

# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Alle für einen, einer für alle – Versicherungsmathematik  
im Unterricht“

verfasst von / submitted by

Michael Grasl

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears  
on the student record sheet:

A 190 406 456

Studienrichtung lt. Studienblatt  
degree programme code as it appears  
on the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik,  
UF Geografie und Wirtschaftskunde

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith



## **Danksagung**

Ein großer Dank geht an ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, der mich im Zuge der Betreuung dieser Arbeit und im Laufe meines Studiums sehr unterstützt hat und bei Fragen meinerseits innerhalb kürzester Zeit geholfen hat.

Des Weiteren bedanke ich mich bei meiner Freundin Debora, die mich während meines Studiums motiviert hat und immer eine Stütze war.

Mein größter Dank geht an meine Eltern, die mir das Studium ermöglicht und mich in diesem Prozess vielfältig unterstützt haben und immer das Beste für mich wollten.

Ein weiterer Dank geht an meine Schwestern für ihre Ratschläge, wenn ich mir in manchen Situationen unsicher war.

Abschließend bedanke ich mich bei meinen Freunden und Studienkollegen, ohne die ich mein Studium nicht abschließen hätte können.



## Inhaltsverzeichnis

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| 1 Einleitung.....                                                  | 8  |
| 2 Ein geschichtlicher Rückblick .....                              | 11 |
| 2.1 Versicherungen.....                                            | 11 |
| 2.2 Versicherungsmathematik.....                                   | 12 |
| 3 Versicherung.....                                                | 14 |
| 3.1 Grundgedanken der Versicherung.....                            | 14 |
| 3.2 Risikotransfer .....                                           | 14 |
| 3.3 Risiken der Versicherungen .....                               | 15 |
| 3.3.1 Prozessrisiko.....                                           | 15 |
| 3.3.2 Diagnoserisiko .....                                         | 15 |
| 3.3.3 Prognoserisiko .....                                         | 15 |
| 3.4 Versicherbarkeit von Risiken .....                             | 16 |
| 3.4.1 Risiko/Ungewissheit .....                                    | 16 |
| 3.4.2 Schadensereignisse .....                                     | 17 |
| 3.4.3 Höchstschaden .....                                          | 17 |
| 3.4.4 Durchschnittsschaden und Schadenhäufigkeit .....             | 17 |
| 3.4.5 Moralisches Risiko, Negativselektion.....                    | 17 |
| 4 Mathematische Grundlagen .....                                   | 19 |
| 4.1 Risikoausgleich im Kollektiv .....                             | 19 |
| 4.2 Gesetze der großen Zahlen.....                                 | 19 |
| 4.2.1 Markowsche Ungleichung.....                                  | 21 |
| 4.2.2 Tschebyschewsche Ungleichung .....                           | 21 |
| 4.2.3 Schwaches Gesetz der großen Zahlen.....                      | 22 |
| 4.2.4 Kolmogorow-Ungleichung.....                                  | 23 |
| 4.2.5 Kroneckersches Lemma .....                                   | 26 |
| 4.2.6 Das starke Gesetz der großen Zahlen.....                     | 26 |
| 4.3 Summe von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen ..... | 28 |
| 5 Zusammensetzung einer Prämie .....                               | 33 |
| 5.1 Sicherheitsaufschlag .....                                     | 33 |
| 5.1.1 Berechnungsarten des Sicherheitszuschlags.....               | 35 |
| 6 Simulation von Sachschäden .....                                 | 37 |
| 6.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....                          | 37 |
| 6.1.1 Binomialverteilung .....                                     | 38 |
| 6.1.2 Poisson-Verteilung.....                                      | 39 |
| 6.1.3 Exponentialverteilung .....                                  | 41 |
| 6.1.4 Pareto-Verteilung.....                                       | 42 |

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| 6.1.5 Gamma-Verteilung.....                         | 45 |
| 6.2 Modelle zur Simulation.....                     | 48 |
| 6.2.1 Individuelles Modell .....                    | 48 |
| 6.2.2 Kollektives Modell.....                       | 50 |
| 7 Unterrichtssequenzen.....                         | 52 |
| 7.1 Didaktisches Konzept .....                      | 53 |
| 7.2 Unterrichtskonzept 1 .....                      | 55 |
| 7.2.1 Dauer .....                                   | 55 |
| 7.2.2 Ziele .....                                   | 56 |
| 7.2.3 Vorwissen von Schülerinnen und Schülern ..... | 56 |
| 7.2.4 Sequenz 1 .....                               | 56 |
| 7.2.4.1 Ablauf .....                                | 56 |
| 7.2.4.2 Erwartungshorizont .....                    | 58 |
| 7.2.4.3 Kompetenzbezug.....                         | 60 |
| 7.2.5 Sequenz 2 .....                               | 60 |
| 7.2.5.1 Ablauf .....                                | 61 |
| 7.2.5.2 Erwartungshorizont .....                    | 61 |
| 7.2.5.3 Kompetenzbezug.....                         | 62 |
| 7.2.6 Sequenz 3 .....                               | 62 |
| 7.2.6.1 Ablauf .....                                | 62 |
| 7.2.6.2 Erwartungshorizont .....                    | 63 |
| 7.2.6.3 Kompetenzbezug.....                         | 64 |
| 7.2.7 Planungsraster .....                          | 64 |
| 7.3 Unterrichtskonzept 2.....                       | 66 |
| 7.3.1 Dauer .....                                   | 66 |
| 7.3.2 Ziele .....                                   | 66 |
| 7.3.3 Vorwissen von Schülerinnen und Schülern ..... | 66 |
| 7.3.4 Sequenz 1 .....                               | 67 |
| 7.3.4.1 Ablauf .....                                | 67 |
| 7.3.4.2 Erwartungshorizont .....                    | 68 |
| 7.3.4.3 Kompetenzbezug.....                         | 69 |
| 7.3.5 Sequenz 2 .....                               | 70 |
| 7.3.5.1 Ablauf .....                                | 70 |
| 7.3.5.2 Erwartungshorizont .....                    | 71 |
| 7.3.5.3 Kompetenzbezug.....                         | 72 |
| 7.3.6 Sequenz 3 .....                               | 73 |
| 7.3.6.1 Ablauf .....                                | 73 |

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| 7.3.6.2 Erwartungshorizont .....                   | 74 |
| 7.3.6.3 Kompetenzbezug.....                        | 75 |
| 7.3.7 Planungsraster.....                          | 76 |
| 7.4 Unterrichtskonzept 3.....                      | 76 |
| 7.4.1 Dauer.....                                   | 77 |
| 7.4.2 Ziele .....                                  | 77 |
| 7.4.3 Vorwissen von Schülerinnen und Schülern..... | 77 |
| 7.4.4 Sequenz 1 .....                              | 77 |
| 7.4.4.1 Ablauf.....                                | 78 |
| 7.4.4.2 Erwartungshorizont .....                   | 79 |
| 7.4.4.3 Kompetenzbezug.....                        | 80 |
| 7.4.5 Sequenz 2 .....                              | 81 |
| 7.4.5.1 Ablauf.....                                | 81 |
| 7.4.5.2 Erwartungshorizont .....                   | 81 |
| 7.4.5.3 Kompetenzbezug.....                        | 82 |
| 7.4.6 Sequenz 3 .....                              | 82 |
| 7.4.6.1 Ablauf.....                                | 82 |
| 7.4.6.2 Erwartungshorizont .....                   | 83 |
| 7.4.6.3 Kompetenzbezug.....                        | 83 |
| 7.4.7 Planungsraster.....                          | 84 |
| 8 Fazit.....                                       | 85 |
| Abbildungsverzeichnis .....                        | 87 |
| Tabellenverzeichnis.....                           | 88 |
| Literaturverzeichnis.....                          | 89 |
| Anhang .....                                       | 92 |
| Kurzfassung .....                                  | 92 |
| Abstract.....                                      | 93 |

## 1 Einleitung

Versicherungen begegnen den Menschen beabsichtigt, aber auch unbewusst, in jedem Abschnitt ihres Lebens. So sind in Österreich 8,8 Millionen<sup>1</sup> Bürgerinnen und Bürger faktisch von Geburt an krankenversichert. Jeder Arbeitnehmer und jede Arbeitnehmerin ist aufgrund von Erwerbstätigkeit kranken-, arbeitslosen-, pensions- sowie unfallversichert. Schülerinnen und Schüler sind meist ohne ihr Wissen unfallversichert, genauso wie Studierende. Für die fast sieben Millionen zugelassenen Kraftfahrzeuge in Österreich werden KFZ-Versicherungen bezahlt, noch höhere Prämien werden aus dem Titel der Lebensversicherung gewonnen.<sup>2</sup> Die Bedeutung von Versicherungen zeigt sich auch in der Finanzstärke der Versicherungswirtschaft und der öffentlichen Sozialversicherung. Allein in Österreich wurden 2018 laut der Interessensgemeinschaft der privaten Versicherungsunternehmen 13,9 Milliarden Euro<sup>3</sup> an privaten Versicherungsleistungen ausgeschüttet, während die Sozialversicherung einen Umsatz von über 60 Milliarden Euro<sup>4</sup> erzielte.

Man könnte annehmen, dass eine dermaßen hohe Alltagsbetroffenheit der Menschen mit einem Mehr an Beschäftigung mit dem Thema einhergehen würde. Jedoch scheint das Verständnis um die Funktionsweise von Versicherungen im Allgemeinen und somit auch ihrem mathematischen Element im Speziellen keine Selbstverständlichkeit zu sein. Eine IMAS-Studie im Auftrag der *Erste Bank* aus dem Jahr 2018 beschied den Österreicherinnen und Österreichern frappante Defizite im Nachvollziehen von Finanz- und Wirtschaftsfragen.<sup>5</sup>

Die verschiedenen Formen der versicherten Risiken, mit denen man früher oder später in seinem Leben konfrontiert wird, scheinen unzählig, jedoch ist die Funktionsweise und das

---

<sup>1</sup> vgl. Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger (Hrsg.) (2019): Die österreichische Sozialversicherung in Zahlen. – 42. Ausgabe: März 2019. – o.O., 13.

<sup>2</sup> vgl. VVÖ (Versicherungsverband Österreich) (Hrsg.) (2018): Jahresbericht 2018. – o.O., 104.

<sup>3</sup> vgl. VVÖ (Versicherungsverband Österreich) (Hrsg.) (2019): Die österreichische Versicherungswirtschaft: Die vorläufigen Zahlen 2018 und eine erste Prognose 2019, online unter: <https://www.vvo.at/vvo/vvo.nsf/sysPages/0BA0CF8B9E008C73C12583AF003F4DB9> (Zugriff am 08.06.2019).

<sup>4</sup> vgl. Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger (Hrsg.) (2019): Die österreichische Sozialversicherung in Zahlen. – 42. Ausgabe: März 2019. – o.O., 9.

<sup>5</sup> vgl. HÖLLER, C. (2018): 91 Prozent der Österreicher wissen nicht, was Anleihen sind. In: Die Presse, 17.10.2018, online unter: <https://diepresse.com/home/wirtschaft/boerse/5514739/91-Prozent-der-Oesterreicher-wissen-nicht-was-Anleihen-sind> (Zugriff am 04.04.2019).



Prinzip jeder Versicherung ähnlich. Trotz alledem wird der Themenkomplex von vielen Menschen als kompliziert und undurchschaubar wahrgenommen.

Bereits ein kurzer Blick in die Standardliteratur der Angewandten Versicherungsmathematik, zum Beispiel von Mack, führt eindrucksvoll vor Augen, dass selbst die Definition des Begriffes Schwierigkeiten bereiten kann:

*Im Versicherungsvertrag (Police) verpflichtet sich das Versicherungsunternehmen gegen Erhalt eines vereinbarten, im voraus [sic!] fälligen Geldbetrags (Prämie), bei Eintritt von im Vertrag näher definierten ungewissen Ereignissen (Schäden) bestimmte, in ihrer Höhe meist vom betreffenden Ereignis abhängige Zahlungen an den Vertragspartner (Versicherungsnehmer) zu leisten, die den aus dem Ereignis resultierenden wirtschaftlichen Nachteil des Versicherungsnehmers reduzieren oder ausgleichen sollen.<sup>6</sup>*

Diese zwar vollständige, jedoch sehr komplexe Definition zeigt, warum Versicherungsmathematik von vielen Menschen als unzugänglich wahrgenommen wird. Ein bereits in der Schule verankerter Fokus auf das breite Gebiet der Versicherungsmathematik könnte eine Möglichkeit darstellen, die Barriere für den Wissenserwerb herabzusetzen, das Interesse daran zu verbreitern und auch den Lehrenden die Distanz zum Thema zu nehmen.

Das Prinzip Versicherung findet sich regelmäßig im Alltag der Beteiligten wieder. Manche Schülerinnen oder Schüler haben möglicherweise bereits ein Moped, planen, für die nächste Reise ins Ausland einen Reiseversicherungsvertrag abzuschließen oder waren aufgrund einer Krankheit bei einem Kassenarzt. Eine didaktisch altersberücksichtigende wie verständliche Herangehensweise und daran angepasstes Lehrmaterial könnten dazu beitragen, individuelle, oftmals aus Überforderung entstehende, Fehlentscheidungen zu vermeiden. Der gesellschaftliche Nutzen daraus liegt auf der Hand: Eine mündigere und besser aufgeklärte Bevölkerung ist weniger anfällig für Betrug, Pyramidenspiele und insgesamt wohl auch befähigter, bessere wirtschaftliche Entscheidungen zu treffen. Das Wissen um die Funktion der Versicherung von Risiken erlaubt zukünftig unternehmerisch

---

<sup>6</sup> MACK, T. (1997): Schadenversicherungsmathematik. – Karlsruhe, 21.

Tätigen, in größeren Dimensionen zu denken und im Umgang mit dem unternehmerischen Risiko kompetenter zu agieren.

Obwohl Versicherungen keine Erwähnung im Lehrplan finden, eignet sich der Mathematikunterricht hervorragend dazu, das Thema zu behandeln. Vor allem in den höheren Klassen bietet die Stochastik eine gute Gelegenheit, im Unterricht die Funktion von Versicherungen zu erläutern und somit dem Umstand entgegenzuwirken, dass viele bald junge Erwachsene in ihrem Leben noch keinerlei Erfahrung im Umgang mit Versicherungen gewinnen konnten. Hierfür werden in der vorliegenden Arbeit verschiedene Unterrichtskonzepte entwickelt und vorgestellt, welche sich auch für den nicht für die Notengebung relevanten Unterricht und für das Wahlpflichtfach Mathematik eignen. Weiters eignet sich die Versicherungsmathematik auch für eine vorwissenschaftliche Arbeit im Bereich Statistik oder im Rahmen der Behandlung von Wahrscheinlichkeitsrechnungen. Die hier vorgestellten Unterrichtseinheiten können dafür als Grundlage dienen und in weiterer Folge vertieft werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Konzept und die Funktionsweise von Versicherungen für Schülerinnen und Schüler zu durchleuchten und mit altersgerechten Erklärungen und Berechnungen greifbarer zu machen, um sie dazu zu befähigen, im späteren Verlauf des Lebens einen informierten und mündigen Umgang mit Versicherungen zu pflegen.

## 2 Ein geschichtlicher Rückblick

Um einen leichteren Einstieg in die Materie zu ermöglichen, wird im Folgenden ein kurzer historischer Exkurs zu den Themen Versicherungen und Versicherungsmathematik gegeben, welcher sich, grob wiedergegeben, auch zur Einführung von Schülerinnen und Schülern in dieses Themengebiet eignet.

### 2.1 Versicherungen

*Versicherungen sind die geniale Antwort auf die Hoffnung der Menschen nach einem gesicherten Leben ohne Zukunftsängste.<sup>7</sup>*

Dieser Satz nach Ellermann und Ellermann beschreibt die fundamentale Intention einer Versicherung sehr einfach. Eine Retrospektive auf die Entwicklung dieses Konzepts verdeutlicht dies.

Die Anfänge der Versicherung können vielerorts gefunden werden. Im Grunde war schon das Haltbarmachen von Lebensmitteln durch Salz oder Rauch sowie durch Trocknung eine Art Versicherung, indem eine Vorkehrung getroffen wurde, um zufälligen Abweichungen des gewohnten Lebensstandards entgegenzuwirken. Der Wunsch, sich gegen Risiken des Lebens oder der eigenen Tätigkeit abzusichern, ist ein immerwährendes Bedürfnis. Schon in der Antike verspürten Menschen diesen Drang. Zu damaliger Zeit galt besonders negativen Folgen von Naturereignissen das Hauptaugenmerk.<sup>8</sup>

Dem heutigen Versicherungswesen gehen zwei wichtige Entwicklungen voraus: einerseits die im 14. Jahrhundert entstandene, kaufmännisch betriebene Seeversicherung im Mittelmeer und andererseits das mittelalterliche Gildewesen in Nordeuropa im 16. Jahrhundert.<sup>9</sup> Diese Formen waren jedoch nur für eine kleine Bevölkerungszahl von Bedeutung. Versicherungen für die breite Masse entwickelten sich erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, wobei die Grenzen zwischen Selbsthilfevereinen, Sozial- und Privatversicherungen nicht eindeutig gezogen werden konnten.<sup>10</sup>

---

<sup>7</sup> ELLERMANN, B. und ELLERMANN, U. (1995): "... und wie läßt du hageln?". Versicherungsbetrug als Volkssport. – Karlsruhe, 9.

<sup>8</sup> vgl. EDELBACHER, M. (1995): Versicherungsbetrug kennt keine Grenzen. Neue Trends des Versicherungsbetruges und des Kraftfahrzeugdiebstahles. – Aspang, 5f.

<sup>9</sup> vgl. ROHRBACH, W. (1988): Versicherungsgeschichte Österreichs von den Anfängen bis zum Börsenkrach 1873. – Wien. (Versicherungsgeschichte Österreichs 1), 13f.

<sup>10</sup> vgl. ROHRBACH, W. (1988): 132.

1884 entwickelte sich die erste Krankenversicherung in Deutschland, was den Beginn der Sozialversicherung markiert. Ebenfalls in diese Zeit fällt die Entstehung der heutigen Versicherungswissenschaft, wobei es rudimentäre Ansätze eines wissenschaftlichen Diskurses schon im 18. Jahrhundert gab. Eine wichtige Rolle spielte hierbei das Gesetz der großen Zahlen, auf welches später noch genauer eingegangen wird. Außerdem entwickelte sich in dieser Zeit das Versicherungsrecht als Sparte des Zivilrechts. Entscheidender Faktor für die Entwicklung von Privatversicherungen war vor allem die industrielle Revolution und die daraus resultierenden zunehmenden, vielfältigeren und mit schwerwiegenden Konsequenzen einhergehenden Haftpflichtgefahren.<sup>11</sup>

## 2.2 Versicherungsmathematik

Die Anfänge der Versicherungsmathematik im Speziellen sind ebenfalls schwer an einem Ereignis festzumachen. In der Literatur werden häufig die ersten Ausarbeitungen von sogenannten Sterbe- oder Sterblichkeitstafeln, welche durch den Astronomen Edmund Halley 1693 in London veröffentlicht wurden, als ein wichtiger Ausgangspunkt für die spätere Entwicklung der mathematischen Fachrichtung angesehen. Diese stellen die Überlebenswahrscheinlichkeit einer Gesellschaft, in diesem Fall für die Stadt Breslau, in Kohorten, also in Gruppen von Personen im gleichen Alter, dar. Halley hatte hierfür die Geburten- und Totenliste zur Verfügung und erstellte daraus eine Tabelle von demographischen Werten. Breslau hatte zur damaligen Zeit außergewöhnlich genaue Aufzeichnungen zum Sterbealter der Einwohnerinnen und Einwohner. Dadurch konnten erstmals verlässliche Vorhersagen einer Massenerscheinung prognostiziert und für die breite Öffentlichkeit verständlich gemacht werden, ohne Informationen über das Individuum zu kennen.<sup>12</sup>

Auch im weiteren historischen Verlauf war England das Zentrum der sich entwickelnden Versicherungsmathematik. James Dodson verwertete am Anfang der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts Sterbetafeln und Wahrscheinlichkeitstheorien, um adäquate Versicherungsbeiträge zu berechnen. In weiterer Folge, fünf Jahre nach Dodsons Tod, wurde 1762 „The Equitable Life Assurance Society“, wörtlich übersetzt „Die Gesellschaft gerechter Lebensversicherung“, gegründet, welche bis heute unter dem Namen „Equitable Life“ Lebensversicherungen in Großbritannien anbietet und als erste von heute vielen

---

<sup>11</sup> vgl. WALLRABENSTEIN, A. (2009): Versicherung im Sozialstaat. – Tübingen, 11f.

<sup>12</sup> vgl. LOEWY, A. (1924): Versicherungs-Mathematik. – Berlin, 4.

Versicherungsunternehmen gilt.<sup>13</sup> Vorsitzender war Edward Rowe Mores, der als Erster den Begriff „actuary“ prägte, was ins Deutsche übersetzt „Versicherungsmathematiker“ bedeutet. Einzug ins Deutsche hielt das Wort später auch mit der Begrifflichkeit „aktuarielle Mathematik“, gelegentlich synonym für Versicherungsmathematik verwendet.<sup>14</sup>

1848 wurde in London die „Faculty of Actuaries“ gegründet. So präsentierte sich die noch junge Wissenschaftsdisziplin erstmals der Öffentlichkeit und konnte sich in weiterer Folge etablieren.<sup>15</sup> Damit einher ging auch, dass sich die Versicherungsmathematik mit Themen abseits der Lebensversicherungen beschäftigte, wie zum Beispiel der Sachversicherung. Im Gegensatz zu den Geburts- und Totenlisten für die Lebensversicherungen existierten allerdings für Sachversicherungen kaum Daten. Das führte dazu, dass die Vorhersagen sehr ungenau ausfielen.

Heutzutage stehen Versicherungsunternehmen eine Vielzahl von Daten zur Verfügung, wodurch relativ genaue Prognosen erstellt werden können. Außerdem ermöglichte der technologische Fortschritt komplexere Berechnungsmethoden, in die mehr Faktoren miteinbezogen werden konnten.

---

<sup>13</sup> vgl. ELDER, W. J. und BRACKENRIDGE, R. D. C. (2000): Medical Selection of Life Risks. – London, 3.

<sup>14</sup> vgl. MAY, A. und OYMANNS, M. (2012): Stochastik. Simulation von Sachschäden. – Köln, 2.

<sup>15</sup> vgl. HICKMAN, J. C. (2004): History of Actuarial Profession, 4; online unter: <https://web.archive.org/web/20060724173339/http://www.wiley.co.uk/eoas/pdfs/TAH012-.pdf> (Zugriff am 04.04.2019).

## 3 Versicherung

### 3.1 Grundgedanken der Versicherung

Das Wesen einer Versicherung ist die kollektive Risikoübernahme. Das bedeutet, dass exakt definierte Gefahren auf eine Gemeinschaft aufgeteilt werden sollen. Personen, die sich gegen dieses Risiko versichern wollen, zahlen ein vorher definiertes Entgelt und werden dadurch zur so genannten Gefahrengemeinschaft, welche die Deckung eines Schadens übernimmt. Für den Einzelnen bzw. die Einzelne würde das alleinige Aufkommen für den vollen Schaden einen erheblichen Verlust darstellen. Die Versicherung gibt somit die Möglichkeit, sich gegen finanzielle Folgen von Schäden zu schützen.

Versicherungen sind Unternehmen, die Risiken berechnen und abschätzen und gegen einen Beitrag einen Schutzvertrag, auch Polizze genannt, ausstellen. Alle Versicherten zahlen Prämien ein, welche jedoch lediglich der Person zugutekommen, die einen Schaden erfährt. Dieses Solidaritätsprinzip beruht darauf, dass alle einzahlen, damit diejenigen, die Pech haben, Leistungen abrufen können.

Es existieren allgemein drei Arten von Versicherungen: die Sach-, die Personen- und die Haftpflichtversicherung. Sachversicherungen versichern gegen Schäden an der eigenen Sache, Personenversicherungen gegen Schäden an der eigenen Person und Haftpflichtversicherungen gegen finanzielle Folgen bei an Anderen verursachten Schäden.

Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten des Risikoausgleichs: im Kollektiv und in der Zeit. Risikoausgleich im Kollektiv bedeutet, dass durch den Zusammenschluss mehrerer Versicherter das Risiko auf alle gleichermaßen verteilt wird. Risikoausgleich in der Zeit geht davon aus, dass sich Prämienenertrag und Schadensaufwand über einen längeren Zeitraum hinweg ausgleichen. In der Regel finden beide Konzepte simultan Eingang in versicherungsmathematische Berechnungen.<sup>16</sup>

### 3.2 Risikotransfer

Menschliches Handeln ist risikobehaftet: Die Konsequenzen einer Handlung sind im Vorhinein nicht eindeutig klar und bestehen aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung von Ergebnissen. Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass die meisten Menschen risikoscheu sind, weshalb die Risikotragung des Individuums unerwünscht ist. Die

---

<sup>16</sup> vgl. MAY, A. und OYMANNS, M. (2012): Stochastik. Simulation von Sachschäden. – Köln, 6.

Risikoallokation durch den Schutz der Versicherung stellt hierbei ein geeignetes und weit verbreitetes Instrument dar.<sup>17</sup>

### 3.3 Risiken der Versicherungen

*Das versicherungstechnische Risiko ist die Gefahr, dass für einen bestimmten Zeitraum der Gesamtschaden des versicherten Bestandes die Summe der für die reine Risikoübernahme zur Verfügung stehenden Gesamtprämie und des vorhandenen Sicherheitskapitals übersteigt.*<sup>18</sup>

Versicherungsunternehmen sind, im Gegensatz zu anderen Unternehmen, mit speziellen Risiken konfrontiert, welche als versicherungstechnisch bezeichnet werden. Man kann diese laut Schulenberg in drei Kategorien zusammenfassen: Prozess-, Diagnose- und Prognoserisiken.<sup>19</sup>

#### 3.3.1 Prozessrisiko

Als Prozessrisiko werden die zufälligen Abweichungen vom Erwartbaren bezeichnet. Dies kann einerseits eine Häufung von vielen kleinen Schäden, andererseits ein Auftreten weniger, sehr hoher Zahlungen bedeuten. Dieses wahrscheinlichkeitstheoretische Phänomen kann ebenso in die andere Richtung ausschlagen, womit Versicherungen einen hohen Gewinn erzielen bzw. Reserven anhäufen können.

#### 3.3.2 Diagnoserisiko

Wie jedes Unternehmen sind auch Versicherungen nicht vor falschen Berechnungen gefeit. Dazu kann es kommen, wenn unvollständige bzw. falsche Daten oder falsche Berechnungsmodelle als Grundlage verwendet werden.

#### 3.3.3 Prognoserisiko

Das Prognoserisiko bezieht sich auf Veränderungen der äußeren Begebenheiten, wie zum Beispiel ein gesellschaftlicher oder meteorologischer Wandel über die Zeit oder Erfindungen, wodurch die Voraussetzungen der Berechnungen nicht mehr der Realität

---

<sup>17</sup> vgl. NELL, M. (1993): Versicherungsinduzierte Verhaltensänderungen von Versicherungsnehmern. Eine Analyse der Substitutions-, Moral-, Hazard- und Markteffekte unter der Krankenversicherung. – In: Karten, W. (Hrsg.): Veröffentlichungen des Seminars für Versicherungswissenschaft der Universität Hamburg und des Vereins zur Förderung der Versicherungswissenschaft in Hamburg e.V. – Karlsruhe (= Hamburger Reihe, 6), 1–263, 1.

<sup>18</sup> ALBRECHT, P. und SCHWAKE, E. (1988): Das versicherungstechnische Risiko. – In: Farny, D., Helten, E., Koch, P. und Schmidt, R. (Hrsg.): Handwörterbuch der Versicherung. – Karlsruhe, 650–657, 652.

<sup>19</sup> vgl. SCHULENBERG, Johann-Matthias von der (2005): Versicherungsökonomik. Ein Leitfaden für Studium und Praxis. – Karlsruhe, 65ff.

entsprechen. Die dadurch möglichen negativen finanziellen Folgen können für Versicherungen schwerwiegende und verlustreiche Auswirkungen haben.

### 3.4 Versicherbarkeit von Risiken<sup>20</sup>

Für ein Versicherungsunternehmen gestalten sich Schutzverträge nicht risikolos, weshalb man sich nicht gegen jegliche Gefahren versichern lassen kann. Man spricht hier von der Versicherbarkeit von Risiken. Laut Berliner existieren elf Kriterien für die Versicherbarkeit im privaten Sektor (siehe nachfolgende Tabelle). Diese Voraussetzungen sind jedoch nicht absolut. Umstände, die ein Unternehmen als unversicherbar einstuft, können von einem anderen genehmigt werden. Die Bewertung ist also bis zu einem gewissen Grad subjektiv.<sup>21</sup> Die ersten sechs der elf Kriterien sind aus versicherungsmathematischer Sicht relevant. Diese werden im Folgenden noch näher betrachtet. Darüber hinaus nennt Berliner drei marktbedingte (7-9) und zwei gesellschaftliche (10 und 11) Voraussetzungen für die Versicherbarkeit von Risiken.

| Kategorie | Kriterium                               | Eigenschaft            |
|-----------|-----------------------------------------|------------------------|
| 1         | Risiko/Ungewissheit                     | Messbar                |
| 2         | Schadensereignisse                      | Unabhängig             |
| 3         | Höchstschaden                           | Beherrschbar           |
| 4         | Durchschnittsschaden                    | Moderat                |
| 5         | Schadenshäufigkeit                      | Hoch                   |
| 6         | Moralisches Risiko,<br>Negativselektion | Nicht übermäßig        |
| 7         | Versicherungsprämie                     | Angemessen, bezahlbar  |
| 8         | Marktbedingt<br>Deckungsgrenzen         | Akzeptabel             |
| 9         | Branchenkapazität                       | Ausreichend            |
| 10        | Gesellschaftlich<br>Ordnungspolitik     | Konsistent mit Deckung |
| 11        | Rechtssystem                            | Erlaubt die Deckung    |

Tabelle 1: Kriterien der Versicherbarkeit

#### 3.4.1 Risiko/Ungewissheit

Um eine Versicherung für einen speziellen Fall anbieten zu können, muss das wahrscheinliche Eintreten des Schadensfalls messbar sein. Gleichzeitig muss das Eintreten

<sup>20</sup> vgl. NGUYEN, T. und ROMEIKE, F. (2013): Versicherungswirtschaftslehre. Grundlagen für Studium und Praxis. – Wiesbaden, 37ff.

<sup>21</sup> vgl. BERLINER, B. (1982): Die Grenzen der Versicherbarkeit von Risiken. – Zürich, o.S.



des Ereignisses ungewiss und daher zufällig sein, sonst spricht man von Versicherungsbetrug. Zur Berechnung des Risikos sind statistische Maße, wie Erwartungswert oder Standardabweichung, unabdingbar, um adäquate Prämien berechnen zu können. Andernfalls handelt es sich um Spekulation. Der stetige Wandel der Gesellschaft stellt das Versicherungswesen zusätzlich vor besondere Herausforderungen, da durch gesellschaftliche Veränderungen, wie zum Beispiel neue Erfindungen, auch neue Gefahren entstehen, über die noch keine gesammelten Daten existieren, die zur Risikoberechnung herangezogen werden könnten.

#### 3.4.2 Schadensereignisse

Für den Versicherer ist es von Vorteil, wenn die Risiken in seinem Portefeuille möglichst unabhängig sind. Das bedeutet, dass ein Schadensfall nicht automatisch einen zweiten auslösen soll. Bei positiven Korrelationen im Versicherungswesen spricht man von Kumulrisiken.

#### 3.4.3 Höchstschaden

Die Auszahlungssumme des schlechtesten möglichen Falls, also des größtmöglichen Schadens, muss beherrschbar sein. Ist dies nicht der Fall bzw. ist der größtmögliche Schaden nicht bekannt, kann ein zuvor festgelegter Maximalbetrag die Versicherbarkeit gewährleisten. Die Aufteilung des Risikos auf mehrere Versicherer ist ebenfalls eine geeignete Möglichkeit, im Fall eines unbekannten oder unbeherrschbaren Höchstschadens dennoch einen Versicherungsschutz anbieten zu können.

#### 3.4.4 Durchschnittsschaden und Schadenshäufigkeit

Mittlere Schadenshöhe und -häufigkeit hängen eng zusammen und können daher gemeinsam dargestellt werden. Im Idealfall ist der durchschnittliche Schaden moderat und tritt häufig auf, da dieser in weiterer Folge durch das Gesetz der großen Zahlen (siehe folgendes Kapitel) leichter einzuschätzen ist. Ein typisches Beispiel hierfür sind Autounfälle.

#### 3.4.5 Moralisches Risiko, Negativselektion

Das letzte versicherungsmathematische Kriterium betrifft die asymmetrische Informationsverteilung zwischen dem Versicherungsunternehmen und den Versicherten. Beispiele hierfür sind eine bewusste oder unbewusste Änderung des Verhaltens der Versicherten durch den Abschluss der Versicherung, auch *Moral Hazard* genannt, oder eine Beeinflussung der Zusammensetzung des Versichertenstamms, die so genannte

Negativselektion. *Moral Hazard* bedeutet, dass Personen beim Bestehen einer Versicherung zu mehr Risiko neigen. Von Negativselektion spricht man, wenn sich Personen, die eine höhere Risikobereitschaft aufweisen, häufiger gegen eine Gefahr versichern lassen, als Menschen ohne Hang zum Risiko. Nicht betroffen von diesem Kriterium sind so genannte „objektive Risiken“, die vom Menschen weder in der Entstehung noch in der Höhe beeinflussbar sind, wie zum Beispiel Naturgefahren.

## 4 Mathematische Grundlagen

Um die Berechnungen einer Versicherung und deren Prämien verstehen zu können, sind gewisse mathematische Konzepte notwendig. Im Folgenden werden die wichtigsten erläutert.

### 4.1 Risikoausgleich im Kollektiv

Das Wesen einer Versicherung fußt auf der Einzahlung vieler kleiner Beträge bei gleichzeitiger Auszahlung weniger größerer. Dies nennt sich, wie bereits weiter oben beschrieben, (Risiko-)Ausgleich im Kollektiv. Angenommen  $R_i$ , für  $i = 1, 2, \dots, n$ , sei die Risikohöhe jedes einzelnen versicherten Risikos für einen Bestand (= Umfang aller Versicherten zu einem Risiko) von  $n$  Versicherten. Der zu erwartende Gesamtschaden ergibt sich dadurch aus

$$R = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Die Zufallsvariablen  $R_1, R_2, \dots, R_n$  sind zufällig verteilt und unabhängig. Je größer der Bestand eines Unternehmens ist, desto genauer lässt sich die auszubehaltende Risikohöhe berechnen. Dahinter stecken die Gesetze der großen Zahlen.

### 4.2 Gesetze der großen Zahlen

*Obwohl aber seltsamerweise durch einen sonderbaren Naturinstinkt auch jeder Dummste ohne irgend eine vorherige Unterweisung weiß, dass je mehr Beobachtungen gemacht werden, umso weniger die Gefahr besteht, dass man das Ziel verfehlt, ist es doch ganz und gar nicht Sache einer Laienuntersuchung, dieses genau und geometrisch zu beweisen.<sup>22</sup>*

Bei einer Reihe unabhängiger Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  erklären die Gesetze der großen Zahlen das Konvergenzverhalten des arithmetischen Mittels  $\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$  dieser. Kurz gesagt nähert sich die relative Häufigkeit eines Zufallsereignisses immer weiter der theoretischen Wahrscheinlichkeit an, je öfter das Experiment durchgeführt wird. Ein leicht verständliches Beispiel hierfür, das deshalb auch oft im Unterricht für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe eingesetzt wird, ist der

---

<sup>22</sup> KOHLI, K. (1975): Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli. In: Die Werke von Jakob Bernoulli. Bd. 3. – Basel, 509–513, 509.

Wurf einer Münze. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf oder Zahl liegt bei 50 %. Je häufiger die Münze geworfen wird, desto wahrscheinlicher wird der tatsächliche relative Anteil bei  $\frac{1}{2}$  liegen, da der Einfluss des Zufalls immer geringer wird. Der Würfel eignet sich ebenfalls als gutes Beispiel, da die meisten Menschen Erfahrungen mit diesem Spielgerät haben. Die Wahrscheinlichkeit für einen „6er“, der zum Beispiel beim Brettspiel „Mensch ärgere dich nicht“ zum Eröffnen des Spiels benötigt wird, beträgt  $\frac{1}{6}$ . Dennoch zeigt der Würfel nicht bei jedem sechsten Wurf die höchste Augenzahl. Wichtig ist in diesem Fall, auf die relative Häufigkeit hinzuweisen. Ist es doch ein weit verbreiteter Irrtum, dass sich die absolute Häufigkeit verändert. Als Beispiel kann das Roulette herangezogen werden. Nachdem die Kugel oft auf einem roten Feld liegen bleibt, wird die Wahrscheinlichkeit, dass sie im nächsten Wurf auf einem schwarzen liegen bleibt, nicht höher. Salopp ausgedrückt merkt sich die Kugel nicht die Farbe der letzten Runde. Mathematisch kann dies durch die Unabhängigkeit der einzelnen Würfe oder aufgrund der bedingten Wahrscheinlichkeit erklärt werden.

Im Folgenden werden die Gesetze der großen Zahlen erläutert, zunächst das sogenannte schwache, im Anschluss das starke Gesetz. Diese unterscheiden sich durch die Art der Konvergenz. In der Literatur finden sich mehrere Wege, die Gesetze der großen Zahlen zu erklären, wobei in dieser Arbeit der nicht-axiomatische Zugang gewählt wird, da dieser, nach eigener Erfahrung des Autors, für viele leichter nachzuvollziehen ist.

Im ersten Schritt werden zwei Ungleichungen erklärt, welche später zur Erklärung des schwachen Gesetzes der großen Zahlen herangezogen werden. Die Markowsche und, deren Spezialfall, die Tschebyschewsche Ungleichung. Es werden keine Annahmen zur Verteilung der Zufallsvariablen gemacht, wodurch sie zwar eine sehr grobe Abschätzung darstellen, dafür aber allgemein einsetzbar sind.

Danach folgen die Kolmogorow-Ungleichung und das Kroneckersche Lemma zur Erklärung des starken Gesetzes der großen Zahlen.

#### 4.2.1 Markowsche Ungleichung<sup>23</sup>

**Satz:**

Sei  $X > 0$  eine integrierbare Zufallsvariable und  $E(X)$  der Erwartungswert dieser. Dann gilt für jedes  $a \in \mathbb{R}^+$ :

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} \cdot E(X)$$

**Beweis:**

Der Beweis wird nur für stetige Zufallsvariablen gezeigt, für diskrete funktioniert dieser analog. Sei  $f(x)$  die Dichte von  $X$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^a x \cdot f(x) dx + \int_a^{\infty} x \cdot f(x) dx = \\ &\geq \int_a^{\infty} x \cdot f(x) dx \\ &\geq a \int_a^{\infty} f(x) dx \\ &= a \cdot P(X \geq a). \end{aligned}$$

□

#### 4.2.2 Tschebyschewsche Ungleichung<sup>24</sup>

**Satz:**

Sei  $X > 0$  eine integrierbare Zufallsvariable und  $Var(X)$  die Varianz dieser. Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

---

<sup>23</sup> vgl. KRENGEL, U. (2005): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Wiesbaden, 59.

<sup>24</sup> vgl. IRLE, A. (2001): Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Grundlagen – Resultate – Anwendungen. – Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 124.

**Beweis:**

Wir betrachten oBdA. die Zufallsvariable  $Y = (X - E(X))^2$ , welche nichtnegativ ist, wodurch man die Markowsche Ungleichung anwenden kann:

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) &= P(|X - E(X)|^2 \geq \varepsilon^2) \\ &\leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

□

Diese Ungleichung ist zwar, wie bereits erwähnt, sehr grob, kann dafür jedoch auch angewendet werden, wenn von einer Verteilung lediglich Erwartungswert und Varianz bekannt sind.

Unmittelbar aus dieser Ungleichung ergibt sich folgendes Resultat, das als das schwache Gesetz der großen Zahlen bezeichnet wird:

4.2.3 Schwaches Gesetz der großen Zahlen<sup>25</sup>**Satz:**

Es seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  stochastisch unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen. Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also folgt

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ falls } \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

---

<sup>25</sup> vgl. IRLE, A. (2001): Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Grundlagen – Resultate – Anwendungen. – Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 158.

**Beweis:**

Mit der Tschebyschewschen Ungleichung und der Additivität der Varianz bei stochastischer Unabhängigkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i))\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i), \end{aligned}$$

woraus auch die zweite Aussage gefolgert werden kann.

□

4.2.4 Kolmogorow-Ungleichung<sup>26</sup>

Um das starke Gesetz der großen Zahlen zu zeigen, kann man sich mit der Kolmogorow-Ungleichung behelfen, welche eine Verallgemeinerung der Tschebyschewschen Ungleichung ist.

**Satz:**

Es seien  $X_1, X_2, \dots, X_k$  stochastisch unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit  $E(X_n) = 0, n = 1, 2, \dots, k$ . Sei  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, \dots, k$ . Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$P\left(\max_{1 \leq n \leq k} |S_n| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{n=1}^k \text{Var}(X_n).$$

**Beweis:**

Wir setzen

$$A_1 = \{|S_1| \geq \varepsilon\}, A_n = \{|S_1| < \varepsilon, \dots, |S_{n-1}| < \varepsilon, |S_n| \geq \varepsilon\}, n = 2, \dots, k.$$

Dann sind diese Ereignisse paarweise disjunkt, und es gilt

$$\sum_{n=1}^k A_n = \left\{ \max_{1 \leq n \leq k} |S_n| \geq \varepsilon \right\}.$$

<sup>26</sup> vgl. IRLE, A. (2001): Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Grundlagen – Resultate – Anwendungen. – Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 179f.

Wir beachten weiter, dass für jedes  $n$  die Zufallsvariablen

$$1_{A_n}S_n \text{ und } S_k - S_n$$

stochastisch unabhängig sind, da die erste nur von  $X_1, X_2, \dots, X_n$  und die zweite nur von  $X_{n+1}, \dots, X_k$  abhängt. Damit erhalten wir für jedes  $n$

$$E(1_{A_n}S_n(S_k - S_n)) = E(1_{A_n}S_n)E(S_k - S_n) = 0.$$

Es folgt damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \text{Var}(X_n) &= E(S_k^2) \\ &\geq \sum_{n=1}^k E(1_{A_n}S_k^2) \\ &= \sum_{n=1}^k E(1_{A_n}(S_n + (S_k - S_n))^2) \\ &\geq \sum_{n=1}^k [E(1_{A_n}S_k^2) + 2 \cdot E(1_{A_n}S_n(S_k - S_n))] \\ &\geq \sum_{n=1}^k \varepsilon^2 P(A_n) \\ &= \varepsilon^2 P\left(\max_{1 \leq n \leq k} |S_n| \geq \varepsilon\right). \end{aligned}$$

□

Weiters wird ein Satz zum gewünschten Kriterium der fast sicheren Konvergenz für das starke Gesetz der großen Zahlen benötigt.



**Satz:**<sup>27</sup>

Es seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  stochastisch unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit  $E(X_n) = 0, n \in \mathbb{N}$ . Sei  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}$ . Es gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(X_n) < \infty.$$

Dann folgt

$$P((S_n)_n \text{ konvergiert}) = 1.$$

**Beweis:**

Für  $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}$  gilt mit Benutzung der Kolmogorow-Ungleichung

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{n \geq m} |S_n - S_m| > \varepsilon\right) &= P\left(\sup_{n \geq m+1} \left|\sum_{i=m+1}^n X_i\right| > \varepsilon\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\left(\sup_{k \geq n \geq m+1} \left|\sum_{i=m+1}^n X_i\right| > \varepsilon\right)\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=m+1}^k \text{Var}(X_i) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=m+1}^{\infty} \text{Var}(X_i). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \text{Var}(X_i) \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

□

Weiters benötigen wir das Kroneckersche Lemma.

---

<sup>27</sup> vgl. IRLE, A. (2001): Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Grundlagen – Resultate – Anwendungen. – Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 180f.

#### 4.2.5 Kroneckersches Lemma<sup>28</sup>

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton steigende Folge positiver Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ . Sei  $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$ .

Falls  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, so folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_i = 0.$$

**Beweis:**

Nach Voraussetzung  $\exists s \in \mathbb{R}$  mit  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Aus  $s_n - s_{n-1} = \frac{a_n}{b_n}$  folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^n b_i (s_i - s_{i-1}) \\ &= b_n s_n - \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) s_{i-1}. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit  $\frac{1}{b_n}$

$$\frac{1}{b_n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i = s_n - \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i-1}) s_{i-1}.$$

Aus  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  folgt mithilfe des Cesaro-Limes  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} (b_i - b_{i-1}) s_{i-1}$ .

□

#### 4.2.6 Das starke Gesetz der großen Zahlen<sup>29</sup>

Es seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  stochastisch unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen. Es gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty.$$

<sup>28</sup> vgl. IRLE, A. (2001): Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Grundlagen – Resultate – Anwendungen. – Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 183.

<sup>29</sup> vgl. IRLE, A. (2001): 181.

Dann folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) \rightarrow 0 \text{ fast sicher.}$$

**Beweis:**

OBdA. sei  $E(X_i) = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  angenommen. Wir setzen

$$Y_i = \frac{X_i}{i} \text{ für } i \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var}(Y_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Sei weiter für  $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}.$$

Aus dem vorstehenden Satz ergibt sich

$$P((S_n)_n \text{ konvergiert}) = 1.$$

Durch Anwendung des Kroneckerschen Lemmas folgt

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0 \text{ fast sicher.}$$

□

Beim schwachen Gesetz der großen Zahlen handelt es sich um einen Satz über stochastische Konvergenzen von Mittelwerten, beim starken Gesetz um fast sichere Konvergenzen. Da „fast sicher“ ein stärkerer Konvergenzbegriff als „stochastisch“ ist, erfüllt eine Folge von Zufallsvariablen das schwache Gesetz der großen Zahlen, sobald sie auch das starke Gesetz der großen Zahlen mit derselben Zahlenfolge erfüllt. Umgekehrt ist dieser Umstand nicht automatisch gegeben.

### 4.3 Summe von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen

Nach den Gesetzen der großen Zahlen kann ein Versicherungsunternehmen die vermutete Schadenshöhe mit einer höheren Wahrscheinlichkeit vorhersagen, je mehr Einzahlerinnen und Einzahler sie findet.

Bei den diesbezüglichen versicherungsmathematischen Berechnungen geht man von der unrealistischen Annahme aus, dass sich ein unendlich großer Pool an Kundinnen und Kunden findet, die alle bei derselben Versicherung einzahlen. Dementsprechend kann das Unternehmen die Schadenshöhe genau voraussagen. Dieser Umstand bedeutet jedoch nicht, dass es genügt, lediglich den so errechneten Betrag – in der Literatur gelegentlich als Nettorisikoprämie oder einfach Nettoprämie bezeichnet – in Form von Prämien einzuheben, da die Summen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind. Somit würde der Betrag nur mit einer Sicherheit von 50 % für die Deckung der Kosten ausreichen, was langfristig in einen sicheren Konkurs des Unternehmens führen würde.

Um diese Aussage zu beweisen, definieren wir zunächst einen Wahrscheinlichkeitsraum.

#### **Definition:**

Sei der Ereignisraum  $\Omega \neq \emptyset$ . Eine Familie  $\mathcal{A}$  von Teilmengen von  $\Omega$  ( $A \in \Omega \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \Omega$ ) heißt  $\sigma$ -Algebra, falls

- i.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- iii.  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$

gelten.

Der nachfolgende Satz über Summen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wurde aus dem Skriptum von ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith<sup>30</sup> entnommen. Zunächst wird die Summe von zwei unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen betrachtet.

#### **Satz:**

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Weiters sei  $X$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_1$  und  $\sigma_1$ ,

---

<sup>30</sup> vgl. RAITH, P. (o.J.): Summe von unabhängigen Normalverteilungen; online unter: <https://www.mat.univie.ac.at/~peter/lehre/lm/sumuhnv.pdf> (Zugriff am 27.03.2019).

und  $Y$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_2$  und  $\sigma_2$ . Dann ist  $X + Y$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_1 + \mu_2$  und  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

**Beweis:**

Die Dichte von  $X$  ist  $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ , und die Dichte von  $Y$  ist  $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$ . Da  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, ist die Dichte  $g(x)$  gleich der Faltung  $(f_1 * f_2)(x)$  von  $f_1$  und  $f_2$ . Damit ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot e^{-\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \cdot e^{-\frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)} dt. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir den Betrag des Exponenten von  $e$  in diesem Integral. Mithilfe der „Quadratischen Ergänzung“ erhält man

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( t^2 \cdot \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) - 2t \cdot \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2}\right) + \left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2}\right) \right) = \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \cdot \left( t^2 - 2t \cdot \frac{(x-\mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{(x-\mu_1)^2 \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) = \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \cdot \left( \left( t - \frac{(x-\mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{(x-\mu_1)^2 \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \left( \frac{(x-\mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Da

$$\left( \frac{(x-\mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 = \frac{(x-\mu_1)^2 \cdot \sigma_2^4 + 2(x-\mu_1) \cdot \mu_2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 + \mu_2^2 \cdot \sigma_1^4}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}$$

gilt, erhält man durch Vereinfachen und Herausheben von  $\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2$ , dass

$$\begin{aligned} & \frac{(x - \mu_1)^2 \cdot \sigma_2^2 + \mu_2^2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \left( \frac{(x - \mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 = \\ & \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot ((x - \mu_1)^2 - 2(x - \mu_1) \cdot \mu_2 + \mu_2^2)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} = \\ & \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot (x - \mu_1 - \mu_2)^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \end{aligned}$$

gilt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{(x - t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} = \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \cdot \left( t - \frac{(x - \mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 + \frac{(x - \mu_1 - \mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}, \end{aligned}$$

woraus wir

$$e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)} = e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \left(t - \frac{(x-\mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2}$$

erhalten. Somit ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)} dt = \\ & \frac{e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \left(t - \frac{(x-\mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Nach Substitution von  $s = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sqrt{2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}} \cdot \left( t - \frac{(x-\mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$ , ergibt sich  $ds = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sqrt{2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}}$ ,

wobei sich die Grenzen nicht ändern. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2} \left(t - \frac{(x-\mu_1) \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2} dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot e^{-s^2} ds = \\ & = \frac{\sqrt{2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds}_{=\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}.$$

Wegen  $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$  ergibt sich, dass

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(x-t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$

gilt. Außerdem gilt, dass  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$ . Nachdem dies die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariable mit den Parametern  $\mu_1 + \mu_2$  und  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  ist und  $g$  die Dichte von  $X + Y$  ist, ist damit  $X + Y$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_1 + \mu_2$  und  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ . □

### Satz:

Sei  $(\Omega, \Sigma, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariable auf  $(\Omega, \Sigma, P)$ . Weiters sei für jedes  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  die Zufallsvariable  $X_k$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_k$  und  $\sigma_k$ . Dann ist  $\sum_{j=1}^n X_j$  normalverteilt mit den Parametern  $\mu_1 = \sum_{j=1}^n \mu_j$  und  $\sigma_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}$ .

### Beweis:

Der Satz wird durch Induktion nach  $n$  bewiesen. Für  $n = 1$  ist offensichtlich  $X_1$  normalverteilt mit den Parametern  $\sum_{j=1}^1 \mu_j$  und  $\sqrt{\sum_{j=1}^1 \sigma_j^2}$ .

Schließlich sei  $n > 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\sum_{j=1}^{n-1} X_j$  normalverteilt mit den Parametern  $\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j$  und  $\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^2}$ . Weiters sind  $\sum_{j=1}^{n-1} X_j$  und  $X_n$  unabhängig. Nach vorhergehendem Satz ist deshalb auch  $\sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^{n-1} X_j + X_n$  normalverteilt mit den Parametern

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j + \mu_n = \sum_{j=1}^n \mu_j$$

und

$$\sqrt{\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \sigma_1^2}\right)^2 + \sigma_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_1^2}.$$

□



## 5 Zusammensetzung einer Prämie

Im vorherigen Schritt wurde gezeigt, dass es nicht ausreichend ist, lediglich die Prämie in der Höhe des zu erwartenden Schadens einzuholen. Aus diesem Grund erhöhen Versicherungen den zu zahlenden Beitrag um einen sogenannten Sicherheitszuschlag, welcher die Wahrscheinlichkeit eines Konkurses verkleinert.

### 5.1 Sicherheitsaufschlag<sup>31</sup>

In der nachfolgenden Grafik ist dieser Sachverhalt genauer erklärt.

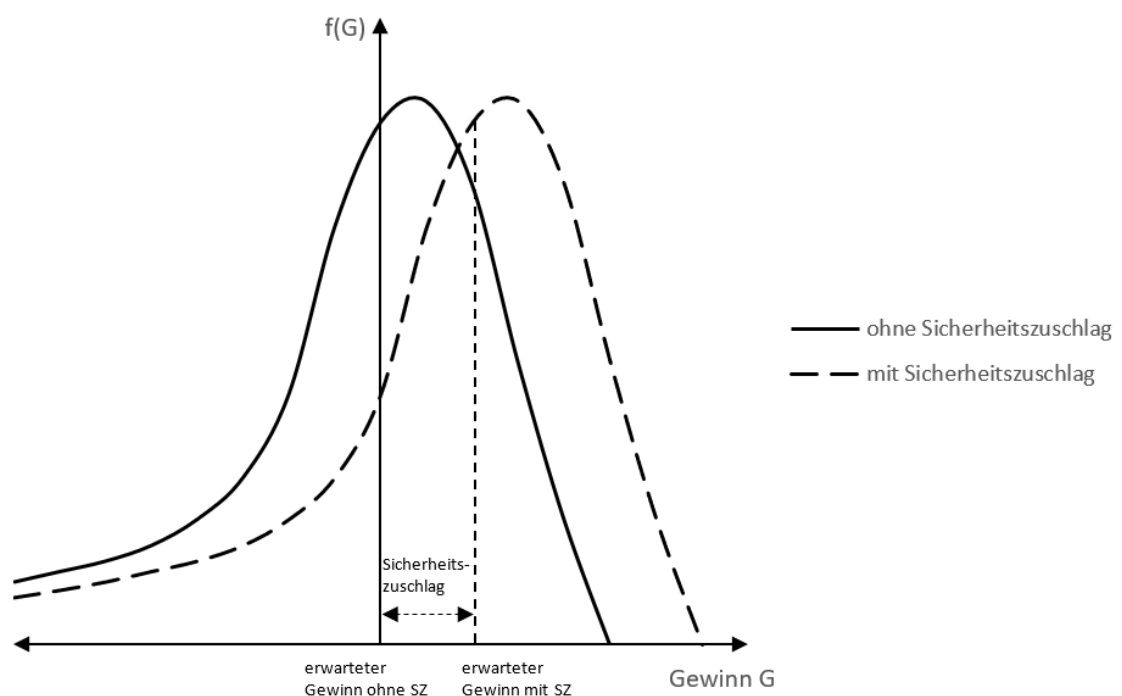


Abbildung 1: Sicherheitszuschlag

Der durchgezogene Graph beschreibt die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns bzw. Verlusts eines Versicherungsunternehmens ohne Miteinbeziehen eines Sicherheitszuschlags. Die Abszissenachse steht für den Gewinn respektive Verlust in Geldeinheiten. Links der Ordinatenachse steht ein finanzielles Minus, welches theoretisch unendlich sein kann, da die auftretenden Schäden in dieser Periode (fast) unendlich hoch sein können. Der Gewinn hingegen ist durch die Summe der Beiträge begrenzt. Er kann selbst beim Ausfall jeglicher Schäden diesen Wert nicht übersteigen.

<sup>31</sup> vgl. FARNY, D. (1989): Versicherungsbetriebslehre. – Karlsruhe, 26.

Ohne Sicherheitszuschlag beträgt der erwartete Gewinn gleich null, da man exakt die zu erwartenden Kosten in der Form von Prämien im Vorfeld einhebt. Somit beschreibt die Fläche unterhalb der Verteilungsfunktion und links der Ordinatenachse die Wahrscheinlichkeit des Ruins der Versicherung.

Durch das Einholen eines Sicherheitszuschlags verlagert sich der Erwartungswert und somit die gesamte Kurve nach rechts, also in die Richtung des Gewinns. Dieser Sachverhalt wird durch die gestrichelte Funktion dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit eines Bankrotts verkleinert sich daher um die Fläche zwischen den beiden Graphen und links der Ordinatenachse.

Die positive Auswirkung des Sicherheitszuschlags auf die Wahrscheinlichkeit des Bankrotts eines Versicherungsunternehmens ist unverkennbar. Durch die Einhebung dieses Zuschlags erhöhen sich jedoch auch die Prämien der Versicherungsnehmerinnen und -nehmer, wodurch die Nachfrage an der Versicherung sinkt.

Somit ergibt sich der Zusammenhang, dass sich die sogenannte Brutto-*risikoprämie* aus der Addition der *Nettoprämie* und des Sicherheitszuschlags zusammensetzt. Dieser wird in folgender Tabelle verdeutlicht und den Kosten einer Versicherung gegenübergestellt:<sup>32</sup>

|                   | <b>Kosten</b>                                     | <b>Prämien</b>      |                              |
|-------------------|---------------------------------------------------|---------------------|------------------------------|
|                   | Erwartungswert der Schadenskosten                 | Nettoprämie         |                              |
| Risiko-<br>kosten | Mögliche Überschäden,<br>Sicherheitskapitalkosten | Sicherheitszuschlag | Brutto-<br>risiko-<br>prämie |

Tabelle 2: Zusammensetzung einer Prämie

Es wurde gezeigt, dass die Notwendigkeit eines Sicherheitszuschlags besteht und das Nettoprämienprinzip in der Praxis keine Anwendung findet, da das Unternehmen ansonsten nach den Regeln der Stochastik nur eine kurze Überlebensdauer vor sich hätte. Die Höhe des Sicherheitszuschlags kann anhand verschiedener Faktoren berechnet werden, wie im Folgenden dargestellt wird<sup>33</sup>.

<sup>32</sup> Betriebskosten, diverse Steuern, Zuschläge, Gewinne und Sparprämien wurden in dieser Tabelle nicht berücksichtigt, da diese für die vorliegende Arbeit unerheblich sind.

<sup>33</sup> vgl. ALBRECHER, H. (2006): Finanz- und Versicherungsmathematik, Skriptum; online unter: <https://www.math.tugraz.at/~thonhau/FinVersSkriptum.pdf> (Zugriff am 04.04.2019), 33.

### 5.1.1 Berechnungsarten des Sicherheitszuschlags

Die erste Möglichkeit ist die Berechnung in Abhängigkeit vom Erwartungswert oder einem Streuungsmaß, Varianz oder Standardabweichung. Somit wird die Prämie durch  $E(S) + \alpha \cdot E(S)$  bzw.  $E(S) + \beta \cdot Var(S)$  bzw.  $E(S) + \gamma \cdot \sqrt{Var(S)}$  berechnet, wobei  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  sein müssen. Ein Streuungsmaß als Bezugsgröße hat den Vorteil, dass für Schäden mit unterschiedlichen Verteilungen – beispielsweise einerseits viele mittlere Schäden, andererseits ein großer und ein kleiner Schaden – nicht die gleichen Prämien verlangt werden müssen, was dem Versicherungsunternehmen einen größeren Spielraum für die Akquise von Kundinnen und Kunden einräumt. Voraussetzung dafür ist jedoch das Wissen über die Verteilung verschiedener Risiken und die damit einhergehenden genaueren Daten zur Berechnung der vermutlichen Streuung der Schäden. Liegen im Vorhinein keine Informationen der Verteilung des Risikos vor, findet der Erwartungswert als Bezugsgröße Anwendung.<sup>34</sup>

Eine weitere Möglichkeit der Prämienberechnung ist das Nullnutzenprinzip, welches von einer Nutzenfunktion  $u$  auf  $\mathbb{R}$  ausgeht. Diese Funktion ist monoton steigend und streng konkav, also  $u'(x) > 0$  und  $u''(x) < 0$  und ist vom Vermögen des Versicherungsunternehmens abhängig. Eine Prämienberechnung nach dem Nullnutzenprinzip kann nur dann erfolgen, wenn es für den Nutzen der Versicherung unerheblich ist, ob das Risiko übernommen wird oder nicht, da die beiden Fälle ident sind. Für das Risiko  $X$  und die Prämie  $\Pi_X$  ergibt sich somit:<sup>35</sup>

$$E(u(\Pi_X - X)) = u(0)$$

Allerdings kann in diesem Fall die Prämie nur implizit berechnet werden. Daher findet in der Praxis nur der Spezialfall des Nullnutzenprinzips mit  $a > 0$  und  $u(x) = \frac{1-e^{-ax}}{a}$  Anwendung, da das so erhaltene Exponentialprinzip unabhängig vom Vermögen ist und explizit berechnet werden kann.

Der Grenzwert  $a \rightarrow 0$  ergibt das Nettoprämienprinzip. Durch den Grenzwert  $a \rightarrow \infty$  erhält man ein weiteres Prämienkalkulationsprinzip, das Prinzip des maximalen Verlusts. Dieses

---

<sup>34</sup> vgl. MAY, A. und OYMANNS, M. (2012): Stochastik. Simulation von Sachschäden. – Köln, 7.

<sup>35</sup> vgl. WALZ, G. (Hrsg.) et al. (2017): Lexikon der Mathematik, Band 4. – Heidelberg, 246.

findet jedoch auf Grund der hohen Prämien, welche sich am maximalen Verlust orientieren, in der Regel ebenfalls keine Anwendung in der Praxis.<sup>36</sup>

Vom Nullnutzenprinzip lässt sich darüber hinaus das Esscher Prinzip ableiten, welches zusätzlich ökonomische Überlegungen in die Berechnung miteinbezieht, wie zum Beispiel Bewertungen von mitwerbenden Unternehmen. Allerdings setzt es einen Informationsaustausch über Erfahrungswerte und Daten zwischen unterschiedlichen Versicherungen voraus, welcher in der Praxis nicht aufwandfrei vonstattengeht.

---

<sup>36</sup> vgl. ALBRECHER, H. (2006): Finanz- und Versicherungsmathematik, Skriptum;  
<https://www.math.tugraz.at/~thonhau/FinVersSkriptum.pdf> (Zugriff am 04.04.2019), 32.

## 6 Simulation von Sachschäden

Um die zu erwartende Gesamtschadenshöhe einer Zeitspanne, die als Grundlage der Prämienberechnung dient, zu eruieren, simulieren Versicherungsunternehmen Sachschäden. Bei verschiedenen Sachverhalten eignen sich unterschiedliche Verteilungsannahmen, welche im Folgenden erklärt werden.

### 6.1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen eignen sich ihrem Wesen nach besser oder schlechter für eine Schadenssimulation.

Kriterien für eine möglichst exakte Beschreibung von Risiken sind

- eine geringe Anzahl an kleinen Schäden,
- eine große Anzahl an mittleren Schäden und
- eine geringe Anzahl an hohen Schäden.

Die geringe Anzahl an kleinen Schäden ergibt sich daraus, dass viele davon der Versicherung nicht als Schadensfall gemeldet werden, da die Reparaturkosten entweder unter dem Selbstbehalt liegen, d.h. zu gering sind, um übernommen zu werden, oder aber der Aufwand, mit der Versicherung in Kontakt zu treten, als zu groß gegenüber dem möglichen Nutzen angesehen wird. Die Befürchtung einer Verschlechterung der Konditionen der Versicherungsparameter, wie zum Beispiel zukünftige höhere Prämien, ist ebenfalls ein häufiger Grund, dass kleine Schäden nicht gemeldet werden.

Von besonders großer Bedeutung in Modellen der Schadenssimulation ist das Verhalten einer Verteilung bei großen Schäden. Obwohl diese, die Anzahl betreffend, einen sehr geringen Anteil ausmachen, entsprechen sie meistens dem Gros des Geldvolumens, welches das Unternehmen auszahlen muss. Aus diesem Grund darf die Verteilung nicht zu schnell gegen 0 konvergieren, da dadurch den großen Schäden ein zu geringer Wert zukäme. Zusätzlich sollte die Verteilung keine negativen Werte voraussetzen, da diese in der Praxis nicht auftreten können.

Manche Verteilungen erfüllen nicht alle Kriterien, die für eine möglichst akkurate Beschreibung von Risiken notwendig sind. Diese können dann nur zur Berechnung spezieller Schadensfälle verwendet werden. Als ungeeignet erweist sich zum Beispiel die Normalverteilung, da sie sich einerseits zu schnell gegen 0 bewegt, andererseits einzelne Schadensfälle als negativ angenommen werden.

Es folgt ein Überblick über die wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die in der Versicherungsmathematik zum Einsatz kommen.

### 6.1.1 Binomialverteilung

Bernoulli-Experimente werden in der Versicherungswissenschaft häufig zur Simulation von Schäden eingesetzt. Sie kennzeichnen sich dadurch, dass es nur zwei mögliche Ausgänge gibt: Erfolg und Misserfolg. Somit kann bei Bernoulli-Experimenten die Binomialverteilung zur Simulation verwendet werden. Diese ist eine der wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ist von zwei Parametern abhängig.

#### **Definition:**

Berechnet werden kann die Binomialverteilung durch

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & \text{falls } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Erwartungswert der Binomialverteilung lässt sich daher durch

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ermitteln.

Da der Summand für  $k = 0$  Null ist, ergibt sich nach Herausheben der Faktoren  $n$  und  $p$

$$np \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

Da  $k \cdot \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$  gilt, erhält man nach Einsetzen der Summationsvariablen  $j = (k-1)$  und  $m = (n-1)$

$$np \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j}.$$

Nach Anwendung des binomischen Lehrsatzes erhält man das Ergebnis

$$E(X) = np.$$

Ähnlich verläuft die Herleitung der Varianz. Es gilt

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2.$$

Nachdem  $k^2 = k \cdot (k-1) + k$  gilt, erhält man nach Aufspalten der Summanden

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=E(X)=np} - (np)^2.$$

Da die Summanden für  $k=0$  und  $k=1$  Null sind, ergibt sich nach Kürzen und Herausheben der Faktoren  $n$  und  $(n-1)$

$$n(n-1) \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{(n-2)-(k-2)} + np - (np)^2.$$

Nach Einsetzen der Summationsvariablen  $j = (k-2)$  und  $m = (n-2)$  erhält man, da  $p^{j+2} = p^j \cdot p^2$  ist,

$$n(n-1) \cdot p^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} + np - (np)^2.$$

Nach Anwendung des binomischen Lehrsatzes erhält man

$$n(n-1) \cdot p^2 + np - (np)^2,$$

was zum Ergebnis

$$\text{Var}(X) = np \cdot (1-p)$$

führt.

### 6.1.2 Poisson-Verteilung

Eine weitere diskrete Verteilungsannahme, welche in der Versicherungsmathematik Verwendung findet, ist die Poisson-Verteilung. Diese ist, wie die Binomialverteilung, einparametrig.

**Definition:**

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ . Dann heißt eine Zufallsvariable  $X$   $P(\lambda)$ -verteilt falls

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

$\lambda$  bezeichnet die mittlere Ereignisrate, also die bei einer Beobachtung erwartete Ereignishäufigkeit. Weiters gilt  $k \in \mathbb{N}_0$  und beschreibt die Ereignisanzahl. Jedem  $k$  wird dadurch eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

Die zugehörige Verteilungsfunktion lautet

$$F(n) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Der Erwartungswert der Poisson-Verteilung ist

$$E(X) = \lambda.$$

Für die Varianz der Poisson-Verteilung gilt

$$\text{Var}(X) = \lambda.$$

Ein für die Simulation von Sachschäden wichtiger Zusammenhang zwischen Binomial- und Poisson-Verteilung ist der Grenzwertsatz von Poisson.<sup>37</sup>

**Definition:**

Es sei  $\lambda \geq 0$  eine reelle Zahl und  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge im Intervall  $[0,1]$  mit der Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda.$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

---

<sup>37</sup> vgl. WALZ, G. (Hrsg.) et al. (2017): Lexikon der Mathematik, Band 4. – Heidelberg, 246.



Das bedeutet, dass für ein großes  $n$  und eine kleine Wahrscheinlichkeit  $p$  die Binomialverteilung mit den Parametern  $n$  und  $p$  durch die Poisson-Verteilung mit den Parametern  $\lambda = n \cdot p$  approximiert werden kann.

### 6.1.3 Exponentialverteilung

Stetige Verteilungen werden ebenfalls in der Versicherungsmathematik für die Simulation von Schäden herangezogen. Dafür lässt sich zum Beispiel die Exponentialfunktion verwenden.

#### **Definition:**

Berechnet werden kann diese durch die Dichtefunktion

$$f_{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Verteilungsfunktion ergibt sich damit

$$F_{\lambda}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Erwartungswert der Exponentialverteilung lässt sich dadurch ebenfalls ermitteln durch

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) \, dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \, dx.$$

Mit Hilfe von partieller Integration bzw. Technologieeinsatz erhält man

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Die Varianz ergibt sich aus

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Abermals erhält man mit Hilfe von partieller Integration bzw. Technologieeinsatz

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Die nachfolgende Grafik zeigt die Dichtefunktion der Exponentialverteilung mit unterschiedlichen  $\lambda$ .

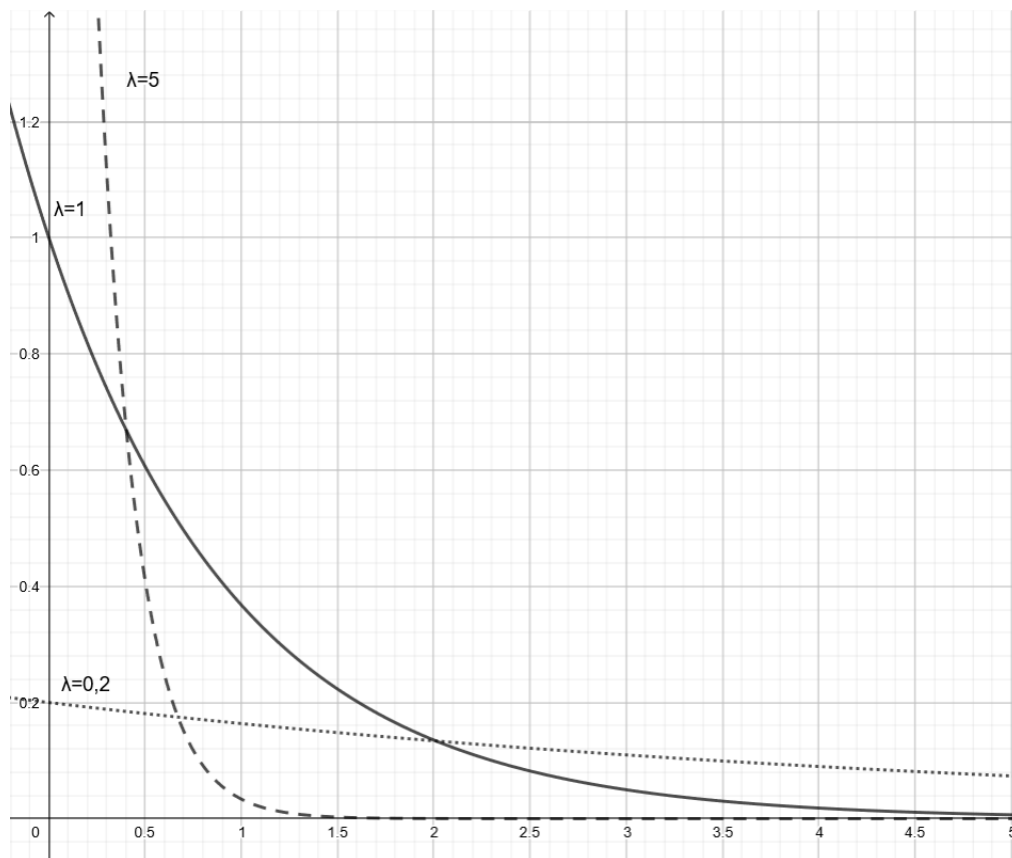


Abbildung 2: Dichtefunktion der Exponentialverteilung mit unterschiedlichen  $\lambda$

#### 6.1.4 Pareto-Verteilung

In der Simulation von Schäden kommt, wie bereits erwähnt, den hohen Schäden große Bedeutung zu. Auch wenn sie in ihrer absoluten Häufigkeit sehr gering auftreten, können sie aufgrund ihrer Höhe einen großen relativen Anteil der auszahlenden Beträge einnehmen. Daher ist es für versicherungsmathematische Annahmen essentiell, hohe Ausreißer in dem verwendeten Verteilungsmodell ausreichend zu berücksichtigen.

Das bedeutet, dass die Verteilungen bei großen Werten nicht zu schnell gegen 0 konvergieren dürfen. Dazu bietet sich die Pareto-Verteilung an. Vor allem bei Versicherungsbranchen, in denen häufig große Schäden entstehen, wie zum Beispiel in der Versicherung gegen Feuer, wird dieses Modell zur Annahme von Schadenshöhen verwendet.

Das nachfolgende Diagramm zeigt das Verhalten der Exponentialverteilung, der Normalverteilung und der Pareto-Verteilung bei hohen Werten.

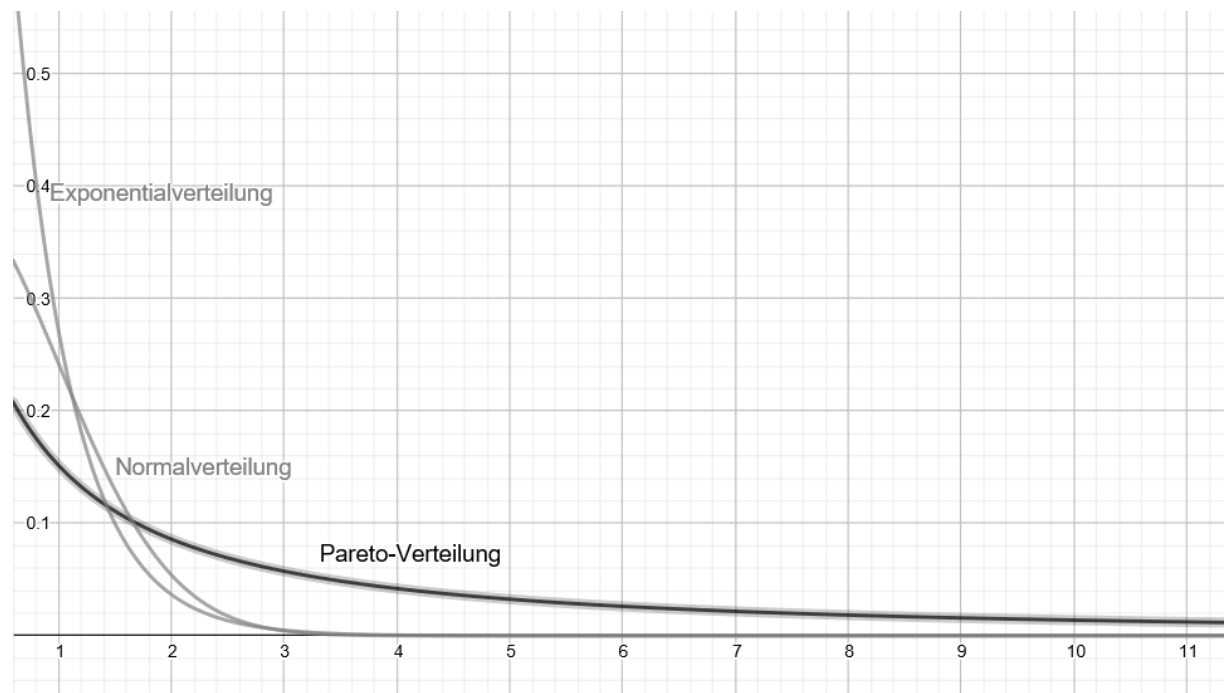


Abbildung 3: Das Verhalten ausgewählter Verteilungen bei höheren Werten

In dem Diagramm ist zu erkennen, dass die Pareto-Verteilung deutlich langsamer gegen 0 konvergiert als die anderen beiden Verteilungen und somit einzelnen Schäden mit hohen Zahlen mehr Bedeutung beimisst.

### Definition:

Die Dichtefunktion der Pareto-Verteilung ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a}{a+x}\right)^{b+1}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, wobei für die Parameter die Bedingungen  $a > 0$  und  $b > 0$  gelten.<sup>38</sup>

Die Pareto-Verteilung ist somit eine zweiparametrische Verteilung. Für die Verteilungsfunktion ergibt sich

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{a}{a+x}\right)^b, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

<sup>38</sup> vgl. SCHRÖTER, K. J. (1995): Verfahren zur Approximation der Gesamtschadenverteilung: Systematisierung, Techniken und Vergleiche. – Karlsruhe, 31.

Der Erwartungswert lässt sich dadurch ebenfalls ermitteln und ist

$$E(X) = \begin{cases} \frac{a}{b-1}, & \text{falls } b > 1, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Varianz ergibt sich daraus

$$\text{Var}(X) = \begin{cases} \frac{a^2 b}{(b-1)^2 (b-2)}, & \text{falls } b > 2, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man erkennt, dass der Erwartungswert der Pareto-Verteilung endlich ist, sofern  $b > 1$  ist, und die Varianz endlich ist, sofern  $b > 2$  ist. Die Verteilung eignet sich für Schäden, bei denen eine große Streuung auftritt.<sup>39</sup>

Die nachfolgenden Diagramme zeigen die Dichtefunktion der Pareto-Verteilung mit unterschiedlichen  $a$  und  $b$ .

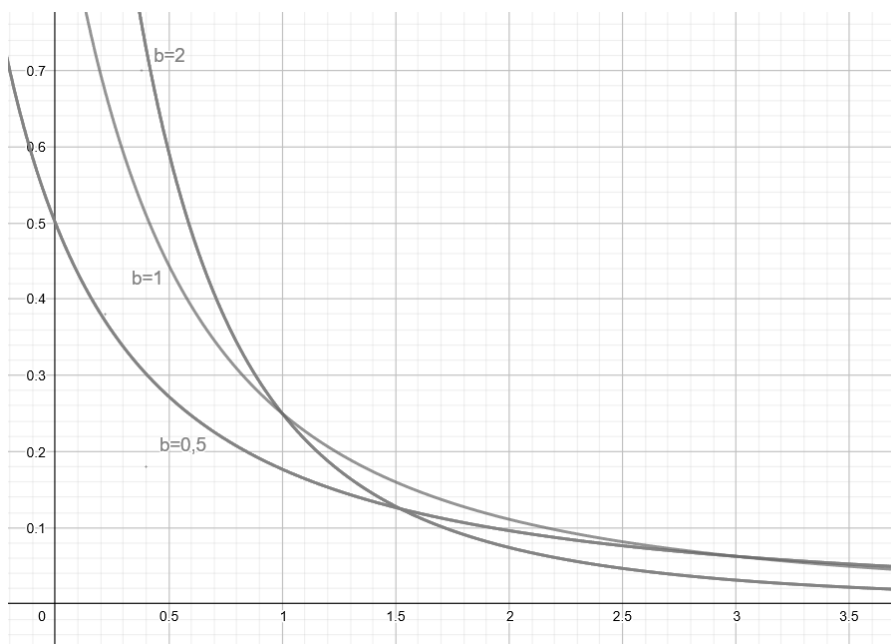


Abbildung 4: Dichtefunktion der Pareto-Verteilung mit unterschiedlichen  $b$  und  $a=1$

<sup>39</sup> vgl. MAY A. und OYMANN M. (2012): Stochastik. Simulation von Sachschäden. – Köln, 17.

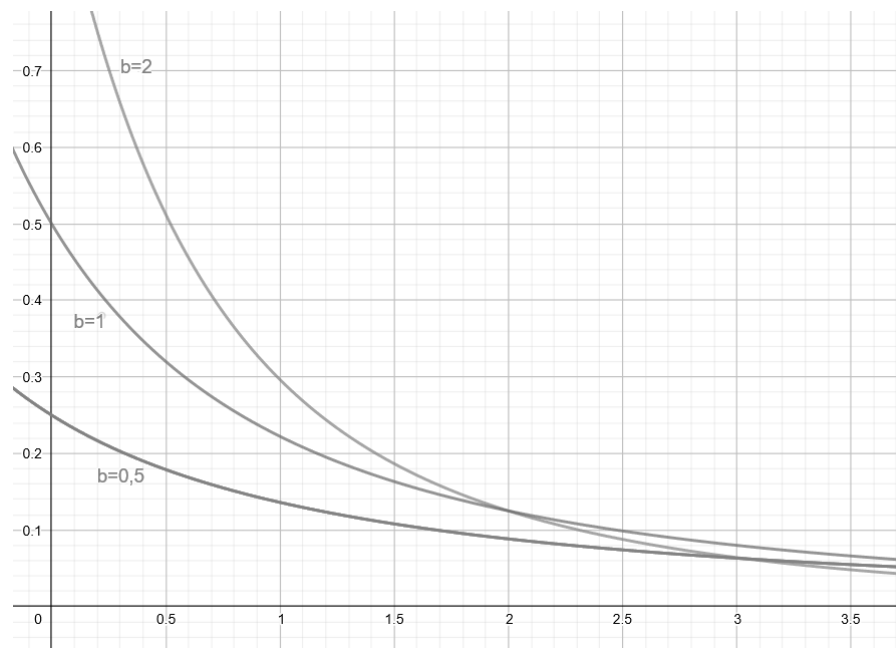


Abbildung 5: Dichtefunktion der Pareto-Verteilung mit unterschiedlichen  $b$  und  $a=2$

#### 6.1.5 Gamma-Verteilung

Eine weitere wichtige Verteilung ist die Gamma-Verteilung, welche in der Versicherungsmathematik vor allem bei der Simulation von kleinen bis mittleren Schadenshöhen Einsatz findet. Diese Verteilung besitzt zwei Parameter. Ihr Vorteil besteht darin, dass eine endliche Summe von unabhängigen, endlichen Zufallsvariablen gammaverteilt ist.<sup>40</sup>

Für die Definition der Gamma-Verteilung ist zunächst die Gamma-Funktion von Bedeutung. Diese ist in den positiven, reellen Zahlen folgendermaßen definiert:

#### **Definition:**

Die Funktion

$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

wird als Gamma-Funktion bezeichnet.

Eine Besonderheit dieser Funktion ist, dass für natürliche Zahlen gilt:

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

<sup>40</sup> vgl. FEINDERT, M. (2010): Behandlung von Schadensfällen – Die mathematischen Prinzipien der Schadenversicherung. – Diplomarbeit, Universität Wien, Wien, 31.

Dies lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Weiters kann man die Gamma-Funktion rekursiv berechnen.

**Definition:**

Die Gamma-Verteilung ist durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) := \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

gegeben.

Für die Parameter gelten dabei die Bedingungen  $b > 0$  und  $p > 0$ .

Für die Verteilungsfunktion ergibt sich damit

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(b \cdot x, p)}{\Gamma(p)}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Erwartungswert gilt

$$E(X) = \frac{p}{b}$$

und für die Varianz

$$Var(X) = \frac{p}{b^2}.$$

Die nachfolgenden Diagramme zeigen die Dichtefunktion der Gamma-Verteilung mit unterschiedlichen  $p$  und  $b$ .

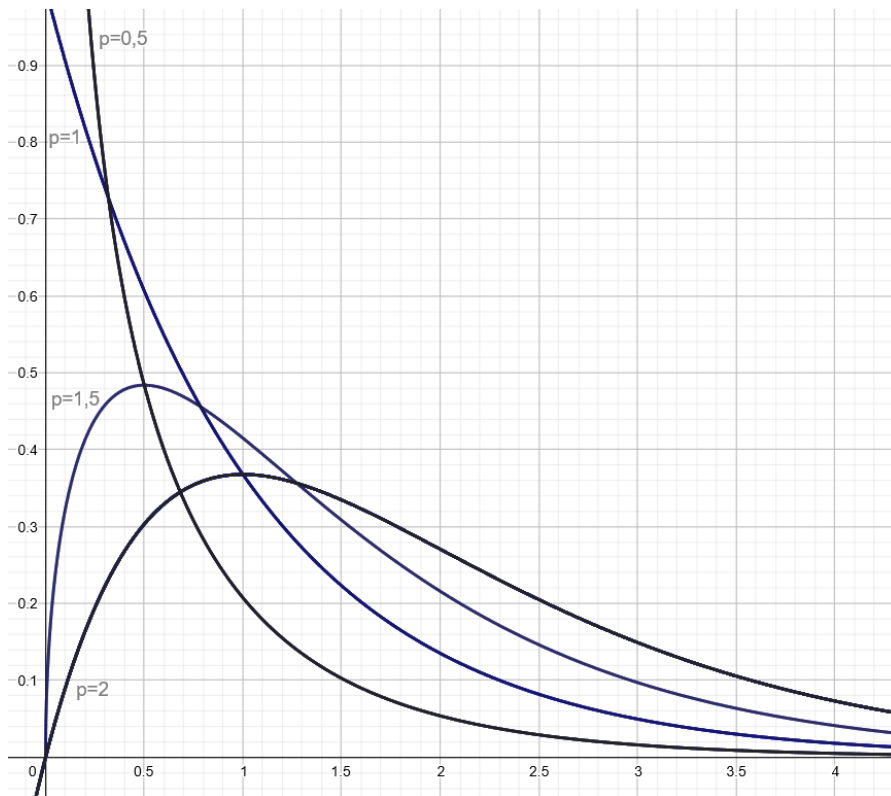


Abbildung 6: Dichtefunktion der Gamma-Verteilung mit unterschiedlichen  $p$  und  $b=1$

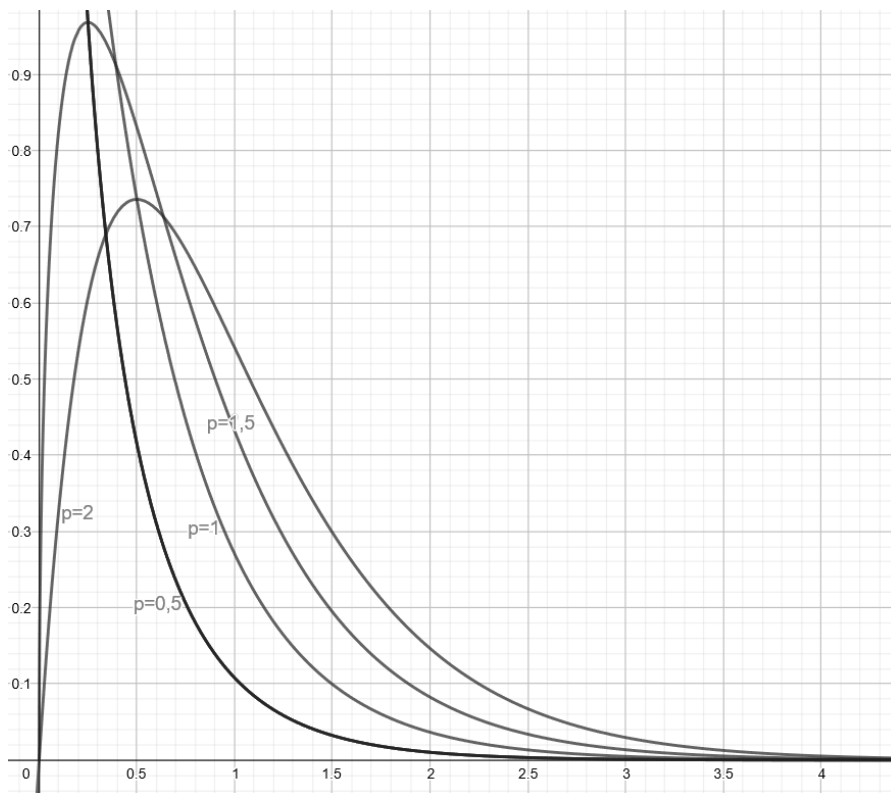


Abbildung 7: Dichtefunktion der Gamma-Verteilung mit unterschiedlichen  $p$  und  $b=2$

Die Exponentialverteilung ist ein Spezialfall der Gamma-Verteilung mit den Parametern  $b = \lambda$  und  $p = 1$ . Wenn man die Parameter  $b = \frac{1}{2}$  und  $p = \frac{n}{2}$  setzt, erhält man die  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden.

## 6.2 Modelle zur Simulation

Nicht nur die Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist für die Simulation von Schäden relevant. Auch die Art und Weise der Simulation von Schäden spielt eine Rolle. Grundsätzlich existieren zwei Modelltypen, Risiken zu simulieren. Man unterscheidet zwischen dem individuellen und dem kollektiven Modell.

### 6.2.1 Individuelles Modell

Beim individuellen Modell werden alle Einzelschäden einzeln betrachtet. In der Theorie geht man von einem homogenen Bestand von Versicherungsnehmerinnen und -nehmern aus. Das bedeutet, dass einzelne Schäden gleich verteilt und unabhängig sind. In der Praxis ist dies selten der Fall, da Versicherungen ähnliche Versicherungsfälle zusammenfassen, was der Annahme der Unabhängigkeit widerspricht. Ein Beispiel dafür ist eine Versicherung für Ernteausfall bei Hagel. Wenn ein Bauer betroffen ist, ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass auch eine zweite Bäuerin in der Nähe einen hagelbedingten Ernteausfall hat.

Wenn die Einzelschäden innerhalb einer Periode als  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bezeichnet werden und der Bestand aus  $n$  Personen gebildet wird, lässt sich der Gesamtschaden  $S$  durch

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

darstellen.<sup>41</sup>

Versicherungen besitzen im Normalfall eine große Anzahl an Daten, welche eine relativ genaue Berechnung der Verteilung der Einzelschäden zulassen.

---

<sup>41</sup> vgl. MAY, A. und OYMANNS, M. (2012): Stochastik. Simulation von Sachschäden. – Köln, 11.



Der Erwartungswert des Gesamtschadens lässt sich daher durch die Summe der Erwartungswerte der Einzelschäden formen. Aufgrund der zuvor verlangten Unabhängigkeit der Schäden gilt

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

Wegen der identischen Verteilung der Schäden ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n E(X_i) = n \cdot E(X_i) = n \cdot E(X).$$

Theoretisch entspricht diese Summe dem Betrag, den eine Versicherung in einer Periode den Versicherungsnehmerinnen und -nehmern auszahlen muss. Wie bereits gezeigt wurde, reicht diese Geldmenge jedoch nicht, um dauerhaft zu bestehen, da zum wirtschaftlichen Überleben des Unternehmens ein Sicherheitszuschlag zwingend notwendig ist. Entscheidet man sich bei der Errechnung der Höhe dieses Zuschlags für die Methode mit der Varianz, ergibt sich für die Varianz bei homogenen Beständen die Berechnung

$$\text{Var}(S) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n \cdot \text{Var}(X_i) = n \cdot \text{Var}(X).$$

Voraussetzung für die Richtigkeit dieser Formeln ist die Unabhängigkeit der Schadensereignisse. Da dies, wie bereits erwähnt, oft nicht der Fall ist, bedarf es genauer Prüfung im Vorhinein, ob das individuelle Modell anwendbar ist.

Nach der Annahme der exponentiellen Verteilung ergeben sich durch die zuvor gezeigten Herleitungen

$$E(S) = \frac{n}{\lambda}$$

und

$$\text{Var}(S) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Die Prämie nach dem Varianzprinzip errechnet sich demnach durch

$$P = \frac{1}{n} \cdot (E(S) + \alpha \cdot \text{Var}(S)) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Die Exponentialverteilung liefert zwar plausible Ergebnisse, jedoch schließt sie einen wichtigen Umstand aus: Sie berücksichtigt keine Versicherungsnehmerinnen und -nehmer, bei denen kein Schaden auftritt, da diese Verteilung dafür die Wahrscheinlichkeit 0 annimmt, was mit einem unmöglichen Ereignis gleichzusetzen ist. Diese Voraussetzung zeigt sich in der Praxis jedoch äußerst selten. Die Exponentialverteilung erweist sich also lediglich für die Berechnung von voneinander unabhängigen Einzelschäden als nützlich.<sup>42</sup>

Da der ganze Bestand als Grundlage der Berechnung des Gesamtschadens nicht genügt, muss eine weitere Annahme für die tatsächliche Anzahl der Schadensfälle getroffen werden. Diese Voraussetzung führt uns zu einem weiteren Modell der Simulation von Risiken, dem kollektiven Modell.

### 6.2.2 Kollektives Modell

Beim kollektiven Modell gelten dieselben Annahmen wie beim individuellen. Zusätzlich benötigt man die Variable  $N$ , welche den tatsächlich eintretenden Schadensfällen innerhalb des Bestandes entspricht, welcher aus  $n$  Versicherungsnehmerinnen und -nehmern besteht. Daraus ergibt sich  $N \leq n$ . Die Anzahl der Schäden ist im Gegensatz zum Bestand im Vorhinein nicht bekannt und muss ebenfalls geschätzt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schadensfall eintritt, ist  $p \in (0; 1)$  und ist Bernoulli-verteilt. Aufgrund der Unabhängigkeit der Einzelschäden folgt diese der Binomialverteilung.<sup>43</sup>

Die Kalkulation des Gesamtschadens wird nun mit

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

durchgeführt, wobei  $N$  eine binomialverteilte Zufallsgröße ist.

Somit beeinflussen im kollektiven Modell zwei Zufallsvariablen den Gesamtschaden. Unter den Bedingungen, dass  $N, X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig und  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ident verteilt sind, rechnet man

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(N) \cdot E(X).$$

<sup>42</sup> vgl. MAY, A. und OYMANNNS, M. (2012): Stochastik. Simulation von Sachschäden. – Köln, 12.

<sup>43</sup> vgl. MAY, A. und OYMANNNS, M. (2012): 13.

Den Beweis hierfür liefert die Formel von Wald. Er wird über den bedingten Erwartungswert berechnet.

Die Varianz kann mit Hilfe der Blackwell-Girshick-Gleichung gelöst werden, wodurch man das Ergebnis

$$\text{Var}(S) = E(N) \cdot \text{Var}(X) + \text{Var}(N) \cdot (\text{Var}(X))^2$$

erhält.

Unter der Annahme der exponentiellen Verteilung der Einzelschäden kommt man auf

$$E(S) = \frac{np}{\lambda}$$

und

$$\text{Var}(S) = \frac{np}{\lambda^2} + \frac{np \cdot (1-p)}{\lambda^2} = \frac{np \cdot (2-p)}{\lambda^2}.$$

Die Prämie mit dem Varianzprinzip ermittelt man durch

$$\text{Var}(S) = \frac{p}{\lambda} + \frac{ap \cdot (2-p)}{\lambda^2}.^{44}$$

---

<sup>44</sup> vgl. MAY, A. und OYMANNS, M. (2012): Stochastik. Simulation von Sachschäden. – Köln, 13.

## 7 Unterrichtssequenzen

In diesem Kapitel werden die in der vorliegenden Arbeit fachlich beschriebenen Sachverhalte und Heuristiken für eine mögliche Umsetzung im Unterricht aufbereitet. Die verwendeten Aufgaben wurden teilweise von May und Oymanns übernommen und adaptiert.<sup>45</sup>

Einige Sequenzen setzen die Benützung von Technologie, in der Regel eines Computers, voraus. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit vorausgesetzt, dass die Unterrichtseinheiten in einem Computersaal stattfinden. In der Literatur ist der Technologieeinsatz im Mathematikunterricht ein viel diskutiertes Thema. In der Praxis verwenden bereits viele Schulen im Unterricht Computer mit diversen Programmen, wie zum Beispiel das Tabellenkalkulationsprogramm *Microsoft Excel* oder die dynamische Geometrie-Software *Geogebra*, da diese auch im alltäglichen Leben häufig Anwendung finden. In vielen Fällen wird die Matura ebenfalls mit Hilfe dieser Computerprogramme absolviert, wodurch das Üben des Umgangs mit diesen Programmen für Schülerinnen und Schülern im Regelunterricht unverzichtbar ist, um für die Abschlussprüfung vorbereitet zu sein.

Der Vorteil des Technologieeinsatzes ist zweifelsfrei die Verlagerung des Schwerpunktes von den schematischen Abläufen und algorithmischen Berechnungen hin zur Anwendung von Grundwissen und zur Reflexion der Ergebnisse. Außerdem lassen sich mathematische Zusammenhänge besser und schneller darstellen, was den Schülerinnen und Schülern beim Erfassen der Materie hilft. Zusätzlich eignen sich digitale Werkzeuge zur Kontrolle von mathematischen Abläufen.

Besonders großer Wert wird in diesem Kapitel auf eine altersadäquate Sprache gelegt, um die Jugendlichen nicht bereits bei der Einführung des trocken anmutenden Themas abzuschrecken. Versicherungen hängen eng mit Wahrscheinlichkeiten zusammen. Die Lehre der Stochastik beginnt in Österreich in den meisten Schultypen in der 10. Schulstufe. Die Binomialverteilung und stetige Zufallsvariablen werden jedoch erst in der 11. Schulstufe, stetige Zufallsvariablen und Verteilungen erst in der 12. Schulstufe behandelt. Daher sind die Unterrichtseinheiten für 17- bis 18-Jährige ausgelegt.

---

<sup>45</sup> vgl. MAY, A. und OYMANN, M. (2012): Stochastik. Simulation von Sachschäden. – Köln, 2–22.

## 7.1 Didaktisches Konzept

Den Schülerinnen und Schülern soll anhand alltäglicher Situationen einerseits das Grundprinzip, andererseits die Notwendigkeit einer Versicherung erklärt werden. Nach einem kurzen inhaltlichen Anstoß der Lehrperson recherchieren die Schülerinnen und Schüler zunächst selbstständig, wodurch sich jede und jeder mit dem eigenen Tempo in das Kapitel einarbeiten kann. Bei der Recherche wird sowohl versucht, die eigene Betroffenheit miteinzubeziehen, als auch auf interessante Fakten hinzuweisen, welche das Thema auflockern sollen. Außerdem werden die Schülerinnen und Schüler mit einem Problem konfrontiert, um ihre Problemlösefähigkeiten auf die Probe zu stellen und diese weiterzuentwickeln.

Weiters wird sich dem Thema Versicherung mit dem genetischen Zugang genähert. Erich Christian Wittmann erklärt die genetische Methode in der Mathematik folgend: Eine Darstellung der mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie nach den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist.<sup>46</sup> Merkmale für genetischen Unterricht sind unter anderem das Anknüpfen an Vorwissen der Schülerinnen und Schülern, das Zusammenführen der Überlegungen mit dem inner- und außermathematischen historischen Problem und die Erweiterung des Erfahrungsbereichs und einer daraus resultierenden Standpunktverlagerung. Somit bedeutet die genetische Unterrichtsmethode, dass man sich und die Schülerinnen und Schüler vor das historische Problem stellt und gemeinsam an der Lösung arbeitet.

Eine klassische Einführung eines Kapitels mit der Überschrift und Erklärungen dazu ist daher nicht zielführend. Vielmehr sollen Situationen erstellt werden, die zu dem zu erlernenden Begriff führen. Sogar Definitionen können auf diese Weise selbstständig entwickelt werden. Mathematik darf also nicht nur als Fertigfabrikat angesehen werden, sondern kann nur als Prozess der Mathematisierung richtig verstanden werden.<sup>47</sup> Die Vorstellung, dass die Mathematik von Natur gegeben ist und daher nicht erklärt oder selbst erarbeitet werden kann, hat sich in den Köpfen mancher Schülerinnen und Schüler festgesetzt.

Dieser fälschliche Gedanke mündet meistens darin, dass Mathematikunterricht für viele Schülerinnen und Schüler lediglich als das Abarbeiten von Aufgaben wahrgenommen wird.

---

<sup>46</sup> WITTMANN E. C. (1974): Grundfragen des Mathematikunterrichts. – Braunschweig, 106.

<sup>47</sup> vgl. WITTMANN E. C. (1974): 107-109.

Die in den meisten Schulbüchern vorhandenen geschichtlichen Rückblicke, die genau diese Verhärtungen aufbrechen sollten, werden meist nur peripher beachtet und nehmen keinerlei Einfluss auf die Schule und das Unterrichtsgeschehen.<sup>48</sup>

Deshalb ist es zentral, den Schülerinnen und Schülern zu vermitteln, dass der Prozess der Mathematisierung nur durch menschliche Überlegungen entstanden und keine bloße Ansammlung von Wissen, die schon immer Bestand hatte, ist. Der Prozess der historischen Erarbeitung eines Themas durch den Menschen, die Weiterentwicklung des Themas, das vielleicht stets auch zwischenzeitlich Gefahr lief, wegen scheinbar unlösbarer Aufgaben zu versanden, und die damit einhergehende menschliche Überwindung von Problemen mit Hilfe kreativer Lösungsansätze, können bei Jugendlichen Begeisterung wecken und damit die Lernbereitschaft fördern.<sup>49</sup>

Die Ziele eines historisch orientierten Mathematikunterrichts sind sowohl affektiver als auch kognitiver Natur. Ein affektives Ziel ist schlichtweg die Auflockerung des Unterrichts, da die für viele trocken anmutende Theorie durch Geschichten der Anwendung ergänzt werden kann. Außerdem kann die bereits zuvor erwähnte „Vermenschlichung“ der Mathematik die psychische Barriere, die vielfach in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler besteht, überwunden werden. Das Aufzeigen von historischen Fehlvorstellungen und deren spätere Korrektur kann einen Beitrag dazu leisten, die Angst vor Fehlern abzubauen.

Ein weiteres affektives Ziel von historischen Anekdoten im Mathematikunterricht ist der mögliche „patriotische Identifikationseffekt“, den die Erwähnung einer Nation – ähnlich wie im Sport – hervorrufen kann. Kognitive Ziele sind einerseits das Erkennen der Entwicklungsfähigkeit der Mathematik, andererseits die Verknüpfung mit anderen Fächern, vor allem mit Geschichte, da viele gesellschaftliche Entwicklungen mit der Mathematik zusammenhängen. Ein Beispiel dafür sind etwa die ersten Aufzeichnungen von Tabellen durch die erworbene Sesshaftigkeit des Menschen und die dadurch notwendig gewordene Lagerung von Bedarfsgütern.<sup>50</sup>

---

<sup>48</sup> vgl. KRONFELLNER M. (1997): Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen. – Wien. (= Didaktik der Mathematik 24), 83.

<sup>49</sup> vgl. ABLEITINGER C. (2016): Abwechslungsreiche Unterrichtseinstiege. – In: Didaktik-Reihe der ÖMG 48 (1). – o.O., 1–13.

<sup>50</sup> vgl. KRONFELLNER M. (1997): 83.

Wichtig für den genetischen Zugang im Mathematikunterricht ist auch die Akzeptanz dieser Methode durch die Lehrpersonen. Viele Lehrerinnen und Lehrer sehen hierbei die Gefahr, keine längerfristige Planung vornehmen zu können, da sie sich zu stark von den Ideen und Tempi der Schülerinnen und Schüler abhängig fühlen. Diesem Umstand ist jedoch leicht entgegen zu wirken, zum Beispiel mit Hilfe von Referaten und schriftlichen Ausarbeitungen, bei denen der zeitliche Rahmen vorgegeben ist und die Schülerinnen und Schüler selbstständig Themen erarbeiten, ist. Außerdem sehen manche Lehrkräfte das Auswendiglernen von Beweisen als genetische Unterrichtsmethode, was jedoch nicht einem der Merkmale dafür entspricht.<sup>51</sup>

Da manche Abschnitte auf dem Computer stattfinden, muss die Lehrperson selbst alle Arbeitsschritte nachvollziehbar mit derselben Software wie die Schülerinnen und Schüler präsentieren und darauf achten, dass alle die einzelnen Arbeitsschritte nachvollzogen haben und niemand den sprichwörtlichen Faden verliert.

## 7.2 Unterrichtskonzept 1

In der ersten Unterrichtssequenz wird allgemein auf das Wesen von Versicherungen eingegangen. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich mit dem Grundprinzip vertraut machen und werden nach einem kurzen Abschnitt mit Frontalunterricht auch selbstständig tätig.

Diese Unterrichtseinheit dient lediglich zum Kennenlernen der Thematik Versicherung und kann aufgrund der einfachen Anforderung bereits vor der 12. Schulstufe angewendet werden.

### 7.2.1 Dauer

Das Unterrichtskonzept wird in mehrere Sequenzen aufgeteilt, deren jeweilige Dauer stark vom Freiraum und von der Zeit, die den Schülerinnen und Schülern zum selbstständigen Erarbeiten zur Verfügung gestellt werden, beeinflusst wird.

Für die erste Sequenz sollten in etwa 40 Minuten eingeplant werden. Für den Denkanstoß zu Beginn werden mit anschließender kurzer Diskussion zehn Minuten benötigt. Für die ersten Arbeitsaufträge und Recherche sind 15 Minuten vorgesehen. Die Ergebnissicherung, auf die großen Wert gelegt werden sollte, wird ebenfalls 15 Minuten einnehmen.

---

<sup>51</sup> vgl. KRONFELLNER M. (1997): Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen. – Wien. (= Didaktik der Mathematik 24), 84.

Die zweite Sequenz wird etwa 20 Minuten dauern, der Arbeitsauftrag wird davon zehn Minuten in Anspruch nehmen. Im Anschluss sollen sich die Schülerinnen und Schüler in Zweiergruppen zusammenfinden und ihre Ergebnisse vergleichen. Anschließend werden die Erkenntnisse im Plenum diskutiert.

Die dritte Sequenz wird in etwa 30 Minuten abgehandelt. Um die erste Einheit abzuschließen, sollten 10 Minuten für eine Zusammenfassung und eine Wiederholung der wichtigsten Punkte verwendet werden.

Die gesamte Einheit umfasst somit zwei Unterrichtsstunden zu jeweils 50 Minuten. Im Falle zwei getrennter Unterrichtsstunden beginnt die zweite mit dem Vergleichen der Ergebnisse innerhalb der Zweiergruppe. Dies ist als Einstieg geeignet, da sich Schülerinnen und Schüler gemeinsam an die Geschehnisse der letzten Stunde erinnern können.

#### 7.2.2 Ziele

Die Ziele des Unterrichtskonzepts können folgendermaßen zusammengefasst werden:

- Die Schülerinnen und Schüler sollen langsam an das Thema Versicherungen herangeführt werden.
- Das Interesse der Schülerinnen und Schüler für das Thema soll aufgebaut werden.
- Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Lösungsstrategien für mathematische Probleme.
- Die Schülerinnen und Schüler kennen die Grundzüge des Konzepts Versicherung und können Anforderungen an dieses erklären.

#### 7.2.3 Vorwissen von Schülerinnen und Schülern

Die erste Unterrichtseinheit ist so gestaltet, dass kein Vorwissen vonnöten ist.

#### 7.2.4 Sequenz 1

Die erste Sequenz bietet einen einfachen Einstieg, der über die Aufdeckung der eigenen Betroffenheit in das Thema einführt. Darstellungsform sind Projektor und Leinwand für den Anstoß und ein Arbeitsblatt bzw. ein Heft für die Vertiefung.

##### 7.2.4.1 Ablauf

Zunächst folgt ein kurzer Input der Lehrperson, in welchem in einem einfachen Beispiel die Notwendigkeit einer Versicherung erläutert wird:



„Spielen wir ein geeignetes Szenario durch, um die Funktion einer Versicherung zu erläutern. Angenommen zwei Freundinnen oder Freunde kochen sich Samstagabend gemeinsam zuhause bei einem Onkel, der über das Wochenende auf Urlaub ist, etwas zu essen. Danach verlassen sie das Haus, um im Kino einen Film zu sehen. Leider haben sie vergessen, den Herd auszuschalten, wodurch das Öl Feuer fängt und in weiterer Folge das, zu diesem Zeitpunkt leerstehende, Haus vollkommen abbrennt. Der dadurch entstandene Schaden beträgt drei Millionen Euro, wofür die Eltern der beiden aufkommen müssen. Diese verdienen jeweils in etwa 3.000 Euro brutto pro Monat und würden daher, unter der unrealistischen Annahme, dass sie ihr gesamtes Gehalt an den Geschädigten abgeben, über 41 Jahre benötigen, um den vollen Schaden abdecken zu können.

Die Funktion einer Versicherung ist es, dieser langen Abhängigkeit zum Geschädigten durch eine kollektive Risikoübernahme entgegenzuwirken. Das bedeutet, dass viele Eltern prophylaktisch Geld in einen imaginären Topf einzahlen, in diesem Fall heißt diese Kapitalsammelstelle „Versicherer“, um einen möglichen Schadensfall abdecken zu können. Es wird das Motto „Einer für alle, alle für einen“ verfolgt, da viele Eltern einzahlen, aber nur diejenigen, die Pech, d.h. einen Schadensfall, haben, etwas ausgezahlt bekommen. Ob dieser Schadensfall auch wirklich eintreten wird, kann man im Vorhinein weder als sicher annehmen noch gänzlich ausschließen. Angenommen die sogenannte Prämie, also der Versicherungsbeitrag, der aufgewendet werden muss, um sich zu versichern, beträgt 100 Euro, dann müssen in unserem Szenario 30.000 Eltern diese Prämie einzahlen, um den gesamten Betrag von 3 Mio. € begleichen zu können. Eine Versicherung gegen Sachschäden, auch Sachversicherung genannt, soll also Kosten für einen in Zukunft aufkommenden Schaden an einer Sache decken.“

Zur Unterstützung kann diese Geschichte an die Tafel projiziert werden.

An diesem Beispiel kann man Jugendlichen das Wesen einer Versicherung mit Einmalprämie erklären. Ein Beispiel in einem kleineren, für Jugendliche eher fassbaren Rahmen ist eine Versicherung des Handys gegen Diebstahl oder Schäden.

Im Vordergrund muss jedenfalls eine altersadäquate Erklärung stehen, welche für Jugendliche verständlich und in keiner Hinsicht abschreckend ist.

Um dieses Verständnis auf die Probe zu stellen und zu festigen, wird in einem ersten Arbeitsauftrag eine kurze Geschichte erzählt, mit der sich die meisten Schülerinnen und

Schüler in der Klasse identifizieren können. In diesem Unterrichtskonzept wird dies mit einer geplanten Reise versucht:

„Christine will im Sommer zwei Wochen in London verbringen und bucht dafür die nötigen Flüge und eine Jugendherberge in der Stadt. Um im Krankheitsfall nicht auf den Kosten sitzen zu bleiben, sucht sie sich im Internet eine Versicherung, die Reisekosten (Flug und Jugendherberge) zurückerstattet, falls Christine vor der Reise erkrankt. Nach Vergleichen im Internet entscheidet sie sich für die Reiseversicherung „Wir Übernehmen“ und bezahlt einmalig 80 €. Begründen Sie, warum der Versicherung diese vergleichsweise geringe Prämie genügt, um die gesamten Kosten der Reise zu übernehmen. Erklären Sie am Beispiel der Reiseversicherung das Konzept einer Versicherung.“

In einem nächsten Schritt bekommen die Schülerinnen und Schüler einen zweiten Arbeitsauftrag. Dieser sieht vor, dass jede und jeder selbstständig im Internet recherchiert, welche Arten von Versicherungen existieren und welche für die eigene Person bzw. für die eigene Familie von Bedeutung sein können. Die Frage kann auch weitergeführt werden, indem gefragt wird, welche nicht versicherbaren Risiken existieren.

#### *7.2.4.2 Erwartungshorizont*

In der ersten Sequenz stehen die Grundprinzipien einer Versicherung im Fokus. Es wird von den Schülerinnen und Schülern erwartet, das Konzept Versicherung erklären zu können. Dies kann zum Beispiel durch das Zusammenfassen von mehreren Versicherungsnehmerinnen bzw. -nehmern erklärt werden, wobei das Unternehmen nur im Schadensfall die Kosten übernimmt. Hierbei sei zusätzlich erwähnt, dass eine Vielzahl an richtigen Antwortmöglichkeiten existiert, weshalb Angaben im Erwartungshorizont lediglich als Antwortbeispiele gesehen werden dürfen. Jede nachvollziehbar argumentierte Antwort ist ebenfalls als richtig zu bewerten.

Bezüglich Christines Reiseversicherung genügt ein vergleichsweise niedriger Betrag, um die gesamten Kosten zu decken, da mehrere Personen der Versicherung diesen Betrag zahlen, aber nur wenige die Kosten für Flug und Unterkunft zurückerstattet bekommen, weil man davon ausgehen kann, dass der größere Teil der Versicherten die Reise antreten wird.

Im zweiten Schritt sollen die wichtigsten Risiken sowie Typen von Versicherungen aufgestellt werden. Mindestanforderungen sind:

- **Öffentlich organisierte bzw. geführte Versicherungssysteme und Privatversicherungen:**

Öffentliche Versicherungen sind im Kern die Sparten der Sozialversicherung, die die Risiken der Krankheit (Krankenversicherung), des Alters (Pensionsversicherung), des Unfalls und dessen Folgen (Unfallversicherung) sowie der Arbeitslosigkeit (Arbeitslosenversicherung) versichert; bestimmte öffentlich-rechtliche Verpflichtungen werden von privaten Versicherern besorgt (z.B. KFZ-Haftpflichtversicherung).

Private Versicherungsunternehmen können theoretisch jedes Risiko, soweit gesetzlich nicht verboten, versichern, je nachdem worauf sich die Vertragspartnerinnen und -partner einigen. Die bekanntesten Privatversicherungen sind die Lebensversicherung, die Haushaltsversicherung oder auch Zusatzversicherungen, die als zusätzliches Paket zum öffentlich-rechtlichen Leistungsumfang zugekauft werden können (z.B. private Krankenversicherungen). Die rechnerischen Unterschiede ergeben sich dabei aus der Größe der Gefahrgemeinschaften und den damit einhergehenden Finanzierungsverfahren: Die österreichische Sozialversicherung finanziert sich über das Umlageverfahren, somit werden die Beiträge unmittelbar zur Finanzierung der Versicherten herangezogen und kaum Rücklagen gebildet. Im Gegensatz dazu müssen beim Kapitaldeckungsverfahren die Beiträge gesammelt und zudem investiert oder veranlagt werden, um im Leistungsfall ausgeschüttet zu werden.

- **Versicherungspflicht und Pflichtversicherung**

Bei der Pflichtversicherung entfaltet sich das Versicherungsverhältnis durch Gesetz zu einem klar definierten Versicherungsträger mit einem für alle geltenden gleichen Leistungskatalog, während die Versicherungspflicht zwar gesetzlich verpflichtend ist, die Wahl des Unternehmens oder des (öffentlichen) Trägers jedoch dem Versicherten selbst obliegt und Unterschiede in der Leistung bestehen können.

- **Sachversicherung**

Dieser Versicherungstyp schützt Sachen vor Beschädigung, Vernichtung, Diebstahl und Verlust durch menschliche Handlungen, Zufall oder Umweltereignisse (z.B. Feuerschutzversicherung einer Liegenschaft, Diebstahlversicherung für ein Fahrrad, etc.).

- **Personenversicherung**

Darunter sind Kranken-, Unfall-, Lebensversicherungen zu verstehen, die einen regelwidrigen körperlichen Zustand oder dessen Folgen versichern.

- **Vermögensversicherung**

Vermögensversicherungen schützen Schäden am Vermögen und schultern ein finanzielles Risiko, wie zum Beispiel im Rahmen von Haftpflicht- oder Rechtsschutzversicherungen.

#### 7.2.4.3 Kompetenzbezug

Der Kompetenzbezug bezieht sich auf die Bildungsstandards für Mathematik für die Sekundarstufe II der AHS, welche von Helmut Heugl und Gerhard Hainscho ausgearbeitet wurden.<sup>52</sup>

Da diese Sequenz ohne innermathematische Inhalte auskommt, ist keine Handlungsdimension festzustellen.

#### Komplexitätsdimension Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K1):

Die Schülerinnen und Schüler sollen das kürzlich Gelernte im Zuge einer Internetrecherche wiedergeben bzw. anwenden können und dieses noch weiter vertiefen.

#### 7.2.5 Sequenz 2

In dieser Sequenz werden Schülerinnen und Schüler auf besonders große Versicherungsschäden aufmerksam gemacht, um zum einen ihre Neugier zu wecken und zum anderen zu zeigen, dass große Katastrophen, abseits von menschlichen Tragödien und zerstörter Umgebung, auch weitreichende finanzielle und wirtschaftliche Konsequenzen zur Folge haben. Im Anschluss der Nuklearkatastrophe in Fukushima zum Beispiel gingen hunderte Bilder um die Welt und zeigten das Ausmaß der Zerstörung durch die Fluten. Die Angst vor nuklearen Folgeschäden stand im Mittelpunkt – und das weit über Japans Grenzen hinaus. Was in den Hintergrund der Berichterstattung rückte bzw. auch Tage und Wochen später in den Nachrichten keine Erwähnung fand, waren die finanziellen Auswirkungen, welche durch den Wiederaufbau von Infrastruktur, Privathäusern und -wohnungen und einem neuen bzw. renovierten Atomkraftwerk entstanden. Aus dieser

---

<sup>52</sup> vgl. HEUGL, H. und HAINSCO, G. (2008): Bildungsstandards Mathematik für die Sekundarstufe II der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS), online unter: [http://www.brgkepler.at/~rath/pl\\_an/standards/standards\\_m\\_12.pdf](http://www.brgkepler.at/~rath/pl_an/standards/standards_m_12.pdf) (Zugriff am 04.04.2019).

Perspektive betrachtet, sind die Ereignisse von Fukushima eine Kumulation zahlreicher mehr oder weniger großer Versicherungsfälle.

#### 7.2.5.1 Ablauf

Im nächsten Schritt erhalten die Schülerinnen und Schüler den Auftrag, an Ereignisse mit hohen Versicherungsschäden zu denken, die sie in Erinnerung haben. Zusätzlich soll im Internet die kolportierte Schadenshöhe ermittelt werden. Dazu können Berichte in Tageszeitungen zu Rate gezogen werden. Außerdem sollen besonders hohe Schäden, welche nicht mehr im Gedächtnis sind, recherchiert werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen den Grund und die Höhe des Schadens notieren. Zusätzlich können die Region und das Datum der Katastrophe festgehalten werden. Um es für die Jugendlichen interessanter zu gestalten, sollen diese Geschehnisse nicht allzu weit zurückliegen und zumindest zu Lebzeiten der Jugendlichen stattgefunden haben.

#### 7.2.5.2 Erwartungshorizont

Bei dieser Aufgabe können sich die Ergebnisse, wie schon bei Sequenz 1, unterscheiden. Die fünf höchsten Schäden der letzten 15 Jahre weltweit sind laut *Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft Aktiengesellschaft in München*:<sup>53</sup>

- Erdbeben und daraus resultierender Tsunami in Japan am 11. März 2011 mit 210 Milliarden US-Dollar Schaden
- Hurrikan Katrina in den Vereinigten Staaten von Amerika Ende August 2005 mit 125 Milliarden US-Dollar Schaden
- Hurrikan Harvey in den Vereinigten Staaten von Amerika Ende August 2017 mit 95 Milliarden US-Dollar Schaden
- Erdbeben in China am 12. Mai 2008 mit 85 Milliarden US-Dollar Schaden
- Hurrikan Maria in Mittelamerika Ende September 2017 mit 68,8 Milliarden US-Dollar Schaden

Der teuerste Schaden im Kalenderjahr 2018 mit etwa 16,5 Milliarden US-Dollar waren die Waldbrände in Kalifornien im November.

---

<sup>53</sup> vgl. Münchner Rückversicherungs-Gesellschaft Aktiengesellschaft in München (2019): NatCatSERVICE, online unter: <https://natcatservice.munichre.com/topten/1?filter=eyJ5J5ZWfYRnJvbSI6MjAwMSwieWVhclRvIjoyMDE4fQ%3D%3D&type=1> (Zugriff am 04.04.2019).

Speziell für Österreich war das Hochwasser im Juni 2013 mit etwa 200 Millionen Euro ein hoher Schaden. Das sogenannte Jahrhundert-Hochwasser 2002 kostete im Vergleich dazu ca. drei Milliarden Euro.

#### 7.2.5.3 Kompetenzbezug

Da diese Sequenz ohne innermathematische Inhalte auskommt, ist keine Handlungsdimension festzustellen.

#### Komplexitätsdimension Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K1):

Wie in der Sequenz zuvor wird nach einem kurzen Denkanstoß das Wissen von Schülerinnen und Schülern zur Anwendung gefordert.

#### 7.2.6 Sequenz 3

In der abschließenden Sequenz sollen die Schülerinnen und Schüler selbstständig anhand eines praktischen Beispiels herausfinden, unter welchen Voraussetzungen eine Versicherung sinnvoll ist. Es wird versucht, dies mit einer möglichst realitätsnahen Situation einfach zu erklären. Außerdem sollen die Schülerinnen und Schüler mit Gegebenheiten konfrontiert werden, bei denen eine Versicherung nicht zweckmäßig ist, und diese auch erkennen. Dazu werden die Jugendlichen mit einem Problem konfrontiert und müssen dieses mit dem gerade angeeigneten Wissen lösen. Ziel dieser Sequenz ist, die Schülerinnen und Schüler vor dasselbe Problem zu stellen, wie es Versicherungen in ihren Anfängen vorgefunden haben. Dadurch sollen sie dazu motiviert werden, dieselben Überlegungen anzustellen, welche Versicherungsnehmerinnen und -nehmer anstellen, bevor sie eine Versicherung abschließen.

Dieser Arbeitsauftrag kann, abhängig von der Klasse, in Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit durchgeführt werden.

##### 7.2.6.1 Ablauf

Diese Sequenz besteht aus einem Arbeitsauftrag, bei dem die Schülerinnen und Schüler erstmals ihr Wissen einsetzen müssen:

„Stellen Sie sich vor, Sie und drei Ihrer Freundinnen und Freunde besuchen gerne das Kino. Da Sie unregelmäßige Ausgaben und nur gelegentlich Einkommen haben (Taschengeld, Ferialjobs, etc.), entschließen Sie sich, sich gegenseitig abzusichern, im weiteren Sinne eine Versicherung gegen das Ereignis „Ich habe kein Geld, um das Kino zu besuchen“ zu gründen. Daher zahlt jede und jeder von Ihnen jeden Monat fünf Euro (= Prämie) in eine

Spardose mit dem Zweck, sich daraus das Geld für einen Film herauszunehmen, falls man einmal kein Geld dafür zur Verfügung hätte.

Begründen Sie, ob dies eine sinnvolle Idee für Sie und Ihre drei Freundinnen und Freunde (= Kollektiv) ist und ob diese Versicherung mit denen, die in der letzten Einheit besprochen wurden, vergleichbar ist. Nennen Sie den Faktor, der sich stark zu den Ihnen bekannten Versicherungen unterscheidet.

Angenommen Sie wollen das Kollektiv Ihrer Versicherung vergrößern. Dazu wollen Sie zwei Freundinnen und Freunde hinzuholen, wovon eine bzw. einer meistens kein Geld zur Verfügung hat, da das meiste Geld für Computerspiele ausgegeben wird, und die andere Person meistens sehr viel Geld hat, welches sie gerne für Kinobesuche ausgibt.

Argumentieren Sie, ob die beiden Personen eine sinnvolle Erweiterung für Ihr Kollektiv sind. Betrachten Sie dafür die Blickrichtungen beider Seiten.

Aus Erfahrung wissen Sie, dass Sie und Ihre Freundinnen und Freunde speziell gegen Ende des Schuljahres immer weniger Geld für Kinobesuche zur Verfügung haben, als zur restlichen Zeit des Jahres. Sie beschließen daher, lediglich im Juni diese Versicherung zu betreiben.

Analysieren Sie, ob dieses Konzept für eine nachhaltige Finanzierungsform geeignet ist.“

#### *7.2.6.2 Erwartungshorizont*

Im ersten Punkt ist der Zusammenschluss der vier Freundinnen und Freunde durchaus als gute Idee zu bezeichnen, da einerseits das gemeinsame Interesse an einem Kinobesuch besteht und andererseits die Gefährdung in etwa gleichgroß sein sollte. Ist die zweite Bedingung jedoch nicht erfüllt, ist von diesem Versicherungsmodell abzuraten. Aufgrund des sehr kleinen Kollektivs ist die Gefahr, schnell mit einer leeren Spardose dazustehen, außerdem sehr hoch. Eine Versicherung mit nur vier Versicherungsnehmerinnen und -nehmern wird in der Praxis schwer zu finden sein.

Bei der zweiten Aufgabe ist bei beiden Erweiterungen keine Erfolgsaussicht gegeben. Eine Person, welche nie Geld für Filme ausgibt, hat ein viel höheres Risiko, kein Geld für einen Kinobesuch zur Verfügung zu haben und würde dadurch auf Kosten der anderen profitieren. Für eine Person, die hingegen immer gerne Geld für das Kino ausgibt, wäre es ebenfalls nicht ratsam, da diese sehr selten oder nie Geld aus der Spardose brauchen wird.

Der dritte Arbeitsauftrag behandelt den Ausgleich über die Zeit. Solange nur in einem Monat Geld eingezahlt wird und dieser ein ohnehin finanziell schwacher Monat für die Beteiligten ist, wird die Versicherung sehr bald kein Geld mehr zur Verfügung haben und die Versicherungsnehmerinnen und -nehmer werden nicht vollends entschädigt werden können.

Im Anschluss kann die Lehrperson nochmals auf wichtige Definitionen eingehen, und zwar:

- Das Kollektiv ist die Summe der Versicherungsnehmerinnen und -nehmer.
- Die Polizze ist die Beweisurkunde über den Inhalt des Versicherungsvertrages.
- Die Versicherungsnehmerinnen und -nehmer sind die Vertragspartnerinnen und -partner, welche im Schadensfall eine im Vertrag definierte Leistung erhalten.
- Der Versicherer gewährt den Versicherungsschutz für ein bestimmtes Risiko und übernimmt im Versicherungsfall die vereinbarte Leistung.
- Die Prämie ist der im Vertrag definierte fällige Geldbetrag, welcher einmalig oder in regelmäßigen Zahlungen erfolgen kann.
- Der Schaden ist das im Vertrag definierte ungewisse Ereignis, welches der Versicherungsnehmerin bzw. dem Versicherungsnehmer einen wirtschaftlichen Nachteil bringt.
- Das Risiko ist die Möglichkeit, dass ein Versicherungsfall eintritt.

#### 7.2.6.3 Kompetenzbezug

Da diese Sequenz ohne innermathematische Inhalte auskommt, ist keine Handlungsdimension festzustellen.

#### Komplexitätsdimension Herstellen von Verbindungen (K2):

Schülerinnen und Schüler müssen selbstständig das Konzept einer Versicherung herleiten und können dafür das zuvor Gelernte einsetzen.

#### 7.2.7 Planungsraster

| Zeit in Minuten | Durchführungsphase                              | Methoden          | Sozialformen | L-S-Aktivität      | Materialien |
|-----------------|-------------------------------------------------|-------------------|--------------|--------------------|-------------|
| 10              | Geschichte zur Notwendigkeit von Versicherungen | Frontalunterricht | L-S-Gespräch | Lehrperson erklärt | Videobeamer |



|    |                                          |                   |               |                                                                                                                           |                        |
|----|------------------------------------------|-------------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| 5  | Arten von Versicherungen kennenlernen    | Arbeitsauftrag    | Einzelarbeit  | S&S wenden eben Gelerntes an                                                                                              | Arbeitsblatt           |
| 10 | Informationsbeschaffung aus dem Internet | Internetrecherche | Einzelarbeit  | S&S informieren sich zum Thema                                                                                            | Arbeitsblatt, Computer |
| 15 | Informationssammlung an der Tafel        | Diskussion        | L-S-Gespräch  | S&S nennen die gesammelten Informationen. Lehrperson sortiert, ergänzt sie ggf. und fügt sie zu einem Tafelbild zusammen. | Tafel, Kreide          |
| 10 | Große Versicherungsschäden               | Internetrecherche | Einzelarbeit  | S&S recherchieren selbstständig                                                                                           | Arbeitsblatt, Computer |
| 5  | Große Versicherungsschäden               | Diskussion        | Gruppenarbeit | S&S vergleichen die Ergebnisse und vervollständigen sie                                                                   | Arbeitsblatt, Computer |
| 5  | Informationssammlung an der Tafel        | Diskussion        | L-S-Gespräch  | S&S nennen die gesammelten Informationen. Lehrperson sortiert, ergänzt sie ggf.                                           | Tafel, Kreide          |
| 15 | Konzept einer Versicherung               | Arbeitsauftrag    | Gruppenarbeit | S&S erarbeiten sich gemeinsam die Funktionsweisen einer Versicherung                                                      | Arbeitsblatt           |
| 15 | Ergebnissicherung und Definitionen       | Diskussion        | L-S-Gespräch  | S&S nennen die gesammelten Informationen. Lehrperson sortiert, ergänzt sie ggf. und fügt sie zu einem Tafelbild zusammen. | Tafel, Kreide          |
| 10 | Zusammenfassung                          | Reflexion         | L-S-Gespräch  | Lehrperson fasst die Einheit zusammen und klärt etwaige Fragen.                                                           |                        |

Tabelle 3: Planungsraaster Unterrichtskonzept 1

### 7.3 Unterrichtskonzept 2

In dieser Einheit erarbeiten sich Schülerinnen und Schüler mit Hilfe verschiedener Verteilungen versicherungsmathematische Kennzahlen und simulieren einen Gesamtschaden.

#### 7.3.1 Dauer

Die erste Sequenz besteht aus drei Arbeitsschritten, die, inklusive Erklärungen und Nachbesprechung, jeweils in fünf Minuten abgehandelt werden können. Für die zweite Sequenz ist ein kurzer Input mit drei anschließenden Aufgaben geplant. Für diese vier Abschnitte sind ebenfalls jeweils fünf Minuten vorgesehen. Im Anschluss geht die Lehrperson auf den Unterschied von individuellem und kollektivem Modell ein, wofür mit Arbeitsauftrag zehn Minuten prognostiziert werden. Für die abschließende Reflexion bleiben fünf Minuten.

Somit kann dieses Konzept in einer 50-minütigen Schulstunde über die Bühne gehen, wobei hierbei etwaige Grundkenntnisse für gewisse Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wie zum Beispiel die Dichtefunktion der Exponentialverteilung, vorausgesetzt werden. Falls die Lehrperson näher auf die theoretischen Hintergründe dieser Einheit eingehen will, kann das Konzept zeitlich ausgebaut werden.

#### 7.3.2 Ziele

Die Ziele des Unterrichtskonzepts können folgendermaßen zusammengefasst werden:

- Die Schülerinnen und Schüler können versicherungsmathematische Modelle verstehen und selbstständig anwenden.
- Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Lösungsstrategien für mathematische Probleme.
- Die Schülerinnen und Schüler kennen mathematische Darstellungsformen eines realen Sachverhalts.

#### 7.3.3 Vorwissen von Schülerinnen und Schülern

Für diese Einheit müssen Schülerinnen und Schüler im Umgang mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen bereits geübt sein. Das betrifft von den diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen die Bernoulli-Verteilung und die Binomialverteilung, von den stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen die Exponentialverteilung.

Zusätzlich sollten Grundbefehle eines Tabellenkalkulationsprogramms bekannt sein. In diesem Unterrichtskonzept werden die Aufgaben mit Microsoft Excel bearbeitet.

#### 7.3.4 Sequenz 1

Zu Beginn der Einheit sollen die Schülerinnen und Schüler eine Schadensanzahl simulieren. Um diese Bernoulli-verteilte Zufallsvariable zu generieren, werden mit Hilfe einer Computer-Software 100 zufällig verteilte Zahlen aus dem Intervall  $[0; 1[$  erzeugt. Die Zahl 100 entspricht der Anzahl der Versicherungsnehmerinnen und -nehmer, also dem Kollektiv.

Später wird jeder dieser Zufallszahlen, abhängig von ihrem Wert, eine 1 oder eine 0 zugeordnet: Ist sie größer als eine gewisse, selbst zu definierende Grenze, erhält sie den Wert 1, ansonsten den Wert 0. Dadurch erhält man 100 Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen. Nach Kumulation dieser ergibt sich eine binomialverteilte Zufallsgröße.

##### 7.3.4.1 Ablauf

Am Anfang der Sequenz werden die Schülerinnen und Schüler darauf aufmerksam gemacht, dass Versicherungen die einzelnen Personen ihres Kollektivs in Kategorien bzw. Schadenswahrscheinlichkeiten einteilen müssen. Da in dieser Sequenz von einem fiktiven Bestand ausgegangen wird, werden mit Hilfe eines Computerprogramms zufällig verteilte Größen erstellt, welche die Schadenswahrscheinlichkeit der einzelnen Versicherungsnehmerinnen bzw. -nehmer repräsentieren sollen. Im Plenum kann in Excel nach einer Funktion gesucht werden, welche dieses möglich macht. Der benötigte Befehl lautet „ZUFALLSZAHN()“. Dazu sei erwähnt, dass Excel diese Zahlen bei jedem Rechenschritt neu berechnet. Falls diese ständigen zahlenmäßigen Veränderungen bei den Schülerinnen und Schülern zu Verwirrung führen, kann durch die Excel-Funktionen „kopieren“ und „Einfügeoptionen: Werte“ Abhilfe geschafft werden.

Im nächsten Schritt wird jeder dieser Zufallszahlen der Wert 1 oder 0 zugeteilt. Wieder eignet sich die Diskussion im Plenum, um eine mögliche Lösung für diese Aufgabe zu finden. Eine geeignete Strategie ist eine WENN-Funktion, wobei man eine Grenze wählt und abhängig vom Unter- bzw. Überschreiten dieser den gewünschten Wert zuordnet. In diesem Fall soll der Grat bei 0,9 liegen. An diesem Punkt kann darauf eingegangen werden, dass nicht alle Schäden der Versicherung gemeldet werden, da entweder die Reparaturkosten unter dem Selbstbehalt liegen, der Aufwand, mit der Versicherung in Kontakt zu treten, größer als der zu erwartende Nutzen ist oder aber ein Bonus-Malus-

System, wie zum Beispiel bei der Kfz-Versicherung üblich, dazu führen würde, dass man in eine teurere Kategorie versetzt wird.

Für die letzte Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler die Spalte der Bernoulli-verteilten Variablen summieren, um eine binomialverteilte Zufallsgröße zu erzeugen. Spätestens zu diesem Zeitpunkt wird einigen Schülerinnen und Schülern auffallen, dass sich die Ergebnisse der Mitschülerinnen und Mitschüler von den eigenen unterscheiden. Hier kann darauf eingegangen werden, dass die Simulation einem Modell entspricht. Modelle versuchen die Realität in vereinfachter Form möglichst genau wiederzugeben, besitzen aber keine Alleingültigkeit bzw. können nicht als absolut angenommen werden.

#### 7.3.4.2 Erwartungshorizont

Diese Aufgabe wird in Excel wie folgt gelöst:

|    | A                                | B                                    | C                                  | D   |
|----|----------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|-----|
| 1  | <b>Aufgabe 1</b>                 |                                      |                                    |     |
| 2  | gleichverteilte<br>Zufallszahlen | Bernoulli-verteilte<br>Zufallszahlen | binomialverteilte<br>Zufallszahlen | p   |
| 3  | 0,520337576                      | 0                                    | 12                                 | 0,9 |
| 4  | 0,989131445                      | 1                                    |                                    |     |
| 5  | 0,661481927                      | 0                                    |                                    |     |
| 6  | 0,697297065                      | 0                                    |                                    |     |
| 7  | 0,633173069                      | 0                                    |                                    |     |
| 8  | 0,709127865                      | 0                                    |                                    |     |
| 9  | <b>=ZUFALLSZAHL()</b>            | <b>=WENN(A3&gt;D\$3;1;0)</b>         | <b>=SUMME(B3:B102)</b>             |     |
| 10 |                                  | 0                                    |                                    |     |
| 11 | 0,455881783                      | 0                                    |                                    |     |
| 12 | 0,864634908                      | 0                                    |                                    |     |
| 13 | 0,185001186                      | 0                                    |                                    |     |
| 14 |                                  |                                      |                                    |     |
| 15 | 0,852269702                      | 0                                    |                                    |     |
| 16 | 0,548567545                      | 0                                    |                                    |     |
| 17 | 0,233751767                      | 0                                    |                                    |     |
| 18 | 0,632699866                      | 0                                    |                                    |     |
| 19 | 0,366268952                      | 0                                    |                                    |     |
| 20 | 0,342512596                      | 0                                    |                                    |     |
| 21 |                                  |                                      |                                    |     |
| 22 | 0,508551799                      | 0                                    |                                    |     |
| 23 | 0,139073976                      | 0                                    |                                    |     |
| 24 |                                  |                                      |                                    |     |
| 25 | 0,654059863                      | 0                                    |                                    |     |

Tabelle 4: Lösung Unterrichtskonzept 2 Aufgabe 1

In der ersten Spalte werden 100 Zufallszahlen zwischen 1 und 0 erzeugt. Excel ermöglicht die Zellen einer Spalte zu vervielfältigen, indem man mit dem Mauszeiger in die rechte untere Ecke klickt und 100 Zellen nach unten zieht, während man die Maus gedrückt hält. Darauf sollten die Schülerinnen und Schüler hingewiesen werden.

In Spalte B werden die Werte 1 und 0 zugeteilt. Die Grenze von 0,9 wurde in Spalte D geschrieben. Dieser Schritt ist optional, da der Wert auch im Befehl der Spalte B verzeichnet werden kann.

Die dritte Spalte ist eine SUMMEN-Funktion über die erste Spalte. Für den Fall der Versicherung bedeutet das, dass bei 100 Versicherten zwölf Schäden gemeldet werden. Wie bereits erwähnt, wird dieses Ergebnis zwischen den Schülerinnen und Schülern leicht variieren.

Die Zeilen 14 bis 94 wurden zur besseren Lesbarkeit ausgeblendet. Auf die Überschrift sollte großer Wert gelegt werden, da diese das Tabellenblatt strukturiert und der Inhalt dadurch wesentlich nachhaltiger im Gedächtnis der Schülerinnen und Schüler verankert wird.

#### *7.3.4.3 Kompetenzbezug*

##### Handlungsbereich Darstellen, Modellbilden (H1):

Die Schülerinnen und Schüler müssen mit Einsatz eines Computerprogramms und mit Hilfe einer Tabelle den gegebenen Sachverhalt darstellen.

##### Handlungsbereich Rechnen, Operieren (H2):

Durch das Einsetzen in Formeln und das Operieren mit Tabellen wird der Handlungsbereich H2 erfüllt. Die Schülerinnen und Schüler müssen aktiv Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen erstellen und überlegen, wie man dadurch zu einer binomialverteilten Variablen kommt.

##### Handlungsbereich Interpretieren (H3):

Eine charakteristische Tätigkeit für den Bereich H3 ist das Ablesen von Werten aus Tabellen oder Rechenergebnissen und deren Deutung im jeweiligen Kontext, was im gegenständlichen Fall durch die Interpretation der binomialverteilten Zufallsgrößen erfolgt.

#### Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (I4):

Die Schülerinnen und Schüler müssen diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen anwenden.

#### Komplexitätsbereich Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K1):

Die Jugendlichen müssen grundlegende Verfahren der diskreten Wahrscheinlichkeit beherrschen.

#### Komplexitätsbereich Herstellen von Verbindungen (K2):

Zusätzlich zur Anwendung müssen die jungen Erwachsenen zwischen den verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen unterscheiden und hin- und herwechseln können.

#### 7.3.5 Sequenz 2

In der anschließenden Sequenz wird mit stetigen Verteilungen gearbeitet, genauer mit der Exponentialverteilung. Um mit Hilfe der im ersten Abschnitt erstellten Zufallszahlen stetig verteilte, in diesem Fall exponentialverteilte, Wahrscheinlichkeiten zu erzeugen, bedient man sich der Inversionsmethode. Dies ist ein Simulationsverfahren, welches aus gleichverteilten Zufallszahlen andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen erzeugt.

##### 7.3.5.1 Ablauf

Zu Beginn sollte die Lehrperson auf die Theorie der nächsten Schritte eingehen, da diese wichtig für das Verständnis ist. Die Inversionsmethode kann ebenfalls kurz erklärt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich dazu überlegen, ob es eine Umkehrfunktion der Exponentialverteilung gibt und wenn ja, wie diese lautet.

Unter der Annahme, dass die Einzelschäden jeder Versicherungsnehmerin und jeden Versicherungsnehmers annähernd exponentialverteilt sind, sollen die Schülerinnen und Schüler die erzeugten Zufallszahlen in die eben eruierte Umkehrfunktion der Exponentialverteilung einsetzen, um die simulierten Einzelschadenshöhen zu erhalten. Für  $\lambda$  soll der Wert 0,5 angenommen werden.

Zum Abschluss dieser Sequenz kann die zu erwartende Gesamtschadenshöhe wieder durch eine SUMMEN-Funktion berechnet werden, da sich der Erwartungswert des Jahresgesamtschadens aus der Summe der Erwartungswerte der Einzelschäden ergibt.

### 7.3.5.2 Erwartungshorizont

Die Exponentialverteilung ist im Positiven bijektiv und daher umkehrbar. Durch Äquivalenzumformungen erhält man aus

$$F_{\lambda}(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{falls } x \geq 0$$

$$F_{\lambda}^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - x), \quad \text{falls } x \geq 0.$$

Die Tabelle sollte wie folgt aussehen:

|    | A                | E                    | F         | G                   |
|----|------------------|----------------------|-----------|---------------------|
| 1  | <b>Aufgabe 1</b> | <b>Aufgabe 2</b>     |           |                     |
|    | gleichverteilte  | exponentialverteilte |           |                     |
| 2  | Zufallszahlen    | Zufallszahlen        | $\lambda$ | Jahresgesamtschaden |
| 3  | 0,520337576      | 1,469345411          | 0,5       | 233,1369836         |
| 4  | 0,989187445      | 9,044861467          |           |                     |
| 5  | 0,661481927      | 2,166355592          |           |                     |
| 6  | 0,697297065      | 2,390006785          |           |                     |
| 7  | 0,633178069      | 2,005730242          |           |                     |
| 8  | 0,709127865      | 2,469743017          |           |                     |
| 9  | 0,414724794      | 1,071346211          |           |                     |
| 10 | =ZUFALLSZAHL()   | 4,4                  |           |                     |
| 11 |                  |                      |           |                     |
| 12 | 0,864634908      | 3,999559524          |           |                     |
| 13 | 0,185001186      | 0,409137243          |           |                     |
| 14 | 0,852269702      | 3,824733961          |           |                     |
| 15 | 0,548567545      | 1,590659037          |           |                     |
| 16 | 0,233751767      | 0,532498195          |           |                     |
| 17 | 0,632699866      | 2,003151924          |           |                     |
| 18 | 0,366268952      | 0,912261258          |           |                     |
| 19 | 0,342512596      | 0,838659344          |           |                     |
| 20 | 0,508551799      | 1,420797469          |           |                     |
| 21 | 0,139073976      | 0,299493393          |           |                     |
| 22 | 0,654059863      | 2,122979069          |           |                     |

Tabelle 5: Lösung Unterrichtskonzept 2 Aufgabe 2

Die erste Spalte kann aus Aufgabe 1 übernommen werden. Für die zweite Spalte muss die Umkehrfunktion der Exponentialverteilung eingegeben werden. Wieder wurde in diesem Beispiel der Umweg über eine extra Zelle gewählt, da man in diesem Modell flexibel den Wert für  $\lambda$  verändern kann. In der dritten Spalte werden die Werte der Spalte E kumuliert.

Um nur die wesentlichen Stellen darzustellen, wurden die Zeilen 14 bis 93 und die Spalten B bis D ausgeblendet.

#### *7.3.5.3 Kompetenzbezug*

##### Handlungsbereich Darstellen, Modellbilden (H1):

Die Schülerinnen und Schüler müssen mit Einsatz eines Computerprogramms und mit Hilfe einer Tabelle den gegebenen Sachverhalt darstellen.

##### Handlungsbereich Rechnen, Operieren (H2):

Die Schülerinnen und Schüler operieren mit Tabellen und wenden die Exponentialverteilung an.

##### Handlungsbereich Interpretieren (H3):

Die Einzelschäden resultieren aus der Annahme der Exponentialverteilung, während sich der Gesamtschaden durch die Kumulation der Einzelschäden ergibt. Diese Zusammenhänge müssen erkannt und bearbeitet werden.

##### Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (I1):

Die Anwendung von Äquivalenzumformungen einer Gleichung mit Formvariablen ist ein wichtiger Baustein dieser Sequenz.

##### Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten (I2):

Die Schülerinnen und Schüler müssen Kriterien und die Herleitung einer Umkehrfunktion beherrschen. Weiters erfordert dieser Abschnitt einen gekonnten Umgang mit der Exponential- sowie der Logarithmusfunktion.

##### Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (I4):

Die Schülerinnen und Schüler müssen eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung anwenden.

##### Komplexitätsbereich Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K1):

Die Jugendlichen müssen grundlegende Verfahren der stetigen Wahrscheinlichkeit beherrschen.



## Komplexitätsbereich Herstellen von Verbindungen (K2):

Für die Umwandlung von gleichverteilten zu exponentialverteilten Zufallszahlen bedarf es einer Verbindung innermathematischer Sachverhalte.

### 7.3.6 Sequenz 3

Zum Abschluss dieser Einheit werden der Klasse das individuelle und das kollektive Modell der Schadenssimulation nähergebracht und deren Unterschiede erläutert. Des Weiteren wird die Gesamtschadenssumme, unter Verwendung von Aufgaben 1 und 2, im kollektiven Modell berechnet.

#### 7.3.6.1 Ablauf

An diesem Punkt werden die Schülerinnen und Schüler darauf hingewiesen, dass die vorhergehende Simulation nur dann der Realität nahekommt, wenn tatsächlich alle Versicherungsnehmerinnen und -nehmer einen Schaden erfahren und diesen auch melden. Grund dafür ist die Tatsache, dass die Exponentialverteilung zwar zur 0 konvergiert, dem Fall „Kein Schaden tritt ein“ jedoch die Wahrscheinlichkeit 0 zuteilt. Das entspricht der Berechnung nach dem individuellen Modell, kommt in der Realität aber de facto nicht vor. Durch die Lösung der ersten beiden Aufgaben dieser Sequenz wird dieser Umstand behoben und den Schülerinnen und Schülern anhand dessen gleichzeitig das kollektive Modell erläutert.

Um den Jugendlichen das Verständnis des Themas zu erleichtern, kann man die Summenschreibweise der beiden Modelle anschreiben und auf diese näher eingehen:

- individuelles Modell:  $\sum_{i=1}^n X_i$
- kollektives Modell:  $\sum_{i=1}^N X_i$

$X_i$  steht hierbei für einen Schaden. Beim individuellen Modell ist  $n$  bekannt, da es der Größe des Kollektivs entspricht. Im kollektiven Modell ist  $N$  vorerst unbekannt und wird als binomialverteilt angenommen.

Dazu wird die Tabelle um eine Spalte erweitert, in der der Gesamtschaden für die wahrscheinliche Anzahl an Schäden berechnet wird. In diesem Schritt wird nicht die Summe über die ganze Spalte der exponentialverteilten Werte gebildet, da sich die Anzahl der Summanden auf die in Aufgabe 1 ermittelte Anzahl von Schäden beschränkt. An dieser Stelle ist unbedingt zu erwähnen, dass die Höhe der Einzelschäden stetig verteilt ist, die Anzahl jedoch nur diskret verteilt sein kann.

### 7.3.6.2 Erwartungshorizont

Die dazugehörige Tabelle sieht folgendermaßen aus:

|     | A                     | C                         | E                                          | H                   |
|-----|-----------------------|---------------------------|--------------------------------------------|---------------------|
| 1   | <b>Aufgabe 1</b>      |                           | <b>Aufgabe 2</b>                           | <b>Aufgabe 3</b>    |
|     | gleichverteilte       | binomialverteilte         | exponentialverteilte                       | Jahresgesamtschaden |
| 2   | Zufallszahlen         | Zufallszahlen             | Zufallszahlen                              | kollektives Modell  |
| 3   | 0,520337576           | 12                        | 1,469345411                                | 34,48550157         |
| 4   | 0,989137445           |                           | 9,444867467                                |                     |
| 5   | 0,661481927           |                           | 2,166355592                                |                     |
| 6   | 0,697297065           |                           | 2,390006735                                |                     |
| 7   | 0,633173069           |                           | 2,005730242                                |                     |
| 8   | 0,709127865           |                           | 2,469743017                                |                     |
| 9   | 0,414724704           |                           | 1,871816841                                |                     |
|     | <b>=ZUFALLSZAH1()</b> | <b>=(1/F\$3)*LN(1-A3)</b> |                                            |                     |
| 11  | 0,455881783           |                           | 1,21717749                                 |                     |
| 12  | 0,864634908           |                           |                                            |                     |
| 13  | 0,185001186           |                           |                                            |                     |
|     |                       |                           | <b>=SUMME(INDIREKT("E3:E"&amp;(C3+2)))</b> |                     |
| 94  | 0,852269702           |                           | 3,824733961                                |                     |
| 95  | 0,548567545           |                           | 1,590659037                                |                     |
| 96  | 0,233751767           |                           | 0,532498195                                |                     |
| 97  | 0,632699866           |                           | 2,003151924                                |                     |
| 98  | 0,366268952           |                           | 0,912261258                                |                     |
| 99  | 0,342512596           |                           | 0,838659344                                |                     |
| 100 | 0,508551799           |                           | 1,420797469                                |                     |
| 101 | 0,139073976           |                           | 0,299493393                                |                     |
| 102 | 0,654059863           |                           | 2,122979069                                |                     |

Tabelle 6: Lösung Unterrichtskonzept 2 Aufgabe 3

Der Jahresgesamtschaden ergibt sich aus der Summe der ersten Glieder der exponentialverteilten Zufallszahlen, die Anzahl der Summanden entspricht der binomialverteilten Zufallszahl. Dieser Gesamtschaden kann mit einer einfachen SUMMEN-Funktion berechnet werden, wobei die Summanden abgezählt werden müssen. In diesem Beispiel wurde mit Hilfe der INDIREKT-Funktion eine automatisierte Version erstellt, welche die Glieder in Abhängigkeit von der Schadensanzahl aus Aufgabe 1 beziffert.

Der deutliche Unterschied zwischen dem Gesamtschaden nach individuellem Modell und dem Gesamtschaden nach kollektivem Modell erklärt sich durch die unterschiedlichen Berechnungsgrundlagen. Man muss den Schülerinnen und Schülern erklären, dass das

kollektive Modell zwar näher an der Realität ist, jedoch durch die zusätzliche Unbekannte gleichzeitig stärker von äußeren Einflüssen abhängt und damit schwieriger zu berechnen ist. Das individuelle Modell kann man durch Verändern von  $\lambda$  anpassen.

#### *7.3.6.3 Kompetenzbezug*

##### Handlungsbereich Darstellen, Modellbilden (H1):

Modellbilden erfordert, in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen. Dies geschieht unter anderem bei der Umwandlung vom individuellen zum kollektiven Modell.

##### Handlungsbereich Rechnen, Operieren (H2):

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit Tabellen und berechnen den Gesamtschaden eines Jahres.

##### Handlungsbereich Interpretieren (H3):

Aus der Tabelle müssen Werte entnommen und weiterverarbeitet werden. Die Funktion dieser Werte muss bekannt sein, um sie richtig verwenden zu können.

##### Handlungsbereich Argumentieren, Begründen (H4):

Der Zusammenhang zwischen individuellem und kollektivem Modell muss erschlossen und die Berechtigung beider Berechnungsmethoden muss argumentativ belegt werden.

##### Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten (I2):

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Summen zweier verschiedener Folgen interpretieren können.

##### Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (I4):

Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Notwendigkeit des kollektiven Modells, da die Exponentialverteilung nie den Wert 0 annimmt.

##### Komplexitätsbereich Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren (K3):

Die Schülerinnen und Schüler müssen beim Übergang vom individuellen zum kollektiven Modell den Zusammenhang erkennen und entsprechend argumentieren.

### 7.3.7 Planungsraster

| <b>Zeit in Minuten</b> | <b>Durchführungsphase</b>                                     | <b>Methoden</b>             | <b>Sozialformen</b> | <b>L-S-Aktivität</b>                                            | <b>Materialien</b>    |
|------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------|---------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 5                      | Erstellen der Zufallszahlen                                   | Frontalunterricht           | L-S-Gespräch        | Lehrperson erklärt, S&S arbeiten                                | Videobeamer, Computer |
| 5                      | Erzeugen der Bernoulli-verteilten Zufallszahlen               | Arbeitsauftrag              | L-S-Gespräch        | gemeinsames Erarbeiten                                          | Videobeamer, Computer |
| 5                      | Erzeugen der binomialverteilten Zufallszahl & Erklärung       | Arbeitsauftrag              | L-S-Gespräch        | gemeinsames Erarbeiten                                          | Videobeamer, Computer |
| 5                      | Erläuterungen zur Exponentialverteilung und Inversionsmethode | Frontalunterricht           | L-S-Gespräch        | Lehrperson erklärt                                              | Videobeamer           |
| 5                      | Anwendung der Inversionsmethode                               | Arbeitsauftrag              | Einzelarbeit        | S&S ermitteln Umkehrfunktion der Exponentialverteilung          | Heft                  |
| 5                      | Ermittlung der exponentialverteilten Zufallszahlen            | Arbeitsauftrag              | Einzelarbeit        | S&S arbeiten                                                    | Videobeamer, Computer |
| 5                      | Ermittlung der binomialverteilten Zufallszahl & Erklärung     | Diskussion & Arbeitsauftrag | L-S-Gespräch        | gemeinsames Erarbeiten                                          | Videobeamer, Computer |
| 5                      | Erklärung individuelles, kollektives Modell                   | Frontalunterricht           | L-S-Gespräch        | Lehrperson erklärt                                              | Videobeamer           |
| 5                      | Berechnung kollektives Modell                                 | Arbeitsauftrag              | Einzelarbeit        | S&S arbeiten                                                    | Heft                  |
| 5                      | Zusammenfassung                                               | Reflexion                   | L-S-Gespräch        | Lehrperson fasst die Einheit zusammen und klärt etwaige Fragen. |                       |

Tabelle 7: Planungsraster Unterrichtskonzept 2

### 7.4 Unterrichtskonzept 3

Das dritte Unterrichtskonzept dieser Arbeit behandelt eine Schadenssimulation für besonders hohe Schäden. Die Exponentialfunktion, welche im zweiten Unterrichtskonzept Anwendung fand, eignet sich aufgrund ihres Konvergenzverhaltens nur für kleine Schäden, da sie sich vergleichsweise rasch dem Wert 0 nähert. Die Schülerinnen und Schüler sollen

im 3. Unterrichtskonzept daher den Umgang mit der Pareto-Verteilung lernen. Für die Simulation der Schadenszahl wird die Poisson-Verteilung verwendet.

#### 7.4.1 Dauer

Die erste Sequenz wird in vier Abschnitte zu jeweils etwa fünf Minuten eingeteilt. Der zweite Abschnitt besteht aus einem Teil, der, inklusive Erläuterungen und Arbeitszeit, mit zehn Minuten bemessen ist. Die letzte Sequenz dauert etwa fünf Minuten, wodurch 15 Minuten für eine Zusammenfassung im Plenum bleiben, um eine Unterrichtsstunde von 50 Minuten zu füllen.

#### 7.4.2 Ziele

Die Ziele des Unterrichtskonzepts können folgendermaßen zusammengefasst werden:

- Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Lösungsstrategien für mathematische Probleme.
- Die Schülerinnen und Schüler kennen mathematische Darstellungsformen von einem realen Sachverhalt.
- Die Schülerinnen und Schüler kennen den Unterschied verschiedener Verteilungen und kennen die Voraussetzungen für deren Einsatz.

#### 7.4.3 Vorwissen von Schülerinnen und Schülern

Die Schülerinnen und Schüler müssen über die diskrete Poisson-Verteilung sowie über die stetige Pareto-Verteilung Bescheid wissen und einen grundlegenden Umgang mit diesen Wahrscheinlichkeiten beherrschen.

#### 7.4.4 Sequenz 1

Zunächst wird den Schülerinnen und Schülern erklärt, dass sich die Exponentialverteilung nur für kleine Schäden eignet, da sie schnell gegen 0 konvergiert und damit einem großen Schaden eine nur sehr kleine Wahrscheinlichkeit zukommen lässt. Die Berücksichtigung großer Schäden ist jedoch essenziell für eine Versicherung, da diese einen Großteil des Gesamtvolumens der Auszahlungen einnehmen können. Vor allem bei Versicherungsarten mit einer hohen Streuung sind hohe Schäden von großer Bedeutung. Dazu zählen unter anderem die Versicherung vor Naturkatastrophen oder die Versicherung vor einem Häuserbrand.

Wie in Unterrichtskonzept 2 wird das kollektive Modell verwendet, wodurch neben der Schadenshöhe auch die Schadensanzahl simuliert werden muss. Hierfür geht man von einer

Poisson-verteilten Schadenszahl aus. Die Poisson-Verteilung eignet sich für die Berechnung seltener Ereignisse. Ein Hausbrand passiert zwar in der Regel seltener als zum Beispiel ein Autounfall, für die Versicherung ist jedoch ein Feuer nicht von minderer Bedeutung, da dies im Normalfall einen höheren Schaden mit sich bringt. Hohe Schäden geschehen zwar verhältnismäßig selten, können aber trotzdem einen großen Teil des von der Versicherung auszahlenden Gesamtvolumens ausmachen. In der Praxis werden solche Simulationen mit Poisson-Prozessen durchgeführt. Homogene Poisson-Prozesse sind Markow-Ketten in stetiger Zeit. Eine solche Simulation wäre für den Schulunterricht jedoch nicht geeignet, weshalb eine stark vereinfachte Form zum Einsatz kommt.

Die Schadenshöhe wird, wie in der Praxis üblich, mit der Pareto-Verteilung simuliert, wobei erwähnt werden muss, dass auch diese Verteilungen nur rudimentär zur Anwendung gelangen, da eine detaillierte Auseinandersetzung mit ihr den stofflichen Rahmen sprengen würde.

#### 7.4.4.1 Ablauf

Den Schülerinnen und Schülern wird folgendes Problem präsentiert: „Im Zuge einer Erhebung von Feuerschäden will eine Versicherung abschätzen, wie hoch der Gesamtschaden eines Jahres sein wird. Dazu will sich die Versicherung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % absichern, um den prognostizierten Schaden keinesfalls zu unterschätzen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Feuerschäden in einem Jahr, wenn mit einem Erwartungswert von 3,1 gerechnet wird.“

Auf Grund der Tatsache, dass in dieser Aufgabe ungewöhnlich hohe Schäden betrachtet werden, eignet sich die Verteilung der Einzelschäden, die bislang in den Unterrichtskonzepten Verwendung fanden, nicht. Die Exponentialverteilung nähert sich nämlich vergleichsweise rasch dem Wert 0 an, wodurch große Schäden nicht ausreichend beachtet werden. Abhilfe verschafft in diesem Fall die Pareto-Verteilung, die langsamer gegen 0 konvergiert als viele andere Verteilungen. Zur Unterstützung des Verständnisprozesses der Jugendlichen kann man diesen Umstand mit einem Graphen verdeutlichen.

Der nächste Arbeitsauftrag lautet, ähnlich wie in dem Unterrichtskonzept zuvor: „Erstellen Sie mit Hilfe der Inversionsmethode 100 Pareto-verteilte Zufallszahlen. Nutzen Sie dafür die Funktion

$$F(x) = b \cdot x^{-1/a},$$

welche sich aus der Umkehrfunktion der Pareto-Verteilungsfunktion herleiten lässt. Für den Formparameter  $b$  wird 1,4, für den Skalenparameter  $a$  10000 angenommen.“

Nach demselben Prinzip wie bei dem Gesamtschaden, der mit Hilfe von Binomial- und Exponentialverteilung prognostiziert wurde, lässt sich dieser nun auch mit der Poisson- und Pareto-Verteilung simulieren.

#### 7.4.4.2 Erwartungshorizont

Zu Beginn müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Poisson-Verteilung benötigt wird, da die Anzahl eines Ereignisses über einen fixen Zeitraum gesucht wird. Weiters müssen die jeweiligen Ergebnisse in einer weiteren Spalte aufsummiert werden, wie in folgender Tabelle zu sehen ist:

| k  | $P(x=k)$ | $P(x \leq k)$ |
|----|----------|---------------|
| 0  | 0,0450   | 0,0450        |
| 1  | 0,1397   | 0,1847        |
| 2  | 0,2165   | 0,4012        |
| 3  | 0,2237   | 0,6248        |
| 4  | 0,1733   | 0,7982        |
| 5  | 0,1075   | 0,9057        |
| 6  | 0,0555   | 0,9612        |
| 7  | 0,0246   | 0,9858        |
| 8  | 0,0095   | 0,9953        |
| 9  | 0,0033   | 0,9986        |
| 10 | 0,0010   | 0,9996        |

Tabelle 8: Poisson-Verteilung Unterrichtskonzept 3

Nachdem sich die Versicherung mit mindestens 95 % absichern will, wird diese mit bis zu sechs Schäden in diesem Jahr rechnen.

Die Pareto-verteilten Zufallszahlen und der Gesamtschaden lassen sich mit Microsoft Excel folgendermaßen berechnen:

|     | A                     | I  | J      | K                         | L                                        | M             | N | O     |
|-----|-----------------------|----|--------|---------------------------|------------------------------------------|---------------|---|-------|
| 1   | <b>Aufgabe 1</b>      |    |        |                           |                                          |               |   |       |
|     | gleichverteilte       |    |        |                           | Pareto-verteilte                         |               |   |       |
| 2   | Zufallszahlen         | k  | P(x=k) | P(x<k)                    | Zufallszahlen                            | Gesamtschaden |   |       |
| 3   | 0,520337576           | 0  | 0,0450 | 0,0450                    | 15946,06155                              | 79038,56883   | λ | 3,1   |
| 4   | 0,989137445           | 1  | 0,1397 | 0,1847                    | 10075,31927                              |               | b | 1,4   |
| 5   | 0,661481927           | 2  | 0,2165 | 0,4012                    | 13433,87927                              |               | a | 10000 |
| 6   | 0,697297065           | 3  | 0,2237 | 0,6248                    | 12937,32243                              |               |   |       |
| 7   | 0,633173069           | 4  | 0,1733 | 0,7982                    | 13860,20614                              |               |   |       |
| 8   | 0,709127865           | 5  | 0,1075 | 0,9057                    | 12782,78017                              |               |   |       |
| 9   | 0,414724794           | 6  | 0,0555 | 0,9612                    | 18751,17862                              |               |   |       |
|     | <b>=ZUFALLSZAHL()</b> |    |        | <b>=O\$5*A3^(-1/O\$4)</b> |                                          |               |   |       |
| 12  | 0,864634908           | 9  | 0,0033 | 0,9966                    | 11209,54079                              |               |   |       |
| 13  | 0,185001186           | 10 | 0,0010 | 0,9990                    | 15355,50866                              |               |   |       |
|     |                       |    |        |                           | <b>=SUMME(INDIREKT("L3:L" &amp;6+2))</b> |               |   |       |
| 94  | 0,852269702           |    |        |                           | 28241,60376                              |               |   |       |
| 95  | 0,548567545           |    |        |                           | 13867,60977                              |               |   |       |
| 96  | 0,233751767           |    |        |                           | 20491,38688                              |               |   |       |
| 97  | 0,632699866           |    |        |                           | 21496,80391                              |               |   |       |
| 98  | 0,366268952           |    |        |                           | 16209,16246                              |               |   |       |
| 99  | 0,342512596           |    |        |                           | 40922,97854                              |               |   |       |
| 100 | 0,508551799           |    |        |                           | 13542,59174                              |               |   |       |
| 101 | 0,139073976           |    |        |                           |                                          |               |   |       |
| 102 | 0,654059863           |    |        |                           |                                          |               |   |       |

Tabelle 9: Lösung Unterrichtskonzept 3 Aufgabe 1

Die Tabelle inkludiert die Tabelle der Poisson-Verteilung sowie die benötigten Parameter, welche separat angeführt werden. Erneut wurden für diesen Teil unerhebliche Zeilen und Spalten ausgeblendet.

#### 7.4.4.3 Kompetenzbezug

##### Handlungsbereich Darstellen, Modellbilden (H1):

Die Schülerinnen und Schüler müssen ein für die Problemstellung geeignetes mathematisches Modell verwenden, in diesem Fall eine Tabelle und die geeigneten Formeln.

##### Handlungsbereich Rechnen, Operieren (H2):

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit Tabellen und berechnen den Gesamtschaden eines Jahres.



### Handlungsbereich Interpretieren (H3):

Die Werte der Tabelle müssen im Kontext gedeutet und weiterverarbeitet werden.

### Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (I4):

Die Poisson- und Pareto-Verteilungen sind wichtige Wahrscheinlichkeiten in der Versicherungsmathematik, werden jedoch im Unterricht nur rudimentär behandelt.

### Komplexitätsbereich Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K1):

In dieser Sequenz werden hauptsächlich grundlegende mathematische Operationen durchgeführt, wofür reproduktives Wissen ausreicht.

#### 7.4.5 Sequenz 2

In diesem Abschnitt wird der Erwartungswert des Gesamtschadens mit Hilfe der Erwartungswerte der Einzelschäden bzw. der Schadensanzahl berechnet.

##### 7.4.5.1 Ablauf

Mit den Erwartungswerten der Verteilungen lässt sich der Erwartungswert des Gesamtschadens eruieren. Die Formel von Wald besagt, dass

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(N) \cdot E(X)$$

gilt. Das bedeutet, dass der Erwartungswert des Gesamtschadens dem Produkt des Erwartungswerts der Schadensanzahl und des Erwartungswerts der Einzelschadenshöhe entspricht.

Das bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler den Erwartungswert des Gesamtschadens mit Hilfe der Formel von Wald selbstständig ermitteln können. Im Anschluss können die beiden berechneten Gesamtschäden verglichen werden.

##### 7.4.5.2 Erwartungshorizont

Der Erwartungswert der Poisson-Verteilung ist  $\lambda$  und daher im vorliegenden Beispiel 3,1. Für den Erwartungswert der Pareto-Verteilung wird für  $b > 1$  der Wert  $\frac{a}{b-1}$  angenommen, wodurch die Schülerinnen und Schüler 25.000 erhalten. Die zugehörige Rechnung kann unter anderem mit Taschenrechner, Computer oder händisch gelöst werden und soll mindestens folgende Aspekte beinhalten:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E(N) \cdot E(X) = \lambda \cdot \frac{a}{b-1} = 3,1 \cdot \frac{10.000}{1,4-1} = 77.500$$

Bei der konkreten Simulation der Höhe des Gesamtschadens erhalte man in diesem Fall 79.038,57, wobei dies von Rechnung zu Rechnung variiert, da sich die erzeugten Zufallszahlen unterscheiden.

Es gilt zu erwähnen, dass in diesem Beispiel mit einer sehr kleinen Stichprobe gerechnet wird, wodurch die verschiedenen Ergebnisse stark streuen. Je größer die Stichprobe ist, desto genauer ist die Prognose. Dahinter steckt das Gesetz der großen Zahlen. Dieses kann den Schülerinnen und Schülern kurz erläutert werden. In der Praxis wird mit einer Stichprobe  $n = 100$  keine Simulation durchgeführt, für die Theorie ist dieses Ausmaß jedoch ausreichend.

#### 7.4.5.3 Kompetenzbezug

##### Handlungsbereich Darstellen, Modellbilden (H1):

Das mathematische Modell der Erwartungswerte und deren Verarbeitung muss verstanden werden, um diese Aufgabe zu erledigen.

##### Handlungsbereich Rechnen, Operieren (H2):

Die Schülerinnen und Schüler berechnen den Gesamtschaden eines Jahres.

##### Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (I4):

Die Schülerinnen und Schüler kennen die Bedeutung des Erwartungswertes und können diesen berechnen.

##### Komplexitätsbereich Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K1):

Grundlegende mathematische Operationen werden durchgeführt, wofür reproduktives Wissen ausreicht.

#### 7.4.6 Sequenz 3

In der letzten Einheit werden den Schülerinnen und Schülern das Konzept des Sicherheitszuschlags und einer einfachen Prämienberechnung nähergebracht.

##### 7.4.6.1 Ablauf

Den Schülerinnen und Schülern muss erklärt werden, dass es ein großes Risiko für die Versicherungsunternehmen birgt, sich auf die Prognosen exakt zu verlassen. Eine Prognose

ist eben nur ein Modell, das versucht, die Realität möglichst genau abzubilden, muss deshalb aber nicht zwingend mit ihr übereinstimmen:

„Um die Wahrscheinlichkeit zu verringern, einen zu geringen Betrag von den Versicherungsnehmerinnen und -nehmern einzuheben, schlagen Versicherungen einen gewissen Betrag auf jede Prämie auf. Diese Erhöhung nennt sich Sicherheitszuschlag. Es gibt mehrere Arten, diesen Sicherheitszuschlag zu berechnen. Angenommen die Versicherung will den Erwartungswert auf die 100 Personen aufteilen und legt anschließend einen Sicherheitszuschlag von 10 % auf jede Prämie. Ermitteln Sie, wie hoch die jeweiligen Prämien sind und überprüfen Sie, ob man mit dieser Summe den ermittelten Gesamtschaden im Poisson-Pareto-Modell decken kann.“

#### 7.4.6.2 Erwartungshorizont

Die Schülerinnen und Schüler müssen sich zunächst die richtigen Werte aus den vorhergehenden Aufgaben heraussuchen und richtig einsetzen. Benötigt werden der Erwartungswert und der modellierte Gesamtschaden über ein Jahr. Für die Prämie reicht  $E(S)$ .

Die Berechnung der Prämie durch den Erwartungswert lautet:

$$P = \frac{1}{100} \cdot E(S) \cdot 1,1 = 775 \cdot 1,1 = 852,2.$$

Dadurch werden durch die Prämien 85.220 Geldeinheiten eingenommen, was den Wert von 79.038,57 aus dem Poisson-Pareto-Modell übersteigt. Es sei erwähnt, dass der Sicherheitszuschlag von 10 % nicht bei jeder Rechnung ausreichend sein muss, da die Zufallszahlen bei allen Schülerinnen und Schülern unterschiedlich sein werden.

#### 7.4.6.3 Kompetenzbezug

Handlungsbereich Darstellen, Modellbilden (H1):

Die Schülerinnen und Schüler müssen Formeln selbstständig umformen und mit diesen arbeiten.

Handlungsbereich Rechnen, Operieren (H2):

Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Höhe einer Prämie.

### Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (I4):

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit dem Erwartungswert des Gesamtschadens eines Jahres.

### Komplexitätsbereich Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K1):

In dieser Sequenz werden grundlegende mathematische Operationen durchgeführt, wofür reproduktives Wissen ausreicht.

#### 7.4.7 Planungsraster

| <b>Zeit in Minuten</b> | <b>Durchführungsphase</b>                               | <b>Methoden</b>   | <b>Sozialformen</b> | <b>L-S-Aktivität</b>                                                 | <b>Materialien</b>    |
|------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------|---------------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 5                      | Erstellen der Zufallszahlen                             | Frontalunterricht | L-S-Gespräch        | Lehrperson erklärt, S&S arbeiten                                     | Videobeamer, Computer |
| 5                      | Erzeugen der Poisson-verteilten Zufallszahl & Erklärung | Arbeitsauftrag    | L-S-Gespräch        | gemeinsames Erarbeiten                                               | Videobeamer, Computer |
| 5                      | Erzeugen der Pareto-verteilten Zufallszahlen            | Arbeitsauftrag    | L-S-Gespräch        | gemeinsames Erarbeiten                                               | Videobeamer, Computer |
| 5                      | Errechnung des Gesamtschadens                           | Arbeitsauftrag    | L-S-Gespräch        | gemeinsames Erarbeiten                                               | Videobeamer, Computer |
| 10                     | Erwartungswert des Gesamtschadens                       | Arbeitsauftrag    | Einzelarbeit        | S&S ermitteln den Erwartungswert, Lehrperson unterstützt             | Heft                  |
| 5                      | Ermittlung der Prämie                                   | Arbeitsauftrag    | Einzelarbeit        | S&S arbeiten                                                         | Videobeamer, Computer |
| 15                     | Zusammenfassung                                         | Diskussion        | L-S-Gespräch        | Lehrperson geht auf das Wissen der S&S ein, strukturiert und ergänzt | Tafel, Kreide         |

Tabelle 10: Planungsraster Unterrichtskonzept 3

## 8 Fazit

Der Wunsch, sich gegen Risiken des Lebens oder der eigenen Tätigkeit abzusichern, ist ein zutiefst menschliches Bedürfnis. Die heutige Versicherungswissenschaft im engeren Sinne entsteht allerdings erst Mitte des 19. Jahrhunderts. Ein wichtiger Meilenstein in diesem Zusammenhang ist die Gründung der „Faculty of Actuaries“ 1848 in London. Die noch junge Wissenschaftsdisziplin der Versicherungsmathematik präsentierte sich damals erstmals einer breiteren Öffentlichkeit und konnte sich in weiterer Folge etablieren.

Seither hat sich die Versicherungswissenschaft und -mathematik, nicht zuletzt dank technologischer Fortschritte, rasant weiterentwickelt, und das Versicherungswesen ist aus dem Alltag einer modernen Gesellschaft nicht mehr wegzudenken. Dennoch ist die hohe Alltagsbetroffenheit der Menschen nicht mit einem Verständnis um die Funktionsweise von Versicherungen verbunden. Das gilt auch und insbesondere für die Disziplin der Versicherungsmathematik. Der Themenkomplex wird von vielen Menschen als undurchschaubar wahrgenommen, obwohl die Funktionsweise und das Prinzip jeder Versicherung ähnlich sind.

Ein Fokus auf das breite Gebiet der Versicherungsmathematik bereits in der Schule würde dazu beitragen, die Barriere für den Wissenserwerb herabzusenken und das Interesse an Versicherungsmathematik zu verbreitern. Außerdem würde die Lehre grundlegender Versicherungsprinzipien die Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, im späteren Verlauf des Lebens einen informierten und mündigen Umgang mit Versicherungen zu pflegen. Eine altersberücksichtigende didaktische Aufbereitung des Themas mit entsprechendem Lehrmaterial ist dazu notwendig. Der Mathematikunterricht im Allgemeinen und die Stochastik im Speziellen eignen sich besonders gut für die Erklärung des Versicherungsprinzips, da versicherungsmathematische Berechnungen stets auf Modellen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhen.

In der vorliegenden Arbeit wurde anhand der Erstellung von drei Unterrichtskonzepten zum Thema Versicherungsmathematik versucht, die Funktionsweise von Versicherungen für Schülerinnen und Schüler in der 12. Schulstufe verständlich mit altersgerechten Erklärungen und Berechnungen aufzubereiten.

Das didaktische Konzept, das dabei zur Anwendung kommt, beruht auf dem genetischen Zugang, also auf einer Ausrichtung an natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik. Der Ansatz wurde gewählt, weil er sich

dazu eignet, statische Vorstellungen von Mathematik als bloße Ansammlung naturgegebenen Wissens zu durchbrechen und Berührungsängste von Schülerinnen und Schülern mit dem Fach Mathematik abzubauen.

Im ersten aufbereiteten Unterrichtskonzept geht es um das prinzipielle Erfassen der Funktionsweise von Versicherungen. Es kommt ohne innermathematische Inhalte aus.

Das zweite Unterrichtskonzept beschäftigt sich mit versicherungsmathematischen Kennzahlen und der Simulation eines Gesamtschadens. Mathematische Inhalte dieser Unterrichtssequenz sind die Bernoulli-Verteilung und die Binomialverteilung als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen sowie die Exponentialverteilung als stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Das dritte und letzte Unterrichtskonzept behandelt eine Schadenssimulation für besonders hohe Schäden. Zum Einsatz kommen hierbei die Poisson- und die Pareto-Verteilung in stark vereinfachter Form, um den stofflichen Rahmen des Mathematikunterrichts der Oberstufe nicht zu sprengen.

Unterstützend wird in allen drei Unterrichtskonzepten auf Computertechnologie zurückgegriffen, in der ersten Einheit auf das Internet als Rechercheinstrument, in den beiden anderen Unterrichtseinheiten auf das Tabellenkalkulationsprogramm Microsoft Excel.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die in der vorliegenden Arbeit präsentierten Unterrichtseinheiten einen altersadäquaten und didaktisch aufbereiteten Einstieg ins Thema Versicherungsmathematik für Schülerinnen und Schüler in der 12. Schulstufe bieten, der sowohl Schülerinnen und Schüler als auch Lehrende zur Vertiefung und Erweiterung anregen soll.

Eine frühe und umfassende Auseinandersetzung mit dem Prinzip und der Funktionsweise von Versicherungen kann individuelle, oftmals aus Überforderung entstehende, Fehlentscheidungen im Bestfall verhindern. Das Wissen um die Funktion der Versicherung von Risiken ist auch ein entscheidender Baustein für eine mündige und aufgeklärte Gesellschaft, die weniger anfällig für Betrug ist und im Umgang mit unternehmerischen Risiken kompetent zu agieren weiß. Der Autor hofft mit der vorliegenden Arbeit einen Beitrag dazu geleistet zu haben.

## Abbildungsverzeichnis

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Abbildung 1: Sicherheitszuschlag.....                                                       | 33 |
| Abbildung 2: Dichtefunktion der Exponentialverteilung mit unterschiedlichen $\lambda$ ..... | 42 |
| Abbildung 3: Das Verhalten ausgewählter Verteilungen bei höheren Werten .....               | 43 |
| Abbildung 4: Dichtefunktion der Pareto-Verteilung mit unterschiedlichen $b$ und $a=1$ ..... | 44 |
| Abbildung 5: Dichtefunktion der Pareto-Verteilung mit unterschiedlichen $b$ und $a=2$ ..... | 45 |
| Abbildung 6: Dichtefunktion der Gamma-Verteilung mit unterschiedlichen $p$ und $b=1$ .....  | 47 |
| Abbildung 7: Dichtefunktion der Gamma-Verteilung mit unterschiedlichen $p$ und $b=2$ .....  | 47 |

## Tabellenverzeichnis

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| Tabelle 1: Kriterien der Versicherbarkeit.....          | 16 |
| Tabelle 2: Zusammensetzung einer Prämie.....            | 34 |
| Tabelle 3: Planungsraster Unterrichtskonzept 1.....     | 65 |
| Tabelle 4: Lösung Unterrichtskonzept 2 Aufgabe 1 .....  | 68 |
| Tabelle 5: Lösung Unterrichtskonzept 2 Aufgabe 2 .....  | 71 |
| Tabelle 6: Lösung Unterrichtskonzept 2 Aufgabe 3 .....  | 74 |
| Tabelle 7: Planungsraster Unterrichtskonzept 2.....     | 76 |
| Tabelle 8: Poisson-Verteilung Unterrichtskonzept 3..... | 79 |
| Tabelle 9: Lösung Unterrichtskonzept 3 Aufgabe 1 .....  | 80 |
| Tabelle 10: Planungsraster Unterrichtskonzept 3.....    | 84 |



## Literaturverzeichnis

ABLEITINGER C. (2016): Abwechslungsreiche Unterrichtseinstiege. – In: Didaktik-Reihe der ÖMG 48 (1). – o.O., 1–13.

ALBRECHER, H. (2006): Finanz- und Versicherungsmathematik, Skriptum; online unter: <https://www.math.tugraz.at/~thonhau/FinVersSkriptum.pdf> (Zugriff am 04.04.2019).

ALBRECHT, P. und SCHWAKE, E. (1988): Das versicherungstechnische Risiko. – In: Farny, D., Helten, E., Koch, P. und Schmidt, R. (Hrsg.): Handwörterbuch der Versicherung. – Karlsruhe, 650–657.

BERLINER, B. (1982): Die Grenzen der Versicherbarkeit von Risiken. – Zürich.

EDELBACHER, M. (1995): Versicherungsbetrug kennt keine Grenzen. Neue Trends des Versicherungsbetruges und des Kraftfahrzeugdiebstahles. – Aspang.

ELDER, W. J. und BRACKENRIDGE, R. D. C. (2000): Medical Selection of Life Risks. – London.

ELLERMANN, B. und ELLERMANN, U. (1995): "... und wie läßt du hageln?". Versicherungsbetrug als Volkssport. – Karlsruhe.

FARNY, D. (1989): Versicherungsbetriebslehre. – Karlsruhe.

FEINDERT, M. (2010): Behandlung von Schadensfällen – Die mathematischen Prinzipien der Schadenversicherung. – Diplomarbeit, Universität Wien, Wien.

Hauptverband der österreichischen Sozialversicherungsträger (Hrsg.) (2019): Die österreichische Sozialversicherung in Zahlen. – 42. Ausgabe: März 2019. – o.O.

HEUGL, H. und HAINSCO, G. (2008): Bildungsstandards Mathematik für die Sekundarstufe II der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS), online unter: [http://www.brgkepler.at/~rath/pl\\_an/standards/standards\\_m\\_12.pdf](http://www.brgkepler.at/~rath/pl_an/standards/standards_m_12.pdf) (Zugriff am 04.04.2019).

HICKMAN, J. C. (2004): History of Actuarial Profession; online unter: <https://web.archive.org/web/20060724173339/http://www.wiley.co.uk/eoas/pdfs/TAH012-.pdf> (Zugriff am 04.04.2019).

- HÖLLER, C. (2018): 91 Prozent der Österreicher wissen nicht, was Anleihen sind. In: Die Presse, 17.10.2018, online unter:  
<https://diepresse.com/home/wirtschaft/boerse/5514739/91-Prozent-der-Oesterreicher-wissen-nicht-was-Anleihen-sind> (Zugriff am 04.04.2019).
- IRLE, A. (2001): Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Grundlagen – Resultate – Anwendungen. – Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden.
- KOHLI, K. (1975): Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli. In: Die Werke von Jakob Bernoulli. Bd. 3. – Basel, 509–513.
- KRENGEL, U. (2005): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. – Wiesbaden.
- KRONFELLNER M. (1997): Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtspraktischen Beispielen. – Wien. (= Didaktik der Mathematik 24).
- LOEWY, A. (1924): Versicherungs-Mathematik. – Berlin.
- MACK, T. (1997): Schadenversicherungsmathematik. – Karlsruhe.
- MAY, A. und OYMANNS, M. (2012): Stochastik. Simulation von Schäden. – Köln.
- Münchner Rückversicherungs-Gesellschaft Aktiengesellschaft in München (2019): NatCatSERVICE, online unter:  
<https://natcatservice.munichre.com/topten/1?filter=eyJ5ZWZyRnJvbSI6MjAwMSwieWVhclRvIjoyMDE4fQ%3D%3D&type=1>.
- NELL, M. (1993): Versicherungsinduzierte Verhaltensänderungen von Versicherungsnehmern. Eine Analyse der Substitutions-, Moral-, Hazard- und Markteffekte unter der Krankenversicherung. – In: Karten, W. (Hrsg.): Veröffentlichungen des Seminars für Versicherungswissenschaft der Universität Hamburg und des Vereins zur Förderung der Versicherungswissenschaft in Hamburg e.V. – Karlsruhe (= Hamburger Reihe, 6), 1–263.
- NGUYEN, T. und ROMEIKE, F. (2013): Versicherungswirtschaftslehre. Grundlagen für Studium und Praxis. – Wiesbaden.

- RAITH, P. (o.J.): Summe von unabhängigen Normalverteilungen; online unter:  
<https://www.mat.univie.ac.at/~peter/lehre/lm/sumuhnv.pdf> (Zugriff am 27.03.2019).
- ROHRBACH, W. (1988): Versicherungsgeschichte Österreichs von den Anfängen bis zum Börsenkrach 1873. – Wien. (Versicherungsgeschichte Österreichs 1).
- SCHRÖTER, K. J. (1995): Verfahren zur Approximation der Gesamtschadenverteilung: Systematisierung, Techniken und Vergleiche. – Karlsruhe.
- SCHULENBERG, Johann-Matthias von der (2005): Versicherungsökonomik. Ein Leitfaden für Studium und Praxis. – Karlsruhe.
- VVÖ (Versicherungsverband Österreich) (Hrsg.) (2018): Jahresbericht 2018. – o.O.
- VVÖ (Versicherungsverband Österreich) (Hrsg.) (2019): Die österreichische Versicherungswirtschaft: Die vorläufigen Zahlen 2018 und eine erste Prognose 2019, online unter:  
<https://www.vvo.at/vvo/vvo.nsf/sysPages/0BA0CF8B9E008C73C12583AF003F4DB9>  
 (Zugriff am 08.06.2019).
- WALLRABENSTEIN, A. (2009): Versicherung im Sozialstaat. – Tübingen.
- WALZ, G. (Hrsg.) et al. (2017): Lexikon der Mathematik, Band 4. – Heidelberg.
- WITTMANN E. C. (1974): Grundfragen des Mathematikunterrichts. – Braunschweig.

## Anhang

### Kurzfassung

Versicherungen begegnen den Menschen beabsichtigt, aber auch unbewusst, in jedem Abschnitt ihres Lebens. Jedoch scheint das Verständnis um die Funktionsweise von Versicherungen im Allgemeinen und somit auch ihrem mathematischen Element im Speziellen keine Selbstverständlichkeit. Ein bereits in der Schule verankerter Fokus auf das breite Gebiet der Versicherungsmathematik könnte eine Möglichkeit darstellen, die Barriere für den Wissenserwerb herabzusenken, das Interesse daran zu verbreitern und auch den Lehrenden die Distanz zum Thema zu nehmen. Ziel dieser Arbeit ist es, das Konzept und die Funktionsweise von Versicherungen für Schülerinnen und Schüler zu durchleuchten und mit altersgerechten Erklärungen und Berechnungen für sie greifbarer zu machen, um sie dazu zu befähigen, im späteren Verlauf des Lebens einen informierten und mündigen Umgang mit Versicherungen zu pflegen.

## Abstract

Insurances accompany people at every stage of their lives, although it is often without them realising it. Nevertheless, the understanding of the functionality of insurances in general and their mathematical component in particular are rather poor. Implementing a focus on the broad field of actuary already in school could lower the barrier for students to engage with the topic, increase the interest in actuary in general and even help teachers to reduce their reserve towards actuary. The aim of this thesis is to adapt the topic of actuary for math lessons and thus make the concept and functionality of insurances more accessible to the students. In order to do so, age appropriate explanations and calculations need to be elaborated. Only then can we enable students to handle insurance matters in an informed and responsible way.