



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Der Neupythagoreer Nikomachos von Gerasa als
Bindeglied zwischen antiker und mittelalterlicher Welt

verfasst von / submitted by

Katja Ondracek

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UniStG
UF Mathematik UniStG
UF Psychologie und Philosophie UniStG

Betreut von / Supervisor:

Ao. Univ.-Prof. Dr. Christoph Baxa

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Diplomarbeitsbetreuer A.o. Univ. Prof. Dr. Christoph Baxa bedanken, der mir die Möglichkeit gab, im Bereich der historischen Mathematik diese Arbeit zu verfassen. Danke für die Ratschläge, Literaturhinweise und die Betreuung!

Des Weiteren möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, dass sie mir die Möglichkeit gaben, dieses Studium zu betreiben.

Ein ganz besonderer Dank gilt meiner Studienkollegin und guten Freundin Bianca. Wir haben uns zusammen durch das gesamte Studium gekämpft, sei es in inhaltlichen oder in organisatorischen Belangen. Vom Anfang bis zum Ende haben wir uns miteinander gefreut und geweint, uns unterstützt wo immer es notwendig war.

Natürlich bedanke ich mich auch bei meiner langjährigen Freundin Julia. Nachdem wir uns schon in der Schulzeit gegenseitig unterstützt haben, war sie auch während meiner Studienzeit immer für mich da. Viele gemeinsame Abende, beruhigende Gespräche und vor allem mentale Unterstützung haben mir immer wieder geholfen meine Motivation aufrecht zu halten.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	I
Einleitung	1
1 Über die Pythagoreer	3
1.1 Die goldenen Verse	5
1.2 Seelenwanderung.....	6
1.3 Tetraktys und Zahlenmystik.....	7
1.4 Pythagoras	9
2 Mathematische Erkenntnisse der Pythagoreer	10
2.1 Geometrie.....	10
2.1.1 Satz des Pythagoras.....	10
2.1.2 Winkelgesetze.....	12
2.1.3 Flächenanlegungen	13
2.1.4 Die Diskussion über die geometrische Algebra.....	17
2.1.5 Reguläre Polyeder	19
2.2 Arithmetik	23
2.2.1 Figurierte Zahlen.....	23
2.2.2 Gnomone	26
2.2.3 Lehre vom Geraden und Ungeraden	26
2.2.4 Primzahlen	27
2.2.5 Befreundete Zahlen	27
2.2.6 Vollkommene, abundante und defiziente Zahlen	28
2.2.7 Zahlenmystik der Zahl 17.....	29
2.2.8 Die Blume des Thymaridas	31
2.3 Irrationalität von $\sqrt{2}$	31
2.4 Der Analogiebegriff.....	33
2.4.1 Der Analogiebegriff bei Nikomachos.....	34
2.4.2 Die arithmetische und die geometrische Beziehung	37
2.5 Mittelwertbildungen.....	38
2.5.1 Arithmetische Mitte	38
2.5.2 Geometrische Mitte.....	39
2.5.3 Harmonische Mitte	40

2.5.4	Vollkommene Mitte	41
2.6	Harmonielehre der Pythagoreer	42
2.6.1	Berechnungen am Kanon	48
2.6.2	Das pythagoreische Komma	50
2.7	Astronomie	50
2.7.1	Das geozentrische Weltbild	50
2.7.2	Die Kreisbewegungen der Erde	53
3	Nikomachos von Gerasa	54
3.1	Das Leben von Nikomachos	55
3.2	Werke des Nikomachos	56
3.3	Übersetzer und Kommentatoren	58
3.3.1	Iamblichus	58
3.3.2	Boethius	59
3.4	Die Einführung in die Arithmetik	59
3.4.1	Gliederung der Einführung in die Arithmetik	60
3.4.2	Gerade und ungerade Zahlen	60
3.4.3	Über die Klassifikation von Zahlen	64
3.4.4	Proportionen und Verhältnisse in der Einführung in die Arithmetik	67
3.4.4.1	Die zehn Proportionen	67
3.5	Einfluss der Einführung in die Arithmetik auf die Mathematik im mittelalterlichen Islam	73
3.5.1	Befreundete Zahlen	73
3.5.2	Figurierte Zahlen	76
4	Ausblick	78
4.1	Figurierte Zahlen bei späteren Mathematikern	78
5	Literaturverzeichnis	80
6	Abbildungsverzeichnis	82
	Anhang	83
	Abstract in Deutsch	83
	Abstract in English	83

Einleitung

Die Pythagoreer. Der Satz des Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypothenusenquadrat. Vermutlich ist das einer der wenigen, wenn nicht der einzige Schluss, der von vermutlich jeder Schülerin oder jedem Schüler gezogen werden kann, wenn im Mathematikunterricht über *Pythagoreer* gesprochen wird. Ja, es ist wohl die bekannteste Erkenntnis, die der Gemeinschaft der Pythagoreer zugesprochen wird. Dabei ist nicht einmal bewiesen, dass der Satz des Pythagoras wirklich von Pythagoras selbst stammte. Nein, sogar das Gegenteil ist der Fall: Aus mehreren Quellen geht hervor, dass sowohl die Babylonier als auch die Ägypter¹ schon vorher diesen Satz kannten und auch anwandten. Vermutlich wird also der Satz des Pythagoras ganz zu Unrecht nach dem uns wohl bekanntesten Pythagoreer benannt.

Und dieser Pythagoras von Samos ist bestimmt für einige wissenschaftliche Erkenntnisse um das fünfte Jahrhundert v.Chr. verantwortlich. Es gab allerdings noch eine ganze Menge Anhänger, die zum Teil weitere mathematische Überlegungen und Beweise lieferten.

In dieser Arbeit soll zu Anfang die Gruppe der Pythagoreer beschrieben und ihr Lebensstil, sowie ihre zum Teil aus heutiger Sicht etwas ausgefallenen Verhaltensweisen aufgezeigt werden.

Danach zeige ich neben dem Satz des Pythagoras noch weitere mathematische Erkenntnisse auf, die vermutlich aus den Federn einiger Anhänger der Bruderschaft stammen. Die Pythagoreer waren nicht nur für ihre Philosophie bekannt, sondern haben zu ihren Lebenszeiten sowohl in der Geometrie, der Arithmetik, der Harmonielehre, als auch in der Astronomie erstaunliche Leistungen und Berechnungen zu Papier gebracht.

Besonderer Stellenwert kommt in dieser Arbeit dem Spätpythagoreer Nikomachos von Gerasa zu, der mehrere Werke verfasste, die das Wissen der Pythagoreer konserviert haben. Sein Leben sowie sein Wirken stellen einen Schwerpunkt in dieser Arbeit dar. Es wird deutlich, welch wichtiger Mann er gewesen sein muss, da

¹ Cantor Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Leipzig: B.G. Teubner 1894, 65.

er von einigen späteren Denkern, wie Iamblichus oder Boethius übersetzt und kommentiert wurde. Neben dem Werk mit dem Titel *Einführung in die Arithmetik*, in dem er sich mit nicht weniger als zehn verschiedenen Mittelwertbildungen auseinandersetzte, beschäftigte sich Nikomachos auch intensiv mit der Harmonielehre, über die er ebenso ein Buch verfasste.

Welchen Einfluss die Mathematik der Pythagoreer und insbesondere die Bücher des Nikomachos auf die spätere Mathematik haben, soll am Ende der Arbeit seinen Platz finden. Besonders *die Einführung in die Arithmetik* im mittelalterlichen Islam ist ein interessantes Thema, dem ich mich abschließend widmen will, um zu zeigen, welche weiten Kreise die Arbeit der Pythagoreer gezogen hat.

1 Über die Pythagoreer

Die Pythagoreer waren eine Gruppe und Anhängerschaft des zweifelsfrei bekanntesten Pythagoreers Pythagoras von Samos, von dessen Leben ich später noch genauer berichten werde. Sie lebten ungefähr im 5. Jahrhundert v.Chr. und siedelten sich in Süditalien an. Ich beginne mit einem Überblick über den Bund der Pythagoreer, ihre Lebensweise und Verhaltensvorschriften.

Über die Lebensweise der Pythagoreer wissen wir das meiste aus Iamblichos Werk *Vom pythagoreischen Leben*. Allerdings hat P. Boyancé in seiner Arbeit *Sur la vie pythagoricienne* nachgewiesen, dass der Bericht bei Iamblichos eigentlich von Aristoxenos stammt.²

Die Pythagoreer waren eine Art Klostersgemeinschaft, im heutigen Verständnis vielleicht sogar eine Sekte. Man betete und lebte zusammen, schottete sich von der Außenwelt ab.³

Der Tag eines Pythagoreers begann demnach mit einem Spaziergang alleine, denn sie glaubten, dass man erst mit einem Menschen zusammentreffen sollte nachdem man die eigene Seele gerüstet und sein Denken geordnet hatte. Erst danach trafen sie zusammen, nutzten diese Gelegenheit zum Lehren und Lernen, trieben danach Sport und beschlossen den Vormittag mit einem Essen, das aus Brot und Honig bestand. Den Nachmittag über beschäftigten sie sich mit öffentlichen Geschäften oder Politik. Später folgte ein weiterer Spaziergang, nun aber in einer kleinen Gruppe, um sich über das Gelernte auszutauschen. Abends wurde gemeinsam gegessen, allerdings aßen nie mehr als zehn Menschen gleichzeitig. Aristoxenos schreibt nirgends von dem bekannten Bohnen- oder Fleischverbot. Diogenes Laertios allerdings griff dieses Verbot in seinen Notizen auf. Es ist nicht ganz klar, warum die Pythagoreer keine Bohnen aßen, aber es gibt verschiedene Vermutungen; eine davon wird bei Aristoteles erwähnt: Die Bohnen weisen eine Ähnlichkeit zu den Pforten des Hades auf. Es könnte sein, dass die Pythagoreer sich vorstellten, dass die Seelen durch den Stängel der Pflanze hindurch in den Hades eingehen oder herauskommen könnten. Vermutlich handelt es sich auch nicht um die

² Van der Waerden Bartel Leendert: Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft. Zürich und München: Artemis Verlag 1979,164.

³ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 174.

uns bekannten Bohnen, sondern um die Art *Vicia faba*, die Saubohne. Es gibt aber auch einen Bericht bei Iamblichos, in dem er meint, die Pythagoreer hätten den Grund für das Bohnenverbot stets geheim gehalten.⁴

Freundschaft war den Pythagoreern ein hohes Gut, das können wir bei einigen Stellen von Iamblichos oder Porphyrios nachlesen. Iamblichos schreibt in *Vom pythagoreischen Leben* 229:

In herrlicher Klarheit lehrte Pythagoras die Freundschaft aller mit allen: Freundschaft der Götter mit den Menschen durch Frömmigkeit und wissende Verehrung, Freundschaft der Lehren untereinander und überhaupt Freundschaft der Seele mit dem Leibe, Freundschaft des Vernunftbegabten (Seelenteils) mit den Formen der Vernunftlosen durch Philosophie und die ihr eigene geistige Anschauung, Freundschaft der Menschen untereinander, Freundschaft unter Mitbürgern durch Gesetzestreue, die den Staat gesund erhält, Freundschaft Verschiedenstämmiger durch richtige Naturerkenntnis, Freundschaft zwischen Mann und Frau, Kindern, Geschwistern und Hausgenossen durch unverbrüchliche Gemeinschaft. [...] Freundschaft des sterblichen Leibes in sich selbst, [...].

Besonders wichtig war ihnen also die Freundschaft von allen mit allem, also auch mit den Tieren und dem Kosmos. Innerhalb der Freundschaft ist Vertrauen als wesentlich vorauszusetzen und Kampf oder Streit muss ausgeschlossen bleiben.⁵

Es war des Weiteren verboten, sich selbst neben einem Licht in einem Spiegel zu betrachten. Außerdem sollten sie darauf achten, nach dem Aufstehen im Bett keinen Abdruck des Körpers zu hinterlassen.⁶ Das Bettzeug musste stets geglättet werden, damit der Eindruck des Körpers verschwand, da die Angst bestand, dass sich ein Geist in diese Umrisse legen könne.⁷ Diogenes Laertios berichtet weiter, dass es verboten war, Eigentum zu besitzen und die älteren Mitglieder mussten besonders geehrt werden, denn „was zeitlich vorangehe verdiene die höheren Ehren, wie im

⁴ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 163-171.

⁵ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 176-177.

⁶ Sonar Thomas: *3000 Jahre Analysis. Geschichte-Kulturen-Menschen*. Vom Zählstein zum Computer. Hrsg. von H.-W. Alten, K.-J. Förster, K.-H. Schlote, H. Wesemüller-Kock. 2., korrigierte Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2016. 22.

⁷ Starke Dieter: *Erste Anfänge der Naturwissenschaften. Eine geschichtliche Betrachtung*, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch 2006, 225.

Weltall der Aufgang vor dem Untergang, im Leben der Anfang vor dem Ende, in der Belebung die Zeugung vor der Vernichtung“ (Diogenes Laertios 22).⁸

Iamblichus berichtet auch über die Aufnahme neuer Mitglieder des Bundes. Es war angeblich eine lange Prozedur, bei der Pythagoras die Anwärter in vielerlei Hinsicht beobachtete, prüfte und beurteilte. Dann wurden diese drei Jahre lang der Verachtung überlassen, um die Standhaftigkeit und den Lerneifer zu prüfen. Es folgte ein fünfjähriges Schweigegebot und die Zeit, in der das Besitztum jedes Bewerbers der Gemeinschaft übertragen wurde. Erst wenn diese Zeit überstanden war, durften die Neulinge Pythagoras auch ansehen während sie seinen Vorträgen lauschten, davor mussten sie hinter einem Vorhang zuhören.⁹

Unter den Pythagoreern gab es zwei verschiedene Gruppen. Iamblichos erwähnt mehrmals die Akusmatiker und die Mathematiker. Die Mathematiker waren diejenigen, die Lerngegenstände, die *Mathemata*, also Arithmetik, Geometrie, Harmonik und Astronomie betrieben. Die Akusmatiker hingegen legten Wert auf die *Akusmata*, was übersetzt so viel wie *das Gehörte* bedeutet. Im Gegensatz zu den Mathematikern forschten sie nicht und gaben keine Beweise oder Begründungen, sondern sie überlieferten und gaben weiter, was ihnen gelehrt wurde. Für die Akusmata war die Begründung „Er hat es gesagt“ ausreichend.¹⁰

1.1 Die goldenen Verse

Bei den Goldenen Versen handelt es sich um ein Gedicht, bestehend aus zwei Teilen. Manchmal werden sie auch goldene Verse des Pythagoras genannt, aber sie stammen nicht von Pythagoras selbst. Van der Horst datiert die Verse auf 100 bis 300 n. Chr. und beschreibt sie als von Neupythagoreern aus älteren Quellen zusammengestellt und teils vielleicht sogar neu gedichtet.

Der erste Teil der Verse (1-48) beschäftigt sich damit, wie man leben soll, der zweite Teil (48-71) hingegen ist religiöser Natur. Dieser soll den Anhängern die Sicherheit eines seligen Lebens im Jenseits geben.

Vermutlich stammen die Goldenen Verse von der sogenannten „Heiligen Rede des Pythagoras“ ab. Doch auch bei dieser Rede ist nicht gesichert, dass sie tatsächlich

⁸ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 175.

⁹ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 172-173.

¹⁰ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 66-67.

von Pythagoras selbst stammt. Denn es existiert eine Notiz im byzantinischen Kompendium *Suda*, nach der die Tochter des Pythagoras, Arignote, diese „heilige Rede“ komponierte.

Aber ganz gleich, von wem diese goldenen Verse genau stammen, klar ist, dass sie Lebensregeln, Gebote und religiöse Inhalte von pythagoreischem Gedankengut enthalten. Man kann sie als dessen ethisch religiöse Grundlage bezeichnen.¹¹

1.2 Seelenwanderung

Aus den goldenen Versen, die aus neupythagoreischer Zeit stammen, wissen wir, dass die Pythagoreer die Ansicht vertraten, die Seele wäre von göttlicher Natur und die Seele des Gerechten steige nach dem Tod in den Himmel auf.

Von Dikaiarchos erfahren wir, dass laut Pythagoras alle Lebewesen miteinander verwandt seien. Also sei der Mensch auch mit den Göttern verwandt, da diese ebenfalls als Lebewesen betrachtet wurden. Auch Empedokles ist einer der wichtigsten Zeugen für den Glauben an die Unsterblichkeit der Seele, die Seelenwanderung und die Verwandtschaft aller Lebewesen. Empedokles lehrte im Gegensatz zu den anderen Pythagoreern öffentlich. Seine Lehren waren denen des Pythagoras sehr ähnlich, er wurde laut Diogenes Laertios aus dem Bund der Pythagoreer ausgeschlossen, weil er sich nicht an die Geheimhaltung der Lehren hielt.

In diesen Lehren der Pythagoreer wird die Seele als vorübergehend im Körper gefangen beschrieben. Wenn allerdings der Körper stirbt, dann wird die Seele frei. Nach Platon und den Neupythagoreern kommt die Seele, wenn sie ein gerechtes Leben auf der Erde geführt hat, dahin, wo der Mond, die Sonne und die Sterne sind, denn die wahre Heimat der Seele ist der Himmel. Wir können hier Parallelen zum heutigen Christentum entdecken. Auch hier gibt es den Glauben an die Unsterblichkeit und die Vorstellung, dass sich die Seele nach dem Tod im Himmel befindet. Allerdings sind unsere heutigen Vorstellungen von *Himmel* nicht so konkret wie die der Pythagoreer. Ein altpythagoreisches Akusma, ein Spruch, das von Iamblichos im *Leben der Pythagoreer* überliefert wurde, lautet:

Was sind die Inseln der Seligen? Sonne und Mond.

¹¹ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 148-154.

Dieser Rätselspruch soll beschreiben, dass die unsterbliche Seele nach dem Tod des Körpers in den Himmel und zwar noch genauer zum Mond und zur Sonne wandert.¹²

1.3 Tetraktys und Zahlenmystik

Die Tetraktys ist für die Pythagoreer von zentraler Bedeutung gewesen. Es handelt sich hierbei um eine sogenannte *Vierheit* von Zahlen oder von Begriffen. Nach Iamblichos hat Pythagoras selbst das Wort geprägt. In der Tetraktys wird so etwas wie ein geheimer Schlüssel zum Verständnis der gesamten Natur und des Kosmos gesehen.¹³

Theon von Smyrna definiert sogar 11 verschiedene Vierheiten in seinem Werk „Erklärungen von mathematischen Dingen, die zum Verständnis Platons nützlich sind“. Doch nur die erste wird als grundlegend betrachtet. Sie wird von den ersten vier Zahlen gebildet. Das ist auch die Tetraktys, die am häufigsten von spätantiken Kommentatoren genannt wird: Die Folge der ersten vier Zahlen oder die Summe daraus:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Eine andere Interpretation wie die Tetraktys gebildet werden kann, hängt mit der Musiktheorie zusammen. Die Zahlen 6, 8, 9, 12 stehen nicht nur in einem vollkommenen Verhältnis, wie ich später noch genau ausführen werde, sondern sind auch für die Musik maßgebend. Ihre Verhältnisse, die Quart, Quint und Oktav beschreiben, sind auch in der ursprünglichen Tetraktys enthalten:

$$8:6 = 12:9 = 4:3$$

$$9:6 = 12:8 = 3:2$$

$$12:6 = 2:1$$

Die Pythagoreer schworen der Tetraktys sogar einen Eid, der inhaltlich ungefähr so übersetzt werden kann:

¹² Van der Waerden, Die Pythagoreer, 117-123.

¹³ Riedweg Christoph: *Pythagoras*. Leben, Lehre, Nachwirkung; eine Einführung. München: C.H. Beck 2002, 110.

Nein, bei dem, der unserer Seele die Tetraktys übergehen* hat, welche Quelle und Wurzel der ewigen Natur enthält.

Das *Nein* am Beginn des Eides bedeutet vermutlich, dass die Pythagoreer darauf schworen, die Geheimnisse nicht zu verraten. Der ungenannte, der *die Seele übergeben hat* ist nach mehreren Kommentatoren Pythagoras selbst, das schreibt zum Beispiel auch Iamblichos in *Das Leben der Pythagoreer*. Die Frage, warum die Tetraktys als Quelle und Wurzel der Natur bezeichnet wird, ist wahrscheinlich eines der tiefsten Geheimnisse der Pythagoreer und kann deshalb nicht restlos geklärt werden. Wie oben beschrieben, hat die Tetraktys etwas mit Harmonie und mit Musik zu tun. Bei Iamblichos finden wir den Spruch:

Was ist das Orakel von Delphi? Die Tetraktys! Denn sie ist die Harmonie, in der die Sirenen (singen).

Der Zusammenhang zwischen den Sirenen, dem Orakel von Delphi und der Harmonie ist leicht erklärt: Nach Homeros kennen die Sirenen die Geheimnisse aller Welt und waren der Wahrsagung kundig. Sie wurden gemeinsam mit Apollon abgebildet, der nicht nur der Gott des Orakels von Delphi war, sondern auch der Erfinder des Instrumentes Lyra, also Gott der Harmonie. Die Tetraktys ist somit die Tonleiter der Sirenen. Von Nikomachos erfahren wir, dass die Quelle und Wurzel offenbar so etwas wie die himmlische Harmonie bezeichnen soll. Dazu muss man nur noch verbinden, dass die Musik der Sirenen als himmlische Musik bezeichnet wurde. Die irdische Musik soll also eine Nachbildung der himmlischen Musik sein, die auf der Zahl beruht. Aber nicht nur die Musik, sondern auch die Bewegungen der Himmelskörper richten sich nach der Zahl und so verallgemeinerten die Pythagoreer, dass alle Dinge reine Nachahmungen der Zahlen seien. Abschließend zur Zahlenmystik, ein Zitat aus Iamblichos, welches verdeutlicht, dass für die Pythagoreer die Zahlen die Welt bedeuteten. Danach soll Pythagoras folgendes gesagt haben:

In knapper Form verschlüsselt speichert er so eine unübersehbare Weite und reiche Fülle geistiger Schau. So auch in dem Satz: „Die Zahl – es gleicht ihr alles“, den er sehr häufig vor allen Menschen aussprach.¹⁴

¹⁴ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 100-110.

*Im Original finden wir tatsächlich den Ausdruck „übergehen“, sinngemäß sollte hier vermutlich „übergeben“ an dieser Stelle stehen.

1.4 Pythagoras

Pythagoras von Samos lebte wahrscheinlich im 6. Jahrhundert v. Chr. und wuchs auf der Insel Samos auf. Es gibt unterschiedliche Meinungen darüber wann er tatsächlich geboren wurde. Die Unsicherheiten entstanden aufgrund verschiedener Überlieferungen.

Einerseits wird bei Diogenes Laertios erzählt, dass Pythagoras als Zwölfjähriger bei den olympischen Spielen von der Teilnahme des Jungenwettkampfs ausgeschlossen wurde, weil er noch zu jung war, aber mit langem Haar am Faustkampf bei den Erwachsenen teilnahm und siegte. Eratosthenes nahm diese Legende ernst und fand in der Siegerliste der olympischen Spiele aus dem Jahr 588 v. Chr. den Namen Pythagoras, woraus er schloss, dass Pythagoras 600 v. Chr. geboren worden war.

Allerdings berichtet Aristoxenos, ein Musiktheoretiker aus der Schule des Aristoteles, dass Pythagoras im Alter von 40 Jahren aufgrund politischer Unruhen und Unzufriedenheit mit der Tyrannei des Polykrates die Insel Samos verließ. Die Herrschaft von Polykrates auf Samos begann um 538 v. Chr. Rechnet man hier also 40 Jahre zurück kommt man auf ein anderes Geburtsjahr, nämlich um 570 v. Chr. oder sogar noch etwas früher.

Es ist hier nicht maßgebend, wann genau Pythagoras geboren wurde, aber es ist wesentlich, sich bewusst zu sein, dass es unterschiedliche Lehrmeinungen und Überlieferungen zu diesen Daten gibt. Die Pythagoreer und somit auch Pythagoras selbst haben nichts aufgeschrieben, alle Informationen, die wir von ihnen haben, sind Überlieferungen von späteren Philosophen und Wissenschaftlern.¹⁵

Das Leben Pythagoras kann in drei Abschnitte gegliedert werden. Der erste Abschnitt, über den nicht sehr viel bekannt ist, handelt vom Leben auf Samos, von Olympia und Reisen nach Milet. Von Iamblichos erfuhren wir, dass er dort auch Thales von Milet getroffen haben soll, was zeitlich durchaus möglich ist. In seinem zweiten Lebensabschnitt soll Pythagoras nach Ägypten und Babylon gereist sein. Auch darüber ist eher wenig bekannt. Das Wissen über diese Zeit basiert auf einer Legende, die Iamblichos in seinem Werk *Über das pythagoreische Leben* überlieferte und von der wir nicht wissen, wieviel Wahrheit in ihr steckt.

¹⁵ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 13-14.

Über den dritten Abschnitt im Leben Pythagoras gibt es gleich mehrere Berichte von Aristoxonos, aber auch von Timaios von Tauromenion und von Dikaiarchos, der ein Schüler des Aristoteles war. In dieser Zeit soll Pythagoras in Süditalien gelebt und gewirkt haben.¹⁶

Van der Waerden schreibt auf die Frage, ob Pythagoras ein Mathematiker im Sinne der Forschung gewesen ist oder ob er lediglich Mathematik gelehrt hat, in seinem Werk *Die Pythagoreer*:

Dass Pythagoras in der Mathematik, Astronomie und Harmonik allerhand gelernt und sein Wissen an seine Schüler vermittelt hat, das sehe ich für mich fest. Dass er als Forscher tätig war, scheint mir eher unwahrscheinlich. Wenn er einen mathematischen Satz oder eine astronomische Rechenmethode gefunden hätte, dann würden seine Biographen doch höchst wahrscheinlich darüber berichten!

Dass aber die Pythagoreer Forscher waren, daran zweifelt er nicht. Denn auch Aristoteles bezeichnet sie als die ersten, die mathematisches Wissen förderten.¹⁷

2 Mathematische Erkenntnisse der Pythagoreer

Die vier verschiedenen *Mathemata*, mit denen sich die Pythagoreer beschäftigten waren die Arithmetik, die Geometrie, die Astronomie und die Harmonielehre. Dies bestätigt uns Aristoteles in seiner *Metaphysik*. Aber in der *Metaphysik* erfährt man sogar noch mehr, nämlich dass die Pythagoreer wahrscheinlich die ersten waren, die diese Wissenschaften überhaupt vorantrieben. Auf einige ihrer Entdeckungen will ich nun in den nächsten Kapiteln näher eingehen.¹⁸

2.1 Geometrie

2.1.1 Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras ist ganz klar das bekannteste Theorem, das wahrscheinlich jede Schülerin und jeder Schüler kennt. Doch gibt es keinerlei Beweise dazu, dass dieser Satz auch wirklich von Pythagoras stammt oder wenigstens aus der Zeit der Pythagoreer ist.

¹⁶ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 20-21.

¹⁷ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 42-43.

¹⁸ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 331.

Sogar Proklos schreibt in seinem Kommentar zu diesem Satz etwas unbestimmt und vorsichtig:

Schenken wir denjenigen Gehör, die das Altertum erforschen wollen, so kann man darunter welche finden, die dieses Theorem auf Pythagoras zurückführen und berichten, er habe der Entdeckung einen Stier geopfert.

Auch Plutarchos schreibt von einem Stieropfer des Pythagoras nach der Entdeckung, aber an einer anderen Stelle führt er aus, dass aufgrund des Problems eine Figur zu konstruieren, die mit einer zweiten inhaltsgleich und zu einer dritten ähnlich ist, ein Opfer gebracht wurde. Vitruvius dagegen berichtet, der Stier sei geopfert worden, als das rechtwinkelige Dreieck mit den Seiten 3,4,5 entdeckt wurde. Allerdings sind alle diese Berichte über Opfer nicht sehr glaubwürdig und möglicherweise nicht wahr, da Pythagoras ein Gegner von Tieropfern, insbesondere von Rindern, gewesen sein soll.

Gesichert hingegen ist, dass das Theorem schon bei den Babyloniern bekannt war. Wir finden es in den Keilschriften, die schon ein Jahrtausend vor der Zeit der Pythagoreer entstanden sind. Es besteht die Möglichkeit, dass Pythagoras dieses Wissen auf seinen Reisen kennengelernt und mitgebracht hat.¹⁹ Die Pythagoreer brachten allgemein viele neue Kenntnisse von Reisen nach Hause, über die dann diskutiert wurde. Sie waren die ersten, die es notwendig fanden, durch Abstraktion Beweise zu finden. Die Beweisführung wurde eine Kunst, auf die man um so mehr stolz war, wenn man es schaffte die Denkschritte zwar so knapp wie möglich, aber natürlich trotzdem lückenlos darzustellen.²⁰

Der Satz des Pythagoras kann in seiner ursprünglichen Form wie folgt ausgedrückt werden:

In einem gegebenen Dreieck (Abbildung 1) mit den Eckpunkten ABC ist der Winkel bei A genau dann ein rechter Winkel, wenn die Fläche des Quadrats über der (A gegenüberliegenden) Seite a der Flächensumme der Quadrate über den (anderen beiden) Seiten b und c entspricht ($a^2 = b^2 + c^2$).²¹

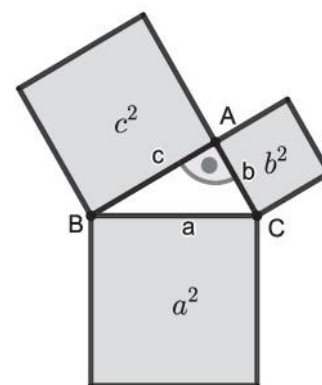


Abbildung 1: Veranschaulichung Satz des Pythagoras

¹⁹ Van der Waerden Bartel Leendert: *Erwachende Wissenschaft*. Ägyptische, Babylonische und griechische Mathematik. Übersetzt von Helga Habicht. Basel: Birkhäuser AG. 1956, 164-165.

²⁰ Starke, Erste Anfänge der Naturwissenschaften, 239.

²¹ Claudi Alsina: *Der Satz des Pythagoras*. Die heilige Geometrie von Dreiecken. Übersetzt von Gina Beitscher. Kerkdriel: Librero 2016, 42.

Van der Waerden gibt in seinem Buch *Die Pythagoreer* einen Beweis für den Satz des Pythagoras, von dem er denkt, dass er wahrscheinlich so bewiesen wurde.

Bei diesem Beweis wird von der Ecke C aus eine Normale CD auf die Hypotenuse aufgestellt. Diese teilt die Hypotenuse c in die Teilstrecken p und q . Wird diese Normale bis E verlängert, teilt sie somit auch das Quadrat c^2 in zwei Rechtecke. Danach wird mittels Proportionen bewiesen, dass diese Rechtecke Flächeninhalt $pc = a^2$ und beziehungsweise $qc = b^2$ besitzen. Denn die Teildreiecke ACD und CBD sind dem ganzen Dreieck ABC ähnlich und so gilt:

$$p : a = a : c$$

$$q : b = b : c$$

woraus unmittelbar $pc = a^2$ und $qc = b^2$ folgt.

Durch Addition erhält man, was zu beweisen war:

$$c^2 = (p + q)c = pc + qc = a^2 + b^2$$

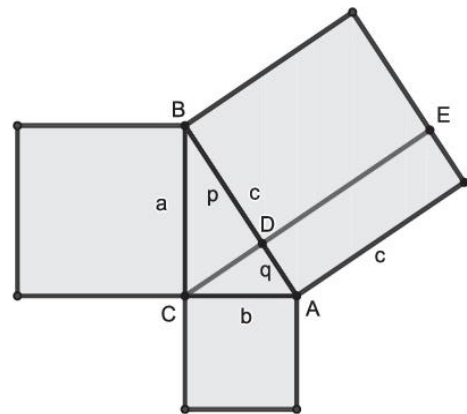


Abbildung 2: Beweis vom Satz des Pythagoras

Im ersten Buch von Euklids *Elementen* findet sich ein sehr ähnlicher Beweis, der aber anders gestaltet ist, da Euklid hier noch keine Proportionenlehre verwendet. Die ersten vier seiner Bücher kommen ohne Proportionen aus, denn diese werden erst im fünften Buch behandelt.²²

2.1.2 Winkelgesetze

Die Pythagoreer bewiesen, dass die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei rechten Winkeln entspricht, also 180° . Ein Beweis dafür ist in einem Fragment nachzulesen, das von Proklos erhalten wurde und vermutlich von Eudemos stammte. Es wird nicht explizit angegeben von wem der Beweis stammte, Eudemos hielt sich zurück und schrieb lediglich *die Pythagoreer*, was darauf hindeutet, dass Eudemos ein Lehrbuch der Elementargeometrie gekannt hatte, von dem nur allgemein *Die Pythagoreer* als Autoren genannt wurden.

²² Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 358-359.

Der Beweis, dass die Winkelsumme in einem Dreieck 180° beträgt, lautet bei Eudemos wie folgt (die Bezeichnungen der Eckpunkte angepasst an die heutige Schreibweise):

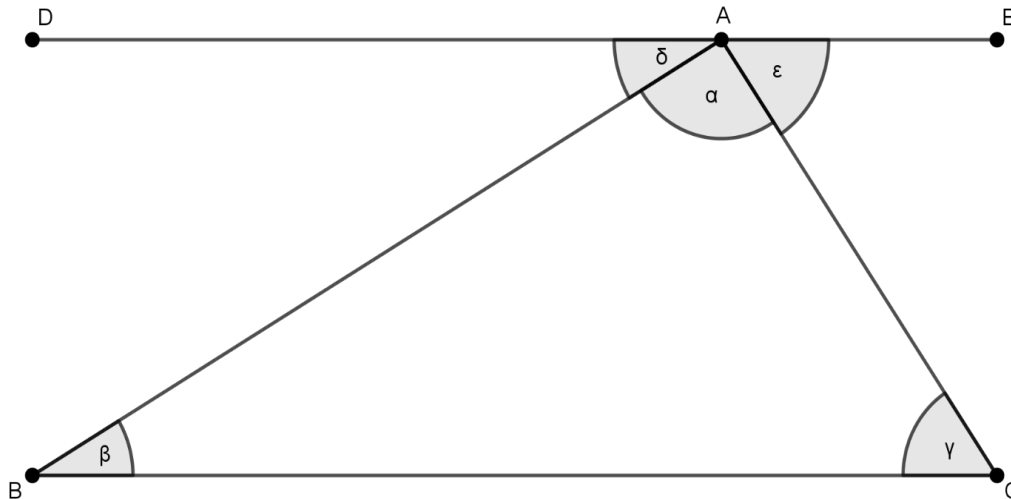


Abbildung 3: Winkelsumme im Dreieck

Sei ABC ein Dreieck. Ziehe durch A eine Gerade DE parallel zu BC . Da BC und DE parallel sind, sind die Wechselwinkel gleich, also der Winkel DAB ($=\delta$) gleich ABC ($=\beta$) und EAC ($=\epsilon$) gleich ACB ($=\gamma$). Füge beiderseits den Winkel BAC ($=\alpha$) hinzu. So werden die Winkel DAB ($=\delta$) und BAC ($=\alpha$) und CAE ($=\epsilon$), die zusammen zwei rechte Winkel bilden, gleich der Summe der drei Winkel des Dreiecks sein. Also ist die Summe der drei Winkel des Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln. So ist der Beweis der Pythagoreer.²³

2.1.3 Flächenanlegungen

Die Flächenanlegung wurde von den Pythagoreern entwickelt um lineare und quadratische Gleichungen geometrisch lösen zu können.²⁴

Proklos schreibt in seinem Kommentar zu Euklid:

Diese Dinge sind alt, so sagen die um Eudemos, und sind Erfindungen der Muse der Pythagoreer, nämlich die Anlegung der Fläche, ihr Überschuss und

²³ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 337.

²⁴ Alten Heinz-Wilhelm, Djafari Naini Alireza, Eick, Bettina u.a.: *4000 Jahre Algebra*. Geschichte – Kulturen – Menschen. Vom Zählstein zum Computer. Hrsg. von H.-W. Alten, J. Sander, Th. Sonar, A. Djafari-Naini, B. Schmidt-Thieme, E. Wagner, Kl.-J. Förster, K.-H. Schlote, H. Wesemüller-Kock. 2. aktualisierte und ergänzte Auflage. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag 2014., 73.

ihr Mangel. Von diesen nahmen die Neueren die Namen und übertrugen sie auf die sogenannten Kegelschnitte und nannten von diesen die eine Parabel, die andere Hyperbel und die dritte Ellipse, während jene alten und göttlichen Männer (die Pythagoreer) die Bedeutung dieser Namen in der Konstruktion von ebenen Flächen auf einer begrenzten Geraden erblickten.²⁵

Wie aus dem Text von Proklos zu entnehmen ist, werden drei verschiedene Arten der Flächenanlegung unterschieden:

- 1) einfache Flächenanlegung
- 2) Flächenanlegung mit Defekt
- 3) Flächenanlegung mit Exzess

1) Bei der einfachen Flächenanlegung wird an eine gegebene Strecke a ein gegebener Flächeninhalt F angelegt. Es wird also die algebraische Gleichung $F = ab$ geometrisch gelöst.²⁶ Das griechische Wort **parabellein** bedeutet Anlegen und daher stammt auch das Wort Parabel.²⁷

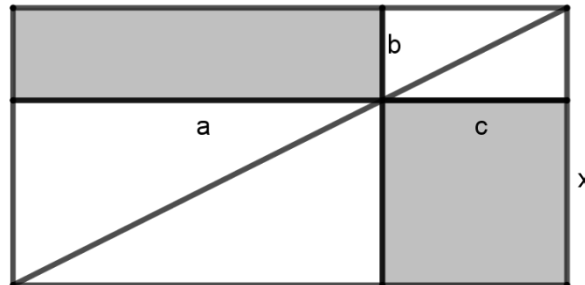


Abbildung 4: Einfache Flächenanlegung

Um die Gleichung $ab = cx$ zu lösen, kann die einfache Flächenanlegung verwendet werden. Es wird an ein gegebenes Rechteck mit Flächeninhalt ab die ebenfalls gegebene Seite c verlängert. Danach wird bc zu einem Rechteck vervollständigt. Anschließend wird die Diagonale durch das Rechteck bc gezeichnet und soweit verlängert, bis sie sich mit der ebenfalls verlängerten Seite b im Eckpunkt eines neu

²⁵ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 342-343.

²⁶ Gericke Helmuth: *Mathematik in Antike, Orient und Abendland*. Wiesbaden: Fourier Verlag 2003, 128.

²⁷ Alten, Djafari, Eick u.a.: 4000 Jahre Algebra, 71.

zu vervollständigenden Rechtecks treffen. Nun kann das Rechteck cx eingezeichnet werden, das denselben Flächeninhalt besitzt wie ab .²⁸

An der Verhältnisgleichheit der Seiten ist leicht nachzuvollziehen, dass

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{b} \Rightarrow ab = cx$$

gilt und die beiden Flächen tatsächlich gleich groß sind.

2) Die Flächenanlegung mit Defekt ist, in der einfachsten Form, die Aufgabe an eine gegebene Strecke a eine gegebene Fläche p so anzulegen, dass ein Quadrat fehlt.²⁹ Das griechische Wort für Defekt heißt *Elleipsis*. Von diesem leitet sich auch das Wort Ellipse ab.

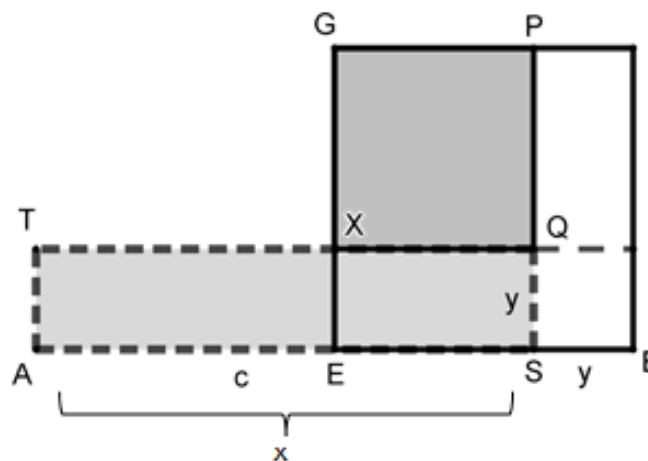


Abbildung 5: Flächenanlegung mit Defekt

Geometrisch gelöst wird also der Zusammenhang $x + y = c$ und $yx = p$ folgendermaßen (Abbildung 5):

Die gegebene Seite $AB = c$ wird in gleiche und ungleiche Teile geteilt. Der Punkt E halbiert c , der Punkt S teilt die Seite in 2 ungleiche Teile, wir nennen die Strecke $SB = y$. Danach zeichnet man das Quadrat $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ über EB . Und vom Eckpunkt G ein Quadrat der Fläche $\left(\frac{c}{2}\right)^2 - p$. Die kürzere Seite ergibt sich durch die Verlängerung QS

²⁸ Becker Oskar: *Das mathematische Denken der Antike*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1957, 61.

²⁹ Gericke, *Mathematik in Antike, Orient und Abendland*, 128.

von PQ und die Verlängerung QT von QX gibt die längere Seite des gesuchten Rechtecks.³⁰

Das begründet sich wie folgt:

$$y = \frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - p}, \quad x = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - p}.$$

$$\text{Dann ist } x + y = c \text{ und } xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - p\right) = p.$$

Lösen wir das Gleichungssystem algebraisch, ergibt das:

$$x + y = c$$

$$xy = p$$

$$\Rightarrow cy - y^2 = p$$

3) Schließlich bleibt noch die Flächenanlegung mit Exzess. Exzess, also Überschuss, heißt auf Griechisch *Hyperbole*, das Wort Hyperbel kann von dem griechischen Ausdruck abgeleitet werden.³¹ Hier ist eine Fläche an eine gegebene Strecke so anzulegen, dass das überschießende Flächenstück ein Quadrat wird. Dabei handelt es sich um eine Flächenanlegung mit Exzess in der einfachsten Form.³²

Hier wird von gegebener Strecke c der Mittelpunkt E gezeichnet und über EB wiederum ein Quadrat konstruiert. Vom Eckpunkt G aus wird als nächstes ein Quadrat gezeichnet, dass den Flächeninhalt $\left(\frac{c}{2}\right)^2 + p$ besitzt.

Die Verlängerung der Seite AB mit dem Quadrat führt zum Schnittpunkt T . Die Seite TV bildet die kürzere Seite des gesuchten Rechteck, die Seiten AT beziehungsweise UV ergeben die längere Seite.

³⁰ Junge Gustav: "Flächenanlegung und Pentagramm: Ein Beitrag zur Entwicklungs-Geschichte von Euklids Elementen.", in: *Osiris*, Vol. 8, 1948. <http://www.jstor.org/stable/301527> (letzter Zugriff: 27.06.2018), 317.

³¹ Van der Waerden, *Erwachen der Wissenschaft*, 201.

³² Becker, *Das Mathematische Denken der Antike*, 62.

Dies kann folgendermaßen begründet werden:

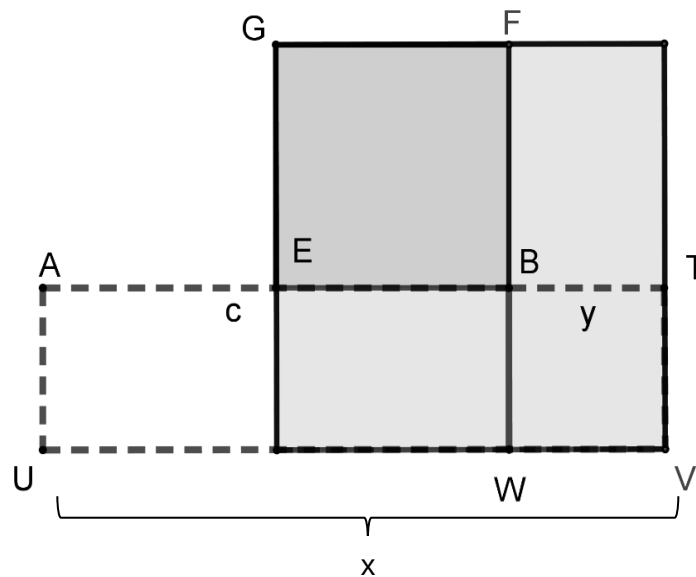


Abbildung 6: Flächenanlegung mit Exzess

$$y = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + p}, x = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + p}.$$

$$\text{Dann ist } x - y = c \text{ und } xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + p - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = p$$

Das Quadrat $BTWV$ ist das überschießende Quadrat, das der Anlegung ihren Namen gibt.³³

Algebraisch wird hier das Gleichungssystem von $x - y = c$ und $xy = p$ gelöst.

$$x - c = y$$

$$xy = p$$

$$\Rightarrow x(x - c) = p \Rightarrow x^2 = p + cx \text{ }^{34}$$

2.1.4 Die Diskussion über die geometrische Algebra

Nun stellt sich noch die Frage, wieso diese algebraischen Aufgaben, die die Pythagoreer vermutlich von den Babyloniern übernommen haben, geometrisch eingekleidet wurden. Dass sich die Griechen an visuellen Darstellungen erfreuten,

³³ Junge, Flächenanlegung und Pentagramm, 318.

³⁴ Gericke, Mathematik in Antike, Orient und Abendland, 130.

werden wir noch öfter bemerken. Doch reicht die pure Freude am Schauen nicht ganz aus, um zu rechtfertigen, warum die Pythagoreer lineare und quadratische Gleichungen auch geometrisch lösen wollten. Der Grund ist allerdings auch leicht auszumachen: Die Entdeckung der irrationalen Zahlen. Nach Pappos sollen die Pythagoreer den Anfang in dieser Thematik gemacht haben. Die Diagonale eines Quadrats hat kein gemeinsames Maß mit der Seite, was bedeutet, dass die Diagonale weder als ganze Zahl noch als Bruch dargestellt werden kann. Etwas später werden wir die Entdeckung der irrationalen Zahlen noch genauer behandeln. Der Grund für die geometrische Übersetzung der algebraischen Gleichung ist, dass die Pythagoreer immer versuchten alles exakt zu berechnen. Ihnen reichte keine Näherung. Die Gleichung $x^2 = 2$ ist weder im Bereich der Zahlen, noch im Bereich der Zahlenverhältnisse, die die Pythagoreer sehr häufig verwendeten, lösbar. Aber geometrisch ist diese Rechnung sehr wohl exakt zu lösen, denn die Diagonale eines Einheitsquadrats ist eine Lösung. Die geometrische Algebra ist somit eine exakte Wissenschaft und gilt auch für irrationale Strecken, für einen Pythagoreer also ein klares Muss.³⁵

Das Konzept der geometrischen Algebra war aber stark kritisiert und löste Diskussionen aus. So schreibt zum Beispiel van der Waerden:

When one opens Book II of the Elements, one finds a sequence of propositions, which are nothing but geometric formulations of algebraic rules.

Der dänische Mathematiker Zeuthen und er sahen dort den Beginn der modernen Algebra, eingekleidet in eine geometrische Form. Die Größen werden als „das Rechteck von a und b “ oder „das Quadrat von a “ genannt, anstatt das Produkt von a und b oder einfach a^2 . Sie sind der Meinung, dass der Gedankengang der Griechen stets ein algebraischer war, die Formulierung dagegen ein geometrischer Weg. Die beiden vertraten auch die Ansicht, dass diese geometrische Algebra die Fortsetzung dessen war, was schon die Babylonier betrieben, denn auch diese verwendeten ähnliche Begriffe. Sie sahen keinen Grund zur Sorge, dass es durch die Verwendung moderner algebraischer Notation, anstatt der umständlichen Formulierungen, zu einer falschen Darstellung kommen könnte. Anders sieht das aber zum Beispiel der israelische Mathematikhistoriker Sabetai Unguru:

³⁵ Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 206.

To read ancient mathematical texts with modern mathematics in mind is the safest method for misunderstanding the character of ancient mathematics, in which philosophical presuppositions and metaphysical commitments played a much more fundamental and decisive role than they play in modern mathematics. To assume that one can apply automatically and indiscriminately to any mathematical content the modern manipulative techniques of algebraic symbols is the surest way to fail to understand the inherent differences built into the mathematics of different eras.

Es wird also diskutiert, ob die Griechen tatsächlich algebraische Problemstellungen als Ausgangspunkt für ihre Mathematik betrachteten. Unguru spricht sich klar dafür aus, dass es keinerlei Beweise oder Hinweise dafür gibt, dass die Griechen in irgendeiner Weise algebraisch dachten. Er meinte, dies sei *naive and historically untenable*. Seiner Auffassung nach, kam unter anderem Zeuthen nur zu der Idee einer geometrischen Algebra, weil Euklids Propositionen in moderne algebraische Symbolsprache übersetzt wurde. Van der Waerden wiederum argumentiert dagegen, dass der arabische Mathematiker Thābit ibn Qurra in einer wenig bekannten Abhandlung zeigt, dass die Lösung der drei Formen der quadratischen Gleichung äquivalent ist zur Flächenanlegung mit Exzess beziehungsweise mit Defekt, so wie sie bei Euklid beschrieben wird und das, obwohl Thābit noch keine moderne algebraische Symbolschreibweise kannte.³⁶

2.1.5 Reguläre Polyeder

Ebenfalls Proklos schreibt die Entdeckung regulärer Polyeder Pythagoras zu. Allerdings gibt es einen Kommentar von einem unbekannten Autor zum dreizehnten Buch der *Elemente* Euklids, in dem es heißt, dass die Pythagoreer nur drei reguläre Polyeder gekannt haben und zwar den Würfel, den Tetraeder und den Dodekaeder. Erst Theaitetos soll später die beiden anderen, den Oktaeder und den Ikosaeder entdeckt haben.

Dass der Dodekaeder bekannt war, wird durch einen Fund eines etruskischen Dodekaeders aus Speckstein aus der Zeit vor 500 v.Chr. bestätigt. Regelmäßige Fünfecke bilden die Seiten eines Dodekaeders. Zeichnet man die Diagonalen auch ein, erhält man ein Sternfünfeck. Diese Figur hatte für die Pythagoreer eine spezielle

³⁶ Fauvel, John; Gray, Jeremy: *The History of Mathematics: A reader*. Basingstoke/London: Macmillan Education with the Open University 1987, 140-143.

Bedeutung, sie war nicht nur das Symbol für Gesundheit, sondern diente auch als Erkennungszeichen.

Um ein solches Sternfünfeck zu konstruieren, nutzten die Pythagoreer die Tatsache, dass jede der fünf Linien, jede andere nach dem sogenannten *goldenen Schnitt* zerlegt.

$$AK:KB = KB:AB$$

Oder, wenn $AK = a - x$; $KB = x$ und $AB = a$:

$$(a - x):x = x:a$$

$$\Rightarrow x^2 = a(a - x)^{37}$$

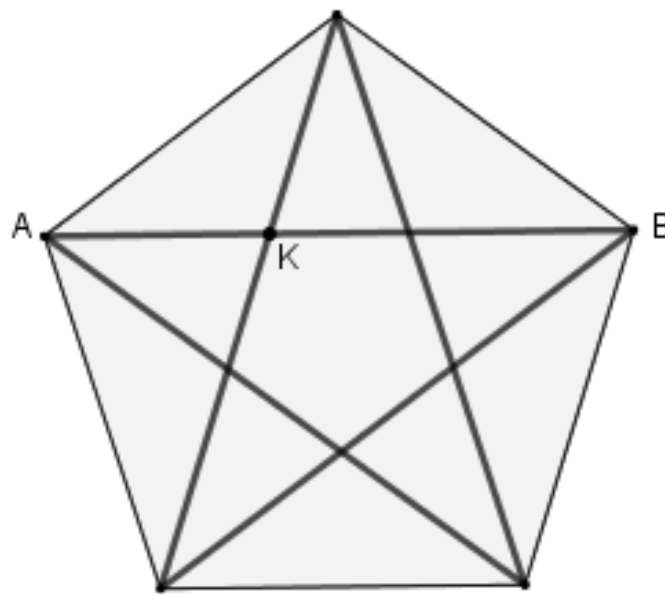


Abbildung 7: Regelmäßiges Fünfeck mit eingeschriebenem Pentagramm

³⁷ Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, 165-166.

Dass sich die Linien wirklich im goldenen Schnitt teilen, kann man folgenderweise zeigen:

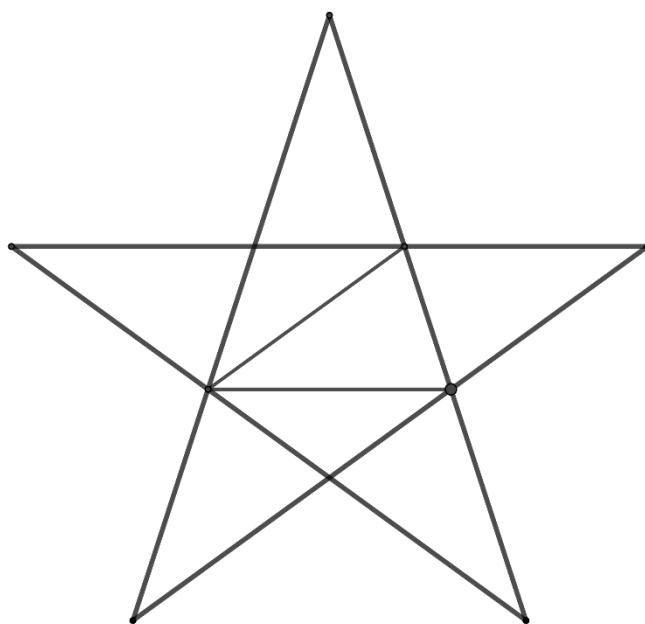


Abbildung 9: Teildreiecke im Pentagramm

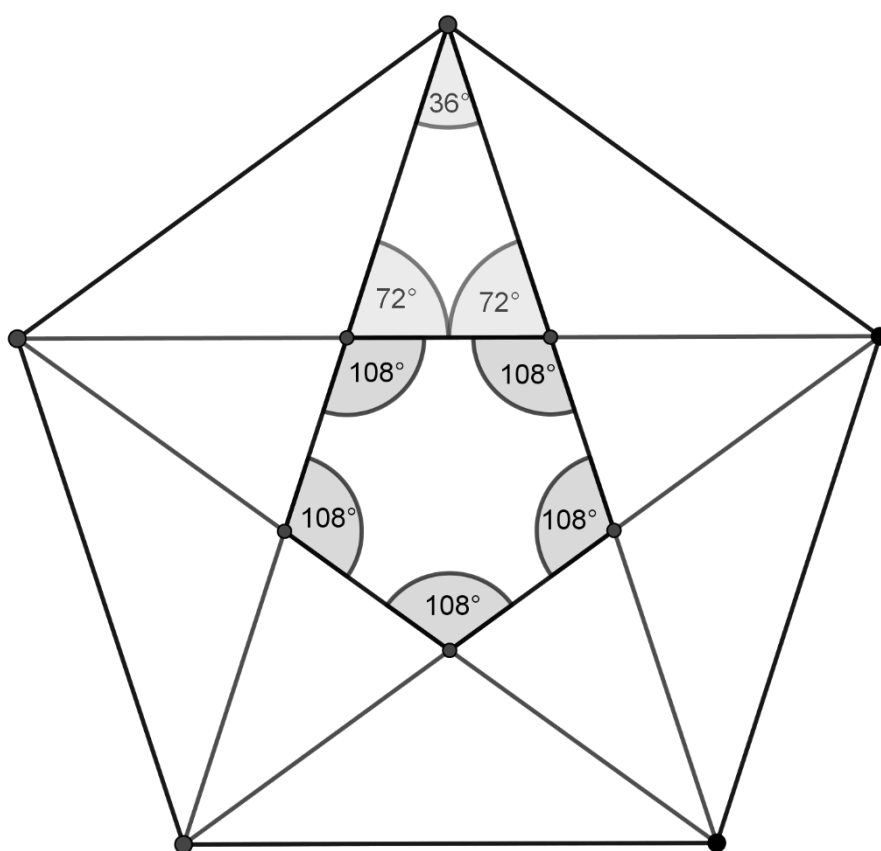


Abbildung 8: Winkelsummen im Pentagramm

Wie in Abbildung 8 zu erkennen ist, kann das regelmäßige Fünfeck, das im Inneren des Pentagramms entsteht in 3 Dreiecke zerlegt werden. Da die Innenwinkel in einem Dreieck 180° betragen, ergibt die Winkelsumme des Fünfecks $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. In Folge dessen betragen die einzelnen Winkel im Fünfeck genau 108° . Jeder Komplementärwinkel dazu misst also genau 72° . Betrachtet man nun eines der 5 entstehenden Dreiecke, wie in Abbildung 9, genauer, so fällt auf: Um wiederum auf die Winkelsumme von 180° in einem Dreieck zu kommen, muss der fehlende spitze Winkel 36° betragen. Das bedeutet jede Spitze im Pentagramm hat einen Winkel von 36° .

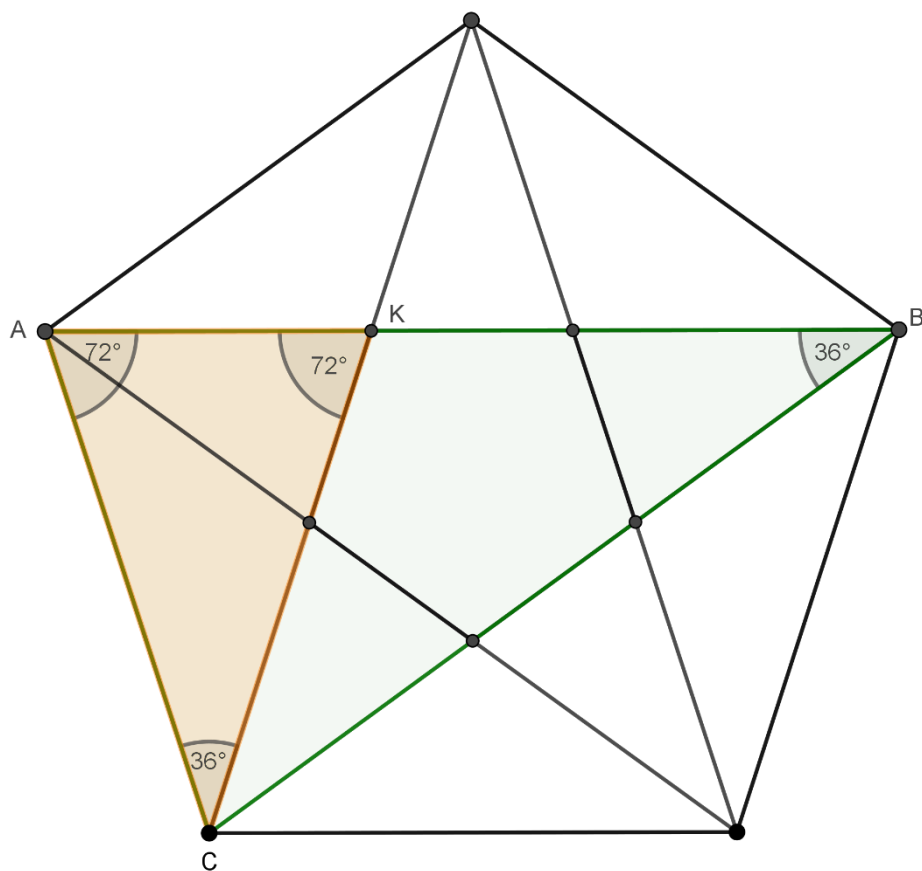


Abbildung 10: Ähnliche Dreiecke im Pentagramm

Abbildung 10 zeigt uns, dass die Dreiecke ABC und AKC ähnlich sind, da sie exakt dieselben Innenwinkel besitzen. Daraus folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
 AB:AC &= KC:KA \text{ und weil } AC = CK = KB \\
 \Rightarrow AB:KB &= KB:AK \\
 \Leftrightarrow AK:KB &= KB:AB
 \end{aligned}$$

Somit haben wir gesehen, dass die Diagonalen tatsächlich im goldenen Schnitt zerlegt werden und die Gleichung $x^2 = a(a - x)$ gilt.

Und wir haben ja bereits erfahren, wie die Pythagoreer solch eine Gleichung lösen konnten: mit dem Prinzip der Flächenanpassung.* ³⁸

2.2 Arithmetik

Bevor ich weiter auf die verschiedenen zahlentheoretischen Entdeckungen der Pythagoreer eingehe, möchte ich noch klären, dass mit dem Begriff Zahlen immer positive ganze Zahlen gemeint sind. Die Griechen beschäftigten sich bei der Zahlentheorie in heutiger Sprache mit der Lehre der natürlichen Zahlen. Eine interessante Eigenheit der griechischen Mathematiker war, dass sie auch die Einheit, also die 1, nicht zu den Zahlen zählten, da die Einheit keine Vielheit ist. Dies führte zu komplizierten Formulierungen wie: „Wenn a eine Zahl oder 1 ist“. Im Folgenden werde ich die 1 aber immer zu den Zahlen rechnen und nicht mehr extra erwähnen.³⁹

2.2.1 Figurierte Zahlen

Von den figurierten Zahlen kennen die Pythagoreer die Dreieckszahl, die Quadratzahl, die Rechteckszahl, sowie die fünfeckige Zahl und noch weitere. Man findet sie beim Spätpythagoreer Nikomachos im Werk *Einführung in die Arithmetik*.

Die figurierten Zahlen wurden meist mit Rechensteinen gelegt, man kann die Entstehung und Berechnung so besonders gut nachvollziehen.⁴⁰

Eine Dreieckszahl entsteht durch die Addition der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Ein besonderes Beispiel für eine solche Dreieckszahl ist

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

da diese nach Theon die erste Tetraktys bildet und Pythagoras dieses Ergebnis als ein *vollkommenes Dreieck* bezeichnet haben soll.⁴¹

³⁸ Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 165-166.

³⁹ Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 180.

⁴⁰ Alsina, *Der Satz des Pythagoras*, 30.

⁴¹ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 394.

* Van der Waerden verwendet den Begriff der Flächenanpassung, den wir davor im Kapitel 2.1.3 unter Flächenanlegung kennengelernt haben.

Mit dem Ausdruck

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

lassen sich also alle Dreieckszahlen berechnen mit der Grundseite von n Zählsteinen.

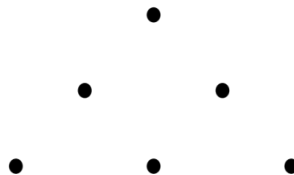


Abbildung 11: Mit Rechensteinen gelegte Dreieckszahl

Bei den Quadratzahlen handelt es sich um die Addition von ungeraden Zahlen, man erhält:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

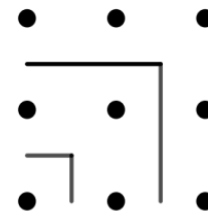


Abbildung 12: Quadratzahl mit Gnomon

Betrachten wir ein Quadrat der Seitenlänge 2, so kann das nächstgrößte Quadrat gelegt werden indem auf zwei Seiten eine Reihe von Zählsteinen hinzugefügt werden. Wie man in Abbildung 12 sehen kann, entstehen mit dieser Methode tatsächlich Quadratzahlen. Fängt man mit einem Zählstein an und legt dann einen Winkelhaken (oder einen sogenannten Gnomon) herum, entsteht wieder ein Quadrat. Wird dann wieder ein Gnomon herum gelegt entsteht die nächste Quadratzahl. Schnell wird deutlich, dass der Gnomon immer die nächste ungerade Zahl ist. Wenn n^2 eine beliebige Quadratzahl ist, dann führt die Addition von $2n + 1$ zur nächsten Quadratzahl $(n + 1)^2$.⁴²

Rechteckszahlen werden auf ähnliche Weise veranschaulicht. Allerdings ist der Startwert nun nicht nur 1 Zählstein, sondern 2. Werden dann wie vorhin Gnomone darum angelegt, erhält man jetzt Rechteckszahlen $n(n + 1)$.

⁴² Heath Thomas: A history of Greek Mathematics Vol I. Oxford: At the clarendon press 1921, 76-77.

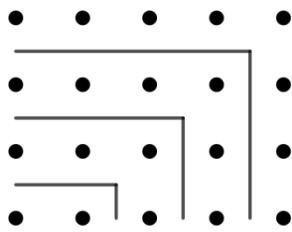


Abbildung 13: Rechteckszahl mit Gnomon

Nikomachos bezeichnet diese auch als heteromeke Zahlen. Sowohl er als auch Theon von Smyrna stellten beide fest, dass die heteromeken Zahlen als Summen von aufeinanderfolgenden geraden Zahlen erhalten werden können.⁴³

$$2 + 4 = 2 \cdot 3$$

$$2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4$$

Oder allgemein würden wir heute schreiben:

$$2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

Wird dieser Ausdruck halbiert, sowie die Rechteckszahl in Abbildung 14 erhält man offensichtlich die Formel für die Dreieckszahlen:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

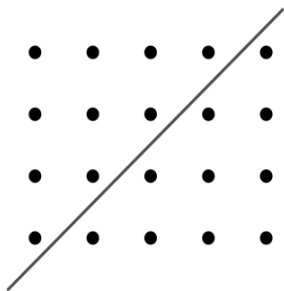


Abbildung 14: Rechteckszahl aus zwei Dreieckszahlen

Allgemein handelt es sich bei der Rechteckszahl aus zwei Dreieckszahlen um eine Zahl der Form

$$n(n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{n(n + 1)}{2}$$

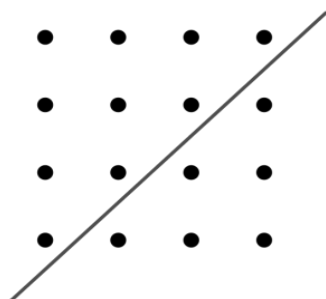


Abbildung 15: Quadratzahl aus zwei Dreieckszahlen

und bei einer Quadratzahl aus zwei Dreieckszahlen um eine Zahl der Form

$$n^2 = \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{n(n - 1)}{2}$$

Und nicht weniger offensichtlich ist das Theorem von Theon, das besagt, dass jede Quadratzahl sich aus

⁴³ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 394.

zwei Dreieckszahlen zusammensetzt. Ganz leicht nachzuvollziehen, ist dies, wenn die Figur durch Rechensteine veranschaulicht wird, wie in Abbildung 15.⁴⁴

2.2.2 Gnomone

Ursprünglich war ein Gnomon ein astronomisches Instrument zur Zeitmessung. Anaximander soll es aus Babylon nach Griechenland mitgebracht haben. Es handelt sich um einen senkrechten Stab, der einen Schatten auf eine flache oder halbrunde Oberfläche wirft. Auch Oenopides nennt ein senkrecht herabfallendes Lot „gnomon-artig“.

In einer weiteren Bedeutung bei Theognis handelt es sich bei einem Gnomon um ein Instrument um einen rechten Winkel zu zeichnen.

Ein Gnomon wird bei Philolaos ein Quadrat genannt, das ein Quadrat bleibt, wenn ein kleineres Quadrat aus dem größeren ausgeschnitten wird.

Bei Euklid wird der Gnomon noch erweitert: *it is defined as made up of anyone whatever of the parallelograms about the diameter (diagonal) with the two complements.*

Heron von Alexandria definiert dann schließlich den Gnomon allgemein und für uns leichter verständlich: Ein Gnomon ist eine Figur, die eine andere Figur oder Zahl durch Hinzufügen oder Wegnehmen nicht in ihrer Form oder Art verändert.⁴⁵

2.2.3 Lehre vom Geraden und Ungeraden

Im neunten Buch von Euklids Elementen werden eine Menge von Lehrsätzen angeführt, die sich mit geraden und ungeraden Zahlen beschäftigen. Inhaltlich beschäftigen sich diese zum Beispiel damit, dass die Summe zweier gerader Zahlen gerade ist, die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen gerade ist oder dass die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ungerade ist. Neben weiteren Lehrsätzen finden sich auch, dass das Produkt zweier ungerader Zahlen ungerade ist und das Produkt zweier gerader Zahlen gerade ist. Diese Erkenntnisse sind grundlegend für weitere Beweise, wie zum Beispiel den Beweis zur Inkommensurabilität im Kapitel 2.3.

⁴⁴ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I 83-84.

⁴⁵ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I 78-79.

Dass diese Lehrsätze von Euklid einfach übernommen wurden, aber eigentlich aus der Feder der Pythagoreer stammten, hat Oskar Becker dargestellt. Er schreibt, dass Epicharmos auf die Lehre vom Geraden und Ungeraden anspielt und diese auch verbindet mit der Rechenstein-Mathematik der Pythagoreer. Da Epicharmos Komödien um 480 v.Chr. entstanden waren, ist es also sehr wahrscheinlich, dass er dieses Wissen von den älteren Pythagoreern verarbeitete.⁴⁶

2.2.4 Primzahlen

Nikomachos von Gerasa beschäftigte sich unter anderem mit der Erzeugung von Primzahlen. Dafür verwendet er die Methode des „Sieb des Eratosthenes“, das folgendermaßen funktioniert: Zuerst werden alle ungeraden Zahlen in einer Tabelle notiert, beginnend mit der 3. Vielfache von 3 sind demnach keine Primzahlen, diese ungeraden Zahlen können dann aus der Liste aller ungeraden Zahlen gestrichen werden. Wenn also allgemein betrachtet n eine ungerade Zahl bezeichnet, müssen $n - 1$ Zahlen weitergezählt werden, um zum nächsten Vielfachen zu kommen. Jede mit dieser Methode gefundene Zahl kann dann gestrichen werden. So wird mit jeder weiteren Zahl verfahren und übrig bleiben dann die Primzahlen. Dieses Vorgehen ist offensichtlich sehr aufwändig und bei großen Zahlen praktisch nicht mehr wirklich anwendbar.⁴⁷

2.2.5 Befreundete Zahlen

Zwei Zahlen heißen befreundet, wenn jede Zahl gleich der Summe der echten Teile der anderen ist. Dabei heißt d echter Teiler, wenn $d|n$ und $1 \leq d < n$. Das kleinste Paar befreundeter Zahlen ist 220 und 284, denn

Summe der echten Teiler von 220:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

Summe der echten Teiler von 284:

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Auch diesen Begriff kannten die Pythagoreer und wie wir schon erfahren haben, waren sie fasziniert von dieser Art der Verbundenheit und Zusammenhängen von Zahlen. Es ist aber auch bekannt, dass sich die Babylonier dieser

⁴⁶ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 396-398.

⁴⁷ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I, 100.

Zahlenverwechslungen und Kunststücken angenommen haben und die Beschäftigung damit liebten. Vielleicht wurden ja auch diese Entdeckungen von den Pythagoreern übernommen und vertieft.⁴⁸

2.2.6 Vollkommene, abundante und defiziente Zahlen

Eine Vollkommene Zahl wird definiert als eine Zahl, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist.⁴⁹ Vollkommene Zahlen stellen den Übergang zwischen abundanten und defizienten Zahlen dar. In der Literatur findet man verschiedene Ausdrücke, Sir Thomas Heath verwendet den Begriff over-perfect für abundante Zahlen und defective für defiziente Zahlen. Den gegebenen Definitionen zufolge sind diese Begriffe allerdings Beschreibungen für dieselben Arten von Zahlen und somit analog.⁵⁰

Ich werde nur den Begriff abundant verwenden. Eine abundante Zahl ist eine Zahl deren echte Teilersumme größer ist, als die Zahl selbst. Das gilt zum Beispiel für die Zahl 12: Die echten Teiler der Zahl 12 sind: 1,2,3,4 und 6. Bildet man davon die Summe ergibt das:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$$

Ein Beispiel für eine defiziente Zahl, bei der die Teilersumme kleiner ist als die Zahl selbst, ist die Zahl 8:

$$1 + 2 + 4 = 7 < 8$$

Die kleinste vollkommene Zahl ist 6, die Summe ihrer Teiler ist gleich der Zahl selbst:

$$1 + 2 + 3 = 6 = 6$$

Nikomachos vergleicht vollkommene Zahlen, die die Mitte zwischen „excess and deficiency“, also Übermaß und Mangel darstellen mit einem harmonischen Zusammenklang.⁵¹ Er vergleicht sie mit Tugenden, wie zum Beispiel der Mäßigkeit.

Um eine vollkommene Zahl zu erhalten beschreibt Nikomachos von Gerasa in der *Einführung in die Arithmetik* seine Methode wie folgt:

⁴⁸ Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 161.

⁴⁹ Dickson L.E.: „Perfect and Amicable Number.“, in: *The scientific Monthly* 12.(4), 1921, 349, <http://www.jstor.org/stable/6610> (letzter Zugriff: 19.04.2018).

⁵⁰ Heath, *A history of Greek Mathematics Vol I* 74.

⁵¹ Dickson, *Perfect and Amicable Numbers*, 349.

Man geht von der geometrischen Reihe aus: 1, 2, 4, 8, 16, ... und schreibt diese in eine Zeile so weit man möchte. Danach addiert man die Glieder, eines nach dem anderen und beobachtet ob die Summe eine Primzahl ist oder nicht. Ist die Summe prim, multipliziert man sie jedes Mal mit dem letzten Glied, das man addiert hat und das Ergebnis ist eine vollkommene Zahl. Ist sie nicht prim, muss man wieder ein weiteres Glied addieren und prüfen ob die Summe prim ist.

$$1 + 2 = 3 ; 3 \text{ ist Primzahl, also ist } 3 \cdot 2 = 6 \text{ vollkommen}$$

$$1 + 2 + 4 = 7 ; 7 \text{ ist Primzahl, also ist } 7 \cdot 4 = 28 \text{ vollkommen}$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15; 15 \text{ ist keine Primzahl}$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31; 31 \text{ ist Primzahl also ist } 31 \cdot 16 = 496 \text{ vollkommen}^{52}$$

Auf diese Art und Weise hat Nikomachos auch die vierte vollkommene Zahl 8128 errechnet.⁵³

Im Gegensatz zu Nikomachos, der lediglich vollkommene Zahlen erzeugte, bewies Euklid, dass $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ eine vollkommene Zahl ergibt, solange $2^p - 1$ eine Primzahl ist. Für 2, 3, 5 und 7 ergibt das die Werte 3, 7, 31 und 127, die alle Primzahlen sind. Die dann mittels des Produktes erzeugten vollkommenen Zahlen, sind genau die, die auch Nikomachos errechnet hat. Die fünfte vollkommene Zahl 33 550 336 wird das erste Mal erst im Manuscript Codex lat. Monacensis 14908 im Jahr 1456 erwähnt.⁵⁴

2.2.7 Zahlenmystik der Zahl 17

Warum fühlten sich die Pythagoreer von der Zahl 17 so abgestoßen? Bei den Zahlen 16 und 18 handelt es sich laut Plutarchos um die einzigen Flächenzahlen, bei denen der Flächeninhalt gleich dem Umfang ist. Beim Quadrat ist das bei der Zahl 16 der Fall und beim Rechteck, bei der Zahl 18. Die 17 dagegen liegt genau dazwischen. Sie „sperrt und scheidet sie voneinander und zerlegt das Epogdoos-Verhältnis in ungleiche Intervalle“. Vom *Epogdoon* werden wir später noch genaueres lesen, für jetzt reicht es zu wissen, dass es sich dabei um ein bestimmtes Verhältnis der

⁵² Van der Waerden, Die Pythagoreer, 399-401.

⁵³ Berggren John Lennart: *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York: Springer Verlag 2016, 223.

⁵⁴ Dickson, Perfect and Amicable Numbers, 350-351.

Musiklehre handelt und zwar 18:16 oder 9:8, das einem Ganzton entspricht. Die Zahl 17 schafft es dieses Verhältnis in zwei ungleiche Teilintervalle 18:17 und 17:16 zu zerlegen.

Plutarchos spricht von einem Rechteck mit ganzzahligen Seitenzahlen x und y . Der Flächeninhalt sei gleich dem Umfang des Rechtecks:

$$\begin{aligned} xy &= 2x + 2y \Leftrightarrow xy - 2y = 2x \Leftrightarrow y(x - 2) = 2x \Leftrightarrow y = \frac{2x}{x - 2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2(x + 2 - 2)}{x - 2} \Leftrightarrow y = \frac{2x - 4 + 4}{x - 2} \Leftrightarrow y = \frac{2x - 4}{x - 2} + \frac{4}{x - 2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2(x - 2)}{x - 2} + \frac{4}{x - 2} \Leftrightarrow 2 + \frac{4}{x - 2} = y, \\ \text{dabei ist } x &= 2 \text{ unmöglich, weil dann } 2y = 4 + 2y \text{ wäre,} \\ \text{ist Widerspruch.} \end{aligned}$$

Da hier von ganzzahligem y gesprochen wird, gibt es nur drei Möglichkeiten die Gleichung aufzulösen, weil $x - 2$ ein Teiler von 4 sein muss.

1. $x - 2 = 1$, dann ist $x = 3$; $y = 6$ und $xy = 18$
2. $x - 2 = 2$, dann ist $x = 4$; $y = 4$ und $xy = 16$
3. $x - 2 = 4$, dann ist $x = 6$; $y = 3$ und $xy = 18$

Es gibt also tatsächlich nur die beiden Möglichkeiten 16 und 18 für ganzzahlige y , die Plutarchos genannt hat.

Besonders die Neupythagoreer Nikomachos und Iamblichos haben diese Art der Zahlenmystik sehr ausführlich gelebt. Vermutlich gab es auch ein verlorengegangenes Werk von Nikomachos, das Iamblichos als Vorlage diente, in dem mystische und göttliche Bedeutungen der Zahlen von eins bis zehn ausführlich diskutiert werden.⁵⁵

⁵⁵ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 401-402.

2.2.8 Die Blume des Thymaridas

Ebenfalls zur Arithmetik in der Antike gehört das Lösen von Gleichungssystemen. Zu heutiger Zeit wäre das natürlich ein Teilgebiet der Algebra.

Das Lösen des Gleichungssystems

$$x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = s$$

$$x + x_1 = a_1$$

...

$$x + x_{n-1} = a_{n-1}$$

wird von Iamblichos dem alten Pythagoreer Thymaridas zugeschrieben. Die Lösung lautet:

$$x = \frac{(a_1 + \cdots + a_{n-1}) - s}{n - 2}$$

Die Pythagoreer beschäftigten sich aber auch mit dem Lösen von Gleichungssystemen mit mehreren Unbekannten in folgender Form:

$$x + y = \alpha(z + u)$$

$$x + z = \beta(u + y)$$

$$x + u = \gamma(y + z)$$

Ähnlich wie die Babylonier konnten laut Iamblichos also auch die Pythagoreer diese Gleichungssysteme lösen.⁵⁶

2.3 Irrationalität von $\sqrt{2}$

Auf der babylonischen Keilschrifttafel mit der Nummer 7289, die in der Yale University aufbewahrt wird, sind schon die ersten Berechnungen von $\sqrt{2}$ zu erkennen. Die Tafel stammt vermutlich aus der Zeit zwischen 1800 und 1600 v.Chr.

⁵⁶ Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 190.

und zeigt ein Quadrat mit seinen beiden Diagonalen. Außerdem sind eine Reihe von Zahlen erkennbar, die in Keilschrift im babylonischen Stellenwertsystem zur Basis 60 eingedrückt sind. Forschungen ergaben, dass diese Zahlenangabe bereits der $\sqrt{2}$ auf fünf Kommastellen genau entsprechen:

$$1 + \frac{24}{10} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135$$

Zwischen 800 und 200 v.Chr. ist eine altindische Schrift namens Sulba Sutras entstanden. Auch hier wird die $\sqrt{2}$ auf folgende Art und Weise berechnet:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = \frac{577}{408} = 1,414215686$$

Wir können erkennen, dass ebenfalls eine Berechnung auf die ersten fünf Kommastellen genau möglich war.

Sowohl die Babylonier, als auch die Inder und die Ägypter kannten und verwendeten also Bruchrechnungen. Allerdings diente deren Einsatz hauptsächlich praktischen Zwecken. Dies änderte sich dann in der griechischen Mathematik, denn die Griechen versuchten auch einen theoretischen Aspekt der Zahlen zu betrachten.

Die Entdeckung der Irrationalität von $\sqrt{2}$ wird daher den Pythagoreern zugeschrieben.⁵⁷ Dies kann man zurückführen auf einen Kommentar, der vermutlich von Pappos stammt, zum Beweis im zehnten Buch der Elemente Euklids. Dieser Beweis, dass Seite und Diagonale eines Quadrates kein gemeinsames Maß haben, stammt wahrscheinlich von den Pythagoreern. Am ehesten kommt als Verfasser Hippasos von Metapont in Betracht, da von ihm überliefert ist, dass er die irrationalen Größen zuerst an die Öffentlichkeit gebracht hat. Allerdings gibt es auch Lehrmeinungen, wie zum Beispiel die von K. von Fritz, die behaupten, dass diese erste Irrationalität nicht mithilfe der Diagonale im Quadrat berechnet wurde, sondern die Diagonale im regulären Fünfeck war. Sicher ist das allerdings nicht.⁵⁸

Kommen wir zum Beweis im zehnten Buch von Euklid:

⁵⁷ Alsina, Der Satz des Pythagoras, 64-65.

⁵⁸ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 398-399.

In jedem Quadrat ist die Diagonale d der Seite s linear inkommensurabel. Es ist $d^2 = 2s^2$. Wären sie kommensurabel, so hätten sie ein Verhältnis wie eine (ganze) Zahl p zu einer (ganzen) Zahl q : $d:s = p:q$. Es kann vorausgesetzt werden, dass p und q nicht beide gerade Zahlen sind. Aus $d^2 = 2s^2$ folgt $p^2 = 2q^2$. Daraus folgt nach der Lehre vom Geraden und Ungeraden, dass p nicht ungerade sein kann; es ist also $p = 2p'$. Dann ist aber $q^2 = 2p'^2$, also auch q eine gerade Zahl.

Es handelt sich hier um einen der ältesten Widerspruchsbeweise, die überliefert sind. Bei so einem indirekten Beweis geht man von dem zu Beweisenden aus und möchte mit Hilfe der Annahme des Gegenteils einen Widerspruch erzeugen. Bei dieser Art des Beweisens muss also die zu beweisende Tatsache vorher schon bekannt oder zumindest vermutet worden sein.⁵⁹

2.4 Der Analogiebegriff

Die Lehre von Proportionen (*analogia*) galt in der griechischen Mathematik als der hervorragendste Gegenstand. Sie wurde als etwas Gemeinsames angesehen, das alles Mathematische umfasste.

Die Proportionenlehre kann in drei klar getrennte Einheiten geteilt werden. Zuerst in die musikalische Proportionenlehre der ganzen Zahlen, dann in die Proportionenlehre der ganzen Zahlen, die eine Verallgemeinerung der ersten darstellt und in Euklids Büchern VII und VIII der *Elemente* zu finden ist. Schließlich die allgemeingültige Proportionenlehre des Eudoxos im Buch V der *Elemente*. Dieses enthält nicht mehr nur Zahlen und kommensurable, sondern auch inkommensurable Größen.

Woher kommt nun der Begriff *Analogia* und mit welchen Worten ist er verwandt? Analogie bedeutet nicht nur die Lehre von Proportionen, sondern meint auch die Proportion selbst. Im Wort *Analogia* ist der *Logos* enthalten. *Logos* ist angeblich der Name eines zahlenmäßig aussagbaren Verhältnisses, das von zwei Gliedern gebildet wird. Im Gegensatz zur *Analogia* die aus drei Gliedern, bei der kontinuierlichen Proportion, oder aus vier Gliedern bei der diskreten Proportion besteht. Die Glieder einer Proportion bezeichneten die griechischen Mathematiker mit dem Fachausdruck *horoi*. Dieser Begriff hatte bei Euklid verschiedene

⁵⁹ Gericke, Mathematik in Antike, Orient und Abendland, 100.

Bedeutungen, zum einen bezeichnete er als *horoi* die Definitionen, zum anderen wurde *horos* als Übersetzung für das Wort Grenze verwendet. Man kann aber davon ausgehen, dass die *horoi* des *logos* und der *analogia* Grenzpunkte sein sollten, die gleichzeitig als Zahlen bezeichnet wurden, denn mit Definitionen (man könnte vier Glieder einer Proportion ja als vier Definitionen ansehen) haben diese Glieder aber eigentlich nichts zu tun.⁶⁰

2.4.1 Der Analogiebegriff bei Nikomachos

Einen besonderen Begriff der Analogie finden wir bei Nikomachos von Gerasa. Nikomachos macht einen Unterschied zwischen einer *Mehrheit von Verhältnissen* und dem einen *Identischen*.

Bei der Mehrheit von Verhältnissen sind die Verhältnisse zwar gleich, aber durch ihre Terme zu unterscheiden. Nikomachos verwendet hier einen Begriff, der als Zusammenfassen übersetzt werden kann. Allerdings nicht das Zusammenfassen in Form der Addition oder Multiplikation, sondern als „Zusammenfassung einer Vielheit unter einem gemeinsamen Oberbegriff“. Dieser Oberbegriff ist das Gleichbleibende: Eine Regel für die Vielheit von zwar gleichen, aber zwischen verschiedenen Termen bestehenden Verhältnissen oder Differenzen.

Bei der Auffassung eines Verhältnisses als Identisches, ist der Begriff des Unterordnens essentiell. Viele Verhältnisse sind dem einen Identischen, das ebenfalls eine Beziehung ist, unterworfen.

Diese beiden Ausdrücke, des Zusammenfassens und Unterordnens, bestimmen den Begriff der Analogie. Die Analogie ist nicht eine statische, feststellbare Verhältnisgleichheit, sondern geht jener als Bedingung voraus. Sie ist ein Prozess, ein Prozess des Bildens von Verhältnissen im Hinblick auf ein gemeinsames und gleichbleibendes Verhältnis, das dann wiederum als Maß und Form betrachtet wird.⁶¹

Nikomachos schreibt in seiner *Einführung in die Arithmetik* über Verhältnisse anhand eines Beispiels:

⁶⁰ Szabo Arpad: *Entfaltung der griechischen Mathematik*. Mannheim; Leipzig; Wien, Zürich: BI-Wissenschafts-Verlag 1994, 135-139.

⁶¹ Bärthlein Karl: *Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon*. Würzburg: Königshausen und Neumann, 1996, 38-39

Das Verhältnis nun ist die Beziehung zweier Terme aufeinander, die Analogie aber eine Zusammenstellung solcher Beziehungen, so dass sie also aus mindestens drei Termen besteht, aber auch über mehrere Terme hin unter Wahrung des gleichen Unterschieds oder des gleichen Verhältnisses fortschreiten kann. So ist das Verhältnis, das von der Eins zur Zwei fortschreitet, als Verhältnis zweier gegebener Terme ein Verhältnis der Verdopplung, aber auch das der Zwei zur Vier ist ein weiteres gleiches Verhältnis. Eine Analogie ist also: 1, 2, 4 ($1:2 = 2:4$). Sie ist nämlich die Zusammenstellung von Verhältnissen oder von drei Termen, die man als im gleichen Verhältnis stehend findet. Auch in zahlreicheren längeren Aufstellungen (Folgen) kann man das Gleichbleibende finden: es sei als vierter Term die Acht angereiht im gleichen Verhältnis (zum vorhergehenden Term), im doppelten nämlich; auf die Acht folge die Sechzehn usw.⁶²

Dieses Beispiel verdeutlicht den Unterschied zwischen dem Begriff des Verhältnisses und dem Begriff der Analogie. Die Analogie ist der größere, darüberstehende Ausdruck, der aus den einzelnen Verhältnissen besteht. Ein Verhältnis ist eine Beziehung zweier Terme aufeinander. Verhältnisse sind nicht nur zwischen zwei gleichen Verhältnissen denkbar, sondern auch zwischen verschiedenen. Allerdings gibt es keine Beweise für einen so weit gefassten Begriff der Analogie, der auch ein Verhältnis von verschiedenen Verhältnissen einschließt. Eine alleinige Aneinanderreihung von zwei beliebigen Verhältnissen oder drei Termen kann noch nicht Analogie genannt werden. Hier wäre der Begriff der Synthesis vorzuziehen, der als Zusammenstellung oder Aneinanderreihung verstanden werden kann.

Erst durch die Anreihung weiterer Terme bestimmt Nikomachos jene Synthesis näher als Synthesis nach gleichem Abstand oder gleichem Verhältnis. Bestimmt denn nun die Gleichheit des Abstandes oder des Verhältnisses auch die Zusammenstellung von nur zwei Beziehungen? Angenommen ja, dann wäre die Analogie nicht ein Verhältnis zwischen gewissen Verhältnissen, was ja wie oben angeführt der gewöhnlichen Definition von Analogie entspricht, sondern eine Beziehung zwischen mehreren Beziehungen einerseits und ausgezeichneten Beziehungen andererseits. Schließlich bleiben also drei Arten der Beziehung, die unterschieden werden können:

1. Die *eine*, gleichbleibende Beziehung, die als Regel dient und der anderen untergeordnet ist.

⁶² Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 39.

2. Hier handelt es sich um das Beziehen auf jene gleichbleibende Beziehung, also auch das Formen und das Bilden anderer Beziehungen, die zwar gleich sind, aber deren Terme verschieden sind, im Hinblick auf die *eine* Beziehung die als Maß dient.

3. Schließlich die dritte Art der Beziehung, die alle Leistungen der zweiten Beziehungsart umfasst. Alle Beziehungen, die durch das Hinschauen auf eine als bestimmt gesetzte Beziehung aufgestellt werden. Wenn sie nach der gleichen Regel gebildet sind, ist zwischen diesen eine Verhältnisgleichheit feststellbar. Diese kann zwar auch Analogie genannt werden, aber man darf nicht vergessen, dass die Verhältnisgleichheit bedingt ist durch die Analogie, so wie sie hier im zweiten Punkt genannt wurde. Die Analogie hier kann also von der Analogie oben unterschieden werden und für diese dritte Art der Beziehung könnte auch der Begriff „Mesotes“, was so viel wie „Mitte“ bedeutet, verwendet werden.

Des Weiteren unterscheidet Nikomachos dann zwischen einer kontinuierlichen und einer diskreten Analogie.

Eine Analogie, die nur ein Mittelglied besitzt, sodass dieses Mittelglied sowohl Hinterglied des ersten, als auch Vorderglied des zweiten Verhältnisses ist, nennt er eine kontinuierliche Analogie. Er verdeutlicht das an einem gewählten Beispiel, das er in der *Einführung in die Arithmetik* gibt. 1, 2, 4 ist eine kontinuierliche Analogie. Sie besteht aus nur drei Gliedern, die Zahl 2 ist das Doppelte der Zahl 1, aber auch die Hälfte der Zahl 4, also $1 : 2 = 2 : 4$ und die mittleren Glieder sind gleich.

Bei der diskreten Analogie allerdings sind die Mittelglieder verschieden, sie bestehen aus mindestens vier verschiedenen Termen, die zwei gleiche Verhältnisse bilden.⁶³

Wenn aber ein anderer Term, der größer ist als das kleinere Außenglied, diesem als Vorderglied entspricht und wieder ein anderer und nicht derselbe dem größeren Außenglied als Hinterglied entspricht, wobei er kleiner ist als dieses, heißt eine solche Mitte und Analogie nicht mehr kontinuierliche, sondern diskrete Mitte.⁶⁴

Ein Beispiel für diese diskrete Mitte, die hier mit so vielen Worten beschrieben wird, ist das Verhältnis $2 : 4 = 3 : 6$.

⁶³ Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 40-41.

⁶⁴ Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 41.

2.4.2 Die arithmetische und die geometrische Beziehung

Die arithmetische Beziehung zwischen Zahlen kann wie folgt beschrieben werden: Eine Zahl wird auf eine andere Zahl bezogen, sie ist um gewisse Einheiten größer oder kleiner als die zweite. Es werden bei diesem Vergleich von der einen Zahl die Einheiten, die den Unterschied bilden, addiert beziehungsweise subtrahiert. Die Beziehung vergleicht zwei Zahlen dahingehend um wie viele Einheiten, die eine Zahl größer oder kleiner ist als die andere. Da dieser Vergleich sich auf das „Wie-groß-sein“ bezieht und der sich ergebende Unterschied wiederum eine Zahl ist, spricht man von einer arithmetischen Beziehung.

Im Gegensatz dazu steht die sogenannte geometrische Beziehung. Hier wird nicht nach dem Größenunterschied gefragt, sondern nach der Beschaffenheit. Nach Nikomachos trägt das geometrische Verhältnis den Charakter der Qualität. In 121, 3-5 in Nikomachos *Einführung in die Arithmetik* bilden die Zahlen 1,2,4 ($4:2 = 2:1$) eine Analogie, die auf der Qualität beruht.

„Denn wie beschaffen die Vier verglichen mit der Zwei ist, so beschaffen ist dieselbe Zwei verglichen mit der Eins“. Es handelt sich auch bei der geometrischen Beziehung um einen Vergleich zweier Zahlen. Die Terme werden als Ganzheiten verglichen. Das bedeutet, dass eine Zahl ein Vielfaches der anderen darstellt oder aber auch ein bestimmter Teil der anderen ist (und zwar ein bestimmter Teil ohne Rest). Die geometrische Beziehung, die dem geometrischen Verhältnis zugrunde liegt, bestimmt den einen Term als Teil oder als Vielfaches des anderen Terms. Beispielsweise ist beim Verhältnis 2:6, zwei ein Teil von der sechs, sie muss mit drei multipliziert werden. Und im Gegenzug dazu ist sechs auch ein Vielfaches von zwei und muss dividiert werden. Die geometrische Beziehung ist also Multiplikation oder Division. Alle möglichen Zahlenwerte können als Verhältnisse fungieren und liefern deshalb auch ein Ordnungsprinzip für die geometrische Beziehung.

Zusammengefasst kann man festhalten: Jede arithmetische Beziehung ist Addition oder Subtraktion und jede geometrische Beziehung ist Multiplikation mit einer bestimmten Zahl oder Division durch eine solche.⁶⁵

⁶⁵ Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 61-64.

2.5 Mittelwertbildungen

2.5.1 Arithmetische Mitte

Bei der arithmetischen Mitte besteht zwischen mindestens drei Termen Gleichheit der Größenabstände. Betrachtet man also zum Beispiel folgende Zahlenreihe: 1,2,3,4,5,... und überspringt dabei kein Glied, so ist jedes Glied immer die arithmetische Mitte der zwei benachbarten Glieder. Der Abstand zu den benachbarten Gliedern ist also gleich groß, aber es besteht keine Verhältnissgleichheit zwischen den Termen. Man findet die arithmetische Mitte in jeder geordneten arithmetischen Folge. Auch wenn man beliebige Terme aus der Reihe heraus nimmt, die nicht direkt nebeneinander stehen, aber den selben Abstand zueinander haben, ergibt sich die arithmetische Mitte durch die selbe Differenz. Wird ein Glied übersprungen ist der Abstand zwei, werden zwei Glieder übersprungen ist der Abstand drei und dieses Konzept kann immer weiter verfolgt werden. Ersichtlich wird dadurch, dass die arithmetische Mitte auf Operationen der Addition und der Subtraktion beruht.⁶⁶

Bei Nikomachos entspricht das arithmetische Mittel allerdings nur dem Durchschnittswert von zwei Zahlen. Somit hat das arithmetische Mittel gleiche Größenabstände zu beiden Außengliedern. Dieses Besitzen der gleichen Größenabstände macht aus den drei Gliedern aufeinanderfolgende Glieder einer geordneten Folge von Zahlen. Eine Folge gilt als geordnet, wenn die einzelnen Zahlen nach einem bestimmten Gesetz gebildet sind. Man spricht von einer arithmetischen „Reihe“ oder auch geordneten Folge, wenn jedes Glied aus dem vorhergehenden Glied durch Addition eines bestimmten Wertes x hervorgeht.⁶⁷ Die moderne Definition im Sinne der heutigen Analysis hat natürlich eine andere Bedeutung und zwar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Es besteht eine Verbindung zu der Bildungsregel von Gnomonen bei Vieleckszahlen. Zu jeder Zahlfigur gibt es einen entsprechenden Abstand zu den Gnomonen, da diese jeweils um zwei kleiner sind, als die Anzahl der Ecken der Figur.

⁶⁶ Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 42-43.

⁶⁷ Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 68-69.

Die k -te n -eckszahl ist demnach $\sum_{i=0}^{n-1} ((n-2)i + 1) = \frac{(n-2)k^2 - (n-4)k}{2}$. Darauf wird am Ende der Arbeit noch näher eingegangen.

Eigen ist dieser Mitte, was keiner anderen zukommt, dass nämlich das Mittelglied halb so groß ist wie die Summe der Außenglieder (bei der kontinuierlichen) oder die Mittelglieder (addiert) gleich sind der Summe der beiden Außenglieder (bei der diskreten).⁶⁸

Sowie auch die folgenden Mitten, wird das arithmetische Mittel in einem bekannten Fragment des Archytas erwähnt. Dieser Text soll einer der ältesten erhaltenen mathematischen Texte der Griechen sein. Er definiert hier das arithmetische Mittel c zwischen zwei Termen a und b als $a - c = c - b$.⁶⁹

2.5.2 Geometrische Mitte

Die geometrische Analogie existiert bei den Griechen nur zwischen zwei Zahlen (a, c) . Sie hat gleiche Verhältnisse zu den beiden Außengliedern $(a:b = b:c)$. Diese Verhältnissgleichheit wird von Nikomachos als geometrische Mitte, Mesotes oder Analogie im eigentlichen Sinne bezeichnet.

Die drei Glieder der geometrischen Mitte sind, durch die Verhältnissgleichheit, die zwischen den Gliedern besteht, drei unmittelbar aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Reihe. Diese Reihe ist eine Folge von Zahlen, bei der der Quotient aus einer Zahl und der immer vorangehenden Zahl immer derselbe bleibt. Für ein Anfangsglied a und den konstanten Quotienten q hat die geometrische Reihe die Form: $a, aq^2, aq^3, aq^4, \dots$. Ist $a = 1$ und $q = 2$ lautet sie beispielsweise $1, 2, 4, 8, \dots$. Für $a = 1$ und $q = \frac{1}{2}$ dementsprechend: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Diese Folge heißt geometrisch, weil eine geometrische Beziehung die Basis bildet. Die geometrische Analogie ist das Zugrundelegen von einer geometrischen Beziehung als Gesetz für das Setzen von unendlich vielen Einzelverhältnissen. Bei Nikomachos handelt es sich meist um einfache geometrische Beziehungen.

⁶⁸ Nikomachos, Einführung in die Arithmetik, 125,10-13.

⁶⁹ Van der Waerden, Bartel Leendert: „Harmonielehre der Pythagoreer“, in: *Hermes* 78 (2), 1943, 182, <http://www.jstor.org/stable/4474726> (letzter Zugriff: 19.06.19).

Die Verhältnisse zwischen den verschiedenen Gliedern der geometrischen Reihe und dem ersten Glied dienen den Griechen als die verschiedenen Potenzen von ganzen Zahlen und Brüchen. Das Verhältnis zwischen erstem und drittem Glied einer geometrischen Reihe ist gleich der Potenz des Verhältnisses zwischen erstem und zweitem Glied.

$$1 : 3 = 3 : 9 = 9 : 27$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = 1 : 9$$

Das Verhältnis von erstem und viertem Glied derselben Reihe entspricht der dritten Potenz zwischen erstem und zweitem Glied:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} = 1 : 27$$

Bei Nikomachos findet sich kein Beispiel für eine geometrische Reihe, die nicht mit der Zahl Eins beginnt.⁷⁰

2.5.3 Harmonische Mitte

Eine weitere Proportion, die harmonische Proportion, von drei Zahlen ist gegeben durch:

$$(a - b) : (b - c) = a : c$$

Der größte Term verhält sich zum kleinsten Term, wie der Unterschied zwischen dem größten und dem mittleren Term zum Unterschied zwischen dem mittleren Term und dem kleinsten Term. Für genanntes Verhältnis ist demnach a der größte Term, b der mittlere und c der kleinste Term. Ein Beispiel für eine Proportion dieser Art ist:

$$(6 - 4) : (4 - 3) = 6 : 3$$

Eine Eigenschaft der harmonischen Proportion ist die folgende: Wird die Summe der Außenglieder mit dem mittleren Glied multipliziert, erhält man das doppelte Produkt der Außenglieder. Bei $(a - b) : (b - c) = a : c$ sind a und c die Außenglieder, b das Mittelglied. Das Umstellen der Proportion liefert:

⁷⁰ Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 72-75.

$$(a - b):(b - c) = a:c$$

$$(a - b)c = a(b - c)$$

$$ac - bc = ab - ac$$

$$2ac = ab + bc$$

$$2ac = b(a + c)$$

Die letzte Zeile entspricht also genau der oben genannten Eigenschaft der harmonischen Proportion. Aus dieser lässt sich dann ganz einfach das mittlere Glied b ablesen und errechnen:

$$b = \frac{2ac}{a + c} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}^{71}$$

2.5.4 Vollkommene Mitte

Eine vierte Proportion, der sich Nikomachos gewidmet hat, ist die vollkommene Proportion. Sie beinhaltet drei Abstände und alle anderen Mitten. Eine Proportion kann nach Nikomachos nur vollkommen sein, wenn sie mit mehr als einem Mittel verbunden ist. Es handelt sich um eine viergliedrige diskrete geometrische Analogie, deren Innenglieder das arithmetische Mittel und das harmonische Mittel der Außenglieder sind. Nikomachos gibt in der *Einführung in die Arithmetik* folgendes Beispiel:

Ein Beispiel für diese Analogie sei die folgende: 6,8,9,12; Sechs ist eine Körperzahl aus drei ungleichen Faktoren: 1,2,3; zwölf aus deren kontinuierlicher Verlängerung: 2,2,3; von den Mitteltermen hat der kleinere diese Faktoren: 1,2,4; der größere aber: 1,3,3; die Außenglieder sind also Körperzahlen, Produkte aus drei Faktoren, und die Mittelglieder sind von gleicher Art wie sie. Nach der geometrischen Analogie verhält sich: $12:8 = 9:6$; nach der arithmetischen übertrifft zwölf neun um ebensoviel wie neun sechs; nach der harmonischen übertrifft acht sechs um den gleichen Teil von sechs, um welchen Teil es von zwölf übertroffen wird.⁷²

⁷¹Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 45-46.

⁷²Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 47.

Zwischen zwölf und sechs ist das arithmetische Mittel neun und das harmonische Mittel acht. Also ist die vollkommene Proportion:

$$12:9 = 8:6$$

Es handelt sich also kurz ausgedrückt um die Einschubung des arithmetischen und des harmonischen Mittels zwischen zwei Zahlen, also $m : \frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{m+n}{2} : n$.

Die vollkommene Proportion hat auch in der Harmonielehre eine besondere Bedeutung. Nikomachos deutet dies folgendermaßen an:⁷³

Es steht aber acht zu sechs oder zwölf zu neun über vier Töne hin im Verhältnis 4:3, neun zu sechs oder zwölf zu acht über fünf Töne hin im Verhältnis 3:2; zwölf zu sechs aber über alle Töne hin (d.i. über eine Oktave) im Verhältnis 2:1; ferner ergibt das Verhältnis 9:8 den ganzen Ton, der das gemeinsame Maß aller Verhältnisse in der Musik ist.⁷⁴

2.6 Harmonielehre der Pythagoreer

Die Griechen haben festgestellt, dass verschiedene Phänomene ohne sichtbare und unmittelbare Beziehung zu Zahlen dennoch eine nach Zahlen aufgebaute innere Struktur besitzen. Vorausgesetzt, dass innere zahlenmäßige Strukturen nachgewiesen werden können, gilt dies eben auch bei diversen Phänomenen oder Erscheinungen, wie zum Beispiel in der Musiktheorie. Die schon ganz zu Anfang angesprochene Verehrung der Zahlen bei den Pythagoreern hat ihren Ursprung wahrscheinlich in der Harmonielehre.

Die Harmonielehre ist von mathematischer Seite betrachtet ein Teil der Proportionenlehre. Wie schon erwähnt, galt die Lehre der Proportionen in der griechischen Wissenschaft als eine der hervorragendste der Wissenschaft. Erastotenes war der Meinung, die Lehre der Proportionen wäre das einigende Band aller mathematischen Disziplinen.⁷⁵

Der griechische Ausdruck *chordōn symphōnia*, den ich in weiterer Folge durch den Begriff Konsonanz ersetzen werde, bedeutet wörtlich übersetzt das Zusammentönen von Saiten. Die Konsonanzen Quart, Quint und Oktav sind als einfache

⁷³ Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 41-47.

⁷⁴ Bärthlein, Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon, 47.

⁷⁵ Szabo, Entfaltung der griechischen Mathematik, 133-134.

Zahlenverhältnisse ausdrückbar. Sie werden von leicht nachweisbaren Zahlen beherrscht und dieser Tatsache verdanken wir, dass die Zahlen als die alles umfassende Herrschaft gesehen wurden. Die Beschäftigung mit den Zahlen der Musik hat auch die Entfaltung der Mathematik beeinflusst. Die Zahlen, die die Konsonanzen bilden, sind Verhältniszahlen.

In der antiken Theorie wird der musikalische Ton entweder als *phthongos* oder als *tonos* bezeichnet. *Tonos* kommt von dem Wort *teinō*, das als spannen übersetzt werden kann. *Spannen* ist deshalb ein passendes Wort, da die Töne ursprünglich an Saiteninstrumenten untersucht wurden und diese sind bekannterweise mit Saiten bespannt.⁷⁶

Durch alle Töne gehend ist die wohl passendste Übersetzung für den Begriff *diapasōn*. Nebenbei eine interessante Kleinigkeit am Rande erwähnt: das französische Wort *diapason* finden wir auch heute noch im Kontext Musik, da es übersetzt Stimmgabel bedeutet. Hier meint *diapasōn* das Intervall, das uns jetzt als Oktave bekannt ist. Anders als bei der Quart und der Quint, die jeweils den vierten oder fünften Ton der Tonleiter bedeutet, wird bei *diapasōn* nicht von einem gewissen Tonabstand, also dem achten Ton, gesprochen. Denn ursprünglich gab es nur sieben Töne der Tonleiter, also auch nur sieben Saiten auf dem Heptachord. Deshalb wird die vierte Saite des damaligen Heptachords auch als *mesē* bezeichnet, was so viel bedeutet wie *die Mittlere*.⁷⁷

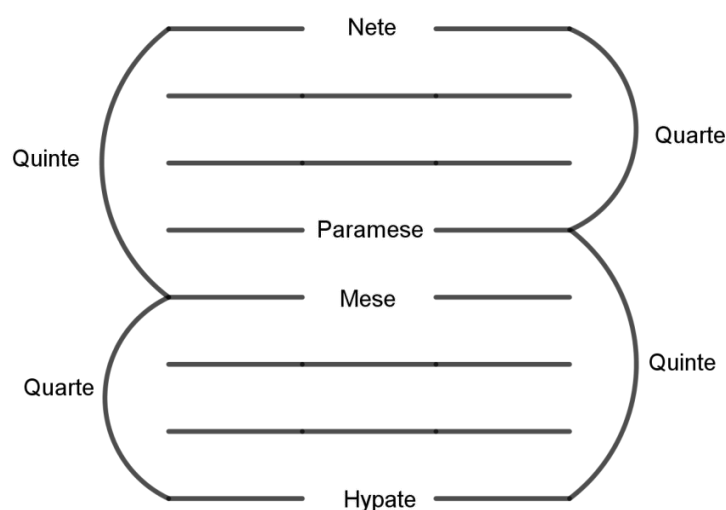


Abbildung 16: Saitennamen

⁷⁶ Szabo, Entfaltung der griechischen Mathematik, 140.

⁷⁷ Szabo, Entfaltung der griechischen Mathematik, 141.

Veranschaulicht man eine Oktave am Bild zweier zusammengesetzter Tetrachorde sieht das folgendermaßen aus: Die Hypatē bildet den tiefsten Ton, die Nētē den höchsten. Dazwischen liegen die Mesē, der vierte Ton von der Hypatē aus gezählt, sowie die Paramesē (oder auch Tritē genannt), der fünfte Ton von der Hypatē aus gezählt. Diese vier Saiten, sind die wichtigen, die uns jetzt beschäftigen werden.

Die beiden Tetrachorde Quart und Quint ergeben zusammen eine volle Oktave. In einem Fragment von Philolaos, das eines der ältesten Zeugnisse über Tonleitern ist, gibt es aber insgesamt vier musikalische Zahlenverhältnisse, die von den griechischen Mathematikern schon erwähnt wurden.

Genannt wurde von Philolaos das *epogdoon*. Das ist das Verhältnis, um das die Quint größer ist als die Quart, und zwar $9:8 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}}$. Auch zwischen der Mese und der

Paramese liegt ein *epogdoon*. Das Intervall einer Quart 4:3 wurde *epitroton* genannt und das einer Quint 3:2 *hemolion*. Schließlich wurde auch das Intervall der Oktav 2:1 erwähnt und war unter dem Namen *diploon* bekannt. Man kann diese Verhältniszahlen nicht direkt aus den Tönen oder aus der Oktav ableiten. Es ist zwar leicht zu erkennen, dass eine Quint größer ist als eine Quart und dass sie zusammengesetzt eine Oktave ergeben, aber es ist nicht unmittelbar aus der Praxis ersichtlich, um welchen Unterschied es sich genau handelt. Durch einfache Beobachtung können diese Verhältniszahlen aus den betreffenden Saiten und Tönen der Tetrachorde nicht abgeleitet werden. Um das so genau darstellen zu können, muss eine theoretische Beschäftigung mit der Musik stattgefunden haben. Die Pythagoreer haben es geschafft, mit ihren Methoden die Verhältniszahlen der musikalischen Konsonanzen beziehungsweise deren Intervalle zu identifizieren. Im Folgenden will ich mich damit beschäftigen, wie sie zu diesen Entdeckungen kamen.⁷⁸

Es gibt eine Menge von Erzählungen und Überlieferungen, was die Pythagoreer dazu veranlasst haben könnte, sich den Verhältniszahlen der Konsonanzen zu widmen. Dazu existieren Überlieferungen von Nikomachos, Gaudentius und Boethius, die aber äußerst unwahrscheinlich sind. In diesen Geschichten soll Pythagoras bei einer Schmiede vorbeigekommen sein und in den Tönen der

⁷⁸ Szabo, Entfaltung der griechischen Mathematik, 143-144.

herunterfallenden Hämmer die verschiedenen Intervalle der Quart, Quint und Oktav gehört haben. Dieser Entdeckung folgend, soll er dann weitere Experimente durchgeführt haben, die seine Wahrnehmungen bestätigten.⁷⁹ Allerdings können diese Berechnungen nicht richtig gewesen sein. Seine Angaben über die Gewichte der Hämmer, sowie über die Spannungen der Saiten sind physikalisch falsch, da die Frequenzen der Töne von zwei sonst gleichen Saiten nicht zu deren Spannungen proportional sind. Sie sind proportional zu den Quadraten der Spannungen. Die Pythagoreer dürften sich dessen aber noch nicht bewusst gewesen sein.⁸⁰

Es existieren aber auch noch andere Erzählungen, die über die Wahrnehmungen am Monochord berichten. Nach Diogenes Laertius soll Pythagoras dessen Erfinder sein.⁸¹

Folgendes Experiment, das angeblich von Pythagoras selbst durchgeführt wurde, überlieferte Gaudentios:

Er spannte eine Saite über ein Lineal, den sogenannten Kanon, und er teilte diesen in 12 Teile. Dann schlug er zuerst die ganze Saite und die Hälfte von ihr, die sechs Einheiten enthielt; und er fand, dass der Ton der ganzen Saite zu demjenigen der Hälfte (12:6) konsonant ist, und zwar nach der Oktave ... Dann schlug er wieder die ganze Saite und drei Teile von der ganzen, und er fand, dass diese beiden Töne nach der Quarte konsonant sind. Und schließlich schlug er die ganze Saite und zwei Teile von der ganzen, und diesmal fand er, dass die beiden Töne nach der Quinte konsonant sind.

Dies ist ein dreifaches Experiment. Es ertönt immer zuerst die ganze Saite und dann ein verkürztes Stück derselben. *Drei Teile von der ganzen* heißt in diesem Fall, dass die Saite insgesamt in vier Abschnitte geteilt wurde. Drei Teile von 12 ergibt demnach 9. Die Saite wurde also an der Stelle 9 geteilt und es folgt das Verhältnis von 9:12 oder 3:4. Analog gilt dasselbe für *Zwei Teile von der ganzen*. Hier wurde die Saite in drei Abschnitte geteilt und ein Verhältnis von 8:12 oder 2:3.

Um die Saite zu verkürzen wurde ein kleiner Steg verwendet. Beim Beispiel der Oktave befand sich der Steg zuerst bei der Zahl 12 und dann bei der Zahl 6 auf dem nummerierten Kanon. Diese Zahlen bildeten dann die Grenzen (*horoi*) des Intervalls

⁷⁹ Van der Waerden, Die Harmonielehre der Pythagoreer, 170.

⁸⁰ Van der Waerden, Die Harmonielehre der Pythagoreer, 171.

⁸¹ Van der Waerden, Die Harmonielehre der Pythagoreer, 170.

der Konsonanz Oktave. Der Begriff *horoi* wurde schon zu Beginn des Kapitels über die Analogien verwendet. Nun wissen wir auch, warum die *horoi* Zahlen sind.

Natürlich ist das Intervall hauptsächlich ein hörbarer Unterschied zwischen zwei Tönen. Aber es ist gleichzeitig bei dem Experiment am Kanon eine sichtbare Strecke. Das Intervall ist das stillgelegte Saitenstück mit den beiden Endpunkten als Grenzen (*horoi*) die dank der Nummerierung als Zahlen erscheinen. Deshalb hat auch der *Logos* (das Verhältnis) zwei Grenzen. Die Pythagoreer verwendeten den Begriff des *Logos* und *diastēma* (Intervall) in der Musikwissenschaft gleichwertig.⁸²

Das Intervall der Quint kann auch anders erreicht werden. Startet man am Kanon von der neunten Einheit und teilt die Saite bei sechs, so entsteht das Verhältnis 9: 6, das ebenfalls dem einer Quint 3: 2 entspricht.

Die Zusammensetzung der Oktave ist nicht nur durch die Reihenfolge Quart und dann Quint gegeben, sondern kann auch umgekehrt erfolgen. Teilt man die Saite zwischen 12 und 6 bei 8 ertönt zum Grundton der ganzen Saite zunächst die Quint (12:8) und dann die Quart (8:6), was wiederum die schon bekannten Verhältnisse 4:3 beziehungsweise 3:2 ergibt.

Diese Möglichkeiten der Zusammensetzung schilderte der Spätpythagoreer Iamblichos. Aber diese Tatsache soll sogar viel früher, etwa sieben Jahrhunderte, schon Platon bekannt gewesen sein. Das beweist ein Ausschnitt aus der *Epinomis*, der ebenso vom Werkzeug des zwölfgeteilten Kanons berichtet und der Teilung der Oktave.⁸³ Möglicherweise sind die Überlieferungen über das Monochord und die damit durchgeführten Experimente tatsächlich richtig. Aber mit diesen Überlieferungen muss sorgsam umgegangen werden, denn wie van der Waerden erklärt, war das Monochord oder der Kanon vermutlich eine Art der Gitarre. Nach Pollux soll dieses Werkzeug allerdings ein Trichord gewesen sein. Es ergeben sich Widersprüche, die wiederum beweisen, dass auf diese späten Quellen kein Verlass ist. Deshalb wissen wir bis heute nicht genau, wie und womit die Pythagoreer wirklich experimentierten.⁸⁴

⁸² Szabo, Entfaltung der griechischen Mathematik, 144-146.

⁸³ Szabo, Entfaltung der griechischen Mathematik, 147-148.

⁸⁴ Van der Waerden, Die Harmonielehre der Pythagoreer, 171.

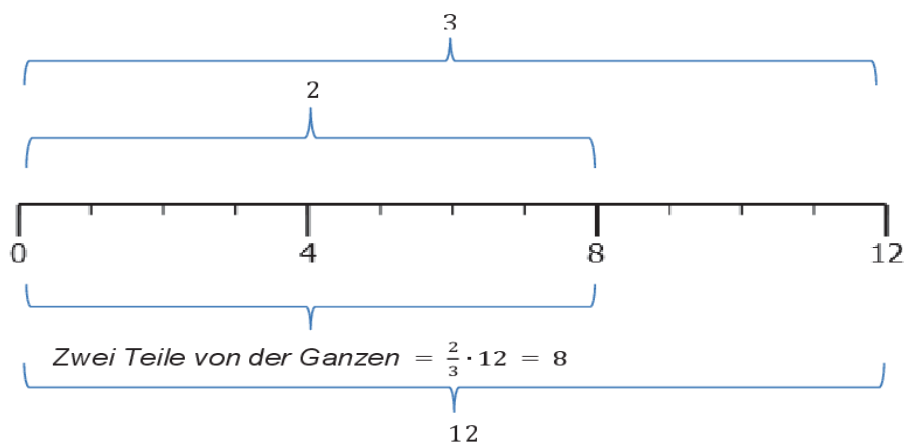


Abbildung 17: Das Verhältnis der Oktave am Monochord

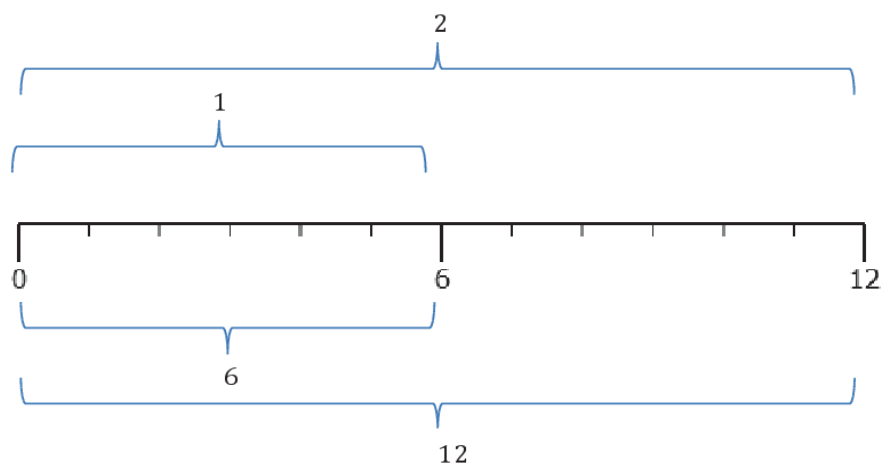


Abbildung 18: Das Verhältnis der Quint am Monochord

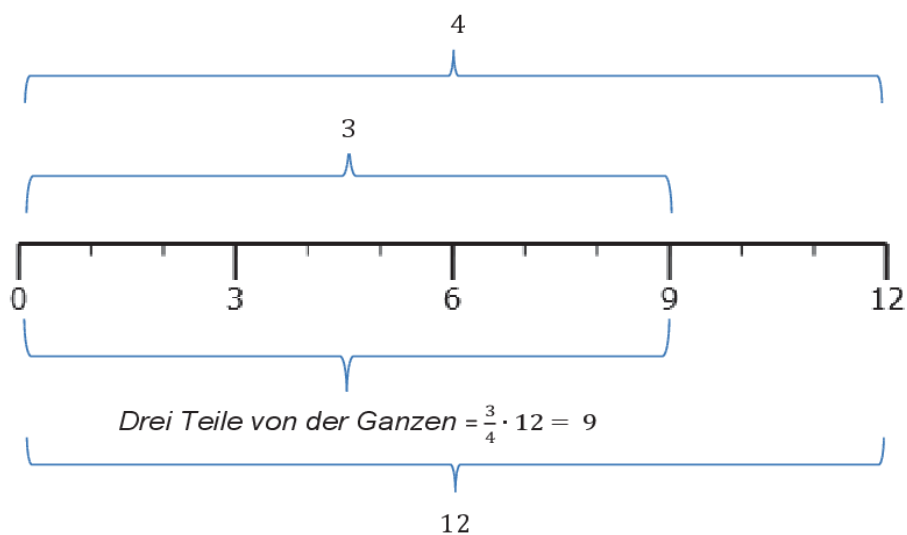


Abbildung 19: Das Verhältnis der Quart am Monochord

2.6.1 Berechnungen am Kanon

Wie wir schon festgestellt haben, mussten verschiedene Operationen am Monochord durchgeführt werden, um die drei wichtigsten Konsonanzen illustrieren zu können. Die Saite wurde in zwei geteilt für die Oktave, in drei für die Quint und ein Vierteilen führte zur Quart. Sinn und Zweck des Zwölftelns war vermutlich eine Vereinfachung, man kam zur Zahl zwölf, weil man das kleinste gemeinsame Vielfache zu den Zahlen zwei, drei und vier suchte.

Durch das Einführen dieses Kanons konnten aber auch noch andere Operationen durchgeführt werden. Der Unterschied vom Monochord zum Kanon war, dass beim Kanon eine nummerierte Maßleiste unter oder neben der Saite angebracht war.

Wie wir schon wissen, sind die Verhältniszahlen der Quint 3:2 und die der Quart 4:3. Außerdem wissen wir, dass die Quint größer als die Quart ist, und zwar genau um ein *epogdoon*, also 9:8. Dieses Ergebnis ist eigentlich wenig überraschend, wenn man bedenkt, dass die Quint am Kanon durch 12:8 entsteht und das kürzere Intervall der Quart durch 12:9. Die Längen der stillgelegten Saitenstücke unterscheiden sich um die kurze Strecke die am Kanon mit 8 und 9 bezeichnet wird. Deshalb ist die Quint um ein *epogdoon* (9:8) größer als die Quart.

Interessant ist, dass in der griechischen Antike für den Unterschied der Intervalle das Wort *hyperochē* verwendet wird. Dies bezeichnet nämlich normalerweise eine Differenz. Wie man allerdings *hyperochē* auf den Unterschied der Verhältnisse anwenden kann, ist zunächst etwas rätselhaft. Denn es stellt sich die Frage ob tatsächlich das kleinere Verhältnis 4:3 vom größeren 3:2 subtrahiert werden sollte, um das *epogdoon* zu erhalten. Ein kurzer Blick reicht um zu sehen, dass das offensichtlich unmöglich der Fall sein kann. Aber sehr schnell bemerkt man auch, dass der Unterschied der beiden Verhältnisse statt durch Subtraktion durch eine Division errechnet werden kann.

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \quad \text{oder auch:} \quad \frac{12}{8} : \frac{12}{9} = \frac{9}{8}$$

Da das Ergebnis dieser Division *hyperochē*, also Differenz, eine Subtraktion ist, ist das ein Indiz dafür, dass man diese Art des Dividierens als eine Subtraktion am Kanon vor Augen hatte und so versuchte zu veranschaulichen.

Analog dazu erklären sich auch Fachausdrücke der Musiktheorie, die die Multiplikation von zwei Verhältnissen als Addition umschreiben. Ich habe schon erwähnt, dass sich die Oktave aus den Intervallen Quart und Quint bilden lassen können. Sie ist also ein zusammengesetztes Intervall, ein sogenanntes *syntethen*. Der Ausdruck Addition ist auch ganz einfach nachvollziehbar, wenn man sich die stillgelegten Saiten vorstellt, die sich aus Quart (zwischen 12 und 9) und der Quint (zwischen 9 und 6) zusammensetzen und somit eine Oktave ergeben. Aber eigentlich handelt es sich um eine Multiplikation der Verhältnisse

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{6}$$

Das hier von *syntethen*, also dem Addieren, statt dem Multiplizieren gesprochen wird, erklärt sich ebenfalls aus der Operation am Kanon.

Des Weiteren gibt es einen Zusammenhang zwischen dem zwölfgeteilten Kanon und dem arithmetischen sowie dem harmonischen Mittel. Wird der Steg am Kanon bei der Zahl 9 gesetzt, bewirkt dies ein arithmetisches Mittel. Es wird durch diesen Schnitt das *diastēma* der Oktave, also der stillgelegte Saitenabschnitt zwischen den Zahlen 12 und 6, in zwei untereinander gleich lange kleinere Strecken geteilt. Der Schnitt befindet sich bei der Zahl 9, also genau in der Mitte zwischen 12 und 6, gleich weit entfernt von den Endpunkten des ursprünglichen *diestēma*. Allerdings vertreten die gleich langen Teilstrecken (12 – 9, 9 – 6) zwei ungleiche musikalische Zahlenverhältnisse, die größeren Zahlen ergeben das kleinere Intervall (12:9 die Quart) und umgekehrt die kleineren Zahlen das größere Intervall (9:6 die Quint).

Der Schnitt bei 8 bewirkt das harmonische Mittel. Das längere Teilstück zwischen 12 und 8 entspricht dem größeren Zahlenverhältnis (12:8) und die kürzere zwischen 8 und 6 dem kleineren.

Beim arithmetischen Mittel folgt die Quart auf die Quint und folglich beim harmonischen Mittel umgekehrt.

Das geometrische Mittel ($a:b = b:c$) ist für ein musikalisches Intervall nicht von Bedeutung, da sich ein Intervall in untereinander gleiche Teilintervalle zerlegen können lassen müsste. Am Beispiel der Oktaven wäre also das geometrische Mittel jene Zahl x , für die $12:x = x:6$ gilt. Eine solche Zahl gibt es allerdings zu dieser Zeit noch nicht. Eine Oktave lässt sich also zahlenmäßig nicht in zwei untereinander

gleiche Teilintervalle zerlegen, so viel war für die Pythagoreer sowohl praktisch, als auch theoretisch klar. Denn sie waren der Überzeugung, dass sich alle musikalischen Intervalle durch Verhältnisse von ganzen Zahlen ausdrücken lassen müssten.⁸⁵

2.6.2 Das pythagoreische Komma

Die pythagoreische Quinte ist ein sogenanntes reines Intervall. Sie ist etwas größer als die heutige temperierte Quinte. Den Grund dafür will ich im Folgenden kurz erläutern. Werden zwölf reine Quinten übereinander geschichtet, entsteht die sogenannte halbtönige Chromatik. Da aber zwölf reine Quinten etwas größer sind als sieben Oktaven kann sich das System nicht wieder schließen und es entsteht eine Differenz. Auf den ersten Blick nicht gleich erkennbar, aber leicht nachzuvollziehen durch folgende Berechnung:

$$(3:2)^{12} : (2:1)^7 = 531\,441:524\,288$$

Bei diesem Verhältnis spricht man vom pythagoreischen Komma.⁸⁶ Erst im 17. Jahrhundert konnte diese Differenz ausgeglichen werden. Andreas Werckmeister gelang dieser Ausgleich mit Hilfe der sogenannten temperierten Stimmung, indem die Oktave in zwölf mathematisch gleiche Teile geteilt wurde.⁸⁷

2.7 Astronomie

Die vierte Mathemata bei den Pythagoreern war die Astronomie. Wir unterscheiden im Folgenden Überlieferungen von älteren Pythagoreern und jüngeren. Denn diese beiden Auffassungen eines Weltbildes gehen auseinander. Zum einen existierte die Idee eines geozentrischen Weltbildes, mit der ruhenden Erde als Mitte des Kosmos, zum anderen aber die sich im Kreise bewegendende Erde.⁸⁸

2.7.1 Das geozentrische Weltbild

Die Pythagoreer haben die Astronomie als mathematische Wissenschaft im Zusammenhang mit Musik betrieben. Die Lehre der Sphärenharmonie bildet die

⁸⁵ Szabo, Entfaltung der griechischen Mathematik, 162-171.

⁸⁶ Michels Ulrich: *dtv-Atlas Musik: Systematischer Teil Musikgeschichte von den Anfängen bis zur Renaissance*. Kassel, Basel, Tours, London: Bärenreiter Verlag 1977, 89.

⁸⁷ DTV Atlas Musik, 91.

⁸⁸ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 455.

Brücke zwischen diesen beiden Gebieten.⁸⁹ Man versteht darunter den alten Glauben der Pythagoreer an die Zauberkraft der Musik erweitert, mit zwei neuen Dimensionen. Diese Dimensionen sind die Beziehung zum Himmel und die Beziehung zu den Zahlen. Die irdische Musik ist eine Abspiegelung der magischen Wirkung der göttlichen Sterne, die durch ihre harmonischen Bewegungen in mystischer Weise unsere Fähigkeiten lenken.⁹⁰

Über das kosmologische System der Pythagoreer erfahren wir viel von Platon. Dieser behandelte sowohl im Staat als auch im Timaios ein Modell der Bewegungen der Himmelskörper.⁹¹

Die Merkmale dieses Weltbilds können in zwölf Punkten wiedergegeben werden, wie sie van der Waerden in seinem Werk *Die Pythagoreer* erläutert:

1. Der Kosmos ist ein lebendes, beseeltes Wesen.
2. Der Kosmos ist ein geordnetes Ganzes, in dem jeder Teil seine Aufgabe zu erfüllen hat.
3. Dieses Ganze wird von mathematischen Gesetzen beherrscht.
4. Die Erde ist kugelförmig.
5. Sie schwebt frei in der Mitte.
6. Der ganze Himmel dreht sich nach rechts um eine Achse, die durch die Erde hindurchgeht.
7. Die Sonne, der Mond und die Planeten drehen sich außerdem nach links in Kreisen, die zum Kreis der ersten, allen gemeinsamen Bewegung schief liegen (wie die beiden Teile des Chi), aber von dieser Bewegung mitgenommen werden.
8. Sie haben verschiedene Entfernungen von der Erde.
9. Ihre Reihenfolge ist von der Erde aus: Mond Sonne Venus Merkur Jupiter Saturn; dann kommen die Fixsterne.
10. Ihre Umlaufzeiten verhalten sich wie ganze Zahlen.
11. Es gibt ein gemeinsames Vielfaches aller Umlaufzeiten, das „große Jahr“, nach dessen Ablauf alle Planeten wieder genau an derselben Stelle stehen.
12. Jeder von ihnen erzeugt bei der Bewegung einen Ton, und diese Töne bilden eine Harmonie (d.h. eine wohlgeordnete Tonleiter).⁹²

⁸⁹ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 240.

⁹⁰ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 365.

⁹¹ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 433.

⁹² Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 434.

Geklärt werden muss nun aber noch, ob beziehungsweise warum dieses platonische System ein pythagoreisches System ist. Wir wissen, dass Platon hauptsächlich Philosoph und Dichter war, aber kein Astronom oder Mathematiker. Er hat seine Annahmen vermutlich von Fachastronomen übernommen, unter denen sich laut Platon zum Beispiel auch der Pythagoreer Timaios befindet. In seiner Metaphysik spricht auch Aristoteles davon, dass Platons System auf pythagoreischem Wissen gründet.

Es können aber auch alle zwölf Punkte einzeln beleuchtet und somit gezeigt werden, dass sie pythagoreischem Ursprungs sind:

Zum ersten Merkmal über den Kosmos als beseeltes Wesen kann gesagt werden, dass schon die Babylonier die Ansicht vertraten, Sonne und Sterne wären göttliche Wesen. Warum auch die Pythagoreer das annahmen, können wir am ehesten bei Geminus in der *Einführung in die Phänomene* nachlesen. Er schreibt hier, dass die Pythagoreer eine streng geordnete und gleichmäßige Kreisbewegung annahmen und damit begründeten, dass die Planeten göttlich sowie ewig sind.⁹³ Darin stecken auch schon die Merkmale zwei und drei. Der Kosmos ist ein geordnetes Ganzes. Das bekannte Zitat von Aristoteles: „Der Himmel ist Harmonie und Zahl“ bestätigt noch, dass der Kosmos nach Zahlen, also mathematischen Gesetzen geordnet sein muss.⁹⁴

Die Erde als freischwebende Kugel finden wir beim Pythagoreer Simmias, sowie bei Timaios. Doch auch andere Quellen verraten uns, dass die Pythagoreer diese Annahme hatten: Laut Horatius hat Archytas versucht, die Größe der Erde zu messen, unter der Vermutung, dass die Erde eine Kugel sei. Und von späteren griechischen Gelehrten wird die Entdeckung der Kugelform Pythagoras selbst zugeschrieben.⁹⁵

Da die Griechen ein Volk von Seefahrern waren, war die tägliche Drehung des Fixsternhimmels wohl schon von frühen Zeiten an bekannt. Ein wesentlicher Zeuge dafür, dass die Lehre von den Kreisbahnen der Planeten und deren entgegengesetzte tägliche Bewegung am Fixsternhimmel pythagoreisch ist, ist

⁹³ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 240-241.

⁹⁴ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 437.

⁹⁵ Van der Waerden, *Die Pythagoreer*, 437.

Geminos, der um 70 v.Chr. lebte und als sehr gut über die griechische Astrologie informiert gilt.⁹⁶

Die Pythagoreer nahmen für die Entfernung der Planeten eine bestimmte Reihenfolge an. Nach Simplikios, der sich wiederum auf Eudemos beruft, waren sie die ersten, die eine solche Annahme vertraten. Platon weicht in diesem Punkt von den Lehren der Pythagoreer leicht ab, da er eine andere Reihenfolge der Planeten annimmt.⁹⁷

Ein von Porphyrios erhaltenes Fragment enthält eine Stelle in der Dikaiarchos die Lehre von Pythagoras zitiert, nach der sinngemäß alles, was einmal geworden ist, von neuem in gewissen Kreisbewegungen wiederkehren wird und nichts wirklich Neues ist. Wie schon erwähnt, war der Himmel für die Pythagoreer „Harmonie und Zahl“, also ist alles im Himmel nach Zahlen geordnet. Die Umlaufszahlen der Planeten verhalten sich wie ganze Zahlen, woraus folgt, dass es ein sogenanntes kleinstes gemeinsames Vielfaches der Umlaufzeiten gibt, das bei Platon „vollkommenes Jahr“ bei Aristoteles „größtes Jahr“ und sonst meist „Großes Jahr“ genannt wird. Nach dem Ablauf des „Großen Jahres“ stehen alle Planeten wieder an derselben Stelle wie zu Beginn. Nach pythagoreischer Lehre hängen die Geschehnisse auf der Erde von den Sternen ab, was dazu führt, dass sich in der neuen Periode auch die Geschehnisse auf Erden wiederholen.⁹⁸

Das letzte Merkmal, ist wie zu Beginn des Kapitels schon beschrieben, zweifellos pythagoreisch. Die sogenannte Sphärenharmonie, die lehrt, dass jeder Planet bei seiner Kreisbewegung einen Klang erzeugt und dass diese Töne zusammen eine Harmonie, also eine wohlgeordnete und wohlklingende Tonleiter, bilden, finden wir bei Aristoteles, in seiner Schrift „Vom Himmel“.⁹⁹

2.7.2 Die Kreisbewegungen der Erde

Von Aristoteles wird den Pythagoreern ein anderes Weltbild zugeschrieben. Hier ruht die Erde nicht, sondern sie dreht sich im Kreis um ein sogenanntes Zentralfeuer,

⁹⁶ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 435-436.

⁹⁷ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 437.

⁹⁸ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 252-254.

⁹⁹ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 101.

wodurch Tag und Nacht entstehen. Von späteren Gelehrten werden Philolaos oder Hiketas als Anhänger dieses Systems genannt.¹⁰⁰

Bei diesem System befindet sich also ein Feuer F in der Mitte. Um dieses dreht sich sowohl eine Erde E, als auch eine Gegenerde G. Erde und Gegenerde liegen sich immer gegenüber. Das Feuer und die Gegenerde können in diesem Modell von der Erde aus nicht gesehen werden, weil wir uns immer auf der anderen Seite der Erde befinden. Während sich die Erde um das Feuer dreht, wendet sie immer die gleiche Seite dem Feuer zu.¹⁰¹

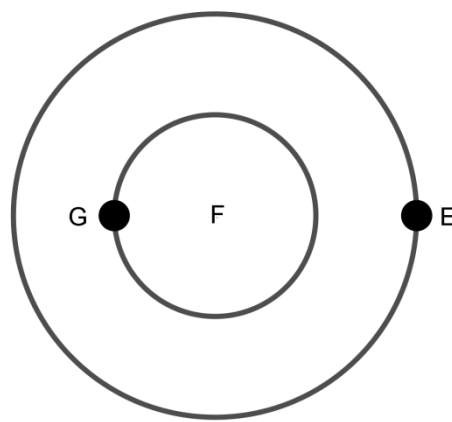


Abbildung 20: Zentralfeuer, Erde und Gegenerde

3 Nikomachos von Gerasa

Nachdem wir das Leben und das Wissen der Bruderschaft der Pythagoreer näher kennengelernt und einige wichtige Entdeckungen der Pythagoreer gesehen haben, möchte ich nun zu einem bestimmten Spät-Pythagoreer übergehen, dessen Name auch schon des Öfteren gefallen ist. Es handelt sich um Nikomachos von Gerasa, der sich in seinen Werken ebenfalls mit den vier Mathemata, die uns bis jetzt beschäftigt haben, auseinandergesetzt hat. Im Folgenden soll dieser Mann vorgestellt werden, sein Leben, sowie seine Werke betrachtet und sein Einfluss auf die spätere Mathematik hervorgehoben werden.

¹⁰⁰ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 455.

¹⁰¹ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 460-461.

3.1 Das Leben von Nikomachos

Obwohl Nikomachos schon zu Lebzeiten ein sehr hohes Ansehen als Mathematiker genoss und auch nach seinem Tod noch viel von ihm gelehrt und weitergegeben wurde, ist über sein tatsächliches Leben nur sehr wenig erhalten. Nicht einmal über die Zeitspanne, wann er lebte, kann mit Sicherheit berichtet werden. Um ungefähr sagen zu können wann er wahrscheinlich gelebt hat, gibt es nur die Möglichkeit über Zeitgenossen, sowie andere Philosophen und Mathematiker, die Nikomachos Schriften kommentierten oder in einem anderen Zusammenhang mit ihm standen, einen Zeitraum auszumachen.

Zum Beispiel erwähnt Nikomachos Thrasyllus, der ein Werk über Musik schrieb und unter Tiberius lebte. Theon von Smyrna oder Claudius Ptolemäus blieben beispielsweise unkommentiert. Apuleius von Madaura verfasste eine Übersetzung der Einführung in die Arithmetik ins Lateinische. Somit bekommen wir schon eine etwas eingeschränkte Zeitspanne, nämlich die Regentschaft Tiberius und Apuleius, der unter Antonines lebte. Die Lebenszeit des Nikomachos müsste also ungefähr in der Mitte des ersten Jahrhunderts und der Mitte des zweiten Jahrhunderts n.Chr. liegen.

Dass Nikomachos aus Gerasa stammte, kann man seinen eigenen Schriften, sowie denen des Johannes Philoponus entnehmen. Gerasa liegt im heutigen Palästina. Vermutlich ging er dort auch zur Schule, wo er lesen, schreiben und singen gelernt hat. Wir wissen nicht genau, welchen sozialen Status seine Familie hatte, doch spricht soweit nichts dagegen, dass sie wohlhabend haben.¹⁰²

In den geresianischen Inschriften taucht der Name „Nikomachos“ sogar gleich dreimal auf. In allen Fällen handelt es sich dabei um einen Menschen von Wohlstand. Es könnte sogar der eine Nikomachos mit dem anderen verwandt sein, da es üblich war, den Namen des Großvaters weiterzugeben, aber dies sind nur Spekulationen.

Über den Verlauf seiner Studien wissen wir nichts Genaues, aber aller Wahrscheinlichkeit nach hat Nikomachos seine weitere Ausbildung in Alexandria erhalten.

¹⁰² D'Ooge Martin Luther: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic. New York: The Macmillan Company 1926, 71-72.

Alexandria war im ersten Jahrhundert n. Chr. das Zentrum pythagoreischen Denkens. Es wurden alte Lehren wiederbelebt, sowie neue Abhandlungen unter alten Namen in Umlauf gebracht. Der Neu-Pythagorismus erhielt in Alexandria große Unterstützung.¹⁰³

Es ist zudem auch sehr sicher, dass Alexandria schon davor ein wichtiges Zentrum für griechische Mathematik gewesen sein muss. Fast alle bekannten Mathematiker, die nach der Gründung der Stadt geboren wurden, hatten in irgendeiner Weise in ihrem Leben etwas mit dieser Stadt zu tun, wie zum Beispiel Euklid, Erathostenes, Apollonius von Pergae oder Heron.

Aus Nikomachos Leben wissen wir sonst nicht besonders viel. Er widmete ein Werk einer Frau, aber leider bleibt unentdeckt wer diese Frau war. Es ist nicht einmal klar, ob sie Griechin oder Römerin war, das hätte uns einiges über den Lebensstil Nikomachos verraten können.

Wir haben ein Stück einer interessanten Aussage von Proklos, die unterstreicht welche Bekanntheit Nikomachos schon vor knapp 2000 Jahren erreichte. Proklos meinte nämlich aufgrund eines Traumes, er sei eine Wiedergeburt Nikomachos und dass Nikomachos Seele in ihm weiterlebe.

Gewiss ist lediglich, dass Nikomachos schon zu Lebzeiten sehr bekannt gewesen sein muss. Seine Bekanntheit lässt sich von den Kommentaren der vielen anderen Gelehrten ableiten.¹⁰⁴

3.2 Werke des Nikomachos

Von Nikomachos sind nur zwei Werke vollständig erhalten geblieben: das *Handbuch der Harmonielehre* und die *Einführung in die Arithmetik*, die schon einige Male erwähnt wurden.¹⁰⁵

Probably Nicomachos, who was not really a mathematician, intended his *Introduction* to be, not a scientific treatise, but a popular treatment of the subject calculated to awaken in the beginner an interest in the theory of numbers by making him acquainted with the most noteworthy results obtained

¹⁰³ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 73-74.

¹⁰⁴ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 75-77.

¹⁰⁵ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 79.

up to date; for proofs of most of his propositions he could refer to Euclid and doubtless to other treatises now lost.¹⁰⁶

Heath erläutert, dass Nikomachos sich vor allem für die mystischen Zusammenhänge in der Zahlentheorie interessierte und gar nicht so sehr die Mathematik dahinter interessant fand. Wahrscheinlich waren die Erkenntnisse, die Nikomachos hier zusammenfasste schon von früheren Pythagoreern entdeckt worden. Der Erfolg dieses Werkes ist damit nicht einfach nachzuvollziehen. Ein Grund für dessen Popularität könnte sein, dass mehr Philosophen das Buch lasen als Mathematiker. Ganz klar ist aber, das Buch muss besonderes Interesse bei den Philosophen hervorgerufen haben, da es eine Menge Versionen oder Kommentare aus der Antike gibt, wie zum Beispiel von Iamblichus oder Proklos.¹⁰⁷

Ein Werk von Nikomachos, das eine wichtige Quelle für den Neu-Pythagorismus darstellt ist leider nur zu einem Teil erhalten geblieben, und zwar das Buch zur *Zahlentheologie*.

Im Folgenden möchte ich einen kleinen Überblick über weitere Bücher und Werke geben, die Nikomachos wahrscheinlich verfasst hat:

1. Eine Einführung in die Geometrie: Dieses Buch hat er mit ziemlicher Sicherheit geschrieben, da er im Buch Einführung in die Arithmetik mehrmals drauf verweist.
2. Das Leben des Pythagoras: Es könnte sein, dass er ein solches Buch geschrieben hat, da er ein bedeutendes Mitglied der Gruppierung war.
3. Wahrscheinlich hat er auch eine noch größere Schrift über Musik verfasst. Er versprach, eine solche zu schreiben. Da andere Schriftsteller, die sich mit Musik befassten, Nikomachos zitieren, aber die zitierten Stellen im erhaltenen Handbuch der Harmonielehre nicht enthalten sind, ist es sehr wahrscheinlich, dass er auch ein solches Buch verfasst hat.

Sicherlich hat Nikomachos noch weitere Bücher geschrieben. Viele allerdings wurden ihm in der Vergangenheit fälschlicherweise zugeschrieben. Heute geht man davon aus, dass eine Reihe von Büchern nicht aus seiner Feder stammt, wie zum Beispiel eine Schrift über eine Interpretation von Platon. Er erwähnt zwar in seiner *Einführung*

¹⁰⁶ Heath, A history of Greek Mathematics, 98.

¹⁰⁷ Heath, A history of Greek Mathematics, 99.

etwas über Platon, aber vermutlich bezieht sich diese Erwähnung nicht auf ein eigenes Werk. Auch ein drittes Werk über Arithmetik gibt es allen Anschein nach nicht. Dies wurde lange vermutet, da Iamblichos in seinem Kommentar zu Nikomachos zu Anfang etwas von einem Buch, das er „Werk des Nikomachos“ nannte, schrieb. Allerdings kam dieser Titel sonst nie wieder vor, sondern nur noch die beiden bekannten, die *Einführung* und die *Theologumena*. Zudem werden auch keine Themen behandelt, die nicht in einem dieser Bücher vorkommen. Es wird also vermutet, dass Iamblichos lediglich einen etwas unüblichen Namen verwendet hat.¹⁰⁸

3.3 Übersetzer und Kommentatoren

An der Zahl der Übersetzer und Kommentatoren des Nikomachos kann man feststellen, welch großes Ansehen und welche Berühmtheit er, vermutlich schon zu Lebzeiten, genoss. Die größte Bekanntheit erreichte sicherlich seine *Einführung in die Arithmetik*. Ebenso hochgeschätzt wurde die *Einführung in die Geometrie*, aber wie wir schon erfahren haben, sind davon leider keine Abschriften mehr vorhanden.

Nikomachos war auch den Römern wahrscheinlich schon kurz nach seinem Tod bekannt. Vor allem durch die erste Übersetzung der Arithmetik ins Lateinische von Apuleius von Madaura, die dieser vermutlich schon zu Nikomachos Lebenszeiten verfasste. Leider ist auch diese Übersetzung ohne jede Spur verschwunden. Die lateinisch sprechende Gesellschaft hatte dann nur noch eine Einführung in die Arithmetik von Boethius, der selbst zugab, dass es eine Art Version der nikomachischen Einführung sei.

3.3.1 Iamblichus

Einer der wichtigsten Kommentatoren des Nikomachos war zweifelsfrei Iamblichus. Er stammte aus Chalcis und lebte im vierten Jahrhundert. Eigentlich ist sein Kommentar zur *Einführung* eine eigene Abhandlung über Arithmetik auf der Grundlage von Nikomachos Buch. Man könnte es also auch als eine neue Ausgabe der ursprünglichen *Arithmetik* bezeichnen. Er hat im Allgemeinen zwar die Reihenfolge und den Inhalt von Nikomachos Arbeit übernommen, aber auch viele neue Erkenntnisse hinzugefügt. Oft waren es weiterführende Gedanken oder Veranschaulichungen. Manches Neues dagegen waren auch Propositionen von

¹⁰⁸ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 79- 80.

älteren Mathematikern, die Nikomachos in seiner *Arithmetik* nicht erwähnte. Aber alles in Allem werden Iamblichus keine neuen Erkenntnisse oder besonders wichtige Proportionen zugeschrieben. Eigentlich verliert die *Einführung in die Arithmetik* nach der Bearbeitung durch Iamblichus den Charakter des Einfachen und seine Klarheit. Doch genau dies führte in erster Linie ja zur Bekanntheit dieses Werkes.

3.3.2 Boethius

Der Unterschied von Nikomachos *Einführung in die Arithmetik* zu jener von Boethius ist sehr gering. Deshalb kann man eigentlich von einer Art Übersetzung des Werkes sprechen. Boethius arbeitete sehr nah beim Original, erweitert vielleicht den ein oder anderen Gedanken, aber er fügte keine essentiellen neuen Erkenntnisse hinzu, die sich von Nikomachos Version unterschieden. Es handelt sich hierbei mehr um eine Weiterentwicklung, ausgeschmückt mit konkreten Beispielen. Wahrscheinlich hat Boethius auch keine anderen Quellen verwendet als die *Arithmetik* an sich. Die Bedeutung der lateinischen Fassung mit dem Namen *De Institutione Arithmetica* liegt bestimmt darin, dass es das wichtigste Werk für den lateinischen Westen im Mittelalter war. Durch diese konnten formale griechische Arithmetik und ihre Prinzipien weiter verbreitet und gelernt werden.¹⁰⁹

3.4 Die Einführung in die Arithmetik

Wie wir nun schon mehrfach erfahren haben, erlangte dieses Werk einen hohen Bekanntheitsgrad. Es wurde aus dem Griechischen in mindestens drei Sprachen übersetzt, nämlich Latein, Arabisch und Englisch und es sind vierundvierzig Manuskripte erhalten. Nikomachos versuchte mit diesem Buch die Eigenschaften der Zahlen, auch die göttlichen, für jeden verständlich darzustellen. Die Inhalte umfassen sowohl Dreieckszahlen, Quadratzahlen und Rechteckszahlen, aber auch Gnomonzahlen, Verhältnisse und deren Einteilungen, oder Primzahlen und vollkommene Zahlen.¹¹⁰

Im Vergleich zu den *Elementen* von Euklid ging bei Nikomachos einiges an Deutlichkeit verloren. Euklid stellte Zahlen ganz klar dar und verwendete Buchstaben als Repräsentanten, was ihm ermöglichte, Propositionen allgemein und klar

¹⁰⁹ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 124-137.

¹¹⁰ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 392.

darzustellen. Anders sieht dies bei Nikomachos aus. Es gibt keine klare Linie mehr für die Darstellung von Zahlen. Dies führt zu folgendem Problem: Nikomachos beschrieb unbestimmte Zahlen, die unterschieden werden sollten, auf sehr komplizierte Art und Weise. Diese Umschreibungen sind mühsam zu lesen und bei Propositionen schwierig zu verfolgen. Dadurch wird es notwendig, diese umständlich formulierten Propositionen durch Beispiele mit konkreten Zahlen zu verdeutlichen. Es gibt also keine Beweise im eigentlichen Sinne, für Nikomachos reichte es vollkommen aus, für eine allgemeine Proposition einfach ein konkretes Beispiel mit konkreten Zahlen zu geben. So entstanden leider auch Aussagen, die nicht richtig sind, sondern nur für einen spezifischen Fall gelten, wie wir zum Beispiel bei Nikomachos Ausführung über die Proportionen noch sehen werden.¹¹¹

Allerdings waren genau die Beispiele, die in seinem Buch zu finden sind, ein Grund für die Bekanntheit des Werkes. Nikomachos wollte seinen Lesern zwar Wissen und Erkenntnisse vermitteln, doch wusste er wohl genau, dass trockene Beweise erstens den Leser langweilen würden und zweitens der mystische Zauber der Zahlen dann verloren ginge.¹¹²

3.4.1 Gliederung der Einführung in die Arithmetik

Dieses wesentliche Werk von Nikomachos, das altpythagoreische Lehren enthält, die sonst nirgends mehr zu finden sind, gliedert sich in zwei Teile. Nikomachos beginnt im ersten Buch mit einer philosophischen Einleitung, worauf ein zahlentheoretischer Hauptteil folgt.¹¹³ Das erste Buch enthält hauptsächlich Definitionen und Gesetze der Bildung von Zahlen.¹¹⁴ Im zweiten Buch beschäftigt er sich dann mit der Proportionenlehre.¹¹⁵

3.4.2 Gerade und ungerade Zahlen

Nikomachos teilt im ersten Buch die Zahlen in verschiedene Arten. Zu Beginn wird nur zwischen gerade und ungerade unterschieden.

¹¹¹ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I, 98.

¹¹² Van der Waerden, Die Pythagoreer, 393.

¹¹³ Van der Waerden, Die Pythagoreer, 297.

¹¹⁴ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I, 99.

¹¹⁵ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I, 104.

An even number is that which admits of being divided, by one and the same operation, into the greatest and the least parts, greatest in size but least in number (i.e. into two halves) ... while an odd number is that which cannot be so divided but is only divisible into two unequal parts. (Heath, 70)

Eine gerade Zahl ist also eine solche, die durch dieselbe Operation sowohl in die größten als auch in die kleinsten Teile geteilt werden kann. Die größten Teile beziehen sich auf die Ausdehnung und die kleinsten auf die Zahl, das bedeutet einfach ausgedrückt: eine gerade Zahl lässt sich in zwei Hälften teilen.¹¹⁶

Nikomachos gibt aber auch noch eine zweite Definition von geraden und ungeraden Zahlen an, die besonders für die Zahl Zwei von wesentlicher Bedeutung ist:

An even number is that which can be divided both in two equal parts and into two unequal parts (except the fundamental dyad which can only be divided into two equal parts), but, however it is divided, must have its two parts of the same kind without part in the other kind (i.e. the two parts are both odd or both even), while an odd number is that which however divided, must in any case fall in two unequal parts and those parts always belonging to two different kinds respectively (i.e. one being odd and one even).

Gerade Zahlen können also in zwei gleiche oder in zwei ungleiche Teile geteilt werden, ungerade jedoch können ausschließlich in zwei ungleiche Teile geteilt werden. Diese Definition erklärt, warum der Zahl Zwei, die Dyade, bei Nikomachos eine Sonderstellung zukam. Sie wurde nicht als Zahl gesehen, sondern als Ursprung oder Beginn der Zahlen. Sie wurde deshalb nicht als gerade Zahl betrachtet, weil sie nur in zwei gleiche Teile teilbar ist. Offensichtlich wurde diese Voraussetzung aber erst später von Nikomachos hinzugefügt, denn bei Platon wird die Zahl Zwei schon als gerade beschrieben.¹¹⁷

Weiterhin unterteilt er die geraden Zahlen noch in drei Untergruppen:

- i. Gerade-gerade Zahlen der Form 2^n , wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- ii. Gerade-ungerade Zahlen der Form $2(2n + 1)$, wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sowie
- iii. Ungerade-gerade Zahlen der Form $2^{m+1}(2n + 1)$, wobei $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ¹¹⁸

¹¹⁶ Becker, Das Mathematische Denken der Antike, 45.

¹¹⁷ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I, 70-71.

¹¹⁸ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I, 99.

Nikomachos beschreibt diese Unterscheidungen sehr genau und erläutert, wie erwartet, seine Überlegungen anhand passender Beispiele:

- i. Eine gerade-gerade Zahl ist laut Nikomachos eine Zahl, die immer wieder so lange in zwei gleiche Teile geteilt werden kann, bis das Ergebnis, die unteilbare Einheit, also die Zahl 1 ist. Als Beispiel nennt er im Kapitel 8 der *Einführung der Arithmetik* die Zahl 64. Diese lässt sich immer weiter teilen: $64 - 32 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$.¹¹⁹ Man kann also leicht erkennen, dass es sich hierbei, abgesehen von der Zahl 1, modern ausgedrückt um die Potenzen (mit positiven Exponenten) von 2 handelt.
- ii. Die geraden-ungeraden Zahlen stellen für Nikomachos das Gegenteil zu den geraden-geraden Zahlen dar. Sie lassen sich zwar ebenfalls in zwei gleich Teile, also zwei Hälften teilen, aber im Gegensatz zu den geraden-geraden Zahlen lassen sich die so entstandenen Hälften nicht mehr weiter teilen. Als Beispiel werden die Zahlen 6, 10, 14, 18, 22 und 26 gegeben.¹²⁰
- iii. Die ungerade-geraden Zahlen haben sowohl Eigenschaften der gerade-geraden Zahlen, als auch der gerade-ungeraden Zahlen. Denn für die ungerade-geraden Zahlen gilt, dass sie mehr als einmal in zwei gleich große Hälften geteilt werden können, nie allerdings die Division so weit geht, dass sich die unteilbare Einheit ergibt. Als Beispiele für diese Zahlen nennt Nikomachos 24, 28, 40:

$$24 = 2^3 \cdot 3,$$

$$28 = 2^2 \cdot 7,$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

Die Eigenschaft mehr als einmal geteilt zu werden gleicht der für die gerade-geraden Zahlen, da aber weiteres Halbieren nie zur Einheit führt, gleicht die Zahl in diesem Punkt den gerade-ungeraden Zahlen.¹²¹

Im Zehnten Abschnitt des ersten Buches der *Einführung in die Arithmetik* beschreibt Nikomachos den Zusammenhang dieser drei Unterscheidungen von gerade und ungerade in Form einer Tabelle:

¹¹⁹ D'Ooge: *Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic*, 192.

¹²⁰ D'Ooge: *Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic*, 196-197.

¹²¹ D'Ooge: *Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic*, 198-199.

Let us then set forth the odd numbers from 3 by themselves in due order in one series:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...

And then even-times even, beginning with 4, again one after another in a second series after their own order:

4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...

As far as you please. Now multiply by the first number of either series – it makes no difference which – from the beginning and in order all those in the remaining series and note down the resulting numbers; then again multiply by the second number of the series the same numbers once more, as far as you can, and write down the results; then with the third number again multiply the same terms anew, and however far you go you will get nothing but the odd-times even numbers.¹²²

Odd numbers		3	5	7	9	11	13	15
Even-times even		4	8	16	32	64	128	256
Odd-times even numbers	Breadth	12*	24	48	96	192	384	768
		20	40	80	160	320	640	1280
		28	56	112	224	448	896	1792
		36	72	144	288	576	1152	2304
		44	88	176	352	704	1408	2816
		Length						

Abbildung 21: Tabelle zur Entstehung ungerader-gerader Zahlen

Beginnt man nun die Zahlen zu multiplizieren, geht man folgendermaßen vor:

Beginnend mit der ungeraden Zahl 3, multipliziert man diese nacheinander mit den geraden-geraden Zahlen in der Zeile darunter und notiert die Ergebnisse in einer weiteren Zeile. Die nächste Zeile entsteht durch die Multiplikation der nächsten ungeraden Zahl, 5, wieder beginnend mit der ersten geraden-geraden Zahl 4, dann mit 8 usw. und schreibt ebenfalls wieder die Ergebnisse nieder. So kann immer weiter verfahren werden. Schließlich entsteht ein Tableau von ungeraden-geraden Zahlen in dem folgendes ersichtlich wird: In den Spalten erkennt man die Eigenschaft

¹²² D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 200.

* In der Tabelle bei D'Ooge steht an dieser Stelle die Zahl 16. Aufgrund der Erläuterung und Erklärung von Nikomachos wie er zu diesen Ergebnissen kommt, gehe ich von einem Druckfehler aus und habe deshalb an dieser Stelle die meiner Ansicht nach richtige Zahl 12 eingefügt.

der geraden-ungeraden Zahlen, und in den Zeilen die der geraden-geraden Zahlen. Die ungeraden-geraden Zahlen zeichnen sich dadurch aus, dass bei einer ungeraden Anzahl an Termen, der mittlere Term genau die Hälfte der Summe der beiden Extremen ist. Ich wähle als Beispiel die Zahlen 96, 160, 224:

$$96 + 224 = 320 = 2 \cdot 160$$

Allgemein sieht eine ungerade gerade Zahl also folgendermaßen aus:

$$2^{m+1}(2n+1) + 2^{m+1}(2n+5) = 2^{m+1}(4n+6) = 2 \cdot 2^{m+1}(2n+3).$$

Bei den geraden-geraden Zahlen ist das Prinzip ein ähnliches: Bei drei Termen ergeben die Extreme multipliziert genau das Quadrat des mittleren Wertes. Ich wähle aus obiger Tabelle die Zahlen 48, 96 und 192 aus:

$$48 \cdot 192 = 9216 = 96^2$$

Natürlich können auch die gerade-geraden Zahlen allgemein dargestellt werden:

$$2^{m+1}(2n+1) \cdot 2^{m+3}(2n+1) = 2^{2m+4}(2n+1)^2 = \left(2^{m+2}(2n+1)\right)^2.$$

Bei einer geraden Anzahl von Termen, werden die mittleren Terme addiert im ersten Fall oder miteinander multipliziert im zweiten Fall. ¹²³

3.4.3 Über die Klassifikation von Zahlen

Sir Thomas Heath beschreibt die aufwändige Klassifikation von Zahlen, die Nikomachos in seinem Buch definiert. Dabei gibt es immer die Zahlen, die größer als die Eins sind und jene, die das Gegenstück dazu sind, also kleiner als die Eins. Er kennt jeweils fünf Kategorien, wobei er in diesen Kategorien einmal den allgemeinen Fall beleuchtet und einmal ein bestimmtes Beispiel gibt. Die folgende Tabelle zeigt die Klassifikation, so wie sie bei Nikomachos in seiner Arithmetik zu finden sind. Sie ist entnommen und übersetzt aus Sir Thomas Heaths History of Greek Mathematics¹²⁴:

¹²³ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 200-201.

¹²⁴ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I, 101-104.

	Verhältnisse > 1	Verhältnisse < 1
Allgemein	Multiplex: Vielfaches	Submultiplex: Teil
Konkret	Duplus: x2 Triplus: x4 etc.	Subduplus: $\frac{1}{2}$ Subtriplus: $\frac{1}{3}$ etc.
Allgemein	Superparticularis: Eine Zahl der Form: $1 + \frac{1}{n}$ oder $\frac{n+1}{n}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.	Subsuperparticularis: Eine Zahl der Form: $\frac{n}{n+1}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.
Konkret	Je nachdem, welchen Wert n annimmt: Sesquialter = $1\frac{1}{2}$ Sesquitertius = $1\frac{1}{3}$ Sesquiquartius = $1\frac{1}{4}$ etc.	Subsesquialter = $\frac{2}{3}$ Subsesquitertius = $\frac{3}{4}$ Subsesquiquartius = $\frac{4}{5}$ etc.
Allgemein	Superpartiens: Eine Zahl die > 1, die 1 um zweimal, dreimal oder mehrmals ein <i>Submultiplex</i> übertrifft: $1 + \frac{m}{m+n}$ oder $\frac{2m+n}{m+n}$	Subsuperpartiens: Eine Zahl der Form: $\frac{m+n}{2m+n}$
Konkret	Zahlen der Form: $1 + \frac{m}{m+1}$ Nikomachos folgt bei der Benennung drei verschiedenen Schemata, von denen wir zwei angeben: Superbipartiens oder Superbitertius: $1\frac{2}{3}$	Nikomachos beschreibt hier die dazugehörigen konkreten Fälle nicht näher.

	Supertripartiens oder Supertriquartus: $1\frac{3}{4}$ Superquadripartiens oder Superquadriquintus: $1\frac{4}{5}$	
Für Zahlen der allgemeinen Gestalt $1 + \frac{m}{m+n}$ verwendet Nikomachos ein drittes Benennungsschema.		
Allgemein	Multiplex Superparticularis: Eine Zahl bestehend aus einem bestimmten <i>Multiplex</i> und einem bestimmten <i>Submultiplex</i>: $m + \frac{1}{n} \text{ oder } \frac{mn + 1}{n}$	Submultiplex Superparticularis : Eine Zahl der Form: $\frac{n}{mn+1}$
Konkret	Duplex Sesquialter: $2\frac{1}{2}$ Duplex Sesquitertius: $2\frac{1}{3}$ Triplex Sesquiquintus: $3\frac{1}{5}$ etc.	Nikomachos beschreibt hier die dazugehörigen konkreten Fälle nicht näher. (Aber Boethius gibt sie an: Subduplex Sesquialter, Subduplex Sesquiquartus.)
Allgemein	Multiplex Superpartiis: Eine Zahl der Form: $p + \frac{m}{m+n} \text{ oder } \frac{(p+1)m+n}{m+n}$	Submultiplex Superpartiis: $\frac{m+n}{(p+1)m+n}$
Konkret	Nikomachos gibt hier nur Beispiele, bei denen $n = 1$ gilt, z.B.: Duplex Superbipartiis: $2\frac{2}{3}$	Nikomachos beschreibt hier die dazugehörigen konkreten Fälle nicht näher. (Aber Boethius gibt sie an: Subduplex Superbipartiis)

Die lateinischen Bezeichnungen, die hier verwendet wurden, sind Übersetzungen, so wie sie bei Boethius zu finden sind.¹²⁵

3.4.4 Proportionen und Verhältnisse in der Einführung in die Arithmetik

Es werden zwei griechische Worte verwendet um Proportion zu definieren. Zum einen ἀναλογία und zum anderen μεσότης. Unter ἀναλογία versteht Nikomachos eine Proportion aus vier Termen bestehend, also eine diskrete Proportion, wie wir sie schon kennengelernt haben. Der Begriff μεσότης hingegen bezeichnet eine kontinuierliche Proportion, die nur aus drei Termen besteht. Laut Nesselmann wurde früher ἀναλογία nur für die geometrischen Proportionen und μεσότης für die arithmetische und die harmonische Proportion verwendet. Dieser Unterschied verschwand dann mit späterer Verwendung immer mehr. Auch Nikomachos selbst hat diese zwei Begriffe wohl sehr wahllos verwendet. Klarer wird die Definition von Proportion durch die ebenfalls von Nikomachos verwendeten Begriffe λόγων und σχέσεων. Eine ἀναλογία ist dann eine Kombination aus zwei oder mehreren λόγων, aber allgemein eine Kombination aus σχέσεων. Nun soll ein Verhältnis eine Relation zwischen zwei Termen zu einem anderen sein und die Kombination daraus ist dann eine Proportion. Eine Proportion besteht also aus mindestens drei Termen. An einem Beispiel veranschaulicht bedeutet das: 1:2 ist ein Verhältnis zwischen zwei Termen. 2:4 ist ein anderes ähnliches Verhältnis. 1,2,4 ist also die Proportion, nämlich die Kombination aus den beiden Verhältnissen.¹²⁶

3.4.4.1 Die zehn Proportionen

Wir kennen schon die ersten drei Proportionen, die auch Platon, Aristoteles oder Pythagoras selbst bekannt waren. Das sind die arithmetische, die geometrische und die harmonische Proportion. Es gibt aber auch noch weitere, die keinen eigenen Namen haben, sondern nur die vierte, fünfte und sechste Proportion genannt werden.¹²⁷ Die Berichte über die Entdeckung der vierten, fünften und sechsten Proportion sind nicht immer einheitlich.

Iamblichus schreibt einmal die Entdeckung Eudoxos zu, aber anderswo bei Iamblichus wiederum soll es Erathostenes gewesen sein, der die Proportionen

¹²⁵ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 213.

¹²⁶ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 264-265.

¹²⁷ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 266-267.

verwendet hat, aber Archytas und Hippias hätten den Beginn der Entdeckung gemacht.

Die letzten vier Proportionen sollen von späteren Pythagoreern Myonides und Euphranor hinzugefügt worden sein. Es gibt eine Anmerkung von Porphyrios, die aussagt, dass eine von den ersten sieben Proportionen aus der Feder des Simus von Posidonia stammte. Doch andere eifersüchtige Pythagoreer sollen ihm diese Anerkennung nicht gegönnt und die Spuren verwischt haben, die auf eine Entdeckung durch ihn zurückgehen.

Was wir mit Sicherheit wissen, ist, dass Nikomachos diese zehn Proportionen in seinem Buch Einführung in die Arithmetik niedergeschrieben und beschrieben hat. Auch Pappus tat dies in ähnlicher Weise, auf die ich aber nicht näher eingehen werde. Der Unterschied zwischen diesen beiden Auflistungen liegt lediglich darin, dass bei beiden je eine Proportion fehlt und die Reihenfolge der letzten vier dadurch eine andere ist.¹²⁸

Durch die Beschreibung der vier weiteren Proportionen wird wieder die für die Pythagoreer so wichtige Zahl Zehn komplettiert.¹²⁹

Interessant ist zudem, dass diese zehn Proportionen, die ich im Folgenden genauer unter die Lupe nehmen werde, sich auch alle aus Zahlen von eins bis zehn erstellen lassen.¹³⁰

Die ersten drei Proportionen haben wir in einem früheren Kapitel schon ausführlicher behandelt, weswegen ich auf diese nun nur kurz als Erinnerung eingehen werde.

1. Die arithmetische Proportion:

Die Zahlen 1,2,3,4,5,6, ... stehen klar in arithmetischer Proportion, da sie jeweils zu ihrem Folglied denselben Abstand haben. Im Allgemeinen kann die arithmetische Proportion als $a - b = b - c$ geschrieben werden, wobei $a > b > c$ gilt.¹³¹

¹²⁸ Heath, A history of Greek Mathematics Vol I, 86.

¹²⁹ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 267.

¹³⁰ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 284.

¹³¹ D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 268.

2. Die geometrische Proportion:

Die geometrische Proportion ist die einzige, die eine Proportion im engeren Sinne des Wortes darstellt: Zwischen den drei Termen ist das Verhältnis vom größten zum mittleren wie das Verhältnis vom mittleren zum kleinsten Term. Für die geometrische Proportion gilt also: wenn $a > b > c$, dann $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Es kann durch wenige Schritte gezeigt werden, dass $\frac{b}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ (und analog, dass $\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b-c}$):

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$ac = b^2 \quad / -ab$$

$$ac - ab = b^2 - ab$$

$$a(c - b) = b(b - a) \quad / : b(c - b)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b - a}{c - b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a - b}{b - c}$$

Etwas später werden wir auf diese Eigenschaft der geometrischen Proportion noch zurückkommen.

Die Zahlen 1,2,4 stellen ein passendes Beispiel für die geometrische Proportion dar:

$$1:2 = 2:4$$

3. Die harmonische Proportion:

Hierbei handelt es sich um drei Terme, die in folgender Beziehung zueinander stehen: Der größte Term zum kleinsten ist wie die Differenz vom größten und dem mittleren Term zur Differenz vom mittleren und dem kleinsten Term:

wenn $a > b > c$, dann gilt: $\frac{a}{c} = \frac{a - b}{b - c}$, weil:

$$b = \frac{2ac}{a + c} \Leftrightarrow ab + bc = 2ac \Leftrightarrow ab - ac = ac - bc$$

$$\Leftrightarrow a(b - c) = c(a - b) \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{a - b}{b - c}.$$

Zum Beispiel erfüllt das Zahlentripel 3,4,6 diese Forderung:

$$6:3 = \frac{6-4}{4-3} = 2:1$$

4. Die vierte Proportion:

Diese Proportion, stellt einen Gegensatz zur harmonischen Proportion dar. Sie besteht, wenn für $a > b > c$ gilt: $\frac{a}{c} = \frac{b-c}{a-b}$, also wenn der größte zum kleinsten Term sich verhält wie die Differenz der beiden kleineren Terme zur Differenz der beiden größeren Terme. Der Unterschied und damit das gegensätzliche zur harmonischen Proportion liegt also im Kehrwert der Differenzen.

$$\text{für } 6 > 5 > 3 \text{ gilt: } \frac{6}{3} = \frac{5-3}{6-5}$$

Für diese Proportion gilt weiters, dass das Produkt aus dem größten und dem mittleren Glied dem Produkt des mittleren mit dem kleinsten Glied entspricht, wenn dieses mit der $\lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$ r einer *Ratio* multipliziert wird: $6 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \cdot r$, also ist $r = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$. Fälschlicherweise schreibt Nikomachos in der *Arithmetik* über diese Eigenschaft, dass das Produkt des größten und des mittleren Terms genau zweimal dem Produkt des mittleren mit dem kleineren Term entspricht. Das stimmt zwar in dem speziellen Fall für das Zahlentripel 6,5,3 aber nicht im Allgemeinen. In diesem Fall ist $\frac{a}{c} = \frac{6}{3} = 2$.

Zudem ergibt das mittlere Glied multipliziert mit der Summe der beiden Extrema gleich die Summe der Quadrate der Extrema:

$$\frac{a}{c} = \frac{b-c}{a-b} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c-b}{b-a}$$

$$a(b-a) = c(c-b)$$

$$ab - a^2 = c^2 - bc$$

$$a^2 + c^2 = b(a+c)$$

5. Die fünfte Proportion:

Die fünfte Proportion besteht, wenn der mittlere Term zum kleinsten Term die Differenz dieser beiden zur Differenz des größten Terms zum Mittleren ergibt:

$$\text{wenn } a > b > c, \text{ dann gilt: } \frac{b}{c} = \frac{b-c}{a-b}$$

In einem Beispiel ausgedrückt sieht das folgendermaßen aus:

$$\text{für } 5 > 4 > 2 \text{ gilt: } \frac{4}{2} = \frac{4-2}{5-4}$$

Bei der geometrischen Proportion wurde abgeleitet, dass $\frac{b}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ gilt. Für die fünfte Proportion ist der erste Teil gleich, aber die Verhältnisse der Differenzen ist wieder genau der Kehrwert. Aus diesem Grunde wird auch diese Proportion als gegensätzlich bezeichnet.

Ähnlich wie bei der vierten Proportion hat Nikomachos auch hier denselben Fehler begangen. Er meint das Produkt des größten und des mittleren Terms sei doppelt dem des größten Terms mit dem kleinsten. Aber auch hier müsste es korrekterweise eine *Ratio* $r = \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ geben, sodass $ab = acr$ gilt. Für $a = 5$, $b = 4$ und $c = 2$ ist $\frac{b}{c} = 2$.

6. Die sechste Proportion

Bei der sechsten Proportion haben wir drei Terme, die wie folgt in Beziehung zueinander stehen: wenn $a > b > c$ ist, dann gilt: $\frac{a}{b} = \frac{b-c}{a-b}$. Die Zahlen 1,4,6 bilden diese Proportion und ergeben:

$$\text{für } 6 > 4 > 1 \text{ gilt: } \frac{6}{4} = \frac{4-1}{6-4}$$

Wir stellen hierbei fest, dass das Verhältnis $\frac{3}{2}$ ergibt.

Wir wissen aus der geometrischen Proportion, dass aus $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ folgt, dass $\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b-c}$.

Auch hier ist das Verhältnis der Differenzen genau der Kehrwert dessen, also $\frac{b-c}{a-b}$.

Jetzt kennen wir die vierte, fünfte und sechste Proportion und haben gesehen, warum diese drei als gegensätzliche Proportionen bezeichnet werden. Schließlich beschrieb Nikomachos aber auch noch vier weitere:

7. Die siebente Proportion

Die siebente Proportion wird folgendermaßen errechnet:

$$\frac{a}{c} = \frac{a - c}{b - c}, \text{ wenn } a > b > c$$

Auch bei dieser Proportion mit dem gegebenen Beispiel der Zahlen 6,8,9 entsteht ein Verhältnis von $\frac{3}{2}$:

$$\text{für } 9 > 8 > 6 \text{ gilt: } \frac{9}{6} = \frac{9 - 6}{8 - 6} = \frac{3}{2}$$

8. Die achte Proportion

Eine weitere Proportion, bei der im nachfolgenden Zahlenbeispiel auch das Verhältnis von $\frac{3}{2}$ entsteht, lautet in der allgemeinen Form:

$$\frac{a}{c} = \frac{a - c}{a - b}, \text{ wenn } a > b > c$$

Auf die Zahlen 6,7,9 trifft diese Proportion zu und lautet also:

$$\text{für } 9 > 7 > 6 \text{ gilt: } \frac{9}{6} = \frac{9 - 6}{9 - 7} = \frac{3}{2}$$

9. Die neunte Proportion

Auch bei der neunten Proportion werden wir sehen, dass bei gegebenem Beispiel das Verhältnis $\frac{3}{2}$ errechnet wird. Die allgemeine Form dieses Verhältnisses lautet:

$$\frac{b}{c} = \frac{a - c}{b - c}, \text{ wenn } a > b > c$$

Für das Beispiel 4,6,7 ergibt das:

$$\text{für } 7 > 6 > 4 \text{ gilt: } \frac{6}{4} = \frac{7 - 4}{6 - 4} = \frac{3}{2}$$

10. Die zehnte Proportion

Die letzte und zehnte Proportion entsteht, wenn der mittlere Term zum kleinsten Term ist wie die Differenz des größten und kleinsten Terms zur Differenz der beiden größeren. In allgemeiner Form also:

$$\frac{b}{c} = \frac{a - c}{a - b}, \text{ wenn } a > b > c$$

Ein passendes Beispiel sind die Zahlen 3,5,8:

$$\text{für } 8 > 5 > 3 \text{ gilt: } \frac{5}{3} = \frac{8 - 3}{8 - 5} = \frac{5}{3}^{132}$$

3.5 Einfluss der Einführung in die Arithmetik auf die Mathematik im mittelalterlichen Islam

Die Einführung in die Arithmetik wurde, wie bereits erwähnt, nicht nur ins Lateinische, sondern auch von einem Mathematiker aus dem mittelalterlichen Islam übersetzt. Thābit b. Qurra übersetzte sie im 9. Jahrhundert ins Arabische und öffnete so auch für andere arabischsprachige Mathematiker die Möglichkeit, die Erkenntnisse der Pythagoreer weiterzuentwickeln.¹³³

3.5.1 Befreundete Zahlen

Ebenfalls Thābit b. Qurra hat eine hinreichende Bedingung dafür gefunden, wie aus zwei ganzen Zahlen befreundete Zahlen entstehen. Die Pythagoreer und so auch Nikomachos in seiner Einführung, definierten befreundete Zahlen als zwei Zahlen, bei der die eine Zahl gleich der Summe der echten Teile der anderen Zahl ist. Thābit b. Qurra behauptet dann folgendes:

Wenn p , q und r prim sind, so dass $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$
und $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, dann sind $2^n p q$ und $2^n r$ befreundete Zahlen.¹³⁴

Thābit hat seine Regel, die er im 9. Jahrhundert aufgestellt hat, natürlich auch bewiesen. Leider ist aber nicht überliefert, wie er diese Bedingungen gefunden hat,

¹³² D'Ooge: Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic, 282-284.

¹³³ Berggren, Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, 227.

¹³⁴ Berggren, Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, 224.

darüber kann also nur spekuliert werden. Spannend ist seine Idee besonders deshalb, weil sie weit über das Wissen der Griechen hinausging.

Tatsächlich ist $220 = 2^2 \cdot (3 \cdot 2 - 1)(3 \cdot 2^2 - 1)$ und $284 = 2^2 \cdot (9 \cdot 2^3 - 1)$, das heißt Thābit verallgemeinerte dieses Beispiel.

Wahrscheinlich hat sich Thābit, ausgehend von diesem befreundeten Zahlenpaar 220 und 284, das er vermutlich aus einem Kommentar von Iamblichos kannte, deren Teiler angesehen:

Teiler von $a_1 = 220$: $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$

Teiler von $a_2 = 284$: $\{1, 2, 4, 71, 142\}$

Weiters könnte er dann entdeckt haben, dass einige Teiler von 284 mit den Teilern von 220 übereinstimmen, wie in Abbildung 20 ersichtlich wird.

284:	1 2 4	71	142	=	2 · 71
220:	1 2 4	5+11+55	10+22+110	=	2 · (5+11+55)

Abbildung 22: Teiler von 284 und 220

Auch die Eigenschaften der in der Tabelle fehlenden Zahlen 20 und 44 sind interessant und erwähnenswert: $20 + 44 = 4 \cdot (5 + 11)$, sowie $20 + 44 = 64 = a_2 - a_1 = 284 - 220 = 4 \cdot (71 - 55)$. Wir sehen, dass die Beziehung der Zahlen $71 = 55 + 11 + 5$ hier ebenfalls beteiligt ist. An dieser Stelle könnte Thābit begonnen haben neue Paare von befreundeten Zahlen zu suchen, angenommen dass $a_1 = 2^n p_1 p_2$ und $a_2 = 2^n p_3$ mit p_1, p_2, p_3 Primzahlen, sodass:

$$p_3 = p_1 p_2 + p_1 + p_2 \quad (1)$$

Die Teiler von a_2 stimmen dann mit einigen Teilern von a_1 überein, wie in Abbildung 22 schon zu sehen war.

Die Summe der Teiler von 220 (ohne 20 und 44) in der Tabelle ist $3 \cdot 71 + (1 + 2 + 4)$. Die fehlenden Teiler 20 und 44 weisen folgende interessante Eigenschaft auf:

$$71 = (20 + 44) + (1 + 2 + 4)$$

$$\text{das hei\u00dft } 71 = 2^2(5 + 11) + 2^3 - 1$$

Im allgemeinen Fall kann man dies also schreiben als:

$$p_3 = 2^n(p_1 + p_2) + (2^{n+1} - 1) \quad (2)$$

F\u00fcr eine allgemeine Form von p_1, p_2, p_3 brauchte Th\u00e1bit auch noch eine dritte Bedingung. Vielleicht hat er diese folgenderma\u00dfen gefunden: $2 \cdot 5 + 1 = 11$, also $2p_2 + 1 = p_1$ oder \u00e4quivalent dazu notiert:

$$2(p_2 + 1) = p_1 + 1 \quad (3)$$

Diese Aussage steht in Beziehung zu den heteromeken Zahlen, wie sie auch in Nikomachos Einf\u00fchrung in die Arithmetik vorkommen.

Insgesamt entstehen also 3 Bedingungen:

$$p_3 + 1 = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \quad (1)$$

$$p_3 + 1 = 2^n[(p_1 + 1) + (p_2 + 1)] \quad (2)$$

$$2(p_2 + 1) = p_1 + 1 \quad (3)$$

Durch gleichsetzen von (1) und (2) und einsetzen von (3) entsteht nach kurzer Rechnung:

$$p_1 = 2^{n+1} - 1 + 2^n$$

$$p_2 = 2^n - 1 + 2^{n-1}$$

$$p_3 = 2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$$

Das k\u00f6nnte der Weg sein, den Th\u00e1bit gew\u00e4hlt hat, um die allgemeine Regel f\u00fcr befreundete Zahlen zu beschreiben.¹³⁵

Diese Formulierung von p_1, p_2, p_3 ist \u00e4quivalent zu jenen p, q und r , die Berggren in seinem Buch *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* verwendet und die ich am Anfang des Kapitels zitiert habe. Das kann man wie folgt nachweisen:

¹³⁵ Brentjes Sonja, Hogendijk Jan P. : *Notes on Thabit ibn Qurra and his rule for Amicable Numbers*. In: *Historia Mathematica*, 16. Academic Press 1989, 373-377.

$$\begin{aligned}
p_1 &= 2^{n+1} - 1 + 2^n \\
&= 2 \cdot 2^n - 1 + 2^n \\
&= 2^n(2 + 1) - 1 \\
&= 3 \cdot 2^n - 1 = q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= 2^n - 1 + 2^{n-1} \\
&= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 + 2^{n-1} \\
&= 2^{n-1} \cdot (2 + 1) - 1 \\
&= 3 \cdot 2^{n-1} - 1 = p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3 &= 2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1 \\
&= 2^{2n+2} + 2^{2n-1} - 1 \\
&= 2^3 \cdot 2^{2n-1} + 2^{2n-1} - 1 \\
&= (8 + 1) \cdot 2^{2n-1} - 1 \\
&= 9 \cdot 2^{n-1} - 1 = r
\end{aligned}$$

3.5.2 Figurierte Zahlen

Wie wir schon wissen, hat Nikomachos den Figurierten Zahlen ein ganzes Kapitel in seiner Einführung gewidmet. Dabei ging es vor allem darum darzustellen, wie alle figurierten Zahlen mithilfe von Dreieckszahlen erzeugt werden können.

Abd al-Qāhir al-Baghdadi legte im 11. Jahrhundert, auf Grundlage der arabischen Übersetzung der Einführung in die Arithmetik, Regeln für die allgemeine Struktur der Folgen von figurierten Zahlen dar. Auch im 13. Jahrhundert war dieses Thema immer noch präsent. Ibn Mun'im entwickelte eine Tabelle für ganze Zahlen von $k = 1, \dots, 10$ (Row of sides) und für jede figurierte Zahl von $n = 3, \dots, 10$ (Row of triangles, row of squares,...). Die Anzahlen der Punkte, die hier mit $F_n(k)$, also die figurierte Zahl mit n Seiten und k Punkten auf jeder Seite bezeichnet werden, werden aus der Tabelle ersichtlich.¹³⁶

$$\text{Es ist } F_n(k) = \sum_{i=0}^{k-1} ((n-2)i + 1) = \frac{(n-2)k^2 - (n-4)k}{2}.$$

¹³⁶ Berggren, Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, 227.

Row of sides	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Row of triangles	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Row of squares	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Row of pentagons	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Row of hexagons	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Row of heptagons	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Row of octagons	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Row of enneagons	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Row of decagons	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

$F_8(4)$ bezeichnet somit ein Oktagon mit vier Punkten auf jeder Seite und insgesamt 40 Punkten. In Abbildung 23 sehen wir die Entstehung eines solchen Oktagon mit vier Punkten auf jeder Seite.

Ibn Mun'im zeigt mit dieser Tabelle noch zwei weitere Erkenntnisse: Zum einen kann diese Tabelle auch rekursiv erstellt werden, ausgehend von einer anfänglichen Reihe einer Sequenz der ganzen Zahlen. $F_4(7) = 49 = 28 + 21 = F_3(7) + F_3(6)$ oder $F_6(7) = 91 = 70 + 21 = F_5(7) + F_3(6)$. Allgemein kann also F_n mit $n > 3$ folgendermaßen dargestellt werden: $F_n(k) = F_{n-1}(k) + F_3(k-1)$, denn $F_{n-1}(k) + F_3(k-1) = \frac{(n-3)k^2 - (n-5)k}{2} + \frac{k^2 - k}{2} = \frac{(n-2)k^2 - (n-4)k}{2} = F_n(k)$.

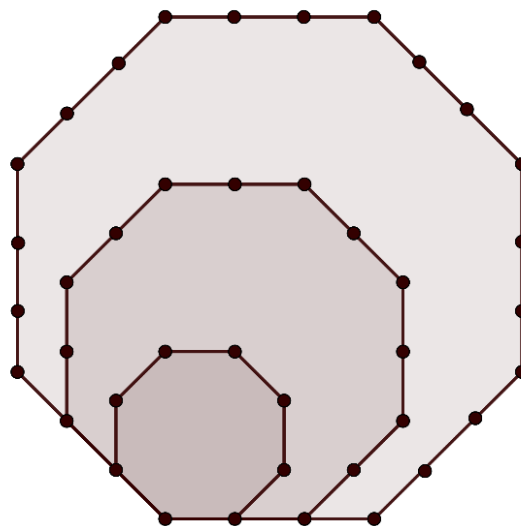


Abbildung 23: Figurierte Zahl eines Oktagon

Zum anderen geht Ibn Mun'im auch noch etwas weiter und behauptet, dass jede figurierte Zahl aus Dreieckszahlen erstellt werden kann: Wir bleiben beim Beispiel des Oktagon mit vier Punkten auf jeder Seite. Mit der vorhin vorgestellten Methode arbeitet man sich Schritt für Schritt weiter in der Tabelle nach oben:

$$F_8(4) = F_7(4) + F_3(3) = F_6(4) + 2F_3(3) = F_5(4) + 3F_3(3) = F_4(4) + 4F_3(3) = F_3(4) + 5F_3(3).$$

Wie erwünscht bleiben nur Dreieckszahlen übrig: $10 + 5 \cdot 6 = 40$.¹³⁷

4 Ausblick

4.1 Figurierte Zahlen bei späteren Mathematikern

Die figurierten Zahlen beschäftigten auch noch viel später einige bekannte Mathematiker, wie zum Beispiel Pierre de Fermat (1607-1665), von dem das folgende Zitat stammen soll:

I was the first to discover the very beautiful and entirely general theorem that every number is either triangular or the sum of 2 or 3 triangular numbers; every number is either a square or the sum of 2, 3 or 4 squares; either pentagonal or the sum of 2,3,4 or 5 pentagonal numbers; and so on ad infinitum, whether it is a question of hexagonal, heptagonal or any polygonal numbers. I can not give the proof here, which depends upon numerous and abstruse mysteries of numbers; for I intend to devote an entire book to this subject and to effect in this part of arithmetic astonishing advances over the previously known limits.¹³⁸

Ein solches Buch ist allerdings von Fermat nie veröffentlicht worden und es ist unklar ob Fermat überhaupt einen Beweis dafür hatte.¹³⁹

Auch Gauß hat sich mit figurierten Zahlen beschäftigt. Einer der ersten bedeutenden Sätze von Gauß behandelt die Dreieckszahlen: am 10. Juli 1796 soll er folgende Worte in sein Tagebuch geschrieben haben:

$$\text{EYPEKA: num} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

EYPEKA ist griechisch und bedeutet so viel wie Heureka, also „ich hab's gefunden“. Wahrscheinlich zitierte Gauß damit Archimedes, der vor lauter Freude darüber, beim Baden das Gesetz des Auftriebes entdeckt zu haben, dieses Wort gerufen und nackt durch die Straßen gelaufen sein soll. Diese Erkenntnis, die Gauß scheinbar genauso

¹³⁷ Berggren, Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, 228.

¹³⁸ Dickson Leonard Eugene: *History of the Theory of Numbers*. Volume 2: *Diophantine Analysis*. Washington: Carnegie Institution of Washington, 1920, 6.

¹³⁹ Dickson, History of Numbers, 6.

blitzartig gewonnen hatte, soll also darstellen, dass sich jede beliebige natürliche Zahl als Summe von höchstens 3 Dreieckszahlen schreiben lässt. Gauß hat dies 1796 im Alter von 19 Jahren bewiesen.

Joseph-Louis Lagrange hat 1772 bewiesen, dass jede natürliche Zahl Summe von höchstens vier Quadratzahlen ist.

Und erst Augustin-Louis Cauchy konnte 1813 den allgemeinen Satz beweisen, von dem schon Fermat gesprochen hatte.¹⁴⁰

¹⁴⁰ Beutelspacher Albrecht: *Zahlen, Formeln, Gleichungen*. Algebra für Studium und Unterricht. Wiesbaden: Springer 2018, 11-13.

5 Literaturverzeichnis

Alten, Heinz-Wilhelm, et al., 2014. *4000 Jahre Algebra. Geschichte - Kulturen - Menschen. Vom Zählstein zum Computer.* Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Bärthlein, K., 1996. *Der Analogiebegriff bei den griechischen Mathematikern und bei Platon.* Würzburg: Königshausen und Neumann.

Becker, O., 1957. *Das mathematische Denken der Antike.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Beutelspacher, A., 2018. *Zahlen, Formeln, Gleichungen.* Algebra für Studium und Unterricht. Wiesbaden: Springer.

Berggren, J. L., 2016. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* New York: Springer Verlag.

Brentjes, S. & Hogendijk, J. P., 1989. *Notes On Thābit ibn Qurra and His Rule for Amicable Numbers.* Historia Mathematica 16, pp. 373-378.

Cantor, M., 1894. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Erster Band, zweite Auflage, Leipzig: B.G.Teubner.

Claudi, A., 2016. *Der Satz des Pythagoras. Die heilige Geometrie von Dreiecken.* Kerkdriel: Libero.

D'Ooge, M. L., 1926. *Nicomachus of Gerasa: Introduction to Arithmetic.* New York: The Macmillan Company.

Dickson, L.E., 1921. *Perfect and Amicable Number.* The scientific Monthly. <http://www.jstor.org/stable/6610> (letzter Zugriff: 19.04.2018).

Dickson, L.E., 1920. *History of the Theory of Numbers.* Volume 2: *Diophantine Analysis.* Washington: Carnegie Institution of Washington.

Fauvel, J., Gray, J., 1987. *The History of Mathematics: A reader.* Basingstoke/London: Macmillan Education with the Open University.

Gericke, H., 2013. *Mathematik in Antike, Orient und Abendland.* Wiesbaden: Fourier Verlag.

Heath, T., 1921. *A history of Greek Mathematics Vol I*. Oxford: At the clarendon press.

Junge, G., 1948. Flächenanlegung und Pentagramm: Ein Beitrag zur Entwicklungs-Geschichte von Euklids Elementen. *Osiris*, Issue Vol.8. <http://www.jstor.org/stable/301527> (letzter Zugriff: 27.06.2018).

Michels, U., 1977. *dtv-Atlas Musik: Systematischer Teil Musikgeschichte von den Anfängen bis zur Renaissance*. Kassel, Basel, Tours, London: Bärenreiter Verlag.

Riedweg, C., 2002. *Pythagoras. Leben, Lehre, Nachwirkung; eine Einführung*. München: C.H. Beck.

Sonar, T., 2016. *3000 Jahre Analysis. Geschichte-Kulturen-Menschen*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Starke, D., 2006. *Erste Anfänge der Naturwissenschaften. Eine geschichtliche Betrachtung*. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

Szabo, A., 1994. *Entfaltung der griechischen Mathematik*. Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.

Van der Waerden, B. L., 1943. *Harmonielehre der Pythagoreer*. *Hermes*, 78 (2). <http://www.jstor.org/stable/4474726> (letzter Zugriff: 19.06.19).

Van der Waerden, B. L., 1956. *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, Babylonische und griechische Mathematik..* Basel: Birkhäuser AG.

Van der Waerden, B. L., 1979. *Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*. Zürich und München: Artemis Verlag.

6 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Veranschaulichung Satz des Pythagoras	11
Abbildung 2: Beweis vom Satz des Pythagoras	12
Abbildung 3: Winkelsumme im Dreieck	13
Abbildung 4: Einfache Flächenanlegung	14
Abbildung 5: Flächenanlegung mit Defekt	15
Abbildung 6: Flächenanlegung mit Exzess	17
Abbildung 7: Regelmäßiges Fünfeck mit eingeschriebenem Pentagramm.....	20
Abbildung 8: Teildreiecke im Pentagramm	21
Abbildung 9: Winkelsummen im Pentagramm	21
Abbildung 10: Ähnliche Dreiecke im Pentagramm.....	22
Abbildung 11: Mit Rechensteinen gelegte Dreieckszahl	24
Abbildung 12: Quadratzahl mit Gnomon.....	24
Abbildung 13: Rechteckszahl mit Gnomon	25
Abbildung 14: Rechteckszahl aus zwei Dreieckszahlen	25
Abbildung 15: Quadratzahl aus zwei Dreieckszahlen	25
Abbildung 16: Saitennamen.....	43
Abbildung 17: Das Verhältnis der Oktave am Monochord	47
Abbildung 18: Das Verhältnis der Quint am Monochord	47
Abbildung 19: Das Verhältnis der Quart am Monochord	47
Abbildung 20: Zentralfeuer, Erde und Gegenerde	54
Abbildung 21: Tabelle zur Entstehung ungerader-gerader Zahlen	63
Abbildung 22: Teiler von 284 und 220	74
Abbildung 23: Figurierte Zahl eines Oktagons.....	77

Anhang

Abstract in Deutsch

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, zu zeigen, dass es neben dem bekanntesten Pythagoreer, Pythagoras von Samos, auch noch weitere Anhänger dieser Bruderschaft gegeben hat, die einen wesentlichen Beitrag zur Wissenschaft leisteten. Ausgehend von der Geschichte der Pythagoreer, ihrem Lebensstil und ihrem Glauben, werden vor allem mathematische Entdeckungen, die Hintergründe und die ersten Beweisformen in der Arbeit dargelegt und beschrieben.

Ein wesentlicher Teil der Arbeit beschäftigt sich mit dem Spätpythagoreer Nikomachos von Gerasa, der mehrere Bücher verfasste und das Wissen der Pythagoreer niedergeschrieben und so weitergegeben hat. Sein Buch *Einführung in die Arithmetik*, in dem er Zehn verschiedene Mittelwerte beschreibt, die Klassifizierung von Zahlen, sowie seine Musiktheorie stehen im Vordergrund.

Am Ende wird der Einfluss von Nikomachos Arbeit auf die Mathematik im mittelalterlichen Islam aufgezeigt.

Abstract in English

This diploma thesis deals with different Pythagoreans and should show, that besides Pythagoras from Samos himself there are many other important Pythagoreans who did substantial contribution for science. Starting with the history of the Pythagoreans, you will read about their kind of living, their faith and of course their discoveries in maths and some of the first proofs.

Later on, the thesis is about one of the later Pythagorean named Nicomachos from Gerasa. He wrote some books about the knowledge of the Pythagoreans. His book *An introduction to Arithmetic*, in which he described ten different means and gave a classification of numerical ratios are important parts of this work. He also wrote a book about musical theory, which is discussed here as well.

The thesis ends with the impact of Nicomachos work on the mathematics in medieval Islam.

