



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Titel of the Diploma Thesis

„Die Zugänge zur Integralrechnung
und deren Vor- und Nachteile“

verfasst von / submitted by

Romana Schwarzl

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree
programme code as it appears on the student
record sheet:

A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt / degree
programme as it appears on the student
record sheet:

LA Mathematik, LA Psychologie und Philosophie

Betreut von / Supervisor:

MMag. Dr. Andreas Ulovec

Danksagung

Die Diplomarbeit als abschließende Aufgabe für das Beenden des Studiums gilt zu Recht als große Hürde. Während der anstrengenden Entstehungszeit dieser Arbeit haben mich mehrere Menschen in meinem Umfeld besonders unterstützt.

An erster Stelle gebührt meine Dankbarkeit meinem Betreuer, MMag. Dr. Andreas Ulovec, der mir mit fachlichem Rat und viel Geduld zur Seite gestanden ist.

Meiner gesamten Familie und engen Freunden danke ich dafür, dass sie mir in dieser Zeit eine starke emotionale Stütze waren. Besondere Erwähnung verdienen meine Tante Elisabeth, die viel Zeit und Mühe für Korrekturarbeiten investiert hat und mich durch anregende Gespräche inspirierte, sowie meine Großeltern Frank und Ulla, die mir durch ihre finanzielle Unterstützung das Arbeiten überhaupt ermöglicht haben.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Richtlinien für einen kompetenzorientierten Unterricht	7
2.1. Didaktische Überlegungen zum Mathematikunterricht	7
2.1.1. Drei Grunderfahrungen der Mathematik.....	7
2.1.2. Mathematik als Produkt und Prozess.....	11
2.2. Lehrplanbezug und Zentralmatura	12
2.2.1. Lehrstoff in der 8. Klasse	12
2.2.2. Grundkompetenzen der Zentralmatura für die Integralrechnung.....	13
3. Begriff Integral	14
3.1. Historische Entwicklung.....	14
3.2. Fachliche Klärung.....	17
3.2.1. Ober- und Untersumme	17
3.2.2. Bestimmtes Integral	19
3.2.3. Stammfunktion.....	20
3.2.4. Integralfunktion.....	21
3.2.5. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.....	21
3.3. Flächenberechnung in der Sekundarstufe I.....	23
3.3.1. Strategie des Zerlegens und der Ergänzung	23
3.3.2. Flächeninhaltsbestimmung eines Kreises	24
4. Aspekte und Grundvorstellungen	27
4.1. Das Integral – verschiedene Blickwinkel	27
4.2. Aspekte	30
4.2.1. Produktsummenaspekt	30
4.2.2. Stammfunktionsaspekt.....	32
4.3. Grundvorstellungen zum Integral.....	33
4.3.1. Flächeninhaltsgrundvorstellung	34
4.3.2. Rekonstruktionsgrundvorstellung	35
4.3.3. Mittelwertsgrundvorstellung	38
4.3.4. Kumulationsgrundvorstellung	40

4.4.	Eine Betrachtung der Aspekte „Flächeninhalt“ und „Stammfunktion“	41
4.4.1.	Anschaulich vs. formal.....	43
4.4.2.	Kumulierung	44
4.4.3.	Global vs. lokal.....	45
4.4.4.	Einzelwert vs. Funktion bzw. praktisch vs. theoretisch.....	46
4.4.5.	Bestimmtes und unbestimmtes Integral.....	46
4.4.6.	Geometrische Interpretation vs. Verkörperung in vielen Sachverhalten	47
4.4.7.	Konstruieren vs. Rekonstruieren	49
5.	Die Zugänge zum Integralbegriff und ihre Vor- und Nachteile.....	52
5.1.	Die klassischen Zugänge	52
5.1.1.	Bestimmung der Fläche unter einem Funktionsgraphen.....	52
5.1.2.	Integralrechnung als inverse Operation der Differentialrechnung.....	64
5.2.	Die „modernen“ Zugänge	72
5.2.1.	Erarbeitung der Integralfunktion mit elementaren Funktionen	73
5.2.2.	Bestand und Änderung im Anwendungskontext: Integral als Rekonstruktion	79
5.3.	Spezielle Zugänge	88
5.3.1.	Der integrierte Ansatz für Ableitung und Integration	88
5.3.2.	Zugang zum Integral über die Mittelwertbildung	91
5.3.3.	Experimenteller Zugang	94
6.	Konkrete Unterrichtsgestaltung	97
	Zusammenfassung.....	109
	Abstract	110
	Literaturverzeichnis.....	111

1. Einleitung

Eine der schwierigsten Aufgaben im Mathematikunterricht ist mit Sicherheit, die Differential- und Integralrechnung sinngemäß und verständlich zu unterrichten. Dabei stellt der *Integralbegriff* eine besondere Herausforderung dar: Er weist mehrere Bedeutungsschwerpunkte auf und scheint nicht als einheitliche Vorstellung zu bestehen. Neben der hohen Abstrahierung der mathematischen Inhalte gibt es nur einen entfernten Bezug zur Lebenswelt der Schüler und Schülerinnen, und sie haben Mühe das Neugelernte in ihrer Erfahrungswelt einzubetten. Meist werden die Techniken für das erfolgreiche Lösen der Aufgaben mechanisch abgearbeitet und auswendig gelernt, ein Begreifen der mathematischen Inhalte und der Grundverständnisse bleibt aus. Aber eben nicht der kalkül-orientierte Unterricht ist bedeutend, sondern das Erarbeiten des Integralbegriffes ist zentral für den Schulunterricht, wie Danckwerts & Vogel in ihrem Werk treffend formulieren: „Die Integralrechnung ist als Unterrichtsgegenstand nur dadurch legitimiert, dass das *inhaltliche Verständnis des Integralbegriffs* im Mittelpunkt steht“ (Danckwerts & Vogel 2006, S. 125). Das Ziel dieser Arbeit ist deswegen, die möglichen Zugänge zur Integralrechnung zu beleuchten und durch Abwiegen ihrer Vor- und Nachteile die bestmögliche Hinführung zu ermitteln, um damit ein ganzheitliches Verständnis des Begriffs und des Umgangs mit ihm zu gewährleisten.

Dafür werden im zweiten Kapitel allgemeine Überlegungen und Ziele für einen erfolgreichen Mathematikunterricht vorgestellt und die Themenbereiche des Integrals im Rahmen des Lehrplans und der Zentralmatura abgesteckt.

Das dritte Kapitel gibt einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung sowie die wichtigsten Definitionen und Sätze der Integralrechnung und zudem die notwendigen Vorbereitungen in der Sekundarstufe I.

In Kapitel vier wird der Charakter des Begriffs genau analysiert und dabei die grundlegenden Aspekte und inhaltlichen Grundvorstellungen vorgestellt, wobei auch alternative Blickwinkel der didaktischen Literatur beleuchtet werden.

Das fünfte Kapitel stellt den Hauptteil der Arbeit dar, der aus einer ausführlichen Beschreibung der klassischen, modernen und speziellen Zugänge und deren didaktischer Bewertung besteht.

Zuletzt wird im sechsten Kapitel eine mögliche Einführung als konkrete Unterrichtsplanung skizziert, die auf den Erkenntnissen der vorangegangenen Kapitel gründet.

2. Richtlinien für einen kompetenzorientierten Unterricht

Bevor in den nächsten Kapiteln die Integralrechnung und ihre optimale Einführung im Schulunterricht analysiert wird, soll zunächst mit einer allgemeinen Betrachtung des kompetenzorientierten Mathematikunterrichts begonnen werden. Dabei wird auf die drei Grunderfahrungen von Winter (1996) eingegangen, der Unterschied zwischen Mathematik als Prozess und Produkt betrachtet, und schlussendlich werden der Lehrplan und die Grundkompetenzen der Zentralmatura bezüglich der Integralrechnung präsentiert.

2.1. Didaktische Überlegungen zum Mathematikunterricht

Im Allgemeinen stellt man sich die Fragen: Was soll unterrichtet werden und warum? Erst danach wendet man sich der Frage zu, wie unterrichtet werden soll. Im Schulwesen haben wir es fast durchwegs mit einer fachzentrierten Wissensvermittlung zu tun, sodass die Frage für den Mathematiklehrer der Oberstufe lautet: Warum gehört die Mathematik auf Oberstufenniveau zur Allgemeinbildung (Winter 1996)?

In einem vielzitierten Artikel „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“ hat sich Heinrich Winter (1996) mit diesem Thema beschäftigt. Er schildert darin, dass der Mathematikunterricht den Lernenden Grunderfahrungen vermitteln kann, die für eine Allgemeinbildung unerlässlich sind (Winter 1996). Im folgenden Kapitel soll diese Frage beantwortet werden.

2.1.1. Drei Grunderfahrungen der Mathematik

Nach Winter soll der Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen drei Grunderfahrungen ermöglichen und auch miteinander vernetzen. Das Wort Erfahrung hat Winter gewählt, um zu verdeutlichen, dass die Beschäftigung mit Mathematik dazu führen soll, dass Mathematik *erlebt*, also ihr Stellenwert im persönlichen wie gesellschaftlichen Leben erkannt wird (Winter 1996).

- (1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (Winter 1996, S. 37).

Hierzu führt Winter aus, dass Mathematik in fast unerschöpflich vielen Zusammenhängen nützlich ist, was allerdings für sich allein auch in einer Berufsausbildung abgehandelt werden könnte, wohingegen sie erst dann der Allgemeinbildung dienlich ist, wenn sie anhand von Beispielen aus dem Leben Einsichten in modellhafte Zusammenhänge ermöglicht und solcherart aufklärerisch wirken kann (Winter 1996).

Als Beispiel nennt Winter die Zinsrechnung, anhand derer veranschaulicht werden kann, dass Zinsen eine „Miete“ für Kapital darstellen, über deren Rechtfertigung man diskutieren könnte. Die Zinseszinsrechnung führt außerdem zu einem Verständnis für exponentielle Wachstumsvorgänge, die auch in ökologischen und ökonomischen Zusammenhängen von großer Bedeutung sind (Winter 1996).

Als weitere bedeutende Anwendungsfälle nennt Winter den Einsatz der Mathematik in der Physik, insbesondere bei den Bewegungsgesetzen, das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen eines Körpers und die Geometrie, die den Bogen sogar zu Kunst und Design schlägt (Winter 1996).

(2) „Mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen“ (Winter 1996, S. 37).

Die nähere Erläuterung dieser Grunderfahrung wird von Winter mit den folgenden Worten eingeleitet: „Jeder Schüler sollte erfahren, dass Menschen imstande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen. Oder anders formuliert: dass strenge Wissenschaft möglich ist“ (Winter 1996, S. 39).

Als „fundamentale Idee“ der Mathematik gilt die Zahl. Schon die natürlichen Zahlen bieten eine Fülle von Möglichkeiten, sich gedanklich mit zahlreichen Überlegungen zu beschäftigen, ein Beispiel sind die Primzahlen. Sowohl natürliche Zahl als auch Primzahl führen uns bereits zum sehr abstrakten Konzept der Unendlichkeit (Winter 1996).

Ein spannendes Abenteuer von fundamentaler, aber auch praktischer Bedeutung ist die schrittweise Erweiterung des Zahlbegriffs auf negative, rationale und reelle Zahlen. Diese Einsichten gehen Hand in Hand mit dem Erwerb gewisser Fähigkeiten in den Methoden der

Mathematik. Geometrie, Formeln, Gleichungen sind aus diesem Grund Bestandteil der mathematischen Allgemeinbildung (Winter 1996).

Weitere allgemeinbildend bedeutsame Stärken der Mathematik sind das Arbeiten mit Gesetzmäßigkeiten, die Erstellung einer deduktiven Ordnung zwischen Aussagen, die Suche nach Symmetrien und schließlich die Argumentation und Beweisführung (Winter 1996).

Als Beispiel für einen kreativen Umgang mit den mathematischen Fertigkeiten nennt Winter die schrittweise Zerlegung und Umgruppierung von zwei Quadraten, die schließlich zum anschaulichen Beweis der Pythagoras-Formel gedeihen (Winter 1996).

- (3) „In der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben“ (Winter 1996, S. 37).

Mit der Mathematik erfolgt eine Schulung des Denkens, die auch als der „formale Bildungswert der Mathematik“ bezeichnet wird. Die allgemeine Praxis des Denkens wird in geordnete Bahnen gelenkt, damit geht auch eine Ordnung des Sprechens einher (Winter 1996).

Problemlösefähigkeiten in jeglichem Zusammenhang erschließen sich aus der Einübung heuristischer Strategien und mentaler Techniken wie z.B.: Auffinden von Analogien, Klassifizieren und Anordnen. Kontrollmöglichkeiten werden eingesetzt, um die erarbeiteten Ergebnisse zu reflektieren. Misserfolge und Fehler werden einer objektiven Beurteilung zugänglich gemacht (Winter 1996).

Für jede wissenschaftliche Thematik von großer Bedeutung sind die Gesetze der Logik und der Umgang mit Statistik und Wahrscheinlichkeiten. Sehr wichtig ist auch ein Verständnis für Modellbildungen, mit denen Fragen des Lebens in eine mathematische Form gebracht werden, und eine Einsicht in ihren Entstehungsprozess mit seinen Motivationen und Fragestellungen (Winter 1996).

Nach der Erläuterung der drei Grunderfahrungen und ihrem Stellenwert für die Allgemeinbildung beklagt Winter die häufig geäußerten Vorschläge, den Mathematikunterricht als Sache für Spezialbegabungen anzusehen und seine Rolle im Curriculum der

Allgemeinbildung in Frage zu stellen. Er plädiert dafür, den Unterricht eher zu verbessern und den Lehrern und Lehrerinnen schon in der Ausbildung den Blick auf die pädagogischen Implikationen ihres Faches zu schärfen (Winter 1996).

Für den Analysisunterricht schlägt Winter einige Anknüpfungspunkte vor, um den Fachinhalt aus möglichst vielen Blickwinkeln zu beleuchten und ihm einen Stellenwert in der Allgemeinbildung zu verschaffen (Winter 1996, S. 46):

- *Ideengeschichte der Analysis (Archimedes, Cavalieri, Fermat, ...)*
- *Anwendungen in Naturwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Sozialwissenschaften mit ihren je eigenen Ausformungen der Begriffe; Beziehungen zur Erkenntnistheorie und Logik*
- *fundamentale Begriffe, die auch über die Analysis hinausweisen, wie Approximation, Algorithmus, Unendlichkeit, Iteration, Extremwert*
- *Wachstumsvorgänge, Ortsbewegungen, Formänderungen im alltäglichen Leben*
- *qualitativ-umgangssprachliche Beschreibungen, bildliche Darstellungen (Graphen, graphisches Differenzieren und Integrieren, ...), formale Darstellungsweisen und ihr Zusammenhang*
- *Probleme und (scheinbare) Paradoxien des Unendlichen (beständiges und trotzdem nicht grenzenloses Wachstum unendlicher geometrischer Reihen; Zenons Paradoxien; „null sein“ vs. „null werden“, ...)*
- *Angebot von Aktivitätsfeldern (reale statistische Daten, empirische Graphen von Funktionen, mechanische Modelle realer Phänomene, ...)*

In der pädagogischen Literatur werden die drei Grunderfahrungen von Winter gerne als fundamentale Grundlage für den Mathematikunterricht angeführt (z.B.: Greefrath et al. 2016, Danckwerts & Vogel 2006) und mit G1 bis G3 bezeichnet.

Besonders die ersten beiden Grunderfahrungen stellen zwei Gesichtspunkte des Mathematikunterrichts dar, die Spannungen erzeugen. Es sind zwei Seiten einer Medaille, die die Mathematik zu einer interessanten Wissenschaft machen (Danckwerts & Vogel 2006).

Die dritte Grunderfahrung bezieht sich auf heuristische Fähigkeiten (Danckwerts & Vogel 2006): „Sie sind eingebettet in eine *intellektuelle Haltung*, zu der auch die Bereitschaft gehört, sich frei, kreativ und positiv gestimmt einer gedanklichen Herausforderung zu stellen“ (Danckwerts & Vogel 2006, S. 6).

2.1.2. Mathematik als Produkt und Prozess

Die drei Grunderfahrungen müssen vernetzt und abwechslungsreich in den Unterricht integriert werden. Um sie bestmöglich entwickeln zu können, muss der Charakter der Mathematik und der Umgang damit im Unterricht analysiert werden. Mathematik kommt sowohl als Produkt als auch als Prozess vor, und beide Seiten sind wichtig und wesentlich, um sie vollständig zu vermitteln. Um eine Übersicht zu bekommen, soll hier ein Vergleich präsentiert werden:

Mathematik als Produkt	vs.	Mathematik als Prozess
Isolierte Probleme mit eindeutiger Lösung		Vernetzte Problemfelder mit vielfältigen Lösungen
Vermittlung und Anwendung eines Kalküls		Einsichtige Erarbeitung eines Kalküls
Im vorgegebenen mathematischen Modell arbeiten		Realität modellieren
Konvergente, ergebnisorientierte Unterrichtsführung		offene, prozessorientierte Unterrichtsführung
Fehler als Zeichen mangelnder Produktbeherrschung		Fehler als Anlass für konstruktive Verbesserungen
	insgesamt	
Abgeschlossenheit anstreben		Offenheit bewusst zulassen

(Danckwerts & Vogel 2006, S. 8)

2.2. Lehrplanbezug und Zentralmatura

Natürlich dürfen auch eine fachliche Aufzählung der im Unterricht behandelten Themen und die Liste der Grundkompetenzen, die in der Zentralmatura abgeprüft werden, hier nicht unerwähnt bleiben

2.2.1. Lehrstoff in der 8. Klasse

Der Lehrplan (BMBWF (Hrsg.) 2018) schreibt vor, dass bezüglich der Integralrechnung folgende Punkte in der 8. Klasse behandelt werden sollten:

Grundlagen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen“ allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i f(x_i) \cdot \Delta x$$

- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (z.B.: für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können
- Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können

Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)

- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können
- Das unbestimmte Integral kennen

(BMBWF (Hrsg.) 2018)

2.2.2. Grundkompetenzen der Zentralmatura für die Integralrechnung

Das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF (Hrsg.) 2019) schreibt die im Unterricht zu vermittelnden Grundkompetenzen vor (dabei steht „AN“ für den Themenkomplex Analysis), wobei hier nur die für die Integralrechnung relevanten Punkte zitiert werden:

Ableitungsfunktion/Stammfunktion

AN 3.1 die Begriffe *Ableitungsfunktion* und *Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können

AN 3.2 den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion bzw. zwischen Funktionen und Stammfunktion in deren graphischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können

Summation und Integral

AN 4.1 den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)dx$, $\int f(k \cdot x)dx$, bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können

AN 4.3 das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

(nach BMBWF (Hrsg.) 2019)

3. Begriff Integral

Um den Integralbegriff im schulischen Kontext besser verstehen zu können, folgt nun eine kurze Heranführung mittels einer historischen Betrachtung sowie eine fachliche Klärung der wichtigsten Definitionen und Sätze. Weiters werden die Vorbereitungen, die in der Sekundarstufe I für das Verständnis der Integralrechnung geleistet werden, vorgestellt. Ich habe mich bei dem Aufbau dieses Kapitels an dem Werk von Greefrath et al. (2016): „Didaktik der Analysis“ orientiert.

3.1. Historische Entwicklung

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde die Integralrechnung erstmals in den Schulen unterrichtet. Seither hat dieser Begriff dort unterschiedliche Bedeutungsschwerpunkte und Richtlinien erfahren. Der erste Grundstein, der für die Entdeckung der Integralrechnung gelegt wurde, war die annähernde Bestimmung von Flächeninhalten durch schon bekannte Flächeninhalte (Greefrath et al. 2016).

Archimedes, der 287-212 v. Chr. lebte, berechnete den Flächeninhalt, der von der nach ihm benannten Spirale (Abbildung 1) eingeschlossen wird, mit einer Methode, die wegweisend war für die späteren Berechnungen der Flächeninhalte mittels Integralrechnung: die Approximation der gesuchten Fläche durch Ober- und Untersummen (siehe Kapitel 3.2.1) (Walter 2004).

Die Spirale wird von einem Kreis eingeschlossen, welcher bei der Methode von Archimedes in n Sektoren unterteilt wird. Jedem Sektor werden zwei Kreise zugeteilt: einer berührt das Spiralsegment von innen und einer von außen. Die beiden Radien werden bestimmt, indem pro Sektor die beiden Punkte gewählt werden, die am weitesten und am nächsten vom Mittelpunkt entfernt sind. Mit dieser Abschätzung konnte Archimedes den Flächeninhalt F mit $F = \frac{1}{3}\pi a^2$ bestimmen (Sonar 2011).

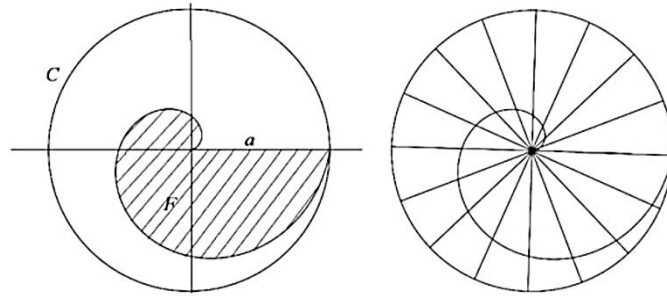


Abbildung 1: Von der Archimedischen Spirale eingeschlossene Fläche (Sonar 2011, S. 81)

Im 17. Jahrhundert konnten Kepler (1571-1630) und Cavalieri (1598-1647) mit ihren Berechnungen von Flächen und Rauminhalten ein weiteres Stück zur Entwicklung der Integralrechnung beitragen (Walter 2004).

Kepler beschäftigte sich mit der Berechnung von Volumina von Rotationskörpern, die er in unendlich kleine Teile teilte. Den Anstoß für seine Überlegungen gab ihm der Kauf von Weinfässern für seine Hochzeit, deren Volumina mit einer fragwürdigen und kaum genauen Methode berechnet worden waren (Sonar 2011). Anders als Kepler, der intuitiv voring und keine weiterführende Methode aus seinen Berechnungen entwickelte, ging Cavalieri systematischer vor, als er sich mit den Indivisibilen auseinandersetzte, und stellte dabei das erste Cavalierische Prinzip (Abbildung 2) auf. Unter Indivisibilen versteht man Bestandteile, die so klein sind, dass man sie nicht weiter teilen kann. Bereits in der Antike war die Idee von solchen Teilen bekannt (Walter 2004, Volkert 1988).

Erstes Cavalierisches Prinzip (für ebene Figuren): In einer Ebene werden zwei Figuren und die Schar aller zu einer Geraden parallelen Geraden betrachtet. Wenn für jede Gerade der Schar die beiden Schnitte mit den zwei Figuren gleich lang sind, so sind die beiden Figuren flächengleich.

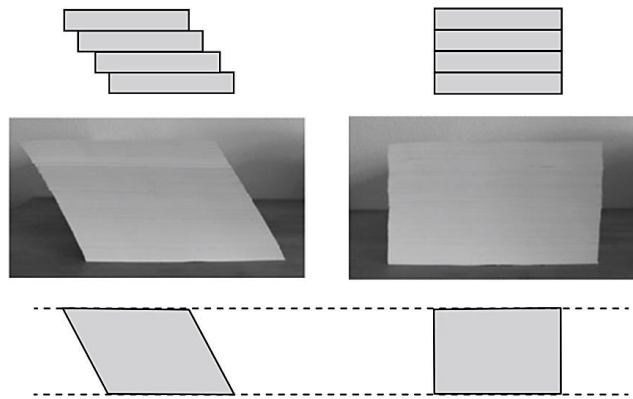


Abbildung 2: Flächenverwandlung durch Scherung schematisch und beim Papierstapel (Weigand et al. 2018, S. 168)

Drei Methoden der historischen Flächenbestimmung kann man unterscheiden (Abbildung 3): Zum einen gibt es die *Exhaustionsmethode*, bei der man eine unbekannte Fläche mit eingeschriebenen Vielecken annähern möchte (Volkert 1988).

Die *Kompressionsmethode*, die die Grundlage für die Entstehung der Begriffe Ober- und Untersumme (siehe Kapitel 3.2.1) bildet, erfasst einen unbekannten Flächeninhalt indem die Fläche ebenfalls von innen, aber auch von außen, durch regelmäßige Vielecke approximiert wird (Walter 2004).

Und als drittes gibt es die *Indivisibilen-Methode* von Cavalieri, der mithilfe seines ersten Prinzips die Fläche analysiert, indem er sie als „Gesamtheit aller Linien“ betrachtet (Walter 2004, S192).



Abbildung 3: Indivisibilenmethode, Exhaustionsmethode und Kompressionsmethode im Vergleich (Walter 2004, S. 193)

Newton (1643-1727) und Leibniz (1646-1716) gelten als die Väter der Integralrechnung. Unabhängig voneinander haben sie im 17. Jahrhundert die Integralrechnung entwickelt: Newton in England und Leibniz in Deutschland (Sonar 2011). Mit dem Hauptsatz der

Differential- und Integralrechnung formulierten sie das Herzstück der Analysis und bestimmten die Integralrechnung und die Differentialrechnung als zueinander inverse Operationen (Greefrath et al. 2016). Dabei entstand der erstmals von Leibniz verwendete Begriff Integral erst Ende des 17. Jahrhunderts, als Jacob Bernoulli den Vorschlag dazu machte (Volkert 1988).

Zuletzt waren noch Cauchy (1789-1857) und Riemann (1826-1866) mit ihren Definitionen mitbestimmend für den heutigen Integralbegriff. Neben dem bestimmten Integral als Grenzwert einer Summe definierte Cauchy uneigentliche Integrale und Flächenintegrale. Schließlich entwickelte Riemann 1854 das Riemann-Integral, das heute maßgebend ist für den Schulunterricht (Sonar 2011).

3.2. Fachliche Klärung

Um die möglichen didaktischen Zugänge zur Integralrechnung zu beschreiben, müssen die wichtigsten Begriffe, Definitionen und Sätze, die mit dem Integral in Zusammenhang stehen, erklärt werden. Es folgt eine fachliche und technische Aufarbeitung der Ober- und Untersumme, des bestimmten Integrals, der Integralfunktion, der Stammfunktion und schließlich des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Die folgenden Definitionen sind für alle stetigen Funktionen gültig. In der Schule werden nur stetige Funktionen im Zusammenhang mit der Integralrechnung behandelt.

3.2.1. Ober- und Untersumme

Aus der Entstehungsgeschichte der Integralrechnung wissen wir: Der Flächeninhalt einer krummlinig begrenzten Form wird bestimmt, indem man bekannte Figuren verwendet, mit denen die gesuchte Fläche angenähert wird. Auf dieser Grundlage beruht auch die Idee der Ober- und Untersumme. Wir definieren wie folgt:

Definition: Ober- und Untersumme

Gegeben ist eine auf $[a; b]$ stetige Funktion f . Zerlegt man das Intervall $[a; b]$ in n gleich große Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, und bezeichnet mit $m_1, m_2, \dots, m_n$ die Minimumstellen und mit $M_1, M_2, \dots, M_n$ die Maximumstellen von f in den einzelnen Intervallen, dann nennt man

$$\begin{aligned} U_n &= \Delta x \cdot f(m_1) + \Delta x \cdot f(m_2) + \dots + \Delta x \cdot f(m_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(m_i) \quad \textbf{Untersumme von } f \text{ in } [a; b]. \\ O_n &= \Delta x \cdot f(M_1) + \Delta x \cdot f(M_2) + \dots + \Delta x \cdot f(M_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(M_i) \quad \textbf{Obersumme von } f \text{ in } [a; b]. \end{aligned}$$

In den Abbildungen 4 und 5 sieht man jeweils die Obersumme und Untersumme von der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $[0,5; 2,5]$ mit $n = 4$ grafisch dargestellt.

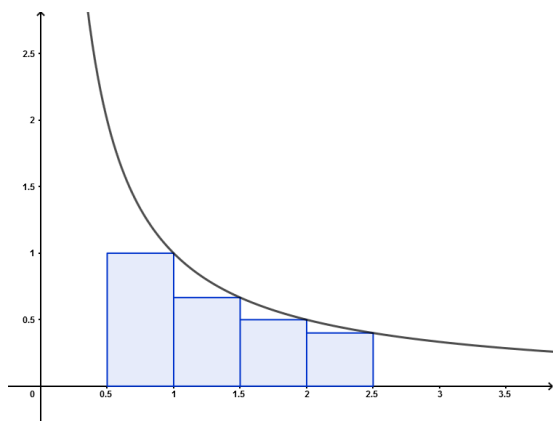


Abbildung 4: Untersumme

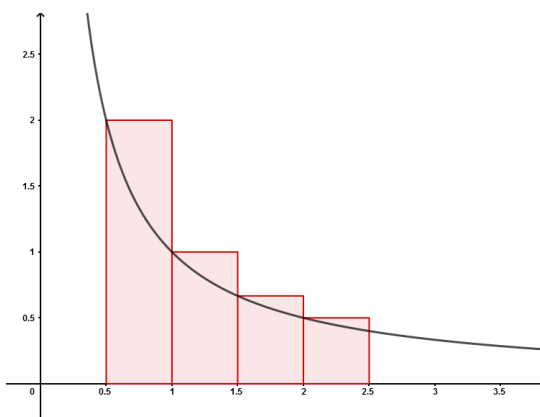


Abbildung 5: Obersumme

Nun, da wir die Folgen von Ober- und Untersumme definiert haben, kann das (bestimmte) Integral als Grenzwert von diesen definiert werden (Greefrath et al. 2016). Der Aufbau der Theorieeinführung und damit die Definition des Integrals sind nicht in allen Schulbüchern einheitlich. Je nachdem, welcher Zugang gewählt wird, mit dem man den Integralbegriff zuerst beleuchtet, wird das Integral mithilfe von Ober- und Untersumme oder mit der Stammfunktion definiert. In Kapitel 5 wird darauf näher eingegangen, und es werden die verschiedenen Zugänge vorgestellt.

3.2.2. Bestimmtes Integral

Definition: Bestimmtes Integral

Sei f eine in einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definierte und beschränkte Funktion.

Wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$$

so heißt diese Zahl das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a; b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet, die Funktion f heißt dann integrierbar über $[a; b]$.

Der so definierte Integralbegriff ist das *Riemann-Integral*. Weitere Definitionen des Integralbegriffs, die für die Schule nicht relevant sind und hier nur kurz erwähnt werden sollen, wären zum Beispiel das einfache und für weniger Klassen an Funktionen integrierbare Regelintegral und das für höhere universitäre Mathematik bedeutsame Lebesgue-Integral mit dem größten Umfang an Funktionsklassen (Greefrath et al. 2016).

Es gibt zwei verschiedene Schreibweisen für das Integral (Greefrath et al. 2016):

$$\int_a^b f \qquad \int_a^b f(x) dx$$

Für den Schulunterricht ist es allerdings sinnvoll, nur die übliche von Leibniz verwendete Schreibweise (rechts) zu verwenden, da die Schüler und Schülerinnen durch verschiedene Schreibweisen nur unnötig verwirrt werden.

Bei stetigen Funktionen ist die Handhabung der Bestimmung des Integrals einfacher. Hier kann man, wie bei den anderen Definitionen, äquidistante Zerlegungen wählen und einen beliebigen Funktionswert innerhalb des Teilintervalls auswählen. Nimmt man zum Beispiel die rechte Intervallgrenze, dann sieht das Integral folgendermaßen aus (Greefrath et al. 2016):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right).$$

Ist nun die Funktion monoton wachsend, dann wird damit die Obersumme gebildet, ist die Funktion monoton fallend, die Untersumme, ist sie weder noch, dann etwas dazwischen. Um das Integral konkret zu berechnen, betrachten wir folgendes Beispiel (Greefrath et al. 2016):

Wir verwenden die Funktion f mit $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; b]$ und berechnen mithilfe der Formel (Greefrath et al. 2016):

$$\frac{b}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(i \frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \frac{b^3}{3}.$$

Und daraus folgt:

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

(Greefrath et al. 2016, S. 226).

In der Schule wird die Definition des bestimmten Integrals nur mit stetigen Funktionen angegeben.

Bevor wir zum Herzstück der gesamten Analysis und der Grundlage der Integralrechnung vorstoßen können, nämlich zum Hauptsatz, der den Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung herstellt und diese als „inverse Operationen“ klassifiziert, müssen wir noch zwei benötigte Begriffe definieren: die Stammfunktion und die Integralfunktion (Greefrath et al. 2016).

3.2.3. Stammfunktion

Das Integral kann auch mithilfe der Stammfunktion definiert werden, worauf in Kapitel 5 näher eingegangen wird.

Definition: Stammfunktion

Die auf einem Intervall I definierte Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ wird betrachtet. Eine *Stammfunktion* von f ist eine differenzierbare Funktion F , deren Ableitung gleich f ist. Kennt man eine Stammfunktion von f , so sind auch alle durch Addition einer Konstanten erhaltenen Funktionen weitere Stammfunktionen. Zwei beliebige Stammfunktionen F und G von f wiederum unterscheiden sich lediglich durch eine Konstante, d.h., es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = G(x) + c$.

3.2.4. Integralfunktion**Definition:** Integralfunktion

Ist f über jedem abgeschlossenen Teilintervall von I integrierbar und ist $a \in I$, so heißt die Funktion

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ für alle } x \in I$$

Integralfunktion von f zur unteren Grenze a .

Abschließend wird noch der große Satz der Analysis vorgestellt, der die Verbindung von Integralfunktion und Stammfunktion beschreibt (Greefrath et al. 2016).

3.2.5. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Welche Bedeutung der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hat, ist unumstritten. Er ist nicht nur das Verbindungsglied zwischen den beiden großen Themen der Analysis und deren Techniken, sondern liefert auch ein mächtiges Werkzeug um Berechnungen durchzuführen (Knoche & Wippermann 1986).

Definition: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**Erster Teil**

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I stetige Funktion und $a \in I$. Dann ist die Integralfunktion F_a auf I differenzierbar und sie ist eine Stammfunktion von f , d.h.

$$F'_a(x) = f.$$

Zweiter Teil

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

„Nach dem ersten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist jede Integralfunktion einer stetigen Funktion eine Stammfunktion“ (Greefrath et al. 2016, S. 240). Dies macht es ohne großen Aufwand möglich, Stammfunktionen mithilfe der Differentialrechnung zu bestimmen.

Der zweite Teil ist für die konkrete Bestimmung von Integralen essentiell, die sich mit einer bekannten Stammfunktion berechnen lassen, womit das aufwändige Erarbeiten von Ober- und Untersumme und deren Grenzwerte erspart bleibt. Für den Schulunterricht ist der zweite Teil des Hauptsatzes entscheidender und kommt öfter zum Einsatz (Knoche & Wippermann 1986).

Bender erwähnt, dass bei idealer Präsentation der Integrationstheorie und des Integralbegriffs der Hauptsatz nur eine Zusammenfassung der bereits vorgestellten Inhalte darstellt und am Schluss behandelt werden sollte. „Seine Rolle könnte die einer *prägnanten Fassung* und Unterstreichung des erarbeiteten Sachverhaltes sein“ (Bender 1990, S. 124).

3.3. Flächenberechnung in der Sekundarstufe I

Für die Schüler und Schülerinnen braucht es, um so ein komplexes Thema wie die Integralrechnung verstehen und anwenden zu können, eine langjährige Vorbereitung und Annäherung an die wichtigen Begriffe und Ideen der Analysis. Unter den Leitideen *Messen* und *Algorithmus und Zahl* werden die ersten Bausteine für die Flächenberechnung mit der Integralrechnung und den Umgang mit unendlich kleinen Größen und der damit zusammenhängenden Infinitesimalrechnung gelegt (Greefrath et al. 2016).

Damit der Einstieg in die Integralrechnung auch gelingt und die Lernenden die nötigen Voraussetzungen mitbringen, um die abstrakten Inhalte der Integralrechnung zu verstehen, werden in der Unterstufe Strategien und Herangehensweisen erarbeitet, um Flächen und Volumina zu berechnen (Greefrath et al. 2016). In diesem Kapitel wird nur auf die Flächenbestimmung eingegangen, da sie für den Einstieg in die Integralrechnung wesentlich ist.

3.3.1. Strategie des Zerlegens und der Ergänzung

Die Flächenberechnung spielt in der Integralrechnung eine führende Rolle, besonders in der Schule. Die Berechnung von Flächen einfacher Figuren und die Additivität der Flächenberechnung sowie die Zerlegung und Ergänzung von Flächen mit unbekanntem Flächeninhalt wird in der Sekundarstufe I erarbeitet. Dies ist ein Grundstein für die Herleitung der Ober- und Untersummen und das verständige Arbeiten mit Integralen (Greefrath et al. 2016).

Schon am Anfang der Sekundarstufe I werden einfache Flächeninhalte bestimmt, indem sie mit Einheitsquadraten ausgelegt werden. Später werden Flächeninhaltsformeln von elementaren Figuren durch Zerlegung geometrisch hergeleitet. Zum Beispiel wird die Flächeninhaltsformel des Parallelogramms durch Zerlegen in ein Rechteck und zwei Dreiecke aufgestellt, indem die Teilflächen neu angeordnet werden und ein Rechteck ergeben (Greefrath et al. 2016).

Die Strategie des Zerlegens von Figuren in Teilfiguren, deren Flächeninhalt bekannt ist, könnte in der Schule mit der von Gauß entwickelten „Trapezformel“ erweitert werden (Abbildung 6) (Greefrath et al. 2016).

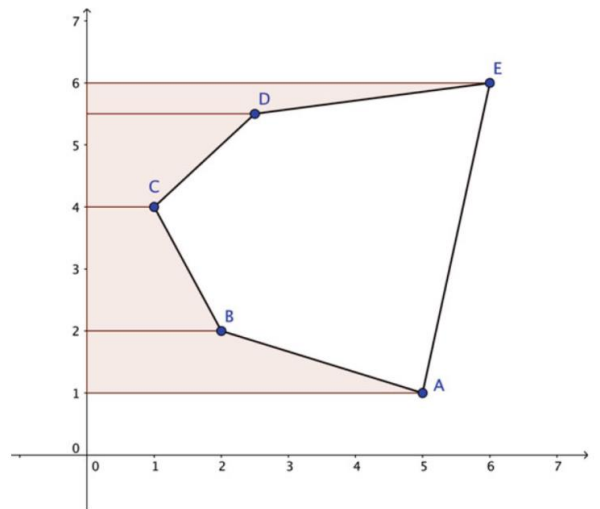


Abbildung 6: Flächenbestimmung eines Vielecks mit der Methode von Gauß (Greefrath et al., 2016, S. 232)

Wir betrachten die Eckpunkte des Vielecks und beschriften sie im Uhrzeigersinn mit $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ wobei der erste Punkt nochmal als $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ benannt wird. Es werden kleinere Trapeze gebildet, indem die Punkte mit der y-Achse durch parallele Linien verbunden werden, die mit dem Vieleck ergänzt ein großes Trapez bilden. Nun kann man den Flächeninhalt der gesuchten Fläche mithilfe der Trapezformel bestimmen (Greefrath et al. 2016, S. 231):

Trapezformel

$$A_{\text{Vieleck}} = \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \cdot (y_{i+1} - y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{y_{i+1} + y_i}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Die Trapezformel bietet einen Ausgangspunkt, um Berechnungen von krummlinig begrenzten Flächen numerisch zu erfassen (Greefrath et al. 2016, S. 231).

3.3.2. Flächeninhaltsbestimmung eines Kreises

Die Flächenberechnung des Kreises hat in der Vorbereitung für die Integralrechnung deswegen eine Bedeutung, weil auch hier verschiedene Wege erarbeitet werden, unbekannte Flächen zu erschließen. Dabei kommt ebenfalls die Methode des Zerlegens zum Einsatz, bei dem ein Kreis mit bekanntem Radius r und bekanntem Umfang U in Sektoren zerlegt wird, die dann zu einem Rechteck ergänzt werden. Das konstruierte Rechteck hat die

Seitenlängen r und $\frac{u}{2}$, welches nun leicht berechnet werden kann (Abbildung 7) (Greefrath et al. 2016).

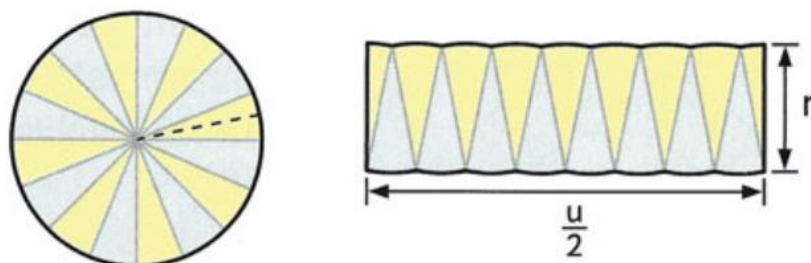


Abbildung 7: Zerlegung einer Kreisfläche zu einem Rechteck (Böer et al. 2008, zit. nach Greefrath et al. 2016, S. 232)

Eine andere Methode ist die Ausschöpfung bzw. die Einschreibung einer unbekannten Fläche mit bekannten Figuren. In der Schule wird zum Beispiel einem Kreis ein Quadrat eingeschrieben (Abbildung 8). Man sieht, dass die Fläche des Quadrats kleiner ist als die des Kreises. Wenn man nun die Anzahl der Seiten des eingeschriebenen Vielecks immer wieder verdoppelt, zuerst zu einem 8-Eck, dann zu einem 16-Eck und immer weiter zu einem n -Eck, dann wird die Fläche des Kreises, bei größer werdendem n immer genauer ausgeschöpft. Indem man den Kreis mit bekannten Figuren umschreibt, kann man dasselbe Verfahren anwenden. Im Endeffekt kommen beide Folgen von Flächeninhalten auf das gleiche Ergebnis (Greefrath et al. 2016).

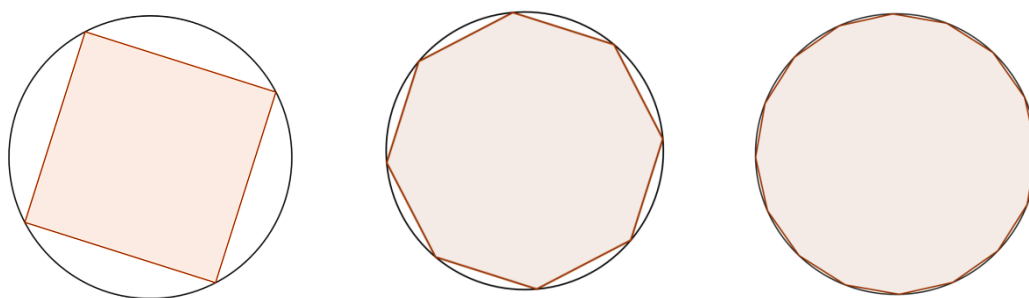


Abbildung 8: Abschätzung der Kreisfläche durch ein Quadrat, ein 8- und ein 16-Eck

Eine weitere Methode, die man in der Schule kennenlernt, allerdings in der Sekundarstufe II, wäre die Monte-Carlo-Methode (Abbildung 9). Man erzeugt mit einer Tabellenkalkulation Zufallspunkte, die sich gleichmäßig verteilen und eine geteilte Fläche bedecken. Wenn man nun bestimmt, wieviel Prozent der Punkte in jeder Fläche vorhanden sind, kann man sich

den Flächeninhalt als Anteil der Gesamtfläche berechnen. Diese Methode ist besonders interessant, weil sie für jede beliebige Fläche beziehungsweise Form geeignet ist. (Greefrath et al. 2016, S. 232).

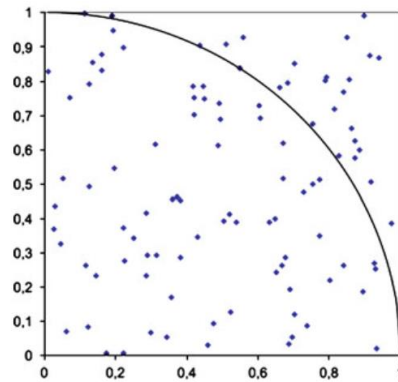


Abbildung 9: Monte-Carlo-Methode zur Flächeninhaltsbestimmung eines Viertelkreises (Greefrath et al. 2016, S. 234)

4. Aspekte und Grundvorstellungen

Im vorigen Kapitel wurden das Integral und seine Entstehungsgeschichte vorgestellt. Die optimale Einführung dieses komplexen Themas im Schulunterricht ist eine schwere Aufgabe, besonders weil das Wesen des Integralbegriffs kein eindeutiges ist und mehrere Betrachtungsmöglichkeiten zulässt (Danckwerts & Vogel 2006). Aus diesem Grund wird der Begriff nun noch genauer beleuchtet.

Zuerst soll ein Überblick darüber geschaffen werden, wie das Integral in der didaktischen Literatur beschrieben wird und welche Unterschiede zu finden sind. Weiters wird, am Werk von Greefrath et al. „Didaktik der Analysis“ orientiert, auf die technischen Aspekte des Begriffs eingegangen, die dann durch die inhaltlichen Grundvorstellungen ergänzt werden. Schließlich wird auch die Betrachtung von Bender (1990) vorgestellt, der den Integralbegriff in Flächeninhalts- und Stammfunktionsaspekt teilt.

4.1. Das Integral – verschiedene Blickwinkel

Zu allererst stellt man die simple Frage: „Was ist das Integral?“ Jedoch ist eine Antwort keineswegs einfach. Wie kaum ein anderer Begriff in der Schulmathematik kann das Integral aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden, die mit unterschiedlichen Auffassungen über Charakter und Interpretation des Integrals einhergehen. Um Klarheit zu schaffen, werden in der Fachdidaktik die zahlreichen Anschauungen über die Bedeutung des Integrals auf vielfältige Weise in Kategorien eingeteilt, wobei jedoch keine einheitliche Einteilung besteht, sondern die Autoren zahlreiche sehr unterschiedliche Ordnungsstrukturen vorstellen.

Bereits Bender zählt 1990 verschiedene Termini und Betrachtungen von unterschiedlichen Autoren auf: Tietze et al. (1982) unterscheiden ein Flächeninhalts- und ein Stammfunktions-„Konzept“. Bender selbst unterscheidet den Flächeninhalts- und Stammfunktionsaspekt (auf welche in Kapitel 4.4 näher eingegangen wird). Neben der Zweiteilung in Fläche und Stammfunktion spielt bei den folgenden Autoren mitunter noch der Gedanke des Mittelwertes eine Rolle. Blum & Törner (1983) sowie Tietze et al. (2000) nennen ihre Unter-

teilungen „Grundverständnisse“. Danckwerts & Vogel (1986) sprechen von „Sichten“ und Knoche & Wippermann (1986) beschreiben „Zugänge“ (Bender 1990).

Die „Ideen“ des Flächeninhaltes, der Stammfunktion und des Mittelwerts sind nicht die einzigen Betrachtungsweisen. Die Begriffe Produktsumme oder auch verallgemeinerte Summe (Blum & Törner 1983, Tietze et al. 2000, Greefrath et al. 2016), Kumulation (Bender 1990, Tietze et al. 2000, Danckwerts & Vogel 2006, Greefrath et al. 2016), Gesamteffekt (Danckwerts & Vogel 2006, Hußmann 2001) und Rekonstruktion (Danckwerts & Vogel 2006, Hußmann 2001, Büchter & Henn 2010, Greefrath et al. 2016) kommen in der Literatur als Schwerpunkte vor, um den Integralbegriff zu beschreiben und zu charakterisieren. Dabei herrscht bei der Strukturierung dieser einzelnen Punkte, ihrer Gewichtung sowie ihren ausgewählten Aufzählungen keine Einigkeit. Im Allgemeinen scheint die Vorstellung vom Kumulieren bei vielen Autoren einen besonderen Stellenwert zu besitzen (Greefrath et al. 2016).

In *einer* Begrifflichkeit scheinen sich die meisten Autoren und Autorinnen einig zu sein: Bei „Zugang“ handelt es sich um die Art und Weise, mit der man als Lehrkraft die Schüler und Schülerinnen in der Einführungsphase als erstes mit dem Thema Integral konfrontiert, da diese Vorstellung als prägend für das Grundverständnis vom Integral bei den Schülern und Schülerinnen angesehen wird. Auf die Zugangsmöglichkeiten und ihre Vor- und Nachteile wird in Kapitel 5 genauer eingegangen.

In dieser Arbeit wurden Bezeichnungen und Anschauungen gewählt, die der Einteilung von Greefrath et al. (2016) entsprechen. Ich habe mich für dieses Modell entschieden, weil es eines der aktuellsten ist und das Integral sehr ausführlich darstellt. Greefrath et al. beleuchten den Integralbegriff indem sie Aspekte und Grundvorstellungen des Integrals unterscheiden. Dabei könnte man den Vergleich zur Sprachwissenschaft wagen, dass die Aspekte die Syntax des Begriffs beschreiben und die Grundvorstellungen die Semantik des Begriffs ausmachen. Sie beschreiben diese Begriffe wie folgt:

„Ein *Aspekt* eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann“ (Greefrath et al. 2016, S. 17).

„Eine *Grundvorstellung* zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt“ (Greefrath et al. 2016, S. 17).

Während die Aspekte also die technische und strukturelle Seite des Integralbegriffs darstellen, geben die Grundvorstellungen dem Integral eine sinngemäße Bedeutung und beziehen sich eher auf den Prozess. Beide sind unerlässlich, um den Begriff vollends zu verstehen und anwenden zu können (Greefrath et al. 2016).

Dabei sprechen Greefrath et al. von drei Aspekte: Dem Produktsummenaspekt, dem Stammfunktionsaspekt, und dem Maßaspekt. Die Grundvorstellungen beinhalten den Flächeninhalt, die Rekonstruktion, den Mittelwert und die Kumulation. In Abbildung 10 werden alle Aspekte, Grundvorstellungen und deren Zusammenhang dargestellt. Bis auf die Grundvorstellung des Mittelwertes sind alle inhaltlich miteinander verbunden (Greefrath et al. 2016).

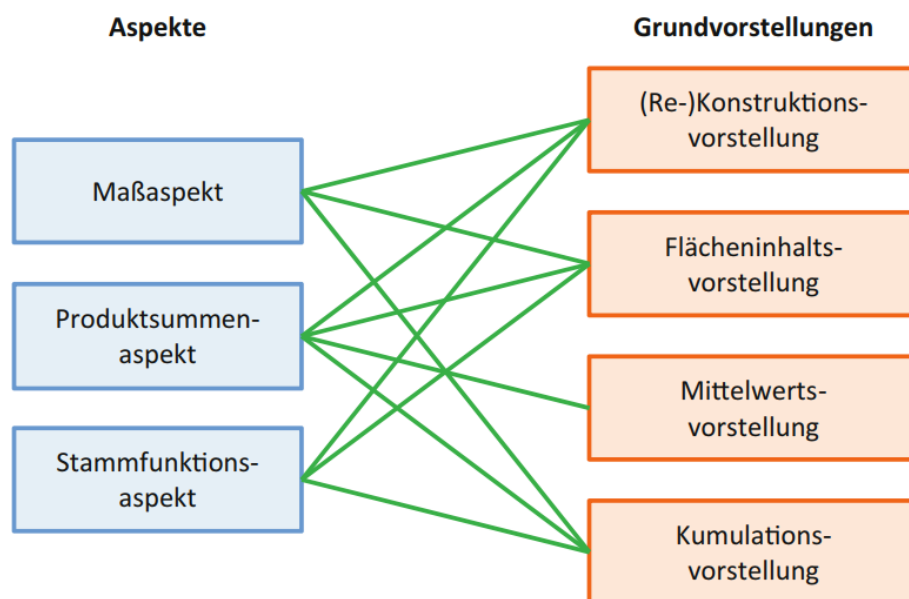


Abbildung 10: Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff (Greefrath et al. 2016, S. 238)

4.2. Aspekte

Im Wesentlichen unterscheidet man zwei Aspekte: den Produktsummenaspekt, und den Stammfunktionsaspekt. Greefrath et al. führen als dritten Aspekt noch den Maßaspekt an, dieser ist aber im Rahmen der Schulbildung nicht relevant, weshalb er hier nur kurz erwähnt werden soll. Mit den Aspekten wird mit einer fachlichen Klärung des Integralbegriffs begonnen, und es werden die technischen Inhalte vorgestellt, mit denen man den Integralbegriff definieren kann (Greefrath et al. 2016).

4.2.1. Produktsummenaspekt

Die Produktsumme ist ein Ausdruck, den man wie folgt anschreiben kann (Greefrath et al. 2016):

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

In der Integralrechnung wird die Produktsumme im Allgemeinen als Summe mit vielen Summanden und möglichst kleinen Produkten verwendet, wobei das Produkt aus einem Funktionswert $f(x)$ und einer Differenz aus Argumenten Δx besteht, die durch einen Grenzprozess ausreichend klein wird (Blum & Törner 1983):

$$\sum f(x) \cdot \Delta x.$$

Geometrisch gedeutet bedeutet das die Approximation des Integrals durch orientierte Rechtecksummen (Abbildung 11), bei denen die Differenz Δx beliebig klein wird und die Rechtecke beliebig schmal werden (Blum & Törner 1983).

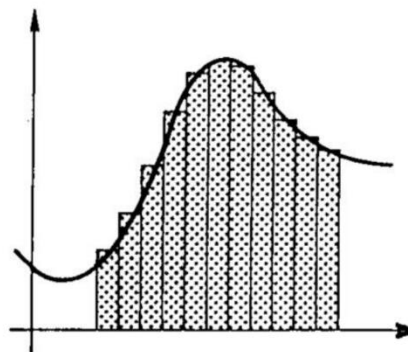


Abbildung 11: Geometrische Deutung der Produktsumme als Rechtecksumme (Blum & Törner 1983, S. 160)

Der Aspekt der Produktsumme ist nicht von dem Integralbegriff wegzudenken. Auf ihn stützen sich Ober-, Unter- und Zwischensumme, die für die Definition des Riemann-Integrals grundlegend sind. Je nachdem, wie man das Integral interpretiert, wird der Aspekt der Produktsummen deutlicher oder nicht (Greefrath et al. 2016).

Die Produktsumme kann ihrerseits wieder aus zwei verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden, je nachdem, ob man die Summenbildung oder die Produktbildung in den Vordergrund stellt. Eine Interpretation als verallgemeinerte Summe betrachtet die Berechnung des Grenzwerts von Unter- bzw. Obersummen und kommt vor allem im Rahmen der Kumulationsgrundvorstellung (siehe Kapitel 4.4.4) zum Tragen. Die andere Interpretation der Produktsumme, die den Schwerpunkt auf das verallgemeinerte Produkt legt und damit eher auf das Ergebnis der Berechnung fokussiert ist, tritt in den Vordergrund, wenn man mit physikalischen Größen arbeitet und eine Größe mithilfe von Produktsummen zweier anderer Größen berechnet. Zwei physikalische Zusammenhänge und schulrelevante Beispiele sind die Weglänge s , die aus der Produktsumme von Zeit t und Geschwindigkeit v berechnet werden kann (Greefrath et al. 2016):

$$s = v \cdot t \quad \text{bzw.} \quad s \approx \sum v(t) \cdot \Delta t,$$

und die physikalische Arbeit W , die sich aus der Produktsumme des Weges s und der Kraft F ergibt (Danckwerts & Vogel 2006):

$$W = F \cdot s \quad \text{bzw.} \quad W \approx \sum F(s) \cdot \Delta s.$$

Anders als die Stammfunktion, die auf den ersten Blick weniger mit der Idee der Fläche zu tun hat, wird dieser Aspekt mit der Flächeninhaltsvorstellung verbunden. Die Ausarbeitung von Ober- und Untersumme auf rein analytischem Wege, ohne auf die Fläche Bezug zu nehmen, hat in der Schule kaum eine Bedeutung. Die erstmalige Betrachtung der Produktsumme ist fast nur mit der geometrischen Idee der Rechtecksummen und damit dem orientierten Flächeninhalt umsetzbar. Deshalb unterscheidet Bender (1990), wie in Kapitel 4.1 schon erwähnt, statt der Produktsumme und der Stammfunktion den Flächeninhalts- und den Stammfunktionsaspekt (Bender 1990). In Kapitel 4.4 wird auf seine Ansichten zu den Aspekten genauer eingegangen.

4.2.2. Stammfunktionsaspekt

Wie in Kapitel 3.2.3 schon erklärt, ist die Stammfunktion F einer Funktion f eine differenzierbare Funktion, die abgeleitet wieder f ergibt. Der Aspekt der Stammfunktion stellt den Zusammenhang zwischen Differential und Integral in den Vordergrund und schlägt in der Schule erstmals die Brücke von der Differentialrechnung zur Integralrechnung. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beschreibt, wie der Zusammenhang zu verstehen ist (Greefrath et al. 2016):

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Er besagt, dass jede stetige Funktion f , die integriert wird, eine Stammfunktion dieser Funktion ergibt. Die Integralrechnung ist die inverse Operation zur Differentialrechnung. Sie reiht sich in die den Schülern und Schülerinnen schon bekannten Umkehroperationen, wie Addition & Subtraktion, Multiplikation & Division, Wurzel & Potenz usw., ein. Der zweite Teil des Hauptsatzes zeigt, wie man mithilfe einer Stammfunktion bestimmte Integrale berechnen kann (siehe Kapitel 3.2.5). Er kann auch als *Definition* für das Integral dienen, wie in Kapitel 5.1.2 ausführlich erklärt wird. Der Aspekt der Stammfunktion stellt deshalb eine wichtige Grundlage des Integralbegriffs dar (Greefrath et al. 2016).

Wie die Integral- und die Differentialrechnung zusammenhängen, kann man auch anschaulich in einem Richtungsfeld darstellen. Abbildung 12 zeigt die visuelle Herleitung der Stammfunktion von $f(x) = \frac{2}{3}x^2$. Es werden die Funktionswerte von f als Steigungen interpretiert und in das Koordinatensystem als kleiner Tangentenabschnitt eingezeichnet. Man berechnet zum Beispiel $f(1) = \frac{2}{3}$ und zeichnet im Richtungsfeld über der Stelle $x = 1$ überall die Steigung $\frac{2}{3}$ ein. Die Exaktheit ist davon abhängig, zu wie vielen Stellen man die Steigungen berechnet. Durch das Verbinden der Steigungen können mehrere Stammfunktionen von f eingezeichnet werden. Die Unterscheidung dieser Stammfunktionen liegt in einer additiven Konstante c . Dieses ist durch das Richtungsfeld leicht zu erkennen, da die Stammfunktion $F(x) = \frac{2}{9}x^3$ mit der Konstanten $c = 0$ nur entlang der y -Achse verschoben wurde. Mithilfe

des Richtungsfeldes lässt sich das unbestimmte Integral herleiten (siehe Kapitel 5.1.2) (Greefrath et al. 2016).

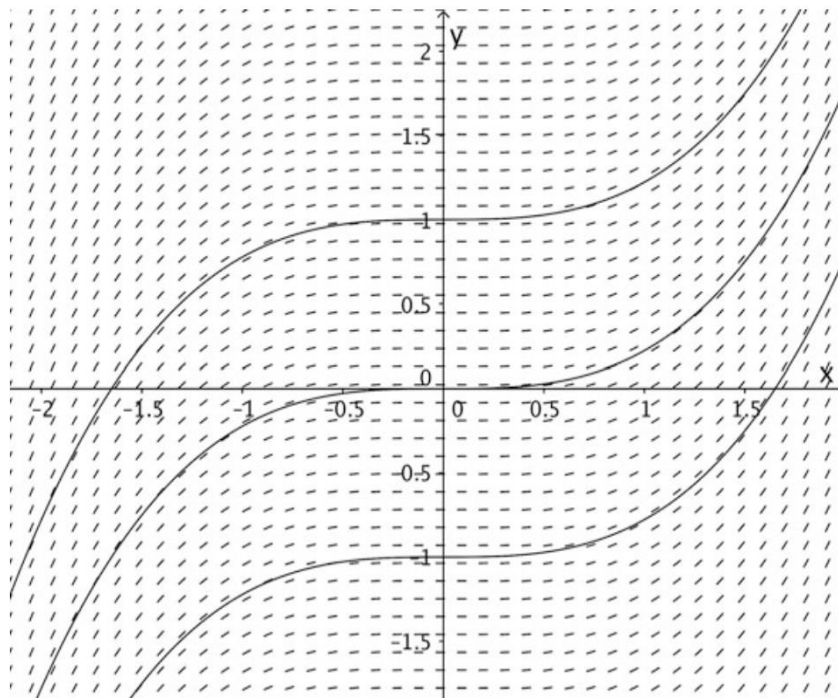


Abbildung 12: Richtungsfeld (Greefrath et al. 2016, S. 240)

4.3. Grundvorstellungen zum Integral

In diesem Abschnitt werden nicht so sehr fachliche als inhaltliche Bereiche der Integralrechnung beleuchtet. Es soll die grundlegende Absicht dieses Teilgebiets der Mathematik verständlich gemacht und die Frage geklärt werden: Was können wir mit dieser Integralrechnung erreichen und welchen Sinn macht sie (Greefrath et al. 2016)?

Die Grundvorstellungen, die Greefrath et al. unterscheiden, sind die Vorstellungen des Flächeninhaltes, der Rekonstruktion, des Mittelwertes und der Kumulation. In den folgenden Abschnitten werde ich auf jede Vorstellung näher eingehen und die zugehörigen Aspekte zuordnen (Greefrath et al. 2016).

4.3.1. Flächeninhaltsgrundvorstellung

Diese Vorstellung begründet in der Schule eine der beliebtesten Herangehensweisen an die Integralrechnung. Das Integral wird als Methode für eine Flächeninhaltsberechnung verstanden. Genauer: Es geht um die Fläche, die von der Funktion und der x -Achse in einem bestimmten Intervall eingeschlossen wird. Es ist wohl die Vorstellung, die den meisten Menschen nach der Schule im Gedächtnis bleibt, wenn sie an die Integralrechnung denken. Schließlich ist die Berechnung einer Fläche etwas sehr Vertrautes, da schon seit der Volksschule Teil des Mathematikunterrichts (Greefrath et al. 2016).

Im Grunde muss den Schülern und Schülerinnen vermittelt werden, dass das Integral ein hilfreiches Werkzeug ist, um eine Fläche zu berechnen, wobei man beachten muss, dass das Integral einen „orientierten Flächeninhalt“ als Ergebnis liefert. Das heißt, wenn die krummlinig berandete Fläche oberhalb der x -Achse liegt, dann erhalten wir ein positives Ergebnis durch das bestimmte Integral, die „positive Normalfläche“ (Jahnke & Wuttke 2001, S. 177), was auch wirklich dem Flächeninhalt entspricht, bei einer Fläche unterhalb der x -Achse errechnet sich jedoch ein negatives Ergebnis, die „negative Normalfläche“ (Jahnke & Wuttke 2001, S. 177) (Abbildung 13) (Greefrath et al. 2016).

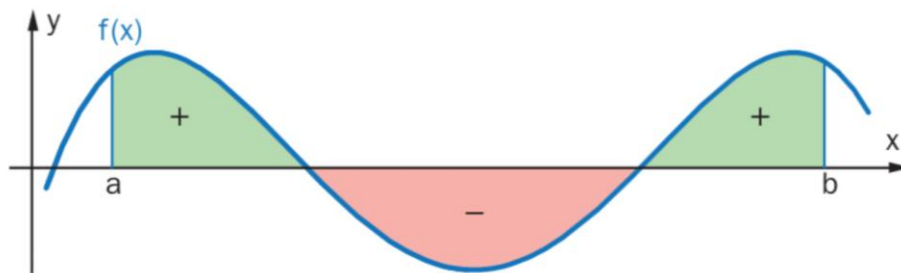


Abbildung 13: Positive und negative Normalfläche (Brand et al. 2015, S. 16)

Wenn nun der Graph der Funktion die x -Achse im betrachteten Intervall schneidet, erhalten wir als Ergebnis des Integrals eine Differenz, die sogenannte „Flächenbilanz“ (Schätz & Eisentraut 2013, S. 29) (Greefrath et al. 2016).

Es muss hier sorgfältig unterschieden werden zwischen dem Wert des Integrals und dem Flächeninhalt. Wie soeben beschrieben, kann der Wert des Integrals negativ sein. Ein

Flächeninhalt hingegen ist immer positiv. Der Flächeninhalt, der unter der x -Achse liegt, ist also der *Betrag* des Integralwertes. Wenn der Graph die x -Achse schneidet, muss man das Intervall teilen und die Teilflächen gesondert berechnen, und dies geschieht mit der Berechnung der Nullstellen (Greefrath et al. 2016).

Es gilt für eine Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ folgende Gleichung:

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$$

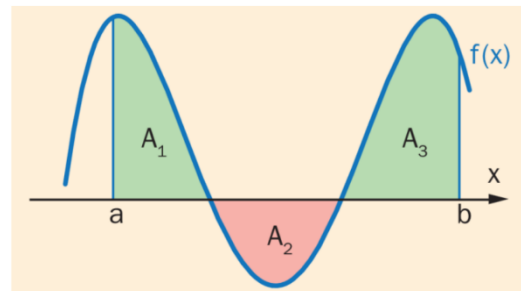


Abbildung 14: Flächen oberhalb und unterhalb der x -Achse (Brand et al. 2015, S. 16)

Die Flächeninhaltsvorstellung ist dem Produktsummenaspekt sehr nahe und wird oft mit der Einführung der Ober- und Untersumme und damit des Riemann-Integrals verbunden.

4.3.2. Rekonstruktionsgrundvorstellung

Die Idee der Integralrechnung als Rekonstruktion wird von vielen Autoren als bedeutend angesehen. Diese Vorstellung ist eine mit besonders vielen Interpretationsmöglichkeiten, hat enge Verbindung zu beiden Aspekten, und es können Zusammenhänge mit allen anderen Grundvorstellungen hergestellt werden. Wegen ihrer Vielseitigkeit ist sie besonders geeignet, den Schülerinnen und Schülern die Gesamtheit des Integralbegriffs zugänglich zu machen (Greefrath et al. 2016).

Man unterscheidet hier zwei Sichtweisen: die *Rekonstruktion* und die *Konstruktion* (Bender 1990). Bei der ersten wird aus der gegebenen Änderungsrate f' eine Funktion f erstellt. Die zweite bezieht sich darauf, eine Stammfunktion F von f zu finden. Bei der Rekonstruktionsvorstellung geht es also nicht nur darum, Informationen wiederherzustellen (Rekonstruktion), sondern auch um die Erschaffung von ‚neuen‘ Zusammenhängen (Konstruktion). Das Integral rekonstruiert etwas aus Änderungsdaten, die man vor sich hat, oder konstruiert etwas *Neues*. Der Kontext ist hier entscheidend. Je nachdem, ob man mit der (Re)Kon-

struktion Größen wiederherstellt, die man aus den Informationen der gegebenen Änderungsdaten erhält, oder ob man aus einer bekannten Zuordnung eine Stammfunktion erstellt, hat man es mit unterschiedlichen sinngebenden Inhalten zu tun (Greefrath et al. 2016).

Ein beliebtes Beispiel im Sinne der Rekonstruktion ist die Ermittlung des Lungenvolumens aus gemessenen Durchflussraten beim Ein- und Ausatmen: das Spirometer-Beispiel. Man misst mit einem geeigneten Gerät namens Spirometer, wie viele Liter Luft in einer Sekunde ein- bzw. ausgeatmet werden. In der folgenden Tabelle sieht man die erhobenen Daten, die beim Einatmungsprozess gemessen wurden (Greefrath et al. 2016).

Zeit in Sekunden	0	0,3	0,6	1,0	1,5	1,8	2,1	2,5	2,75	3
Durchflussrate in Liter / Sekunde	0	0,18	0,32	0,45	0,50	0,48	0,42	0,28	0,15	0

Damit haben wir also die Änderungsdaten einer Funktion f festgestellt. Durch einen Modellierungsprozess erhält man folgenden Funktionsgraphen von f' , der die Durchflussrate (Liter pro Sekunde) in Abhängigkeit von der Zeit (in Sekunden) angibt (Abbildung 15) (Greefrath et al. 2016):

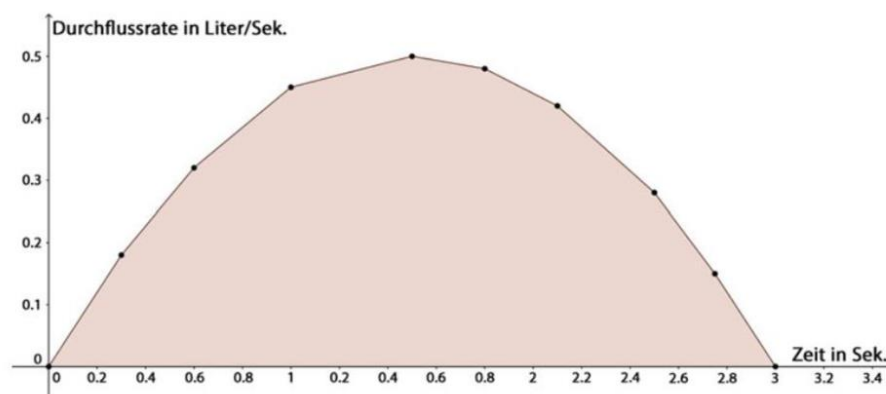


Abbildung 15: Grafische Darstellung der Daten aus der Spirometer-Aufgabe (Greefrath et al. 2016, S. 260)

Mit diesen Informationen können wir nun die Ursprungsfunktion des Luftvolumens stückweise mit dem Integral berechnen. Mithilfe der Integralrechnung können wir somit

eine neue Größe, das Atemzugsvolumen, erschließen, also rekonstruieren (Greefrath et al. 2016).

In Kapitel 4.2.2 haben wir bereits gesehen, wie eine Stammfunktion mithilfe eines Richtungsfeldes (re)konstruiert werden kann. In diesem Fall würde die Konstruktion im Mittelpunkt stehen.

Die Rekonstruktionsvorstellung birgt viele Hürden beim Verständnis der Schüler und Schülerinnen. Im Zuge einer Studie (Hoffkamp 2011) für Erstsemester-Studenten und Studentinnen wurde die Aufgabe (Abbildung 16) gestellt, den richtigen Graphen der Stammfunktion zu bestimmen. Nur 66% der Studenten und Studentinnen gaben die richtige Antwort (die zweite). Der falsche Graph, der am häufigsten gewählt wurde, war der rechte. Seine Wahl kann durch den „Graph-als-Bild-Fehler“ (Greefrath 2016, S. 249) erklärt werden (Hoffkamp 2011).

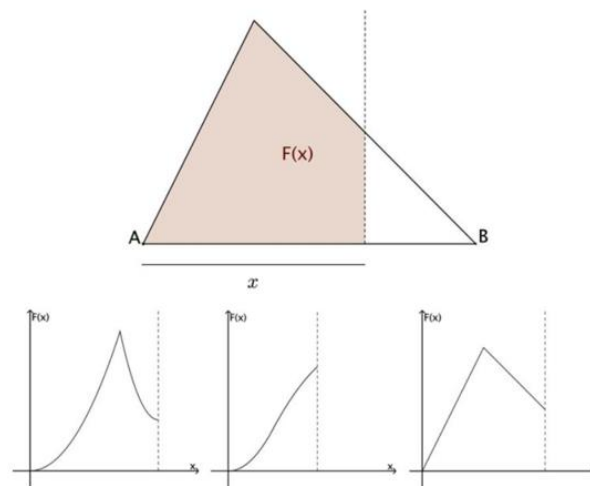


Abbildung 16: Testaufgabe zur Konstruktion einer Stammfunktion (Hoffkamp 2011, S. 12)

Danckwerts & Vogel sehen die Rekonstruktion als entscheidendes Grundverständnis für den Integralbegriff an (Danckwerts & Vogel 2006). In Kapitel 5.2.2 wird näher darauf eingegangen.

4.3.3. Mittelwertsgrundvorstellung

Neben der Rekonstruktionsgrundvorstellung, die viele verschiedene Facetten aufweist, ist die Vorstellung vom Mittelwert in Zusammenhang mit der Integralrechnung weniger vielschichtig. Sie steht nur in Verbindung mit dem Produktsummenaspekt und ist daher wegen ihrer mathematischen Geradlinigkeit klarer und anschaulicher (Greefrath et al. 2016).

Im Grunde geht es hierbei darum, mithilfe der Integralrechnung einen Mittelwert zu bestimmen, der über einem gewählten Intervall gültig ist. Wir sprechen hier von dem „mittleren Funktionswert“. Das bestimmte Integral wird berechnet und durch die Länge des Intervalls dividiert. Es wird also der durchschnittliche Wert in einem festgelegten Bereich ermittelt (Greefrath et al. 2016).

Der Gedanke des Integrals als Mittelwert baut auf dem Mittelwertsatz der Integralrechnung auf (Walter 2004):

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f im Intervall $[a; b]$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a; b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Man kann hier erkennen, dass der Wert $f(\xi)$ den Mittelwert angibt. Das Integral mit den Grenzen a und b wird durch die Intervalllänge dividiert. Somit ergibt sich durch Umformen nach dem Integral ein Produkt aus der Intervalllänge und dem mittleren Funktionswert (Greefrath et al. 2016):

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(\xi).$$

Anders als bei den Aspekten, die den Integralbegriff bestimmen und Teile der fachlichen Aufarbeitung sind, ist der Mittelwert eine sinngebende Vorstellung. Es handelt sich um eine „inhaltliche Deutung“ (Greefrath et al. 2016, S. 254).

Eine anschauliche Darstellung dieses Sachverhaltes bietet ein geometrischer Vergleich. Die Flächenbilanz, die mit dem Integral berechnet wird, hat den gleichen Wert wie der Flächeninhalt eines Rechteckes mit den Seitenlängen der Intervalllänge $b - a$ und dem durchschnittlichen Funktionswert $f(\xi)$ über dem betrachteten Intervall (Abbildung 17). Das kurvige Flächenstück wird gedanklich nivelliert und zu einem Rechteck mit dem Mittelwert als Höhe (Greefrath et al. 2016).

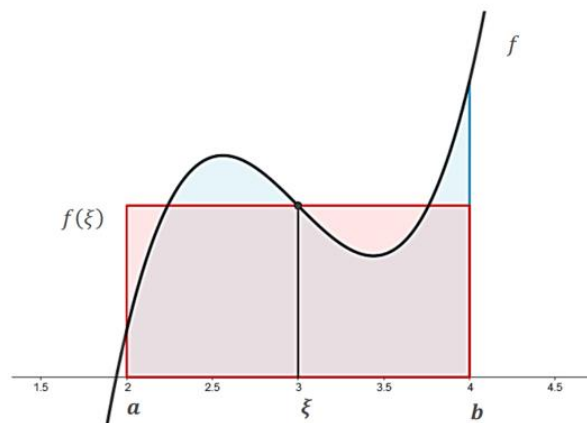


Abbildung 17: Visualisierung der Mittelwertsgrundvorstellung des Integrals

Wenn wir uns wieder dem Luftvolumen des Spirometer-Beispiels (Kapitel 4.3.2) zuwenden, dann sehen wir, dass die Berechnung des Integrals zu dem Wert führt, der angibt, wie viele Liter Luft man durchschnittlich pro Sekunde eingeatmet hat. Wenn das Integral der Änderungsrate des eingeatmeten Luftvolumens durch die Intervalllänge dieses Integrals dividiert wird, dann erhält man die durchschnittliche Durchflussrate M . Wenn man zum Beispiel die Funktion f in Abbildung 17 als funktionalen Zusammenhang von der Zeit x (in Sekunden) und dem von ihr abhängigen Luftvolumen $f(x)$ (in Liter) interpretiert von der 2. bis zur 4. Sekunden integriert und durch die Differenz dividiert, dann erhält man (Greefrath et al. 2016):

$$M = \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) = 1.$$

4.3.4. Kumulationsgrundvorstellung

Bei der Kumulationsgrundvorstellung steht der Prozess des schrittweisen Aufsummierens von Teilprodukten im Sinne einer allmählichen Ansammlung oder Speicherung im Vordergrund. Insofern unterscheidet sie sich von der Flächeninhaltsvorstellung, als die Betonung auf dem Zustandekommen der einzelnen Teilprodukte als Summe liegt, also auf dem Prozess, und nicht so sehr auf dem Endergebnis (Greefrath et al. 2016).

Unter dieser Vorstellung wird das Integral also vorwiegend als Produktsumme angesehen, die im geometrischen Sinne als summierte Rechtecksflächeninhalte verstanden wird, die beliebig schmal gestaltet werden, sodass sich diese Summe einem Grenzwert annähert. In dieser Hinsicht ähnelt die Kumulationsgrundvorstellung der Flächeninhaltsgrundvorstellung und ist verknüpft mit dem Produktsummenaspekt. Weiters kann mit dem Prozess des Kumulierens die Stammfunktion über die Änderungsrate rekonstruiert werden, indem man die „Steigungen“ anhäuft. Insofern ergibt sich ein Zusammenhang mit dem Stammfunktionsaspekt (Greefrath et al. 2016).

Die Kumulation ist eine hilfreiche Grundvorstellung bei der Bearbeitung von physikalischen Aufgabenstellungen, für die das Flächeninhaltskonzept die Zusammenhänge häufig nicht ausreichend verständlich repräsentiert (Jones 2013). Das folgende Beispiel zur Definition der physikalischen Arbeit kann die Vorstellung der Kumulation fördern. Wir fassen die Arbeit als Skalarprodukt von Kraft- und Wegvektor auf (Greefrath et al. 2016):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Wir betrachten die Kraft als wegababhängig und für kleine Wegstrecken als konstant. Ähnlich wie bei dem Spirometer-Beispiel in Kapitel 4.3.2 bilden wir die Produkte von der abschnittsweisen konstanten Kraft mit dem Wegabschnitt und summieren diese durch einen Kumulationsprozess auf (Greefrath et al. 2016):

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{s}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{s}_3 + \cdots + \vec{F}_n \cdot \vec{s}_n.$$

Nun wird der Sachverhalt als Funktion betrachtet, die die Kraft abhängig vom Weg beschreibt. Das Integral kann nun als verallgemeinerte Produktsumme gebildet werden und wird als Anhäufung von Teilprodukten verstanden:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s}.$$

Die Kumulation ist ein wesentlicher Grundgedanke des Integrierens und verbindet die beiden Aspekte des Integralbegriffs (siehe Kapitel 4.4.2). Im folgenden Kapitel wird darauf näher eingegangen.

4.4. Eine Betrachtung der Aspekte „Flächeninhalt“ und „Stammfunktion“

Wie in Kapitel 4.1 schon erwähnt, ist die Charakterisierung und Einteilung des Integralbegriffs nicht immer eindeutig, und die Autoren der didaktischen Literatur verwenden unterschiedliche Bezeichnungen. Allerdings gibt es seit jeher die Auffassung, dass der Begriff zweigeteilt ist, und Produktsummen- und Stammfunktionsaspekt stellen die komplexe Dualität des Integralbegriffs dar. Der Begriff lässt sich auf mehrere Arten definieren und je nach Blickwinkel scheint er eine andere Bedeutung zu haben. Die Aspekte sind die Grundlage für die beiden klassischen Zugänge der Integralrechnung, die seit ungefähr einem Jahrhundert im Klassenunterricht zu finden sind (siehe Kapitel 5.1). Eine andere Betrachtung dieser Zweiteilung, die etwas allgemeiner gefasst ist, weil sie den Produktsummenaspekt weniger abstrakt und eher geometrisch interpretiert und somit den Produktsummenaspekt mit der Flächeninhaltsvorstellung verbindet, liefert uns Bender 1990. Er unterscheidet den *Flächeninhalts-* und den *Stammfunktionsaspekt*.

Benders Analyse des Integralbegriffs wird hier vorgestellt, weil er durch genaue Beobachtung jene wesentlichen Punkte herausarbeitet, die für das Integral entscheidend sind, und diese die vermeintlichen Unterschiede der beiden Aspekte ausmachen. Wieso es sich aber dennoch um einen *einzigsten* Begriff handelt und wie sich die beiden Gesichtspunkte vereinigen lassen, beschreibt er in seinem Artikel „Zwei ‚Zugänge‘ zum Integralbegriff?“ (Bender 1990).

So teilt er – aufgrund der gängigen Unterscheidung – das Verständnis vom Integral im Rahmen der Schul-Analysis in den Flächeninhalts-Aspekt und den Stammfunktions-Aspekt, und nennt sie griffig „F- und S-Aspekt“ (Bender 1990, S. 103). Er beschreibt die damalige Situation mit folgenden Worten: „In der Analysis-Didaktik sind zwei Zugänge zum Integral-

Begriff geläufig: Über den Flächeninhalts-Aspekt definieren und dann mit dem Stammfunktions-Aspekt konfrontieren, oder umgekehrt.“ (Bender 1990, S. 102) Erst dann sollte der Integralbegriff als komplett angesehen und erkannt werden, dass beide Blickwinkel dasselbe beschreiben. Allerdings geht auf diese Weise meistens einer der beiden Aspekte unter. Die beiden Aspekte wurden von Bender jeweils mit einem Satz charakterisiert (Bender 1990):

„F-Aspekt: Für eine (stetige) Funktion f mit Definitions- und Wertebereich in $\mathbb{R}$ kann man für gewisse Teilmengen des Definitionsbereiches das Integral als Inhalt der (orientierten) Fläche zwischen erster Achse und Graph der Funktion im $\mathbb{R}^2$ erklären. S-Aspekt: ‚Das‘ Integral ist ‚die‘ Funktion, deren Ableitung f ist.“ (Bender 1990, S. 103)

Bei der Vorstellung seines idealen Zuganges steht die Definition, überhaupt die Erwähnung des Begriffs Integral an letzter Stelle. Er empfindet die Teilung der beiden Aspekte und die damit unterschiedlich eingeführten Definitionen als kontraproduktiv, um die vollständige Begriffsbildung zu vermitteln. „Die begriffliche Trennung von F- und S-Aspekt sollte als nicht existent angesehen werden (= Hauptsatz)“ (Bender 1990, S. 105). Je nachdem, welcher Aspekt im Vordergrund steht, bildet die Arbeit damit bei Schülern und Schülerinnen unterschiedliche „Grundvorstellungen und -verständnisse“ (Bender 1991, S. 48) heraus. Er spricht in dem Zusammenhang auch von Prägung, womit er nochmal betont, welche Nachteile eine einseitige Herangehensweise hat, denn nach einer Prägung ist alles Weitere zweitrangig (Bender 1990).

Seine Auffassung von der besten Herangehensweise würde vorab eine Klärung und Aufarbeitung beider Aspekte und ihrer Verkettung miteinander bedeuten, weiters die Erkenntnis, dass die beiden Aspekte nicht grundverschieden sind, ja ihre Differenzierung sich sogar auf ganz feine Unterschiede begrenzt und auf mathematischer Ebene nicht existiert. Nichts anderes bringt der Hauptsatz auf den Punkt (Bender 1990).

„Bei sinnhafter, inhaltlicher, anschaulicher Behandlung stimmen aber die beiden Aspekte weitgehend überein. Es wird darauf plädiert, zuerst diese Übereinstimmung zu erarbeiten und darauf aufbauend das Integral einzuführen.“ (Bender 1990, S. 102)

Wie das konkret auszusehen hat, gibt Bender nicht preis, allerdings verweist er auf die Arbeit von Kirsch (1976), auf die in Kapitel 5.2.1 eingegangen wird, der er große Bedeutung

zuschreibt. Merkmale, die üblicherweise dem einen oder anderen Aspekt zugeordnet werden, und damit ihre Unterschiede unterstreichen würden, möchte Bender aufarbeiten und zeigen, dass diese Einteilung unter näherer Betrachtung nicht standhält (Bender 1990).

4.4.1. Anschaulich vs. formal

Im Allgemeinen wird die Vorstellung einer Fläche unter der Kurve eher als anschaulicher wahrgenommen, und die Idee der Stammfunktion als formaler. Im Gegensatz zur Differentiation und deren Umkehrung ist der Flächeninhalt ein vertrauterer Objekt, das seit der Volksschule zum Einsatz kommt. Jeder Schüler und jede Schülerin hat sofortige Assoziationen dazu und verbindet ein Bild damit. Eben das birgt auch die Gefahr, dass das Integral fälschlicherweise nur als geometrischer „klassischer“ Flächeninhalt wahrgenommen wird. Es wird jedoch ein neuer Begriff eingeführt, und dieser muss auch als solcher erkannt werden. Bender verweist hier auf Kirsch (1976) und betont, dass die Verwendung des Flächeninhalts als Hilfsmittel stattfinden muss und unreflektiert eingesetzt werden sollte. Er beschreibt dazu eine Metapher, die den Voraussetzungen von Kirsch gerecht wird und „die funktionale Auffassung vom Flächeninhalt“ (Bender 1990, S. 112) und das Verständnis für ‚negative Flächen‘ hervorhebt (Bender, 1990).

Metapher: Be- und Entwässerungsmaschine

Ein Koordinatensystem wird als Landschaft betrachtet, bei der die x -Achse eine Straße darstellt. Der Graph der zu integrierenden Funktion begrenzt einen nassen Sumpf oberhalb der Straße und ein Wüstenstück, wenn er die Straße kreuzt und unterhalb ihr verläuft. Nun fährt ein Entwässerungs-Fahrzeug auf der Straße ab einer bestimmten Stelle weg und entwässert mit einem ausreichend langen Arm die Fläche des Sumpfes. Das gewonnene Wasser wird in einem Behälter gesammelt, und seine Menge steht für die bereits entwässerte Fläche. Um das Verständnis der negativen Integralwerte zu fördern, kann die Metapher erweitert werden und es findet nicht nur ein *Entwässerungsvorgang* bei dem Sumpf oberhalb der Ordinate statt, sondern auch eine *Bewässerung* der metaphorischen Wüste unterhalb der Ordinate. Der Behälter des Fahrzeuges wird entweder befüllt oder entleert und stellt somit die positiven und negativen Flächeninhalte dar, die nun die naive geometrische Bedeutung verloren haben (Bender 1990).

Nicht nur der Flächeninhaltsaspekt kann mithilfe sinngebender Bilder unterstützt werden, die Stammfunktion ebenfalls. Mithilfe eines Richtungsfeldes (Kapitel 4.2.2) lässt sich der Entstehungsprozess einer Stammfunktion ebenso bildlich darstellen (Bender, 1990).

Obwohl die Anschaulichkeit des Richtungsfeldes außer Frage steht, ist die Idee der Aufsummierung einzelner Steigungen zu einem „Funktionsverlauf“ schwerer zugänglich als die der Strecken zu einer Fläche. Auch hierzu beschreibt Bender eine Metapher, die die Vorstellung der kumulierten Steigungen zugänglicher machen könnte (Bender 1990):

Metapher: Lenkrad Autofahrer

Dabei betrachtet man im Koordinatensystem den Verlauf von zwei unterschiedlichen Stammfunktionen einer Funktion f . Man stellt sich je einen Autofahrer vor, der entlang der Graphen fährt. Dabei gibt deren Lenkradeinschlag den Wert der Funktion f an dieser Stelle an und erzeugt somit die Steigung der beiden Stammfunktionen (Bender 1990).

Beide Aspekte scheinen einen anschaulichen Charakter vorzuweisen und lassen sich nach Belieben formalisieren. Bei der didaktischen Vermittlung kommt es vor allem auch auf das Vorwissen der Schüler und Schülerinnen an. Wenn die Idee der Erstellung einer Stammfunktion durch Kumulieren von Steigungen Schwierigkeiten macht, dann vor allem deswegen, weil die Auseinandersetzung mit der Differentialrechnung noch nicht gefestigt genug ist und vielen Schülerinnen und Schülern möglicherweise die benötigte Versiertheit in diesem Gebiet fehlt (Bender 1990).

4.4.2. Kumulierung

Ein entscheidender Punkt bei der Betrachtung beider Aspekte ist der Vorgang des Kumulierens. Laut Bender ist es das, was den Flächeninhalts- und Stammfunktionsaspekt im Wesen ausmacht, und der Grund, warum sie nicht grundlegend zu unterscheiden sind (Bender 1990).

Wie in Kapitel 4.3.4 schon beschrieben, entsteht der Flächeninhalt durch Aufsummieren von Teilflächen bzw. das Bilden von verallgemeinerten Produktsummen (Blum & Törner 1983)

und die Stammfunktion, salopp formuliert, durch „Aufsummieren von Steigungen“. Beides geschieht in einem Kumulierungsprozess (Bender 1990).

Um dies deutlicher zu machen, betrachten wir die absolute Änderung der Funktion F , die durch Integration entsteht und mit der man den orientierten Flächeninhalt berechnen kann.

Im Zuge des Flächeninhaltsaspekts wird die absolute Änderung in einem kleinen Intervall ungefähr berechnet, indem man den Funktionswert $f(x)$ einer gegebenen Funktion f mit der Intervalllänge $x_2 - x_1$ multipliziert und dadurch eine Teilfläche bildet (Bender 1990):

$$F(x_2) - F(x_1) \approx f(x) \cdot (x_2 - x_1) \quad \text{für } x_1 < x < x_2.$$

Dabei erhält man durch Umformen die mittlere Änderungsrate für $f(x)$ (Bender 1990):

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{(x_2 - x_1)} \approx f(x).$$

Beim Bilden des Grenzwertes folgt der Schluss: Die Werte von f sind die lokalen Änderungs-raten der Integralfunktion F_a mit beliebiger Anfangsstelle a , und schließlich gibt $F_a(x)$ den Gesamteffekt der Kumulierung von a nach x an (Bender 1990).

Dasselbe gilt für die Stammfunktion: „Jede *Stammfunktion* gibt für jedes x den Gesamteffekt der *Kumulierung* von der Anfangsstelle $[a]$ bis x an“ (Bender 1990, S.115).

Dass die inhaltliche Verknüpfung der beiden Aspekte grundlegend ist, kann man auch bei der Bildung von Produktsummen sehen, die die genaue Umkehrung der Bildung von Differenzenquotienten ist. Bei der Entstehung der Produktsummen wird erst multipliziert um danach zu addieren, bei dem Differenzenquotienten subtrahiert um dann zu dividieren (Bender 1990).

4.4.3. Global vs. lokal

Das Kumulieren ist auch für den globalen Charakter des Integralbegriffs verantwortlich, anders als beim Differentialquotienten, der lokal zu verstehen ist. Bei dem S-Aspekt sowie dem F-Aspekt haben wir für eine Stelle x den Gesamteffekt der Aufsummierung ab einer gewählten Anfangsstelle, und demnach sind *beide* als global zu charakterisieren (Bender 1990).

4.4.4. Einzelwert vs. Funktion bzw. praktisch vs. theoretisch

Wenn das Integral als Fläche betrachtet wird, ist das Ziel oft, einen bestimmten *Einzelwert* zu berechnen. Der Flächeninhaltsaspekt wird in der Schule somit vorrangig mit anwendungsbezogenen Problemen in Verbindung gebracht. Die Integralfunktion zu bestimmen wird oft dem Stammfunktions-Aspekt zugeordnet aufgrund des Gedankens, dass die Stammfunktion die Funktion darstellt, deren Ableitung die Ausgangsfunktion beschreibt. Die *funktionale* Betrachtung des Flächeninhalts, für die nicht nur die Berechnung bestimmter Zahlenwerte vorgenommen wird, sondern bei der der Flächeninhalt in Verbindung mit der Integralfunktion gebracht wird, ist allerdings in vielen Vorschlägen von Autoren aufgegriffen worden (z.B.: Kirsch 1976). Für Bender ist es eine wichtige Ergänzung, die viele mathematische Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler fördert sowie den Anwendungsbereich der Integralrechnung vergrößert und die Wichtigkeit der Funktion selbst als essentielles mathematisches Objekt in den Vordergrund stellt. Es ist nicht eindeutig, dass der F-Aspekt sich auf die Berechnung einzelner Werte bezieht und demnach praktisch veranlagt ist und der S-Aspekt eher auf eine Funktion hinarbeitet und demnach theoretisch (Bender 1990).

4.4.5. Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Eines der Hauptargumente bei der Unterscheidung der beiden Aspekte ist das der Bestimmtheit. Die Mehrdeutigkeit und damit auch das unbestimmte Integral sind aber Teil beider Aspekte: Man beachte die *additive Konstante*, die die Stammfunktionen einer Funktion unterscheidet und den *Anfangswert* der Flächeninhaltsfunktion bestimmt. „Daß diese beiden Arten von Mehrdeutigkeit (fast) äquivalent sind, ist auf dem Weg zur Fast-Identifizierung der beiden Aspekte eine wichtige Einsicht“ (Bender 1990, S. 118).

Bender bezieht sich hier auf den Satz, dass Flächeninhaltsfunktionen Stammfunktionen mit Nullstellen sind, aber nicht jede Stammfunktion Nullstellen hat (Bender 1990).

Er plädiert für die Abschaffung des unbestimmten Integrals in der Schule und damit weiterführend für den Verzicht des für ihn irreführenden Integralsymbols $\int _ dx$. Für ihn stiftet diese Bezeichnung und eine in diesem Zusammenhang stehende Symbolik mehr Verwirrung als sie im Endeffekt hilft, das Verständnis für die Idee des Integrals zu festigen.

Die Lücken, die dadurch entstehen, stellen für ihn keine große Herausforderung dar, um sie in den weiterführenden Studien aufzufüllen und zu meistern. Ohne komplizierte Schreibweisen und Zweideutigkeit würde mehr auf das Grundverständnis und deren klare Bestimmtheit hingearbeitet werden (Bender 1990).

4.4.6. Geometrische Interpretation vs. Verkörperung in vielen Sachverhalten

Der Mathematikunterricht hat ganz allgemein den Anspruch, anwendungsorientierte Aufgaben zu behandeln. Diese stehen für sich als Selbstzweck mit dem Ziel, auch Anwendungen in außermathematischen Bereichen kennen zu lernen. Das vorrangige Ziel ist es aber, mit ihnen die *mathematischen* Begriffe und Inhalte zu erarbeiten. Rein geometrische Größen, wie Steigung, Länge und Fläche, innerhalb funktionaler Auffassungen ermöglichen es den Schülern und Schülerinnen neue Konzepte auf anschauliche Art und in einem einfachen kontextvollen Rahmen kennen zu lernen. Die Behandlung von Sachzusammenhängen in Wirtschaft, Physik und anderen Gegenständen ist aber notwendig, um die mathematischen Begriffe allumfassend zu verstehen. Die Schüler und Schülerinnen sollten dazu befähigt werden, Begriffe, die sie im Zuge des Analysisunterrichts kennen lernen, auch in solchen Bereichen verständlich einsetzen zu können (Bender 1990).

Eine Liste der wichtigsten gegenständlichen Zusammenhänge der Analysis-Didaktik veröffentlichten Blum & Törner 1982 in ihrem Standardwerk „Didaktik der Analysis“:

x	$f(x)$	$f'(x)$
Abszisse	Ordinate	Graphensteigung
Abszisse	Flächeninhalt bis x	Ordinate bei x
Höhe	Volumen bis x	Querschnitt bei x
Radius	Kreisfläche	Kreisumfang
Quadratseite	Quadratfläche	Halber Umfang
Zeit	Weg	Momentangeschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Beschleunigung
Zeit	Energie	Leistung

Zeit	Winkel	Winkelgeschwindigkeit
Zeit	Durchflussvolumen bis x	Stromstärke des Flusses bei x
Zeit	Elektrische Ladung	Elektrische Stromstärke
Zeit	Temperatur	Temperaturänderungsgeschwindigkeit
Weg	Intensität	Intensitätsänderungsrate
Länge	Masse bis x	Dichte bei x
Länge	Temperatur	Lokales Temperaturgefälle
Wellenlänge	Ausstrahlungsenergie	Energiedichte
Temperatur	Länge	Expansionskoeffizient
Temperatur	Wärmeinhalt	Spezifische Wärme
Stärke Messobjekt	Anzeige Messgerät	Empfindlichkeit Messgerät
Reizstärke	Empfindlichkeitsstärke	Empfindlichkeit eines Sinns
Zeit	Behaltenes bis x	Behaltensrate bei x
Zeit	Chemische Konzentration	Chemische Reaktionsgeschwindigkeit
Zeit	Masse chemische Substanz	Auflösungsgeschwindigkeit
Zeit	Quantität Population	Wachstumsgeschwindigkeit
Zeit	Anzahl Infizierter	Ausbreitungsgeschw. Epidemie
Zeit	Anzahl Informierter	Ausbreitungsgeschw. Nachricht
Einkommen	Einkommenssteuer	Spitzensteuersatz
Ausbringung	Kosten	Grenzkosten
Ausbringung	Erlös	Grenzerlös
Ausbringung	Wert	Grenznutzen
Einkommen	Konsumausgaben	Marginale Konsumquote
Zeit	Geldwert	Inflationsrate
Zeit	Anzahl Scheidungen bis x	Scheidungsrate bei x

(nach Blum & Törner 1983, S. 92)

Die Auseinandersetzung mit den eingebetteten Begriffen in einem anwendungsorientierten Zusammenhang ist für Bender ein ausschlaggebender Teil des Analysis-Unterrichts. Ihre Bedeutung steht heute außer Frage und ist in Schulbüchern sowie in der standardisierten Reifeprüfung stark vertreten. Der F- und der S-Aspekt finden in diesen Anwendungen wieder zueinander, und man erkennt durch den Kumulationsgedanken, dass sie im Grunde dasselbe sind. Durch die Verwendung von kontextbezogenen Inhalten lässt man den geometrischen Flächeninhalt hinter sich und geht auf eine „bereichs-unabhängige Bedeutung“ (Bender 1990, S. 120) der Kumulation zu. Somit sieht man auch hier wieder das Wesen beider Aspekte: „Angaben der Gesamtänderung der kumulierten Größe bis zu einem bestimmten Ort, Zeitpunkt, einer Menge usw.“ (Bender 1990, S. 120).

4.4.7. Konstruieren vs. Rekonstruieren

Die annähernde Gleichheit der beiden Aspekte ist mit jedem besprochenen Merkmal deutlicher geworden. Die Unterscheidung begrenzt sich im Grunde auf eine Betrachtungsweise der Ausgangs- und Zielfunktion. Wie in Kapitel 4.3.2 schon beschrieben: Je nachdem, ob man den gegebenen Zusammenhang als 1) eine primär gegebene Größe sieht und damit ihre Integration als *Neukonstruktion* oder 2) als Ableitung eines anderen funktionalen Zusammenhangs und damit die Integration als *Rekonstruktion* versteht, interpretiert man das Kumulieren innerhalb von 1) als Flächeninhaltsaspekt beziehungsweise von 2) als Stammfunktionsaspekt (Bender 1990).

Für Lernende ist es oft schwer einzuschätzen, welche der beiden Fälle vorliegen, besonders wenn es sich nur um geometrische Aufgaben handelt. Dies liegt an der fehlenden „Transformation“ (Bender 1990, S. 121) der sachbezogenen zu geometrischen Größen und dem Ausbleiben des offensichtlichen „Ersatz-Charakters“ (Bender 1990, S. 121).

Bei der Zeichnung findet stillschweigend eine Übertragung einer bestimmten Größe in eine Länge, Steigung oder Fläche statt: Eine Geschwindigkeit wird zu einer Steigung, oder der zurückgelegte Weg wird als Fläche verstanden. Ansonsten könnte man die Funktionen nicht darstellen. Dieser Prozess ist kaum bewusst, aber dennoch unproblematisch, vorausgesetzt das Wissen und die Fertigkeiten der Differentialrechnung sind verfügbar. Wenn nun schon mit geometrischen Größen gearbeitet wird, fällt es Schülerinnen und Schülern oft schwer,

Längen als Steigungen oder als Flächeninhalte zu interpretieren. Folgende Abbildung 18 zeigt den Zusammenhang zwischen der Transformation von einer in die andere geometrische Größe beim Ableiten sowie beim Integrieren. Durch das Darstellen eines Graphen erhöht sich die Umwandlung um eine weitere Dimension. Nicht nur die Änderung der Funktion in eine andere wird geleistet, auch der Transformationsgedanke von einer geometrischen Größe in eine andere findet statt. Links sieht man den eindimensionalen Schritt von f nach F und wieder zurück. Bei der rechten Darstellung kommt mit der Zeichnung noch ein weiterer Schritt dazu (Bender 1990).

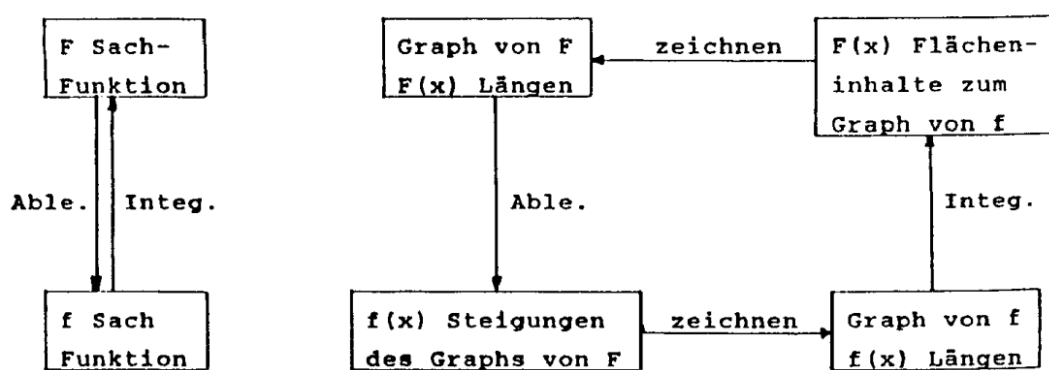


Abbildung 18: Vorgang des Transformierens von Ableiten und Integrieren (Bender 1990, S. 122)

Für Lernende ist der Perspektivenwechsel oft schwer. Eine weitere Hürde ist die aus der Differentialrechnung gewohnte Symbolik, die durch die Integralrechnung erweitert wird. Die gewohnten Buchstaben f und f' werden durch F ergänzt, allerdings kann sich deren Bedeutung auch verändern, je nachdem, wie der Blickwinkel auf die gegebene Funktion gewählt wird. F ist Stammfunktion von f , allerdings ist auch f Stammfunktion von f' . Und umgekehrt ist f' Ableitung von f und ebenso ist f Ableitung von F . Diese Verschiebung ist nicht als unproblematisch anzusehen. Für manche Schüler und Schülerinnen scheint es selbstverständlich zu sein und für andere verwirrend. Die Lehrperson tut gut daran, diese mögliche Verwirrung zu thematisieren und mit den Schülern die „fließende“ Bedeutung der Buchstaben zu üben und den Lernenden damit zu helfen, sich von den starren Bezeichnungen zu lösen, das Integrieren und das Ableiten auch als eine Art Prozess zu betrachten, der auf etwas Bestimmtes angewendet wird, nicht nur als Ergebnisfunktion.

Hier ist es wichtig, dass sowohl das Differenzieren als auch das darauffolgende Integrieren sinngemäß verstanden werden und das Übertragen der wesentlichen Eigenschaften in andere Zusammenhänge und Bereiche gelingt. Auch hier sind die Erarbeitung von Grundvorstellungen essentiell, die Schüler und Schülerinnen nicht nur für das konkrete Lösen von Aufgaben brauchen werden, sondern auch für das Transferieren in andere Bereiche, Probleme und funktionale Zusammenhänge.

Bender ist es wichtig, dass als erstes die Unterrichtenden den minimalen Unterschied als solchen sehen und dementsprechend ihren Einstieg in die Integralrechnung danach gestalten (Bender 1990).

Auch wenn er Bedingungen aufstellt und Hinweise skizziert, hat er keinen eigenen konkreten Zugang entworfen. Im folgenden Kapitel werden nun die bedeutendsten Zugänge zur Integralrechnung vorgestellt.

5. Die Zugänge zum Integralbegriff und ihre Vor- und Nachteile

In diesem Kapitel werden die bekanntesten Zugänge zur Integralrechnung beschrieben und zu jedem davon exemplarische Einstiege vorgestellt. Weiters werden die Vor- und Nachteile jeder Herangehensweise beleuchtet und mögliche Variationen und Methoden erläutert, die unterschiedliche Schwerpunkte setzen.

Begonnen wird mit den zwei klassischen Zugängen, wobei eine moderne Interpretation derselben vorgestellt wird, wenngleich auch auf die historischen Wurzeln eingegangen wird. Dabei habe ich mich hauptsächlich an den Einstiegsbeispielen von Greefrath et al. (2016) orientiert. Daraufhin folgen die moderneren Zugänge, die durch Hinführungen von Kirsch (1976) und Danckwerts & Vogel (2006) vertreten sind. Abschließend stelle ich noch spezielle Zugänge vor, die weniger populär sind und in der Schule seltener zum Einsatz kommen, allerdings interessante Ideen beinhalten.

5.1. Die klassischen Zugänge

Von der Entstehung des Integralbegriffs ausgehend, kann man zwei Wurzeln erkennen, die unterschiedliche Betrachtungen möglich machen. Die Integralrechnung nach Leibniz hatte den Schwerpunkt auf dem verallgemeinerten Summationsprozess, während Newton eher die *Integralfunktion* als Inverse der Differentiation betrachtete (Blum & Törner 1983).

Aus beiden kann man Zugänge ableiten, deren Gewichtung auf diesem Unterschied beruht. Die beiden klassischen Zugänge sind somit:

- 1) die Einführung über den Flächeninhalt, die eher den Produktsummenaspekt bedient,
- 2) die Einführung über die Umkehrung der Differentialrechnung, die man dem Stammfunktionsaspekt zuschreiben kann.

5.1.1. Bestimmung der Fläche unter einem Funktionsgraphen

Die Erschließung des Integrals über den Flächeninhalt ist eine beliebte Methode. Mit der Berechnung von Flächen, die von krummlinigen Kurven begrenzt werden, findet sich der Anschluss an die Sekundarstufe I, in der Flächen von Dreiecken, Vierecken, regelmäßigen n -

Ecken und des Kreises berechnet werden. Allgemein wird dieser Zugang als besonders anschaulich empfunden, nicht zuletzt, weil eine geometrische Darstellung notwendig ist und der Flächeninhalt und die Flächenberechnung etwas lang Vertrautes sind (Knoche & Wippermann 1986).

In Kapitel 3.3 wurden verschiedene Methoden vorgestellt, um eine krummlinige Fläche, wie zum Beispiel die eines Kreises, zu berechnen. Wir erschließen die unbekannte Fläche mithilfe von bekannten Flächen und nähern uns immer mehr an, indem die Unterteilungen immer kleiner werden. Für die Annäherung durch bekannte Teilflächen verwendet man diesmal allerdings nur Rechtecke. Greefrath et al. stellen in „Didaktik der Analysis“ eine Aufgabe vor, die sich für diesen Zugang gut eignet und in mehreren Schulbüchern zum Einsatz kommt (Greefrath et al. 2016).

Man berechnet die Fläche unter der Kurve $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 1]$. Zunächst teilt man das Intervall in n gleich große Teile, mit $\Delta x = \frac{1}{n}$, und nähert dann die Fläche von „oben“ durch umschriebene und von „unten“ durch eingeschriebene Rechtecke an. Das führt uns zu den Definitionen der Ober- und Untersummen, die durch die Flächenberechnung anschaulich hergeleitet werden (siehe Kapitel 3.2.1) (Greefrath et al. 2016). In Abbildung 19 sieht man eine Zerlegung des Intervalls mit $n = 4$ und $\Delta x = \frac{1}{4}$ im Intervall $[0; 1]$.

Untersumme: $\Delta x = \frac{1}{4}$

$$U_4 = f(0) \cdot \frac{1}{4} + f(0,25) \cdot \frac{1}{4} + f(0,5) \cdot \frac{1}{4} + f(0,75) \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{32}$$

Obersumme: $\Delta x = \frac{1}{4}$

$$O_4 = f(0,25) \cdot \frac{1}{4} + f(0,5) \cdot \frac{1}{4} + f(0,75) \cdot \frac{1}{4} + f(1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{32}$$

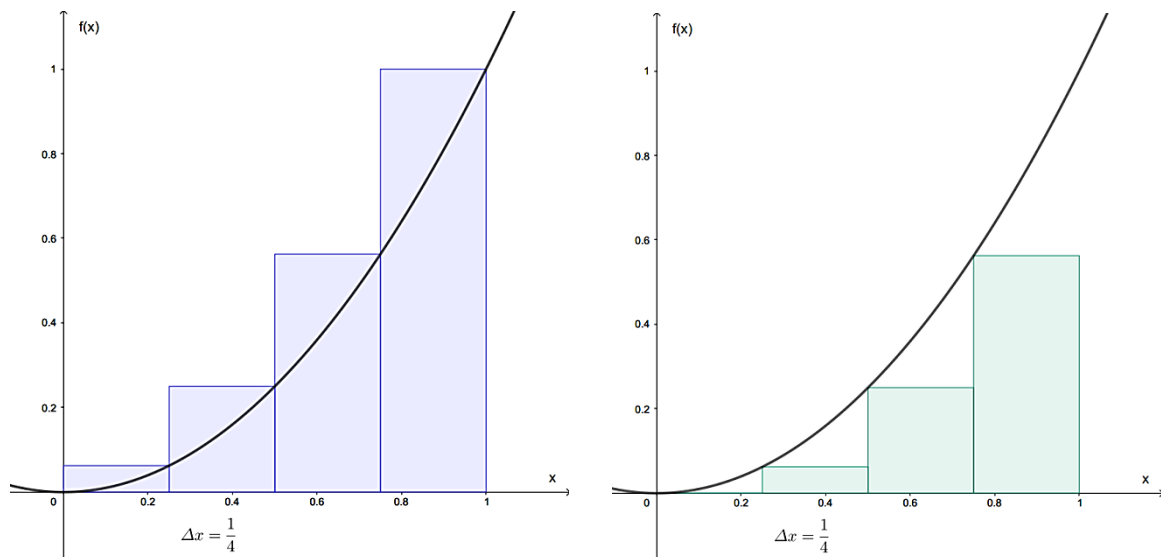


Abbildung 19: Darstellung der Ober- und Untersummen an $f(x) = x^2$ im Intervall $[0; 1]$ mit $n = 4$

Den Schülern und Schülerinnen wird intuitiv klar, dass die Flächenberechnung optimiert wird, wenn die Rechtecksflächen verkleinert werden und n damit größer wird. Die Annäherung an den Flächeninhalt durch Ober- und Untersummen ist in Abbildung 20 in mehreren Schritten zu sehen (Greefrath et al. 2016)

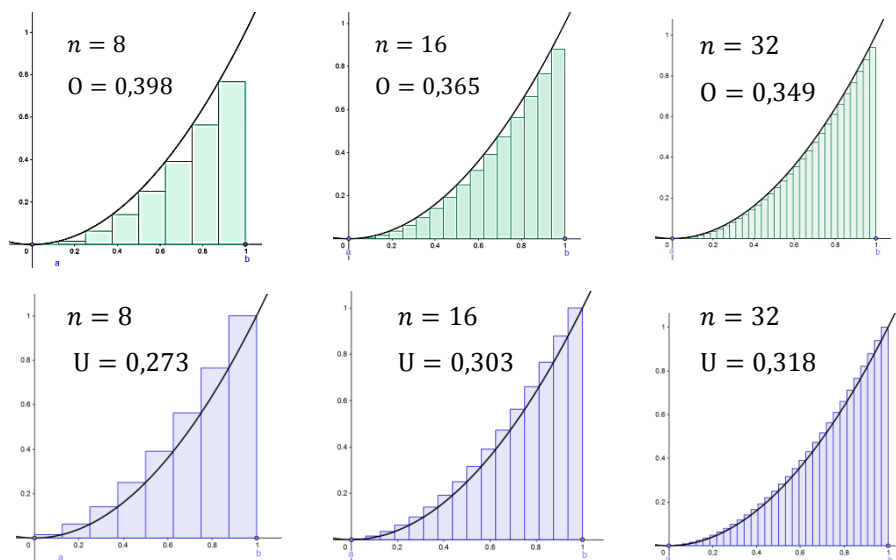


Abbildung 20: Ober- und Untersummen mit $n = 8$; $n = 16$; $n = 32$

Dieser Approximationsprozess kann auf verschiedene Weise erfasst werden und wird idealerweise selbst experimentell erarbeitet. Dabei bietet sich eine anschauliche numerische

Bearbeitung der aufsummierten Rechtecksflächen und damit der Ober- und Untersummen an. Diese könnten computergeneriert sein: mit einem dynamischen Geogebra-Applet oder einer Tabellenkalkulation in Excel, wie in den Abbildungen 21 und 22 gezeigt wird (Greefrath et al. 2016).

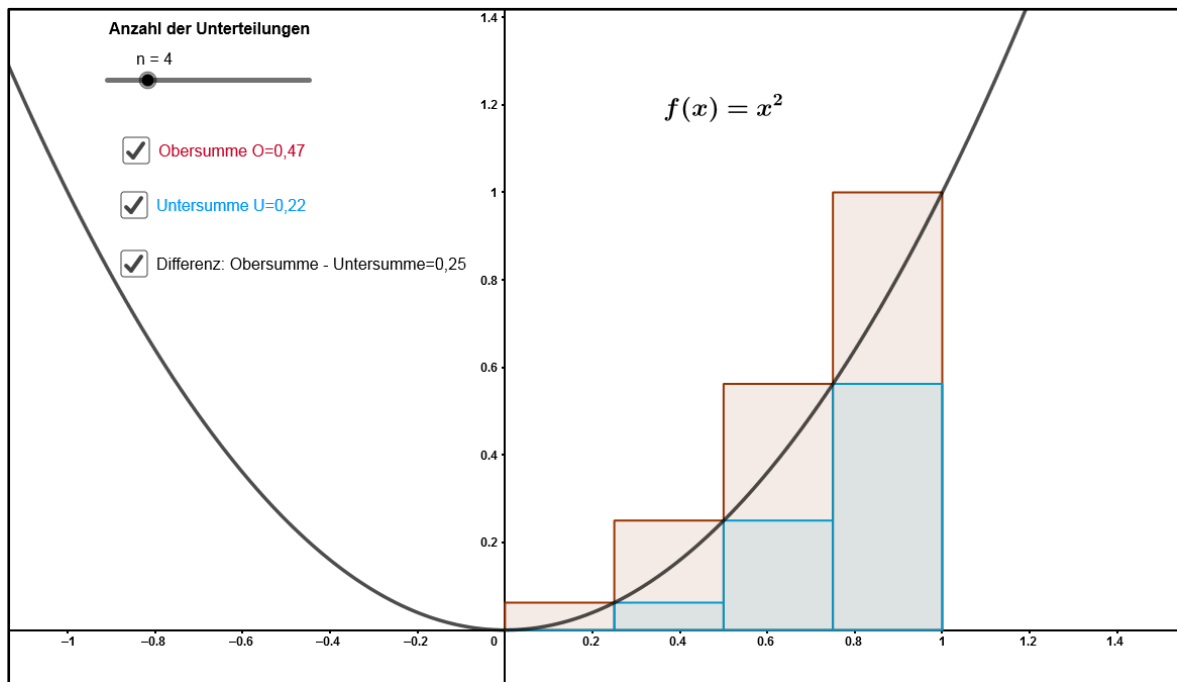


Abbildung 21: GeoGebra Applet mit dynamischen Darstellungen von Ober- und Untersummen mittels Schieberegler

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	
1	Ober- und Untersummen																			
2	Funktion: $y = x^2$																			
3	Intervall: 0 bis 1																			
4	Bekanntes Ergebnis: $1/3 = 0,33333333$																			
5																1,00				
6	n	4			n	10			n	100			n	1000						
7	1/n	0,25			1/n	0,1			1/n	0,01			1/n	0,001						
8	Untersumme	0,218750			Untersumme	0,285			Untersumme	0,328350			Untersumme	0,332833500						
9	Obersumme	0,468750			Obersumme	0,385			Obersumme	0,338350			Obersumme	0,333833500						
10	Durchschnitt (O+U)/2	0,343750			Durchschnitt (O+U)/2	0,335			Durchschnitt (O+U)/2	0,333350			Durchschnitt (O+U)/2	0,333333500						
11	Differenz O - U	0,250000			Differenz O - U	0,100			Differenz O - U	0,010000			Differenz O - U	0,001000000						
12																				
13	x			y = x ²	x			y = x ²	x			y = x ²	x			y = x ²				
14				y · 1/n				y · 1/n				y · 1/n				y · 1/n				
15	0,25	0,0625	0,015625		0,10	0,01	0,0010		0,01	0,0001	0,000001		0,001	0,000001	0,00000001					
16	0,50	0,2500	0,062500		0,20	0,04	0,0040		0,02	0,0004	0,000004		0,002	0,000004	0,00000004					
17	0,75	0,5625	0,140625		0,30	0,09	0,0090		0,03	0,0009	0,000009		0,003	0,000009	0,00000009					
18	1,00	1,0000	0,250000		0,40	0,16	0,0160		0,04	0,0016	0,000016		0,004	0,000016	0,00000016					
19					0,50	0,25	0,0250		0,05	0,0025	0,000025		0,005	0,000025	0,00000025					
20					0,60	0,36	0,0360		0,06	0,0036	0,000036		0,006	0,000036	0,00000036					
21					0,70	0,49	0,0490		0,07	0,0049	0,000049		0,007	0,000049	0,00000049					
22					0,80	0,64	0,0640		0,08	0,0064	0,000064		0,008	0,000064	0,00000064					
23					0,90	0,81	0,0810		0,09	0,0081	0,000081		0,009	0,000081	0,00000081					
24					1,00	1,00	0,1000		0,10	0,0100	0,000100		0,010	0,000100	0,00000100					
25									0,11	0,0121	0,000121		0,011	0,000121	0,00000121					
26									0,12	0,0144	0,000144		0,012	0,000144	0,00000144					
27									0,13	0,0169	0,000169		0,013	0,000169	0,00000169					
28									0,14	0,0196	0,000196		0,014	0,000196	0,00000196					
29									0,15	0,0225	0,000225		0,015	0,000225	0,00000225					
30									0,16	0,0256	0,000256		0,016	0,000256	0,00000256					
31									0,17	0,0289	0,000289		0,017	0,000289	0,00000289					
32									0,18	0,0324	0,000324		0,018	0,000324	0,00000324					
33									0,19	0,0361	0,000361		0,019	0,000361	0,00000361					
34									0,20	0,0400	0,000400		0,020	0,000400	0,00000400					
35									0,21	0,0441	0,000441		0,021	0,000441	0,00000441					
36									0,22	0,0484	0,000484		0,022	0,000484	0,00000484					
37									0,23	0,0529	0,000529		0,023	0,000529	0,00000529					
38									0,24	0,0576	0,000576		0,024	0,000576	0,00000576					

Abbildung 22: Tabellenkalkulation von $f(x) = x^2$ mit $n \in \{1; 10; 100; 1000\}$

Je höher n ist, desto genauer werden die Berechnungen an die Fläche angenähert, und die Differenz zwischen Unter- und Obersumme wird immer geringer. Nun kann die Definition des Integrals mittels der Grenzwerte der Ober- und Untersummen vorgestellt werden (Greefrath et al. 2016).

Definition: Das Integral

Es sei f eine im Intervall $[a, b]$ stetige reelle Funktion. Die eindeutig bestimmte reelle Zahl I , die „zwischen“ allen Untersummen U und allen Obersummen O von f in $[a; b]$ liegt (genauer: $U \leq I \leq O$), nennt man das (bestimmte) Integral von f in $[a; b]$ und schreibt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Um den Produktsummenaspekt zu betonen, ohne dabei die langen Definitionen der Unter- und Obersummen zu gebrauchen, wird das Integral nochmal mit der Zwischensumme angenähert.

Merke:

Ein Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist näherungsweise gleich einer Summe von sehr vielen sehr kleinen Produkten der Form $f(x) \cdot \Delta x$. Kurz:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum f(x) \cdot \Delta x.$$

Um nun auch die Brücke zu schlagen zu Anwendungsbeispielen, bei denen die Lernenden selbst Flächenstücke berechnen müssen, wird noch der zweite Teil des Hauptsatzes eingeführt. Nachdem die Stammfunktion wie in Kapitel 3.2.3 definiert wird, stellen wir folgenden Satz vor:

Satz: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

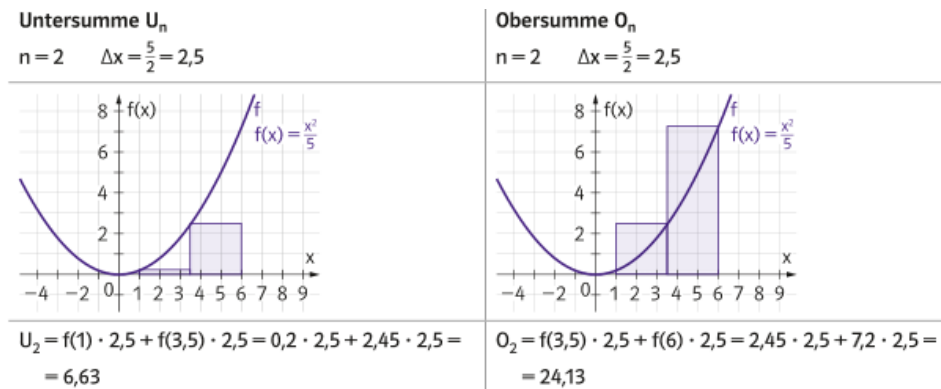
Ist die reelle Funktion f im Intervall $[a; b]$ stetig und ist F eine beliebige Stammfunktion von f , dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Natürlich darf die Methode ohne digitale Unterstützung nicht unbeachtet bleiben. Je nachdem, wie vertraut der Lehrer mit den Programmen ist oder welche Umstände die Verwendung eines PCs macht, ist auch gegen die manuelle Berechnung nichts einzuwenden.

Wichtig ist, dass die visuelle Darstellung der Rechtecksflächen geleistet und der Auswertung der Ober- und Untersummen und deren Differenz ein Stellenwert zugewiesen wird, sodass eine experimentelle und intuitive Heranführung an Ober- und Untersummen und damit die Hinführung zur Definition des Riemann-Integrals möglich ist (Greefrath et al. 2016).

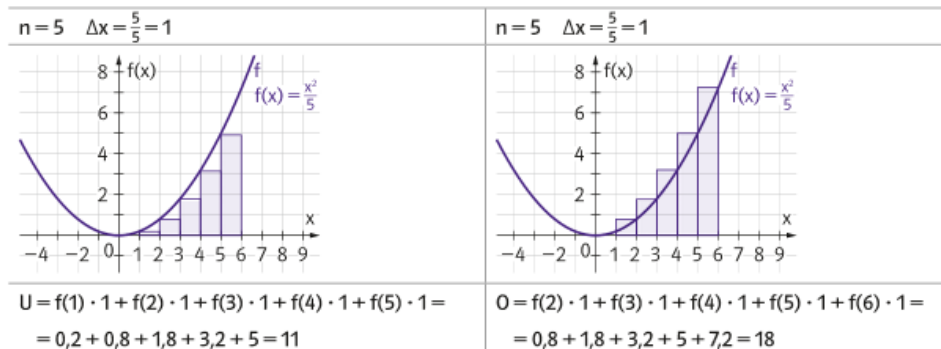
In dem Schulbuch „Lösungswege 8“ (Freiler et al. 2018) befindet sich ein ähnliches Einführungsbeispiel (Abbildung 23), das eine anschauliche Herleitung der Definition über Ober- und Untersummen darbietet und diese auch berechnet. Das eigenständige Arbeiten ist im Allgemeinen zu bevorzugen, falls jedoch Zeitmangel herrscht, wäre dieses Beispiel eine Alternative.



Da der gesuchte Flächeninhalt zwischen U_2 und O_2 liegen muss, gilt:

$$U_2 \leq A(1; 6) \leq O_2 \Rightarrow 6,63 \leq A(1; 6) \leq 24,13$$

Um den Flächeninhalt genauer einzuschränken, kann die Anzahl der Teilintervalle erhöht werden:



Da der gesuchte Flächeninhalt zwischen U_5 und O_5 liegen muss, gilt:

$$U_5 \leq A(1; 6) \leq O_5 \Rightarrow 11 \leq A(1; 6) \leq 18$$

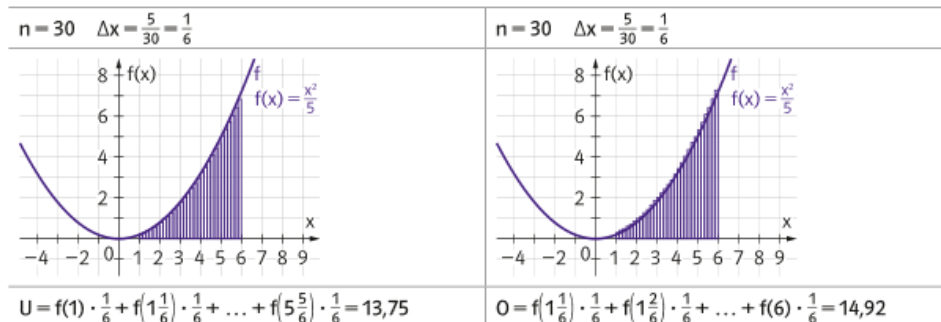


Abbildung 23: Darstellung der Annäherung der Ober- und Untersummen an $f(x) = \frac{x^2}{5}$ im Intervall $[0;6]$ (Freiler et al. 2018)

Diese oder ähnliche Aufgaben finden sich schon seit fast 100 Jahren in Schulbüchern. In Abbildung 24 sieht man eine Aufgabe aus einem alten Schulbuch, die die Berechnung der Ober- und Untersummen mit der Summenformel nahelegt, die schon in Kap 3.2.2 vorgestellt wurde (Greefrath et al. 2016).

13. Berechne das Flächenstück, das von der Parabel $y = x^2$, der x -Achse und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird, indem du in dem Ausdruck $\sum y \Delta x$ a) zunächst die Streifenbreite $\Delta x = 0,1$, b) dann $\Delta x = 0,01$ annimmst und schließlich c) zur Grenze $\Delta x \rightarrow 0$ übergehst. Dabei ist die Formel (vgl. § 2, Aufgabe 17)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3!} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

anzuwenden.

Abbildung 24: Zugang zur Integralrechnung über die Flächenberechnung (Lietzmann & Zühlke 1930, S. 224)

Dabei berechnet man die allgemeine Obersumme O_n und Untersumme U_n :

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(i \cdot \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(i \cdot \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \cdot \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \end{aligned}$$

Nun wird der Grenzwert von beiden gebildet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

(Greefrath et al. 2016).

Eine Variante, die den Schülern und Schülerinnen innerhalb dieses Zugangs einen kontextbezogenen Einstieg bietet, wäre mit einer Aufgabe in Abbildung 25 möglich. Dabei wird eine Grundstücksfläche in Wien, die von der Höhenstraße begrenzt wird, berechnet. Der Funktionsterm, $f(x) = -0,17x^2 + 1,29x$, ist wegen der Modellierung natürlich nicht so elementar wie $f(x) = x^2$.

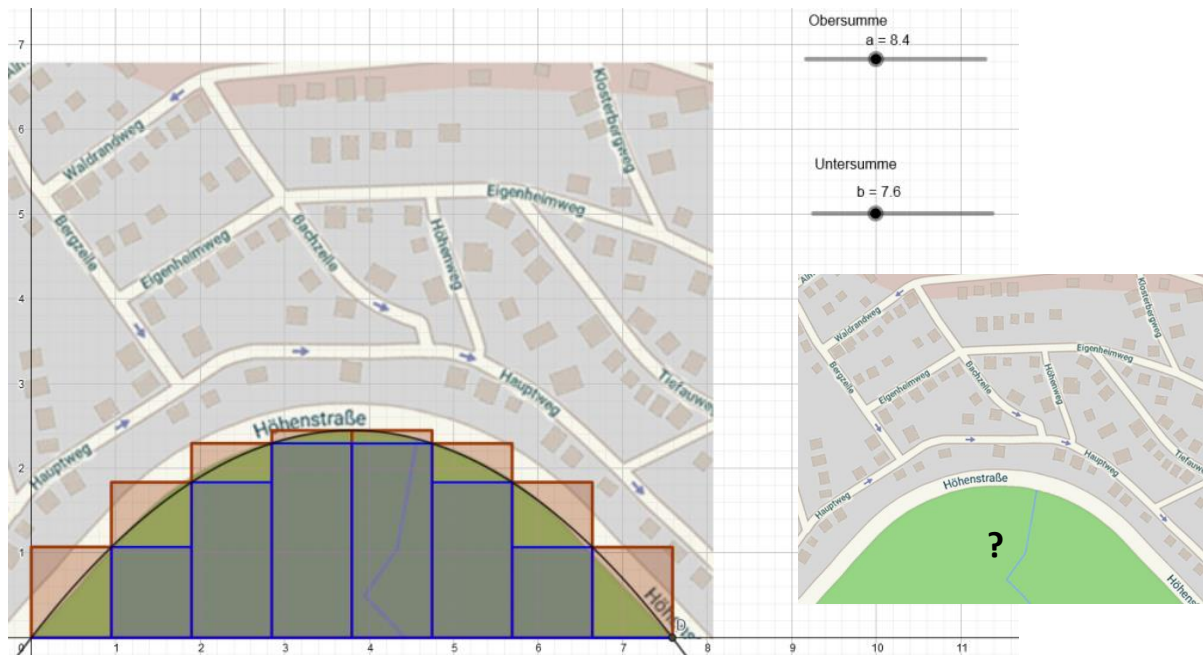


Abbildung 25: Berechnung eines Wiesenstücks mithilfe von Ober- und Untersummen mit Schieberegler (Grafik: Google Maps)

Wie unschwer zu erkennen ist, spielen die Flächeninhaltsvorstellung und der Produktsummenaspekt hier eine tragende Rolle. Auch die Kumulationsgrundvorstellung wird beleuchtet, allerdings wird ihre volle Bedeutung nicht entwickelt (siehe Kapitel 4.3.4). Verschiedene andere Vorstellungen, wie die der Rekonstruktion, des Mittelwertes sowie der Stammfunktionsaspekt, werden vernachlässigt oder nicht behandelt (Greefrath et al. 2016).

Die erstmalige Betrachtung ist also eher einseitig, und man könnte meinen, dass das Integral nur als Werkzeug für Flächenberechnungen verstanden werden würde. Greefrath et al. merken allerdings an, dass die Betonung der „geometrische[n] Idee des Integralbegriffs“ (Greefrath et al. 2016, S. 267) als Vorteil anzusehen ist (Greefrath et al. 2016).

Laut dem Lehrplan und den Grundkompetenzen der Zentralmatura ist im Unterricht das Verständnis des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten zu behandeln (siehe Kapitel 2.2.1 & 2.2.2). Dieser Zugang unterstützt mithilfe der anschaulichen Darstellung der Produktsummen als Rechtecksflächeninhalte die doch recht aufwändige Definition des Integrals mittels Ober- und Untersummen. Der Flächeninhalt fungiert dabei als vertrautes Medium: Man orientiert sich an Bekanntem, um damit neue Inhalte leichter verstehen zu können. Die Idee, ein krummlinig begrenztes Flächenstück so gut wie möglich zu bestimmen, wirkt auf den ersten Blick nicht so abschreckend wie manch andere

Theoriemotivation. Schließlich sind schon die Methoden für zum Beispiel die Annäherung des Kreises in der Sekundarstufe I behandelt worden (siehe Kapitel 3.3.2) (Greefrath et al. 2016).

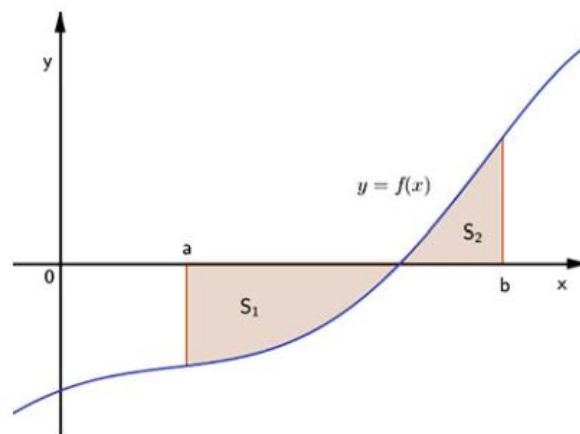
Blum & Törner betonen den geometrischen Zusammenhang mit der Fläche und die Möglichkeit der Veranschaulichung. Da die Schreibweisen des Integralzeichens " $\int$ " und " dx " ihren Ursprung in dem Buchstaben S für Summen und der Bildung von Produktsummen haben, ist die Verwendung dieser Symbole leichter nachzuvollziehen, wenn man das Integral auf diese Weise definiert. Außerdem wird die Idee des Grenzwertes behandelt, die in der Analysis grundlegende Bedeutung hat (Blum & Törner 1983).

Kirsch weist allerdings auf die Schwierigkeiten hin, die mit dem Beginn der Definition des bestimmten Integrals einhergehen. Er spricht sich klar gegen das Bestreben der mathematischen Überexaktheit der Begriffe im Schulunterricht aus und nennt es „ein Mißverhältnis von begrifflichem und terminologischem Anspruch gegenüber dem realisierten Niveau der Diskussion“ (Kirsch 1976, S. 88). Er sieht in der Definition des bestimmten Integrals, auch wenn sie nicht dem hohen Anspruch der Mathematiker auf Exaktheit und Vollständigkeit gerecht wird, eine „aufwendige Begriffsklärung“ (Kirsch 1976, S. 88), mit der die Schüler und Schülerinnen zu Beginn konfrontiert werden und die viel Mühe macht. Er kritisiert, dass die technischen Vorarbeiten, die die Schüler und Schülerinnen zu Beginn leisten müssen, zu wenig motiviert werden. Das selbstständige Erarbeiten, das er für essentiell hält, bleibt auf der Strecke. Außerdem müssen sie sich mit theoretischen Inhalten auseinandersetzen, die weder später in Aufgaben verwendet werden noch die Grundvorstellungen des Begriffs fördern. Der gewünschte Effekt, den Schülern die Bedeutung des Begriffs näher zu bringen, bleibt also aus. Die Anwendung der Methode über Ober- und Untersummen kommt nur bei Erarbeitung der Definition vor, denn die Berechnung der weiteren Integrale wird durch die Einführung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung merklich einfacher. In den Augen der Schüler und Schülerinnen war die Mühe umsonst (Kirsch 1976).

Einer der größten Nachteile dieses Zugangs ist die Identifizierung des Integrals mit dem Flächeninhalt. Natürlich ist die Berechnung der orientierten Fläche auch eine wesentliche Grundvorstellung des Begriffs, allerdings darf sie nicht die anderen Aspekte und Vorstel-

lungen überdecken und damit sogar falsche Informationen unterstützen. Die Vertrautheit des Flächeninhalts birgt eben auch die Gefahr in sich, dass die Unterscheidung zwischen Wert des Integrals und Fläche untergeht. Ein Flächeninhalt ist immer positiv, wohingegen das Integral auch negative Werte annehmen kann (siehe Kapitel 4.3.2) (Greefrath et al. 2016).

Danckwerts & Vogel stellen dazu ein Beispiel aus dem Jahre 1999 aus der TIMSS-Studie vor (Abbildung 26), das sie als Indiz dafür sehen, dass der Flächeninhalt zu sehr im Vordergrund steht und Fehlvorstellungen fördert (Danckwerts & Vogel 2006). Dabei wurde die richtige Lösung ($S_1 - S_2$) von nur 35% der international Getesteten erkannt (Baumert et al. 1999).



Die Figur zeigt den Graphen von $y = f(x)$.

S_1 ist die Fläche, welche von der x -Achse, $x = a$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.

S_2 ist die Fläche, welche von der x -Achse, $x = b$ und $y = f(x)$ begrenzt wird.

Dabei ist $a < b$ und $0 < S_1 < S_2$.

Der Wert von $\int_a^b f(x) dx$ ist:

- ☐ $S_1 + S_2$
- ☐ $S_1 - S_2$
- ☐ $S_2 - S_1$
- ☐ $|S_1 - S_2|$
- ☐ $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

Abbildung 26: Aufgabe aus der TIMSS-Studie 1999 (Baumert et al. 1999, S. 80)

Auch aus meiner langjährigen Erfahrung als Nachhilfelehrerin kenne ich die Probleme, die solche Fehlvorstellungen verursachen. Zwei Aufgaben, die im Zuge der Zentralmatura gestellt wurden (siehe Abbildung 27), sind mir in diesem Zusammenhang als besondere Herausforderung für meine Schüler und Schülerinnen aufgefallen.

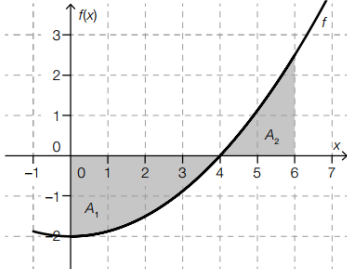
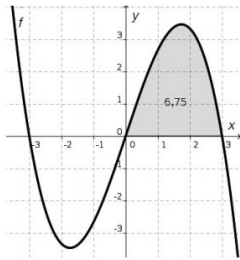
Wert eines bestimmten Integrals*		Integral*											
Aufgabennummer: 1_679	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	Aufgabennummer: 1_380	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐										
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3	Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3										
Nachstehend ist der Graph einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt. Zusätzlich sind zwei Flächen gekennzeichnet. Die Fläche A_1 wird vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall $[0; 4]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{16}{3}$ Flächeneinheiten. Die Fläche A_2 wird vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall $[4; 6]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{7}{3}$ Flächeneinheiten.  Aufgabenstellung: Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 f(x) dx$ an! $\int_0^6 f(x) dx =$ _____		In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer punktsymmetrischen Funktion f (das bedeutet: $f(-x) = -f(x)$) dargestellt. Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[0; 3]$ ist grau unterlegt. Ihre Maßzahl beträgt 6,75.  Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an! <table border="1"> <tbody> <tr> <td>$\int_0^3 f(x) dx = 6,75$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\int_{-3}^3 f(x) dx = 13,5$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\int_{-3}^3 f(x) dx = -13,5$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\int_{-3}^3 f(x) dx = 0$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$\int_{-3}^3 f(x) dx = 6,75$</td> <td>☐</td> </tr> </tbody> </table>		$\int_0^3 f(x) dx = 6,75$	☐	$\int_{-3}^3 f(x) dx = 13,5$	☐	$\int_{-3}^3 f(x) dx = -13,5$	☐	$\int_{-3}^3 f(x) dx = 0$	☐	$\int_{-3}^3 f(x) dx = 6,75$	☐
$\int_0^3 f(x) dx = 6,75$	☐												
$\int_{-3}^3 f(x) dx = 13,5$	☐												
$\int_{-3}^3 f(x) dx = -13,5$	☐												
$\int_{-3}^3 f(x) dx = 0$	☐												
$\int_{-3}^3 f(x) dx = 6,75$	☐												

Abbildung 27: Maturaaufgaben vom 15. 01. 2019 (links) und 16. 01. 2015 (rechts) (BMBWF (Hrsg.), 2019 und 2015)

Aber auch wenn die Bedeutung des orientierten Flächeninhalts erfasst worden ist, bringen dann die anwendungsbezogenen Aufgaben mögliche Verwirrung mit sich. Die Transferleistung, die getätigt werden muss, um den berechneten Integralwert eben nicht mehr als Fläche zu verstehen, auch wenn dieser grafisch so dargestellt werden kann, fällt oft schwer, wenn das Integral zu sehr mit der Fläche in Verbindung gebracht wurde (Hußmann 2001).

„Auch Anwendungsmöglichkeiten des Integrals, etwa in Physik und Wirtschaft, können durch eine Fokussierung auf die Flächeninhaltsvorstellung erschwert werden, weil diese wesentlich vielfältiger sind und nicht nur Bezüge zur Flächenberechnung aufweisen.“ (Greefrath et al. 2016, S. 247).

Danckwerts & Vogel merken noch an, dass die Unterscheidung zwischen Berechnung eines Integrals und der Definition des Integrals nicht immer offensichtlich dargestellt wird. Außerdem werden keine Vorbereitungen getroffen für den möglichen nächsten Schritt der Präzisierung des Integrals oder für die Herleitung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Die Aufgaben der Flächenberechnung leiten den Hauptsatz nicht ein, es kann keine direkte Verbindung dazu gefunden werden (Danckwerts & Vogel 2006).

5.1.2. Integralrechnung als inverse Operation der Differentialrechnung

Neben der Erarbeitung über die Flächenberechnung mittels Ober- und Untersummen ist der Zugang über die Umkehrung der Differentialrechnung eine weitere klassische Unterrichtseinführung in die Integralrechnung. Man definiert das Integrieren als die inverse Operation zum Differenzieren und nimmt sich dabei den Begriff der Stammfunktion zu Hilfe. Aufbauend auf den Erkenntnissen der Differentialrechnung und ihren Regeln ist ein schneller und unkomplizierter Einstieg geschafft. Als nächsten Schritt definiert man das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion als Menge der Stammfunktionen und das bestimmte Integral mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (Greefrath et al. 2016).

Die Heranführung ist in vielen österreichischen Schulbüchern zu finden. Nach einer kurzen Wiederholung der Differentialrechnung stellt man die Frage, ob die Funktion, die bei der Umkehrung des Ableitens entsteht, ebenfalls benannt werden kann. Damit kommt man zur Definition der Stammfunktion:

Definition:

Eine **Stammfunktion** ist eine differenzierte Funktion F , deren Ableitung f ist.

F ist Stammfunktion von $f \Leftrightarrow F' = f$.

Das Aufsuchen einer Stammfunktion heißt **integrieren**.

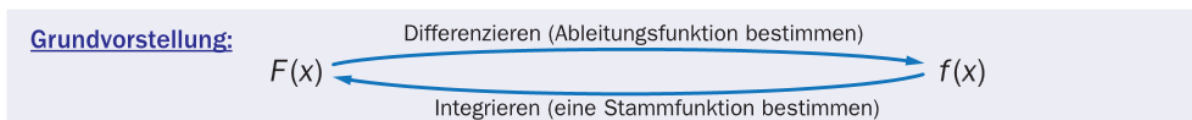


Abbildung 28: Darstellung des Zusammenhangs von Differenzieren und Integrieren (Brand et al. 2015, S. 20)

Mithilfe der wichtigsten elementaren Funktionen und deren Ableitungen kann eine Tabelle erstellt werden, indem man die Ableitungsregeln rückwärts auflistet. Die Tabelle wird für das Auffinden von Stammfunktionen verwendet und macht es so einfach, schnell Aufgaben zu lösen (Greefrath et al. 2016):

Funktion	Eine Stammfunktion	Beweis
$f(x) = k$ (mit $k \in \mathbb{R}$)	$F(x) = k \cdot x$	$F'(x) = k = f(x)$
$f(x) = x^r$ (mit $r \in \mathbb{R}, r \neq -1$)	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$	$F'(x) = \frac{1}{r+1} \cdot (r+1) \cdot x^r = x^r = f(x)$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$F'(x) = -(-\sin(x)) = \sin x = f(x)$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$F'(x) = \cos x = f(x)$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$F'(x) = e^x = f(x)$
$f(x) = a^x$ (mit $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$)	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$	$F'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x = f(x)$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $	$F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

(Tabelle nach Malle et al. 2016, S. 8)

Um mit der Idee der Stammfunktion vertrauter zu werden, könnte man hier nun unterschiedliche Aufgaben mit den Schülern und Schülerinnen bearbeiten. Dabei ist es wichtig, Stammfunktionen sowohl rechnerisch sowie grafisch zu ermitteln, um den Zusammenhang zwischen Differentialrechnung und Integralrechnung vollständig zu erfassen (Greefrath et al. 2016). Die folgende Aufgabe könnte als Einstiegsbeispiel dienen (Abbildung 29):

Aufgabe Stammfunktion

Eine Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist gegeben.

- a) Ermittle eine Stammfunktion von f mithilfe der gegebenen Tabelle (siehe oben).
- b) $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$, $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ und $F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ ($c \in \mathbb{R}$ beliebig) sind Stammfunktionen der Funktion f . Begründe diesen Sachverhalt 1) rechnerisch
2) geometrisch anhand der Figur (Abbildung 29)! (nach Götz et al. 2013)

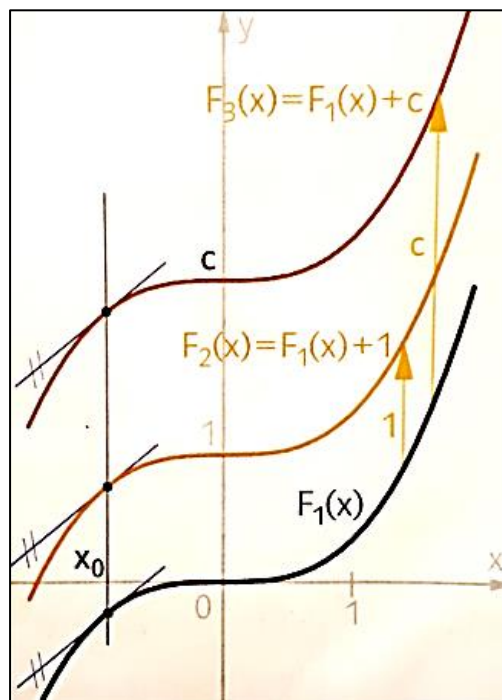


Abbildung 29: Darstellung von verschiedenen Stammfunktionen von f (Götz et al. 2013, S. 33)

Nachdem die Schüler und Schülerinnen durch Ausprobieren auf eine Stammfunktion gestoßen sind, wird versucht, eine Erklärung zu finden, was alle gefundenen Stammfunktionen gemeinsam haben beziehungsweise was diese unterscheidet. Dass beim Ableiten die Glieder verschwinden, die nur Zahlen ohne Argument beinhalten, führt zu dem Verdacht, dass es mehrere Stammfunktionen geben kann. Es wird erkannt, dass F_1 , F_2 und F_3 Stammfunktionen sind (nach Götz et al. 2013).

Rechnerisch begründet würde das wie folgt aussehen (nach Götz et al. 2013):

$$F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2.$$

Beziehungsweise allgemeiner (nach Götz et al. 2013):

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Die Lernenden erkennen, dass es unendlich viele Stammfunktionen zu einer Funktion f gibt und dass diese eindeutig bestimmt sind, sich eben nur um eine additive Konstante c unterscheiden.

Mithilfe der Figur (Abbildung 29) kann begründet werden, dass, wenn man eine Stammfunktion gefunden hat, alle anderen Funktionen, die entstehen, wenn man diese entlang der y-Achse verschiebt, ebenfalls Stammfunktionen sind. Die eingezeichneten Tangenten an der Stelle x_0 haben alle dieselbe Steigung, was zeigt, dass die Ableitung an dieser Stelle bei jeder eingezeichneten Stammfunktion gleich ist. Das bedeutet (nach Götz et al. 2013):

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Somit ist sowohl rechnerisch als auch geometrisch begründet worden, dass F_1 , F_2 und F_3 Stammfunktionen von f sind (nach Götz et al. 2013).

Um die geometrische Bedeutung der Stammfunktionen vollständig zu erfassen, wäre auch die Erstellung eines Richtungsfeldes für die Funktion f möglich (siehe Kapitel 4.2.2) (Greefrath et al. 2016).

Die anschauliche Darstellung der Stammfunktionen und deren Unterscheidung um eine Integrationskonstante führt uns zu dem folgenden Satz:

Satz: Ist die Definitionsmenge D von f ein Intervall (D kann auch ganz $\mathbb{R}$ sein) und sind F und G zwei Stammfunktionen von f , dann unterscheiden sich F und G nur durch eine reelle Konstante c . Es gilt: $F(x) = G(x) + c$ bzw. $F(x) - G(x) = c$.

Mithilfe dieses Satzes lässt sich nun das unbestimmte Integral definieren, wobei das Integralsymbol erstmals eingeführt wird:

Definition: Das unbestimmte Integral

Ist f eine auf einem Intervall I definierte Funktion und ist F eine Stammfunktion von f , dann gilt:

$$\int f(x)dx = F(x) + c_1.$$

Gilt für eine Funktion G :

$$G(x) + c_2 = \int f(x) dx, \quad \text{dann folgt: } F(x) - G(x) = c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Das **Integrieren** ist (bis auf eine additive Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$) die Umkehrung zum Differenzieren.

Hierzu eine Bemerkung: Sowohl Blum & Törner (1983) als auch Bender (1990) kritisieren diese Einführung des unbestimmten Integrals. Bei der Beschreibung des Unterrichtszuganges über Stammfunktionen formulieren sie wie folgt:

„Überflüssig und verwirrend ist es, eine (oder die Menge aller) Stammfunktion(en) als ‚unbestimmtes Integral‘ zu bezeichnen.“ (Blum & Törner 1983).

Bender sieht in der Zweiteilung in bestimmtes und unbestimmtes Integral ebenfalls keinen Vorteil und merkt an, dass für die Lernenden der intuitive Zugang zu den Grundvorstellungen verstellt wird, da sie sich mit einer Fülle an Begrifflichkeiten herumschlagen müssen (Bender 1990).

Da die Bestimmung des unbestimmten Integrals in vielen Schulbüchern zu finden ist und dies auch der klassische Zugang ist, wird das Integral hier auf diese Weise präsentiert. Es gibt allerdings auch Schulbücher (z. B.: Malle et al. 2016), die auf den Begriff des unbestimmten Integrals verzichten und so lange mit dem Begriff Stammfunktion arbeiten, bis auch der andere Zugang über Ober- und Untersummen erarbeitet wurde, und dann erst das (bestimmte) Integral definieren.

Die grundlegenden Regeln für zusammengesetzte Funktionen, wie die Summen und Differenzenregeln, die Konstantenregel sowie die Regel des konstanten Faktors, lassen sich leicht von der Differentialrechnung ableiten.

Satz: Weitere Integrationsregeln

Gegeben sind zwei Funktionen f und g und zwei Stammfunktionen F und G (von f und g), k sei eine reelle Zahl ($\neq 0$). Es gelten folgende Regeln:

Summen- und Differenzenregel $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x)$

Regel vom konstanten Faktor $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx = k \cdot F(x)$

Konstantenregel $\int f(k \cdot x) dx = \frac{1}{k} F(k \cdot x)$

Zur Ermittlung von bestimmten Integralen nimmt man sich den zweiten Teil des Hauptsatzes zu Hilfe. Man definiert Integrale wie folgt:

Definition:

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I definierte Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt. Für $a, b \in I$ wird definiert:

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a).$$

Man nennt den entstehenden Zahlenwert dieses berechneten Ausdrucks Integral.

Wie man in der oben gelösten Aufgabe (Abbildung 29) schön erkennen kann und mit dem dazugehörigen Satz festgestellt hat, unterscheiden sich die Stammfunktionen einer Funktion f nur um eine additive Konstante, demnach ist dieser Ausdruck wohldefiniert. Da die Ermittlung von Stammfunktionen durch die Tabelle möglich ist, kann man mit diesem Werkzeug bestimmte Integrale einfach berechnen. Man sucht nur eine beliebige Stammfunktion und setzt die Werte der Grenzen ein. Das würde die eigentliche praktische Handhabung mit Integralen beschleunigen und würde den Schülern und Schülerinnen recht

schnell einen praktischen Einstieg zur Berechnung von Integralen ermöglichen (Greefrath et al. 2016, S. 240).

Wie auch der Zugang über die Fläche ist dieser ebenfalls schon seit fast 100 Jahren in den Schulbüchern zu finden. In Abbildung 30 sieht man den Ausschnitt einer Aufgabe aus einem Schulbuch aus dem Jahre 1930.

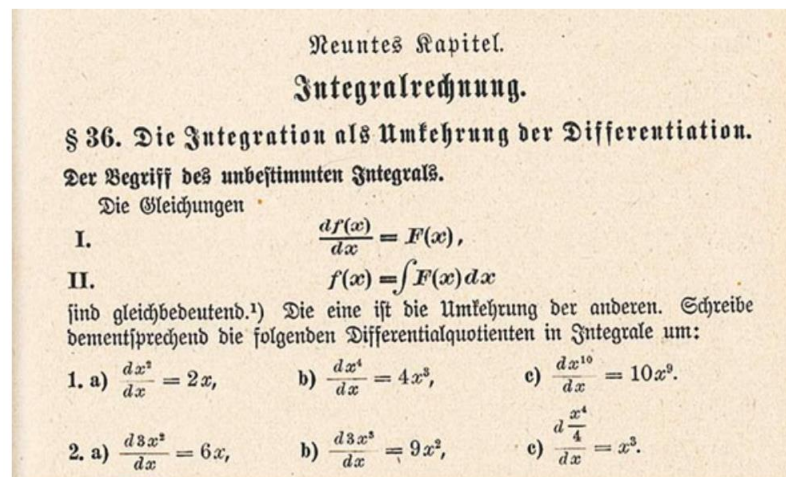


Abbildung 30: Zugang zum unbestimmten Integral (Lietzmann & Zühlke 1930, S. 215)

Bei diesem Zugang ist sehr deutlich zu sehen, dass der Stammfunktionsaspekt im Vordergrund steht. Außerdem wird die Rekonstruktionsvorstellung unterstützt, was bei der Wiederherstellung einer Stammfunktion mittels eines Richtungsfeldes gut zu erkennen ist (Greefrath et al. 2016).

Die Einführung durch das unbestimmte Integral und damit über die Stammfunktion bietet einen „natürlicheren“ Zugang für anwendungsorientierte Beispiele. Das Integral als Umkehrung zum Differential zu bestimmen bietet den Vorteil, dass man Fragen der Art: „Welche Funktion hat die gegebene Funktion als Ableitung?“ schnell beantworten kann und damit schnell zum Begriff der Stammfunktion gelangt (Kirsch 1976).

Durch die geometrische Darstellung der Stammfunktion wird den Lernenden auf deutliche Weise klar, dass die Integrationskonstante notwendig und dass die Stammfunktion bis auf diese eindeutig bestimmt ist (Greefrath et al. 2016).

Der große Vorteil dieses Zugangs liegt darin, dass durch die ausführliche Behandlung der Differentialrechnung und ihrer Erkenntnisse in der Vorklasse schon früh ohne das aufwändige

Herleiten der Ober- und Untersummen Aufgaben gelöst werden können. Durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können bestimmte Integrale, etwa von Exponential- und Logarithmusfunktionen, leicht berechnet werden (Greefrath et al. 2016, S. 268).

Außerdem ist diese Definition des Integrals nicht mehr „revidierungsbedürftig“ (Blum & Törner 1983, S. 164).

Damit wird aber der *Hauptsatz* der Differential- und Integralrechnung ungünstigerweise als Definition verwendet, was Kirsch als „antididaktische Inversion“ (Freudenthal 1973) bezeichnet, ein Begriff, den Freudenthal geprägt hat (Kirsch 1976). Die wichtige Bedeutung des Satzes geht dabei unter. Auch die Brücke zum bestimmten Integral und damit auch zur Flächeninhaltsberechnung wird seines Erachtens nicht befriedigend geschlagen und führt außerdem zu einer „Inversion des genetisch primären Zuganges“ (Kirsch 1976, S. 89).

Auch Hußmann merkt an, dass die Integralrechnung für die Berechnung einzelner Integrale ein mächtiges Werkzeug darstellt, allerdings ist diese Verwendung des Hauptsatzes auch problematisch, da *integrierbar sein* und *eine Stammfunktion besitzen* mathematisch gesehen nicht das gleiche ist (Hußmann 2001 und Greefrath et al. 2016). Die Stetigkeit, die Voraussetzung für den Hauptsatz und für die Übereinstimmung ist, wird nicht thematisiert. Greefrath et al. stellen zwei Funktionen vor, wovon eine Riemann-integrierbar ist, aber keine Stammfunktion besitzt, und die andere umgekehrt (Greefrath et al. 2016):

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und

$$F_1(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(Greefrath et al. 2016).

f_1 besitzt eine Stammfunktion $F_1(x)$, aber f_1 ist nicht integrierbar, weil f_1 um 0 unbeschränkt ist. Dagegen ist f_2 zwar integrierbar, besitzt aber keine Stammfunktion, da eine eventuelle Stammfunktion $F_2(x)$ bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist (Greefrath et al. 2016):

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

und

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

(Greefrath et al. 2016).

Mathematisch problematisch ist, dass neben dieser Gleichsetzung auch die Existenz des Integrals nicht hinreichend diskutiert werden kann (Greefrath et al. 2016). Als Beispiel für das Existenzproblem stellen Danckwerts & Vogel die Dirichlet-Funktion vor (Danckwerts & Vogel 2006). Allerdings sind diese Funktionen zu speziell für den Schulunterricht und spielen in der Schule keine Rolle.

Greefrath et al. merken außerdem an, dass bei diesem Zugang die gesamte Integraltheorie und deren Entwicklung erschwert werden würde. Auf den Begriff des Integrals wird wenig eingegangen, die Berechnungen stehen im Vordergrund und die Bedeutung des bestimmten Integrals muss später noch erklärt werden. Das Integral wird eher als Werkzeug präsentiert (Greefrath et al. 2016), und der entstehende Zahlenwert $F(b) - F(a)$ hat keine inhaltliche Bedeutung (Blum & Törner 1983). Auch hier ist der Übergang zu anwendungsbezogenen Aufgaben nicht geeignet und muss neu erarbeitet werden (Greefrath et al. 2016).

5.2. Die „modernen“ Zugänge

Obgleich beide klassischen Zugänge wichtige Aspekte und Vorstellungen beinhalten, sind sie doch eher einseitige Betrachtungen des Integralbegriffs. Wie in Kapitel 4 ausgeführt, ist die Definition des Integralbegriffs mehrfach möglich. Je nachdem, ob man das bestimmte Integral oder das unbestimmte Integral zuerst definiert, legt man einen Schwerpunkt, der die weitere Definition von dem jeweils Folgenden erschwert (Kirsch 1976).

„Begriffsentwicklungen in der Mathematik sind nach Möglichkeit so anzulegen, dass Grundverständnisse aus einer Vorstufe bei einer Weiterentwicklung nicht hinderlich sind und vollständig revidiert werden müssen. Dies ist die mathematikdidaktische Perspektive.“ (Danckwerts & Vogel 2006, S. 79).

Bender beschreibt ebenfalls, wie die Erarbeitung der Gleichbedeutung des F- und S-Aspektes der endgültigen Konstituierung und der Definition des Integrals vorausgehen müsste. Außerdem sollte der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als große Erkenntnis wahrgenommen werden, zu der man nach einer hinführenden Theorieentwicklung gelangt (Bender 1990).

Die modernen Zugänge versuchen den Integralbegriff so zu präsentieren, dass die großen Nachteile der klassischen Zugänge vermieden und den Lernenden schon früh weitläufige Grundvorstellungen vermittelt werden, die sie fast automatisch zur Erkenntnis des Hauptsatzes bringen (Danckwerts & Vogel 2006) (siehe Kapitel 3.2.5).

Zuerst wird auf den Unterrichtszugang von Kirsch (1976) eingegangen, dessen Einführung einen inkludierenden Weg von F- und S-Aspekt beschreibt und der die Entwicklung neuer wegweisender Ideen angeregt hat.

Danach gehe ich auf eine Unterrichtsgestaltung von Danckwerts & Vogel (2006) ein, die auf Kirschs (1976) Zugang aufbaut und ihn durch den anfänglichen Anwendungsbezug und die Betonung des Rekonstruktionsgedankens erweitert und neu erfindet.

5.2.1. Erarbeitung der Integralfunktion mit elementaren Funktionen

Kirsch veröffentlichte 1967 seine vielbeachtete Arbeit mit dem Titel „Eine ‚intellektuell ehrliche‘ Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen“. Sie wurde von Bender 1990 als „richtungsweisend“ (Bender 1990, S. 112) bezeichnet und stellt die Grundlage dar für eine anschaulichere und sinnbildendere Herangehensweise, die die damalige Strenge-Welle erweichen sollte. Kirsch befasst sich mit den Vor- und Nachteilen der üblichen Zugänge und versucht eine Alternative zu finden, die einen leichteren Einstieg zu diesem vielseitigen Begriff bietet und den Weg für das vollständige Verstehen des Integrals ebnet, ohne die Schüler und Schülerinnen im Vorfeld mit einseitigen und schwierigen Ansichten zu belasten. Dabei hinterfragt er die Sinnhaftigkeit der damaligen mathematischen Exaktifizierung im Schulunterricht und geht mehr auf die didaktischen Prioritäten ein, um den Begriff zugänglicher zu machen. Er entfernt sich von dem Anspruch der Mathematiker, alle Begriffe technisch ausführlich zu beschreiben und zu definieren (Kirsch 1976).

„Vielmehr geht es zunächst einmal um den Aufbau angemessener Vorstellungen, die den Schüler möglichst früh zu einem verständigen, selbstständigen Umgang mit dem Integral befähigen und ihn zugleich offen halten für eine spätere Präzisierung dieses Begriffs.“ (Kirsch 1976, S. 87).

Kirsch kritisierte die Ganz-oder-gar-nicht-Herangehensweise: Einen Begriff entweder komplett und exakt darzustellen oder jede Erklärung auszulassen und ihn zum Beispiel axiomatisch einzuführen. Bei einem vielseitigen Thema wie der Integralrechnung müsse man sich langsam herantasten und versuchen, den Schülern und Schülerinnen den Integralbegriff so zu präsentieren, dass jene Vorstellungen transportiert werden, die wesentlich sind und den Begriff ausmachen. Dabei muss aber noch genügend Raum für Präzisierungen und Ergänzungen bleiben, um verschiedene Blickwinkel des Integrals zugänglich zu machen, ohne dass Revidierungen nötig sind. In der Analysis-Didaktik würde man so ein Vorgehen nach dem Spiralprinzip (Blum & Törner 1983, S. 233) benennen (Kirsch 1976).

Kirsch möchte die großen Nachteile, die er in den klassischen Einführungen erkennt, damit neutralisieren, dass er einen praktischeren Zugang zum Verständnis des Integralbegriffs wählt. Er sieht den Einsatz von elementaren Funktionen, genauer: von abschnittsweise definierten linearen Funktionen, als Schlüssel zu einem schnellen und selbstständigen Erarbeiten der Integralfunktion, daran anschließend zu wichtigen Eigenschaften der Integralfunktion und weiter zu dem direkteren und sinnvolleren Einführen des Begriffes (Kirsch 1976).

Die Flächen unter linearen Funktionen sind einfache zusammengesetzte Figuren. Derartige Flächenberechnungen beherrschen die Schüler bereits und können gleich selbst damit arbeiten. Man beginnt also nicht mit der Fläche unter einer „Kurve“, sondern unter einer Geraden, trotzdem erkennt man die Gesetzmäßigkeit: x^n wird zu $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Bei näherer Betrachtung sieht man den Zusammenhang zwischen Ausgangsfunktion und Integralfunktion. Die Schüler und Schülerinnen arbeiten also früh *selbstständig* daran, die Integralfunktion zu berechnen. Dem wird nur eine kurze Definition der Integralfunktion mithilfe des Flächeninhaltes vorangestellt (Kirsch 1976).

In Abbildung 31 ist die Bedeutung der Definition grafisch dargestellt.

$$F(x) = \text{Inhalt} \{(t, y) | 0 \leq t \leq x \wedge 0 \leq y \leq f(t)\} \\ - \text{Inhalt} \{(t, y) | 0 \leq t \leq x \wedge f(t) \leq y \leq 0\}$$

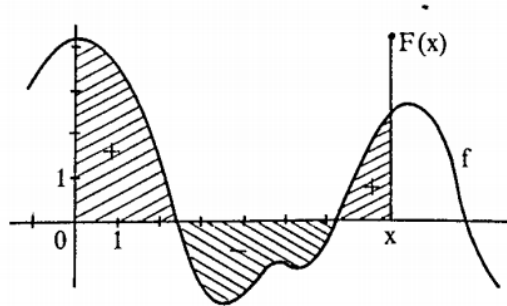


Abbildung 31: Darstellung der positiven und negativen Inhalte (Kirsch 1976, S. 91)

Ohne die große Begriffserklärung und Definition des bestimmten Integrals, die Herleitung des Begriffs über Ober- und Untersumme und deren Grenzwerte und auch ohne die missliche Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung als *Definition* gelingt ein Heranführen des Integralbegriffs durch eine anwendungsorientierte Strategie. In Abbildung 32 sieht man, wie die Erarbeitung der einzelnen Funktionswerte der Integralfunktion an einer stückweisen linearen Funktion funktioniert. Die schraffierte Fläche, die von den beiden Achsen und dem Funktionsgraph im Intervall $[0; x_1]$ eingeschlossen wird, wird ausgerechnet mittels elementaren Flächeninhaltsformeln, hier Rechteck und Trapez, und dann als Funktionswert $F(x_1)$ über x_1 eingezeichnet (Kirsch 1976).

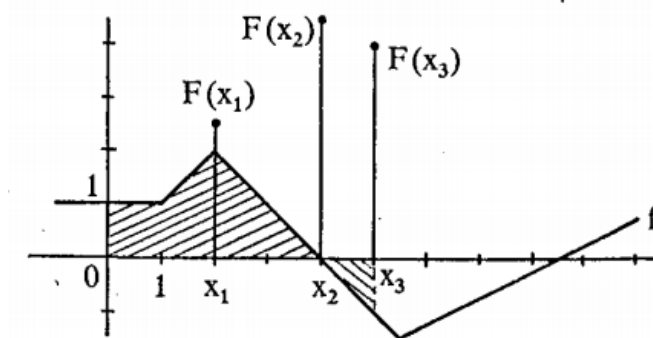


Abbildung 32: Berechnung einzelner Werte von $F(x)$ (Kirsch 1976, S. 91)

Der Schwerpunkt liegt also nicht darauf, eine exakte Definition mit allen Voraussetzungen und Rechtfertigungen des Integralbegriffs zu erarbeiten, sondern es geht vor allem darum,

dass den Schülern und Schülerinnen schnell zugängliche Bilder und Vorstellungen vermittelt werden, die sie für die vollständige Begriffsbildung benötigen (Kirsch 1976).

Man könnte es vergleichen mit einem Gegenstand, der in die Hände der Schüler und Schülerinnen gelegt wird, um ihn erforschen zu lassen. Sie sollen die Funktion und das Aussehen näher betrachten, die Handhabung mit ihm üben und erst danach den Namen und seine Einsatzgebiete und vollständige Tragweite kennenlernen. Es ist ein Sich-vertraut-machen mit etwas Neuem und braucht eine gewisse Leichtigkeit und einen intuitiven Einstieg.

Nachdem die Integralfunktion definiert wurde, arbeiten die Schüler und Schülerinnen selbstständig an ersten Aufgaben. In der Figur 5 (Abbildung 33) sieht man, wie durch die Flächenbestimmung in Abhängigkeit von x die allgemeine Integralfunktion hergeleitet werden kann. Als nächsten Schritt möchte Kirsch von dem „naiv-geometrischen Sinn“ (Kirsch 1976, S. 94) des Flächeninhaltes Abstand nehmen und die Funktion in einem kontextbezogenen Rahmen bearbeiten. In Figur 8 (Abbildung 33) sehen wir den zugehörigen Funktionsgraphen: Wir interpretieren $f(x)$ als Stromstärke des zu- oder abfließenden Wassers zum Zeitpunkt x und bekommen mit $F(x)$ den jeweiligen Wasserstand heraus. Es gibt eine klare Reihenfolge, und jeder Schritt führt fast intuitiv zum nächsten, wie es in einer erfolgreichen Theoriebildung sein soll (Kirsch 1976).

Die Aufgaben bieten die Möglichkeit, schon früh die Vorzeichenproblematik zu behandeln, und zwar zum einen das Umgehen mit dem orientierten Flächeninhalt und zum anderen die Bestimmung von $F(x)$, wenn $x < 0$ ist. Mit dem Heranführen durch den Flächeninhalt und die Integralfunktion ist die Auseinandersetzung dieser beiden Punkte einfacher, weil weniger Begriffserklärungen vorhanden sind, mit denen man sich auseinandersetzen muss. In Figur 8, 9 und 10 (Abbildung 33) sieht man den Umgang mit beiden Fragestellungen (Kirsch 1976).

Mögliche Aufgabenformulierung zur Aufgabenauswahl in Abbildung 33 für das eigenständige Arbeiten:

- 1) Gib für jede der abgebildeten Funktionen f (Figur 5, 8, 9, 10) einen Funktionsterm an!
- 2) Zeichne jeweils die Integralfunktion F in der Grafik ein!
- 3) Gib jeweils den Funktionsterm von F an!
- 4) Erkennst du den Zusammenhang von f und F ? Beobachte dazu die Monotonie-Bereiche und Extremstellen von F und wie sich f dort verhält!

(Danckwerts & Vogel 2006).

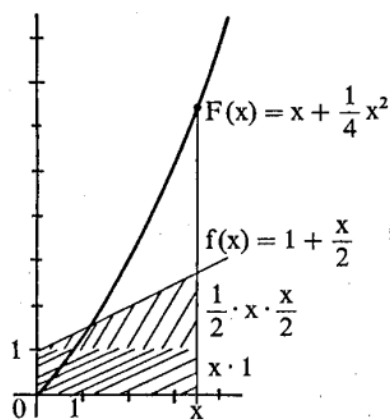


Fig. 5

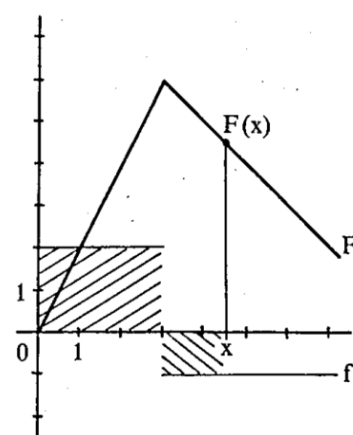


Fig. 8

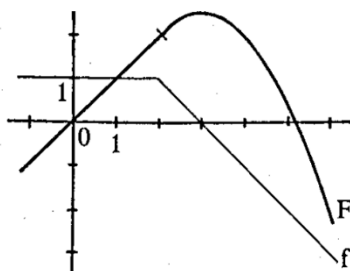


Fig. 9

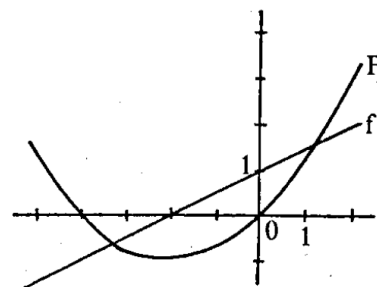


Fig. 10

Abbildung 33: Aufgabenauswahl mit abschnittsweise definierten linearen Funktionen (Kirsch 1976, S. 92 und S. 93)

Mit dem Erarbeiten der Integralfunktion durch die einzelnen Berechnungen der Flächeninhalte schließt man bei den Schülerinnen und Schülern an etwas Bekanntes an und fördert noch einmal das funktionale Denken, welches eine Voraussetzung für ein Grundverständnis der Analysis ist. Der Flächeninhaltsaspekt wird außerdem gleich mit dem Erstellen einer Funktion verbunden und nicht nur mit dem Berechnen von bestimmten

Integralen. Die inhaltliche Verknüpfung von F- und S-Aspekt wird unterstützt, indem mithilfe des Flächeninhaltes und der einzelnen Berechnungen die Integralfunktion stückchenweise erstellt wird und man nach dem Erstellen des Funktionsterms F den Zusammenhang von Differential und Integral erkennen kann (Bender 1990).

Dieser Zugang bietet eine fruchtbare Grundlage, um die wichtigen Eigenschaften des bestimmten Integrals zu erarbeiten. Fast alle lassen sich aus den bekannten Eigenschaften des Flächeninhalts ableiten (Kirsch 1976):

Für alle $a, b, c \in I$ gilt:

$$(1) \quad \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

$$(2) \quad \int_a^a f = 0$$

$$(3) \quad \int_b^a f = - \int_a^b f$$

$$(4) \quad \int_a^b (-f) = - \int_a^b f$$

$$(5) \quad \int_a^b [x \mapsto c] = (b - a) \cdot c$$

$$(6) \quad \int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2, \quad \text{falls } f_1(x) \leq f_2(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \quad (\text{wobei } a \leq b)$$

$$(7) \quad (b - a)m \leq \int_a^b f \leq (b - a)M, \quad \text{falls } m \leq f(x) \leq M \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

$$(8) \quad \int_a^b cf = c \int_a^b f$$

Wenn die wichtigsten Aufgaben erfolgreich gelöst wurden, ist der Weg nicht mehr weit zum Erschließen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Durch die Betrachtung der Eigenschaften der beiden Funktionen und das Aussehen des Funktionsterms ist die Verbindung zur Differentialrechnung leicht herzustellen (Kirsch 1976).

Kirsch betont, dass ihm bei der Erarbeitung des Integralbegriffs die folgenden Punkte wichtig sind: a) Eigenständigkeit der Schüler, b) die Beachtung des Spiralprinzips und c) die Vermeidung der antididaktischen Inversion (Freudenthal 1973). Er will, dass schon früh ein brauchbarer und verfügbarer Begriff gebildet wird (Kirsch 1976).

5.2.2. Bestand und Änderung im Anwendungskontext: Integral als Rekonstruktion

Dieser Unterrichtszugang zeichnet sich dadurch aus, dass man eine kontextbezogene Aufgabe aus Naturwissenschaft oder Wirtschaft für die Heranführung zum Integral verwendet und dabei die Ausgangsfunktion als Änderungsrate eines bestimmten Größeverhältnisses verstanden wird, sodass das Ziel ist, den Bestand beziehungsweise den ursprünglichen funktionalen Zusammenhang wiederherzustellen (Greefrath et al. 2016).

Danckwerts & Vogel stellen dazu einen eigenen Zugang vor, um die Grundvorstellung *Integrieren als Rekonstruieren* bestmöglich zu vermitteln. Dabei orientieren sie sich an dem Zugang von Kirsch. Sie präsentieren ein Einführungsbeispiel, das sie selbst als dafür musterhaft bezeichnen (Danckwerts & Vogel 2006).

Ähnlich wie bei Kirsch entfernt sich ihre Herangehensweise von der Einführung des Integrals über den rein geometrischen Flächeninhalt. Zwar wollen sie die Bedeutung seiner Arbeit in keiner Weise schmälern; die Vorteile, die bei so einer Herangehensweise bestehen, sind nicht zu übersehen: Eigentätigkeit der Lernenden, Arbeiten mit Bekanntem, Hauptsatz früh verfügbar, offen für spätere Präzisierung (siehe Kapitel 5.2.1). Doch argumentieren sie damit, dass die Umsetzung oft nicht so funktionieren würde wie vorgesehen: Der Anspruch ist zu hoch und, anstatt den Ansatz über den präexistenten Flächeninhalt als Trittbrett für eine ausreichend ausführliche Erarbeitung des Konzepts zu verwenden, bleibt es oft dabei, Flächeninhalte zu berechnen. Die Verankerung nützlicher Grundvorstellungen und eine vollständige Einführung eines neuen Begriffs bleiben auf der Strecke. Die Auswertung des TIMSS-Beispiels (siehe Kapitel 5.1.1) ist ein Indiz für die irrtümliche Anhaftung der „klassischen“ Fläche und einem fehlenden Verständnis dafür, dass der Wert des Integrals nicht der Fläche entspricht, sondern wenn, dann als *orientierter* Flächeninhalt aufgefasst werden muss (Danckwerts & Vogel 2006).

Danckwerts & Vogel wollen dieses Problem minimieren, indem sie gleich mit der Modellierung eines Sachzusammenhangs beginnen: Das Zu- und Abfließen von Wasser in einer Badewanne. Ihre Präsentation von Anschauungsbeispielen geschieht in mehreren Schritten (Danckwerts & Vogel 2006).

Das Badewannenbeispiel

Schritt eins: Wir gehen von einer leeren Badewanne aus, die mit gleichbleibender Geschwindigkeit mit Wasser gefüllt wird. Danach wird das Wasser durch den Abfluss abgelassen und gleichzeitig die Zufuhr gestoppt. Danckwerts & Vogel modellieren diese Situation mit folgender Funktion die in Abbildung 34 zu sehen ist (Danckwerts & Vogel 2006).

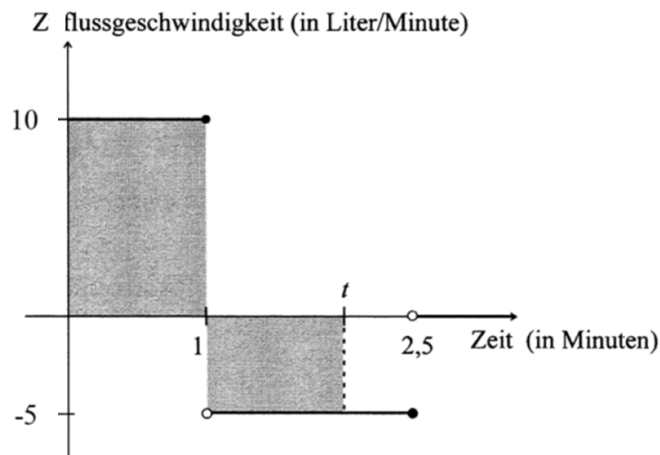


Abbildung 34: Zu- und Abfluss von Wasser (Danckwerts & Vogel 2006, S. 97)

Nun soll aufgrund der Kenntnis der Zuflussgeschwindigkeit die Wassermenge V zu einem bestimmten Zeitpunkt t rekonstruiert werden. Es wird also aus der *Änderung* des Wasserzuflusses der *Bestand* des Wassers ermittelt (Danckwerts & Vogel 2006).

Die Wassermenge lässt sich bei konstanter Geschwindigkeit (10 Liter/Minute) einfach berechnen: Geschwindigkeit multipliziert mit der Zeit (t). Das ergibt für den Bestand innerhalb der ersten Minute zum Zeitpunkt t folgendes Produkt (Danckwerts & Vogel 2006):

$$10 \text{ l/min} \cdot t \text{ min} = 10t \text{ Liter}$$

Für die nächsten 1,5 Minuten, in denen Wasser abgelassen wird, muss dieses von dem bisherigen Bestand (10 Liter) abgezogen werden (Danckwerts & Vogel 2006):

$$10 - 5 \times (t - 1) \text{ Liter}$$

Ab der Minute 2,5 wird der Zu- und Abfluss eingestellt. Das ergibt für den Bestand des Wassers V zum Zeitpunkt t folgenden Funktionsterm, der zusätzlich in der Abbildung 35 dargestellt ist (Danckwerts & Vogel 2006):

$$V(t) = \begin{cases} 10t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5(t - 1) & \text{für } 1 \leq t \leq 2,5 \\ 2,5 & \text{für } t > 2,5 \end{cases}$$

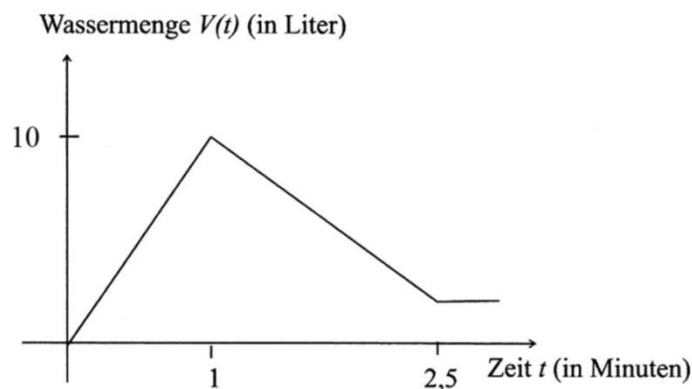


Abbildung 35: Wassermenge in der Wanne (Danckwerts & Vogel 2006, S. 98)

Was ist nun also passiert: $V(t)$ entsteht aus den Produkten, die einerseits die Menge des Zuflusses und den Abfluss des Wassers beschreiben. Diese kann man auch als Summe von *Rechtecksflächen* auffassen, die positiv oder negativ orientiert sind. Eben genau die Rechtecke, die von der Berandung und der x -Achse eingeschlossen werden (Danckwerts & Vogel 2006).

Dieses Einführungsbeispiel ist in dem österreichischen Schulbuch „Ingenieur-Mathematik 3“ in ähnlicher Weise zu finden (Abbildung 36). Dabei wird ein leerer Behälter 5 Minuten lang mit einer Geschwindigkeit von 200 l/min mit Wasser gefüllt und dann wieder 5 Minuten lang mit einer Geschwindigkeit von 100 l/min abgelassen:

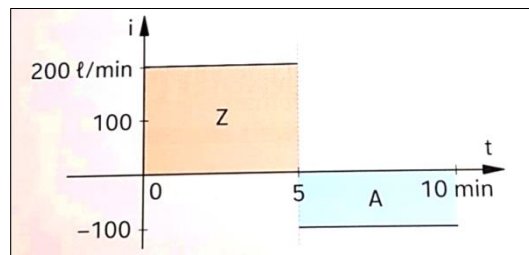


Abbildung 36: Zu- und Abfluss von Wasser in einen Behälter (Timischl & Kaiser 2016, S. 152)

Anders als bei Kirsch wird hier mit einer noch einfacheren abschnittsweisen Funktion gearbeitet. Wegen der gleichbleibenden Zufluss- und Abflussgeschwindigkeit bleibt es beim ersten Schritt nur bei konstanten Funktionen, und die Berechnung der Flächen beschränkt sich auf Rechtecke. Das Beispiel unterstreicht den Gedanken der Rekonstruktion und entfernt sich von dem klassischen Flächeninhalt, indem es gleich mit „negativen Flächen“ arbeitet (Danckwerts & Vogel 2006).

Man kann die Funktion der Zuflussgeschwindigkeit des Wassers als Ableitung der Wassermenge $V(t)$ verstehen: also $V'(t)$. Hiermit wäre der Rekonstruktionsprozess abgeschlossen. Aus der momentanen Änderungsrate wird ihre zugehörige Funktion, aus $V'(t)$ wird $V(t)$ erstellt (Danckwerts & Vogel 2006).

Danckwerts & Vogel haben damit einen anfänglichen Einstieg in die Integralrechnung präsentiert, bei dem essentielle Punkte des Integralbegriffs mit einem simplen kontextbezogenen Beispiel erarbeitet werden. Die Anbindung an den naiv geometrischen Flächeninhalt wird durch den Sachzusammenhang aufgeweicht, das Verständnis der bilanzierten Flächen wird von Anfang an thematisiert und mit einer hilfreichen Vorstellung verbunden: dem Zu- und Abfließen des Wassers (Danckwerts & Vogel 2006).

Der nächste Schritt ist nun die Weiterentwicklung des Rekonstruktionsgedankens auf nicht konstante, zunächst lineare Funktionen und dann weiter auf Kurven. Man beginnt damit, die Zuflussgeschwindigkeit zu verändern. Anstatt eines konstanten Zufließens wird die Geschwindigkeit gleichmäßig erhöht. Dadurch entsteht folgende Funktion (Abbildung 37) (Danckwerts & Vogel 2006):

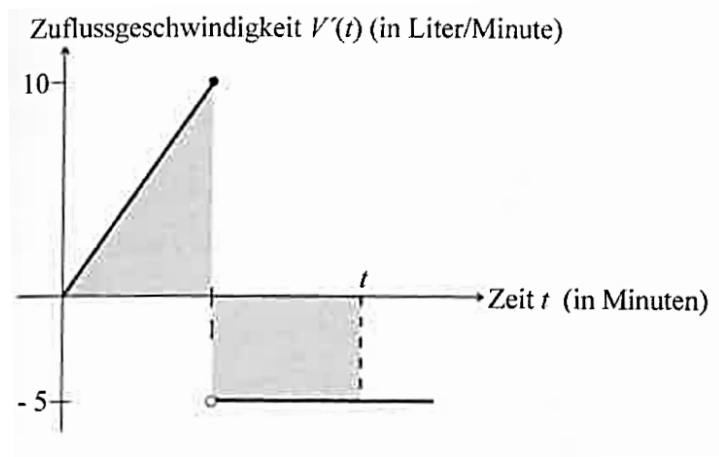


Abbildung 37: Zu- und Abfluss von Wasser bei nichtkonstantem Zufluss (Danckwerts & Vogel 2006, S. 99)

Mithilfe der Berechnungen der orientierten Flächeninhalte, hier ein rechtwinkeliges Dreieck und ein Rechteck, bekommen wir folgenden Funktionsterm und Graphen (Abbildung 38) (Danckwerts & Vogel 2006):

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10 \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 5(t - 1) & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

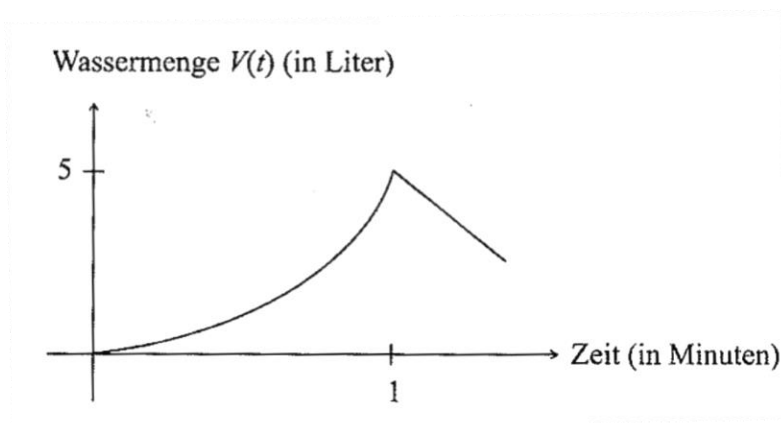


Abbildung 38: Wasserstand $V(t)$ bei nichtkonstantem Zufluss (Danckwerts & Vogel 2006, S. 99)

Den Schülern und Schülerinnen wird die Methode, die Wassermengenfunktion mithilfe der Flächenrekonstruktion zu ermitteln, präsentiert, ohne noch den Begriff des Integrals zu erwähnen oder eine Erklärung zu liefern, womit dieses Vorgehen zu rechtfertigen ist. Diese folgt aber sofort danach: Es wird eine Kurve angenommen, die die Zuflussgeschwindigkeit bei einem nicht linearen Verlauf beschreibt wie bei Abbildung 39 (Danckwerts & Vogel 2006).

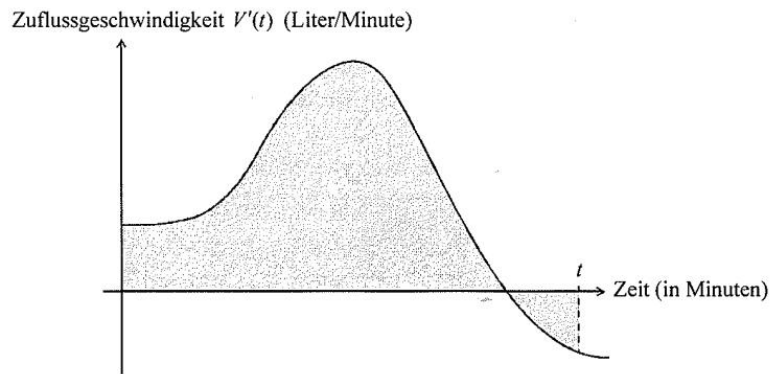


Abbildung 39: Zu- und Abfluss von Wasser bei nichtlinearem Zufluss (Danckwerts & Vogel 2006, S. 100)

Dabei wird nun der grundlegende Gedanke der Approximation in der Integralrechnung entwickelt: Die Geschwindigkeit wird in einem sehr kleinen Zeitintervall betrachtet, so dass man sie annähernd als konstant wahrnehmen kann. Ein Rechteck mit den Längen des Funktionswertes und der Länge des Zeitintervalls wird gebildet (siehe Abbildung 40) (Danckwerts & Vogel 2006).

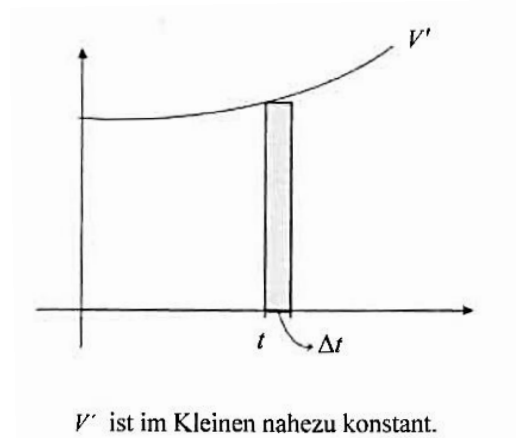


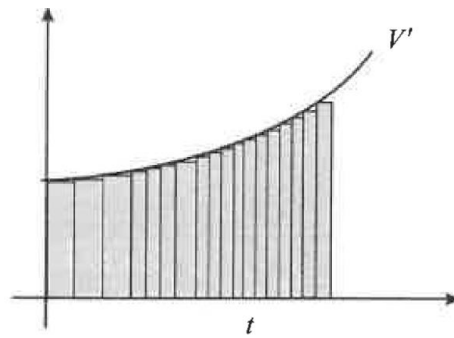
Abbildung 40: Bilden eines Rechtecks mit sehr kleinem Δt (Danckwerts & Vogel 2006, S. 100)

In der Abbildung kann man sehen, dass der Zuwachs von der Stelle t zu $t + \Delta t$ in der rekonstruierten Funktion aus dem Produkt des Funktionswertes der Ableitungsfunktion und Δt besteht, also aus dem gewichteten Flächeninhalt eines Rechtecks. Wenn Δt sehr klein ist gilt also ungefähr (Danckwerts & Vogel 2006):

$$V'(t) \approx \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$\Delta V \approx V'(t) \cdot \Delta t$$

Nun geht man vor wie bei den vorangegangenen Beispielen: Man bildet das Produkt über jedes Zeitintervall vom Anfangswert bis zum Wert t und summiert diese entstehenden orientierten Flächeninhalte auf, so wie in Abbildung 41 (Danckwerts & Vogel 2006).



Die Summe der genäherten Zuwächse

Abbildung 41: Die Rechtecke werden aufsummiert (Danckwerts & Vogel 2006, S. 101)

Somit ist die Idee der orientierten Fläche als Funktionswert der rekonstruierten Funktion auch für nicht lineare Funktionen verständlich. Wenn die Zeitintervalle beliebig klein werden ist auch der Unterschied zwischen der Fläche unter der Kurve und dem Wert der aufsummierten Rechtecksflächen beliebig klein (Danckwerts & Vogel 2006).

Die Einführung sollte zunächst nicht über diese analytische Präzisierung hinausgehen. Der erste Grundstein für das Verständnis und die zugrundeliegenden Vorstellungen ist gelegt und kann – wenn möglich – später vertieft werden. Es sind dann auch keine Aussagen zu revidieren oder auszubessern (Danckwerts & Vogel 2006).

Danckwerts & Vogel sehen den Rekonstruktionsgedanken als den für die Integralrechnung entscheidenden und weisen darauf hin, dass der Ablauf des Badewannenbeispiels nur ein Musterbeispiel für viele andere Situationen darstellt (siehe auch die Tabelle von Blum & Törner in Kap 4.4.6, in der vielfältige Anwendungszusammenhänge aufgelistet sind). Für die Rekonstruktion sind die Vorstellungen des Kumulierens und des Gesamteffekts essentiell. „Die Rekonstruktion von V an der Stelle t wird verstanden als Gesamteffekt, den die bekannte Änderungsrate V' bis zur Stelle t hat. Dieser entsteht durch Kumulieren aller Teileffekte von V' längs kleiner Teilintervalle“ (Danckwerts & Vogel 2006, S. 102). Wie der

Stammfunktion

↑

Rekonstruieren

↓

Mitteln

↔ Flächeninhalt ↔

Aspekte

Unterliegende Vorstellungen

Kumulieren (Prozess)

Gesamteffekt (Produkt)

Rekonstruieren und Mitteln als Aspekte können beide über den Flächeninhalt erarbeitet werden. Der Rekonstruktionsgedanke führt mittels des Hauptsatzes zur Idee der Stammfunktion innerhalb des Integrals. Als Prozess des Integrierens sieht man das Kumulieren und als endgültiges Produkt den Gesamteffekt (Danckwerts & Vogel 2006).

Definition der Integralfunktion

Zu einer Berandung $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ gehört die Integralfunktion I_a , die jedem $x \in [a; b]$ den orientierten Inhalt der Fläche zuordnet, die f mit der x -Achse zwischen a und x einschließt.

Die Funktionswerte der Integralfunktion heißen Integrale.

Zu einer Berandung $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ gehört die Integralfunktion I_a , die jedem $x \in [a; b]$ den orientierten Inhalt der Fläche zuordnet, die f mit der x -Achse zwischen a und x einschließt.

Die Funktionswerte der Integralfunktion heißen Integrale.

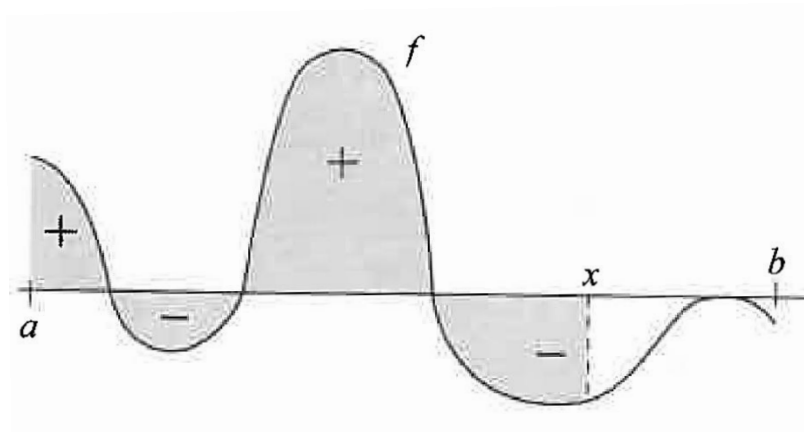


Abbildung 43: Orientierter Flächeninhalt (Danckwerts & Vogel 2006, S.103)

$$I_a(x) := (\text{Summe der Inhalte aller } \textit{oberhalb} \text{ der } x\text{-Achse gelegenen} \\ \text{Flächenstücke zwischen } a \text{ und } x) \\ - (\text{Summe der Inhalte aller } \textit{unterhalb} \text{ der } x\text{-Achse gelegenen} \\ \text{Flächenstücke zwischen } a \text{ und } x)$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann mit diesem Ansatz direkt hergeleitet werden, wenn man hier die Tatsache aufgreift, dass bei stetigen Funktionen die Ableitung der Rekonstruierten gleich der Funktion ist, aus der rekonstruiert wurde. Diesen Zusammenhang zeigt man nun für die Integralfunktion im Generellen. Ähnlich wie bei dem Zugang von Kirsch wird die Theoriebildung auf der „ontologischen Bindung“ (Danckwerts & Vogel 2006, S. 104) an den Flächeninhalt aufgebaut. Der Grundgedanke des Hauptsatzes wurde mit elementaren Funktionen erarbeitet und ist fast intuitiv greifbar. Durch den Hauptsatz wird auch der Stammfunktionsaspekt zugänglich (Danckwerts & Vogel 2006).

Die weitere Vertiefung der Theorie ist ohne Revisionen möglich, ob man die Präzisierung der unendlich kleinen Rechtecksflächen mithilfe des Grenzwertes der Ober- und Untersummen vornimmt oder den Aspekt des Integrierens als Mitteln beleuchten möchte (Danckwerts & Vogel 2006).

Die Methode, die Danckwerts & Vogel hier verwenden, beginnt also mit dem naiven Standpunkt des Flächeninhaltes, der zur Integralrechnung führt. Eine Weiterentwicklung des Begriffs findet dann mittels einer analytischen theoretischen Begutachtung statt, bei dem man sich vom naiven Standpunkt löst, dann wieder zum konkretisierten Flächeninhalt

zurückkehrt. Dabei nimmt der Abstraktionsgrad mit jedem Schritt zu. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 44 veranschaulicht (Danckwerts & Vogel 2006).

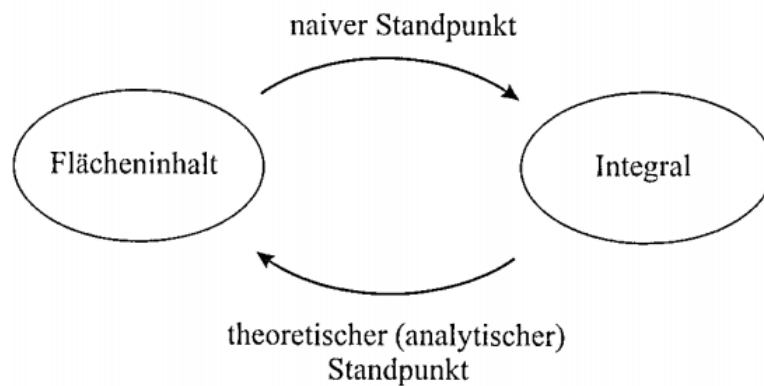


Abbildung 44: Komplementarität von Flächen und Integral (Danckwerts & Vogel 2006, S. 124)

5.3. Spezielle Zugänge

Ergänzend werden hier nun drei spezielle Unterrichtszugänge vorgestellt, die, auch wenn sie weniger bedeutend sind als die klassischen und modernen Zugänge, auf die eine oder andere Art erwähnenswert sind. Sie enthalten interessante Ideen und Elemente, die den Zugang zum Integralbegriff unterstützen oder Methoden beinhalten, die den Lernenden eine neue Perspektive bieten.

Zuerst betrachten wir den integrierten Ansatz, der sich aus der Diskussion der Reihenfolge von Differential- und Integralrechnung ergibt, danach wird der Mittelwert in Augenschein genommen, der offensichtlich eine Grundvorstellung des Integralbegriffs unterstützt und deswegen nicht fehlen darf, und schlussendlich der experimentelle Zugang, bei der die Methode der Erarbeitung im Vordergrund steht.

5.3.1. Der integrierte Ansatz für Ableitung und Integration

Historisch betrachtet ist die Integralrechnung vor der Differentialrechnung einzugliedern. Die Berechnung von unbekannten Flächen und Volumina sind Inhalte der Integralrechnung und werden schon seit der Antike behandelt (vgl. Kapitel 3.1) (Blum & Törner 1983). „Auch in den

folgenden Zeitepochen gehen maßgebliche Impulse zur Entwicklung der Analysis von der Integralrechnung aus, mehr noch [...] treten in ihr die großen ideengeschichtlichen Leitlinien der Analysis paradigmatisch zutage“ (Blum & Törner 1983, S. 156).

Blum & Törner nennen mehrere Aspekte, die die Überlegung, die Integralrechnung vor der Differentialrechnung anzusiedeln, unterstützen sollen. Sie erwähnen neben dem historischen, einen fachspezifischen, einen lernpsychologischen sowie einen curricularen Aspekt. Dabei wird darauf eingegangen, dass diese Reihenfolge für die Herausarbeitung des Hauptsatzes von Vorteil sein könnte, dass die Auseinandersetzung mit dem Flächeninhalt existenztheoretisch einfacher zu verstehen ist als die Steigung einer Tangente und dass die Flächenbehandlung an die geometrischen Berechnungen der Unterstufe anknüpft. Im Allgemeinen scheint es aber wichtigere Gründe zu geben, das Differenzieren im Schulunterricht zuerst zu behandeln: Der Differentialquotient wird im Physikunterricht früher benötigt, die Berechnung der Ableitung ist weniger kompliziert als die des Integrals und die Begriffsentwicklung der Differentialrechnung ist nicht so komplex und vielschichtig wie die der Integralrechnung (Blum & Törner 1983, S. 156).

Aufgrund dieser Überlegungen gibt es Vorschläge die Differential- und Integralrechnung nicht getrennt zu behandeln, sondern diese gemeinsam einzuführen. Ein möglicher Unterrichtsvorschlag mithilfe der Darstellung eines startenden ICE wurde 2003 von Schornstein sowie 2010 von Büchter & Henn präsentiert (Greefrath et al. 2016):

Dabei betrachtet man eine Funktion, die die Geschwindigkeit eines ICE in Abhängigkeit der Zeit angibt (Abbildung 45). Mithilfe der entstehenden Geschwindigkeits-Kurve lassen sich theoretische Inhalte der Differentialrechnung sowie der Integralrechnung ableiten (Büchter & Henn 2010).

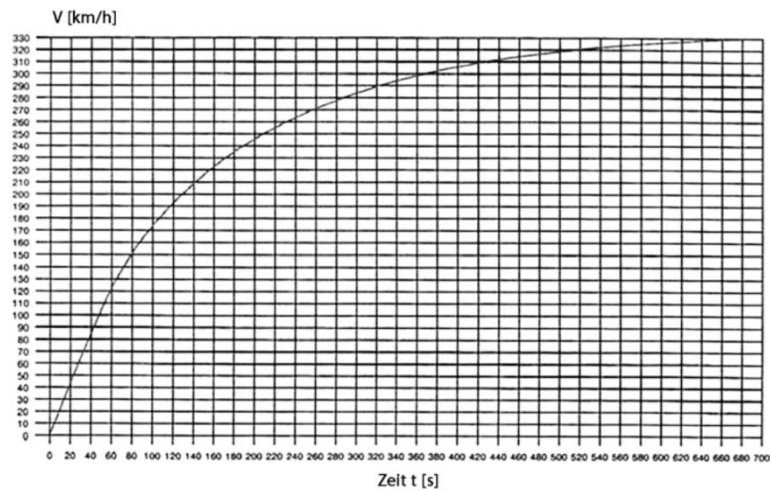


Abbildung 45: Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines ICE (Schornstein 2003, S.147)

Zum Beispiel könnten für das Modellieren der Beschleunigungsfunktion $\bar{a}$ Sekanten in mehreren Zeitintervallen in der Geschwindigkeitskurve eingezeichnet und ihre Steigung abgelesen werden. Die Abbildung 46 zeigt, wie so eine Funktion $\bar{a}$ aussehen könnte (Büchter & Henn 2010).

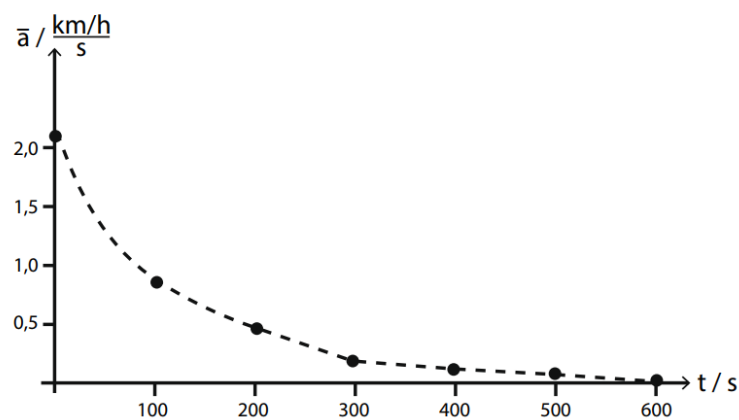


Abbildung 46: Beschleunigungs-Zeit-Diagramm eines ICE (Büchter & Henn 2010, S. 85)

Um die Integralrechnung zu motivieren, betrachtet man den zurückgelegten Weg des Zuges in einem gewählten Intervall und berechnet ihn durch Annäherung mittels Unter- und Obersummen (Abbildung 47) (Büchter & Henn 2010).

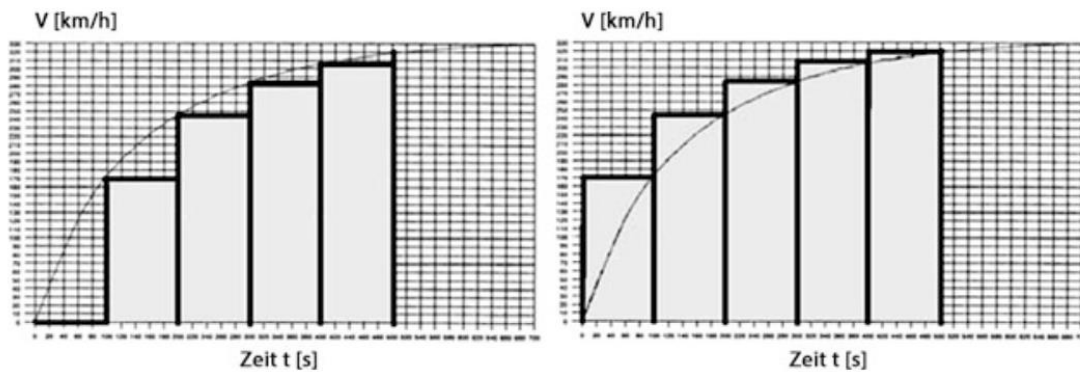


Abbildung 47: Untere und obere Abschätzung des Weges (Büchter & Henn 2010, S. 83)

Die Bedeutung des Hauptsatzes steht außer Frage, und seine Vermittlung würde durch einen integrierten Ansatz erleichtert werden. Die anschauliche Darstellung der Differential- und Integralrechnung anhand eines gemeinsamen Einführungsbeispiels unterstützt die Vorstellung als Umkehroperation zueinander und hilft die Integralfunktion als Hilfsmittel für den Flächeninhalt, aber auch als mögliche Stammfunktion wahrzunehmen (Greefrath et al. 2016).

5.3.2. Zugang zum Integral über die Mittelwertbildung

Eine der Grundvorstellungen des Integralbegriffs ist die des Mittelwerts. In Kapitel 4.3.3 wurde der Mittelwertsatz der Integralrechnung vorgestellt und so das Integral als Produkt der Intervalllänge und des „mittleren Funktionswertes“ interpretiert (Greefrath et al. 2016). Nun könnte man den Integralbegriff mit dieser Grundlage motivieren.

Sacharin beschreibt 1979, wie man über den Mittelwert zum Integral gelangen könnte. Er skizziert eine Heranführung mit zwei Stufen im Sinne des Spiralprinzips. Zuerst wird von endlich vielen Daten das arithmetische Mittel gebildet, wonach man zu einem kontinuierlichen Verlauf übergeht und den verallgemeinerten Mittelwert berechnet. Im zweiten Schritt präzisiert man mithilfe des Grenzwertes den Begriff des Integrals und definiert diesen. Als mögliches Einführungsbeispiel nennt er die Berechnung einer mittleren Temperatur aus gegebenen Messwerten (Sacharin 1976).

Unter anderen stellen Büchter & Henn (2010), Danckwerts & Vogel (2006) sowie Greefrath (2016) ein ähnliches Beispiel vor:

Wir betrachten die Messungen eines Temperaturerfassungsgeräts. Dieses nimmt an einem Tag zu den Zeitpunkten s_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) endlich viele Temperaturmessungen vor, die wir mit T_i bezeichnen ($i = 1, 2, 3, \dots$). Der erste und letzte Zeitpunkt, zu denen gemessen wird, ist $s_1 = a$ und $s_n = b$. In Abbildung 48 ist dies dargestellt. Für den Mittelwert der Daten berechnet man das arithmetische Mittel (nach Greefrath et al. 2016):

$$T_M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i.$$

Stellt man sich nun vor, dass man zu jedem Zeitpunkt s eine Messung $T(s)$ durchführt und dies als Funktion T auf dem Intervall $[a; b]$ interpretiert, so kann man diese als kontinuierliche Temperaturkurve darstellen (Abbildung 49) und den Mittelwert wie folgt umschreiben (Danckwerts & Vogel 2006):

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(s_i).$$

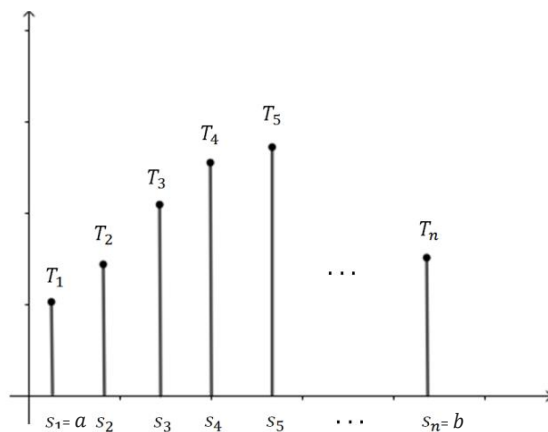


Abbildung 48: Endlich viele Werte werden gemessen

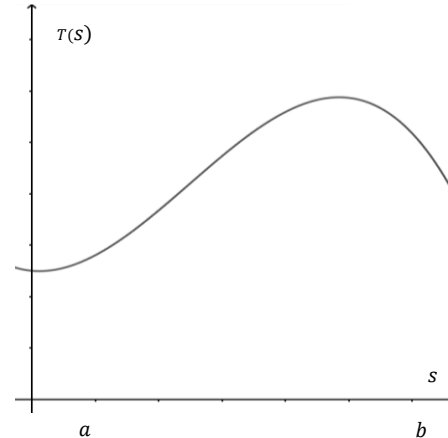


Abbildung 49: Kontinuierlicher Temperaturverlauf

Um die geometrische Vorstellung des Mittelwerts zu vermitteln drückt man ihn mithilfe von Produktsummen aus und kann, wenn $n \rightarrow \infty$, diese nun mit dem Integral ersetzen (Büchter & Henn 2010):

$$\bar{T} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n T(s_i) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b T(s) ds.$$

Nach Sacharin (1976) definieren wir nun:

Definition:

Wenn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ den Mittelwert μ besitzt, dann heiße

$$\int_a^b f(x) dx := (b-a) \cdot \mu$$

das Integral von f auf $[a, b]$.

Die Rechtecksfläche, die gebildet und durch das Integral beschrieben wird, ist in einem Schulbuch (Schmidt et al. 2011) schön dargestellt (Abbildung 50).

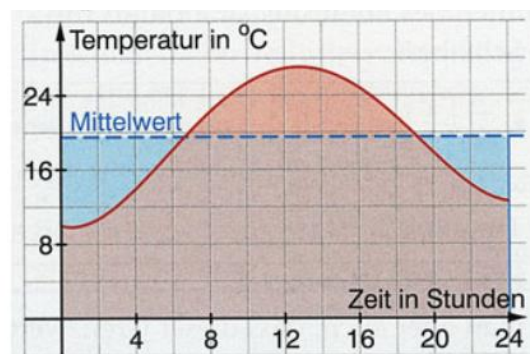


Abbildung 50: Darstellung des Mittelwertes der Temperaturkurve (Schmidt et al. 2011, S. 162)

Durch diesen Zugang wird die Grundvorstellung, das Integral als Produktsumme zu verstehen, gefördert (Greefrath et al. 2016) und die starke Anbindung an den Flächeninhalt vermieden (Blum & Törner 1983). Blum & Törner merken außerdem an, dass die „orientierte Fläche“ beim Bilden des Mittelwertes nicht vorkommt, womit technische Schwierigkeiten mit negativen Flächen wegfallen. Der Begriff des Mittelwertes wird schon in der Sekundarstufe I behandelt. Mit diesem Beispiel ist eine Anknüpfung daran möglich und eine Erweiterung des Begriffes findet statt (Blum & Törner 1983). Reichel beschreibt den Mittelwert als

„fundamentalen mathematischen Begriff“, als „mathematisch anschaulich“ und „ausreichend abstrakt“ und damit als gut geeignet für die Theorieentwicklung der Integralrechnung (Reichel 1974).

Vor allem spielt der Mittelwert im Alltag der Lernenden eine Rolle, was den Integralbegriff mit einer bekannten Vorstellung verbindet und ihn so leichter zugänglich macht. Der Zusammenhang von Stochastik und Analysis wird gezeigt und als großes Anwendungsgebiet der Integralrechnung präsentiert. Allerdings wird der Zugang zu anderen, möglicherweise essentielleren Anwendungsbereichen der Integralrechnung behindert (Danckwerts & Vogel 2006).

5.3.3. Experimenteller Zugang

Zuletzt wird ein Zugang vorgestellt, der den Schülern und Schülerinnen einen experimentellen Einstieg in die Materie ermöglicht. Hier steht die methodische Herangehensweise im Vordergrund. Das Ziel ist, wie bei dem klassischen Zugang in Kapitel 5.1.1, die Fläche unter einer Kurve möglichst genau zu bestimmen.

Dabei wird wieder von einer Funktion f mit $f(x) = x^2$ ausgegangen. In einem geeigneten Intervall, in diesem Fall $[0, 3]$, wird die Fläche betrachtet, die von der Abszisse und dem Graphen begrenzt wird. Den Lernenden wird nun eine Arbeitsmethode aus der Chemie vorgestellt, bei der die gesuchte Fläche aus Papier ausgeschnitten und dann abgewogen wird, um dann das Verhältnis des Gewichts der gesuchten Fläche zu einer bekannten Fläche, auszuwerten. Dazu werden zwei Arbeitsblätter pro Kopf ausgeteilt, auf denen Ausschneideformen abgebildet sind, zum einen ein Rechteck mit den Maßen 150 x 250 mm und zum anderen das gleiche Rechteck mit einem eingeschriebenen Parabelstück (Ausschneideform 1). Beide Formen werden möglichst genau ausgeschnitten.

Ausschneideform 1

Das Rechteck ist 150 x 250 mm groß.

Berechnung Papiergewicht	
g/m^2	80
g/mm^2	0,00008
A4 Breite (mm)	210
A4 Höhe (mm)	297
A4 Fläche (mm^2)	62 370
A4 Gewicht (g)	4,9896
Ausschneiderechteck:	
Breite (mm)	150
Höhe (mm)	250
Fläche (mm^2)	37 500
Gewicht (g)	3,0

Aufgrund des Papiergewichts kann das ausgeschnittene Rechteck einfach berechnet werden. Nun wiegen die Lernenden das Rechteck und das ausgeschnittene Parabelstück mit einer ausreichend exakten Waage ab und kommen durchschnittlich auf folgendes Ergebnis:

Erwartetes Ergebnis nach dem Wiegen:	
Rechteck (g)	3,0
Parabel (g)	1,0

Demnach ist die Parabelfläche genau $\frac{1}{3}$ des ganzen Rechtecks. Weitere Schritte sollen nun sein, dieses Experiment rechnerisch zu überprüfen. Dazu stellt man der Klasse die Integralrechnung vor, mit der diese Berechnung möglich ist. Dazu bietet sich einer der beiden klassischen Zugänge an (Kapitel 5.1).

Interessant ist an diesem Zugang die Gegenüberstellung des näherungsweise erzielten Ergebnisses durch Abwiegen und der exakten Berechnung des Integrals. Die einfachen Mittel, die es möglich machen, zu dem Verhältnis zu kommen, stehen im Kontrast zu der theoretischen Aufarbeitung der Integralrechnung und deren Begriffsentwicklung. Die unübliche Methode des Ausschneidens und Abwiegens bleibt in Erinnerung und bietet eine willkommene Abwechslung zu den sonstigen mathematischen Praktiken.

6. Konkrete Unterrichtsgestaltung

„Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, daß man keine Gelegenheit versäumen sollte, sie etwas unterhaltsamer zu gestalten.“ *Blaise Pascal*

In Kapitel 5 wurden die verschiedenen Zugänge zum Integralbegriff detailliert besprochen und es wurde geprüft, welcher von ihnen am geeignetsten ist, die wesentlichen Grundvorstellungen des Integrals zu vermitteln. Wie nun eine konkrete Unterrichtsplanung für die Einführung der Integralrechnung aussehen könnte, wird hier vorgestellt.

Der Unterrichtsentwurf orientiert sich an dem Zugang aus Kapitel 5.2.2 „Bestand und Änderung im Anwendungskontext“, bei der aus der gegebenen Änderungsrate eines Sachzusammenhangs der Bestand rekonstruiert wird. Diese Hinführung zeichnet sich dadurch aus, dass sie weniger die geometrische Vorstellung des Flächeninhalts unterstützt als vielmehr die des verallgemeinerten Produkts, welches die Zugänge für Sachzusammenhänge aus Naturwissenschaft und Wirtschaft erleichtert (Becher & Ossmann 2016).

Auf der anderen Seite wird der orientierte Flächeninhalt sinnstiftend motiviert und die Auffassung der Gleichheit von Flächeninhalts- und Stammfunktionsaspekt (Bender 1990) erfüllt, indem der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung intuitiv erarbeitet und nur die Integralfunktion vorab definiert wird. Insbesondere im Rahmen des Badewannenbeispiels von Danckwerts & Vogel, bei dem zunächst mit einem konstanten Zufluss von Wasser in eine Badewanne begonnen wird, ist das alsbaldige selbstständige Arbeiten gut möglich. Die Nachteile der klassischen Zugänge, die einseitige Grundvorstellungen vermitteln und die Lernenden entweder zu früh mit aufwändigen Begriffserklärungen konfrontieren oder den Hauptsatz als Definition einführen, sind nicht vorhanden (Danckwerts & Vogel 2006).

Für diese Unterrichtsplanung wurden Anregungen und Materialien aus dem Artikel: „Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung“ von Becher & Ossmann (2016) und dem Unterrichtsentwurf „Von der Randfunktion zur Integralfunktion“ von Busse et al. (2016) als Teil des Projekts SINUS NRW verwendet.

Thema: Einführung in die Integralrechnung

Dauer: 100 Minuten (Zwei Unterrichtseinheiten)

Lehrplanbezug:

8. Klasse

- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (z.B.: für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)
- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können

(BMBWF (Hrsg.) 2018)

Fachliche Voraussetzung/Vorbereitung: Flächeninhaltsberechnung, Differentialrechnung und Anwendungsaufgaben der Differentialrechnung, Funktionen (besonders die Darstellung von Füllvorgängen mit einem Graphen)

Ziele der Unterrichtssequenz/Lernziele: Grundlegendes Verständnis des Integralbegriffs. Die Lernenden können das Integrieren in Hinblick auf dessen Bedeutung als Rekonstruktion einer Größe bei gegebener Änderungsrate in verschiedenen Anwendungskontexten interpretieren und können bei konstantem und linearem Verlauf die Bestandsfunktion erstellen. Das Integral soll als orientierter Flächeninhalt wahrgenommen werden und der Zusammenhang von Ableitungsfunktion und Integralfunktion soll erkannt werden (1. Teil des Hauptsatzes).

Durchführung:

Einstiegsphase

Nach der Begrüßung und einer kurzen Aktivierung der letzten Unterrichtsinhalte und des Vorwissens zur Differentialrechnung wird das neue Thema mittels der rhetorischen Technik „Storytelling“ eingeleitet. Dabei wird die historische Entwicklung der Integralrechnung in eine unterhaltsame Geschichte verpackt, die zum Ziel hat die Neugierde der Lernenden zu wecken und die Inhalte für sie relevanter und erlebbarer zu machen (Zazkis & Liljedahl 2009). Es wird unter anderem auf den Prioritätenstreit zwischen Leibniz und Newton eingegangen und an die Differentialrechnung angeknüpft, die erst in der letzten Unterrichtseinheit im Rahmen des Zusammenhangs der Kategorien Bestand und Änderungsrate (Anwendungsaufgaben) wiederholt worden ist. Der Einstieg wird mit Bildern der Protagonisten der Geschichte in Form einer PowerPoint-Präsentation unterstützt.

Erarbeitung und Sicherung

Für die Verankerung des Rekonstruktionsgedankens betrachtet man, ähnlich wie bei Danckwerts & Vogel (2006), die Füllung eines Gefäßes mit Wasser (beziehungsweise seine Entleerung) (Becher & Ossmann 2016). Nun wird mithilfe von GeoGebra und dem „Wasserhahn-Applet“ (Institut Landau (Hrsg.) o. D.) (Abbildung 51) die Theorie der Integralrechnung entwickelt: Das Applet besteht aus der Darstellung eines Gefäßes, das abhängig von der Zuflussrate gefüllt oder entleert wird, und vier Graphen, die pro auszuwählender Funktion die Zuflussrate, das Wasservolumen, den orientierten Flächeninhalt und die Steigung anzeigen. Dazu sind die beiden Gleichungen $F'(x) = f(x)$ und $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ (eine Kurzform des ersten Teils des Hauptsatzes) zu sehen. Es können sechs verschiedene Zuflussraten (Abbildung 52) ausgewählt werden, wobei davon zwei auch negative Zuflussraten also Abflüsse enthalten. Alle Graphen und die Befüllung des Gefäßes sind von dem Schieberegler, der den Zeitpunkt steuert, abhängig und bewegen sich zeitgleich. Jedes der Elemente kann ausgeblendet werden.

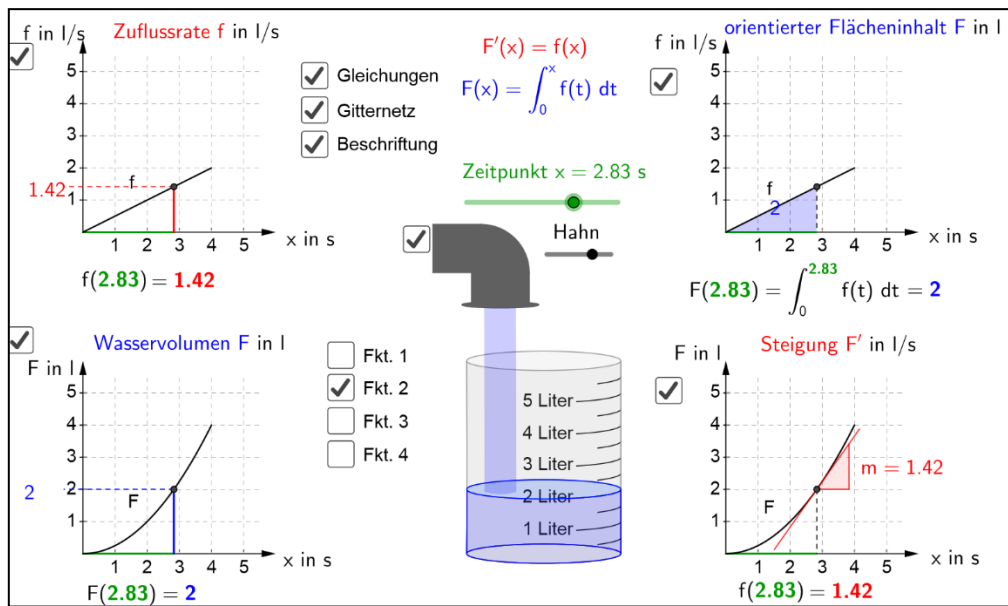


Abbildung 51: Wasserhahn-Applet mit linear wachsendem Zufluss (Institut Landau (Hrsg.) o. D.)

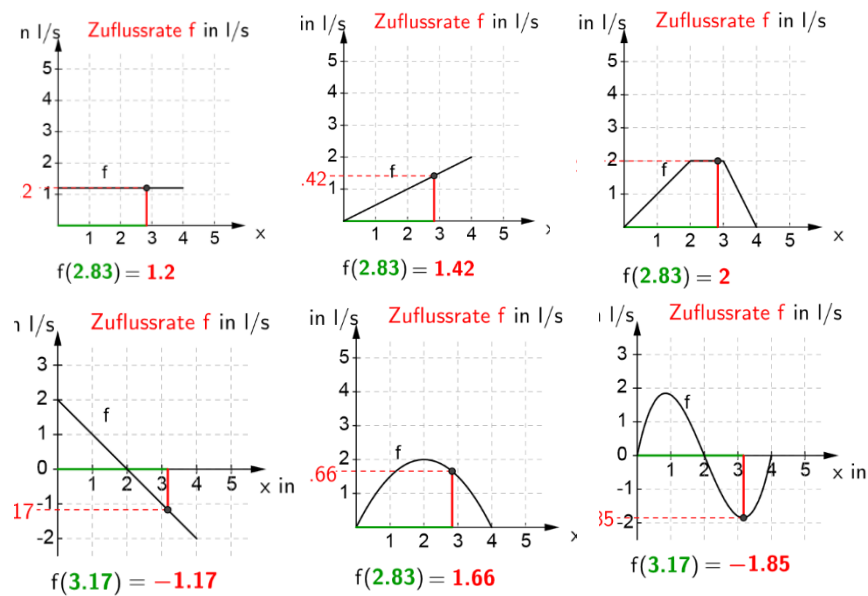


Abbildung 52: Sechs verschiedene Zuflussraten können gewählt werden (Institut Landau (Hrsg.) o. D.)

Mit dem konstanten Zufluss wird begonnen: Zunächst werden nur das Gefäß und der linke Graph der Zuflussrate gezeigt. Die Lehrperson leitet, wie bei dem Badewannenbeispiel (Kapitel 5.2.2) von Danckwerts & Vogel (2006), die Funktion des Wasservolumens her, indem sie das Produkt aus der Zuflussgeschwindigkeit und den bis dahin vergangenen Minuten bildet und damit die Fläche unter dem Funktionsgraphen des Zuflusses berechnet. Unterstützend wird der Graph des orientierten Flächeninhalts auf dem Applet gezeigt. Die

Lernenden werden aufgefordert den Graphen des dazugehörigen Wasservolumens auf einem Arbeitsblatt (1) einzuzeichnen. Zur Kontrolle wird der Graph des Wasservolumens im Applet gezeigt. In einem LehrerInnen-SchülerInnen Gespräch soll erarbeitet werden, dass die Zuflussrate zu jedem Zeitpunkt die Ableitung des Wasservolumens ist und was das für den Zusammenhang der beiden Funktionen bedeutet. Die restlichen Zufluss-Situationen werden bearbeitet, die Integralfunktion wird wie in dem Kapitel 5.2.2 hergeleitet und definiert (Tafel) und Ableiten und Integrieren werden als zueinander inverse Operationen präsentiert.

Anwendung und Transfer

Damit die Lernenden den Zusammenhang auch in anderen Kontexten begreifen, werden vier Gruppen mit idealerweise je vier Schülern und Schülerinnen (je nach Klassengröße) gebildet, die die Arbeitsaufträge (2a, 2b, 2c, 2d) bearbeiten und dazu Plakate erstellen. Diese werden danach im Klassenraum aufgehängt und im Rahmen der Methode „Museumsgang“ präsentiert. Dabei bleibt je ein Gruppenmitglied bei dem eigenen Plakat, um es zu präsentieren, und die Übrigen besuchen die Plakate der anderen Gruppen. Es gibt vier Durchgänge, bei denen jedes Mal ein anderes Gruppenmitglied die erarbeiteten Inhalte erklärt. Um die Ereignisse der Gruppenarbeit festzuhalten, muss jeder Schüler und jede Schülerin ein Arbeitsblatt (3) dazu ausfüllen.

Stundenabschluss/Ergebnissicherung

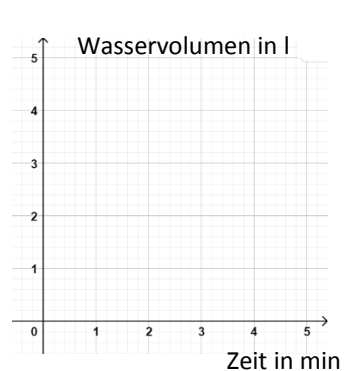
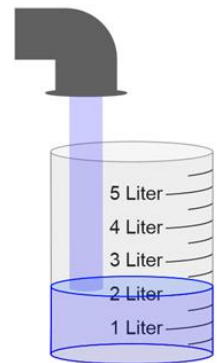
Die Ergebnisse der Arbeitsaufträge und des Arbeitsblattes (3) werden verglichen und mit der Lehrperson besprochen. Der Integralbegriff und der Zusammenhang von Ableitungs- und Integralfunktion wird nochmal anhand der Anwendungsaufgaben wiederholt. Dazu wird auch das GeoGebra-Applet zur Unterstützung verwendet.

Erforderliche Medien: Beamer, LehrerInnen-Laptop, Tafel, Heft, Plakate, Stifte, Taschenrechner, Lineal, Arbeitsblätter (1/2a/2b/2c/2d/3)

Zeit	Lernziele	Inhalt/ Durchführung	Methode/ Sozialform	Medien
5'	Thema motivieren, Interesse wecken	Begrüßung/Einleitung zum Thema Integralrechnung und Anknüpfung an die Differentialrechnung	Storytelling/ Frontal- unterricht	Beamer (PowerPoint)
25'	Integral als Rekonstruktion und als orientierter Flächeninhalt begreifen, Zusammenhang von Änderungsraten und Bestand verstehen und beschreiben können (Hauptsatz)	Änderungsrate und Bestand des Wassers in einem Gefäß und deren Zusammenhang bezüglich des Integrals verstehen/ SuS arbeiten an dem Arbeitsblatt (1) und übertragen die Inhalte von der Tafel in ihr Heft	Frontal- unterricht/ Einzelarbeit/ L-SuS- Gespräch	Tafel (Heft)/Beamer (GeoGebra- Applet)/ Arbeitsblatt (1)
30'	SuS können die Bedeutung des Integralbegriffs und des orientierten Flächeninhalts in einem weiterem Anwendungskontext verstehen und berechnen	Änderungsraten von verschiedenen Sachzusammenhängen werden bearbeitet/Bearbeitung der Arbeitsaufträge und Gestaltung der Plakate	Plakate gestalten/ Gruppenarbeit	Plakate/Stifte/ Kleber/ Arbeitsblätter (2a-2d)/ Taschen- rechner
30'	SuS verstehen die Bedeutung des Integralbegriffs in mehreren Anwendungs- kontexten	Es werden die Gemeinsamkeiten der bearbeiteten Aufgaben gesucht und der Zusammenhang von Änderungsrate und Bestand bezüglich des Integrals in anderen Sachzusammenhängen wiedererkannt/SuS besuchen die Plakatstationen und füllen das Arbeitsblatt (3) aus.	Museumsgang /SuS- Präsentation/ Einzel- oder Partnerarbeit	Plakate/ Arbeitsblatt (3)
10'	Das Gelernte wird gesichert und gefestigt und der Inhalt des Hauptsatzes (1.Teil) wird wiederholt	Die Integraltheorie wird wiederholt und auf die Inhalte der Anwendungsaufgaben bezogen. Die Ergebnisse des Arbeitsblattes (3) werden besprochen, Anbindung an die erarbeitete Theorie der ersten Stunde	L-SuS- Gespräch	Arbeitsblatt/ Beamer (GeoGebra- Applet)

Bestand und Änderungsrate des Wassers in einem Gefäß

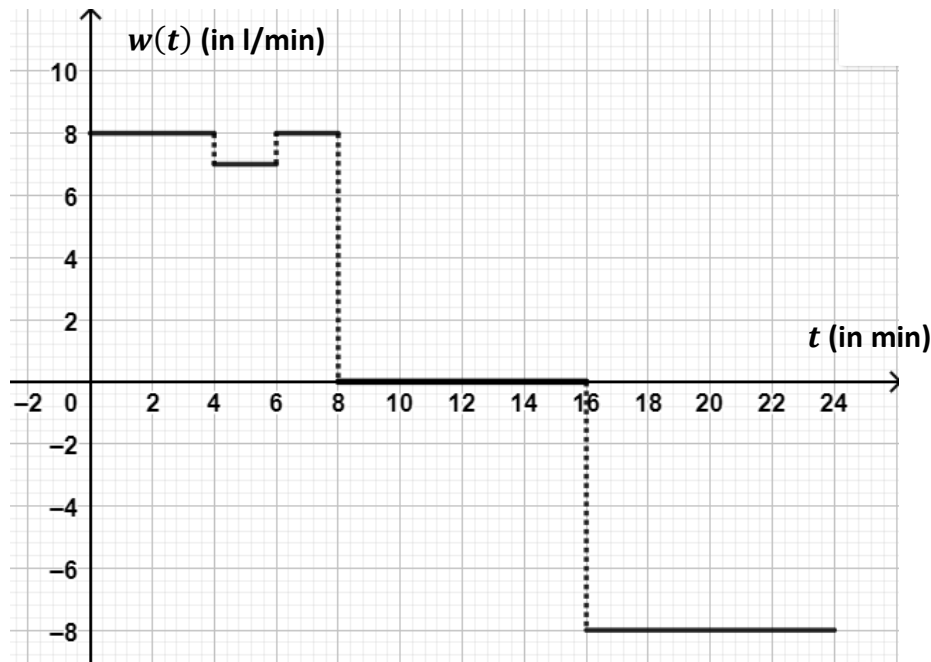
Stell dir vor, ein Gefäß wird mit Wasser gefüllt. Die Wassermenge, die pro Zeiteinheit fließt, nennen wir Zuflussrate. Die folgenden Graphen stellen die Zuflüsse des Wassers (in l/min) abhängig von der Zeit (in Minuten) dar. Erstelle für jeden dieser Graphen den zugehörigen Graphen des Wasservolumens! Überlege dafür, wie groß das Wasservolumen nach 1, 2, 3, 4, x Minuten ist! Was fällt dir auf, wenn du die Graphen der Zuflussrate (Änderungsrate) und des Wasservolumens (Bestand) vergleichst?



(nach Busse et al. 2016, Institut Landau (Hrsg.) o. D.)

Badewanne

Herr Lösch möchte ein Bad nehmen und lässt warmes Wasser in seine leere Badewanne ein. Das folgende Diagramm stellt die zeitliche Entwicklung der Zufluss- und Abflussrate [t in min.; $w(t)$ in Liter/min] dar:



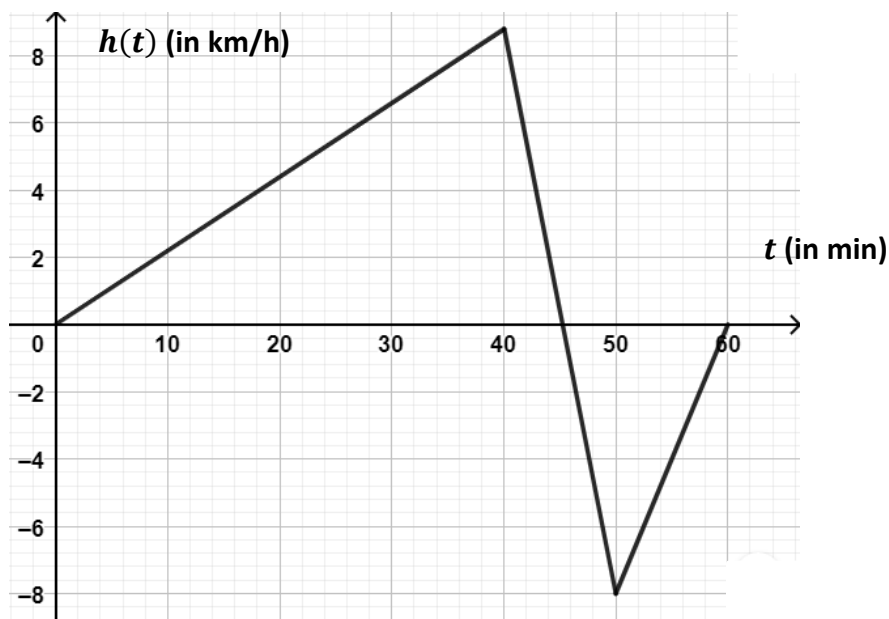
- Beschreibt, wie Herr Lösch das Wasser in die Wanne einlässt (bzw. auslässt)!
- Skizziert den Graphen der Funktion $W(t)$, welcher die Wassermenge in der Badewanne in Abhängigkeit von der Zeit angibt. (Zeichnet die Graphen auf dem Plakat untereinander so, dass die vertikalen Achsen eine Linie bilden!) Welche Bedeutung hat es, wenn der Graph von $w(t)$ unterhalb der Abszisse (waagrechte Achse) verläuft?
- Wo ist das Wasservolumen am größten? Was könnt ihr dort über $w(t)$ aussagen? Welche Begründung kann man dafür finden?

Haltet eure Ergebnisse auf einem Plakat fest, und präsentiert den Sachzusammenhang sowie eure Erkenntnisse beim Museumsgang!

(nach Busse et al. 2016)

Heißluftballon

Die Familie Rast macht einen Ausflug mit einem Heißluftballon. Dieser startet zum Zeitpunkt $t=0$ min vom Boden. Das folgende Diagramm beschreibt die Geschwindigkeit des Ballons in vertikaler Richtung ($h(t)$ in km/h und t in min.).



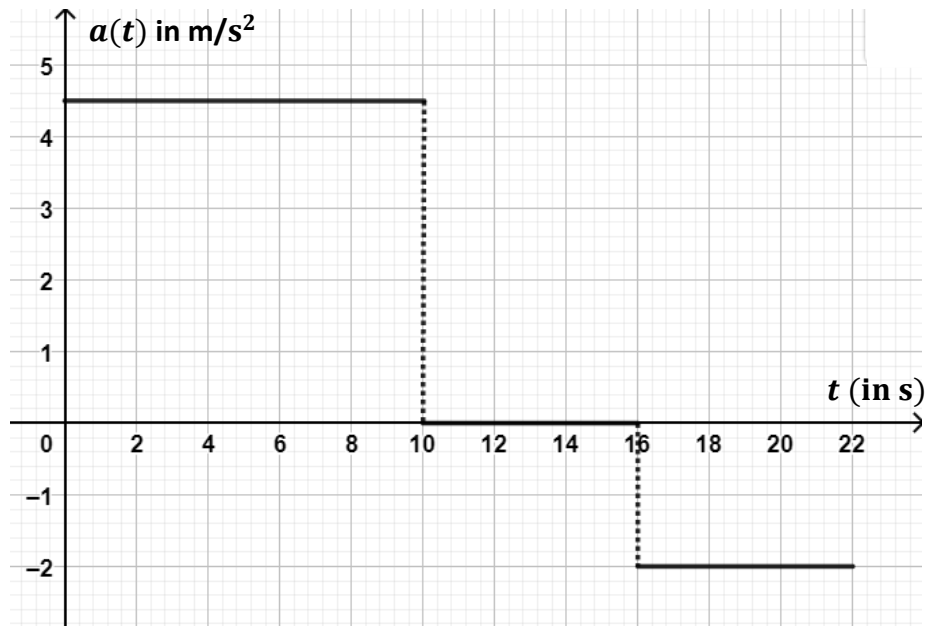
- Beschreibt den Bewegungsablauf des Ballons über die Fahrtzeit!
- Skizziert den Graphen der Funktion $H(t)$, welcher die Höhe des Ballons in Abhängigkeit von der Zeit angibt. (Zeichnet die Graphen auf dem Plakat untereinander so, dass die vertikalen Achsen eine Linie bilden!) Welche Bedeutung hat es, wenn der Graph von $h(t)$ unterhalb der Abszisse (waagrechte Achse) verläuft?
- In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Ballon nach oben beziehungsweise nach unten? Was könnt ihr dort über $h(t)$ aussagen? Welche Begründung kann man dafür finden?

Haltet eure Ergebnisse auf einem Plakat fest, und präsentiert den Sachzusammenhang sowie eure Erkenntnisse beim Museumsgang!

(nach Busse et al. 2016)

Porsche

Herr Fink liebt schnelle Autos und bucht bei einem Autohändler eine Testfahrt mit einem Porsche Taycan. Das folgende Diagramm zeigt die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit ($a(t)$ in m/s^2 und t in sek.)



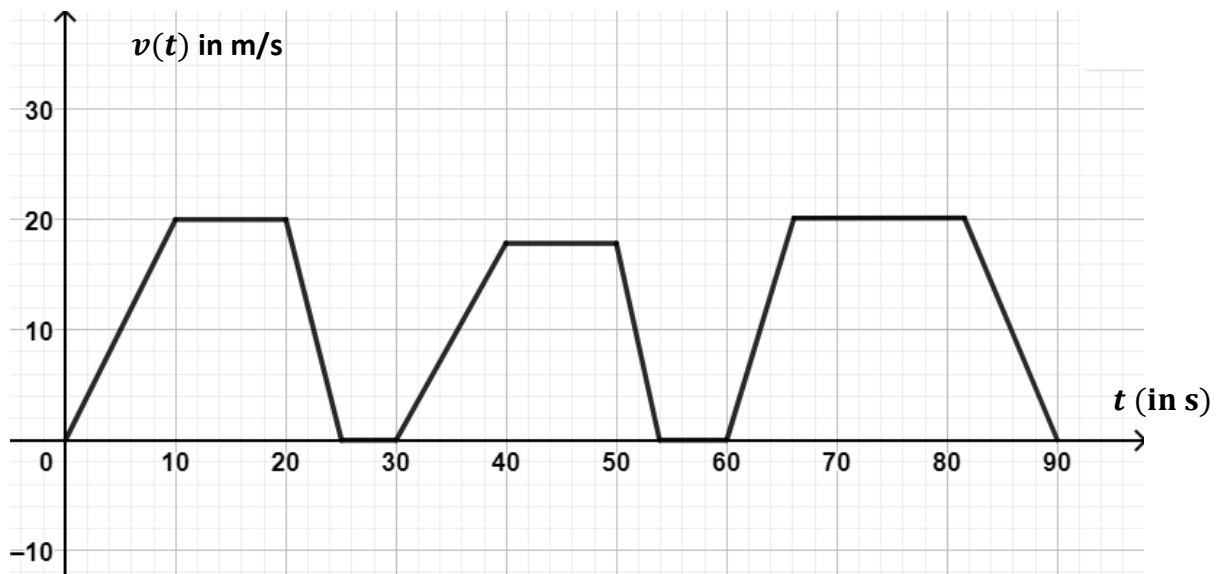
- Wie kann man die Fahrt von Herrn Fink beschreiben? Was passiert in dem Zeitintervall $[10;16]$?
- Skizziert den Graphen der Funktion $A(t)$, welcher die Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von der Zeit angibt. (Zeichnet die Graphen auf dem Plakat untereinander so, dass die vertikalen Achsen eine Linie bilden!) Welche Bedeutung hat es, wenn der Graph von $a(t)$ unterhalb der Abszisse (waagrechte Achse) verläuft?
- Wann fährt Herr Fink am schnellsten? Was könnt ihr dort über $a(t)$ aussagen? Welche Begründung kann man dafür finden?

Haltet eure Ergebnisse auf einem Plakat fest, und präsentiert den Sachzusammenhang sowie eure Erkenntnisse beim Museumsgang!

Bildquelle: <https://motor.at/news/porsche-taycan-2020-elektroauto-technische-daten-preis/400596152>. Zugriff am 12.12.2019

Radfahrer

Stefan fährt gerne in der Stadt mit seinem Fahrrad. Leider kann er nicht immer so schnell fahren, wie er möchte, weil Ampeln ihn aufhalten. Das folgende Diagramm gibt die Geschwindigkeit des Radfahrers in Abhängigkeit von der Zeit an ($v(t)$ in m/s und t in s).



- Wie kann man Stefans Fahrt beschreiben? Zu welchen Zeitpunkten tauchen vermutlich Ampeln auf?
- Skizziert den Graphen der Funktion $V(t)$, welcher den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit angibt. (Zeichnet die Graphen auf dem Plakat untereinander so, dass die vertikalen Achsen eine Linie bilden!) Wie kann man sich erklären, dass der abgebildete Graph nie die waagrechte Abszisse kreuzt? Was würde das in diesem Kontext bedeuten?
- Wie weit ist Stefan nach einer Minute gefahren? Was ist seine Höchstgeschwindigkeit?

Haltet eure Ergebnisse auf einem Plakat fest, und präsentiert den Sachzusammenhang sowie eure Erkenntnisse beim Museumsgang!

(nach Schmidt 2008)

Arbeitsblatt 3

Museumsgang „Rekonstruktion einer Größe“

Ergänze die Tabelle, nachdem du die Präsentationen gesehen hast!

	Badewanne	Heißluftballon	Porsche	Radfahrer
Ausgangssituation: Beschriebene Änderungsrate?				
Ausgangssituation: Einheiten der Achsen?				
Rekonstruierte Situation: Bedeutung des (orientierten) Flächeninhaltes unter der Ausgangsfunktion?				
Rekonstruierte Situation: Einheiten der Achsen?				
Zusammenhang: Interpretiere im Sachzusammenhang: Was bedeutet es für den Graphen der rekonstruierten Funktion, wenn der Graph der Ausgangsfunktion oberhalb bzw. unterhalb der Abszisse verläuft				

(nach Busse et al. 2016)

Zusammenfassung

Den Integralbegriff in der Schule sinngemäß und verständlich zu vermitteln, stellt eine große Herausforderung dar. Die zahlreichen Vorstellungen, die ihm zugrunde liegen, machen es schwer, die erste Begegnung so zu gestalten, dass seine vollständige Bedeutung erfasst wird. Diese Arbeit hat zum Ziel, die verschiedenen Zugänge zum Integral zu analysieren und diese zu bewerten. Dafür werden zunächst Richtlinien für einen kompetenzorientierten Unterricht vorgestellt und die Bestimmungen von Lehrplan und neuer Reifeprüfung bezüglich der Integralrechnung präsentiert. Es folgt ein Auszug aus der geschichtlichen Entwicklung des Integrals sowie die Darstellung der zentralen Definitionen und Sätze. Um das Wesen des Begriffs verständlicher zu machen, werden die unterschiedlichen Grundvorstellungen und Aspekte besprochen und wird auf alternative Blickwinkel des Integrals und seinen Charakter eingegangen. Der Hauptteil der Arbeit besteht aus der detaillierten Ausführung der unterschiedlichen Zugänge der Integralrechnung und deren Vor- und Nachteile. Abschließend wurde ein geeigneter Unterrichtsentwurf erstellt, der den vielinterpretierten Begriff bestmöglich darstellt und die größtmögliche Bandbreite an elementaren Grundvorstellungen transportiert.

Abstract

It is a major challenge to convey the concept of integral in a meaningful and understandable manner. The numerous ideas on which it is based make it difficult to design the first encounter in such a way that its full meaning is grasped. The aim of this work is to analyze and evaluate the various approaches to the integral. For this purpose, guidelines for competency-based teaching are at first presented and the provisions of the curriculum and new final examination are presented with regard to the integral calculation, followed by an extract from the historical development of the integral as well as the presentation of the central definitions and sentences. In order to make the essence of the term more understandable, the different basic ideas and aspects are discussed and alternative perspectives of the integral and its character are reviewed. The main part of the work consists of a detailed description of different approaches to integral calculation and their advantages and disadvantages. Finally, a suitable lesson plan was created that best represents the much-interpreted term and conveys the greatest possible range of basic ideas.

Literaturverzeichnis

- Baumert, J., Bos, W., Klieme, E., Lehmann, R., Lehrke, M., Hosenfeld, I., Neubrand, J., Watermann, R. (Hrsg.) (1999). Testaufgaben zu TIMSS/III. Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlussklassen der Sekundarstufe II (Population 3). Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.
- Becher, A., Ossmann, H. (2016). Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung. *mathematiklehren*, 199, 33-36.
- Bender, P. (1990). Zwei „Zugänge“ zum Integralbegriff? *mathematica didactica*, 14, 102–127.
- Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht, erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel, A. Kirsch, W. Blum (Hrsg.). *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48–60). Hannover: Schroedel.
- Blum, W., Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- BMBWF (Hrsg.) (2015): <https://www.michael-leitgeb.at/ahs/>. Zugriff am 04.12.2019
- BMBWF (Hrsg.) (2018):
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2018-09-01>. Zugriff am 04.12.2019
- BMBWF (Hrsg.) (2019): <https://www.michael-leitgeb.at/ahs/>. Zugriff am 04.12.2019

- BMBWF (Hrsg.) (2019). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik:
<https://www.srdp.at/index.php?elD=dumpFile&t=f&f=861&token=685dfd797193f067115157aa1830600942a5074f>. Zugriff am 04.12.2019.

- Böer, H., Kliemann, S., Puscher, R., Segelken, S. Schmidt, W., Trapp, M., Vernay, R. (2008). Mathe live. Mathematik für die Sekundarstufe I, Erweiterungskurs 9. Stuttgart, Leipzig: Klett.

- Brand, C., Dorfmayr, A., Lechner, J., Mistlbacher, A., Nussbaumer, A. (2015). thema mathematik. für die 8. Klasse AHS, Linz: Veritas.

- Büchter, A., Henn, H.-W. (2010). Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

- Busse, K., Dahmen, J., Hoffert U., Koschinski I., Nüßler, K. (2016):
<https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/view/5620>.
Zugriff am 12.12.2019.

- Danckwerts, R., Vogel, D. (1986). Was ist das Integral. Der Mathematikunterricht, 32(2), 59-72.

- Danckwerts, R., Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

- Freiler, P., Marsik, J., Mayer F., Olf, M., Wittberger, M. (2018). Lösungswege. Mathematik Oberstufe 8. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

- Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. 1. Stuttgart: Klett.

- Götz, S., Reichel, H., Müller, R., Hanisch, G. (2013). Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller H., Ulm V., Weigand H. (2016). Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin, Heidelberg: Springer.

- Hoffkamp, A. (2011). Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse. Berlin: Universitätsbibliothek der Technischen Universität Berlin.

- Hußmann, S. (2001). Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen. Theoretische und empirische Studie zu den Auswirkungen konstruktivistischer, computerorientierter Lernarrangements im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auf die Begriffsbildung und das Problemlöseverhalten. Essen: Dissertation.

- Institut Landau (Hrsg.). Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung: www.geogebra.org/m/M5tkJrUV#. Zugriff am 10.12.2019.

- Jahnke, T., & Wuttke, H. (2001). Mathematik Analysis, Berlin: Cornelsen.

- Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. The Journal of Mathematical Behavior, 32(2), S. 122–141.

- Kirsch, A. (1976). Eine „intellektuell ehrliche“ Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. Didaktik der Mathematik, 4(2), 87–105.

- Knoche, N., Wippermann, H. (1986). Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis. Zürich: Spektrum Akademischer Verlag.

- Lietzmann, W., Zühlke, P. (1930). Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis. Leipzig, Berlin: Teubner.

- Malle, G., Koth, M., Woschitz H., Malle, S., Salzger, B., Ulovec, A. (2016). Mathematik verstehen 8. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

- Reichel, H.-C. (1974). Zur Didaktik der Integralrechnung für Höhere Schulen. Didaktik der Mathematik (3), 167-281.

- Sacharin, A. (1976) Über den Mittelwert zum Integral, Mathematisch Physikalische Semesterberichte, 26.

- Schätz, U., Eisentraut, F. (Hrsg.) (2013). delta 12. Mathematik für Gymnasien. Bamberg: Buchners.

- Schmidt, C. (2008):
<https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/view/2033>.
 Zugriff am 12.12.2019.

- Schmidt, G., Körner, H., Lergenmüller, A. (Hrsg.) (2011). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien, Analysis II. Braunschweig: Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.

- Schornstein, J. (2003). Simultane realitätsnahe Einführung der Differenzial- und Integralrechnung. In: H.-W. Henn, K. Maaß (Hrsg.), Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (S. 139–149). Bd. 8 der Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe. Hildesheim: Franzbecker.

- Sonar, T. (2011). 3000 Jahre Analysis – Geschichte, Kulturen, Menschen. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

- Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.) (1982). Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig. Wiesbaden: Vieweg.
- Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.) (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 1. Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Braunschweig. Wiesbaden: Vieweg.
- Timischl, W., Kaiser, G. (2016). Ingenieur-Mathematik 3. Wien: Dorner.
- Volkert, K. (1988). Geschichte der Analysis. Mannheim u. a.: BI-Wissenschaftsverlag.
- Walter, W. (2004). Analysis 1. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Weigand, H., Filler, A., Hölzl R., Kuntze S., Ludwig M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., Wittmann, G. (2018). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37–46.
- Zazkis, R., Liljedahl, P. (2009) Teaching Mathematics as Storytelling. Rotterdam: SensePublishers.