine Zeichnung kann folgendermaßen aussehen:

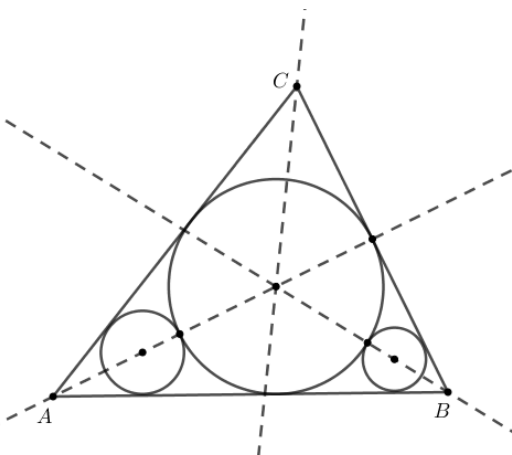


Abb. 33 Malfatti - Kreis 1

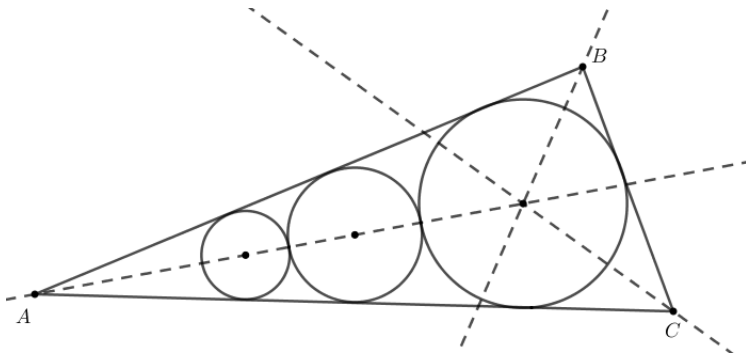


Abb. 34 Malfatti - Kreis 2

6.3 Das Zeichnen der Malfatti - Kreise

Beim Konstruieren der Malfatti - Kreise kann man drei Methoden unterscheiden, welche sehr aufwendig sind. Hier werden nur die unterschiedlichen Konstruktionen vorgestellt, aber nicht bewiesen.

6.3.1 "Konstruktion nach Malfatti"

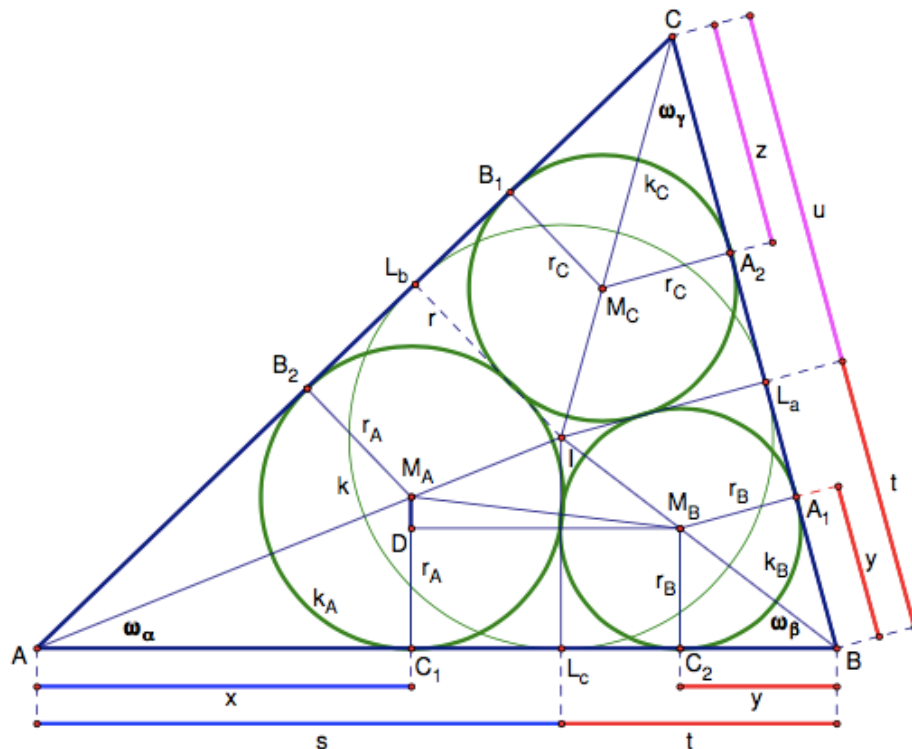


Abb. 35 "Konstruktion nach Malfatti" (Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 14. 12. 19)

Gegeben sind das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b und c und den dazugehörigen Winkeln α, β und γ . Außerdem sind die Winkelsymmetralen w_α, w_β und w_γ und somit der Inkreis k mit Mittelpunkt I und Radius r bekannt. Die Malfatti - Kreise werden k_a, k_b, k_c mit den Mittelpunkten M_a, M_b, M_c und den Radien r_a, r_b, r_c bezeichnet. Zum Schluss hat man die Berührungspunkte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ mit den Dreiecksseiten.

(vgl: Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 15. 12. 19)

Malfatti hat diese Zeichnung recht kompliziert gezeichnet und zwar mit dem Satz von Pythagoras und mit der Ähnlichkeit der Dreiecke. (vgl: Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 15. 12. 19)

Für die Zeichnung braucht man also das Dreieck $\triangle ABC$ und die Winkelhalbierenden $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$, damit man auf den Inkreis I kommt. So ergeben sich die Strecken $\overline{AI}, \overline{BI}$ und $\overline{CI}$. Zu den Längen s ($\overline{AL_c}$), t ($\overline{BL_c}$) und u ($\overline{CL_a}$) kommt man durch die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$. Für den nächsten Schritt benötigt man eine Hilfsstrecke $\overline{PQ}$. Diese Hilfsstrecke $\overline{PQ}$ (hat die Länge m) rechnet man folgendermaßen aus:

(vgl: Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 15. 12. 19)

$$m = \frac{1}{2} \cdot [\overline{AI} + \overline{BI} + \overline{CI}] - (\overline{AL_c} + \overline{BL_c} + \overline{CL_a}) + \frac{1}{2} \cdot r$$

(vgl: Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 15. 12. 19)

In Abb. 36 ist diese Formel gut dargestellt.

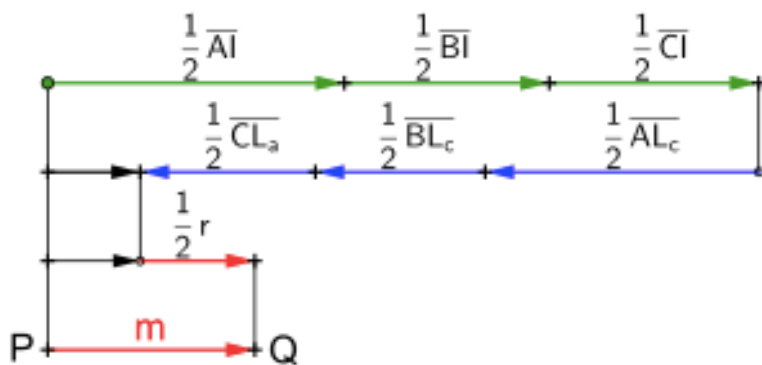


Abb. 36 Hilfsstrecke $\overline{PQ}$ ([online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Malfatti-Kreis>, 15. 12. 19)

Detaillierter wird diese Methode hier nicht weiter dargestellt, weil die Konstruktion ziemlich schwer ist und die Konstruktion nach Lob und Richmond viel einfacher ist, den Schülerinnen und Schülern zu erklären, weil für diese Konstruktion nur die Schulkenntnisse ausreichen.

6.3.2 "Konstruktion nach Steiner - Petersen"

1826 erarbeitete Jakob Steiner, ein wichtiger schweizer Mathematiker im Bereich der synthetischen Geometrie folgenden Satz:

"Jede der gemeinsamen Tangenten der Malfatti - Kreise berührt zugleich zwei der drei Inkreise der drei Teildreiecke $\triangle BCI$, $\triangle CAI$, $\triangle ABI$, wobei I der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ ist."

(Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 15. 12. 19)

Dieser Satz ist ein wichtiger Teil für die Konstruktion der Malfatti - Kreise. In den Abbildungen 37 und 38 ist dieser Satz gut zu sehen.

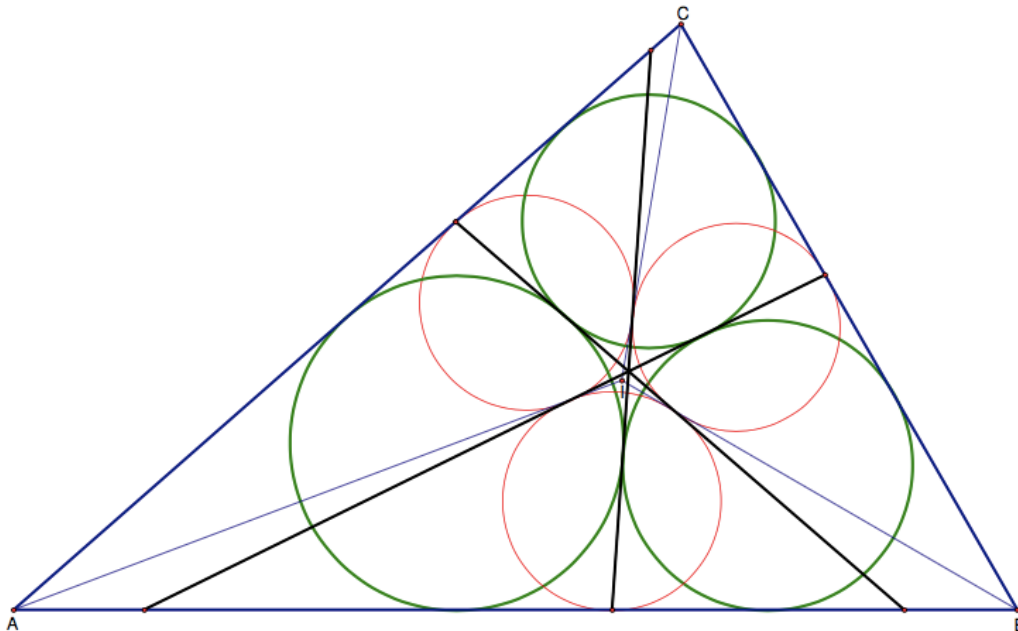


Abb. 37 "Konstruktion nach Steiner - Petersen" (Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 15. 12. 19)

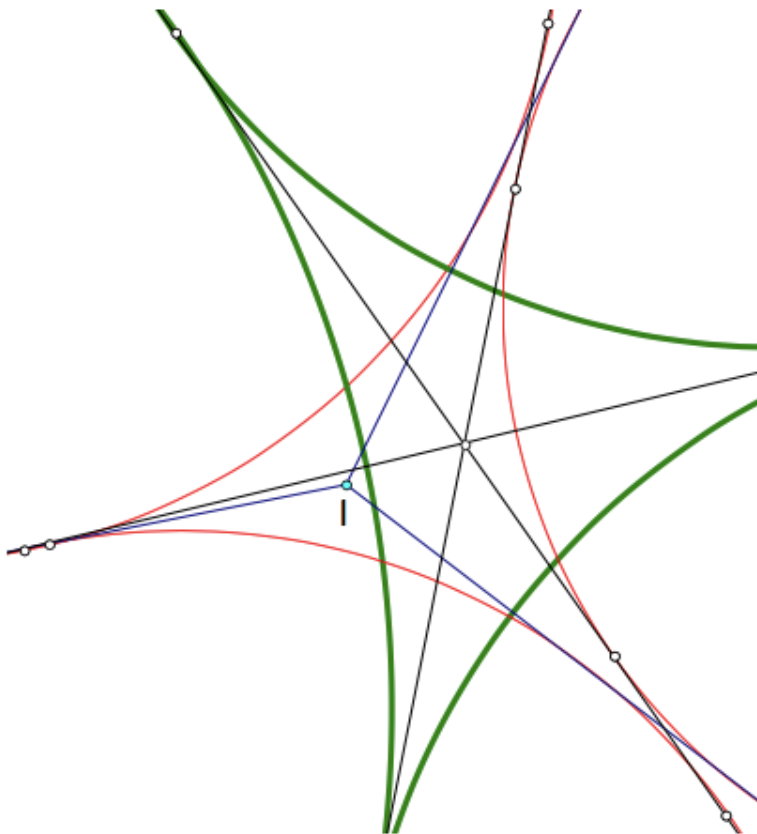


Abb. 38 "Konstruktion nach Steiner - Petersen" Zoom (Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 15. 12. 19)

"Die Inkreise berühren sich (im allgemeinen Fall) nicht; sie werden aber eben doch auch von den Tangenten der Malfatti- Kreise berührt, allerdings in unterschiedlichen Punkten." (Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 15. 12. 19)

Auf die genauere Methode wird auch hier nicht näher eingegangen, weil die Konstruktionsmethode nach Lob und Richmond, viel einfacher und auch für die Schülerinnen und Schüler viel verständlicher ist, als die ersten beiden Methoden.

6.3.3 "Konstruktion nach Lob und Richmond"

Für diese Konstruktion benötigt man ein gleichseitiges Dreieck. Diese Konstruktion ist im Gegensatz zu den ersten beiden Konstruktionen relativ einfach zu zeichnen. Bei dieser Konstruktion ist der Inkreis des gleichseitigen Dreiecks ein Malfatti- Kreis.

Zur Konstruktion benötigt man zuerst ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$. Dann wird wieder mit Hilfe der Winkelsymmetralen der Inkreismittelpunkt I ermittelt. Danach wird das Lot von I auf die Dreiecksseite $\overline{BC}$ eingezeichnet. Somit kommt man zum Fußpunkt D . Dadurch kann der Inkreis k eingezeichnet werden. Der Schnittpunkt des Inkreises mit der Winkelsymmetralen w_α ist E , und der Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden w_β ist F . Dann werden die Lote von I auf die Seite $\overline{AB}$ und auf die Seite $\overline{AC}$ eingezeichnet. Man erhält dadurch die Fußpunkte H und G .

Damit man die zwei anderen Kreise einzeichnen kann, zieht man von E und F jeweils eine Parallele zur Dreiecksseite $\overline{AB}$, bis sich die Parallelen mit der Dreiecksseite $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ schneiden. Dadurch erhält man die Punkte J (auf der Seite $\overline{AC}$) und K (auf der Seite $\overline{BC}$). Danach wird ein Lot von J auf w_α und ein Lot von K auf w_β eingezeichnet. Die Schnittpunkte sind die Mittelpunkte M_A und M_B der beiden Malfatti - Kreise. Dadurch kann man die Kreise k_A und k_B mit den Radien $\overline{M_A E}$ und $\overline{M_B F}$ einzeichnen.

Zum Schluss werden von M_A und M_B Lote auf die Seite $\overline{AB}$ gezogen und man erhält die Punkte L und M . Somit kommt man auf die drei Malfatti- Kreise mit den "neun möglichen Berührungspunkten D, E, F, G, H, J, K, L " ([online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Malfatti-Kreis>, 17. 12. 19)

(vgl: [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Malfatti-Kreis>, 17. 12. 19)

In Abb. 39 ist die Konstruktion mit GeoGebra dargestellt.

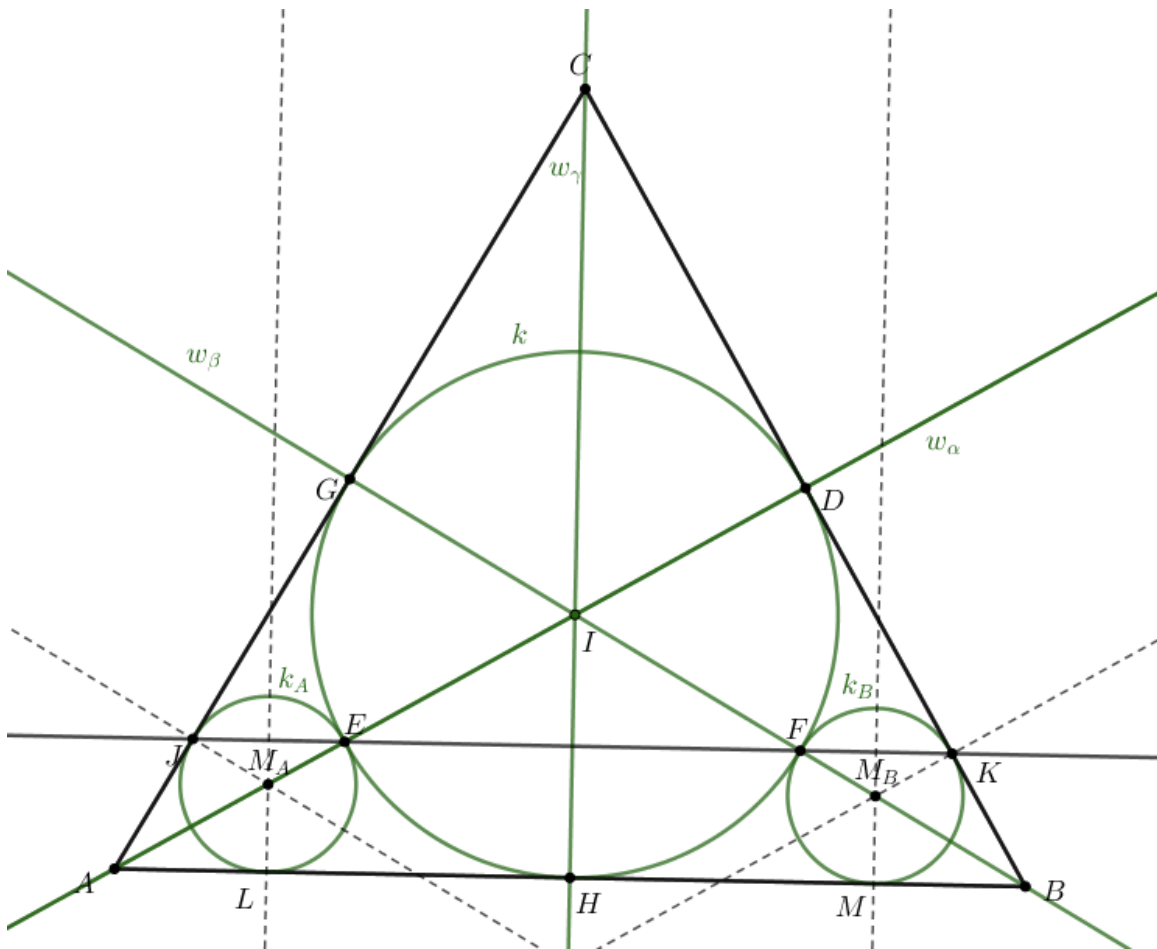


Abb. 39 "Konstruktion nach Lob und Richmond" (vgl: [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Malfatti-Kreis>, 17. 12. 19)

6. 4 Weitere berühmte Kreise

Es gibt so viele unterschiedliche wichtige Kreise in der elementaren Geometrie. All diese Kreise zu diskutieren, würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Deswegen wird hier nur kurz gezeigt, welche berühmten Kreise es noch gibt und wie sie aussehen.

6.4.1 Das Apollonische Berührproblem

Neben dem Feuerbachkreis, dem Neunpunktekreis und den Malfatti - Kreisen, gibt es noch etliche Kreise. Es gibt auch beispielsweise den Kreis des Apollonios. Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, gilt für den Kreis des Apollonios:

"**Satz:** Die Menge aller Punkte C , für die $\overline{AC} : \overline{BC} = k > 0$ konstant ist, ist der Kreis k (Kreis des Apollonius) über dem Durchmesser EF mit $TV(ABE) = -k$, $TV(ABF) = k$." ([online]. URL: https://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/lva/gmu/gmu05_07.pdf, 24. 09. 19) Wobei das Teilverhältnis als TV bezeichnet wird.

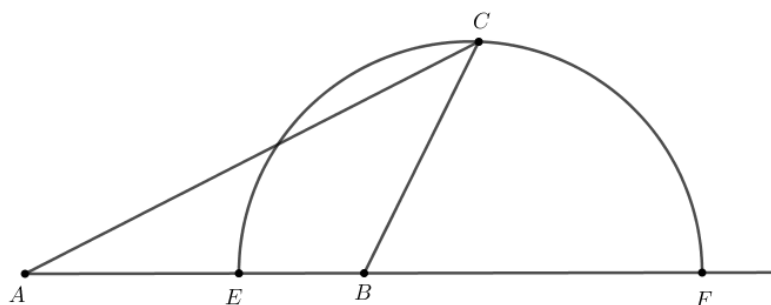


Abb. 40 Kreis des Apollonios (vgl: [online]. URL: https://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath/lva/gmu/gmu05_07.pdf, 18. 12. 19)

Apollonios hat in seinem Werk "Berührungen", welches allerdings verschwunden ist, folgendes Problem bearbeitet: "Gegeben sind drei Kreise. Gesucht ist ein vierter, der die gegebenen Kreise berührt." (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag., Seite 169)

Hier werden auch Kreise mit Radius Null (Punkte), und Kreise mit unendlichem Radius (Geraden) erlaubt. Dadurch ergeben sich zehn Probleme für das Apollonische Berührproblem. (vgl: Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag., Seite 169)

Diese zehn Probleme sind:

"

- **PPP:** Man bestimme alle Kreise, welche durch drei gegebene Punkte gehen.
- **PPT:** Man bestimme alle Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade berühren (also als Tangente besitzen).
- **PPK:** Man bestimme alle Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kreis berühren.

- **PTT:** Man bestimme alle Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Geraden berühren.
- **PTK:** Man bestimme alle Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, sowie eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berühren.
- **PKK:** Man bestimme alle Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei gegebene Kreise berühren.
- **TTT:** Man bestimme alle Kreise, welche drei gegebene Geraden berühren.
- **TTK:** Man bestimme alle Kreise, welche zwei gegebene Geraden und einen gegebenen Kreis berühren.
- **TKK:** Man bestimme alle Kreise, welche eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berühren.
- **KKK:** Man bestimme alle Kreise, welche drei gegebene Kreise berühren."

(Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag., Seite 169 - 170)

Das Problem **PPP** hat insgesamt eine Lösung: Der gesuchte Kreis ist der Umkreis von dem Dreieck. (siehe Abb. 41)

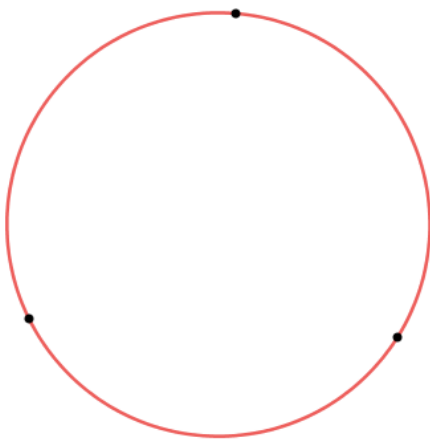


Abb. 41 PPP

Das Problem **TTT** hat insgesamt vier Lösungen, nämlich ein Inkreis des Dreiecks und auch drei Ankreise. (Abb. 42)

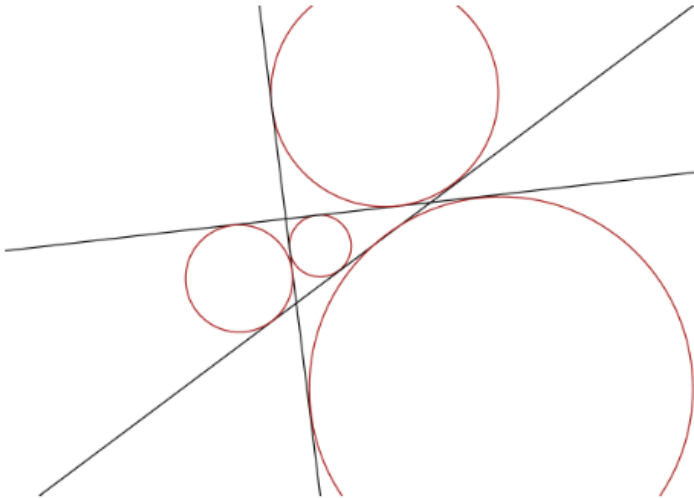


Abb. 42 TTT (Röttgen - Burtscheidt, J., 2007. Das Apollonische Berührproblem. Sammlung von Lösungen eines jahrtausende alten Problems. [online]. URL: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Das%20Apollonische%20Beruehrproblem,%202007.pdf>, Seite 5, 18. 12. 19)

Das Problem **PPT** hat insgesamt zwei Lösungen, wie auf Abb. 43 dargestellt.

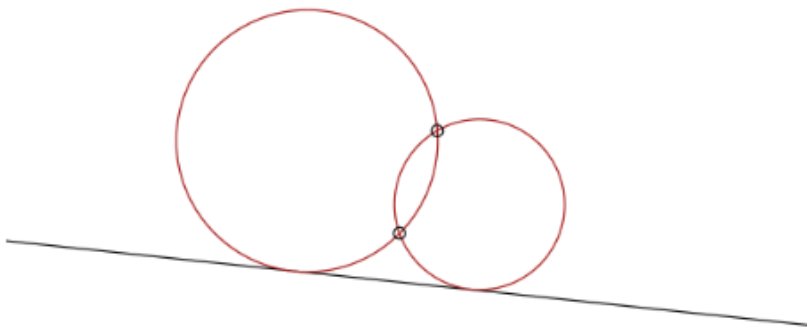


Abb. 43 PPT (Röttgen - Burtscheidt, J., 2007. Das Apollonische Berührproblem. Sammlung von Lösungen eines jahrtausende alten Problems. [online]. URL: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Das%20Apollonische%20Beruehrproblem,%202007.pdf>, Seite 5, 18. 12. 19)

Das Problem **PTT** hat auch zwei Lösungen. (siehe Abb. 44)

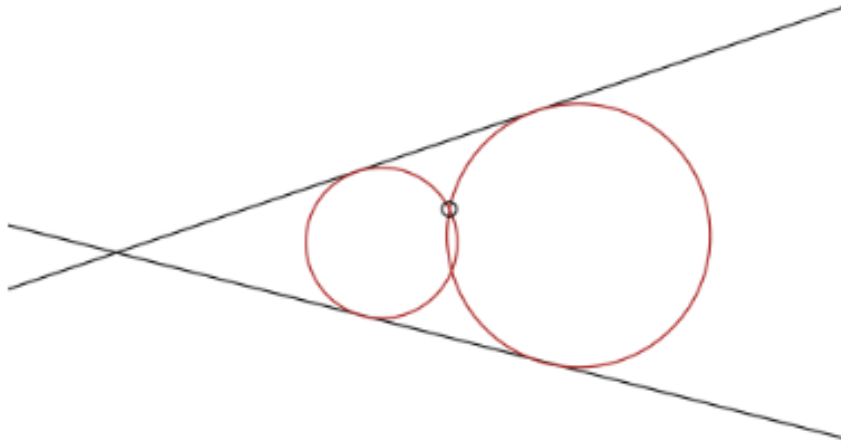


Abb. 44 PTT (Röttgen - Burtscheidt, J., 2007. Das Apollonische Berührproblem. Sammlung von Lösungen eines jahrtausende alten Problems. [online]. URL: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Das%20Apollonische%20Beruehrproblem,%202007.pdf>, Seite 6,18. 12. 19)

Das Problem **PPK** hat beispielsweise zwei Lösungen (Abb. 45)

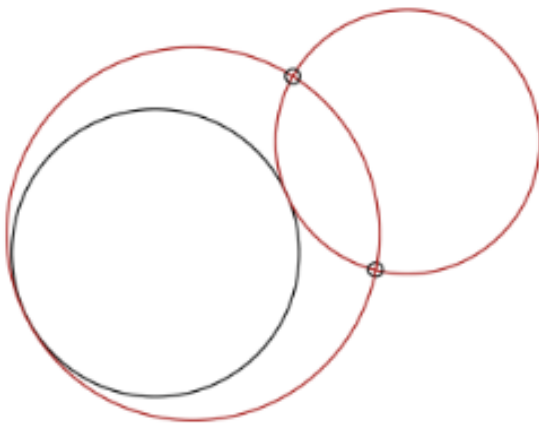


Abb. 45 PPK (Röttgen - Burtscheidt, J., 2007. Das Apollonische Berührproblem. Sammlung von Lösungen eines jahrtausende alten Problems. [online]. URL: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Das%20Apollonische%20Beruehrproblem,%202007.pdf>, Seite 6,18. 12. 19)

Die Probleme **PTK**, **PKK** und **TTK** haben jeweils vier Lösungen und die Probleme **TKK** und **KKK** haben jeweils acht Lösungen. (vgl: Röttgen - Burtscheidt, J., 2007. Das Apollonische Berührproblem.

Das Apollonische Problem hört sich zwar sehr einfach an, doch wenn man wirklich nach Lösungen sucht, erkennt man, dass dieses Problem gar nicht so einfach zu lösen ist.

6.4.2 Der Pferchkreis

Neben den Apollonioskreisen gibt es auch die nicht so bekannten Pferchkreise, die hier kurz erläutert werden.

Beim Pferchkreis muss man ein Minimum suchen. Man geht "aus von einer endlichen Punktmenge in der Ebene. Es ist klar, dass man Kreise findet, die diese Punktmenge umfassen, bei denen also kein Punkt außerhalb liegt. Wir suchen einen kleinsten umfassenden Kreis, einen sogenannten Pferchkreis." (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 100)

Dieser Pferchkreis ist eindeutig bestimmt. Wenn es zwei Pferchkreise gäbe, dann müssten alle Punkte in dem farbigen Bereich sein. "Dieser wiederum liegt in dem Kreis über $\overline{PQ}$. Da dieser einen kleineren Radius hat als die Kreise k_1 und k_2 , können diese keine Pferchkreise sein." (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 100)

Die Eindeutigkeit eines Pferchkreises ist in Abb. 46 sehr gut dargestellt. Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 , und keine Punkte der gegebenen Punktmenge.

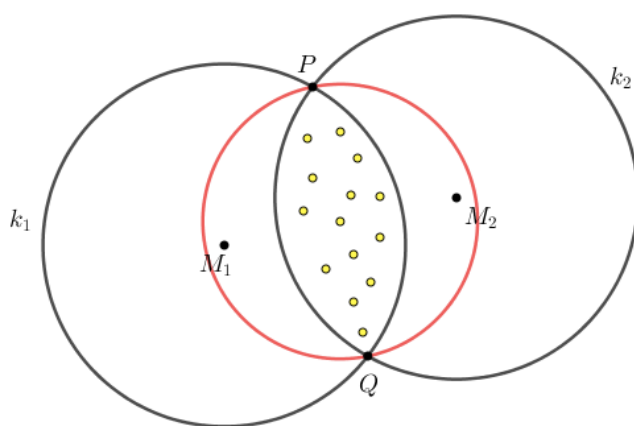


Abb. 46 Eindeutigkeit vom Pferchkreis (vgl Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 100)

Für die Bestimmung des Radius vom Pferchkreis ist der Satz von Jung wichtig. Zunächst ein paar Sätze über Heinrich Jung.

Heinrich Jung wurde im Jahre 1876 in Deutschland geboren. Er studierte Physik, Chemie und Mathematik und war später auch Professor in verschiedenen Universitäten. Es beschäftigte sich vor allem mit der algebraischen Geometrie und Geometrie. Jung war auch politisch aktiv:

"In der Zeit des Nationalsozialismus wurde er Mitglied in der Nationalsozialistischen Volkswohlfahrt, im Nationalsozialistischen Deutschen Dozentenbund und im Nationalsozialistischen Altherrenbund. 1945 trat er der CDU bei." ([online]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Wilhelm_Ewald_Jung, 20. 12. 19) Jung starb im Jahre 1953 in Deutschland.

Nun zum dem Satz von Jung.

Satz von Jung:

"Der Pferchkreis k von N Punkten der Ebene mit dem maximalen Abstand d hat mindestens den Radius $\frac{d}{2}$ und höchstens den Radius $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot d$."

(Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 100)

Und was genau ein Pferchkreis ist, wird im folgenden Satz beschrieben.

Satz:

"Umfasst ein Kreis k alle Punkte einer gegebenen endlichen Punktmenge, so ist k ihr Pferchkreis genau dann, wenn auf k zwei Punkte der Punktmenge liegen, die Endpunkte eines Durchmessers von k sind, oder wenn auf k drei Punkte dieser Menge liegen, die ein spitzwinkeliges Dreieck bilden."

(Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 104)

Spitzwinkelig heißt, wenn alle drei Innenwinkel des Dreiecks kleiner als 90° sind. Eine derartige Abbildung ist in Abb. 47 mit GeoGebra eingezeichnet.

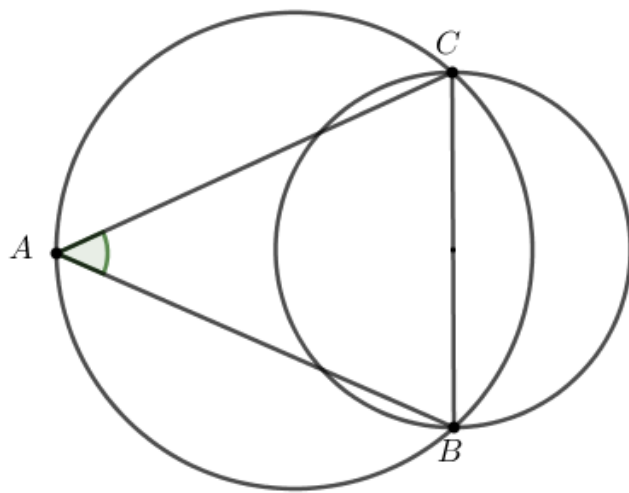


Abb. 47 Pferchkreis (vgl: Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 103)

7. Exkurs: Kreisketten

In diesem Kapitel geht es um Kreisketten, also "Mengen von Kreisen, von denen jeder Kreis zwei andere berührt oder schneidet." (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 183)

Bisher ging es darum (außer dem Apollonischen Berührproblem und dem Pferchkreis) um Kreise in oder um Dreiecke. In diesem Kapitel allerdings gibt es keine Dreiecke sondern nur Kreisketten. Drei Kreisketten werden hier vorgestellt, beginnend mit der Pappus - Kette, welche eigentlich nur ein Grenzfall von der Steiner - Kette ist, welcher anschließend dargelegt wird. Zu guter letzt wird der Sieben - Kreise - Satz vorgestellt.

7.1 Pappus - Kette

Man spricht von Pappus - Ketten, wenn sich "der Raum zwischen zwei Kreisen k_1, k_2 , die sich von innen berühren, durch eine Kreiskette $c_0, c_1, c_2, \dots$ füllen" (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 193) lässt. Es geht dabei um unendliche Ketten.

Bevor aber die Pappus - Kette vorgestellt wird, wird zunächst der griechische Mathematiker Pappus vorgestellt. Über ihn ist leider nicht viel bekannt, doch er war ein Astronom und Mathematiker in Alexandria und lebte etwa um 400 v. Chr. Pappus hat ein Werk geschrieben, nämlich die mathematischen Sammlungen. In diesem Werk hat er die älteren mathematischen Kenntnisse zusammengefasst und auch kommentiert. Er kommentierte auch die Elemente des Euklid. (vgl: [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Pappos>, 20. 12. 19)

Im folgenden wird der Satz von Pappus dargestellt.

Satz von Pappus:

"Es berühre der Kreis k_1 den Kreis k_2 von innen und der Kreis c_0 die beiden Kreise k_1, k_2 so, dass sein Mittelpunkt auf der Zentrale dieser Kreise liegt. Berühren die Kreise $c_1, c_2, c_3, \dots$ die Kreise k_1 und k_2 sowie ihren Vorgänger (c_1 also den Kreis c_0), so hat der Mittelpunkt des Kreises c_n von der Zentrale der Kreise k_1, k_2 den Abstand $n \cdot d$, wenn d der Durchmesser von c_n ist."

(Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 194)

Wie zeichnet man nun so eine Pappus - Kette. Dazu ist es wichtig zu wissen: Die Pappus - Kette "ist in der Geometrie eine unendliche Folge einander berührender Kreise in einem Arbelos." ([online].

URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Pappos-Kette>, 20. 12. 19)

Der Arbelos wird gezeichnet mit den drei Halbkreisen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$, wie in Abb. 48 dargestellt.

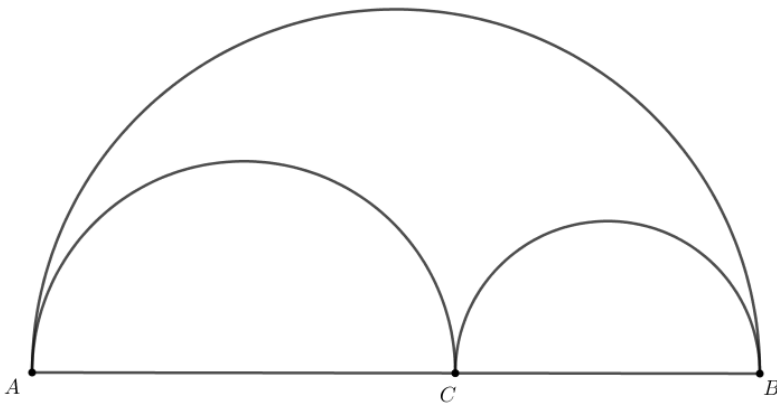


Abb. 48 Arbelos

Die Pappus - Kreise kann man am leichtesten mit der Inversion, also der Spiegelung am Kreis konstruieren. Mit GeoGebra ist das sehr einfach zu konstruieren. Dadurch kann man auch die Pappus - Kette relativ einfach zeichnen.

Der rote Kreis mit Radius $\overline{AB}$ ist unser Inversionskreis k_i . An diesem Kreis wird nun gespiegelt:

- Das Bild von dem Kreis mit Radius $\overline{AM}$ ist eine zum Radius $\overline{AM}$ orthogonale Gerade l durch den Punkt A.

- Das Bild von dem Kreis mit Radius $\overline{EB}$ ist eine parallele Gerade zu l , genannt m . Die Inversion D' des Punktes D liegt auf der Geraden m .
- Das Bild vom Kreis k_0 mit Radius $\overline{AC}$ ist der Kreis k'_0 .

Man setzt an k'_0 weitere gleiche Kreise und spiegelt diese Kreise an dem Inversionskreis. Dann entstehen die Pappus - Ketten. (vgl: [online]. URL: <https://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0011/pappus-1.pdf>, 20. 12. 19)

In Abb. 49 ist eine derartige Zeichnung dargestellt, welche mit GeoGebra konstruiert wurde.

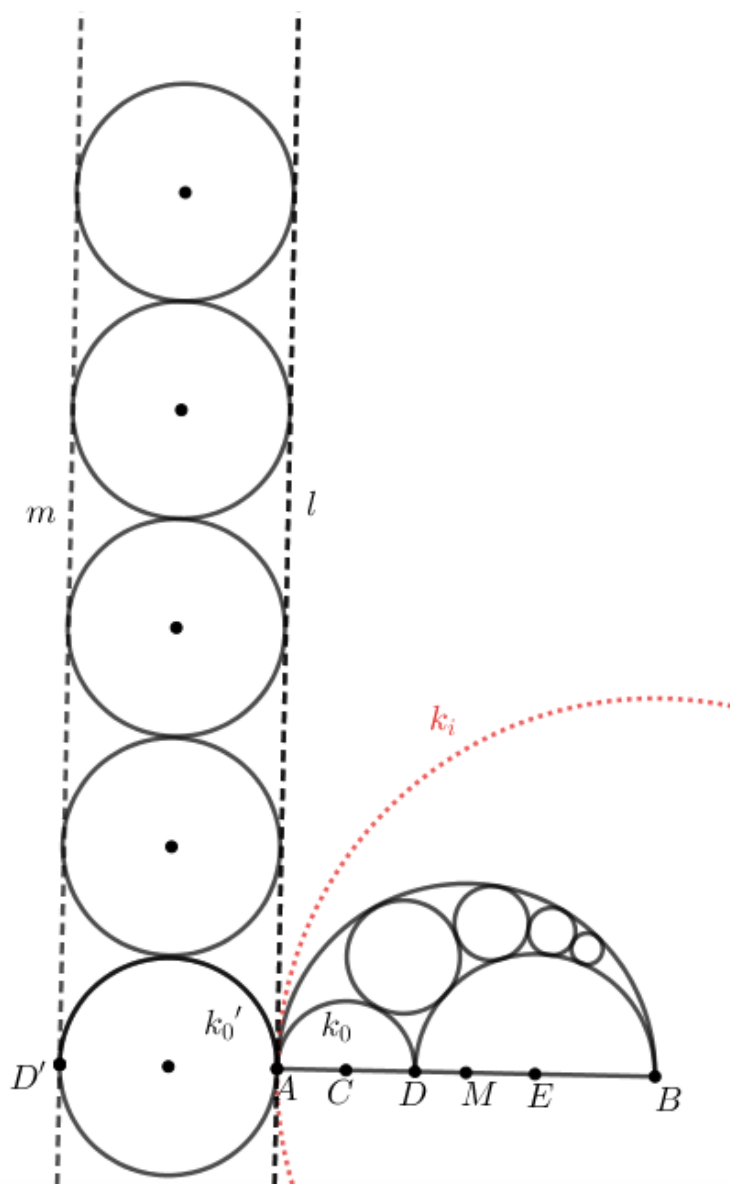


Abb. 49 Konstruktion der Pappus - Kette (vgl: [online]. URL: <https://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0011/pappus-1.pdf>, 20. 12. 19)

Mit Hilfe von GeoGebra lassen sich viele Aufgaben sehr einfach lösen. Allerdings muss auch erwähnt werden, dass man nur die Aufgaben mit GeoGebra lösen kann, welche auch prinzipiell nur mit Zirkel und einem Lineal konstruierbar sind. Man hat auch festgestellt, dass man Konstruktionen mit Zirkel und Lineal eigentlich nur mit einem Zirkel zeichnen kann.

Grund dafür ist die Spiegelung an Kreisen. Spiegelung einer Gerade an einem Kreis, ergibt wieder ein Kreis und eine Spiegelung eines Kreises an einem Kreis ergibt eine Gerade. (vgl: Ludwig, M., Didaktik der Geometrie. Kapitel 4 Konstruieren. [online]. URL: https://www.math.uni-frankfurt.de/~ludwig/vorlesungen/skripten/didgeo/Kapitel_4.pdf, Seite 16, 20. 12. 19)

7.2 Steiner - Kette

Berühmter als die Pappus - Kette ist wohl die Steiner - Kette.

"Gegeben seien zwei punktfremde Kreise k_1, k_2 derart, dass k_1 im Inneren von k_2 liegt. Wir zeichnen in einem ersten Schritt einen Kreis c_1 , der k_1 und k_2 berührt, dann einen Kreis c_2 , der k_1, k_2 und c_1 berührt....Nun zeichnen wir weitere Kreise, die jeweils die Kreise k_1, k_2 sowie den zuvor gezeichneten Kreis berühren. Schließt sich diese Kreiskette nach N Schritten, so erhalten wir eine Steiner - Kette oder Steiner'sche Kreiskette $c_1, \dots, c_N$. Es ist natürlich möglich, dass sich eine solche Kette erst nach mehrfacher Umrundung des Kreises k_1 schließt." (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 183)

In Abbildung 50 ist der allgemeine Fall dargestellt. Die Abbildung zeigt eine Steiner - Kette, die sich bei nur einer Umrundung schließt.

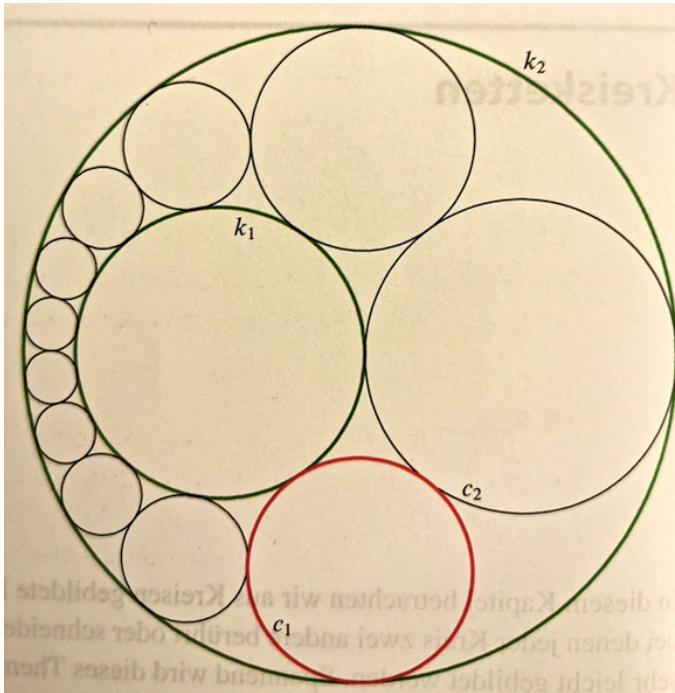


Abb. 50 Steiner - Kette (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 184)

Es gibt unterschiedliche Arten von Steiner - Ketten. Es gibt geschlossene Steiner - Ketten (wie die Kette in Abb. 50). Des Weiteren kann die Steiner - Kette offen sein. Wenn man versucht, diese offen gebliebene Stelle weiter mit einem Kreis zu schließen, dann überlappen der Anfangs- und der Endkreis. Wenn man immer weitere Kreise einzeichnet, bis sich die Steiner - Kette doch noch schließt, dann nennt man diese Kette eine multizyklische Steiner - Kette. (vgl: [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Steiner-Kette>, 21. 12. 19)

Zu den Steiner - Ketten gibt es einen sehr wichtigen Satz, welcher im Folgenden dargelegt wird:

Satz:

"Gibt es zwischen zwei gegebenen punktfremden Kreisen, von denen einer im Inneren des anderen liegt, eine Steiner - Kette, so gibt es unendlich viele solche Ketten."

(Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 183)

Des Weiteren gilt auch folgender Satz:

Satz:

Bei Steiner - Ketten liegen alle Berührungspunkte der Kreise auf einem einzigen Kreis.

(vgl: Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 187)

7. 3 Sieben - Kreise - Satz

In dem letzten Kapitel geht es um Kreisketten, welche sich alle berühren. Des Weiteren besteht diese Kreiskette, wie der Name schon sagt, aus sechs Kreisen. Nun zu dem Satz:

Satz:

"Berührt von den Kreisen $k_1, \dots, k_6$ jeder der Kreise $k_2, \dots, k_6$ seinen Vorgänger und der Kreis k_1 den Kreis k_6 von außen sowie jeder einen Kreis k so von innen, dass die Berührungspunkte $B_1, \dots, B_6$ mit k einen Sehnensechseck $B_1 \dots B_6$ bilden, so schneiden sich die Verbindungsgeraden B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 gegenüberliegender Berührungspunkte in einem Punkt."

(Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 192)

Solch eine Kette ist in Abb. 51 zu sehen.

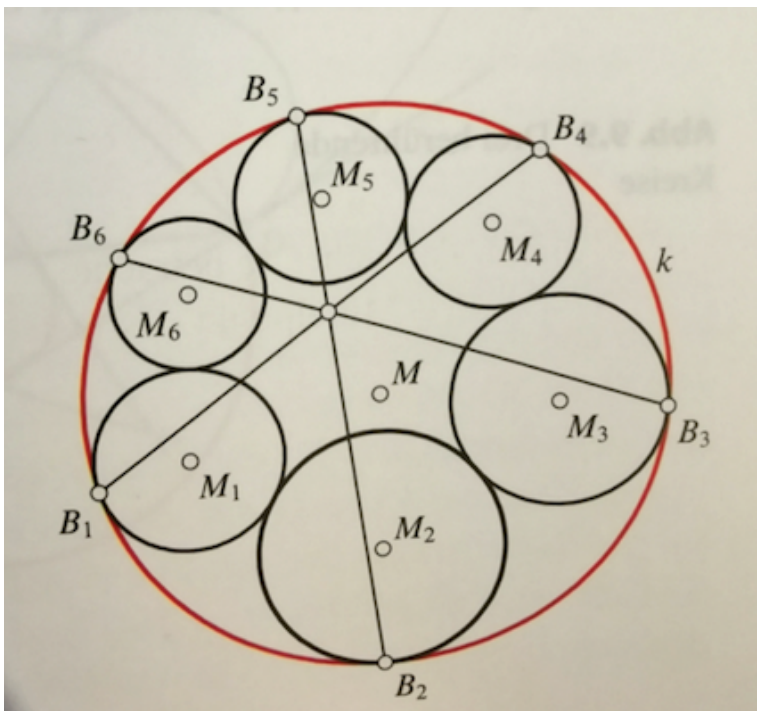


Abb. 51 Sieben - Kreise - Satz (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 192)

Und in Abbildung 52 ist eine äußere Berührung dargestellt.

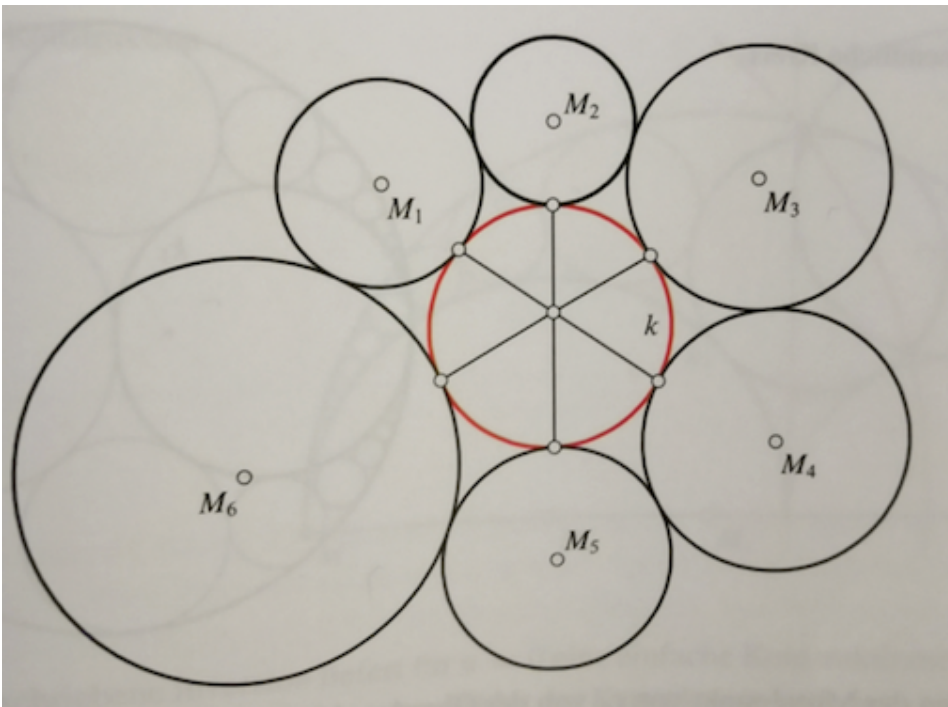


Abb. 52 Äußere Berührung (Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag, Seite 193)

8. Quellenverzeichnis

- (1) Bescherer, C., Krauter, S. (2013). Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II (2. Auflage). Berlin Heidelberg. Springer - Verlag.
- (2) Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Freiburg: Marix Verlag.
- (3) Scriba, C.J., Schreiber, P. (2010). 5000 Jahre Geometrie, Geschichte Kulturen Menschen (3. Auflage). Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Verlag.
- (4) Zeuge, W. Nützliche und schöne Geometrie: eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018
- (5) Aumann, G. (2015). Kreisgeometrie. Eine elementare Einführung. Berlin Heidelberg. Springer - Verlag.
- (6) Benölken R., Gorski H - J. und Müller - Philipp S. Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämter. (7. Auflage). Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2018
- (7) [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Urgeschichte>, 02. 07. 19
- (8) Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_02.pdf, 05. 07. 19
- (9) Baxa, C. 2018, Geschichte der Mathematik [online]. URL: https://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1819_Geschichte_Slides_03.pdf, 10. 07. 19
- (10) [online]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind, 03. 07. 19

- (11) Lemmermeyer, F. [online]. URL: <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~flemmermeyer/publ/babylon-1.pdf>, 05. 07. 19
- (12) [online]. URL: <http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/HA/fl02.pdf>, 05. 07. 19
- (13) Plimpton 322 hält Mathematiker am Rätseln. 2017. [online]. URL: <https://diepresse.com/home/science/5274701/Plimpton-322-haelt-Mathematiker-am-Raetseln>, 05. 07. 19
- (14) Kronfellner, M. 2017, Geschichte der Mathematik. [online]. URL: http://www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/Geschichte_der_Mathematik/Antike-nur_Text.pdf
- (15) [online]. URL: <http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Sexagesimalsystem>, 10. 07. 19
- (16) [online]. URL: <https://www.spektrum.de/wissen/eudoxos-von-knidos-der-schoepfer-der-exhaustionsmethode/1331747>, 22. 09. 19
- (17) [online]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Mykenische_Kultur#Folgezeit, 23. 07. 19
- (18) [online]. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/hippokrates-von-chios/3984>, 25. 07. 19
- (19) [online]. URL: <https://www.wissen.de/lexikon/exhaustionsmethode>, 23. 09. 19
- (20) [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes>, 23. 09. 19
- (21) [online]. URL: <https://www.mathe-lexikon.at/geometrie/ebene-figuren/kreis/allgemeines.html>, 24. 09. 19
- (22) [online]. URL: <https://www.grund-wissen.de/informatik/latex/mathematischer-formelsatz.html>, 24. 09. 19
- (23) [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Hypatia>, 26. 09. 19

- (24) Hypatia von Alexandria. Ein Kurzportrait einer Technikerin. 2011. [online]. URL: https://htu.at/alt-schiarches-foswiki/pub/Presse/Ausgabe201105/htu_info-201105-web.pdf, 26. 09. 19
- (25) Froese, N. 2007. Euklid und die Elemente. [online]. URL: <https://www.swisseduc.ch/mathematik/geometrie/euklid/docs/euklid.pdf>, 05. 10. 19
- (26) Zürn, U. 2010. Vergleich der Dreiecksgeometrie in der Euklidischen und Hyperbolischen Ebene. [online]. URL: <https://www.math.uni-tuebingen.de/user/loose/studium/Diplomarbeiten/SA.Zuern.pdf>, 05. 10. 19
- (27) [online]. URL: http://userpage.fu-berlin.de/aconstant/EG/EG_VL1slides.pdf, 06. 10. 19
- (28) Constantinescu, A. 2018. Elementargeometrie. [online]. URL: http://userpage.fu-berlin.de/aconstant/EG/EG2018_bisHeute.pdf, 06. 10. 19
- (29) Fischer, W. L. 2017, Raumformen - Formen im Raum. Zur Geschichte geometrischen Denkens: Von der Höhlenmalerei zur nacheuklidischen Geometrie. [online]. URL: https://www.zobodat.at/pdf/Matreier-Gespraech_2005_0323-0348.pdf, 08. 10. 19
- (30) Geyer, W. -D. 2011. Vorlesung über antike Mathematik. Eulid: Die Elemente - eine Übersicht. [online]. URL: <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf>, 08. 10. 19
- (31) [online]. URL: <https://www.vismath.eu/de/blog/leonhard-euler/>, 09. 12. 19
- (32) Grinberg, D. 2004, Karl Wilhelm Feuerbach, sein Kreis und die Dreiecksgeometrie. [online]. URL: <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/Dreigeom/Feuerbach.pdf>
- (33) [online]. URL: <https://www.spektrum.de/wissen/jean-victor-poncelet-er-bahnte-napoleon-den-weg-nach-moskau-frei/1573020>, 10. 12. 19
- (34) [online]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Gianfrancesco_Malfatti, 14. 12. 19

- (35) Lehmann, I., Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung. [online]. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31769/1/128.pdf>, 14. 12. 19
- (36) Röttgen - Burtscheidt, J., 2007. Das Apollonische Berührproblem. Sammlung von Lösungen eines jahrtausende alten Problems. [online]. URL: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~volkert/Das%20Apollonische%20Beruehrproblem,%202007.pdf>, 18. 12. 19
- (37) [online]. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Wilhelm_Ewald_Jung, 20. 12. 19
- (38) [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Pappos>, 20. 12. 19
- (39) [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Pappos-Kette>, 20. 12. 19
- (40) [online]. URL: <https://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0011/pappus-1.pdf>, 20. 12. 19
- (41) Ludwig, M., Didaktik der Geometrie. Kapitel 4 Konstruieren. [online]. URL: https://www.math.uni-frankfurt.de/~ludwig/vorlesungen/skripten/didgeo/Kapitel_4.pdf, 20. 12. 19
- (42) [online]. URL: <https://de.wikipedia.org/wiki/Steiner-Kette>, 21. 12. 19

9. Abbildungsverzeichnis

Abb. 1 Flächenberechnung eines Dreiecks

Abb. 2 Flächeninhalt eines Trapezes

Abb. 3 Konstruktion des rechten Winkels

Abb. 4 Konstruktion eines Reckecks mit seinem Umkreis

Abb. 5 Die Möndchen des Hippokrates

Abb. 6 Dreieck

Abb. 7 Stufenwinkel

Abb. 8 Wechselwinkel

Abb. 9 Summe der Innenwinkel

Abb. 10 Außenwinkel

Abb. 11 Streckensymmetrale und der Umkreismittelpunkt

Abb. 12 Mittendreieck

Abb. 13 Höhenlinien und der Höhenpunkt

Abb. 14 Schwerlinien und Schwerpunkt

Abb. 15 Schnittpunkt S' zwischen s_a und s_c

Abb. 16 Winkelhalbierende

Abb. 17 Inkreismittelpunkt W

Abb. 18 Ankreis

Abb. 19 Umfangswinkel

Abb. 20 Umfangswinkel Fall 1

Abb. 21 Umfangswinkel Fall 2

Abb. 22 Umfangswinkel Fall 3

Abb. 23 Beweis des Thaleskreises " $\Leftarrow$ "

Abb. 24 Beweis des Thaleskreises " $\Rightarrow$ "

Abb. 25 Die Eulersche Gerade

Abb. 26 Der kleine Satz von Feuerbach

Abb. 27 Der Neunpunktekreis

Abb. 28 Umkreis der Vielecke $DEA'B'$ und $EFB'C'$

Abb. 29 H_a liegt auf dem Kreis mit Radius $\frac{1}{2} \cdot 1(\overline{DA'})$

Abb. 30 Mittelpunkt des Neunpunktekreises
Abb. 31 Der große Satz von Feuerbach
Abb. 32 Malfatti - Kreise im schmalen, langen rechtwinkligen Dreieck
Abb. 33 Malfatti - Kreis 1
Abb. 34 Malfatti - Kreis 2
Abb. 35 "Konstruktion nach Malfatti"
Abb. 36 Hilfsstrecke $\overline{PQ}$
Abb. 37 "Konstruktion nach Steiner - Petersen"
Abb. 38 "Konstruktion nach Steiner - Petersen" Zoom
Abb. 39 "Konstruktion nach Lob und Richmond"
Abb. 40 Kreis des Apollonios
Abb. 41 PPP
Abb. 42 TTT
Abb. 43 PPT
Abb. 44 PTT
Abb. 45 PPK
Abb. 46 Eindeutigkeit vom Pferchkreis
Abb. 47 Pferchkreis
Abb. 48 Arbelos
Abb. 49 Konstruktion der Pappus - Kette
Abb. 50 Steiner - Kette
Abb. 51 Sieben - Kreise - Satz
Abb. 52 Äußere Berührung