



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Matrizenrechnung im Schulunterricht“

verfasst von / submitted by

Thomas Amon BSc

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik
Unterrichtsfach Geschichte, Sozialkunde,
Politische Bildung

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Manfred Kronfellner

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
Einleitung	6
Geschichte der Matrizenrechnung.....	8
Anfänge der Matrizenrechnung in Asien / Das Buch Chiu Chang Suan Shu	8
Aufkommen der Matrizenrechnung in Europa.....	12
Wichtige Personen.....	15
Chang Ts'ang	15
Liu Hui	15
Gottfried Wilhelm Leibniz	16
Colin Mac Laurin	17
Gabriel Cramer	17
Seki Shinsuke Kova	17
Joseph Louis Lagrange	18
Pierre-Simon de Laplace	18
Johann Carl Friedrich Gauß	18
Augustin-Louis Cauchy.....	19
James Joseph Sylvester	20
Arthur Cayley.....	21
Matrizenrechnung in österreichischen Lehrplänen	22
Matrizenrechnung im Lehrplan für die allgemein bildenden höheren Schulen (AHS)	22
Matrizenrechnung im Lehrplan für die Bildungsanstalten für Elementarpädagogik (BAfEP) und die Bildungsanstalten für Sozialpädagogik (BASoP)	23
Matrizenrechnung im Lehrplan für die Handelsakademien (HAK).....	24
Matrizenrechnung in den Lehrplänen für die humanberuflichen Schulen	25
Matrizenrechnung in den Lehrplänen für die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten	28
Matrizenrechnung im allgemeinen Lehrplan für die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten.....	28
Fachrichtungen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten ohne weitere Inhalte zur Matrizenrechnung im Lehrplan.....	30
Fachrichtungen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten mit weiteren Inhalten zur Matrizenrechnung im Lehrplan.....	31
Vergleich der Lehrpläne.....	34
Matrizenrechnung in österreichischen Lehrbüchern	37
Vergleich der Lehrbücher der Handelsakademien	38
Vergleich der Lehrbücher für die humanberuflichen Schulen	46
Vergleich der Lehrbücher der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten.....	48

Anwendungen der Matrizenrechnung	52
Spieltheorie.....	53
Nährwertangaben	55
Flugverbindungen.....	57
Computergrafik	59
Populationsentwicklung	68
Hill-Chiffre.....	69
Flächen- und Volumsberechnungen.....	71
Interpolationspolynome.....	75
Computertomographie.....	77
Input-Output-Modelle	78
Fibonacci-Zahlen.....	80
Stabile Systeme – Fahrradvermietung.....	83
Genotyphäufigkeiten	86
Page-Ranking bei Suchmaschinen	92
Mathematischer Hintergrund der Matrizenrechnung	96
Linear abhängige Vektoren	96
Linearkombination	96
Vektorraum.....	97
Quadratische Matrix, Einheitsmatrix, Diagonalmatrix, Dreiecksmatrix.....	98
Rechenregeln für Matrizen.....	99
Matrix-Matrix-Multiplikation	100
Matrix-Vektor-Multiplikation	101
Eliminationsverfahren von Gauß sowie von Gauß und Jordan.....	101
Inverse einer Matrix	105
Determinante	106
Eigenwert und Eigenvektor	109
Charakteristisches Polynom	109
Diagonalisierbarkeit einer Matrix	110
Fazit	112
Literaturverzeichnis.....	114
Gesetzestexte	114
Schulbücher	116
Sekundärliteratur	117
Anhang	119
Abstract (deutsch)	119
Abstract (englisch)	120

Vorwort

Zu Beginn sei hier die Definition des Begriffs "Matrix" angegeben, damit man weiß, wovon diese Arbeit handelt:

Sind m und n positive ganze Zahlen, dann nennt man ein Rechteck von Zahlen mit m Zeilen und n Spalten eine $m \times n$ -Matrix. Für die Zahl in der i -ten Zeile und j -ten Spalte einer Matrix M kann man auch kurz M_{ij} schreiben und nennt diese Zahl den i - j -ten Eintrag oder i - j -ten Koeffizienten von M ¹.

Meine persönliche Motivation mich mit diesem Thema auseinanderzusetzen war, dass ich bereits in meiner Schulzeit als Schüler der 11. Schulstufe einer allgemein bildenden höheren Schule im Rahmen des "freien Wahlfachs Mathematik" zum ersten Mal in die Welt der Matrizen und Matrizenrechnung eintauchen durfte. Mit nur einer Wochenstunde und neben diversen anderen Themen blieb damals nicht für mehr als für die grundlegenden Definitionen und Rechenregeln Zeit. Für Anwendungen aus den verschiedensten Lebensbereichen war damals leider keine Zeit. Trotzdem hat mich das Konzept der Matrizenrechnung fasziniert und ich wollte mich in dieses Thema vertiefen. Die unterschiedlichen Kapitel meiner Diplomarbeit stellen meine Interessen bzw. Zugänge zu diesem Thema dar.

Für die Arbeit sei noch das Folgende angemerkt: Die Schreibweise von Vornamen, Nachnamen, Ortsnamen, Regionsbezeichnungen usw. wurde aus der jeweiligen Literatur übernommen. Es wäre für die Leserin bzw. den Leser, die bzw. der nur lateinische Buchstaben gewöhnt ist, nicht sinnvoll, alle Namen und Bezeichnungen im Original wiederzugeben, da auch russische, chinesische, japanische etc. Bezeichnungen bzw. Personen vorkommen. Die Fußnotensetzung ist leider nicht einheitlich, da Fußnoten – oder besser gesagt – die hochgestellten Zahlen gerade bei einem mathematischen Thema leicht zu Irritationen führen können. In vielen Fällen könnten die hochgestellten Zahlen, die ja auch Exponenten bedeuten könnten, zu Verwirrung führen. Dies sieht man vielleicht bereits an der ersten Fußnote (etwas weiter oben). Aus diesem Grund wurde versucht, im weiteren Verlauf der Arbeit dieses Problem sozusagen an den gefährlichen Stellen zu umschiffen, indem die hochgestellten Zahlen der Fußnoten gleich bei der jeweiligen

¹ Vgl. Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon, Mathematik anwenden HAK II (Wien 2015), hier 54. Vgl. dazu auch Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon, Mathematik anwenden HUM II (Wien ²2016), hier 98.

Überschrift, Unterüberschrift, Unterunterüberschrift usw. eingebaut wurden und sich dann auf den ganzen jeweiligen Abschnitt beziehen, sofern nicht innerhalb des Abschnitts eine weitere Fußnote vorkommt. In diesem Fall bezieht sich die zusätzliche Fußnote wiederum nur auf den jeweiligen Absatz, in dem sie vorkommt und für den Rest des jeweiligen Abschnitts gilt die Fußnote bei der jeweiligen Überschrift, Unterüberschrift, Unterunterüberschrift usw. Mir ist bewusst, dass man auf eine einheitliche Zitierung achten sollte, aber aus dem eben dargestellten Problem ist dies gerade bei mathematischen Texten nicht immer möglich bzw. sinnvoll. Es gäbe natürlich auch die Möglichkeit, die Literaturverweise in den Text mithilfe von Klammern einzubauen. Dies erschien mir persönlich aber nicht als sinnvoll, da ich nicht nur auf die Literatur verweise, sondern unter anderem auch auf dort entdeckte Fehler hinweise. Außerdem würde die Arbeit um Einiges länger werden, wenn ich mich für diese andere Möglichkeit der Zitierung entschieden hätte.

Einleitung

Im ersten Kapitel, das die Geschichte der Matrizenrechnung beinhaltet, wird zu Beginn auf die Anfänge der Matrizenrechnung in Asien hingewiesen und diese ausführlich behandelt. Das erste Unterkapitel soll somit unter anderem auch dem vorherrschenden Eurozentrismus entgegenwirken, welcher noch immer weit verbreitet ist. Dietmar Herrmann drückt dies wie folgt aus:

"Der Eurozentrismus beinhaltet die Annahme, dass die Mathematik im Wesentlichen in Altgriechenland entstanden und die Überlieferung über lateinische und islamische Übersetzungen (als Kopie) ins Abendland gekommen ist. Die Herkunft des Dezimalsystems aus Indien wird anerkannt, sonstige Beiträge anderer Kulturkreise werden als geringfügig abgetan."²

Im zweiten Unterkapitel des ersten Kapitels geht es quasi nochmals um die Anfänge der Matrizenrechnung; jedoch hier um die europäischen Anfänge, die erst viel später aufkamen. Es werden wichtige Stationen der Matrizenrechnung beleuchtet. Das dritte Unterkapitel bietet Zusatzinformationen zu den Personen aus den ersten beiden Unterkapiteln, wobei hier nicht nur auf die jeweiligen Forschungsgebiete eingegangen wird, sondern auch auf den wissenschaftlichen Werdegang sowie auf die persönliche Geschichte der Personen.

Das zweite Kapitel beinhaltet einen Vergleich der Lehrpläne der unterschiedlichen Schulformen. Zuerst werden die Lehrpläne der einzelnen Schulformen auf das Auftreten von Matrizen sowohl im Lehrstoff als auch in der Bildungs- und Lehraufgabe untersucht. Es werden die Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen (AHS), der Bildungsanstalten für Elementarpädagogik (BAfEP), der Bildungsanstalten für Sozialpädagogik (BASoP), der Handelsakademien (HAK), der humanberuflichen Schulen und schließlich der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten genau analysiert. Innerhalb der humanberuflichen Schulen wird unterschieden zwischen einem allgemeinen Lehrplan für die Höheren Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe (HLW) sowie den Lehrplänen für die HLW mit den Fachrichtungen "Kommunikations- und Mediendesign", "Kultur- und Kongressmanagement", "Sozialmanagement"

² Dietmar Herrmann, Mathematik im Mittelalter. Die Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam (Berlin/Heidelberg 2016), hier 1. **Im Folgenden zit. als Herrmann, Mathematik im Mittelalter.**

sowie "Umwelt und Wirtschaft". Außerdem werden die Lehrpläne der Höheren Lehranstalten für Kunst und Gestaltung, Mode, Produktmanagement und Präsentation sowie für Tourismus durchleuchtet. Bei den Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten werden sogar die Lehrpläne jeder einzelnen Fachrichtung untersucht. Abschließend werden die Lehrpläne der einzelnen Schulformen sowohl was die Bildungs- und Lehraufgabe betrifft, als auch was den Lehrstoff betrifft, miteinander verglichen und zwar einerseits in Hinblick auf die Inhalte und deren Formulierungen bezüglich Matrizenrechnung und andererseits auf den Zeitpunkt, wann die Schülerinnen und Schüler die jeweiligen Inhalte laut Lehrplan gelehrt bekommen sollen.

Das dritte Kapitel kann als Fortführung des zweiten Kapitels gesehen werden, da es um das Thema Matrizen und Matrizenrechnung in den Schulbüchern geht. Hierbei werden nicht nur Schulbuchreihen für Handelsakademien, humanberufliche Schulen sowie Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten in Bezug auf Matrizen analysiert, sondern auch die Inhalte der Schulbücher mit den jeweiligen Lehrplänen sowie untereinander verglichen. Des Weiteren wird der Aufbau des Themas Matrizen in den verschiedenen Schulbuchreihen verglichen und auch die optische Gestaltung wird beschrieben.

Das vierte Kapitel beinhaltet diverse Anwendungen der Matrizenrechnung aus unterschiedlichen Bereichen. Es werden vor allem Anwendungen aufgezeigt, die den Schülerinnen und Schülern auch im täglichen Leben begegnen, aber auch rein innermathematische Anwendungen kommen vor. Einige der Anwendungen passen nicht in ein striktes Schema von innermathematisch versus außermathematisch, wenn man die Begriffe inner- und außermathematisch eventuell etwas weiter fasst. Es sollen möglichst viele unterschiedliche Bereiche, in denen Matrizenrechnung verwendet wird bzw. verwendet werden kann, gezeigt werden.

Das fünfte Kapitel fasst die wichtigsten Begriffe, Definitionen und Rechenregeln für Matrizen zusammen und gibt somit einen kurzen kompakten Überblick zum mathematischen Hintergrund der bearbeiteten Themen rund um Matrizen.

Geschichte der Matrizenrechnung

Anfänge der Matrizenrechnung in Asien / Das Buch Chiu Chang Suan Shu

Matrizen als rechteckige Zahlenschemata treten erstmals im Buch "Chiu Chang Suan Shu"(CCSS)³ auf, aber natürlich ohne die Bezeichnung "Matrix". Laut chinesischen Quellen wurde das CCSS ungefähr um 160 v. Chr. von Chang Ts'ang geschrieben⁴. Ungefähr ein Jahrhundert später wurde es von Keng Shu Ch'ang ergänzt und ist somit das älteste chinesische Rechenbuch. Das CCSS wurde 1084 zum ersten Mal gedruckt und ist somit auch das älteste gedruckte Mathematikbuch überhaupt⁵. Im Laufe der Zeit wurde das CCSS mehrmals überarbeitet. Eine erste größere Überarbeitung unternahm Liu Hui im dritten Jahrhundert n. Chr. und vollendete diese Überarbeitung 263 n. Chr.⁶ Die zweite größere Überarbeitung wurde 656 n. Chr. als Lehrbuch für Beamte eingeführt, wobei hier das CCSS in ein Sammelwerk mit dem Titel "Suanjing shi shu" eingegliedert wurde. Genau genommen handelt es sich beim ersten Druck des CCSS aus 1084 also um den ersten Druck des Werkes "Suanjing shi shu"⁷.

Ursprünglich ist das CCSS eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse der chinesischen Mathematik aus dem ersten Jahrtausend v. Chr. Das CCSS wurde genutzt, um Staatsbeamte auszubilden, aber es enthält auch theoretisch ausgearbeitete Methoden wie zum Beispiel die Methode des "fang cheng", welche zur Lösung linearer Gleichungssysteme in beliebig vielen Variablen verwendet werden kann. Bei dieser Methode werden die Koeffizienten in ein rechteckiges Zahlenschema gebracht und danach wird mittels eines Algorithmus dieses in eine obere

³ Es gibt viele verschiedene Schreibweisen dieses Buches. Ich habe mich dafür entschieden, die am häufigsten verwendete Schreibweise zu übernehmen. Als Übersetzung für "Chiu Chang Suan Shu" kann gelten: "Mathematik in neun Büchern" oder wie Kurt Vogel es übersetzte: "Die 9 Bücher arithmetischer Technik". Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 22. Vgl. dazu auch *Hans Wußing*, 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton (Berlin/Heidelberg 2008), 56. **Im Folgenden zit. als Wußing**, 6000 Jahre Mathematik. Im weiteren Verlauf wird der Titel dieses Buches mit "CCSS" abgekürzt.

⁴ Vgl. *Peter Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra (Basel/Boston/Berlin 1996), 10. **Im Folgenden zit. als Gabriel**, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra.

⁵ Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 28. Vgl. dazu auch *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 19.

⁶ Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 22. Vgl. dazu auch *Wußing*, 6000 Jahre Mathematik, 46.

⁷ Vgl. *Wußing*, 6000 Jahre Mathematik, 46. Man kann "Suanjing shi shu" mit "Zehn beispielhafte Abhandlungen über Mathematik" übersetzen. Vgl. *Wußing*, 6000 Jahre Mathematik, 46.

Dreiecksform umgewandelt⁸. Bei diesem Algorithmus gab es eine Regel zur Auflösung durch Multiplikation und Subtraktion der Zeilen voneinander⁹. Es entspricht somit dem heute als "Gauß-Algorithmus" bekannten Verfahren zur Umformung der Matrix eines Systems in obere Dreiecksform¹⁰.

Das CCSS diente jahrhundertlang zur Ausbildung von Verwaltungsbeamten, da es viele verschiedene Bereiche der Mathematik behandelt. Besondere Bedeutung hat das CCSS durch die darin enthaltenen mathematischen Verfahren, die erst viel später in der westlichen Welt neu- bzw. wiederentdeckt wurden¹¹. Im CCSS wurden Aufgaben gelöst und das dabei zu verwendende Lösungsverfahren in einer allgemeinen Regel angegeben, jedoch ohne abstrakte Beweise. Das CCSS war somit lediglich auf die praktische Anwendung ausgerichtet¹².

Das CCSS besteht aus neun Büchern mit 246 Aufgaben, welche nach Sachgebieten statt nach mathematischen Problemkreisen geordnet sind. Matrizen kommen im achten Buch vor, welches von Gleichungssystemen handelt¹³. Es seien hier vier Aufgaben aus dem achten Buch beispielhaft wiedergegeben, um zu zeigen, worum es genau geht:

Aufgabe 8¹⁴

Es werden 2 Rinder und 5 Schafe verkauft und 13 Schweine gekauft, wobei 1000 Geldstücke übrig bleiben. Es werden 3 Rinder und 3 Schweine verkauft und 9 Schafe gekauft, wobei das Geld genau aufgebraucht wird. Es werden 6 Schafe und 8 Schweine verkauft; wenn man nun versucht, mit dem erhaltenen Geld 5 Rinder zu kaufen, dann fehlen zum Kaufpreis 600 Geldstücke. Wie hoch war der Preis eines Rindes, eines Schafes und eines Schweins?

Im Original wird – wie bereits oben erwähnt – ein Gleichungssystem mittels rechteckigem Zahlenschema dargestellt, durch elementare Zeilenumformungen auf Dreiecksgestalt gebracht und die Unbekannten durch sukzessives Rückwärtseinsetzen ermittelt. Heutzutage löst man mittels

⁸ Vgl. Egbert *Brieskorn*, Lineare Algebra und analytische Geometrie I. Noten zu einer Vorlesung mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz (Braunschweig/Wiesbaden 1983), 95. **Im Folgenden zit. als Brieskorn**, Lineare Algebra und analytische Geometrie I.

⁹ Vgl. *Brieskorn*, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 462.

¹⁰ Vgl. *Brieskorn*, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 95. Vgl. dazu auch *Wußing*, 6000 Jahre Mathematik, 66.

¹¹ Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 28. Vgl. dazu auch *Wußing*, 6000 Jahre Mathematik, 56f.

¹² Vgl. *Wußing*, 6000 Jahre Mathematik, 56.

¹³ Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 22 und 28f.

¹⁴ Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 37f.

Gaußelimination der erweiterten Matrix (Rinder in der ersten Spalte, Schafe in der zweiten, Schweine in der dritten, Geldstücke in der vierten):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{array}\right) \text{ wird durch Gaußelimination zu: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1200 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

Der Preis eines Rindes beträgt also 1200 Geldstücke, ein Schaf kostet 500 Geldstücke und ein Schwein kostet 300 Geldstücke.

Aufgabe 13¹⁵

5 Familien haben zusammen einen Brunnen. 2 Seile von Familie A reichen nicht hinunter bis zum Wasserspiegel; es muss ein Seil von Familie B hinzukommen. 3 Seile von Familie B reichen nicht hinunter; es muss ein Seil von Familie C hinzukommen. 4 Seile von Familie C reichen nicht hinunter; es muss ein Seil von Familie D hinzukommen. 5 Seile von Familie D reichen nicht hinunter; es muss ein Seil von Familie E hinzukommen. 6 Seile von Familie E reichen nicht hinunter; es muss ein Seil von Familie A hinzukommen. Wie tief sind der Wasserspiegel und die Länge der Seile?

Die Matrix des Gleichungssystems wird durch Gaußelimination umgeformt. Da es aber nur 5 Gleichungen für 6 Unbekannte gibt, ist das System unterbestimmt und man muss einen Parameter hinzufügen. Die erweiterte Gleichungsmatrix mit s als Parameter lautet wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & s \end{array}\right) \text{ und wird zu Folgendem umgeformt: } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 265s/721 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 191s/721 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 148s/721 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 129s/721 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 76s/721 \end{array}\right)$$

Setzt man nun für den Parameter $s = 721$ (= Wasserspiegel) ein, so ergibt sich der ganzzahlige Lösungsvektor für die Seillängen der Familien A bis E (265; 191; 148; 129; 76).

¹⁵ Vgl. Herrmann, Mathematik im Mittelalter, 38.

Aufgabe 17¹⁶

5 Schafe, 4 Hunde, 3 Hühner und 2 Hasen kosten 1496 Geldstücke. 4 Schafe, 2 Hunde, 6 Hühner und 3 Hasen kosten 1175 Geldstücke. 3 Schafe, 1 Hund, 7 Hühner und 5 Hasen kosten 958 Geldstücke. 2 Schafe, 3 Hunde, 5 Hühner und 1 Hase kosten 861 Geldstücke. Was kostet jede Tierart?

Es ergibt sich also die folgende erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 3 & 2 & 1496 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 1175 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 958 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 861 \end{array}\right) \text{ diese wird durch Gaußelimination zu: } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 177 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 121 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 29 \end{array}\right)$$

Somit kostet jeweils ein Schaf 177, ein Hund 121, ein Huhn 23 und ein Hase 29 Geldeinheiten.

Aufgabe 18¹⁷

In dieser Aufgabe kommt das größte lineare Gleichungssystem des Buches vor. Es werden fünf Einkäufe für verschiedene Mengen an Hanf, Weizen, Bohnen, Erbsen und Hirse gegeben mit den zugehörigen Preisen. Das zugehörige Gleichungssystem ist der folgenden Matrix zu entnehmen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 9 & 7 & 3 & 2 & 5 & 140 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 128 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 116 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 4 & 112 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 95 \end{array}\right) \text{ und wird durch Gaußelimination zu } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Somit kosten je 1 Tou Hanf, Weizen, Bohnen, Erbsen und Hirse (in dieser Reihenfolge) 7, 4, 3, 5, 6 chien.

¹⁶ Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 38f.

¹⁷ Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 39.

Aufkommen der Matrizenrechnung in Europa

Man kann sagen, dass die Matrizenrechnung in Europa erst viel später als in Asien begann. Noch dazu interessierte man sich in Europa lange Zeit nicht für Matrizen als eigenständige mathematische Objekte, sondern nur für Determinanten¹⁸.

Ein erster kleiner Meilenstein, der in Europa erreicht wurde, geschah 1678, als Leibniz eine neue Notation für die Koeffizienten eines Systems von 3 linearen Gleichungen einführte, indem er Doppelindizes verwendete. Erst im 18. Jahrhundert werden in Europa Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme entwickelt¹⁹.

Ebenfalls im 18. Jahrhundert wurde von Mac Laurin (1729) und Cramer (1750) ein neuer Ausdruck als Rechenhilfsmittel eingeführt, welchen wir heute als "Determinante" bezeichnen. Die damalige Schreibweise war allerdings für das heutige Auge noch etwas umständlich. Bereits 1683 führte der japanische Mathematiker Seki Shinsuke Kowa Konzepte ein, die heute als Determinanten zu bezeichnen wären. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts erlebt die Determinantenforschung in Europa einen Höhepunkt, da es zahlreiche Untersuchungen zu diesem Thema gibt, unter anderem von namhaften Mathematikern wie Vandermonde, Laplace und Lagrange um nur ein paar zu nennen²⁰.

Determinanten werden aber auch anderweitig genutzt. Zum Beispiel verwendet Gauß 1801 Determinanten in der Zahlentheorie, um quadratische Formen zu studieren²¹. Cauchy baut darauf 1815 eine Untersuchung von Determinanten auf und führt die Schreibweise von $n \times n$ Zahlenschemata ein, die er "système symétrique" nennt, welche aus unserer Sicht die zugehörige Matrix bezeichnet. Aber auch Cauchy ist nur an den daraus resultierenden Determinanten interessiert²². Cauchy stellte so aber Determinanten und Matrizen in einen engen Zusammenhang.

¹⁸ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 95.

¹⁹ Vgl. Gabriel, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 10 und 50. Vgl. dazu auch Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 95. Brieskorn datiert diese Notation auf das Jahr 1693.

²⁰ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 95.

²¹ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 95. Gauß führte 1801 die Bezeichnung Determinante ein. Vgl. Klaus Jänich, Lineare Algebra (Berlin/Heidelberg 112008), 155. **Im Folgenden zit. als Jänich, Lineare Algebra.**

²² Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 95.

Außerdem führte er die Vorschrift für die Multiplikation zweier $n \times n$ Matrizen ein, jedoch ohne deren Bedeutung zu erklären²³.

Das heute als "Gauß-Algorithmus" bekannte Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme wurde auch in Europa nicht als Erstes von Gauß entdeckt, da bereits 1559 ein französischer Mönch und Algebraiker namens J. Buteo in einem seiner Werke lineare Gleichungssysteme mithilfe dieses Verfahrens auflöste. Nach Cramers Einführung der Determinanten 1750 wurden lineare Gleichungssysteme hauptsächlich mithilfe von Determinantenmethoden untersucht. Gauß hingegen konzentrierte sich bei seinen Arbeiten zur angewandten Mathematik hauptsächlich auf die Verwendung oberer bzw. unterer Dreiecksform bei den von ihm verwendeten Gleichungssystemen. Für astronomische Bahnbestimmungen verwendete er – sofern dies möglich war – immer lineare Gleichungssysteme in oberer bzw. unterer Dreiecksform, da die Invertierung dieser Matrizen kein großes Problem ist. Die Bezeichnung "Gauß-Algorithmus" kommt also weder daher, dass Gauß dieses Verfahren als Erster entdeckt hat, noch durch die Hervorhebung dieses Verfahrens durch ihn in einem besonderen Theorem. Die Bezeichnung "Gauß-Algorithmus" ist durch die Forschung zur damaligen Zeit zu erklären: Während sonst überall in Europa Determinantenmethoden die Vorherrschaft innehatten, so bildeten die Arbeiten von Gauß, in denen er dieses Verfahren anwendete, ein solch großes Gegengewicht, dass man das Verfahren später mit seinem Namen verband²⁴.

Die Multiplikation von Matrizen wurde erstmals von Gauß 1801 eingeführt, jedoch nur für 3×3 Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten. Cauchy entwickelte dies weiter und – wie bereits oben erwähnt – gab er an, wie man $n \times n$ Matrizen mit reellen Einträgen miteinander multipliziert. Eisenstein verwies 1844 auf die Nichtkommutativität bei der Matrizenmultiplikation und gab als Kriterium für die Existenz einer Inversen die Bedingung, dass die Determinante ungleich 0 sein muss. Somit hatte Eisenstein implizit schon die grundlegenden Eigenschaften der Matrizen­gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ ²⁵.

Die Bezeichnung "Matrix" wurde erst 1850 von Sylvester eingeführt²⁶.

²³ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 599.

²⁴ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 462f.

²⁵ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 463.

²⁶ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 463. Vgl. dazu auch Vgl. Gabriel, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 10.

Als Cayley versuchte, eine einfache algebraische Charakterisierung der Matrizen zu finden, die eine fest vorgegebene quadratische Form invariant lassen – sprich einer Verallgemeinerung aus der Charakterisierung der orthogonalen Matrizen – bemerkte Cayley die Nützlichkeit der Addition von Matrizen. 1858 schließlich veröffentlichte er seine Untersuchungen der Matrizen, die insbesondere von Matrizenaddition und -multiplikation handelte²⁷. Cayley war somit der Erste, der Matrizen als eigenständige mathematische Objekte auffasste, mit denen man rechnen konnte²⁸.

Am Ende des 19. und am Anfang des 20. Jahrhunderts wurden in Werken über Matrizen hauptsächlich Matrizenalgebren betrachtet. Darunter findet man bei Frobenius, einem Mathematiker aus der Schweiz, die Einführung des Rangs einer Matrix²⁹.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts betrachtete Gauß in der Zahlentheorie Matrizen mit ganzzahligen Einträgen, wohingegen am Ende des 19. Jahrhunderts vorwiegend Matrizen mit reellen bzw. komplexen Einträgen Beachtung fanden. Erst im 20. Jahrhundert begann man Matrizenalgebren über beliebigen Körpern und ab den 1920er Jahren auch über beliebigen Ringen zu erforschen³⁰.

Während in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts Matrizen hauptsächlich als Rechenhilfsmittel gesehen wurden, so kam danach erst das Bewusstsein auf, Matrizen als eigenständige mathematische Objekte zu betrachten. Ein weiterer Schritt in diese Richtung war getan, als Laguerre 1867 vorschlug, eine Matrix durch ein einheitliches algebraisches Buchstabensymbol zu bezeichnen. Peano konnte 1888 darlegen, wie man aus einer linearen Abbildung nach der Wahl einer Basis eine Matrix erhält, wodurch sich ein besseres Bewusstsein für die vielseitige Anwendbarkeit der Matrizen bzw. der Matrizenrechnung etablierte³¹.

²⁷ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 464. Vgl. dazu auch Gabriel, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 10. Das Werk von Cayley ist zu finden unter: Arthur Cayley, A Memoir on the Theory of Matrices. In: Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 148 (1858) 17-37.

²⁸ Vgl. Jänich, Lineare Algebra, 131. Jänich argumentiert, dass alles vor Cayley nichts mit Matrizenrechnung zu tun hatte und es somit die Matrizenrechnung erst seit ungefähr eineinhalb Jahrhunderten gibt. Jänich meint außerdem, dass die Kenntnis rechteckiger Zahlenschemata nichts Besonderes ist, da dies jede Person hinschreiben kann, die Zahlen kennt. Jänich übersieht hier die Inhalte des CCSS. Auch dort wurde schon gerechnet, auch wenn man es noch nicht Matrizenrechnung nannte.

²⁹ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 464.

³⁰ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 464.

³¹ Vgl. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie I, 464.

Wichtige Personen

Chang Ts'ang

Aus frühen chinesischen Quellen erfährt man, dass Chang Ts'ang in seinen frühen Jahren ein Staatsbeamter (Markgraf von Peip'ing ab 201 v. Chr.) mit der Kontrolle über die Finanzen war, bevor er für den ersten Herrscher der Han-Dynastie (202 v. Chr. – 220 n. Chr.) gekämpft hat und dabei angeblich viele Heldentaten begangen hat. 180 v. Chr. wurde er zum zweithöchsten Diener der kaiserlichen Verwaltung und 176 v. Chr. sogar Kanzler. Er blieb 14 Jahre lang Kanzler, musste dann aber abdanken und starb 152 v. Chr.³².

Chang Ts'ang war also lange Zeit ein Staatsmann, der besonderes Talent in der finanziellen Verwaltung aufwies. Des Weiteren war er sehr belesen und hatte besonders viel Wissen über Astronomie und Astrologie. Im Privatleben soll er nicht ganz so vorbildhaft gehandelt haben, da er hunderte Frauen hatte und wenn eine schwanger war, sah er sie nie wieder an³³.

Liu Hui

Liu Hui lebte ungefähr von 220 n. Chr. bis 280 n. Chr. und ist vorwiegend bekannt für die Bearbeitung des CCSS sowie für ein weiteres Buch, das er selbst schrieb mit dem Titel "Haidao Suan Jing", welches als Anleitung zum Vermessen einer Meerinsel diente. Des Weiteren berechnete Liu Hui eine gute Näherung für π , löste lineare Gleichungen und berechnete die Volumina von Prisma, Pyramide, Tetraeder, Zylinder, Kegel und Kegelstumpf³⁴.

³² Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 14f.

³³ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 15.

³⁴ Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 23f. Man kann "Haidao Suan Jing" mit "Das Meerinsel-Mathematikmanual" übersetzen. Vgl. *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter, 23.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz lebte von 1646 bis 1716 und wird von vielen als Universalgelehrter gesehen. Er hatte großen Wissensdurst, enormen persönlichen Einsatz und war in seiner sprachlichen Ausdrucksweise besonders begabt. Gekrönte Damen der damaligen Zeit – wie zum Beispiel "Liselotte von der Pfalz", die Schwägerin von Ludwig XIV. – bewunderten ihn und standen mit Leibniz in regem Briefkontakt, was ihm auch ermöglichte, auf das politische Geschehen direkten Einfluss zu nehmen bzw. dies zu versuchen³⁵.

1672 reiste Leibniz im Auftrag des Kurfürsten von Mainz nach Paris, wo er politisch nichts ausrichten konnte. Leibniz wollte den König von Frankreich, Ludwig XIV., davon abhalten, in Europa weiter zu expandieren und schlug dem Sonnenkönig daher vor, stattdessen nach Ägypten zu expandieren. Leibniz konnte Ludwig XIV. von diesem Plan nicht überzeugen, aber Leibniz musste bei seinem Aufenthalt in Frankreich seine eigene Rückständigkeit in Mathematik feststellen. Er reiste daher in den Jahren 1672–1676 öfters nach Paris und studierte mit Huygens, was ihn zur Entdeckung der Differentialrechnung brachte³⁶.

In der Determinantentheorie begann Leibniz 1678 mit 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, wobei die Koeffizienten durch Zahlenpaare gekennzeichnet wurden und die Lösungen tabellenartig aufgeschrieben wurden, so dass man nach der 3. Spalte die Entwicklung der Determinante klar erkannte. Leibniz formulierte auch die sogenannte "Cramersche Regel". Am 12. Jänner 1684 hat Leibniz seine Determinantentheorie vollendet und dabei bis auf die Produktformel und den Satz von Cayley-Hamilton alle wesentlichen Sätze bewiesen. Leibniz hat allerdings seine Entdeckung nicht publiziert; er schickte sie in verklausulierter Form 1693 an L'Hospital und 1705 eine Kurzfassung an den Basler Jakob Bernoulli. Diese Form der Diskretion entsprach der damaligen Zeit. Außerdem waren die damaligen Drucker dem Drucken mathematischer Bücher gegenüber sehr abgeneigt aufgrund der Schwierigkeiten beim Buchstabensetzen und der kleinen potentiellen Leserschaft³⁷.

³⁵ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 53.

³⁶ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 54f.

³⁷ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 50f.

Colin Mac Laurin

Colin Mac Laurin lebte von 1696 bis 1746 und war Sohn eines schottischen Geistlichen. Mit 19 Jahren wurde er Professor in Aberdeen und unternahm dann wissenschaftliche Reisen nach London und Lothringen. Mit 26 Jahren wurde er Professor in Edinburgh. Neben seinem posthum erschienenen Werk "Treatise of Algebra", in dem er das Bildungsgesetz der Lösungen linearer Gleichungssysteme in 4 Unbekannten genau erläutert, ist der "Treatise of Fluxions" aus dem Jahr 1742 – eine erste systematische Darstellung der Newtonschen Theorie der Ableitungen – sein Hauptwerk³⁸.

Gabriel Cramer

Gabriel Cramer wurde 1704 als Sohn einer Familie aus Holstein und Straßburg geboren, wuchs in Genf auf und hielt sich längere Zeit in Basel bei Johann Bernoulli auf. Cramer hat bei seinen Berechnungen von Determinanten die Signum-Funktion verwendet und wie Leibniz die heute nach ihm benannte Inversionsformel (Cramersche Regel) angegeben. Leibniz hatte dies bereits zuvor entdeckt, was Cramer jedoch nie erfuhr³⁹.

Seki Shinsuke Kova

Seki Shinsuke Kova lebte von 1642 bis 1708 und gilt als der wichtigste Mathematiker des alten Japans. Es werden ihm über 100 Arbeiten zugeschrieben, darunter ein Manuskript in dem er seine Determinantentheorie entwickelt. Er benutzte Determinanten zur Elimination einer Unbekannten aus zwei algebraischen Gleichungen. Für die Berechnung der Determinante benutzte er im Wesentlichen die Signaturformel⁴⁰.

Seki Shinsuke Kova war den Quellen zufolge ein ausgezeichnete Lehrer, der viele begabte Schüler hatte. Er versuchte aber, der Verbreitung der Erkenntnisse von ihm und seiner Schule Einhalt zu gebieten. Es ist deshalb schwierig zu sagen, was tatsächlich von ihm stammt. Zur Zeit von Seki Shinsuke Kova war das Land bereits vom Westen abgeriegelt und die Jesuiten

³⁸ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 52 und 55.

³⁹ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 52.

⁴⁰ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 51.

waren ausgewiesen. Peter Gabriel schließt zwar aus, dass Seki Shinsuke Kowa und Leibniz sich gegenseitig beeinflusst haben, aber Leibniz hatte 1678 engen Kontakt zum China-Experten vom Kurfürsten von Brandenburg. Jedenfalls wurden in Japan die Determinanten nicht weiter untersucht⁴¹.

Joseph Louis Lagrange

Joseph Louis Lagrange wuchs eigentlich als Giuseppe Luigi Lagrangia in Turin auf, war italienischer Abstammung und verbrachte seine ersten 30 Lebensjahre, also bis 1766 in Turin. Er war Gründer der Turiner Akademie und wurde 1766 Nachfolger von Euler an der Berliner Akademie bis 1787. Seinen letzten Lebensabschnitt, also bis zu seinem Tod 1813, verbrachte er in Frankreich. In seinen Werken beschäftigte er sich mit Variationsrechnung, Mechanik, Zahlentheorie und vielem anderen mehr. Als Person soll er still und zurückhaltend gewesen sein⁴².

Pierre-Simon de Laplace

Pierre-Simon de Laplace lebte von 1749 bis 1827 und stammte aus ärmlichen Verhältnissen. Er wurde von d'Alembert gefördert und hatte tolle eigene Leistungen in der Determinantentheorie, in der Himmelsmechanik sowie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Physik. Im Gegensatz zu Lagrange legte er mehr Wert auf Anwendungen als auf die Theorie⁴³.

Nach der Vorarbeit von Lagrange konnte Laplace 1787 zeigen, dass alle Eigenwerte regulärer symmetrischer Matrizen reell sind. Cauchy bewies dann 1829 nicht ganz lückenlos, dass die Eigenwerte aller symmetrischen Matrizen reell sind⁴⁴.

Johann Carl Friedrich Gauß

Johann Carl Friedrich Gauß lebte von 1777 bis 1855. Er war der Sohn eines Straßenmetzgers und 1791 wurde die Herzogin von Braunschweig auf ihn aufmerksam, als er im Hofpark in ein

⁴¹ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 51f.

⁴² Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 89.

⁴³ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 89.

⁴⁴ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 77.

Buch vertieft war. Gauß begann danach seine universitäre Karriere mithilfe eines herzoglichen Stipendiums und studierte in Göttingen. 1796 konstruierte er ein 17-Eck nur mit Zirkel und Lineal. 1799 promovierte Gauß mit dem ersten vollständigen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. 1801 brachte Gauß die "disquisitiones arithmeticae" heraus, in denen er sich – wie bereits im vorangegangenen Unterkapitel erwähnt – unter anderem mit Determinanten beschäftigte. Peter Gabriel meint, dass Gauß gemeinsam mit Archimedes und Newton die Dreieinigkeit der Mathematik bildet. Des Weiteren ist noch interessant, dass die Bezeichnung "nichteuclidische Geometrie" von Gauß stammt, obwohl er auf diesem Gebiet nichts publiziert hat. Er wusste zwar sehr viel darüber, aber er hatte wohl nicht die Zeit, um seine Arbeit auf einen Level zu bringen, der seinen eigenen hohen Qualitätsansprüchen genügte, da ihm immer noch einzelne wesentliche Teile fehlten⁴⁵.

Als Person war Gauß ein treuer Diener seines Herzogs. Da Napoleon der Feind war, ging Gauß sogar so weit, dass er einen Preis der Pariser Akademie ablehnte. Gauß verhielt sich auch zurückhaltend, als ein neuer Herrscher die damalige Verfassung außer Kraft setzte und den Schwiegersohn von Gauß, welcher Professor in Göttingen war, entließ⁴⁶.

Augustin-Louis Cauchy

Augustin-Louis Cauchy wurde 1789 als Sohn eines hohen Beamten geboren. Er kannte bereits in seinen jungen Jahren Lagrange und Laplace. Aufgrund seines Vaters, sprich mit "Vitamin B", gelang Cauchy der Aufstieg. Er wurde gefördert von Laplace und Poisson, wurde 1815 Professor an der École polytechnique, wo er besonders negativ auffiel, da er kein guter Lehrer war, unvollständige Arbeiten in versiegelten Umschlägen ablieferte, um sich abzusichern und außerdem abweisend gegenüber Jüngeren wie Abel, Poncelet, Galois und Grassmann war. 1830 verweigerte Cauchy den Eid gegenüber einem neuen widerrechtlichen Herrscher und ging ins Exil, zunächst in die Schweiz, später nach Turin und Prag. Erst 1849, acht Jahre vor seinem Tod, kam er als Professor nach Paris zurück. Während seines Lebens setzte er sich aber vor allem für die Armen, Hungernden und aus religiösen Gründen Verfolgten ein⁴⁷.

⁴⁵ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 194f.

⁴⁶ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 194.

⁴⁷ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 89f.

Cauchy publizierte im Gegensatz zu vielen anderen Zeitgenossen sehr viel auf unterschiedlichen Gebieten. Cauchy beschäftigte sich mit Analysis, Physik, Algebra und Geometrie. In der Algebra hat er vor allem das Verständnis von Determinanten, quadratischen Formen und Transformationsgruppen geprägt. Für die Analysis ist er einer der bekanntesten Vertreter, wenn nicht sogar der bekannteste, vor allem durch seine Funktionentheorie⁴⁸.

1812 entdeckte Cauchy die Produktformel für die Berechnung von Determinanten, also dass $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ gilt. Des Weiteren ist ihm der allgemeine Fall der Vandermondeschen Formel, also der Berechnung der Determinante einer Vandermondeschen Matrix, zu verdanken⁴⁹. Außerdem hat Cauchy 1829 einen ersten Beweis geliefert, dass die Eigenwerte aller symmetrischen Matrizen reell sind, jedoch war dieser Beweis nicht ganz lückenlos, da er ihn nur für reguläre Matrizen vollständig schaffte. Für den allgemeineren Fall, dass die Eigenwerte für alle symmetrischen Matrizen reell sind, dauerte das Warten auf den Beweis bis zu Weierstrass 1858⁵⁰.

James Joseph Sylvester

James Joseph Sylvester wurde 1814 in London als Sohn einer orthodoxen jüdischen Familie geboren. Sylvester war selbst sehr gläubig, was ihm als Student in Cambridge schadete, da er als Jude die akademischen Titel nicht erlangen konnte. Sylvester wurde danach aber Professor in London, dann an der Universität von Virginia ehe er nach England zurückkehrte, wo er als Privatlehrer, Versicherungsagent und Anwalt arbeitete. Nach dieser zweiten englischen Periode wurde er Professor an der Universität in Baltimore, kam schließlich abermals nach England, genauer gesagt nach Oxford als Professor zurück. In seinen Anwaltsjahren lernte Sylvester den Anwalt Cayley kennen, mit dem er bis zu dessen Lebensende in Kontakt blieb. Sylvester beschäftigte sich in der Mathematik vorwiegend mit Algebra und Geometrie, insbesondere mit Invarianten und Normalformen⁵¹.

⁴⁸ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 89.

⁴⁹ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 53.

⁵⁰ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 77.

⁵¹ Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 15f.

Arthur Cayley

Arthur Cayley wurde 1821 als Sohn eines reichen englischen Kaufmanns mit Wohnsitz in Russland geboren. Cayley galt am King's College in London als Wunderkind, wurde dann Fellow Tutor am Trinity College in Cambridge und war von 1844 bis 1863 ein erfolgreicher Londoner Anwalt. Ab 1863 war er dann Professor in Cambridge. In der Mathematik, die er auch in seinen Anwaltsjahren nicht vernachlässigte, beschäftigte er sich vor allem mit Algebra und Geometrie, wie man an dem prägenden Werk "A Memoir on the Theory of Matrices" aus dem Jahr 1858 eindrucksvoll sehen kann. Cayley starb schließlich im Jahr 1895⁵².

⁵² Vgl. *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra, 16. Sein berühmtes Werk ist zu finden unter: Arthur Cayley, A Memoir on the Theory of Matrices. In: Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 148 (1858) 17-37.

Matrizenrechnung in österreichischen Lehrplänen

In diesem Kapitel werden nur Höhere Schulen betrachtet. Es handelt sich also nur um Schulen bzw. Schulformen aus dem AHS- und BHS-Bereich.

Matrizenrechnung im Lehrplan für die allgemein bildenden höheren Schulen (AHS)

Der Lehrplan für die allgemein bildenden höheren Schulen sieht Matrizenrechnung nicht als Thema im regulären Mathematikunterricht vor. Trotzdem kommen Matrizen im Lehrplan für die AHS einmal vor, nämlich wenn Mathematik als Wahlpflichtgegenstand gewählt wird. Hierfür sind Matrizen unter anderem als möglicher, jedoch nicht verpflichtender Lehrstoff genannt:

"Neben den im Pflichtfach angegebenen Lehrinhalten, die in vertiefender Form behandelt werden können, sind im Zuge der Erweiterung folgende zusätzliche Bereiche möglich:

*Klassische Probleme der Mathematik; geometrische Probleme; Kongruenzen und Teilbarkeit; zahlentheoretische Probleme; Kryptologie und Codierung; numerische Methoden; Programmierung mathematischer Verfahren; Approximations- und Interpolationsverfahren; Differenzengleichungen und Differentialgleichungen; spezielle Anwendungsprobleme aus Naturwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften und anderen Bereichen; Fraktale; Chaostheorie; algebraische Strukturen; Matrizen; Anwendungen komplexer Zahlen; analytische Behandlung von geometrischen Abbildungen; ebene Kurven und Raumkurven; Bogenlänge und Krümmung von Kurven; Darstellungen von Flächen; Differentialrechnung für Funktionen in zwei Variablen; Integralrechnung für Funktionen in zwei Variablen; lineare Optimierung; Graphentheorie; Netzpläne; Spieltheorie; Regression und Korrelation; Wahrscheinlichkeitsverteilungen; statistische Testverfahren; Schätzen von statistischen Parametern; sphärische Trigonometrie."*⁵³

⁵³ BMB (Bundesministerium für Bildung), Verordnung der Bundesministerin für Bildung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen geändert wird; Bekanntmachung, mit der die Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen geändert wird (BGBl. II Nr. 219/2016), online unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBlA_2016_II_219/BGBlA_2016_II_219.pdf (19. Juli 2019), hier 135.

Matrizenrechnung im Lehrplan für die Bildungsanstalten für Elementarpädagogik (BAfEP) und die Bildungsanstalten für Sozialpädagogik (BASoP)

Im Lehrplan für die Bildungsanstalten für Elementarpädagogik kommen Matrizen nur ein einziges Mal vor, hierbei sind sie jedoch – im Gegensatz zu AHS – für alle verpflichtend im Fach "Angewandte Mathematik" als Lehrstoff für den 3. Jahrgang im insgesamt 6. Semester vorgesehen. Es stehen aber im Lehrstoff nur die Begriffe "Vektoren und Matrizen" im Bereich "Algebra und Geometrie"⁵⁴.

Der Lehrplan für die Bildungsanstalten für Sozialpädagogik sieht – zumindest was Matrizen angeht – genau gleich aus wie der Lehrplan für die Bildungsanstalten für Elementarpädagogik, d. h. hier kommen ebenso lediglich die Begriffe "Vektoren und Matrizen" ohne weitere Beschreibung als Lehrstoff im Bereich "Algebra und Geometrie" im Fach "Angewandte Mathematik" für den 3. Jahrgang im insgesamt 6. Semester vor⁵⁵.

⁵⁴ Vgl. *BMB (Bundesministerium für Bildung)*, Verordnung der Bundesministerin für Bildung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik und der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik 2016 erlassen, die Verordnung über den Lehrplan der Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik aufgehoben und die Verordnung über die Lehrpläne für die Bildungsanstalt für Sozialpädagogik sowie die Eröffnungs- und Teilungszahlenverordnung betreffend die Lehrpläne der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik und der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik 2016 geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 204/2016), online unter <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2016_II_204/COO_2026_100_2_1257956.pdf> (19. Juli 2019), hier 47f.

⁵⁵ Vgl. *BMB (Bundesministerium für Bildung)*, Verordnung der Bundesministerin für Bildung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik und der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik 2016 erlassen, die Verordnung über den Lehrplan der Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik aufgehoben und die Verordnung über die Lehrpläne für die Bildungsanstalt für Sozialpädagogik sowie die Eröffnungs- und Teilungszahlenverordnung betreffend die Lehrpläne der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik und der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik 2016 geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 204/2016), online unter <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2016_II_204/COO_2026_100_2_1257957.pdf> (19. Juli 2019), hier 47.

Matrizenrechnung im Lehrplan für die Handelsakademien (HAK)

Im Lehrplan für die Handelsakademien ist das Thema Matrizen ebenfalls vorhanden. Es ist im Fach "Mathematik und Angewandte Mathematik" für den 2. Jahrgang im insgesamt 3. Semester im Bereich "Algebra und Geometrie" vorgesehen, wird im Lehrstoff allerdings auch nur mit dem Wort "Matrizen" erwähnt. Im Gegensatz zu den bisher besprochenen Lehrplänen von AHS, BAfEP und BASoP wird allerdings als "Bildungs- und Lehraufgabe" ebenfalls für den 2. Jahrgang im insgesamt 3. Semester im Bereich "Algebra und Geometrie – Matrizen" genau beschrieben, was die Schülerinnen und Schüler können sollten⁵⁶:

- *"die Matrizenschreibweise als Darstellungsform nennen, die Matrixelemente interpretieren und deuten,*
- *lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise darstellen, mit Hilfe der Matrizenrechnung umformen und technologieunterstützt lösen,*
- *Addition, Subtraktion, Multiplikation sowie die Berechnung der Inversen von Matrizen mit Hilfe der Technologie durchführen,*
- *die Matrizenrechnung auf wirtschaftliche Aufgabenstellungen anwenden und Gozintographen deuten"*⁵⁷.

⁵⁶ Vgl. BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen), Verordnung der Bundesministerin für Bildung und Frauen, mit der die Verordnung über die Lehrpläne für die Handelsakademie und die Handelsschule sowie die Eröffnungs- und Teilungszahlenverordnung geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 209/2014), online unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2014_II_209/COO_2026_100_2_1028436.pdf (21. Juli 2019), hier 87. **Im Folgenden zit. als BMBF**, Lehrpläne für die Handelsakademie und die Handelsschule.

⁵⁷ BMBF, Lehrpläne für die Handelsakademie und die Handelsschule, 87.

Matrizenrechnung in den Lehrplänen für die humanberuflichen Schulen

In diesem Abschnitt werden nur die fünfjährigen Höheren humanberuflichen Schulen untersucht, weshalb keine Lehrpläne der Aufbaulehrgänge, Kollegs sowie ein- und dreijährigen Fachschulen betrachtet werden. Da es für die Höheren Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe auch einzelne Lehrpläne für unterschiedliche Fachrichtungen gibt, werden die einzelnen Lehrpläne der Fachrichtungen ebenfalls betrachtet. Es handelt sich in diesem Unterkapitel somit um die Lehrpläne der Höheren Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe (HLW) mit dem allgemeinen Lehrplan für die HLW sowie den Lehrplänen für die HLW mit den Fachrichtungen "Kommunikations- und Mediendesign", "Kultur- und Kongressmanagement", "Sozialmanagement" sowie "Umwelt und Wirtschaft". Außerdem werden die Lehrpläne der Höheren Lehranstalten für Kunst und Gestaltung, Mode, Produktmanagement und Präsentation sowie für Tourismus analysiert.

Gleich vorweg kann festgehalten werden, dass die Lehrpläne sowie die Bildungs- und Lehraufgabe für alle soeben genannten Fachrichtungen und Schularten in Bezug auf das Thema Matrizen vollkommen wortident sind.

Die Lehrpläne sehen in Bezug auf den Lehrstoff zur Matrizenrechnung vor, dass "Anwendung der Matrizen auf einen Produktionsprozess" gelehrt werden soll. Dies gilt für alle oben genannten Fachrichtungen und Schularten für das 2. Schuljahr im insgesamt 4. Semester außer für die Höheren Lehranstalten für Tourismus, wo dasselbe erst für das 3. Schuljahr im insgesamt 5. Semester vorgesehen ist⁵⁸. Des Weiteren beinhalten die Lehrpläne bezüglich des Lehrstoffs zur

⁵⁸ Vgl. *BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen)*, Verordnung der Bundesministerin für Bildung und Frauen, mit der eine Verordnung über die Lehrpläne für gewerbliche und kunstgewerbliche Fachschulen, Fachschulen für wirtschaftliche Berufe und Fachschulen für Sozialberufe sowie Höhere gewerbliche und kunstgewerbliche Lehranstalten und Höhere Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe erlassen wird (Lehrpläne der humanberuflichen Schulen) und die Verordnung über Lehrpläne für technische, gewerbliche und kunstgewerbliche Fachschulen, die Verordnung über Lehrpläne für die Fachschule für wirtschaftliche Berufe und die Höhere Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe, die Verordnung über den Lehrplan der Fachschule für Sozialberufe, die Verordnung über die Lehrpläne der dreijährigen Fachschule und der Höheren Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe sowie die Verordnung über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 340/2015). **Im Folgenden zit. als BMBF**, Lehrpläne der humanberuflichen Schulen.

Für den allgemeinen Lehrplan für die HLW siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154396.pdf (22. Juli 2019), hier 74.

Matrizenrechnung noch, dass zum Thema Matrizen "Schulartenspezifische Anwendungen im Wirtschaftsbereich" im 5. Schuljahr im insgesamt 9. Semester behandelt werden sollen. Dies gilt nun für alle Fachrichtungen und Schularten auch hinsichtlich des Zeitpunkts (9. Semester) vollkommen ident⁵⁹.

-
- Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Kommunikations- und Mediendesign" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154399.pdf (22. Juli 2019), hier 71.
- Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Kultur- und Kongressmanagement" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154402.pdf (22. Juli 2019), hier 87.
- Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Sozialmanagement" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154400.pdf (22. Juli 2019), hier 65.
- Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Umwelt und Wirtschaft" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154401.pdf (22. Juli 2019), hier 71.
- Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Kunst und Gestaltung" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154414.pdf (22. Juli 2019), hier 50.
- Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Mode" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154409.pdf (22. Juli 2019), hier 48.
- Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Produktmanagement und Präsentation" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154417.pdf (22. Juli 2019), hier 58.
- Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Tourismus" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154405.pdf (22. Juli 2019), hier 59.
- ⁵⁹ Vgl. BMBF, Lehrpläne der humanberuflichen Schulen.
- Für den allgemeinen Lehrplan für die HLW siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154396.pdf (22. Juli 2019), hier 77.
- Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Kommunikations- und Mediendesign" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154399.pdf (22. Juli 2019), hier 75.
- Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Kultur- und Kongressmanagement" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154402.pdf (22. Juli 2019), hier 91.
- Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Sozialmanagement" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154400.pdf (22. Juli 2019), hier 68.
- Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Umwelt und Wirtschaft" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154401.pdf (22. Juli 2019), hier 75.
- Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Kunst und Gestaltung" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154414.pdf (22. Juli 2019), hier 54.
- Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Mode" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154409.pdf (22. Juli 2019), hier 52.
- Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Produktmanagement und Präsentation" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154417.pdf (22. Juli 2019), hier 62.
- Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Tourismus" siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154405.pdf (22. Juli 2019), hier 63.
-

Die Bildungs- und Lehraufgabe zum Thema Matrizen befindet sich im Bereich "Algebra und Geometrie" und ist viel ausführlicher als die Angaben zum Lehrstoff. Trotzdem ist die Bildungs- und Lehraufgabe für alle Fachrichtungen und Schularten wortident. Es muss hierbei allerdings wiederum darauf hingewiesen werden, dass die im Folgenden genannten Punkte für alle Fachrichtungen und Schularten für das 2. Schuljahr im insgesamt 4. Semester vorgesehen sind, bis auf die Höheren Lehranstalten für Tourismus, wo dies wieder für das 3. Schuljahr im insgesamt 5. Semester vorgesehen ist⁶⁰:

"Die Schülerinnen und Schüler können [...]

- Daten in Matrixform darstellen;
- Summe, Differenz und Produkt zweier Matrizen berechnen sowie die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar mit Technologieeinsatz;
- Ergebnisse der Berechnungen mit Matrizen interpretieren und erklären;
- einen Produktionsprozess ausgehend von Rohstoffen bis zu den Endprodukten grafisch darstellen und zugehörige Berechnungen mit Matrizen beschreiben und durchführen."⁶¹

⁶⁰ Vgl. BMBF, Lehrpläne der humanberuflichen Schulen.

Für den allgemeinen Lehrplan für die HLW siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154396.pdf> (22. Juli 2019), hier 73.

Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Kommunikations- und Mediendesign" siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154399.pdf> (22. Juli 2019), hier 70f.

Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Kultur- und Kongressmanagement" siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154402.pdf> (22. Juli 2019), hier 86f.

Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Sozialmanagement" siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154400.pdf> (22. Juli 2019), hier 64.

Für den Lehrplan für die HLW mit der Fachrichtung "Umwelt und Wirtschaft" siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154401.pdf> (22. Juli 2019), hier 70f.

Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Kunst und Gestaltung" siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154414.pdf> (22. Juli 2019), hier 49f.

Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Mode" siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154409.pdf> (22. Juli 2019), hier 48.

Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Produktmanagement und Präsentation" siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154417.pdf> (22. Juli 2019), hier 58.

Für den Lehrplan für die Höhere Lehranstalt für "Tourismus" siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_340/COO_2026_100_2_1154405.pdf> (22. Juli 2019), hier 58f.

⁶¹ Wie die vorangegangene Fußnote.

Matrizenrechnung in den Lehrplänen für die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten

Die Lehrpläne für das Fach "Angewandte Mathematik" der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten sind etwas komplizierter aufgebaut als die bisher besprochenen Lehrpläne, weil es einen allgemeinen Lehrplan gibt, der für alle Fachrichtungen gilt und noch zusätzlich für jede Fachrichtung ein eigener Lehrplan hinzu kommt. Beide zusammen, also der allgemeine Lehrplan und derjenige für die jeweilige Fachrichtung ergeben den Lehrplan für die Schulen mit der jeweiligen Fachrichtung⁶².

Matrizenrechnung im allgemeinen Lehrplan für die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten

Matrizen werden im allgemeinen Lehrplan für die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten zuallererst in den "Lernergebnissen des Pflichtgegenstandes Angewandte Mathematik" genannt und zwar wie folgt:

*"In den Bereichen „Stochastik“ und „Matrizen und Stochastik“ finden die Absolventinnen und Absolventen mit Hilfe der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung ein geeignetes Modell und können statistische Methoden und Verfahren einsetzen, Daten strukturiert in Vektoren und Matrizen zusammenfassen, Ergebnisse und Zusammenhänge interpretieren sowie in der Fachsprache der Stochastik argumentieren."*⁶³ (Hervorhebungen im Original)

⁶² Vgl. BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen), Verordnung der Bundesministerin für Bildung und Frauen, mit der eine Verordnung über die Lehrpläne der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten 2015 erlassen wird sowie die Verordnung über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten und die Verordnung über die Lehrpläne der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (Lehrplan 2011) geändert werden (Lehrplanpaket der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten 2015); Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 262/2015), online unter https://www.ris.bka.gv.at/Doku/BgblAuth/BGBlA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135479.pdf (27. Juli 2019), hier 6. **Im Folgenden zit. als BMBF**, Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten.

⁶³ BMBF, Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten, 6.

Die Bildungs- und Lehraufgabe sieht für den 1. Jahrgang im 1. und 2. Semester im Bereich "Algebra und Geometrie" vor, dass die Schülerinnen und Schüler lineare Gleichungssysteme in Matrizenform angeben können. Im Lehrstoff wird diese zu lernende Fertigkeit für den 1. Jahrgang im 1. und 2. Semester im Bereich "Gleichungen und Ungleichungen" nochmals kurz erwähnt⁶⁴.

Im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester tauchen die Matrizen sowohl in der Bildungs- und Lehraufgabe als auch im Lehrstoff wieder auf⁶⁵. Die Bildungs- und Lehraufgabe lautet wie folgt:

"Die Schülerinnen und Schüler können im Bereich Matrizen und Stochastik

- *den Begriff Zufallsexperiment verstehen, die Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse mit Hilfe der Definition für Wahrscheinlichkeiten nach Laplace bestimmen und die Additions- und Multiplikationsregel anwenden;*
- *Daten strukturiert in Vektoren und Matrizen zusammenfassen sowie Berechnungen im Fachgebiet durchführen und kennen den Begriff der Determinante und deren Bedeutung.*"⁶⁶

Der Lehrstoff für den 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester hat einen eigenen Punkt zu Matrizen in dem Folgendes steht:

*"Bezeichnungen, Addition, Multiplikation, Multiplikation mit einer Zahl; Rechenregeln, Determinante, lineare Gleichungssysteme in Matrizenform."*⁶⁷

⁶⁴ Vgl. *BMBF*, Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten, 31f.

⁶⁵ Vgl. *BMBF*, Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten, 35.

⁶⁶ *BMBF*, Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten, 35.

⁶⁷ *BMBF*, Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten, 35.

Fachrichtungen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten ohne weitere Inhalte zur Matrizenrechnung im Lehrplan

Es gibt 14 Fachrichtungen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten, die – abgesehen von den Inhalten im soeben behandelten allgemeinen Lehrplan – keine weiteren Inhalte zum Thema Matrizen bzw. Matrizenrechnung im Lehrplan sowie in der Bildungs- und Lehraufgabe vorgesehen haben.

Diese 14 Fachrichtungen sind die folgenden:

- Art and Design
- Bautechnik
- Chemieingenieure
- Elektronik und technische Informatik
- Elektrotechnik
- Gebäudetechnik
- Grafik- und Kommunikationsdesign
- Innenarchitektur und Holztechnologien
- Lebensmitteltechnologie – Getreide- und Biotechnologie
- Lebensmitteltechnologie – Lebensmittelsicherheit
- Mechatronik
- metallische Werkstofftechnik
- Wirtschaftsingenieure – Bekleidungstechnik
- Wirtschaftsingenieure – Textiltechnik⁶⁸

⁶⁸ Vgl. *BMBF*, Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten. Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Art and Design siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135480.pdf> (27. Juli 2019). Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Bautechnik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135481.pdf> (27. Juli 2019). Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Chemieingenieure siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135483.pdf> (27. Juli 2019). Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Elektronik und technische Informatik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135484.pdf> (27. Juli 2019).

Fachrichtungen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten mit weiteren Inhalten zur Matrizenrechnung im Lehrplan

Es gibt 14 Fachrichtungen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten, die zusätzlich zu den Inhalten im allgemeinen Lehrplan in ihren jeweils eigenen Lehrplänen nochmals Matrizen beinhalten.

Diese 14 Fachrichtungen sind die folgenden:

- Biomedizin- und Gesundheitstechnik
- Flugtechnik
- Informatik
- Informationstechnologie
- Kunststofftechnik
- Maschinenbau

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Elektrotechnik siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135485.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Gebäudetechnik siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135487.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Grafik- und Kommunikationsdesign siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135488.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Innenarchitektur und Holztechnologien siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135491.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Lebensmitteltechnologie – Getreide- und Biotechnologie siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135493.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Lebensmitteltechnologie - Lebensmittelsicherheit siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135494.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Mechatronik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135496.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für metallische Werkstofftechnik siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135499.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Wirtschaftsingenieure – Bekleidungstechnik siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135501.pdf> (27. Juli 2019).

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Wirtschaftsingenieure – Textiltechnik siehe:
<https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135507.pdf> (27. Juli 2019).

- Medien
- Medieningenieure und Printmanagement
- Metallurgie und Umwelttechnik
- Wirtschaftsingenieure – Betriebsinformatik
- Wirtschaftsingenieure – Holztechnik
- Wirtschaftsingenieure – Logistik
- Wirtschaftsingenieure – Maschinenbau
- Wirtschaftsingenieure – technisches Management

Unter diesen 14 Fachrichtungen gibt es nur zwei Ausprägungsarten von zusätzlichen Inhalten zu Matrizen:

Die erste Ausprägungsart beinhaltet im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester sowohl in der Bildungs- und Lehraufgabe als auch im Lehrplan zusätzliche Inhalte zu Matrizen. Die Bildungs- und Lehraufgabe hat hierbei einen eigenen Bereich "Matrizen", in dem Folgendes geschrieben steht:

"Die Schülerinnen und Schüler können [...] Matrizen als Operatoren von Abbildungen im zwei- und dreidimensionalen Raum interpretieren, mit diesen anwendungsbezogen modellieren und operieren."

Der Lehrstoff beinhaltet ebenfalls im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester einen eigenen "Bereich Matrizen" in dem folgende Punkte aufgezählt werden:

"Inverse Matrix, Matrizen als Operatoren von Abbildungen, homogene Koordinaten, Anwendungen aus der Fachtheorie."

Ansonsten gibt es keine weiteren Verweise auf Matrizen, weder in der Bildungs- und Lehraufgabe noch im Lehrstoff. Die Fachrichtungen Biomedizin- und Gesundheitstechnik, Informatik sowie Informationstechnologie gehören zu dieser ersten Ausprägungsart⁶⁹.

⁶⁹ Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Biomedizin- und Gesundheitstechnik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokument/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135482.pdf> (28. Juli 2019), hier 34.

Die zweite Ausprägungsart hat in Bezug auf Matrizen nur eine kleine Ergänzung zum allgemeinen Lehrplan, nämlich, dass in der Bildungs- und Lehraufgabe steht, dass die Schülerinnen und Schüler zu einem späteren Zeitpunkt als im bereits behandelten allgemeinen Lehrplan nochmals auf Gleichungssysteme in Matrixform zurückkommen, diese dann aber mithilfe der inversen Matrix lösen können sollen. Im Lehrstoff kommt lediglich der Begriff "Inverse Matrix" als zusätzlicher Inhalt im "Bereich Algebra und Geometrie" hinzu. Diese Inhalte sind für die zwei Fachrichtungen Medien sowie Medieningenieure und Printmanagement bereits im 3. Jahrgang im insgesamt 5. Semester vorgesehen⁷⁰. Dieselben Inhalte sind für die Fachrichtungen Flugtechnik, Kunststofftechnik, Maschinenbau, Metallurgie und Umwelttechnik, Wirtschaftsingenieure – Betriebsinformatik, Wirtschaftsingenieure – Holztechnik, Wirtschaftsingenieure – Logistik, Wirtschaftsingenieure – Maschinenbau sowie Wirtschaftsingenieure – technisches Management erst im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester vorgesehen. Ansonsten gibt es keine weiteren Verweise auf Matrizen, weder in der Bildungs- und Lehraufgabe, noch im Lehrstoff⁷¹.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Informatik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135489.pdf> (28. Juli 2019), hier 7f.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Informationstechnologie siehe:

<https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135490.pdf> (28. Juli 2019), hier 12.

⁷⁰ Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Medien siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135497.pdf> (28. Juli 2019), hier 6.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Medieningenieure und Printmanagement siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135498.pdf> (28. Juli 2019), hier 5.

⁷¹ Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Flugtechnik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135486.pdf> (28. Juli 2019), hier 6.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Kunststofftechnik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135492.pdf> (28. Juli 2019), hier 6.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Maschinenbau siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135495.pdf> (28. Juli 2019), hier 11.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Metallurgie und Umwelttechnik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135500.pdf> (28. Juli 2019), hier 7.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Wirtschaftsingenieure – Betriebsinformatik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135502.pdf> (28. Juli 2019), hier 7.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Wirtschaftsingenieure – Holztechnik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135503.pdf> (28. Juli 2019), hier 8.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Wirtschaftsingenieure – Logistik siehe: <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135504.pdf> (28. Juli 2019), hier 7.

Vergleich der Lehrpläne

Die behandelten Schultypen in diesem Kapitel waren die allgemein bildenden höheren Schulen (AHS), die Bildungsanstalten für Elementarpädagogik (BAfEP), die Bildungsanstalten für Sozialpädagogik (BASoP), die Handelsakademien (HAK), die humanberuflichen Schulen und schließlich die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten.

Von diesen sechs Schultypen gab es im AHS-Bereich die wenigsten Inhalte zur Matrizenrechnung, da Matrizenrechnung im regulären Unterricht ohnehin nicht im Lehrstoff steht. Außerdem könnte laut Lehrplan Matrizenrechnung auch im Rahmen zusätzlicher Mathematik-Unterrichtseinheiten (Wahlpflichtfach Mathematik) weggelassen werden, da es sich nur um einen Vorschlag, aber keine Verpflichtung handelt.

Die BAfEP und BASoP haben zwar für alle Schülerinnen und Schüler Matrizen als Lehrstoff im 3. Jahrgang deklariert, jedoch fehlen jedwede Angaben, was genau gemacht werden soll bzw. wie tief die Inhalte zu Matrizen gehen sollen.

HAK, humanberufliche Schulen und Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten haben in Bezug auf das Thema Matrizen alle im Lehrplan die Matrizenschreibweise. Beim Schultyp HAK kommt dies im 2. Jahrgang im insgesamt 3. Semester vor, die humanberuflichen Schulen behandeln diesen Punkt im 2. Jahrgang im insgesamt 4. Semester (bzw. im 3. Jahrgang im insgesamt 5. Semester bei den Höheren Lehranstalten für Tourismus) und die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten lehren die Matrizenschreibweise bereits im 1. Jahrgang, also von allen untersuchten Schultypen am frühesten.

Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen sind ebenfalls für alle diese drei Schultypen verpflichtend, obwohl dies für HAK und humanberufliche Schulen nur mithilfe von Technologieunterstützung gemacht werden muss. Auch diese Punkte kommen beim Schultyp HAK bereits im 2. Jahrgang im insgesamt 3. Semester und bei den humanberuflichen Schulen

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Wirtschaftsingenieure – Maschinenbau siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135505.pdf (28. Juli 2019), hier 7.

Für den Lehrplan der Höheren technischen Lehranstalt für Wirtschaftsingenieure – technisches Management siehe: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1135506.pdf (28. Juli 2019), hier 7.

im 2. Jahrgang im insgesamt 4. Semester (bzw. im 3. Jahrgang im insgesamt 5. Semester bei den Höheren Lehranstalten für Tourismus) vor. Es ist etwas überraschend, dass diese Grundrechnungsarten mit Matrizen in den Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten erst im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester gelehrt werden.

Des Weiteren ist die Anwendung der Matrizenrechnung auf jeweils schulspezifische Aufgabenstellungen im Lehrplan von HAK ebenfalls bereits im 2. Jahrgang im insgesamt 3. Semester, in den humanberuflichen Schulen erst im 5. Jahrgang im insgesamt 9. Semester und bei den Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten mit zusätzlichen Inhalten in der ersten Ausprägungsart im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester zu finden. Somit sind die Anwendungen im Lehrplan von HAK bereits vergleichsweise früh, was dadurch zu erklären ist, dass der gesamte Lehrstoff zu Matrizen nur in einem einzigen Semester stattfindet und auch nicht später nochmals quasi zur Auffrischung wiederholt wird. Bei den humanberuflichen Schulen und den Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten wirken die Anwendungen durch ihr vergleichsweise späteres Aufkommen im Lehrplan wie eine Art Wiederholung des Themas Matrizen. Es wäre von Interesse, welcher dieser beiden Wege zu mehr Verständnis und Motivation bei den Schülerinnen und Schülern führt. Einerseits mag es gut sein, wenn man gleich im Anschluss an die Theorie zur Matrizenrechnung Anwendungen ebendieser kennenlernt so wie im Lehrplan der HAK vorgesehen, andererseits kann es auch gut sein, wenn sich der gesamte Lehrstoff zum Thema Matrizen auf mehrere Jahrgänge verteilt und gegen Ende der Schullaufbahn nochmals wiederholt wird.

Die Darstellung von linearen Gleichungssystemen in Matrizenform ist nur bei HAK (2. Jahrgang, insgesamt 3. Semester) und Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (1. Jahrgang) im Lehrplan zu finden, bei den humanberuflichen Schulen kommt dieser Inhalt nicht vor. Im Lehrplan der HAK ist sogar vom technologieunterstützten Lösen linearer Gleichungssysteme in Matrizenform die Rede, wohingegen der Lehrplan der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten das Lösen im allgemeinen Lehrplan nicht explizit erwähnt. Es kann hier eher davon ausgegangen werden, dass das Lösen nicht mitgemeint ist, da bei einigen Fachrichtungen (siehe alle Fachrichtungen mit weiteren Inhalten zur Matrizenrechnung) der Begriff der inversen Matrix im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester (außer bei den Fachrichtungen Medien sowie Medieningenieure und Printmanagement, dort bereits im 3. Jahrgang im insgesamt 5. Semester) auftaucht bzw. explizit steht, dass lineare Gleichungssysteme in Matrizenform mithilfe der inversen Matrix gelöst werden können sollen. Auch die Berechnung der inversen Matrix ist für die HAK nur mithilfe von Technologieunterstützung im 2. Jahrgang im

insgesamt 3. Semester vorgesehen und für die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten nur für diejenigen Fachrichtungen mit weiteren Inhalten zur Matrizenrechnung im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester. Somit liegen die Darstellung von linearen Gleichungssystemen in Matrizenform und das Lösen ebensolcher in den Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten zeitlich gesehen weit auseinander, wohingegen in der Schulform HAK beides im selben Semester gemacht wird. Somit stellt sich wieder die Frage, welcher dieser beiden Wege der bessere ist: Gleich alles machen oder später darauf zurückkommen und sozusagen nochmals wiederholen.

Es gibt ein paar Inhalte zur Matrizenrechnung, die nur im Lehrplan der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten vorkommen. Hierzu gehört vor allem der Begriff "Determinante" inklusive dessen Bedeutung im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester. Bei den Fachrichtungen mit weiteren Inhalten zur Matrizenrechnung im Lehrplan des 4. Jahrgangs im insgesamt 8. Semester kommen noch Matrizen als Operatoren von Abbildungen sowie homogene Koordinaten hinzu.

Insgesamt ist also festzuhalten, dass Matrizen in den Lehrplänen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten im Vergleich zu den anderen behandelten Schulformen am meisten Beachtung finden und deutlich mehr Inhalte zu Matrizen vorkommen als in allen anderen betrachteten Schultypen. Dafür kommen die meisten Inhalte erst im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester an den Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten vor, obwohl sogar schon im 1. Jahrgang eine erste Annäherung an das Thema Matrizen stattfindet und sich der Lehrstoff im Vergleich zu den anderen betrachteten Schultypen noch am meisten aufteilt, trotz dieser Fülle an Inhalten im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester. Selbst die Fachrichtungen ohne weitere Inhalte zur Matrizenrechnung haben mehr Lehrstoff zum Thema Matrizen als alle anderen betrachteten Schultypen. Man kann also sagen, dass in den Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten das Spiralprinzip angewendet wird. In den humanberuflichen Schulen und im Schultyp HAK sind immerhin auch noch einige Inhalte zu Matrizen zu finden, wobei alle Inhalte im Lehrplan der HAK nur im 2. Jahrgang im insgesamt 3. Semester konzentriert sind und den Schülerinnen und Schülern beigebracht werden, wohingegen in den humanberuflichen Schulen die Inhalte etwas später zum ersten Mal behandelt werden und dann noch etwas später wiederholt und vertieft werden. In den BAfEP und BASoP werden Matrizen im 3. Jahrgang im insgesamt 6. Semester zumindest erwähnt und im AHS-Bereich muss man schon ein Wahlpflichtfach Mathematik und etwas Glück haben, um etwas über Matrizen zu lernen.

Matrizenrechnung in österreichischen Lehrbüchern

Da es für AHS, BAfEP und BASoP laut Lehrplan (siehe vorangegangenes Kapitel) keine bzw. kaum Inhalte zu Matrizen gibt, werden die Schulbücher dieser Schulformen in diesem Kapitel überhaupt nicht betrachtet.

Sowohl für die Handelsakademien als auch für die humanberuflichen Schulen werden die jeweiligen Schulbuchreihen der folgenden Verlage betrachtet und miteinander verglichen:

- Österreichischer Bundesverlag (ÖBV)
- E. Dorner (Teil der Westermann Gruppe)
- Veritas Verlag

Für die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten wird nur die Schulbuchreihe "Ingenieur-Mathematik" des E. Dorner Verlags untersucht.

Ausschlaggebend für die Wahl dieser Schulbuchreihen bzw. dieser Verlage war vor allem, dass die Schulbuchreihen auf dem neuesten Stand sind bzw. den aktuellen Lehrplänen entsprechen, alle Schulbücher zumindest betreffs des Themas Matrizen online vollständig jederzeit kostenlos einsehbar sind und die weite Verbreitung dieser Schulbuchreihen in den Schulen.

Vergleich der Lehrbücher der Handelsakademien

Wie bereits erwähnt werden in diesem Unterkapitel die Schulbuchreihen dreier Verlage miteinander verglichen. Für den Österreichischen Bundesverlag (ÖBV) ist dies die Schulbuchreihe "Mathematik anwenden HAK I-V", für den E. Dörner Verlag die Schulbuchreihe "Mathematik & Wirtschaft 1-4 für HAK" ("Mathematik & Wirtschaft 5 für HAK" erscheint erst im Herbst 2020) und für den Veritas Verlag die Schulbuchreihe "Angewandte Mathematik@HAK 1-5". Es werden der allgemeine Aufbau und die Inhalte bewertet sowie die optische Gestaltung beschrieben.

Da auch im Lehrplan das Thema Matrizen in den Handelsakademien nur im 2. Jahrgang im insgesamt 3. Semester vorkommt (siehe vorheriges Kapitel), sind Inhalte zu Matrizen in diesen drei Schulbuchreihen ebenfalls nur in den Schulbüchern für den 2. Jahrgang enthalten. Beim ÖBV und beim Veritas Verlag werden Matrizen allerdings nochmals im letzten Jahrgang kurz wiederholt⁷².

Im Schulbuch "Mathematik anwenden HAK II" ist das Kapitel "Matrizenrechnung" in vier Unterkapitel unterteilt. Es beginnt mit "Rechnen mit Zeilen und Spalten", geht danach über zu den Unterkapiteln "Matrizen" und "Rechnen mit Matrizen" und endet mit "Lineare Gleichungssysteme in Matrizenform" und einer Zusammenfassung, welche sich insgesamt auf 40 Seiten erstrecken. Das gesamte Buch umfasst 192 Seiten. Zum Aufbau ist festzuhalten, dass jedes Unterkapitel mit den jeweiligen Lernzielen beginnt, daraufhin folgt ein Einstiegsbeispiel und dann kommen diverse Definitionen bzw. Rechenregeln. Abgerundet wird der Beginn eines Unterkapitels stets mit den jeweils nötigen Befehlen für den Technologieeinsatz von "GeoGebra", "EXCEL" und "TI Nspire". Innerhalb der Unterkapitel kommen immer wieder neue Begriffe, Rechenregeln usw. stückweise dazu, wobei hier der Aufbau wie am Beginn eines jeden Unterkapitels ist: Einstiegsbeispiel, Definitionen/Rechenregeln, ev. Technologieeinsatzbefehle und Beispiele. Die Beispiele sind mit Schwierigkeitsstufen von 1 bis 3 in Form von ausgefüllten Balken gekennzeichnet und daneben stehen die jeweils angesprochenen Handlungskompeten-

⁷² Vgl. Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon, Heinz Stadler, Mathematik anwenden HAK V (Wien 2018), hier 92 und 98-100. Vgl. Christiane Allerstorfer, Martin Kletzmayer, Michael Langer, Angewandte Mathematik@HAK 5 (Linz 2018), hier 76f.

zen in Form von Buchstaben: A (Modellieren und Transferieren), B (Operieren und Technologieeinsatz), C (Interpretieren und Dokumentieren) und D (Argumentieren und Kommunizieren)⁷³.

Inhaltlich gesehen enthält "Mathematik anwenden HAK II" nur die wirklich wichtigen Begriffe. Man merkt, dass der Fokus auf einer gründlichen Bearbeitung aller im Lehrplan vorgeschriebenen Inhalte liegt und auf Ausschweifungen verzichtet wird. Beispielsweise wird der Begriff "Vektor" stets vermieden, stattdessen wird einfach von einer "Zeile", einer "Spalte" oder einem "n-Tupel" gesprochen und so wird die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor zu einer "Zeile-Matrix-Multiplikation" bzw. einer "Matrix-Spalte-Multiplikation". Des Weiteren kommen auch die Begriffe "Nullmatrix" und "transponierte Matrix" nicht vor. Die Erklärungen zu Begriffen, Rechenregeln usw. sind für das Rechnen ohne Technologieeinsatz sehr gut verständlich, aber die Erklärungen für den Technologieeinsatz sind äußerst kurz gehalten und könnten somit für die Schülerinnen und Schüler zu Problemen führen. Selbst wenn man die bereits vollständig durchgerechneten Beispiele weglässt, bleiben noch über 100 Beispiele zu Matrizen über, die die Schülerinnen und Schüler selbst rechnen können, wobei natürlich einige Beispiele mehrere Unterpunkte haben bzw. ähnliche Beispiele mit anderen Zahlen in einer Beispielnnummer zusammengefasst sind (z. B. als "a" bis "f", wie in Schulbüchern üblich). Bei näherer Betrachtung der Häufigkeit der Handlungsbereiche fällt ein deutliches Übergewicht an Aufgaben aus dem Handlungsbereich B, also zum Operieren und Technologieeinsatz, auf. Dies liegt aber wohl am Lehrplan für die Handelsakademien, der auch in seiner Formulierung den Operationsaspekt am stärksten hervorhebt. Aus dem Handlungsbereich D (Argumentieren und Kommunizieren) wären etwas mehr Beispiele wünschenswert, allerdings muss auch Rücksicht darauf genommen werden, dass solche Beispiele in einem Schulbuch viel Platz benötigen. Das Schulbuch verschafft sich aber bezüglich des Platzmangels etwas Abhilfe, indem es manche Inhalte auf die Online-Ergänzung auslagert⁷⁴.

Farblich gesehen ist in der Schulbuchreihe "Mathematik anwenden HAK II" die Farbe Türkis dominierend, lediglich Definitionen, Befehle für den Technologieeinsatz und Rechengesetze

⁷³ Vgl. Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon, Mathematik anwenden HAK II (Wien 2015), hier 47-90.

⁷⁴ Vgl. Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon, Mathematik anwenden HAK II (Wien 2015), hier 47-90. Stellvertretend für die Beispiele in der Online-Ergänzung siehe Beispiel 230 auf Seite 52.

sind in ganz zarten Farbtönen von gelb bzw. orange etwas vom Rest abgehoben. Auf fast jeder Doppelseite sind Bilder mit jungen Erwachsenen zur Auflockerung eingestreut⁷⁵.

Das Schulbuch "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" unterteilt das Kapitel "Matrizen" in die vier Unterkapitel "Grundlegendes über Matrizen", "Rechenoperationen mit Matrizen", "Lösen von linearen Gleichungssystemen mithilfe von Matrizen" und "Ein- und zweistufige Produktion" und wird mit einer zusammenfassenden Mind-Map sowie den Inhalten der Bildungs- und Lehraufgabe abgeschlossen. Insgesamt nimmt das Kapitel "Matrizen" – genau wie dasjenige vom ÖBV – vierzig Seiten ein. Das gesamte Buch umfasst 216 Seiten. Die einzelnen Unterkapitel sind wie folgt aufgebaut: Zu Beginn gibt es Erklärungen, Definitionen oder Rechenregeln, benötigte Befehle für den Technologieeinsatz und vorgerechnete Beispiele, die bereits mehrere verschiedene Begriffe, Rechenregeln und/oder Definitionen beinhalten. Erst nach einem solchen Block an neuen Inhalten kommen erste Beispiele, die die Schülerinnen und Schüler selbst rechnen können bzw. sollen. Beispielsweise erstrecken sich die Erklärungen, vorgerechneten Beispiele usw. im zweiten Unterkapitel "Rechenoperationen mit Matrizen" vom Beginn des Unterkapitels auf Seite 37 bis Seite 43 ohne ein einziges Beispiel zum selbstständigen Rechnen. Dafür folgt eine Doppelseite an Aufgaben, die alle diese Inhalte behandeln, um dann wieder fast zwei ganze Seiten an Erklärungen und neuen Inhalten folgen zu lassen, die aber nur vier weitere Beispiele (elf wenn man "a" bis "e" als fünf zählt) nach sich ziehen und danach endet das Unterkapitel mit einer vierseitigen genauen Erklärung, wie man alle Inhalte des gesamten Unterkapitels in "EXCEL", "GeoGebra" und "TI Nspire" eingibt. Insgesamt erstreckt sich das zweite Unterkapitel also auf 15 Seiten, von denen insgesamt nur auf zweieinhalb Seiten Angaben zu Aufgaben zum Selbstrechnen stehen, also durchschnittlich nur auf einem Sechstel pro Seite. Das vierte Unterkapitel ist vom Aufbau her ähnlich: Es beginnt mit neun Seiten durchgehend nur Definitionen, vorgerechnete Beispiele, Erklärungen usw.⁷⁶.

"Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" beinhaltet viel mehr Begriffe, Definitionen usw. als die beiden anderen Schulbücher für die HAK. "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" versucht möglichst viele verschiedene Inhalte in das Kapitel "Matrizen" zu quetschen und geht weit über den Lehrplan sowie über die Bildungs- und Lehraufgabe – die beide vollständig erfüllt werden –

⁷⁵ Vgl. Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon, Mathematik anwenden HAK II (Wien 2015), hier 47-90.

⁷⁶ Vgl. Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017), hier 29-68.

hinaus, wobei es fast schon ironisch erscheint, dass eben diese auf der letzten Seite des Kapitels genau aufgelistet werden. Beispielsweise kommen die folgenden Begriffe vor: Nullmatrix, transponierte Matrix, Vektor, Zeilenvektor, Spaltenvektor, Skalarprodukt, Determinante (hier nur um sagen zu können, ob eine Matrix invertierbar ist) und Leslie-Matrix. Aber nicht nur Begriffe, sondern auch andere nicht im Lehrplan enthaltene Inhalte sind Teil von "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" wie zum Beispiel die geometrische Interpretation von Vektoren oder die geometrische Interpretation der Addition von Vektoren bzw. der Multiplikation mit einem Skalar. Die Erklärungen von Definitionen, Rechenregeln usw. für das Rechnen ohne Technologieeinsatz sind für Schülerinnen und Schüler eher schwer zu verstehen, da wohl mehr Wert darauf gelegt wird, dass alles mathematisch korrekt formuliert ist, als dass alles möglichst verständlich für Schülerinnen und Schüler erklärt wird⁷⁷. Am Deutlichsten wird diese Kritik bei der Erklärung der Matrizenmultiplikation, die genau wie folgt im Schulbuch erklärt wird:

"Gegeben ist eine Matrix A vom Typ $(m \times p)$ und eine Matrix B vom Typ $(p \times n)$, die Spaltenzahl von A ist also gleich der Zeilenzahl von B.

Dann kann ein Produkt $A \cdot B = C$ erklärt werden, wobei C ebenfalls eine Matrix ist:

- *Die Produktmatrix $C = (c_{ij})$ ist vom Typ $(m \times n)$
Merkregel für die Matrizenmultiplikation $A \cdot B$: $(m \times p) \cdot (p \times n) = (m \times n)$.
Die inneren Anzahlen müssen übereinstimmen.*
- *$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$ Das Element c_{ij} der Matrix C ist dann das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B"⁷⁸ (Hervorhebungen im Original)*

Es sind aber auch manche Inhalte von "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" besonders positiv hervorzuheben wie zum Beispiel die Erklärungen für den Technologieeinsatz, welche sehr ausführlich sind, da nicht nur geschrieben steht, was man einzugeben hat, sondern deutlich mehr Screenshots enthalten sind als in den anderen Schulbüchern für die HAK. Die Erklärungen zum Technologieeinsatz sind sehr übersichtlich aufgebaut und gleichen einer Schritt-für-Schritt-Anleitung. Zählt man die Unterpunkte der Beispiele nicht, so besteht das Kapitel "Matrizen" aus insgesamt 67 Beispielen, von denen aber 20 bereits vollständig im Buch vorgerechnet sind. Für die Schülerinnen und Schüler bleiben also 47 Aufgaben zum selbstständigen Rechnen, was im

⁷⁷ Vgl. Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017), hier 29-68.

⁷⁸ Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017), 40.

Vergleich zu "Mathematik anwenden HAK II" sehr wenig wirkt. Natürlich kann man dies auch als ein Aufbegehren gegen einen Aufgaben-Drill sehen. Das Verhältnis von bereits vorgerechneten Beispielen zu Beispielen zum selbstständigen Rechnen ist mit 20 zu 47 im Schulbuch "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" im Vergleich zu den beiden anderen Schulbüchern relativ schwach zugunsten der Beispiele zum selbstständigen Rechnen ausgefallen. Abschließend zum inhaltlichen Teil soll auch hier noch auf die Handlungsbereiche eingegangen werden. Wie bei "Mathematik anwenden HAK II" ist auch in "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" der Handlungsbereich B, also Operieren und Technologieeinsatz, sehr häufig. "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" enthält allerdings sowohl im Vergleich zur Gesamtzahl an Beispielen in "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" als auch im Vergleich zur Anzahl der Beispiele aus dem Handlungsbereich D im Buch "Mathematik anwenden HAK II" sehr viele Beispiele aus dem Handlungsbereich D⁷⁹.

Bezüglich der optischen Gestaltung im Buch "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" ist festzuhalten, dass Definitionen, vorgerechnete Beispiele, Beispiele zum selbstständigen Rechnen, Zusatzinformationen und die Erklärungen zum Technologieeinsatz jeweils mit eigenen Farben umrandet und hinterlegt sind. Bis auf die "Info+"-Kästen und die Bereiche in denen Angaben für Aufgaben zum eigenständigen Rechnen stehen, zieht sich durch das ganze Buch immer eine Randspalte. Im Kapitel "Matrizen" wird diese Randspalte allerdings sehr wenig genutzt. Es gibt einige Seiten auf denen in der Randspalte überhaupt nichts steht (z. B. Seiten 57-59). Bilder sind im Buch nicht allzu häufig vorhanden⁸⁰.

"Angewandte Mathematik@HAK 2" unterteilt das Kapitel "Matrizen" in die vier Unterkapitel "Matrizen – Rechteckige Zahlenanordnungen", "Produktionsprozesse – Gozintographen", "Lineare Gleichungssysteme und Matrizen" und "Input-Output-Modelle". Auf den letzten Seiten des Kapitels "Matrizen" folgen vermischte Aufgaben, eine Seite "Sprache der Mathematik" (hauptsächlich Typ-1-Aufgaben), danach wird das Thema Kryptologie kurz angeschnitten bevor mit einer eigenen Seite "Der Weg zur Reifeprüfung" (enthält alles was im Lehrplan in der Bildungs- und Lehraufgabe steht bis auf die linearen Gleichungssysteme) das Kapitel "Matrizen" abgeschlossen wird. Das Kapitel "Matrizen" beschränkt sich auf insgesamt 20 Seiten. Das

⁷⁹ Vgl. Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017), hier 29-68.

⁸⁰ Vgl. Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017), hier 29-68.

Buch umfasst 180 Seiten und ist somit das Kürzeste der drei verglichenen Schulbücher. Das gesamte Buch beruht auf einem Doppelseitenprinzip, d. h. meist sind auf der linken Seite neue Begriffe, Definitionen, Eingabehilfen für "GeoGebra" und "Ti-8x", Rechenregeln usw. und auf der rechten Seite Beispiele zum eigenständigen Rechnen. Es gibt auch ein paar vorgerechnete Beispiele, die meistens auf der linken Seite zu finden sind. Die jeweilige Schwierigkeit der Beispiele wird mithilfe von ein bis drei Unterstrichen unterhalb der Aufgabennummer angegeben und darunter befinden sich die Kompetenzbereiche (A, B, C, D), die die jeweiligen Aufgaben ansprechen sollen.⁸¹

Aus inhaltlicher Sicht ist "Angewandte Mathematik@HAK 2" gut auf den Lehrplan abgestimmt. Obwohl das Kapitel "Matrizen" in "Angewandte Mathematik@HAK 2" mit 20 Seiten nur halb so lang ist wie in den beiden anderen Schulbüchern, enthält es alle im Lehrplan verankerten Inhalte und hat dabei sogar noch zwei Seiten dem Thema "Kryptologie" gewidmet. Bevor mit den "vermischten Aufgaben" die Wiederholungsaufgaben beginnen, werden auf nur zwölf Seiten alle relevanten Inhalte gelehrt. Die Erklärungen zu Inhalten ohne Technologieeinsatz sind gut verständlich, da hierbei auch oft Farben gut eingesetzt werden, um die Verständlichkeit zu erhöhen. Ein inhaltlicher Nachteil von "Angewandte Mathematik@HAK 2" ist allerdings, dass die Eingaben für den Technologieeinsatz nur für "GeoGebra" und "Ti-8x" vorhanden sind und dies auch nur äußerst spärlich und somit vielleicht für Schülerinnen und Schüler nicht immer leicht verständlich. Durch das Doppelseitenprinzip kommen nicht zu viele Begriffe auf einmal vor wie es bei "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" war, sondern es werden wie bei "Mathematik anwenden HAK II" schrittweise neue Inhalte hinzugefügt, auch wenn die Unterkapitel "Produktionsprozesse – Gozintographen" und "Input-Output-Modelle" jeweils auf einer Doppelseite vollständig abgehandelt werden. Diese Inhalte sind aber trotzdem gut verständlich. "Angewandte Mathematik@HAK 2" liegt bezüglich der Anzahl der eingeführten Begriffe und Konzepte ungefähr in der Mitte zwischen den beiden anderen Schulbüchern. Im Gegensatz zu "Mathematik anwenden HAK II" vermeidet es nicht die Begriffe Vektor, Zeilenvektor, Spaltenvektor, Leontief-Inverse sowie transponierte Matrix, allerdings wird keine geometrische Interpretation von Rechenoperationen mit Vektoren oder das Skalarprodukt eingeführt wie es bei "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" der Fall war. Das Schulbuch "Angewandte Mathematik@HAK 2" bietet außerdem hin und wieder kleine Eselsbrücken wie z. B. "zuerst

⁸¹ Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), hier 29-48.

Zeilen, später Spalten". Ein wahres Alleinstellungsmerkmal von "Angewandte Mathematik@HAK 2" sind die zwei Aufgaben auf Englisch, die sich am Ende der sogenannten "vermischten Aufgaben" befinden. Überhaupt kann man die vermischten Aufgaben als eine Art Wiederholungskapitel betrachten, genau wie die Seite "Der Weg zur Reifeprüfung". Des Weiteren ist äußerst positiv zu bewerten, dass man sich bei vielen Aufgaben die Mühe gemacht hat, für Abwechslung zu sorgen: Es ist nicht immer von Rohstoffen 1-5, Zwischenprodukten 1-3 und Endprodukten 1-3 zu lesen, sondern wie beispielsweise bei Aufgabe 2.49: Die Endprodukte sind zwei Sorten Gugelhupf, die Zwischenprodukte sind heller und dunkler Teig und die Rohstoffe sind Eier, Mehl, Zucker usw. Insgesamt enthält das Kapitel "Matrizen" 63 Aufgaben, von denen aber nur fünf vorgerechnete Musterbeispiele sind. "Angewandte Mathematik@HAK 2" enthält somit fast gleich viele Aufgaben wie "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK", enthält aber mehr Aufgaben zum eigenständigen Rechnen der Schülerinnen und Schüler und das bei halb so vielen Seiten wie "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK". Der Handlungsbereich B ist in "Angewandte Mathematik@HAK 2" auch sehr dominant, wohingegen die Handlungsbereiche A, C und D untereinander relativ ausgeglichen in den Aufgaben vorkommen⁸².

Aus optischer Sicht trägt das Doppelseitenprinzip in "Angewandte Mathematik@HAK 2" sehr stark zur Übersichtlichkeit bei. Die dominierende Farbe ist grün, da nur Definitionen und Sätze rosa, Tipps und Hinweise blau sowie die Seite "Der Weg zur Reifeprüfung" teilweise orange sind und sonst alles in grün gehalten ist. Farben werden im Inhaltsverzeichnis schon gut eingesetzt, um die Inhalte für das dritte und das vierte Semester in jeweils eigenen Farben zu kennzeichnen. Bilder bzw. Abbildungen sind nicht allzu häufig, aber wenn sie vorkommen dienen sie meist dem Verständnis der Aufgabenstellung und nicht allein der Auflockerung⁸³.

Insgesamt gesehen muss man also sagen, dass die Frage nach dem am besten geeigneten Schulbuch für den eigenen Unterricht mit "Es kommt darauf an." zu beantworten ist. Wenn man den Fokus auf den Technologieeinsatz legt, was auch im Lehrplan stark hervorgehoben wird, dann ist das Schulbuch "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" wohl heranzuziehen. Auch wenn man den Schülerinnen und Schülern in der HAK möglichst viel über Matrizen beibringen will, ist "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" zu empfehlen. Möchte man sich aber auf die Inhalte

⁸² Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), hier 29-48.

⁸³ Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), hier 29-48. Für das Inhaltsverzeichnis siehe 5.

des Lehrplans beschränken oder besser gesagt darauf konzentrieren, so sind die beiden anderen Schulbücher besser geeignet. "Angewandte Mathematik@HAK 2" wirkt in diesem Bezug wie eine "Light-Version" von "Mathematik anwenden HAK II", da es weniger Beispiele beinhaltet und weniger Seiten dem Thema "Matrizen" widmet. Möchte man sich also auf die Inhalte des Lehrplans fokussieren und dabei diese beim Thema "Matrizen" möglichst viel üben (Aufgaben-Drill), so ist "Mathematik anwenden HAK II" die beste Wahl. Des Weiteren ist die zusammenfassende Mind-Map in "Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK" eine äußerst gute Idee. Dadurch, dass es in "Angewandte Mathematik@HAK 2" gut überlegte Beispiele gibt, die sich nicht auf Bezeichnungen wie "Rohstoffe 1-5" usw. beschränken, ist dieses Buch für die Schülerinnen und Schüler wohl etwas näher an ihrer eigenen Lebenswelt, was durchaus positiv zu bewerten ist. Es ist also nicht leicht, sich für ein Schulbuch bzw. eine Schulbuchreihe zu entscheiden und bei einer solchen Entscheidung sind viele verschiedene Aspekte zu betrachten. Es sei hier nochmals betont, dass im Rahmen der Analyse dieser drei Schulbücher bzw. der drei Schulbuchreihen nur Aufbau, Inhalte und Gestaltung zum Thema "Matrizen" bzw. "Matrizenrechnung" in der HAK betrachtet wurden, wo dieses Thema nur einen relativ kleinen Platz im fünfjährigen Lehrplan einnimmt. Trotzdem konnten große und kleine Unterschiede in den Schulbüchern festgestellt werden.

Vergleich der Lehrbücher für die humanberuflichen Schulen

Auch für die humanberuflichen Schulen werden die Schulbuchreihen derselben drei Verlage miteinander verglichen. Für den Österreichischen Bundesverlag (ÖBV) ist dies die Schulbuchreihe "Mathematik anwenden HUM I-V", für den E. Dorner Verlag die Schulbuchreihe "Angewandte Mathematik 1-4 HUM" ("Angewandte Mathematik 5 HUM" erscheint erst im Herbst 2020) und für den Veritas Verlag die Schulbuchreihe "Angewandte Mathematik@HUM 1-5".

Zu Beginn sei gleich festgehalten, dass – egal welche dieser drei Schulbuchreihen betrachtet wird – das Thema "Matrizen" bzw. "Matrizenrechnung" immer nur im Schulbuch für den zweiten Jahrgang vorkommt. Im Gegensatz zu den Lehrbüchern für die HAK gibt es somit in den Schulbüchern für die humanberuflichen Schulen keine Wiederholungskapitel bzw. Wiederholungsaufgaben und auch nichts Neues zu Matrizen im Schulbuch für den fünften Jahrgang. Dies ist etwas überraschend, da im Lehrplan für den fünften Jahrgang im insgesamt 9. Semester "Schulartenspezifische Anwendungen im Wirtschaftsbereich" für alle Arten von humanberuflichen Schulen vorgesehen sind (siehe vorheriges Kapitel). Außerdem ist es etwas merkwürdig, dass alle zweiten Teile der drei Schulbuchreihen auch für die Höheren Lehranstalten für Tourismus für den 2. Jahrgang approbiert sind, obwohl laut Lehrplan der Höheren Lehranstalten für Tourismus das Thema "Matrizen" erst im 3. Jahrgang im insgesamt 5. Semester vorgesehen ist, wie im Kapitel zu den österreichischen Lehrplänen hervorgehoben wurde.

Ein tiefgehender Vergleich der Lehrbücher der humanberuflichen Schulen ist nicht sinnvoll, da in allen drei Schulbüchern das Thema "Matrizen" jeweils genau gleich zu jenem Kapitel zu Matrizen in den jeweiligen HAK-Schulbüchern ist. Die einzigen Veränderungen sind die Seitenzahlen (nicht die Länge der Kapitel), da Matrizen in der HAK bereits für das insgesamt 3. Semester vorgesehen sind und für die humanberuflichen Schulen (meist) für das insgesamt 4. Semester. Eine weitere kleine Änderung betrifft nur die Schulbücher des ÖBV, da die Lehrbücher für die humanberuflichen Schulen farblich eher in Grün gehalten sind, wohingegen sie für die HAK in Türkis gehalten waren⁸⁴.

⁸⁴ Vgl. für die Lehrbücher der humanberuflichen Schulen:

Trotzdem kann man die Schulbücher mit dem Lehrplan für die humanberuflichen Schulen vergleichen. Der größte Unterschied zwischen der Matrizenrechnung in HAK und in humanberuflichen Schulen ist wohl, dass lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise sowie deren Lösung mithilfe von Umformung der Matrizen und Lösen mit Technologieunterstützung in den humanberuflichen Schulen nicht im Lehrplan vorkommen, in der HAK aber schon. Des Weiteren werden Gozintographen im Lehrplan der HAK explizit erwähnt, im Lehrplan der humanberuflichen Schulen kann man höchstens davon sprechen, dass sie mitgemeint sind, wenn von "einen Produktionsprozess ausgehend von Rohstoffen bis zu den Endprodukten grafisch darstellen und zugehörige Berechnungen mit Matrizen beschreiben und durchführen" gesprochen wird. Daher ist es etwas seltsam, dass auch in sämtlichen Lehrbüchern für die humanberuflichen Schulen dem Lösen von linearen Gleichungssystemen mithilfe von Matrizen ein eigenes Unterkapitel gewidmet ist. Nur das Schulbuch "Angewandte Mathematik@HUM 2" verweist bereits im Inhaltsverzeichnis (und dann später auf den entsprechenden Seiten) darauf, dass dieses Unterkapitel für die humanberuflichen Schulen als Erweiterungslehrstoffinhalt anzusehen ist. Die beiden anderen Schulbücher haben keine derartigen Verweise darauf, dass es sich bestenfalls um Erweiterungsstoff handelt⁸⁵.

Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon, Mathematik anwenden HUM II (Wien ²2016), hier 91-130.

Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Angewandte Mathematik 2 HUM (Wien ²2017), hier 147-186.

Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HUM 2 (Linz ³2018), hier 119-138.

⁸⁵ Vgl. Franz Pauer, Martina Scheirer-Weindorfer, Andreas Simon, Mathematik anwenden HUM II (Wien ²2016), hier 91-130.

Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Angewandte Mathematik 2 HUM (Wien ²2017), hier 147-186.

Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HUM 2 (Linz ³2018), hier 119-138 bzw. 5 für das Inhaltsverzeichnis.

Vergleich der Lehrbücher der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten

Für die Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten wird nur die Schulbuchreihe "Ingenieur-Mathematik 1-4" betrachtet und deren Inhalte zu Matrizen mit den Lehrplänen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten verglichen. Obwohl die Schulbuchreihe nur die Bücher 1 bis 4 beinhaltet, deckt sie alle fünf Jahrgänge ab, da "Ingenieur-Mathematik 4" für den vierten und den fünften Jahrgang ist.

Da im Lehrplan für den ersten Jahrgang der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (egal welcher Fachrichtung) nur vorgeschrieben ist, dass Schülerinnen und Schüler lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise angeben können müssen, nimmt die Matrizenrechnung im Schulbuch "Ingenieur-Mathematik 1" verständlicherweise auch nur wenig Platz ein. Die Matrizenrechnung kommt nur im Kapitel "lineare Gleichungssysteme" vor und ist dort auch eher eine Randerscheinung. Während sich das gesamte Kapitel "lineare Gleichungssysteme" über 29 Seiten erstreckt, nehmen die Erklärungen und Beispiele zu Matrizen insgesamt etwa drei Seiten davon ein. Es gibt zwei vorgerechnete Aufgaben, die Matrizen beinhalten, sowie fünf Aufgaben zum eigenständigen Rechnen mit Matrizen, wobei nur das Aufstellen eines Gleichungssystems mithilfe von Matrizen und Vektoren sowie das Umschreiben eines Systems von linearen Gleichungen in Matrizenschreibweise und umgekehrt gemacht werden. Es wird also in "Ingenieur-Mathematik 1" nichts über den Lehrplan hinausgehend gelehrt. Bezüglich der Verständlichkeit in "Ingenieur-Mathematik 1" ist anzumerken, dass man für lineare Gleichungen in Matrizenschreibweise Vektoren benötigt. Das Kapitel zur "Vektorrechnung" befindet sich im Schulbuch aber erst (direkt) nach dem Kapitel zu "linearen Gleichungssystemen", weshalb schon hier ein Vorgriff auf Vektoren gemacht werden muss. Es stellt sich die Frage, warum nicht einfach das Kapitel "Vektorrechnung" vor dem Kapitel "lineare Gleichungssysteme" im Buch gereiht ist. Natürlich kann jede Lehrperson selbst entscheiden, in welcher Reihenfolge die Kapitel abzuarbeiten sind, aber es wäre vielleicht besser, wenn zuerst das Kapitel "Vektorrechnung" gemacht würde und dann erst das Kapitel "lineare Gleichungssysteme", damit man sich diesen Vorgriff auf die völlig neuen noch unbekannten Vektoren spart⁸⁶.

⁸⁶ Vgl. Gerald Kaiser, Wolfgang Timischl, Ingenieur-Mathematik 1 (Wien 2017), hier 265-293.

Im Lehrplan für den zweiten Jahrgang der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (egal welcher Fachrichtung) findet man – wie bereits im vorangegangenen Kapitel klargemacht wurde – keine Inhalte zu Matrizen bzw. Matrizenrechnung. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass im Schulbuch "Ingenieur-Mathematik 2" keine Inhalte zu Matrizen zu finden sind⁸⁷.

Das Schulbuch "Ingenieur-Mathematik 3" beinhaltet im Vergleich zu den anderen Büchern dieser Reihe mit Abstand die meisten Inhalte zu Matrizen. In "Ingenieur-Mathematik 3" wird Matrizen ein eigenes Kapitel mit insgesamt 31 Seiten gewidmet. Dieses Kapitel unterteilt sich in die Unterkapitel "Definitionen", "Rechnen mit Matrizen" und "Anwendungen", wobei das letzte Kapitel mehr Platz einnimmt als die beiden anderen Kapitel zusammen. Das erste Unterkapitel hat nur drei Seiten, die fast nur Erklärungen, Definitionen und vorgerechnete Beispiele beinhalten und ein Beispiel (bzw. fünf wenn man sie in ihrer Vielfachheit mit a-e zählt) zum eigenständigen Rechnen. Dieses erste Unterkapitel fasst die wichtigsten Begriffe (Definition einer Matrix, Gleichheit von Matrizen, Einheitsmatrix und transponierte Matrix) zusammen und ist eine Mischung aus ein bisschen Wiederholung von den in "Ingenieur-Mathematik 1" bereits gelehrt Begriffen und ein paar neuen Begriffen. Das zweite Unterkapitel beinhaltet zunächst sechseinhalb Seiten Erklärungen, Definitionen und vorgerechnete Beispiele und danach kommen 19 Beispiele (mit unterschiedlich vielen Unterpunkten) zum eigenständigen Rechnen. Es werden Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen, die Gültigkeit von Rechengesetzen sowie das Berechnen der Inversen einer 2×2 -Matrix und der Determinante von 2×2 - und 3×3 -Matrizen erklärt. Hierbei sei erwähnt, dass die Multiplikation von Matrizen genau gleich wie in den Schulbüchern für HAK und humanberufliche Schulen erklärt wird, also als Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors mit dem j-ten Spaltenvektor um das Element mit Index "ij" zu bekommen, was – wie bereits geschrieben – für Schülerinnen und Schüler vermutlich nicht so leicht verständlich ist. Das Unterkapitel zu den Anwendungen der Matrizenrechnung beginnt mit dem bereits vertrauten Lösen eines linearen Gleichungssystems in Matrizenschreibweise, wobei inverse Matrizen ab der Größe 3×3 nur mithilfe von Technologieinsatz zu berechnen sind. Die zweite Anwendung sind ein- und zweistufige Produktionen, bei denen als Angabe stets Tabellen und Gozintographen zu finden sind. Diese zweite Anwendung ist eigentlich auch im Schulbuch dieses Verlags für die zweiten Jahrgänge in HAK und humanberuflichen Schulen zu finden, nur ist diese Anwendung dort etwas ausführlicher (mehr vorgerechnete Beispiele und mehr Beispiele zum selbstständigen Rechnen). Die meisten Beispiele in diesem

⁸⁷ Vgl. Gerald Kaiser, Wolfgang Timischl, Ingenieur-Mathematik 2 (Wien 2016).

Unterkapitel von "Ingenieur-Mathematik 3" sind genau die gleichen (auch mit denselben Zahlen) wie in den Schulbüchern für die anderen beiden besprochenen Schularten, wenn auch teilweise grafisch etwas anders aufgearbeitete Tabellen und Gozintographen (aber mit denselben Zahlen und Aufgabenstellungen) zu finden sind. Das dritte und letzte Unterkapitel zu den Anwendungen in "Ingenieur-Mathematik 3" befasst sich mit Transformationen in der Computergrafik und beinhaltet auch homogene Koordinaten. Hierbei sind wieder zu Beginn des Unterkapitels sechseinhalb Seiten nur mit Erklärungen und vorgerechneten Beispielen zu finden und anschließend 14 Aufgaben (teilweise mit Unterpunkten). Insgesamt gesehen sind im Kapitel "Matrizen" in "Ingenieur-Mathematik 3" von 69 Aufgaben 45 zum selbstständigen Rechnen. Die meisten Aufgaben sind im Handlungsbereich B angesiedelt, was aber nicht verwundert, da auch im Lehrplan dem Rechnen mit Matrizen viel Platz eingeräumt wird. Bezüglich der anderen Handlungsbereiche sind die Bereiche A und C quasi mittelhäufig vertreten, aber auch der Handlungsbereich D kommt nicht zu kurz⁸⁸. Der Aufbau des gesamten Kapitels zu Matrizen in "Ingenieur-Mathematik 3" ist logisch nachvollziehbar. Das Unterkapitel zu den Anwendungen hat mit eigentlich lediglich drei Anwendungen etwas Luft nach oben, da im Lehrplan für die Fachrichtungen mit zusätzlichen Inhalten zur Matrizenrechnung der ersten Ausprägungsart "Anwendungen aus der Fachtheorie" gefordert werden. Es hätten beispielsweise Anwendungen aus der Biomathematik oder der Wirtschaft eingeflochten werden können.

In "Ingenieur-Mathematik 4" ist der einzige Inhalt zu Matrizen auf einem Drittel einer Seite in der sogenannten "Formelsammlung" am Ende des Buches eine Zusammenfassung des Themas Matrizen (Inverse einer 2×2 -Matrix und lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise)⁸⁹.

Die optische Gestaltung in der Schulbuchreihe "Ingenieur-Mathematik 1-4" gleicht fast derjenigen für HAK und humanberufliche Schulen desselben Verlags, auch wenn Tabellen manchmal etwas anders grafisch aufbereitet sind. Der einzige große Unterschied ist, dass es in "Ingenieur-Mathematik 1-4" keine Randspalten gibt, wodurch diese Buchreihe in Bezug auf die Maße 3,5cm bei Länge und Breite jeweils einspart.

Insgesamt gesehen sind also die meisten Inhalte zu Matrizen in der Schulbuchreihe "Ingenieur-Mathematik" im Buch für den dritten Jahrgang angesiedelt. Dies liegt wohl am Lehrplan, da manche Fachrichtungen der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten bereits im

⁸⁸ Vgl. Gerald Kaiser, Wolfgang Timischl, Ingenieur-Mathematik 3 (Wien 2017), hier 151-181.

⁸⁹ Vgl. Gerald Kaiser, Wolfgang Timischl, Ingenieur-Mathematik 4 (Wien 2018), hier 381.

3. Jahrgang im insgesamt 5. Semester intensiv mit Matrizen arbeiten, obwohl die meisten Fachrichtungen dieselben Inhalte erst im 4. Jahrgang im insgesamt 8. Semester vorgesehen haben (siehe vorheriges Kapitel). Der Aufbau ist durch die ganze Schulbuchreihe hindurch in Bezug auf das Thema Matrizen logisch nachvollziehbar. Im Gegensatz zu den Schulbüchern für HAK und humanberufliche Schulen desselben Verlags werden in der Schulbuchreihe "Ingenieur-Mathematik" keine über den Lehrplan hinausgehenden Inhalte gelehrt. Der einzige große Kritikpunkt ist, dass mit Bezugnahme auf den Lehrplan – wie bereits erwähnt – mehr verschiedene Anwendungen bzw. Anwendungsbereiche wünschenswert wären, welche man vielleicht auch ein bisschen auf die verschiedenen Fachrichtungen in den Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten abstimmen könnte.

Anwendungen der Matrizenrechnung

Es ist klar, dass hier nicht alle Anwendungen der Matrizenrechnung vorgestellt werden können. Der Fokus liegt auf einfachen Anwendungen, die auch für Schülerinnen und Schüler verständlich sein sollen bzw. sich in den vom Lehrplan vorgeschriebenen Lehrstoff als Anwendungen einbauen lassen. Abgesehen von ein paar Begriffen und dem Konzept von Eigenwerten und Eigenvektoren ist kein über den Schulstoff hinausgehendes Wissen für die hier angeführten Anwendungen notwendig. Da Eigenwerte und Eigenvektoren einerseits zwar in ihrer reinen Definition für Schülerinnen und Schüler etwas komisch wirken mögen, werden sie und ihre Bedeutung andererseits anhand der hier angeführten Anwendungen verständlich(er) gemacht. Auch wenn Eigenwerte und Eigenvektoren in keinem der Lehrpläne explizit angesprochen werden, so kann man sie zum Beispiel in Zusatzeinheiten eines "freien Wahlfaches Mathematik" lehren und vor allem anhand ihrer Anwendungen als bedeutend charakterisieren.

Insgesamt sind die hier vorgestellten Anwendungen, die zum Teil aus den bisher besprochenen Schulbüchern stammen, dazu gedacht, in den eigenen Unterricht eingebaut werden zu können, sofern es die Zeit zulässt.

Die ausgewählten Anwendungen sollen mitunter auch zeigen, dass Matrizenrechnung in vielen Bereichen des Lebens angewandt werden kann und keinerlei ein rein innermathematisches Konzept ist.

Spieltheorie⁹⁰

In der Spieltheorie können Matrizen verwendet werden, um Sachverhalte einfach darzustellen. Hierzu sei als Beispiel das bekannte Spiel "Schere, Stein, Papier" mithilfe einer sogenannten Auszahlungsmatrix für Spieler A (unter Annahme, dass ein Sieg einen Gewinn von "1" bringt und eine Niederlage einen Verlust von "1" bedeutet) dargestellt:

Auszahlungsmatrix für Spieler A		Spieler B
		Schere Stein Papier
Spieler A	Schere	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
	Stein	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
	Papier	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Die Wahl von Spieler A entscheidet, welche Zeile der Auszahlungsmatrix betrachtet werden muss und die Wahl von Spieler B entscheidet, welche Spalte der Auszahlungsmatrix betrachtet werden muss. Dies heißt beispielsweise, wenn Spieler A "Schere" und Spieler B "Papier" nimmt, dann gewinnt Spieler A "1" (einen Euro, einen Punkt, einen Schokoladeriegel, eine Einheit,...). Um die Auszahlungsmatrix für Spieler B zu erhalten, muss man obige Matrix mit dem Skalar -1 multiplizieren:

Auszahlungsmatrix für Spieler B		Spieler B
		Schere Stein Papier
Spieler A	Schere	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
	Stein	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Papier	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Hierbei entscheidet wieder die Wahl von Spieler A, welche Zeile der Auszahlungsmatrix zu betrachten ist und die Wahl von Spieler B, welche Spalte der Auszahlungsmatrix zu betrachten ist. Um bei obiger Auswahl zu bleiben, also Spieler A wählt "Schere" und Spieler B "Papier", bedeutet dies aus Sicht von Spieler B einen Verlust von "1".

⁹⁰ Vgl. Markus Wessler, Entscheidungstheorie. Von der klassischen Spieltheorie zur Anwendung kooperativer Konzepte (Wiesbaden 2012), hier 18f. sowie 24-26. **Im Folgenden zit. als Wessler**, Entscheidungstheorie.

Nun kann man noch eine kleine, auch relativ bekannte Erweiterung von "Schere, Stein, Papier" analysieren, nämlich mittels der zusätzlichen Möglichkeit "Brunnen". Die Auszahlungsmatrix für Spieler A sähe dann wie folgt aus:

Auszahlungsmatrix für Spieler A		Spieler B
		Schere Stein Papier Brunnen
Spieler A	Schere	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
	Stein	
	Papier	
	Brunnen	

Die Auszahlungsmatrix für Spieler B wäre wieder die Multiplikation dieser Matrix mit dem Skalar -1 . Man kann nun anhand dieser Auszahlungsmatrix das Spiel mit der Erweiterung "Brunnen" erneut analysieren und stellt dabei fest, dass – unabhängig davon was Spieler B wählt – es für Spieler A stets besser oder zumindest gleich gut ist "Brunnen" anstatt "Stein" zu wählen. Somit wäre es für Spieler A besser, wenn er Stein nie wieder wählt. Auch für Spieler B wäre es aus dessen Sicht besser, nie wieder Stein zu wählen. Wenn nun beide sich somit quasi einig sind, nie wieder Stein zu wählen, käme man zum Spiel "Schere, Brunnen, Papier" mit folgender Auszahlungsmatrix für Spieler A:

Auszahlungsmatrix für Spieler A		Spieler B
		Schere Brunnen Papier
Spieler A	Schere	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
	Brunnen	
	Papier	

Diese Matrix sollte schon vertraut vorkommen, da es genau die gleiche Matrix wie zum Originalspiel "Schere, Stein, Papier" ist.

Nährwertangaben⁹¹

Die Multiplikation von Matrizen kommt in vielen verschiedenen Bereichen vor. Hier sei beispielhaft die Berechnung von Nährwertangaben vorgestellt:

Eine Unternehmerin produziert verschiedene Trockenfrüchtemischungen. In den beiden nachfolgenden Tabellen sind einerseits die Nährwertangaben der einzelnen Zutaten und andererseits die Zusammensetzung der drei produzierten Mischungen angegeben:

Tabelle 1	Cranberries	Marillen	Kiwis	Datteln
Eiweiß (in g/100g)	0,6	5,3	4,1	2,0
Kohlenhydrate (in g/100g)	80,5	50,5	44,3	66,1
Fett (in g/100g)	0,5	0,6	2,6	0,5
Energie (in g/100g)	339	249	251	285

Tabelle 2	Mischung 1	Mischung 2	Mischung 3
Cranberries (in %)	10	0	25
Marillen (in %)	60	40	25
Kiwis (in %)	10	30	25
Datteln (in %)	20	30	25

Es sollen die Nährwertangaben der drei Mischungen berechnet werden, indem man die Multiplikation der entstehenden Matrizen durchführt:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 5.3 & 4.1 & 2.0 \\ 80.5 & 50.5 & 44.3 & 66.1 \\ 0.5 & 0.6 & 2.6 & 0.5 \\ 339 & 249 & 251 & 285 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.25 \\ 0.6 & 0.4 & 0.25 \\ 0.1 & 0.3 & 0.25 \\ 0.2 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.05 & 3.95 & 3 \\ 56 & 53.32 & 60.35 \\ 0.77 & 1.17 & 1.05 \\ 265.4 & 260.4 & 281 \end{pmatrix}$$

⁹¹ Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), hier 32.

Man kann nun das Ergebnis wieder in eine Tabelle umwandeln und sich überlegen, was die einzelnen Einträge der Matrix bedeuten:

Tabelle 3	Mischung 1	Mischung 2	Mischung 3
Eiweiß (in g/100g)	4,05	3,95	3
Kohlenhydrate (in g/100g)	56	53,32	60,35
Fett (in g/100g)	0,77	1,17	1,05
Energie (in g/100g)	265,4	260,4	281

Beispielsweise bedeutet der Eintrag 53,32, dass in 100 Gramm der Mischung 2 genau 53,32 Gramm Kohlenhydrate sind.

Flugverbindungen⁹²

Matrizenrechnung kann auch beim Thema Flugverbindungen angewendet werden. Angenommen es gibt drei Länder A, B und C und in Land A gibt es die beiden Flughäfen a_1 und a_2 , in Land B gibt es die vier Flughäfen b_1 , b_2 , b_3 und b_4 und in Land C gibt es die drei Flughäfen c_1 , c_2 und c_3 . Diese Flughäfen sind durch diverse tägliche Direktflüge direkt oder über Umsteigen miteinander verbunden. Man kann nun die täglichen Direktflüge von einem Flughafen in einem Land zu einem Flughafen in einem anderen Land mithilfe von "Verbindungsmatrizen" angeben. Die Matrix V_{AB} gibt die täglichen Direktflüge von Flughäfen in Land A nach Flughäfen in Land B an, die Matrix V_{BC} jene täglichen Direktflüge von Land B nach Land C und die Matrix V_{AC} jene täglichen Direktflüge von Land A nach Land C:

V_{AB}	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	0	1	0
a_2	1	1	3	2

Hierbei stehen die Abflugs-Flughäfen (d. h. jene aus Land A) in den Zeilen, also in der ersten Zeile die täglichen Flüge, die von Flughafen a_1 abfliegen und in der zweiten Zeile die täglichen Flüge, die von Flughafen a_2 abfliegen. In den Spalten stehen die Ankunftsflughäfen (d. h. jene in Land B), also in der ersten Spalte die Flüge, die täglich in Flughafen b_1 landen, in der zweiten Spalte die Flüge, die täglich in Flughafen b_2 landen usw. Somit bedeutet der Eintrag "3" in der zweiten Zeile und dritten Spalte von V_{AB} , dass es täglich drei Direktflüge von Flughafen a_2 nach Flughafen b_3 gibt.

Die Matrizen V_{BC} (Abflug Land B in den Zeilen, Ankunft Land C in den Spalten) und V_{AC} (Abflug Land A in den Zeilen, Ankunft Land C in den Spalten) sehen wie folgt aus und sind analog zu erklären:

V_{BC}	c_1	c_2	c_3
b_1	3	0	0
b_2	0	1	0
b_3	1	2	4
b_4	0	1	0

⁹² Vgl. Gerald Kaiser, Wolfgang Timischl, Ingenieur-Mathematik 3 (Wien 2017), 157.

V_{AC}	c_1	c_2	c_3
a_1	1	0	0
a_2	0	0	1

Möchte man nun beispielsweise wissen, wie viele tägliche Flüge es von Land A nach Land C gibt, so kann man einfach die Matrizen V_{AB} und V_{BC} miteinander multiplizieren (entspricht den täglichen Flügen mit einem Zwischenstopp in Land B) und dann die täglichen Direktflüge von Land A nach Land C addieren, d. h. die Matrix V_{AC} addieren:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Matrix kann man nun ablesen, dass es beispielsweise täglich acht Flüge von Flughafen a_1 nach Flughafen c_1 gibt oder täglich 13 Flüge von Flughafen a_2 nach Flughafen c_3 .

Es handelt sich hier um ein vereinfachtes Modell. Es ist klar, dass man sich innerhalb eines Tages wohl nicht immer aussuchen kann, mit welchem Flug man den Ort wechselt. Man muss eventuell auch eine Übernachtung einplanen, wenn man mit einem Flugzeug von Land A über Land B nach Land C fliegt.

In der Computergrafik ist es oft nötig, die Ansicht von Figuren im $\mathbb{R}^2$ oder im $\mathbb{R}^3$ zu verändern. Man denke beispielsweise an diverse Videospiele, bei denen man die Ansicht beliebig drehen kann. Es gibt verschiedene Arten der Veränderung der Ansicht. Hierzu zählen unter anderem Drehungen, Spiegelungen, Stauchungen, Streckungen und Projektionen von Figuren. Diese unterschiedlichen Arten kann man mit einem übergeordneten Begriff zusammenfassen, nämlich "Transformationen". Es ist aber nicht unbedingt notwendig, stets das ganze Objekt einer Transformation zu unterziehen. Will man zum Beispiel ein Dreieck drehen, so muss man nur dessen Eckpunkte drehen. Im Folgenden seien die mit "~" gekennzeichneten Objekte (Punkte, Koordinaten usw.) die bereits transformierten Objekte bzw. die Koordinaten dieser bereits transformierten Objekte.

Für die Spiegelung eines Punktes im $\mathbb{R}^2$ an der x-Achse muss man sich zunächst überlegen, wie diese Spiegelung seine Koordinaten verändert: $\tilde{x} = x, \tilde{y} = -y$. Dies kann man zunächst in ein lineares Gleichungssystem schreiben:

$$I: \tilde{x} = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$

$$II: \tilde{y} = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$

Dieses Gleichungssystem kann man aber auch gleich in Matrizenschreibweise schreiben:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Somit ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ jene Matrix, die den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ an der x-Achse spiegelt.

⁹³ Vgl. Gerald Kaiser, Wolfgang Timischl, Ingenieur-Mathematik 3 (Wien 2017), 172-181. Einige Sätze sind im Schulbuch nicht vollständig. Es fehlen oft einzelne Worte und dadurch ergeben sich unvollständige Sätze.

Möchte man einen Punkt P im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ im positiven Drehsinn um den Koordinatenursprung drehen, so steht zu Beginn der Aufgabe die Betrachtung von P und $\tilde{P}$ in Polarkoordinaten an:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \varphi) \\ \sin(\alpha + \varphi) \end{pmatrix}$$

Nun kann man folgende Summensätze für Sinus und Cosinus anwenden:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \varphi) &= \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \alpha \cdot \sin \varphi \\ \sin(\alpha + \varphi) &= \sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Dies führt zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$I: \tilde{x} = r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi$$

$$II: \tilde{y} = r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi = y \cdot \cos \varphi + x \cdot \sin \varphi = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi$$

Jetzt kann man dies wieder in Matrizenschreibweise formulieren:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Matrix $T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ wird als Drehmatrix für eine Drehung des Punktes $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet.

Möchte man nun ein Dreieck mit den Punkten $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ um 90° im Gegenuhrzeigersinn drehen, so muss man – wie oben bereits erwähnt – nur dessen Eckpunkte um 90° drehen. Zuerst berechnet man die Transformationsmatrix T :

$$T = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann kann man die Koordinaten der gedrehten Punkte berechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das um 90° gedrehte Dreieck hat somit die Koordinaten $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\tilde{C} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Möchte man obige Drehung wieder rückgängig machen, so muss man nur die Inverse berechnen:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\tilde{A}: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \\ \tilde{B}: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = B \\ \tilde{C}: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = C\end{aligned}$$

Es gibt aber auch noch andere Transformationen wie zum Beispiel den Zoom im $\mathbb{R}^2$ mit dem Koordinatenursprung als Streckungszentrum: Beide Koordinaten eines Punktes werden mit demselben Streckungsfaktor $s > 0$ multipliziert: $\tilde{x} = s \cdot x$, $\tilde{y} = s \cdot y$ oder in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot x \\ s \cdot y \end{pmatrix}$$

Damit ist die Matrix $T = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ die Transformationsmatrix für das Zoomen. Ist $0 < s < 1$, dann wird die betrachtete Figur kleiner ("hinauszoomen"), ist $s > 1$, so wird die betrachtete Figur größer ("hineinzoomen").

Eine zum Zoom ähnliche Transformation ist die Streckung im $\mathbb{R}^2$ mit dem Koordinatenursprung als Streckungszentrum. Der Unterschied zur Transformation Zoom ist, dass normalerweise nicht beide Koordinaten eines Punktes mit demselben Faktor gestreckt bzw. gestaucht werden. In x-Richtung wird mit dem Faktor s_x und in y-Richtung mit dem Faktor s_y gestreckt bzw. gestaucht, d. h. $\tilde{x} = s_x \cdot x$ und $\tilde{y} = s_y \cdot y$. Die zugehörige Transformationsmatrix T sieht wie folgt aus:

$$T = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}$$

Natürlich kann man auch mehrere Transformationen hintereinander ausführen. Möchte man beispielsweise das Quadrat mit den Eckpunkten $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zuerst in x-Richtung um den Faktor 2 strecken und danach um 60° gegen den Uhrzeigersinn drehen, so ist es besser, wenn man zuerst die beiden Transformationsmatrizen berechnet und dann diese miteinander multipliziert:

Streckung in x-Richtung um den Faktor 2: $T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dann Drehung um 60° gegen den Uhrzeigersinn: $T_2 = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ganz einfach berechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \\ \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1.73 \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.13 \\ 2.23 \end{pmatrix} \\ \tilde{D} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.87 \\ 0.5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Will man nun zuerst um 60° drehen und danach in x-Richtung um den Faktor 2 strecken, so sieht die Transformationsmatrix wie folgt aus⁹⁴:

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ganz einfach berechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \\ \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0.87 \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.73 \\ 1.37 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

⁹⁴ Im Schulbuch wurden hierbei die Indizes der beiden Transformationsmatrizen vertauscht, was für Verwirrung sorgen kann.

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.73 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

An diesem Beispiel kann man auch sehen, dass die Multiplikation zweier Matrizen nicht kommutativ ist, da verschiedene Werte für die transformierten Eckpunkte herauskommen. Dies sollte aber auch aus der Anschauung klar sein, da es sehr wohl einen Unterschied macht, ob man zuerst streckt und dann dreht oder umgekehrt.

Eine weitere wichtige Transformation im $\mathbb{R}^2$ ist die Translation, also die Verschiebung. Leider kann die Translation im Gegensatz zu allen bisherigen Transformationen nicht als Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor geschrieben werden. Als Beispiel diene ein Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, der um a Einheiten in positiver x -Richtung und um b Einheiten in positiver y -Richtung verschoben werden soll. Für die Koordinaten des transformierten Punktes gilt dann:

$$I: \tilde{x} = x + a = 1 \cdot x + 0 \cdot y + a$$

$$II: \tilde{y} = y + b = 0 \cdot x + 1 \cdot y + b$$

Möchte man dieses lineare Gleichungssystem in Matrizenschreibweise schreiben, so sähe es wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Man kann sich aber mithilfe von sogenannten homogenen Koordinaten helfen: Hierzu werden die Koordinaten eines Punktes in der Ebene mit einer dritten Koordinate mit dem Wert 1 ergänzt. Die Punkte P bzw. $\tilde{P}$ schreiben sich somit wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die derart um eine dritte Koordinate erweiterten kartesischen Koordinaten werden als homogene Koordinaten von P bzw. $\tilde{P}$ bezeichnet. Die oben beschriebene Translation lässt sich dadurch wieder als Matrix-Vektor-Produkt schreiben:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die dritte Koordinate hat hier für das Ablesen der kartesischen Koordinaten von $\tilde{P}$ keine Bedeutung.

Alle bisher behandelten Transformationen können ebenfalls für das Rechnen mit homogenen Koordinaten erweitert werden, indem man eine dritte Zeile und eine dritte Spalte beifügt, für die die Einträge jeweils 0, 0, 1 sind:

z. B. Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$ mit homogenen Koordinaten: $T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Somit kann man alle Transformationen, die hintereinander ausgeführt werden sollen, ganz einfach miteinander verknüpfen.

Als Beispiel sei hier wieder das obige Quadrat mit den Eckpunkten

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, welches nun zuerst um 2 Einheiten in die positive y-Richtung verschoben und danach in positiver x-Richtung um den Faktor 3 gestreckt werden soll. Die Transformationsmatrix mit homogenen Koordinaten berechnet sich wie folgt:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für den Punkt $\tilde{A}$ ergibt sich:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also gilt $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ da die dritte Koordinate, also die 1 keine Bedeutung für das Ablesen hat, wie bereits vorhin angemerkt.

Man kann nun aber auch alle transformierten Punkte auf einmal berechnen, indem man die homogenen Koordinaten der ursprünglichen Punkte als Spalten einer Matrix schreibt und so alle auf einmal transformiert:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich die Koordinaten $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vertauscht man hierbei die beiden Transformationen, also streckt zuerst in positiver x-Richtung um den Faktor 3 und verschiebt danach in positiver y-Richtung um 2 Einheiten, so erhält man dieselbe Transformationsmatrix (und somit schlussendlich auch dieselben transformierten Koordinaten):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation ergibt hier also auch bei Vertauschung der beiden Matrizen dasselbe, was bei Matrizen im Allgemeinen nicht gilt. Aus geometrischer Sicht spielt es keine Rolle, ob man zuerst verschiebt und dann streckt oder umgekehrt.

Im $\mathbb{R}^3$ sind Transformationen aus mathematischer Sicht nicht anders zu behandeln als in der Ebene, außer dass eine dritte Koordinate bzw. bei homogenen Koordinaten eine vierte Koordinate hinzukommt. Als Beispiele dienen die folgenden Transformationen:

Rotation um die x-Achse um den Winkel φ (ohne homogene Koordinaten):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der xy-Ebene (ohne homogene Koordinaten): $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Populationsentwicklung⁹⁵

Bei vielen Tierarten tragen die Jungtiere nicht gleich im Jahr nach ihrer Geburt zur Arterhaltung bei, sondern erst viel später, so zum Beispiel auch bei den Silbermöwen. Ein solcher Sachverhalt lässt sich wie folgt beschreiben:

50 % der Jungtiere sind im folgenden Jahr immer noch Jungtiere. 30 % der Jungtiere sind im folgenden Jahr erwachsen und können somit für Nachwuchs sorgen. 80 % der erwachsenen Tiere sind im Folgejahr noch am Leben. Die heurige Anzahl an erwachsenen Tieren sorgt im Folgejahr für die 1,2-fache Menge an Jungtieren, d. h. zum Beispiel 100 erwachsene Tiere im ersten Jahr sorgen für 120 neue Jungtiere im nächsten Jahr.

Diesen Sachverhalt kann man in eine – nach dem britischen Ökologen P. H. Leslie benannte – Matrix $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$ schreiben. Nimmt man an, dass es im aktuellen Jahr 50 Jungtiere und 100 erwachsene Tiere gibt, kann man dies als Spaltenvektor schreiben und mit der Matrix P multiplizieren: $\begin{pmatrix} 0.5 & 1.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 \\ 95 \end{pmatrix}$, wonach die Anzahl der Jungtiere im Folgejahr 145 und die Anzahl der erwachsenen Tiere im Folgejahr 95 beträgt. Man kann aber auch aus aktuellen Zahlen die Anzahlen aus dem vorangegangenen Jahr berechnen, indem man folgenden Ansatz macht: $\begin{pmatrix} 0.5 & 1.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}$ und dies löst. Man könnte die inverse Matrix berechnen und von links multiplizieren: Die inverse Matrix wäre $P^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ -7.5 & 12.5 \end{pmatrix}$ und somit ergäbe sich $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -30 \\ -7.5 & 12.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2000 \\ 875 \end{pmatrix}$, also keine sinnvolle Lösung, weshalb man sich fragt, warum in diesem Schulbuch das Beispiel mit diesen Zahlen gewählt wurde.

⁹⁵ Vgl. Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017), 55.

Hill-Chiffre⁹⁶

Bereits in der Antike haben Menschen geheime Botschaften an andere Menschen übermittelt. Lange Zeit über hat man Texte per Hand chiffriert und dechiffriert bis ungefähr ab der Zeit des Ersten Weltkriegs Maschinen dafür erfunden und gebaut wurden. Heutzutage verwendet man dafür Computer. Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine Nachricht zu verschlüsseln, hier sei lediglich die Hill-Chiffre vorgestellt, da sie auf dem Rechnen mit Matrizen basiert.

Jeder Buchstabe des Klartexts muss zuerst durch eine Zahl ersetzt werden, wie zum Beispiel folgendermaßen: Der Buchstabe "A" wird durch die Zahl "0" ersetzt, "B" durch "1", ..., "Z" durch "25". Da die verwendeten Zahlen von 0 bis 25 gehen, muss man modulo 26 rechnen.

Der Vorgang soll nun anhand eines Beispiels erklärt werden. Man möchte das Wort "AFFE" verschlüsseln. Anhand der Zuordnung von gerade eben wird daraus 0 5 5 4. Als Schlüssel nimmt man eine invertierbare $n \times n$ -Matrix, beispielsweise $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Die Zahlen des Klartexts unterteilt man nun in Blöcke der Länge n und schreibt diese als Spaltenvektoren, also hier im Beispiel als $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zum Verschlüsseln multipliziert man diese Vektoren mit der Schlüsselmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ sowie } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 37 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

Die so erhaltene Zahlenreihe 5 15 14 11 wird wieder in Buchstaben umgewandelt: FPOL.

Der entgegengesetzte Vorgang, also das Entschlüsseln sei am selben Beispiel erklärt. Man erhält den Geheimtext FPOL und wandelt diesen zunächst wieder in Zahlen um, also in

⁹⁶ Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), 46f. Beim Entschlüsseln wurde im Buch ein Fehler begangen: Die Multiplikation der Inversen der Schlüsselmatrix mit dem zweiten Vektor, also dem Vektor $\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$ ergibt im Buch das Gleiche wie die Multiplikation der Inversen der Schlüsselmatrix mit dem ersten Vektor, also den Vektor $\begin{pmatrix} 390 \\ 135 \end{pmatrix}$ der allerdings nach Rechnung modulo 26 im Schulbuch den korrekten Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ergibt, was modulo 26 falsch gerechnet wäre. Der in dieser Arbeit angegebene Vektor $\begin{pmatrix} 317 \\ 316 \end{pmatrix}$ ist der korrekte Vektor nach Multiplikation der Inversen der Schlüsselmatrix mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$.

5 15 14 11. Man wandelt dies wieder in Spaltenvektoren der Länge n um: $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$. Zum Entschlüsseln muss man nun die Inverse der Schlüsselmatrix berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 21 & 2 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

Nun multipliziert man die Inverse mit den Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 21 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390 \\ 135 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \pmod{26} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 21 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 317 \\ 316 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \pmod{26}$$

Das Ergebnis ist nun wieder die ursprüngliche Zahlenreihe 0 5 5 4 bzw. in Klartext das Wort AFFE.

Zur Sicherheit der Hill-Chiffre ist anzumerken, dass im angegebenen Beispiel der Buchstabe "F" aus dem Klartext auf zwei verschiedene Buchstaben abgebildet wurde (einmal "P" und einmal "O"). Diese Eigenschaft macht die Hill-Chiffre sehr sicher gegenüber Angriffen mit Mustersuche und Häufigkeitsanalysen. Wenn allerdings ein Angreifer sowohl den vollständigen Geheimtext als auch einen Teil des Klartexts kennt, so kann er versuchen mithilfe eines linearen Gleichungssystems die Schlüsselmatrix zu berechnen.

Flächen- und Volumsberechnungen⁹⁷

Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$, die nicht parallel sind und daher ein Parallelogramm P aufspannen. Dann kann man den Flächeninhalt dieses Parallelogramms mithilfe der Determinante der Matrix A mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Spalten berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det A| = \text{Flächeninhalt von } P.$$

Um dies nachzurechnen schreibe man die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Polarkoordinaten:

$$\vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \vec{b} = s \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Anschließend berechnet man die Determinante der Matrix A:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & s \cdot \cos(\psi) \\ r \cdot \sin(\varphi) & s \cdot \sin(\psi) \end{vmatrix} \\ &= r \cdot \cos(\varphi) \cdot s \cdot \sin(\psi) - r \cdot \sin(\varphi) \cdot s \cdot \cos(\psi) \\ &= r \cdot s \cdot \sin(\psi - \varphi) \end{aligned}$$

Hierbei wurde ein Additionstheorem für die Sinus-Funktion verwendet:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

Zurück zur Flächenberechnung: Der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist entweder $\psi - \varphi$ oder $-(\psi - \varphi)$. Nimmt man an, dass die Grundlinie des Parallelogramms durch den Vektor $\vec{a}$ gegeben ist und die Seitenlinie durch den Vektor $\vec{b}$, so kann man $s \cdot |\sin(\psi - \varphi)|$ als die Höhe des Parallelogramms P sehen. Nach der Flächenformel für das Parallelogramm (Grundlinie mal Höhe) ergibt sich:

⁹⁷ Vgl. Laurenz Göllmann, Reinhold Hübl, Susan Pulham, Stefan Ritter, Henning Schon, Karlheinz Schöffler, Ursula Voß, Georg Vossen, Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden. Band 1: Vorkurs, Analysis in einer Variablen, Lineare Algebra, Statistik (Berlin/Heidelberg 2017), hier 320-322. **Im Folgenden zit. als** Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schöffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure.

$$\text{Flächeninhalt von } P = r \cdot s \cdot |\sin(\psi - \varphi)| = |\det A|$$

Setzt man nun $(\psi - \varphi) = \alpha$, wobei $\alpha \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sein soll, wird obige Formel zu $|\det A| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$. Denkt man nun an die Formel für die Berechnung des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2 = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\sin \alpha)^2 \\ \Leftrightarrow (\det A)^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\sin \alpha)^2 + |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2 \\ \Leftrightarrow (\det A)^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot ((\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2) \\ \Leftrightarrow (\det A)^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow (\det A)^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ \Leftrightarrow |\det A| &= \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \end{aligned}$$

Und dies ist die bekannte Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Ebenso kann man die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks D mithilfe der Determinante berechnen, wobei wieder die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Spalten der Matrix A bilden:

$$\text{Flächeninhalt von } D = \frac{|\det A|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

Man erspart sich mit dem Aufstellen der Matrix A und dem Berechnen deren Determinante also viel Rechenarbeit, wenn man mit diesen Konzepten vertraut ist.

Im dreidimensionalen Fall kann man mithilfe der Determinante das Volumen eines Parallelepipeds (auch "Spat" genannt) berechnen: Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$, die nicht in einer Ebene liegen und A die Matrix mit den Einträgen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Spalten, sowie P das Parallelepiped, das von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, dann gilt:

$$\text{Volumen von } P = |\det A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Die allgemein vermutlich bekanntere Formel für die Volumsberechnung eines Parallelepipeds wird mithilfe des Betrags des sogenannten Spatprodukts aufgestellt:

$$\text{Volumen von } P = |\det A| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Hierbei ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ das eben angesprochene sogenannte Spatprodukt, welches Kreuz- und Skalarprodukt verwendet.

Bekanntlich wird das Kreuzprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ durch die Determinanten von drei 2×2 -Matrizen berechnet, indem man nacheinander die erste, zweite und dritte Zeile streicht und bei der Berechnung der zweiten Komponente des entstehenden Vektors abschließend das Vorzeichen ändert. Man kann statt der Berechnung dreier Determinanten aber auch eine Matrix-Vektor-Multiplikation daraus machen⁹⁸:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

⁹⁸ Vgl. Sigurd Falk, Rudolf Zurmühl, Matrizen und ihre Anwendungen 1. Grundlagen. Für Ingenieure, Physiker und Angewandte Mathematiker (Berlin/Heidelberg/New York ⁷1997), 238. **Im Folgenden zit. als Falk, Zurmühl**, Matrizen und ihre Anwendungen 1. Im Werk selbst haben sich leider zwei Fehler eingeschlichen: So ist dort bei der nun anschließenden Matrix-Vektor-Multiplikation die Komponente in der ersten Zeile und zweiten Spalte (a_{12}) mit dem falschen Index versehen (a_x , richtig ist aber a_z). Auf den zweiten Fehler wird noch hingewiesen.

In Kurzschreibweise wäre dies: $\vec{a} \times \vec{b} = S_a \vec{b}$, wobei S_a eine schiefsymmetrische Matrix ist, welche die Einträge des Vektors $\vec{a}$ in der oben angegebenen Ordnung enthält. Das zweifache Kreuzprodukt könnte somit wie folgt berechnet werden⁹⁹:

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = S_a(S_a \vec{b}) = S_a^2 \vec{b} = H_a \vec{b},$$

$$\text{wobei } H_a = S_a^2 = \begin{pmatrix} -a_y^2 - a_z^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & -a_x^2 - a_z^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & -a_x^2 - a_y^2 \end{pmatrix} \text{ eine symmetrische Matrix ist}^{100}.$$

⁹⁹ Vgl. *Falk, Zurmühl*, Matrizen und ihre Anwendungen 1, 238.

¹⁰⁰ Vgl. *Falk, Zurmühl*, Matrizen und ihre Anwendungen 1, 238. Hier hat sich der zweite Fehler eingeschlichen: Die Matrix H_a ist bei Falk/Zurmühl im Buch genau das (-1)-fache der hier korrekt angegebenen Matrix.

Interpolationspolynome¹⁰¹

Viele Anwendungen beginnen mit vorgegebenen Messpunkten $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ ($t_i \neq t_j$) an denen die Werte $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n$ gemessen werden und man soll eine möglichst einfache Funktion finden, die diese Messwerte an den Messpunkten einhält. Die dafür am besten geeignete Funktion ist eine Polynomfunktion, da man mit ihr in Bezug auf Differential und Integral gut weiterarbeiten kann. Für $n+1$ Messpunkte sucht man einfach nach einem Polynom vom Grad n , also allgemein formuliert nach folgender Funktion: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Die vorgegebenen Messergebnisse $P(t_k) = s_k$ ergeben dann ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rclcl} a_0 + a_1t_0 + a_2t_0^2 + \dots + a_nt_0^n & = & s_0 \\ a_0 + a_1t_1 + a_2t_1^2 + \dots + a_nt_1^n & = & s_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_0 + a_1t_n + a_2t_n^2 + \dots + a_nt_n^n & = & s_n \end{array}$$

Die Unbekannten sind $a_0, a_1, \dots, a_n$ mit der folgenden Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{pmatrix}$$

Eine Matrix dieser Art wird auch Vandermonde-Matrix $V(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ genannt. Eine Vandermonde-Matrix hat immer eine von 0 verschiedene Determinante, wodurch das obige lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat.

Das ganze Konstrukt sei nun an einem Beispiel verdeutlicht:

Man suche ein Polynom 3. Grades, welches zu folgenden Messungen passt:

1.00	2.00	2.50	3.00
-0.6250	4.1250	9.5000	17.3750

¹⁰¹ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schüffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure, 333f.

Man stellt zuerst die erweiterte Koeffizientenmatrix auf:

$$(A|\vec{s}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -0.625 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 4.125 \\ 1 & 2.5 & 6.25 & 15.625 & 9.5 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 17.375 \end{array} \right)$$

Anschließend bringt man diese mittels elementarer Zeilenumformungen auf

$$(A|\vec{s}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.125 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array} \right)$$

und kann somit das Interpolationspolynom ablesen:

$$P(x) = 0.125 - 2.5x + 1.25x^2 + 0.5x^3 = \frac{1}{8} - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Der Aufwand zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus wächst mit n^3 und da oftmals in Anwendungen sehr viele Messpunkte gegeben sind, wird das Verfahren dann äußerst aufwendig. Warum diese Methode so schnell so aufwendig wird, liegt darin, dass man hier für den Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n als Basis $1, x, x^2, \dots, x^n$ genommen hat, welche nicht auf dieses Problem abgestimmt ist. Es gäbe noch andere Möglichkeiten Interpolationspolynome zu finden, diese haben aber wenig bis gar nichts mit Matrizen zu tun und daher wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

Computertomographie¹⁰²

Das Lösen linearer Gleichungssysteme kann mithilfe von Matrizen einfacher gestaltet werden, da sie mehr Übersicht bieten. Die Aufgabe lineare Gleichungssysteme zu lösen kommt in vielen verschiedenen Anwendungsbereichen vor. Als Stellvertreter dafür sei hier die Computertomographie kurz erklärt.

Die Computertomographie ist ein bildgebendes Verfahren in der Radiologie. Von einem Sender gehen Strahlen aus, die die Patientin bzw. den Patienten durchleuchten. Die Eingangsintensität der Strahlen ist bekannt und die übrige Strahlungsintensität nach dem Durchlauf durch die Patientin bzw. den Patienten wird mittels eines Strahlenempfängers gemessen. Dies wird aus vielen unterschiedlichen Richtungen wiederholt. Aus den Messergebnissen des Strahlenempfängers werden die Absorptionskoeffizienten der Zellen berechnet. Hierzu wird der zu untersuchende Teil in ein Raster mit lauter kleinen Quadraten unterteilt. Jedem Quadrat wird eine Unbekannte, also ein Absorptionskoeffizient, zugeordnet. Die Absorptionskoeffizienten geben für jedes einzelne dieser Quadrate an, wie stark die Strahlen abgeschwächt wurden, nachdem sie hindurch gegangen sind.

Aus mathematischer Sicht lässt sich jeder Röntgenstrahl durch eine Geradengleichung ausdrücken und für jede dieser "Röntgenstrahlgeraden" wird ermittelt, welche Quadrate sie trifft. Daraus kann man ein lineares Gleichungssystem aufstellen, bei dem die Unbekannten die Absorptionskoeffizienten der vom Strahl getroffenen Quadrate sind. Durch das Lösen des linearen Gleichungssystems erhält man eben diese Koeffizienten. Die Werte werden anschließend als Farben dargestellt, wobei die Farbe umso heller ist, je größer der Koeffizient ist. Es ist jedoch zu erwähnen, dass man für ein Megapixel bereits ein System von einer Million Gleichungen und Unbekannten lösen muss. Wenn man außerdem noch eine bessere Auflösung haben will, benötigt man ein Vielfaches an Unbekannten.

¹⁰² Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), 24f.

Input-Output-Modelle¹⁰³

Bei der Untersuchung von Produktionsabläufen in großen Unternehmen oder Volkswirtschaften findet man meist komplexe Strukturen. Hierbei sind Input-Output-Modelle hilfreich, da Rohstoffe sowohl für Zwischen- als auch direkt für Endprodukte verwendet werden können und nicht nur Endprodukte, sondern auch Zwischenprodukte verkauft werden können.

Trotz der Komplexität dieser Modelle, kann man diese eben erwähnten Prozesse mithilfe einer einzigen Verflechtungsmatrix darstellen. In dieser sogenannten Input-Output-Matrix werden nicht nur in den Zeilen, sondern auch in den Spalten alle vorkommenden Produkte (Rohstoffe, Zwischenprodukte und Endprodukte) angeschrieben. Ausgehend von der beispielsweise folgenden Tabelle kommt man zur Input-Output-Matrix A:

von \ zu	R ₁	R ₂	R ₃	Z ₁	Z ₂	E
R ₁	0	0	0	2	0	0
R ₂	0	0	0	5	4	0
R ₃	0	0	0	6	1	3
Z ₁	0	0	0	0	0	9
Z ₂	0	0	0	0	0	8
E	0	0	0	0	0	0

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann sich nun fragen, wie die vielen Nullen in der Matrix A zustande kommen. Dies ist einfach erklärt: Für die Produktion von Rohstoffen sind weder Rohstoffe noch Zwischenprodukte noch Endprodukte erforderlich, was die Nullen in den ersten drei Spalten erklärt. Für die Produktion von Zwischenprodukten sind weder Zwischenprodukte noch Endprodukte nötig, was die Nullen in der hier vierten und fünften Spalte ab der vierten Zeile erklärt. Für die Pro-

¹⁰³ Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), 40f. Vgl. dazu auch Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017), 64.

duktion des Endproduktes (bzw. in anderen Beispielen mit mehreren Endprodukten für die Produktion der Endprodukte) benötigt man kein Endprodukt (bzw. keine Endprodukte), was die Null in der letzten Zeile und letzten Spalte erklärt.

Die Hereinnahme dieser Selbstverständlichkeiten in die Input-Output-Matrix ist lediglich ein technischer Trick, um die spätere Rechnung zu vereinfachen und so die im Folgenden erklärte allgemeine Gleichung aufstellen zu können: $\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{n}$.

Ein Unternehmen interessiert sich für die Frage: Wie viel muss von den einzelnen Produkten produziert bzw. eingekauft werden, um die Nachfrage zu decken?

Für jedes Produkt gilt:

Produktionsmenge = benötigte Menge für die einzelnen Produkte ("interner Bedarf")
+ externe Nachfrage am Markt

Mit dem allgemeinen Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ und dem allgemeinen Nachfragevektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_q \end{pmatrix}$ sowie der $q \times q$ -Verflechtungsmatrix A kann man dies als die bereits oben erwähnte

einfache Formel darstellen: $\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{n}$. Hierbei kommt der allgemeine Produktionsvektor $\vec{x}$ auch auf der rechten Seite der Gleichung vor, da auch für die interne Produktion ($A \cdot \vec{x}$) Rohstoffe, Zwischenprodukte und Endprodukte benötigt werden können. Man kann also sagen, dass der Gesamtbedarf $\vec{x}$ der Produktion gleich ist der externen Nachfrage $\vec{n}$ plus dem internen Produktionsbedarf $A \cdot \vec{x}$.

Durch Umformen erhält man eine explizite Formel für $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (Id_q - A)^{-1} \cdot \vec{n}.$$

Die Matrix $(Id_q - A)^{-1}$ heißt **Leontief-Inverse**.

Fibonacci-Zahlen¹⁰⁴

Die Fibonacci-Folge beginnt bekanntermaßen mit den Zahlen 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... anhand der Berechnungsvorschrift $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Möchte man nun eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen, so kann man dies unter anderem mithilfe von Matrizenrechnung bewerkstelligen.

Man bestimmt zuerst eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ für die gilt:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Betrachtet man nur einen Schritt und denkt an die Berechnungsvorschrift, so findet man diese Matrix A leicht:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun berechnet man Eigenwerte und Eigenvektoren von A:

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Es sei nun $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$. Dann ist aufgrund der Diagonalisierbarkeit von A

und der Formel $A = S D S^{-1}$ die Matrix D eine Diagonalmatrix:

¹⁰⁴ Vgl. Tilo Arens, Rolf Busam, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Hellmuth Stachel, Grundwissen Mathematikstudium. Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen (Berlin/Heidelberg 2013), hier 516. **Im Folgenden zit. als Arens, Busam, Hettlich, Karpfinger, Stachel**, Grundwissen Mathematikstudium. Die Autoren lassen die Fibonacci-Folge zunächst mit 1, 1, 2, ... beginnen und rechnen am Schluss noch einmal um, damit die Fibonacci-Folge mit 0, 1, 1, 2, ... beginnt. Ich habe mir diese Umrechnung erspart, da ich gleich mit 0, 1, 1, 2, ... begonnen habe und man sich dadurch auch etwas Rechenarbeit spart.

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = D$$

Potenzen von A kann man nun leicht bilden, da A diagonalisierbar ist und es gilt somit:

$$A^n = (S D S^{-1})^n = S D^n S^{-1}$$

Dieses Produkt ist einfach zu berechnen, weil D eine Diagonalmatrix ist:

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 - \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) & -\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) & -\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n & \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das negative Vorzeichen verschwindet, weil aus der ganzen Matrix (-1) herausgehoben wird (in der ersten Spalte durch Heraushebung des Faktors $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -1$ und in der zweiten Spalte durch Heraushebung des Faktors (-1) bzw. Vorzeichenwechsel, wodurch aus der ganzen Matrix der Faktor (-1) herausgehoben wurde). Betrachtet man nun wieder die Ausgangsgleichung

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ ergibt sich $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$.

Da $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx -0.618$ ist und somit immer kleiner wird, je größer n wird, kann man bei großem n die n -te Fibonacci-Zahl gut durch $a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ approximieren.

Stabile Systeme – Fahrradvermietung¹⁰⁵

Für die drei weiteren Anwendungen ("stabile Systeme – Fahrradvermietung", "Genotyphäufigkeiten" und "Page-Ranking bei Suchmaschinen"), welche so wie die Anwendung "Fibonacci-Zahlen" ebenfalls allesamt mit Eigenwerten und Eigenvektoren zu tun haben, werden noch ein paar weitere Begriffe und Eigenschaften kurz erklärt, definiert bzw. bewiesen.

Definition¹⁰⁶: Eine $n \times n$ -Matrix heißt **spaltenstochastisch**, wenn sie nur aus nichtnegativen Einträgen besteht und die Summe der Einträge in jeder einzelnen Spalte jeweils 1 ergibt.

Folgende Proposition ist einfach zu zeigen:

Proposition¹⁰⁷: Jede spaltenstochastische Matrix hat 1 als einen Eigenwert.

Beweis¹⁰⁸: Sei A eine $n \times n$ -Matrix, die spaltenstochastisch ist und c ein n -dimensionaler Spaltenvektor (also eine $n \times 1$ -Matrix) dessen Einträge alle gleich 1 sind. Es gilt für jede Matrix B , dass sie und ihre transponierte Matrix B^T (die Matrix, die man erhält, wenn man die Zeilen und die Spalten der ursprünglichen Matrix vertauscht) die gleichen Eigenwerte haben¹⁰⁹. Da die Matrix A spaltenstochastisch ist, kann man leicht sehen, dass Folgendes gilt: $A^T \cdot c = c$ und somit ist 1 ein Eigenwert für die transponierte Matrix A^T und daher auch für die ursprüngliche Matrix A .

Falls man sich fragt, warum hier die transponierte Matrix verwendet wird, so sei auf die Definition von Eigenwerten und vor allem Eigenvektoren im nächsten Kapitel verwiesen. Dort sind Eigenvektoren genau genommen auch $n \times 1$ -Matrizen, also Spaltenvektoren.

¹⁰⁵ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schüffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure 362.

¹⁰⁶ Kurt Bryan, Tanya Leise, The \$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google. In: SIAM Review 48, H. 3 (September 2006), 569-581 ("SIAM Review" steht für "Society for Industrial and Applied Mathematics"), hier 572. **Im Folgenden zit. als** Bryan, Leise, The \$25,000,000,000 Eigenvector.

¹⁰⁷ Vgl. Bryan, Leise, The \$25,000,000,000 Eigenvector, 572.

¹⁰⁸ Vgl. Bryan, Leise, The \$25,000,000,000 Eigenvector, 572.

¹⁰⁹ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schüffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure 361.

In der System- und Regelungstheorie sind Eigenwerte und Eigenvektoren sehr wichtig, ganz besonders, wenn die einzelnen Komponenten der Systeme ihre Zustände nach fixen Regeln verändern. Als Beispiel soll hier eine Fahrradvermietung mit drei Stationen für Entnahme und Rückgabe von Fahrrädern dienen.

Ein Fahrrad kann an einer Station abgeholt und dann an jeder der drei Stationen wieder zurückgegeben werden, d. h. die Fahrräder werden von einer Station zu einer der beiden anderen oder wieder zur selben Station zurückgebracht. Hierbei lässt sich ein Muster des Abgabeverhaltens feststellen. Es sei p_{ji} ($1 \leq i, j \leq 3$) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fahrrad welches zu Beginn der Öffnungszeiten an Station i war, am Ende der Öffnungszeiten an Station j steht. Hieraus kann man eine Übergangsmatrix $P = (p_{ji})_{i,j \in \{1,2,3\}}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten als Einträge aufstellen. Solche Systeme haben charakteristischerweise folgende zwei Eigenschaften (so auch bei den Anwendungen Genotyphäufigkeiten und Page-Ranking bei Suchmaschinen weiter unten), welche bereits oben als "spaltenstochastische Matrix" definiert wurden:

$$\begin{aligned} 1.) & \quad p_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j \\ 2.) & \quad \sum_{i=1}^n p_{i,j} = 1 \quad \forall j \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung bedeutet für die Fahrradvermietung, dass jedes ausgeliehene Fahrrad auch wieder zurückgebracht wird, d. h. es gehen keine Fahrräder durch Schäden, Diebstahl etc. verloren. Es sei nun v_i die Anzahl der Fahrräder, die zu Beginn der Öffnungszeiten an Station i vorhanden sind und w_i die Anzahl der Fahrräder, die am Ende der Öffnungszeiten an Station i vorhanden sind, wobei angenommen wird, dass alle Fahrräder verliehen werden können. Dann gilt folgende Beziehung:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Für den Fahrradverleih ist es von Vorteil, einen stabilen Zustand zu erzeugen, d. h. die Fahrräder so aufzuteilen, dass am Ende der Öffnungszeiten an jeder Station genau so viele Fahrräder an jeder einzelnen Station vorhanden sind wie am Beginn der Öffnungszeiten. Aus mathematischer Sicht sucht man also nach v_1 , v_2 und v_3 sodass

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

gilt, also einen Eigenvektor zum Eigenwert 1. Man muss also zuerst feststellen, ob 1 ein Eigenwert von P ist. Es wurde bereits oben bewiesen, dass dies für jede spaltenstochastische Matrix gilt. Somit hat das System nichttriviale stabile Zustände.

Man betrachte nun ein konkretes Beispiel mit folgender gegebener Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom muss nicht mehr berechnet werden, weil man aus obiger Rechnung weiß, dass 1 ein Eigenwert zu jeder solchen Übergangsmatrix ist und weil man sich ohnehin nur für den Eigenwert 1 interessiert. Im Folgenden bezeichne Id_3 die Einheitsmatrix vom Format 3×3 . Die stabilen Zustände ergeben sich als Lösungen von

$$(1 \cdot \text{Id}_3 - P) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.4 \\ -0.3 & 0.3 & -0.4 \\ -0.3 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $1 \cdot \text{Id}_3 - P$ bringt man durch elementare Zeilenumformungen auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich somit unendlich viele Lösungen der Form $\vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$, wobei $\lambda \in \mathbb{N}$. Anders

formuliert: Die Fahrräder müssen auf die drei Stationen im Verhältnis 5 : 9 : 3 aufgeteilt werden. Unter der Voraussetzung, dass die Fahrräder stets wie durch obige Übergangsmatrix gegeben ausgeliehen werden und keine Fahrräder verloren gehen, sind dann am Ende der Öffnungszeiten an jeder Station stets gleich viele Fahrräder wie zu Beginn der Öffnungszeiten.

Genotyphäufigkeiten¹¹⁰

Zum besseren Verständnis seien hier zu Beginn einige Begriffe kurz erklärt:

In jedem menschlichen Zellkern befinden sich lange, fadenförmige Moleküle, welche **DNS** genannt werden. Diese Moleküle sind – vereinfacht gesagt – mit Proteinen in den sogenannten **Chromosomen** verpackt. In den Chromosomen wiederum ist die gesamte Erbinformation des Menschen auf chemischer Basis gespeichert. Längere Teile dieser DNS werden als **Gene** bezeichnet. Im Allgemeinen versucht man, Gene für unterschiedliche Merkmale zu identifizieren. Gene können verschiedene Ausprägungsformen, sogenannte **Allele** annehmen. Je nach Gen gibt es unterschiedlich viele Allele. An jedem **Genort** treffen bei diploiden Bevölkerungen (das sind jene mit doppeltem Chromosomensatz) jeweils zwei solcher Allele aufeinander. Dies wiederum legt den sogenannten **Genotyp** des Individuums fest. Die beiden Allele können miteinander wechselwirken, beispielsweise kann ein Allel das andere dominieren. Individuen mit zwei gleichen Allelen an einem bestimmten Genort nennt man **homozygot** (reinerbig), jene mit unterschiedlichen Allelen nennt man **heterozygot** (mischerbig)¹¹¹.

In der Populationsgenetik interessiert man sich oftmals für die sich von Generation zu Generation ändernden Genotyphäufigkeiten. Zur einfacheren Bestimmung dieser Häufigkeiten wird oft von einer sogenannten "idealen Population" ausgegangen, d. h. dass es keine überlappenden Generationen gibt, zufällige und von den zu untersuchenden Merkmalen unabhängige Paarungen erfolgen, eine genügend große Population vorliegt sowie keinerlei Migration, Mutation und Selektion vorkommt.

An einem Genort liegen zwei Allele a und A vor, wobei diese Bezeichnung meist bedeutet, dass A gegenüber a dominant ist, was jedoch hier nicht wichtig ist. Die Vererbung erfolgt nicht geschlechtsgebunden, d. h. es gibt keine Geschlechtsunterscheidung für die Genotypen aa , Aa und AA .

¹¹⁰ Vgl. Reinhard Schuster, Biomathematik. Mathematische Modelle in der Medizinischen Informatik und in den Computational Life Sciences mit Computerlösungen in Mathematica (Wiesbaden 2009), hier 168-171.

¹¹¹ Vgl. Christoph Ableitinger, Biomathematische Modelle im Unterricht. Fachwissenschaftliche und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien (Wiesbaden 2010), hier 27.

Relative Häufigkeiten sollen angeben, welchen Anteil bestimmte Genotypen an der betrachteten Population haben. Es sei r_0 der Anteil der Elterngeneration mit dem Genotyp aa (r steht für rezessiv), h_0 der Anteil mit dem Genotyp Aa (h steht für heterozygot) und d_0 der Anteil mit dem Genotyp AA (d steht für dominant). Dann gilt für die jeweiligen Anteile die Ungleichung

$$0 \leq r_0, h_0, d_0 \leq 1$$

sowie die Gleichung

$$r_0 + h_0 + d_0 = 1.$$

Bei der ersten Tochtergeneration wird der Index 1 verwendet, bei der Elterngeneration der Index 0. Die Allele a bzw. A sollen in der betrachteten Population mit den relativen Häufigkeiten p bzw. q vorliegen, sodass $p + q = 1$ und $0 \leq p, q \leq 1$ gilt. Diese relativen Häufigkeiten bleiben beim Übergang zur jeweils nächsten Generation stets erhalten, weil aufgrund der Annahme es handele sich um eine "ideale Population" die Allele entsprechend der vorliegenden Häufigkeiten vererbt werden.

Die Veränderung der Genotyphäufigkeiten von der Eltern- zur Tochtergeneration kann man mithilfe einer Übergangsmatrix, welche den Übergang der relativen Häufigkeiten von der Eltern- zur Tochtergeneration beschreibt, darstellen:

Übergangsmatrix		Elterngeneration		
		aa	Aa	AA
Tochtergeneration	aa	$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$		
	Aa			
	AA			

Und somit ergibt sich für den Übergang der relativen Häufigkeiten von der Eltern- zur Tochtergeneration:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ h_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ h_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

In den Zeilen der Übergangsmatrix stehen die Genotyphäufigkeiten der Tochtergeneration, wobei in der ersten Zeile die Häufigkeit für den Genotyp aa, in der zweiten Zeile die Häufigkeit für den Genotyp Aa und in der dritten Zeile die Häufigkeit für den Genotyp AA in der Tochtergeneration steht. In der ersten Spalte wird angenommen, dass ein Elternteil vom Genotyp aa ist, in der zweiten Spalte ist ein Elternteil vom Genotyp Aa und in der dritten Spalte ist ein Elternteil vom Genotyp AA. Nun muss man sich überlegen, mit welcher relativen Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit welches Allel vom zweiten Elternteil kommt, um die Einträge p_{ij} zu bestimmen. Beginnt man mit der ersten Spalte (d. h. ein Elternteil ist vom Genotyp aa), dann kann vom anderen Elternteil mit Wahrscheinlichkeit p das Allel a und mit Wahrscheinlichkeit q das Allel A dazukommen. Dies wiederum bedeutet, dass mit Wahrscheinlichkeit p der Genotyp aa und mit Wahrscheinlichkeit q der Genotyp Aa auftreten wird. Der Genotyp AA kann nicht auftreten, da bereits vom ersten Elternteil sicher das Allel a vererbt wird. Die Übergangsmatrix hat somit schon die Einträge in der ersten Spalte (ein Elternteil vom Genotyp aa) fix, wobei * die noch zu bestimmenden relativen Häufigkeiten bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & * & * \\ q & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Für die Bestimmung der Einträge in der zweiten Spalte wird angenommen, dass ein Elternteil vom Genotyp Aa ist, d. h. dieser vererbt sowohl das Allel a als auch das Allel A mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $0.5 = 50\%$. Da mit einer Wahrscheinlichkeit von p das Allel a vom anderen Elternteil vererbt wird und mit einer Wahrscheinlichkeit von q das Allel A, ergibt sich für den Genotyp aa die Wahrscheinlichkeit $\frac{p}{2}$ und für den Genotyp AA die Wahrscheinlichkeit $\frac{q}{2}$. Der Genotyp Aa kann auf zwei verschiedene Arten entstehen: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% vererbt der erste Elternteil das Allel A und mit derselben Wahrscheinlichkeit das Allel a. Mit einer Wahrscheinlichkeit von p kommt vom zweiten Elternteil das Allel a und mit einer Wahrscheinlichkeit von q kommt vom zweiten Elternteil das Allel A. Der Genotyp Aa entsteht also wenn vom ersten Elternteil das Allel A und vom zweiten Elternteil das Allel a kommt oder vom ersten Elternteil das Allel a und vom zweiten Elternteil das Allel A. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten muss man nun addieren ($\frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot q = \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}$) und kommt somit auf die Wahrscheinlichkeit von $0.5 = 50\%$ für die Entstehung des Genotyps Aa wenn ein Elternteil vom Genotyp Aa ist. Dadurch ergibt sich die zweite Spalte der Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & \frac{p}{2} & * \\ q & \frac{1}{2} & * \\ 0 & \frac{q}{2} & * \end{pmatrix}$$

Die dritte Spalte berechnet man analog zur ersten Spalte und wenn man q durch $1-p$ ersetzt erhält man somit die folgende (spaltenstochastische) Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & \frac{p}{2} & 0 \\ 1-p & \frac{1}{2} & p \\ 0 & \frac{1-p}{2} & 1-p \end{pmatrix}$$

Nun sucht man Genotyphäufigkeiten, die sich beim Übergang von der Eltern- zur Tochtergeneration nicht verändern. Es soll also folgende Gleichung gelten:

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ h_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ h_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

Aus mathematischer Sicht bedeutet das, dass man nach Eigenvektoren $\begin{pmatrix} r_0 \\ h_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 sucht, wobei zusätzlich gelten muss, dass alle Komponenten dieses Eigenvektors dasselbe Vorzeichen haben und die Summe der Komponenten 1 ergibt.

Der Eigenvektor zum Eigenwert 1 lautet: $\begin{pmatrix} \frac{p^2}{(1-p)^2} \\ \frac{2p}{1-p} \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit die Summe der Komponenten 1

ergibt, muss man diesen Vektor mit $(1-p)^2 = q^2$ multiplizieren und erhält somit den Vektor

$\begin{pmatrix} p^2 \\ 2pq \\ q^2 \end{pmatrix}$ und dann gilt $\begin{pmatrix} r_0 \\ h_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ 2pq \\ q^2 \end{pmatrix}$. Wenn also für eine Population die folgenden drei Gleichungen gelten, dann sagt man auch, dass sie sich im Hardy-Weinberg-Gleichgewicht befindet:

$$r = p^2$$

$$h = 2pq$$

$$d = q^2$$

Es ist interessant anzumerken, dass unabhängig von der Genotypverteilung in der Elterngeneration bereits die erste Tochtergeneration sich im Hardy-Weinberg-Gleichgewicht befindet. Um dies zu beweisen, ist zu untersuchen wie sich p und q aus r , h und d ergeben. Das Allel a ist im Genotyp aa (rezessiv) zweimal, im Genotyp Aa (heterozygot) einmal und im Genotyp AA (dominant) kein Mal enthalten und es gilt $r + h + d = 1$. Daraus ergibt sich:

$$p = \frac{2r + 1h + 0d}{2(r + h + d)} = r + \frac{h}{2}$$

$$q = \frac{0r + 1h + 2d}{2(r + h + d)} = \frac{h}{2} + d$$

Sind nun r und d gegeben mit $0 \leq r, d, r + d \leq 1$, so ergeben sich h , p und q wie folgt:

$$h = 1 - r - d$$

$$p = r + \frac{h}{2} = r + \frac{1 - r - d}{2} = \frac{1 + r - d}{2}$$

$$q = \frac{h}{2} + d = \frac{1 - r - d}{2} + d = \frac{1 - r + d}{2}$$

Die Übergangsmatrix hat daher folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + r - d}{2} & \frac{1 + r - d}{4} & 0 \\ \frac{1 - r + d}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1 + r - d}{2} \\ 0 & \frac{1 - r + d}{4} & \frac{1 - r + d}{2} \end{pmatrix}$$

Durch einfaches Nachrechnen kann man sich von Folgendem überzeugen:

$$\begin{pmatrix} p^2 \\ 2pq \\ q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + r - d}{2} & \frac{1 + r - d}{4} & 0 \\ \frac{1 - r + d}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1 + r - d}{2} \\ 0 & \frac{1 - r + d}{4} & \frac{1 - r + d}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ h \\ d \end{pmatrix}$$

Damit ist schon die erste Tochtergeneration im Hardy-Weinberg-Gleichgewicht.

Page-Ranking bei Suchmaschinen¹¹²

Bei diversen Suchmaschinen wie zum Beispiel "Google" werden Matrizen verwendet, um die Wichtigkeit von Seiten zu berechnen. Hierzu wird im Wesentlichen untersucht, welche Webseite auf welche andere Webseite verweist, d. h. wie die einzelnen Webseiten untereinander verlinkt sind.

Ein Link, der auf eine Webseite führt, "stärkt" in gewisser Weise diese Webseite, denn wenn jemand einen Link setzt, so erachtet diese Person jene Webseite als wichtig. Betrachtet man nun alle Links zusammen, so kann man sie als ein Maß für die globale Wichtigkeit der Webseite sehen. Formuliert man dies mathematisch, kann man als s_j die "Stärke" der Webseite j definieren. Jede Webautorin bzw. jeder Webautor kann aber theoretisch auf der eigenen Seite so viele Links setzen, wie sie bzw. er möchte. Deshalb ist in der mathematischen Betrachtung eine Normierung notwendig, welche durch die Anzahl der von der Webseite ausgehenden Links vorgenommen werden kann. Es sei demnach l_j die Anzahl der von Webseite j ausgehenden Links. Dann kann man die Wichtigkeit von Webseiten durch die Anzahl der ausgehenden Links wie folgt gewichten:

$$s_k = \sum_{j \text{ verweist auf } k} \frac{s_j}{l_j}$$

Somit wird die Wichtigkeit einer Webseite k nach der Wichtigkeit der auf Webseite k verweisenden Webseiten bewertet. Ein Effekt davon ist, dass allen Webseiten die wiederum auf viele andere Webseiten verlinken (also quasi "wahllos verlinken") nicht viel Bedeutung beigemessen wird.

¹¹² Vgl. Wessler, Entscheidungstheorie 130-134.

Dieses System wird wohl erst durch folgendes Beispiel verständlich gemacht:

Man betrachte vier Webseiten und ihre jeweiligen Links untereinander:

Seite 1 verlinkt auf die Seiten 2 und 4, also insgesamt zwei Links (d. h. $l_1 = 2$).

Seite 2 verlinkt auf die Seite 3, also insgesamt ein Link (d. h. $l_2 = 1$).

Seite 3 verlinkt auf die Seiten 2 und 4, also insgesamt zwei Links (d. h. $l_3 = 2$).

Seite 4 verlinkt auf die Seiten 1, 2 und 3, also insgesamt drei Links (d. h. $l_4 = 3$).

Somit ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{1}{3}s_4 \\s_2 &= \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{3}s_4 \\s_3 &= s_2 + \frac{1}{3}s_4 \\s_4 &= \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_3\end{aligned}$$

Man kann nun die Wichtigkeit der Webseiten in eine Matrix P eintragen, wobei die Verlinkungen wie oben berechnet die jeweiligen Spalten der Matrix ergeben:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Solche Matrizen (Summe der Einträge in jeder Spalte ist 1) haben immer den Eigenwert 1 (siehe Anwendung "stabile Systeme – Fahrradvermietung"). Der Spaltenvektor $\vec{s}$, der als Einträge die Variablen s_1 , s_2 , s_3 und s_4 hat, erfüllt die Gleichung $P \cdot \vec{s} = \vec{s}$. Man berechnet also diesen Eigenvektor zum Eigenwert 1 und normiert ihn. Es ergibt sich somit folgender Vektor $\vec{s}$:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} \\ \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.0769 \\ 0.3077 \\ 0.3846 \\ 0.2308 \end{pmatrix}$$

Somit kann man für diese vier Webseiten ihre "Stärke" bzw. Wichtigkeit berechnen. Webseite 1 ist die schwächste Webseite in diesem System und Webseite 3 die stärkste.

Die Berechnung mithilfe von Eigenvektoren ist in der Praxis anwendbar, aber bei so großen Matrizen wie in der Realität kaum umzusetzen. Es gibt aber noch eine zweite Methode, um die Wichtigkeit zu berechnen, welche "Potenz-Methode" genannt wird. Die Einträge der obigen Matrix P werden dabei als Wahrscheinlichkeiten aufgefasst. Mit welcher Wahrscheinlichkeit man durch zwei Links beispielsweise von Webseite 1 zu Webseite 3 gelangt, kann man von der Matrix P^2 ablesen:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dementsprechend kann man an der Matrix P^{10} ablesen, wie man durch zehn Links von einer Webseite zu einer anderen kommt:

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.0919 & 0.0579 & 0.0919 & 0.0723 \\ 0.2872 & 0.3337 & 0.2872 & 0.3140 \\ 0.4257 & 0.3326 & 0.4257 & 0.3719 \\ 0.1952 & 0.2758 & 0.1952 & 0.2418 \end{pmatrix}$$

Die höheren Potenzen konvergieren gegen eine feste Matrix, wie man an P^{20} und P^{100} sieht:

$$P^{20} = \begin{pmatrix} 0.0783 & 0.0751 & 0.0783 & 0.0765 \\ 0.3058 & 0.3101 & 0.3058 & 0.3083 \\ 0.3884 & 0.3798 & 0.3884 & 0.3834 \\ 0.2275 & 0.2350 & 0.2275 & 0.2318 \end{pmatrix}$$

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0.0769 & 0.0769 & 0.0769 & 0.0769 \\ 0.3077 & 0.3077 & 0.3077 & 0.3077 \\ 0.3846 & 0.3846 & 0.3846 & 0.3846 \\ 0.2308 & 0.2308 & 0.2308 & 0.2308 \end{pmatrix}$$

Der Stabilitätszustand, der erreicht wird, hat vier (auf vier Dezimalstellen gerundete) idente Spalten, d. h. jeder Eintrag in einer Zeile ist (auf vier Dezimalstellen gerundet) derselbe. Des Weiteren ist jede dieser vier identen Spalten gleich dem zuvor berechneten Eigenvektor (auf vier Dezimalstellen gerundet).

In diesem Beispiel sind beide vorgestellten Methoden gut. In der Realität, wo man mit viel größeren Matrizen arbeitet, wird jedoch die "Potenz-Methode" vorgezogen, falls dies in der Praxis funktioniert. Es kann nämlich auch in der Praxis passieren, dass der Rechenaufwand für Computer zu viel wird und diese Methode daher nicht funktioniert, denn schließlich arbeitet man in der Praxis oftmals mit Millionen oder gar noch mehr unterschiedlichen Webseiten. Es können in der Praxis aber andere Verfahren ergänzend mitverwendet werden, damit man zu einem Ergebnis kommt.

Mathematischer Hintergrund der Matrizenrechnung

In diesem Kapitel werden die diversen im vorangegangenen Kapitel aufgetretenen Begriffe, Rechenregeln usw. erklärt und Definitionen nachgeliefert. Der Begriff Matrix wurde bereits im Vorwort definiert.

Linear abhängige Vektoren¹¹³

Die Verallgemeinerung der Begriffe kollinear (in der Ebene) und komplanar (im Raum) führt zur Definition des allgemeineren Begriffs linear abhängig: Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear abhängig**, wenn es Skalare $r_1, r_2, \dots, r_k$ gibt, von denen mindestens einer ungleich 0 ist, mit $r_1 \cdot \vec{v}_1 + r_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + r_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$. Andernfalls heißen sie **linear unabhängig**.

Linearkombination¹¹⁴

Der Vektor $\vec{w}$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ wenn es $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ gibt mit: $\vec{w} = r_1 \vec{v}_1 + r_2 \vec{v}_2 + \dots + r_n \vec{v}_n$.

¹¹³ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schüffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure, 257.

¹¹⁴ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schüffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure, 274.

Vektorraum¹¹⁵

Es seien Vektoraddition $(+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n)$ und Skalarmultiplikation $(\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n)$ wie gewohnt im $\mathbb{K}^n$ für n-dimensionale Vektoren definiert.

Gelten die folgenden acht (Vektorraum-)Axiome für eine Menge V mit der oben angesprochenen Vektoraddition und Skalarmultiplikation, so heißt V ein **Vektorraum**:

1.) Es gilt das erste Assoziativgesetz:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ für alle } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V.$$

2.) Es gilt das Kommutativgesetz für die Vektoraddition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} \text{ für alle } \vec{v}, \vec{w} \in V.$$

3.) Es gibt ein neutrales Element $\vec{0} \in V$ für die Vektoraddition:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \text{ für alle } \vec{v} \in V.$$

4.) Zu jedem $\vec{v} \in V$ gibt es ein inverses Element $-\vec{v} \in V$ mit

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}.$$

5.) Es gilt das zweite Assoziativgesetz:

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) \text{ für alle } \vec{v} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

6.) Es gilt das erste Distributivgesetz:

$$\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w} \text{ für alle } \vec{v}, \vec{w} \in V, \lambda \in \mathbb{K}.$$

7.) Es gilt das zweite Distributivgesetz:

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v} \text{ für alle } \vec{v} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

8.) Die $1 \in \mathbb{K}$ ist das neutrale Element der Skalarmultiplikation:

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \text{ für alle } \vec{v} \in V.$$

Ein Beispiel für einen Vektorraum wäre $V = \mathbb{R}^n$ mit obiger Vektoraddition und Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^n$. Dieser heißt **(reeller) Vektorraum der Dimension n**.

¹¹⁵ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schöffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure, 255 sowie Arens, Busam, Hettlich, Karpfinger, Stachel, Grundwissen Mathematikstudium, 194f. und 198.

Ein Polynom mit reellen oder komplexen Koeffizienten mit der Unbestimmten x sieht wie folgt aus (siehe Kapitel "Anwendungen der Matrizenrechnung" im Unterkapitel "Interpolationspolynome"):

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Ist $P(x)$ nicht das Nullpolynom, so ist der Index n des höchsten von Null verschiedenen Koeffizienten a_n der **Grad von P** (abgekürzt: $\deg(P)$). Dem Nullpolynom wird manchmal der Grad $-\infty$ zugeordnet, wobei $-\infty < n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Menge $\mathbb{R}[X]$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten und mit koeffizientenweiser Addition sowie mit Multiplikation mit einem Skalar bildet einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Für jede natürliche Zahl n und $n = -\infty$ bildet die Menge

$$\mathbb{R}[X]_n = \{P(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$$

aller Polynome vom Grad kleiner gleich n einen Vektorraum.

Quadratische Matrix, Einheitsmatrix, Diagonalmatrix, Dreiecksmatrix¹¹⁶

Eine Matrix vom Format $n \times n$ heißt **quadratische Matrix der Größe n** oder **quadratische $n \times n$ -Matrix**.

¹¹⁶ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schüffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure, 291.

Die quadratische $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

heißt **$n \times n$ -Einheitsmatrix** bzw. **$n \times n$ -Identitätsmatrix**. Man schreibt dafür oft Id_n , E_n oder 1_n .

Die sogenannte **Diagonale bzw. Hauptdiagonale** der $n \times n$ -Matrix A enthält die Elemente a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} .

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn alle Elemente der Matrix außerhalb der (Haupt-)Diagonale gleich 0 sind, also wenn $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt **(obere) Dreiecksmatrix**, wenn alle Elemente der Matrix unterhalb der (Haupt-)Diagonale gleich 0 sind, also wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$.

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt **untere Dreiecksmatrix**, wenn alle Elemente der Matrix oberhalb der (Haupt-)Diagonale gleich 0 sind, also wenn $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

Rechenregeln für Matrizen¹¹⁷

Man kann nur Matrizen gleichen Formats (d. h. beide Matrizen haben z. B. m Zeilen und n Spalten) miteinander addieren bzw. voneinander subtrahieren. Dies funktioniert komponentenweise. Hierbei seien A und B zwei $m \times n$ -Matrizen:

¹¹⁷ Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), 30.

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine $m \times n$ -Matrix A wird mit einer reellen Zahl r multipliziert, indem jedes Element von A mit r multipliziert wird:

$$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & \cdots & r \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r \cdot a_{m1} & \cdots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrix-Matrix-Multiplikation¹¹⁸

Das Produkt einer $m \times n$ -Matrix A mit einer $n \times p$ -Matrix B ergibt folgende $m \times p$ -Matrix C :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \textcolor{red}{a_{i1}} & \cdots & \textcolor{red}{a_{in}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \textcolor{red}{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \textcolor{red}{b_{nj}} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \textcolor{red}{c_{ij}} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

wobei $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

¹¹⁸ Vgl. Christiane Allerstorfer, Michael Langer, Alexander Siegl, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz 2019), 32.

Matrix-Vektor-Multiplikation¹¹⁹

Für die Matrix-Vektor-Multiplikation kann man auf die Matrix-Matrix-Multiplikation zurückgreifen und "Zeile mal Spalte" rechnen:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \cdot v_1 + m_{12} \cdot v_2 + m_{13} \cdot v_3 \\ m_{21} \cdot v_1 + m_{22} \cdot v_2 + m_{23} \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Eliminationsverfahren von Gauß sowie von Gauß und Jordan¹²⁰

Auf dem Weg zum Eliminationsverfahren von Gauß sowie von Gauß und Jordan werden die folgenden Begriffe erklärt: elementare Zeilenumformung, Koeffizientenmatrix, erweiterte Koeffizientenmatrix, Zeilenstufenform, führender Eintrag, Pivotelement, Stufe, Rang einer Matrix und reduzierte Zeilenstufenform.

Das Eliminationsverfahren von Gauß bzw. von Gauß und Jordan für lineare Gleichungssysteme lässt sich wie folgt kurz beschreiben: Es wird wiederholt jeweils eine Gleichung des Systems durch eine andere ersetzt, bis das Gleichungssystem schließlich die sogenannte "Stufenform" annimmt. Spätestens mithilfe der Stufenform lässt sich bestimmen, ob das jeweilige Gleichungssystem lösbar ist. Ist das Gleichungssystem lösbar, so lässt sich die Lösungsmenge durch Rückwärtseinsetzen bestimmen (Eliminationsverfahren von Gauß) oder nach weiteren Umformungen des Systems direkt von der sogenannten "reduzierten Stufenform" ablesen (Eliminati-

¹¹⁹ Vgl. Dieter Hebenstreit, Eva Prugger, Manfred Schwaiger, Susanne Teschl, Wolfgang Timischl, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017), 43.

¹²⁰ Vgl. Arens, Busam, Hettlich, Karpfinger, Stachel, Grundwissen Mathematikstudium, 172f., 175-177 sowie 179f.

onsverfahren von Gauß und Jordan). Es ist wichtig, dass keine dieser Umformungen die Lösungsmenge in irgendeiner Form verändert. Man muss sich daher auf "elementare Zeilenumformungen" beschränken.

Definition der elementaren Zeilenumformungen:

Die folgenden, auf einzelne Gleichungen eines linearen Gleichungssystems anwendbaren Operationen heißen elementare Zeilenumformungen:

- 1.) Zwei Gleichungen (Zeilen) werden vertauscht.
- 2.) Eine Gleichung (Zeile) wird mit einem Faktor $\lambda \neq 0$ multipliziert, also vervielfacht.
- 3.) Zu einer Gleichung (Zeile) wird das λ -fache einer anderen Gleichung (Zeile) addiert.

Die Zeilenvertauschung aus 1.) wäre auch durch geschicktes Anwenden von 2.) und 3.) bewältigbar, weshalb man in der Definition auch nur mit 2.) und 3.) auskommen würde.

Man kann sich leicht überlegen, dass sich die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht ändert, wenn an diesem System eine elementare Zeilenumformung vorgenommen wird. Das heißt diese Umformungen sind Äquivalenzumformungen.

Man betrachtet nun zunächst ein allgemeines lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ bzw. $a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Man sagt: Zu diesem linearen Gleichungssystem gehören die **Koeffizientenmatrix**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die **erweiterte Koeffizientenmatrix**

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Aus der erweiterten Koeffizientenmatrix erhält man wiederum eindeutig das lineare Gleichungssystem zurück, also ist jede Information über das Gleichungssystem in der jeweils zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrix enthalten.

Wenn $\vec{x}$ der Spaltenvektor der Unbekannten ist, so kann man das lineare Gleichungssystem auch in folgender Kurzform schreiben: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Jede nicht nur aus Nullen bestehende Koeffizientenmatrix A lässt sich mithilfe elementarer Zeilenumformungen auf die sogenannte **Zeilenstufenform** bringen. Diese sieht wie folgt aus (* bezeichnet beliebige Einträge):

$$\left(\begin{array}{cccccc} f_1 & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & f_2 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & 0 & 0 & f_3 & \ddots & * \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & * \\ \vdots & & & 0 & \ddots & f_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

Hierbei bezeichnen $f_1, \dots, f_r$ die in den Zeilen jeweils ersten von Null verschiedenen Einträge, welche auch als **führende Einträge** oder **Pivotelemente** bezeichnet werden.

Beschreiben lässt sich die Zeilenstufenform wie folgt: Beim Durchlaufen der Zeilen von oben nach unten rückt nach jeder Zeile der führende Eintrag um mindestens eine Spalte nach rechts. Sind Nullzeilen vorhanden, so stehen diese ganz unten. Die führenden Einträge $f_1, \dots, f_r$ sind von Null verschieden, davor und darunter gibt es nur Nullen. Darüber stehen beliebige Einträge, welche mit * markiert sind. Die Nullspalten sind hier schon weggelassen. Eine Nullspalte würde bedeuten, dass man den jeweiligen Parameter frei wählen kann, d. h. wäre die k -te Spalte eine Nullspalte, so wäre der k -te Parameter frei wählbar.

Liegt f_{i+1} um k Spalten rechts von f_i für $k \geq 1$, so bildet f_i zusammen mit den $k-1$ rechts anschließenden Einträgen eine **Stufe** der Länge k . Eventuell vorhandene Nullspalten (d. h. eine

Unbekannte x_j tritt überhaupt nicht mehr in den Gleichungen auf und ist daher in der Lösungsmenge ein frei wählbarer Parameter) wurden hier weggelassen. Unterhalb der letzten Stufe gibt es nur Nullzeilen. Man nennt die Anzahl r der Stufen, also die Anzahl der Nichtnullzeilen der Matrix in Zeilenstufenform, den **Rang von A** und verwendet dafür als Zeichen bzw. Abkürzung $\text{rg } A$. Unabhängig von dem Weg, den man zurücklegt, um auf die Zeilenstufenform der Matrix A zu kommen, bleiben stets $\text{rg } A$ Nichtnullzeilen übrig.

Nun sei hier auf das übergeordnete Thema, nämlich die Eliminationsverfahren von Gauß bzw. von Gauß und Jordan eingegangen. Aus historischer Sicht waren diese beiden Eliminationsverfahren schon vor Gauß und Jordan bekannt (siehe Unterkapitel "Aufkommen der Matrizenrechnung in Europa" im Kapitel "Geschichte der Matrizenrechnung"), trotzdem haben sich diese Bezeichnungen im Laufe der Zeit etabliert.

Beim Verfahren von Gauß wird die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform gebracht. Das **Eliminationsverfahren von Gauß** zur Lösung des linearen Gleichungssystems $(A|\vec{b})$ besteht aus:

- 1.) der Umformung auf Zeilenstufenform,
- 2.) der Lösbarkeitsentscheidung (lösbar $\Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg}(A|\vec{b})$) und
- 3.) dem Rückwärtseinsetzen zur Bestimmung der Lösungsmenge des Systems.

Beim **Eliminationsverfahren von Gauß und Jordan** wird die erweiterte Koeffizientenmatrix auf die sogenannte **reduzierte Zeilenstufenform** gebracht. Diese sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & f_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \ddots & f_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Wie vorhin sind alle $f_1, \dots, f_r \neq 0$ und davor und darunter gibt es nur Nullen. Zusätzlich werden aber auch über den Stufen mittels elementarer Zeilenumformungen möglichst viele Nullen erzeugt, auf jeden Fall über den f_i . Durch geeignete Multiplikation der jeweiligen Zeilen könnte man auch $f_1 = \dots = f_r = 1$ erreichen.

Das **Eliminationsverfahren von Gauß und Jordan** zur Lösung des linearen Gleichungssystems $(A|\vec{b})$ besteht aus:

- 1.) der Umformung auf Zeilenstufenform,
- 2.) der Lösbarkeitsentscheidung und
- 3.) der weiteren Umformung auf reduzierte Zeilenstufenform und dem Ablesen der Lösungsmenge des Systems.

Der Unterschied zwischen dem Eliminationsverfahren von Gauß sowie dem von Gauß und Jordan liegt also im Wesentlichen darin, dass man nach dem Eliminationsverfahren von Gauß die Lösung meist nur durch Rückwärtseinsetzen bekommt wohingegen man nach dem Eliminationsverfahren von Gauß und Jordan die Lösung direkt ablesen kann.

Inverse einer Matrix¹²¹

Gibt es zu einer $n \times n$ -Matrix A eine $n \times n$ -Matrix A^{-1} , sodass Folgendes gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id_n,$$

so heißt A^{-1} **inverse Matrix** (kurz: **Inverse**) oder **Kehrmatrix von A**.

Für eine allgemeine 2×2 -Matrix A ist die inverse Matrix leicht zu berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

¹²¹ Vgl. Gerald Kaiser, Wolfgang Timischl, Ingenieur-Mathematik 3 (Wien 2017), hier 158f. wo in der Definition (!) der inversen Matrix vergessen wurde, dass die Elemente auf der Hauptdiagonale den Platz wechseln. Für die allgemeine Berechnung der inversen Matrix vgl. Arens, Busam, Hettlich, Karpfinger, Stachel, Grundwissen Mathematikstudium, 450.

Die Berechnung von A^{-1} kann mittels unbestimmten Ansatz ($A \cdot A^{-1} = Id_n$) gemacht werden. Die Vorgehensweise geht systematisch wie folgt, wobei diese bereits bei Matrizen der Größenordnung 4×4 sehr aufwändig ist:

- 1.) Man erweitert A um die $n \times n$ -Einheitsmatrix Id_n : $(A|Id_n)$.
- 2.) Man bringt $(A|Id_n)$ mittels elementarer Zeilenumformungen auf die Form $(D|B)$, wobei D eine obere Dreiecksmatrix ist und B die Matrix, die durch Zeilenumformungen aus der Einheitsmatrix entstanden ist.
- 3.) Enthält D eine Zeile mit lauter Nullen als Einträge, so ist A nicht invertierbar. Enthält D keine Nullzeile, so macht man mit elementaren Zeilenumformungen so lange weiter, bis aus A die Einheitsmatrix wird, um schließlich die Inverse zu erhalten:
 $(A|Id_n) \rightarrow \dots \rightarrow (Id_n|A^{-1})$

Determinante¹²²

Die Definition der Determinante erfolgt mithilfe der sogenannten Leibniz'schen Formel:

Sei A eine quadratische Matrix mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$ (ein kommutativer Ring würde auch reichen). Dann heißt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i \sigma(i)}$$

die **Determinante von A** .

Da diese Formel sehr kompliziert ist und vor allem für größere Matrizen einen enormen Rechenaufwand bedeutet, gibt es einige einfachere Möglichkeiten wie die nun folgenden Formeln für 2×2 - und 3×3 -Matrizen sowie den Entwicklungssatz von Laplace.

¹²² Vgl. Arens, Busam, Hettlich, Karpfinger, Stachel, Grundwissen Mathematikstudium, 471. Vgl. dazu auch Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schöffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure, 317, 321, 325, 327, 330-333 sowie 340.

Sei A eine 2×2 -Matrix, also $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann ist die Determinante gleich dem folgenden Ausdruck: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Um zu verdeutlichen, dass man gerade die Determinante einer Matrix berechnet, verwendet man statt der runden Matrixklammern sozusagen Betragsstriche:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Sei nun A eine 3×3 -Matrix, also $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, dann ist die Determinante gleich dem folgenden Ausdruck:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix lässt sich meist nicht so leicht berechnen. Hierfür gibt es verschiedene Methoden bzw. Zugänge. Einer davon ist der Laplacesche Entwicklungssatz, welcher in rekursiver Art und Weise die Berechnung der Determinante einer $n \times n$ -Matrix auf die Berechnung von Determinanten von $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrizen zurückführt und zwar immer wieder, bis man bei 3×3 -Matrizen bzw. 2×2 -Matrizen angekommen ist. Für den Laplaceschen Entwicklungssatz benötigt man zunächst "Streichungsmatrizen": Man betrachte dazu eine $n \times n$ -Matrix A . Für $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ bezeichnet man mit A_{ij} die i - j -Streichungsmatrix von A , eine $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrix, die man aus der ursprünglichen Matrix A erhält, wenn man die i -te Zeile und die j -te Spalte streicht.

Entwicklungssatz von Laplace:

Für eine allgemeine $n \times n$ -Matrix A , also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kann die Determinante von A wie folgt berechnet werden:

1.) Entwicklung nach der i-ten Zeile:

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$.

2.) Entwicklung nach der j-ten Spalte:

Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$.

Die Determinante ist vor allem für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems bedeutend, da eine $n \times n$ -Matrix genau dann invertierbar ist, wenn deren Determinante ungleich 0 ist.

Es folgen nun einige Rechenregeln für Determinanten von $n \times n$ -Matrizen. Hierfür seien A und B jeweils $n \times n$ -Matrizen:

1.) Geht B aus A durch das Vertauschen von zwei Spalten hervor, so gilt: $\det B = -\det A$.

Geht B aus A durch das Vertauschen von zwei Zeilen hervor, so gilt: $\det B = -\det A$.

2.) Ist A^T die transponierte Matrix von A (jene Matrix, die man erhält, wenn man die Zeilen von A mit den Spalten von A vertauscht), so gilt: $\det A = \det A^T$.

3.) Für die $n \times n$ -Matrix Id_n (die Einheitsmatrix) ist $\det \text{Id}_n = 1$.

4.) Es gilt $\det A = 0$, wenn

- eine Zeile von A nur Nullen als Einträge hat (das nennt man "Nullzeile").
- eine Spalte von A nur Nullen als Einträge hat (das nennt man "Nullspalte").
- eine Zeile von A ein Vielfaches einer anderen Zeile von A ist.
- eine Spalte von A ein Vielfaches einer anderen Spalte von A ist.

5.) Hat A nur Einträge auf der Hauptdiagonale und darunter (d. h. ist A eine "untere Dreiecksmatrix") oder hat A nur Einträge auf der Hauptdiagonale und darüber (d. h. ist A eine "obere Dreiecksmatrix"), so gilt für die Determinante:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

6.) Geht B aus A durch Multiplikation genau einer Zeile von A mit einer Zahl r hervor, so gilt: $\det B = r \cdot \det A$.

Geht B aus A durch Multiplikation genau einer Spalte von A mit einer Zahl r hervor, so gilt: $\det B = r \cdot \det A$.

7.) Geht B aus A durch Multiplikation der gesamten Matrix A mit einer Zahl r hervor ($B = r \cdot A$), so gilt: $\det B = r^n \cdot \det A$.

8.) Geht B aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile von A zu einer anderen Zeile von A hervor, so gilt: $\det B = \det A$.

Geht B aus A durch Addition eines Vielfachen einer Spalte von A zu einer anderen Spalte von A hervor, so gilt: $\det B = \det A$.

9.) Schreibt man A als $(a_1 \dots a_i \dots a_n)$ mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ so gilt:

$$\det(a_1 \dots a_i + a'_i \dots a_n) = \det(a_1 \dots a_i \dots a_n) + \det(a_1 \dots a'_i \dots a_n).$$

Die analoge Aussage gilt für die Zeilen von A.

10.) Ist eine Zeile der Matrix A eine Linearkombination der anderen Zeilen, so gilt: $\det A = 0$.

11.) Es gilt: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Eigenwert und Eigenvektor¹²³

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert einer $n \times n$ -Matrix A, wenn es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq 0$ gibt mit $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$. In diesem Fall heißt der Vektor $\vec{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

Charakteristisches Polynom¹²⁴

Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit reellen oder komplexen Einträgen (kurz: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bzw. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$). Das Polynom χ_A vom Grad n, welches wie folgt definiert wird, heißt charakteristisches Polynom der Matrix A:

$$\chi_A(X) = \det(A - X \cdot Id_n) = (-1)^n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_1 X + c_0 \in \mathbb{R}[X] \text{ bzw. } \in \mathbb{C}[X]$$

¹²³ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schöffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure, 358.

¹²⁴ Vgl. Arens, Busam, Hettlich, Karpfinger, Stachel, Grundwissen Mathematikstudium, 504.

Es gilt dann:

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist Eigenwert von } A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

Eine $n \times n$ -Matrix hat höchstens n Eigenwerte, da χ_A als Polynom vom Grad n mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten nicht mehr als n Nullstellen haben kann.

In vielen Büchern findet man auch die folgende Definition für das charakteristische Polynom der Matrix A :

$$\chi_A(X) = \det(X \cdot Id_n - A)$$

Weil $\det(X \cdot Id_n - A) = (-1)^n \det(A - X \cdot Id_n)$ gilt, ist dies für ungerades n im Allgemeinen nicht dasselbe Polynom, aber die Nullstellen und damit auch die Eigenwerte sind dieselben.

Diagonalisierbarkeit einer Matrix¹²⁵

Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit reellen oder komplexen Einträgen und mit n verschiedenen reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so gibt es eine invertierbare Matrix S mit:

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Eine $n \times n$ -Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix S gibt, sodass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist, d. h. eine Matrix, die nur auf der Hauptdiagonale von Null verschiedene Einträge hat.

¹²⁵ Vgl. Göllmann, Hübl, Pulham, Ritter, Schon, Schöffler, Voß, Vossen, Mathematik für Ingenieure, 366.

Eine $n \times n$ -Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn es n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ von A gibt. In diesem Fall ist die Matrix S , die $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ als Spalten hat, eine sogenannte Transformationsmatrix für A .

Fazit

Im ersten Kapitel, welches von der Geschichte der Matrizenrechnung handelt, wurde klar, dass die allerersten Anfänge in Asien zu finden sind. Auch wenn diverse bekannte europäische Mathematiker viele wichtige Ergebnisse im Lauf der Zeit und ihrer Forschung geliefert haben, so trifft auch auf einige asiatische Personen die Beschreibung, dass sie Pionierarbeit geleistet haben, zu. Während einerseits in Asien die Matrizenrechnung immer weiter in den Hintergrund rückte, lebte sie andererseits in Europa immer weiter auf. Alles in allem sollte man – unabhängig vom jeweiligen mathematischen Thema – bei der Betrachtung der Geschichte der Mathematik auch immer den Blick außerhalb Europas schweifen lassen und so dem Eurozentrismus entgegenwirken.

Das zweite Kapitel verglich die Lehrpläne von AHS, BAfEP, BASoP, HAK, humanberuflichen Schulen sowie Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten. Die Reihenfolge dieser sechs Schultypen ist in dieser Aufzählung (und im zweiten Kapitel) nicht zufällig, sondern repräsentiert die Menge an Inhalten zur Matrizenrechnung: In der AHS kommt Matrizenrechnung nicht oder bestenfalls in einem "freien Wahlpflichtfach Mathematik" vor, wobei hier auch nicht zwingend, in BAfEP und BASoP sollte der Begriff "Matrix" zumindest erwähnt werden, HAK und humanberufliche Schulen widmen immerhin einen großen Teil eines Semesters der Matrizenrechnung und Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten verteilen ihre Inhalte zur Matrizenrechnung gekonnt auf mehrere Jahrgänge bzw. Semester mit den insgesamt meisten Inhalten zur Matrizenrechnung im Vergleich dieser Schultypen, auch wenn es in den einzelnen Fachrichtungen Unterschiede gibt, wie viel genau zu Matrizen gemacht werden soll.

Eine etwas überraschende Erkenntnis des dritten Kapitels war, dass bei der Betrachtung der Lehrbücher für HAK und humanberufliche Schulen keine wirklichen Unterschiede gemacht wurden, obwohl diese Schularten unterschiedliche Lehrpläne haben. Während "Angewandte Mathematik@HUM 2" wenigstens im Inhaltsverzeichnis und auf den entsprechenden Seiten darauf verwies, dass nicht alle Inhalte für die humanberuflichen Schulen verpflichtend sind, so blieb dies bei den beiden anderen Schulbuchreihen unerwähnt. Wirklich große Mühe mit einem tatsächlich eigenen Buchkapitel zu Matrizen für die humanberuflichen Schulen, welches sich von jenem Buchkapitel zu Matrizen in der HAK unterscheidet, hat man sich bei keinem der analysierten Schulbücher bzw. Verlage gemacht. Natürlich sind viele Inhalte für HAK und humanberufliche Schulen im Lehrplan gleich, aber es sind nicht vollkommen idente Inhalte in den

jeweiligen Lehrplänen. Es ist verständlich, dass man nicht wegen der Höheren Lehranstalten für Tourismus eine eigene Schulbuchreihe herausgibt, in der unter anderem das Kapitel zu Matrizen sich dann im Schulbuch für den dritten Jahrgang befindet. Enttäuschend ist, dass es keine schulartenspezifischen Anwendungen in den Lehrbüchern für die humanberuflichen Schulen für den fünften Jahrgang gibt, wie es ja eigentlich im Lehrplan vorgeschrieben wäre. Auch bei der analysierten Schulbuchreihe für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten sind die beiden letzten Punkte gültig: Durch die unterschiedlichen Fachrichtungen kann man nicht für die jeweiligen Fachrichtungen unterschiedliche Schulbücher herausgeben, weil manche Inhalte zu Matrizen bei den einen Fachrichtungen im dritten und bei den anderen Fachrichtungen im vierten Jahrgang laut Lehrplan verankert sind. Man kann sich aber bezüglich der schulartenspezifischen Anwendungen der Matrizenrechnung mehr Mühe geben und Beispiele aus vielen unterschiedlichen Bereichen in die Schulbücher einbinden. Als Anregung welche Beispiele bzw. Bereiche hierfür geeignet sein könnten, kann im darauffolgenden Kapitel zu den Anwendungen der Matrizenrechnung nachgelesen werden.

Im vierten Kapitel wurden einige Anwendungen und Anwendungsbereiche der Matrizenrechnung vorgestellt. Die Anwendungsbereiche waren breit gestreut und es ist klar, dass es noch viel mehr Anwendungen und auch Anwendungsbereiche der Matrizenrechnung gäbe. Während manche Anwendungen eher innermathematisch anzusiedeln sind – auch wenn es wohl keine ganz strikte Trennung in inner- und außermathematische Anwendungen gibt – kamen auch Anwendungen aus dem täglichen Leben bzw. aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler vor. Es wurde versucht, alle Anwendungen gut genug aufzubereiten, um sie dann in den Unterricht einbauen zu können. Natürlich kamen auch einige vielleicht neue Definitionen, Erklärungen, Begriffe usw. vor, aber es wurden möglichst alle neuen Inhalte im vierten und dann auch im fünften Kapitel erklärt bzw. vorgestellt.

Literaturverzeichnis

Gesetzestexte

BMB (Bundesministerium für Bildung), Verordnung der Bundesministerin für Bildung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen geändert wird; Bekanntmachung, mit der die Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen geändert wird (BGBl. II Nr. 219/2016), online unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2016_II_219/BGBLA_2016_II_219.pdf (19. Juli 2019).

BMB (Bundesministerium für Bildung), Verordnung der Bundesministerin für Bildung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik und der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik 2016 erlassen, die Verordnung über den Lehrplan der Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik aufgehoben und die Verordnung über die Lehrpläne für die Bildungsanstalt für Sozialpädagogik sowie die Eröffnungs- und Teilungszahlenverordnung betreffend die Lehrpläne der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik und der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik 2016 geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 204/2016), online unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2016_II_204/COO_2026_100_2_1257956.pdf (19. Juli 2019).

BMB (Bundesministerium für Bildung), Verordnung der Bundesministerin für Bildung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik und der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik 2016 erlassen, die Verordnung über den Lehrplan der Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik aufgehoben und die Verordnung über die Lehrpläne für die Bildungsanstalt für Sozialpädagogik sowie die Eröffnungs- und Teilungszahlenverordnung betreffend die Lehrpläne der Bildungsanstalt für Elementarpädagogik und der Bildungsanstalt für Sozialpädagogik 2016 geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 204/2016), online unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2016_II_204/COO_2026_100_2_1257957.pdf (19. Juli 2019).

BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen), Verordnung der Bundesministerin für Bildung und Frauen, mit der die Verordnung über die Lehrpläne für die Handelsakademie und

die Handelsschule sowie die Eröffnungs- und Teilungszahlenverordnung geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 209/2014), online unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2014_II_209/COO_2026_100_2_1028436.pdf (21. Juli 2019).

BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen), Verordnung der Bundesministerin für Bildung und Frauen, mit der eine Verordnung über die Lehrpläne der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten 2015 erlassen wird sowie die Verordnung über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten und die Verordnung über die Lehrpläne der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (Lehrplan 2011) geändert werden (Lehrplanpaket der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten 2015); Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 262/2015). Die diversen Lehrpläne für die einzelnen Fachrichtungen sind online zu finden unter <https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2015/262> (27. Juli 2019).

BMBF (Bundesministerium für Bildung und Frauen), Verordnung der Bundesministerin für Bildung und Frauen, mit der eine Verordnung über die Lehrpläne für gewerbliche und kunstgewerbliche Fachschulen, Fachschulen für wirtschaftliche Berufe und Fachschulen für Sozialberufe sowie Höhere gewerbliche und kunstgewerbliche Lehranstalten und Höhere Lehranstalten für wirtschaftliche Berufe erlassen wird (Lehrpläne der humanberuflichen Schulen) und die Verordnung über Lehrpläne für technische, gewerbliche und kunstgewerbliche Fachschulen, die Verordnung über Lehrpläne für die Fachschule für wirtschaftliche Berufe und die Höhere Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe, die Verordnung über den Lehrplan der Fachschule für Sozialberufe, die Verordnung über die Lehrpläne der dreijährigen Fachschule und der Höheren Lehranstalt für wirtschaftliche Berufe sowie die Verordnung über die Lehrpläne für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht (BGBl. II Nr. 340/2015). Die diversen Lehrpläne für die einzelnen Fachrichtungen sind online zu finden unter <https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2015/340> (22. Juli 2019).

Schulbücher

Christiane *Allerstorfer*, Michael *Langer*, Alexander *Siegl*, Angewandte Mathematik@HAK 2 (Linz ³2019).

Christiane *Allerstorfer*, Martin *Kletzmayer*, Michael *Langer*, Angewandte Mathematik@HAK 5 (Linz 2018).

Christiane *Allerstorfer*, Michael *Langer*, Alexander *Siegl*, Angewandte Mathematik@HUM 2 (Linz ³2018).

Dieter *Hebenstreit*, Eva *Prugger*, Manfred *Schwaiger*, Susanne *Teschl*, Wolfgang *Timischl*, Angewandte Mathematik 2 HUM (Wien ²2017).

Dieter *Hebenstreit*, Eva *Prugger*, Manfred *Schwaiger*, Susanne *Teschl*, Wolfgang *Timischl*, Mathematik & Wirtschaft 2 für HAK (Wien 2017).

Gerald *Kaiser*, Wolfgang *Timischl*, Ingenieur-Mathematik 1 (Wien 2017).

Gerald *Kaiser*, Wolfgang *Timischl*, Ingenieur-Mathematik 2 (Wien 2016).

Gerald *Kaiser*, Wolfgang *Timischl*, Ingenieur-Mathematik 3 (Wien 2017).

Gerald *Kaiser*, Wolfgang *Timischl*, Ingenieur-Mathematik 4 (Wien 2018).

Franz *Pauer*, Martina *Scheirer-Weindorfer*, Andreas *Simon*, Mathematik anwenden HAK II (Wien 2015).

Franz *Pauer*, Martina *Scheirer-Weindorfer*, Andreas *Simon*, Heinz *Stadler*, Mathematik anwenden HAK V (Wien 2018).

Franz *Pauer*, Martina *Scheirer-Weindorfer*, Andreas *Simon*, Mathematik anwenden HUM II (Wien ²2016).

Sekundärliteratur

Christoph *Ableitinger*, Biomathematische Modelle im Unterricht. Fachwissenschaftliche und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien (Wiesbaden 2010).

Tilo *Arens*, Rolf *Busam*, Frank *Hettlich*, Christian *Karpfinger*, Hellmuth *Stachel*, Grundwissen Mathematikstudium. Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen (Berlin/Heidelberg 2013).

Egbert *Brieskorn*, Lineare Algebra und analytische Geometrie I. Noten zu einer Vorlesung mit historischen Anmerkungen von Erhard Scholz (Braunschweig/Wiesbaden 1983).

Kurt *Bryan*, Tanya *Leise*, The \$25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google. In: SIAM Review 48, H. 3 (September 2006), 569-581 ("SIAM Review" steht für "Society for Industrial and Applied Mathematics").

Arthur *Cayley*, A Memoir on the Theory of Matrices. In: Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 148 (1858) 17-37.

Sigurd *Falk*, Rudolf *Zurmühl*, Matrizen und ihre Anwendungen 1. Grundlagen. Für Ingenieure, Physiker und Angewandte Mathematiker (Berlin/Heidelberg/New York ⁷1997).

Peter *Gabriel*, Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra (Basel/Boston/Berlin 1996).

Laurenz *Göllmann*, Reinhold *Hübl*, Susan *Pulham*, Stefan *Ritter*, Henning *Schon*, Karlheinz *Schöffler*, Ursula *Voß*, Georg *Vossen*, Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden. Band 1: Vorkurs, Analysis in einer Variablen, Lineare Algebra, Statistik (Berlin/Heidelberg 2017).

Dietmar *Herrmann*, Mathematik im Mittelalter. Die Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam (Berlin/Heidelberg 2016).

Klaus *Jänich*, Lineare Algebra (Berlin/Heidelberg ¹¹2008).

Reinhard *Schuster*, Biomathematik. Mathematische Modelle in der Medizinischen Informatik und in den Computational Life Sciences mit Computerlösungen in Mathematica (Wiesbaden 2009).

Markus *Wessler*, Entscheidungstheorie. Von der klassischen Spieltheorie zur Anwendung kooperativer Konzepte (Wiesbaden 2012).

Hans *Wußing*, 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton (Berlin/Heidelberg 2008).

Anhang

Abstract (deutsch)

Diese Arbeit handelt von Matrizen bzw. Matrizenrechnung in der (österreichischen) Schule. Das erste Kapitel zeigt die Geschichte der Matrizen sowohl in Asien als auch in Europa auf. Das zweite Kapitel analysiert die Lehrpläne von "allgemein bildenden höheren Schulen", "Bildungsanstalten für Elementarpädagogik", "Bildungsanstalten für Sozialpädagogik", "Handelsakademien", "humanberuflichen Schulen" und "Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten" aber nur in Bezug auf Matrizen. Im dritten Kapitel wird dasselbe mit den Lehrbüchern von "Handelsakademien", "humanberuflichen Schulen" und "Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten" getan. Das vierte Kapitel ist eine Sammlung verschiedener Anwendungen von Matrizen. Das fünfte und letzte Kapitel erklärt die Begriffe und Konzepte, welche im vierten Kapitel verwendet wurden.

Das erste Kapitel bringt keine wirklich neuen Ergebnisse, obwohl die Ergebnisse interessant sind. Das Ergebnis des zweiten Kapitels ist, dass in all diesen Lehrplänen die Inhalte in Bezug auf Matrizen unterschiedlich sind. Man kann sagen, dass "allgemein bildende höhere Schulen", "Bildungsanstalten für Elementarpädagogik" und "Bildungsanstalten für Sozialpädagogik" den Schülerinnen und Schülern nicht viel bzw. nichts in Bezug auf Matrizen lehren. "Handelsakademien" und "humanberufliche Schulen" lehren zwar ein paar Inhalte zu Matrizen, aber auch nicht wirklich viel. In den "Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten" lernen die Schülerinnen und Schüler im Vergleich zu den Lehrplänen der anderen Schulformen am Meisten über Matrizen. Das dritte Kapitel zeigt, dass – obwohl es unterschiedliche Lehrpläne für die verschiedenen Fachrichtungen gibt – die Schulbücher für die jeweiligen Schularten die gleichen sind. Im vierten Kapitel wird die Vielfalt der Anwendungen der Matrizen gezeigt, obwohl noch mehr verschiedene Anwendungen und Anwendungsbereiche möglich wären. Alle vorgestellten Anwendungen könnten – gemeinsam mit den ebenfalls bereitgestellten Erklärungen (teilweise im vierten und teilweise im fünften Kapitel) – eins zu eins im Schulunterricht verwendet werden. Die Einzigartigkeit dieser Diplomarbeit ist, dass niemand zuvor eine solch vertiefte Forschung im Bereich der Matrizenrechnung für die (österreichische) Schule gemacht hat.

Abstract (englisch)

This diploma thesis is about matrices in (Austrian) schools. The first chapter shows the history of matrices both in Asia and Europe. The second chapter analyses the curricula of "allgemein bildenden höheren Schulen", "Bildungsanstalten für Elementarpädagogik", "Bildungsanstalten für Sozialpädagogik", "Handelsakademien", "humanberuflichen Schulen" and "Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten" but only in relation to matrices. In the third chapter the same is done with the textbooks of "Handelsakademien", "humanberuflichen Schulen" and "Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten". The fourth chapter is a collection of different applications of matrices. The fifth and last chapter explains some terms and concepts which were used in the fourth chapter.

The first chapter has no really new results, although the results are interesting. The result in the second chapter is that in all of these curricula the contents with respect to matrices are different. One could say that "allgemein bildende höhere Schulen", "Bildungsanstalten für Elementarpädagogik" and "Bildungsanstalten für Sozialpädagogik" do not really teach pupils much respectively anything about matrices. "Handelsakademien" and "humanberufliche Schulen" do teach some contents about matrices, but not really much. In the "Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten" pupils learn by comparison to the other curricula the most about matrices. The third chapter shows that although there are different curricula for different specialisations the textbooks are the same for the particular school types. In the fourth chapter the diversity of applications of matrices are shown, although there could be even more different applications and areas of applications. All of the presented applications could – with the also provided explanations (partially in the fourth and partially in the fifth chapter) – be used one-to-one in school teaching. The uniqueness of this diploma thesis is that no one before has done such a deep research in the field of matrices for (Austrian) school teaching.