



DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Bereichen
Modellieren und Problemlösen, theoretische Aspekte und
fachdidaktische Analyse ausgewählter Beispiele“

verfasst von / submitted by

Brigitta Szöke

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik

Betreut von / Supervisor:

Univ. Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Abstract

Modellieren und Problemlösen sind zwei natürliche Wege beruflich Mathematik zu betreiben; hingegen galten diese speziellen Arbeitsweisen als nicht geeignet für den schulischen Bereich, und wurden lange von Fachleuten als unnötig für die Schule, in manchen Fällen sogar als schädlich für den Lernprozess betrachtet. Dennoch schloss sich, nach längeren Überlegungen, Diskussionen und Nebengleisen im 20. Jahrhundert, die fachdidaktische Forschung aus dem deutschsprachigen Raum der des englischsprachigen Raumes an; mittlerweile schreiben praktisch alle aktuellen Lehrpläne die Förderung von Problemlöse- bzw. Modellierungskompetenzen vor. In dieser Arbeit wird beschrieben, warum angehende Lehrkräfte diese Werkzeuge der Mathematik kennen und in den Unterricht einbauen sollen, und wie sie diese in die Praxis mit einem bewältigbaren Aufwand einsetzen können. In den beiden Kapiteln über die Theorie der zwei Bereiche werden Ergebnisse der fachdidaktischen Forschung präsentiert, die einzelne Aspekte der theoretisch aufgestellten Modelle des Problemlösens bzw. Modellierens bestätigen, ergänzen oder widerlegen. Obwohl Mathematik als die abstrakteste Wissenschaft angesehen wird, haben zweifelsohne die Konstrukte der Mathematik eine Beziehung zur Realität. Erste Versuche im Altertum, bestimmte Vorgänge des menschlichen Lebens systematisch, allgemeingültig und widerspruchsfrei zu beschreiben, wurzeln in den sozio-administrativen Bedürfnissen des damaligen Alltags. Deswegen kommen philosophische und kognitionspsychologische Annäherungen an die beiden mathematischen Bereiche auch nicht zu kurz.

Wie im Klassenzimmer verfahren werden kann, wird im Kapitel 3 mit konkreten, detailliert beschriebenen Beispielen gezeigt. In diesem Kapitel werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den konkreten Situationen gesucht. Allgemein gültige Gemeinsamkeiten und Unterschiede werden im darauf folgenden Kapitel 4 noch ein Mal hervorgehoben.

Dass Modellieren und Problemlösen etwas Spezielles sind, wurde erwähnt, deswegen konnten Inhalte über ihre schönste gemeinsame Seite, die Kreativität, nicht ausgelassen werden. Ein Einblick in die Kognitionspsychologie und aktuelle neurophysiologische

Forschung gibt im Kapitel 5 Auskunft darüber, inwiefern frühere Vorstellungen über die Entstehung von kreativen Momenten bzw. über kreatives Arbeiten als Prozess heute noch gültig sind.

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie des Problemlösens

1.1 Problemlösen in der Schule	1
1.2 Kognitionstheoretische Ansätze	3
1.3 Das Modell von George Pólya.	7
1.4 Das Modell von Mason, Burton und Stacey.	12
1.5 Problemlösen unterrichten	18

2 Theorie des Modellierens

2.1 Einführung	26
2.2 Empirische Forschung und einige ihrer Ergebnisse	27
2.3 Mathematikunterricht für Modellierung öffnen	32
2.4 Modellierung und Realitätsbezug	
2.4.1 Modell und Realität aus philosophischer Sicht	34
2.4.2 Realitätsbezug in der Fachdidaktik	36
2.4.3 Sachkontext in den Mathematikaufgaben.	37
2.4.4 Authentizität der realitätsbezogenen Aufgaben	40
2.5 Selbständiges Lernen durch Modellierung	42
2.6 Der theoretische Modellierungskreislauf	46

3 Analyse einiger praxisorientierter Beispiele

3.1 Der Kontext ‚Stau‘	53
3.2 Umgang mit Brüchen in der Sekundarstufe I.	58
3.3 Funktionen.	72

4 Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Bereiche	
Modellieren und Problemlösen	83
5 Kreativität und mathematische Probleme	101
Literatur	114

1 Theorie des Problemlösens

1.1 Problemlösen in der Schule

In den heutigen Schulbüchern befinden sich nach jeder thematischen Lerneinheit eine Fülle von Aufgaben, deren Ziel ist es, die aktuell kennengelernten Inhalte einzuüben um ein primäres Verständnis für das Thema zu entwickeln. Hier und da werden auch sogenannte Knobelaufgaben formuliert, die zusätzlich deswegen gekennzeichnet werden, um auf eine vermutliche Schwierigkeit hinzuweisen. Oft wird der Unterricht aber auf die standardisierten Übungen eingeschränkt, deren Lösungsweg von vorne herein fest steht und nur vom (Un-)Kenntnis des Themas abhängt. Warum Knobelaufgaben im Mathematikunterricht nicht öfters vorkommen, wird mit Zeitmangel erklärt. Der Lehrplan taktet den Unterricht in einer Weise, dass pro Themenbereich nicht mehr als zwei bis drei Unterrichtsstunden zur Verfügung stehen, so die Lehrkräfte.

Andererseits wirkt die Kennzeichnung der besonderen Aufgaben als Warnhinweis, der nicht selten eine abschreckende Reaktion in den Lernenden hervorruft. Nicht ideal ist auch das vermischte Auftreten der zwei Aufgabentypen auf der gleichen Seite des Schulbuches, da es suggeriert, beide sollen in der gleichen Art und Weise gelöst werden, das erfolgreiche Lösen hängt nur von den Begabungen der Lernenden ab. Es wird oft gar nicht erwähnt, dass die Lösung solcher Aufgaben ganz anderer Denkweisen und Strategien bedarf. Somit ist eine frühzeitige verminderte Einschätzung der eigenen mathematischen Fähigkeiten vorprogrammiert und viele Lernende werden wahrscheinlich nie mathematische Fähigkeiten entwickeln, da sie nie intrinsische Motivation durch erfolgreiches Lösen interessanter Aufgaben aufbauen können.

Dazu kommen noch andere Faktoren und alltägliche Schulerfahrungen, die diesen Zustand weiter beeinflussen. Soziale Aspekte, wie familiale Lernkultur, Abstand des

Wohnortes zu Bildungseinrichtungen, Herkunftsland der Eltern und die daraus resultierenden Sprachkenntnisse, die laut Studien sogar in der zweiten Einwanderergeneration die schulischen Erfolge massiv beeinflussen, spielen eine große Rolle (vgl. Haider, Schreiner 2006, ab S. 179).

Spitzenbegabungen werden in der Schule zu wenig gefördert, aber auch SchülerInnen mit sehr guten Leistungen wird in einer eher leistungsschwächeren Klasse zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Eine Studie über Testleistungen und Schulnoten deckt außerdem erhebliche Ungerechtigkeiten bei der Notengebung auf (vgl. Haider, Schreiner 2006, ab S. 229).

Problemlösen trat in den 80-er Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts in den Fokus des Mathematikunterrichts, als Antwort auf den Misserfolg der neuen Mathematik (Mengenlehre) der 70-er Jahre (vgl. Heinze 2007). Nach einer kurzen Aufstiegsphase gab es zwei Jahrzehnte lang eine „Depression“, was Problemlösen und das damit eng gebundenen entdeckendes Lernen betrifft. Heute wird Problemlösen wieder als wichtig angesehen und ihre Förderung wird in den verschiedenen Lehrplänen vorgesehen.

Der aktuelle Lehrplan für die Sekundarstufe I sieht vor, SchülerInnen sollen:

- hingeführt werden, Lernprozesse selbstständig zu gestalten; durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben
- Problemlösefähigkeiten erwerben, die über die Mathematik hinausgehen

Im Unterpunkt **Aufgabenstellungen** wird speziell auf Problemlösen eingegangen:

„Sowohl der Prozess des Problemlösens als auch das Produkt haben eigenständige Bedeutung. Aufgaben sollen nach Möglichkeit so gestellt sein, dass ein Scheitern an einer Teilaufgabe die weitere Bearbeitung nicht völlig unmöglich macht. Aufgaben, die sich auf elementare Tätigkeiten beziehen, und solche mit aufeinander aufbauenden Lösungsschritten sind möglich und wünschenswert. Aufgabenstellungen sind so zu wählen, dass sie in verständlicher Sprache und übersichtlicher Form abgefasst

sind, die thematische Verankerung altersadäquat ist und dass ohne Zeitdruck gearbeitet werden kann. Unterschiedliche korrekte Interpretationen sind zu akzeptieren.“

Im Lehrplan für die Sekundarstufe II wird Problemlösen als zentrales Anliegen des Mathematikunterrichts angesehen.

1.2 Kognitionstheoretische Ansätze

Mathematik und Problemlösen sind zwei Begriffe, die eng miteinander verbunden sind. Grund dafür ist die Tatsache, dass Mathematik anscheinend besonders gut geeignet für die Entwicklung und Förderung der Fähigkeit zum Problemlösen ist. Außerdem umfasst das mathematische Arbeiten das Lösen von Aufgaben. Man kann allerdings einen Großteil dieser Aufgaben nicht als Problem aus der Sicht der Psychologie und Erziehungswissenschaften auffassen. Damit Aufgaben als Problem betrachtet werden können, muss die Person einen unbekannten Lösungsweg beschreiten, darüber sind sich sowohl Mathematikdidaktik als auch Pädagogik und Kognitionspsychologie einig. Heinz Franke unterscheidet zwischen einem ‚unechten‘ Problem, das sich durch Gedächtnisleistung lösen lässt, und einem ‚echten‘ Problem, das Denkleistung erfordert (vgl. Franke 2016, S. 6). Dies impliziert, dass sich ein Problem nicht nur durch seine spezielle Formulierung charakterisieren lässt, sondern stark vom Wissensstand der lösenden Person abhängt. In der Schulpraxis wird deswegen ein gegebener Wissensstand für eine bestimmte Altersgruppe angenommen, und es werden so bestimmte Aufgabentypen als Problem angesehen.

Dieser Charakter wird in der Mathematikdidaktik durch eine zusätzliche Forderung ergänzt, nämlich, der unbekannte Lösungsweg soll auch nicht allzu einfach sein, für die Lösung eines Problems muss eine Barriere überwunden werden. Um zu entscheiden, ob eine Aufgabe als Problem angesehen werden kann, ist eine Analyse des Lösungsweges notwendig. Eine Analyse der kognitiven Tätigkeiten während des Problemlösens leitete

Dörner (1976, S. 14) auf eine Klassifizierung von Barrieren. Er unterscheidet zwischen drei Typen von Barrieren:

- 1. Interpolationsbarriere: hier sind die einzelnen Lösungsschritte bekannt, ihre Kombination, die letztendlich zur korrekten Lösung führen, muss noch gefunden werden
- 2. Synthesebarriere: in diesem Fall sind die einzelnen Lösungsschritte unbekannt, diese müssen generiert werden
- 3. Dialektische Barriere: es existieren nur vage Vorstellungen vom Zielzustand und von den notwendigen Lösungsschritten

Es seien hier einige Definitionen der Begriffe Problemlösen und Problem aus der Sicht der Kognitionspsychologie erwähnt:

- 1. Dörner (1976, ab S. 56) behauptet, Denken ist Problemlösen. Es besteht aus der Umwandlung von Sachverhalten mit Hilfe von bestimmten Operatoren.

- 2. Bourne, Dominowski und Loftus (1979) sehen den Menschen als ein informationsverarbeitendes System mit drei Quellen der Information an:

- Umstände und aktuelle Gegebenheiten
- Gedächtnis mit gespeicherten Kenntnissen und vorangegangenen Ereignissen
- Rückmeldung der Umwelt als Handlungskonsequenz

- 3. Klix (1971, S. 640) zählt folgende drei Definitionsmerkmale für ein Problem auf:

- gegebener Anfangszustand
- gegebener/gewünschter Zielzustand
- nicht unmittelbares Gelingen der Überführung von Anfangszustand in Zielzustand

- 4. Funke (2003, S.25)

- Problemlösendes Denken erfolgt, um Lücken in einem Handlungsplan zu füllen, der nicht routinemäßig eingesetzt werden kann. Dazu wird eine gedankliche Repräsentation erstellt, die den Weg vom Ausgangs- zum Zielzustand überbrückt.

Anhand dieser Begriffe des Problems sind verschiedene Modelle des Problemlösens in der Mathematikdidaktik entstanden. Es ist generell akzeptiert, dass Problemlösen ein Mittel zur Förderung von Denkfähigkeiten ist. Das Modell von George Pólya (2010, ab S. 18) unterscheidet vier Teilschritte: 1. Das Verstehen des Problems, 2. Ausdenken eines Plans, 3. Durchführung des Plans und 4. Rückschau. Das Problem dieses Modells ist, dass es den Eindruck eines Rezeptes weckt. Die Schritte, die ein Lernender während des Lösens eines Problems laut diesem Modell durchlaufen muss, sind viel zu vereinfacht dargestellt. Reales Problemlösen ist nur durch das Folgen dieses Schemas nicht möglich; der Problemlöser muss seine eigene Kreativität einsetzen. Das Modell wurde von anderen Autoren modifiziert, sodass manche Schritte verfeinert wurden. Schoenfeld spricht von den folgenden fünf Etappen, die während des Problemlösens durchlaufen werden: 1. Lesen, 2. Analysieren, 3. Untersuchen, 4. Planen, 5. Implementieren und 6. Kontrollieren (vgl. Schoenfeld 1992, ab S. 334).

Ein weiterer Kritikpunkt an diesen Modellen ist ihre Linearität. In der Realität ist die Entdeckung neuer Mathematik und somit echtes Problemlösen nie so systematisch und linear. Es werden Irrwege betreten und wieder verlassen, eine immer wieder kehrende Kontrolle der Teilergebnisse, sowie die Umschaltung zwischen Mathematik und Realität finden immer wieder statt. Schoenfeld beschreibt wie ein abstraktes Modell des zu lösenden Problems in der Phase des Analysierens vom Problemlöser erstellt wird. Dieses Modell kann sich aber während des Lösens als unvollständig oder gar zu umfangreich erweisen, weswegen ein Rückkehr zur Phase des Analysierens fallweise aus der Phase des Implementierens notwendig sein kann.

1985 entwickelten Mason et al. ein Modell des Problemlösens, das näher an der realen mathematischen Arbeitsweise liegt. Dieses Modell verfügt über nur drei Arbeitsphasen: 1. Planung, 2. Durchführung und 3. Rückblick. Die Autoren vereinten hier die zwei mittleren Phasen aus dem Pólya'schen Modell zu einer Phase. Wichtiger als das ist, dass sich in diesem Modell ein Kreislauf zwischen der Planungsphase und Durchführungsphase bildet.

In der Planungsphase entwickelt sich eine Idee (AHA-Erlebnis), das zu einer möglichen Lösung des Problems führt. Der Problemlöser verfolgt diese Idee so lange, bis er zu einem Ergebnis kommt oder in eine Sackgasse anlangt. Aus der eventuellen Sackgasse muss er wieder in eine neue Planungsphase zurückkehren, eine neue Idee muss aufgegriffen werden, die wieder bis zum Scheitern oder Erfolg verfolgt wird (vgl. Mason 2012, ab S. 28).

Das Modell von Mason et al. fügt sich sehr gut in die konstruktivistische Vorstellung vom Lernen ein. Diese Theorie des Lernens besagt: Lernen ist ein konstruktiver Prozess, wobei jeder Lernende auf der Grundlage seiner Erfahrungen lernt und seine eigenen Werte, Überzeugungen, Vorerfahrungen und Muster während des Lernprozesses einsetzt.

Der Konstruktivismus geht davon aus, dass das Wissen nicht in der Außenwelt fertiggestellt existiert und von außen in den Lernenden hinein transportiert wird, sondern im Lernenden selbst Gestalt nimmt. Dies deckt sich gut mit den Ergebnissen der Kognitionsforschung, Gehirnforschung und Biologie der Kognition aus den 80-er Jahren des letzten Jahrhunderts.

Jean Piaget: erkannte, dass ein erfolgreicher Lernende immer aus eigener Aktion heraus lernt. Er konstruiert seine eigene Wirklichkeit, die er dann mit der Umwelt abgleicht. Ein ständiges Wechselspiel zwischen der inneren Schematisierung (Assimilation) und der Abgleich mit der Umwelt (Akkommodation) findet statt, dies stellt die Grundlage für die menschliche Wirklichkeitsbildung dar. Seine Theorie bildete die Grundlage für weitere konstruktivistische Ansichtsweisen. Ein Manko dieser Theorie ist allerdings die behauptete Universalität dieser Entwicklungslogik. Interaktive Vorgänge werden systematisch vernachlässigt, Lernen ist von Kultur abgekoppelt. Ebenso wird der emotionale Aspekt des Lernens außer Acht gelassen.

Lew S. Wygotzky: kam zu ähnlichen Ansichten wie Piaget, betonte aber stärker die Rolle der kulturellen Lernumgebung. Der Unterricht soll demnach konstruktiv wirksam sein und Raum für Weiterentwicklung bieten. Aus der Lernumwelt der SchülerInnen sollen Angebote kommen, die sie konstruktiv vorantreiben, und nicht solche, die nur einen bestehenden und zu reproduzierenden Wissensstand sichern. Ein Lernprozess, der auf Nachahmung basiert ist der Tod des konstruktivistischen und kreativen Lernens.

John Dewey: entwickelte eine pragmatische konstruktivistische Lerntheorie, die die Wichtigkeit der Selbsttätigkeit und Selbstbestimmung im Lernprozess anhand von umfassenden Erfahrungen aus der Reformpädagogik hervorhob. Er wusste, eine Pädagogik, die auf (Selbst-)Erfahrung und Selbstwirksamkeit baut, kann nicht abstrakt, auf theoretische Weise ermittelt werden. Lernen durch Tun soll nicht auf einer abstrakten Ebene stattfinden, es ist viel besser und effizienter, wenn Lernen auf Interessen und Motivationen basiert. Insbesondere erkannte Dewey, dass Lernen immer in eine Kultur eingebettet ist und sich mit der Kultur verändert. Seine Ansichten mündeten in der Forderung nach einer Schulreform, die im deutschsprachigen Raum bis heute nicht wirklich ernst genommen wurde.

Basierend auf die erwähnten Erkenntnisse der Kognitionsforscher scheint die Methode der offenen Annäherung eine vielversprechende Methode des Mathematikunterrichts zu sein. In diesem Unterrichtskonzept bietet die Lehrkraft ihrer Klasse eine offene Lernumgebung in Form von Problemen mit offenen Lösungswegen (Problemlösen) oder offenen Endergebnissen (Modellieren) an. Ziel ist die Unterstützung der Lernenden darin, ihre Problemlösefähigkeiten selbst zu entdecken und weiter zu entwickeln, bzw. das Individualisieren der Bedingungen des Lernens, sowie des Lernumfeldes, sodass die Lernenden in ihrem eigenen Tempo und in ihrer selbständig gefundenen Art ihr Wissen aufbauen können (vgl. Pehkonen 2017, S. 16).

1.3 Das Modell von George Pólya

George Pólya schrieb Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts ein Buch mit dem Titel *How to solve it*. Trotz des Titels, geht es in seinem Buch nicht um Rezepte, wie man bestimmte Aufgaben zu lösen hat, sondern viel mehr um das Erlernen des Lösens spezieller Aufgaben, die nicht mit Hilfe festgefahrener Routinen lösbar sind. Es ist vielmehr ein Wegweiser für diejenigen, die Problemlösefähigkeiten erlernen und weiter entwickeln möchten. Das Buch wurde auf einem elementaren Niveau in einer einfachen Sprache geschrieben, sodass es tatsächlich Standardwerk auch für SchülerInnen, Studierende und

Personen ohne mathematische Vorkenntnisse wurde, und bis in das 21. Jahrhundert erneut aufgelegt wurde.

Das Modell des Problemlösens, das Pólya erarbeitete, beinhaltet vier Arbeitsphasen, basierend auf der Erkenntnis, dass während der Lösungsfindung die Sicht auf die Problemlöseaufgabe sich wiederholt ändern kann. Diese vier Phasen sind: 1. Das Verstehen der Aufgabe, 2. Erstellung eines Plans, 3. Durchführung des Plans und 4. Rückschau. Als Hilfestellung erstellte Pólya eine Tabelle, die auf der ersten und letzten Seite seines Buches angeführt wird, in der er für jede Arbeitsphase eine Reihe von Fragen auflistete, mit dem Zweck einerseits den autodidaktisch lernenden Personen Hilfe in Situationen zu leisten, in denen sie in ihren Lösungsvorhaben nicht weiterkommen; zweitens um den Lehrkräften zu helfen, ihre SchülerInnen während des Problemlösens so zu unterstützen, dass nicht zu viel oder nicht zu wenig selbständige Arbeit von den Lernenden abgenommen wird. Er empfiehlt sogar die Reihenfolge der Fragen einzuhalten, da sie entsprechend der Reihenfolge der kognitiven Denkprozesse während des Problemlösens zusammengestellt sind. Wie schon (Abschnitt 1.2, S. 5) erwähnt, wurde die Linearität dieses Modells später kritisiert, da es die Rückkopplungen der späteren Arbeitsphasen zu den früheren Arbeitsphasen nicht flexibel genug behandelt. Es sieht erst in der vierten Arbeitsphase, in der Rückschau eine Reflexion über die gesamte vorher geleistete Denkarbeit vor.

1. Verstehen der Aufgabe

Die Aufgabe muss zuerst verstanden werden, noch wichtiger, sie soll motivierend auf die Lernenden wirken. Pólya gibt nicht immer SchülerInnen die Schuld, wenn sie in Problemlösen nicht erfolgreich werden. Er sieht eine große Verantwortung der Lehrkraft darin, Probleme so zu wählen, dass sie das Interesse der SchülerInnen anregen. „Es ist kläglich, für ein Ziel zu arbeiten, das man nicht ersehnt.“ behauptet Pólya.

Dementsprechend sollen Aufgaben nicht zu leicht, und auch nicht zu schwierig, natürlich (nah an der Lebenswelt der SchülerInnen) und fesselnd sein.

Der Wortlaut des Problems muss verstanden werden. SchülerInnen sollen die Hauptteile der Aufgabe wiederholt und von verschiedenen Perspektiven betrachten. Diese bestehen aus den gegebenen Daten, den Bedingungen und den Unbekannte/n. Die genannten Hauptteile sollen von SchülerInnen auch verbal fließend wiedergegeben, betont und differenziert werden können. Im Fall eines Problems, die mit einer Figur verbunden ist,

sollen sie eine Abbildung anfertigen. Gelegentlich wird es notwendig sein eine passende Bezeichnung für eine Größe einzuführen. Diese selbstgewählte Bezeichnung fokussiert noch einmal die Aufmerksamkeit auf das mathematische Objekt, mit dem sie arbeiten. Die Phase des Verstehens der Aufgabe wird von Pólya in zwei Teile unterteilt. Zuerst sollte man sich mit dem Problem vertraut machen. Die Einzelheiten sind noch nicht so wichtig, eine ganzheitliche, lebendige Visualisierung des Problems wird empfohlen. Dies kann auch das Gedächtnis aktivieren, sodass Erinnerungen und frühere Erfahrungen, die mit dem Problem in Verbindung gebracht werden können, geweckt werden. Danach folgt das Erarbeiten eines besseren Verständnisses. In dieser Phase soll der Text so oft wiedergelesen werden, bis eine so tiefe Einprägung des Problems resultiert, dass man den Text aus den Augen verlieren kann, ohne die Angst die Aufgabe ganz zu vergessen. Die Hauptteile des Problems sollen jetzt klar konturiert werden. Im Fall einer Beweisaufgabe sollen Annahmen und Hypothesen von Folgerungen getrennt werden. Bei Bestimmungsaufgaben sollen Daten, Bedingungen und Unbekannte unterschieden werden. Die Hauptteile des Problems sollen dann nacheinander, aber auch in verschiedenen Kombinationen betrachtet werden. So können möglicherweise Einzelheiten vorbereitet werden, die später einer Analyse in der Hinsicht unterzogen werden, ob sie für die Lösung eine Rolle spielen.

2. Ausdenken eines Plans

Das Aufstellen eines Plans kann lange dauern und erst über viele Windungen ausreifen. Das eigentlich Ausschlaggebende dabei ist eine gute Idee zu haben. Diese Idee entsteht meistens nach mühseliger Arbeit, kann aber auch in Form eines Geistesblitzes auftauchen. Je mehr Wissen über Mathematik vorhanden ist, beziehungsweise je mehr frühere, auch außermathematische Erfahrungen gemacht wurden, desto leichter taucht eine gute Idee auf. Die Lehrkraft soll in dieser Phase ihr Bestes tun, ihren SchülerInnen zu einer guten Idee, sogar zu einem Geistesblitz unaufdringlich zu verhelfen. Dies sollte in Form von gestellten Fragen erfolgen, Fragen die auf verwandte, schon erfolgreich gelöste Aufgaben, oder Abwandlung des Problems (im Sinne von Spezialisierung, Verallgemeinerung, Anwendung von Analogien, Auslassen eines Teils der Bedingung) hinweisen. Während dieser Operationen kann es und wird es wahrscheinlich vorkommen, dass man sich so weit von dem ursprünglichen Problem entfernt, dass man es aus dem Blick verliert. Hier rät Pólya sich die Frage zu stellen, ob alle Daten und die vollständige Bedingung benutzt wurden.

Die notwendigen Zutaten zum Ausdenken eines Plans sind unter anderem früher erworbene Kenntnisse, geistige Disziplin, Konzentration auf den Zweck und auch Glück(!).

3. Ausführen des Planes

Was für die Durchführung des Plans unbedingt notwendig ist, ist Geduld. Es beginnt hier eine ins Detail gehende Überprüfung von vielen Einzelheiten. Auch ihr Platz im Gesamtumriss ist zu prüfen, solange bis alles klar wird und keine Stellen mehr bleiben, an denen ein Irrtum verborgen sein könnte. Die Lehrkraft hat in dieser Phase verhältnismäßig wenig zu tun.

Für den Lernenden besteht an dieser Stelle die Gefahr darin, dass er seinen Plan vergisst. Hat die Lehrkraft in der Erstellungsphase des Plans zu viel mitgewirkt, passiert dies viel leichter. Hat der Lernende den Plan selbst erarbeitet, festigen die Gefühlszustände der Befriedigung, die seine Arbeit begleitet hatten, seine Gedanken.

Die Lehrkraft muss wiederholt darauf hinweisen, dass der Lernende wirklich jeden Schritt auf seine Richtigkeit überprüft. Eine Überprüfung kann auf intuitiver oder formaler Ebene stattfinden. Es ist hier ratsam den Unterschied zwischen ‚sehen‘ und ‚beweisen‘ der Richtigkeit zu verbalisieren. Ob sie dann formal oder intuitiv ‚bewiesen‘ wird, ist weniger wichtig.

4. Rückschau

Anders als beim Ausführen des Plans, gilt es hier die Beweise der Teilschritte auf ihre Art und Richtigkeit zu überprüfen. Es ist nie ausgeschlossen, dass sich in den einzelnen Beweisen ein Irrtum eingeschlichen hat, oder ein nachfolgender Beweis auf einer noch nicht betrachteten oder bewiesenen Annahme beruht. Im Fall intuitiver Erklärungen ist die Gefahr einer unvollständigen oder falschen Folgerung sogar größer.

Die große und unentbehrliche Rolle der Lehrkraft besteht hier darin, ihre SchülerInnen auf eine erneute Überprüfung ihrer Arbeit hinzuweisen. Zusätzliche Argumente dafür sind die Festigung im Gedächtnis der selbst gefundenen Verfahren, wobei die erneut erlebten Gefühlszustände des Gelingens dies stark begünstigen, und die Festigung der Inhalte aus dem vorgegebenen Themenbereich. Die Rückschau bietet außerdem die Möglichkeit zu erkennen, dass eine Aufgabe nie komplett abgeschlossen ist, es ist immer möglich einen alternativen Beweis, eine Erklärung oder Methode zu finden, die die Endergebnisse idealerweise validieren oder das Verständnis für das Problem vertiefen. Auch können anhand des Problems weiterführende Fragen auftauchen, die womöglich zur Formulierung

neuer Probleme führen, dadurch bekommt das ursprüngliche Thema Randgebiete angeschlossen und wird umfangreicher.

Dass Lernende nach der Lösung eines Problems doch sehr gerne ihre Hefte schließen ohne ihre Arbeit noch einmal zu kontrollieren, liegt sehr wahrscheinlich nicht nur daran, dass die Überwindung von Barrieren am Lösungsweg als anstrengend empfunden wurde, sondern auch an der Angst, dass die Lösung eventuell doch nicht korrekt ist. Einen weiteren Lösungsweg zu finden scheint den meisten SchülerInnen unmöglich zu sein. Dies ist nicht ganz unbegründet, denn je weniger Erfahrungen und Fachwissen vorhanden sind, desto schwieriger wird die Lösung einer Problemaufgabe tatsächlich für die Lernenden.

Pólya beschreibt, Lernende, die sich ehrlich bei der Lösungsfindung anstrebten, zu einer richtigen Lösung kamen, fanden es doch interessant bei ihrer Lösungen rückwärts zu schauen, waren voller Eifer zu entdecken, was sie sonst mit dieser Anstrengung erreichen könnten und welche Erkenntnisse und Lehren sie für ein nächstes Mal mitnehmen könnten.

Das Modell behandelt detailliert die gewünschte ideale Haltung der Lehrkraft in ihrer Rolle als Unterstützung bei Entwicklung von Problemlösefähigkeiten. Eine richtige Art des Fragens wird beschrieben: die Fragen sollten einen Gleichgewicht zwischen ‚nicht aufdringlich sein‘ und ‚Hilfe leisten‘ aufweisen. Sie sollen nicht spezifisch zum aktuellen Problem, sondern allgemeiner Natur sein, dies führt idealerweise zu einem beträchtlichen Anteil der Lernenden am Lösen des Problems. Falls dies in einzelnen Fällen nicht möglich ist, rät Pólya dazu, dem Lernenden mindestens das Gefühl zu vermitteln, er hat konstruktiv zur Lösung beigetragen. Einige Beispiele seien hier angeführt.

‚Gute‘ Fragen: „ Kennst du eine verwandte Aufgabe?“ , „Hier ist eine Aufgabe, die der deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst du sie gebrauchen? Kannst du ihr Resultat verwenden? Kannst du ihre Methode verwenden?“ , „Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken?“, „Hast du alle Daten benutzt? Hast du die ganze Bedingung benutzt? Hast du alle wesentlichen Begriffe in Betracht gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?“

Eine ‚unpassende‘ Frage: „Kannst du den Satz von Pythagoras anwenden?“. Diese und ähnlich direkte Fragen, obwohl mit bester Absicht gestellt, sind aus drei Gründen schlecht. Ist der Lernende nah am Resultat, versteht er natürlich den Hinweis aus der Frage, der

Hinweis gibt aber das ganze Geheimnis preis, für den Lernenden bleibt nur noch sehr wenig zu tun übrig. Ist der Lernende im Gegensatz noch nicht weit genug am Lösungsweg vorangekommen, wird er den Hinweis gar nicht verstehen. Es kann auch vorkommen, dass der Lernende den Hinweis verstanden hat, kann aber nicht nachvollziehen, wie die Lehrkraft genau auf diesen Gedanken kam. Der Hinweis scheint ihm eine unnatürliche Überraschung zu sein, wozu er selbst nicht imstande wäre.

Die obige Vorstellung eines geheimnisvollen Talents soll und kann in der Klasse revidiert werden. Problemlösen ist ein praktisches Geschick, das laut Pólya durch Nachahmung und Übung erlernt werden kann. Auch neuere Untersuchungen bestätigen, dass zwar Problemlösefähigkeiten von einigen genetischen Faktoren beeinflusst werden, doch spielt die soziale Umwelt eine ebenso große Rolle. Also Problemlösen ist erlernbar!

Dazu ist es ratsam früh anzufangen. Schon im Elementarbereich können Rätselfragen und Abzähl-Aufgaben immer wieder und ungezwungen in den Unterricht eingebunden werden. Es ist auch wichtig, meint Pólya, dass SchülerInnen ihre LehrerInnen beim Problemlösen erleben. Pólya rät Lehrkräften ihre Ideen ein wenig schauspielerisch-dramatisch vorzubringen, dabei sich die gleichen Fragen während des Lösens zu stellen, die sie bei ihren SchülerInnen als Hilfestellung benutzen würden. Dadurch können SchülerInnen den nützlichen Gebrauch dieser Fragen nachvollziehen und erlernen. Dies wäre eine gute Art Problemlösefähigkeiten (anstatt Problemlösestrategien, vgl. Abschnitt 1.5 Problemlösen unterrichten, S. 24) zu unterrichten.

1.4 Das Modell von John Mason, Leone Burton und Kaye Stacey

Dieses Modell basiert auf dem Modell von Pólya, wobei hier die individuellen Denkprozesse weniger Lenkung erfahren als im Modell von Pólya. Problemlöser durchlaufen grob gesagt drei Arbeitsphasen, deren Bewusstmachung zu einem planvolleren Vorgehen animiert. Der Planungs- und Rückschauphase wird mehr Wichtigkeit als der Durchführungsphase beigemessen; in einer unzureichenden Analyse der Aufgabenstellung und planungsarmen Vorgehensweise sehen die Autoren die Ursache des oftmaligen Scheiterns beim Problemlösen.

1. Die *Planungsphase* beginnt bei der ersten Konfrontation mit der Aufgabe und endet wenn erste Lösungsversuche in Angriff genommen werden. Wenn der Problemlöser sich auf seine erstbeste Idee stürzt, ohne vorher sich gründlich Gedanken über das Problem gemacht zu haben, läuft er Gefahr in eine Sackgasse zu enden und er muss die Arbeit wieder von vorne anpacken. Die in eine Planung investierte Zeit ist also gut angelegt. Als erstes sollte der Lösende die Aufgabe, die meistens schriftlich vorliegt, sorgfältig durchlesen. Es kann vorkommen, dass ein mehrmaliges Durchlesen zur Verinnerlichung der Aufgabe notwendig ist. Dabei geht es primär um zwei Aspekte: der inhaltliche Kern der Aufgabe soll erfasst und die rein technische Vorgehensweise für die Erreichung des Ziels soll ausgedacht werden. Als Hilfe für diese Phase listen die Autoren drei Fragen, die beantwortet werden sollen, auf. Die Reihenfolge muss nicht eingehalten werden.

- Was ist **bekannt**?
- Was ist das **Ziel**?
- Welche **Hilfsmittel** sind heranzuziehen?

Oft wird es hilfreich sein eine Skizze anzufertigen, auch dann, wenn nicht-geometrische Aufgaben gelöst werden. Sie kann einen Überblick aller relevanten Daten gewährleisten. Mit Hilfe von Diagrammen oder Tabellen können in einer Aufgabe eventuell vorhandene, große Informationsmengen geordnet und klassifiziert werden.

Die Autoren raten außerdem zur schriftlichen Festhaltung des eigenen Vorhabens. So kann die Arbeit besser strukturiert werden und der Lösende weiß, welche Teilschritte schon erledigt wurden und welcher Schritt gerade durchgeführt wird. Auch während der Durchführungsphase ist es ratsam Teilergebnisse oder nicht gelungene Arbeitsphasen grob niederzuschreiben, damit nicht zwei Mal der gleiche Irrweg betreten wird.

Diese Phase ist vom Aufbau einer (ersten) inneren Spannung gekennzeichnet. Während des Lösens einer Problemlöseaufgabe lässt sich nicht vermeiden, dass man in Schwierigkeiten gerät. Das kennzeichnet ja ein Problem. Leugnet man diese Tatsache, stürzt man sich in irgendeine Lösungsstrategie, die sehr wahrscheinlich nicht direkt zum Ziel führt. Viele Leute werden dann eine Pause einlegen und später nicht mehr zur Aufgabe zurückkehren. Es ist keineswegs eine gute Idee aufzugeben, weil viele gute Ansätze genau in solchen hoffnungslosen Situationen entstehen. Stellt man sich bewusst

des Problems und überwindet man so Schwierigkeiten, wird die entdeckte Strategie dauerhafter eingeprägt und nach einer gründlichen Rückschauphase Teil des eigenen Repertoires.

Während der Planungsphase empfiehlt es sich einige Hinweise zu beherzigen. Wie schon angedeutet, die Anfertigung von Skizzen, Tabellen oder Diagrammen während des Lesens des Aufgabentextes ist für die Ordnung und Klassifizierung der Daten wichtig, zudem können früher gemachte ähnliche Erfahrungen wieder ins Gedächtnis gerufen werden. Man soll während des Lesens alle relevanten Informationen aus dem Aufgabentext heraus präparieren. Wird das nicht ordentlich gemacht, werden oft irgendwelche Informationen überlesen, oder die eigentliche Frage wird missverstanden. Nützlich kann ebenfalls das ‚Erzählen‘ des Problems mit eigenen Worten sein. Es geht hier nicht darum, den Text auswendig zu lernen und wiederzugeben, sondern um das Erstellen eines eigenen Gesamtbildes über die Aufgabe.

In einigen Fällen besteht eine gute Methode für die Informationsgewinnung darin, geeignete Spezialfälle zu betrachten. Auf jeden Fall ist es notwendig selbst aktiv zu werden, ganz egal mit welcher Methode festgestellt wird, was bekannt ist.

Was die Hilfsmittel betrifft, spielen hier wieder Tabellen oder Karteikarten eine Rolle. Es wird manchmal notwendig sein, geeignete Symbole und/oder Namen für Größen zu finden, die nicht explizit im Aufgabentext vorkommen, die aber für weiterführende mathematische Operationen wichtig sind. Die Einführung solcher Binnengrößen kann die Fragestellung durchsichtiger machen. Das Betrachten der Fragestellung in einem anderen Zusammenhang kann auch eine gute Idee für die Lösung hervorbringen.

Für Fragen, die räumliche Objekte betreffen, wird fast immer empfohlen, Modelle als Hilfsmittel einzusetzen. Die Modelle gewährleisten eine erleichternde Vereinfachung des Zugangs zur Aufgabe. Vor allem Erwachsene finden die Erstellung von Modellen kindisch und unwürdig ihres Selbstbildes als abstrakt denkender Problemlöser. Sie wollen Probleme gleich auf abstrakter Ebene angehen, dabei übersehen sie die gesteigerte Anschaulichkeit und die erweiterten Erkenntnismöglichkeiten, die aus der Benutzung von Modellen hervorgeht.

2. Die *Durchführung* wird in diesem Modell des Problemlösens in drei Phasen unterteilt.

a.) Das *Aufstellen von Vermutungen* ist Rückgrat jeder Lösung. Diese werden am Anfang wahrscheinlich wage sein. Es wird notwendig sein zu prüfen, ob die Vermutung im Einklang mit den bisherigen Ergebnissen ist. Sehr wichtig ist zu versuchen die Vermutung zu widerlegen, ein Gegenbeispiel ist ausreichend. Tritt dieser Fall ein, muss die Vermutung geändert werden.

Die Gedanken müssen in dieser Phase wieder protokolliert werden, vor allem wenn im Denkprozess mehr als eine gute Idee auftaucht. Es genügt dabei Schlüsselwörter zu benutzen.

Vermutungen fußen auf zwei Säulen: Betrachten geeigneter Spezialfälle und Aufspüren von Analogien (was eine Form der Verallgemeinerung darstellt).

Dies stellt die Basis für das Aufdecken von Gesetzmäßigkeiten dar. Das Erkennen von Zusammenhängen ist die kreativste Sequenz des Problemlösens, sie wird von den Autoren AHA-Erlebnis genannt. Um ein AHA-Erlebnis zu provozieren, sollten weitere Spezialfälle untersucht, die bereits gewonnenen Informationen organisiert und ausgewertet werden. Gute Voraussetzungen zum Finden von Gesetzmäßigkeiten sind ein breites mathematisches Wissen und viel Übung(!).

b.) *Erklären und beweisen* der entdeckten Vermutung ist der nächste Schritt. Die Autoren weisen darauf hin, dass viele Vermutungen falsch sind. Daher sollen die Problemlöser ihre Vermutungen beweisen und unbedingt ihre Ergebnisse kontrollieren. Eine von den Autoren beschriebene Vorgehensweise besteht darin, zuerst sich selbst, dann einen Freund und letztendlich einen Feind zu überzeugen. Eine fortgeschrittenere lernpsychologische Variante ist, sich selbst zu einem sogenannten inneren Feind zu ernennen, der diese Gegenkontrolle gewährleistet.

Es ist sicher sehr vorteilhaft viele Beweistechniken zu beherrschen, also ausgereifte Methodenkompetenzen zu besitzen. Diese umfassen sowohl technische Beweismethoden, die auf einer endlichen Kette logisch korrekter Implikationen beruhen (direkter Beweis, Widerspruchsbeweis, vollständige Induktion), als heuristische Methoden, wie die von Mason et al. erwähnten Variation der Darstellung, Variation der Problemstellung, weiters Suche nach Mustern, der unendliche Abstieg, lokale und globale Approximation, Rückwärtsarbeiten.

Dennoch garantiert die Kenntnis von Lösungsstrategien keinen permanenten Erfolg beim Problemlösen. Problemlösen ist viel mehr als die geschickte Kombination mathematischer Strategien. Die Kenntnis von Methoden bewahrt außerdem den Problemlöser leider nicht vor Fehler. Außer schlichte Rechenfehler können Denkfehler in der Argumentationskette auftreten, die leicht übersehen werden, unter anderem aus dem Grund, dass der Lösende stolz auf seinen Einfall ist. Ist der Lösungsweg formal auch schön, kann der Problemlöser sich nicht leicht von seiner Arbeit distanzieren. Wichtig ist es daher, der eigenen und auch fremden Argumenten kritisch gegenüberzustehen.

c.) *Reduzierung auf eine präzise Fragestellung* ist der weiterführende Weg, falls bis jetzt kein Erfolg erzielt wurde. Der Kern der Frage sollte so präzise, wie nur möglich herauskristallisiert werden. Extreme Spezialfälle sollen gesucht werden, auch können einige Voraussetzungen abgeschwächt werden. Ebenfalls kann sich die Suche nach Analogien zu anderen Aufgaben als sinnvoll herausstellen, dies stellt eine spezielle Kombination der Spezialisierung und Verallgemeinerung dar.

Das eigentliche Kern-Problem herauszudestillieren lohnt sich auch dann, wenn die Lösung schon vorher korrekt gefunden wurde. In dieser konzentrierten Form wird das Problem effektiver im Gedächtnis gespeichert, weiters regt sie zum Nachgrübeln über das Thema an. Was hier noch ins Auge fallen könnte, ist eine stillschweigende Annahme in der Argumentationskette, die entweder falsch oder überflüssig ist. Wird diese Entdeckung gemacht, soll das erneute Durchlesen der Aufgabe und die Kontrolle des Beweises folgen, danach wird es wahrscheinlich notwendig sein, eine neue Planungsphase einzuleiten.

3. Die *Rückblickphase* versteht sich in diesem Modell keineswegs als Schlussphase des Problemlöseprozesses. Sie ist mit der Phase der Durchführung verwoben, ganz allgemein ist eine Trennung der zwei Phasen nicht möglich. Nämlich, sobald eine einigermaßen akzeptable Lösung gefunden wurde, soll ein erster Rückblick auf die getane Arbeit erfolgen, und zwar so, dass jede Arbeitsetappe abgetastet wird. In dieser Phase werden drei Handlungen empfohlen.

Zuerst sollte die Lösung getestet werden. Das bedeutet, die wesentlichen Gedanken sollen von den Unwesentlichen getrennt werden, die zentrale Idee, die zur Lösung führte soll sorgfältig herausgehoben werden. Praktisch sollen jetzt die rein rechnerischen Schritte und die logische Vorgehensweise kontrolliert werden. Auch eine Plausibilitätsprüfung der Konsequenzen, die aus der aufgestellten Vermutungen gezogen werden, darf nicht

fehlen. Und ganz wichtig, es soll überprüft werden, ob die eigentliche Frage beantwortet wurde.

Dann kann über die entscheidende Lösungsidee nachgedacht werden. Das erfolgt durch die sorgfältige Vergegenwärtigung der Idee, die zum Durchbruch bei der Lösung des Problems führte. Dies ist deswegen wichtig, da niemand passiv aus seinen Erfahrungen lernt. Vielmehr ist das bewusste Nachdenken über die eigenen Gedanken nötig, das genaue Kartographieren der Denkprozesse, die zu einer vermeintlichen Lösung führten (Metakognition).

Letztlich soll die gefundene Lösung verallgemeinert werden, der Boden dafür wurde schon durch das Trennen des Wesentlichen vom Unwesentlichen vorbereitet. Der Rückblick auf die wirklich wichtigen Aspekte des Problems vergrößert das Verständnis für die Problemstellung, dadurch wachsen mit viel kleinerem Aufwand eventuell weitere Erkenntnisse aus. Hilfreiche Fragen, die man sich stellen kann, sind: „Warum gerade so viele?“, „Was wäre, wenn ...?“.

Das Einordnen einer Fragestellung in einen allgemeineren Zusammenhang hat viele Vorteile. Viele Fragen werden in einer verallgemeinerten Form interessanter und würdiger zum Erforschen; die Motivation, der Lösung nachzugehen steigt. Verallgemeinerung fördert das (Er)Finden neuer Fragen. Zum Gesamtbild der Kompetenz Problemlösen gehört nicht nur das erfolgreiche Lösen von Problemaufgaben, sondern auch das Ausdenken neuer Problemaufgaben. Dieser Aspekt gehört genauso zum kreativen Werkzeugkasten eines Problemlösers. Nicht zuletzt stellt Verallgemeinerung eine intensive innermathematische Tätigkeit dar.

Die Arbeit während des Problemlösens lässt sich nicht messerscharf in verschiedene Phasen unterteilen, betonen die Autoren. Die Kenntnis über verschiedene Arbeitsphasen kann eher bei Überwindung von Schwierigkeiten hilfreich sein. Vor allem wenn man während der Arbeit in einen früheren Arbeitsabschnitt zurückgeworfen wird, die Spannung und Frustration darüber wächst, ist es gut über allgemeingültige ‚Richtlinien‘ betreffend Problemlösen Bescheid zu wissen.

Nicht weniger wichtig ist das Erkennen der möglichen Gefühlszustände, die auftauchen können. Am Arbeitsbeginn dominieren bei den meisten Menschen oft Angstzustände, die ihre Wurzeln in der Mystifizierung der Mathematik haben. Es kann auch vorkommen, dass eine Aufgabe außerhalb der Interessen einer Person liegt oder zu liegen scheint. Eine Gegenmaßnahme besteht darin, sich für die Problemaufgabe zu engagieren, versuchen

die Aufgabe zu verinnerlichen, sie womöglich vollständig zu verstehen. Manchmal ist das Wecken des Spieltriebs ein guter Zugang zu einem Problem, Problemlösen einfach in einer ‚l'Art pour l'Art‘ Weise zu betreiben. Falls all dies nicht funktioniert, muss man akzeptieren, das Problem existiert für die Person nicht. Für die Schule resultiert daraus die Konsequenz: für SchülerInnen sollen geeignete Problemlöseaufgaben ausgesucht werden.

Der Problemlöser soll eine grundlegende Eigenschaft mitbringen, die Durchhaltevermögen genannt wird. Auch vor SchülerInnen soll nicht geheim gehalten werden, dass Einsichten und AHA-Erlebnisse nach einigen Minuten oder nach einigen Jahren eintreten können. Über das Gefühl Skepsis, die es gegenüber der eigenen Arbeit zu erzwingen gilt, wurde in diesem Abschnitt schon berichtet.

Eine letzte Anregung für die Schule soll unbedingt im Bezug auf die Schaffung einer guten Atmosphäre, die das Problemlösen erleichtert, erwähnt werden. Die Lehrkraft soll nicht nur anregende und fordernde Problemaufgaben auswählen, sondern ihren SchülerInnen ausreichend Zeit zum Nachdenken gewähren.

1.5 Problemlösen unterrichten

Problemlösen ist für die Lehrkraft unter drei verschiedenen Aspekten eine Herausforderung: es ist eine fachliche Herausforderung, denn sie muss die notwendige Mathematik meistern und die verschiedenen Lösungsmodelle der Lernenden verstehen. Es ist auch pädagogisch eine Herausforderung, da die Lehrkraft entscheiden soll, wann sie einen Lernenden weiter arbeiten lässt oder die Arbeit unterbricht. Außerdem ist zu entscheiden, welche Ratschläge oder Hinweise dem Lernenden in weiterer Folge helfen und welche nicht. Auf der persönlichen Ebene besteht die Schwierigkeit darin, dass eventuell auch die Lehrkraft in die Situation kommen kann, das Problem selbst nicht lösen zu können, eine Situation, die als sehr unangenehm von den meisten Lehrkräften empfunden wird.

Welche wichtige Rolle die Lehrerkonzepte für den Mathematikunterricht, insbesondere für die Gestaltung der eigenen Unterrichtstätigkeit spielen, wurde in den 90-er Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts gründlich untersucht. Lehrerkonzepte entstehen und entwickeln sich weiter vor allem auf Basis von Erfahrungen aus dem eigenen Mathematikunterricht. Selbstverständlich sind die Einflüsse aus den Ausbildungsjahren und Weiterbildungsangeboten im Beruf auch vorhanden.

Andererseits sind Unterrichtskonzepte nicht ohne eine vorhandene Sicht auf die Mathematik selbst vorstellbar. Verschiedene Ansichten darüber, was Mathematik ist, sind sehr vielfältig, dabei kann nicht entschieden werden, welche Ansicht die Richtige ist, alle sind irgendwie berechtigt. Philosophen der Mathematik, unter anderem Hersh (vgl. 1997, S. 13), führten mehrere ‚richtige‘ Konzepte der Mathematik ein, die von den Mathematikern allgemein anerkannt wurden. Da sie zum Nachdenken über das eigene Konzept der Mathematik anregen, werden sie nachfolgend kurz beschrieben.

Hersh geht unter anderem von den Beobachtungen des Philosophen Hermann Cohen und des Mathematikers und Philosophen Jean Dieudonné aus: die Mathematiker sind überzeugt, die Objekte, mit denen sie arbeiten, haben eine Art reale, objektive Existenz. Werden sie gefragt, wo man diese unsichtbaren, infinitesimal kleinen (oder unendlich großen) Einheiten in der Realität wiederfinden kann, retten sie sich in eine Art Formalismus. Jeder Anspruch auf die reale Existenz mathematischer Objekte wird abrupt aufgegeben. Es wird erklärt, der Mathematiker geht von Axiomen aus und macht logische Deduktionen. Hersh fand diese Einstellung widersprüchlich und nannte es philosophische Schizophrenie. Um diesen geistigen Konflikt der Mathematik zu lösen, behauptete er, es gäbe drei Ebenen der Realität. Neben der materiellen und geistigen, führte er den Begriff der sozialen Realität ein. Dass mathematische Objekte nicht Teil der materiellen Realität sind, versteht sich von selbst. Auch sind sie nicht Teil der geistigen Ebene, da sie kein Bestandteil der persönlichen Subjektivität einer Person sind. So reiht Hersh mathematische Objekte in die sozio-kulturell-historische Ebene der Realität ein, kurz soziale Realität, verleiht ihnen eine reale Existenz und lokalisiert sie. Viele andere reale Konstrukte existieren neben Mathematik auf dieser Ebene: Religionen, Geld, Ideologien, kulturelle und wissenschaftliche Errungenschaften ... All diese Konzepte sind geteilte Denkweisen größerer Gruppen von Individuen; so ist Mathematik eine gemeinsame Denkweise von Mathematikern und anderen Personen, sie wird von allen Beteiligten gleichermaßen akzeptiert und anerkannt. Mathematik existiert nur in Verbindung mit

Menschen, es ist sinnlos über Mathematik außerhalb der menschlichen Kultur zu sprechen, meint Hersh.

Zurück zu den Lehrerkonzepten: diese sind vielfältig, nicht notwendigerweise alle ‚richtig‘ oder erreichen eine philosophische Tiefe, wie im Falle des oben beschriebenen Konzeptes, sie spielen trotzdem eine große Rolle darin, wie der Mathematikunterricht von einer Lehrperson gestaltet wird. In Hinsicht auf Problemlösen gilt das Gleiche, die Lehrerkonzepte über Problemlösen sind ausschlaggebend für ihre Umsetzung in den eigenen Mathematikunterricht. Die Fragen sind: Wie kann man Lehrerkonzepte untersuchen? Was sind überhaupt Lehrerkonzepte? Pehkonen und Furinghetti (2002, ab S. 39) schlagen einen Zugang zum Konzept Lehrerkonzept über benachbarte Begriffe wie Glaube, Sicht, Einstellung und Wissen vor.

Pehkonen und Hannula (2004, ab S. 23) beschreiben unter anderem den Begriff Glaube (belief - in der englischsprachigen fachdidaktischen Literatur) als ein Wissen im weiteren Sinne, das auf eigene Erfahrungen beruht, subjektiv ist und auch eine emotionale Komponente besitzt. Untersuchungen zeigten die immense Rolle, die Erfahrungen aus der eigenen Schulzeit beim Aufbau der Konzepte Mathematik und Mathematikunterricht spielen. Lindgren (1996, ab S. 53) spricht von einem regelrechten Teufelskreis: Lehrkräfte orientieren sich sehr stark an den Methoden, mit denen sie selbst in ihrer Schulzeit unterrichtet wurden. Ihre SchülerInnen werden ihrerseits dann das Gleiche tun, wenn sie selbst Mathematik an einer Schule unterrichten. So werden viele Glaubenssätze immer weitergegeben und die Lernenden geraten später als Lehrkräfte auch in den Teufelskreis. Sie wählen Themen, Methoden und organisieren den Unterricht anhand ihres Glaubens, ihrer Einstellungen und Sicht auf die Mathematik. Und diese beruhen größtenteils auf Erfahrungen aus der Schulzeit.

Mit dem Fokus auf Problemlösen befragten Grouws et al. (1990, ab S. 135)

MathematiklehrerInnen der Sekundarstufe I über ihre Methoden und Konzepte des Mathematikunterrichts. Die 24 Testpersonen wurden gebeten, Problemlösen mit ihren eigenen Worten zu definieren. Viele Antworten zielten auf die Art der Aufgabe ab, während andere sich auf die Eigenschaften des Lösungsprozesses konzentrierten. Eine sorgfältige Analyse der Antworten ergab vier distinkte Kategorien der Konzepte:

- Problemlösen bedeutet Lösung von Textaufgaben
- Problemlösen besteht aus der Suche nach Lösungen von Problemlöseaufgaben
- Lösung praktischer Aufgaben steht im Mittelpunkt des Problemlösens
- Problemlösen ist mit der Lösung von Aufgaben, die Nachdenken benötigen, gleichzusetzen

Ca. ein Viertel der Befragten deutete eine Problemlöseaufgabe als Textaufgabe, die sprachliche Formulierung der Aufgabestellung war für diese Personen unerlässlich. Beim Lösen einer solchen Aufgabe hingegen erlaubten sie auch rein mathematische Operationen. Keine Person aus dieser Gruppe sprach über Komplexität des Problems oder des Lösungsweges.

Die Mehrzahl der Lehrkräfte gehörte zur zweiten Kategorie. Für sie spielte die Art der Formulierung des Problems keine Rolle. Jedes Mal, wenn Lernende zur Lösung einer Aufgabe gelangen, lösen sie ein Problem, auch wenn der Lösungsweg von vorne feststeht, oder wenig Variabilität zulässt. Wichtig für sie war die Schritt-für-Schritt Annäherung an das Ergebnis.

Ein Achtel der Befragten konzentrierte sich auf den Realitätsbezug einer Aufgabe. Für sie war wichtig, dass Lernende Mathematik außerhalb des Klassenzimmers anwenden können, bei der Arbeit oder in der Freizeit, wo keine Lehrkräfte mehr zur Verfügung stehen. Sie gaben viele Beispiele für Problemsituationen aus dem realen Leben, in denen die Lösung des Problems nur durch Berechnungen möglich ist. Die Komplexität des Lösungsweges spielte bei dieser Gruppe auch keine Rolle.

In den ersten drei Kategorien steht die Natur des Problems im Fokus der Konzepte. Nur die Konzepte aus der vierten Kategorie sind primär mit den Prozessen der Lösungsfindung beschäftigt.

Ein Viertel der Testpersonen sieht in Problemlösen Lösung von Aufgaben, bei der komplexe kognitive Prozesse stattfinden. Lernende sollen etwas neues in den Lösungsprozess einbringen, etwas, was vorher im Unterricht nicht geübt wurde. Ein Problem ist demnach keine Routineaufgabe und erfordert intensive Denkleistung. Diese Lehrkräfte wünschten sich kreative Lösungstechniken und multiple Lösungswege von ihren SchülerInnen.

Pehkonen (1993, ab S. 237) untersuchte das Konzept Mathematikunterricht von Lehrkräften im Bezug auf den Einsatz von Problemlösen im Unterricht. Die Resultate zeigten, dass Lehrkräfte Problemlösen als wichtig für die Pflege der kognitiven Bereitschaft von SchülerInnen eingestuft hatten. Problemlösen soll in einer flexiblen, kreativen und zustimmenden Art durchgeführt werden. Lehrende sollten Lernende in das Problemlösen einbinden, indem sie ihnen die freie Wahl der Probleme und die eigene gefundene Art des Problemlösens überlassen. Die Bereitschaft der Lernenden für das Erlernen des Problemlösens wurde als die wichtigste Voraussetzung von allen untersuchten Personen angesehen.

Auch die Kenntnis sogenannter offener Fragestellungen (was Resultate oder Lösungswege betrifft) wurde von Pehkonen (1999, ab S. 87) untersucht. Er schickte per Post 74 Lehrkräften der Sekundarstufe I einen diesbezüglichen Fragebogen. Der Anteil derer, die antworteten, lag bei 50%. Die Hälfte dieser Lehrkräfte gab zu keine Kenntnis über offene Fragen zu haben. Pehkonen vermutete, die Hälfte der Lehrkräfte, die keine Antwort gaben, sehr wahrscheinlich auch über keine Kenntnisse über offene Fragen verfügten. Summa summarum: Ende des zwanzigsten Jahrhunderts gehörte Problemlösen für ca. $\frac{3}{4}$ der finnischen Lehrkräfte nicht zum Konzept des Mathematikunterrichts.

Neuere Ergebnisse wurden 2017 von Pehkonen präsentiert, die Daten stammen aus einer nicht publizierten Masterarbeit (Sivunen 2007). Die Studie wurde in einer kleinen Stadt südlich von Helsinki durchgeführt, befragt wurden 103 GrundschullehrerInnen (Schulstufen 1 bis 6(!)). Tatsächlich antworteten nur 41 LehrerInnen. Drei Aspekte wurden genauer untersucht: 1. Bedeutung der Lehrpläne, 2. Bedeutung der Unterrichtsmaterialien, 3. Problemlösekompetenzen fördern.

1. Bedeutung der Lehrpläne: Nicht nur in Finnland liegt der Schwerpunkt in den Lehrplänen für die Grundschule bei der Bewältigung mathematischer Rechenoperationen und dem Lernen mathematischer Begriffe. Problemlösekompetenzen sind komplett vernachlässigt, sie kommen zwar spärlich vor, aber ohne die Benennung der Rahmenbedingungen, in denen Problemlösen unterrichtet werden soll. Die Antworten der Befragten betonten diese Situation, laut ihnen ist der Lehrplan so überfüllt mit elementaren Inhalten, die es zu vermitteln gilt, dass überhaupt keine Zeit für Problemlösen bleibt. Und

diese Art Mathematik zu betreiben ist tatsächlich zeitintensiv. „Die Zeitmangel. Die Lehrpläne sitzen einem im Nacken. Die LehrerInnen haben nicht immer den Mut zu bremsen und den Kindern genug Zeit zum Nachdenken zu geben“ behauptet einer der Gefragten.

Diese Resultate können auch folgendermaßen interpretiert werden: in den Konzepten über Mathematikunterricht der befragten Lehrpersonen stehen die inhaltlichen Begriffe und Schlüsselfertigkeiten ranghöher als die im Lehrplan ebenfalls (zwar spärlich) enthaltenen mathematischen Kompetenzen. Lehrkräfte trennen anscheinend die zwei Gebiete voneinander und entscheiden sich für die Erfüllung des von ihnen als wichtiger angesehenen Bereichs der Grundkenntnisse und -Fertigkeiten. Lehrkräfte gaben zu, Problemaufgaben nur leistungsstärkeren SchülerInnen zuzumuten, als Differenzierung ihres Unterrichts. Die Gefahr, dass leistungsschwächere SchülerInnen sich ausschließlich nur mit Routineaufgaben beschäftigen, ist somit gegeben. Dies deckt sich gut auch mit der Vorstellung der Lehrkräfte, dass Problemlösen erst dann einsetzbar ist, wenn Grundkenntnisse und Fertigkeiten gut eingeübt wurden. Problemlösen bedeutet also die Anwendung der vorher gelernten Mathematik. Es ist verständlich, dass Lehrkräfte in eine zwiespältige Situation geraten, einerseits erkennen sie die Wichtigkeit des Problemlösens für den Unterricht, andererseits können sie Problemlösen wegen ihrer *beliefs* nicht wirklich in ihren Unterricht implementieren.

Versteht man Problemlösen als Teil des Mathematiklehrens, wird seine separate Position aufgegeben und Problemlösen kann eine bedeutende Rolle als Unterrichtsmethode und als Inhalt, den es zu lernen gilt, annehmen. Wie das gut gelingen kann, wird im Kapitel 5 *Kreativität und mathematische Probleme* noch einmal aufgegriffen.

2. Bedeutung der Unterrichtsmaterialien: Diese konnte nur im Kontext, was Problemlösen für die einzelne Lehrkraft bedeutet, richtig gedeutet werden.

Viele Befragte meinten, Problemlösen wäre mit der Anwendung des vorher Gelernten in einer neuen Situation gleich zu setzen. Einige fügten hinzu, die Anwendung des Gelernten in der realen Welt ist die Voraussetzung für eine Aufgabe, damit sie als Problem bezeichnet werden kann. Diese Lehrkräfte bemängelten natürlich das spärliche Vorhandensein praktischer Unterrichtsmaterialien, die für das Problemlösen wichtig wären. Vermisste Materialien waren mathematische Puzzles und andere mathematische Spiele (vermutlich Brettspiele mit geometrischen Figuren, mathematische Memory, Würfelspiele, Kartenspiele, Wurf- oder Rollspiele, etc.), aber auch entsprechende Literatur mit

Problemlöseaufgaben wurde vermisst. Wenn man den zweiten Vorschlag von Winter bezüglich der Öffnung des Unterrichts in Richtung Kreativität betrachtet (vgl. Seite 114), sind diese Anforderungen nicht ganz unberechtigt, wenn Mathematikunterricht nicht ausschließlich auf abstrakter Ebene stattfinden soll.

Andere Befragte meinten, eine Aufgabe sei dann ein Problem, wenn vielseitiges, kreatives Denken zur Lösung der Aufgabe eingesetzt wird. Sie kann sprachlich formuliert oder bildlich sein; sie ist nicht mechanisch lösbar, dadurch trainiert sie das eigenständige Denken. Diese Lehrkräfte bemängelten das spärliche Vorhandensein solcher Aufgaben in den Schulbüchern. Deswegen beschrieben einige Befragte die Vorbereitung auf Unterrichtseinheiten, in deren Zentrum das Problemlösen stehen sollte, als sehr mühsam. Wiederum beschrieben andere, wie sie Aufgaben den Schulbüchern entnahmen und sie so veränderten, dass mehrere Lösungswege möglich waren. Da sie aber Aufgaben wählten, die eine geschlossene Frage beinhaltete, war die Anzahl der Möglichen Variationen beim Lösen der Aufgabe einfach zu gering, um sie als Problem betrachten zu können.

Einige Befragte sagten, sie hatten mathematische Puzzles, sowie mathematische Lernspiele in ihren Unterrichtseinheiten mit dem Ziel, Problemlösen zu unterrichten, eingesetzt. Entsprechend vermissten diese Lehrpersonen die adäquaten Spiele in den Schulen.

Die Schlussfolgerung war, dass alle Lehrpersonen das Fehlen von Unterrichtsmaterialien als Hindernis für die Durchführung von Problemlöseeinheiten empfanden, jede Gruppe entsprechend ihres Problemlösungskonzeptes.

3. Problemlösekompetenzen fördern: die Förderung von Problemlösekompetenzen wurde von den Befragten mit dem Erlernen und Üben von Problemlösestrategien gleichgesetzt. Strategien zu kennen schien für die Lehrpersonen sehr wichtig, Lernende sollen anhand logischer Denkprozesse entscheiden welche Strategie oder Kombination von Strategien für ein gegebenes Problem zielführend sein kann. Explizit wurden die Strategien ‚Schritt für Schritt vorangehen‘ und ‚Teilung eines Problems in mehrere kleinere Teilprobleme‘ erwähnt. Eine weitere Aufgabe der Lehrperson sei, Problemlösen zu illustrieren, die eigenen Gedanken während des Lösungsprozesses zu verlautbaren, Informationen über Ursache-Wirkung-Zusammenhänge zu geben. Diese Aussagen reflektieren zusätzlich auch die Konzepte der Befragten darüber, wie Problemlösen unterrichtet werden soll. Mit Ausnahme zweier befragter Lehrpersonen schien bei den anderen Teilnehmern die

Fähigkeit Probleme lösen zu können nicht Teil ihrer Konzepte des Problemlösens im Mathematikunterricht zu sein. Ein Teil der Lehrkräfte machte im Unterricht die Erfahrung, dass seitens der Lernenden ein Wunsch Probleme lösen zu können, vorhanden ist; sie erwähnten jedoch keine etablierten Verfahren, wie sie dies den Lernenden ermöglichen. Analog wurde die Denkfähigkeit der Lernenden als natürlicher Teil des Problemlösens angesehen und nicht als eine Fähigkeit, die unabhängig vom Problemlösen entwickelt werden kann.

Einige Teilnehmer brachten zum Ausdruck, dass die Ausbildung zum Beruf Lehrperson viel zu wenig Anhaltspunkte für Problemlösen im Unterricht bietet. Ebenso kommt Problemlösen viel zu wenig in den Weiterbildungsangeboten vor, obwohl Ansprüche vorhanden wären.

Diese sehr aktuelle Studie zeigte also, dass Lehrpersonen in ihren Konzepten über Problemlösen im Mathematikunterricht den Schwerpunkt eher auf Unterrichtsmaterialien, Aufgabentexte und Zeit legen, und sich weniger auf die Förderung der Problemlösungsfähigkeiten konzentrierten. Die Lehrerkonzepte über Problemlösen sind Bestandteil einer größeren Lehrervorstellung über die Natur von Mathematik, wie Mathematik gelernt und gelehrt wird. Daher fordert eine Änderung der Lehrerkonzepte über Problemlösen vor allem eine gründliche Selbstreflexion der Lehrkraft. Eine solche Änderung wird als radikal, und infolge dessen als sehr kompliziert angesehen (vgl. Merenluoto 2005, ab S. 17). Was an dieser Stelle als Fazit für die Studien von Pehkonen auf jeden Fall mitgenommen werden kann, ist, dass weniger **über** und mehr **durch** Problemlösen unterrichtet werden soll.

2 Theorie des Modellierens

2.1 Einführung

Modellieren war, wenn vielleicht nicht so bewusst, schon immer ein Werkzeug der Naturwissenschaften, das intensiv in der Erkundung der Natur und der Welt um uns herum eingesetzt wurde. Denken wir an die ersten Modelle der Physik, die von Galileo Galilei bezüglich der Planetenbahnen erarbeitet wurden, oder an Isaac Newtons klassische Mechanik. Genauso könnte man eine lange Reihe von Modellen aus der Biologie (Vererbungsmodell von Mendel, Evolutionstheorie von Darwin), Chemie (Tabelle von Mendeleev) und sogar aus nicht naturwissenschaftlichen Wissensgebiete, wie Psychologie, Pädagogik und weiter mehr aufstellen. Eigentlich kann jede Theorie als ein Modell der Wirklichkeit gesehen werden, nicht zuletzt, weil die Wirklichkeit nie in ihrer Ganzheit erlebt werden kann. Das Gehirn baut sich mit Hilfe der Sinnesorgane, die Reize aus der Umwelt zum Gehirn leiten, ein ganz individuelles, subjektives Bild zusammen. Warum Menschen über doch so ähnliche Bilder der Wirklichkeit verfügen, ist mit Hilfe von evolutionstheoretischen Argumenten zu erklären.

In der Mathematikdidaktik wurde bereits im 19. Jahrhundert versucht, Mathematik anwendungsorientiert zu unterrichten. Systematische fachdidaktische Untersuchungen dazu wurden jedoch erst Ende der 70-er Jahre des 20. Jahrhunderts durchgeführt. Letztendlich führte das Scheitern des Konzeptes *Neue Mathematik* aus den 1970-er Jahren zu einer Neuorientierung des Mathematikunterrichts, dabei sollen Anwendungen der Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Modellieren spielt dabei die Rolle des Bindeglieds zwischen Realität und Mathematik. So wird in den Mathematikunterricht ein Stück von Realität eingebracht, was eine positive Wirkung auf die Motivation der Lernenden verzeichnen konnte.

2.2 Empirische Forschung und einige ihrer Ergebnisse

In diesem Kapitel werden einige empirische Forschungsergebnisse betreffend Modellieren präsentiert, in vollem Bewusstsein darüber, dass kein allgemeingültiges Rezept für die Gestaltung des Unterrichts gegeben werden kann. Modellierung ist eine offene Unterrichtsform, die viele subjektive Aspekte aufweist, in Bezug auf SchülerInnen und Lehrkräfte. Genau diese Subjektivität verlangt nach individueller fachdidaktischer Forschung jeder Lehrkraft auf dem Gebiet, was leider nicht realisierbar ist. Trotzdem können Forschungsergebnisse Positives leisten und ausprobierte, mehrfach bewährte Unterrichtskonzepte, sowie daraus resultierende allgemeine Charakteristika des Modellierens aufzeigen.

Die empirische fachdidaktische Forschung begann im deutschsprachigen Raum erst Ende der 1970er Jahre, davor fand ausschließlich stoffdidaktische Forschung statt, deren Bemühungen sich auf die Systematisierung der mathematischen Inhalte konzentrierte, mit dem Ziel Mathematik verständlicher zu gestalten. Die Einführung der *neuen Mathematik* erlangte nicht zum Erfolg, wurde auch nicht mit empirischen Studien begleitet, was erste Impulse für die empirische fachdidaktische Forschung setzte.

Man unterscheidet zwischen qualitativer und quantitativer Forschung. Einige quantitative Forschungen und ihre Ergebnisse werden im Folgenden beschrieben.

1) Eine hilfreiche quantitative Untersuchung, die Unterstützung bei Modellieren und realitätsbezogenem Unterrichten bietet, ist unter dem Kürzel DISUM (Didaktische Interventionsformen für einen selbstständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik) bekannt. Im Rahmen von DISUM werden viele einzelne Forschungsprojekte durchgeführt.

Eine Untersuchung mit dem Namen *Effekte kurzzeitiger Interventionen auf die Entwicklung von Modellierungskompetenzen* wurde von Borromeo Ferri, Grünwald und Kaiser durchgeführt (vgl. Borromeo Ferri 2013, ab S. 41). In einem dreitägigen

Modellierungsprojekt an einem Hamburger Gymnasium wurde SchülerInnen aller sechs 9. Klassen eine freie Auswahl aus vier Modellierungsaufgaben angeboten. Die Lernenden arbeiteten in Kleingruppen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung waren, wie folgt:

- eingehende Auseinandersetzungen mit Modellierungsaufgaben während eines dreitägigen Projekts kann signifikante Steigerung der Modellierungskompetenzen von Lernenden bewirken
- es konnte kein Zusammenhang zwischen Geschlecht und kurzzeitige Entwicklung von Modellierungskompetenzen festgestellt werden
- es konnte auch zu der aktuellen Note im Fach Mathematik kein Zusammenhang festgestellt werden
- den größten Zuwachs an Fähigkeiten verzeichnete die Studie im Bereich des Validierens, den Kleinsten im Bereich der gängigen, alltäglichen mathematischen Operationen

2) Anders als die Studie über kurzzeitige Interventionen, untersuchten Ludwig und Reit die Entwicklung der Modellierungskompetenzen über die Jahre. Es wurden SchülerInnen der Jahrgangsstufen 6 bis 11, sowie 176 Lehramtsstudierende mit einer einzigen Modellierungsaufgabe aus dem Bereich Sport konfrontiert. Die verschiedenen Lösungen wurden speziellen Modellierungsstufen zugeordnet. Die Basis dafür bildete der Modellierungskreislauf, der nachfolgend im Abschnitt 2.6 *Der theoretische Modellierungskreislauf* präsentiert wird (vgl. S. 48). Während die Untersuchung von Borromeo Ferri eher die kognitiv-psychologische Aspekte des Modellierens verfolgte, indem sie die intrinsischen Ursachen für einen gewählten Lösungsweg zu identifizieren versuchte, geht es in der Studie von Ludwig und Reit um die Analyse der Modellierungsqualität und ihr Bezug zum Alter der Lernenden. Hier konnten folgende Ergebnisse zusammengefasst werden:

- Lernende älterer Jahrgangsstufen erzielten keine besseren Ergebnisse als jüngere SchülerInnen
- es konnte nicht festgestellt werden, dass Modellierungskompetenzen konstant mit dem Alter steigen

- was die Modellierungsqualität der einzelnen Lösungsansätze betrifft: leichtere Lösungsansätze wurden bis zu einem korrekten Endergebnis geführt, während der Einsatz mathematisch komplexerer Werkzeuge (Lösen durch Funktionen, Geometrie) nicht zu einem Endresultat führten
- interessant ist, dass diese Studie auch keine Unterschiede zwischen Jungs und Mädchen feststellen konnte (vgl. Ludwig und Reit 2012, ab S. 3376)

3) Schukajlov und Leiss analysierten die Rolle der Lesekompetenz in der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben. Der Begriff Lesekompetenz wurde ursprünglich als Fähigkeit, schriftliche Texte zu verstehen, definiert. Ende des 20. Jahrhunderts wurde sie um die Fähigkeit Informationen aus Bildern, Tabellen, Diagrammen u.s.w. richtig zu interpretieren, erweitert. Generalisiert umfasst der Begriff Lesekompetenz Fähigkeiten, schriftliche Dokumente aller Art zu verstehen. In diesem Sinne gehört die Förderung von Lesekompetenz nicht mehr ausschließlich dem Deutschunterricht, sondern ist als fächerübergreifende Fähigkeit zu sehen, und muss folglich in verschiedenen Fächern gefördert werden. Die mathematische Lesekompetenz besteht laut Schukajlov, Blum, Messner et al. im Erstellen und Interpretieren von Graphen, Tabellen und Diagrammen, sowie im Arbeiten mit symbolischen, formalen und technischen Elementen.

Schukajlov stellte zwei Wege fest, wie Lesekompetenz den Erwerb mathematischer Kompetenzen unterstützt. Zum einen nehmen gut lesende SchülerInnen Informationen, die in unserer Umwelt in schriftlicher Form vorliegen, autonomer auf. Ihr Wissensnetz verbessert sich so in höherem Tempo als bei schwach lesenden SchülerInnen. Die Erklärungen und Bildinformationen aus den Schulbüchern werden besser verstanden; auch wenn die Inhalte nicht sofort vollständig erfasst werden, werden diese SchülerInnen gezielter und spezifischer fragen. Gezielte Fragen sind viel leichter von der Lehrkraft zu beantworten, als Fragen, die auf „Ich habe nichts verstanden“ zurückgeführt werden können. Hier gestaltet sich die Beantwortung immer zeitintensiv, da die Lehrkraft zuerst selbst herausfinden muss, was nicht verstanden wurde.

Zum anderen wird ein Großteil der Aufgaben in der Mathematik schriftlich formuliert, neben textlichen, sind oft bildliche oder symbolische Teile vorhanden. Schwach lesende SchülerInnen werden gleich vom Anfang an in ihrem Lösungsprozess dadurch gehindert, dass sie die Informationen nicht korrekt erfassen können. Das mündet nicht selten im

Aufgeben des Lösens der Aufgabe. Diese SchülerInnen werden dann die Lösungen anderer KlassenkollegInnen in der Präsentationsphase des Projekts anhören, mitschreiben und hoffentlich nachvollziehen können, was aber bewiesenermaßen nicht so gewinnbringend für sie ist, als hätten sie die Lösung selbst erarbeitet (vgl. Schukajlow und Leiss 2011, ab S. 53).

4) Die größte, international durchgeführte quantitative Studie ist unter dem Namen PISA allgemein bekannt. In dieser Studie geht es nicht um die Abfrage der curricularen Inhalte, sondern um allgemeine Bildungskonzepte, die sich auf Fähigkeiten von Jugendlichen konzentrieren, die das Anwenden ihres Wissens und ihrer Kenntnisse zur Bewältigung von Herausforderungen im späteren Leben ermöglichen. Die aktuelle Auffassung beschreibt die sogenannte *mathematischen Bildung* (engl. mathematical literacy) als die individuelle Fähigkeit, Mathematik in verschiedenen Kontexte zu formulieren, einzusetzen und zu interpretieren. Es inkludiert mathematisches Argumentieren und Benutzen von Konzepten, Vorgehensweisen, Fakten und Werkzeugen in der Beschreibung, Erklärung und in Vorhersagen von Phänomenen. Die mathematische Bildung unterstützt Individuen im Erkennen der Rolle, die Mathematik in der Welt spielt, und im Treffen konstruktiver Entscheidungen und Beurteilungen als verpflichtete und reflektierende Bürger (OECD 2013).

Werner Blum arbeitete von Anfang an am mathematischen Teil der Pisa-Studie. Er schrieb in seinem Bericht über die PISA-Studie aus dem Jahr 2003, als der Schwerpunkt zum zweiten Mal auf Mathematik gelegt wurde: „lediglich drei aus 84 Aufgaben waren innermathematischer Natur“. Dies zeigt wie wichtig mathematische Bildung im oben definierten Sinne für diese Studie ist.

In der Studie wurden Kompetenzstufen erarbeitet, um den Leistungsstand der getesteten Personen einordnen zu können. Diese Stufen haben auch eine starke Realitätsorientierung. Testpersonen, die Informationen aus einer Tabelle oder einem Graphen entnehmen und miteinander in Beziehung bringen können, erfüllen die Anforderungen der niedrigsten Kompetenzstufe. Für die zweite Stufe müssen sie u.a. einen gegebenen Text mit einer Darstellungsform verbinden. Auf der dritte Stufe befinden sich Personen, wenn sie Argumentationen in einem vertrauten Kontext durchführen. Die vierte Stufe verlangt den Umgang mit gegebenen linearen Modellen von Realsituationen, sowie Argumentieren in weniger vertrauten funktionalen Kontexten. Die fünfte Stufe

erfordert den Umgang mit komplexeren algebraischen Ausdrücken und funktionalen Modellen, die Interpretation der formalen Darstellungen in Realsituationen. Außerdem sollten mehrschrittige Lösungswege bewältigbar sein, und das Erkennen von Beziehungen zwischen algebraischen Formeln und zugrunde liegenden Realdaten soll geleistet werden. Für die Lösung von Aufgaben der fünften Stufe sollen Testpersonen komplexe algebraische Modelle von unvertrauten Realsituationen bilden, mit algebraischen Ausdrücken sicher umgehen können, die Lösungen verallgemeinern können (vgl. Blum 2004, ab S. 47).

Die Studie wird unter dem Aspekt der Repräsentativität viel diskutiert. Obwohl viele SchülerInnen per Fragebogen getestet werden, stellt sich die Frage, für welche Gesamtheit (Schule, Stadt, Bundesland oder Land) ist die Anzahl der getesteten SchülerInnen repräsentativ? Unter einigen Gesichtspunkten kann die Studie jedoch für repräsentativ gehalten werden; problematisch findet Hopmann (2007, S.391), wenn aus den Ergebnissen der Studie generelle Schlüsse auf das Bildungssystem allgemein gezogen werden und die Studie als ‚Beweis‘ für bestimmte Eigenschaften des Bildungssystems geltend gemacht wird.

5) Die ISTRON-Gruppe ist eine internationale Gruppe von Mathematikern und Fachdidaktikern aus Europa und USA, die seit 1990, das Jahr der Gründung, laufend Studien über Realitätsbezug in der Mathematik publiziert. Seit 1991 gibt es auch eine deutsch-österreichische Gruppe, als Teil des internationalen Netzwerks. Neben der Schriftenreihe beschäftigt sich die ISTRON-Gruppe auch mit der Entwicklung schulgeeigneter Materialien, die realitätsbezogenes Unterrichten erleichtern, und die Einbringung dieser Materialien in die Schulpraxis. Es werden regelmäßig Lehrerfortbildungen, sowie Arbeit direkt vor Ort mit den Lehrkräften angeboten.

Am Anfang dieses Abschnittes wurden auch qualitative Studien erwähnt. Diese versuchen mit anderen Methoden (Interview, Videoaufnahmen) mehr Informationen herauszubekommen, als dies mit Fragebögen möglich ist. Da sie oft in sehr kleinem Rahmen durchgeführt werden, können die Ergebnisse nicht als repräsentativ geltend gemacht werden, sie können aber den Horizont für weitere quantitative Forschungen öffnen.

Ein Beispiel für eine qualitative Forschung ist die Studie von K. Maaß. Sie untersuchte die Unterrichtshandlungen der Lehrenden und wie sich diese auf die Unterrichtsqualität auswirken können. Sie ist auf zwei gewichtige Faktoren gestoßen, die die Unterrichtshandlungen lenken: die Einstellungen (*beliefs*) und die Emotionen der Lehrenden im Unterricht. Unter *beliefs* sind hier die schon vorher beschriebenen Vorstellungen und Philosophien von Mathematik, Mathematik als Schulfach, sowie Lehren und Lernen von Mathematik, zu verstehen.

Die Emotionen wurden hauptsächlich im Unterrichtsgeschehen untersucht. Dabei konnte nur ein kurzzeitiger Effekt der Emotionen festgestellt werden, außer wenn die gleichen Emotionen sich öfters wiederholt hatten, dann wurde eine stärkere Auswirkung auf das Lehrerverhalten beobachtet. Als Resultat dieser Studie konnten zwei Typen von Mathematiklehrenden gefunden werden. Der ‚Learnig-Process-Teacher‘ traut seinen SchülerInnen zu, sinnvoll selbständig zu arbeiten, während der ‚Transmission-Teacher‘ dasselbe als verlorene Zeit empfindet. Die Unterscheidung der zwei Grundtypen war sehr unproblematisch, da die Entscheidung für oder gegen ein konstruktivistisches Unterrichten hinterließ in vielerlei Hinsicht deutlich sichtbare Spuren. Dies kam besonders bei Fragen bezüglich Gruppenarbeit zum Vorschein, die Beschönigung einiger Unterrichtsaspekte, die aus dem Wissen aus Weiterbildungen entsprangen, konnte somit gut identifiziert werden (vgl. Maaß, K. 2009, ab S. 141).

2.3 Mathematikunterricht für Modellieren öffnen

Einerseits gehört Modellieren zu einem qualitativen Mathematikunterricht mit starkem Realitätsbezug, andererseits bietet die Lehrerbildung wenig Anhaltspunkte auf diesem Terrain, somit stellt sich die Frage (nicht nur für angehende Lehrkräfte), wie soll Modellieren im eigenen Unterricht eingebunden werden?

Noch vor Klärung des ‚wie‘ seien an dieser Stelle einige Argumente für ‚warum‘ aufgelistet. Oft fragen SchülerInnen im Unterricht nach dem Sinn des Gelernten. Die klassischen Antworten versprechen eine spätere Einsicht in die Wichtigkeit des Themas oder winken die Frage mit einem Hinweis auf den Lehrplan ab. Mehrere Untersuchungen zeigten zwei

Hauptwirkungen des Mathematikunterrichts im Erwachsenenalter, nämlich wenig nachhaltiges Wissen über Mathematik und eine tiefsitzende Abneigung gegenüber dem Fach. Fachdidaktiker sind überzeugt davon, dass realitätsbezogenes Unterrichten diese Lage verbessern kann. Dieser Vorschlag zielt auf keinen permanent vorhandenen Realitätsbezug im Unterricht, Mathematik hat viele andere Aspekte, die ebenso ihr Platz im Mathematikunterricht haben müssen. Die Umsetzung kann durch ein bis zwei größere realitätsbezogene Projekte im Halbjahr erfolgen. So können SchülerInnen diesen Aspekt der Mathematik kennenlernen und diejenigen, denen es besonders liegt, nachhaltiger behalten.

Aus disziplinarischer Sicht hat das realitätsbezogene Unterrichten auch den Vorteil, dass es viel angenehmer zu unterrichten ist, wenn Lernende motiviert sind mitzuarbeiten, weil sie etwas wissen wollen.

Der realitätsbezogene Unterricht bietet zusätzlich die Gelegenheit über unsere Welt mehr und tiefer zu lernen. Nicht weniger wichtig, anhand von Modellierungsaufgaben lernen SchülerInnen spezielle Methoden der Suche nach Antworten, und in weiterer Folge lernen sie selbst Fragen an die Welt zu stellen.

Erste Schritte in Realisierung des Vorhabens wären das Lesen einschlägiger Literatur, Hospitation der KollegInnen vor Ort, die schon gute Erfahrungen gesammelt hatten, bzw. Teamteaching mit anschließender Reflexion. Dies benötigt zusätzliche Zeit in der Vorbereitung, zahlt sich aber trotzdem aus, da sowohl die Vorbereitung, als auch die Durchführung interessanter ist und wahrscheinlich mehr Freude bereitet. Für Lehrkräfte, die jede Stunde gründlich und gut vorbereiten, werden schnell die Grenzen der Arbeitskapazität erreicht. Deswegen wird geraten, gezielt einige Stunden im Monat besonders gut vorzubereiten, der Rest der Stunden kann schulbuchorientiert geplant werden.

Ein anderer nutzbarer Vorschlag für die Einführung des Modellierens in den Unterricht besteht darin, bei einem neuen Thema nicht gleich mit einer Definition zu beginnen, sondern mit einer interessanten Fragestellung, einem motivierenden Phänomen aus der Lebens- oder Arbeitswelt, deren Beantwortung bzw. Beschreibung vorhersehbar angestrebt wird. Stößt man während des Findungsprozesses auf seine Grenzen, ist das eine gute Gelegenheit, etwas Neues aus und über Mathematik zu lernen.

2.4 Modellierung und Realitätsbezug

2.4.1 Modell und Realität aus philosophischer Sicht

Mathematiker und Physiker fragen sich bis heute, wie es möglich ist, dass Mathematik unser Bild von der Wirklichkeit so gut beschreibt. Ist die Wirklichkeit so mathematisch angelegt? In der Philosophie wird diese Frage als *Anwendungsproblem* bezeichnet und konnte bis heute nicht befriedigend beantwortet werden. Um diese scheinbare Eigenschaft der Wirklichkeit erklären zu können müssen zuerst die mathematischen Objekte unter die Lupe genommen werden. Wie schon im Kapitel 1 *Theorie des Problemlösens* erwähnt wurde (vgl. S. 19), betrachtet ein Teil der Philosophie der Mathematik mathematische Gegenstände als existent. Mathematiker entdecken lediglich Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zwischen realen Objekten. Diese Realität ist nicht mit der Wirklichkeit zu verwechseln, sie existiert nur in der kollektiven Ideensammlung der Menschheit. Für SchülerInnen ist der Übergang von einem z.B. gezeichneten mathematischen Objekt zu einer abstrakten, mentalen Repräsentation des Objektes, die nichts mehr mit ihrem Bleistift und Stück Papier zu tun hat, sehr schwierig. Denn ein gezeichneter oder aus Papier gefalteter Würfel ist nicht mit der Idee Würfel gleich zu setzen. Die Verkörperung des Würfels in der Wirklichkeit gehorcht nicht mehr den gefundenen Zusammenhängen aus der kollektiven Ideenwelt; hier gemessene Winkel werden, wenn man genau genug misst, andere Werte aufweisen als diejenige, die die Mathematik vorschreibt. Die neue Frage lautet also: weshalb sich mathematische Objekte so gut für die Modellierung von Phänomenen aus der Wirklichkeit eignen?

Davis und Hersh versuchen auf diese Frage von einem konstruktivistischen Standpunkt zu antworten. Sie zeigen auf, Mathematiker entwickeln im Laufe der Zeit in ihrem Bestreben die Natur zu erklären Begriffe, und entdecken Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zwischen ihnen. In einer anderen Arbeitsphase, wenn sie versuchen, durch Modellierung reale Phänomene zu beschreiben, bedienen sie sich der verfügbaren Begriffe und Gesetze. Manchmal gelingt die Modellierung, manchmal aber nicht, nämlich dann, wenn

Modell und Realität nicht nah genug aneinander gebracht werden können. Aus diesen Versuchen, vor allem aus den nicht gelungenen Konzepten, kann sich ‚neue‘ Mathematik entwickeln, wie z.B. die Analysis im 16. Jahrhundert oder die Wahrscheinlichkeitsrechnung im 17. Jahrhundert. Dies zeigt die Möglichkeiten und, noch wichtiger, die Grenzen der Modellierung auf, was unbedingt auch in der Schule zu thematisieren ist, wenn im Unterricht Modellierung durchgeführt wird.

Laut diesem Modell kann also die Umwelt mit mathematischen Werkzeugen modelliert werden; es wird eben so lange gesucht, bis ein passendes Modell gefunden wird. Davis und Hersh erklären, wie es geschieht, erklären aber nicht, warum es grundsätzlich möglich ist geeignete mathematische Modelle zu finden (vgl. Davis und Hersh 1994, ab S. 1 und ab S. 381).

Eine anders strukturierte Sichtweise über die Wirklichkeit und ihre Mathematisierung wurde von Vollmer erarbeitet. Er beschreibt, wie die Wirklichkeit oder unsere (Um)Welt aufgebaut werden muss, damit mathematische Konstrukte sinnvoll angewendet werden können. Diese Auffassung kommt näher an die Frage, warum sich die Welt gut mathematisieren lässt. Vollmer stellt einige Voraussetzungen an unsere Welt, damit sie gut mathematisiert werden kann:

- Sie muss Ähnlichkeiten beinhalten, um Objekte, Regelmäßigkeiten und Gesetze finden, erkennen und klassifizieren zu können.
- Es muss in der Welt Systeme geben, die relativ leicht von ihrer Umgebung abgrenzbar sind und näherungsweise als abgeschlossen betrachtet werden können.
- Die Beziehungen zwischen den Systemen der Welt dürfen nicht beliebig komplex sein.
- Die Welt muss eine gewisse zeitliche Stabilität auszeichnen, damit Systeme lange genug existieren können, um erkannt zu werden.
- Die Welt muss gewisse gemeinsame Wechselwirkungsgebiete mit uns haben, um Erfahrungen zu ermöglichen (vgl. Vollmer 1988, ab S. 27).

2.4.2 Realitätsbezug in der Fachdidaktik

Nach der philosophischen Betrachtung der Beziehung Realität-Modell wenden wir uns der fachdidaktischen Perspektive zu. Es gibt gute fachdidaktische Gründe Realitätsbezug in den Mathematikunterricht einzubringen. Viele SchülerInnen fragen sich und die Lehrkraft nach dem Sinn der angebotenen Inhalte. Durch Modellierungsaufgaben können ausgewählte Aspekte der Realität in einem sinnstiftenden Unterricht angeboten werden. Die Durchlässigkeit der Trennwand zwischen Mathematik und Realität ist in beiden Richtungen vorhanden, sodass durch Modellieren sowohl interessante Einblicke in das Fach Mathematik, als auch in die Realität möglich werden. Lietzmann (1919, S. 66) formuliert diese Tatsache ohne das Wort Modell zu benutzen, er sieht die abwechselnde Schaltung zwischen Wissenschaft und Wirklichkeit in beiden Richtungen als die „materielle“ Aufgabe der Mathematik. Das mathematische Problem in der Wirklichkeit zu entdecken findet er schwieriger als die Anwendung einer mathematischen Errungenschaft auf die Wirklichkeit.

Zwei Ziele des Modellierens haben einen stärkeren Bezug zur Realität (vgl. Blum, Galbraith und Niss 2007, S.5):

1. Inhaltsorientierte Ziele: die Beschäftigung mit Modellierungsaufgaben ermöglicht die Erkundung der Umwelt, dabei wird die Umwelt mit mathematischen Mitteln eruiert. Ziel ist es Grunderfahrungen zu sammeln, die zur Wahrnehmung und zum Verstehen unserer Welt befähigen.
2. Allgemeine Ziele: Die Anwendung von Mathematik in der Umwelt hat eine starke kulturelle Komponente und spielt eine große Rolle in der Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft in einer demokratischen Gesellschaft. Die Erziehung zu einem verantwortungsvollen Mitglied der Gesellschaft, das in der Lage ist verwendete Modelle (z.B. Steuermodelle) kritisch zu betrachten, ist eines der deklarierten Ziele des Modellierens (Anpassung an die kulturelle Realität). Nicht weniger wichtig ist die Entwicklung sozialer Kompetenzen, präsente und zukünftige wissenschaftliche

Neuentdeckungen sind und werden nicht mehr von einzelnen Individuen gemacht (Anpassung an die soziale Realität).

Ausgehend von den historischen und aktuellen Entwicklungen von Anwendungen und Modellierung im Mathematikunterricht können verschiedene Perspektiven des Modellierens erkannt werden. Das *realistische und angewandte Modellieren* verfolgt inhaltsbezogene Ziele, darunter das Lösen realistischer Probleme und Verständnis der realen Welt. Im Fokus dieser Entwicklungsrichtung stehen authentische Probleme aus Industrie und Wissenschaft, die nur wenig vereinfacht werden. Modellierung ist in diesem Sinne eine Aktivität, bei der authentische Probleme gelöst werden. Diese Richtung zeichnet sich durch die große Nähe zur angewandten Mathematik aus.

Das *kontextuelle* Modellieren ist stark in den USA verbreitet. Hierbei steht der Kontext der Aufgabe im Vordergrund, ihre Realitätsnähe gibt einen starken Anreiz zur Lösung und ladet zur Argumentation ein. Diese Aufgaben verfolgen inhaltsbezogene und prozessbezogene Ziele, Lernenden werden Modellierungskompetenzen so vermittelt, dass sie eigene Modellierungskonzepte entwickeln und anwenden können.

Das *sozio-kritische* Konzept fördert das kritische Verständnis der Welt. Hier wird der Schwerpunkt auf die Rolle der Mathematik und mathematisches Modellieren gelegt, der Modellierungsprozess scheint weniger wichtig zu sein.

2.4.3 Sachkontext in den Mathematikaufgaben

Am Anfang dieses Abschnitts wurde die motivationale Komponente des Modellierens erwähnt. Oft wird ein erleichterter Zugang zur Mathematik und eine besondere Motivation der Lernenden bei der Arbeit durch Modellieren erwartet. Alltagserfahrungen aus dem Mathematikunterricht hatten diese Erwartungen nicht eindeutig bestätigt. Nicht alle SchülerInnen konnten durch Realitätsbezug im Unterricht motiviert werden, nicht wenige bemängelten fehlende eindeutige Lösungen. Wiederum andere SchülerInnen empfanden das notwendige Alltagswissen als eine zusätzliche Hürde (Boaler 1993, S. 12). Am eindeutigsten zeigten sich die positiven Effekte des Sachkontextes bei Grundschulkindern.

Dies lässt sich möglicherweise dadurch erklären, dass sowohl der Sachkontext als auch die Mathematik in diesen Aufgaben auf elementarem Niveau, also leicht bewältigbar ist. Aufgabenstellungen für ältere SchülerInnen zeichnen sich durch einen größeren Komplexitätsgrad aus, diese sind aus sachkontextueller Sicht aspektreicher und die mathematischen Werkzeuge sind vielfältiger.

Wie Sachkontexte auf den Mathematikunterricht wirken, wurde von Busse (2009, S. 173) in einer Studie untersucht. Der Autor formulierte eine eigene Definition des Sachkontextes:

„Der Sachkontext einer realitätsbezogenen Mathematikaufgabe umfasst alle Aspekte des verbal oder nonverbal, implizit oder explizit angebotenen außermathematischen Umfeldes, in das die Fragestellung eingebettet ist, sowie deren individuelle Interpretationen durch die bearbeitende Person.“

Diese Definition berücksichtigt die Subjektivität der Komponente Sachkontext einer Aufgabe, ergänzt somit die in der fachdidaktischen Literatur früher vorkommenden Begriffe ‚situativer Kontext‘, ‚Realsituation‘ und ‚Sachsituation‘. Die letzten drei Begriffe haben die gleiche Bedeutung, so benannten verschiedene Autoren das außermathematische Umfeld einer Aufgabe, wobei die lösende Person nicht dazugehörig zu dem genannten Umfeld der Aufgabe betrachtet wurde.

Die Studie von Busse konnte vorangegangene Ergebnisse von Boaler bestätigen, nämlich, dass Sachkontexte aus einer Aufgabe individuell wahrgenommen und entnommen werden. Diese subjektive Rezeption des Sachkontextes beruht vor allem auf persönliche Erfahrungen, sodass Lernende eigentlich ihren eigenen Sachkontext aus dem Aufgabentext heraus kristallisieren. Es gibt also keinen, für alle Personen allgemein gültigen Sachkontext, Busse spricht hier von *sachkontextuellen Vorstellungen*. Anhand seiner Studie konnte er vier theoretische Idealtypen in Umgang mit Sachkontexten identifizieren.

- Der realitätsgebundene Typ konzentriert sich bei der Aufgabenlösung ausschließlich auf das in der Aufgabe beschriebene, reale Problem. Der Lösungsweg ist komplett frei von Mathematik, es wird nur außermathematisch argumentiert.

- Der mathematikgebundene Typ interpretiert den Sachkontext lediglich als Illustration, Vorerfahrungen aus dem Thema werden in den Lösungsweg gar nicht eingebunden. Sachkontextuale Informationen werden unmittelbar mathematisiert, die Aufgabe wird ausschließlich mathematisch gelöst.
- Integrierend werden diejenigen bezeichnet, die eine Mischung der oben genannten zwei Typen darstellen. Diese Personen lösen die Aufgabe mathematisch, Sachwissen fließt in die Mathematisierung der Aufgabe und Validierung der Resultate ein.
- Es gibt noch einen vierten Typ, der Ambivalente, der zwar sowohl die Mathematik, als auch die Realität im Blick hat, doch kann er sich nicht entscheiden, welche Argumente während der Lösung zulässig sind. Oft argumentiert er innerlich sachkontextual, äußerlich führt er trotzdem eine mathematische Operationskette durch. Er kann die zwei Herangehensweisen nicht produktiv zusammenführen.

Busse machte sich auch darüber Gedanken, welche Faktoren die Entstehung des ambivalenten Typs begünstigen. Der ambivalente Typ ist durch eine gewisse Zerrissenheit geprägt, er agiert auf zwei Ebenen, eine offiziell sichtbare (Mathematisieren) und eine inoffizielle unsichtbare (sachkontextuale Argumentation in der Rückblickphase) Ebene. Er erklärt dieses Phänomen anhand sozio-mathematischer Normen.

Diese Normen wurden 1991 von Lave und Wenger *situiertes Lernen* genannt. Hier wird Lernen und Alltagspraxis gekoppelt. Unter anderem beschäftigt sich diese Theorie mit dem Lernen in der Institution Schule, wie das spezielle Lernen in der Schule den Lernprozess der SchülerInnen beeinflusst

Wie die Lernumgebung und die damit verbundenen Vorstellungen darüber, welche Handlungen in welcher Umgebung zugelassen sind, das Lernen beeinflussen, wurde anhand eines Beispiels erläutert. Dieselbe algebraische Fragestellung wird im Supermarkt mit größerem Einsatz von informellen Strategien gelöst, im Klassenzimmer hingegen werden zahlreichere formale Handlungen durchgeführt. Busse deutet also darauf hin, dass Lernende des Typs ‚ambivalent‘ sich gezwungen sehen, Aufgaben entsprechend der schulischen Norm des Lernens zu bewältigen, obwohl sie im Inneren lieber andere Lösungsansätze verwenden würden.

Die Studie zeigte außerdem, dass kein Lernender starr einem Idealtypen zugeordnet werden kann. Abhängig vom Interesse und von der emotionalen Involviertheit in das gegebene Thema werden bei der Lösung eher sachkontextuale oder eher

mathematiknahe Argumente benutzt. Sind die empfundenen, subjektiven Emotionen bezüglich eines Themas stärker, wird eher sachkontextual argumentiert.

2.4.4 Authentizität der realitätsbezogenen Aufgaben

Ein anderer wichtiger Aspekt des Realitätsbezugs von Modellieren, den es zu untersuchen gilt, ist die Authentizität der Aufgaben. Viele Schulbuchaufgaben, vor allem Textaufgaben, deuten durch ihre Formulierung an, es gehe hier um Sachverhalte aus dem echten Leben. Auch Lehrkräfte schrauben manchmal die Erwartungen der Lernenden mit Hinweisen auf den Realitätsbezug hoch. Wenn Aufgaben dann sich doch als realitätsfremd erweisen, folgen Enttäuschung und Demotivation. Doch könnte die Frage der Passung realer Situationen und in Mathematikaufgaben vorkommender Situationen, die als Authentizität bezeichnet wird, auch dazu genutzt werden, über ebendiese Unterschiede zwischen Aufgaben und Realität zu diskutieren. Es sollte den SchülerInnen und Lehrkräften klar sein, dass Mathematik viel mit der Realität zu tun hat, dies passiert allerdings auf einer anderen Komplexitätsebene, die für die Schule nicht geeignet ist. Dies erschwert manchmal auch Lehrpersonen das Aufspüren geeigneter Beziehungen zwischen Realität und realitätsbezogenen Mathematikaufgaben. K. Maaß berichtet in diesem Sinne von vorhandenen Lehrerkonzepten über Mathematik, bei denen die Auffassung vertreten wird, Mathematik sei für die Gesellschaft nicht so wichtig. In ihrer Studie über Lehrerkonzepte beschreibt sie: *„Insgesamt wird deutlich, dass bei der untersuchten Lehrergruppe Realitätsbezüge und Modellierungen keine bedeutende Rolle in den Beliefs zur Mathematik und zum Mathematikunterricht spielen.“* (vgl. Kaiser und Maaß 2007, S. 88). Auf ähnliche Ergebnisse kamen 1998 Grigutsch, Raatz und Törner, als sie auf einem Kongress der Mathematik-Didaktik 300 Lehrpersonen mittels Fragebögen befragten. Vier Aspekte der Lehrerkonzepte über Mathematik und Mathematikunterricht wurden genauer untersucht, unter anderem die Anwendbarkeit von Mathematik. Sie schreiben in ihrer Studie: *„Die Anwendbarkeit der Mathematik wird von Lehrern der Hauptschule hoch eingeschätzt, während diese Überzeugung bei Lehrern an Realschulen und dann an Gymnasien bzw. Gesamtschulen immer niedriger wird.“* (vgl. Grigutsch, Raatz und Törner 1998, S. 33)

Es gibt trotzdem auch Aufgaben mit ausgeprägter Authentizität, in der Mehrzahl aus der Stochastik, die schon in der Schule eingesetzt werden können. Unter Authentizität wird die Passung einer sachkontextualen Situation einer Mathematikaufgabe und Realität verstanden. In der Sekundarstufe I steckt oft der authentische Charakter in bestimmten Details von Aufgaben.

Das Feststellen der Authentizität einer Aufgabe wurde von Vos (2011, ab S. 713) beschrieben, sie analysiert das Vorhandensein der Authentizität aus drei Perspektiven:

- Ist eine Aufgabe authentisch bzw. nicht authentisch, oder existieren Abstufungen der Authentizität?
- Ist Authentizität eine globale Eigenschaft einer Aufgabe oder können nur Teile einer Aufgabe betrachtet werden?
- Ist sie abhängig oder unabhängig von der beurteilenden Person?

Vos meint, eine Aufgabe ist entweder authentisch oder nicht, Abstufungen der Authentizität existieren nicht. Die Eigenschaft Authentizität ist nicht global, sinnvoller ist, sie nur als Prädikat für Aufgabenteile zu betrachten, und hält sie für objektiv, unabhängig von der lösenden Person.

Eichler erläutert einige Defizite dieser Sichtweise und veranschaulicht sie durch einige Beispiele. Anhand einer Aufgabe, wobei SchülerInnen die Zuckermenge ausrechnen sollen, die aus einer bestimmten Menge Zuckerrübe gewonnen werden kann, zeigt Eichler, dass obwohl eine objektive (= gesellschaftlich relevante) Authentizität gegeben ist, eine subjektive Authentizität nicht vorhanden sein kann, die Fragestellung ist so vereinfacht, dass der Realitätsbezug kaum noch vorhanden ist. Demnach ist eine gewisse partielle Authentizität in dieser Aufgabe vorhanden (vgl. Kaiser und Henn 2015, S. 106).

Wird die Authentizität unabhängig von der lösenden Person gemacht, wird die Überlegung gar nicht zugelassen, dass sich SchülerInnen im Grundschulalter sehr wahrscheinlich nicht für Zuckergewinnung interessieren; der Frage wird gar nicht nachgegangen, ob SchülerInnen die Authentizität der Aufgabe anerkennen oder nicht. Im Kontext Schule spielt aber neben der objektiven Authentizität einer Aufgabe auch die subjektive Authentizität eine Rolle.

Ausgehend davon, dass eine Aufgabe sowohl objektiv, als auch subjektiv authentisch im Kontext der Realität für eine Schülergruppe sein kann, kann es trotzdem vorkommen, dass

sie mathematisch irrelevant für die Schülergruppe ist. Ein bekanntes Beispiel stellt die Sammelbild-Aufgabe dar. Die subjektive Authentizität ist für einige SchülerInnen Ende der Grundschule, Anfang der Sekundarstufe I sicher gegeben, vor allem wenn bestimmte Fußballmeisterschaften gerade aktuell sind. Auch die objektive Authentizität ist gegeben, da sich hinter der Problemstellung ein Geschäftsmodell verbirgt. Hingegen kann die notwendige Mathematik für die Lösung des Problems sogar für SchülerInnen der Sekundarstufe II zu schwierig sein. Sobald aber SchülerInnen über die notwendige Mathematik verfügen, ist die subjektive Authentizität nicht mehr gegeben.

Fazit für den Unterricht: Lehrkräfte müssen berücksichtigen, dass sich ihre eigenen sachkontextualen Vorstellungen von denen ihrer SchülerInnen unterscheiden können. Dementsprechend werden nicht immer die Erwartungen bezüglich des LöSENS einer realitätsbezogenen Aufgabe erfüllt. Die sozio-mathematischen Normen beeinflussen zusätzlich die Bereitschaft und den Erfolg im Lösungsprozess. Vermittelt man im Unterricht explizit Normen diesbezüglich (z.B. eine vereinfachte Darstellung des Modellierungskreislaufs), wird dadurch dem Idealtyp ‚ambivalent‘ viel geholfen. Es stellt sich außerdem die Frage, ob bei fehlender objektiver oder subjektiver Authentizität ein Realitätsbezug überhaupt angestrebt werden muss; es verhält sich vielleicht so, dass bestimmte Teile der (Schul-)Mathematik keinen authentischen Realitätsbezug ermöglichen.

2.5 Selbständiges Lernen durch Modellieren

Das Arbeitsprojekt DISUM wurde im Abschnitt 2.2 *Empirische Forschung und einige ihrer Ergebnisse* schon erwähnt. Deklarierte Forschungsgebiete von DISUM sind unter anderem das selbstregulierte Lernen und Strategien, individuelles Lernen im Gruppenkontext, sowie Instruktionsforschung im Hinblick auf die Unterrichtsqualität. Die Arbeitsgruppe verlautbart ihr Credo für einen qualitativen Unterricht: es soll stets eine gute Balance zwischen dem selbständigen Arbeiten der Lernenden und der Aktivierung und Unterstützung des selbständigen Arbeitens durch die Lehrkraft erstellt werden. Für diesen

Zweck untersucht DISUM aufgabengesteuerte Lernumgebungen, wobei die eingesetzten Modellierungsaufgaben größtenteils von der Gruppe selbst entwickelt werden.

Die Notwendigkeit selbstgesteuerten Lernens besteht aus mehreren Gründen: schon heute, aber auch in der Zukunft wird die Konfrontation mit Problemen in allen Lebensbereichen allgemein präsent sein, diese werden von Individuen in kooperativen Formen effektiver lösbar sein, wenn in der Schule erste Ansätze und nach Möglichkeit regelmäßige Übungen angeboten werden. In der Mathematikdidaktik wurde erkannt, dass das selbständige Lernen stark zu systematisierten fachlichen Inhalten gekoppelt werden muss und nicht als eigenständige Lernform zu erlernen ist (wie die Reformpädagogik behauptete). In diesem Sinne bedeutet selbständiges Lernen in der Schule, dass der Lernende in intelligent gestalteten Lernumgebungen inhaltlichen und zeitlichen Einfluss auf seine Lernprozesse haben kann und soll, dabei wird die steuernde und unterstützende Rolle des Lehrenden betont.

Das ko-konstruktive (kooperativ-konstruktive) Lösen in Partner- oder Gruppenarbeit von Modellierungsaufgaben bietet also den Rahmen für die Förderung und Entwicklung selbstgesteuerten Lernens.

Aufgaben spielen im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle, die Auswahl, Aufbereitung und unterrichtliche Behandlung von Aufgaben ist eine der Hauptaktivitäten von MathematiklehrerInnen, das Bearbeiten von Aufgaben im Unterricht oder als Hausübung ist eine der Hauptaktivitäten von SchülerInnen. Die moderne Anforderung an Aufgaben ist, dass Aufgaben weniger verfahrensorientiert, kognitiv anspruchsvoller und besser kompetenzorientiert sein sollen. Sie sollen hohen Aufforderungscharakter und Offenheit aufweisen, eingebettet in fachlich gehaltvolle Inhalte und in Selbständigkeit herausfordernden Lernumgebungen sein, die die Lehrkraft problem- und lerngruppenspezifisch gestaltet. Dabei darf die Lehrkraft die Lernenden nicht allein lassen, eine Instruktionskultur soll an Leistungsniveaus angepasst entwickelt werden.

Das Ziel bleibt die individuelle Lösung der Aufgaben durch jeden Lernenden, der wechselseitige Austausch der Lösungsideen soll lediglich die Konstruktion verschiedener einzelner Lösungen unterstützen. Die Qualität der Aufgabenbearbeitung kann so durch erhöhte Motivation gesteigert werden, die kognitiven Strukturen können von der Gruppenebene auf Klassenebene erweitert werden, sodass in Schülergesprächen eine Induktion von Problemlöseschritten und Strategien stattfindet.

Im Projekt DISUM wurden viele Modellierungsaufgaben auf ihre Lösungsvielfalt und das kognitive Anspruchsniveau untersucht. Einige Projektphasen wurden im Labor durchgeführt, hier arbeiteten Lernende teils alleine, teils mit einer anwesenden Lehrperson. Die Sitzungen ohne Lehrkraft sollten darüber Aufschlüsse geben, wie Lernende auf sich gestellt anspruchsvolle Aufgaben lösen können und welche Schwierigkeiten sie in dieser Situation erleben. Die Sitzungen mit Lehrperson konnten die Interventionsmöglichkeiten aufzeigen, außerdem wurde der Frage nachgegangen, wie eine gute Balance zwischen Schüler-Selbständigkeit und Lehrer-Anleitung herzustellen ist.

Einige Hürden, die sich in kooperativen Lernformen auf der Interaktionsebene Lernende-Lernende, sowie Lernende-Lehrende ergeben, wurden vom DISUM-Projekt wie folgt beschrieben:

- Einfluss des kontextualen Vorwissens auf das Lösungsverhalten: inhaltliches Vorwissen spielt eine Rolle beim situativen Verständnis von Texten. Das sinnerfassende Lesen geht über das verbale Entziffern eines Textes, das vorhandene Vorwissen generiert beim Lesen ein tieferes situatives Verständnis, das die Bereitschaft zum Lösen enorm steigern kann. In einigen Fällen führte das kontextuale Vorwissen sogar zu einem kürzeren, aber außermathematischen Lösungsverfahren. Dies wurde von einigen Lernenden als weniger wertvoll angesehen, hier muss die Lehrperson explizit betonen, dass ein solches Lösungsverfahren genauso qualitativ wie eine mathematische Methode ist. In einigen Fällen erlaubten die Erfahrungen der SchülerInnen eine gute Vorhersage realistischer Ergebnisse, die ein Einsteigen in den Lösungsprozess aus dieser Perspektive ermöglichte.
- Interventionen der Lehrperson im Lösungsprozess: die Studie konnte im Allgemeinen zwei Lehrertypen im Hinblick auf das Interventionsverhalten identifizieren. Der prozessorientierte Typ verlässt während seiner unterstützenden Aktivität nicht die Planungs- bzw. Metaebene, während der ergebnisorientierte Typ auf der Bearbeitungs- und Inhaltsebene agiert. Dass Interventionen notwendig im Lösungsprozess sind, wurde von zahlreichen anderen Studien auch belegt (Helmke 1996, S. 231). Ebenso wurde das fast gänzlich zurückhaltende Verhalten der Lehrperson, speziell bei Partner- bzw. Gruppenarbeiten als sehr positiv wirkend belegt (Dann 2002, ab S. 11). Die Vermutung liegt nahe, dass ergebnisorientierte

Lehrkräfte durch ihre Interventionen Lernende in ihren kreativen Lösungsfindungen einschränken. Andererseits konnte in einigen Fällen beobachtet werden, wie Fehlvorstellungen oder gröbere inhaltliche Probleme nicht beseitigt werden konnten, da die Lehrkräfte während der Intervention die Metaebene nicht verließen.

- Reflexion über Lösungsprozesse: in zahllosen alltäglichen Lernsituationen wird die Bearbeitung einer Aufgabe mit dem Ermitteln der Ergebnisse beendet. Rückblicke sind speziell beim Lösen von Modellierungsaufgaben sehr wichtig, da sie die metakognitiven Fähigkeiten der Lernenden fördern. Außerdem spielen Reflexionen eine wichtige Rolle bei verständnisorientiertem und nachhaltigem Lernen; während einer Reflexionsphase wird der Wechsel zwischen der formal-mathematischen Ebene und einer Meta-Ebene der inhaltlichen Vorstellungen zu mathematischen Begriffen und Verfahren angeregt. Die bildungstheoretische Perspektive der Reflexion zielt auf die Rolle und Bedeutung der Mathematik für jedes Mitglied unserer Gesellschaft und für die Gesellschaft insgesamt. Werte, die für unsere Gesellschaft wichtig sind, wie Mündigkeit, Emanzipation und Demokratiebewusstsein, werden durch einschlägige Reflexionstätigkeiten vermittelt und gefördert.

Da Modellierungsaufgaben anspruchsvoll sind, wird oft eine Intervention seitens der Lehrperson gewünscht, manchmal sogar notwendig. Möchte die Lehrperson zurückhaltend unterstützen, bietet sich oft die Gelegenheit, den Fokus der Lernenden auf die schon getane Arbeit zu lenken. Dabei ist mehr gefragt als nur eine blanke geistige Wiederholung des Lösungsweges. Reflexionen dienen dem abstrahierenden Herauslösen relevanter begrifflich-schematischer und prozesshaft-strategischer Merkmale des Lösungsweges. Um solche metakognitiven Prozesse auszulösen, soll die Lehrperson sowohl über Diagnose-Kompetenzen (die Lehrperson muss natürliche Ansatzpunkte für die reflektive Tätigkeit erkennen), als auch über Interventions-Kompetenzen (SchülerInnen sollen möglichst eigenständig auf die Metaebene gelangen) verfügen. Abschließend soll ein spezieller Aspekt der Reflexionstätigkeit erwähnt werden, die Validierung des erhaltenen Ergebnisses. Die Validierung soll unbedingt durchgeführt werden, auch dann, wenn die Aufgabe richtig gelöst wurde. In dieser Hinsicht ist die Intervention der Lehrperson unerlässlich, Validierung muss Teil des lernstrategischen Repertoires werden (vgl. Maaß 2011, S. 18). Diese Studie zeigte, dass Lernende ihre Ergebnisse im

Alleingang nicht validieren; eine andere zeigte aber auch, dass Lehrpersonen diesbezüglich nicht oft genug intervenieren (vgl. Maaß, 2004).

2.6 Der theoretische Modellierungskreislauf

Ein Modell wird mit ganz bestimmten Absichten kreiert. Im Zentrum stehen wechselseitige Beziehungen zwischen dem Modell und der Welt. Eine Definition lautet: Ein Modell ist eine vereinfachte Darstellung der Realität, die nur einige Teilaspekte der Realität berücksichtigt (vgl. Hinrichs 2008, ab S. 18). Demnach ist Modellierung ein komplexer Problemlöseprozess, bei dem die Beziehungen zwischen Realität und Modellebene bewusst in den Blick genommen werden.

Ein mathematisches Modell wird durch die Abtrennung eines Teiles der Wirklichkeit erzeugt, um das komplexe System durch Subsysteme zu ersetzen, die die Anwendung mathematischer Methoden im Lösen eines Problems ermöglichen. Dabei werden Strukturelemente, die für wesentlich gehalten werden auf das neue, vereinfachte System übertragen (vgl. Freudenthal 1978, S. 130).

Mathematische Modellierung ist somit Teil der Angewandten Mathematik. Pollak teilte die Angewandte Mathematik 1977 in vier Unterbereiche, zwei davon werden als Modellierung betrachtet: 1.) vereinfachtes Modellieren wird das einmalige Durchlaufen eines Modellierungskreislaufs genannt; 2.) Modellieren bedeutet das mehrmalige Durchlaufen des Modellierungskreislaufs.

Eine interessante mathematisch-formale Beschreibung betrachtet ein Modell als ein Tripel (R, M, f) , wobei R ein gewisser Ausschnitt der Realität, M eine Teilmenge der mathematischen Welt und f eine geeignete Abbildung von R nach M repräsentiert (vgl. Blum, Galbraith und Niss 2007, ab S. 3). Diese Beschreibung erweckt den Eindruck, Modelle sind sehr vorbestimmt. Dem ist natürlich gar nicht so, Modelle können nicht eindeutig sein, da es viele Möglichkeiten gibt Vereinfachungen der Realität vorzunehmen. Aus philosophischer und erkenntnistheoretischer Sicht stellte sich schon in der Antike die Frage, ob es eine objektive Realität überhaupt gibt, und nicht durch den Wahrnehmungsakt konstruiert wird. Hat es dann überhaupt einen Sinn zu modellieren, wenn Modelle nicht eindeutig sind? Der Konsens darüber ist, dass Modelle auf jeden Fall

widerspruchsfrei, stimmig (das Modell soll die wesentlichen Beziehungen der realen Situation beinhalten) und zweckmäßig (auf das zu lösende Problem maßgeschneidert) sein sollen.

Manche Mathematikdidaktiker unterscheiden Modellierung von der Angewandten Mathematik durch ihre Wirkungsrichtung. Beim Modellieren untersucht man zuerst die Realität, die dann durch Modellierung mathematisiert wird, dabei bleibt der Fokus auf Prozessen. In der Angewandten Mathematik wird oft zuerst die Mathematik betrachtet, dann wird nach Möglichkeiten gesucht die Mathematik in die Realität zu transportieren, mit dem Ziel technischen und technologischen Fortschritt zu unterstützen.

Greefrath vereint Modellierung mit der Angewandten Mathematik unter dem Begriff Sachrechnen, wobei die beiden Wirkungsrichtungen zwischen Realität und Mathematik zugelassen werden. Innerhalb des Sachrechnens redet er von Modellierungsaufgaben, wenn von der Realität ausgegangen wird und der Modellierungsaspekt gewichtiger als der Resultat ist (vgl. Greefrath 2018, S. 26).

Nach der beabsichtigten Verwendung werden Modelle wie folgt klassifiziert:

- normative Modelle dienen in gewissen realen Problemsituationen als willkürlich gesetzte Vorbilder (Steuertarife, Kochrezepte)
- deskriptive Modelle werden als Nachbild einer realen Situation und auch für Vorhersagen im Bezug zu komplexen Systemen verwendet (Planetenbahnen, Wettermodelle)
- explikative Modelle können Phänomene der Natur gut erklären (warum kehrt der Bumerang zurück?)

Eine neuere Art des Modellierens repräsentieren die Simulationen. Hier wird eine Art Realität simuliert, um Erkenntnisse über das reale System zu gewinnen (z.B.

Wettermodelle, Modelle über die Ausbreitung von Epidemien, über die Sicherheit von Atomkraftwerken, Modelle physikalischer Phänomene: radioaktiver Zerfall, Pendel, elektrischer Kreislauf u.s.w.), oder ein Modell wird selbst getestet. Simulationen mit mathematischen Modellen werden überwiegend mit dem Computer erstellt. Dabei findet eine sinnvolle Arbeitsteilung statt, der Computer eignet sich hervorragend dazu, langwierige Berechnungen schnell durchzuführen, während der Mensch Aufgaben wie Entdecken von Zusammenhängen, Übersetzung der Zusammenhänge in die Sprache der

Mathematik bearbeitet. Auch im Unterricht sollen digitale Werkzeuge eingesetzt werden, da die technischen und gesellschaftlichen Änderungen des 21. Jahrhunderts Kenntnisse in der Arbeit mit ihnen voraussetzt. Die Einsatzmöglichkeiten sind vielfältig, Simulationen wurden schon oben erwähnt, außerdem können auch Experimente modelliert werden, mit dem Zweck physikalische Gesetze zu erforschen. Dabei werden Sachverhalte visualisiert, kontrolliert oder fallweise sogar algebraisiert (eingegebene statistische Daten werden vom Computer in eine Formel umgesetzt).

Wie Modelle entstehen, bzw. wie Modellieren dargestellt wird, wird in der fachdidaktischen Literatur mehr oder weniger einstimmig als Kreislauf idealisiert. Die Knoten des Kreislaufs beschreiben die potentiellen kognitiven Hürden im Modellierungsprozess. Der Kreislauf wird tatsächlich nicht in einer starr vorgegebener Richtung durchgelaufen, Rückkopplungen auf frühere Hürden sind immer wieder möglich, es kann auch vorkommen, dass in einer spezifischen Aufgabe zwei Knoten nicht eindeutig differenziert werden können.

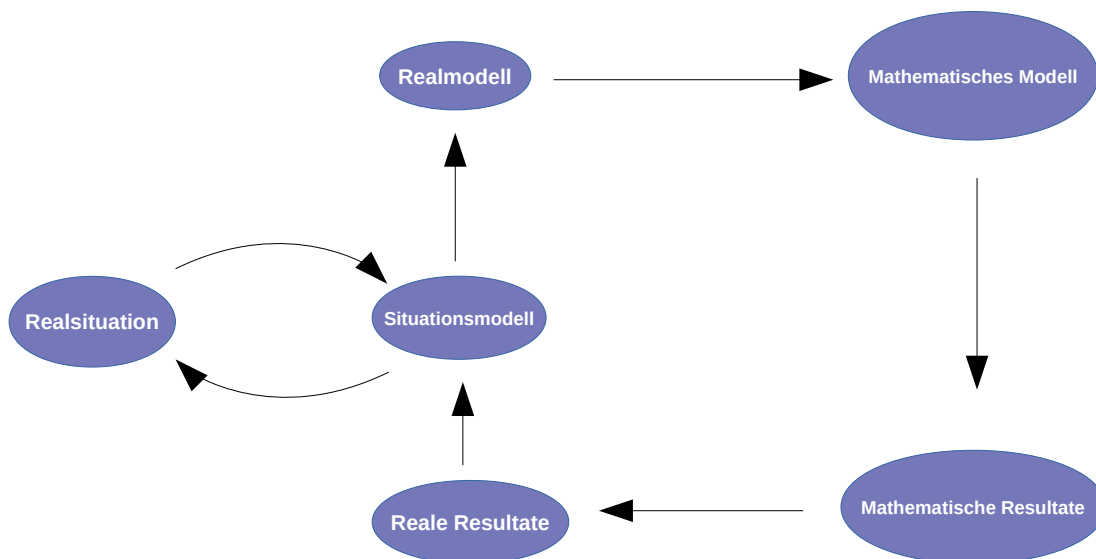


Abb. 2.6.1: Der theoretische Modellierungskreislauf nach Blum und Leiss (2005, S.19)

Der Ausgangspunkt dieses Modells des Modellierens ist die Realsituation. Diese wird in einer Aufgabe oder in einem Problem beschrieben. Schülerinnen müssen also zuerst die gegebene reale Situation verstehen. Dieses Verständnis ist einer textlichen Deutung übergeordnet, Inhalte müssen auf sachlicher Ebene verstanden werden. So wird die reale Situation möglichst umfangreich begriffen, eine mentale Repräsentation der realen Situation entsteht.

Es ist also in der gegebenen Situation ein Problem zu lösen. Die Natur der Situation fordert das Anwenden mathematischer Operationen, somit muss die Realsituation vom Ballast der unnötigen Details gesäubert werden. Es werden nur Daten berücksichtigt, die relevant für das Problem sind. Die Entscheidung, welche Daten wichtig und welche nicht wichtig sind, hat auch subjektive Aspekte, wie eigene Ideen, vorhandene Mathematikkenntnisse, Motivation für das Lösen des Problems. So entstehen zwangsläufig an dieser Stelle des Lösungsprozesses eine Varietät von Realmodellen. Diese Arbeitsphase ist durch Kreativität gekennzeichnet, genauso wie die Konstruktion des mathematischen Modells. Die benötigten Fähigkeiten wären außer Vereinfachung und Strukturierung auch die Datenbeschaffung, wenn für den nächsten Schritt – Mathematisierung – nicht genügend Daten vorliegen. SchülerInnen finden es motivierend, wenn bestimmte Daten aus der realen Welt gesammelt werden können.

Das mathematische Modell kann viele Darstellungsformen haben. Öfters werden Gleichungen oder Funktionen verwendet, in der Grundschule kann auch die Erstellung einer Rechenvorschrift als mathematisches Modell betrachtet werden. Ebenso akzeptable mathematische Modelle sind Graphen, Tabellen oder nur sprachliche Erklärungen. Vor allem in der Grundschule sind manchmal Realmodelle von mathematischen Modellen schwer unterscheidbar, da hier nur sehr einfache Modellierungen möglich sind.

Der nächste Schritt besteht in der Durchführung mathematischer Operationen, um das Problem zu lösen. Am Ende dieser Phase stehen die mathematischen Resultate. Selten wird durch eine kreative Idee die mathematische Arbeit wesentlich abgekürzt oder sogar komplett ausgelassen. Sofern diese Resultate richtig sind, ist die Modellierung unbedingt als vollwertig anzusehen und das besondere Augenmerk soll auf den kreativen Aspekt gelegt werden.

Steht das mathematische Resultat, muss es wieder in Beziehung zur Realsituation oder zum Realmodell gesetzt werden. Größen und Einheiten kommen wieder ins Spiel, das reale Resultat wird erstellt.

Durch Validieren gelangt man wieder zum Situationsmodell. Früher wurde diese Phase bei Modellierungsaufgaben im Unterricht deswegen vernachlässigt, weil die unterschiedlichen Perspektiven auf eine Aufgabe zu verschiedenen Modellen führten. Heute wird in der Validierungsphase verlangt noch einmal die Einflussgrößen und die der Modellierung zugrunde liegenden Standpunkte bewusst zu reflektieren. Durch die Validierung soll also zweierlei stattfinden, einerseits soll die Gültigkeit der Resultate im Hinblick auf die Realsituation überprüft werden. Andererseits sollen verschiedene Modelle für eine gegebene Realsituation verglichen und bewertet werden. Oft ist es so, dass eine adäquate Validierung in der Schule gar nicht möglich ist, wenn die Resultate nicht direkt mit der Realität verglichen werden können. In diesem Fall können einige Heuristiken als Validierung verwendet werden, unter anderem die Kontrolle der Maßeinheiten, der Größenordnung, extremer Situationen und Randbedingungen, der mathematischen Widerspruchsfreiheit, der Stabilität des Modells (bei dynamischen Modellen sollen geringe Änderungen der Startbedingungen geringe Auswirkung auf die Resultate haben), des Charakters der Abhängigkeiten (erhaltene Zusammenhänge werden im Realmodell und im mathematischen Modell auf Plausibilität geprüft).

Obwohl nicht Teil des Modellierungskreislaufs, verlangt Modellieren nach einer zusätzlichen Tätigkeit, die auch zur Arbeit der MathematikerInnen dazu gehört, in der Schule aber eher eine fachdidaktische Funktion hat, nämlich das Darlegen und Erklären der Resultate. Die Resultate und Argumente der Modellierung müssen dokumentiert und in einer für alle verständlichen Weise präsentiert werden. In dieser Phase werden also vorzugsweise kommunikative und argumentative Fähigkeiten eingesetzt und geübt.

Blum betont in seiner Arbeit die Wichtigkeit des Metawissens. Es ist sehr wichtig, SchülerInnen die Gelegenheit anzubieten, über ihre Denkprozesse nachzudenken. Eine systematische Metakognition gelingt selten ohne Instruktion, SchülerInnen brauchen Unterstützung bei der bewussten Reflexion über die getane Arbeit. Lehrkräfte können die Lernenden optimal unterstützen, wenn sie ihnen einzelne Arbeitsschritte bewusst machen. Das Projekt DISUM hat diesbezüglich einen Lösungsplan in vier Schritten ausgearbeitet, den es sich in der Schule, vor der Durchführung einer Modellierungseinheit zu besprechen empfiehlt. Dieses Modell des Modellierens ist selbstverständlich nicht so komplex wie das oben erwähnte Modell. Auf abstrakte fachdidaktische Begriffe wurde verzichtet, stattdessen wurden die nötigen Operationen als Anweisungen formuliert. Das Kern-Modell wird in diesem Fall nicht in Situationsmodell, Realmodell und mathematisches Modell

geteilt, auch Interpretation und Validierung wird nicht differenziert. Außerdem wird in diesem vereinfachten Modell der Pfeil (Abb. 2.6.2) zwischen dem vierten Schritt (Ergebnis erklären) und dem ersten Schritt (Aufgabe verstehen) dünner repräsentiert, da es in der Schule nur in Ausnahmefällen notwendig sein wird, den Modellierungskreislauf erneut zu durchlaufen.

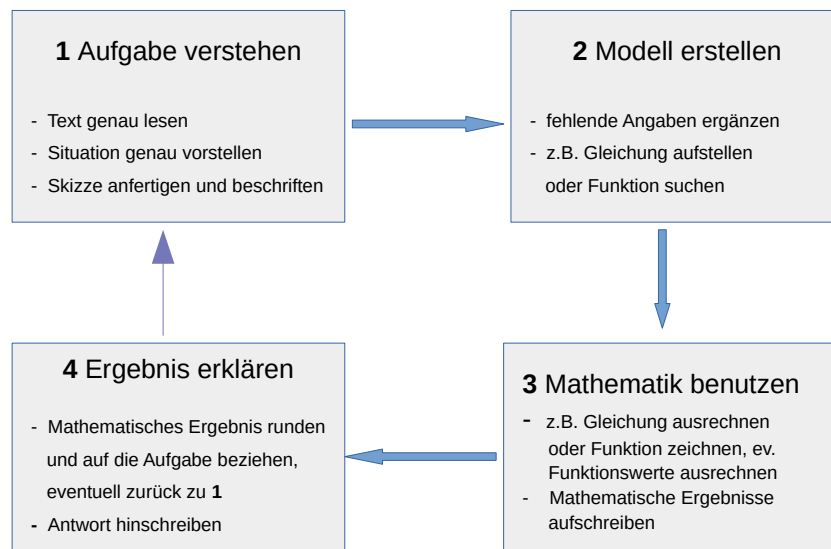


Abb. 2.6.2: Vereinfachter Modellierungskreislauf für den Einsatz im Unterricht laut DISUM (vgl. Blum und Schukajlow 2018, S. 64)

Empirische Ergebnisse fachdidaktischer Forschung (K. Maaß 2005, S. 138) bestätigten dieses vereinfachte Modell, indem erfolgreiches Modellieren in Verbindung mit diesem Modellierungskreislauf gezeigt werden konnte. Anhand ihrer Beobachtungen empfiehlt Maaß für die Sekundarstufe I, auf die Trennung des Realmodell und des mathematischen Modells zu verzichten, hingegen sollen für diese Altersgruppe die Phasen der Interpretation und Validierung bewusst separat behandelt werden. In der Sekundarstufe II kann die Unterscheidung zwischen Realmodell und mathematischem Modell vorgenommen werden, eine Differenzierung zwischen Realsituation und Situationsmodell ist auch für diese Altersstufen nicht zielführend.

Auch Peter-Koop (2005) stellt in ihrer Arbeit fest, Lernende folgen nicht immer dem Verlauf des theoretischen Modellierungskreislaufs. Vor allem im Fall einfacherer Modellierungssituationen springen sie öfters zur Realsituation zurück, um ihre Rechenergebnisse zu interpretieren (vgl. Modell ‚Stau‘ im Kapitel 3), Situationsmodell und Realmodell sind oft nicht als zwei Phasen erkennbar.

Ein etwas anderes Modell des Modellierens wurde von Fischer und Malle erstellt. Dieses Modell lässt die Handlungen in den Phasen der Bildung des Realmodells, des mathematischen Modells und während der mathematischen Berechnungen besser zum Vorschein treten, Nachteil ist die geringe Verdeutlichung des Kreislaufaspektes.

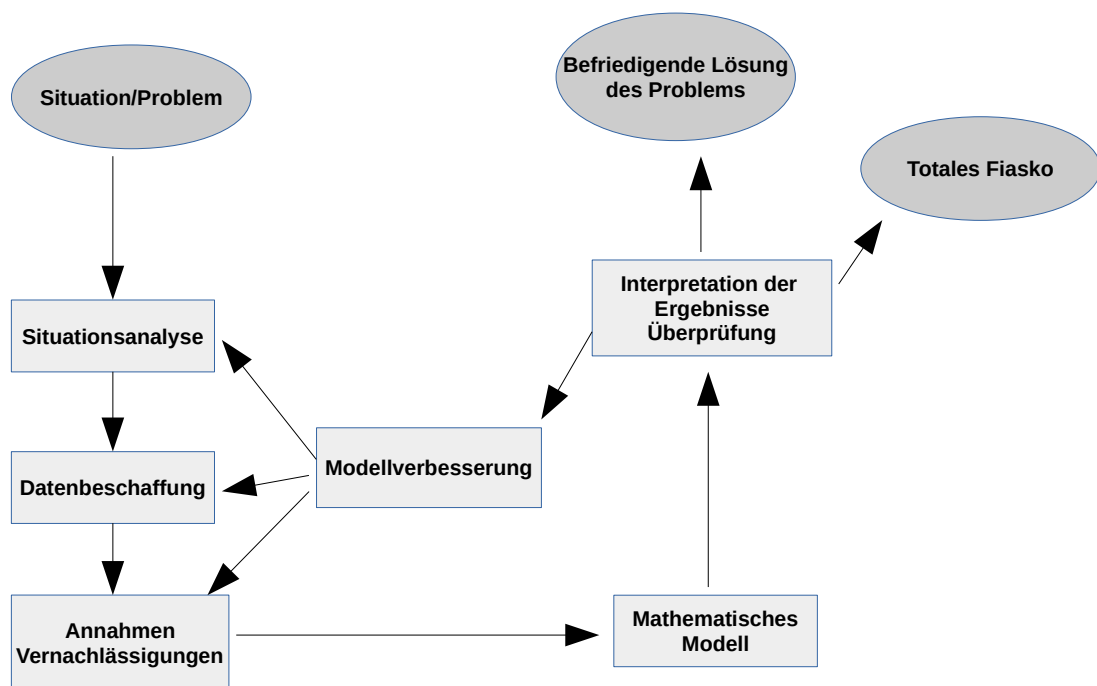


Abb. 2.6.3: Der Modellierungskreislauf nach Fischer und Malle (1985, S.101)

Dieses Schema lässt noch eine wichtige Tatsache erkennen, nämlich, dass es nicht immer möglich ist, eine reale Situation zu modellieren.

3 Analyse einiger praxisorientierter Beispiele

3.1 Der Kontext ‚Stau‘

Der Kontext ‚Stau‘ kann als Problem, das es zu lösen gilt, sowie als Modellierungsaufgabe in Betracht gezogen werden.

Für eine zweite Grundschulklasse kann folgende Problemstellung formuliert werden:

Auf der zweispurigen A1 Westautobahn staut sich der Verkehr in Richtung Deutschland zwischen Wien und Altenglobach auf einer Länge von 3 km. Wie viele Autos stecken im Stau, wenn es im Sonntagsverkehr nur PKWs der Länge von 4 m unterwegs sind und der Abstand zwischen den Fahrzeugen vernachlässigt werden kann?

Die Schwierigkeit für die Lernenden einer zweiten Klasse besteht darin, dass sie vermutlich Division noch nicht gelernt haben. Somit müssen sie Methoden finden, womit sie die gewünschte Fahrzeuganzahl ermitteln können.

Eine andere Hürde könnten die Längenmaßen km und m darstellen, hier wird es notwendig sein, bei der Umrechnung zu helfen. Konkret genügt vielleicht die Angabe: 1000 m sind so lang wie 1 km.

Peter-Koop führte in einer 4. Grundschulklasse ein Unterrichtsprojekt im Kontext ‚Stau‘ als Modellierungsaufgabe durch. Die Lernenden wurden in Kleingruppen von jeweils vier bis fünf Schülern aufgeteilt. Die Gruppeneinteilung wurde nicht vorgegeben, somit entstanden

spontan Kleingruppen mit unterschiedlichen Leistungsniveaus. Dies machte eine gute Beobachtung der eingesetzten Methoden in Abhängigkeit des Leistungsstandes beim Lösen des mathematischen Problems und auch beim Modellieren möglich. Außerdem hatte diese Einteilung den positiven Nebeneffekt, dass einige SchülerInnen in ihrer Gruppe nicht verstummten und die Arbeit nicht ihren leistungstärkeren Gruppenmitgliedern überließen.

Im Folgenden wird geschildert, wie SchülerInnen das innermathematische Problem zu lösen versuchten. Wie schon erwähnt, kannten die SchülerInnen die Division noch nicht, so lag der mathematische Lösungsweg nicht auf der Hand. Durch die vielen konkreten Angaben, wie vorgegebene Fahrzeuglänge, Spurenanzahl der Autobahn und Nullabstand zwischen den PKWs wird der Modellierungsaspekt zuerst komplett ausgeschaltet, hier gilt es lediglich die Lösung mathematisch zu finden.

Beobachtet wurden verschiedene Vorgehensweisen während der Lösung des Problems. Eine Gruppe multiplizierte die Fahrzeuglänge so lange mit immer größeren Zahlen, die die Anzahl der Autos repräsentierte, bis sie schließlich die Gesamtlänge von 3000 m erreichte. Durch dieses Verfahren entdeckten die SchülerInnen unbewusst das zugrunde liegende Dreisatz-Schema.

Eine andere Gruppe rechnete zuerst die Länge von fünf Fahrzeugen aus, dann addierten die Mitglieder der Gruppe immer wieder weitere fünf Autos dazu, sprachen dabei die errechneten Längen laut aus. Sie sprachen die ‚Wertetabelle‘ so lange weiter aus, bis sie die Gesamtlänge von 3 km erreichten.

Eine andere gefundene Möglichkeit seitens der Schüler war, die Länge von fünfundzwanzig Fahrzeugen zu ermitteln, das Ergebnis in einem zweiten Rechenschritt zuerst mit zehn und dann mit drei zu multiplizieren.

Einige Gruppen haben ein Annäherungsverfahren benutzt (für die spätere Modellierung offensichtlich sehr hilfreich, da Abstände zwischen den Fahrzeugen, verschiedene Fahrzeuglängen und verschiedene Anzahl von Autobahnspuren berücksichtigt werden mussten), diese wird bei der Beschreibung der Modellierungsvorgänge näher betrachtet (Peter-Koop 2005, ab S. 6).

Im Folgenden ändern wir die Aufgabe so, dass sie eine Modellierungsaufgabe wird:

Auf der A1 Westautobahn staut sich der Verkehr in Richtung Deutschland zwischen Wien und Altengrabing auf einer Länge von 3 km. Wie viele Autos stecken im Stau?

Wenn SchülerInnen zum ersten Mal mit einer offenen Frage dieser Art konfrontiert werden, zeigt sich als erste Reaktion eine gewisse Verwirrung. Im ersten Nachdenkprozess ist noch nicht ganz klar wie die Frage zu verstehen ist, welche Daten als vorausgesetzt gelten, was wichtig ist, was nicht wichtig ist. Wurden SchülerInnen früher im Unterricht mit dem Problem ‚Stau‘ konfrontiert, kann dies in dieser Modellierungsaufgabe Unterstützung beim Klären der notwendigen Daten bieten, wie: „Was ist bekannt?“ (in diesem Fall nur die Länge der Strecke!), „Was kann ich voraussetzen?“ (Saison, Wochentag, davon hängt ab, ob im Modell nur PKWs oder auch LKWs, Wohnwagen, Motorräder mit einbezogen werden), „Was ist zu berücksichtigen?“ (Fahrzeuglänge, Spurenanzahl der Autobahn, Abstand zwischen den Fahrzeugen).

In der Planungsphase können die bekannten Werte sofort niedergeschrieben werden, gleich anschließend können auch die noch zu berücksichtigenden zusätzlichen Daten gesammelt werden. Damit können Schülerinnen relativ schnell die reale Situation beschreiben. Es wird den SchülerInnen eher klar, welche zusätzliche Daten noch zu berücksichtigen sind, wie z.B. Spurenanzahl der Autobahn, Fahrzeuglänge und Abstand zwischen den Fahrzeugen. In diesem Fall kann wahrscheinlich auf ein Brainstorming am Anfang des Projekts verzichtet werden, was wiederum die positive Folge hat, dass nicht alle Gruppen mit einer zweispurigen Autobahn modellieren. Eine Vielfalt von Modellen kann so entstehen, ohne dass die SchülerInnen zu viel von einander inspiriert werden. Die Nachahmungskomponente der Lernenden kann hier sicher nicht ganz ausgeschaltet werden, vor allem in der Planungsphase, wenn leistungsschwächere SchülerInnen öfters ratlos gegenüber der Fragestellung stehen.

Im Projektunterricht von Peter-Koop führten einige Gruppen von SchülerInnen konkrete Längenmessungen der Autos am Schulparkplatz durch. In so einem Fall ist es schwer das Abschauen zu verhindern. Andererseits ist sicher besser wenn auch weniger einfallsreiche

Gruppen einen Start machen können, manchmal ist eine solche kleine Hilfe geeignet, um diese Gruppen in ihrem Vorhaben weiter anzuspornen, damit sie nicht ganz in ihrer Ratlosigkeit stecken bleiben und womöglich die weitere Arbeit aufgeben.

Eine Differenzierung der Modelle ist dadurch nicht gefährdet. Es gibt viele Möglichkeiten das mathematische Modell anhand der realen Situation zu konstruieren. Jede Gruppe kann und wird wahrscheinlich von einem anderen Anteil von LKWs, Wohnmobile, Motorräder ausgehen, deren Länge auch nicht einheitlich ermittelt wird. Auch der Abstand zwischen den Fahrzeugen soll abgeschätzt und eventuell gerundet werden. „Darf man runden?“, diese Frage werden sich einige SchülerInnen stellen, und durch diesen Pfad gelangen sie vielleicht ungewollt ins Reich der gebrochenen Zahlen.

Ebenso kann bei einem möglichen Modell die Frage auftauchen, wie berechnet man eine durchschnittliche Anzahl von Fahrzeugen, die auf einem kürzeren Abschnitt der Autobahn anfallen, sodass man später die ganzen 3 km als eine Vervielfachung dieser Strecke betrachten kann? In diesem Fall müssten SchülerInnen ohne Kenntnisse in Mittelwertrechnung auf ihre Ergebnisse kommen.

Im Fall dieser Modellierungssituation flossen die Phasen des mathematischen Lösens und der Interpretation ineinander über, da SchülerInnen ihre Zwischenergebnisse immer wieder während des Rechnens gemeinsam mit den entsprechenden Längeneinheiten notierten. In diesem Sinne war auch der Realitätsbezug stets gegeben. Hier liegt ein Rückgriff auf die Problemaufgabe ‚Stau‘ auf der Hand, ein Vergleich der Ergebnisse kann die Validierung im Modellaufgabe ‚Stau‘ gewährleisten. Zwar ist während der Problemaufgabe ‚Stau‘ eine Validierung nicht notwendig und auch gar nicht möglich, eine Diskussion über die verschiedenen Ergebnisse im Modellierungskontext wird trotzdem den Realitätsbezug für die Problemaufgabe verstärken. Es kann eine Wechselbeziehung zwischen dem Modellkontext und der Problemaufgabe aufgestellt werden. Es stellte sich nämlich heraus, dass sich die Ergebnisse einiger Gruppen sogar um den Faktor drei von anderen Ergebnissen unterschieden. In der Endphase des Modellierens bei Peter-Koop wurden die Modelle präsentiert, was den SchülerInnen die Möglichkeit gab, die Unterschiede in den Ergebnissen nachzuvollziehen.

Die Präsentation der Ergebnisse ist für beide Aufgabentypen sehr sinnvoll, zumal müssen die SchülerInnen ihre Gedanken klären und die Informationen so ordnen, dass für die MitschülerInnen die Vorgehensweise beim Lösen ihrer Aufgaben verständlich wird. In

beiden Fällen sind die Gruppen ‚gezwungen‘ ihre Lösungswege zu reflektieren, innerhalb der Gruppe über Mathematik zu sprechen, Aufgaben für die Präsentation aufzuteilen. Während dieser „Strategiekonferenz“ (vgl. Peter-Koop 2003) wurde klar, welche Unterschiede in den Modellen zu den großen Unterschieden in den Endergebnissen führte: einige Gruppen betrachteten lediglich PKWs, so kamen sie auf eine Anzahl von 750 PKWs. Eine Gruppe rechnete auf alle vier PKWs noch einen Wohnwagen dazu, für die fünf Fahrzeuge kam auf eine Gesamtlänge von gerundet 30 m und somit auf eine Gesamtanzahl von 500 Autos. Wiederum rechnete eine Gruppe nur mit PKWs aber mit einer dreispurigen Autobahn und kam auf 2250 Autos. Betrachtet man das Ergebnis von 750 PKWs der Problemlöseaufgabe ‚Stau‘, besteht die Möglichkeit dieses Ergebnis zu validieren oder als Spezialfall zu betrachten (nur PKWs, kein Abstand, eine Autobahnspur).

Analyse:

- Beiden Aufgaben ist eine schwierigere Anfangsphase eigen, die es zu überwinden gilt. In beiden Fällen kann eine Skizze oder eine konkrete Handlung (Abmessen von Autos, Abschätzen von Abständen zwischen den Fahrzeugen in einem Stau) Hilfe leisten. Diese Phase kann den größten kognitiven Einsatz seitens der SchülerInnen verlangen oder sich als unüberwindbarer Stolperstein erweisen.
- Fließend zu dieser Phase schließt sich die Planungsphase an. Es ist zu erkennen, dass ein tieferes Verstehen der Aufgabe in beiden Fällen notwendig ist. SchülerInnen sollen die bekannten Daten genau eingrenzen, notieren und eventuelle unnötige Annahmen wieder streichen.
- Diskussion im Plenum oder in der Arbeitsgruppe wird in beiden Fällen stattfinden. Fallweise brauchen SchülerInnen hilfreiche Anweisungen von der Lehrkraft (in unserem Beispiel die Umrechnung von km in m, bzw. Startimpulse beim Modellieren, falls das Problem ‚Stau‘ vorher nicht im Unterricht vorkam, z.B. in Form von „Fertigt ein Bild über die Situation an“). Eine Beratung zwischen den SchülerInnen innerhalb der Arbeitsgruppen wird im Prozess der Planung und Lösungsfindung unausweichlich stattfinden.

- Reflexion über die Lösungswege ist in beiden Fällen unabdingbar, dies wird von der Lehrkraft dadurch unterstützt, dass sie die o.g. Strategiekonferenz einberuft. Im Problemlösekontext wird die Reflexion den Lösungsweg betreffen. Hier können die konkreten Überlegungen, die zum Erfolg geführt hatten, präsentiert werden. Die Irrwege zu schildern birgt ebenfalls ein großes Lernpotenzial. Bei Unkenntnis von Bruchrechnung, Mittelwert oder Division können halb beschrittene Wege später durch die Einführung dieser fehlenden mathematischen Werkzeugen fertig gedacht und gelöst werden. Im Modellierungskontext sollen in erster Linie die Unterschiede in den aufgestellten Modellen reflektiert werden. Diese trugen dazu bei, dass viele verschiedene Resultate entstanden. SchülerInnen erwarten womöglich ein eindeutiges Resultat, Einsichten, warum das nicht so sein kann, müssen geschaffen werden. Die Konfrontation mit anderen Denkweisen, die ebenfalls gute Lösungen hervorbrachten, ist notwendig und lehrreich für die Lernenden.

- Zuletzt ist der Kontext ‚Stau‘ den zwei Aufgabentypen gemeinsam. Wird zuerst das *Problem* ‚Stau‘ (erfolgreich) gelöst, wird es den SchülerInnen leichter fallen das *Modell* ‚Stau‘ auszuarbeiten. Da der mathematische Lösungsweg schon bekannt ist, können sich SchülerInnen auf die relevanten Aspekte des Modellierens konzentrieren.

3.2 Umgang mit Brüchen in der Sekundarstufe I

SchülerInnen können ihren Umgang mit Brüchen vertiefen, wenn sie versuchen die folgende Modellierungsaufgabe zu lösen (vgl. Hinrichs 2008, S. 162):

Sonja hat zum Geburtstag ein 21-Gang-Fahrrad bekommen. Kritisch fragt sie sich, wie viel Gänge es wohl wirklich hat. Was meint ihr?

Diese Modellierungsaufgabe erfordert von SchülerInnen die Kenntnis von Fachbegriffen, über die sie erst teilweise oder noch gar nicht verfügen. Die große Herausforderung wird

gleich am Anfang in der Beschreibung der realen Situation bestehen. Ein erstes qualitatives Modell soll zuerst realisiert werden, bei der die Frage geklärt werden soll, was man unter ‚Gang‘ versteht.

Hier soll die Lehrkraft SchülerInnen eine gewisse Zeitspanne für Recherche zur Verfügung stellen. Eine bessere Alternative wäre eine kurze Beschreibung der Sachlage durch eine/n oder mehrere SchülerInnen, die sich mit Fahrrädern gut auskennen.

Sehr hilfreich in dieser Phase kann auch ein Foto eines Fahrrades mit Kettenschaltung sein oder das Betrachten eines Fahrrades, das ein/e SchülerIn eventuell vor der Schule abgestellt hat.

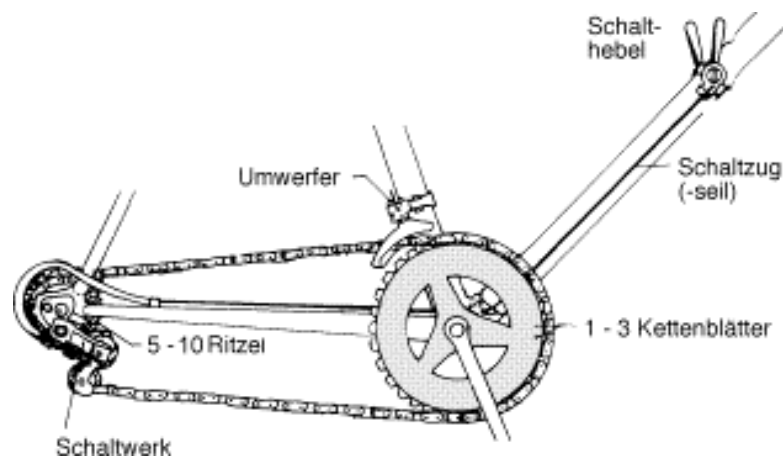


Abb. 3.2.1: Skizze einer Kettenschaltung

Folgende Größen, versehen mit den entsprechenden Fachbegriffen, sind im Hinblick auf die Gänge relevant, diese können als ein kleines Fachlexikon zusammengestellt werden:

- die Zahnräder am Tretlager nennt man **Kettenblätter**, sie drehen sich mit der Frequenz des Tretens
- die Zahnräder am Hinterrad nennt man **Ritzel**, sie drehen sich mit der gleichen Frequenz wie das Hinterrad
- als **Gang** bezeichnet man eine bestimmte Übersetzung der Frequenz des Tretens (also des Kettenblattes) in die Frequenz des Hinterrades (also eines Ritzels)

Um ein mathematisches Modell aufstellen zu können, müssen zuerst die Größen identifiziert werden, die nachfolgend im mathematischen Modell quantifiziert werden. In einer vorangegangenen Diskussion in der Klasse wurden die Kettenblätter bzw. Ritzel als relevant erkannt. Es stellt sich nun die Frage, welche Eigenschaft der Zahnräder zu betrachten ist.

Die Skizze aus der Abb. 3.2.1 könnte einen dazu verleiten den Durchmesser der Zahnräder auszuwählen. Dabei stellt sich automatisch die Frage, wie man den Durchmesser eines Zahnrades (Umfang ohne Zähne oder Außenumfang) misst. Hier wäre die konkrete Betrachtung eines Fahrrades sinnvoll. Die direkte Beobachtung erleichtert das Entdecken der Tatsache: je größer der Durchmesser eines Zahnrades ist, desto größer ist die Anzahl seiner Zähne. Es wäre außerdem sichtbar, dass alle Zahnräder über gleich große Zähne verfügen (sonst könnte die Kette die verschiedenen Zahnräder nicht antreiben). Die Anzahl der Zähne ist also direkt proportional zum Durchmesser des Zahnrades. Das Realmodell wurde somit durch diese Überlegungen geschaffen. Das Abzählen der Zähne kann im Fall eines gewöhnlichen Jugendfahrrades zu folgenden Daten führen:

3 Kettenblätter mit: 24, 36 und 46 Zähnen

7 Ritzeln mit: 12, 14, 16, 18, 21, 24 und 28 Zähnen

In einer ersten Überlegung fragt man sich, was passiert, wenn man das Kettenblatt mit 24 und das Ritzel mit 24 Zähnen wählt. Die Übersetzung wird in diesem Fall $\frac{24}{24}=1$, also das Hinterrad dreht sich mit der Frequenz des Tretens. Wählt man hingegen ein Kettenblatt mit 36 und ein Ritzel mit 24 Zähnen, bedeutet das, dass sich das Hinterrad bei einer vollen Umdrehung der Pedale $\frac{36}{24}=1,5$ mal umdreht.

Diese erste Überlegung führt dann zur Vervollständigung des Realmodells, der Quotient zwischen den Zahnzahlen des Kettenblatts und des Ritzels kann mathematisch so geschrieben werden:

$$U = \frac{Z_K}{Z_R}$$

Dieser Bruch beschreibt in unserer Realsituation einen möglichen Gang, in unserem Realmodell haben wir es Übersetzung genannt, was die tiefere Bedeutung eines Ganges besser beschreibt und die Erstellung des mathematischen Modells wesentlich erleichtert.

Jetzt können die mathematischen Operationen innerhalb des vollständigen mathematischen Modells vorgenommen werden. Alle möglichen Übersetzungen finden sich in der Tabelle 3.2.2 wieder:

Z_R	12	14	16	18	21	24	28
Z_K							
24	2	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{7}$	1	$\frac{6}{7}$
36	3	$\frac{18}{7}$	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{12}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{7}$
46	$\frac{23}{6}$	$\frac{23}{7}$	$\frac{23}{8}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{46}{21}$		

Tabelle 3.2.2: Alle möglichen Übersetzungen des Modells mit Bruchzahlen

Anhand dieser Tabelle kann die Phase der Rückinterpretation und Validierung beginnen.

Es ist sofort sichtbar, dass die Übersetzungen $\frac{24}{12} = \frac{36}{18} = 2$ bzw.

$\frac{24}{16} = \frac{36}{24} = 1,5$ gleich groß sind. Die Umrechnung verleitet dazu, die anderen

Werte auch in Dezimalzahlen darzustellen. Die Erstellung einer neuen Tabelle macht weitere Schlussfolgerungen möglich.

Z_R	12	14	16	18	21	24	28
Z_K							
24	2	1,71	1,5	1,33	1,14	1	0,86
36	3	2,57	2,25	2	1,71	1,5	1,29
46	3,83	3,29	2,88	2,56	2,19	1,92	1,64

Tabelle 3.2.3: Alle möglichen Übersetzungen des Modells mit Dezimalzahlen

Aus dieser Tabelle können wir sofort die Information gewinnen, dass auch die

Übersetzungen $\frac{24}{14} = \frac{36}{21} = 1,71$ identisch sind, außerdem stellen die

Übersetzungen $\frac{36}{14}$ und $\frac{46}{18}$ einen so nahen Wert dar, dass sie praktisch auch als identisch angesehen werden können.

Infolge unserer Modellierung können die Aussagen des Verkäufers korrigiert werden, das Fahrrad verfügt eigentlich nur über 17 anstatt 21 Gänge.

In weiterer Folge der Validierung kann der Realitätsbezug stärker in Erscheinung treten. Eine Analyse der Daten aus der Tabelle 3.2.3 ergibt eine Streuung der Übersetzungen zwischen 0,86 und 3,83. Was für eine Bedeutung diese Werte für das reale Fahrrad haben, muss analysiert werden. Wenn der Wert der Übersetzung 0,86 ist, bedeutet dies, dass das Kettenblatt über weniger Zähne als das Ritzel verfügt, also bei einer vollen Umdrehung des Kettenblattes das Hinterrad sich nicht ein Mal voll umgedreht hat. Wahrscheinlich konnten alle SchülerInnen die Erfahrung machen (wurde ihnen im jüngeren Alter gezeigt), dass wenn man bergauf oder bei starkem Gegenwind fährt, man so schaltet, dass die Tretfrequenz am Kettenblatt hoch ist, dabei sinkt die Geschwindigkeit erheblich.

Hingegen dreht sich das Hinterrad 3-mal bei einmaliger Umdrehung des Kettenblattes im Falle einer Übersetzung von 3. Das entspricht einer wenig anstrengender Fahrweise und kommt höchstwahrscheinlich dann zustande, wenn bergab gefahren wird.

Diese Werte sind nicht zufällig entstanden, sie wurden so gewählt, dass die möglichen Gänge seitens der Radfahrer als angenehm empfunden werden. Bei einer zu großen Übersetzung gibt es keine Herausforderung im Ausüben des Sportes, das Gefühl der Unterforderung kennt jeder Radfahrer, der nach einer absolvierten Steigung plötzlich fast widerstandslos tritt, wenn er nicht wieder zu einer höheren Übersetzung umschaltet. Andererseits wäre eine Übersetzung unter 0,80 als unangenehm ineffizient wahrgenommen.

Diese möglichen Werte der Übersetzung sorgen dafür, dass einerseits eine Frequenz von ca. 60 bis 80 Tritten pro Minute (= 60 bis 80 Umdrehungen des Kettenblattes pro Minute), andererseits eine ziemlich konstante erbrachte Leistung des Sportlers von 40-80 Watt gewährleistet ist. Beide Bedingungen sind wichtige Voraussetzungen dafür, dass sich Radfahren als praktikabler Dauersportart durchgesetzt hat.

Das Betrachten eines Fahrrades kann weitere realitätsbezogene Aspekte des Modells enthüllen.

Einerseits kann durch praktisches Ausprobieren der möglichen Gänge folgende Beziehung zwischen der Zahnzahl der Zahnräder und Umdrehung des Hinterrades, folglich der Geschwindigkeit des Fahrrades, festgestellt werden:

- je größer die Zahnzahl des Kettenblattes ist, desto schneller dreht sich das Hinterrad, vorausgesetzt, es wird mit gleicher Frequenz getreten

- bei gleicher Trittfrequenz dreht sich das Hinterrad umso langsamer, je größer die Zahnzahl des Ritzels ist

Wenn wir dann unser mathematisches Modell wieder betrachten, können wir daraus

schließen, dass die von uns definierte Übersetzung $U = \frac{Z_K}{Z_R}$ gleich etwas über die

Geschwindigkeiten aussagen kann. Nämlich, je größer die Übersetzung ist, desto größer ist die Geschwindigkeit des Fahrrads, wenn die Trittfrequenz konstant gehalten wird.

Eine zweite Beobachtung, die gemacht werden kann, bezieht sich auf die Anordnung der Kettenblätter und Ritzel. Es wird immer einige SchülerInnen reizen, den Gang mit der höchsten Geschwindigkeit einzustellen und eine Fahrt so auszuprobieren. Sie können in

dieser Weise die Erfahrung machen, dass eine hohe Übersetzung zwar eine hohe Geschwindigkeit bedeutet, dafür aber mit unangenehm hoher Kraft getreten werden muss. Die für unsere Fragestellung über die Anzahl der Gänge relevante Handlung wäre aber die genauere Inspizierung der Zahnräder.

Die Kettenblätter sind so angeordnet, dass die Zahnräder mit größerem Durchmesser (also größeren Z_K) sich weiter vom Fahrradgestell befinden als die Zahnräder mit kleinerem Durchmesser; im Fall der Ritzel ist genau umgekehrt.

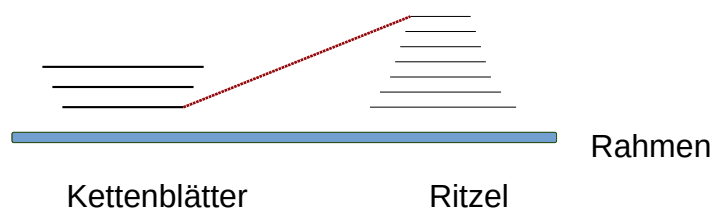


Abb. 3.2.4: Ungünstige Lage der Kette im Hinblick auf Verschleißerscheinungen

Wie es der Skizze entnommen werden kann, gibt es in der realen Situation weitere Fälle, in denen eine Schaltung nicht sinnvoll ist. Die Schrägstellung der Kette bewirkt durch die Reibung an den Zahnrädern einen hohen Verschleiß, was zu häufigerem Ersetzen dieser Teile führt. Dieser, im Modell nicht berücksichtigte Umstand, spielt in der Praxis eine bedeutende Rolle, und führte dazu, dass später andere Arten von Schaltungen erfunden wurden (z.B. Nabenschaltung). Somit reduziert sich die Anzahl der tatsächlich benutzbaren Gänge auf deutlich weniger als 21.

Die Anzahl der sinnvollen Gänge kann noch einmal modelliert werden, das Modell ‚Sinnvolle Gänge‘ im Modell ‚Kettenschaltung‘ kann so entstehen.

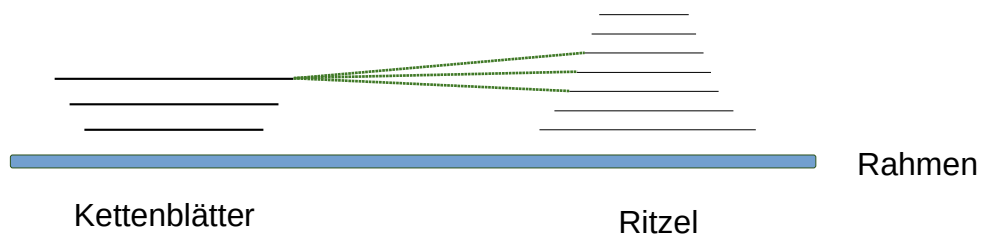


Abb. 3.2.5: Ausgangsskizze für das Modell ‚Sinnvolle Gänge‘

Dieses Modell wäre nicht mehr so anspruchsvoll, wie das Ursprüngliche, SchülerInnen könnten somit anhand der Vorarbeiten selbständig ihre Modelle erstellen. Andererseits bietet das Modellieren der sinnvollen Gänge einer Kettenschaltung mehr Freiheit in der Ausarbeitung des Modells, in der Validierungsphase besteht dann die Möglichkeit, die Unterschiedlichkeit der Modelle zu besprechen.

Einige Schülergruppen werden wahrscheinlich für ein Kettenblatt drei, andere Gruppen vier oder eventuell anhand empirischer Beobachtungen sogar fünf Ritzel in Betracht ziehen. Die so entstandenen mathematischen Modelle würden dann die Gestalt

$$\text{Anzahl praktikabler Gänge} = a \cdot \text{Anzahl Kettenblätter}$$

haben, wobei a je nach Modell die Werte 3, 4 oder 5 annimmt.

Dieses neue Modell kann mehr leisten, als das Entstehen einer Gleichung. Man könnte sogar mit einer neuen Frage, die sich aus diesem kleinen Modell fast automatisch ergibt, weiter arbeiten: Ist die Anordnung der Zahnräder so, dass die sinnvollen Gänge im Hinblick auf Verschleißerscheinungen auch sport-technisch sinnvoll sind?

Dazu betrachten wir wieder die Tabelle 4.1.3 mit den Dezimalzahlen und suchen daraus die Übersetzungen, die den verschleißfreien Gängen entsprechen. Hier muss natürlich auch die Skizze zu Hilfe genommen werden, um jedem Kettenblatt die ‚guten‘ Ritzel zuordnen zu können. Es ist wahrscheinlich, dass sogar eine neue Skizze angefertigt wird, falls es SchülerInnen gibt, die bemerken, dass das größte Kettenblatt und das dritte Ritzel

der gleichen Ebene zugehören (in unserer Abb. 3.2.5 bedeutet das, dass die beiden Zahnräder sich auf der gleichen Höhe befinden). Ausgehend von drei Ritzel auf ein Kettenblatt und die Skizze 3.2.5 kann man z.B. die Tabelle 3.2.6 erstellen:

Z_R	12	14	16	18	21	24	28
Z_K							
24					1,14	1	0,86
36				2	1,71	1,5	
46			2,88	2,56	2,19		

Abb. 3.2.6: Tabelle mit sinnvollen Gängen

Es ist sichtbar, bei diesem Vorgang sind die „Doppelgänger“, die größten und einige mittlere Übersetzungen verschwunden. Allerdings sind die mittleren Werte gut durch die verbliebenen Zahlen vertreten.

Jetzt können unsere früheren Überlegungen bei der Interpretation der Daten helfen. Die Übersetzungen zwischen den Werten 1 und 2 bedeuten: eine Umdrehung des Kettenblattes wird in 1 bis 2 Umdrehungen des Hinterrades übersetzt, dies bedeutet eine effiziente Fahrweise, gut geeignet für ebene Strecken. Bei der Wahl des Kettenblattes mit 46 Zähnen und des Ritzels mit 16 bzw. 18 Zähnen dreht sich das Hinterrad fast drei mal während einer Umdrehung des Kettenblattes, diese Übersetzung eignet sich um hohe Geschwindigkeiten zu erreichen, ideal während der Fahrt abwärts auf einer geneigten Strecke.

Die Übersetzung 0,86 kommt hingegen für die Fahrt aufwärts auf einer Steigung zum Einsatz, hier muss öfter getreten werden, während das Hinterrad sich mit kleinerer Frequenz dreht.

Fazit:

- Unser Fahrrad kann fast dasselbe leisten auch ohne die Gänge, die durch die Verschleißerscheinungen an Kette und Zahnrädern lieber nicht benutzt werden sollen.
- Rennfahräder und Mountainbikes brauchen andere Übersetzungen als Citybikes, diese Übersetzungen werden durch eine andere Anordnung der Zahnräder und/oder durch andere Zahnzahlen (und somit andere Durchmesser) der Kettenblätter und Ritzel erreicht. Während der Fahrer eines Mountainbikes vor allem kleine Übersetzungen braucht wegen des öfteren bergauf Fahrens, sind für den Rennfahrer die großen Übersetzungen wichtig, da er große Geschwindigkeiten auf ebenem Gelände erreichen will.

Noch zu berücksichtigen: bei der Konstruktion von Fahrrädern muss beachtet werden, dass das Drehmoment in einem Bereich bleibt, in welchem die Anstrengungen des Radfahrers nicht zu groß sind. Im Kapitel 6 wird eine mögliche Erweiterung dieses Themas in den Bereich der Physik beschrieben, dabei fällt der Fokus ausgehend von diesem Modell auf Größen wie Drehfrequenz, Drehmoment und Leistung.

Zum Thema Bruchzahlen möchte ich zwei Problemlösungsaufgaben präsentieren.

Die erste Aufgabe könnte als Rätselfrage auf einer fiktiven Party gestellt werden und lautet:

Um welchen Bruchteil übertrifft $\frac{4}{4}$ die Zahl $\frac{3}{4}$?

Nicht nur SchülerInnen einer 1. Klasse würden auf diese Frage schnell die Antwort „Um $\frac{1}{4}$.“ geben. Die knappe Formulierung dieser Frage birgt einige Fallen. Es fällt nicht schwer das Wort Bruchteil als Bruchzahl zu deuten. Erst eine verneinende Antwort regt die Gefragten zum Weiterdenken an.

Weiterhin steht das Wort Bruchteil näher beim Bruch $\frac{4}{4}$, was zur Folge hat, dass einige SchülerInnen Schwierigkeiten haben werden das Wort ‚Bruchteil‘ mit der Zahl $\frac{3}{4}$ in Verbindung zu setzen. Es wird wahrscheinlich Personen geben, die darauf kommen den Unterschied von $\frac{1}{4}$ als Bruchteil von $\frac{3}{4}$ anzusehen. Der Frage nachzugehen, welchen Bruchteil $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$ repräsentiert, ist für viele SchülerInnen der 5. oder 6. Schulstufe die nächste, zu überwindende Hürde. Wie findet man heraus, welcher Anteil eine Zahl von einer anderen Zahl beträgt? Das fällt SchülerInnen dann leichter zu verstehen, wenn sie mit ganzen Zahlen operieren. Eine weiterhelfende Anregung der Lehrkraft könnte somit ein Hinweis auf diese Analogie sein.

Besser wäre es aber den Lernenden noch die Möglichkeit zu geben, alleine Strategien zu finden, um den gewünschten Bruchteil auszurechnen. Einige SchülerInnen werden die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ in Dezimalzahlen umrechnen. Das hat den großen Vorteil, dass man Zahlen in einer „Strich-freien“ Form dargestellt bekommt, was der Darstellung ganzer Zahlen viel eher ähnelt; die Idee die Zahlen miteinander zu dividieren läge in einigen Fällen so eher auf der Hand .

Die Umrechnung der Brüche könnte in einer anderen Art und Weise auch helfen, vor allem bei Lernenden, die gut im Kopfrechnen sind. Die Dezimalzahlen 0,25 und 0,75 wären nicht besonders schwer zu vergleichen, es bestünde die Möglichkeit des sofortigen Einsehens, dass 0,25 ein Drittel der Zahl 0,75 ist.

Eine weitere Problemlöseaufgabe, die mit der Modellaufgabe Kettenschaltung eine gemeinsame Wirkung auf die mathematischen Kompetenzen der Lernenden entfalten kann, heißt *Farey-Brüche*.

Wähle zwei beliebige positive Brüche. Addiere die Zähler und die Nenner und bilde aus der Summe einen neuen Bruch. Wie verhält sich der Wert des neuen Bruchs im Vergleich zu den zwei Ausgangsbrüchen? Ist das immer so?

In einer ersten Phase des Herantastens an die Aufgabe werden SchülerInnen zwei beliebige Brüche wählen, die angegebenen Operationen durchführen und dem Ergebnis wahrscheinlich ratlos gegenüber stehen. Wählen sie z.B. Brüche wie $\frac{7}{9}$ und $\frac{5}{4}$, wird der neue Bruch $\frac{12}{13}$. Ein schneller Vergleich ist so nicht möglich, man müsste alle drei Bruchzahlen auf einen gemeinsamen Nenner oder Zähler bringen, was nicht nur in diesem konkreten, sondern in vielen anderen Fällen, ziemlich viel Rechenarbeit bedeutet. Auf die Idee zu kommen die Bruchzahlen in Dezimalzahlen umzuformen, sollte Lernenden nicht allzu schwer fallen. Vergleicht man die Zahlen $0.7777 = \frac{7}{9}$, $1.25 = \frac{5}{4}$ und $0.92307 = \frac{12}{13}$, sieht man viel schneller ihre Anordnung am Zahlenstrahl. Eventuell werden einige SchülerInnen auch andere Kombinationen von Bruchzahlen ausprobieren. Man kann beide Brüche mit einem Dezimalwert unter 1 wählen, dann mit einem Wert größer als 1. Auf jeden Fall ist vorherzusehen, dass in dieser Anfangsphase einige Male in Dezimalzahlen umgerechnet wird.

Eine andere Wahl der Bruchzahlen, eine Spezialisierung also, könnte einen ersten Überblick über die Lage verschaffen. Die Wahl zweier gut bekannten Zahlen, deren Dezimalwert den SchülerInnen vertraut ist, kann sich aus mehreren Gesichtspunkten als geschickt erweisen. Einerseits werden die neuen Brüche leichter mit den vorangegangenen Brüchen vergleichbar sein, andererseits lässt sich so ein Diagramm leichter erstellen.

Wählt man $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ als die ersten zwei Ausgangsbrüche, sieht ein mögliches Diagramm, wie in der Abbildung 3.2.7 aus.

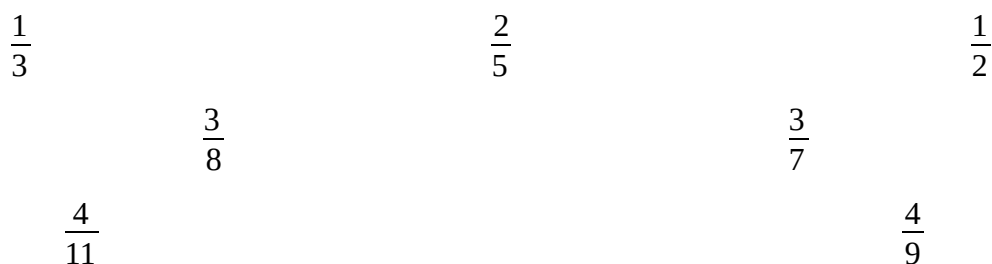


Abb. 3.2.7: Anordnung der neu entstandenen Brüche entsprechend ihrer Größe

Die Überlegung: $\frac{2}{5}$ liegt zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ fällt SchülerInnen nicht besonders schwer. Verkleinert man den Bruch $\frac{2}{5}$ auf $\frac{2}{6}$ gelangt man so zur Zahl $\frac{1}{3}$. Vergrößert man hingegen den gleichen Bruch auf $\frac{2}{4}$ gelangt man zur Zahl $\frac{1}{2}$. Die erste Zeile des Diagramms ist fertig. Aus den Bruchzahlpaaren $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$ bzw. $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{5}$ gelangt man zu den neuen Brüchen $\frac{3}{8}$ und $\frac{3}{7}$. Auf den ersten Blick ist zumindest klar: $\frac{3}{8}$ ist kleiner als $\frac{3}{7}$. Dass $\frac{3}{8}$ größer ist als $\frac{1}{3}$ (bzw. $\frac{3}{7}$ kleiner ist als $\frac{1}{2}$) kann nach dem gleichem Schema festgestellt werden, mit dem wir in der ersten Zeile gearbeitet haben: $\frac{3}{9}$ wäre gleich groß wie $\frac{1}{3}$, also ist $\frac{3}{8}$ sicher größer als $\frac{1}{3}$ (bzw. $\frac{3}{6}$ wäre gleich groß wie $\frac{1}{2}$, also ist $\frac{3}{7}$ sicher kleiner als $\frac{1}{2}$). Die Relation der Zahlen $\frac{3}{8}$ und $\frac{3}{7}$ zu $\frac{2}{5}$ ist nicht mehr so leicht festzustellen. Eine Umwandlung der drei Brüche in Dezimalzahlen gibt dann Aufschluss über die gesuchten Relationen. Auf ähnliche Weise ist die Weiterarbeit mit dem Diagramm zu ermöglichen, die Position der Zahlen in der dritten Zeile kann auch festgestellt werden.

Diese Spezialisierung lässt erahnen, wo die neuen Brüche immer landen werden, mindestens in diesem Spezialfall. Natürlich ist damit die Frage noch nicht im Allgemeinen beantwortet. Auf die Durchführung der algebraischen Beweismethode wird hier verzichtet, da sie aus dem Standpunkt der Gemeinsamkeiten mit der Modellierungsaufgabe keine Relevanz besitzt. Es sei nur so viel erwähnt, dass zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gewählt werden, sodass

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} ,$$

der neu entstandene Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ und die ursprünglichen Brüche werden auf gemeinsamen Nenner gebracht. Die Umformungen führen dann zu den erahnten Relationen zwischen den drei Brüchen.

Außerdem können gute Argumentationen ohne mathematische Operationen gegeben werden, wodurch SchülerInnen die Beziehung der Brüche nach kurzer Überlegung erkennbar wird. Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sollen Säurekonzentrationen angeben. Dabei sind ,a‘ bzw. ,c‘ die Säuremengen (in Liter) im Gesamtvolumen von ,b‘ bzw. ,d‘ Liter Gesamtvolumen. Werden die zwei Lösungen zusammengeschüttet, wird $a+c$ Liter Säure in $b+d$ Liter Gesamtvolumen der Lösung vorhanden sein. Diese neue Konzentration liegt

sicher zwischen den zwei ursprünglichen Konzentrationen, die schwächere Lösung ‚entschärft‘ die stärkere Lösung.

Auch im Pizzakontext kann eine plausible Erklärung gegeben werden. Bestellen auf einer Party ‚b‘ Leute ‚a‘ Pizzen, bekommt jeder von ihnen ein a/b großes Stück Pizza. Auf einer anderen Party mit ‚d‘ Personen werden ‚c‘ Stück Pizzen bestellt. Ihre Pizzastücke sind somit c/d groß. Wenn es nicht zufällig gleich große Pizzastücke für beide Partys entstehen und die zwei Partys noch vor dem Verzehr der Pizzastücke unter dem Motto ‚gerechte Verteilung der Pizzen‘ zusammen weitergefeiert werden, müssen die Personen, die ursprünglich größere Stücke bekamen ein Teil ihrer Portion an die anderen abgeben. Die Größe der gerechten Stücke liegt somit zwischen den Größen der ursprünglichen Stücke

und ist gleich $\frac{a+c}{b+d}$.

Was allerdings noch gemacht werden kann, das zur Erweiterung der Erkenntnissen führt, ist die Darstellung der Brüche auf einer Zahlengeraden. Die obigen Zahlen würden dann das folgende Bild ergeben, die gut die Position der neue entstandenen Brüche veranschaulicht.

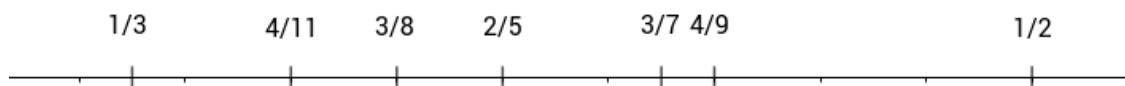


Abb. 3.2.8: Position der Brüche auf der Zahlengerade

Analyse:

Bei diesen drei Aufgaben aus dem Bereich der Bruchzahlen stellte sich während einer bestimmten Phase des Lösens die Umrechnung von Bruchzahlen in Dezimalzahlen als eine hilfreiche Strategie heraus. Somit konnten Zusammenhänge besser erforscht werden.

Die Umwandlung erleichterte außerdem den Vergleich zwischen den Bruchzahlen. Auch die Erfahrung wurde gemacht, dass ein Vergleich der Bruchzahlen nur unter bestimmten Bedingungen, wie gleicher Zähler oder gleicher Nenner, auf den ersten Blick möglich ist. Zusätzlich förderten die Aufgaben ein korrektes Operieren mit Bruchzahlen. Besonders die letzte Aufgabe ermöglicht die Erkenntnis, dass wenn Bruchzahlen addiert werden, führt die Addition der Zähler und der Nenner nicht zu einem korrekten Ergebnis, sonst müsste sich der neue Bruchzahl auf der Zahlengerade rechts von den beiden Summanden befinden, wenn beide Zahlen positiv sind.

3.3 Funktionen

Die Modellierungsaufgabe ‚Handytarife‘ wurde unter anderem von Fries 2004 publiziert.

Versucht herauszufinden, ob euer Handytarif für euch der günstigste ist.

Selbstverständlich sollte diese Modellierungsaufgabe auch in Gruppenarbeit gelöst werden. SchülerInnen einer Gruppe einigen sich über einen bestimmten Anbieter, dessen Angebote recherchiert werden. Da nicht alle Gruppen ein und denselben Anbieter wählen werden, ermöglicht die Vielfalt der zu untersuchenden Anbieter auch gleich einen Vergleich der Tarife gleicher Art.

Um ein mathematisches Modell erarbeiten zu können, also irgendwie zu Zahlen zu gelangen, mit denen man mathematisch operieren kann, ist ein erster Eindruck über die reale Situation unabdingbar.

Ein guter Ansatz ist die Webseite des gewählten Anbieters aufzurufen und dort zu recherchieren. Mittlerweile findet man die Tarifbestimmungen der meisten Mobiltelefon-Anbieter in tabellarischer Form vor. Das verleitet den Leser der Webseite zum Glauben, dass alle relevanten Informationen vorhanden sind und ein direkter Vergleich sofort möglich ist.

Dass dem nicht so ist, wird SchülerInnen spätestens in der Endphase des Modellierens klar, wenn sie ihre Modelle präsentieren werden und die Unterschiede besprochen und erklärt werden.

Die Planungsphase wird Folgendes darlegen: es gibt drei Arten von Tarifen für Inlandsgespräche, entweder eine Flatrate (Fixe Summe pro Monat für unlimitedes Telefonieren), einen Tarif mit Grundkosten und eine bestimmte Summe pro Minute, oder einen gleichmäßig steigenden Preis pro Minute ohne Grundkosten. Die Lehrkraft kann hier den wertvollen Hinweis geben, sich in erster Linie mit den Kosten pro Telefonat im Inland zu beschäftigen, sonst wird die Datenmenge für die Lernenden einfach zu unübersichtlich und der Zeitaufwand für diese Einstiegsphase zu groß.

Ein Beispiel für die zusammengetragenen Informationen kann lauten:

Flatrate:	17 Euro monatlich
Tarif 1:	10 Cent pro Minute ohne Grundgebühr
Tarif 2:	10 Euro Grundgebühr pro Monat plus 3 Cent pro Minute

SchülerInnen können schnell einsehen, dass die verschiedenen Tarife verschiedene zu zahlende Endbeträge ergeben können, abhängig davon wie viel man in einem Monat telefoniert. Falls der nächste Schritt einigen Gruppen doch schwer fallen würde, kann die Lehrkraft die Erstellung einer Wertetabelle vorschlagen.

Anhand der oben aufgelisteten Daten sieht eine mögliche Wertetabelle wie folgt aus:

Gesprächsstunden im Monat	Flatrate	1. Tarif	2. Tarif
0	17	0	10
1	17	6	11,8
2	17	12	13,6
3	17	18	15,4
4	17	24	17,2
5	17	30	19
6	17	36	20,8
7	17	42	22,6
8	17	48	24,4
9	17	54	26,2
10	17	60	28

Tabelle 3.3.1: Errechnete Daten des Modells Handytarife

Die Daten für ausgewählte Anzahlen von Gesprächsstunden sind in jeweils einer Zeile für alle drei Tarife aufgelistet, allerdings ist der Gesamtüberblick erst dann gut sichtbar, wenn die Tabelle graphisch dargestellt wird. Betrachtet man die Graphen der drei linearen Funktionen aus der Abbildung 3.3.2, ist schnell klar, welcher Tarif unter welchen Umständen vorteilhaft ist.

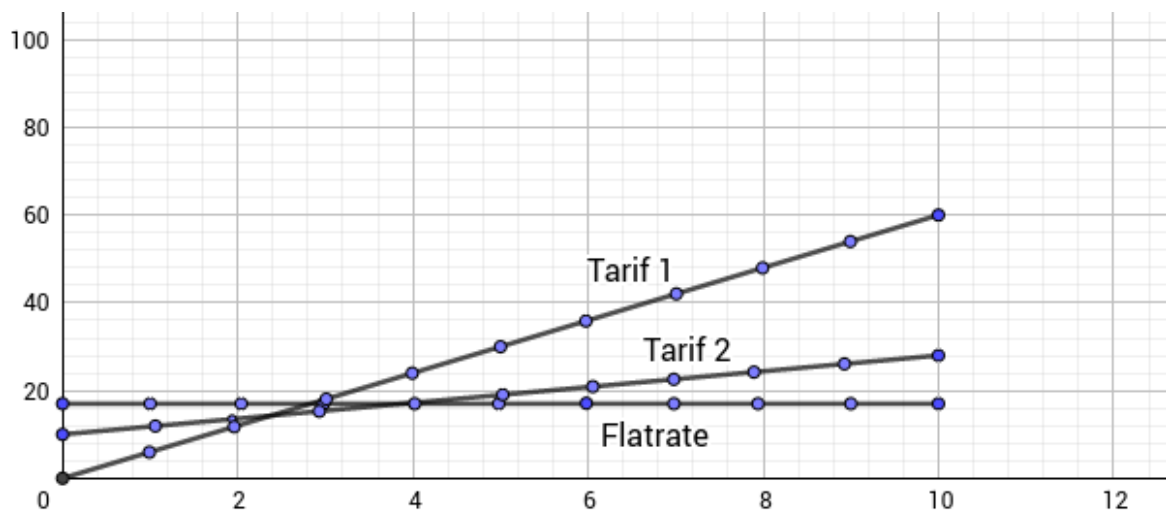


Abb. 3.3.2: Handytarife graphisch dargestellt

Dieses Modell geht von vielen Vereinfachungen aus, in weiterer Folge sollte reflektiert werden, ob es die Realität gut genug beschreibt. Falls man die Antwort auf die gestellte Frage bekommen und sich entschieden hat den Tarif nicht zu wechseln, kann man hier aufhören.

Während der Planungsphase fiel möglicherweise den SchülerInnen ein anderer Aspekt der Situation auf, die noch nicht berücksichtigt wurde: die Rolle der Taktung bei der Berechnung der Kosten. Das stört vielleicht die schönen mathematischen Ergebnisse, die bis jetzt erreicht werden konnten, wenn es aber um Praxistauglichkeit geht, ist die Schönheit der Daten nicht das Wichtigste.

Die Verbesserung des Modells benötigt wieder eine Recherche-Phase, wenn geklärt werden soll, was die Taktung ist, warum sie wichtig ist.

Wir gehen davon aus, dass die Recherche den Unterschied zwischen Sekunden-Taktung (der Verbraucher bezahlt die sekundengenaue Gesprächsdauer) und Minuten-Taktung (sollte das Gespräch kürzer als eine Minute dauern, muss eine Minute bezahlt werden, bei längeren Gesprächen wird auf die nächste Minute aufgerundet) erläuterte.

Eine mögliche Aufzeichnung der Gespräche in einem Monat könnte so aussehen:

Gespräch	Dauer
1	1 min 14 sec
2	35 sec
3	3 min 54 sec
4	2 min 34 sec
5	45 sec
6	8 min 22 sec
7	5 min 45 sec
8	38 sec
9	1 min 12 sec
10	6 min 19 sec

Abb. 3.3.3: Liste der Gespräche mit Dauer

Folgende Fragen können schnell geklärt werden:

1. Wie lange und wie oft wurde telefoniert?
2. Wie viel Gesprächsdauer wird berechnet?

Bei Sekunden-Taktung gilt dann: es wurde im entsprechenden Monat

$74 + 35 + 234 + 154 + 45 + 502 + 345 + 38 + 78 + 379 = 1884$ Sekunden lang telefoniert.

Da es genau so viele Sekunden zu bezahlen sind, ist in diesem Fall die Anzahl der Gespräche irrelevant.

Bei Minuten-Taktung gilt Folgendes: es werden $2 + 1 + 4 + 3 + 1 + 9 + 6 + 1 + 2 + 7 = 36$ Minuten verrechnet.

Auch ohne die Durchführung dieser Berechnungen war klar, für den Verbraucher ist die Minuten-Taktung nachteilig. Wir möchten die Tarife aber vergleichen, um den am wenigsten nachteiligen Tarif zu eruieren. Das vorherige Modell hat uns über die Vorteile einer graphischen Darstellung überzeugt. SchülerInnen, die auch für die Klärung der Frage, welcher Tarif nachteiliger ist, eine ähnliche graphische Aufbereitung der Daten vornehmen wie im vorigem Fall, werden einsehen müssen, hier müssen die Daten anders aufbereitet werden. Versuchen wir es vielleicht mit einem Diagramm, wie es in der Abb. 3.3.4 zu sehen ist. Die gelben Balken zeigen die berechneten Minuten bei Sekunden-Taktung, die braunen Balken repräsentieren die verrechneten Minuten bei Minuten-Taktung. Der Vorteil dieser Darstellung besteht darin, dass man die Unterschiede in der Verrechnung der Gespräche auch in Abhängigkeit von der Anzahl der geführten Gespräche ersehen kann.

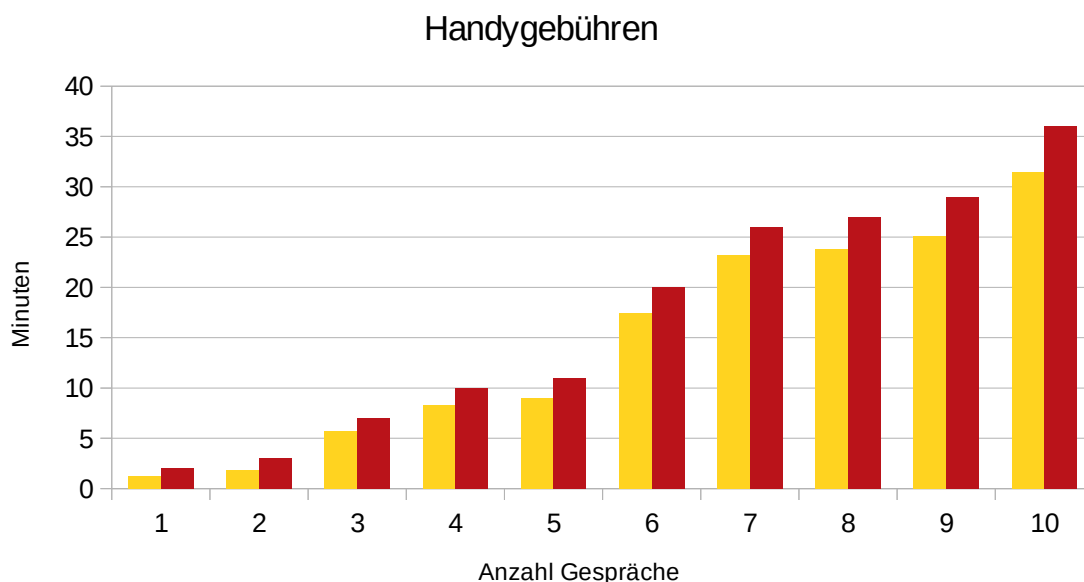


Abb. 3.3.4: Getaktete Tarife im Vergleich

Der Vergleich eines Minuten-getakteten Tarifs mit einem Sekunden-getakteten Tarif hat vielleicht auf den ersten Blick nicht so viel Sinn, kann trotzdem einen Impuls zum Erstellen von Diagrammen, in denen verschieden-getaktete Tarife dargestellt werden, setzen. Ein solches Diagramm wird ganz relevant, wenn man einen Minuten-getakteten mit einem 5-Minuten-getakteten Tarif vergleicht, den es tatsächlich früher gab.

Die Entscheidung über die Wahl des Tarifs kann anhand dieser Erweiterung doch revidiert werden. Ganz klar ist ein Flatrate-Tarif günstiger und eine 5-Minuten-Taktung sehr unvorteilhaft für den Verbraucher.

Diese Modellierungsaufgabe wurde in einer Zeit erstellt, in der die Gesprächskosten tatsächlich so berechnet wurden. Eine Internet-Recherche über die Mobilfunkgesellschaften hätte eine Auflistung genau in dieser Form ergeben. Heute werden nun mehr Flatrate-Tarife angeboten, die eher die Datenmengen betreffen; die Gesprächskosten sind im Preis inbegriffen. Trotzdem wäre die Erstellung des Modells in dieser Form insofern interessant, als die Ergebnisse die heutige Verrechnungsart der Gespräche gut erklären können. Modelliert man also wie oben beschrieben, muss die Recherche darin bestehen, Rechnungen aus dem ersten Jahrzehnt dieses Jahrtausends zu untersuchen.

Anschließend, wenn man über genügend Zeit verfügt, kann ein neues Modell ausgehend von aktuelleren Daten konstruiert werden. Die Internetseite <http://www.mobilfunkrechner.de/akwien/pdf/mobilfunknetz.pdf> kann optimal für eine Datenrecherche benutzt werden. Der Internetseite kann man entnehmen, Taktungen sind immer noch aktuell, sowohl bei Gesprächen (60/60 bedeutet Minuten-Taktung) als auch bei Datentransfers. Die Taktung des Datentransfers verfügt sogar über eine größere Vielfalt als die Taktung der Gespräche, was in Kombination mit anderen Kosten vielfältig modelliert werden kann.

Auch ein Vergleich der Internetseite der Arbeiterkammer mit den jeweiligen Webauftritten der Anbieter ist interessant, da die Daten ganz anders dargeboten werden. Dies könnte auch zu weiteren Erkenntnissen und eventuellen Modellierungsversuchen führen.

Das Problem Who-is-who der Haustiere wird der Modellierungsaufgabe Handytarife gegenübergestellt.

Eine Familie lebt mit ihren Haustieren Strolch, Tiger, Carlo und Maxi unter einem Dach, in friedlicher Gemeinschaft von Mensch, Hund, Katze, Hamster und Papagei. Maxi ist kleiner als Tiger, der seinerseits größer ist als der Hund. Carlo ist älter als der Hamster, der sich mit dem Papagei besser versteht als mit Maxi. Erstaunlicherweise haben der Hamster und der Papagei keine Angst vor Tiger. Man finde die Namen der einzelnen Tiere heraus.

Diese Aufgabe kann inhaltlich bei SchülerInnen der Sekundarstufe I durch den Reiz, es entwirren zu wollen, die Bereitschaft zum Lösen sehr steigern; vor allem bei Lernenden, die sich gerne mit Rätselfragen beschäftigen. Sprachlich begabte Kinder werden zuerst versuchen durch Deutung des Textes näher an die Lösung heran zu kommen. Dies kann insofern hilfreich sein, dass schnell eingesehen werden muss, direkte Informationen sind im Text nicht versteckt. Einige Beziehungen sind durch Negation (grammatikalisch) ausgedrückt. Die zündende Idee wäre hier den Informationsgehalt der Negationen zu benutzen. Dies liegt SchülerInnen nicht sofort auf der Hand, sie erkennen nicht so schnell den eindeutigen Charakter solcher Aussagen. Diese müssen in einem nächsten Schritt in einer übersichtlichen Form gebracht werden, idealerweise bietet sich das Aufstellen einer Tabelle an. In einem ersten Schritt können aus Aussagen wie: ‚Tiger ist größer als der Hund‘, ‚Carlo ist älter als der Hamster‘ logisch korrekte Schlüsse gezogen werden (Tiger ist nicht der Hund, Carlo ist nicht der Hamster). Diese Beziehungen werden mit Hilfe von Minuszeichen verdeutlicht (siehe Tabelle 3.3.5 links, schwarze Minuszeichen). Sind alle im Text formulierten Negationen eingetragen, bleibt nun mehr die Eintragung der restlichen Minuszeichen für weitere nicht bestehende Beziehungen und der Pluszeichen für die eindeutige Zuordnung der Namen übrig (Tabelle 3.3.5 rechts, rote Minus- und Pluszeichen).

	Tiger	Maxi	Carlo	Strolch
Hund	-			
Katze				
Hamster	-	-		
Papagei	-	-	-	

	Tiger	Maxi	Carlo	Strolch
Hund	-	+	-	
Katze	+	-	-	
Hamster	-	-		
Papagei	-	-	-	

Tab. 3.3.5: Tabellen mit Tierarten und Namen

Diese Aufgabe wurde im Abschnitt ‚Funktionen‘ behandelt, obwohl der Lösungsweg keine Arbeit mit Hilfe von Funktionen aufweist. Trotzdem kann anhand der Aufgabe der Begriff Funktion wiederholt bzw. vertieft, noch einmal die tabellarische Form einer Funktion und die Eigenschaft Bijektivität besprochen werden.

Analyse:

- Änderung der Darstellungsform einer Funktion

In der Modellierungsaufgabe Handytarif sammelten die SchülerInnen die notwendigen Daten einiger alter Rechnungen in Form von Zahlen. In dieser Form können keine alltagstaugliche Vergleiche gemacht werden, somit mussten Modalitäten gefunden werden, um die Tarifarten vergleichen zu können. Dies führte zur Erstellung der Tabelle, in der die Gesprächskosten für verschiedene Zeitspannen pro Monat aufgelistet wurden. Die Unterschiede wurden dadurch leichter zu entnehmen. Wechselt man in der Darstellung der Funktionen von der tabellarischen zur graphischen Form, wird die Interpretation der errechneten Daten auf einen Blick möglich. Die graphische Darstellung von Funktionen schafft außerdem eine visuell-kognitive Struktur des Begriffes Funktion, auf die immer wieder zurückgegriffen werden kann. Auch die Rückschau auf die verwendeten Daten ist interessant: obwohl in einem Fall immer der gleiche Wert von 17 Euro vorkam, in den anderen beiden Fällen die Werte für verschiedene Gesprächsdauer sich ständig änderten, trotzdem werden die Veränderungen der Werte in allen drei Fällen durch eine gerade

Strecke repräsentiert. Im Fall der Tarife 1 und 2 sorgt die Steigung der Strecken dafür, dass die zu zahlenden Beträge immer größer werden. Man kann auch die Tarife 1 und 2 näher betrachten, bei Tarif 2 hat der Punkt $(0|10)$ etwas mit der Grundgebühr zu tun, kein Punkt auf diesem Graphen kann ‚niedriger‘ als dieser Punkt liegen, die y-Komponente des Punktes stellt die Grundgebühr dar. Dieser Punkt liegt aber nicht auf dem Graphen des Tarifs 1, auf diesem Graphen liegt der Punkt $(0|0)$, was so viel bedeutet, dass bei Nichtbenutzung auch nichts zu bezahlen ist.

Die Weiterentwicklung des Modells Handytarife verlangte nicht nur nach einer Weiterverarbeitung der Daten, sondern nach einer anderen Visualisierung der neuen Daten. Hier war die Erstellung eines Diagramms vorteilhafter, als die Repräsentation als Graph.

Während des LöSENS des Problems Who-is-who der Haustiere führte die Idee einer eindeutigen Zuordnung der Menge ‚Namen‘ zur Menge ‚Haustiere‘ zur Erstellung der Tabelle, die die Lösung des Problems ermöglichte. Betrachtet man die zwei Mengen $\{ \text{Hund, Katze, Hamster, Papagei} \}$ und $\{ \text{Carlo, Maxi, Tiger, Strolch} \}$ und besinnt man sich darauf, dass jedem Element einer Menge ein eindeutig bestimmtes Element der anderen Menge zugeordnet wird, hat man schon eine Darstellungsform einer bijektiven Funktion. In diesem Fall lautet die Form: $\{ \text{Hund, Katze, Hamster, Papagei} \} \rightarrow \{ \text{Carlo, Maxi, Tiger, Strolch} \}$.

Diese Erkenntnis kann leicht zur Umwandlung in die tabellarische Form verleiten.

Kommt man auf die Idee der bijektiven Abbildung zwischen den zwei Mengen, ist eine zweite gute Idee notwendig, um zur Lösung zu erlangen, nämlich die Negationen in die Tabelle einzutragen: „Carlo ist älter als der Hamster“ bedeutet Carlo kann nicht der Hamster sein (mathematisch: Carlo ist kein Argument unserer Funktion für den Wert Hamster). In der Tabelle werden zuerst nicht bestehende Relationen eingetragen, durch einfache logische Überlegungen können in weiterer Folge die gesuchten Beziehungen gefunden werden.

Weiterführend können auch andere Darstellungsformen von Funktionen thematisiert werden. In diesem Fall kann die Erkenntnis gewonnen werden, eine explizite Form der Art $f(x) = a \cdot x + b$ oder das Skizzieren als Graph wäre komplett sinnlos.

- Übersetzung des Aufgabentextes

Im Gegensatz zu Textaufgaben in Schulbüchern, wird es in beiden Fällen notwendig sein ziemlich viel Zeit in die Übersetzung des Aufgabentextes in die mathematische Sprache zu investieren. Dies stellt für beide Aufgaben die Planungsphase dar, die sich als erster, ziemlich großer Stolperstein entpuppen kann.

Sowohl das Extrahieren der relevanten Daten von der Homepage eines Handyanbieters für die Konstruktion eines Modells, mit dem man rechnen kann, als auch die Interpretation des absichtlich verwirrend gestalteten Textes werden wahrscheinlich am Anfang zu ein paar Irrwegen führen. Diese müssen aufgegeben werden, die Frustration und die Bereitschaft zum Aufgeben wächst somit schnell.

Das ist aber genau ein sehr wichtiger Aspekt, wenn SchülerInnen Mathematik fürs Leben lernen sollen. Im Alltag sind die Informationen einfach nicht schön sauber vorbereitet, sodass man ohne Vorarbeit nicht weiterkommen kann. Es gibt genug Alltagssituationen, in denen genau das Gegenteil der Fall ist: Daten werden nicht vollständig dargelegt, sodass ein verzerrtes Bild der Situation entsteht.

4 Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Bereiche Modellieren und Problemlösen

Wenn ein Lernender sich mit Problemlöseaufgaben beschäftigt, wird er am Anfang und während der Arbeit einige Hürden überwinden müssen (sonst kann die Aufgabe nicht als Problem bezeichnet werden). Beim Problemlösen sind die Schwierigkeiten mathematischer Natur, meistens müssen Lernende fehlende direkte Lösungswege oder fehlende mathematische Kenntnisse durch spezifische Methoden der Lösungsfindung, sogenannte Heuristiken ersetzen.

Beispielsweise soll in einer Problemlöseaufgabe herausgefunden werden, wie viele Fäden allgemein benötigt werden, wenn Nadeln auf dem Umfang eines Kreises befestigt werden, mit Fäden solange umgeschlungen werden, bis alle Nadeln ein Mal berührt wurden und die erste Nadel wieder erreicht wird. Ausgehend von der ersten Nadel soll die Lücke zur nächsten Nadel gleich groß sein, wie die Lücke von der zweiten zur dritten Nadel, u.s.w. In der Abbildung 4.1 zeigt die Skizze die Anordnungen mit sechs Nadeln und Lückengrößen von ein, zwei wie drei Nadelabständen.

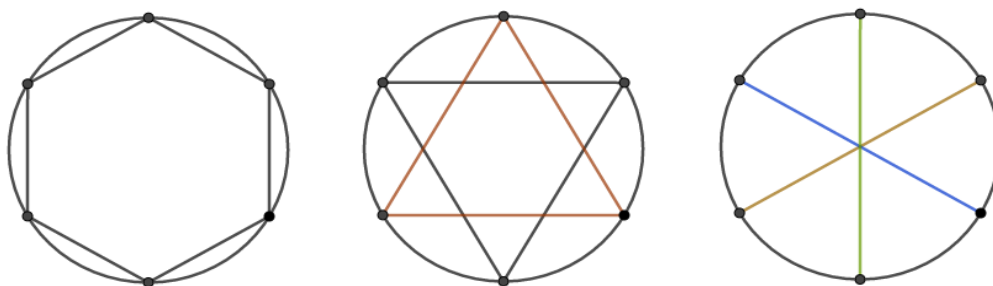


Abb. 4.1: Sechs Nadeln auf einem Kreis mit Lückengrößen von 1, 2 und 3 Nadelabständen

Nach sorgfältigem Durchlesen der Aufgabe werden Lernende schnell feststellen, eine schnelle Standardlösung steht hier nicht zur Verfügung. Für dieses Problem wird es am Anfang sinnvoll sein, viele Einzelfälle zu analysieren; der Reichtum der möglichen Kombinationen aus der Anzahl der Nadeln und der Lückengröße beim Verschlingen des Fadens leitet die Arbeit in diese Richtung. Diese Vorgehensweise wird zusätzlich durch die vorhandenen Skizzen unterstützt. Diese Methode heißt bei Mason ‚Spezialisieren-Verallgemeinern‘. Die so gewonnenen Daten sollen in einer Tabelle zusammengefasst werden, dies hilft auch dabei, keine Möglichkeit bei der Kombination von Nadeln und Lücken auszulassen.

Nadeln	Lücken						
	1	2	3	4	5	6	7
3	1	2	3				
4	1	2	1	4			
5	1	1	1	1	5		
6	1	2	3	2	1	6	
7	1	1	1	1	1	1	7

Tab. 4.2: Anzahl der Fäden in Abhängigkeit von der Nadelanzahl und der Lückengröße

Fehlt die tabellarische Form, wird es schwierig sein eine Gesetzmäßigkeit in der Beziehung zwischen der Nadelanzahl, der Lückengröße und der Fadenanzahl zu entdecken. Selbst wenn eine Tabelle erstellt wird, wird die Lösung womöglich nicht sofort gefunden. Es ist sehr wahrscheinlich, dass mehrere Hypothesen aufgestellt, geprüft und wieder verworfen werden.

In einer späteren Arbeitsphase, wenn die richtige Beziehung gefunden und sie eventuell an weiteren Spezialfällen geprüft wurde, stellt der Beweis die nächste Hürde dar. Die gefundene Beziehung wird im schulischen Kontext nicht ausschließlich durch eine Folge mathematischer Berechnungen beweisbar sein, es muss vielmehr mit Worten erklärt werden, warum die Fadenanzahl gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Nadelanzahl und der Lückengröße ist. In dieser Phase ist vorteilhaft, den wichtigen Größen eine

Bezeichnung zuzuweisen, N für die Nadelanzahl, L für Lückengröße und T für den größten gemeinsamen Teiler. Fangen wir bei einer bestimmten Nadel an und ziehen den Faden mit einer Lückengröße L weiter, so werden $L-1$ Nadeln bei einem Zug ausgelassen und

werden $\lfloor \frac{N}{L} \rfloor$ Nadeln in einer Umrundung berührt. Die erste Nadel wird nach der ersten

Umrundung nur dann berührt, wenn L ein Teiler von N ist. Ist L tatsächlich ein Teiler von N , so muss bei allen in der ersten Umrundung zwischen den ersten zwei berührten Nadeln ausgelassenen $L-1$ Nadeln mit je einem neuen Faden begonnen werden. In diesem Fall werden also genau L Fäden benötigt, um jede Nadel ein Mal umzuschlingen.

Ist L kein Teiler von N , dann wird nach einer Umrundung die erste Nadel nicht getroffen.

Hier muss wieder anders gedacht werden, um eine saubere Erklärung formulieren zu können. Mason (2010, S. 58) zieht eine Analogie zu einer Uhr in Betracht. Man stelle sich vor, jedes Fadenziehen entspricht einem Sprung des Zeigers auf dem Zifferblatt. Bei

jedem Sprung bewegt sich der Zeiger um den Anteil $\frac{L}{N}$ einer ganzen Umdrehung weiter.

Die Anzahl der benötigten Umrundungen, um wieder bei der Ausgangsziffer zu gelangen,

ist die kleinste ganze Zahl, die ein Vielfaches von $\frac{L}{N}$ ist. Ein ganzzahliges Vielfaches von

$$\frac{L}{N} \text{ ist sicher } N \cdot \frac{L}{N}, \text{ das kleinste ganzzahlige Vielfache ist somit } \frac{L}{N} \cdot \frac{N}{T} = \frac{L}{T}$$

($T = \text{ggT}(N, L)$).

Um zu zeigen, dass die $\frac{L}{N} \cdot \frac{N}{T}$ tatsächlich das kleinste ganzzahlige Vielfache von $\frac{L}{N}$ ist,

zerlegen wir sowohl L als auch N in ihre Primzahlfaktoren. Sei also o.B.d.A.

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \quad \text{und} \quad L = p_1 \cdot p_4 \cdot p_5. \text{ Dann ist } \frac{L}{N} = \frac{p_1 \cdot p_4 \cdot p_5}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}, \text{ ein ganzzahliges}$$

Vielfaches davon ist sicher $\frac{L}{N} \cdot N = \frac{p_1 \cdot p_4 \cdot p_5}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = p_1 \cdot p_4 \cdot p_5$. Der Faktor $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$

soll so minimalisiert werden, dass er selbst ganzzahlig bleibt und gleichzeitig

$$\frac{L}{N} \cdot N = p_1 \cdot p_4 \cdot p_5 \text{ eine ganze Zahl ergibt. Das geht nur dann, wenn } N \text{ durch}$$

$$p_1 = \text{ggT}(N, L) = T \text{ dividiert wird.}$$

Der Zeiger muss also $\frac{L}{N} \cdot \frac{N}{T} = \frac{L}{T}$ ganze Umdrehungen machen, damit er tatsächlich auf alle Ziffern nur ein Mal zeigt, bevor er wieder bei der ersten Ziffer anlangt. Lässt man in jeder Runde die erste Ziffer aus (sinnvoll, weil die zuletzt gestreifte Ziffer einer Umrundung gleich der Anfangsziffer der nächsten Umrundung ist), so streift der Zeiger in jeder

Umdrehung $\lfloor \frac{N}{L} \rfloor$ Ziffern. Aus jeder Umrundung bleibt somit eine Restlücke der Größe

$\frac{N}{L} - \lfloor \frac{N}{L} \rfloor$. Diese Restlücken ergänzen sich in der letzten Umrundung zu einer ganzen

Lücke, was den letzten Sprung zur ersten Ziffer der ersten Umrundung darstellt. Damit

auch die erste Ziffer mitgezählt wird, müssen für $\frac{L}{T}$ Umrundungen $\frac{L}{T} \cdot \frac{N}{L} = \frac{N}{T}$ Ziffern

berücksichtigt werden. Von der Analogie zurück zu unseren Fäden bedeutet das, dass T Fäden benötigt werden, um alle N Nadeln ein Mal umzuschlingen.

Nicht anders ist die Situation während der Lösung einer Modellierungsaufgabe.

SchülerInnen werden auch bei diesen Aufgaben gleich am Anfang der Arbeit auf Schwierigkeiten stoßen, diese sind allerdings nicht mehr innermathematischer Natur. Der Weg von der realen Situation bis zum mathematischen Modell birgt einige Hürden, die nur durch intensive Denkleistung überwunden werden können. Blum et al. (2007) stellen eine einfach klingende Modellierungsaufgabe sowohl SchülerInnen einer 2. und 3. Klasse (6. und 7. Schulstufe), als auch einer 5. Klasse (9. Schulstufe). Die benötigte Mathematik – Arbeit mit Maßstäben – war SchülerInnen der Sekundarstufe I gut bekannt, trotzdem waren auch SchülerInnen höherer Klassen, die nicht vertraut mit Modellierungsaufgaben waren, mit der Aufgabe nicht unterfordert. Sie bestand darin, ungefähr die Länge einer Straße anhand einer Landkarte zu ermitteln. Entlang der Straße wird jedes Jahr ein Fahrradrennen organisiert, wobei viele Teilnehmer nur Abschnitte der Strecke zurücklegen, da ihnen der Weg zu lang ist.



Maßstab 1 : 90 000

Abb. 4.3: Abbildung der gesuchten Strecke auf der Landkarte

Nach erstmaligem Lesen der Aufgabe fiel es allen SchülerInnen nicht schwer die gefragte Strecke auf der Landkarte als die blau markierte Strecke zu identifizieren. Die erste Hürde folgte gleich danach, da es nicht klar war, welche Daten zur Verfügung stehen. Im Aufgabentext stand außer der Angabe des Start- und Zielortes nur der Hinweis auf das Fahrradrennen. Letztendlich aus Mangel an anderen Möglichkeiten wurde die Karte genauer betrachtet und der Maßstab wurde entdeckt. So entstand das Situationsmodell, das folgende Tatsachen beinhaltet: 1. Zwischen zwei Ortschaften wird jedes Jahr ein Fahrradrennen organisiert, 2. Die Länge der Strecke soll ermittelt werden, 3. Eine Landkarte mit dem Maßstab 1 : 90 000 steht als Hilfe zur Verfügung. In einem ersten Versuch wurde der Maßstab so gedeutet: einem Zentimeter auf der Karte entsprechen 90 000 Meter in der Realität.

Als nächstes war den meisten SchülerInnen klar, die blau gekennzeichnete Strecke soll gemessen werden. Dann wird der Maßstab der Karte benötigt, um die reale Länge der Strecke herauszubekommen. Das Realmodell kristallisierte sich somit aus dem Situationsmodell ohne große Schwierigkeiten.

Das Mathematisieren des Realmodells, indem der realen Strecke eine ebene Kurve zugeordnet werden musste, wurde auch leicht bewältigt. Die Abmessung der Kurve auf der Landkarte hingegen gestaltete sich für alle Teilnehmer als schwierig. Verschiedene Strategien wurden ausprobiert. Einige SchülerInnen begannen die Strecke mit einem Lineal in Ein-Zentimeter-Schritte abzumessen. Diese Versuche wurden ziemlich schnell abgebrochen, da sie zu langwierig waren. Einige der Lernenden lasen den Text der Aufgabe erneut aufmerksam durch und entdeckten, dass die Länge der Strecke nicht genau, sondern nur ungefähr zu ermitteln ist. Daraufhin wurden sowohl konkrete Handlungen wie Messen mit Daumen, Lineal und sogar Zirkel durchgeführt als auch abstraktere Methoden angewendet, wie Approximation durch Streckenzüge oder Benutzung eines Fadens als Modell der Strecke.

Die Berechnung der Streckenlänge bereitete den meisten SchülerInnen keine große Schwierigkeiten, die ermittelte Streckenlänge von der Karte wurde lediglich mit 90 000 multipliziert. Danach folgte die Validierung der Resultate, die einige SchülerInnen wieder zum Situationsmodell zurückführte. Die Annahme, der Maßstab 1 : 90 000 bedeute 90 000 Meter in der Realität für 1 Zentimeter auf der Karte, führte natürlich zu Resultaten, die offensichtlich nicht korrekt waren (z.B. 2880 km). Durch die Plausibilität einer Streckenlänge von ca. 28 km wurde SchülerInnen die korrekte Deutung des Maßstabs einer Landkarte klar.

Die Überwindung von Hürden setzt auf jeden Fall Ausdauer seitens der Lernenden in ihrer kognitiven Arbeit voraus. Aber auch die Bereitschaft und Motivation spielen in beiden Fällen, Problemlösen und Modellieren eine große Rolle. Die gute Botschaft der Kognitionsforschung und der fachdidaktischen Forschung ist, dass wenn ein Individuum über durchschnittliche Fähigkeiten verfügt (normal entwickelt ist), es sowohl Modellieren, als auch Problemlösen erlernen kann. Individuelle Unterschiede im Niveau und in der Qualität des Problemlösens sind unter anderem auch genetisch bedingt, aber nicht exklusiv dadurch bestimmt, sodass Umweltfaktoren, wie Begegnung und Gelegenheit zum Üben, gute Vorbilder, positive Rückmeldungen mit einem beträchtlichen Anteil zur Entwicklung von Problemlöse- und Modellierungskompetenzen beitragen können.

Gilt es sodann, dass, wer Modellieren kann, auch Problemlösen kann, und umgekehrt? Die Fähigkeiten, die in den zwei Arbeitsbereichen eingesetzt werden, sind doch nicht ganz

gleich. Borromeo Ferri (2013, S. 19) listet anhand des Modellierungskreislaufs von Blum folgende benötigte Teilkompetenzen im Bereich Modellieren auf:

- **Verstehen** der Aufgabe durch die Konstruktion eines mentalen Modells der gegebenen Problemsituation
- **Vereinfachen** durch die Ausfilterung der relevanten Daten
- **Mathematisieren** des Realmodells, das bedeutet die Übersetzung der gefundenen Beziehungen aus der Realität in die mathematische Sprache
- **Interpretieren** der mathematischen Resultate: Die Resultate der Berechnungen sollen wieder in die Realität transportiert und dort gedeutet werden
- **Validieren** ist für die Erwägung der Angemessenheit der Resultate, was die Realität betrifft, notwendig
- **Vermittlung** der Resultate (SchülerInnen beziehen die im Situationsmodell gefundenen Resultate auf die Realsituation und beantworten so die Frage der Aufgabe) und des Lösungsweges (SchülerInnen beschreiben ihre Lösungswege und Resultate im Plenum)

In dieser Liste wurde die Fähigkeit Probleme mit mathematischen Methoden zu lösen nicht aufgelistet, da die Autorin sinnvollerweise nur solche Teilkompetenzen in Betracht zog, die spezifisch für Modellieren sind. Diese Fähigkeit wird während des Modellierungsprozesses nur in Ausnahmefällen benötigt, meistens beschränkt sich die mathematische Arbeit hier auf Standardprozeduren.

Mason geht von natürlichen Fähigkeiten aus, die jeder Heranwachsende besitzt und meint, mathematisches Denken entwickelt sich dann, wenn gelernt wird, diese natürlichen Fähigkeiten bei der Lösung mathematischer Probleme anzuwenden. Diese Fähigkeiten sind also nicht spezifisch mathematischer Natur, sondern Bestandteil der menschlichen Intelligenz. Eigentlich sind die von Borromeo Ferri angegebenen Teilkompetenzen des Modellierens, bis auf Mathematisieren, auch allgemeiner Natur. Folgende Fähigkeiten kommen in der Liste von Mason vor:

- **Spezialisieren** im Sinne von ‚ins Detail gehen‘, einen einfacheren Fall untersuchen oder spezielle Zahlen wählen, **und verallgemeinern**, das Gemeinsame in den Spezialfällen entdecken, Beziehungen anstatt Details betrachten. Diese zwei

Fähigkeiten werden deswegen immer gemeinsam erwähnt, da sie Hand in Hand gehen; während des Lösungsprozesses findet oft eine sich wiederholende Abwechslung der zwei Tätigkeiten statt.

- **Vermuten und sich überzeugen** stehen für das, was im Allgemeinen für mathematische Fähigkeiten gehalten werden, nämlich für die Fähigkeiten eine geschickte Idee zu haben und einen tragfähigen Beweis produzieren zu können. Es stimmt zwar, dass je mehr inhaltlich-mathematisches Wissen und praktische Übungen vorhanden sind, desto schneller Lösungen gefunden und korrekt bewiesen werden können, die genannten Fähigkeiten sind trotzdem allgemeiner Natur.
- **Vorstellen und Ausdrücken** sind die Fähigkeit des Aufstellens eines mentalen Bildes basierend auf alle abrufbaren Sinneswahrnehmungen und die Fähigkeit, das Vorgestellte in einer anderen Form ausdrücken zu können. Die Vorstellungskraft ist unerlässlich im Prozess des Voraussehens (eines Lösungsweges), im Kreieren einer Erwartung. Diese Erwartung soll in einer anderen Form ausgedrückt werden, wie Wörter, Diagramme, Bilder, Symbole etc. Dies ist auch unter dem sozialen Aspekt des Lernens wichtig, aber auch um die gefundene Lösung anderen zugänglich machen zu können. Diese Fähigkeiten werden in der Planung, Durchführung und Rückblickphase des Pólya'schen Modells zum Einsatz kommen.
- **Hervorheben und Vernachlässigen, Erweitern und Beschränken** sind kognitive Handlungen, die besonders beim Beweisen einer Vermutung eine große Rolle spielen. Die Fähigkeit entscheiden zu können, wann welche der oben genannten vier Handlungen erlaubt, sinnvoll und zielführend wird, kann durch Übung gestärkt werden. Betrachtet man beispielsweise Palindrome, wie z.B.: 46764, 1000001, 696 u.s.w., wird ihre Eigenschaft, dass sie denselben Wert beim vorwärts und rückwärts Lesen haben, auffallen und dieser Aspekt wird im Denkprozess immer wieder betrachtet und hervorgehoben. Hingegen werden andere Eigenschaften dieser Zahlen (sind sie gerade oder ungerade, wie viele Stellen oder welche Ziffersumme sie haben, etc.) eher vernachlässigt. Abhängig von der Problemstellung wird es manchmal sinnvoll sein eine bestimmte Eigenschaft hervorzuheben oder ebendiese zu vernachlässigen.

Arbeitet man mit Bogenlängen von Kreisen, so kann die Bogenlänge nur auf den *Anteil* des Umfanges eines Kreises beschränkt betrachtet werden. Manchmal ist es aber sinnvoll die Beziehung zwischen der absoluten Bogenlänge (nicht nur Anteil!)

und Größe des Zentriwinkels miteinzubeziehen, die Definition der Bogenlänge wird also um den Ausdruck

$$\text{Bogenlänge} = \frac{\pi \cdot \text{Radius} \cdot \text{Zentriwinkel}}{180^\circ} \quad \text{erweitert.}$$

- **Klassifizieren** bedeutet die Wahrnehmung eines Objektes als Instanz einer Eigenschaft, nachdem man es seiner Umgebung entnommen hat. Z.B. hat die Klasse der geraden Zahlen die definierende Eigenschaft, durch zwei teilbar zu sein. In diesem Sinne entnimmt man die Zahl zwei aus der Menge der natürlichen Zahlen und erschafft durch sie die Klasse der geraden Zahlen. Alle Zahlen dieser Klasse haben diese bestimmte Beziehung zur Zahl zwei. Umgekehrt gehören alle Zahlen, die durch zwei teilbar sind, zur Klasse der geraden Zahlen.
- Unter **Charakterisieren** versteht man die Erzeugung einer Menge von Eigenschaften, die alle Objekte einer Klasse beschreibt. Die Klasse der geraden Zahlen wurde durch die Teilbarkeit durch zwei erschaffen. Es gibt aber andere Eigenschaften auch, die allen Elementen dieser Klasse gemeinsam sind, z.B. dass diese Zahlen mit den Ziffern 0, 2, 4, 6 oder 8 enden, oder ihre beliebigen Potenzen ebenfalls immer gerade Zahlen sind.

Diese Fähigkeiten sind wiederum für den Bereich Problemlösen spezifisch. Werden während einer Modellierung anspruchsvolle mathematische Arbeitsphasen durchlaufen, sind diese Fähigkeiten auch für das Modellieren wichtig.

Das Pólya'sche Modell des Problemlösens beginnt genauso wie das Modellieren nach Blum mit dem Verstehen der Aufgabe. Der Kontext beim Problemlösen ist meistens innermathematisch, während beim Modellieren das Verständnis auf eine reale Situation bezogen werden muss; in beiden Fällen ist das Sprachverständnis Ausgangspunkt weiterer interpretativer Denkprozesse. Das Sprachverständnis beschränkt sich natürlich nicht auf das Verständnis der Wörter oder der einzelnen Sätze, sondern es muss vielmehr die beschriebene Situation begriffen werden, der Leseprozess muss sich also ebenfalls auf der Textebene abspielen. Beim Lesen von Sachtexten passiert sogar noch mehr, die Textebene interagiert mit den Wissensstrukturen des Lesers und beeinflusst so die Effizienz beim Lesen. Eine mentale Repräsentation der Situation entsteht umso schneller, je besser die Lesekompetenzen entwickelt sind.

Folgende Problemlöseaufgabe soll gelöst werden: *Zehn Stöpsel in zwei unterschiedlichen Farben stecken in einem Brett mit elf Löchern. Das mittlere Loch ist am Anfang leer, alle schwarzen Stöpsel stecken links, alle weißen Stöpsel stecken rechts vom mittleren Loch. Nun sollen alle schwarzen mit allen weißen Stöpseln vertauscht werden, sodass alle schwarzen Stöpsel nur nach rechts und alle weißen Stöpsel nur nach links bewegt werden dürfen. Sprünge über andere Stöpsel, um ein Loch zu erreichen, sind erlaubt. Ist die Vertauschung der Stöpsel so überhaupt möglich? Wie viele Züge werden mindestens benötigt?*

Der Text dieser Aufgabe enthält keine komplizierten Wörter oder unverständlichen Begriffe, trotzdem kann man nach einem ersten Lesen nicht behaupten, dass die Situation völlig klar ist. Eine Skizze wie im Abb. 4.4 kann helfen sich die Ausgangssituation besser vorzustellen. Noch besser wäre es, in weiterer Folge mit geeigneten Modellen einige Verschiebungen oder Sprünge der Stöpsel auszuprobieren. Stöpsel können mit Hilfe von Papierschnitzeln, Münzen oder anderen Gegenständen modelliert werden.



Abb. 4.4: Ausgangsposition der Stöpsel auf dem Brett

Erst wenn klar ist, wie die Anordnung der Stöpsel am Anfang ist, kann man sich besser vorstellen, welche Bewegungen der Stöpsel erlaubt sind und wie das Brett am Ende des Spiels aussehen muss. Zusätzlich unterstützt der Einsatz kleiner Gegenstände als Modelle für die Stöpsel die Vorstellung des Ablaufs des Spiels und vermittelt ein erstes Gefühl dafür, wie schnell man während des Schiebens zu unerlaubten Verschiebungen gezwungen wird (detaillierte Lösung auf S. 95). Erst danach kann über eine Strategie für die Lösungsfindung nachgedacht werden. SchülerInnen, die in jüngeren Jahren öfters Brettspiele wie z. B. ‚Mühle‘ oder ‚Dame‘ gespielt hatten, werden die Ausgangssituation wahrscheinlich schneller verstehen, und sich erste Schritte noch vor Anfertigung einer Skizze vorstellen können.

Anhand der folgenden Modellierungsaufgabe wird gezeigt wie die Lesekompetenz den Aufbau des Situationsmodells fördert.

Aus einer Zeitungsmeldung: *Die Zuckerhutbahn benötigt für die Fahrt von der Talstation bis zum Gipfel des als Zuckerhut bekannten Berges rund 3 Minuten. Dabei fährt sie mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h und überwindet einen Höhenunterschied von ca. 180 m. Der Cheftechniker Giuseppe Pellegrini würde viel lieber zu Fuß gehen. So wie früher, als er Bergsteiger war und erst von der Talstation über die ausgedehnte Ebene zum Berg rannte und diesen dann in 12 Minuten bestieg.*

Aufgabe: *Wie weit ist die Strecke ungefähr, die Giuseppe von der Talstation bis zum Fuß des Berges rennen musste?*



Der Text und das Bild repräsentieren im Modellierungskreislauf nach Blum die reale Situation. Es wird offensichtlich eine realitätsbezogene Situation beschrieben, die zuerst verstanden werden soll. Der Weg zum Zuckerhutberg soll gedanklich konstruiert werden, mit Berücksichtigung möglicher Umstände. Beispielsweise wird der Fußweg wahrscheinlich nicht genau unter der Seilbahn verlaufen. Außerdem muss die gesuchte Strecke identifiziert werden, da sie nur aus einem Abschnitt des Gesamtweges von der Talstation zum Gipfel besteht. Dies ist der schwierigste Teil bei der Konstruktion des Situationsmodells, es ist aber der wichtigste in Hinblick auf weitere Arbeitsphasen. Auch Protagonisten gehören zum Situationsmodell; in diesem Fall ist die Person Giuseppe Pellegrini der Hauptdarsteller, dessen Eigenschaften (früher Bergsteiger, in der Gegenwart schon älter und sportlich nicht mehr aktiv) relevant für die Lösung sein könnten. Während der Konstruktion des Situationsmodells sollen nicht relevante Teile des Textes vernachlässigt werden (die Dauer der Fahrt mit der Seilbahn und ihre Geschwindigkeit, der aktuelle Beruf Pellegrinis, etc.). Die in der Aufgabenstellung enthaltene Informationsmenge wird also bei der Bildung des Situationsmodells sinnvoll reduziert, andererseits werden auch Ergänzungen vorgenommen, da vorhandenes individuelles Wissen wieder aktiviert wird (Lernende, die in ihrer Freizeit öfters wandern gehen, werden ganz bestimmte, individuelle Vorstellungen über den Fußweg haben).

Die Fähigkeit *Vereinfachen* bei Borromeo Ferri und *Vernachlässigen und Beschränken* bei Mason sind zwei Bezeichnungen der gleichen Fähigkeit, Daten oder Eigenschaften zwecksmäßig zu reduzieren. In Modellierungsaufgaben werden generell dann Vereinfachungen vorgenommen, wenn das Situationsmodell steht, und vor der Mathematisierung das Realmodell geschaffen wird. In dieser Arbeitsphase werden keine Ergänzungen mehr vorgenommen, individuelle Erfahrungen werden in die Arbeit nicht mehr einfließen. Die im Text enthaltenen Informationen, die für die Mathematisierung überflüssig sind, werden vernachlässigt. Dies wird in den meisten Fällen notwendig sein, da authentische Anwendungssituationen oft überflüssige Angaben beinhalten. Die Umformulierung des Aufgabentextes, sodass irrelevante Informationen weggelassen werden, ist eine Strategie des Vereinfachens. In der Modellierungsaufgabe ‚Zuckerhutberg‘ werden die Angaben über Geschwindigkeit der Seilbahn, Dauer der Fahrt mit der Seilbahn und der Höhenunterschied betrachtet; Dauer des Weges zu Fuß, Angaben zur Person Giuseppe Pellegrini können vernachlässigt werden. In der Problemlöseaufgabe ‚Stöpsel vertauschen‘ (vgl. S. 92) kann die Vereinfachung darin bestehen, dass der Lösende, nachdem er sich ein Bild von der Aufgabe gemacht hat, versuchen wird die gleiche Fragestellung mit weniger Stöpseln zu beantworten. Wählt er je zwei, bzw. drei schwarze und weiße Stöpsel, kann dies zur Erkenntnis führen, dass Stöpseln gleicher Farbe nicht vereint verschoben werden sollen, sondern günstiger ist die Farben bunt zu mischen.

Das *Vorstellen und Ausdrücken* aus der Beschreibung von Mason als eine Visualisierung des mathematischen Objekts im Kontext seiner Beziehungen zu anderen mathematischen Objekten im Rahmen der früheren mathematischen Erfahrungen und die Übersetzung dieser Vorstellungen in das Symbolsystem der Mathematik sind Fähigkeiten, die bei Borromeo Ferri zum *Mathematisieren* gehören.

Vorstellen bedeutet bei Mason nicht nur die Visualisierung eines Objektes vor dem geistigen Auge, sondern das diesbezügliche Abrufen jeglicher Sinneswahrnehmungen. Dies begünstigt die Umschreibung des visualisierten Objekts in eine andere Form. In der mathematischen Arbeit werden oft Erwartungen formuliert, Beziehungen zwischen Objekten aufgedeckt, die als allgemeine Eigenschaften postuliert werden, all das ist ohne Zugriff auf mentale Bilder, also Vorstellungsvermögen nicht möglich.

In der Modellierungsaufgabe ‚Zuckerhut‘ kann das Wort Geschwindigkeit z.B. das Bild eines sich bewegenden Verkehrsmittel hervorrufen. Bei manchen Lernenden wird das

eventuell ein kleines Spielauto sein. Neben dem Auto steht ein Klassenkollege mit einer Stoppuhr und ein anderer mit einem Maßband. So wird der Begriff Geschwindigkeit gleichzeitig mit dem Begriff Zeit und zurückgelegte Streckenlänge, sowie die selbst erlebte Situation, in der man die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges in Gruppenarbeit mit anderen Mitschülern ausrechnet, ins Gedächtnis gerufen. Dabei werden außer faktischen auch optische, haptische, auditive und emotionale Komponenten in Erinnerung gerufen. War dieses Erlebnis in der damaligen Physikstunde mit positiven Gefühlen belegt, so wird dies die Motivation, die Modellierungsaufgabe zu lösen, steigern.

Während des Mathematisierens beim Modellieren bzw. bei der Lösungsfindung beim Problemlösen werden oft zusätzliche, im Aufgabentext nicht enthaltene, Größen eingeführt. Diese werden wahrscheinlich auch mit einer Bezeichnung versehen, um die Arbeit mit ihnen zu erleichtern. So ist das der Fall bei der Problemlöseaufgabe ‚Stöpsel vertauschen‘, bei der es sich in einer fortgeschritteneren Arbeitsphase als sinnvoll herausstellt, die Anzahl der Stöpsel auf einer Seite des Mittelloches einzuführen. Diese kann z.B. S bezeichnet werden. Die Analyse der Verschiebungen und Sprünge ergibt letztendlich für die notwendigen Züge: $\text{Zahl der Züge} = 2 \cdot S + 1$.

Für je ein schwarzer und weißer Stöpsel wird beispielsweise zuerst der schwarze Stöpsel ins Loch geschoben, auf den freigewordenen Platz springt der weiße Stöpsel und der schwarze Stöpsel belegt letztendlich den ursprünglichen Platz der weißen Stöpsel. Es werden in diesem Fall also drei Züge (zwei Verschiebungen und einen Sprung) für den Platztausch der Stöpsel nötig, dabei muss derjenige Stöpsel, der zuerst verschoben wird und im Mittelloch landet zwei Mal bewegt werden.

Sind jetzt je zwei oder mehr Stöpsel jeder Farbe im Spiel, dann wird wieder ein erster, z.B. schwarzer Stöpsel (S) ins Loch geschoben, der freigewordene Platz wird mit einem weißen Stöpsel (W) belegt. An diesen freigewordenen Platz wird wiederum ein schwarzer Stöpsel gelegt. Man verfährt so, bis alle weißen Stöpsel auf den Stellen der schwarzen Stöpsel landen, dabei kommen alle Stöpsel abwechselnd, ein Mal schwarz und ein Mal weiß zum Zug (siehe Abb. 4.5). Die Reihenfolge der Züge ist also in diesem Fall:

Verschiebung: erster S ins Mittelloch

Züge: $W, S, W, S, W, \dots, W$ bis alle weißen Stöpsel links vom Mittelloch verschoben werden

Letzter Sprung: S vom Mittelloch an den letzten Platz rechts

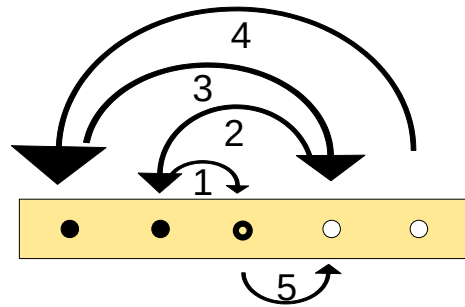


Abb. 4.5: Reihenfolge der Vertauschung von schwarzen und weißen Stöpseln beginnend mit dem ersten schwarzen Stöpsel links vom Mittelloch

Man sieht, nach diesen Zügen sind alle weißen und alle schwarzen Stöpsel auf der anderen Seite des Loches gelandet, dabei wurden alle Stöpsel ein Mal bewegt, nur der erste schwarze Stöpsel wurde zwei Mal verschoben, ein Mal am Anfang ins Mittelloch und am Ende noch einmal vom Mittelloch auf die Stelle des zuletzt bewegten weißen Stöpsel. Die Anzahl der Züge ist also gleich der Gesamtanzahl der Stöpseln plus eins, oder äquivalent dazu $Anzahl\ der\ Züge = 2 \cdot S + 1$.

Es ist leicht einzusehen, die Farbe des Stöpsels, mit dem man anfängt, spielt aus Symmetriegründen keine Rolle. Es ist außerdem auch offensichtlich, dass jede andere gültige Art (nur mit erlaubten Zügen) des Platztausches entweder eine gleiche oder eine größere Anzahl der Züge als Folge haben würde, denn bei diesem Verfahren wird jeder Stöpsel in einem Zug an seinem endgültig ‚richtigen‘ Platz auf der anderen Seite des Loches gebracht. Die Einführung und Benennung der Größe ‚Stöpsel auf einer Seite des Mitteloches‘ erleichtert somit die Vermittlung der Lösung.

In der Modellierungsaufgabe ‚Zuckerhutberg‘ wird es während des Mathematisierens sinnvoll sein, die Strecke, die die Seilbahn von der Talstation bis zur Bergspitze entlang fährt, als eine eigenständige Größe einzuführen und ihr eine Bezeichnung zuzuordnen, um die Formel der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke und der Dauer der Fahrt leichter anzuwenden.

Während eines Problemlöseprozesses wird größtenteils mathematisch gearbeitet, deswegen wird bei der Arbeit oft klassifiziert und charakterisiert. Betrachten wir die Problemlöseaufgabe, bei der Fäden um Nadeln gewickelt werden mussten (vgl. S. 83).

Nachdem die Tabelle 4.1 erstellt wurde (vgl. S. 84), mussten die Daten näher betrachtet und irgendwie systematisiert werden, um eine Gesetzmäßigkeit entdecken zu können. Eine erste Klasse kann ziemlich schnell entdeckt werden: in der ersten Spalte fällt auf, dass bei Lückengröße gleich eins die Anzahl der benötigten Fäden immer eins ist, unabhängig von der Anzahl der Nadeln. Für diese Klasse, die durch die Lückengröße eins definiert ist, kann schnell eine plausible Erklärung dafür gegeben werden, warum alle Nadeln mit einem einzigen Faden umgeschlungen werden können. Diese Klasse wird also zusätzlich durch die Eigenschaft charakterisiert, dass beim Ziehen des Fadens alle Nadeln der Reihe nach berührt werden, und das gilt für jedes Element dieser Klasse. Eine ähnlich schnell zu konstruierende Klasse ist die Klasse der Anordnungen, bei denen die Nadelanzahl und die Nadelabstände gleich groß sind. Diese Klasse wird dann dadurch charakterisiert, dass die Anzahl der Fäden gleich der Anzahl der Nadeln ist und jeder Faden nur eine einzige Nadel berührt.

Während des Modellierens kann es vorkommen, dass eine Charakterisierung im Validierungsprozess vorgenommen wird, wenn mathematische Ergebnisse auf ihrer Angemessenheit in der Realität überprüft werden. Das System der gefundenen Eigenschaften einer eventuellen Klasse muss auf die Realität übertragbar und in der Realität auch gültig sein. Exemplarisch wird die Modellierung von Bremswegen erwähnt. Nachdem eine Formel des Bremsweges in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Fahrzeuges und der Reaktionszeit aufgestellt wird, könnte eine nächste Frage über die maximale Geschwindigkeit für einen bestimmten Anhalteweg gestellt werden. Um dies zu ermitteln, muss eine Gleichung zweiten Grades gelöst werden. Die Klassifizierung findet darin statt, dass die gesuchte Geschwindigkeit als Lösung dieser Gleichung identifiziert wird. Charakteristisch für diese Klasse ist, dass die Ergebnisse ganze, gebrochene, irrationale, positive oder negative Zahlen sein können. Sind beide Lösungen der Gleichung negative Zahlen, so bedeutet das, dass die aufgestellte Gleichung die Realität nicht angemessen beschreibt.

Außer Sprachverständnis in den Anfangsphasen, sind im Falle beider Aufgabentypen Sprachwiedergabe-Kompetenzen gefragt, sie nennen sich *Ausdrücken* bei Mason und *Vermittlung* bei Borromeo Ferri. Führt man Unterrichtseinheiten mit Problemlöseaufgaben oder Modellierungsaufgaben durch, ist eine Besprechung der gefundenen Lösungen unabdingbar. In dieser Phase sollen SchülerInnen beschreiben, erklären und argumentieren können, um ihre Ergebnisse anderen verständlich zu machen.

Die Handlungen, die beim Lösen beider Arten von Aufgaben eingesetzt werden, weisen auch einige Gemeinsamkeiten vor. Die Standardvorstellung ist, dass während des Modellierens Maßband, Waage und Alltagsgegenstände in die Hand genommen werden, während beim Problemlösen ‚nur‘ gedacht wird. Es kommt trotzdem durchaus vor, dass ein Modellierungsprozess nur durch kognitive Handlungen auf der abstrakten Ebene durchgeführt wird, vor allem wenn die zu modellierende Situation in der Realität nicht messbar und somit auch nicht validierbar ist. Unter anderem sind Fermi-Aufgaben solcher Art, aber auch Situationen aus der Soziologie, Wirtschaft, Industrie und Astronomie. Genauso gilt, Problemlösen gelingt auch nicht immer nur durch kognitive Prozesse, es gibt eine Fülle von Problemlöseaufgaben, wo Handlungen auf der physischen Ebene notwendig sind, wie z.B. Falten, Erstellung von Modellen aus Papier, Holzklötzen oder sonstigen Alltagsgegenständen.

Eine andere Gemeinsamkeit der beiden Bereiche besteht darin, dass während der Lösung beider Aufgabentypen SchülerInnen den Großteil der Arbeit eigenständig erledigen. Offene Aufgaben dürfen gar nicht unter anderen Rahmenbedingungen gestellt und gelöst werden, um die individuellen Denkprozesse der Lernenden nicht zu beeinflussen. In beiden Fällen ist für den Anfang Gruppenarbeit empfohlen. Geübtere SchülerInnen werden beim Lösen von Problemlöseaufgaben mit der Zeit wahrscheinlich eher Einzelarbeit bevorzugen. Die Rolle der Lehrkraft wurde in den ersten zwei Kapiteln schon erwähnt (vgl. S. 11 und S. 44), ihre Interventionen sollen zurückhaltend sein, sodass bei der Überwindung einer zu schwierigen Hürde den Lernenden nicht die ganze Arbeit abgenommen wird.

Beide Aufgabentypen sind durch Nachdenken über den eigenen Denkprozess charakterisiert. In der Lernpsychologie und Didaktik wird es Metakognition genannt, dabei wird über das eigene Wissen, aber auch über ‚wie gewusst wird‘, nachgedacht. Eine bewusste Kontrolle der eigenen kognitiven Prozesse findet statt. Im Fall des Problemlösens kann Metakognition oft spontan auftreten, da eine Sackgasse im Lösungsprozess dazu führen kann, den gescheiterten Lösungsweg mindestens in groben Linien noch einmal zu analysieren und die Denkprozesse bewusst zu lenken. Ist die Motivation während einer Modellierung stark ausgeprägt, können hier auch metakognitive Prozesse stattfinden, wahrscheinlich eher in den realitätsgebundenen Arbeitsphasen. Während des Unterrichts ist es auf jeden Fall notwendig bei SchülerInnen

Nachdenkprozesse über die eigene Arbeit zu initiieren, sie zu begleiten und wenn möglich individuell zu unterstützen. Ein guter Weg in Förderung metakognitiver Fähigkeiten der SchülerInnen ist die Präsentation einfacher Modelle des Problemlösens und Modellierens vor Arbeitsbeginn, sowie die Organisation einer Präsentationsphase/Konferenz am Ende eines durchgeführten Projekts, in der verschiedene Modelle, Lösungswege und Denkweisen verglichen werden können.

In der Vorbereitung von Unterrichtseinheiten finden sich auch einige Gemeinsamkeiten. Sowohl Problemlöseaufgaben als auch Modellierungsaufgaben werden selten in die Schulbücher aufgenommen. Problemlöseaufgaben sind zwar einem mathematischen Thema leichter zuzuordnen als Modellierungsaufgaben, beide sind trotzdem relativ schwierig dem Leistungsniveau und den Interessen einer Klasse anpassbar. Andererseits sind Problemlöseaufgaben nicht dazu gedacht eine bestimmte Mathematik einzuüben; so wie Modellierungsaufgaben sind auch diese offen was den Lösungsweg und die benutzte Mathematik betrifft. Die Lehrperson muss also den Zeitpunkt, den Inhalt und den Schwierigkeitsgrad im Fall beider Aufgabentypen an die Klasse anpassen. Empfohlen ist die Durchführung von zwei bis maximal drei Einheiten in Form von Projektunterricht (Dauer kann 90 bis 135 Minuten variieren) in einem Semester. Lehrpersonen werden nicht herumkommen, einschlägige fachdidaktische Literatur zu lesen, da die Ausbildung zur Lehrkraft wenig Anhaltspunkte für diese Bereiche bietet. Andererseits schreibt der Lehrplan für alle Altersstufen die Förderung von Problemlösekompetenzen und Modellierungskompetenzen vor. Empfehlenswert ist es auf jeden Fall auch die kognitionspsychologischen Aspekte zu kennen, und nicht nur Aufgaben zu suchen, um Fehler bei der Organisation solcher Unterrichtseinheiten zu vermeiden, bzw. um beim Ausbleiben des gewünschten Erfolgs systematischer nach Ursachen suchen zu können. Beide Arten von Aufgaben sind auch in der Durchführung zeitintensiv, aber oft fruchtbar in ihrer Langzeitwirkung. Um Frustration wegen der Einhaltung des Lehrplans zu vermeiden, empfiehlt es sich inhaltliche Kürzungen einiger Themen vorzunehmen. Z.B. ist es nicht notwendig alle Arten von Gleichungen systematisch durchzuarbeiten, der Lehrplan sieht die Themen in ihrer Oberbegrifflichkeit vor.

Auch versprechen solche Unterrichtsformen keinen großen spürbaren oder messbaren Erfolg, hier ist es für die eigene Motivation, weiter solche Gelegenheiten anzubieten gut, wenn die Lehrperson sich auf die einzelnen positiven Rückmeldungen konzentriert und ihr bewusst wird, dass es nicht jedermanns Sache ist, diese Art von Mathematik zu betreiben.

Im Sinne des differenzierten und methodisch abwechslungsreichen Unterrichtens ist es wichtig die einzelnen, wenigen SchülerInnen nicht aus dem Blick zu verlieren, die in dieser Art Aufgaben ihre Interessen und Talente entdecken. Außerdem soll der Mathematikunterricht ein richtiges, angemessenes Bild von Mathematik vermitteln, aus diesem Grund ist es empfehlenswert mindestens ab und zu SchülerInnen mit der ‚echten‘ mathematischen Arbeitsweise zu konfrontieren. Letztendlich darf die Kreativität nicht vergessen werden, sie spielt in beiden Bereichen eine zentrale Rolle. Aber mehr darüber im nächsten Kapitel.

5 Kreativität und mathematische Probleme

Zweifelsohne ist sowohl bei der Lösung mathematischer Probleme, als auch beim Modellieren Kreativität gefragt. Die manchmal mehrfach vorhandenen Schwierigkeiten können nicht mit standardisierten Lösungsverfahren überwunden werden. Es bedarf einer oder mehrerer guter Ideen, um zur Lösung zu kommen. Es kommt vor, dass eine Lösung auch mit standardisierten Lösungsverfahren entstehen kann, der Lösungsweg ist meistens dann langwierig und wahrscheinlich wenig attraktiv für diejenigen, die die Lösung nachvollziehen müssen. Gute Ideen bzw. Geistesblitze können kompaktere oder elegantere Lösungswege hervorbringen, oder in einigen Fällen eine Lösung mit Hilfe außermathematischer Überlegungen ermöglichen.

Eine Aufgabe aus der begleitenden Übung der Elementargeometrie-Vorlesung an der Univ. Wien im Wintersemester 2013, bei der eine gute Idee den Lösungsweg vereinfacht und gekürzt hat, sei hier bildlich (Abb. 5.1) vorgestellt.

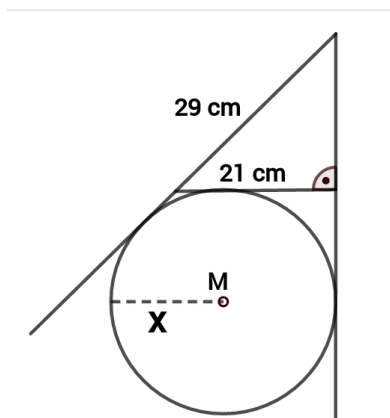


Abb. 5.1: Bildlich gestellte Geometrie-Aufgabe

Gegeben sind zwei Streckenlängen von 21 cm und 29 cm, gesucht ist der Radius x des Kreises.

Die Figur wurde von allen TeilnehmerInnen der begleitenden Übung der Geometrievorlesung im Wintersemester 2013 an der Universität Wien so ergänzt, dass der Schnittpunkt der zwei Tangenten an den Kreis mit dem Kreismittelpunkt M durch eine Strecke verbunden wurde (Abb. 5.2).

Die Aufgabe wurde dann durch die Berechnung des Winkels ACB und zweimalige Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes für rechtwinkelige Dreiecke gelöst, wobei der

Winkel ACB keinen ganzzahligen Wert im Gradmaß hat und bei der Berechnung der Seitenlängen Quadratwurzeln gezogen werden mussten.

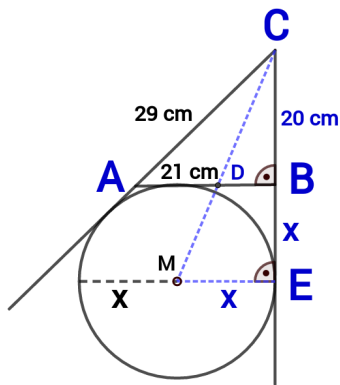


Abb. 5.2: Vorgenommene Ergänzungen
in blau

Eine elegantere Lösung entsteht mit Hilfe einiger Überlegungen.

Zuerst wird die Länge von BC mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnet. Wahlweise kann man die Strecke auch ohne Berechnung ermitteln, wenn man eine Tabelle mit pythagoreischen Tripeln bei der Hand hat.

Die Strecke CM ist die Winkelsymmetrale des Winkels ACB (dies folgt aus der Konstruktion der Tangenten an einem gegebenen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises).

Sie ist somit auch Winkelsymmetrale des Winkels ACB aus dem Dreieck ABC. Der Satz, der besagt, dass jede Halbierende eines Innen- oder Außenwinkels im Dreieck die gegenüberliegenden Dreiecksseiten im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, wurde in der Vorlesung mit Hilfe des Strahlensatzes bewiesen. Es gilt also:

$$\frac{BD}{21 - BD} = \frac{20}{29}$$

Letztendlich wird der Strahlensatz angewendet:

$$\frac{x}{BD} = \frac{x+20}{20}$$

was zum Ergebnis $x = 15\text{ cm}$ führt, ohne den Winkel ACB berechnen zu müssen.

Außerdem müssen bei der Berechnung der Strecken BD und x nur Gleichungen ersten Grades gelöst werden.

Bei der nächsten Aufgabe kann sogar die ganze Modellierungsarbeit erspart werden, wenn man einen guten Einfall hat. Für eine Klasse von 23 SchülerInnen soll ein Tennisturnier im K.O.-System (verliert ein/e TeilnehmerIn ein Spiel, so darf er/sie nicht mehr antreten) veranstaltet werden. Die Frage ist, wie viele Spiele finden statt, wenn alle Personen teilnehmen und ein Sieger ermittelt werden muss?

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten so ein Turnier zu modellieren: die SchülerInnen können in Untergruppen verteilt werden, deren Größe variiert werden kann. Die Sieger jeder Untergruppe müssen dann noch ein Mal gegeneinander spielen, und sie können wiederum in Untergruppen eingeteilt werden, deren Größe erneut variiert werden kann. In der Praxis erstellten SchülerInnen, denen diese Aufgabe gestellt wurde einige Turnierpläne, bis es klar wurde, im K.O.-System führen alle Variationen zum selben Ergebnis. Wenn man sich aber überlegt, im Turnier muss jeder Teilnehmer mindestens ein Mal spielen und aus 23 Teilnehmern müssen 22 je ein Spiel verlieren damit ein Sieger festgestellt werden kann, dann müssen genau 22 Spiele gespielt werden. Für den Sieger des Turniers muss kein zusätzliches Spiel dazu gerechnet werden, denn in dem Spiel, in dem er gewinnt, spielt er gegen einen anderen Teilnehmer, der dieses Spiel offensichtlich verliert und somit ist dieses Spiel eines der 22 Spiele, in dem ein Verlierer ausgeschieden wird.

Es wäre noch zu klären, was eigentlich Kreativität ist. Die alten Griechen glaubten, kreative Menschen wurden von den Göttinnen der Wissenschaften und Künste, den Musen inspiriert. Im 19. Jahrhundert verbreitete sich die Vorstellung – ursprünglich aus den Kreisen der romantischen Dichter – dass Kreativität aus einer Art Wahnsinn entspringt, Wahnsinn, der gewisse Einschränkungen vermindert, die uns durch Gewohnheiten, gesellschaftliche Normen, rationales Denken auferlegt wurden. Die Vorstellung in Hinsicht auf Einschränkungen ist gar nicht so falsch, biologische Forschungen konnten es später mittels bildgebender Verfahren bestätigen (Kandel 2018, S.173).

Heute wissen wir, dass Kreativität im Gehirn entsteht und eine biologische Grundlage hat. Die Fähigkeit zur Kreativität ist aber nicht von Störungen oder Krankheiten abhängig, wie früher gedacht, sondern ist allgegenwärtig, haust in jedem Individuum, und es wird auch sehr individuell zum Ausdruck gebracht. Die meisten Menschen können ihre angeborenen kreativen Fähigkeiten nicht ohne weiteres abrufen. Spezielle biologische Mechanismen dürften eine große Rolle spielen, ob und wie ein Individuum seine Kreativität entdeckt und entfaltet. Eric Kandel (Nobelpreis für Physiologie oder Medizin im Jahr 2000) beschreibt in seinem im Jahr 2018 erschienenen Buch ‚Was ist der Mensch‘ einige Vorläufer dieser noch zu entdeckenden biologischen Mechanismen. Laut Kandel sollen wir uns von Hemmungen frei machen, unserem Geist gestatten, frei zu schweifen, um so neue Zusammenhänge zwischen Ideen zu entdecken. Bei bestimmten psychischen Krankheiten (Autismus, Schizophrenie, bipolare Störung) findet diese Distanzierung von bewusstem, rationalem Denken spontan dadurch statt, dass die betroffenen geschädigten Hirnareale ihre Kontrollfunktionen nicht mehr ausüben können. So lassen sich die Rückschlüsse, die die romantischen Dichter aus ihren Beobachtungen gezogen hatten, doch recht gut erklären.

Als wichtige Faktoren, die zur individuellen Kreativität beitragen, wurden technische Fähigkeiten und Bereitschaft zu harter Arbeit identifiziert. Studien aus der Gehirn- und Genforschung haben weitere Faktoren gefunden: die Persönlichkeit, manche Charaktere sind häufiger kreativ als andere; wiederum können Individuen in verschiedenen Bereichen kreativ sein. Es gibt Menschen, die über besondere arithmetische Fähigkeiten, andere über sprachliche, wiederum andere über visuelle Begabung verfügen. Ob Individuen dann auch in den Bereichen besonders kreativ werden, in denen sie über ausgeprägte Fähigkeiten verfügen, wurde noch nicht umfangreich untersucht, es lässt sich allerdings aus der Forschung des Neurophysiologen Manfred Spitzer (2002, S. 271) so viel sagen, dass Erfolgserlebnisse, die durch gelungene Tätigkeiten in einem bestimmten Bereich hervorgerufen werden, die Bereitschaft die Aktivität erneut auszuüben, dermaßen steigern kann, dass auch die Kreativität in diesem bestimmten Bereich besser zum Ausdruck kommen wird. Auch die Arbeitsweise im Anpacken von Problemen ist wesentlich, ganz besonders wie die Vorbereitungsphase gestaltet wird, sowohl auf bewusster, als auch auf unbewusster Ebene. Es wurde festgestellt, dass sich nach einer bewussten Auseinandersetzung mit einem Problem, eine ‚Inkubationsphase‘, ein bewusster Verzicht auf Denken sehr günstig auf die Entstehung kreativer Momente auswirkt. Wie Biografien

zahlreich belegen, AHA-Erlebnisse kamen nicht selten in Momenten zustande, als die angestrengte Arbeit kurz abgelegt wurde. Psychologen erklären diese Tatsache damit, dass das unbewusste Denken freier und assoziativer ist als das bewusste Denken, da es mit wenigen abstrakten Begriffen und vielmehr mit Bildern belegt ist, was die Entstehung neuer Assoziationen und Kombinationen von Ideen begünstigt.

Es existieren mehrere Definitionen für Kreativität, allen gemeinsam sind die Wörter ‚neu‘ und ‚sinnvoll‘.

Csikszentmihályi (vgl. Runco und Albert 1990, S. 206) fasst kreatives Denken als eine Reihe kognitiver Prozesse auf, die zu originellen (neu, einzigartig, sehr ungewöhnlich) und adaptiven (passend, nützlich, sinnvoll) Einsichten oder Lösungen führen.

Auch er geht davon aus, dass jeder Mensch ein kreatives Potenzial besitzt. Dies beruht unter anderem auf drei Merkmalen, die Kreativität auszeichnen, und diese Eigenschaften trägt jedes Individuum mehr oder weniger in sich:

- **Interpretation** ist die Fähigkeit, eine Erfahrung auf ganz originelle, individuelle Art zu verstehen.
- **Diskretion** bedeutet erkennen zu können, wann eine einzigartige, unkonventionelle Interpretation einer Erfahrung sinnvoll ist und wann nicht
- **Intentionalität** ist die Motivation, Anstrengungen zu unternehmen, um eine eigene Erklärung zu finden (Runco 2007, ab S. 234).

Auch Mathematiker wagten sich auf das Terrain der Kognitionspsychologie und beschrieben einige Aspekte der Kreativität. Pólya nennt den Einfall einer glänzenden Idee ‚Akt des Scharfsinns‘. Darunter versteht er das Erraten des wesentlichen Zusammenhangs in einer unschätzbar kurzen Zeit. In der heutigen Ausdrucksweise ist hier die Entstehung der zündenden Idee beschrieben, seine Beschreibung lässt eine gewisse Zufälligkeit vermuten. Mason findet den Zeitfaktor nicht so wichtig, wenn es darum geht Vermutungen zu finden. Manchmal werden eine Reihe von Vermutungen formuliert und überprüft, bis eine für das Problem maßgeschneiderte Vermutung formuliert werden kann. Die Erfahrungen aus der Vergangenheit spielen eine Rolle darin, wie schnell man eine passable Vermutung aufstellen kann. Auf jeden Fall schlägt Mason vor, nicht immer übervorsichtig ans Werk zu gehen, sondern auch hasardmäßig den Mechanismus von Versuch und Irrtum anzuwerfen.

Der erste Mathematiker, der sich systematisch mit mathematischer Kreativität aus kognitionspsychologischer Sicht beschäftigte war Jaques Hadamard. Er unterschied vier Stadien, die im Entdeckungsprozess durchlaufen werden: 1. Vorbereitung, 2. Ausbrütung, 3. Erleuchtung, Inspiration, 4. Überprüfung, Einordnung (Hadamard 1944, ab S. 28). Dieses Modell der Kreativität ist in großen Linien heute noch gültig und gilt als das beste Modell, das reale Denkprozesse in der kreativen Schaffung beschreibt. Ein interessanter Aspekt ist, dass Henri Poincaré (der Lehrstuhlvorgänger von Hadamard) und Hadamard einstimmig die große Rolle des Unbewussten im kreativen Schaffungsprozess betonten. Poincaré beschreibt die Phasen kreativer Lösungsfindung anhand einer persönlichen Erfahrung beim Versuch die Existenz von Fuchs'schen Funktionen zu beweisen. Zuerst setzte er sich 14 Tage lang täglich einige Stunden mit dem Problem auseinander. Unzählige Versuche endeten in einer Sackgasse. Nach zwei Wochen war er der Meinung, entweder existiert diese Art von Funktionen nicht, oder er ist alleine nicht imstande die Barriere des Problems zu überwinden. Diese scheinbar unfruchtbare Phase stellte sich später als eine wichtige Vorbereitungsphase für den Einfall heraus. Dann irgendwann kam die Erleuchtung (wie eine gute Idee zustande kommt, weiß man bis heute nicht). Poincaré und Hadamard konnten eine kognitive Ruhephase zwischen der Vorbereitungsphase und Erleuchtung entdecken, in der der Problemlöser einer anderen, nicht mathematischen Tätigkeit nachgeht. In dieser Zwischenphase kommt sicher vor, dass die Lösung des Problems komplett aufgegeben wird. Sie nennen diese Phase Inkubation (= Ausbrütung). Die Denkprozesse wurden auf der bewussten Ebene schon aufgegeben; das Unbewusste hingegen arbeitet unwillentlich und ungehindert daran weiter. Der Vorteil besteht darin, dass das Unbewusste zu simultanen Aktionen fähig ist, so was zeichnet das bewusste Denken nicht aus. Oder wie schon oben formuliert wurde, im Unbewussten sind die Assoziationsprozesse vielfältiger und komplexer. Was für diese Phase auch sehr interessant ist, ist dass das Unbewusste nicht nur zu mehr Kombinationen fähig ist, sondern auch zur Bewertung der Kombinationen. In der Erleuchtungsphase tauchen dann nur die verheißungsvollen Kombinationen als mögliche Lösungsideen aus dem Unbewussten auf. Im Bewertungsprozess stellt die Schönheit ein starkes Kriterium dar, denn die meisten zündenden Ideen werden von Mathematikern als elegant und harmonisch empfunden, in dem Sinne, dass sie die Sensibilität eines Mathematikers erregen. Was Schönheit aus mathematischer Sicht ist, versucht Poincaré mit Hilfe des Ökonomie-Prinzips zu erklären und sagt, dass Kombinationen, die durch ein

Minimum an geistiger Energie ein Maximum an Gedächtniselementen reaktivieren, werden als besonders schön bewertet. Die Erleuchtung wird immer auch von einem starken Gefühl der Richtigkeit begleitet. Dieses Gefühl entspringt keinen bewusst durchgeführten Berechnungen, sondern einem Gefühl, das Intuition genannt wird. Das ist eine wichtige Erkenntnis für die Begründung der letzten Arbeitsphase während des Problemlösens, der Überprüfung. Sie ist unablässig, denn auch eine schöne Idee kann wieder schnell vergessen werden; außerdem kann sie schlicht falsch sein. Damit das soziale Umfeld die Lösung auch nachvollziehen und als korrekt anerkennen kann, ist eine detaillierte, fachmännische Aufbereitung der Sachverhalte und ein standardisiertes Beweisen sehr wichtig.

Für die Lösung der folgenden Aufgabe brauchte ich ca. zwei Wochen Zeit. Ich beschäftigte mich einige Tage in einer Zeitspanne von zwei Wochen jeweils ca. zwei Stunden damit. Nach einer Woche kam die entscheidende Idee, die aber in einer ersten Realisierung nur zur Teilergebnissen führte. Sie wurde dann nach einigen Tagen anders angewandt und eine relativ kurze Lösung wurde gefunden. Interessant fand ich einen Aspekt der Lösungsfindung, der mir während des Problemlösenseminars ein Semester lang immer wieder, und auch sonst während des Studiums einige Male auffiel, nämlich, dass produktive Ideen oft im frühmorgendlichen Schlaf ganz lebendig auftauchten, mir sofort als einleuchtend und korrekt erschienen, sodass ich sofort aufstehen und sie niederschreiben musste. Im Nachhinein, in Kenntnis der Theorie, war das die Zeit, in der ich das Problem losließ und somit Möglichkeiten für freiere Assoziationen in meinen Gedanken entstanden.

Und nun die Aufgabe:

Man kann sich relativ leicht davon überzeugen: Wenn man in einem Parallelogramm einen beliebigen Punkt L wählt, ihn mit den vier Ecken verbindet und jeweils zwei gegenüberliegende der dabei entstehenden Dreiecke gleich färbt (z.B. weiß und grau), dann ist die Flächensumme von Grau gleich der Flächensumme von Weiß. Zeigen Sie das!

In einem weiteren Unterpunkt wurde die Frage gestellt: Wie ist das, wenn man anstatt eines Parallelogramms ein Trapez (das kein Parallelogramm ist) wählt? Kann man L auch beliebig wählen, damit die Flächen von ‚Grau‘ und ‚Weiß‘ gleich groß bleiben? Der Lösungsweg wird bez. dieser Frage deswegen nicht näher beschrieben, weil er keine besonderen Hürden aufwies. Das eigentliche Problem bestand darin, dieselbe Frage bezüglich eines Deltoids zu beantworten.

Zuerst soll gezeigt werden, dass im Parallelogramm ABCD die Fläche ‚Weiß‘ gleich groß wie die Fläche ‚Grau‘ ist. Das muss dann auch für einen Rhombus gelten, denn ein Rhombus ist ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten.

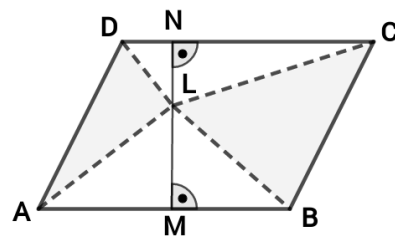


Abb. 5.3: Parallelogramm mit den Flächen ‚Weiß‘ und ‚Grau‘

Wählt man den Punkt L beliebig im Inneren des Parallelogramms, so entstehen vier verschieden große Dreiecke. Betrachtet man z.B. die zwei weißen Dreiecke ABL und CDL, wird es klar, dass die zwei Höhen LM und LN dieser Dreiecke gemeinsam die Höhe MN des Parallelogramms ergeben. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist definiert als das Produkt aus einer Seitenlänge und der dazugehörigen Höhe, in unserem Fall kann sie unter anderem als $|AB| \cdot |MN|$ geschrieben werden. Für die Gesamtfläche ‚Weiß‘ kann

wiederum $\frac{1}{2} \cdot (|AB| \cdot |ML| + |CD| \cdot |NL|) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |MN|$ geschrieben werden, dieser

Flächeninhalt ist also gleich die Hälfte des Flächeninhaltes des Parallelogramms. Die graue Fläche ist somit genau so groß wie die weiße Fläche. Wie schon erwähnt, gilt dies ebenfalls für ein Rhombus, was beim Beweis des nächsten Unterpunktes unerlässlich ist

Für das Deltoid ABCD wurde der Punkt L zuerst auf einen beliebigen Punkt des Abschnittes BD seiner Symmetrieachse platziert. Ganz offensichtlich haben die Dreiecke ADL und CDL bzw. ABL und BCL gleich große Flächeninhalte. Es ist nicht weiter schwierig einzusehen, die Gesamtflächen ‚Weiß‘ und ‚Grau‘ sind gleich groß.

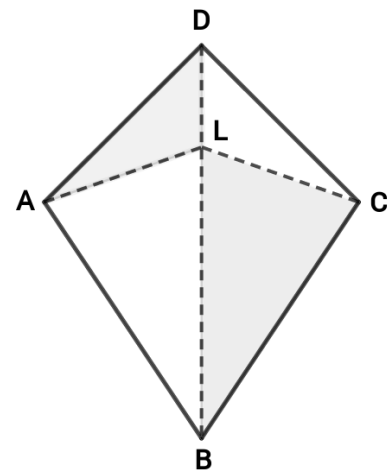


Abb. 5.4: Deltoid mit L auf der Symmetrieachse

Jetzt befindet sich der Punkt L im Inneren des Deltoids ABCD, nicht aber auf dem inneren Abschnitt der Symmetrieachse.

Ausschlaggebend für die Lösung des Problems war in diesem Fall die Ergänzung des Deltoids zum Rhombus ABCE. Der Punkt L wurde dann mit allen Ecken des Deltoids und des Rhombus verbunden. So entstanden im Deltoid die Dreiecke ADL, ABL, BCL und CDL (kürzer $a+e$, b , c und d) und in der Zusatzfläche zum Rhombus die Dreiecke ADE und CDE (kürzer $1+2$ und 3).

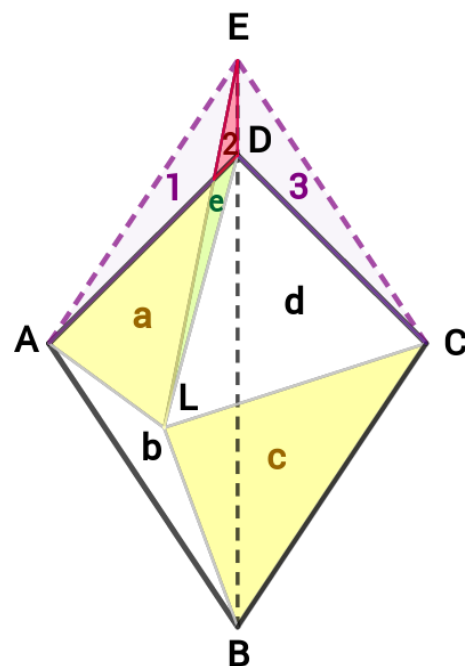


Abb. 5.5: Deltoid mit L außerhalb der Symmetrieachse

Im Rhombus, als speziellem Parallelogramm gilt:

$$Fl_d + Fl_1 + Fl_c = Fl_b + Fl_d + Fl_e + Fl_2 + Fl_3 \quad (1)$$

Nehmen wir jetzt an, die Gleichheit der entsprechenden Flächensummen gilt auch für das Deltoid, dann kann Folgendes geschrieben werden:

$$Fl_d + Fl_e + Fl_c = Fl_b + Fl_d \quad (2)$$

Ziehen wir von der ersten die zweite Gleichung ab und ordnen gleiche Terme um, bleibt nun:

$$Fl_1 = 2 \cdot Fl_e + Fl_2 + Fl_3$$

Das ist natürlich nie möglich wenn der Punkt L nicht auf der Symmetrieachse liegt, weil die Fläche des Dreiecks 1 in diesem Fall sicher kleiner als die Fläche der Dreiecks 3 ist. Somit können die Flächensummen von ‚Weiß‘ und ‚Gelb mit Grün‘ nie gleich groß sein, wenn L nicht auf der Strecke BD liegt.

□

Einen Rhombus als Hilfe für den Beweis zu nehmen, fiel mir, wie schon erwähnt, nach einigen Tagen ein. Bei dem ersten Versuch schrieb ich aber den Rhombus in das Deltoid ein, was zur Folge hatte, dass eine Fallunterscheidung gemacht werden musste. Lag der Punkt L im Rhombus beliebig, aber nicht auf seiner Symmetrieachse, so konnte die Ungleichheit der Flächensummen ziemlich leicht gezeigt werden. Lag hingegen L im Deltoid, aber außerhalb des Rhombus, kam ich mit einem korrekten Beweis nicht weiter.

Nun sollen einige Pro- und Kontra-Argumente für einen Unterricht erwähnt werden, der sich auf offene Aufgaben stützt und sich dem kreativen Lernprozess verschreibt. Tatsache ist, dass Mathematik in der oben beschriebenen Art und Weise entsteht. Die Entdeckungsprozesse regen zu erneuten Versuchen bezüglich Problemen an, die wiederum gelöst werden (oder auf der Liste der noch nicht gelösten Probleme landen), das neue Wissen wird im Kanon des bestätigten Wissens aufgenommen. In der Schule passiert etwas ganz anderes, hier wird das Wissen fertig und geordnet serviert, was die intrinsische Motivation für die Aneignung neues Wissens sehr beeinträchtigt. Forscher arbeiten freiwillig, Heranwachsende werden unabhängig von Interessen zu schulischen Leistungen gezwungen. Außerdem sind Forscher Erwachsene, SchülerInnen nicht. Ein Anteil der SchülerInnen, die sich gerne entdeckend mit Mathematik beschäftigen, könnte in Verbindung mit Veranstaltungen wie Olympiaden ermittelt werden. Ob die anderen Lernenden willig sind zusätzliche Energie in Lernprozesse durch Problemlösen oder Modellieren zu investieren, ist eine Frage. Aber auch die Anzahl der TeilnehmerInnen an Mathematikwettbewerben ist nicht ganz aussagekräftig, da in den ersten Abschnitten eines Wettbewerbs SchülerInnen anhand ihrer guten Mathematikleistungen und nicht anhand ihrer Interessen bezüglich Problemlösen angemeldet werden.

Daraus resultiert die nächste Frage: wenn wir die Mehrheit der SchülerInnen betrachten, ist es nicht sinnvoll im Mathematikunterricht ganz anders – schulisch – als in der mathematischen Forschung zu verfahren? Die Notwendigkeit eines geordneten Schullernens ist unumstritten, trotzdem sprechen Argumente dafür, dass Kreativität im Lernprozess nicht fehlen darf. Schon im 18. Jahrhundert erkannten unter anderem Rousseau und Herder, dass Lernen nur durch ein Höchstmaß an Eigenaktivität der Lernenden und an Freiheit möglich sei. Wenn Lernende aktiv bei der Entwicklung ihrer Handlungskompetenzen beteiligt sein sollen, um besser und nachhaltiger lernen zu können, ist entdeckendes Lernen durch kreative Prozesse didaktisch sehr interessant. In diesem Kontext sei noch eine Facette der Kreativität erwähnt, nämlich ihre Beziehung zum Wissensstand der Lernenden. SchülerInnen sind auch dann kreativ, wenn sie für sich selbst neuartige Ideen finden, ganz gleich, ob diese neuen Ideen für die Lehrperson zur alltäglichen Routine gehören.

Im schulischen Kontext muss außerdem klar zwischen Hochbegabung und Kreativität unterschieden werden.

Kreativität ist in jeder Person in einer individuellen Form und in einem individuellen Ausmaß vorhanden und kann im Laufe des Lebens jederzeit gezielt gefördert werden. Die Ausprägung dieser Eigenschaft ist zwar genetisch bedingt, aber in ihrer Entfaltung spielen Umweltfaktoren eine bedeutsame Rolle. Bei der Kreativität geht es darum, etwas Neues zu schaffen, dieses Neue kann aber nicht aus ‚nichts‘ entstehen, sie wird aus der Kombination vorhandenen Wissens kreiert. Im Bezug zur Kreativität ist demnach die Fähigkeit, assoziativ, unter der Reduktion der konzentrierten Aufmerksamkeit zu denken, besonders wichtig. Im kreativen Denkprozess werden außer assoziative Prozesse auch integrative und semantische Prozesse stattfinden, wenn verschiedene, im Gedächtnis gespeicherte Wissensgebiete aktiviert, interpretiert und miteinander in Bezug gesetzt werden. Ein anderes Merkmal kreativer Momente ist die Zufälligkeit, eine bewusste Steuerung kreativer Prozesse ist nicht wirklich möglich (Testor 2016, S. 110).

Zur Hochbegabung gelangt nur etwa 2 bis 3% einer Population. Voraussetzung für Hochbegabung sind natürlich sehr gute kognitive Fähigkeiten, außerdem gleich wichtig sind Persönlichkeitsmerkmale wie Neugier, Ausdauer, Frustrationstoleranz, Selbstständigkeit, Genauigkeit, Sorgfalt, etc. Sind bei einer Person viele dieser Eigenschaften besonders gut ausgeprägt, so wird ihr Potential zur Hochbegabung zugeschrieben. Um zur Hochbegabung zu gelangen, ist die gezielte Förderung der Eigenschaften notwendig, die noch nicht besonders gut entwickelt sind (dies kann gelingen oder auch nicht), außerdem soll für die potentiell hochbegabte Person eine spezielle Umgebung geschaffen werden, in der genügend kognitive Reize und emotionale Unterstützung angeboten werden. Demnach ist unter Hochbegabung die kognitive Fähigkeit und Bereitschaft zur Hochleistung zu verstehen, deren langfristiges Ziel die akademische Hochleistung ist. Dies hat wenig mit Zufälligkeit zu tun, sondern setzt über längere Zeit bewusst gewählte, intensive Arbeit voraus (Holoher-Ertl 2006, ab S. 444).

Salopp gesagt, ist also nicht jeder kreative Mensch hochbegabt, aber jeder Hochbegabte verfügt über eine spezifische Form von Kreativität in einem oder manchmal auch in mehreren Wissensbereichen. Dies sei an dieser Stelle deshalb erwähnt, da Lehrpersonen Hochbegabung und Kreativität manchmal verwechseln. Aus dieser Verwechslung resultierte in der Vergangenheit oft und sehr wahrscheinlich teilweise heute noch ein nicht korrekter Blick (belief) auf Problemlösen. Da für Problemlösen fälschlicherweise Hochbegabung und nicht Kreativität vorausgesetzt wurde, setzten Lehrkräfte in ihrem Unterricht keine Problemlöse- oder Modellierungsaufgaben ein, wenn sich ihrer Meinung

nach keine hochbegabten SchülerInnen in einer Klasse befanden. Damit hatten Lernende keine Gelegenheit ihre mathematische Kreativität zu entdecken.

Aber auch in der traditionellen Hochbegabungsdiagnostik wurden Fehler gemacht. Der Intelligenzquotient wurde als einzig relevanter Faktor in Betracht gezogen. Der Wert von 130 Punkten wurde willkürlich, ohne Erklärung als der Grenzwert festgelegt, ab dem jemand als hochbegabt gilt. Wichtige Faktoren wie Persönlichkeitsmerkmale und eine fördernde Umgebung wurden vernachlässigt, da vermutet wurde, Genialität kann nicht unterdrückt werden, sie wird ohnehin schon in jungen Jahren ans Licht treten.

Kreativität soll also auf jeden Fall in der Schule gefördert werden, und es wäre zu einfach bei dem Ratschlag zu bleiben, einige Male im Semester Problemlöse- und/oder Modellierungsaufgaben einzusetzen. Im Folgenden werden einige qualitative Anforderungen erwähnt, die einen kreativitätsfördernden Unterricht auszeichnen.

- Probleme sollen aus solchen Kontexten heraus entwickelt werden, die SchülerInnen herausfordernd erscheinen, und zum Fragen anreizen. Ausgangspunkt einer Aufgabe kann eine im Unterricht von den Lernenden gestellte Frage sein.
- Im Unterricht sollen Möglichkeiten zum freien Experimentieren geschaffen werden. Auch Experimente sinnlicher Natur sollen durchgeführt werden, dabei werden Gegenstände entweder an die Hand gegeben oder selbst erstellt, dies soll das Aufstellen von Vermutungen anregen.
- Lern- bzw. Entdeckungshilfen sollen während des Lösungsprozesses genügend weit gehalten werden. Die Lehrkraft soll weniger Hilfe zur Ergebnisfindung, sondern vielmehr Hilfe zum Selbstfinden des Ergebnisses anbieten.
- Im Unterricht soll ein warmes Lernklima herrschen, Zurückhaltung in der Bewertung (falsch/richtig) von Schülerbeiträgen wirkt besonders fördernd und motivierend, der Abbau von Scheu vor ungewöhnlichen Vorschlägen wird dadurch unterstützt.
- Für SchülerInnen ist es hilfreich, wenn Lehrkräfte allgemein über Denken, Ausdrücken, Darstellen, Einprägen, Erinnern, Vergessen, Fehlermachen, Üben, usw. sprechen (Metakognition!).
- Inhaltliche oder „formale“ Bedeutsamkeit des Themas soll unbedingt deutlich gemacht werden.

Literatur

Blum, Werner; Neubrand, M., Ehmke, T., Senkbeil, M., Jordan, A., Ulfig, F., Carstensen, C., PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*, 2004, Münster: Waxmann

Blum, Werner; Leiss, Dominik; *Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe*, 2005, Mathematik Lehren 128

Blum, Werner; Galbraith, Peter; Niss, Mogans; *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, 2007, Springer

Blum, Werner; *Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht. Herausforderung für Schüler und Lehrer*, 2010, Praxis der Mathematik 34

Blum, Werner; Schukajlov, Stanislaw; *Selbständiges Lernen mit Modellierungsaufgaben. Untersuchung von Lernumgebungen zum Modellieren im Projekt DISUM*, 2018, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Boaler, Jo; *The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do They Make Mathematics More "Real"?*, 1993, For the Learning of Mathematics

Bourne, Lyle E.; Dominowski, Roger, L.; Loftus, Elizabeth; *Cognitive Processes*, 1979, Prentice-Hall

Borromeo Ferri, Rita; Greefrath, Gilbert; Kaiser, Gabriele; *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule*, 2013, Springer Spektrum

Busse, Andreas; *Umgang Jugendlicher mit dem Sachkontext realitätsbezogener Mathematikaufgaben*, 2009, Journal für Mathematik-Didaktik 30 (2)

Dann, Hanns-Dietrich; Diegritz, Theodor ; Rosenbusch, H. S.; *Gruppenunterricht im Schulalltag. Ergebnisse eines Forschungsprojekts und praktische Konsequenzen.*; 2002, Pädagogik 54, Nr. 1

Davis, Philip J.; Hersh, Reuben; *Erfahrung Mathematik*, 1994, Birkhäuser Verlag

Dörner, Dietrich; *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, 1976, Kohlhammer

Fischer, Roland, Malle, Günther; *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*, 1985, Mannheim/Wien/Zürich: Bibliographisches Institut,

Franke, Heinz; *Problemlösen in Gruppen*, 3. Auflage, 2016, Springer Gabler

Freudenthal, H; *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*, 1978, Oldenburg

Funke, Joachim; *Problemlösendes Denken*, 2003, Kohlhammer

Greefrath, Gilbert; *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht, Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*, 2. Auflage, 2018, Springer Spektrum

Grigutsch, Stefan; Raatz, Ulrich; Törner, Günter; *Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern*, 1998, Journal für Mathematik-Didaktik, Vol,19

Grouws, D. A.; Good, T. A.; Dougherty, B. J.; *Teacher conceptions about problem solving and problem-solving instruction* in G. Booker; P.Cobb; T. N. de Mendicuti; *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 14Th*, Mexico, 1990, Vol. 1

Hadamard, Jaques; *An Essay on: The Psychology of Invention in the mathematical Field*, 1944, Dover Publications, Inc.

Haider, Günter; Schreiner, Claudia; *Die PISA- Studie, Österreichs Schulsystem im internationalen Wettbewerb*, 2006, Böhlau

Heinze, Aiso; *Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext, Modelle und Unterrichtskonzepte aus kognitionstheoretischer Perspektive*, 2007, Journal für Mathematik-Didaktik, Vol. 28

Helmke, Andreas; Weinert, Franz E.; *Der gute Lehrer: Person, Funktion oder Fiktion?*, 1996, in Leschinsky, Achim (Hrsg.); *Die Institutionalisierung von Lehren und Lernen. Beiträge zu einer Theorie der Schule*, Zeitschrift für Pädagogik, Beiheft, 34

Hersh, Reuben; *What is Mathematics, Really?*, 1997, Oxford University Press, Inc.

Hinrichs, Gerd; *Modellierung im Mathematikunterricht*, 2008, Spektrum

Holocher-Ertl, S. ; Kubinger, K.D. ; Hohensinn, C. ; *Zur Definition von Hochbegabung ist die Höhe des IQ zwar Konvention aber völlig ungeeignet: Ein neues Diagnosemodell im Spannungsfeld von Hochbegabung und Hochleistung*, in Gula, B. ; Alexandrowicz, R. ; Strauß, S. ; Brunner, E. ; Jenull-Schiefer, B. ; Vitouch, O. (Hrsg.); *Perspektiven psychologischer Forschung in Österreich. Proceedings zur 7. Wissenschaftlichen Tagung der Österreichischen Gesellschaft für Psychologie*, 2006, Lengerich: Pabst.

Hopman, Stefan T.; *PISA zufolge PISA – PISA According to PISA*, 2007, LIT Verlag

Kaiser, Gabriele; Maaß, Katja; *Vorstellungen über Mathematik und ihre Bedeutung für die Behandlung von Realitätsbezügen*, in Büchter, Andreas; Humenberger, Hans; Hußmann, Stephan, Prediger, Susanne (Hrsg.); *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag*, 2007, Franzbecker

Kaiser, Gabriele; Henn, Hans-Wolfgang; *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht*, 2015, Springer Spektrum

Kandel, Eric R.; *Was ist der Mensch? Störungen des Gehirns und was sie uns über die menschliche Natur verraten*, 2018, Siedler

Klix, Friedhart; *Information und Verhalten*, 1971, Deutscher Verlag der Wissenschaften

Lave, Jean; Wenger, Etienne; *Situated learning: Legitimate peripheral participation*, 1991/9/27, Cambridge University Press

Leiss, Dominik; Blum, Werner; Messner, Rudolf; *Die Förderung selbständigen Lernens im Mathematikunterricht-Problemfelder bei ko-konstruktiven Lösungsprozessen*, Journal für Mathematik-Didaktik, 2007, Vol. 28

Lietzmann, W; *Methodik des mathematischen Unterrichts, I. Teil*, 1919, Quelle & Meyer, Leipzig

Lindgren, Sinikka; *Prospective teachers' math views and educational memories*, in E. Pehkonen (Ed.); *Current State of Research on Mathematical Beliefs III: Proceedings of the Mavi-3 Workshop*, 1996, University of Helsinki

Ludwig, Matthias; Reit, Xenia-Rosemarie; *A cross-section Study about Modelling Task Solutions*, 2012, ICME 12 Conference, Korea

Maaß, Jürgen; *Modellieren in der Schule, Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts*, 2015, WTM

Maaß, Katja; *Mathematisches Modellieren im Unterricht. Ergebnisse einer empirischen Studie*, 2004, Franzbecker

Maaß, Katja; *Modellieren im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I*, Journal für Mathematik-Didaktik, 2005, Vol. 26

Maaß, Katja; *What are Teacher's Beliefs about Effective Mathematics Teaching? A Qualitative Study of Secondary School Teachers in Germany*, in *Effektiv Mathematics Teaching from Teachers' Perspective: National und Cross-National Studies*, 2009, University Freiburg, Sense Publishers

Maaß, Katja; *Mathematisches Modellieren in der Grundschule*, 2011, Publikation des Programms SINUS an Grundschulen, IPN

Mason, John; Burton, Leone; Stacey, Kaye; *Mathematisch Denken, Mathematik ist keine Hexerei*, 6. Auflage, 2012, Oldenburg

Merenluoto, Kaarina; *Discussion about conceptual change in mathematics*, 2005, *Nordic Studies in Mathematics Education*, 10(2),

Peter-Koop, Andrea; *Fermi-Problems in primary mathematics classrooms. Fostering children's mathematical modelling processes*, 2005, APMC (Australian Primary Mathematics Classroom), Vol. 10

Pehkonen, Erkki; *What are Finnish teacher educators' conceptions about the teaching of problem solving in mathematics?*, 1993, *European Journal for Teacher Education*, 16(3),

Pehkonen, Erkki; *In-service teachers' conceptions on open tasks*, 1999, in G. Philippou (Ed.), *MAVI-8 Proceedings, Research on Mathematical Beliefs*, University of Cyprus.

Pehkonen, Erkki; Furinghetti, Fulvia; *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education*, 2002, Kluwer Academic Publishers

Pehkonen, Erkki; Hannula, Markku; *Mathematical belief research in Finland*, 2004, *Nordic Studies in Mathematics Education*, 9(2)

Pehkonen, Erkki; *Finnish elementary teachers' conceptions on problem solving in mathematics teaching*, 2017, *Matematica e la sua Didattica*, vol. 25,

Pólya, Geroge; *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*, Sonderausgabe der 4. Auflage, 2010, Francke Verlag

Runco, Mark; Albert, Robert S.; *Theories of Creativity*, 1990, Sage Publications, Inc.

Schoenfeld, Alan; *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*; in D. A. Grouws (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1992, New York, NY: Simon & Schuster

Schukajlow, Stanislaw; Leiss, Dominik; *Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz*, 2011, Journal für Mathematik, 32(1)

Schwarz, Wolfgang; *Problemlösen in der Mathematik, Ein heuristischer Werkzeugkasten*, 2018, Springer Spektrum

Testor, Karl; *Kognitionstheoretische Grundlagen der Kreativität. Wie Neues im Gehirn entsteht und dadurch kreatives Denken erklärbar wird*, 2016, Springer

Vollmer, Gerhard; *Was können wir wissen?*, Band 1: *Die Natur der Erkenntnis*, 1988, 2. Auflage, Hirzel

Vos, Pauline; *What is 'Authentic' in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling?*, in Kaiser, G.; Blum, W.; Borromeo Ferri, R.; Stillman, G. (Hrsg.); *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, ICTMA 14, Springer

Winter, Heinrich Winand; *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*, 2016, Springer Spektrum