



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Historische Entwicklung der Analysis nach Newton und
Leibniz bis Fourier“

verfasst von / submitted by

Ivana Abramovic

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik, UF Physik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

Zu Beginn möchte ich mich bei meinem Betreuer ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith herzlich für die umfangreiche und mühevollen Unterstützung bedanken, nicht nur während des Schreibprozesses, sondern während des ganzen Studiums.

Ein großer Dank geht an meine Familie, die mich während meines Studiums motiviert und unterstützt hat.

Ein besonderer Dank geht an meinen Ehemann Denis, der immer an meiner Seite steht und wertvollen Rat gibt. Während des Schreibens wurde unsere Tochter Ela geboren, die mir besonderen Mut gegeben hat und stets ein Lächeln ins Gesicht zauberte.

Ein herzlicher Dank geht an meine Freundinnen Claudia, Farah, Julia und Angelika, mit denen das Studium immer spannend und lustig war. Die gemeinsamen Momente werde ich nie vergessen. Claudia und Farah, vielen, vielen Dank für die zahlreichen Korrekturen, ohne die meine Diplomarbeit nicht in dieser Form vorliegen würde.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, August 2019

Ivana Abramovic

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
2	Jakob, Johann und Daniel Bernoulli.....	3
2.1	Die logarithmische Spirale.....	6
2.2	Die Bernoulli'sche Ungleichung.....	9
2.3	Die Bernoulli'sche Differentialgleichung.....	10
2.4	Bernoulli'sche Polynome und Zahlen.....	10
2.5	Die Kettenlinie.....	14
2.6	Die Variationsrechnung - Brachistochronenproblem.....	16
2.7	Regeln von de l'Hospital.....	28
3	Leonhard Euler.....	29
3.1	Der Funktionsbegriff.....	31
3.2	Das unendlich Kleine.....	33
3.3	Exponentielle und logarithmische Funktionen.....	34
3.4	Die trigonometrische Funktionen.....	38
4	Brook Taylor.....	40
4.1	Satz von Taylor.....	42
4.2	Die Taylor Polynome.....	43
4.3	Die Taylor Reihe.....	46
5	Joseph-Louis Lagrange.....	48
5.1	Satz von Taylor.....	51
5.2	Mittelwertsatz.....	52
6	Carl Friedrich Gauß.....	54
7	Augustin Louis Cauchy.....	58
7.1	Konvergenz.....	61
7.2	Grenzwert und Stetigkeit.....	62
7.3	Die Konvergenz von Folgen und Reihen.....	64
7.4	Gleichmäßige Konvergenz.....	72
7.5	Cauchy - Kriterium für gleichmäßige Konvergenz.....	73
7.6	Ableitung.....	75
7.7	Integral.....	77
7.8	Der Mittelwertsatz.....	81

7.9	Satz von Cauchy.....	81
8	Jean Baptiste Joseph de Fourier.....	83
8.1	Fourier-Reihen und ihre Bedeutung für die Analysis	86
8.2	Komplexe Form der Fourierreihe.....	90
8.3	Fourier Kosinus- und Sinusreihe.....	91
8.4	Anwendungen der Fourier Analysis in Physik.....	93
9	Fazit	97
10	Literatur.....	99
11	Abbildungsverzeichnis.....	103
	Lebenslauf.....	105
	Zusammenfassung.....	107
	Abstract.....	107

1 Einleitung

Newton und Leibniz haben die Grundlagen der Analysis geschaffen. Sie haben getrennt voneinander ihre Thesen entwickelt, Newton etwas früher, Leibniz später. Die Notation und die Grundbegriffe, die sie verwendet haben, waren verschieden, aber die Grundidee hat sich später als dieselbe herausgestellt. Die Nachfolger von Newton waren großteils in England, wo er gewohnt hat, und die von Leibniz auf dem Kontinent. Die Leibniz'sche Schreibweise war viel einfacher und hatte einen größeren Erfolg. Im Grunde basieren die heutigen Rechenmethoden auf dem Wissen von Leibniz, Bernoulli, Euler, Lagrange und Cauchy. Jeder von ihnen hat eine eigene und neue Notation eingeführt, um die bereits bestehende zu verbessern. (vgl. Sikic, 1989, S.19)

Der Begriff der Funktion spielt eine wesentliche Rolle. Bis Leibniz wurde die Funktion nur geometrisch betrachtet. Danach wurde sie mit Formeln beschrieben und nicht nur durch die Kurven. Bernoulli hat zum Beispiel den Begriff der Funktion eingeführt, der konstante Größen und eine Variable besitzt. Euler hat sich damit beschäftigt und die Funktion mit mehreren Variablen eingeführt. Er hat auch als erster die Analysis von der Geometrie getrennt. So sind die Formeln und der Hauptbegriff der Funktion einer Variablen entstanden. (vgl. Sikic, 1989, S.53)

Lagrange und Cauchy haben einen weiteren Schritt gemacht, indem sie die Differentiale durch Derivation ersetzt haben. So hat Cauchy auf eine Art und Weise die Analysis, die wir heute kennen, fertiggestellt. Seine Werke können wir heute auch leicht verstehen. Die bekannte ϵ - δ Notation kommt genau von ihm. Brook Taylor hat dann seine Funktionen in Reihen entwickelt und damit ermöglicht, die Funktionen in einem bestimmten Intervall zu betrachten. Seine Potenzreihenentwicklung wurde aber nicht gut angenommen bis zu Lagrange. (vgl. Sikic, 1989, S. 53)

Fourier hat das ganze Wissen verwendet, um mathematische Methoden zu entwickeln, die helfen, physikalische Probleme zu lösen. Die mathematischen Methoden in der Physik nehmen einen großen Teil der Analysis auf.

In dieser Arbeit werden ausgewählte Mathematiker und ihre Leistungen in der Analysis chronologisch beschrieben. Die Arbeit beginnt mit den Brüdern Bernoulli, danach folgen Euler, Taylor, Lagrange, Gauß, Cauchy und endet mit Fourier. Eine neue Ära in der

Analysis beginnt mit Weierstraß, Cantor und Dedekind, die die reelle Zahl und die reelle Funktion einer Variablen oder mehrerer Variablen eingeführt haben.

2 Jakob, Johann und Daniel Bernoulli

Die Brüder Jakob (1655-1705) und Johann (1667-1748) stammten aus einer Kaufmannsfamilie in Basel (Abb.1).



Abbildung 1: Jakob und Johann Bernoulli¹

Jakob Bernoulli studierte Theologie und Philosophie, die er auch im Jahre 1676 erfolgreich abschloss. Während des Studiums interessierte er sich besonders für Mathematik und Astronomie. Nach dem Studium unterrichtete er als Hauslehrer. Während seiner Reisen in den Jahren 1681 und 1682 lernte er die bekanntesten Mathematiker seiner Zeit kennen, unter anderen Hooke, Boyne und Hudde. Bei den Gesprächen mit ihnen entdeckte er seine Begeisterung für Mathematik und begann Vorlesungen zur Experimentalphysik zu halten. Zur Vorbereitung studierte er die Werke von John Wallis, Isaac Barrow und Rene Descartes. Auch Jakob leitete ab dem Jahre 1687 einen Lehrstuhl für Mathematik in Basel. Nach ihm übernahm sein Bruder Johann diese Position. Jakob beschäftigte sich mit der Kometentheorie und entwickelte währenddessen die vollständige Induktion, weil er mit der bisherigen nicht zufrieden war. Jakob und Johann hatten große Probleme beim Verständnis der Leibniz'schen Differentialrechnung, weswegen auch Jakob einen Brief an Leibniz schrieb. Drei Jahre später kam eine Antwort. So entstand eine Kooperation zwischen Jakob und Leibniz. Interessant ist zu erwähnen, dass der Begriff Integral von Jakob Bernoulli stammt. Er verwendete das Wort zum ersten Mal in den „*Acta Eruditorum*“, als er die Spirale untersuchte. Er war so stolz auf diese Studie, dass er die Spirale auf seinem Grab anbringen ließ (Abb.2). (vgl. Sonar, 2011, S. 438).

¹ Zugriff am 6.8.2018 http://www.storyofmathematics.com/18th_bernoulli.html



Abbildung 2: Eine archimedische Spirale im Epitaph. Der Steinmetz hat statt einer logarithmischen Spirale eine archimedische Spirale gemeißelt.²

Jakob Bernoulli machte viele Entdeckungen gemeinsam mit seinem Bruder Johann. Sie entdeckten ein neues Gebiet in der Analysis, nämlich die „Variationsrechnung“. Johann Bernoulli war auch ein Genie in der Mathematik. Er hatte schon 1690 das Problem der Kettenlinie gelöst. „Eine Kettenlinie ist eine mathematische Kurve, die den Durchhang einer an ihren Enden aufgehängten Kette unter Einfluss der Schwerkraft beschreibt.“ ([https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenlinie_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenlinie_(Mathematik))). Johann hat Galileos Glauben, dass es sich dabei um eine Parabel handelt, widerlegt und hat gezeigt, dass es sich um den „Cosinus hyperbolicus“ handelt. Auf einer Reise nach Genf und Paris lernte er Marquis de l'Hospital kennen. De l'Hospital war vom Wissen Johanns begeistert und wollte ihn als Privatlehrer anstellen. So verkaufte Johann alle seine mathematischen Entdeckungen an l'Hospital. Die „Regeln von de l'Hospital“ stammen ebenfalls von Johann Bernoulli und nach seinem Tod erhob Johann Anspruch auf seine Entdeckungen. Nach Jakobs Tod übernahm Johann die Professur für Mathematik an der Universität Basel. Er war auch auf Leibniz Seite und nach seinem Tod übernahm er die Leitung der Analysis. (vgl. Sonar, 2011, S. 439-442).

²Zugriff am 6.8.2018.

https://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli#/media/File:Basel_-_Grabstein_Bernoulli.jpg



Abbildung 3: Daniel Bernoulli³

Daniel Bernoulli war der Sohn von Johann Bernoulli (Abb.3). Er wurde am 29. Januar 1700 in Groningen geboren und starb am 17. März 1782 in Basel. Als er 16 Jahre alt war, begann er mit dem Medizinstudium an der Universität Basel und im Jahre 1718 wechselte er nach Heidelberg. Im Jahre 1720 doktorierte er und wartete auf eine weitere Stelle. Da kein Angebot kam, unternahm Daniel eine Reise nach Venedig. Während dieses Aufenthalts lernte er das Kartenspiel Pharo kennen. Sein erstes Buch schrieb er über genau dieses Kartenspiel. Bekannt wurde er aber erst durch seine Arbeit über die Riccati-Gleichung⁴. Im Jahre 1750 übernahm Daniel letztendlich den Lehrstuhl für Physik an der Universität Basel. Daniel hatte eine sehr schlechte Beziehung zu seinem Vater Johann. Ein Beispiel dafür ist die Veröffentlichung des Buches „*Hydrodynamica*“ (Abb.4).

³Zugriff am 9.8.2018. : https://en.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli

⁴Eine riccatische Differentialgleichung oder Riccati-Differentialgleichung ist eine spezielle Klasse nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

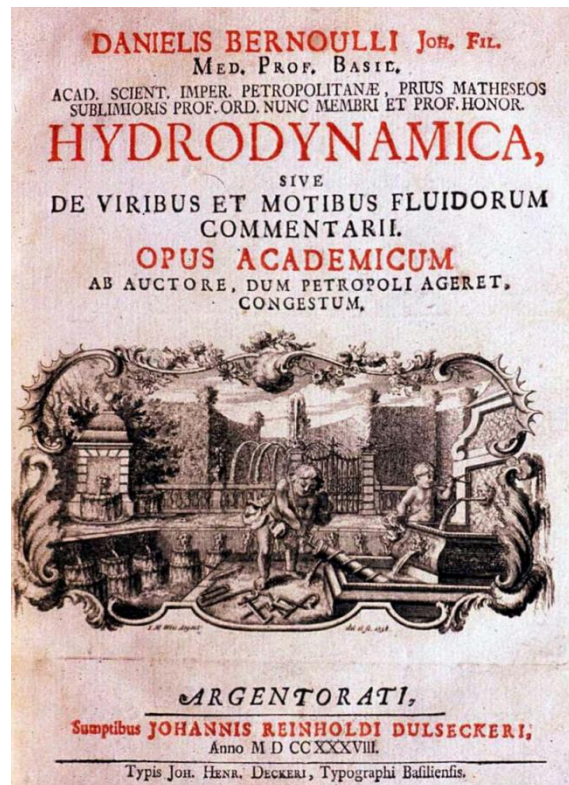


Abbildung 4: Hydrodynamica⁵

Im Jahre 1738 veröffentlichte Daniel dieses Buch, aber auch sein Vater Johan veröffentlichte die gleichen Ergebnisse, indem er das Buch sieben Jahre vordatierte. Daniel Bernoulli war ein Schüler von Leibniz und ein enger Freund von Leonhard Euler, mit dem er die Gleichungen untersucht hatte. Im Bereich der Physik untersuchte Daniel das Problem der schwingenden Saite und die kinetische Theorie der Gase. Das bekannte Bernoulli'sche Gesetz ist nach ihm benannt.

(vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli)

2.1 Die logarithmische Spirale

Jakob Bernoulli war begeistert von Spiralen und hat sie auch "spira mirabilis", also Wunderspirale, genannt. Diese Spirale ist deshalb speziell, weil bei jeder Umdrehung um ihr Zentrum der Abstand vom Mittelpunkt um den gleichen Faktor verändert wird. Der Radius ist somit proportional zur Spirallänge. Jede Gerade, die durch den Mittelpunkt verläuft, schneidet die Spirale unter dem gleichen Winkel. Die logarithmische Spirale

⁵Zugriff am 9.8.2019. : <https://en.wikipedia.org/wiki/Hydrodynamica>

kann man in der Natur häufig sehen, wie zum Beispiel bei Schneckenhäusern, der Galaxie oder der Sonnenblume. Zunächst folgt eine mathematische Darstellung⁶ der logarithmischen Spirale (Abb.5) in Polarkoordinaten (r, φ) :

$$r(\varphi) = ae^{k\varphi}, \text{ wobei } a, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$$

$k = \text{const.}$ und gilt als die Steigung der Spirale, wobei der Steigungswinkel α : $\tan(\alpha) = k$

In kartesischen Koordinaten hat man:

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi = ae^{k\varphi} \cos \varphi$$

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi = ae^{k\varphi} \sin \varphi$$

wobei $\varphi = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$ eine implizite Darstellung ist und $\frac{r}{a}$ nennt man normierter Radius.

In der komplexen Ebene ergibt sich:

$$w(t) = z^t, \text{ wobei } z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, |z| \neq 1, \text{Im}(z) \neq 0$$

Dann ist:

$$z^t = e^{t \ln z} = e^{t(\ln|z| + i \arg z)} = |z|^t e^{it \arg z} = |z|^t (\cos(t \arg z) + i \sin(t \arg z))$$

(vgl. https://mathepedia.de/Logarithmische_Spirale.html)

⁶Zugriff am 6.8.2018. https://mathepedia.de/Logarithmische_Spirale.html

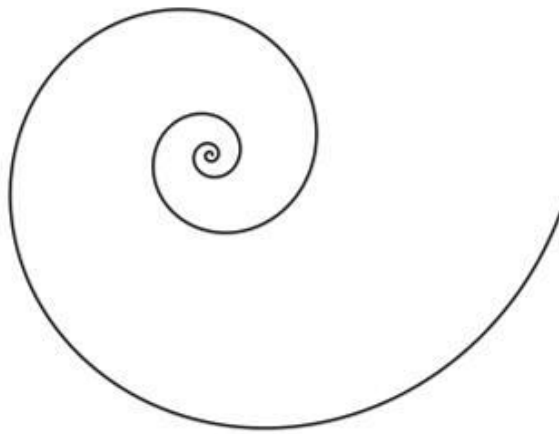


Abbildung 5: Logarithmische Spirale⁷

Die logarithmische Spirale hat mehrere Eigenschaften, welche sie besonders einzigartig machen. Manche davon sind (vgl. https://mathepedia.de/Logarithmische_Spirale.html):

- Die Spirale kann den Umkreis unendlich oft umkreisen, ohne ihn zu erreichen
- Die Länge der Kurve bis zum Pol ist endlich
- Der Radius wächst um einen konstanten Faktor mit jeder Windung
- Alle Spiralen mit der gleichen Steigung sind ähnlich

⁷Zugriff am 6.8.2018. https://mathepedia.de/Logarithmische_Spirale.html

2.2 Die Bernoulli'sche Ungleichung

Jakob Bernoulli hat diese Ungleichung in seiner Arbeit „*Positiones Arithmeticae de Seriebus Infinitis*“ zum ersten Mal genannt. Es handelt sich um eine wichtige Ungleichung, mit der man eine Potenzfunktion nach unten abschätzen lassen kann. (Basel, 1689)

Die Bernoulli'sche Ungleichung lautet: $(1+a)^n > 1+an$ für alle $a \in \mathbb{R}, a > -1, a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Der Beweis durch vollständige Induktion ist wie folgt:

Induktionsbeginn $n = 2$:

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a$$

Induktionsschritt:

$$(1+a)^n > 1+an$$

$$(1+a)^n \cdot (1+a) > (1+an) \cdot (1+a)$$

$$(1+a)^{n+1} > 1+a+na+na^2$$

Es gilt:

$$1+a+na+na^2 > 1+a+na$$

$$(1+a)^{n+1} > 1+a+na$$

$$(1+a)^{n+1} > 1+a(n+1)$$

□

(vgl. https://mathepedia.de/Bernoullische_Ungleichung.html)

2.3 Die Bernoulli'sche Differentialgleichung

Die Bernoulli'sche Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$$

wobei $\alpha \neq 1$.

Nach Division durch y^α erhält man:

$$y^{-\alpha} y' = f(x)y^{1-\alpha} + g(x)$$

Setzt man $z = y^{1-\alpha}$ und $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} y'$ ein, so erhält man:

$$\frac{z'}{1-\alpha} = f(x)z + g(x)$$

Daraus folgt:

$$z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x)$$

Jetzt hat man eine lineare Differentialgleichung.

(vgl. https://mathepedia.de/Bernoullische_Differentialgleichung.html)

2.4 Bernoulli'sche Polynome und Zahlen

Jakob Bernoulli entdeckte die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen und Polynome, als er die allgemeine Formel für die Potenzsummen herleitete.

Die Folge der Bernoulli Polynome $B_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert durch:

$$B_0(x) = 1 \tag{1}$$

$$B'_n(x) = \frac{d}{dx} B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x); n \geq 1 \tag{2}$$

$$\int_0^1 B_n(t) dt = 0; n \geq 1 \tag{3}$$

Die Zahlenfolge B_n ist definiert durch:

$$B_n := B_n(0); n \in \mathbb{N}_0 \quad (4)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$B_n(x) = n \cdot \int_0^x B_{n-1}(t) dt + B_n; n \geq 1 \quad (5)$$

Aus (3) ergibt sich:

$$B_n(1) = n \cdot \int_0^1 B_{n-1}(t) dt + B_n = B_n; n \geq 2$$

Durch $(1) = B_0(1) = 1$ ergibt sich:

$$B_n(1) = B_n; n \neq 1 \quad (6)$$

Aus (1) und (5) ergibt sich durch vollständige Induktion nach n :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}; n \in \mathbb{N}_0 \quad (7)$$

(vgl. Zern, 2009. Bernoullipolynome und Bernoullizahlen)

Beweis:

Induktionsanfang $n = 0$:

$$B_0(x) = 1 = \binom{0}{0} \cdot B_0 \cdot x^0$$

Induktionsvoraussetzung: Sei für ein n die Gleichung $B_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$ erfüllt.

Induktionsschritt $n-1 \rightarrow n$:

$$\begin{aligned}
 B_n(x) &= n \cdot \int_0^1 B_{n-1}(t) dt + B_n \\
 &= n \cdot \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot t^{n-1-k} dt + B_n \\
 &= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot \int_0^x t^{n-1-k} dt \right] + B_n \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot \frac{1}{n-k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} + B_n \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} + B_n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}
 \end{aligned}$$

Aus (6) und (7) folgt:

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot B_k; \quad n \neq 1$$

Durch ersetzen von $n \rightarrow n+1$ bekommt man:

$$\begin{aligned}
 B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k + (n+1) \cdot B_n + B_{n+1}; \quad n \geq 1
 \end{aligned}$$

Die rekursive Formel:

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k; \quad n \geq 1$$

Daraus erkennt man, dass die Bernoulli'schen Zahlen rational sind.

Mit Hilfe der Formeln (7) und (5) kann man die Bernoulli'schen Polynome bestimmen:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 1 & B_0(x) &= 1 & & = 1 \\
 B_1 &= -\frac{1}{2} & B_1(x) &= x - \frac{1}{2} & & = y \\
 B_2 &= \frac{1}{6} & B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} & & = y^2 - \frac{1}{12} \\
 B_3 &= 0 & B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x & & = y^3 - \frac{1}{4}y \\
 B_4 &= -\frac{1}{30} & B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} & & = y^4 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{7}{240} \\
 B_5 &= 0 & B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x & & = y^5 - \frac{5}{6}y^3 + \frac{7}{48}y \\
 B_6 &= \frac{1}{42} & B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 & & = y^6 - \frac{5}{4}y^4 + \frac{7}{16}y^2 - \frac{3}{64}
 \end{aligned}$$

mit $y = x - \frac{1}{2}$

□

(vgl. Zern, 2009. Bernoullipolynome und Bernoullizahlen)

2.5 Die Kettenlinie

Eine Kettenlinie ist eine Kurve, die zwischen zwei Enden aufgehängt ist. Diese Kette hat eine Masse und eine Länge und kann entsprechend durch die potentielle Energie beschrieben werden. Johann Bernoulli löste das Problem der Kettenlinie 1690 mit Hilfe von Kräften, die auf jeden Punkt der Kurve wirken. In Abbildung 6 ist ersichtlich, dass es sich um eine horizontale Kraft F_H , eine vertikale Kraft F_V und eine Spannkraft F_S handelt. (vgl. Hajiabadi, 2016./17., S. 4)

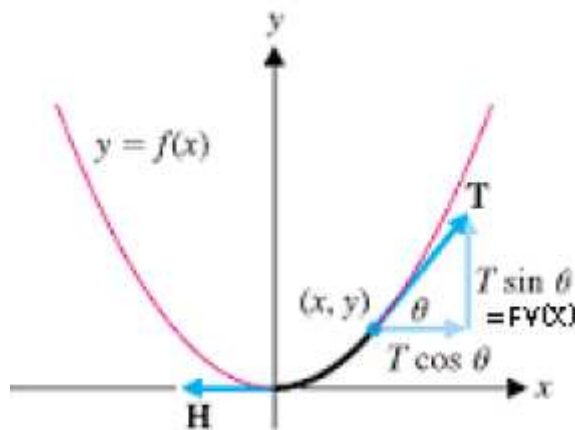


Abbildung 6: Eine Kettenlinie⁸

Die horizontale Kraft F_H muss konstant sein, da sich die Kette nicht weiter bewegt, um einen Kräfteausgleich zu schaffen. Die vertikale Kraft F_V ist gegeben als:

$$F_V(x) = \mu \cdot g \cdot s(x) = \mu \cdot g \cdot \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

wobei $s(x)$ die Länge der Kette ist, μ die Masse eines Meters der Kette und g die Erdbeschleunigung ist.

Die Kräfte können wie folgt beschrieben werden:

$$F_H(x) = T(x) \cdot \cos(\theta)$$

⁸Zugriff am 6.8.2018. http://download.uni-mainz.de/mathematik/Algebraische%20Geometrie/Lehre/Sem-Ausgewahlte-hoehere-Kurven-WS2016-17/Hajiabadi%20Maikel_Die%20Kettenlinie_090217.pdf

$$F_V(x) = T(x) \cdot \sin(\theta)$$

$$\rightarrow y' = \tan(\theta) = \frac{F_V(x)}{F_H(x)} = \frac{\mu \cdot g}{H} \cdot s(x)$$

Wenn man die Gleichung nach x differenziert ergibt sich eine Differenzialgleichung der Kettenlinie:

$$y'' = k \cdot \sqrt{1 + y'^2}, k := \frac{\mu \cdot g}{H}$$

Um diese zu lösen, subtrahiert man $z := y'$ und dann ergibt sich:

$$z' = k \cdot \sqrt{1 + z^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int k dx$$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = kx + d$$

Das erste Integral wird durch eine neue Substitution gelöst:

$$z =: \sinh(u) \rightarrow dz = \cosh(u) du$$

$$\rightarrow \int \frac{\cosh(u) du}{\sqrt{\cosh^2(u)}} = u + e$$

$$\rightarrow \sinh^{-1}(z) + e = kx + d \Leftrightarrow z = \sinh(kx + d) - e$$

$$\rightarrow y' = \sinh(kx + d) - e$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{1}{k} \cosh(kx + d) + e'$$

Wobei $e' = -e + f$ die Konstante beim Integrieren ist.

Vereinfacht sieht die Gleichung der Kettenlinie folgendermaßen aus:

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + C$$

wobei x_0 eine Verschiebung in x-Richtung darstellt und C die Verschiebung in y-Richtung. Es ist wichtig zu erwähnen, dass nicht jede $a \cosh$ Funktion eine Kettenlinie darstellt.

(vgl. Hajiabadi, 2016./17., S.4-5)

2.6 Die Variationsrechnung - Brachistochronenproblem

Im Jahre 1696 stellte Johann Bernoulli in den „*Acta Eruditorum*“ eine Aufgabe unter dem Titel „*Einladung zur Lösung eines neuen Problems*“.

„Wenn in einer vertikalen Ebene zwei Punkte O und A gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte P eine Bahn OPA anweisen, auf welcher er von O ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach A gelangt.“

(Stäckel 1976, S. 3)

Erst nach einem Jahr kam die Lösung seines Bruders Jakob. Er hat herausgefunden, dass es sich um eine Zykloide handelt. Das Problem hat er mit Hilfe des Brechungsgesetzes gelöst, wo er sich den Punkt P als Lichtstrahl vorgestellt hat. Dieser Lichtstrahl geht durch ein Medium mit konstant verändertem Brechungsindex. (Sonar, 2011, S.443)

Die Abbildung 7 zeigt dieses Problem:

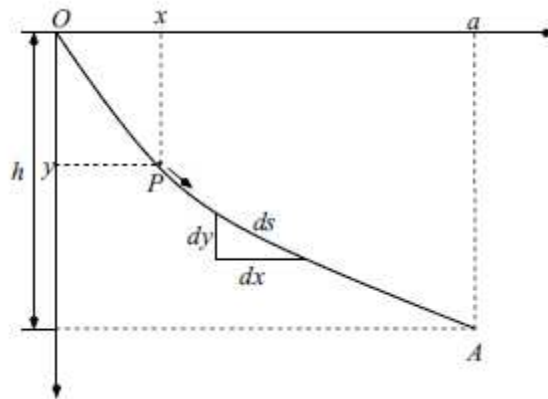


Abbildung 7: Figur zum Brachistochronenproblem⁹

Die Lösung von Johann Bernoulli

(Goldstine, 1991, S.41-46). Für dieses Kapitel wurde das Buch „Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli“ von Goldstine herangezogen.

Es ist bekannt, dass Johann die Werke von Fermat studiert hat. In dieser Zeit hat man geglaubt, dass das Licht durch den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten läuft. Fermat zitierte Galileo, dass es nicht um den kürzesten Weg geht sondern um die kürzeste Zeit. Johann hat aber Galileos Ansatz gar nicht berücksichtigt. (vgl. Goldstine, 1991, S. 41). Die Abbildung 8 zeigt die Figur zu Johanns Lösung.

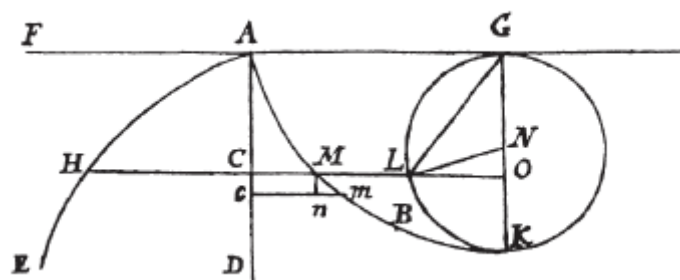


Abbildung 8: Figur zur Lösung von Johann Bernoulli¹⁰

Die Punkte A und B sind fix und der Platz zwischen ihnen ist in horizontalen Linien geteilt. Jede dieser Linien ist ein optisches Medium mit bestimmtem Refraktionsindex

⁹ Sonar, 2011, S.443

¹⁰Goldstine, 1991, S.41

und mit einer bestimmten optischen Dichte. An jeder Schnittstelle benutzte Johann das Snellius'sche Gesetz. Die Kurve AHE sollte als Dichtefunktion verstanden werden, die so geplottet ist, dass in der Tiefe $x = AC$ die Geschwindigkeit das Inverse der optischen Dichte $t = CH$ ist. Die Kurve AMB ist eine Minimalisierung mit den Koordinaten $x = AC$ und $y = CM$. Weiter ist

$$dx = cC$$

$$Mn = dx = Cc$$

$$ds = Mm.$$

Wegen Fermat und Snellius ist der Sinus des Refraktionswinkels $\frac{dy}{dx}$ proportional zur

Geschwindigkeit $CH = t$. Da $ds^2 = dx^2 + dy^2$ gilt, erhält man:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{mn}{Mm} = \frac{t}{a}, \quad a = \text{const.}$$

bzw.

$$a^2 dy^2 = t^2 (dx^2 + dy^2)$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{(a^2 - t^2)^{1/2}}.$$

(vgl. Goldstine, 1991, S.41-42).

Falls es einen Körper gibt, der mit $t^2 = ax$ fällt, sieht die Gleichung folgendermaßen aus:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{a-x} \right)^{1/2}.$$

Wenn der Kreis GLK , wobei $a = GK$, auf der Unterseite der horizontalen Linie AG rollt mit dem Punkt K bei A, dann zeichnet K eine Zykloide auf, deren Gleichung die Differentialgleichung erfüllt. Johann zeigte das folgendermaßen:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{a-x} \right)^{1/2} = \frac{x}{(ax-x^2)^{1/2}} = \frac{1}{2} \frac{a}{(ax-x^2)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{a-2x}{(ax-x^2)^{1/2}}.$$

Das Integral des ersten Terms ist der Bogen GL und jenes des zweiten Terms ist $(ax-x^2)^{1/2}$, was OL entspricht. Daraus folgt:

$$y = CM = \text{arc}GL - LO = CO - \text{arc}LK - LO$$

$$ML = \text{arc}LK.$$

Daraus folgt letztendlich, dass es sich um eine Zykloide KMA handelt.

Für eben dieses Problem hat auch Newton eine Lösung gefunden, jedoch ohne zu sagen, woher er wusste, dass es sich um eine Zykloide handelte. Sein Beweis sieht folgendermaßen aus:

Das Problem war, die Kurve ADB zu finden, entlang jener ein schweres Teilchen wegen der Schwerkraft von Punkt A zum Punkt B fällt. (vgl. Goldstine, 1991, S.42-43).

Die Abbildung 9 zeigt sein Problem:

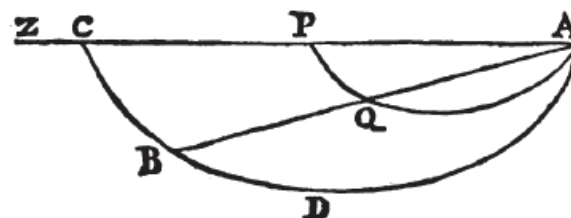


Abbildung 9: Figur von Newton zum Brachistochronenproblem¹¹

Durch den Punkt A wird eine horizontale Linie APCZ gezeichnet. Danach wird ein Halbkreis AQP gezeichnet, der die Linie AB in Punkt Q schneidet und ein zweiter Halbkreis ABC, dessen Basis zur Höhe wie AB zu AQ steht. Der zweite Kreis geht durch den Punkt B, wo die schweren Teilchen am schnellsten von Punkt A zu Punkt B fallen werden.

¹¹Goldstine, 1991, S.43

Johann hat auch die Fälle $t = ax^{1/3}$ und $t = ax$ hinterfragt. Am Anfang reduzierte er die Differentialgleichung auf die Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{1/3}}{(1-x^{2/3})^{1/2}}$$

mit einer Lösung der Kurve:

$$y = k - (2 + x^{2/3})(1 - x^{2/3})^{1/2}$$

Weiter reduzierte er die Gleichung auf die Form:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}$$

mit einer Lösung des Kreises:

$$x^2 + (y-c)^2 = 1$$

Am Ende betrachtete Johann die zu jedem Glied eines Parameters orthogonale Kurvenfamilie, die von einem festen Punkt ausgeht. Jede dieser Kurven oder Wellenfronten nennt er eine Synchrone (Abb.10).

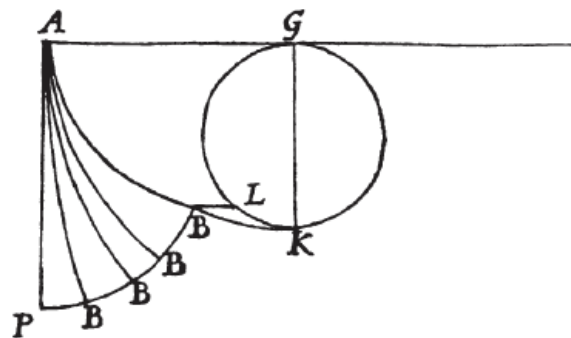


Abbildung 10: Die Synchrone¹²

Das erste Problem war, jene Kurve zu finden, die alle Zykloide durch einen gemeinsamen Punkt schneidet. Johann schlug vor, den Ort der Teilchen zu finden, die in einer festgelegten Zeitspanne an Zykloiden durch Punkt A fallen. Alle Teilchen beginnen beim Punkt A zu fallen.

¹²Goldstine, 1991, S.44

Johann merkte, dass in diesem Fall ein Teilchen zu einer bestimmten Zeit den Punkt P erreichen wird und die andere den Punkt B, wobei $BL = \text{arc}LK$. Johann gab aber keinen Beweis dafür, sondern erst P. Stäckel, der seine Aufzeichnungen auf Deutsch übersetzte. (vgl. Goldstine, 1991, S.43-44).

In einem Zeitintervall dT wird ein Teilchen, wie in Abbildung 10, zur AP abfallen, sodass $X=AP$. Dann gilt:

$$dX = \sqrt{2gX} dT$$

Entlang einer Zykloide bewegt sich ein Teilchen bei (x, y) so, dass:

$$dT = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}$$

Wenn $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{a}{(a-x)}$ gilt, dann folgt:

$$\frac{dX}{\sqrt{X}} = \frac{ds}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{a}{ax-x^2}} dx$$

Wenn $w = aX$ gilt, dann:

$$\frac{dw}{2\sqrt{w}} = \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx + \frac{\frac{1}{2}a-x}{\sqrt{ax-x^2}} dx = d(CM) + d(LO)$$

wobei man CM und LO in Abbildung 8 sehen kann. Daher ist:

$$w^{1/2} = (AP \cdot GK)^{1/2} = CM + LO = \text{arc}GL = \frac{a\varphi}{2}$$

wobei φ der Winkel von Bogen GL ist.

Man kann die Zykloide auch in Parameterform schreiben:

$$x = \frac{a}{2}(1 - \cos \varphi)$$

$$y = \frac{a}{2}(1 - \sin \varphi)$$

Die Synchrone ist die Kurve mit $x = X(a)$ und $y = Y(a)$. Am Schnittpunkt $\varphi = \varphi(a)$ hat man:

$$X(a) = \frac{a}{2}[1 - \cos \varphi(a)]$$

$$Y(a) = \frac{a}{2}[\varphi(a) - \sin \varphi(a)]$$

und

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a(1 - \cos \varphi) \frac{d\varphi}{da} + (\varphi - \sin \varphi)}{a \sin \varphi \frac{d\varphi}{da} + (1 - \cos \varphi)} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

was zeigt, dass $\frac{d\varphi}{da} = -\frac{\varphi}{2a}$ gilt. Das besagt, dass die Synchrone normal zur Zykliden

Familie ist, falls $a\varphi$ proportional zu $a^{1/2}$ ist. Durch das Integral

$$\sqrt{2g}T = \int_0^\varphi \frac{(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)^{1/2}}{x^{1/2}} d\varphi$$

findet man, dass $a\varphi = (2ga)^{1/2}T$ und dass $GL = \frac{a\varphi}{2}$ proportional zu $GK = a$ und

$$AP = \frac{gt^2}{2}, \text{ falls } T = \varphi \left(\frac{a}{g} \right)^{1/2}. \text{ (vgl. Goldstine, 1991, S.45-46).}$$

Die Lösung von Jakob Bernoulli

Dieses Kapitel basiert ebenfalls auf dem Text „Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli“ von Goldstine.

Die Lösung von Jakob Bernoulli unterscheidet sich wesentlich von der Lösung seines Bruders.

Jakob bemerkte, dass, wenn ein Bogen AB, der A mit B verbindet, ein minimierender Bogen für das vorliegende Integral ist, so ist jeder *subarc* CED von AB, der C mit D verbindet. Wenn es einen anderen Bogen CFD gibt, der geringere Werte für das Integral ergibt, dann wird der zusammengesetzte Bogen $ACFDB = AC + CFD + DB$ eine

geringere Zeit des Sinkfluges haben als $ACEDB = AC + CED + DB$, was wiederum ein Widerspruch zur Tatsache ist, dass AB die Minimalisierung des Bogens ist. In Abbildung 11 sieht man die Figur, wobei C irgendein Punkt auf dem Minimierungsbogen AB ist und D ein nahe gelegener Punkt, der so gewählt wird, dass $CE = EF$. Die Linie HF geht vertikal durch Punkt C, AH horizontal durch A und die Linien EJ und FD sind parallel zu AH. Der Punkt L auf EJ ist sehr nahe bei Punkt G auf dem Minimierungsbogen. (vgl. Goldstine, 1991, S. 46-47).

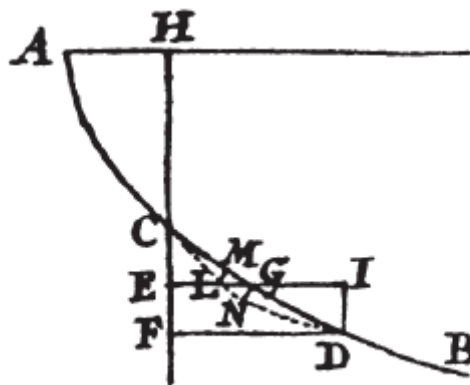


Abbildung 11: Figur zur Lösung von Jakob Bernoulli¹³

Jakob verwendete die Tatsache, dass beim Minimum das Funktional¹⁴ flach ist: nehmen wir an, dass F ein reelles bewertetes Funktional ist, das in R auf dem Banachraum¹⁵ definiert ist und kontinuierliche Differentiale von mindestens zweiter Ordnung hat. Wenn x_0 in R das Minimum ist

$$R(x) > R(x_0), \quad x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$$

dann ist

$$R(x) = R(x_0) + \frac{1}{2} d^2 R[x_0; (x - x_0)]$$

¹³Goldstine, 1991, S.47

¹⁴Funktional für eine Abbildung von Vektoren (z. B. Funktionen) auf skalare Größen

¹⁵Ein Banachraum ist in der Mathematik ein vollständiger normierter Vektorraum

wobei d^2R quadratisch in $(x - x_0)$ ist. Das bedeutet, wenn $|x - x_0|$ sehr klein ist, ist

$$R(x) \cong R(x_0).$$

Das ist ein Argument dafür, dass die Zeit des Falls entlang CGD gleich ist wie entlang CLD. Dann ist:

$$t_{CG} + t_{GD} = t_{CL} + t_{LD}$$

wobei t_{XY} die Zeit des Falls von X nach Y ist. Umgeschrieben ergibt sich:

$$t_{CG} - t_{CL} = t_{LD} - t_{GD}$$

Für X wie auch für die Punkte E, G oder L gilt:

$$t_{CX} = \frac{CX}{(v_1^2 + 2g \cdot HC)^{1/2}}$$

wobei v_1 die Geschwindigkeit der Teilchen im Punkt C ist. (vgl. Goldstine, 1991, S.46-47).

Das kann man schließen aus:

$$\sqrt{2g} \cdot dT = \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2g} ds}{\sqrt{v_1^2 + 2g \cdot HC}}$$

Daraus folgt:

$$\frac{CE}{CG} = \frac{t_{CE}}{t_{CG}}, \quad \frac{CE}{CL} = \frac{t_{CE}}{t_{CL}}$$

und so ist:

$$\frac{CE}{CG} = \frac{t_{CE}}{t_{CG} - t_{CL}}$$

Danach zeichnete er die Linie LM orthogonal zur CG und behauptete:

$$CL = (CM^2 + ML^2)^{1/2} = CM \left[1 + \frac{ML^2}{CM^2} \right]^{1/2}$$

$$\cong CM + \frac{ML^2}{2CM} \cong CM$$

wobei ML viel kleiner als CM ist. Die Dreiecke MLG und CEG sind ähnlich:

$$\frac{MG}{GL} = \frac{EG}{CG}$$

Daraus folgt:

$$\frac{CE}{GL} = \frac{GE}{CG} \cdot \frac{t_{CE}}{t_{CG} - t_{CL}}$$

Danach zeichnete er die Linie GN orthogonal zu DL und behauptete wie vorher:

$$\frac{EF}{GL} = \frac{GJ}{GD} \cdot \frac{t_{EF}}{t_{LD} - t_{GD}}$$

Da $EF = CE$ gilt, folgt:

$$\frac{EG}{GJ} \cdot \frac{t_{CE}}{t_{EF}} = \frac{CG}{GD} \cdot \frac{t_{CG} - t_{CL}}{t_{LD} - t_{GD}} = \frac{CG}{GD}$$

Mit dem Galilei'schen Gesetz für frei fallende Körper, welches besagt, dass, wenn $v_1 = 0$ ist, folgt:

$$t_{CE} = \frac{CE}{\sqrt{2g \cdot HC}}, t_{EF} = \frac{EF}{\sqrt{2g \cdot HE}}$$

Schließlich ist:

$$\frac{EG \cdot t_{CE}}{GJ \cdot t_{EF}} = \frac{EG}{\sqrt{HC}} \cdot \frac{\sqrt{HE}}{GJ} = \frac{CG}{GD}$$

Wenn $CG = ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$, $HC = x$ und $EG = dy$ so geschrieben wurde, dann ist die letzte Gleichung gleich:

$$ds = \frac{k}{\sqrt{x}} dy, \quad k = \text{const.}$$

Um zu sehen, dass es sich um eine Differentiale Gleichung für Zykloide handelt, quadrieren wir beide Glieder und erhalten die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{k^2 - x} \right)^{1/2}$$

die ähnlich zur Gleichung der Zykloide mit $k^2 = a$ ist, wobei a der Radius des Kreises ist. (vgl. Goldstine, 1991, S.48-49).

Danach wollte er zeigen, dass die Kurve, deren Element der Bogenlänge direkt proportional zum Element der Abszisse und umgekehrt proportional zur Quadratwurzel von der Ordinate ist, eine Zykloide darstellt. Das ist die Gleichung $ds = \frac{k}{\sqrt{x}} dy$. Sein

Argument kann man mit der Abbildung 12 vergleichen, wobei ABP die halbe Bogenzykloide ist, die mit dem Kreis RQP mit Durchmesser RP erzeugt ist. Die Punkte C, G und D liegen auf der Zykloide und CM, GN sind tangential zur Zykloide auf den vorigen Punkten. Jakob behauptete, dass $\frac{GD}{GI} = \left(\frac{RP}{RX} \right)^{1/2}$ und $\frac{EG}{CG} = \left(\frac{RS}{RP} \right)^{1/2}$ gilt.

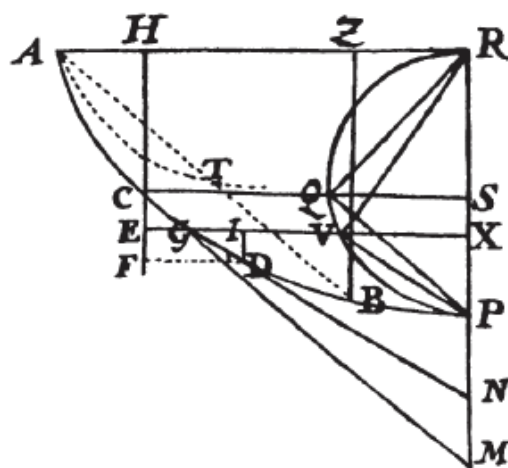


Abbildung 12: Zweite Figur von Jakob¹⁶

¹⁶Goldstine, 1991, S.50

Um zu verstehen, warum diese Verhältnisse gelten, beobachtet man, dass sie charakteristisch für Zykloide sind, deren Linien GN und VP parallel sind, genau wie CM und QP. In der Abbildung 12 ist V der Punkt auf dem Kreis, wo ihn die Linie durch E, die parallel ist zu AH, schneidet und Q ist der Punkt, wo ihn die Linie durch C, die parallel zu AH ist, schneidet. Es folgt, dass die Dreiecke GDI und VPX ähnlich sind und daher:

$$\frac{GD}{GI} = \frac{VP}{VX} = \left(\frac{RP}{RX} \right)^{1/2}$$

wobei im Halbkreis RVP gilt $VX^2 = PX \cdot RX$ und $VP^2 = PR \cdot PX$. Der Durchmesser des Kreises ist $RP = a$ und $RX = HE$.

Analog folgt:

$$\frac{EG}{CG} = \left(\frac{RS}{RP} \right)^{1/2}$$

und daher:

$$\frac{GD}{CG} = \frac{(RP \cdot HC)^{1/2} \cdot GI}{(HE \cdot RP)^{1/2} \cdot EG} = \frac{GI}{(HE)^{1/2}} \cdot \frac{(HC)^{1/2}}{EG}$$

Damit zeigte er, dass für Zykloide charakteristisch ist, dass das Element der Bogenlänge direkt proportional zum Element der Abszisse und umgekehrt proportional zur Quadratwurzel von der Ordinate ist.

Letztendlich soll gezeigt werden, warum die Linien GN und VP parallel sind. Die Differentiale Gleichung für Zykloide lautet:

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{a-x}{x} \right)^{1/2}$$

sodass die Gleichung der Neigung der Linie GN entspricht. Der Kreis RVP ist:

$$x^2 - ax + (y - a\pi)^2 = 0$$

was impliziert, dass VX die Länge $(x^2 - ax)^{1/2}$ hat und XP die Länge $a - x$. Das bedeutet, dass die Neigung von VP gleich $\frac{(a-x)^{1/2}}{x^{1/2}}$ ist und daher sind die zwei Linien parallel. (vgl. Goldstine, 1991, S.50-51).

2.7 Regeln von de l'Hospital

Wegen des Vertrages, den Johann Bernoulli mit de l'Hospital unterschrieben hat, bekam er erst nach dem Tod von de l'Hospital das Recht auf seine Werke. Dies ist auch der Fall für die Regeln von de l'Hospital. Diese Regeln sind zu verwenden, wenn der Grenzwert einer Funktion $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ zu berechnen ist und den Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ enthält. Falls beide Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar sind, kann man die Zählerfunktion und die Nennerfunktion getrennt voneinander ableiten:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(vgl. Sonar, 2011, S.440)

3 Leonhard Euler

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren (Abb.13).



Abbildung 13: Porträt von Leonhard Euler¹⁷

Sein Vater war ein evangelisch-reformierter Pfarrer und wegen seiner Versetzung zogen sie 1708 nach Riehen. Sein Vater hatte eine gute mathematische Ausbildung, weil er den Unterricht von Jakob Bernoulli besucht und dort auch seine Dissertation gemacht hat. Leonhard wurde noch als Kind von seinem Vater unterrichtet und entwickelte ein großes Interesse für Mathematik. Trotzdem inskribierte er sich auf Wunsch seines Vaters an der Theologischen Fakultät. Dort besuchte er mathematische Vorlesungen bei Johann Bernoulli. Wegen seines großen Interesses an Mathematik suchte Euler um Privatstunden bei Johann Bernoulli an. So begann Euler, mathematische Werke zu studieren. Im Alter von nur 18 Jahren veröffentlichte Euler seine erste Arbeit „*Konstruktion zeitgleicher Kurven im widerstehenden Mittel*“ in „*Acta Eruditorum*“. Im Jahre 1727 bekam Euler eine Stelle als Adjunkt für Medizin auf der Akademie der Wissenschaften in Petersburg, die von Zarin Katharina I. gegründet wurde. Kurz danach starb Katharina I. und trotz der sehr schwierigen Situation übernahm Euler die mathematische Klasse (vgl. Sonar, 2011, S. 446-454). Im Jahre 1731 bekam er die Professur für Physik. Zu dieser Zeit heiratete er Katharina Gsell, mit der er 13 Kinder hatte, von denen aber nur fünf überlebten. Das Arbeitsklima in Petersburg war sehr angenehm für Euler, da er neben vielen Forschern lebte und die Möglichkeit hatte, seine Werke zu publizieren. Euler schaffte nicht nur viele Beiträge in der Mathematik, sondern auch in der Physik, wo er die Analysis in der

¹⁷Zugriff am 6.8.2018 https://hr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Mechanik eingeführt hat. Er ist auch verantwortlich für die Anwendungen der Mathematik in der Astronomie, im Schiffbau, in der Optik und der Kartografie. Euler war ab 1735 Mitglied des geographischen Departments und wahrscheinlich hat er durch die konstante Untersuchung der Karten die Sehkraft eines Auges verloren. Während der Euler'schen Arbeitszeit in Petersburg veröffentlichte er mehr als 50 Werke aus verschiedenen Forschungsgebieten. Er erbrachte viele Beiträge in Algebra, Geometrie, Arithmetik, Differentialgleichungen, Mechanik, Differentialgeometrie, Variationsrechnung und in vielen anderen Bereichen. (vgl. Sonar, 2011, S. 446-454).

Das bekannteste Werk von Euler während der „ersten Petersburger Periode“ war das Buch „*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*“ (Abb.14).

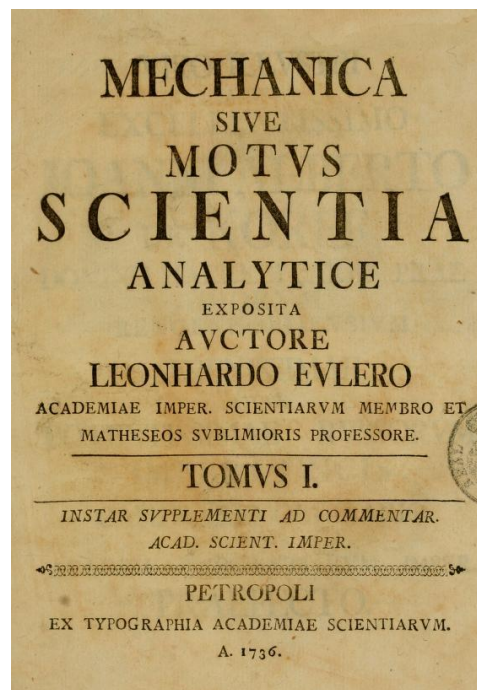


Abbildung 14: „*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*“¹⁸

In diesem Buch hat Euler die Leibniz'sche Analysis in der Mechanik angewandt. Aber nach dem Tod der Zarin Anna I. übernahm Euler eine Stelle in Berlin wegen politischer Unruhen in Petersburg. In der Analysis war Euler ein Genie. Er hat die „Komplexe Analysis“ mit der imaginären Einheit i entdeckt. Außerdem gebührte ihm Anerkennung für den Impulssatz der Mechanik. Trotz der Tatsache, dass in jedem Buch behauptet wird, dass Newton dafür verantwortlich ist, ist dies aber nicht der Fall. In Newtons Werken konnte man den Impulssatz nicht finden. Euler ist genauso verantwortlich für die

¹⁸Zugriff am 9.8.2018. : <https://archive.org/details/mechanicasuemot01eule>

Translationsbewegung von punktförmigen Massen sowie auch für die Strömungsmechanik. Er entwickelte die erste Wasserturbine. (Balck, 2007, S. 387-405). Euler hat als erster den Begriff „Funktion“ mit der Schreibweise $f(x)$ eingeführt. Euler

entwickelte auch das „unendliche Polynom“ als eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

Während der Zeit in Berlin veröffentlichte er noch mehrere Werke. Nach seinem Werk „*Introductio in analysin infinitorum*“ hat er weitere zwei Bände „*Institutiones calculi differentialis*“ geschrieben und drei Bände „*Institutiones calculi integralis*“. Trotz seines großen wissenschaftlichen Erfolges fand Euler das Leben in Berlin nicht leicht und zog deshalb im Jahre 1766 wieder zurück nach Petersburg. Kurz danach verlor er auch auf dem anderen Auge die Sehkraft und ein paar Jahre später starb seine Frau und danach auch seine beide Tochter. Trotz seiner Blindheit setzte Euler seine wissenschaftliche Arbeit fort. Interessant ist zu erwähnen, dass mehr als die Hälfte seiner Werke während seiner Zeit als Blinder entstanden. In den letzten Jahren seines Lebens verfasste er mehrere Werke über Astronomie, Algebra, Zahlentheorie und Analysis. Euler starb im Jahre 1783 nach einem Schlaganfall. (vgl. Sonar, 2011, S. 455-457). Nun sollen die bekanntesten Entdeckungen von Euler beschrieben werden.

3.1 Der Funktionsbegriff

Für Euler steht der Begriff Funktion im Zentrum der Analysis. Johann Bernoulli war der Lehrer von Euler. So hat Euler sein Funktionsverständnis erweitert und die Funktion wie folgt beschrieben (vgl. Sonar, 2011, S.458):

„Eine Quantität, die aus einer oder mehreren Quantitäten irgendwie zusammengesetzt ist, wird ihre Funktion genannt.“

(Bottazzini, 1986, S.9)

In seiner „*Introductio*“ definierte Euler die Funktion als:

„Eine Function einer veränderlichen Zahlgröße ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Zahlgröße und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrößen zusammengesetzt ist.“

(Euler, 1983, S.4)

Für Euler war das Symbol „ z “ eine unabhängige Veränderliche. Er gab folgende Beispiele: $a+3z$, $az+b\sqrt{a^2-4z^2}$, c^z . Die Konstante nennt Euler „scheinbare Funktionen“ und das sind zum Beispiel z^0 oder 1^z .

Euler unterscheidet zwischen algebraischen und transzendenten Funktionen. Für eine algebraische Funktion gelten die algebraischen Operationen. Das sind Potenzierung, Wurzelziehung und $(+,-,*,/)$. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{2z-z^2}}{a^2z-3bz^3}.$$

Für eine transzendente Funktion gelten außerdem noch Operationen wie das Logarithmieren und die Kombination. (Euler 1983, 1. Kapitel, S.3–13)

Euler hat vermutet, dass die Funktionen, die seiner Definition genügen, durch eine Potenzreihe geschrieben werden können:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+....$$

Euler hat bemerkt, dass seine Definition nicht alle analytischen Ausdrücke abdeckt, wie zum Beispiel bei den Lösungen der Schwingungsgleichung. Da treten Funktionen auf, die durch verschiedene analytische Ausdrücke beschrieben werden können. So kam im Jahre 1755 eine neue Funktionsdefinition (vgl. Sonar, 2011, S.459):

„Sind nun Größen auf die Art voneinander abhängig, dass keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der anderen zu bewirken, so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der anderen betrachtet, eine Funktion von dieser, eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch eine andere bestimmt werden kann, unter sich begreift.“

(Heuser, 2008, S.154)

Euler verwendete die Notation $f(x)$ zum ersten Mal im Jahre 1734. (Thiele 1982, S.111)

3.2 Das unendlich Kleine

Wie wir schon gesehen haben, bezeichnete Leibniz das unendlich Kleine als „kleiner als jede vorgegebene Größe“. Euler ging einen Schritt weiter und sagte „kleiner als jede angebbare Größe“.

In dem Werk „*Institutiones calculi differentialis*“ definierte Euler das unendlich Kleine als:

„Es gibt keinen Zweifel, dass jede Größe so lange vermindert werden kann, bis sie verschwindet und zu Nichts wird. Aber eine unendlich kleine Größe ist nichts anderes als eine verschwindende Größe und damit ist sie wirklich 0.“

(Euler, 2000, S.51)

Daraus sieht man, dass Euler das unendlich Kleine als gleich Null ansieht.

Euler fragte sich aber gleich, warum man verschiedene Zeichen verwendet, wenn das unendlich Kleine gleich Null ist. Dies ist so, weil es zwei Arten des Vergleiches zwischen zwei unendlich Kleinen gibt, nämlich den arithmetischen und den geometrischen. Man kann sagen, dass a und b arithmetisch gleich sind, wenn deren Differenz gleich Null ist.

Euler bezeichnet eine unendlich kleine Größe mit dx , wobei $dx=0$ und $adx=0$ ist, in dem a eine endliche Größe ist. Wenn es zwei verschiedene unendlich kleine Größen dx und dy gibt, wobei beide 0 sind, bleibt ihr Verhältnis unbekannt. Wenn a eine endliche und dx eine unendlich kleine Größe ist, wird $a \pm ndx = a$. Arithmetisch gesehen gilt: $a \pm ndx - a = 0$. Geometrisch gesehen gilt: $\frac{a \pm ndx}{a} = 1$. Daraus folgt, dass unendlich

kleine Größen in Bezug auf endliche verschwinden. (vgl. Euler, Kapitel 3, §87)

Da $dx=0$ ist, wird auch dx^2 , dx^3 ..., gleich 0 sein. Leicht kann man sehen, dass $dx + (dx)^{n+1} = dx$ gilt. So fallen die größeren Potenzen weg. (Euler, Kapitel 3, §88)

Wenn eine Einheit durch eine unendliche oder durch 0 geteilt wird, so wird der Quotient unendlich groß: $\frac{a}{dx} = \infty$ bzw. $\frac{a}{\infty} = dx = 0$. (vgl. Euler, Kapitel 3, §89)

Wenn es zwei endliche Größen a und b gibt, dann sind $\frac{a}{dx} + b$ und $\frac{a}{dx}$ unendlich groß.

Durch Subtraktion bekommt man $\left(\frac{a}{dx} + b\right) - \frac{a}{dx} = b \neq 0$, durch Division aber

$$\frac{\frac{a}{dx} + b}{\frac{a}{dx}} = 1 + \frac{b}{a} dx = 1. \text{ Das zeigt uns, dass sich unendliche Größen genau umgekehrt wie}$$

unendlich kleine Größen verhalten. (vgl. Volkert 1988, S.153)

Im Folgenden wird das unendlich Kleine im Kontext von Funktionen besprochen.

3.3 Exponentielle und logarithmische Funktionen

Euler untersuchte Exponential- und Logarithmusfunktionen im siebten Kapitel seiner „*Introductio*“. Euler akzeptierte sowohl die Existenz der unendlich kleinen Größe w als auch der unendlich großen Größe i . Da Euler erst später in seiner Karriere das Symbol i für die imaginäre Einheit verwendete, darf es nicht mit dem Symbol i für die unendlich große Größe verwechselt werden. (Edwards, 1979, S.272).

Am Anfang verwendete Euler $a_0 = 1$. Es gilt dann auch:

$$a^w = 1 + kw$$

wobei k irgendeine Zahl ist. Wir betrachten eine endliche Zahl x , für die $x = w \cdot i$ gilt. Dann muss auch gelten:

$$a^x = a^{wi} = (a^w)^i = (1 + kw)^i = \left(1 + \frac{kx}{i}\right)^i \quad (8)$$

Durch die Verwendung des Binomialtheorems erhält man:

$$a^x = 1 + i \left(\frac{kx}{i}\right) + \frac{i(i-1)}{2!} \left(\frac{kx}{i}\right)^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} \left(\frac{kx}{i}\right)^3 + \dots$$

bzw.

$$a^x = 1 + kx + \frac{1}{2!} \frac{i(i-1)}{i^2} k^2 x^2 + \frac{1}{3!} \frac{i(i-1)(i-2)}{i^3} k^3 x^3 + \dots$$

Weiters argumentiert Euler:

$$\frac{i-1}{i} = 1 - \frac{1}{i} = 1$$

$$\frac{i-2}{i} = 1 - \frac{2}{i} = 1 \dots$$

Daraus folgt:

$$\frac{i(i-1)}{i^2} = \frac{i-1}{i} = 1$$

$$\frac{i(i-1)(i-2)}{i^3} = \frac{i(i-1)}{i^2} \cdot \frac{i-2}{i} = 1$$

Daher bekommt man für a^x :

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \dots \quad (9)$$

Danach setzt Euler $x = 1$ und bekommt:

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots$$

Schnell kann man bemerken, dass, wenn man für $k = 1$ einsetzt, die Euler'sche Zahl bekommt:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Diese Zahl verwendet Euler als Basis des natürlichen Logarithmus $\ln x := \log_e x$.

Aus der Gleichung (8) bekommt man:

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$$

und aus der Gleichung (9):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

(vgl. Sonar, 2011, S.462)

Für die logarithmische Funktion leitete Euler die Mercators Reihe her (vgl. Edwards, 1979, S.273):

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - + \dots \quad (10)$$

Durch Verwendung der „Nullrechnung“ schreibt Euler für $y = f(x) = x^n$:

$$dy = (x+dx)^n - x^n$$

Mit Hilfe des Binomialtheorems erhält man:

$$\begin{aligned} dy &= \left(x^n + nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + \dots \right) - x^n \\ &= nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + \dots \end{aligned}$$

Wie im vorigen Kapitel erwähnt wurde, werden alle Differentiale höherer Ordnung gleich Nullgesetzt:

$$dy = nx^{n-1}dx$$

Für den Logarithmus bekommt man:

$$d(\log x) = \log(x+dx) - \log x = \log\left(\frac{x+dx}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$$

Mit Hilfe von Formel (10) ergibt sich:

$$d(\log x) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - + \dots$$

Alle Differentiale höherer Ordnung werden gleich Null gesetzt und daher bekommt man:

$$d(\log x) = \frac{dx}{x}$$

(vgl. Sonar, 2011, S.461-462)

Eine andere Herleitung dieser Formel ist (vgl. Sonar, 2011, S.462):

$$a^x = a^{w \cdot i} = (1 + kw)^i$$

Durch $a^x = 1 + y$ bekommt man:

$$1 + y = (1 + kw)^i$$

Daher folgt:

$$\log_a(1 + y) = x = w \cdot i \tag{11}$$

$$1 + kw = (1 + y)^{1/i}$$

Daraus erhält man:

$$w = \frac{(1 + y)^{1/i} - 1}{k}$$

Durch Einsetzen in (11) ergibt sich:

$$\log_a(1 + y) = \frac{i}{k} ((1 + y)^{1/i} - 1)$$

Durch Einsetzen $a = e$ ergibt sich $k = 1$. Statt $1 + y$ schreibt man nun x . So ergibt sich:

$$\log x = i(x^{1/i} - 1)$$

Da i unendlich groß und w unendlich klein ist, setzt man $i = \frac{1}{w}$ ein und erhält:

$$\log x = \frac{x^w - 1}{w}$$

Durch die Ableitung erhält man:

$$d(\log x) = \frac{1}{w} (d(x^w - 1)) = \frac{1}{w} w x^{w-1} dx = \frac{x^w dx}{x}$$

Da w unendlich klein ist, ist $x^w = x^0 = 1$. Daher folgt:

$$d(\log x) = \frac{dx}{x}$$

(vgl. Sonar, 2011, S.462-463)

3.4 Die trigonometrische Funktionen

Euler war der Meinung, dass der Sinus des Winkels α die Hälfte der Sehne des Kreises um einen zentralen Winkel 2α ist, und der Cosinus von α die Länge der Senkrechten von der Mitte zu dieser Sehne. Er hat die Winkelfunktion auf einem Kreis mit Radius 1 definiert und mit Hilfe des Satzes von Pythagoras folgenden Ausdruck eingeführt (vgl. Sonar, 2011, S.463):

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Danach erkannte Euler die Periodizität von Sinus und Cosinus und schrieb (vgl. Edwards, 1979, S.275):

$$\sin(y \pm z) = \sin y \cos z \pm \cos y \sin z$$

$$\cos(y \pm z) = \cos y \cos z \mp \sin y \sin z$$

Mit Hilfe der „Gleichung von Moivre“ erhält er induktiv:

$$(\cos z \pm i \sin z)^n = \cos nz \pm i \sin nz$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit ist. Da w eine unendlich große Größe ist und i eine unendlich kleine Größe, erhält man $z = iw$. Daher folgt:

$$\cos iw + i \sin iw = (\cos w + i \sin w)^i$$

$$\cos iw - i \sin iw = (\cos w - i \sin w)^i$$

Durch Addieren und Subtrahieren erhält man:

$$\cos iw = \frac{1}{2} ((\cos w + i \sin w)^i + (\cos w - i \sin w)^i)$$

$$\sin iw = \frac{1}{2i} ((\cos w + i \sin w)^i - (\cos w - i \sin w)^i)$$

Durch Verwendung des Binomialtheorems wird die rechte Seite in eine unendliche Reihe entwickelt:

$$\cos iw = \cos^i w - \frac{i(i-1)}{2!} \cos^{i-2} w \sin^2 w + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{4!} \cos^{i-4} w \sin^4 w - \dots$$

$$\sin iw = i \cos^{i-1} w \sin w - \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} \cos^{i-3} w \sin^3 w + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{5!} \cos^{i-5} w \sin^5 w - \dots$$

Da w eine unendlich kleine Größe ist, schreibt man $\cos w = 1$ und $\sin w = 0$ und da i eine unendlich große Größe ist, schreibt man $i = i-1 = i-2 = \dots$. Daher erhält man für $x := iw$ zwei unendliche Reihen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

Daraus folgt die Euler'sche Formel:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Letztendlich erhält man für $x = \pi$:

$$e^{i\pi} = -1$$

(vgl. Sonar, 2011, S.463-464)

4 Brook Taylor

Brook Taylor wurde am 18. Oktober 1685 in England geboren (Abb.15).



Abbildung 15: Brook Taylor¹⁹

Im Jahr 1701 inskribierte sich für das Studium der Rechtswissenschaften am St. John's College in Cambridge. Dort kam er in Kontakt mit der Mathematik. Im Jahr 1712 wurde er in die Kommission aufgenommen, die über den Streit zwischen Newton und Leibniz entscheiden sollte. Drei Jahre später veröffentlichte er zwei Bücher: „*Methodus incrementorum directa et inversa*“ (Abb.16) und „*Linear Perspective*“.

¹⁹Zugriff am 9.8.2018.: https://de.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor

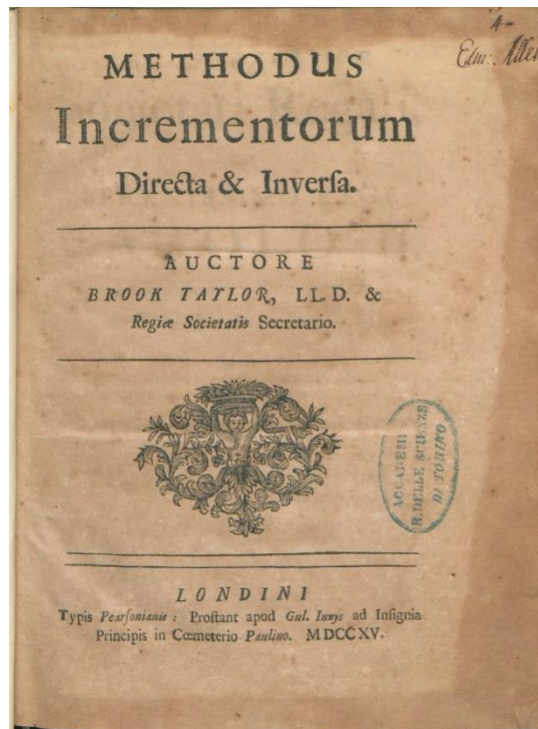


Abbildung 16: „Methodus incrementorum directa et inversa“²⁰

Das erste Buch handelt von der diskreten Differentialrechnung und von der Reihenentwicklung, die heute sehr bekannt sind. (vgl. Sonar, 2011, S. 465). Er beschrieb glatte Funktionen, die aber nicht in einer Taylor-Reihe um x_0 entwickelt werden konnten. (vgl. Sonar, 2011, S. 466). Eine solche Funktion wurde von Augustin Louis Cauchy entdeckt:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}; x \neq 0$$

$$f(x) = 0; x = 0$$

Solche Funktionen waren lange Zeit unbekannt und erst 1772 hatte es Lagrange geschafft deren Bedeutung zu erfassen. Die Taylor-Reihe hat folgende Form:

$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\ddot{y}_0}{(\dot{x}_0)^2} + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \frac{\ddot{\dot{y}}_0}{(\dot{x}_0)^3} + \dots$$

²⁰Zugriff am 9.8.2018.: https://de.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor

Durch die Umwandlung der Newtonschen Notation in die Leibnizsche bekommt man:

$$\ddot{y}_0 = \frac{d^3 y}{dt^3} \Big|_{x_0} \text{ und } (x_0)^3 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 \Big|_{x_0}$$

Damit ist:

$$\frac{\ddot{y}_0}{(x_0)^3} = \frac{d^3 y \cdot dt^3}{dt^3 \cdot dx^3} \Big|_{x_0} = \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x_0}$$

(vgl. Sonar, 2011, S.466)

4.1 Satz von Taylor

Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und sei $T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$. Dann gibt es ein ξ zwischen x_0 und x , sodass auf I gilt:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (12)$$

wobei $x \in I$. (vgl. Appell, 2009, S.123-124)

Beweis:

Sei x fix und $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hilfsfunktion, die durch:

$$g(t) := f(t) - T_n(t) - \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} (t-x_0)^{n+1} \quad (13)$$

beschrieben ist, und $t \in I$, definiert ist.

Aus (13) folgt:

$$g(x_0) = f(x_0) - T_n(x_0) = 0 \quad (14)$$

wobei $g(x) = 0$

Die Ableitung von g im Punkt $t \in I$ ist:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= f'(t) - T'_n(t) - (n+1) \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} (t-x_0)^n \\
g''(t) &= f''(t) - T''_n(t) - (n+1)n \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} (t-x_0)^{n-1} \\
g'''(t) &= f'''(t) - T'''_n(t) - (n+1)n(n-1) \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} (t-x_0)^{n-2} \\
&\dots \\
g^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Besonders ist:

$$g'(x_0) = g''(x_0) = g'''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0 \quad (15)$$

Wegen (14) und (15) kann man den Mittelwertsatz anwenden und somit kann ein x_1 zwischen x_0 und x mit $g'(x_1) = 0$ gewählt werden. Dies geht so weiter bis wir ein x_n zwischen x_0 und x_{n-1} mit $g^{(n)}(x_n) = 0$ wählen.

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf dem Intervall $[x_0, x_n]$, gibt es ein ξ zwischen x_0 und x_n :

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

Wird dies aufgelöst ergibt sich:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

□

(vgl. Appell, 2009, S. 124)

4.2 Die Taylor Polynome

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ fest und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf I mindestens n -mal stetig differenzierbar ist und $C^n(I)$. Der Funktion f wird ein Polynom n -ten

Grades T_n zugeordnet. Dieses Polynom nennt man Taylor-Polynom der Ordnung n um den Entwicklungspunkt x_0 . (vgl. Appell, 2009, S.123). Es ist definiert durch:

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (16)$$

Das Polynom im Punkt x_0 erfüllt folgende Beziehungen:

$$T_n(x_0) = f(x_0)$$

$$T'_n(x_0) = f'(x_0)$$

$$T''_n(x_0) = f''(x_0)$$

...

$$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Im Fall, dass es f selbst ein Polynom in $x-x_0$ ist, gilt also:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

So gilt:

$f(x) = T_n(x)$ auf I . Wenn man die Funktion f auf I durch T_n ersetzt, entstehen manchmal die Fehler. Dieser Fehler beschreiben wir durch die Restglieder. (vgl. Appell, 2009, S.123)

Eine Funktion stimmt genau dann mit ihrer Taylorreihe überein, wenn das Restglied gegen Null geht.

Taylorpolynom mit n -ter Ordnung lautet:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_n$$

bzw.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \dots + \frac{f^{(r)}(x_0)}{(r)!}(x-x_0)^r + \dots$$

Satz: „Sei die Funktion f im Intervall I $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar, $x, x_0 \in I$.

Dann gilt in der Taylorentwicklung von f für das n -te Restglied:

$$R_n(x-x_0) = \varphi_n(x-x_0)(x-x_0)^n \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x-x_0) = 0.$$

(Hartmann, 2002, S.305)

Beweis (vgl. Hartmann, 2002, S.305):

$$|\varphi_n(x-x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0) \right|$$

Die $(n+1)$ -te Ableitung $f^{(n+1)}$ ist stetig und nimmt zwischen x und x_0 Minimum und Maximum an. Der Betrag kann durch eine Zahl C abgeschätzt werden:

$$|\varphi_n(x-x_0)| \leq \left| \frac{C}{(n+1)!} (x-x_0) \right|.$$

Damit ist $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x-x_0) = 0$.

□

Falls die Funktion unendlich oft differenzierbar ist, kann ein Taylorpolynom nicht aufgestellt werden. Man muss dann eine ganze Reihe hinschreiben. (vgl. Hartmann, 2002, S.305)

4.3 Die Taylor Reihe

Die Taylor Reihe ermöglicht es, dass die Funktionen beliebig genau in einem Intervall angenähert werden können. Die Entwicklung einer Reihe kann am besten anhand eines Beispiels gezeigt werden. Es wird die Funktion

$$f(x) = e^x$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gewählt. So eine Funktion möchten wir durch Polynome höheren Grades annähern. Die Frage, die wir uns stellen, ist, welches Polynom vom Grad 0 am besten die Funktion f um x_0 repräsentiert. So erhält man das konstante Polynom (vgl. Sonar, 2011, S.467):

$$p_0(x) = e^{x_0} = 1$$

Die nächste Frage die sich stellt ist, was für ein Polynom vom Grad 1 das wäre. Aus:

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

ermittelt man a_0 und a_1 unter der Bedingung, dass für $x_0 = 0$

$$p_1(x_0) = f(x_0) \text{ und } p_1'(x_0) = f'(x_0)$$

gilt.

So gilt auch:

$$p_1(x_0) = a_0 = f(x_0) = 1$$

$$p_1'(x_0) = a_1 = f'(x_0) = 1$$

Daher ist p_1 :

$$p_1(x) = 1 + x$$

Demnächst sucht man:

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - a_0 + a_1(x - x_0))^2$$

mit

$$p_2(x_0) = f(x_0), \quad p_2'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{und} \quad p_2''(x_0) = f''(x_0).$$

Wegen

$$p_2'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0)$$

$$p_2''(x) = 2a_2$$

folgt

$$p_2(x_0) = a_0 = f(x_0) = 1$$

$$p_2'(x_0) = a_1 = f'(x_0) = 1$$

$$p_2''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0) = 1$$

Daher ist $p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

Analog geht man für weitere Polynome vor. Weiter ist

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3.$$

So erhält man

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$

...

Für das Polynom n-ten Grades erhält man:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

was zur Potenzreihe von Funktion $f(x) = e^x$ führt. (vgl. Sonar, 2011, S. 467-468)

5 Joseph-Louis Lagrange

Wenn man von Größen der Mathematik im 18. Jahrhundert spricht, kommt man an Euler und Lagrange nicht vorbei. Die beiden schrieben sich mehreren Briefen, in denen sie die „ *δ -Methode*“ zur Lösung des Variationsproblems diskutierten. Euler bemerkte schnell das Genie Lagranges und hinterließ ihm somit im Jahr 1766 als er Berlin verließ, seinen Posten als Professor.

Joseph Louis Lagrange wurde im Jahr 1736 in Turin geboren (Abb.17).

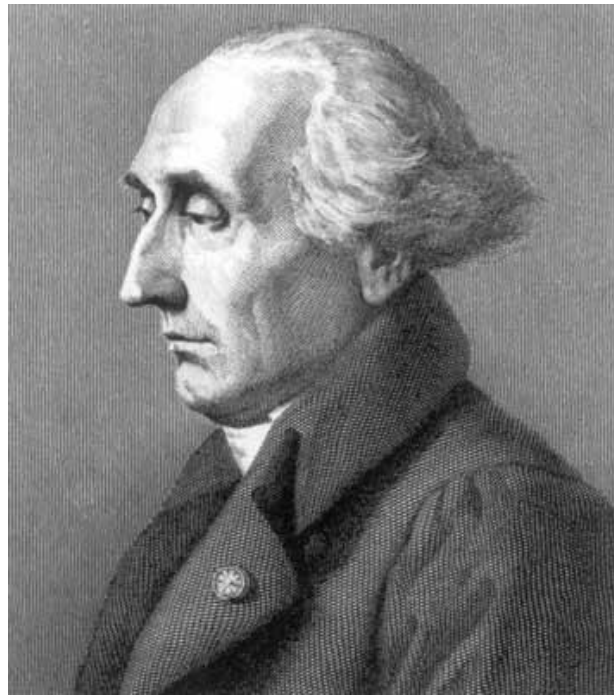


Abbildung 17: Joseph Louis Lagrange²¹

Schon als Kind las er die Briefe von Newtons Freund Hallyund und entwickelte dadurch seine Begeisterung für Mathematik. Sehr schnell lernte er die Analysis seiner Zeit kennen. Nach dem das Fundament für die Mechanik-Variationsrechnung gelegt wurde, schrieb Lagrange sein erstes Werk „*Mechanique Analytique*“ (Abb.18).

²¹Zugriff am 9.8.2018. : https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange



Abbildung 18: „Mechanique Analytique“²²

Mit diesem Werk schaffte er es endlich mit der alten griechischen Tradition zu brechen. Lagrange beschäftigte sich neben der Variationsrechnung auch mit der Theorie der Gleichungen welche der junge Galois etwas später als die Theorie der Gruppen weiterentwickelte. Im Jahr 1787 zog Lagrange nach Paris um im Jahr 1795 die Stelle des ersten Professors der Analysis an der Ecole Polytechnique zu übernehmen. Zu dieser Zeit bemerkten viele Mathematiker, dass die unendlich kleinen Größen für die Differential- und Integralrechnung nicht ganz passend sind. Somit schlugen diese eine Form des Grenzwertes vor. Lagrange war der Einzige, der diese Ideen nicht teilte. Er war der Meinung, dass die Reihen für alle Funktionen verwendbar sind. (vgl. Sikic, 1989, S.63). Dazu konnte er aber keinen Beweis finden. Er hatte in der Reihe

$$f(x+i) = fx + ip + i^2q + i^3r + \dots$$

²²Zugriff am 9.8.2018.:

<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-lagranges-analytical-mechanics>

die Stelle x mit dem $x+0$ substituiert, wobei 0 eine von i unabhängige Größe ist. Deswegen bekam er das Resultat wie in dem Fall wo i mit $i+0$ substituiert wurde:

$$fx + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \dots$$

Durch Ausmultiplizieren bekommt man:

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \dots + po + 2qio + 3ri^2o + \dots \quad (17)$$

Wenn in den Größen $fx, p, q \dots$ das x durch $x+0$ ersetzt wird, bekommt man:

$$f(x+o) = fx + f'xo + \dots$$

$$p(x+o) = p + p'o + \dots$$

$$q(x+o) = q + q'o + \dots$$

So ergibt sich die Reihe:

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \dots + f'xo + p'io + q'i^2o \dots \quad (18)$$

Durch Vergleichen von (17) und (18) erhält man:

$$p = f'x, \quad 2q = p', \quad 3r = q'$$

dies entspricht:

$$p = f'x, \quad q = \frac{f''x}{2}, \quad r = \frac{f'''x}{3!}, \dots$$

Damit ist die Reihe:

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{3!}i^3 + \dots$$

(vgl. Sonar, 2011, S.471)

Lagrange verwendete im obigem Beispiel die Schreibweise f' statt $\frac{dy}{dx}$ um zu vermeiden, dass es sich um zwei unendlich kleine Größen handelt. Wir wissen aber, dass sich nicht jede Funktion in Reihen entwickelt lässt. Mit seinem kritischen Denken stellte er die Differential- und Integralrechnung in Frage. Lagrange hat als erster den Begriff der Funktion ins Zentrum gestellt und die Aufmerksamkeit auf den Begriff der Derivation fokussiert. Er hat auch als erster eine Restglieddarstellung für die Taylor-Reihe eingeführt und gilt somit als einer der wichtigsten Persönlichkeiten der Mathematik. (Sonar, 2011, S.472)

5.1 Satz von Taylor

„Ist f eine $(n+1)$ Mal stetig differenzierbare Funktion, dann gilt:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

wobei T_n das “Taylor-Polynom” vom Grad n um den Entwicklungspunkt x_0 ist:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

und R_n das Restglied, das nach Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

ist, wobei $x_0 < \xi < x$.” (Sonar, 2011, S.472)

5.2 Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz besagt, dass es zwischen zwei Punkten eines Grafes mindestens einen Punkt gibt, für den die Tangente parallel zur Sekante ist (Abb.19).

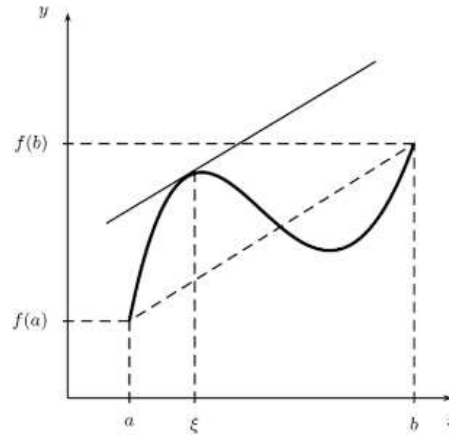


Abbildung 19: Mittelwertsatz der Differentialrechnung²³

„Sei $f \in C([a, b]) \cap D^1((a, b))$ gegeben. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).“$$

(Appell, 2009., S.99)

Beweis: Eine Hilfsfunktion $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird definiert durch:

$$h(x) := (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x).$$

Dann gilt $h \in C([a, b]) \cap D^1((a, b))$ und $h(a) = f(b)a - f(a)b = h(b)$. Nach der ersten Gleichung gibt es ein $\xi \in (a, b)$ sodass:

$$0 = h'(\xi) = f(b) - f(a) - (b - a)f'(\xi)$$

wo ξ die Anfangsgleichung erfüllt.

□

(vgl. Appell, 2009., S.99)

²³Appell, 2009, S.99

Im Beweis verwendeter **Satz von Rolle** lautet:

„Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) und es gelte

$f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$

(Hairer, Wanner, 2010, S.259)

Beweis:

„Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist sie auf $[a, b]$ beschränkt und besitzt ein Maximum und ein Minimum, d.h. es gibt $u \in [a, b]$ und $U \in [a, b]$ mit

$f(u) \leq f(x) \leq f(U)$ für alle $x \in [a, b]$.“ (Hairer, Wanner, 2010, S.224).

Es unterscheiden sich zwei Fälle.

„Falls $f(u) = f(U)$ ist, dann ist die Funktion $f(x)$ konstant und ihre Ableitung ist überall 0.

Falls $f(u) < f(U)$ ist, so unterscheiden sich zumindest einer dieser zwei Werte von $f(a) = f(b)$, sagen wir $f(U)$. Es gilt dann $a < U < b$ und folgt $f'(U) = 0$.“

□

(Hairer, Wanner, 2010, S.259)

6 Carl Friedrich Gauß

Der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß wurde in Braunschweig am 30. April 1777 geboren und verstarb am 23. Februar 1855 in Göttinger (Abb.20).



Abbildung 20: Carl Friedrich Gauß²⁴

Als Gauß mit der Schule begonnen hatte, erkannte sein strenger Lehrer Bütner sein Talent. Er gab allen Kindern in der Klasse die Aufgabe alle Zahlen bis 100 zu addieren. Gauß machte das sehr schnell und faszinierte damit seinen Lehrer. Gauß konnte die schnelle Berechnung mit Hilfe von Teilsummen $1+100$, $2+99$, $3+98$,... bewerkstelligen. Jede dieser Additionen lieferte eine Summe von 101. Es gibt 50 solcher Teilsummen und daraus ergibt sich die Zahl 5050. Gauß entwickelte die Formel für die Summe der ersten

n natürlichen Zahlen: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. (Kraljic, 2012, S.41). Seine

mathematische Bildung hat Gauß seinem jungen Lehrer Martin Bartels zu verdanken, der auch von der Mathematik fasziniert war. Mit seiner Hilfe bekam Gauß in den Jahren zwischen 1792 und 1795 das Stipendium am Collegium Carolinum, wo er mehrere Sprachen lernte und mehrere Werke in Arithmetik schrieb, wie z.B. das quadratische Reziprozitätsgesetz. Nach der Ausbildung bei Bartels besuchte er die Universität in Göttingen. Das Privatleben von Gauß war nicht ganz so glücklich wie seine berufliche Laufbahn. Seine erste Frau starb sehr schnell nach der Hochzeit und die zweite Ehe entstand nur aufgrund von finanziellem Interesse. Trotz aller Tragödien in seinem Leben war er umso erfolgreicher in seiner Arbeit. So bekam er 1807 die Professur an der

²⁴Zugriff am 9.8.2018: https://hr.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Universität Göttingen und kurze Zeit später wurde er Direktor der Sternwarte. Gauß war sehr introvertiert und unterhielt sich wenig mit seinen Kollegen. So pflegte er auch keinen Kontakt mit anderen Mathematikern seiner Zeit. (vgl. Dakic, 2005., S.105)

Im Jahr 1796 begann Gauß mit dem Schreiben eines mathematischen Taschenbuches. In diesem Buch befinden sich 146 Notizen, die den großen Kapiteln der Mathematik zugeordnet sind. Interessant ist, dass auf den letzten Seiten des Taschenbuches die Formel

$$p(n) \approx \frac{n}{\ln n}$$

steht, diese besagt, wie viele Primzahlen es ungefähr gibt, die kleiner als eine natürliche Zahl n sind. (vgl. Dakic, 2005, S.108).

Sein erstes Werk ist das Buch „*Disquisitiones Arithmeticae*“ aus dem Jahr 1801, das Hauptwerk der Arithmetik (Kraljic, 2012, S.42). In diesem Buch untersuchte Gauß Kongruenzen und quadratische Restglieder. Gauß zeigte, dass beim Dividieren der ganzen Zahlen durch eine Primzahl, die Restglieder nicht irgendwelche Zahlen sein können.

Eine von seinen wichtigsten Entdeckungen waren die richtigen Polygone. Gauß entdeckte jene Polygone die mit einem Lineal und einem Zirkel konstruiert werden konnten. So zeigte er, dass ein Polygon mit n Seiten nur dann konstruierbar ist wenn n die Form $2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ hat, wobei m eine natürliche Zahl oder Null ist und p_i die Primzahlen $2^{2^r} + 1$ sind. (Dakic, 2005., S.106).

Im Jahr 1799 bewies Gauß den Fundamentalsatz der Algebra, dieser besagt: „Jede algebraische Funktion $f(z)=0$ hat in einer Menge der komplexen Zahlen mindestens eine Lösung“. Bei der Suche nach einem Beweis, orientierte sich Gauß an eine geometrische Lösung, in der er eine geometrische Sichtweise, nämlich die der komplexen Zahlen einführte. Wenn man eine komplexe Zahl als $z = x + yi$ im Punkt (x, y) schreibt, ermöglicht dies die Einführung der Zahlenebene, in die x-Achse reell und die y-Achse imaginär ist. Diese wird heute die Gauß'sche Ebene. (vgl. Dakic, 2005., S.108).

In dem Jahr 1809 veröffentlichte Gauß sein zweites Werk „*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem*“. Dies war die zweiteilige Diskussion über die Himmelskörperbewegung. Dieses Werk ist ein Meilenstein in den Anwendungsgebietender Mathematik, der Astronomie und der Physik allgemein. Ein paar

Jahren zuvor, hatte Giuseppe Piazzi den kleinen Asteroiden Ceres gefunden. Nach einem Monat aber, konnten die Wissenschaftler den Asteroiden nicht mehr entdecken. Gauß hat mit seiner exakten Rechnung, die Position von Ceres wiedergefunden. In den nächsten drei Jahren wurden mit dieser Methode noch drei Asteroiden gefunden. Diese Entdeckung war der Anfang eines neuen Gebiets der Analysis, die numerische Analysis. (Dakic, 2005., S.110)

Erwähnenswert ist noch, dass Gauß noch mehrere weitere Werke schrieb und spannende Aufgaben annahm, wie zum Beispiel Vermessung von Hannover. In dieser Zeit veröffentlichte er auch das Werk „*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*“, in dem er im Feld der mathematischen Statistik die Methode der kleinsten Quadrate untersuchte. Im Jahr 1827 veröffentlichte Gauß die Diskussion „*Disquisitiones circa superficies curvas*“, in der die Gauß'sche Kurve diskutiert wurde. (vgl. Kraljic, 2010., S.52)

In den 30. Jahren des 19. Jahrhunderts beschäftigte sich Gauß mit Astronomie und Physik, wo er den Magnetismus untersuchte. Die Einheit für die magnetische Flussdichte trägt seinen Namen. Die Einheit entspricht einer hypergeometrischen Reihe

$$1Gs = 1 \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{cm \cdot s}}$$

In dieser Zeit begann er mit der Entwicklung der Potentialtheorie, einer der heute wichtigsten Teilgebiete der mathematischen Physik. (Kraljic, 2012., S.53)

Das Problem der Länge der Lemniskate führte Gauß zu einer interessanten Aufgabe, die er auch löste (Abb.21).

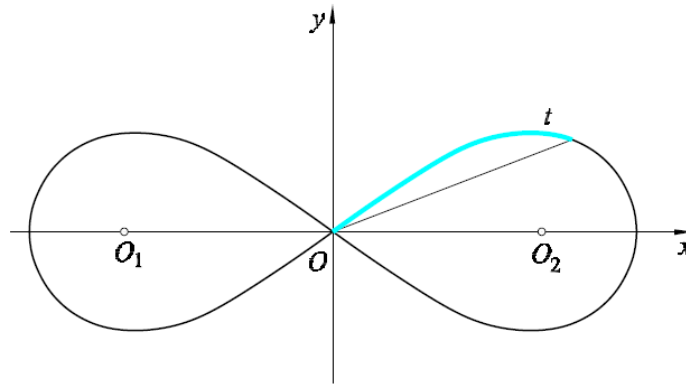


Abbildung 21: Lemniskate²⁵

Für jeden Punkt der Lemniskate ist das Produkt ihrer Entfernungen von zwei bestimmten Punkten O_1 und O_2 eine konstante Zahl und beträgt $\left(\frac{1}{2}, O_1 O_2\right)^2$. Noch heute ist es ein ungelöstes Rätsel wie Gauß auf die Entfernung von 10^{-11} kam.

Nach dieser Analyse begann er die Untersuchung der elliptischen Funktionen, die eine Verallgemeinerung der Lemniskate sind. (vgl. Dakic, 2005., S.109).

Carl Friedrich Gauß hat in seinen 78 Jahren unzählbare Werke hinterlassen.

²⁵Dakic, 2005., S. 109

7 Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy wurde am 21. August 1789 in Paris geboren (Abb.22).



Abbildung 22: Augustin Louis Cauchy²⁶

Cauchy wuchs in einer streng katholischen Familie auf. Seine Kindheit verbrachte er in sehr schweren Zeiten der Revolution. Die Schulen waren geschlossen und viele Leute hatten nichts zu Essen. Durch große Sorge zog die Familie Cauchy nach Arcueil, wo sie in Armut lebte. In dieser Zeit übernahm der Vater die Rolle des Lehrers und unterrichtete Augustin und seine fünf Geschwister zu Hause. Am Ende des Jahres 1799 wurde der Vater Cauchy zum Generalsekretär des Senats benannt und die Familie kehrte nach Paris zurück. Als Augustin in Büro seines Vaters arbeitete, lernte er Pierre-Simon Laplace und Joseph Louis Lagrange kennen. Man erzählt sich, die beiden Mathematiker hätten damals schon gesagt, dass Cauchy ein größerer Mathematiker als die beiden werden würden. (Sikic, 1989., S. 81).

²⁶ Zugriff am 15.8.2018.:
https://sh.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy#/media/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg

Lagrange gab dem Vater von Cauchy folgenden Rat (zitiert nach (Sonar, 2009., S.501), vgl. auch (Kowalewski 1938, S.274)):

„Lassen Sie dieses Kind vor dem siebzehnten Lebensjahr kein mathematisches Buch anrühren. Wenn Sie sich nicht beeilen, ihm eine gründliche literarische Erziehung zu geben, so wird ihn seine Neigung fortreißen. Er wird ein grosser Mathematiker werden, aber kaum (in?) seine Muttersprache schreiben können.“

Deswegen schickte der Vater Cauchy Augustin im Jahr 1802 in die Schule, wo er die klassischen Sprachen lernte bevor er eine Ingenieurlaufbahn Ausbildung einschlug. In Frankreich stellte die Ecole Polytechnique die beste Ausbildung für Mathematiker zur Verfügung, jedoch war damals auch schon eine schwere Aufnahmeprüfung notwendig. In England dagegen war die Ausbildung weniger mathematisch orientiert, sondern war eher praktischer Natur. So nahm Cauchy Mathematikstunden und absolvierte die Aufnahmeprüfung als Zweitbester. Im Jahr 1807 spezialisierte sich Cauchy für Straßen- und Brückenbau. (vgl. Sonar, 2009., S.501). Zwei Jahre später inskribierte er sich in die Ecole Nationale des Ponts et Chaussees und verließ diese als Bester seiner Generation. In seiner ersten Beschäftigung war er für den Bau eines Hafens im Norden für Napoleonische Flotte zuständig. In seiner Freizeit beschäftigte er sich mit mathematischen Problemen. Im Jahr 1812 kehrte er wegen einer Depression zu seiner Familie nach Paris zurück. In dieser Zeit war er sehr produktiv, dennoch bekam er erst im Jahr 1815 eine Assistenzprofessur an der Ecole Polytechnique. Die französische Akademie der Wissenschaft gab ihm einem Jahr später einen Preis für den Werk für die Beschreibung von Wellen, aber bekannt wurde er erst mit dem Werk über Polygonalen Zahlen. Nachdem Gaspard Monge entlassen wurde übernahm er seinen Platz in der Akademie. (vgl. Brückler, 2009., S.108). Im wissenschaftlichen Kreis war er eher unerwünscht und unpopulär. Durch seine streng katholische Orientierung und musste dieser immer Recht haben. Die Kollegen bezeichneten sein Benehmen als verrückt. Trotz seines schlechten Benehmens, ist die Anzahl seiner Arbeiten beeindruckend hoch. Die Akademie wusste sich Aufgrund der vielen Arbeiten Cauchys nicht besser zu helfen, als Arbeiten mit einer Länge von über vier Seiten zu verbieten. Eine von seinen Beschäftigungen in der Akademie war die Korrektur und Beurteilung von Arbeiten

jüngerer Kollegen. So gab es zum Beispiel die Erzählung, dass er die Arbeit von Niels Henrik Abel (1802-1829) verlor. Cauchy war damals verwirrt worden, aber die Wahrheit über dem Verschwinden dieses Werkes fand erst Viggo Brun im Jahr 1952 heraus. Die Arbeit von Abel korrigierte der Schriftsteller Libri und in seiner Bibliothek fand Brun die Arbeit von Abel. Warum er seine und mehrere anderer Arbeiten gestohlen hatte, ist noch heute unbekannt. (Sikic, 1989., S. 83). Ein paar Jahre später wurde er Professor am College de France, wo er über Integrationsmethoden unterrichtete, jedoch veröffentlichte er in diesem Zeitraum nichts. In dieser Zeit heiratete er und bekam zwei Töchter. Cauchy hielt die Vorlesungen über Analysis, in denen er die wichtigsten Begriffe wie den Grenzwert, die Ableitung, das Integral und unendliche Reihen und Funktionen definierte. Aus dieser Vorlesungen ergab sich schließlich das Buch „*Cours d'analyse*“ (Abb.23), das im Jahr 1821 veröffentlicht wurde. (Sonar, 2009., S. 504).

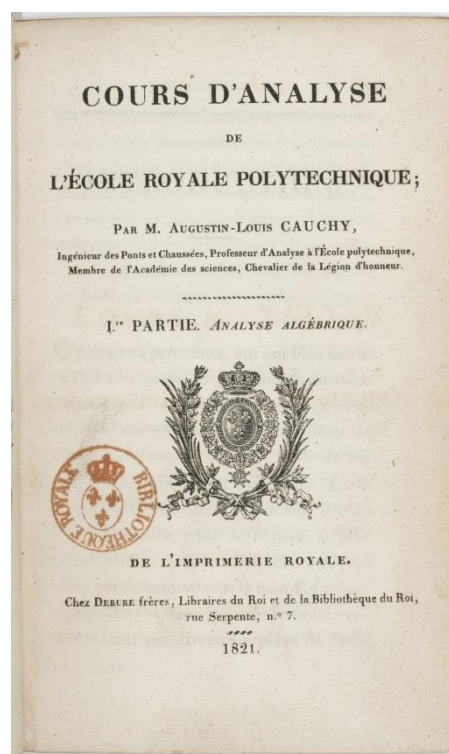


Abbildung 23: „*Cours d'analyse*“²⁷

²⁷Zugriff am 15.8.2018.: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657t/f9.image>

Im Jahr 1830 kam das neue Regime in Frankreich an die Macht und nachdem König Karl X. stürzte, wurde er durch einen „Bürgerkönig“ ersetzt. Wegen des neuen Regimes kehrte Cauchy in die Schweiz zurück. Er konnte nur seine Professur in Paris wieder haben, wenn dieser einen Treueschwur auf das neue Regime leistete. Dies wollte Cauchy aber auf keinen Fall. Ein Jahr später erhielt er einen Brief von Karl X. in dem er Cauchy als Hauslehrer seines Enkels anstellen wollte. So zog Cauchy nach Prag und unterrichtete den kleinen bis zu seinem 18. Geburtstag. Danach kehrte er mit seiner Familie nach Paris zurück wo er eine Professur am astronomischen Institut übernahm. Zwischen 1839 und 1848 schrieb er zahlreiche Werke, die in den „*Comptes rendus*“ veröffentlicht wurden. Seine letzte Stelle trat er am College de France im Jahre 1849 an. (Sonar, 2009., S.505-506). In letzten Jahren seines Lebens schrieb er noch sehr wichtige Werke über Differenzielle Gleichungen, die heute viele Anwendungen in der Physik und Astronomie haben. Cauchy starb im 68. Lebensjahr. Seine letzten Worte waren an den Erzbischof gerichtet: „*Die Leuten sterben, aber ihre Werke bleiben*“. (vgl. Sikic, 1989., S. 84).

Wenn man seine Natur bei Seite läßt, bleiben die wichtigsten Werke der Analysis, diese werden in nächsten Kapiteln vorgestellt. Um dies zu verstehen, werden die Entdeckungen von Newton und Leibniz mit denen von Cauchy verglichen. Bei der Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz handelt es sich um die variablen Größen. Newton betrachtete sie als zeitveränderliche Größe und Leibniz als Reihe von unendlich nahen Werten. Deswegen wählten sie unterschiedliche fundamentale Begriffe für ihre Beschreibungen. Newton hatte als Grundbegriff die Änderungsgeschwindigkeit der Variable verwendet, während Leibniz als Grundbegriff die Differenzial bzw. unendlich kleine Differenz zwischen dem sukzessiven Wert der Variable betrachtete. Cauchy hat im Gegensatz zu den beiden, die Derivation als Grundbegriff eingeführt. Mit diesem Begriff werden dann auch später die Differenziale definiert.

7.1 Konvergenz

Cauchy übersetzte die Frage der Konvergenz auf eine andere Ebene, nämlich auf die Sprache der Algebra der Ungleichungen. Dies erlaubte ihm die unterschiedlichen Konvergenzeigenschaften zu beweisen. Bis dahin war aber noch nicht bestätigt, dass die Rechnung auf den Begriffen der Grenze und der Konvergenz aufgestellt werden konnte. So hat auch noch Maclaurin berichtet, dass die Summe der Reihe eigentlich die Summe

ihrer partiellen Summen ist. Cauchy hat diese Formulierung als folgendermaßen beschrieben:

Für jede $\varepsilon > 0$ gibt es ein n , sodass für die Summe mit mehr als n Anfangsglieder der Reihe, die Differenz zwischen Gesamtsumme und diese Summe kleiner als ε ist. Aus dieser Definition leitete Cauchy den Beweis der Konvergenz für die geometrische Reihe ab. (vgl. Sikic, 1989, S.75).

7.2 Grenzwert und Stetigkeit

Cauchy definierte im „*Course d'analyse*“ die Begriffe des Grenzwerts und der Stetigkeit. Der Grenzwert wurde definiert als (zitiert nach (Sonar, 2009., S.506) vgl. auch (Bottazzini, 1986., S. 103)):

„Wenn die sukzessiven Werte derselben Veränderlichen sich einem festen gegebenen Wert so nähern, dass sie sich von diesem Wert so wenig als man nur will unterscheiden, dann heißt der feste Wert der Grenzwert aller anderen Werte.“

Die „unendlich kleine Größe“ wird definiert als (zitiert nach (Sonar, 2009, S. 506) vgl. auch (Bottazzini, 1986, S. 104)):

„Wenn die aufeinanderfolgenden numerischen Werte derselben Variablen unbegrenzt abnehmen, so dass sie unter jede gegebene Zahl fallen, dann wird die Variable zu einer Infinitesimalen oder eine infinitesimale Größe. Eine Variable dieser Art hat den Grenzwert Null.“

Die Stetigkeit einer Funktion ist definiert als (zitiert nach (Sonar, 2009, S. 506) vgl. auch (Bottazzini, 1986, S. 104)):

„Sei $f(x)$ eine Funktion der Variablen x und nimm an, dass für jedes x zwischen zwei Grenzen diese Funktion einen eindeutig bestimmten und endlichen Wert annimmt. Wenn man dann einem x zwischen den zwei Grenzen ein infinitesimales Inkrement α zuweist, dann wird der Zuwachs der Funktion durch die Differenz $f(x+\alpha) - f(x)$ gegeben, die gleichzeitig von der neuen Variablen α und von x abhängt. Unter dieser Voraussetzung heißt die Funktion $f(x)$ eine stetige Funktion dieser Variablen zwischen den beiden Grenzen, falls die numerischen Werte der Differenz $f(x+\alpha) - f(x)$ mit α unbegrenzt abnehmen.“

In dieser Definition kann man eine gewisse Zweideutigkeit erkennen. Die Begriffe „für alle x “ und „mit α unbegrenzt abnimmt“ können zwei unterschiedliche Bedeutungen haben. Eine davon ist „für jede x und jede ε gibt es ein δ “ oder „für jede ε gibt es ein δ , sodass für jede x ...“. Dadurch entsteht der Unterschied zwischen gewöhnlicher und einheitlicher Kontinuität. (vgl. Sikic, 1989, S. 76)

Cauchy hat ein Beispiel für solch eine stetige Funktion gefunden. Diese Funktion hat an allen Stellen die Ableitung 0, die Taylor Reihe konvergiert an allen Stellen, aber nur im Punkt Null koinzidiert sie mit der Funktion. So eine Funktion ist in Abbildung 24 gezeichnet:

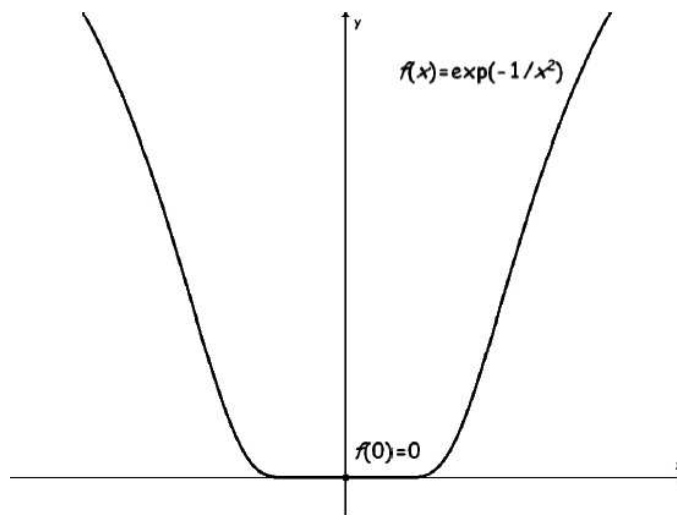


Abbildung 24: Cauchy Funktion: $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ ²⁸

Cauchy definierte die Funktion als (zitiert nach (Wußing, 2000, S. 237), (Cauchy, 1885, S.13)):

„Wenn veränderliche Zahlgrößen in solcher Weise untereinander zusammenhängen, dass man aus dem gegebenen Werte von einer Veränderlichen die Werte aller übrigen herleiten kann, so denkt man sich gewöhnlich diese verschiedenen Zahlgrößen vermittelt jener einen ausgedrückt. Jene eine nimmt dann den Namen: unabhängige Veränderliche an, während die übrigen, die mittelst der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückten Zahlgrößen, sogenannte Funktionen jener einen Veränderlichen sind.“

7.3 Die Konvergenz von Folgen und Reihen

Cauchy hat sich sehr genau mit dem Begriff der Konvergenz beschäftigt, den er im „Cours d'analyse“ analysierte. Zu diesem Thema gibt es heute noch zwei wichtige Sätze ((Sonar, 2009., S. 507) zitiert nach (Bottazzini, 1986, S. 109)):

Satz 1: *“ Falls für zunehmende Werte von x die Differenz $f(x + 1) - f(x)$ gegen einen Grenzwert k konvergiert, dann wird der Quotient $f(x)/x$ gleichzeitig gegen denselben Grenzwert konvergieren. “*

²⁸Brückler, 2009, S.111

Beweis (vgl. Bradley, Sandifer; 2009; S. 35-37):

Nehmen wir an, dass die Größe k endlich ist und ε eine beliebig große Zahl ist. Wegen der zunehmenden Werte von x konvergiert die Differenz

$$f(x+1) - f(x)$$

gegen Grenzwert k . Deswegen kann der Wert h genug groß sein, wenn x gleich oder größer als h ist. Die Differenz liegt immer zwischen zwei Grenzwerten $k - \varepsilon$ und $k + \varepsilon$.

Bezeichnen wir mit n irgendwelche Ganzzahlen, wird jede der Mengen

$$\begin{aligned} &f(h+1) - f(h), \\ &f(h+2) - f(h+1), \\ &\dots, \\ &f(h+n) - f(h+n-1) \end{aligned}$$

und ihre arithmetischen Mittel

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n}$$

zwischen $k - \varepsilon$ und $k + \varepsilon$ liegen. Dann haben wir

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n} = k + \alpha$$

wobei α ein Wert zwischen Grenzwerten $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ ist.

Nehmen wir $h+n = x$ an. Dann ist die vorige Gleichung gleich:

$$\frac{f(x) - f(h)}{x - h} = k + \alpha$$

Letztlich:

$$f(x) = f(h) + (x-h)(k + \alpha)$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(h)}{x} + \left(1 - \frac{h}{x}\right)(k + \alpha)$$

Nehmen wir an, dass h eine konstante Größe ist und x eine veränderliche, die gegen ∞ konvergiert. Die Mengen $\frac{f(h)}{x}$ und $\frac{h}{x}$ konvergieren gegen Grenzwert 0 und die ganze rechte Seite der Gleichung konvergiert gegen $k + \alpha$, wobei α immer zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegt. Das Verhältnis $\frac{f(x)}{x}$ hat für den Grenzwert die Menge zwischen $k - \varepsilon$ und $k + \varepsilon$. Dadurch sieht man, dass egal wie klein ε ist, der Grenzwert genau k wird. Mathematisch geschrieben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)].$$

Nehmen wir letztlich $k = \infty$ an. Sei H ein beliebig großer Wert. Man kann immer einen großen Wert h finden, sodass für x gleich oder größer als h , die Differenz

$$f(x+h) - f(x)$$

immer größer als H wird (Differenz konvergiert gegen ∞). Daraus folgt:

$$\frac{f(h+n) - f(h)}{n} > H$$

Falls $h+n = x$ ist, bekommt man folgende Ungleichung

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{f(h)}{x} + H \left(1 - \frac{h}{x}\right)$$

aus welcher folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} > H$$

wobei x gegen ∞ konvergiert.

Der Grenzwert von $\frac{f(x)}{x}$ ist somit größer als die Zahl H , egal wie groß er ist. Dieser Grenzwert ist unendlich groß.

Letztens nehmen wir $k = -\infty$ an. Um diesen Fall von vorhergehenden zu unterscheiden, reicht es zu zeigen, dass aufgrund des Grenzwerts $-\infty$ für die Differenz $f(x+1) - f(x)$,

die Differenz $[-f(x+1)] - [-f(x)]$ den Grenzwert $+\infty$ hat. Schließlich ist dann der Grenzwert von $\frac{-f(x)}{x}$ gleich $+\infty$ und der von $\frac{f(x)}{x}$ ist gleich $-\infty$.

□

Satz 2: „Ist $f(x)$ positiv für sehr große Werte von x und falls der Quotient $f(x+1)/f(x)$ für unbestimmt zunehmendes x gegen einen Grenzwert k konvergiert, dann wird der Ausdruck $(f(x))^{1/x}$ gleichzeitig gegen denselben Grenzwert konvergieren.“

Beweis (vgl. Bradley, Sandifer; 2009; S. 38-40):

Nehmen wir an, dass die Größe k endlich ist und ε eine beliebig große Zahl ist. Wegen der zunehmenden Werte von x konvergiert das Verhältnis

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

gegen k .

Deswegen kann der Wert h groß genug sein, wenn x gleich oder größer als h ist. Die Differenz liegt immer zwischen zwei Grenzwerten $k - \varepsilon$ und $k + \varepsilon$.

Bezeichnen wir mit n irgendeine Ganzzahl wird jede der Mengen

$$\frac{f(h+1)}{f(h)}, \frac{f(h+2)}{f(h+1)}, \dots, \frac{f(h+n)}{f(h+n-1)}$$

und ihr geometrisches Mittel

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)} \right]^{1/n}$$

zwischen $k - \varepsilon$ und $k + \varepsilon$ liegen. Dann haben wir

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)} \right]^{1/n} = k + \alpha$$

wobei α ein Wert zwischen den Grenzwerten $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ ist. Nehmen wir $h+n=x$ an. Dann ist die vorige Gleichung gleich:

$$\left[\frac{f(x)}{f(h)} \right]^{\frac{1}{x-h}} = k + \alpha$$

Letztlich:

$$f(x) = f(h)(k + \alpha)^{x-h}$$

$$[f(x)]^{1/x} = [f(h)]^{1/x} (k + \alpha)^{1 - \frac{x}{h}}.$$

Nehmen wir an, dass h eine konstante Größe ist und x eine veränderliche, die gegen ∞ konvergiert. Die Mengen $[f(h)]^{1/x}$ und $1 - \frac{h}{x}$ konvergieren gegen Grenzwert 1 und die ganze rechte Seite der Gleichung konvergiert gegen $k + \alpha$, wobei α immer zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegt. Das Verhältnis $[f(h)]^{1/x}$ hat für den Grenzwert die Menge zwischen $k - \varepsilon$ und $k + \varepsilon$. Dadurch sieht man, dass egal wie klein ε ist, der Grenzwert genau k wird. Mathematisch geschrieben:

$$\lim [f(x)]^{1/x} = k = \lim \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

Nehmen wir letztlich $k = \infty$ an. Sei H ein beliebig großer Wert. Man kann immer einen großen Wert h finden, sodass für x gleich oder größer als h , das Verhältnis

$$\frac{f(x+1)}{f(x)},$$

immer größer als H wird (Verhältnis konvergiert gegen ∞). Daraus folgt:

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)} \right]^{1/n} > H$$

Falls $h+n=x$ ist, bekommt man:

$$[f(x)]^{1/x} > [f(h)]^{1/x} H^{1 - \frac{h}{x}}$$

aus welcher folgt

$$\lim [f(x)]^{1/x} > H$$

wobei x gegen ∞ konvergiert.

Der Grenzwert von $[f(x)]^{1/x}$ ist somit größer als die Zahl H , egal wie groß er ist. Dieser Grenzwert ist unendlich groß.

□

Zum Satz 2 gibt es ein Beispiel, nämlich die Funktion $f(x) = e^x$. Dann ist

$f(x+1) = e^{x+1} = e \cdot e^x$. Daher ergibt sich:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e \cdot e^x}{e^x} = e =: k$$

Mit Hilfe des Satzes 2 folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x)^{1/x} = e =: k$$

Die zwei Sätze benötigte Cauchy um die Konvergenz der unendlichen Reihe zu definieren. (vgl. Sonar, 2009, S. 507-508).

Korollar: Cauchysche Konvergenzkriterium

„Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq m \geq n_0. \quad (19)$$

(Buchholz, Rudolph, 2017, S.38)

Ein zentraler Begriff in der Analysis ist auch die „Cauchy Folge“.

Definition:

„Eine Folge (a_n) in K heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein

$N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$.“

(Kanzow, 2010/11, S. 67)

Definition: Konvergente Folgen sind Cauchy Folgen

„Sei (a_n) eine konvergente Folge in K . Dann ist (a_n) auch eine Cauchy-Folge.

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein

$N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N$$

(a_n) ist damit eine Cauchy Folge.“ (Kanzow, 2010/11, S. 68)

Theorem: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, d.h. $\mathbb{R}$ ist vollständig.

(“Logische Grundlagen der Mathematik”, WS 2014/15, Timmermann, 2015, S.3;

<http://docplayer.org/48958027-Logische-grundlagen-der-mathematik-ws-2014-15.html>)

Beweis:

„ $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, weil es für jedes $a \in \mathbb{R}$ und jedes $K \in \mathbb{N}$ ein $x \in \mathbb{Q}$ gibt mit

$|a - x| < 1/K$. Ist $a = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$, so folgt $|a - x_n| < 1/K$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei $(a_m)_m$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $x_m \in \mathbb{Q}$ mit

$|a_m - x_m| < 1/m$. Wir zeigen:

- (i) $(x_m)_m$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$
- (ii) $(a_m)_m$ konvergiert mit $\lim_m a_m = \lim_m x_m = \lim_m (x_m)_m$.

Zu (i): Sei $K \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein m_0 mit $|a_m - a_{m'}| < 1/(3K)$ für alle $m, m' \geq m_0$, und für alle $m, m' \geq \max\{m_0, 3K\}$ folgt $|x_m - x_{m'}| \leq |x_m - a_m| + |a_m - a_{m'}| + |a_{m'} - x_{m'}| < 1/K$

Zu (ii): Setze $b := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Sei $K \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein n_0 mit $|x_n - b| < 1/(2K)$ für alle $n \geq n_0$, und für alle $n \geq \max\{n_0, 1/(2K)\}$ folgt $|b - a_n| \leq |b - x_n| + |a_n - x_n| < 1/K$.

□

(“Logische Grundlagen der Mathematik”, WS 2014/15, Timmermann, 2015, S.3;
<http://docplayer.org/48958027-Logische-grundlagen-der-mathematik-ws-2014-15.html>)

Cauchy hat auch den „Summensatz“ bewiesen, nach dem die Grenzfunktion einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen auch stetig ist. Das ist aus heutiger Sicht falsch. Bei genauerer Betrachtung kann die Konvergenz grob „gleichmäßig“ und „punktweise“ sein. Bei punktweiser Konvergenz streben die Werte einer Funktionenfolge f_n an der Stelle x_0 für $n \rightarrow \infty$ einen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ zu. Bei gleichmäßiger Konvergenz ist das etwas komplizierter. In dem Beispiel $f_n(x) := x^n$ wird das Intervall $[0,1]$ betrachtet (Abb.25).

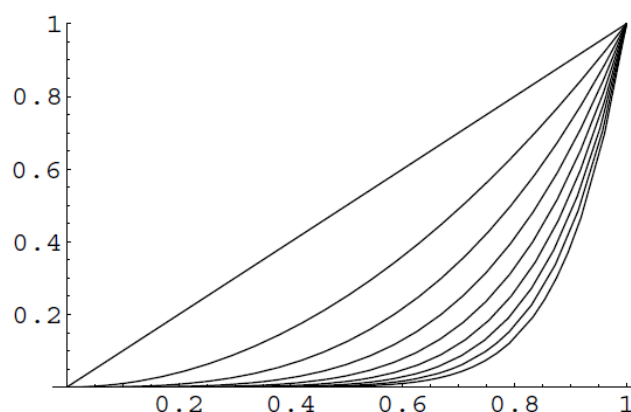


Abbildung 25: Graphen der Funktion $f_n(x) := x^n$ für $n=1, \dots, 9$ ²⁹

²⁹Sonar, 2009, S.509

Die punktweise Grenzfunktion ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0; 0 \leq x < 1 \\ f(x) &= 1; x = 1 \end{aligned}$$

Damit wurde gezeigt, dass alle Funktionen f_n stetige Funktionen sind, die Grenzfunktion ist aber unstetig. Die Folgenglieder f_n müssen sich in einem “ ε -Schlauch“ um die Funktion f befinden, wobei egal ist wie klein $\varepsilon > 0$ gewählt wurde. In der Abbildung 26 kann man diesen Sachverhalt sehen. Dann gilt der Satz: „Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig“. (vgl. Sonar, 2009, S. 509).

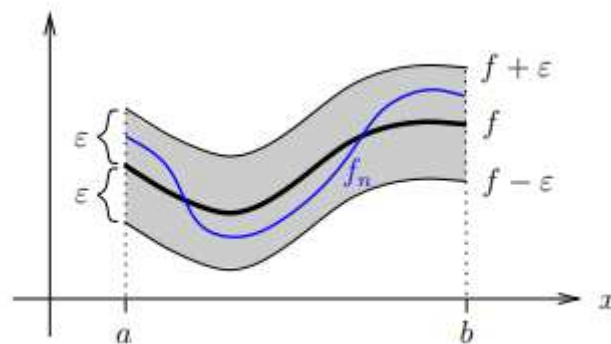


Abbildung 26: Beispiel einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge³⁰

7.4 Gleichmäßige Konvergenz

„Es wird eine Folge von reellwertigen Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots$, auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ betrachtet. Ist $\xi \in D$ und die Zahlenfolge $(f_n(\xi))$ konvergent, so heißt die Folge f_n konvergent im Punkt ξ . Wenn die Folge $(f_n(x))$ für jedes $x \in D$ konvergiert, dann ist durch

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

auf D eine Funktion $f(x)$ definiert. Man sagt, die Folge der Funktionen $f_n(x)$ konvergiert auf D punktweise gegen die Funktion $f(x)$. Bei festem $x \in D$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N , der von ε und von der Stelle x abhängt, so dass

³⁰Kanzow, 2011, S. 267

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N = N(x, \varepsilon)$$

gilt.

Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf D gegen die Funktion f , und schreibt dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ gleichmäßig auf } D$$

oder $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf D , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N(\varepsilon)$ existiert, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in D \text{ gilt.} \quad (\text{Walter, 2004, S.139})$$

7.5 Cauchy - Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

„Eine Folge von Funktionen $(f_n(x))$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf D , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ ist für } n, m \geq N \text{ und alle } x \in D \text{.} \quad \text{“}$$

(Walter, 2004, S.140)

Beweis

„Aus $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon / 2$ für $n \geq N$ und alle x folgt oberen Ausdruck.

Für jedes $\xi \in D$ ist dann $(f_n(\xi))$ eine Cauchyfolge. Nach dem Cauchy-Kriterium existiert $f(\xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi)$ ”punktweise” für jedes $\xi \in D$. Wenn $m \geq N$ fest gewählt wird erhalten wir:

$$\varepsilon \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_m(\xi) - f_n(\xi)| = |f_m(\xi) - f(\xi)|$$

Da das für jedes $\xi \in D$ und jedes $m \geq N$ gilt, konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig auf D gegen f .“ (Walter, 2004, S.140)

□

Wie N bei gleichmäßiger Konvergenz gewählt wird, hängt nur von ε ab. Bei punktweiser Konvergenz hängt es von ε als auch von x ab. Die zwei Konvergenzen unterscheiden sich in der Abhängigkeit der zwei Variablen:

Gleichmäßige Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in D_f \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Punktweise Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in D_f \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die punktweise Konvergenz, aber die Umkehrung gilt nicht.

(vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichm%C3%A4%C3%9Fige_Konvergenz)

Mit dem folgenden Satz kann man zeigen, dass eine punktweise konvergente Funktionenfolge nicht gleichmäßig konvergiert. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f_n(x) := x^n$ im Intervall $[0,1]$ (siehe Abbildung 25). Da diese Funktion unstetig ist, kann die Konvergenz nach folgendem Satz in $[0,1]$ nicht gleichmäßig sein. (vgl. Appell, 2009, S.451).

Satz: „Die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots$, seien auf der Menge $D \subset \mathbb{R}$ erklärt, und es konvergierte $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig in D . Sind die f_n an der Stelle $\xi \in D$ (bzw. in ganz D) stetig, so gilt dasselbe für f . Das bedeutet, dass der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen stetig ist. „(Walter, 2004, S.141)

Beweis

„Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und fixiert. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein Index m mit

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in D.$$

Die Funktion $f_m(x)$ ist in ξ stetig und deswegen gibt es zu dem gewählten ε ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sodass

$$|f_m(x) - f_m(\xi)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - \xi| < \delta$$

gilt. Für $|x - \xi| < \delta$ ist:

$$|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(\xi)| + |f_m(\xi) - f(\xi)| < 3\varepsilon.$$

Damit ist die Stetigkeit von f an der Stelle ξ bewiesen.“

□

(Walter, 2004, S.141)

7.6 Ableitung

Für Cauchy wie auch für Newton ist die Ableitung der Limes des Verhältnisses des Differenzenquotienten. Seine Definition basiert aber auf einem neuen Konzept des Limes. So ist erst mit Cauchy die Ableitung präzise und streng definiert. Um die Ableitung zu definieren betrachtete Cauchy den Limes des Verhältnisses der Differenzen:

$$[f(x+i) - f(x)]/i$$

bei einem Kontinuitätsintervall von $f(x)$.

Cauchy beobachtete, wie auch andere Mathematiker vor ihm, dass obwohl Zähler und als auch Nenner von $[f(x+i) - f(x)]/i$ gegen Null gehen, dass Verhältnis selbst zu einer anderen Grenze konvergieren kann und dieses entweder positiv oder negativ ist. Wenn der Limes existiert, hat sie einen bestimmten Wert für jeden bestimmten Wert von x , aber variiert mit x . Das ist eine neue Funktion der Variable x . (vgl. Grabiner, 1981, S. 114).

Cauchy definierte im Jahr 1829 in den „Leçons sur le calcul différentiel“ die Ableitung als (Sonar, 2009, S. 510) zitiert nach (Lützen, 1999, S.197)):

„Wenn die Function $f(x)$ zwischen zwei gegebenen Grenzen der Veränderlichen x continuierlich bleibt, und wenn man der Veränderlichen einen zwischen diesen Grenzen liegenden Werth beilegt, so wird ein der Veränderlichen ertheiltes unendlich kleines Increment auch eine unendlich kleine Veränderung der Function zur Folge haben. Also werden, wenn man $\Delta x = i$ setzt, die beiden Glieder des Differenzenverhältnisses:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

unendlich kleine Größen sein. Aber während sich diese beiden Glieder unbestimmt und gleichzeitig der Grenze Null nähern, wird ihr Verhältnis selbst gegen eine andere Grenze, sie sei positiv oder negativ, convergieren können, welche das letzte Verhältnis der unendlich kleinen Differenzen Δy , Δx sein wird. Diese Grenze, oder dieses letzte Verhältnis, hat, wenn es existirt, für jeden particulären Wert von x einen bestimmten Werth; aber es variiert mit x ...; nur wird die Form der neuen Function, welche die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

ist, von der Form der gegebenen $y = f(x)$ abhängig sein. Um diese Abhängigkeit auszudrücken, gibt man der neuen Funktion den Namen abgeleitete (derivierte) Funktion, und bezeichnet sie vermittelt eines Accents durch: y' oder f' .“

Der erste strenge Beweis der Ableitung ist folgender ((Grabiner, 1981, S. 168-169) zitiert nach (Cauchy, Oeuvres, Series 2, Vol. 4, S.44-45)):

„Wenn die Funktion $f(x)$ kontinuierlich zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ ist und wenn wir annehmen, dass A der kleinste Wert und B die größte Wert von $f'(x)$ in diesem Intervall ist, liegt das Verhältnis der endlichen Differenzen:

$$[f(X) - f(x_0)] / (X - x_0)$$

zwischen A und B. „

Beweis:

„Seien δ und ε zwei sehr kleine Nummer. Die erste ist so gewählt, sodass für alle numerische Werte von i kleinere als δ und für irgendwelche Wert von x zwischen Grenzen x_0, X wird das Verhältnis:

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

größer als $f'(x) - \varepsilon$.

Wenn zwischen den Grenzen x_0, X , $n-1$ neue Werte von Variable x eingeführt werden, dann ist $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, sodass die Differenz $X - x_0$ in Elemente

$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$ unterteilt ist. Alle Elemente haben das selben Vorzeichen und die gleichen numerischen Werte kleinere als δ . Das gilt wenn von den Brüchen

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \dots, \frac{f(X) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}} \quad (20)$$

das erste zwischen den Grenzen $f'(x_0) - \varepsilon, f'(x_0) + \varepsilon$ enthalten ist, das zweite zwischen $f'(x_1) - \varepsilon, f'(x_1) + \varepsilon, \dots$. Alle Brüche sind größer als $A - \varepsilon$ und kleiner als $B + \varepsilon$.

Wenn die Summe ihrer Zähler durch die Summe ihrer Nenner geteilt wird, erhält man einen mittleren Bruchteil, der zwischen dem Kleinsten und dem Größten erhalten ist.

Die Gleichung (19) liegt zwischen den Grenzen $A - \varepsilon$ und $B + \varepsilon$ und egal wie klein das ε ist, wird die Gleichung (19) zwischen A und B erhalten. „

□

((Grabiner, 1981, S. 168-169) zitiert nach (Cauchy, Oeuvres, Series 2, Vol. 4, S.44-45))

7.7 Integral

Cauchy definierte das Integral als die Grenze der Summen $\sum f(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)$. Er hat die Stetigkeit von $f(x)$ vorausgesetzt und damit gezeigt, dass alle solche Summen gegen den selben Wert konvergieren, nämlich gegen den Wert, den wir Integral nennen. (Sikic, 1989, S.80). Der Schlüssel zu seiner Theorie ist der Beweis für die Existenz des bestimmten Integrals einer kontinuierlichen Funktion. Er hat bewiesen dass das Integral die Umkehrung der Ableitung ist. (vgl. Grabiner, 1981, S. 140). Bernoulli und Euler haben das „unbestimmte“ Integral durch Umkehrung der Ableitung interpretiert und durch einsetzen der Grenzen konnten sie das „bestimmte“ Integral gewinnen. Cauchy dagegen hat einen neuen Integralbegriff für das bestimmte Integral entwickelt. Er teilte ein Intervall $[a, b]$ in n Teile indem er die Punkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ einführte (Abb. 27). (vgl. Sonar, 2009, S.511).

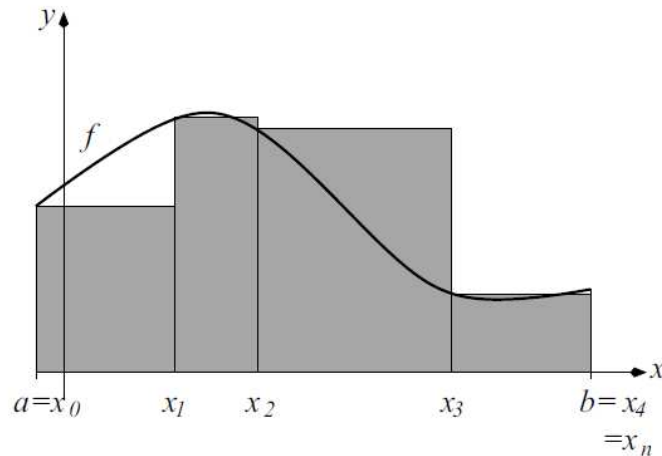


Abbildung 27: Cauchy-Integral³¹

Zur Existenz der Definition des Integrals folgt (Grabiner, 1981, S.171-174) der Beweis (Cauchy, Oeuvres, Series 2, Vol.4, S.122-125):

Nehmen wir an, dass die Funktion $f(x)$ mit Bezug auf die Variable x zwischen zwei endlichen Grenzen $x = x_0, x = X$ stetig ist. Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ neue Werte von x , die zwischen diesen Grenzen liegen und nehmen wir an, dass sie entweder erhöht oder verringert zwischen zwei Grenzen sind. Diese Werte werden dazu verwendet die Differenz $X - x_0$ in Elementen:

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1} \quad (21)$$

mit gleichem Vorzeichen zu teilen.

Danach wird jede von diesen Elementen mit $f(x)$ ausmultipliziert, nämlich $x_1 - x_0$ mit $f(x_0)$, $x_2 - x_1$ mit $f(x_1)$, ... und am Ende $X - x_{n-1}$ mit $f(x_{n-1})$. So erhält man:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \quad (22)$$

Wenn die Zahlwerte von diesen Elementen sehr klein werden und die Anzahl n sehr groß, dann wird die Art der Teilung nur eine unbedeutende Wirkung auf den Wert von S haben.

Dies kann tatsächlich nachgewiesen werden.

³¹Sonar, 2009, S.511

Wenn wir annehmen, dass alle Elemente von Differenz $X - x_0$ auf einen Einigen reduziert wurden, dann erhält man:

$$S = (X - x_0)f(x_0) \quad (23)$$

Wenn wir aber stattdessen die Ausdrücke (21) für die Elemente der Differenz $X - x_0$ verwenden, wird der Wert von S in diesem Fall für die Gleichung (22) gleich der Summe der Elemente ausmultipliziert mit einem Mittelwert der Koeffizienten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$ sein.

Wenn die Koeffizienten $[f(x_k)]$ außerdem besondere Werte des Ausdruckes $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$ für die Werte θ zwischen 0 und 1 sind, kann man die Gleichung (22) als folgende umschreiben:

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)] \quad (24)$$

wobei θ ein Zahl (nicht negativ) kleiner als 1 ist.

Da man aus der vorher benutzten Art der Teilung in eine andere kommt, in welcher die numerischen Werte der Elementen von $X - x_0$ noch immer klein sind, genügt es jeden Ausdruck von (21) in neue Elemente zu teilen. Dieser Ausdruck hat die Form $(x_k - x_{k-1})$. Die rechte Seite der Gleichung (22), nämlich $(x_1 - x_0)f(x_0)$, wird durch die Summe von ähnlichen Produkten ersetzt, für welche der Ausdruck $(x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)]$ substituiert wurde, wobei θ kleiner als 1 ist. Damit ergibt sich eine Relation zwischen dieser Summe und dem Produkt $(x_1 - x_0)f(x_0)$. Dieser ist ähnlich zur Relation, der zwischen den Werten von S existiert. Man bekommt bei der neuen Art der Teilung der Werte von S indem man alle Werte auf der rechten Seite auf diese Weise substituiert:

$$S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] \quad (25)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (25):

$$\begin{aligned}
f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] &= f(x_0) \pm \varepsilon_0 \\
f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] &= f(x_1) \pm \varepsilon_1 \\
&\dots \\
f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] &= f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}
\end{aligned}$$

kann man ableiten:

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \dots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}] \quad (26)$$

Ausmultipliziert ergibt dies:

$$\begin{aligned}
S &= (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + \\
&(X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \dots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})
\end{aligned} \quad (27)$$

Wenn die Elemente $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$ sehr kleine Werte haben, dann wird jede Menge $\pm \varepsilon_0, \pm \varepsilon_1, \dots, \pm \varepsilon_{n-1}$ sehr nah zu Null und das Gleiche passiert auch mit der Summe $\pm \varepsilon_0(x_1 - x_0), \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1), \dots, \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$, die gleichwertig zum Produkt von $X - x_0$ bei einen Durchschnitt zwischen diesen Mengen (ε_k) ist. Indem die Gleichungen (22) und (27) verglichen wurden, sieht man, dass sich der Wert von S nicht merklich ändert. Dies ist der Fall, wenn dieser Wert durch eine Art der Teilung, in der die Elemente von der Differenz $X - x_0$ sehr kleine numerische Werte haben, zur andere Art der Teilung übergeht, in dem jeder von diesen Elementen weiter in andere unterteilt wurde.

Jetzt werden zwei getrennte Arten der Teilung der Differenz $X - x_0$ betrachtet, in dem jeder der Elemente sehr kleine numerische Werte hat. Die zwei Arten können durch eine Dritte verglichen werden. Diese wird so gewählt, dass jedes Element entweder von der ersten oder von der zweiten Art gebildet wird, indem mehrere Elemente zusammengebracht werden. Um das zu erfüllen, genügt es für jeden Wert von x zwischen den Grenzen x_0 und X aus den ersten beiden Arten die dritte Art zu benutzen. Der Wert von S wird durch Übergehen von erster oder zweiter Art in die Dritte nur sehr wenig geändert. Wenn die Elemente der Differenz sehr klein werden, hat die Art der Teilung unmerklichen Einfluss auf den Wert von S. Wenn wir die numerischen Werte dieser Elemente verringern lassen, während ihre Anzahl steigt, ist der Wert von S letztlich konstant. Anders gesagt, er erreicht schließlich ein bestimmten Limes, der eindeutig von der Form der Funktion $f(x)$ und von dem Grenzwert von x_0, X der

Variable x abhängt. Diesen Limes nennt man bestimmtes Integral. (vgl. Cauchy, Oeuvres, Series 2, Vol.4, S.122-125).

7.8 Der Mittelwertsatz

Ein weiterer großer Satz in Analysis kommt von Cauchy, nämlich seine Interpretation des Mittelwertsatzes (Hairer, Wanner, 2010, S. 248):

„Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a)."$$

Beweis:

„Es seien m und M das Minimum bzw. Maximum von $f(x)$ auf $[a, b]$, d.h. es gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Durch Teilen mit $(b - a)$ ergibt sich:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Quotient $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$ liegt zwischen $m = f(u)$ und $M = f(U)$. Mit dem Satz von Bolzano³² ergibt sich die Existenz eines $\xi \in [a, b]$ ab, für das der Wert gleich dem $f(\xi)$ ist. Damit ist die Anfangsgleichung erfüllt.“

□

(Hairer, Wanner; 2010, S.248).

7.9 Satz von Cauchy

„Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, die überall positiv (oder überall negativ) ist. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx."$$

(Hairer, Wanner; 2010, S. 248)

³² Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls $f(a) < c$ und $f(b) > c$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$. (Hairer, Wanner; 2010, S. 223)

Beweis:

„Nehmen wir an, es gilt $g(x) \geq 0$ für alle x . Dann ist:

$$m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x) \text{ für alle } x \in [a, b]$$

wobei m und M Minimum bzw. Maximum von $f(x)$ sind. Der Rest des Beweises ist gleich wie bei dem Mittelwertsatz. „

□

(Hairer, Wanner; 2010, S. 249).

8 Jean Baptiste Joseph de Fourier

Joseph Fourier wurde im Jahre 1768 in Auxerre geboren und ist im Jahre 1830 in Paris gestorben (Abb.28).



Abbildung 28: Jean Baptiste Joseph Fourier

[Portrait von Julien Léopold Boilly, ca. 1823]

Mit nur neun Jahren begann Joseph Fourier seine Ausbildung in der Militärschule in Auxerre. Da sein Vater ein Schneider war, konnte Joseph nicht in die Armee. Als er zehn Jahre alt war, starben seine Eltern und Joseph wurde von Verwandten übernommen. Mit 18 Jahren bekam er die Stelle als Professor in Auxerre. Ein Jahr später trat er in den Benediktiner Orden ein, wo er als Mathematiklehrer unterrichten wollte. Mit 21 Jahren merkte Joseph, dass er sich immer weiter von der Mathematik entfernte und verließ das Kloster. Danach studierte er Mathematik. Im Jahre 1797 übernahm er die Stelle als Professor für Analysis und Mechanik an der Ecole Polytechnique. Dort wurde er Nachfolger von Lagrange, der sein Lehrer war. (Wußing, 2000, S. 242). Im Jahre 1798 trat er in die Gruppe der Wissenschaftler ein, die Napoleon auf dessen Ägypten-Feldzug begleiteten. (vgl. Strick, 2012, S. 2). In dieser Expedition übernahm er die Position als Sekretär auf dem „Institut d’Egypte“. Während dieser Reise schrieb er auch mehrere Studien über mathematische Gleichungen und über Mechanik. Im Jahre 1801 kehrte er zurück nach Frankreich, um seiner Stelle als Professor weiter nachzugehen, aber Napoleon gab ihm viele administrative Aufgaben, die eine große Belastung für ihn

darstellten. Nach Napoleons Niederlage hatte Joseph keine feste Stelle. Im Jahre 1822 bekam er endlich die feste Stelle als Sekretär der Pariser Akademie. Sein Hauptwerk „*Théorie analytique de la chaleur*“ (Analytische Theorie der Wärme) wurde auch in diesem Jahr veröffentlicht (Abb.29). Es handelt sich dabei um das erste Werk, in dem die Infinitesimalrechnung für weitere physikalische Phänomene benutzt wurde. Damit begann die Zeit der mathematischen Physik. (vgl. Wußing, 2000, S.242-243).

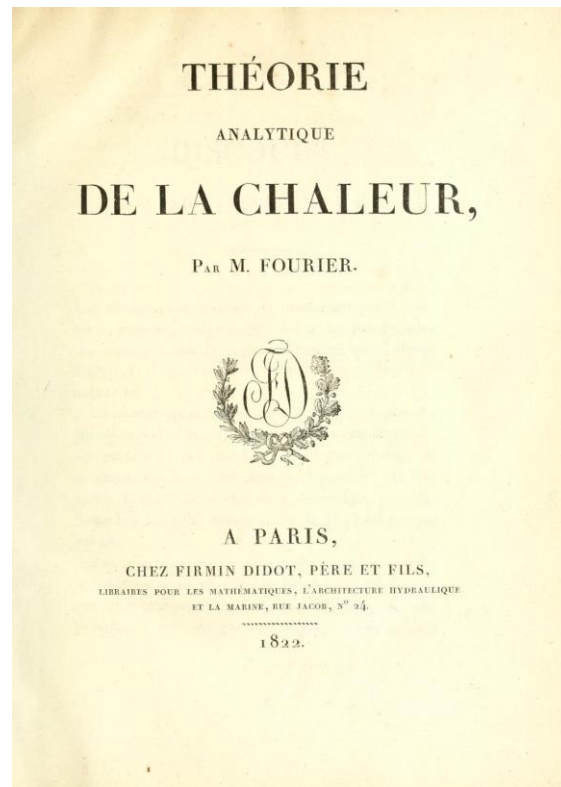


Abbildung 29: „Théorie analytique de la chaleur“³³

Fourier wollte an verschiedenen Punkten eines Körpers die Abhängigkeit zwischen Temperatur und deren zeitlichen Änderung berechnen. Er beschäftigte sich mit der Frage, wann eine Funktion durch eine unendliche trigonometrische Reihe dargestellt werden kann und kam zum Ergebnis, dass es jede beliebige sein könnte:

³³Zugriff am 03.09.2018: <https://archive.org/details/thorieanalytiq00four>

*„§219: Die Coefficienten der Entwicklung als bestimmte Integrale.
 Von den bisherigen Entwicklungen für ungerade Functionen können
 wir leicht zu der beliebiger continuirlicher oder discontinuirlicher, ja
 sogar arbiträr veränderlicher übergehen. Wir haben dazu nur sorgfältig
 die Coefficienten der einzelnen Sinusse zu untersuchen.“*

(Fourier 1884, S. 146)

*„§226: Functionen, die auf verschiedenen Strecken verschiedenen Gesetzen
 folgen. Durch die vorstehend entwickelte Analyse haben wir die Mittel bekommen,
 irgend eine Function in eine nach Sinussen oder Cosinussen
 der Vielfachen ihres Arguments fortschreitende Reihe zu entwickeln.
 Angewandt aber haben wir sie bis jetzt nur auf die Fälle, wo
 die betreffenden Functionen in einem Intervall und in diesem in ganz
 bestimmter Weise variirten. Wir dehnen sie jetzt auf Fälle aus, wo
 die Functionen in mehreren Intervallen betrachtet werden und wo sie
 in einem Intervall anders als in andern beschaffen ist.“*

(Fourier 1884, S. 155)

*„§235: Daraus folgt hinsichtlich der Entwicklung von Functionen in
 trigonometrische Reihen, dass, wenn man den Verlauf einer Function
 $f(x)$, deren Werte in einem bestimmten Intervall $x = 0$ bis $x = X$
 alle gegeben sind, durch eine Curve darstellt, man stets diese Function
 (. . .) in eine Reihe entwickeln kann, die entweder nur Sinusse oder
 nur Cosinusse oder Sinusse und Cosinusse enthält.“*

(Fourier 1884, S. 166)

„Man kann (. . .) schon den Schluss ziehen, dass keine einzige Function existirt, die nicht wenigstens in einem Teil ihres Verlaufs durch eine bestimmte trigonometrische Reihe ihre Darstellung findet, in den verschiedenen Teilen des Verlaufs derselben kann ihre Entwicklung eine verschiedene sein, hat sie aber nicht gerade auf einer endlichen Strecke unendlich viele Unstetigkeitsstellen, so gilt jede Entwicklung in einem endlichen Stück ihres Verlaufs.“

(Fourier 1884, S. 429)

Jede Fourier Reihe ist eine trigonometrische Reihe, aber die Umkehrung gilt nicht immer. Fourier begann seine Untersuchungen wie fast alle Mathematiker dieser Zeit mit dem Problem der schwingenden Seite. Viele haben sich mit der Herleitung und der Lösung beschäftigt, aber erst Fourier schaffte es, eine vollständige Lösung zu finden. (Sonar, 2009, S. 473-474).

8.1 Fourier-Reihen und ihre Bedeutung für die Analysis

Fourier hat in seinem Buch „*Théorie analytique de la chaleur*“ die Reihen

$$\varphi(x) = a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x + d \sin 4x + \dots$$

mit der Taylor-Reihe

$$\varphi(x) = x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi''(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi'''(0) + \dots$$

verglichen. Damit bekommt man unendlich viele Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a, b, c, d,... Fourier kümmerte sich nicht darum, ob die Taylor-Reihe eine andere Funktion darstellen lässt oder ob Konvergenzprobleme auftreten. Während des Lösens der Differentialgleichungen stellte er fest, dass die Koeffizienten a, b, c, d,... durch Integrale darstellbar sind. (vgl. Sonar, 2009, S. 479).

Heute schreibt man die Fourier-Reihe einer 2π -periodischen Funktion f als eine unendliche Reihe der Form

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (28)$$

wobei die Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; k = 1, 2, 3, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx; k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (29)$$

gegeben sind. (vgl. Sonar, 2009, S. 479).

Mit einer solchen Reihe können sich verschiedene Funktionen, die bis dahin nicht bekannt waren, darstellen lassen. Fourier glaubte, dass auch die Funktionen, für die auf manchen Stellen keine Ableitung existiert (Abb. 30) oder die unstetig sind (Abb. 31) außer auf den Unstetigkeitsstellen auch durch eine solche Reihe darstellbar sind. (Dadic, 1992, S. 152).

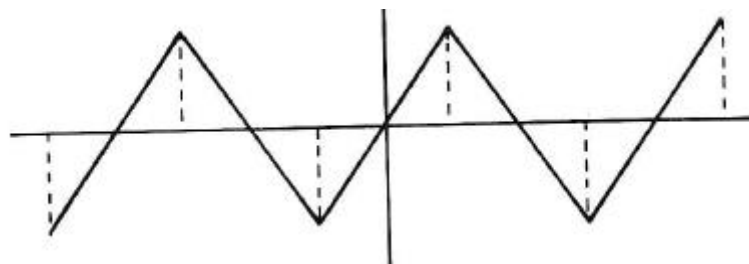


Abbildung 30: Funktion, die nicht an allen Stellen differenzierbar ist³⁴

³⁴Dadic, 1992, S. 152

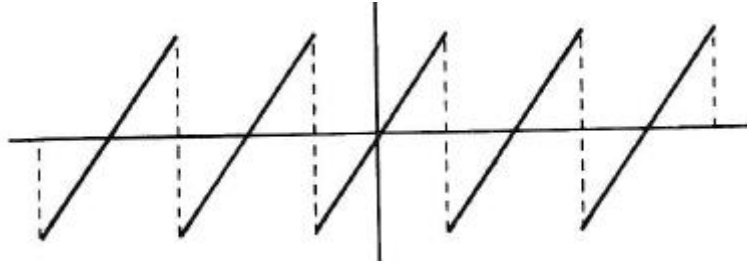


Abbildung 31: Unstetige Funktion³⁵

Heute ist bekannt, dass dem nicht so ist. Deswegen fragt man sich, wann eine Funktion $F = f$ als Fourier-Reihe darstellbar ist.

Cauchy glaubte, dass es jede Funktion ist, die konvergiert. Lejeune Dirichlet (1805-1859) zeigte jedoch etwas anderes.

Wenn eine Funktion $f(x)$ integrierbar ist, kann man die Fourier-Reihe (28) mit den Koeffizienten (29) aufstellen. Es kann sein, dass die Reihe nicht konvergiert oder konvergiert aber nicht gegen $f(x)$. Wenn eine Reihe aber gleichmäßig konvergiert, konvergiert sie gegen $f(x)$. (vgl. Wußing, 2000, S. 246). So formulierte Dirichlet seine Bedingungen ((Sonar, 2009, S. 479) nach (Dauben, 1979, S. 9)):

„Die vorstehenden Überlegungen beweisen rigoros, dass wenn eine Funktion $\varphi(x)$ (bei der alle Werte endlich und eindeutig bestimmt sein sollen) nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten zwischen den Grenzen $-\pi$ und π aufweist und wenn sie nur eine feste Anzahl von Maxima und Minima zwischen diesen Grenzen hat, dann ist die Reihe

$$\frac{1}{2\pi} \int \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \left\{ \cos x \int \varphi(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cos 2x \int \varphi(\alpha) \cos 2\alpha d\alpha + \dots \right\} \\ \left\{ \sin x \int \varphi(\alpha) \sin \alpha d\alpha + \sin 2x \int \varphi(\alpha) \sin 2\alpha d\alpha + \dots \right\}$$

³⁵Dadic, 1992, S.152

(bei der die Koeffizienten bestimmte Integrale sind, die von $\varphi(x)$ abhängen)

konvergent und hat einen Wert von

$$\frac{1}{2}(\varphi(x+\varepsilon) + \varphi(x-\varepsilon))$$

wobei ε eine unendlich kleine Zahl ist.“

Laut dem Gedanken von Fourier sind die periodischen Funktionen, die durch unendliche Reihen von einfachen periodischen Funktionen darstellbar sind, nur halbwegs erhalten. (vgl. Wußing, 2000, S. 246). Dirichlet war selbst unzufrieden mit den Voraussetzungen und suchte weitere Verschärfung. (vgl. Sonar, 2009, S. 480).

Er hat eine einzigartige Funktion gefunden, die sich so unregelmäßig benimmt, dass man sie nicht durch einen mathematischen Ausdruck aufstellen kann. Wenn x rational ist, sei $y = c$, und wenn x irrational ist, sei $y = d \neq c$. Für eine solche Funktion existiert kein Wert von x für welche sie stetig ist. Damit wurde widerlegt, dass jede Funktion einen formalen mathematischen Ausdruck hat, wie Euler damals gedacht hatte. Dirichlet hat eine neue Definition der Funktion eingeführt (vgl. Dadic, 1992, S.152):

„ Falls sich Variable y nach Variable x so verhält, dass immer wenn eine numerische Wert für x gestellt wird, gibt es ein Regel mit dem einen eindeutiger Wert von y gestellt ist. Y ist eine Funktion von unabhängige Variable x .“

Viele Fragen blieben noch offen und zum Teil löste sie Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1886), der das Integral sauberer definiert hat. Im Jahre 1873 fand Paul du Bois-Reymond eine stetige Funktion, deren Fourier-Reihe divergiert. (vgl. Sonar, 2009, S.480).

8.2 Komplexe Form der Fourierreihe

Für die nächsten beiden Kapitel wurde das Buch „Mathematische Methoden in der Physik“ von Lang und Pucker herangezogen. (vgl. Lang, Pucker, 2016, S.499-500).

Sinus und Kosinus Funktionen können durch Exponentialfunktionen mit imaginärem Anteil ausgedrückt werden:

$$\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$$

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$$

Damit ist die Fourierreihe:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + c_{-2} e^{-2ix} + \dots$$

wobei a_n und b_n ausgerechnet werden können. Es gilt:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(a_1 - ib_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)(\cos x - i \sin x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-ix}$$

Die Komplexe Form der Fourierreihe ist:

$$FR[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) e^{-inx}$$

Für Perioden (a,b) gilt:

$$FR[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n x / (b-a)}$$

$$c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx f(x) e^{-i2\pi n x / (b-a)}$$

Die Koeffizienten c_n kann man für negative Indizes definieren. Koeffizienten c_n , a_n und b_n können auch komplex sein. Eine Fourierreihe einer reellen Funktion ist reell. Folgende Eigenschaften gelten:

Für reelle Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) = \overline{f(x)} &\Leftrightarrow c_n = \overline{c_{-n}} \\ a_n = c_n + c_{-n} &= 2\operatorname{Re}(c_n) \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) &= -2\operatorname{Im}(c_n) \end{aligned}$$

Für imaginäre Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) = -\overline{f(x)} &\Leftrightarrow c_n = -\overline{c_{-n}} \\ a_n = c_n + c_{-n} &= 2i\operatorname{Im}(c_n) \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) &= 2\operatorname{Re}(c_n) \end{aligned}$$

Für symmetrische Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) = f(-x) &\Leftrightarrow c_n = c_{-n} \\ a_n = 2c_n, b_n &= 0 \end{aligned}$$

Für antisymmetrische Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) = -f(-x) &\Leftrightarrow c_n = -c_{-n} \\ a_n = 0, b_n &= 2ic_n \end{aligned}$$

8.3 Fourier Kosinus- und Sinusreihe

Funktionen mit speziellen Eigenschaften sind:

Gerade (symmetrisch): $f(x) = f(-x)$

Ungerade (antisymmetrisch): $f(x) = -f(-x)$

Jede Funktion kann in einen geraden und einen ungeraden Teil zerlegt werden:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \equiv f_+(x) + f_-(x)$$

Wenn man die Funktion mit einer Fourierreihe vergleicht, sieht man, dass der gerade Anteil der Kosinus-reihe gehört und der ungerade Anteil der Sinus-Reihe. So gilt für gerade Funktionen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f_+(x) \cos(nx) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx f_+(x) \cos(nx)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f_+(x) \sin(nx) = 0$$

Die geraden Funktionen im Periodizitätsintervall $(-L, L)$ werden durch die Fourier-Kosinus-Reihe dargestellt:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$FKR[f](x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_n a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Die ungeraden Funktionen im Periodizitätsintervall $(-L, L)$ werden durch die Fourier-Sinus-Reihe dargestellt:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$FSR[f](x) = \sum_n b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Die Integration wird nur auf einer Hälfte des Intervalls durchgeführt, weil aufgrund der Symmetrie die andere Hälfte gleich groß ist. In Abbildung 32 ist eine periodische Funktion $f(x)=x$ gegeben. Es handelt sich um eine antisymmetrische und eine symmetrische Fortsetzung dieser Funktion.

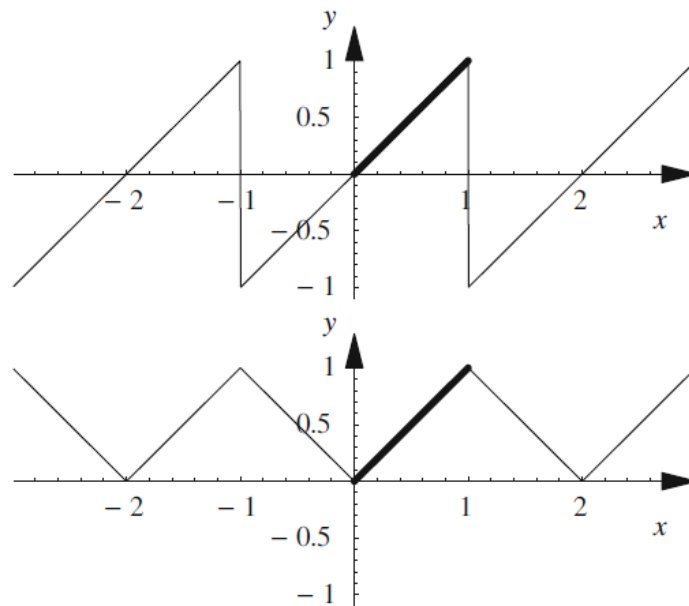


Abbildung 32: Die Funktion $f(x) = x$ mit Periode $(-1, 1)$ ³⁶

Dadurch sieht man, dass man die Funktionen, die in einem Intervall gegeben sind, entweder durch Sinus-Funktionen oder durch Kosinus-Funktionen als Reihe dargestellt werden können.

8.4 Anwendungen der Fourier Analysis in Physik

In der Physik gab es viele Probleme, die ohne das Wissen der Infinitesimalrechnung nicht lösbar gewesen wären. Die Mathematische Analysis hat geholfen diese physikalischen Probleme zu lösen. Fourier war der erster, der diesen Zusammenhang genutzt hat. So hat er mit den Kenntnissen über Wärmetheorie die partiellen Differentialgleichungen gefunden, die er mit Hilfe unendlicher trigonometrischer Reihen gelöst hat. Euler führte im 18. Jahrhundert einen genaueren Begriff der Funktion ein, jedoch kannte er zu diesem Zeitpunkt noch nicht. Fourier schaffte dies in dem er wie oben schon kurz erwähnt wurde, die Wärmetheorie studierte. (vgl. Dadic, 1992, S.151-152). Die Fourier-Reihe verwendete er zur Darstellung von periodischen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Dazu betrachtet man einen dünnen Kreisring der Länge 2π . Sei $\theta \in [0, 2\pi]$ der Ort auf dem Kreis, wobei θ und $\theta + 2\pi$ dieselben Punkte darstellen. Sei $f(t, \theta)$ die

³⁶Lang, Pucker, 2016, S.504

Temperaturfunktion zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ am Ort θ . Der Temperaturverlauf im Kreis ist gegeben durch die folgende Wärmegleichung (vgl. Forster, 2011, S.8):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

$$f(0, \theta) = f_0(\theta)$$

Die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung sind folgende Funktionen:

$$F_n(t, \theta) = e^{-n^2 t} \cos(n\theta), n \geq 0$$

$$G_n(t, \theta) = e^{-n^2 t} \sin(n\theta), n > 0$$

Auch alle endlichen Linearkombinationen von diesen Lösungen sind wieder Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

$$f(t, \theta) = \sum_n a_n F_n(t, \theta) + \sum_n b_n G_n(t, \theta)$$

mit Koeffizienten $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

Fourier wollte f_0 in einer Exponentialreihe entwickeln damit er die Koeffizienten abhängig in dieser Reihe erhält:

$$f_0(\theta) \sim \sum_n a_n \cos(n\theta) + \sum_n b_n \sin(n\theta)$$

mit der Lösung:

$$f(t, \theta) \sim \sum_n a_n e^{-n^2 t} \cos(n\theta) + \sum_n b_n \sin(n\theta)$$

(vgl. Forster, 2011, S.9)

Die Fourier Analysis spielt eine wichtige Rolle in mathematischen Methoden der Physik. In der Natur gibt es viele periodische Funktionen. Die Bekanntesten sind in Erdrotation, Licht, Ton, etc. enthalten. Alle Beispiele sind Schwingungen und die Periode entspricht einer bestimmten Zeitdauer. Ein Beispiel ist der Temperaturverlauf auf einem Metallring. In diesem Fall ist die Periode ein Winkel oder eine Länge. Mit Hilfe der Fourierreihe werden diese periodischen Funktionen nach ihren Teilfrequenzen zerlegt. Das passiert

auch mit dem Prisma wenn der Lichtstrahl auf die Oberfläche des Prismas einfällt. Die Lichtbrechung ist frequenzabhängig und deswegen wird der Strahl zerlegt. Unter welchem Winkel das sein wird hängt von der Frequenz des Anteils des Strahles ab (Abb.32). Diese Methode heißt Fourieranalyse und die Summe der Funktionenkomponenten heißt Fouriersynthese. (vgl. Lang, Pucker, 2016, S.489).

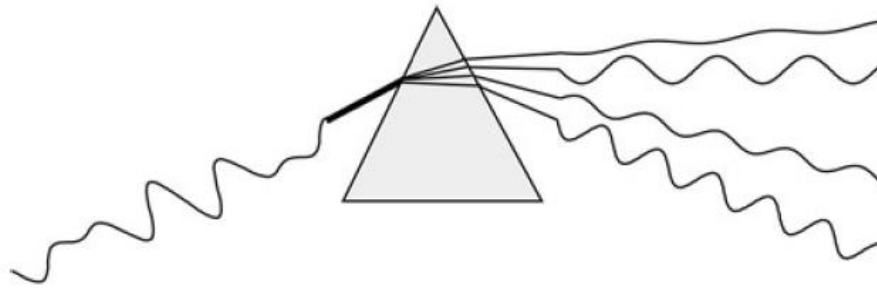


Abbildung 33: Die Zerlegung des Lichtstrahles nach Frequenzen³⁷

Fourier hat auch eine Antwort auf die Frage wieso man Musikinstrumente von einander unterscheiden kann. Um das zu verstehen muss man wissen was ein Ton ist. Ein Ton ist eine periodische Schwingung. Der Ton einer Stimmgabel ist eine Sinus Schwingung, aber der Ton einer Geige ist viel komplizierter (Abb. 33). Mit Hilfe der Fourierreihe kann man auch solche komplexen Schwingungen durch Sinus bzw. Kosinus Schwingungen approximieren. (vgl. Ebert, Technische Universität Berlin).

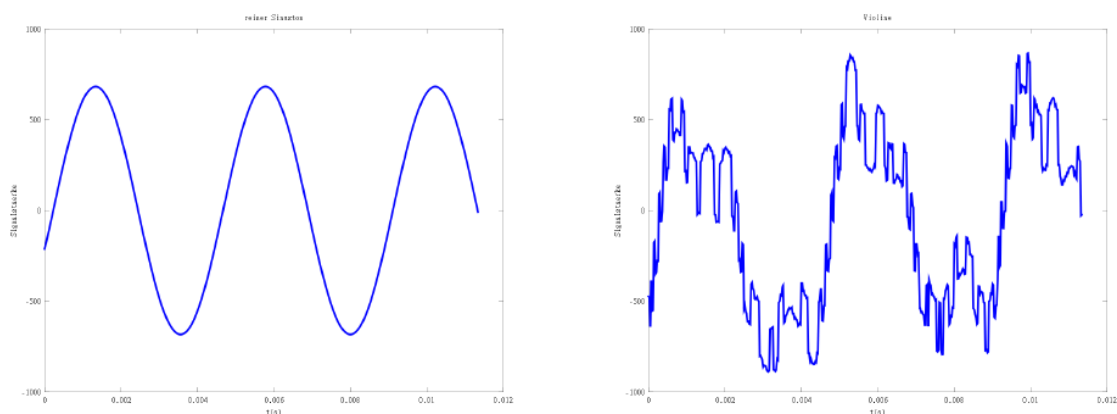


Abbildung 34: Ton einer Stimmgabel (220 Hz) und der Ton einer Geige (220 Hz)³⁸

³⁷Lang, Pucker, 2005, S.489

Es wird ein Ton aufgenommen und man bekommt die Schwingung über die Zeit. Diese Schwingung wird in die einzelnen Frequenzen aufgeteilt. In Abbildung 33 sieht man die Schwingung über die Zeit und die Fourier Zerlegung. (vgl. Ebert, Technische Universität Berlin).

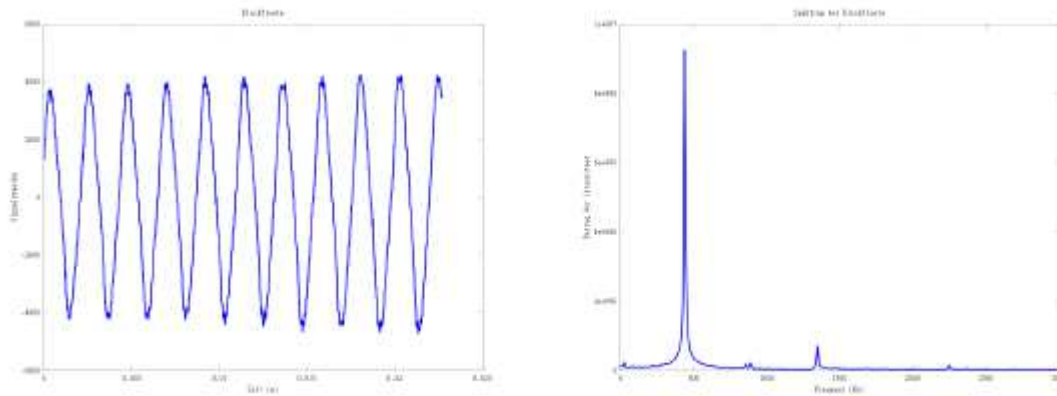


Abbildung 35: Ton einer Flöte

Links: Schwingung über die Zeit; Rechts: Fourier Zerlegung³⁹

³⁸Ebert, Technische Universität Berlin. S.2

³⁹Ebert, Technische Universität Berlin, S.9

9 Fazit

Die historische Entwicklung der Analysis nimmt einen großen Teil in der Geschichte der Mathematik ein. Die mathematischen Leistungen, die herausgenommen wurden, sind auch nur ein Teil davon, was die entsprechenden Mathematiker gemacht haben.

Newton und Leibniz haben die Tür geöffnet für die weitere Forschung in der Analysis. Noch im 17. Jahrhundert haben Menschen einfachere Rechenmethoden gesucht. So hat sich gezeigt, dass die Leibniz-Methode viel mehr angenommen wurde als die von Newton. Seine Schreibmethode war zu kompliziert und die Leute, die Leibniz gefolgt sind, haben viel mehr Erfolg gehabt. Unter ihnen finden sich die Brüder Bernoulli. Jakob Bernoulli hatte große Probleme mit dem Verständnis der Differentialrechnung von Leibniz. Durch das Schreiben mit ihm entstanden neue Ideen. So haben die Brüder Bernoulli gemeinsam die Variationsrechnung entdeckt. Die Brüder Bernoulli haben ihr Wissen an andere Mathematiker weitergegeben. Einer von ihnen war auch Euler. Seine Forschung drehte sich um den Funktionsbegriff, weil seiner Meinung nach die Funktion im Zentrum der Analysis steht. Er hat den Funktionsbegriff von Johann Bernoulli weiter entwickelt und neu gefasst. Euler war nicht gänzlich zufrieden mit der Leibniz-Formulierung von „unendlich kleine“ Größe und hat sich damit weiter beschäftigt. Er hat seine neue Formulierung an die Exponentielle und Logarithmische Funktion angewendet. Die bekannteste Formel der Trigonometrie $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ entstand auch von ihm. Brook Taylor ist ein Mathematiker, ohne den diese Arbeit auch nicht vollständig wäre. Die Taylorischen Reihenentwicklungen stellen einen sehr wichtigen Teil der Analysis dar.

Joseph-Louis Lagrange hat als erster die Differential- und Integralrechnung in Frage gestellt indem er geglaubt hat, dass die Reihen für alle Funktionen verwendbar sind. Die Definition von „unendlich kleine Größe“ wurde nicht mehr gut angenommen. Lagrange schrieb deswegen in seiner Arbeit die Schreibweise f' statt $\frac{dy}{dx}$ um zu vermeiden, dass es sich um zwei unendlich kleine Größen handelt. Sein wichtiger Beitrag liegt auch darin, dass er die Restglieddarstellung für die Taylor-Reihe eingeführt hat. Carl Friedrich Gauß war viel mehr bekannt in dem Gebiet Geometrie und Arithmetik, aber es wäre unfair ihn in der Geschichte der Analysis nicht zumindest zu erwähnen. Nach der Analyse von

Lemniskate begann er die Untersuchung der elliptischen Funktionen, die eine Verallgemeinerung der Lemniskate sind.

Ein Mathematiker, über dem man eigentlich eine ganze Diplomarbeit schreiben könnte, ist Augustin Louis Cauchy. Cauchy hat, im Gegensatz zu Newton und Leibniz, die Derivation als Grundbegriff eingeführt. Das Buch „*Cours d'analyse*“, das im Jahr 1821 veröffentlicht wurde, gab unendlich viele wichtige Beiträge in der Analysis. Cauchy definierte die Konvergenz und die Stetigkeit und dadurch auch die Konvergenz von Folgen und Reihen. Er hat bewiesen, dass das Integral die Umkehrung der Ableitung ist.

Joseph Fourier spielt eine wesentliche Rolle in der mathematischen Physik. Er hat durch zahlreiche Beispiele gezeigt, dass jede Funktion in einem Intervall als eine trigonometrische Reihe dargestellt werden kann. Noch heute gibt es keinen Beweis dafür, aber seine Leistung ist so groß, dass solche Reihenentwicklungen seinen Namen tragen.

Natürlich gibt es noch andere Mathematiker, die eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Analysis spielen. Die, die in dieser Arbeit erwähnt wurden, sind alle auf eine gewisse Art miteinander verknüpft. Alle haben bei Newton und Leibniz begonnen und haben versucht die Analysis weiter zu entwickeln und derzeitige Definitionen zu verbessern. Nach Fourier kommt es zu einem noch besseren Verständnis der Analysis durch Riemann und Cantor, doch über diese könnte eine eigene Diplomarbeit verfasst werden.

10 Literatur

1. **Appell Jürgen:** Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen; Eine Einführung in die Theorie reeller Funktionen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009
2. **Balck Friedrich:** Eulers-Aufsatz zur Physik der Reaktionsturbine - ein wichtiger Baustein zur Technikgeschichte der Wasserräder, Turbinen und anderer Energiewandlungsmaschinen, Katalog zur 300-Jahre-Euler-Ausstellung im Braunschweigischen Landesmuseum, April 2007, S. 387-405
3. **Blasi Thomas:** Skriptum Folgen und Reihen, 02.03.2009
4. **Bottazzini Umberto:** The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass; Translated by Warren Van Egmond; Springer-Verlag 1986
5. **Bradley, Sandifer :** Cauchy's Cours d'analyse An Annotated Translation; Springer Science+Business Media, LLC 2009
6. **Brückler Franka Miriam:** Geschichte der Mathematik kompakt; Springer-Verlag GmbH Deutschland 2018
7. **Buchholz, Rudolph:** Vorlesungsskriptum „Mathematik für Informatiker 2“, Version 24. Juli 2017, TU Dortmund
8. **Cauchy Augustin Louis, Itzigsohn, Carl:** Algebraische Analysis, Springer Berlin 1885
9. **Dadic Zarko:** Povijest ideja i metoda u matematici i fizici; Skolska knjiga Zagreb, 1992
10. **Dakic Branimir:** Carl Friedrich Gauß; Matematika i skola, Element Zagreb 2005
11. **Ebert Falk, Berchner, Hesse, Kaynar, Thuy Linh Tran, Son Pham, Pohl, Salfner:** Der Ton macht die Musik, Analyse von Tonsignalen mittels Fourier-Transformationen, Technische Universität Berlin (http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/bericht_1_11.pdf)
12. **Edwards Jr. C.H.:** The Historical Development of the Calculus; Springer-Verlag New York 1979
13. **Euler Leonhard:** Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Erster Teil, Mit einer Einführung zur Reprintausgabe von Wolfgang Walter, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1983

14. **Forster-Heinlein Brigitte:** Fourier-Analysis Vorlesungsskript; Technischen Universität München 2011
15. **Fourier M.:** Analytische Theorie der Wärme ; Springer Berlin 1884
16. **Goldstine Herman H.:** Die gesammelten Werke der Mathematiker und Physiker der Familie Bernoulli ; Springer Basel AG 1991
17. **Grabner Judith V.:** The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus ; Dover Publications, Inc. Mineola, New York 1981
18. **Hairer, Wanner :** Analysis in historischer Entwicklung, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011
19. **Hajjabadi Maikel :** Die Kettenlinie ; Johannes Gutenberg-Universität Mainz WS2016/17
20. **Hartmann Peter :** Mathematik für Informatiker Ein praxisbezogenes Lehrbuch ; Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig/Wiesbaden, 2002
21. **Heuser, H.:** Eulers Analysis. in: (Biegel/Klein/Sonar 2008)
22. **Kanzow Christian:** Skriptum Folgen und Reihen, Universität Würzburg, WS 2010/11
23. **Kowalewski Gerhard :** Grundbegriffe und Hauptsätze der höheren Mathematik, Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1938
24. **Kraljic Zeljka :** Tri velika matematicara Diplomarbeit, Osijek 2012
25. **Lang, Pucker :** Mathematische Methoden in der Physik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016
26. **Lützen J.:** Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. in: (Jahnke 1999)
27. **Sonar Thomas:** 3000 Jahre Analysis, Geschichte – Kulturen – Menschen, 2.Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011
28. **Stäckel P. (Hrsg.):** Variationsrechnung, Darmstadt, 1976
29. **Strick Heinz Klaus :** Vor 200 Jahren lebte Joseph Fourier, Leverkusen 2012
30. **Sikic Zvonimir :** Kako je stvarana novovjekovna matematika, Skolska knjiga Zagreb 1989
31. **Thiele R.:** Leonhard Euler, Leipzig 1982
32. **Timmermann Thomas:** “Logische Grundlagen der Mathematik”, WS 2014/15, 8. Januar 2015; <http://docplayer.org/48958027-Logische-grundlagen-der-mathematik-ws-2014-15.html>

- 33. **Volkert Klaus Thomas** : Geschichte der Analysis, Mannheim
Wissenschaftsverlag 1988
- 34. **Walter Wolfgang** : Analysis 1, Springer-Verlag Berlin, 2004
- 35. **Wußing Hans** : 6000 Jahre Mathematik, Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 2.
Von Euler bis zur Gegenwart, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000
- 36. **Zern Artjom** : Bernoullipolynome und Bernoullizahlen; Ausarbeitung zum
Vortrag im Proseminar Analysis SS 2009, Leitung Prof. Dr. Eberhard Freitag ;
Ruprecht-Karls- Universität Heidelberg, 2009

11 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Jakob und Johann Bernoulli.....	3
Abbildung 2: Eine archimedische Spirale im Epitaph. Der Steinmetz hat statt einer logarithmischen Spirale eine archimedische Spirale gemeißelt.....	4
Abbildung 3: Daniel Bernoulli.....	5
Abbildung 4: Hydrodynamica.....	6
Abbildung 5: Logarithmische Spirale.....	8
Abbildung 6: Eine Kettenlinie.....	14
Abbildung 7: Figur zum Brachistochronenproblem.....	17
Abbildung 8: Figur zur Lösung von Johann Bernoulli.....	17
Abbildung 9: Figur von Newton zum Brachistochronenproblem.....	19
Abbildung 10: Die Synchrone.....	20
Abbildung 11: Figur zur Lösung von Jakob Bernoulli.....	23
Abbildung 12: Zweite Figur von Jakob.....	26
Abbildung 13: Porträt von Leonhard Euler.....	29
Abbildung 14: „Mechanica sive motus scientia analytice exposita”.....	30
Abbildung 15: Brook Taylor.....	40
Abbildung 16: „Methodus incrementorum directa et inversa“.....	41
Abbildung 17: Joseph Louis Lagrange.....	48
Abbildung 18: „Mechanique Analytique“.....	49
Abbildung 19: Mittelwertsatz der Differentialrechnung.....	52
Abbildung 20: Carl Friedrich Gauß.....	54
Abbildung 21: Lemniskate.....	57
Abbildung 22: Augustin Louis Cauchy.....	58
Abbildung 23: „Cours d'analyse“.....	60
Abbildung 24: Cauchy Funktion: $f(x) = e^{-1/x^2}$, $n \neq 0$, $f(0) = 0$	64
Abbildung 25: Graphen der Funktion $f_n(x) := x^n$ für $n=1, \dots, 9$	71
Abbildung 26: Beispiel einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge.....	72
Abbildung 27: Cauchy-Integral.....	78
Abbildung 28: Jean Baptiste Joseph Fourier.....	83
Abbildung 29: „Théorie analytique de la chaleur“.....	84
Abbildung 30: Funktion, die nicht an allen Stellen differenzierbar ist.....	87
Abbildung 31: Unstetige Funktion.....	88

Abbildung 32: Die Funktion $f(x) = x$ mit Periode $(-1, 1)$	93
Abbildung 33: Die Zerlegung des Lichtstrahles nach Frequenzen.....	95
Abbildung 34: Ton einer Stimmgabel (220 Hz) und der Ton einer Geige (220 Hz).....	95
Abbildung 35: Ton einer Flöte.....	96

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name Ivana Abramovic
Anschrift Zeleni dol 17, 10000 Zagreb, Kroatien
Geboren am 07.05.1992 in Zagreb, Kroatien

Berufsausbildung

03/2017 - 07/2017 Erasmus - Austausch: Universität Zagreb, Fakultät für Naturwissenschaft, Mathematik und Physik
10/2017 - 02/2018 Erasmus - Austausch: Universität Zagreb, Fakultät für Naturwissenschaft, Mathematik und Physik
03/2017 - 05/2017 Fachbezogenes Praktikum Physik: OŠ Grofa Janka Draškovića
03/2016 - Universität Wien
Lehramt Mathematik und Physik
10/2016 - 01/2017 Fachbezogenes Praktikum Mathematik: BRG Kremszeile
10/2013 - 03/2016 Universität Wien
Lehramt Mathematik und Physik
Abschluss: 1. Abschnitt
09/2011 - 06/2012 Universität Zagreb, Fakultät für Naturwissenschaft
Lehramt Mathematik

Schulbildung

2007 - 2011 Gymnasium Vrbovec
Abschluss: Matura
1999 - 2007 Volksschule Vrbovec

Fremdsprachen

Deutsch verhandlungssicher in Wort und Schrift, Englisch mittlere Kenntnisse, Kroatisch Muttersprache

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der historischen Entwicklung der Analysis nach Newton und Leibniz bis Fourier. Ziel dieser Arbeit war es, die wichtigsten Mathematiker dieser Zeit und ihre Hauptwerke wie auch ihre wissenschaftlichen Leistungen zu präsentieren. Die ausgewählten Mathematiker sind Jakob, Johann und Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Brook Taylor, Joseph-Louis Lagrange, Carl Friedrich Gauß, Augustin Louis Cauchy und Jean Baptiste Joseph de Fourier. In den meisten Büchern ist entweder von Biographie oder von mathematischen Leistungen die Rede. In dieser Arbeit habe ich versucht, die beiden Seiten zu verbinden. Mit Hilfe von mehreren Büchern und Arbeiten habe ich die wichtigsten und prägendsten Hauptbegriffe der Nachfolger von Newton und Leibniz dargestellt.

Abstract

This work deals with the historical development of analysis after Newton and Leibniz until Fourier. The aim of this work was to present the most important mathematicians of that time and their major works as well as their scientific achievements. The chosen mathematicians are Jakob, Johann and Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Brook Taylor, Joseph-Louis Lagrange, Carl Friedrich Gauß, Augustin Louis Cauchy und Jean Baptiste Joseph de Fourier. The most books are about either biography or mathematical achievements. I have tried in this work to connect both sides. With the help of several books and articles I have represented the most important and formative terms of the successors of Newton and Leibniz.