



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Warum manches anders ist als es scheint

Ein Überblick über Paradoxa in der Mathematik

verfasst von / submitted by

Gerhard Stefan Forsits

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 020

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Katholische Religion

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

Mit Beendigung dieser Arbeit und dem absehbaren Ende meines Studiums möchte ich an dieser Stelle die Gelegenheit nutzen und all jenen danken, die mich im Laufe meines Studiums unterstützt haben oder mir in schlechten Zeiten beigestanden sind.

Insbesondere sei meinen Eltern und meiner Schwester gedankt, die in der langen Zeit meines Studiums nie die Hoffnung aufgegeben und mir so auch die Stärke gegeben haben, meinen eingeschlagenen Weg zu beenden und einen neuen Lebensabschnitt zu beginnen.

Des Weiteren möchte auf diesem Weg noch meines Großvaters gedenken, welcher mir sehr nahe stand und die Beendigung meines Studiums leider nicht mehr erleben durfte.

Schlussendlich sei noch all den Professorinnen und Professoren gedankt, welche mein Wissen im Laufe des Studiums erweitert haben. Insbesondere sei ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith für seine Betreuung, Hilfe und Unterstützung bei der Erstellung dieser Diplomarbeit gedankt.

Inhaltsverzeichnis

1	Wahlparadoxa	1
1.1	Anwendungen im Verhältniswahlssystem	1
1.1.1	Das d'Hondt Verfahren	2
1.1.2	Wahlzahlverfahren	3
1.1.3	Sainte-Laguê Methode	3
1.1.4	Hare/Niemeyer Methode	4
1.1.5	Divisorverfahren	4
1.2	Anwendungen im Mehrheitswahlrecht	5
1.2.1	Allgemeines und Beispiele	5
1.2.2	Gerry-Mandering	8
1.3	Paradoxa bei Verhältniswahlen / Verteilungsverfahren	12
1.3.1	Grundlegendes	12
1.3.2	Das Alabama Paradoxon	15
1.3.3	Das Ausgleichsmandatsparadoxon	17
1.3.4	Das Direktmandatsparadoxon	20
1.3.5	Das Wählerzuwachsparadoxon	21
1.3.6	New States Paradoxon	22
1.3.7	Das Sperrklauselparadoxon	23
1.3.8	Das Phänomens des negativen Stimmgewichts	24
1.3.9	Zwei Verfahren Paradoxon	27
1.3.10	Paradoxon bei Volksabstimmungen	28
1.3.11	Das Abhängigkeits Paradoxon	29
1.3.12	Vergleich von Wahlergebnissen mit verschiedenen Wahlsystemen	30
1.4	Paradoxa bei alternativen Wahlverfahren	34
1.4.1	Das Condorcet Paradoxon	35
1.4.2	Das Borda Paradoxon	36
1.4.3	Instant-Runoff-Voting; No Show Paradoxon und Monotonie- problem	39
1.4.4	Das Borda-Paradoxon bei den republikanischen Vorwahlen zur US Präsidentenwahl	42
1.4.5	Spitzenduo-Methode	43
1.4.6	Verfahrensvergleich	44
1.5	Das Arrow Paradoxon	45
2	Intransitive Paradoxa	50
2.1	Intransitivität – Definition und Beispiele	50
2.2	Intransitive Würfel	51
2.2.1	Efron-Würfel	51
2.2.2	Miwinsche Würfel	63

2.2.3	Intransitive Vielflächer	64
2.2.4	Allgemeine Betrachtungen	65
2.3	Intransitive Münzwurffolgen	67
2.3.1	3er Kombinationen	67
2.3.2	4er Kombinationen	71
3	Paradoxe Ergebnisse bei medizinischen Tests	78
3.1	AIDS Test (HIV-Test)	78
3.2	PSA-Test	82
3.3	Erwähnung weiterer diagnostischer Tests	84
3.3.1	Test zu Trisomie 21	84
3.3.2	Test zu Mastdarmkrebs	84
3.3.3	Funktionaler Zusammenhang von Falsch-Positiv Fehlern in Abhängigkeit der Infektionsrate	85
3.3.4	Hausarzt oder Spezialist	87
3.3.5	Verbesserte Diagnostik	89
4	Paradoxa der Physik	90
4.1	Das Spiegelparadoxon	90
4.2	Das Band Paradoxon I	92
4.3	Hydrostatisches Paradoxon	93
4.4	Das Boot Paradoxon	94
5	Simpson Paradoxon und Will Rogers Phänomen	95
5.1	Das Simpson Paradoxon	95
5.2	Beispiele zum Simpson Paradoxon	97
5.2.1	Raucherinnen leben länger	97
5.2.2	Die Ausgrenzung ethnischer Minderheiten in Neuseeland	98
5.2.3	Kriminalitätsstatistiken	99
5.2.4	Wenn man länger studiert, verdient man besser	101
5.2.5	Punkteanteil erhöht und trotzdem durchgefallen	102
5.2.6	Resümee	103
5.3	Eine geometrische Interpretation des Simpson Paradoxons	104
5.4	Das Will Rogers Phänomen	109
5.4.1	Höhere Überlebenschance bei Krebspatienten	109
5.4.2	Erhöhung der durchschnittlichen Verkaufszahlen	110
5.4.3	Kurze Erwähnung weiterer Beispiele	111
5.4.4	Erklärung des Phänomens	111
6	Geometrische Paradoxa	113
6.1	Das Curry Paradoxon - Das Rätsel des fehlenden Quadrats	113
6.2	Das Schachbrettparadoxon	116
6.3	Hoopers Paradoxon	117
6.4	Variante des Schachbrettparadoxons-Sam Loyd Paradoxon	118
6.5	Erzeugung des Loyd-Paradoxons	119
6.6	Vermehrung von Schokolade	123

7	Paradoxa der Spieltheorie	124
7.1	Das St. Petersburg Paradoxon	124
7.1.1	Grundsätzliches	124
7.1.2	Auswirkungen des St. Petersburg Paradoxons	125
7.1.3	Lösungsansätze für das St. Petersburg Paradoxon	126
7.1.4	Modifikation des Petersburgers Spiels	131
7.2	Das Parrondo Paradoxon	132
7.2.1	Darstellung der Spiele (vereinfacht)	132
7.2.2	Analyse des Spiels in vereinfachter Form	134
7.2.3	Analyse des eigentlichen Parrondo Spiels	134
7.3	Das Umtausch Paradoxon	138
8	Paradoxa aus der Analysis	141
8.1	Das Band Paradoxon II (Die Schnecke auf dem Gummiband)	141
8.2	Braess Paradoxon	144
8.3	Eulers Reihen	147
8.3.1	Unendliche Summen	147
8.3.2	Reihenentwicklungen	148
8.3.3	Eulers alternierende Reihen	149
9	Kurze Erwähnung weiterer Paradoxa	152
9.1	Das Gefangenendilemma	152
9.2	Das Geburtstagsparadoxon	153
9.3	Das Benford-Paradoxon oder Problem der führenden Ziffer	154
9.4	Die Zenonschen Paradoxa	157
9.4.1	Achilles und die Schildkröte	157
9.4.2	Die Rennbahn (Regressive Form)	157
9.4.3	Der Pfeil	157
9.5	Die Richard Paradoxie	158
9.6	Die Russel Paradoxie	158
9.7	Das Paradoxon der Münzenkante	158
9.8	Das Paradoxon von Jakob und Laban	159
	Anhang	160
	Literaturverzeichnis	162
	Zusammenfassung	168
	Abstract	169

1 Wahlparadoxa

1.1 Anwendungen im Verhältniswahlssystem

Man kann grundsätzlich zwischen Mehrheitswahl und Verhältniswahl unterscheiden. Die Unterscheidung scheint auf den ersten Blick klar zu sein, doch die damit verbundenen Assoziationen sind in den einzelnen Kulturräumen recht unterschiedlich. Auch sprachlich ergeben sich Differenzen zwischen beiden Systemen und was mit ihnen verbunden wird. Eine recht verbindliche Definition kann folgendermaßen lauten¹:

- Eine Wahl ist eine Mehrheitswahl, wenn der Kandidat siegt, welcher die absolute oder relative Mehrheit erreicht.
- Eine Wahl ist eine Verhältniswahl, wenn die politische Repräsentation möglichst exakt die Verteilung der Stimmen auf die Parteien widerspiegelt.

Es geht nicht darum, tiefer in die in die Definitionsproblematik und die politischen Zielvorstellungen und Auswirkungen von Wahlsystemen einzutauchen, das ist Sache der Politikwissenschaftler. Meine Betrachtungen beziehen sich auf die Untersuchung der mathematischen Aspekte von Wahlverfahren, Vorstellung von Berechnungsmethoden und das Auftreten möglicher Paradoxa sowie Manipulationsmöglichkeiten. Am Ende des Kapitels will ich noch die Umsetzung in einzelnen Ländern betrachten.

Grundsätzlich sind Verrechnungsverfahren ausschließlich auf das System der Verhältniswahl beschränkt. Es geht darum, auf welche Weise für bestimmte Gruppierungen abgegebene Stimmen in Sitzverteilungen in unterschiedlichsten Gremien umgerechnet werden. Die meisten Wahlverfahren lassen sich auf den Typus der Wahlzahlverfahren oder Höchstzahlverfahren sowie Divisorenverfahren zurückführen.²

¹vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 130-131.

²vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 114.

1.1.1 Das d'Hondt Verfahren

Hierbei handelt es sich um das wohl bekannteste Höchstzahlverfahren. Dabei wird nach folgendem System vorgegangen.

Jeder Partei wird eine Spalte zugeteilt, und die bei einer Wahl erhaltenen Stimmen für die einzelnen Parteien werden in die erste Reihe der jeweiligen Partei zugeteilten Spalte geschrieben. Danach werden die erhaltenen Stimmen durch 2 dividiert und in die zweite Reihe der jeweiligen Parteispalte geschrieben. Danach werden die erhaltenen Stimmen durch 3,4,5,6, ... dividiert und in die 3.,4.,5., ... Zeile geschrieben. Je nach Stimmenverteilung und Zahl der zu vergebenden Mandate sind die Divisionen fortzusetzen. Je nach Anzahl der zu vergebenden Mandate werden den Quotienten, beginnend beim höchsten Quotienten (darum die Bezeichnung Höchstzahlverfahren), Mandate zugeordnet. Der höchste Quotient erhält das 1.Mandat, der nächsthöchste Quotient das 2.Mandat, ... Wenn n Mandate zu vergeben sind, wird den n höchsten Quotienten jeweils ein Mandat zugeteilt. Danach sieht man sich an, wie viele der n höchsten Quotienten in der jeweiligen Parteispalte vorhanden sind und daraus ergibt sich die jeweilige Sitzverteilung.³

Allgemeine Darstellung des Verfahrens⁴

	S_A	S_B	...	S_Z
1	$\frac{S_A}{1}$	$\frac{S_B}{1}$	...	$\frac{S_Z}{1}$
2	$\frac{S_A}{2}$	$\frac{S_B}{2}$	...	$\frac{S_Z}{2}$
3	$\frac{S_A}{3}$	$\frac{S_B}{3}$	...	$\frac{S_Z}{3}$
...				
n	$\frac{S_A}{n}$	$\frac{S_B}{n}$	...	$\frac{S_Z}{n}$

³vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 115.

⁴vgl. KOPERMANN: Wahlverfahren, S 124.

1.1.2 Wahlzahlverfahren

Wie der Name schon sagt, wird bei diesem Verfahren eine Wahlzahl festgelegt⁵. Sobald eine Partei die Wahlzahl erreicht hat, steht ihr ein Mandat zu. Hat sie die doppelte, 3-fache, ... Wahlzahl an Stimmen erreicht, so bekommt diese Partei 2, 3, ... Mandate. Ausgegangen wird dabei von der Anzahl der abgegebenen gültigen Stimmen, welche durch eine je nach Verfahren sich verändernde Zahl dividiert wird. Ist der Divisor die Anzahl der zu vergebenen Mandate, so spricht man von der Hare-Quota; das Hagenbach-Bischoff Verfahren verwendet als Divisor eine um 1 erhöhte Anzahl der zu vergebenen Mandate; beim modifizierten Wahlzahlverfahren kann es auch um 2 erhöht werden. Meist können bei Wahlzahlverfahren nicht alle Mandate vergeben werden, sodass man zusätzlich Methoden benötigt, um die nicht zur Vergabe gelangten Mandate auch noch zu vergeben. Dies wären:

- Methode des größten Überrestes
- Methode des kleinsten Überrestes
- Restverteilungsverfahren (Höchstverteilungsverfahren aus Reststimmen angewendet)
- Methode des größten Durchschnitts

1.1.3 Sainte-Laguê Methode

Das Sainte-Laguê Verfahren ist jenem nach d'Hondt ähnlich, mit dem Unterschied, dass hierbei nicht die Divisorenreihe 1, 2, 3, 4, 5, ..., sondern die Divisorenreihe 1, 3, 5, 7, ... angewandt wird und die n höchsten Quotienten n Mandaten zugeteilt werden. Ein weiteres in Europa vorkommendes Verfahren ist die ausgeglichene Methode, welcher im Prinzip das Sainte-Laguê Verfahren zugrunde liegt, nur der Anfangsdivisor von 1 auf 1,4 erhöht wurde.⁶ Der Veränderung der Divisorenreihe sind keine Grenzen gesetzt, so können Anfangsdivisoren durch Schrittgrößen verändert werden oder unterschiedliche Schrittgrößen innerhalb eines Verfahrens verwendet werden, etwa 2, 5, 8, 11 oder 1, 4, 7, 10 oder 4, 5, 6, 7.

⁵im Folgenden vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 117.

⁶vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 116.

1.1.4 Hare/Niemeyer Methode

Die für die Parteien abgegebenen gültigen Stimmen werden jeweils mit der Zahl der zu vergebenen Mandate multipliziert und das Ergebnis durch die Gesamtzahl der abgegebenen Stimmen dividiert. Wenn man nun die Nachkommastellen abschneidet, erhält man die Anzahl der auf die einzelnen Parteien entfallenden Mandate. Da nun in den meisten Fällen nicht alle Mandate zur Vergabe kommen, werden nun die Zahlen hinter dem Komma, die bei der Division entstehen, hergenommen. Wenn man nun m nicht vergebene Mandate hat, erhalten die Parteien mit den m größten Nachkommazahlen die Restmandate⁷.

Beispiel der Mandatsberechnung nach Hare/Niemeyer mit 499 zu vergebenen Mandaten⁸.

	Stimmen	Rechenweg	Mandatsquote	Mandate
Partei A	18594670	$18594670 \cdot 499 : 37189335$	249,500	249
Partei B	12950200	$12950200 \cdot 499 : 37189335$	173,763	174
Partei C	1980006	$1980006 \cdot 499 : 37189335$	26,567	27
Partei D	3664459	$3664459 \cdot 499 : 37189335$	49,169	49

1.1.5 Divisorverfahren

Stimmen der Parteien werden durch einen erst zu suchenden Divisor geteilt, bis die Summe der ganzzahligen Anteile der vorher festgelegten Mitgliederzahl eines Gremiums entspricht⁹. Durch die Frage der Rundung kommen wir nun zu verschiedenen Methoden.

- Jefferson-Methode (Divisorverfahren mit Abrundung), entspricht Höchstzahlverfahren nach d'Hondt. Divisor oder Quotient zwischen n und $n+1$ Mandat
- Webster-Methode (Divisorverfahren mit Standardrundung), entspricht Höchstzahlverfahren nach St. Laguë
- Hill/Huntington Verfahren (Divisionsverfahren mit geometrischer Rundung), entspricht Höchstzahlverfahren mit Folge:

$$\sqrt{0 \cdot 1}; \sqrt{1 \cdot 2}; \sqrt{2 \cdot 3}; \sqrt{3 \cdot 4}; \dots; \sqrt{(n-1) \cdot n}$$

⁷vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 121.

⁸vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 123.

⁹im Folgenden vgl. wahlrecht.de/verfahren/divisorverfahren.html, 29.8.2018

Beispiel (als Quotientenverfahren)

249	55	247	47
$\infty(1)$	$\infty(3)$	$\infty(2)$	$\infty(4)$
176,0(5)	38,8	174,6(6)	33,2(19)
101,6(7)	22,4	100,8(8)	19,1
71,8(9)		71,3(10)	
55,4(11)		55,2(12)	
45,5(13)		45,1(14)	
38,4(16)		38,1(17)	
33,4(18)		33,3	

Beispiel(als Divisorverfahren)

$249:38,8 = 6,501 > 6,481$ aufgerundet 7

$55:38,8 = 1,434 > 1,414$ aufgerundet 2

$247:38,8 = 6,449 < 6,481$ abgerundet 6

$47:38,8 = 1,227 < 1,414$ abgerundet 1

- Dean Verfahren (Divisorverfahren mit harmonischer Rundung), entspricht Höchstzahlverfahren mit Folge

$$0; 1\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5}; 3\frac{3}{7}; \dots; \frac{2}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}}$$

- Adams Verfahren (Divisorverfahren mit Aufrundung)

Für welches Verfahren man sich entscheidet, liegt in der Hand nationaler Parlamente und regionaler Vertretungen und dabei wird jenem Verfahren der Vorzug geben, wovon man sich als regierende Partei den größten Vorteil verspricht. Meist werden auf nationaler und regionaler Ebene mehrere Verfahren auch kombiniert. Dabei kommt man zur Einsicht, dass nicht der Wähler, sondern das Wahlrecht bestimmt. Auf dabei auftretende, teilweise recht skurrile Fälle, gehe ich im nächsten Abschnitt ein.

1.2 Anwendungen im Mehrheitswahlrecht

1.2.1 Allgemeines und Beispiele

Manchmal mag eine Mehrheit auf den ersten Blick eine klare Angelegenheit. Bei einer Wahl nach dem Mehrheitswahlrecht gewinnt derjenige, der die meisten Stimmen er-

hält. So kennen wir es beispielsweise bei der Wahl des österreichischen Präsidenten nach der absoluten Mehrheitswahl. Bei der Wahl von manchen staatlichen Parlamenten ist es notwendig, wenn man sich nach dem Mehrheitswahlrecht orientiert, dass die Wahlen auf mehrere Gebiete verteilt durchgeführt werden müssen. In jedem Wahlkreis gewinnt nun eine Person, die meist auch einer Partei zugeordnet ist, und dies sind dann die Mitglieder des Parlamentes. Dabei wählt man mit dem Kandidaten auch gleichzeitig die Partei, und wenn man alle Wahlkreise zusammenzählt, kann es durchaus passieren, dass eine Partei zwar nicht die Mehrheit an Wählerstimmen, aber eine Mehrheit an Mandaten besitzt. Wie dies vonstattengehen kann, erläutere ich nun an folgendem Beispiel¹⁰.

Man teilt 9 Personen in 3 Wahlkreise zu je 3 Personen ein, die zu wählenden Parteien sind A und B.

1. Wahlkreis: A A B (A Mehrheit im 1. Wahlkreis)
2. Wahlkreis: A B A (A Mehrheit im 2. Wahlkreis)
3. Wahlkreis: B B B (B Mehrheit im 3. Wahlkreis)

A hat die Mehrheit in 2 Wahlkreisen und B hat die Mehrheit in 1 Wahlkreis, damit ist A nach diesem Mehrheitswahlrecht der Gesamtsieger

Hätte man es bei einem Wahlkreis belassen, so wäre B Gesamtsieger.

Verändert man die Wahlkreisaufteilung von horizontal auf vertikal, so ist auch B der Gesamtsieger.

A	A	B	A	A	A	B
A	B	A	A	A	B	A
B	B	B	B	A	B	B
				B	B	B

Je nach Wahlkreiseinteilung und Iteration kann also die Mehrheit der Wahlkreise oder Wahlkreisverbände gewinnen ohne in der Gesamtbevölkerung eine Mehrheit zu haben. Im 1. Beispiel kann man also mit etwas über 44% der Stimmen knapp 67% der Mandate erreichen. Im 2. Beispiel setzen wir nun mehrere Iterationen ein, A und B seien die zu wählenden Personen.

¹⁰im Folgenden vgl. Meyer: Einfache Paradoxien, S 29.

1.Wahlkreis	A	A	B	A		
2.Wahlkreis	A	B	A	A	B	B
3.Wahlkreis	B	B	B	A		
4.Wahlkreis	A	A	B	A		
5.Wahlkreis	A	B	A	A	A	A
6.Wahlkreis	B	B	B	A		
7.Wahlkreis	B	B	B	A		
8.Wahlkreis	B	B	B	A	B	B
9.Wahlkreis	B	B	B	A		

Hier in diesem abstrakten Beispiel reichen also schon knapp 30% zum Sieg, nämlich $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Nun folgt eine Interpretation dieses Wahlsystems, das durchaus in der Realität in dieser Art vorkommen könnte. Die Reihen 1-9 stellen dabei Wahlkreise dar, wobei jeweils 3 Wahlkreise zu einem Wahlkreisverband zusammengefasst werden. Sieger ist derjenige, der die Mehrheit an Wahlkreisverbänden gewinnt, wobei derjenige Wahlkreisverband als gewonnen gilt, in dem die Mehrheit an Wahlkreisen gewonnen wird. Versuchen wir es nun mit einem Zahlenbeispiel etwas realistischer zu gestalten. Wie es in den meisten Staaten gesetzlich vorgeschrieben ist, haben alle Wahlkreise eine Größe innerhalb einer bestimmten Spannweite. Also reicht es, wenn wir alle Wahlkreise als gleich groß annehmen.

1.Wahlkreis	52%-48%	A	A gewinnt mit $\approx 44\%$
2.Wahlkreis	51%-49%	A	
3.Wahlkreis	72%-28%	B	
4.Wahlkreis	50,5%-49,5%	A	A gewinnt mit $\approx 41\%$
5.Wahlkreis	50,1%-49,9%	A	
6.Wahlkreis	78%-22%	B	
7.Wahlkreis	67%-33%	B	B gewinnt mit $\approx 68\%$
8.Wahlkreis	63%-37%	B	
9.Wahlkreis	74%-26%	B	

A gewinnt mit 38,8% der Stimmen aus der Bevölkerung.

Wenn es kein Regularium zur Wahlkreisgröße gibt (ländlich-städtisch; kleiner- größer), kann eine noch niedrigere Stimmenanzahl zu einem Sieg nach diesem Wahlrecht führen, teilweise reichen Stimmenanteile von unter 30%.

1.Wahlkreis	10400 – 9800	A	A gewinnt mit $\approx 34\%$
2.Wahlkreis	12700 – 12300	A	
3.Wahlkreis	8600 – 38500	B	
4.Wahlkreis	8100 – 7800	A	A gewinnt mit $\approx 28\%$
5.Wahlkreis	11020 – 11010	A	
6.Wahlkreis	10200 – 55100	B	
7.Wahlkreis	9200 – 20500	B	B gewinnt mit $\approx 74\%$
8.Wahlkreis	10050 – 17100	B	
9.Wahlkreis	15800 – 64400	B	
	96070 – 236510		A

In diesem Beispiel gewinnt A mit 28,9% der Stimmen aus der Bevölkerung.

1.2.2 Gerry-Mandering

Wie man gesehen hat, bedarf es für einen Wahlsieg ein entsprechendes Wahlrecht samt passender Wahlkreiseinteilung. Dabei kann es sein, dass die Wahlkreiseinteilung bewusst manipuliert wird. Dafür hat sich der Fachausdruck „Gerry Mandering“ herausgebildet. Dabei wird bei der Wahlkreiseinteilung die Streuung der Wählerschaft ausgenutzt. Dieser Ausdruck wird zusammengesetzt aus Elbridge Gerry, Gouverneur von Massachusetts, und Salamander. 1812 hatte Gerry, um einen für sich und seiner Partei sicheren Wahlkreis zu schaffen, diesen so zugeschnitten, dass dieser der Form eines Salamanders glich. Man bedient sich dieser Methode, um die Repräsentation einer politischen Gruppe zu erhöhen. Vielfach braucht es gar nicht Absicht zu sein, dass solch paradoxe Ergebnisse entstehen. Auch die Einteilung nach natürlichen Grenzen kann solche Ergebnisse hervorbringen. Meist wird es dazu angewendet die Regierungsmacht zu sichern und der Opposition einen Wahlsieg zu erschweren. Durch Gesetze und demographische Veränderungen kann Gerry Mandering vielfach legitimiert werden¹¹.

Angewendet wird das Prinzip des Gerry Mandering fast ausschließlich im Bereich des Mehrheitswahlrechts. Im Bereich des Verhältniswahlrechts hat dieses Prinzip sehr wenig bis gar keinen Einfluss. Gerry Mandering kann auch als unterstützend für das 2-Parteien System der USA gesehen werden. Gesetzlich legitimierte Zuschnitte machte es kleinen Parteien de facto unmöglich Sitze im Repräsentantenhaus zu gewinnen, sodass man sich einer großen Partei anschloss, wo die eigene Stimme noch etwas Gewicht hatte, Legislative im lokalen Bereich und keine unabhängige Kom-

¹¹vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 89.

mission. Die Strategie, die hinter diesem Prinzip steht, ist die Hochburgenbildung, in dem ein Wahlkreis entsteht, wo möglichst viele oppositionelle Stimmen zusammengefasst werden, um in angrenzenden Wahlkreisen eventuell eine regierende Mehrheit zu ermöglichen, indem oppositionelle Stimmen abgezogen werden. Eine weitere Strategie des Gerry Mandering kann die Verdünnung sein. Dabei wird ein Wahlkreis so zugeschnitten, dass Teile auf umliegende Wahlkreise aufgeteilt werden, sodass ein oppositioneller Sieg in diesem Wahlkreis erschwert, in den umliegenden Wahlkreisen aber trotzdem nicht ermöglicht wird. Ein 60:40 Wahlkreis der Opposition wird beschnitten und auf drei 60:40 Wahlkreise der Regierung aufgeteilt. Durch Klagen am Obersten Gerichtshof der USA wurde immer wieder versucht, das Gerry Mandering einzudämmen, doch der Oberste Gerichtshof entschied, dass Gerry Mandering nicht verfassungswidrig ist, solange es aus politischen und nicht aus rassistischen Gründen erfolgt¹².

Beispiel Texas

Nachdem die Republikaner 2003 die Mehrheit in der staatlichen Legislative erreicht hatten, veränderten diese die bestehende Wahlkreisverteilung für das Repräsentantenhaus auf eine für ihre Partei günstige. Im Folgenden sei der Vergleich der Wahlen für das Repräsentantenhaus in Texas 2002 und 2004 dargestellt¹³:

	Stimmen 2002	Mandate 2002	Stimmen 2004	Mandate 2004
Republikaner	59%	15(47%)	58%	21 (66%)
Demokraten	41%	17(53%)	42%	11 (34%)

Ohne dass es gesamtstaatlich zu gravierenden Veränderungen im Stimmverhalten gekommen ist, veränderte sich der Mandatsanteil um 19%. Wieder ein Beispiel, warum eine mathematische Mehrheit oft keine Mehrheit ist.

US Präsidentenwahl von 2016

Diese Wahl war ein weiteres Beispiel dafür, dass man trotz einer Mehrheit an Stimmen eine Wahl verlieren kann. Das Wahlrecht für den US Präsidenten lässt dies zu und ist in der Geschichte auch bereits 4 Mal vorgekommen. Zur Erklärung: Wer einen Wahlkreis, in diesem Fall einen Bundesstaat, gewinnt, erhält eine sich an der Bevölkerungszahl des Bundesstaates orientierende Anzahl von Wahlmännern. Diese setzt sich aus der Anzahl der Vertreter des Bundesstaates im Repräsentantenhaus +

¹²vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 90.

¹³vgl. de.wikipedia.org/wiki/Gerrymandering, 26.8.2018

2 Senatoren zusammen. Kleine Staaten erhalten überproportional mehr Wahlmänner als große. Erreicht man eine absolute Mehrheit an Wahlmännern, so ist man als US Präsident gewählt.

Zu vergebende Wahlmänner in den einzelnen Bundesstaaten 2016¹⁴.

Kalifornien	55	Indiana	11	Oregon	7	New Hampshire	4
Texas	38	Massachusetts	11	Arkansas	6	Alaska	3
Florida	29	Tennessee	11	Iowa	6	Delaware	3
New York	29	Maryland	10	Kansas	6	Montana	3
Illinois	20	Minnesota	10	Mississippi	6	North Dakota	3
Pennsylvania	20	Missouri	10	Nevada	6	South Dakota	3
Ohio	18	Wisconsin	10	Utah	6	Vermont	3
Georgia	16	Alabama	9	Nebraska	5	DC	3
Michigan	16	Colorado	9	New Mexico	5	Wyoming	3
North Carolina	15	South Carolina	9	West Virginia	5		
New Jersey	14	Kentucky	8	Hawaii	4		
Virginia	13	Louisiana	8	Idaho	4		
Washington	12	Connecticut	7	Maine	4		
Arizona	11	Oklahoma	7	Rhode Island	4		

Wie kann man trotz fast 3 Millionen Stimmen mehr die Wahl verlieren? Ganz einfach: Clinton gewann die großen Staaten mit überragenden Vorsprung, beispielsweise in Kalifornien oder New York, während Trump viele seiner großen Staaten, wie Florida oder Pennsylvania, viel knapper gewann.

Ergebnisvergleich Trump-Clinton in den großen Bundesstaaten¹⁵

Kalifornien	Clinton	+30%	Georgia	Trump	+5%
Texas	Trump	+9%	Michigan	Trump	+0,3%
Florida	Trump	+1,2%	North Carolina	Trump	+3,6%
New York	Clinton	+22%	New Jersey	Clinton	+14%
Illinois	Clinton	+17%	Virginia	Clinton	+5,5%
Pennsylvania	Trump	+0,7%	Washington	Clinton	+16%
Ohio	Trump	+8%	Massachusetts	Clinton	+27%

Dieses Wahlverfahren hält sich deshalb so lange, da man den einzelnen Bundesstaaten das Gefühl geben möchte, etwas zur Wahl beizutragen und damit den Glauben

¹⁴de.wikipedia.org/wiki/Electoral_College, 26.8.2018

¹⁵nytimes.com/elections/results/president, 17.9.2018

an eine Union von föderalen Staaten zu untermauern. Dies könnte man auch durch ein Verhältniswahlrecht, jeweils einzeln auf die US Bundesstaaten angewendet, erreichen. Dazu nehmen wir das minderheitenfreundliche St. Laguë Verfahren.

In folgender Tabelle sehen wir die Ergebnisse¹⁶

	Wahlmänner	Clinton	Trump	Johnson	Stein	McMullin		Clinton	Trump
Kalifornien	55	34	18	2	1	0		55	0
Texas	38	17	20	1	0	0		0	38
Florida	29	14	14	1	0	0		0	29
New York	29	17	11	1	0	0		29	0
Illinois	20	12	8	0	0	0		20	0
Pensylvania	20	10	10	0	0	0		0	20
Ohio	18	8	9	1	0	0		0	18
Georgia	16	7	8	1	0	0		0	16
Michigan	16	7	8	1	0	0		0	16
N Carolina	15	7	8	0	0	0		0	15
New Jersey	14	8	6	0	0	0		14	0
Virginia	13	7	6	0	0	0		13	0
Washington	12	6	5	1	0	0		12	0
Arizona	11	5	6	0	0	0		0	11
Indiana	11	4	6	1	0	0		0	11
Massachusetts	11	7	4	0	0	0		11	0
Tennessee	11	4	7	0	0	0		0	11
Maryland	10	6	4	0	0	0		10	0
Minnesota	10	5	5	0	0	0		10	0
Missouri	10	4	6	0	0	0		0	10
Wisconsin	10	5	5	0	0	0		0	10
Alabama	9	3	6	0	0	0		0	9
Colorado	9	5	4	0	0	0		9	0
S Carolina	9	4	5	0	0	0		0	9
Kentucky	8	3	5	0	0	0		0	8
Louisiana	8	3	5	0	0	0		0	8
Connecticut	7	4	3	0	0	0		7	0
Oklahoma	7	2	5	0	0	0		0	7
Oregon	7	4	3	0	0	0		7	0
Arkansas	6	2	4	0	0	0		0	6
Iowa	6	3	3	0	0	0		0	6
Kansas	6	2	4	0	0	0		0	6
Mississippi	6	2	4	0	0	0		0	6
Nevada	6	3	3	0	0	0		6	0
Utah	6	2	3	0	0	1		0	6
Nebraska	5	2	3	0	0	0		0	5
New Mexico	5	3	2	0	0	0		5	0
West Virginia	5	1	4	0	0	0		0	5
Hawaii	4	3	1	0	0	0		4	0
Idaho	4	1	3	0	0	0		0	4
Maine	4	2	2	0	0	0		3	1
New Hampshire	4	2	2	0	0	0		4	0
Rhode Island	4	2	2	0	0	0		4	0
Alaska	3	1	2	0	0	0		0	3
Delaware	3	2	1	0	0	0		3	0
Montana	3	1	2	0	0	0		0	3
N Dakota	3	1	2	0	0	0		0	3
S Dakota	3	1	2	0	0	0		0	3
Vermont	3	2	1	0	0	0		3	0
DC	3	3	0	0	0	0		3	0
Wyoming	3	1	2	0	0	0		0	3
		264	262	10	1	1		232	306

War es nach dem „the winner takes it all“ System ein eindeutiger Sieg für Trump, so hätte eine Verhältniswahl, angewendet auf die einzelnen Bundesstaaten, keinem der Kandidaten eine, der US Verfassung nach notwendige, absolute Mehrheit an

¹⁶[nytimes.com/elections/results/president](https://www.nytimes.com/elections/results/president), 17.9.2018

Wahlmännerstimmen gebracht, da auch andere Kandidaten Wahlmännerstimmen auf sich vereinigen hätten können, sodass die Wahl des Präsidenten an das Repräsentantenhaus hätte verwiesen werden müssen. Ein Sieg Clintons wäre, aufgrund der republikanischen Mehrheit, auch dort unwahrscheinlich gewesen. Der Modus sieht vor, dass die Abgeordneten jedes Bundesstaates getrennt abstimmen und für die Wahl zum Präsidenten die Mehrheit in 26 Bundesstaaten notwendig ist. Nach der Wahl 2016 hatten die Republikaner die Mehrheit an Abgeordneten in 32 Bundesstaaten. Auch die Anwendung des Verhältniswahlrechtes in den Staaten hätte an der Präsidentschaft Trumps wahrscheinlich nichts geändert. Natürlich muss man Unsicherheiten in der Frage des Wahlverhaltens bei einem geänderten Wahlrecht miteinbeziehen, daher ist diese Betrachtung rein theoretischer Natur.

1.3 Paradoxa bei Verhältniswahlen / Verteilungsverfahren

1.3.1 Grundlegendes

Um Missverständnissen vorzubeugen, will ich vorab grundlegende Eigenschaften anführen, die ein Verteilungsverfahren haben sollte¹⁷:

- (M) Monotonie
Eine Mandatsverteilung ist monoton, wenn eine Partei mit mehr Stimmen als eine andere Partei nicht weniger Mandate erhält, also: Ist

$$S_a < S_b \Rightarrow M_a \leq M_b (\forall a \neq b = 1, \dots, n)$$

- (H) Homogenität
Proportionale Stimmverteilungen ergeben bei gleicher Mandatszahl dieselben Mandatsverteilungen
- (U) Unabhängigkeit
Die Zahl der Mandate einer Partei hängt nur von der eigenen Stimmenzahl ab und nicht von der Zahl der Stimmen von anderen kandidierenden Parteien.

¹⁷im Folgenden vgl. KOPFERMANN: Wahlverfahren, S 95-100.

- Mehrheits- und Minderheitsbedingung (für Koalitionen)

Eine absolute Mehrheit an Stimmen muss auch eine absolute Mehrheit an Mandaten bedeuten.

Hat eine Koalition weniger als die absolute Mehrheit an Stimmen, muss diese weniger als die Hälfte der Mandate erhalten. Hierbei ist es wichtig, dass nur die Stimmenanteile der an der Mandatsverteilung beteiligten Parteien herangezogen werden, also jener Parteien, die keiner Sperrklausel zum Opfer fallen.

Es gibt noch einige andere Eigenschaften, die aber für meine Betrachtungen nicht relevant sind.

Sehen wir uns nun einige kleine Beispiele an, die gegen grundlegende Eigenschaften verstoßen.

Beispiel 1

Es seien in einem Wahlkreis 5 Mandate zu vergeben. Dabei entfallen die 3200 gültigen Stimmen folgendermaßen auf die Parteien¹⁸:

	Stimmen	Anteil	Quote	Mandate
Partei A	1632	51%	2,55	2
Partei B	1024	32%	1,60	2
Partei C	544	17%	0,85	1

Nach Hare (Methode des größten Überrestes) ergibt sich folgende Aufteilung: Partei A hat zwar die absolute Mehrheit an Stimmen, aber die Koalition aus B und C trotz Minderheit die absolute Mehrheit an Mandaten.

Möglichkeiten dieses Paradoxon zu beseitigen sind¹⁹:

- Restmandate automatisch an die Partei mit absoluter Stimmenmehrheit, aber ohne absoluter Mandatsmehrheit vergeben (Hare / Niemeyer)
- Parteien mit nicht mindestens einem Mandat vom Vergabeverfahren ausschließen
- Alle Parteien vom Vergabeverfahren ausschließen, die nicht mindestens eine 1 vor dem Komma haben (dies kann nur bei geringer Anzahl von zu vergebenden Mandaten angewendet werden).

¹⁸vgl. KOPFERMANN: Wahlverfahren, S 113.

¹⁹ebd.

Wenn man meint, das Paradoxon tritt nur bei geringen Stimmen und Mandatszahlen auf, dem sei folgendes Beispiel entgegengestellt²⁰

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	18594670	249,50	249
Partei B	12950200	173,76	174
Partei C	1980006	26,567	27
Partei D	3664459	49,17	49

Hier bringt wieder die absolute Mehrheit an Stimmen nicht die absolute Mehrheit an Mandaten.

Beispiel 2

Das Verfahren nach d'Hondt erfüllt zwar bei einer ungeraden zu vergebenden Mandatszahl die Mehrheitsbedingung, aber nicht die Minderheitsbedingung. Dies sei durch folgendes Beispiel illustriert (nur die letzten 4 Quotienten werden bei Partei A hingeschrieben).

Partei A	1510	188,75(17)	167,78(18)	151,00(19)	137,27
Partei B	601	601,00(3)	300,50(10)	200,33(16)	150,25
Partei C	450	450,00(5)	225,00(12)	150,00	
Partei D	430	430,00(6)	215,00(14)	143,33	
Partei E	401	401,00(7)	200,50(15)	133,67	

So kann Partei A mit 44,5 % der Stimmen bereits die absolute Mandatsmehrheit haben. Auch die Unabhängigkeitsbedingung ist bei d'Hondt sowie bei allen anderen Divisorenverfahren verletzt. Denn bekommt B jeweils 4 Stimmen mehr und A bleibt gleich, so würde A ein Mandat verlieren, ohne dass sich ihre Stimmenanzahl verändert hätte. Die Verletzung des Minderheitenprinzips hängt von der Anzahl der kandidierenden Parteien ab. Das Minderheitenprinzip Prinzip kann unter Einfluss von 3 Parteien genauso verletzt werden wie unter dem Einfluss von 8 Parteien. Aber je höher die Anzahl der Parteien, desto eklatanter kann das Ergebnis ausfallen. So wäre es theoretisch möglich, dass die stimmenstärkste Partei ohne absoluter Mehrheit alle zu vergebenden Mandate auf sich vereinigen könnte (501-100-99-98-97-96-95). Dies geschieht aber nur bei ca. gleicher Stärke gegnerischer Parteien und wenn die Anzahl der gegnerischen Parteien um 1 höher ist als die Anzahl der zu vergebenen Mandate.

Das einzige Sitzzuteilungsverfahren, das die Minderheitenbedingung erfüllt, ist das

²⁰vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 123.

Adams-Verfahren²¹. Dabei beginnt die Divisorenzeile mit 0, 1, 2, Division durch 0 ist hier nicht streng mathematisch zu verstehen. Es heißt nur, dass jeder Partei, die mindestens 1 Stimme hat, auch ein Sitz zugeteilt wird, sofern die Gesamtzahl der zu vergebenden Mandate nicht kleiner ist als die Zahl der Parteien mit mindestens 1 Stimme. Allerdings kann hier die Mehrheitsbedingung nicht garantiert werden. Beispiel: Haben 6 Parteien bei 9 zu vergebenden Mandaten Stimmen erhalten, so kann die stimmenstärkste Partei keine absolute Mandatsmehrheit mehr erhalten, auch nicht, wenn diese 80 % der Stimmen erhält. Man sieht, dass es gar nicht so einfach ist, ein gerechtes Sitzzuteilungsverfahren zu entwickeln.

1.3.2 Das Alabama Paradoxon

Dieses Paradoxon kann folgendermaßen kurz umschrieben werden: Ein Staat oder eine Partei erhält bei gleichbleibender Stimmverteilung weniger Sitze, obwohl die Sitzanzahl des Hauses vergrößert wird²².

Ein kurzes Beispiel zur Illustration:

Es soll nun ein Ausschuss nach der Anzahl der Stimmen für die Parteien nach der Methode Hare + größter Überrest gebildet werden. Über die Zahl der Mitglieder ist man sich uneinig und man sieht sich die Verteilung an die Parteien für 7, 8, 9 Sitze an.

	Stimmen	Quote 7	Quote 8	Quote 9
Partei A	17175169	3,24	3,70	4,16
Partei B	13190837	2,49	2,84	3,20
Partei C	3615183	0,68	0,78	0,88
Partei D	3129982	0,59	0,67	0,76

Wie man sieht, verliert die schwächste Partei trotz Vergrößerung des Gremiums von 7 auf 8 Mitglieder ihren Sitz darin.²³

Die Erwähnung des Staates in dieser Umschreibung liegt der Tatsache zugrunde, dass Sitzzuteilungsverfahren nicht nur bei Wahlhandlungen angewendet werden, sondern bereits vorher, wenn es darum geht, die Anzahl der Mandate auf Wahlkreise, Länder oder Staaten zu verteilen, um der Bevölkerung der Bundesstaaten in den USA oder der Bevölkerung der Kantone in der Schweiz oder der Bundesländer in Österreich eine gerechte Repräsentation in den nationalen Parlamenten zukommen zu lassen. Nun mehr dazu, wie man dieses Paradoxon entdeckte. In den USA gab es seit der

²¹im Folgenden vgl. KOPFERMANN: Wahlverfahren, S 131.

²²vgl. KOPFERMANN: Wahlverfahren, S 114.

²³ebd.

Gründung stets Streit darum, mit welcher Methode die Zahl der Abgeordneten des Repräsentantenhauses auf die einzelnen Bundesstaaten verteilt werden sollte. Nach jeder Volkszählung in den USA, die alle 10 Jahre stattfindet, begann der Streit von neuem. Mit steigender Bevölkerungszahl erhöhte sich auch die Zahl der Mitglieder des Repräsentantenhauses und mit jeder festgelegten Zahl der Mandatare sah sich ein Bundesstaat unterrepräsentiert oder einen anderen Staat überrepräsentiert. 1840 wurde die Jefferson Methode nach 50 Jahren von der Webster Methode abgelöst und 10 Jahre später die Vinton-Methode eingeführt (ähnlich Hare + größter Überrest mit variablen Divisor). 1880 wurde, wie nach jeder Volkszählung, eine Debatte um die Vergrößerung des Repräsentantenhauses erwartet und anders als in den Jahren zuvor lieferte die Volkszählungsbehörde für verschiedene Mitgliederzahlen die Verteilung des Bundesstaates gleich mit. Wie man es erwartete, wurde jeder zusätzliche Sitz im Repräsentantenhaus an einen Staat zusätzlich vergeben. Doch als sich die Abgeordnetenzahl von 299 auf 300 erhöhte, erhielt der Bundesstaat Alabama plötzlich einen Abgeordneten weniger, während Texas und Illinois einen mehr bekamen. Von nun an war das Alabama-Paradoxon geboren²⁴. Im Folgenden nun Tabellen von folgendem Problem²⁵:

	299 zu vergebende Sitze			300 zu vergebende Sitze		
	Alabama	Texas	Illinois	Alabama	Texas	Illinois
Einwohner	1262505	1591749	3077871	1262505	1591749	3077871
Zuteilung	7,646	9,640	18,640	7,671	9,672	18,701
Sitze	7	9	18	7	9	18
Nachkommarest	0,646	0,640	0,640	0,671	0,672	0,701
Zusätzliche Sitze	+1	± 0	± 0	± 0	+1	+1
Sitze Insgesamt	8	9	18	7	10	19

Die Mitgliederzahl des Repräsentantenhauses wurde in der Folge auf 325 erhöht, sodass dieses Problem jetzt nicht mehr bestand. Doch wer glaubte, dass sich dieses Problem durch Ignorieren in Luft auflösen würde, der irrte. Im Jahr 1900 ergab sich dasselbe Problem mit Maine²⁶.

Sitze Repräsentantenhaus	350-382	383-385	386	387-388	389-390	391-400
Sitze des Staates Maine	3	4	3	4	3	4

Im Jahr 1911 wurde die Mitgliederzahl des Repräsentantenhauses fix auf 435 fest-

²⁴vgl. SZIPRO: Verflixte Mathematik, S 111-119.

²⁵im Folgenden vgl. SZIPRO: Verflixte Mathematik, S 120.

²⁶vgl. KOPERMANN: Wahlverfahren, S 115.

gelegt und nicht mehr verändert, was das Problem des Alabama-Paradoxons löste. Gleichzeitig wurde die Vinton Methode abgeschafft und zu Webster zurückgekehrt. Seit 1950 gilt das Hill/Huntington Verfahren für die Sitzzuteilung in den USA.

Das Problem konnte insbesondere auch im deutschen Wahlrecht auftreten, da die Sitzzahl durch Überhangmandate und Ausgleichsmandate variabel war und durch das Verfahren Hare/Niemeyer begünstigt wurde. Aus dem Alabama Paradoxon konnte sich in Deutschland somit das Ausgleichsmandatparadoxon und das Sperrklauselparadoxon ergeben.

Zum Schluss noch ein Beispiel, welches zeigen soll, dass das Alabama-Paradoxon nicht nur auf politische Fragestellungen beschränkt werden muss, auch wenn es etwas weit hergeholt ist:

Drei Räuber erbeuteten 20 Goldbarren, die sie sich nach einem bereits vorher abgesprochenen Schlüssel von $7 : 46,5 : 46,5$ aufteilen wollten. Bei überzähligen Goldbarren sollte der höchste Bruchteil entscheiden. Mathematisch ergab sich eine Aufteilung von $1,4 : 9,3 : 9,3$, also schlussendlich $2 : 9 : 9$. Dann wurde im Fluchtwagen ein weiterer Barren entdeckt, der wohl aus der Kiste gefallen war. Die neue Aufteilung lautete nun $1,47 : 9,765 : 9,765$, also $1 : 10 : 10$. Räuber 1 fühlte sich betrogen²⁷.

1.3.3 Das Ausgleichsmandatsparadoxon

Ausgleichsmandate sind per Definition zusätzliche Mandate, die eine Partei erhält, falls andere Parteien Überhangmandate bekommen haben. Damit soll der Vorteil einer Partei durch Überhangmandate ausgeglichen werden. Ausgleichsmandate gibt es nur dann, wenn Überhangmandate entstanden sind. Das Ausgleichsmandatparadoxon ist nur möglich, wenn man ein Wahlverfahren mit Erst- und Zweitstimme wie bspw. in Deutschland verwendet. Mit der Erststimme wird ein Kandidat einer Partei in einem Einerwahlkreis nach Mehrheitswahl direkt gewählt. Dieses Mandat heißt Direktmandat. Mit der zweiten Stimme wird eine Partei gewählt und die Gesamtsitzverteilung des Parlaments wird über die Zweitstimme berechnet. Erhält eine Partei nach Erststimmen mehr Sitze als ihr nach dem Anteil der Zweitstimmen zustehen, so nennt man die Differenz der Sitze Überhangmandate. Die Größe des Parlaments muss deshalb erhöht werden, denn einem mit der Erststimme direkt gewählten Kandidaten steht auf alle Fälle ein Sitz im Parlament zu. Das Paradoxon besteht nun darin, dass einer Partei Ausgleichsmandate deshalb zugeteilt werden,

²⁷vgl. AIGNER: Alles Mathematik, S 286.

weil diese Partei weniger Stimmen erhalten hat²⁸.

Beispiel 1: Nach Hare/Niemeyer werden 21 Mandate, davon 11 Direktmandate vergeben.

Partei A gewinnt 3 – Partei B gewinnt 8 Direktmandate. Der Ausgang nach Zweitstimmen lautet²⁹:

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	435	8,30	8
Partei B	385	7,35	8
Partei C	280	5,34	5

Aufgrund des höchsten Nachkommarestes erhält Partei B das 8. Mandat, das ihnen bei niedrigerem Rest auch zugestanden wäre. Es gibt also kein Überhangmandat. Aufgrund einer Neuauszählung wird eine Stimme, die vorher fälschlicherweise Partei A zugerechnet wurde, nun Partei C zugeordnet. Nun steht Partei C das Restmandat zu und nicht mehr Partei B.

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	434	8,285	8
Partei B	385	7,350	7
Partei C	281	5,364	6

Hierbei handelt es sich um eine nicht zugelassene Mandatsverteilung, da Partei B auf alle Fälle das Recht auf 8 Mandate hat. Partei B erhält nun ein Überhangmandat, die Sitzzahl des Gremiums muss um 1 auf 22 erhöht und die Sitzverteilung neu berechnet werden. Aus dieser Neuberechnung folgt, dass Partei A einen Sitz dazugewinnt, obwohl sie eine Stimme an Partei C verloren hat.

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	434	8,68	9
Partei B	385	7,70	8
Partei C	281	5,62	5

²⁸wahlrecht.de/lexikon/ausgleichsmandate.html, 21.8.2018

²⁹im Folgenden vgl. wahlrecht.de/systemfehler/ausgleichsmandate.htm, 21.8.2018

Beispiel 2: Voraussetzungen dieselben wie bei Beispiel 1

Nur wird hier bei Überhangmandaten stets in Zweierschritten erhöht, um eine ungerade Sitzzahl des Gremiums zu gewährleisten. Partei A gewinnt 9, Partei B und C jeweils 1 Direktmandat.

	Stimmen	Quote	Mandate		Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	827	8,27	9	Partei A	827	8,27	8
Partei B	524	5,24	5	Partei B	523	5,23	5
Partei C	523	5,23	5	Partei C	522	5,22	5
Partei D	226	2,26	2	Partei D	228	2,28	3

In den beiden Tabellen findet sich die ursprüngliche Mandatsverteilung sowie die nicht zugelassene Verteilung nach der Neuauszählung. Nach einer Neuauszählung erhält nun Partei D jeweils 1 Stimme von B und C. A verliert das Reststimmenmandat an D. Dadurch gibt es ein Überhangmandat für A, die Sitzzahl wird von 21 auf 23 erhöht und die Sitzverteilung neu berechnet. Partei B und C wird jeweils ein Mandat mehr zugestanden, obwohl beide eine Stimme an D verloren hatten.

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	827	8,27	9
Partei B	523	5,23	6
Partei C	522	5,22	6
Partei D	228	2,28	2

1.3.4 Das Direktmandatsparadoxon

Das Paradoxon besteht darin, dass wenn eine Partei ein Direktmandat verliert, diese insgesamt mehr Sitze bekommt. Wir beziehen uns weiter auf das Wahlrecht in Deutschland vor 2013 (Hare/Niemeyer)³⁰.

Beispiel: Es werden 598 Mandate vergeben, davon 299 Direktmandate, wie es in Deutschland üblich ist. Dabei überspringen 3 Fraktionen die 5% Sperrklausel mit folgender Stimmverteilung³¹:

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	12572885	288,7	289
Partei B	11788985	270,7	271
Partei C	1681030	38,6	38
Unabhängig	—	—	0

Da nach einer Neuauszählung ein ursprünglich einem Direktkandidaten von C zugewiesenes Mandat nun doch von einem unabhängigen Direktkandidaten gewonnen wurde, werden nun nicht mehr 598, sondern 597 Mandate verteilt. Der Verlust von einem Direktmandat an einen unabhängigen Kandidaten führt unmittelbar zu einem Mandatsgewinn.

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	12572885	288,21	288
Partei B	11788985	270,14	270
Partei C	1681030	38,53	39
Unabhängig	—	—	1

³⁰cdu-denkendorf.de/uploads/media/2011-10-19.pdf, 29.8.2018

³¹[wahlrecht.de/systemfehler/sperklausel.htm# direktmandatsparadoxon.htm](http://wahlrecht.de/systemfehler/sperklausel.htm#direktmandatsparadoxon.htm), 21.8.2018

1.3.5 Das Wählerzuwachsparadoxon

Dieses Paradoxon hat zum Inhalt, dass Stimmenveränderungen einer Partei Einfluss auf die Mandatsverteilung anderer Parteien haben. Dazu ein Beispiel mit den Zahlen der deutschen Bundestagswahl von 1998³².

	CDU	CSU	SPD	Grüne	PDS	FDP
Stimmen	14004908	3324480	20181269	3301624	2515454	3080955
Quote	197,9	46,9	285,2	46,6	35,557	43,550
Sitze	198	47	285	47	36	43

Angenommen die CDU hätte 38.000 Stimmen verloren und die Ergebnisse aller anderen Parteien wären gleichgeblieben, würden sich die Quoten der Parteien folgendermaßen verändern:

	CDU	CSU	SPD	Grüne	PDS	FDP
Stimmen	13966908	3324480	20181269	3301624	2515454	3080955
Quote	197,5879	47,0	285,5	46,7	35,58579	43,550
Sitze	198	47	285	47	36	43

Dies hätte zur Folge, dass die FDP einen Sitz mehr und die PDS einen Sitz weniger im deutschen Parlament hätte.

In einer kleinen Abwandlung hätte das Wählerzuwachsparadoxon auch in den USA auftreten können. Nachdem das Alabama-Paradoxon auf die ständig wechselnden Sitzzahlen im Repräsentantenhaus zurückgeführt werden kann, ging man der hypothetischen Frage nach, ob bei einer festgelegten Parlamentsgröße nicht auch Paradoxa entstehen konnten, und zu einem solchen kam es auch, als man sich die Sitzverteilung von Virginia und Maine ansah. Obwohl die Bevölkerungszahl von Virginia prozentuell höher anstieg als diejenige von Maine (zwischen 1900 und 1901), hätte bei einer Neuberechnung 1901 Virginia einen Sitz an Maine verloren. Dieses Beispiel sei in folgender Tabelle veranschaulicht³³.

	Einwohner 1900	Quote	Mandate	Einwohner 1901	Quote	Mandate
Virginia	1854184	9,599	10	1873951	9,509	9
Maine	694466	3,595	3	699114	3,584	4
USA	74562608		386	76069522		386

³²wahlrecht.de/verfahren/paradoxien/population.html, 1.9.2018

³³vgl. SZIPRO: Verflixte Mathematik, S 121.

1.3.6 New States Paradoxon

Dieses Paradoxon wird je nach Anwendungsgebiet auch das Parteizuwachsparadoxon oder das Neue-Parteien Syndrom genannt. Das Paradoxon kann folgendermaßen definiert werden:

„Die Mandatsverteilung ändert sich bei sonst gleichbleibender Stimmenverteilung, wenn eine neue leer ausgehende Partei hinzukommt.“³⁴.

Äquivalent dazu ist folgende Definition:

„Bei einer Reduzierung der Gesamtparteienzahl kann das selbe Stimmergebnis für eine Partei zu einem Sitzverlust führen“³⁵.

Bekannt wurde das Paradoxon durch die Aufnahme des Staates Oklahoma in die Union. Da Oklahoma ca. 1 Million Einwohner hatte, entsprach dies ziemlich genau 5 Abgeordneten und deshalb wurde das Repräsentantenhaus um 5 Sitze vergrößert. Nach den damaligen Bevölkerungszahlen entsprach ein Abgeordneter im Repräsentantenhaus ca. 200.000 Einwohnern. Die Neuberechnung nach der Hamilton-Methode schien nur eine Formalität zu sein und tatsächlich standen Oklahoma 5 Sitze zu. Aber es änderte sich plötzlich die Abgeordnetenzahlen, die den Staaten New York und Maine zustanden, denn New York verlor einen Sitz an Maine, obwohl sich die Bevölkerungszahlen der beiden Staaten nicht verändert hatten. Zur Veranschaulichung folgt das Berechnungsbeispiel mit den damaligen Zahlen.

	Stimmen	Quote	Mandate	Stimmen	Quote	Mandate
New York	7264183	37,606	38	7264183	37,589	37
Maine	694466	3,595	3	694466	3,594	4
Oklahoma	—	—	—	1000000	5,175	5
USA gesamt	74562608		386	75562608		391

Da mit der Hinzunahme der Bevölkerungszahl von Oklahoma zur Gesamtbevölkerungszahl die Nachkommaresten aller Staaten schrumpften, bei den großen Staaten natürlich mehr als bei den kleinen Staaten, war es nun möglich, dass mit Maine ein kleiner Staat dem großen Staat New York einen Sitz wegnahm³⁶.

Direkte Folge des Parteizuwachsparadoxons ist das Sperrklauselparadoxon, worauf ich im Folgenden kurz eingehen möchte.

³⁴KOPERMANN: Wahlverfahren, S 115.

³⁵wahlrecht.de/verfahren/paradoxien/parteizuwachs.html, 1.9.2018

³⁶vgl. SZIPRO: Verfluchte Mathematik, S 122.

1.3.7 Das Sperrklauselparadoxon

Bei einer Sperrklausel handelt es sich um eine Bestimmung in einem Wahlsystem, welche die Beteiligung einer Partei an einer Sitzzuteilung von einem prozentuellen Anteil der abgegebenen gültigen Stimmen abhängig macht. Sperrklauseln werden meist auf staatlicher Ebene angewendet und können zwischen 1,5% und 10% variieren. Die 5% Sperrklausel ist die in einer Mehrzahl der Staaten angewendete Klausel.³⁷

Hierbei ist das Paradoxe, dass eine Partei bei einem Stimmenzuwachs weniger Mandate erhält, wenn durch den Stimmenzuwachs eine andere Partei unter die Sperrklausel fällt. Im folgenden Beispiel sind 21 Mandate nach Hare/Niemeyer mit 5% Sperrklausel zu vergeben³⁸.

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	500	1,05	1
Partei B	700	1,47	2
Partei C	4400	9,24	9
Partei D	4400	9,24	9

Fällt nun eine ursprünglich ungültig gewertete Stimme nun doch B zu, erreicht A nicht mehr 5% der gültigen Stimmen und fällt somit aus dem Sitzzuteilungsverfahren heraus. Erstaunlicherweise erhält B trotz einer Stimme mehr nun ein Mandat weniger.

	Stimmen	Quote	Mandate
Partei A	500	—	—
Partei B	701	1,55	1
Partei C	4400	9,72	10
Partei D	4400	9,72	10

Aufgrund der auftretenden Paradoxa beschloss nun der Kongress in den USA, die Hamilton-Methode durch das Verfahren nach Webster zu ersetzen, da man dieses Verfahren als resistenter gegenüber auftretender Paradoxa ansah. In Deutschland beispielsweise wurde das Hare/Niemeyer Verfahren erst 2008 durch das Verfahren nach Sainte-Laguë ersetzt, hauptsächlich aufgrund des Phänomens vom negativen Stimmgewicht.

³⁷vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 113.

³⁸vgl. wahlrecht.de/systemfehler/sperrklausel.htm, 3.9.2018

1.3.8 Das Phänomens des negativen Stimmgewichts

Beispiele aus Deutschland

Bleiben wir bei den Zahlen zur deutschen Bundestagswahl 1998. Der SPD stehen laut Zweitstimmen 285 Mandate zu. Diese werden gemäß des deutschen Wahlrechts auf die Länderlisten der SPD nach dem Zweitstimmenergebnis in den Bundesländern verteilt³⁹.

Bundesland	Zweitstimmen	Quote	Sitze	Direkt	Überhang	Gesamt
Schleswig-H.	788907	11,140	11	11	0	11
Hamburg (Hamburg neu)	445276 (465276)	6,288 (6,564)	6 (7)	7 (7)	1 (0)	7 (7)
Niedersachsen	2446945	34,555	35	27	0	35
Bremen	201539	2,846	3	3	0	3
Nordrhein-W.	5097425	71,985	72	53	0	72
Hessen	1481898	20,927	35	18	0	21
Rheinland-Pfalz (Rheinland-P. neu)	1028886 (1028886)	14,529 (14,515)	15 (14)	10 (10)	0 (0)	15 (14)
Baden-Würt.	2118439	29,916	30	11	0	30
Bayern	2401021	33,907	34	7	0	34
Saarland	361486	5,104	5	5	0	5
Berlin	740915	10,463	10	9	0	10
Mecklenburg-V.	384746	5,433	5	7	2	7
Brandenburg	670744	9,472	9	12	3	12
Sachsen-Anhalt	620771	8,766	9	13	4	13
Thüringen	549942	7,766	35	11	3	11
Sachsen	842329	11,895	35	8	0	12
Deutschland (Deutschland)	20181269 (20 201 269)	285 (285)	285 (285)	212 (212)	13 (12)	298 (297)

Wären nun im Bundesland Hamburg 20.000 Zweitstimmen mehr für die SPD abgegeben worden, so würden der Hamburger SPD weiterhin 7 Sitze zustehen, da diese ja 7 Direktmandate erreicht hatte. Nur würde dies nicht mehr mit einem Überhangmandat, sondern mit einem regulären Mandat aus dem Kontingent von 285 Sitzen besetzt. Dadurch geht aber der SPD in Rheinland-Pfalz ein regulärer Sitz verloren und damit würde sich der Gesamtstand der Mandate insgesamt um ein Mandat in ganz Deutschland verringern.

³⁹im Folgenden vgl. wahlrecht.de/systemfehler/spektrum.html, 3.9.2018

Umgekehrtes Szenario: Hätte die SPD in Bremen 30.000 Stimmen und in Brandenburg 1.000 Zweitstimmen weniger erhalten, hätte es folgende Quoten gegeben:

Bremen 2,426 – Brandenburg 9,487 – Berlin 10,479 – NRW 72,096.

Ohne 1.000 Stimmen Brandenburg:

Bremen 2,426 – Brandenburg 9,486 – Berlin 10,478 – NRW 72,096.

Somit würde die SPD Bremen ihr Restmandat verlieren, bleibt aber aufgrund der Direktmandate auf dem Gesamtstand von 3 Mandaten. Aufgrund der Restquote wäre das Mandat an Brandenburg gegangen, aber aufgrund der 1.000 Stimmen weniger bleibt es bei 3 Überhangmandaten in Brandenburg und die SPD Berlin erhält ein reguläres Reststimmenmandat hinzu, während die SPD Bremen aufgrund des Überhangs kein Gesamtmandat verliert. Somit erhöht sich die Gesamtmandatszahl der SPD in Deutschland um 1.

Es sei nun noch eine praktische Auswirkung des negativen Stimmgewichts dargestellt⁴⁰. Ein trauriger Zufall wollte es, dass dieses Beispiel entstand. Durch den Tod einer Kandidatin in einem Dresdner Wahlkreis konnte die Bundestagswahl 2005 in diesem Wahlkreis erst zwei Wochen später durchgeführt werden. Da zu diesem Zeitpunkt die Ergebnisse aus Restdeutschland bereits vorlagen, konnte man leicht Zahlenspielerereien für diesen Wahlkreis erstellen. Eine besondere Zahl stellt dabei die Stimmenzahl von 41.227 dar. Erreicht die CDU diese Anzahl an Zweitstimmen, so würde die CDU ein Listenmandat im Bundesland Sachsen mehr bekommen. Dies hätte allerdings keinen Einfluss auf die Mandatszahl in Sachsen, da die CDU in diesem Bundesland ohnehin 3 Überhangmandate hat, aber ein Listenmandat aus Nordrhein-Westfalen würde nach Sachsen wandern. Im Gesamten würde also die CDU in Deutschland ein Mandat weniger erhalten. Die Nachwahl in Dresden hatte auch bundespolitische Brisanz. Das Ergebnis der Hauptwahl war mit 225 CDU und 222 SPD Mandaten recht knapp. Würde die CDU die Grenze erreichen und das Direktmandat nicht gewinnen, stünde es plötzlich 224:223 bundesweit. So gab es auf wahlrecht.de wahltaktische Empfehlungen für die Wähler, aber auch im Dresdner Wahlkampf wurde aufgerufen, taktisch zu wählen. CDU rief ihre Wähler dazu auf, mit der Zweitstimme nicht CDU zu wählen, während die SPD einige ihrer Anhänger davon überzeugen wollte, CDU zu wählen, da die Chance der SPD, ein weiteres Zweitstimmenmandat zu bekommen, nur noch theoretischer Natur war. Am Ende lief es für die CDU wie geplant, denn die Stimmengrenze wurde nicht erreicht und das Direktmandat wurde auch noch gewonnen. So stand es nun im Bundestag im Kampf CDU gegen SPD 226:222.

⁴⁰im Folgenden vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 213-214.

Die Nachwahl hatte für die CDU bundesweit keine Folgen. Die CDU in Nordrhein Westfalen verlor trotzdem ein Mandat an die CDU im Saarland. Bei nochmaligem Verlust von etwa 10.000 Stimmen der CDU in Sachsen hatte die CDU in Nordrhein Westfalen ihr Mandat behalten⁴¹.

Solche Situationen wären bei jeder Bundestagswahl möglich gewesen, darum wurde auch nach Urteilen des Verfassungsgerichts das Wahlrecht in Deutschland wesentlich verändert. All diese Paradoxa treten insbesondere bei Hare/Niemeyer bzw. beim Hamilton-Verfahren auf⁴².

Beispiele aus Österreich

Auch in einigen österreichischen Wahlsystemen kann es zum Phänomen des negativen Stimmgewichts kommen. Im Folgenden sei dies am Landtagswahlsystem der Steiermark illustriert (mit fiktiven Zahlen, Wahlkreis wird mit WK abgekürzt)⁴³.

1. Ermittlungsverfahren: nach Hagenbach-Bischoff in 4 Wahlkreisen.
2. Ermittlungsverfahren: Reststimmensumme landesweit nach d'Hondt ⁴⁴.

	WK 1	WK 2	WK 3	WK 4	Mandate
Partei A	80000	65000	80000	73000	298000
Partei B	70500	60000	50000	20000	200500
Partei C	8000	8000	6000	4000	26000
Partei D	—	7000	4000	4000	15000
Gesamtstimmen	158500	140000	140000	101000	539500
Mandate	17	10	12	17	56
Wahlzahl	8806	12728	10770	5612	

⁴¹vgl. wahlrecht.de/ueberhang/beispiel-bundestagswahl-2005.html, 3.9.2018

⁴²vgl. wahlrecht.de/systemfehler/spektrum.html, 3.9.2018

⁴³nach: wahlrecht.de/systemfehler/billige-restsitze.html, 8.9.2018

⁴⁴LTWO Steiermark 2004 – Landesgesetzblatt vom 31.08.2004, LGBl 30.09.2004

Nach dem 1.Ermittlungsverfahren ergeben sich folgende Mandatsquoten :

	WK 1	WK 2	WK 3	WK 4	Mandate
Partei A	9,08	5,11	7,43	13,01	34
Partei B	8,01	4,71	4,64	3,56	19
Partei C	0,91	0,63	0,56	0,71	0
Partei D	—	0,55	0,37	0,71	0
Restsitze	0	1	1	1	3
Reststimmen A	746	1360	4610	44	6760
Reststimmen B	52	9080	6920	3162	19224

Nach d´Hondt mit Wahlzahl 6760 gehen 2 Restsitze an B und 1 Restsitz an A , die endgültige Mandatsverteilung lautet: Partei A bekommt 35 Mandate, Partei B 21 Mandate.

Hätten nun im Wahlkreis 1 hundert Wähler Partei C anstatt Partei B gewählt, so hätte Partei B ein achtes Grundmandat um 48 Stimmen verfehlt und somit gehen nun 8758 Stimmen in den Reststimmtopf, wo 4 Restmandate zu vergeben sind. Restmandate werden nur an jene Parteien vergeben, die im 1. Durchgang in einem Wahlkreis ein Grundmandat erreicht haben.

Reststimmen Partei A: 6.760, Reststimmen Partei B: 27.930

Da Partei B mehr als 4-mal so viele Reststimmen wie Partei A hat, gehen deshalb alle 4 Restmandate an B. Mit 100 Stimmen weniger bekommt Partei B also 1 Mandat mehr.

1.3.9 Zwei Verfahren Paradoxon

Die Sitze in den Ausschüssen des deutschen Bundestages werden nach dem Verfahren St. Lague vergeben. Wenn dieses Verteilungsverfahren nicht die Mehrheitsverhältnisse des Bundestages wiedergibt, ist das Verfahren nach d´Hondt anzuwenden⁴⁵.

Wenn man nach dieser Methode vorgeht, kann es durchaus geschehen, dass eine Partei Sitze in Ausschüssen gewinnt, wenn sie Mandatäre im Parlament verliert und umgekehrt.

Hierzu nun ein Beispiel mit fiktiven Zahlen⁴⁶.

Die Sitzverteilung im Parlament samt Sitzverteilung in einem Ausschuss mit 7 Mitgliedern stellt sich folgendermaßen dar:

⁴⁵Beschluss zur Drucksache 19/438 des deutschen Bundestages vom 17.1.2018

⁴⁶vgl. wahlrecht.de/systemfehler/zweiverfahren.html, 10.9.2018

Partei	A	B	C	D
Sitzverteilung Parlament	351	150	60	60
Sitzverteilung Ausschuss	4	1	1	1

Nun wechseln 2 Mitglieder von A den Parlamentsklub und treten nun Partei C bei. Da nun die Berechnung der Sitze nach St. Lague die Mehrheitsverhältnisse im Parlament nicht mehr korrekt widerspiegelt, ist folglich das Verfahren nach d'Hondt anzuwenden.

Partei	A	B	C	D
Sitzverteilung Parlament	349	150	62	60
Sitzverteilung Ausschuss nach St. Lague	3	2	1	1
Sitzverteilung Ausschuss nach d'Hondt	5	2	0	0

Der Wechsel des Verfahrens führt nun dazu, dass Partei A trotz des Verlustes von 2 Sitzen im Parlament einen Sitz im Ausschuss hinzu gewinnt, während Partei C mit zwei Mandataren mehr im Parlament ihren Sitz im Ausschuss verliert.

1.3.10 Paradoxon bei Volksabstimmungen

Bei diesem Paradoxon gehen wir von einer Volksabstimmung mit den Entscheidungsmöglichkeiten JA und NEIN aus⁴⁷. Bei einigen Volksabstimmungen ist zusätzlich zur Annahme des Entwurfs durch eine Mehrheit an JA-Stimmen noch ein Mindestprozentsatz der Wahlbeteiligung vorgeschrieben. Dabei kann es sein, dass eine Nichtbeteiligung an der Abstimmung zu einer Ablehnung der Fragestellung führt, da die Mindestbeteiligung nicht erreicht wurde, während die Beteiligung mit einer NEIN-Stimme zur Annahme führt.

Nehmen wir zur Veranschaulichung des Problems folgendes an:

Es seien 1 Million Menschen zu einer Abstimmung aufgerufen. Damit die Abstimmung Gültigkeit erlangt, müssen sich mindestens 50% der Wahlberechtigten daran beteiligen. Von der Möglichkeit ungültiger Stimmen wollen wir in diesem Beispiel absehen.

Das Ergebnis sieht folgendermaßen aus:

JA-Stimmen	334 178	67,3%
NEIN-Stimmen	162 371	32,7%

Von 1.000.000 Abstimmungsberechtigten nahmen 496.549 an der Volksabstimmung teil, daraus folgt, dass die Wahl ungültig ist und automatisch eine Ablehnung des

⁴⁷im Folgenden vgl. wahlrecht.de/systemfehler/referendum.html, 10.9.2018

Entwurfs nach sich zieht. In diesem Fall wird trotz einer Mehrheit an JA-Stimmen die Vorlage nicht angenommen. Hätten 4.000 Abstimmungsberechtigte mehr dagegen gestimmt, dann hätte es das Ergebnis nur geringfügig zu 66,8% : 33,2% geändert, aber durch das Erreichen von 50% Beteiligung wäre jetzt die Vorlage angenommen. Aus diesem Grund werden Mindestbeteiligungen bei Volksabstimmungen immer mehr ersatzlos gestrichen oder durch eine Mindestzustimmungszahl der Wahlberechtigten ersetzt.

1.3.11 Das Abhängigkeits Paradoxon

Vorab sei folgende Definition gegeben:

*"Je nach Verteilung der Stimmen auf die anderen Parteien schwankt bei gleicher Gesamtsummenzahl und Gesamtmandatszahl die Zahl der Mandate für eine Partei um mehr als 1."*⁴⁸

Grundlage für dieses Paradoxon ist die Bedingung der Unabhängigkeit, welche besagt, dass die Mandatszahl nur von der eigenen Stimmenzahl, nicht aber von den Stimmen aller anderen Parteien abhängig ist⁴⁹. Bei näherer Untersuchung kann man feststellen, dass für Sitzzuteilungsverfahren, welche die Bedingung der Monotonie erfüllen, die Unabhängigkeit nicht gewährleistet werden kann. Es müssen also Schwankungen um 1 Mandat immer in Kauf genommen werden. Das Abhängigkeits-Paradoxon kann beim Verfahren nach Hare/Niemeyer beispielsweise nicht auftreten, da zu den bereits vor dem Komma stehenden ganzzahligen Mandaten nur 0 oder 1 Mandat hinzukommt, je nachdem, wie groß der Rest ist. Bei Höchstzahlverfahren wie z. B. dem Verfahren nach d'Hondt, kann das Paradoxon ohne weiteres eintreten, wie folgendes Beispiel zeigen soll.

Beispiel: Sei die Gesamtstimmenzahl 1.600 und die Anzahl der zu vergebenden Mandate 15.

	Stimmen	Mandate	Stimmen	Mandate
Partei A	688	6	688	8
Partei B	296	3	256	2
Partei C	216	2	248	2
Partei D	200	2	240	2
Partei E	200	2	168	1

⁴⁸KOPFERMANN: Wahlverfahren, S 134.

⁴⁹im Folgenden vgl. KOPFERMANN: Wahlverfahren, S 97.

Verändert sich die Stimmenzahl von Partei A nicht und wandern 40 Stimmen von B zu D und 32 Stimmen von E zu C, verändert sich die Mandatszahl von A um 2. Mit nur 43% der Stimmen erreicht A sogar die absolute Mandatsmehrheit. Mandatszahl und Gesamtstimmen bleiben unverändert.

1.3.12 Vergleich von Wahlergebnissen mit verschiedenen Wahlsystemen

(1) In Österreich hängt die Sitzverteilung im Parlament ausschließlich von der Stimmenzahl im gesamten Bundesgebiet ab (ausgenommen die allerdings nur theoretische Möglichkeit von Überhangmandaten aus der Summe der Landesmandate). Dabei wird das d'Hondt Verfahren im Bundesgebiet auf Stimmenzahl der Parteien in ganz Österreich angewendet, wobei Parteien bundesweit 4% der abgegebenen gültigen Stimmen brauchen oder 1 regionales Grundmandat. Bei Landtagswahlen in den 9 Bundesländern kommen andere Wahlsysteme zur Anwendung. Die folgende Aufstellung vergleicht die derzeitige Mandatsverteilung eines Bundeslandes mit der theoretischen Verteilung der Mandate, wenn das Wahlsystem zum Nationalrat auf die Landtagswahlen angewendet würde, und als zweiten Vergleich wenden wir das spanische Wahlrecht an, bei dem Mandate ausschließlich auf Wahlkreisebene nach dem d'Hondt Verfahren vergeben werden.

Die Reihenfolge der Bundesländer von links nach rechts, 1., 2., 3., 4. Reihe lauten: Salzburg, Tirol, Niederösterreich, Steiermark, Burgenland, Vorarlberg, Oberösterreich, Kärnten⁵⁰. In der 1. Spalte stehen Parteinamen, in der 2. Spalte die erreichte Stimmenzahl, in der 3. Spalte die derzeitige Mandatsverteilung im jeweiligen Landtag, in der 4. Spalte die Mandatsverteilung, wenn nach dem Wahlsystem der Nationalratswahlordnung (NRWO) abgerechnet werden würde und in der 5. Spalte die Mandatsverteilung, ermittelt nach dem spanischen Wahlsystem⁵¹.

ÖVP	94612	15	15	17	ÖVP	141691	17	17	24
SPÖ	50175	8	8	8	SPÖ	55223	6	6	6
FPÖ	47194	7	7	7	FPÖ	49727	5	5	4
GR	23337	3	3	2	GR	34168	4	4	2
NEOS	18225	3	2	2	FRITZ	17471	2	2	0
FPS	11386	0	1	0	NEOS	16670	2	2	0

⁵⁰Ergebnisse nach de.wikipedia.org/wiki/Ergebnisse_der_Landtagswahlen_in_Österreich, 8.9.2018

⁵¹Berechnungen erfolgen nach den jeweiligen LTWO, der NRWO und der spanischen Wahlordnung

ÖVP	450812	29	29	38
SPÖ	217289	13	13	15
FPÖ	134084	8	8	3
GR	58401	3	3	0
NEOS	46801	3	3	0

SPÖ	77947	15	16	19
ÖVP	54080	11	11	13
FPÖ	27964	6	6	4
GR	11964	2	2	0
LBL	8976	2	1	0

ÖVP	316290	21	21	23
FPÖ	263985	18	18	19
SPÖ	159753	11	11	10
GR	89703	6	6	4

SPÖ	189783	15	15	16
ÖVP	184300	14	14	16
FPÖ	173332	14	14	14
GR	43272	3	3	1
KPÖ	27339	2	2	1

ÖVP	71205	16	16	18
FPÖ	39892	9	9	9
GR	29193	6	6	7
SPÖ	14948	3	3	2
NEOS	11743	2	2	0

SPÖ	140994	18	19	21
FPÖ	67538	9	9	9
ÖVP	45438	6	6	6
TK	16667	3	2	0

(2) Die jetzige österreichische Wahlordnung stammt aus dem Jahr 1992. Im Folgenden vergleiche ich die tatsächlichen Ergebnisse mit der theoretischen Mandatsverteilung nach der Reform 1992. In Klammer die Veränderung gegenüber der Berechnung der Mandate nach der NRWO 1992 ((+3) bedeutet, dass 3 Mandate mehr vergeben wurden als nach der NRWO 1992 vergeben worden wären)

	Wahl 1945	Wahl 1949	Wahl 1953	Wahl 1956	
ÖVP	85(+3)	77(+4)	74(+5)	82(+6)	
SPÖ	76(+2)	67(+2)	73(+3)	74(+2)	
WdU	—	16(−3)	14(−4)	6(−4)	
KPÖ	4(−5)	5(−3)	4(−4)	3(−4)	
	Wahl 1959	Wahl 1962	Wahl 1966	Wahl 1970	Wahl 1971
SPÖ	79(+4)	76(+1)	74(+1)	81(±0)	93(±0)
ÖVP	78(+1)	81(+3)	85(+2)	79(+4)	80(±0)
FPÖ	8(−5)	8(−4)	6(−3)	5(−4)	10(±0)
	Wahl 1975	Wahl 1979	Wahl 1983	Wahl 1986	Wahl 1990
SPÖ	93(±0)	95(+1)	90(−1)	80(±0)	80(−2)
ÖVP	80(±0)	77(−1)	81(−2)	77(±0)	60(−1)
FPÖ	10(±0)	11(±0)	12(+3)	18(±0)	33(+2)
GR	—	—	—	8(±0)	10(+1)

Nach der Wahlordnung wurden kleine Parteien benachteiligt und die stärkste Partei stark bevorzugt. Mit der Wahlordnung von 1971 erschien immer mehr eine Bevorzugung kleinerer Parteien, die mit der Wahlordnung 1992 wieder etwas beschnitten werden sollte.

(3) In drei Bundesländern (Niederösterreich, Oberösterreich, Salzburg) wird auch in der Nationalratswahlordnung das Verfahren nach d'Hondt landesweit verwendet. In Tirol, Vorarlberg und Steiermark besteht kein Unterschied zwischen Ermittlung der Sitzverteilung auf einer Ebene oder zwei Ebenen. Im Burgenland und Kärnten würde jeweils ein Mandat von der mandatsschwächsten Partei zur stärksten Partei wandern.

Am eklatantesten ist der Unterschied der Sitzverteilung zwischen landesweiten, d'Hondt Berechnung und geltender Landtagswahlordnung in Wien. Hier wird das Verfahren Hag-Bischof in 18 Wahlkreisen angewandt. Bei einer durchschnittlichen Wahlkreisgröße von 5,5 Mandaten haben durch Hagenbach-Bischof große Parteien einen Vorteil, da in den überwiegend kleinen Wahlkreisen in Wien die Wahlzahl zwar gesenkt wird, aber trotzdem für kleine Parteien Grundmandate unerschwinglich bleiben. Eine niedrige Wahlzahl bringt aber stimmenstärkeren Parteien mehr Grundmandate und senkt die Zahl der Restmandate und es werden entsprechend mehr Stimmen für ein Restmandat benötigt als für ein Grundmandat. So benötigte die SPÖ ca. 7.495 Stimmen, die FPÖ 7.542 Stimmen, die ÖVP 10.994 Stimmen, die Grünen 9.862 Stimmen und die NEOS 10.261 Stimmen. Die beiden großen Parteien benötigten also im Schnitt ca. 2.800 Stimmen weniger für ein Mandat als die drei kleinen Parteien. Der Vorteil für wahlkreisübergreifende stimmenstarke Parteien ist also unübersehbar.

SPÖ	329772	44	41	19
FPÖ	256448	34	32	13
GR	98626	10	12	4
ÖVP	76958	7	9	0
NEOS	51305	5	6	0

(4) Beschäftigen wir uns jetzt noch etwas näher mit der Wiener Wahlordnung. Im Vergleich mit einer landesweiten Sitzberechnung nach d'Hondt holen sich die großen Parteien 5 Mandate von den kleinen. Pro Grundmandat braucht die SPÖ 7.070 Stimmen, für ein Restmandat 10.183 Stimmen, die FPÖ 7.099 Stimmen für ein Grundmandat, 10.114 Stimmen für ein Restmandat, die Grünen 7.617 Stimmen für ein Grundmandat, 10.824 Stimmen für ein Restmandat, die ÖVP 10.994 Stimmen

für ein Grundmandat und die NEOS 10.261 für ein Restmandat. Im Durchschnitt kostete also ein Grundmandat 7.105 Stimmen und 1 Restmandat 10.523 Stimmen.

Im folgenden sei ein Schema der Mandatsberechnung für den Wiener Landtag gezeigt⁵².

	Grundmandate				Abgegeben	Wahlzahl	Reststimmen					
	SPÖ	FPÖ	GR	Rest			SPÖ	FPÖ	GR	ÖVP	NEOS	
WK1	3	1	1	2	61579	7698	1066	4845	3946	6825	5165	
WK2	2	1	1	1	48429	8072	1994	306	2846	5602	4521	
WK3	2	1	1	1	42495	7082	3991	3178	355	2957	2506	
WK4	2	1	0	2	41273	6879	2952	2872	6484	4198	3208	
WK5	4	4	0	2	75857	6897	3812	2261	4779	4668	2694	
WK6	2	3	0	1	42479	6069	4965	15	2217	2150	1576	
WK7	2	1	0	2	38095	6350	3242	5889	4088	3025	1943	
WK8	1	1	0	1	29816	7454	2239	65	3298	6039	2903	
WK9	2	1	0	2	44720	7454	2092	4224	5609	4906	2932	
WK10	1	1	0	1	27198	6800	4772	389	4671	1718	1273	
WK11	2	1	0	2	41343	6891	3108	4787	5960	3390	2212	
WK12	1	1	0	1	24156	6039	3077	228	3789	2656	1808	
WK13	1	0	0	2	24581	6146	2201	4796	4481	4112	2474	
WK14	1	1	0	2	36368	7274	5695	1880	3689	6546	3477	
WK15	2	1	0	1	32475	6495	999	3676	3692	1866	1493	
WK16	4	4	0	2	76644	6968	2145	3211	4840	5008	3124	
WK17	4	4	0	3	92092	7675	6877	4866	6640	6145	4534	
WK18	2	2	0	2	53387	7627	5874	3082	4390	5148	3462	
	38	29	3	30			61101	50570	75774	76959	51305	
					Restmandate		6	5	7	7	5	
		Mandatsverteilung										
		SPÖ	44									
		FPÖ	34									
		GR	10									
		ÖVP	7									
		Neos	5									

(5) Wenden wir nun die Wiener Wahlordnung auf die Wahl zum Nationalrat an⁵³, d.h. in den 39 Regionalwahlkreisen Hagenbach-Bischoff und d'Hondt auf die nationale Restsitzsumme. In Österreich umfasst der durchschnittliche Wahlkreis 4,2 Mandate, also kann erwartet werden, dass der unterstützende Effekt für die stärkeren Parteien größer ist. Dem ist aber nicht so. Die FPÖ würde sogar ihren Mandatsstand nur halten. Die kleinen Parteien verlieren im Schnitt 1,5 Sitze, in Wien waren es 1,66 Sitze.

⁵²Ergebnisse nach: wien.gv.at/politik/wahlen/grbv, Unterabschnitt Wiener Gemeinderatswahl 2015, 19.9.2018

⁵³Zahlen von: wahl17.bmi.gv.at, 19.9.2018

Das in der Allgemeinheit für die Unterstützung der stimmenstärkeren Partei verantwortlich gemachte Verfahren nach Hagenbach-Bischoff ist nicht allein schuld am mehrheitsbildenden Effekt. Denn auch in Vorarlberg gilt dasselbe Wahlsystem wie in Wien und dort ist von einer Unterstützung für die stimmenstarke ÖVP nichts zu bemerken. Vor allem wichtig für den unterstützenden Effekt ist die durchschnittliche Wahlkreisgröße und das Verhältnis von überdurchschnittlich großen zu unterdurchschnittlich großen Wahlkreisen. In Österreich ist die durchschnittliche Wahlkreisgröße geringer, dafür hält sich das Verhältnis mit 20:19 etwa die Waage. In Wien ist die durchschnittliche Wahlkreisgröße zwar höher, aber das Verhältnis von $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ klafft weit auseinander. Mit einer Erhöhung der Wahlkreisgröße und einem annähernd gleichen Verhältnis von über- und unterdurchschnittlichen Wahlkreisen könnte man den Effekt entgegenwirken wie beispielsweise Vorarlberg.

(6) Natürlich nimmt auch die Ebene der Stimmverrechnung Einfluss auf die Sitzverteilung. Beispielsweise in Spanien gibt es keinen überregionalen Ausgleich und alle Mandate werden bereits in den Wahlkreisen mit dem Verfahren nach d'Hondt verteilt. Bei einer durchschnittlichen Wahlkreisgröße von 6,7 haben nationenweit tätige kleine Parteien kaum Chancen auf Mandate und landesweit tätige stimmenstarke Parteien sowie regionale Parteien mit landesweit wenig Stimmanteil werden bevorzugt. Würde man dieses Wahlrecht in Österreich auf die Regionalebene anwenden, so sähe die Sitzverteilung folgendermaßen aus: SPÖ 59 – ÖVP 69 – FPÖ 54. Kleine Parteien würden verschwinden. Im Großen und Ganzen komme es auch in Verhältniswahlsystemen darauf an, wie und welche Sitzzuteilungsverfahren wo angewendet werden. Bei geschickter Anwendung ist es auch in diesen Systemen möglich, aus einer Stimmenminderheit eine absolute Mandatsmehrheit zu machen.

1.4 Paradoxa bei alternativen Wahlverfahren

Eines der negativen Auswirkungen der Mehrheitswahl mit einer Stimme ist, dass man nicht seinem Favoriten die Stimme gibt, weil dessen Wahl ohnehin aussichtslos ist, sondern dem Kandidaten, den man als geringeres Übel betrachtet. Das seit langem etablierte Zweiparteiensystem in den USA kann man als gutes Beispiel für dieses Problem angeben. Viele geben dem Kandidaten der Demokraten oder der Republikaner eine Stimme, weil sie mitbestimmen wollen und der von ihnen bevorzugte Kandidat der Grünen Partei beispielsweise ohnehin keine Chance auf einen Wahlsieg aufgrund des Mehrheitswahlrechts hat.

1.4.1 Das Condorcet Paradoxon

Zuerst sei einmal grundlegend das CONDORCET-Verfahren erklärt⁵⁴. Jeder Wähler vergibt nicht nur eine Stimme für einen von ihm favorisierten Kandidaten, sondern verteilt Präferenzen, man vergibt für den Kandidaten einen bestimmten Rang. Klarerweise ist dieses Wahlsystem erst ab einer Anzahl von drei Kandidaten sinnvoll. Danach werden Zweikämpfe simuliert, in denen die Kandidaten jeweils gegen alle Gegenkandidaten antreten. In diesen Duellen wird festgestellt, wie die Kandidaten im direkten Duell gereiht sind. Der Kandidat, der alle seine Duelle gewinnt, ist laut Condorcet der Wahlsieger. Sehen wir uns ein Beispiel dazu an⁵⁵.

Es seien 710 Personen wahlberechtigt, welche auch alle ihre Präferenzen zu 3 Kandidaten komplett abgeben. Dabei ergibt sich folgender Wahlausgang:

300 Wähler setzen A auf Rang 1, B auf Rang 2, C auf Rang 3

270 Wähler setzen B auf Rang 1, C auf Rang 2, A auf Rang 3

240 Wähler setzen C auf Rang 1, A auf Rang 2, B auf Rang 3

Wäre nach dem System der relativen Mehrheitswahl, welche nur die Rang 1 Präferenzen abfragt, gewählt worden, so wäre Kandidat A der Wahlsieger. Mit dem Condorcet Verfahren ergibt sich folgendes Bild: Schlüsseln wir zuerst alle direkten Duelle auf: A gegen B, A gegen C, B gegen C. Das Ergebnis der Duelle lautet

A auf 1, B auf 2 – 300 Stimmen

A auf 2, B auf 3 – 240 Stimmen

B auf 1, A auf 3 – 270 Stimmen

Damit geht das Duell A gegen B mit 540 zu 270 Vorreihungen an A.

B auf 1, C auf 2 – 270 Stimmen

B auf 2, C auf 3 – 300 Stimmen

C auf 1, B auf 3 – 240 Stimmen

Damit geht das Duell B gegen C mit 570 zu 240 Vorreihungen an B.

A auf 1, C auf 3 – 300 Stimmen

C auf 1, A auf 2 – 240 Stimmen

C auf 2, A auf 3 – 270 Stimmen

Damit geht das Duell A gegen C mit 510 zu 300 Vorreihungen an C.

⁵⁴im Folgenden vgl. AIGNER: Alles Mathematik, S 281.

⁵⁵ebd.

Das Paradoxe daran ist, dass die Präferenzen der einzelnen Wähler immer transitiv sind. Denn wenn sich ein Wähler für die Rangfolge A-B-C entscheidet, heißt, dass er A vor B, B vor C und natürlich auch A vor C reiht. Aber wenn man alle Einzelentscheidungen zusammenfasst, muss diese nicht transitiv sein. Als Condorcet-Paradoxon bezeichnet man jene Situation, bei der die Zusammenfassung transitiver Entscheidungen eine intransitive Entscheidung ergibt. Formal heißt das, $A > B$ und $B > C \neq A > C$. Es kann auch $A > B > C > A$ gelten⁵⁶.

Eine Möglichkeit dieses Paradoxon zu umgehen ist, die Duelle nach der Höhe ihres Sieges zu reihen und das Duell, welches mit der niedrigsten Quote gewonnen wurde, wird weggelassen. In diesem Fall wäre es das Duell A gegen C, welches von C mit 1,7:1 gewonnen wurde. A:B geht mit 2:1 und B gegen C 2,375:1 bleiben. A gewinnt gegen B und B gewinnt gegen C. Somit gibt es eine transitive Ordnung, nach der Kandidat A die Wahl gewinnt. Je mehr Kandidaten zu einer Wahl antreten, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Paradoxon auftritt. Zur Ermittlung eines Siegers werden dann solange die niedrigsten Siege gestrichen, bis es eine transitive Ordnung und somit einen Wahlsieger gibt. Was bei Stimmengleichheit geschieht, wird bei der Darstellung des Verfahrens nicht erwähnt. Ein weiteres Problem, welches es zu lösen gibt. Bei politischen Wahlen ist dieses Verfahren bisher unberücksichtigt geblieben⁵⁷.

1.4.2 Das Borda Paradoxon

Zuerst will ich das Paradoxon darstellen, so wie Borda es 1784 beschrieben hat⁵⁸. Wenn man drei Kandidaten zur Wahl hat (A, B, C), so kann jeder Wähler die Kandidaten in eine Rangfolge der Beliebtheit bringen. Daraus können sich sechs Möglichkeiten der Reihenfolge ergeben, und zwar A-B-C; A-C-B; B-A-C; B-C-A; C-A-B; C-B-A.

Von den 21 Wählern entscheiden sich 7 für A-C-B, 7 für B-C-A, 6 für C-B-A und 1 für A-B-C. Wenn man das Verfahren der relativen Mehrheitswahl anwendet, so ergeben sich 8 Stimmen für A, 7 Stimmen für B und 6 Stimmen für C. Damit wäre A Wahlsieger. Nimmt man nun den paarweisen Vergleich wie bei der Condorcet Methode zur Hand, so ergibt sich folgendes Ergebnis:

⁵⁶BARTH: Berühmte Aufgaben, S 299.

⁵⁷vgl. AIGNER: Alles Mathematik, S 281.

⁵⁸im Folgenden vgl. BARTH: Berühmte Aufgaben, S 297.

$A > B(8) - B > A(13) - B$ gewinnt Duell gegen A
 $A > C(8) - C > A(13) - C$ gewinnt Duell gegen A
 $B > C(8) - C > B(13) - C$ gewinnt Duell gegen B

Damit hat C nach dem paarweisen Vergleich die Wahl gewonnen. Die Umkehrung des Ergebnisses der relativen Mehrheitswahl durch den paarweisen Vergleich nennt man Borda-Paradoxon. Da Borda die relative Mehrheitswahl für nicht sinnvoll erachtet und paarweise Vergleiche bei steigender Anzahl immer aufwendiger werden (bei 10 Kandidaten müsste man 45 Duelle in über 3 Millionen möglicher Anordnungen untersuchen), entwirft er ein eigenes Verfahren.

Das Verfahren nach Borda geht ebenfalls von einer Rangreihenfolge aus⁵⁹. Es werden hier an die Kandidaten Punkte vergeben. Stehen 15 Kandidaten zur Wahl, so erhält der nach Ansicht des Wählers geeignetste Kandidat 10 Punkte, der nächst geeignetste 9 Punkte usw. bis zu dem am wenigsten geeigneten Kandidaten, an den 1 Punkt vergeben wird. Alternativ können auch bei n Kandidaten dem höchst geeigneten n-1 Punkte und dem am wenigsten geeigneten 0 Punkte vergeben werden. Nach der Wahl werden die Punkte zusammengezählt und jener Kandidat, der die meisten Punkte auf sich vereinigen kann, ist der Wahlsieger. Bei diesem Verfahren kann der Abstand zweier Kandidaten eine entscheidende Rolle einnehmen, während beim Condorcet nur die Vorreihung und nicht der Abstand in das Wahlergebnis einfließt. Wir wollen dieses Verfahren an einem Beispiel verdeutlichen. Nehmen wir an, 210 Wähler geben ihre Stimme ab und könne sich zwischen drei Kandidaten entscheiden. Dabei geben

30 Wähler A 3 Punkte, B 2 Punkte und C 1 Punkt
 120 Wähler B 3 Punkte, A 2 Punkte und C 1 Punkt
 60 Wähler C 3 Punkte, B 2 Punkte und A 1 Punkt

Dies ergibt für B 540 Punkte, für A 390 Punkte und für C 330 Punkte.

Ein Problem, welches hier auftreten kann ist, dass Kandidaten, welche von vornherein nicht für einen Sieg infrage kommen, sei aufgrund ihrer Ausrichtung oder ihrer Aussagen, die Wahl nach dem Borda Verfahren mitbeeinflussen können. Nehmen wir an, 99 Wähler würden ihre Stimme abgeben und dabei 50 Personen für A und 49 Personen für B stimmen. Nach dem Mehrheitswahlrecht hätte A gewonnen. Kurz

⁵⁹im Folgenden vgl. AIGNER: Alles Mathematik, S 278-280.

vor der Wahl gibt aber noch Kandidat C seine Nennung ab, welcher aber als aussichtsloser Kandidat gilt, da er von keinem der Wähler an die erste Stelle gereiht werden würde und somit das Ergebnis der Wahl nach Mehrheitswahlrecht unverändert bliebe. 5 der Wähler haben eine nicht ganz so schlechte Meinung von C, für eine Stimme reicht die Sympathie aber nicht. Wird nach dem Borda-Verfahren gereiht, so sieht das Ergebnis folgendermaßen aus:

49 Wähler vergeben an A 3 Punkte, B 2 Punkte und C 1 Punkt
45 Wähler vergeben an B 3 Punkte, A 2 Punkte und C 1 Punkt
4 Wähler vergeben an B 3 Punkte, C 2 Punkte und A 1 Punkt
1 Wähler vergibt an A 3 Punkte, C 2 Punkte und B 1 Punkt

Das ergibt 246 Punkte für B, 244 Punkte für A und 104 Punkte für C. Jetzt würde plötzlich B gewinnen, obwohl sich an den Präferenzen für A und B nichts verändert hat. Die Einflussnahme eines de facto irrelevanten Kandidaten, bei dem eine Teilnahme oder Nichtteilnahme den Wahlsieger verändert, stellt ein Paradoxon dar.

Ein Beispiel mit 4 Kandidaten nach der Borda-Methode (w, x, y, z):

100 Wähler vergeben w(4)-x (3)-y(2)-z(1)
99 Wähler vergeben w(1)-x(4)-y(3)-z(2)
99 Wähler vergeben w(2)-x(1)-y(4)-z(3)

Dies ergibt:

y: 893 Punkte
x: 795 Punkte
w: 697 Punkte
z: 595 Punkte

Da z keine Erststreichung bekommen hat, kann man ihn getrost als irrelevanten Kandidaten bezeichnen. Wird nun z im Nachhinein von der Wahl ausgeschlossen, ergibt sich ein anderes Bild:

100 Wähler w(3)- x(2)-y(1)
99 Wähler w(1)-x(3)-y(2)
99 Wähler w(2)- x(1)-y(3)

Das Ergebnis würde lauten:

w: 597 Punkte

x: 596 Punkte

y: 595 Punkte

Nun ist der ursprünglich drittplatzierte Kandidat w nach Ausschluss von Kandidat z Wahlsieger.

1.4.3 Instant-Runoff-Voting; No Show Paradoxon und Monotonieproblem

Das Instant-Runoff Voting, im Deutschen auch Wahl mit sofortiger Stichwahl oder in Großbritannien auch Alternative Vote genannt, welches ich im Folgenden verkürzt als IRV bezeichnen werde, wird als Alternative zum Mehrheitswahlrecht angeboten. Wie auch bei den zwei vorhergehenden Wahlverfahren erstellt der Wähler eine Rangliste der Kandidaten. Gleichplatzierungen, wie bei Condorcet möglich sind, werden ausgeschlossen. Ebenso müssen nicht alle Kandidaten, die auf dem gleichen Wahlzettel stehen, in eine Ordnung eingefügt werden wie bei der Borda-Wahl. Die in Rangfolge gebrachten Kandidaten kann sich der Wähler im zu wählenden Amt vorstellen, die Ausgelassenen nicht. Es gibt dem Wähler mehr Spielraum in seiner Entscheidung und auch die Möglichkeit, in der Wahlentscheidung mitzuwirken, auch wenn man einen aussichtslosen Kandidaten wählt⁶⁰.

Das Verfahren läuft folgendermaßen ab: Die Wähler weisen Kandidaten, welche sie im Amt sehen wollen, einen bestimmten Rang zu, von Rang 1 abwärts. Dabei steht es den Wählern frei, wie vielen Kandidaten sie bestimmte Ränge zuweisen (nur ein Kandidat hat den 1. Rang, 3 Kandidaten die Ränge 1-3 usw.). Wenn ein Kandidat die Wahlzahl mit Zuweisungen für Rang 1 erreicht hat, so gilt man als gewählt. Die Wahlzahl (Anzahl der notwendigen Zuweisungen) ergibt sich aus der um 1 vermehrten Hälfte der gültigen Stimmen. Ist das nicht der Fall, so wird der Kandidat mit den wenigsten Erstreichungen gestrichen. Nun werden die Stimmzettel, welche den gestrichenen Kandidaten auf den 1. Rang gesetzt haben, hergenommen, und in zweiter Zählung wird die Zahl der 2. Rang Zuweisungen für die übrigen Kandidaten aus der Menge dieser Stimmzettel ermittelt. Diese Zahl wird dann zu Anzahl der Rang 1 Zuweisungen hinzu addiert. Hat nach dieser 2. Zählung ein Kandidat die Wahlzahl erreicht, so gilt man als gewählt. Haben die Wähler aus dieser Menge kei-

⁶⁰vgl. verfassungsblog.de/das-neue-britische-wahlrecht-wre-deutschland-verfassungswidrig/, 04.10.2018

ne Zuweisung für den 2. Rang getätigt, so gelten diese Stimmzettel als verfallen. Hat wieder niemand die Wahlzahl erreicht, so wird der Kandidat mit den wenigsten Zuweisungen nach der 2. Zählung gestrichen. Nun werden die Rang 2 Zuweisungen des zuletzt gestrichenen Kandidaten und die Rang 3 Zuweisungen, wenn sich die zuvor gestrichenen Kandidaten am Stimmzettel auf Rang 1 und Rang 2 befanden, gezählt und zu den Zuweisungen aus 1. und 2. Zählung hinzuaddiert. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt bis ein Kandidat die Wahlzahl erreicht hat⁶¹.

Dazu nun eine Veranschaulichung⁶²:

$A > B > C > D$	10%	$A > C > D$	19%	$A > C$	30%
$A > C > D > B$	9%	$A > D > C$	11%	$C > A$	70%
$A > D > B > C$	11%	$C > D > A$	45%	C SIEGER	
$B > C > D > A$	22%	$D > C > A$	25%		
$C > D > B > A$	23%	STREICHE D			
$D > B > C > A$	25%				
STREICHE B					

Ein Paradoxon, dass sich aus diesem Verfahren ergeben kann, ist, dass ein Kandidat eventuell nicht gewinnt, wenn zu viele Wähler diesen als Erstpräferenz angeben und als Sieger hervorgehen hätte können, wenn einige Wähler statt dem 1. Rang den 2. Rang zugewiesen hätten. Dies sei durch folgendes Beispiel illustriert⁶³:

	8 Wähler	2 Wähler	6 Wähler	5 Wähler
1.Rang	A	B	C	D
2.Rang	B	A	A	C
3.Rang	C	C	B	A

21 Wähler können sich zwischen Kandidaten A, B und C entscheiden. Nachdem kein Kandidat die Wahlzahl 11 an Erstpräferenzen erreicht hat, wird C mit der geringsten Anzahl von diesen gestrichen. Jene Wähler, die C auf Rang 1 setzten, setzten A auf Rang 2. Diese sechs Rang 2 Zuweisungen werden zu Zahl 8 der Rang 1 Zuweisungen addiert und es ergibt sich die Zahl 14, A ist also gewählt. Aber hätte die Wählergruppe, die sich für die Rangfolge B-A-C entschied, für A-B-C votiert, hätte A die Wahlzahl 11 knapp verfehlt, in 2. Zählung die 5 Stimmen von B im 2. Rang an C gegangen und C hätte die Wahl gewonnen. Das Paradoxon des negativen Stimmgewichts kann also auch bei diesem Verfahren zuschlagen.

⁶¹vgl. NOHLEN: Wahlrecht, S 366-367.

⁶²im Folgenden vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 213-214.

⁶³vgl. verfassungsblog.de/das-neue-britische-wahlrecht-wre-deutschland-verfassungswidrig/, 04.10.2018

Zusätzlich sei noch das Paradoxon des negativen Stimmgewichts an einer Adaption des ersten Beispiels in diesem Kapitel illustriert. Dabei lassen wir 4% von der Präferenz $D > B > C > A$ zur Präferenz $C > D > B > A$ wandern.

$A > B > C > D$	10%	$A > B > C$	21%	$A > B$	30%		
$A > C > D > B$	9%	$A > C > B$	9%	$B > A$	70%		
$A > D > B > C$	11%	$B > C > A$	43%	B SIEGER			
$B > C > D > A$	22%	$C > B > A$	27%				
$C > D > B > A$	27%	STREICHE C					
$D > B > C > A$	21%						
STREICHE D							

Trotz dass die Variante $C > D > B > A$ und C an Erstpräferenzstimmen hinzu gewann, wurde C bereits in der 2.Runde gestrichen, da nun D und nicht B mit den geringsten Erstpräferenzstimmen in der 1.Runde gestrichen wurde und die Vergleiche von C mit D insgesamt günstiger waren als die Vergleiche von C mit B.

Ein Ausweg aus diesem Paradoxon wäre die Wahl durch Zustimmung, indem man jene Kandidaten ankreuzt, die man als für dieses Amt geeignet hält, aber dabei keine Rangfolge abgibt. Sieger wäre dann der Kandidat mit der höchsten Anzahl an Zustimmungen. Dieses Verfahren wird z. B. bei der UNO für die Vorauswahl des Sicherheitsrates des Generalsekretärs verwendet⁶⁴.

Weiters kann beim IRV auch das no show Paradoxon auftreten⁶⁵. Hierbei kann man als Nichtwähler ein für seinen bevorzugten Kandidaten besseres Ergebnis herausholen, als wenn man diesen durch seine Stimme unterstützt. Dazu folgendes Beispiel: Nach dem IRV Verfahren soll aus 3 Kandidaten einer ausgewählt werden. Das Ergebnis nach der 1. Zählung lautet wie folgt:

	936 Wähler	1692 Wähler	72 Wähler	900 Wähler
1.Rang	A	B	B	C
2.Rang	B	C	C	A
3.Rang	C	A	A	B

B verfehlt die Wahlzahl 1801, darum wird C aufgrund der wenigsten 1. Rang Stimmen gestrichen und 900 Stimmen werden A zugewiesen und A erreicht damit die

⁶⁴DIETHELM: Gemeinschaftliches Entscheiden, S 24.

⁶⁵im Folgenden vgl. wahlrecht.de/lexikon/noshow.html, 04.10.2018

Wahlzahl und ist gewählt. Die Gruppe der B Wähler hätte aber lieber C als A im Amt gesehen, also wenn schon nicht Favorit B gewinnt, soll wenigstens C gewinnen. Wenn nun die Masse von 1692 Wählern, die B-C-A bevorzugen, nicht wählen gegangen wäre, wäre B schon nach der 1. Zählung ausgeschieden. Da B aber im 1. Szenario auch nicht gewählt worden wäre, ist es egal, ob man nach 1. oder 2. Zählung ausscheidet. Die Stimmen der Ordnung B-C-A werden C zugeschlagen und C gewinnt mit 972 Stimmen von notwendigen 955. Durch das Zuhause bleiben haben B-Unterstützer erreicht, dass zumindest ihre Zweitpräferenz ins Amt gewählt wurde.

Nach dem IRV Verfahren werden die Abgeordneten des australischen Parlaments gewählt, die Präsidentenwahl in Irland oder die Bürgermeisterwahl in San Francisco werden ebenfalls nach diesem Verfahren durchgeführt. Die Abgeordneten der Parlamente von Irland und Malta werden nach dem Single transferable vote Verfahren, einer Variante von IRV gewählt. Hierbei wird mehr als 1 Kandidat pro Wahlkreis gewählt, das Wahlsystem ist größtenteils dasselbe, bis auf die Neuverteilung von Überschussstimmen⁶⁶.

Eine weitere Variante des IRV ist die Hare-Regel, nach der bei nicht erreichter absoluter Mehrheit eines Kandidaten bei einem Wahlgang der Letztplatzierte für den nächsten Wahlgang ausscheidet. Diese Wahl erfolgt über Einzelstimmgebung und nicht über Präferenzordnung. Die Wahl der Austragungsorte der Olympischen Spiele wird nach diesem Verfahren durchgeführt.

1.4.4 Das Borda-Paradoxon bei den republikanischen Vorwahlen zur US Präsidentenwahl

An früherer Stelle betrachtete ich bereits das paradoxe Ergebnis der US Präsidentenwahl. Nun ein kurzer Blick auf die republikanischen Vorwahlen. Das System der Vorwahlen ist in den einzelnen Staaten recht unterschiedlich und kompliziert, sodass nur ein allgemeiner Überblick der möglichen Konstellationen gegeben werden kann. Betrachtet werden hier Umfragewerte auf USA-Ebene, wobei nur republikanische Wähler befragt wurden. Dabei wurden Einzelunterstützung und paarweise Vergleiche abgefragt. Dabei tritt das Borda-Paradoxon voll zutage. Trump hätte dabei zwar eine Mehrheit an Einzelstimmen bekommen, aber laut Umfrage in jedem Duell gegen seinen Konkurrenten verloren⁶⁷.

⁶⁶vgl. verfassungsblog.de/das-neue-britische-wahlrecht-wre-deutschland-verfassungswidrig/, 04.10.2018

⁶⁷vgl. KURRILD-KLITGAARD, Trump, Condorcet and Borda, S 4.

Hier noch eine Vergleichstabelle⁶⁸:

Donald Trump	30%		Ted Cruz	57%	versus	Donald Trump	40%
Ted Cruz	27%		John Kasich	57%	versus	Donald Trump	40%
John Kasich	22%		Marco Rubio	56%	versus	Donald Trump	43%
Marco Rubio	20%						

1.4.5 Spitzenduo-Methode

Dies soll eine Weiterentwicklung des Mehrheitswahlrechts darstellen, bei dem neben dem Erstplatzierten auch der Zweitplatzierte in die Abstimmung miteinbezogen wird. Prozentzahlen werden den beiden Erstplatzierten zugeschlagen⁶⁹. Die Präferenzen seien wie im ersten Beispiel in 1.4.3 verteilt:

		A	B	C	D
$A > B > C > D$	10%	10%	10%		
$A > C > D > B$	9%	9%		9%	
$A > D > B > C$	11%	11%			11%
$B > C > D > A$	22%		22%	22%	
$C > D > B > A$	23%			23%	23%
$D > B > C > A$	25%		25%		25%
		30%	57%	54%	59%

Damit ist nach diesem Verfahren D der Sieger.

⁶⁸ebd., S 5.

⁶⁹vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 202-203.

1.4.6 Verfahrensvergleich

Wer Sieger einer Wahl ist, hängt also stark vom Wahlverfahren ab. Zum Abschluss bringe ich noch ein Beispiel des Wahlforschers Michel Balinski, in welchem die Wählerschaft die Auswahl zwischen fünf Kandidaten A, B, C, D und E hat⁷⁰.

1.Rang	A	B	C	C	D	E
2.Rang	B	D	D	E	E	C
3.Rang	C	C	B	B	C	B
4.Rang	D	E	A	D	B	D
5.Rang	E	A	E	A	A	A
Anteil	33%	16%	3%	8%	18%	22%

Aus dieser Konstellation ergibt sich:

1. A gewinnt die relative Mehrheitswahl mit 33%
2. B gewinnt die Borda Wahl mit 247 Punkten
3. C gewinnt die Condorcet Wahl aufgrund des Sieges in allen Zweikämpfen
4. D gewinnt nach dem IRV Verfahren
5. E gewinnt nach absoluter Mehrheitswahl

Jeder kann der Sieger werden. Bei gleichem Wahlverhalten der Wählerschaft kann es fünf verschiedene Sieger geben. Allein das System bestimmt den Sieger.

⁷⁰im Folgenden vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 207.

1.5 Das Arrow Paradoxon

Auf den vorhergehenden Seiten habe ich vielfach Bezug auf verschiedene Wahlverfahren genommen. Verschiedene Verfahren bringen oft trotz gleicher Stimmenverteilung recht unterschiedliche Ergebnisse. Die Vielfalt von Sitzzuteilungsverfahren in nationalen oder regionalen Volksvertretungen lässt den Schluss zu, dass es kein perfektes Verfahren gibt, sonst würde man es allgemein anwenden.

Arrow lieferte 1951 den Beweis, dass es ein perfektes demokratisches Wahlsystem nicht gibt. Arrow formuliert zuerst fünf Bedingungen, welche unerlässlich für ein Wahlsystem sind, zuerst in einer saloppen Formulierung⁷¹:

1. Die Wahl soll zu einer eindeutigen Rangfolge führen (vollständig + transitiv)
2. Das Wahlergebnis muss den mehrheitlichen Wünschen der Wähler Rechnung tragen
3. Das Wahlergebnis darf nicht von anderen Alternativen abhängen (unabhängig)
4. Das Ergebnis darf keine Vorentscheidung enthalten (universell)
5. Es darf keine Entscheidung durch ein Individuum geben

Nun zur Ausformulierung der Bedingungen, so wie sie Arrow formuliert hat⁷²:

- Das individualistische Prinzip - Bedingung der universellen Gültigkeit, d.h. es sind beliebige individuelle Präferenzen zugelassen (1)
- Bedingung der kollektiven Rationalität, d. h. Entscheidungen beruhen auf einer transitiven Ordnung (2)
- Bedingung der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (3)
- Bedingung der Pareto-Inklusivität, d. h. wenn eine Alternative von allen Individuen bevorzugt wird, so muss diese Alternative auch im Kollektiv bevorzugt werden (4)
- Bedingung der Nicht-Diktatur (5)

⁷¹im Folgenden vgl. VOLLMER: Paradoxien, S 61.

⁷²vgl. KAILITZ: Schlüsselwerke, S 19-20.

In der Sprache der Mathematik ausformuliert heißt das nun⁷³:

- X sei die Menge an Alternativen $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ oder (x, y, z)
- N sei die Menge der Individuen $(1, \dots, i, \dots, n)$
- Jedes Individuum i hat eine Präferenzordnung R_i über X
- Präferenzordnung $R = (R_1, \dots, R_i, \dots, R_n)$
- $G(R, X) = R_G$: Soziale Präferenzfunktion, welche die Präferenzrelation R_G zwischen jedem Alternativpaar in X festsetzt
- $G(R, X) \rightarrow X$: Soziale Entscheidungsfunktion, die individuelle Präferenzen in ein Ergebnis aus X als kollektives Ergebnis überführt
- $G(R, (x_1, y)) = x \Leftrightarrow (x_1 > y)_G$, d. h. x_1 wird genau dann ausgewählt, wenn x_1 gegenüber y vorgezogen wird

Nun kommen wir zu kurzen Erklärungen der Bedingungen von Arrow:

- ad (1) $G(R_1, \dots, R_n)$ muss für alle möglichen Kombinationen von individuellen Präferenzordnungen definiert werden
- ad (2) Die kollektive Präferenzfunktion soll transitiv und vollständig sein
- ad (3) Sei $(x > y)_G \forall R_i, (i = 1, \dots, n)$
und sei $x_1 R_i x_2 = x_1 R'_i x_2 \forall R_i, R'_i (i = 1, \dots, n)$, dann gilt: $(x_1 > y)_G$;
Dabei sind R'_i Präferenzen und R_i andere Präferenzen
- ad (4) Falls $(x_1 > y)_i, (i = 1, \dots, n)$ dann gilt: $(x_1 > y)_G$
- ad (5) Es gibt kein Individuum i , sodass für alle Kombinationen individueller Präferenzen und für alle Paare x, y gilt:
Falls $(x > y)_i$ und $(x < y)_{-i} \Rightarrow (x > y)_G$

⁷³im Folgenden vgl. ORDESHOOK: Political Theory, S 56-62.

SATZ: Falls X aus mindestens 3 Elemente besteht, sind die einzigen sozialen Präferenzfunktionen $G(R_1, \dots, R_n)$, die (1)-(4) erfüllen, solche, die gegen (5) verstossen⁷⁴.

Im Folgenden sei nun ein Beweis angeführt, welcher der Einfachheit halber nur für den Spezialfall von 3 Alternativen geführt wird und ohne aufwendige Formalität⁷⁵.

BEWEIS:

1. Schritt: Sei i ein beliebiges Individuum aus der Menge N

2. Schritt: Ist die Präferenzordnung von i gleich der kollektiven Präferenzordnung ($R_i = R$), dann besitzt i bereits die Diktatoreigenschaft. Sei nun im Folgenden angenommen, dass $R_i \neq R$ gilt.

3. Schritt: Ist $R_i \neq R$, dann ermitteln wir, welche kollektiven Präferenzen sich für die verbleibenden $n - 1$ Individuen ergibt. Nach (1) muss es eine solche Ordnung geben. Diese sei im Folgenden R_1 genannt.

4. Schritt: $R_i = R_1 \neq R$ verletzt (2), da eine kollektive Präferenz (R_1) von einem weiteren Individuum (i) unterstützt wird, was nicht zu ihrer Änderung führen darf.

5. Schritt: Wenn also $R_i \neq R_1$ sowie $R_i \neq R$ und $R_1 \neq R$ gilt, dann können nur Kombinationen von x-y-z; y-x-z; y-z-x; z-x-y; z-y-x zu einer kollektiven Präferenzordnung x-y-z geführt haben.

⁷⁴ebd., S 62

⁷⁵im Folgenden vgl. HUBKA: Arrow Theorem, S 5-9.

6. Schritt: Es gibt 10 solcher Kombinationen:

F1:	$x > z > y$ $y > x > z$	F2:	$x > z > y$ $y > z > x$	F3:	$x > z > y$ $z > x > y$ ($z > y$)	F4:	$x > z > y$ $z > y > x$ ($z > y$)
F5:	$y > x > z$ $y > z > x$ ($y > x$)	F6:	$y > x > z$ $z > x > y$	F7:	$y > x > z$ $z > y > x$ ($y > x$)	F8:	$y > z > x$ $z > x > y$ ($z > x$)
F9:	$y > z > x$ $z > y > x$ ($y > x$) ($z > x$)	F10:	$z > x > y$ $z > y > x$ ($z > x$) ($z > y$)				

7. Schritt: F3-F5 sowie F7-F10 können nicht zur kollektiven Präferenzordnung $x > y > z$ führen, da die in Klammern angeführten Relationen gegen (2) verstoßen.

8. Schritt: F1, F2 und F6 verstoßen gegen (3). Diese sei an F1 illustriert:

$$x > z > y (R_i) \quad y > x > z (R_1) \quad x > y > z (R)$$

9. Schritt: Ergänzen wir R_i und R_1 um eine weitere Alternative u .

$$u > x > z > y (R_i) \quad y > u > x > z (R_1) \quad u > x > y > z (R')$$

Dann muss aus R die Ordnung R' werden, da u sowohl R'_i als auch in R'_1 vor x gereiht ist.

10. Schritt: Durch Elimination der Alternative z darf die Reihung von u, x, y nicht verändert werden.

$$u > x > y (R''_i) \quad y > u > z (R''_1) \quad u > x > z (R'')$$

11. Schritt: Beim Vergleich dieser Ordnungen mit R_i , R_1 und R aus dem 8. Schritt sieht man, dass (2) verletzt wird, denn u, x, y kommen in R''_i und R''_1 in der gleichen Reihenfolge vor wie x, z, y in R_i und R_1 . Nach (3) müsste R'' daher $u > y > x$ lauten und nicht $u > x > y$.

12. Schritt: Für F2 und F6 kann dies analog gezeigt werden.

Damit wären alle Möglichkeiten ausgeschöpft, bei welchen $R_1 \neq R$ wäre und somit ist bewiesen, dass jede Änderung der kollektiven Präferenzordnung nach Aussonderung eines Individuums i gegen die gestellten Bedingungen verstößt.

13. Schritt: R_1 darf also nach Aussonderung von i nicht ungleich R werden. Dann muss dies aber auch für die Aussonderung eines weiteren Individuums j aus der Menge der $n - 1$ verbliebenen Individuen gelten, d. h. die kollektive Präferenzordnung der $n - 2$ verbliebenen Individuen muss wieder gleich R sein.

14. Schritt: Wenn die kollektive Präferenzordnung R nicht überhaupt von den individuellen Präferenzordnungen unabhängig ist und von außen determiniert ist, was gegen (4) verstößt, müssen wir bei einer endlichen Anzahl von Individuen nach fortgesetzter Aussonderung notwendigerweise bei einem letzten Individuum k ankommen, dessen Präferenzordnung genau der kollektiven Präferenzordnung aller Individuen entspricht.

15. Schritt: Bei Beachtung der Bedingungen (1)-(4) muss daher entweder eines der ausgesonderten Individuen i, j usw. ein Diktator im Sinne von (5) sein oder das zuletzt verbliebene Individuum k .

2 Intransitive Paradoxa

2.1 Intransitivität – Definition und Beispiele

Definition:⁷⁶Ist M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine zweistellige Relation, dann heißt R transitiv, wenn gilt:

$$\forall a, b, c \in M : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc.$$

Beispiele für transitive Relationen sind die Größer-Relation ($>$) auf der Menge der reellen Zahlen, denn aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$. Dasselbe gilt für die Gleichheitsrelation ($=$) und die kleiner Relation ($<$). Ebenso ist die Teilbarkeitsrelation auf der Menge der ganzen Zahlen transitiv, denn wenn $a \mid b$ und $b \mid c$ gilt dann folgt $a \mid c$. Eine Relation R heißt intransitiv, wenn die Eigenschaft einer transitiven Relation nicht gilt, also:

$$\exists a, b, c \in M : aRb \wedge bRc \wedge \neg aRc$$

So wie Teilbarkeit ein Beispiel für eine transitive Relation ist, so ist Teilfremdheit ein Beispiel für eine intransitive Relation. Denn trotz dass 5 und 8 sowie 8 und 15 teulfremd sind, haben 5 und 15 einen gemeinsamen Teiler. Das Spiel „Schere, Stein, Papier“ enthält auch eine intransitive Relation (besiegt). Stein besiegt Schere und Schere besiegt Papier, aber es folgt nicht Stein besiegt Papier, sondern Papier besiegt Stein⁷⁷.

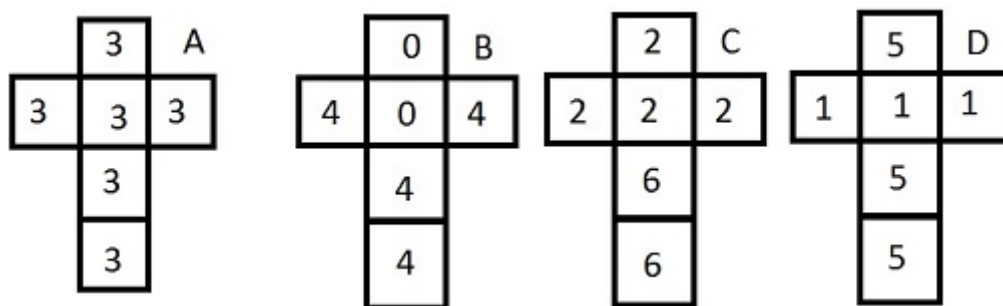
⁷⁶vgl. KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 3.

⁷⁷ebd.

2.2 Intransitive Würfel

2.2.1 Efron-Würfel

Unter diesen Würfeln versteht man nicht die für jedermann bekannten Würfel, die mit den Augenzahlen 1-6 auf den Flächen bedruckt sind und jeweils gegenüberliegende Flächen die Summe 7 ergeben müssen. Grundlage ist ein Spiel mit 4 speziell entworfenen Würfeln. Ziel dieses Spiels ist es, unter 2 Spielern mit einem Wurf die höhere Augenzahl zu erzielen. Diese speziellen Würfel wurden von Bradley Efron entworfen. Hier eine Netzdarstellung dieser Würfel⁷⁸:



Diese Würfel zeichnen sich dadurch aus, dass sie mit einer hohen Wahrscheinlichkeit intransitiv sind, d. h. A schlägt B, B schlägt C und C schlägt D doppelt so oft und das Paradoxe ist, D schlägt A doppelt so oft. Bei diesem Spiel ist es immer von Vorteil, seinem Gegner die erste Wahl zu überlassen, denn es ist egal, welchen Würfel mein Gegner wählt, ich kann immer einen Würfel wählen, der den gewählten 2 von 3 Mal schlägt⁷⁹.

Gehen wir nun ins Detail:

(1) Wählt mein Gegner Würfel B und ich wähle Würfel A, so gewinne ich in 24 Fällen, mein Gegner in 12 Fällen. Nehmen wir an, der Gegner wählt Würfel A, dann wähle ich Würfel D. Dazu erstellen wir nun eine Gewinnskizze. Diese enthält 6 Zeilen und 6 Spalten, denn jede der 6 Flächen von A tritt gegen 6 Flächen von D an⁸⁰.

⁷⁸nach RUMP: Efron dice, S 212.

⁷⁹vgl. RUMP: Efron dice, S 212.

⁸⁰im Folgenden vgl. HERRMANN: Mathematik, S 112-114.

4-5	4-5	4-5	4-5	0-5	0-5
4-5	4-5	4-5	4-5	0-5	0-5
4-5	4-5	4-5	4-5	0-5	0-5
4-1	4-1	4-1	4-1	0-1	0-1
4-1	4-1	4-1	4-1	0-1	0-1
4-1	4-1	4-1	4-1	0-1	0-1

Die erste 4er Fläche von A steht links und alle möglichen Flächen von D werden rechts von denen nach unten dazugeschrieben. Dabei gewinnt A 3x und D 3x. Diese Prozedur setzen wir mit den anderen fünf Flächen von A fort. Summieren wir die Gewinne nach Flächenduellen auf, so sieht man, dass A in 12 Fällen gewinnt und D in 24 Fällen gewinnt, also doppelt so oft. Da nun der Gegner Würfel D für den Gewinnwürfel hält, wählt er diesen und ich wähle C. Und wieder entscheidet Würfel C 24 zu 36 Duellen für sich. Wählt mein Gegner nun C, so wähle ich B und wieder ergibt sich dasselbe Ergebnis mit Sieg von B. Setze ich nun alle Spiele zusammen, so folgt $A > B, B > C, C > D, D > A$, also folgen diese Würfel nicht dem Transitivitätsgesetz und heißen intransitiv.

Fassen wir nun die Ergebnisse aller Würfelduelle in einer Tabelle zusammen⁸¹:

	A gegen B	A gegen C	A gegen D
Kombinationen	12 mal 0-3 24 mal 4-3	8 mal 0-2 4 mal 0-6 16 mal 4-2 8 mal 4-6	6 mal 0-5 6 mal 0-1 12 mal 4-5 12 mal 4-1
Gewinne	24 mal A 12 mal B	16 mal A 20 mal C	12 mal A 24 mal D
Quote Sieger	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ A	$\frac{4}{9} : \frac{5}{9}$ C	$\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ D
	B gegen C	B gegen D	C gegen D
Kombinationen	24 mal 3-2 12 mal 3-6	18 mal 3-5 18 mal 3-1	12 mal 2-5 12 mal 2-1 6 mal 6-5 6 mal 6-1
Gewinne	24 mal B 12 mal C	18 mal B 18 mal D	24 mal C 12 mal D
Quote Sieger	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ B	$\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ -	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ C

⁸¹vgl. KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 7.

Aus dieser Tabelle erkennt man deutlich, dass es zu jedem Würfel ein Gegenstück gibt, gegen das mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gewonnen wird. Wenn nun aber jeder Spieler seine eigenen 4 EFRON Würfel hat und jeder Spieler gleichzeitig wählt, ist dann auch ein Spieler mit einer optimalen Strategie im Vorteil. Sehen wir uns dazu die Wahrscheinlichkeitsmatrix an⁸², wo jede Reihe der Wahl des Spielers R entspricht und jede Spalte entspricht der Wahl des Spielers S. Jeder Eintrag in der Matrix entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass Spieler R Spieler S schlägt, mit der jeweiligen Kombination der Würfel.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wenn man sich die Matrix ansieht, haben bei einer Auswahl die Spieler die gleiche Chance ein Spiel zu gewinnen, 5 Mal gewinnt R, 5 Mal gewinnt S und 6 Mal unentschieden. Sehen wir uns an, ob es eine optimale Strategie gibt, die Würfel zu wählen. Sei x der Strategievektor von R, x_i gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass R den Würfel aus der Reihe i wählen wird. Multipliziert man diesen Vektor mit der i -ten Spalte der Matrix, so erhält man die Gewinnwahrscheinlichkeit von R, wenn S einen Würfel wählt, der der Spalte j entspricht. Dabei ist v mit Würfel B zu maximieren.

Im Folgenden sei nun die Herleitung der optimalen Lösungen beschrieben⁸³.

Sei $x_i \geq 0$ für $i = A; B, C, D$

$$\frac{1}{2}x_A + \frac{1}{3}x_B + \frac{5}{9}x_C + \frac{2}{3}x_D \geq v \quad (\text{I})$$

$$\frac{2}{3}x_A + \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{3}x_C + \frac{1}{2}x_D \geq v \quad (\text{II})$$

$$\frac{4}{9}x_A + \frac{2}{3}x_B + \frac{1}{2}x_C + \frac{1}{3}x_D \geq v \quad (\text{III})$$

$$\frac{1}{3}x_A + \frac{1}{2}x_B + \frac{5}{9}x_C + \frac{1}{2}x_D \geq v \quad (\text{IV})$$

$$x_A + x_B + x_C + x_D = 1 \quad (\text{V})$$

⁸²vgl. RUMP: Efron dice, S 213.

⁸³im Folgenden vgl. RUMP: Efron dice, S 213.

Substituiere $x_D = 1 - x_A - x_B - x_C$, das Problem wird reduziert auf

$$-\frac{1}{6}x_A - \frac{1}{3}x_B - \frac{1}{9}x_C + \frac{2}{3} \geq v \quad (\text{I})$$

$$\frac{1}{6}x_A - \frac{1}{6}x_C + \frac{1}{2} \geq v \quad (\text{II})$$

$$\frac{1}{9}x_A + \frac{1}{3}x_B + \frac{1}{6}x_C + \frac{1}{3} \geq v \quad (\text{III})$$

$$-\frac{1}{6}x_A + \frac{1}{6}x_C + \frac{1}{2} \geq v \quad (\text{IV})$$

$$x_A + x_B + x_C \geq 1 \quad (\text{V})$$

Bei einem fairen Spiel ist $v^* = \frac{1}{2}$, II und IV zeigt, dass $\pm \frac{1}{6}(x_A^* - x_C^*) \geq 0 \Rightarrow x_A^* = x_C^*$. Daher sollte Spieler R die Würfel A und C mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählen. Dadurch werden I, III und V reduziert auf:

$$5x_A^* + 6x_B^* = 3 \text{ und } 2x_A^* + x_B^* \geq 3$$

Aus den verbliebenen Gleichungen ergeben sich mehrere optimale Lösungen:

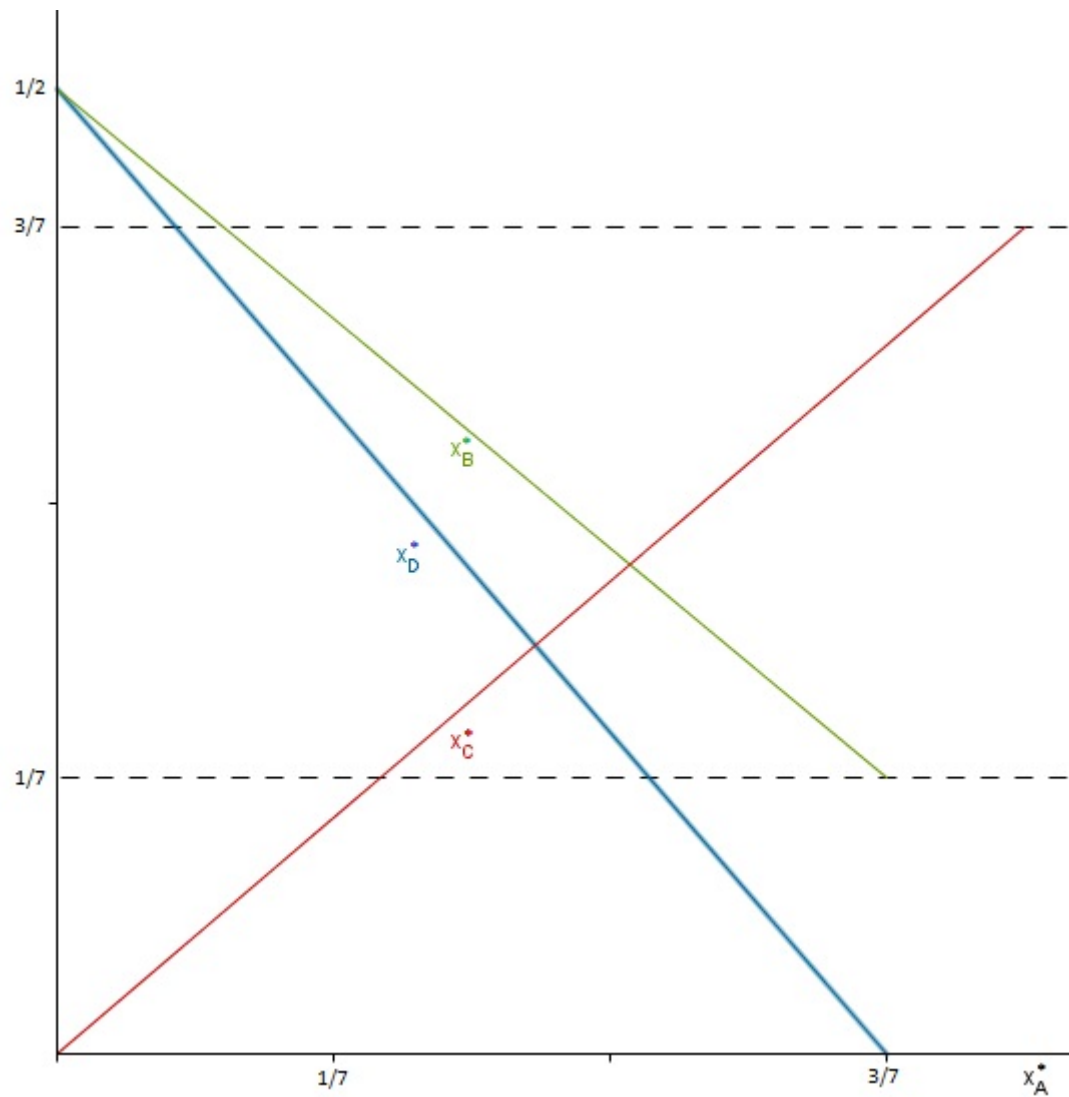
$$x_A^* = x_C^* \in (0; \frac{3}{7})$$

$$x_B^* = \frac{1}{2} - \frac{5}{6}x_A^*$$

$$x_D^* = 1 - 2x_A^* - x_B^* = \frac{1}{2} - \frac{7}{6}x_A^*$$

Wenn man sich die vielen optimalen Lösungen ansieht, so erkennt man, dass die Lösung $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$ nicht dabei ist. Es ist also nicht sinnvoll mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwischen den Würfeln zu wählen. Interessant erschienen auch die Grenzen 0 und $\frac{3}{7}$ für x_A^* bzw. x_C^* . Daraus ergeben sich die optimalen Lösungen $x^* = (0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2})$, sowie $x^* = (\frac{3}{7}; \frac{1}{7}; \frac{3}{7}; 0)$, d. h. es ist optimal, nur mit den Würfeln B und D mit gleicher Präferenz zu spielen und A und C wegzulassen. Laut der anderen Lösung ist es optimal Würfel D wegzulassen. Auch wenn der Gegner mit allen 4 Würfeln spielt, ist es trotzdem sinnvoll, 1 oder 2 Würfel wegzulassen und ich bekomme trotzdem ein faires Spiel.

Folgende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeit, Würfel B, C, D zu wählen in Abhängigkeit von x_A^* ⁸⁴.



⁸⁴Abbildung nach RUMP: Efron dice, S 215.

(2) Wir wollen uns jetzt ansehen, ob die Intransitivität im vorhin gezeigten Ausmaß nach denselben Spielregeln noch vorhanden ist, wenn man 2 EFRON Würfel zum gleichzeitigen Werfen auswählen soll. Aus 36 Kombinationen in 6 Duellen werden nun 36×36 Kombinationen in 45 Duellen ausgespielt. Folgende Tabelle weist nun die Gewinnwahrscheinlichkeiten aus (Wir gehen schon vorab in 10 Duellen gleicher Würfel von einer Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ aus).

AA: 3 mögliche Ausgänge: 0; 4; 8 (4×0 ; 16×8 ; 16×4)

AB: 2 mögliche Ausgänge: 3; 7 (24×7 ; 12×3)

BB: 1 möglicher Ausgang: 6 (36×6)

AC: 3 mögliche Ausgänge: 2; 6; 10 (8×2 ; $(16 + 4) \times 6$; 8×10)

AD: 3 mögliche Ausgänge: 1; 5; 9 (6×1 ; $(12 + 6) \times 5$; 12×9)

BC: 2 mögliche Ausgänge: 5; 9 (24×5 ; 12×9)

BD: 2 mögliche Ausgänge: 4; 8 (18×4 ; 18×8)

CC: 3 mögliche Ausgänge: 4; 8; 12 (16×4 ; 16×8 ; 4×12)

CD: 3 mögliche Ausgänge: 3; 7; 11 (12×3 ; $(12 + 6) \times 7$; 6×11)

DD: 3 mögliche Ausgänge: 2; 6; 10 (9×2 ; 18×6 ; 9×10)

	AB gegen BB	AB gegen BC	AB gegen BD	BB gegen BC
Kombinationen	864 mal 7-6 432 mal 3-6	288 mal 3-5 144 mal 3-9 576 mal 7-5 288 mal 7-9	216 mal 3-4 216 mal 3-8 432 mal 7-4 432 mal 7-8	864 mal 6-5 432 mal 6-9
Quote Sieger	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ AB	$\frac{4}{9} : \frac{5}{9}$ BC	$\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ BD	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ BB
	BB gegen BD	BC gegen BD	AA gegen AB	
Kombinationen	648 mal 6-4 648 mal 6-8	432 mal 5-4 432 mal 5-8 216 mal 9-4 216 mal 9-8	144 mal 0-6 76 mal 4-6 576 mal 8-6	
Quote Sieger	$\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ -	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ BC	$\frac{4}{9} : \frac{5}{9}$ BD	BB

	AA gegen AB	AA gegen BC	AA gegen BD	
Kombinationen	48 mal 0-3 96 mal 0-7 192 mal 4-3 384 mal 4-7 192 mal 8-3 384 mal 8-7	96 mal 3-5 48 mal 3-9 384 mal 3-9 192 mal 3-9 384 mal 3-9 192 mal 3-9	72 mal 3-4 72 mal 3-8 288 mal 3-8 288 mal 3-8 288 mal 3-8 288 mal 3-8	
Quote Sieger	$\frac{10}{27} : \frac{11}{27}$ AA	$\frac{8}{27} : \frac{19}{27}$ BC	$\frac{2}{5} : \frac{3}{5}$ BD	
	AA gegen AC	AA gegen AD	AA gegen CC	AA gegen DD
Kombinationen	32 mal 0-2 80 mal 0-6 32 mal 0-10 128 mal 4-2 320 mal 4-6 128 mal 4-10 128 mal 8-2 320 mal 8-6 128 mal 8-10	24 mal 0-1 72 mal 0-5 48 mal 0-9 96 mal 4-1 288 mal 4-5 192 mal 4-9 96 mal 8-1 288 mal 8-5 192 mal 8-9	64 mal 0-4 64 mal 0-8 16 mal 0-12 256 mal 4-4 256 mal 4-8 64 mal 4-12 256 mal 8-4 256 mal 8-8 64 mal 8-12	36 mal 0-2 72 mal 0-6 36 mal 0-10 144 mal 4-2 288 mal 4-6 144 mal 4-10 144 mal 8-2 188 mal 8-6 194 mal 8-10
Quote Sieger	$\frac{4}{9} : \frac{5}{9}$ AC	$\frac{10}{27} : \frac{17}{27}$ AD	$\frac{16}{49} : \frac{33}{49}$ CC	$\frac{4}{9} : \frac{5}{9}$ DD

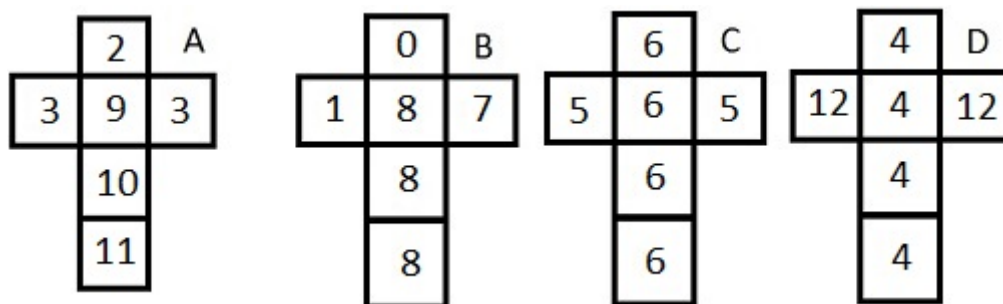
Auf weitere detaillierte Rechnungen möchte ich verzichten.

Im Folgenden gebe ich noch die 10x10 Wahrscheinlichkeitsmatrix an⁸⁵(Reihenfolge AA;AB;AC;AD;BB;BC;BD;CC;CD;DD in den Spalten von links nach rechts bzw. in den Zeilen von oben nach unten, Gewinnwahrscheinlichkeit angegeben im Duell ZEILE gegen SPALTE):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{16}{27} & \frac{4}{9} & \frac{10}{27} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} & \frac{2}{5} & \frac{16}{49} & \frac{14}{27} & \frac{4}{9} \\ \frac{11}{27} & \frac{1}{2} & \frac{16}{27} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & \frac{8}{27} & \frac{2}{5} & \frac{7}{12} \\ \frac{5}{9} & \frac{11}{27} & \frac{1}{2} & \frac{17}{27} & \frac{1}{2} & \frac{16}{27} & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} & \frac{10}{27} & \frac{1}{2} \\ \frac{17}{27} & \frac{1}{2} & \frac{10}{27} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{7}{12} & \frac{14}{27} & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{19}{27} & \frac{5}{9} & \frac{11}{27} & \frac{3}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{16}{27} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} \\ \frac{33}{49} & \frac{19}{27} & \frac{5}{9} & \frac{13}{27} & \frac{5}{9} & \frac{11}{27} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{17}{27} & \frac{5}{9} \\ \frac{13}{27} & \frac{3}{5} & \frac{17}{27} & \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{10}{27} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{9} & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Bei genauer Untersuchung lässt sich auch hier die Intransitivität nachweisen und zwar ergibt sich die Kette $AA > AB > AC > AD > BD > CD > BB > BC > CC > DD > AA$. Da CC nur von 2 Kombinationen geschlagen wird, sind die Möglichkeiten, eine solche Kette aufzustellen, sehr begrenzt. Zusätzlich gibt es nur sieben Duelle von Kombinationen, welche eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ haben, also ist eine Kette mit $\frac{2}{3}$ Gewinnwahrscheinlichkeit nicht möglich aufzustellen.

EFRON schaffte es, mit der auf Spielwürfeln üblichen Augenzahlen (bis auf die 0) intransitive Würfel zu konstruieren. Lässt man auch Augenzahlen größer als 6 zu, so entstehen weitere Möglichkeiten, 4 intransitive Würfel nach EFRON-Art mit Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ zu erhalten. Hier eine Möglichkeit dargestellt⁸⁶:



⁸⁵vgl. RUMP: Efron dice, S 215.

⁸⁶Abbildung nach KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 8.

Im Folgenden sei noch eine Tabelle samt Kombinationen und Gewinnquoten angeführt⁸⁷:

	A gegen B	A gegen C	A gegen D
Kombinationen	6 mal 3-8 3 mal 2-8 und 9-8 3 mal 10-8 und 11-8 2 mal 3-0 1 mal 2-1 und 2-7 1 mal 2-0 und 9-1 1 mal 9-7 und 9-0 1 mal 10-1 und 10-7 1 mal 10-0 und 11-1 1 mal 11-7 und 11-0	8 mal 3-6 4 mal 2-6 4 mal 3-5 4 mal 9-6 4 mal 10-6 4 mal 11-6 2 mal 2-5 2 mal 9-5 2 mal 10-5 2 mal 11-5	8 mal 3-4 4 mal 2-4 4 mal 3-12 4 mal 9-4 4 mal 10-4 4 mal 11-4 2 mal 2-12 2 mal 9-12 2 mal 10-12 2 mal 11-12
Gewinne	24 mal A 12 mal B	18 mal A 18 mal C	12 mal A 24 mal D
Quote Sieger	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ A	$\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ -	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ D

	B gegen C	B gegen D	C gegen D
Kombinationen	12 mal 8-6 6 mal 8-5 4 mal 1-6 4 mal 7-6 4 mal 0-6 2 mal 1-5 2 mal 7-5 2 mal 0-5	12 mal 8-4 6 mal 8-12 4 mal 1-4 4 mal 7-4 4 mal 0-4 2 mal 1-12 2 mal 7-12 2 mal 0-12	16 mal 6-4 8 mal 6-12 8 mal 5-4 4 mal 5-12
Gewinne	24 mal B 12 mal C	16 mal B 20 mal D	24 mal C 12 mal D
Quote Sieger	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ B	$\frac{5}{9} : \frac{4}{9}$ D	$\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ C

Auch bei diesen Würfeln kann man zu jedem Würfel einen anderen Würfel finden, der diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ schlägt. Man kommt wieder zur Kette $A > B > C > D > A$.

⁸⁷vgl. KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 8.

(3) Um sich die zeitraubende Variante des Zählens aller möglichen Kombinationen zu ersparen, wollen wir uns eine Methode ansehen, welche es uns erlaubt, schneller zu den Gewinnwahrscheinlichkeiten in den einzelnen Duellen zu kommen⁸⁸.

Um diese Methode zu erklären, beschränken wir uns einmal auf einen Würfel. Würfel C hat auf 4 Seiten die 2 und auf 2 Seiten die 6 als Augenzahl. Dieses Faktum wird dargestellt in Form der Funktion $C(x) = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^6 + x^6 = 4x^2 + 2x^6$. Die Augenzahlen des Würfels werden als Hochzahl der Variablen x dargestellt, also jede Seite des Würfels mit der Augenzahl k liefert uns den Ausdruck x^k . Den Würfeln A, B und D werden demzufolge die Funktionen $A(x) = 2 + 4x^4$, $B(x) = 6x^3$, $D(x) = 3x + 3x^5$ zugeordnet. Aus diesen Funktionen ist es dann möglich, die Gewinnwahrscheinlichkeit einfacher zu ermitteln.

Wenn wir z. B. C gegen D antreten lassen, ergibt sich folgendes: Der Ausdruck x^6 aus $C(x)$ schlägt alle Terme aus $D(x)$ und das 2 Mal. Von den Termen x^2 in $C(x)$ schlägt jeder 3 Terme in $D(x)$. Das heißt $C(x)$ schlägt $D(x)$ in $2 \times 6 + 4 \times 3 = 24$ Fällen. Zur Sicherheit sehen wir uns noch an, wie oft $C(x)$ von $D(x)$ geschlagen wird: Die drei x^5 Terme schlagen die $4x^2$ Terme, die $3x^1$ Terme gewinnen nie, d. h. $D(x)$ schlägt $C(x)$ in $3 \times 4 = 12$ Fällen. Damit erhalten wir nun für Würfel C gegen Würfel D eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

Beim Werfen mit einem Würfel stellt diese Methode gegenüber dem bloßen Abzählen noch keine wesentliche Erleichterung dar. Wenn man das Werfen mit zwei Würfeln gegeneinander auf ihre Gewinnwahrscheinlichkeit hin untersucht, kommt man aber leichter zu den Ergebnissen. Beim Werfen mit zwei Würfeln arbeitet man nun mit den Produkten der einzelnen Funktionen. Als einführendes Beispiel sehen wir uns das Duell AB gegen BB an.

$$AB(x) = A(x) \cdot B(x) = (2 + 4x^4) \cdot (6x^3) = 24x^7 + 12x^3$$

$$BB(x) = B(x) \cdot B(x) = (6x^3) \cdot (6x^3) = 36x^6$$

Dabei schlagen die $24x^7$ Terme von $AB(x)$, alle $36x^6$ Terme von $BB(x)$ und die $36x^6$ Terme schlagen die $12x^3$ Terme von $AB(x)$. D. h. die Kombination von AB schlägt die Kombination von BB in $24 \times 36 = 864$ Fällen, BB schlägt AB in $36 \times 12 = 432$ Fällen. Dies ergibt im Duell AB gegen BB eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ gegen BB. Um die Erleichterung im Berechnen von Gewinnwahrscheinlichkeiten noch deutlicher zu machen, wenden wir uns dem Duell AC gegen CD zu.

$$AC(x) = A(x) \cdot C(x) = (2 + 4x^4) \cdot (4x^2 + 2x^6) = 8x^2 + 4x^6 + 16x^6 + 8x^{10} = 8x^{10} + 20x^6 + 8x^2$$

$$CD(x) = C(x) \cdot D(x) = (4x^2 + 2x^6) \cdot (3x + 3x^5) = 12x^3 + 12x^7 + 6x^7 + 6x^{11} = 6x^{11} + 18x^7 + 12x^3$$

AC: Die $8x^{10}$ Terme schlagen 30 Terme mit x^7 und x^3 ; die $20x^6$ Terme schlagen die

⁸⁸im Folgenden vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 83-85.

$12x^3$ Terme; die $8x^2$ Terme verlieren immer.

CD: Die $6x^{11}$ Terme schlagen alle 36 Terme von $AC(x)$, die $18x^7$ Terme schlagen 28 Terme mit x^6 und x^2 und die $12x^3$ Terme schlagen die $8x^2$ Terme.

Daher schlägt CD AC in $6 \times 36 + 18 \times 28 + 12 \times 8 = 816$ Fällen. Dies ergibt im Duell AC-CD eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{17}{27}$ oder rund 63% für CD.

Hier erkennt man schon eine deutliche Erleichterung in der Berechnung.

Im Folgenden will ich noch alle Funktionen anschreiben:

$$AA(x) = 16x^8 + 16x^4 + 4$$

$$AB(x) = 24x^7 + 12x^3$$

$$AC(x) = 8x^{10} + 20x^6 + 8x^2$$

$$AD(x) = 12x^9 + 18x^5 + 6x$$

$$BC(x) = 12x^9 + 24x^5$$

$$BD(x) = 18x^8 + 18x^4$$

$$BB(x) = 36x^6$$

$$CC(x) = 4x^{12} + 16x^8 + 16x^4$$

$$CD(x) = 6x^{11} + 18x^7 + 12x^3$$

$$DD(x) = 9x^{10} + 18x^6 + 9x^2$$

Und jetzt noch die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten in den 45 maßgeblichen Duellen. Duelle mit gleichen Kombinationen ergeben immer eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$.

Für die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten in allen Duellen wird mit dieser Methode deutlich weniger Zeit verbraucht als mit dem Abzählen der Kombinationen. Rein formal betrachtet ist das Werfen mit zwei Würfeln nichts anderes als mit einem 36-seitigen Würfel zu werfen; Würfel A hätte dann auf 24 Flächen die 4 und auf 12 Flächen die 0 stehen.

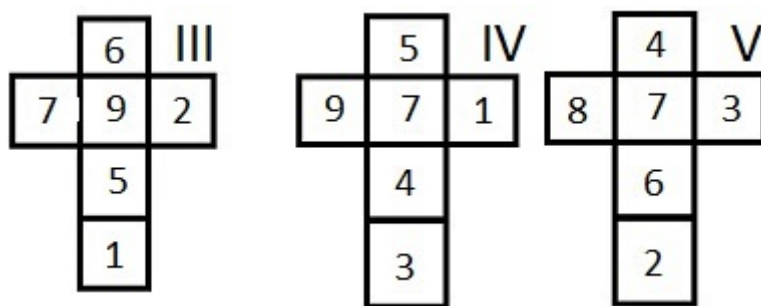
AA-AB	$16 \cdot 36 + 16 \cdot 12$	gegen	$24 \cdot 20 + 12 \cdot 8$	768:528	oder	16/27:11/27	für	AA
AA-AC	$16 \cdot 28 + 16 \cdot 8$	gegen	$8 \cdot 36 + 20 \cdot 20 + 8 \cdot 4$	576:720	oder	5/9:4/9	für	AC
AA-AD	$16 \cdot 24 + 16 \cdot 6$	gegen	$12 \cdot 36 + 18 \cdot 20 + 6 \cdot 4$	480:816	oder	17/27:10/27	für	AD
AB-AC	$24 \cdot 28 + 12 \cdot 8$	gegen	$8 \cdot 36 + 20 \cdot 12$	768:528	oder	16/27:11/27	für	AB
AB-AD	$24 \cdot 24 + 12 \cdot 6$	gegen	$12 \cdot 36 + 18 \cdot 12$	648:648	oder	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$	für	
AA-BB	$16 \cdot 36$	gegen	$36 \cdot 20$	576:720	oder	5/9:4/9	für	BB
AA-BC	$16 \cdot 24$	gegen	$12 \cdot 36 + 24 \cdot 20$	384:912	oder	18/27:8/27	für	BC
AA-BD	$16 \cdot 18$	gegen	$18 \cdot 20 + 18 \cdot 4$	288:432	oder	3/5:2/5	für	BD
AA-CC	$16 \cdot 16$	gegen	$4 \cdot 36 + 16 \cdot 20 + 16 \cdot 4$	256:528	oder	33/49:16/49	für	CC
AA-CD	$16 \cdot 30 + 16 \cdot 12$	gegen	$6 \cdot 36 + 18 \cdot 20 + 12 \cdot 4$	672:624	oder	14/27:13/27	für	AA

AA-DD	16*27+16*9	gegen	9*36+18+20+9*4	576:720	oder	5/9: 4/9	für	DD
AB-BB	24*36	gegen	36*12	864:432	oder	5/9: 4/9	für	AB
AB-BC	24*24	gegen	12*36+24*12	576:720	oder	5/9: 4/9	für	BC
AB-BD	24*18	gegen	18*36+18*12	432:864	oder	5/9: 4/9	für	BD
AB-CC	24*16	gegen	4*36+16*36+16*12	384:912	oder	19/27:8/27	für	CC
AB-CD	24*12	gegen	6*36+18*12	288:432	oder	3/5: 2/5	für	CD
AB-DD	24*27+12*9	gegen	9*36+18*12	756:540	oder	7/12:5/12	für	AB
AC-AD	8*36+20*24+8*6	gegen	12*28+18*81	816:480	oder	17/23:10/27	für	AC
AC-BB	8*36	gegen	36*8	288:288	oder	1/2: 1/2	für	
AC-BC	8*36+20*24	gegen	12*28+24*8	768:528	oder	16/27:11/27	für	AC
AC-BD	8*36+20*18	gegen	18*28+18*8	648:648	oder	1/2: 1/2	für	
AC-CC	8*38+20*16	gegen	4*36+16*28+16*8	576:720	oder	5/9: 4/9	für	CC
AC-CD	8*30+20*12	gegen	6*36+18*28+12*8	480:816	oder	17/27:10/27	für	CD
AC-DD	8*27+20*9	gegen	9*28+18*8	396:396	oder	1/2: 1/2	für	
AD-BB	12*36	gegen	36*24	432:864	oder	5/9: 4/9	für	BB
AD-BC	12*24	gegen	12*24+24*6	288:432	oder	3/5: 2/5	für	BC
AD-BD	12*36+18*18	gegen	18*24+18*6	756:540	oder	7/12:5/12	für	AD
AD-CC	12*32+18*16	gegen	4*36+16*24+16*6	672:624	oder	14/27:13/27	für	AD
AD-CD	12*30+18*12	gegen	6*36+18*24+12*6	576:720	oder	5/9: 4/9	für	CD
AD-DD	12*27+18*9	gegen	9*36+18*24+9*6	486:810	oder	5/8: 3/8	für	DD
BB-BC	36*24	gegen	12*36	864:432	oder	5/9: 4/9	für	BB
BB-BD	36*18	gegen	18*36	648:648	oder	1/2: 1/2	für	
BB-CC	36*16	gegen	4*36+16*36	576:720	oder	5/9: 4/9	für	CC
BB-CD	36*12	gegen	6*36+18*36	432:864	oder	5/9: 4/9	für	CD
BB-DD	36*9	gegen	9*36	324:324	oder	1/2: 1/2	für	
BC-BD	12*36+24*18	gegen	18*24	864:432	oder	5/9: 4/9	für	BC
BC-CC	12*32+24*16	gegen	4*36+16*24	768:528	oder	16/27:11/27	für	BC
BC-CD	12*30+24*12	gegen	6*36+18*24	648:648	oder	1/2: 1/2	für	
BC-DD	12*27+24*9	gegen	9*36+12*24	540:756	oder	7/12:5/12	für	DD
BD-CC	18*16	gegen	4*36+16*18	288:432	oder	3/5: 2/5	für	CC
BD-CD	18*30+18*12	gegen	6*36+18*18	756:540	oder	7/12:5/12	für	BD
BD-DD	18*27+18*9	gegen	9*36+18*18	648:648	oder	1/2: 1/2	für	
CC-CD	4*36+16*30+16*12	gegen	6*32+18*16	816:480	oder	17/27:10/27	für	CC
CC-DD	4*36+16*27+16*9	gegen	9*32+18*16	720:576	oder	5/9: 4/9	für	CC
CD-DD	6*36+18*27+12*9	gegen	9*30+18*12	810:486	oder	5/8: 3/8	für	CD

2.2.2 Miwinsche Würfel

Es handelt sich hierbei um 3 Würfel, welche auf jeder Seitenfläche eine Zahl zwischen 1 und 9 aufweist, ohne Mehrfachbeschriftungen einer Zahl auf einem Würfel, und jede Zahl muss auf 2 von 3 Würfeln aufscheinen⁸⁹. Die Augenzahlsumme auf jedem Würfel beträgt 30, die Summe der gegenüberliegenden Augenzahlen ergeben 9, 10 oder 11. Die Würfel werden nach der Summe der beiden niedrigsten Augenzahlen benannt.

Die Netze seien im Folgenden dargestellt⁹⁰:



Nach der Auswahl eines Würfels gibt es immer einen anderen Würfel, der gegen den ausgewählten Würfel mit Wahrscheinlichkeit von $\frac{17}{36}$ gewinnt und Wahrscheinlichkeit $\frac{16}{36}$ verliert. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{36}$ gibt es ein Unentschieden. Dabei gewinnt III gegen IV, IV gegen V und V gegen III. Es handelt sich also um intransitive Würfel. Nach den anfangs genannten Regeln kann auch noch ein zweiter Würfelsatz gebildet werden.

Würfel IX mit Augenzahlen: 1-3-5-6-7-8

Würfel X mit Augenzahlen: 1-2-4-6-8-9

Würfel XI mit Augenzahlen: 2-3-4-5-7-9

Wenn man die Bedingungen erweitert, lassen sich noch etliche Würfel mit den genannten Gewinnwahrscheinlichkeiten bilden.

⁸⁹im Folgenden vgl. miwin.com, 8.11.2018

⁹⁰Abbildung nach: miwin.com, 8.11.2018

(2) Lässt man auf den drei Würfeln nur die doppelte Vergabe von Zahlenwerten zu, wobei die Zahlen von 1-9 insgesamt auf den Würfeln erscheinen müssen, ergeben sich folgende Würfeltripel⁹¹:

A mit Augenzahlen: 2-2-6-6-7-7 oder A' mit AZ: 2-2-4-4-9-9

B mit Augenzahlen: 1-1-5-5-9-9 oder B' mit AZ: 1-1-6-6-8-8

C mit Augenzahlen AZ: 3-3-4-4-8-8 oder C' mit AZ: 3-3-5-5-7-7

In jeder dieser Würfelsätze gibt es einen Würfel, der einen zuvor ausgewählten Würfel mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{9}$ schlägt, also:

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = \frac{5}{9}$$

$$P(A' > B') = P(B' > C') = P(C' > A') = \frac{5}{9}$$

2.2.3 Intransitive Vielflächer

Dass man für die Betrachtung von Intransitivität bei Wurfspielen nicht bei Würfeln bleiben muss, zeigen folgende Beispiele⁹²:

- Intransitive Trieder

Auf jeden der neun Flächen der drei Trieder werden die Zahlen 1-9 geschrieben, Augenzahlsumme ist 15.

T1: 2-6-7

T2: 1-5-9

T3: 3-4-8

Wenn wir in den Duellen jeweils 2 Trieder vergleichen, ergibt sich:

T1-T2:

2 gewinnt 1 Mal, verliert 2 Mal

6 gewinnt 2 Mal, verliert 1 Mal

7 gewinnt 2 Mal, verliert 1 Mal

Also T1 gewinnt gegen T2 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$.

T2-T3:

1 verliert 3 Mal

5 gewinnt 2 Mal, verliert 1 Mal

9 gewinnt 3 Mal

Also gewinnt T2 gegen T3 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$.

T1-T3:

3 gewinnt 1 Mal, verliert 2 Mal

⁹¹im Folgenden vgl. miwin.com, 8.11.2018

⁹²im Folgenden vgl. miwin.com, 8.11.2018

4 gewinnt 1 Mal, verliert 2 Mal

8 gewinnt 3 Mal

Also gewinnt T3 gegen T1 mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{9}$.

Es handelt sich also um einen intransitiven Trieder.

- Intransitive Pentaeder

Hierbei handelt es sich um einen 5er Satz von 5 Flächen, die auf jeder der 25 Flächen die Zahlen 1-25 aufweist. Die Augenzahlsumme ergibt 65.

P1: 1-3-18-21-22

P2: 6-9-14-16-20

P3: 7-11-13-15-19

P4: 2-10-12-17-24

P5: 4-5-8-23-25

Nach Rechnung ergibt sich:

$$P(P1 > P2) = \frac{14}{25} \quad P(P2 > P3) = P(P3 > P4) = P(P4 > P5) = \frac{13}{25}$$

$$P(P5 > P1) = \frac{16}{25}$$

Es handelt sich also um intransitive Pentaeder.

- Diese Liste intransitiver $(2n - 1)$ -Flächen in $(2n - 1)$ er Sätzen und $(2n - 1)^2$ Flächen, auf denen alle Zahlen von 1 bis $(2n - 1)^2$ einmal vorkommen und die Augenzahlsumme jeweils gleich ist, ließe sich beliebig fortsetzen, auch wenn die Suche immer aufwendiger werden würde.

2.2.4 Allgemeine Betrachtungen

Nach den Regeln von Winkelmann bilden wir nun einen 3er Satz von Würfeln, die auf jeden der 18 Flächen die Zahlen 1-18 geschrieben hat und jeder Würfel hat die Augenzahlsumme von 57.

Würfel A: 5-7-8-9-10-18

Würfel B: 2-3-4-15-16-17

Würfel C: 1-6-11-12-13-14

Es handelt sich dabei wieder um intransitive Würfel, weil

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = \frac{21}{36}$$

Bezeichnet man die Würfel folgendermaßen:

Würfel D: 1-4-4-4-4-4

Würfel E: 2-2-2-5-5-5

Würfel F: 3-3-3-3-3-6 so

ergibt sich mit $P(D > E) = P(E > F) = P(F > D) = \frac{21}{36}$

wieder dieselbe Wahrscheinlichkeit für einen Rundumsieg⁹³.

⁹³vgl. SZEKELY: Paradoxa, S 65-66.

Diese Ausführungen sollten nur die Basis für eine allgemeine Formulierung des Paradoxons der Intransitivität von Würfeln sein.

Seien nun $x_1, \dots, x_n$ beliebige Zahlen und

$$P(X_1 > X_2) = P_1, P(X_2 > X_3) = P_2, \dots, P(X_n > X_1) = P_n$$

die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ereignisse. Dann ist $\min(P_1, P_2, \dots, P_n)$ die Wahrscheinlichkeit eines „Rundumsieges“, nennen wir sie W . W kann dabei nie größer sein als $\frac{n-1}{n}$ und dies ist die kleinste obere Schranke⁹⁴.

Widmen wir uns nun der Bestimmung der kleinsten oberen Schranke von Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln. Wenn wir A_i statt $(X_i > X_i + 1)$ schreiben, dann ist $\sum P(A'_i) \geq P(\bigcup A'_i)$, also kann $P(A'_i)$ nicht kleiner sein als $\frac{1}{n}$. Also kann $P(A_i)$ nicht größer sein als $\frac{n-1}{n}$.

Bezeichnen wir diese Schranke mit L_n . Dabei ist $L_2 = \frac{1}{2}$, $L_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $L_4 = \frac{2}{3}$ ⁹⁵.

SATZ⁹⁶: Sei nun $L_n = \sup\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{3}{4}$$

Für den Beweis des Satzes bedarf es der Beweise einiger Hilfssätze und dies würde hier zu sehr ins Detail führen.

Im Folgenden sei die Tabelle der Schranken angeführt⁹⁷.

n	untere Schranke	obere Schranke
3	$\frac{7}{16} = 0,4375$	$\frac{5}{8} = 0,6250$
4	$\frac{5}{8} = 0,6250$	$\frac{27}{40} = 0,6750$
5	$\frac{95}{144} = 0,6597$	$\frac{7}{10} = 0,7000$
6	$\frac{11}{16} = 0,6875$	$\frac{5}{7} = 0,7143$
10	$\frac{23}{32} = 0,7188$	$\frac{81}{110} = 0,7364$
20	$\frac{53}{72} = 0,7361$	$\frac{209}{280} = 0,7467$
25	$\frac{6255}{8464} = 0,7390$	$\frac{243}{325} = 0,7477$
30	$\frac{143}{192} = 0,7448$	$\frac{637}{850} = 0,7494$

Wie man aus der Tabelle ersehen kann, nähert sich der Wert für die oberen und die untere Schranken für L_n , mit steigendem n immer mehr der Zahl $\frac{3}{4}$ an.

⁹⁴vgl. SZEKELY: Paradoxa, S 66.

⁹⁵vgl. USISKIN: max-min Probabilities, S 857.

⁹⁶USISKIN: max-min Probabilities, S 860.

⁹⁷vgl. USISKIN: max-min Probabilities, S 861.

Die oberen und unteren Grenzen aus der Tabelle folgen folgenden Formeln⁹⁸:

$$\frac{3}{4} - \frac{n-2}{4} - \frac{(n-2)^2}{16} < L_n < \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{2}{n(n+1)}$$

für n ungerade

$$\frac{3}{4} - \frac{n-2}{4} < L_n < \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{2}{n(n+1)}$$

für n gerade

2.3 Intransitive Münzwurffolgen

2.3.1 3er Kombinationen

In der Betrachtung von intransitiven Münzwurffolgen gehen wir von einem Spiel für 2 Personen aus. Dabei wirft man eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{2}$ auf Kopf (K) oder Zahl (Z) zu liegen kommt. Im ersten Teil unserer Beobachtung sehen wir uns die Münzwürfe im Dreierpaket an. Dabei können acht mögliche Kombinationen von Ereignissen auftreten, und zwar:

KKK; KKZ; KZK; KZZ; ZZZ; ZZK; ZKK; ZKZ.

Spieler A wählt eine dieser 3er Kombinationen aus, danach wählt Spieler B eine andere 3er Kombination aus. Die Münze wird so oft geworfen bis einer der beiden ausgewählten 3er Blöcke erscheint und der Spieler, welcher den Block gewählt hat, hat gewonnen. Was anfangs nach einem fairen Spiel aussieht, wird bei näherer Untersuchung zu einer alles anderen als fairen Angelegenheit kommen, denn es ist egal, welchen 3er Block Spieler A wählt, Spieler B kann einen 3er Block wählen, der den von Spieler A gewählten Block mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{2}{3}$ schlägt⁹⁹.

Zuerst sei ein Beispiel betrachtet, um die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Block gegen einen anderen gewinnt, zu illustrieren. Sei der erste Block KKZ und der zweite Block KZZ. Wir suchen nun die Wahrscheinlichkeit, dass KZZ gegen KKZ gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit, dass KZZ gewinnt, ist das Mittel der Gewinnwahrscheinlichkeit, gebildet über die 4 Möglichkeiten für die ersten beiden Münzwürfe. Dabei sei $P_2(KK)$ die Wahrscheinlichkeit, dass KZZ gewinnt, wenn die ersten beiden Würfe KK ausgehen. Fällt die Münze im dritten Versuch auf K, so än-

⁹⁸vgl. USISKIN: max-min Probabilities, S 860.

⁹⁹vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 85-86.

dert sich nichts, denn keiner der beiden Blöcke hat gewonnen und die ersten beiden Würfe eines 3er Blocks sind KK. Fällt der dritte Wurf aber auf Z, so gewinnt der erste Block und die Gewinnwahrscheinlichkeit des zweiten Blocks sinkt auf 0. Um $P_2(KK)$ zu berechnen, muss man die Wahrscheinlichkeit der beiden Möglichkeiten gewichtet mitteln und das Ergebnis lautet:

$$P_2(KK) = \frac{1}{2} \times P_2(KK) + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2} \times P_2(KK)$$

Lauten die ersten beiden Würfe KZ, so ergibt sich:

$$P_2(KK) = \frac{1}{2} \times P_2(ZK) + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times P_2(ZK) + \frac{1}{2}$$

Fällt der 3. Wurf auf K, so hat kein Block gewonnen, die letzten beiden Würfe lauten ZK und die Wahrscheinlichkeit, dass der 2. Block gewinnt, beträgt somit $P_2(ZK)$. Fällt der 3. Wurf auf Z, so hat der 1. Block gewonnen.

Somit ist $P_2(KZ) = \frac{1}{2} \times P_2(ZK) + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times P_2(ZK) + \frac{1}{2}$.

Fehlen jetzt noch 2 weitere Möglichkeiten: $P_2(ZK)$ und $P_2(ZZ)$. Diese werde ich nicht mehr im Detail erläutern. Die Ergebnisse lauten:

$$P_2(ZK) = \frac{1}{2} \times P_2(KK) + \frac{1}{2} \times P_2(KZ)$$

$$P_2(ZZ) = \frac{1}{2} \times P_2(ZK) + \frac{1}{2} \times P_2(ZZ) \text{ }^{100}.$$

Damit haben wir ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad P_2(KK) &= \frac{1}{2} \times P_2(KK) \\ \text{(II)} \quad P_2(KZ) &= \frac{1}{2} \times P_2(ZK) + \frac{1}{2} \\ \text{(III)} \quad P_2(ZK) &= \frac{1}{2} \times P_2(KK) + \frac{1}{2} \times P_2(KZ) \\ \text{(IV)} \quad P_2(ZZ) &= \frac{1}{2} \times P_2(ZK) + \frac{1}{2} \times P_2(ZZ) \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber ersetzen wir $P_2(KK)$ durch x , $P_2(KZ)$ durch y und $P_2(ZK)$ durch z und $P_2(ZZ)$ durch w .

¹⁰⁰vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 86-87.

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & \frac{x}{2} = 0 \\
\text{(II)} \quad & y + \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \\
\text{(III)} \quad & \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - z = 0 \\
\text{(IV)} \quad & \frac{z}{2} + \frac{w}{2} = 0
\end{aligned}$$

(I) liefert uns $x = 0$,

durch Einsetzen von x wird (III) zu $\frac{y}{2} - z = 0$ oder $z = \frac{1}{2}y$

und damit wird (II) nach Einsetzen von (III) zu

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{2} \text{ oder } y = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} \text{ oder } y = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}, \text{ also ist } y = \frac{2}{3},$$

aus (III) ergibt sich dann $z = \frac{1}{3}$ und daraus folgend aus (IV): $w = \frac{1}{3}$.

Aus dem Mittelwert der vier errechneten Werte ergibt sich dann:

$$\frac{1}{4} \times [P_2(KK) + P_2(KZ) + P_2(ZK) + P_2(ZZ)] = \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt, dass KZZ mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ gegen KKZ gewinnt, d.h. dass KZZ mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ vor KKZ in einem 3er Block bei Münzwürfen erscheint¹⁰¹.

Des Weiteren will ich noch das Duell ZKZ gegen ZZZ betrachten.

Nun sei $P_1(KK)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ZKZ gegen ZZZ gewinnt, wenn die ersten beiden Ereignisse KK lauten. Dann wäre

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & P_1(KK) = \frac{1}{2} \times P_1(KK) + \frac{1}{2} \times P_1(KZ) \\
\text{(II)} \quad & P_1(KZ) = \frac{1}{2} \times P_1(ZK) + \frac{1}{2} \times P_1(ZZ) \\
\text{(III)} \quad & P_1(ZK) = \frac{1}{2} \times P_1(KK) + \frac{1}{2} \\
\text{(IV)} \quad & P_1(ZZ) = \frac{1}{2} \times P_1(ZK) + 0
\end{aligned}$$

Es wird wiederum der Einfachheit halber $P_1(KK)$ durch x , $P_1(KZ)$ durch y und $P_1(ZK)$ durch z und $P_1(ZZ)$ durch w ersetzt.

¹⁰¹vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 87-88.

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 0 \\
\text{(II)} \quad & -y + \frac{z}{2} + \frac{w}{2} = 0 \\
\text{(III)} \quad & \frac{x}{2} - z = -\frac{1}{2} \\
\text{(IV)} \quad & \frac{z}{2} - w = 0
\end{aligned}$$

Aus (I) folgt $x = y$ und damit ergibt (III) $z = \frac{y}{2} + \frac{1}{2}$, und aus (IV) folgt $w = \frac{z}{2}$ und damit ergibt (II) $y = \frac{z}{2} + \frac{z}{4}$, also $\frac{3z}{4}$. (II) in (III) eingesetzt ergibt $z = \frac{3z}{8} + \frac{1}{2}$, also $\frac{5z}{8} = \frac{1}{2}$ und somit $z = \frac{4}{5}$.

Aus (IV) wird nach Einsetzen $w = \frac{4}{5}$, also $w = \frac{4}{10}$ und somit $w = \frac{2}{5}$.

Wir haben z und w und können durch (II) y berechnen:

$$y = \frac{\frac{4}{5}}{2} + \frac{2}{5} = \frac{4}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ daraus folgt } y = \frac{3}{5}.$$

Und da $x = y$ folgt $x = \frac{3}{5}$.

Nehmen wir nun den Mittelwert über die berechneten Wahrscheinlichkeiten, so ergibt sich für ZKZ eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{3}{5}$.

Als Zusammenfassung sei nun noch eine Tabelle mit Gewinnwahrscheinlichkeiten angegeben (Zeilenblock gewinnt gegen Spaltenblock mit Wahrscheinlichkeit k)¹⁰².

	KKK	KKZ	KZK	KZZ	ZKK	ZKZ	ZZK	ZZZ
KKK	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$
KKZ	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$
KZK	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$
KZZ	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
ZKK	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$
ZKZ	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
ZZK	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ZZZ	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Wenn man sich die Tabelle genauer ansieht, so kann man die Eigenschaft der Intransitivität für 3er Blöcke von Münzwürfen herausfiltern:

$$KKZ > KZZ > ZZK > ZKK > KKZ$$

und zwar jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ oder mehr.

¹⁰²vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 88.

Zu einem gegebenen Block lässt sich ein überlegener Block ganz leicht konstruieren. Man nimmt das gegenteilige Ereignis der mittleren Position des ersten Blocks und setzt es beim zweiten Block an die erste Position und die letzte Position wird gestrichen, z. B. der erste Block lautet KZK, das mittlere Ereignis Z ändert man zu K und setzt es an die Spitze und streiche das K an der letzten Stelle und man bekommt den dominierenden Block KKZ.

2.3.2 4er Kombinationen

Als Nächstes betrachten wir nun 4er Blöcke mit Münzwurffolgen und werden sehen, dass 4er Blöcke von Münzwurfkombinationen ebenfalls die Eigenschaft der Intransitivität besitzen. Die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten in 4er Block Duellen verläuft etwas komplizierter als bei 3er Blöcken, aber nach einem ähnlichen Schema.

Im Folgenden möchte ich die Berechnung nun erläutern¹⁰³.

$P(S)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass ZZKZ gegen ZKZZ gewinnt und sei $P(ZZK)$ die Wahrscheinlichkeit vom Ereignis ZZK zum Ereignis ZZKZ zu gelangen.

$$P(ZZK) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times P(S)$$

Z wird mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ geworfen und der Sieg wäre fixiert, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird K geworfen und man muss wieder von neuem beginnen.

$$P(ZKZ) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times P(S) = \frac{1}{2} \times P(S)$$

Der Wurf auf Z bringt den Sieg für den Gegner, Wurf auf K bringt uns Zustand ZK.

$$P(ZZ) = \frac{1}{2} \times P(ZZ) + \frac{1}{2} \times P(ZZK)$$

$$P(ZZ) = \frac{1}{2} \times P(ZZ) + \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times P(S)]$$

$$P(ZZ) = \frac{1}{2} \times P(ZZ) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times P(S)$$

$$\frac{1}{2} \times P(ZZ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times P(S)$$

$$P(ZZ) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times P(S)$$

$$P(ZK) = \frac{1}{2} \times P(S) + \frac{1}{2} \times P(ZKZ)$$

$$P(ZK) = \frac{1}{2} \times P(S) + \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2} \times P(ZK)]$$

$$P(ZK) = \frac{1}{2} \times P(S) + \frac{1}{4} \times P(ZK)$$

$$\frac{3}{4} \times P(ZK) = \frac{1}{2} \times P(S)$$

$$P(ZK) = \frac{2}{3} \times P(S)$$

¹⁰³im Folgenden vgl. KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 11.

$$\begin{aligned}
P(Z) &= \frac{1}{2} \times P(ZZ) + \frac{1}{2} \times P(ZK) \\
P(Z) &= \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times P(S)] + \frac{1}{2} \times [\frac{2}{3} \times P(S)] \\
P(Z) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times P(S) + \frac{1}{3} \times P(S) \\
P(Z) &= \frac{1}{4} + \frac{7}{12} \times P(S)
\end{aligned}$$

Daraus kann man dann die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Ereignis S berechnen.

$$\begin{aligned}
P(S) &= \frac{1}{2} \times P(S) + \frac{1}{2} \times P(Z) \\
P(S) &= \frac{1}{2} \times P(S) + \frac{1}{2} \times [\frac{1}{4} + \frac{7}{12} \times P(S)] \\
P(S) &= \frac{1}{2} \times P(S) + \frac{1}{8} + \frac{7}{24} \times P(S) = \frac{19}{24} \times P(S) + \frac{1}{8} \\
\frac{5}{24} \times P(S) &= \frac{1}{8} \\
P(S) &= \frac{24}{40} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeit, dass die Kombination ZZKZ gegen die Kombination ZKZZ gewinnt, errechnet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ZKZZ gegen KZKZ gewinnt, ergibt sich nach folgender Berechnung¹⁰⁴:

$$\begin{aligned}
(1) \\
P(K) &= \frac{1}{2} \times P(K) + \frac{1}{2} \times P(KZ) \quad P(K) = P(KZ)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \\
P(Z) &= \frac{1}{2} \times P(ZK) + \frac{1}{2} \times P(Z) \quad P(Z) = P(ZK)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \\
P(ZK) &= \frac{1}{2} \times P(K) + \frac{1}{2} \times P(ZKZ) \quad |nach(1) \\
P(ZK) &= \frac{1}{2} \times P(KZ) + \frac{1}{2} \times P(ZKZ)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \\
P(KZ) &= \frac{1}{2} \times P(KZK) + \frac{1}{2} \times P(Z) \\
P(KZ) &= \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2} \times P(K) + \frac{1}{2} \times 0] + \frac{1}{2} \times P(Z) \quad |nach(1) \\
P(KZ) &= \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2} \times P(KZ)] + \frac{1}{2} \times P(Z) = \frac{1}{2} \times P(KZ) + \frac{1}{2} \times P(Z) \quad |nach(2) \\
P(KZ) &= \frac{1}{4} \times P(KZ) + \frac{1}{2} \times P(ZK) \quad |nach(3) \\
P(KZ) &= \frac{1}{4} \times P(KZ) + \frac{1}{2} \times [\frac{1}{2} \times P(KZ) + \frac{1}{2} \times P(ZKZ)] \\
&= \frac{1}{4} \times P(KZ) + \frac{1}{4} \times P(KZ) + \frac{1}{4} \times P(ZKZ) = \frac{2}{4} \times P(KZ) + \frac{1}{4} \times P(ZKZ)
\end{aligned}$$

¹⁰⁴im Folgenden vgl. KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 14.

$$\begin{aligned}\frac{2}{4} \times P(KZ) &= \frac{1}{4} \times P(ZKZ) \\ P(KZ) &= \frac{1}{2} \times P(ZKZ)\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}P(ZKZ) &= \frac{1}{2} \times P(KZK) + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} \times P(K)\right] + \frac{1}{2} && |nach(1) \\ P(ZKZ) &= \frac{1}{4} \times P(K) + \frac{1}{2} && |nach(4) \\ P(ZKZ) &= \frac{1}{4} \times \left[\frac{1}{2} \times P(ZKZ)\right] + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \times P(ZKZ) + \frac{1}{2} \\ \frac{7}{8} \times P(ZKZ) &= \frac{1}{2} \\ P(ZKZ) &= \frac{4}{7}\end{aligned}$$

(6)

$$P(ZKZ) = \frac{1}{2} \times P(K) + \frac{1}{2} \times 0$$

Für die Gewinnwahrscheinlichkeit des Ereignisses folgt:

$$\begin{aligned}P(S) &= \frac{1}{2} \times P(K) + \frac{1}{2} \times P(Z) && |nach(1); (2) \\ P(S) &= \frac{1}{2} \times P(KZ) + \frac{1}{2} \times P(ZK) && |nach(4); (3) \\ P(S) &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} \times P(ZKZ)\right] + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} \times P(KZ) + \frac{1}{2} \times P(ZKZ)\right] && |nach(4) \\ P(S) &= \frac{1}{4} \times P(ZKZ) + \frac{1}{2} \times \left\{\frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2} \times P(ZKZ)\right] + \frac{1}{2} \times P(ZKZ)\right\} \\ P(S) &= \frac{1}{4} \times P(ZKZ) + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{4} \times P(ZKZ) + \frac{1}{2} \times P(ZKZ)\right] \\ P(S) &= \frac{1}{4} \times P(ZKZ) + \frac{1}{8} \times P(ZKZ) + \frac{1}{4} \times P(ZKZ) \\ P(S) &= \frac{8}{8} \times P(ZKZ) \\ P(S) &= \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} \\ P(S) &= \frac{5}{14}\end{aligned}$$

Die Kombination ZKZZ gewinnt gegen die Kombination KZKZ mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{14}$.

Da es in der Anordnung von 4er Blöcken 16 Kombinationen und 120 relevante Kombinationsmodelle gibt, erscheint diese Methode zur Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit in allen Duellen recht mühsam. Selbst wenn wir zum Nachweis der Intransitivität der 4er Münzwurffolgen nicht alle Gewinnwahrscheinlichkeiten berechnen müssen, entsteht hier trotzdem ein recht hoher Zeitaufwand.

Formel nach Conway

Eine elegante Methode, die Gewinnwahrscheinlichkeit schneller zu berechnen, ist, wenn wir die Methode nach Conway anwenden. Hierbei ist zu beachten, dass diese Methode nur angewendet werden kann, wenn wir ein Zufallsereignis mit zwei möglichen Ausgängen betrachten¹⁰⁵.

Zuerst muss jede 4er Kombination in eine Binärzahl umgewandelt werden. Das funktioniert folgendermaßen:

- Schreibe die Kombinationen untereinander. Sind die Zeichen identisch, setze eine 1, sonst 0 → 1. Ziffer
- Streiche das erste Zeichen der 1. Zeile. Vergleiche mit dem Anfang der 2. Zeile. Sind sie identisch, setze eine 1, sonst eine 0 → 2. Ziffer
- Streiche das 2. Zeichen der 1. Zeile. Vergleiche und setze wie in Schritt 2
- Streiche das 3. Zeichen der 1. Zeile. Vergleiche und setze wie in Schritt 2

<u>ZZKZ</u>		1
<u>ZZKZ</u>		
<u>ZKZ</u>		0
<u>ZZKZ</u>		
<u>KZ</u>		0
<u>ZZKZ</u>		
<u>Z</u>		1
<u>ZZKZ</u>		

Die Kombination ZZKZ umgewandelt in eine Binärzahl ist 1001.

Durch diese Formel kann sowohl die Wartezeit für eine Kombination, als auch die Gewinnwahrscheinlichkeit im Duell zweier Kombinationen berechnet werden. Diese Formel kann auch auf 5er, 6er, ..., n-stellige Blöcke angewendet werden.

¹⁰⁵im Folgenden vgl. KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 20.

(1) Im Folgenden seien die entsprechenden Binärzahlen für alle 16 Kombinationen angegeben:

KKKK	1111	ZKKK	1000	ZKZK	1010	ZKZZ	1001
KKKZ	1000	KKZZ	1000	ZZKK	1000	ZZKZ	1001
KKZK	1001	KZKZ	1010	KZZK	1001	ZZZK	1000
KZKK	1001	ZKKZ	1001	KZZZ	1000	ZZZZ	1111

(2) Wartezeit berechnen

Die Wartezeit für eine Kombination kann laut Conway mit dem doppelten Wert der in eine Dezimalzahl umgewandelten Binärzahl berechnet werden, also für ZZKZ ergibt die Binärzahl 1001 die Dezimalzahl 9 und somit eine Wartezeit von 18 Würfeln. Hier nun eine gesammelte Aufstellung der Wartezeiten für alle möglichen Kombinationen¹⁰⁶:

KKKK	30	ZKKK	16	ZKZK	20	ZKZZ	18
KKKZ	16	KKZZ	16	ZZKK	16	ZZKZ	18
KKZK	18	KZKZ	20	KZZK	18	ZZZK	16
KZKK	18	ZKKZ	18	KZZZ	16	ZZZZ	30

(3) Gewinnwahrscheinlichkeiten¹⁰⁷

Wenn wir nun die Binärzahl eines Duells feststellen wollen, funktioniert dies auch nach dem oben genannten Muster. Betrachten wir zuerst die Kombinationen A:=ZZKZ und B:=ZKZZ. Daraus können wir 4 Conway Zahlen ermitteln (A:A) [entspricht der Binärzahl einer Kombination], (A:B), (B:A), (B:B). Die zuerst genannte Kombination wird oben geschrieben, die zweite darunter:

$$(A : A) \equiv 1001 \equiv 9 \quad (A : B) \equiv 0101 \equiv 5$$

$$(B : B) \equiv 1001 \equiv 9 \quad (B : A) \equiv 0011 \equiv 3$$

Mithilfe der Formel

$$\frac{(B : B) - (B : A)}{(A : A) - (A : B)}$$

wird nun das Gewinnverhältnis berechnet. Wenn wir die Zahlen aus unserem Beispiel einsetzen, ergibt sich:

$$(9-3):(9-5)=6:4.$$

Von 10 Spielen gewinnt Kombination A 6 Mal und Kombination B 4 Mal. Es ergibt

¹⁰⁶vgl. KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 19.

¹⁰⁷im Folgenden vgl. KLEINHUIS: Intransitive Paradoxa, S 20-21.

sich also eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{3}{5}$ für Kombination A.

2. Beispiel: ZKZZ gegen KZZZ

$$(A : A) \equiv 1000 \equiv 8 \quad (A : B) \equiv 0011 \equiv 1$$

$$(B : B) \equiv 1001 \equiv 9 \quad (B : A) \equiv 0010 \equiv 4$$

$$(8-1):(9-4)=7:5$$

Es ergibt sich also eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{7}{12}$ für die Kombination ZKZZ.

3. Beispiel: KZZZ gegen ZZKZ

$$(A : A) \equiv 1001 \equiv 9 \quad (A : B) \equiv 0001 \equiv 3$$

$$(B : B) \equiv 1000 \equiv 8 \quad (B : A) \equiv 0100 \equiv 2$$

$$(9-2):(8-3)=7:5$$

Es ergibt sich also eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{7}{12}$ für die Kombination KZZZ.

Aus diesen Beispielen ist die Intransitivität auch bei Kombinationen von 4er Blöcken deutlich zu erkennen, denn: $ZZKZ > ZKZZ > KZZZ > ZZKZ$.

Zum Abschluss sei noch die Tabelle aller Gewinnwahrscheinlichkeiten angeführt.

	KKKK	KKKZ	KKZK	ZKKK	KKZZ	KZKZ	ZKKZ	ZKZK
KKKK	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$
KKKZ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{16}$
KKZK	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{12}$
KZKK	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$
ZKKK	$\frac{15}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
KKZZ	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$
KZKZ	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$
ZKKZ	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
ZKZK	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ZZKK	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{3}$
KZZK	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
KZZZ	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{2}$
ZKZZ	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
KKZK	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
ZZZK	$\frac{15}{22}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{4}{7}$
ZZZZ	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$

	ZKZK	ZZKK	KZZK	KZZZ	ZKZZ	ZZKZ	ZZZK	ZZZZ
KKKK	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{2}$
KKKZ	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{22}$
KKZK	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
KZKK	$\frac{5}{14}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
ZKKK	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{11}$
KKZZ	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$
KZKZ	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
ZKKZ	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{11}$
ZKZK	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$
ZZKK	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
KZZK	$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{8}$
KZZZ	$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$
ZKZZ	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
KKZK	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$
ZZZK	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ZZZZ	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Die Berechnungen dazu finden sich im Anhang .

3 Paradoxe Ergebnisse bei medizinischen Tests

3.1 AIDS Test (HIV-Test)

Zunächst einige kurze Vorbemerkungen. Eine HIV Infektion kann mithilfe eines direkten Virusnachweises oder über den Nachweis von Antikörpern diagnostiziert werden, wobei ich mich im Folgenden mit dem Antikörper-Suchtest beschäftigen werde. Seit Beginn der Aufzeichnungen zu AIDS weisen die Zahlen 77,3 Mio. HIV Infizierte weltweit auf, wobei Ende 2017 96,9 Mio. mit HIV Infektion auf der Erde lebten. Im Jahr 2017 kamen 1,8 Mio. Neuinfizierte dazu. 75% der HIV infizierten Menschen wissen um die Tatsache ihrer Infektion. Seit 1996 der Höhepunkt an Neuinfektionen erreicht wurde, reduzierte sich die Anzahl an Neuinfektionen um 47%. Die höchste Rate an Neuinfizierten ergab sich im Raum Osteuropa und Zentralasien mit 9,3%. Der Raum West- und Zentraleuropa mit Nordamerika weist mit 9,2% die niedrigste Neuinfektionsrate auf. Der Raum Ost- und Südafrika weist mit 800.000 Neuinfizierten den Spitzenwert auf¹⁰⁸.

In Deutschland leben ca. 88.000 HIV Infizierte, in Österreich etwa 8.000-9.000. Die Zahl der Neuinfektionen ist in den letzten Jahren wieder etwas gestiegen. Der Anteil der HIV Infizierten in Deutschland und Österreich an der Gesamtbevölkerung beträgt also in etwa 0,1%, weltweit beträgt der Anteil ca. 0.5%¹⁰⁹.

Jetzt wenden wir den Blick auf das HIV Testverfahren¹¹⁰. Der Test findet mit 99,8% Sicherheit die Infektion bei einem HIV infizierten Menschen, dies wird auch Sensitivität des Tests genannt. Mit 99% Sicherheit weist der Test ein negatives Ergebnis bei einem nicht mit HIV infizierten Menschen aus, dies ist die Spezifität des Tests. Auf den ersten Blick kann man meinen, dass man aufgrund der hohen Sensitivität und Spezifität auf den Test vertrauen kann. Nun wollen wir stochastisch untersuchen, ob unser Vertrauen auch gerechtfertigt ist. Dazu bedienen wir uns der bedingten

¹⁰⁸vgl. [unaids.org/en/resources/fact-sheet](https://www.unaids.org/en/resources/fact-sheet), 26.11.2018

¹⁰⁹aids.at/information/hiv-statistik, 26.11.2018

¹¹⁰im Folgenden vgl. BÖER: AIDS, S 113-115.

Wahrscheinlichkeit mit folgenden formalen Grundlagen:

HIV+ ... krank T+ ... Test positiv

HIV- ... gesund T- ... Test negativ

$$P(T+ | HIV+) = 0,998 \quad P(T- | HIV+) = 0,002 \quad P(HIV+) = 0,0001$$

$$P(T- | HIV-) = 0,99 \quad P(T+ | HIV-) = 0,01 \quad P(HIV-) = 0,999$$

Die Wahrscheinlichkeiten werden aus den Kennzahlen des Tests ermittelt.

Um unser Vertrauen nun zu untermauern, berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeit, dass man AIDS hat, unter der Bedingung, dass der Test ein positives Ergebnis aufweist.

Formal bedeutet es, dass wir $P(HIV+ | T+)$ suchen.

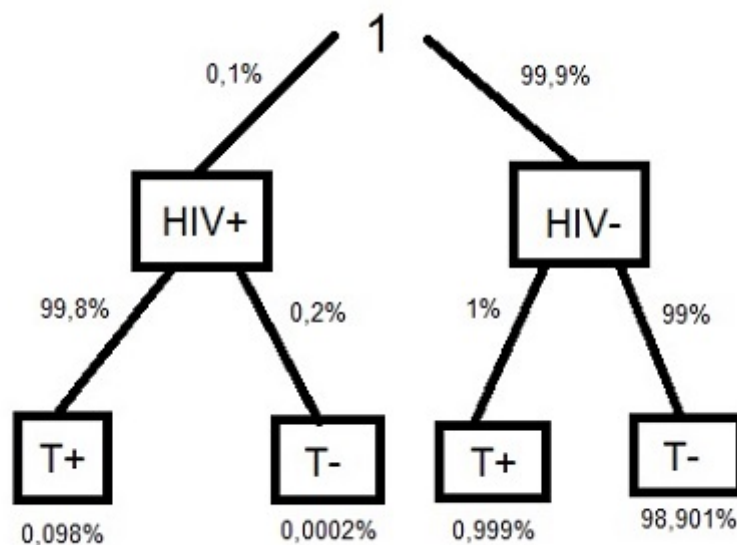
$$P(HIV+ | T+) = \frac{P(T+ | HIV+) \cdot P(HIV+)}{P(T+ | HIV+) \cdot P(HIV+) + P(T+ | HIV-) \cdot P(HIV-)}$$

$$P(HIV+ | T+) = \frac{P(T+ | HIV+) \cdot P(HIV+)}{P(T+)}$$

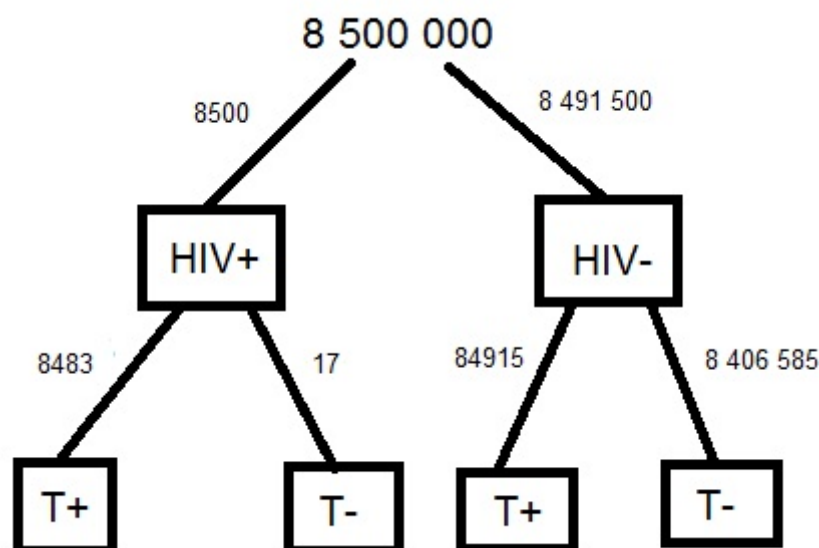
$$P(HIV+ | T+) = \frac{0,998 \cdot 0,0001}{0,998 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,999} = \frac{0,0000998}{0,0100988} \approx 0,00998$$

D. h.: Wenn der HIV+ Test positiv ausfällt, ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ca. 0,1%, dass man tatsächlich den HI Virus in sich trägt. Der Test bringt also nur wenig Information darüber, ob man tatsächlich erkrankt ist, was angesichts der Werte für die Sensitivität und Spezifität kaum zu glauben ist. Man muss also nicht gleich in Panik ausbrechen, wenn der HIV Test positiv ist. Ein Baumdiagramm erklärt das Ergebnis¹¹¹.

¹¹¹Diagramm nach BÖER: AIDS, S 115.



Die beiden Pfade, die zu einem positiven Test führen, weisen als Ergebnis 0,000998 bzw. 0,00999 auf. Der rechte Pfad ist demnach um das 10fache stärker als der linke Pfad. Das paradoxe Ergebnis, welches der Test liefert, liegt augenscheinlich nicht am Test selbst, sondern daran, dass es so wenig HIV Infizierte gibt. Die Stärke des rechten Astes bildet sich trotz des kleinen Bruchteils einer sehr großen Menge. Mit absoluten Zahlen ist es besser zu sehen. Bezogen auf die Bevölkerungszahl Österreichs von ca. 8,5 Millionen ergibt sich folgendes Diagramm:



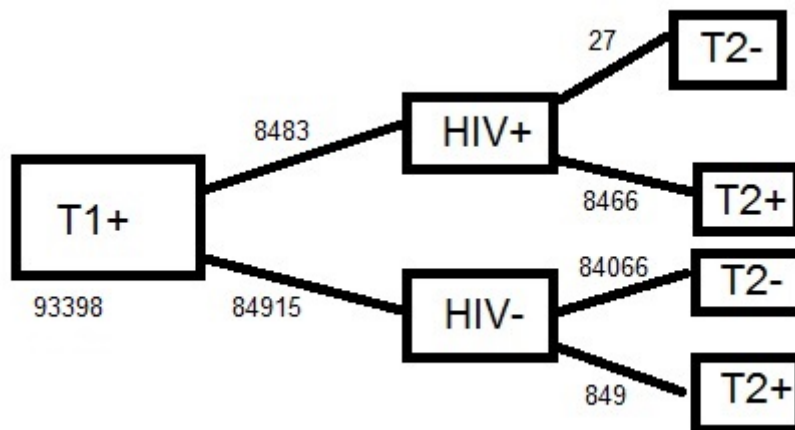
Das berechnete Ergebnis entspricht also genau jener Zahl, die sich aus dem Bau-diagramm ergibt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 91% wird ein falsch positives Testergebnis ausgewertet. So ein Testergebnis ist für die praktische Anwendung anscheinend untauglich, weil man sich nicht darauf verlassen kann.

Eine Lösung für dieses Problem könnte ein neuer Ansatz sein, z. B. ein 2. Test für

alle, deren 1. Test positiv war. Die zu beantwortende Frage ist: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist jemand HIV infiziert, wenn der Test positiv ist? Wir suchen also $P(HIV + |T2+)^{112}$.

$$P(HIV + |T2+) = \frac{0,998 \cdot 0,091}{0,998 \cdot 0,091 + 0,01 \cdot 0,909} = \frac{0,09082}{0,099908} \approx 0,909$$

Lassen wir auch dazu wieder das Baumdiagramm sprechen. Hierzu verwenden wir absolute Zahlen am Beispiel Österreichs. Ausgangspunkt ist die Anzahl derjenigen, deren 1. Test positiv war, in diesem Fall 93.398.



Mit rund 91% Wahrscheinlichkeit ist das positive 2. Testergebnis auch richtig, sofern der 1. Test auch positiv war. Mit diesem Ergebnis kann man auch in der Praxis gut arbeiten und das Vertrauen in den Test wird gestärkt.

Seit der Bestätigung der Kennzahlen für Sensitivität und Spezifität im Jahr 1991 hat sich das Testverfahren entwickelt und die Kennzahlen haben sich unbestätigt bereits erhöht. Dabei erscheinen eine Sensitivität von 0,999 und eine Spezifität von 0,997 realisierbar. Aber selbst dann ergibt sich für $P(HIV+|T+)=0,25$ eine noch nicht akzeptable Rate im 1. Testdurchgang. Nur einen 2. Test erhöht sich die Rate für die korrekt positiven Testergebnisse auf 99,1%. Unter den 36,9 Mio. positiv getesteten waren immer noch rund 330.000 falsch positive Testungen. Für die ferne Zukunft wäre wohl eine Sensitivität von 1 und Spezifität von 0,99995 wünschenswert. Dann läge die Rate richtig positiver Tests bei 95,2% und ausgehend davon für richtig positive 2. Tests bei 99,999975%, also mit den heutigen absoluten Zahlen gesprochen nur noch 9 falsch positive. Doch dafür braucht man wohl noch eine lange Zeit an Forschung¹¹³.

¹¹²vgl. BÖER: AIDS, S 117.

¹¹³vgl. BÖER: AIDS, S 118-119.

3.2 PSA-Test

Unter dem PSA-Test versteht man einen Schnelltest für Prostatakrebs. Bei den im Folgenden eingegebenen Zahlen handelt es sich um Rundungen, was aber das zu Zeigende im Wesentlichen unberührt lässt. Der Test zeigt bei 80% aller Männer mit Prostatakrebs ein positives Testergebnis und bei 20% der Männer ohne Prostatakrebs ein falsch positives Testergebnis. Gesammelte Daten weisen darauf hin, dass ca. 1% aller 60jährigen Männer, die sich einer Vorsorgeuntersuchung unterziehen, an Prostatakrebs leiden. Die Frage, welche sich nun stellt ist, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass Männer aus der eben angegebenen Gruppe bei positivem Testresultat tatsächlich Prostatakrebs haben. Wenn man nun die Bevölkerung er-suchen würde, läge der größte Teil wohl weit daneben. Selbst Personen, denen die medizinische Materie nicht unbekannt ist, lägen mit einem Anteil von 85% daneben. Die meisten geben eine Schätzung im Bereich von 75% ab. Im Folgenden wollen wir nun untersuchen, ob sich ein sehr hoher Anteil tatsächlich verschätzt hat, denn eine Wahrscheinlichkeit von 75% erscheint auf den ersten Blick sehr plausibel, und die tatsächliche Antwort auf die Frage geben¹¹⁴.

Zuerst wollen wir einige Formalitäten klären¹¹⁵. Die Menge aller 60jährigen Männer, die sich einer Vorsorgeuntersuchung unterziehen, kann man in 2 Gruppen einteilen:
Gruppe K ... Männer mit Prostatakrebs
Gruppe $\bar{K}$... Männer ohne Prostatakrebs

Nach der Durchführung des PSA-Tests erhöht sich die Zahl der Gruppen auf 4.
 $K+$... Männer mit Prostatakrebs und mit positivem Test
 $K-$... Männer mit Prostatakrebs und mit negativem Test
 $\bar{K}+$... Männer ohne Prostatakrebs und mit positivem Test
 $\bar{K}-$... Männer ohne Prostatakrebs und mit negativem Test

Eine Analyse dieser Situation kann mit Hilfe des Satzes von Bayes erfolgen. Dazu benötigen wir die Wahrscheinlichkeiten

$P(K) = 0,01$ für „Patient hat Prostatakrebs“ und $P(\bar{K}) = 0,99$ für „Patient hat keinen Prostatakrebs“.

Dazu kommen noch die Kennzahlen für die Verlässlichkeit des Tests:

$P(T+|K) = 0,80$ und $P(T+|\bar{K}) = 0,20$

welche die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Test darstellt, unter der Bedin-

¹¹⁴vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 66.

¹¹⁵im Folgenden vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 66-70.

gung, dass der Patient Prostatakrebs hat bzw. nicht hat. Die Wahrscheinlichkeit, welche wir suchen, ist aber eine andere. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem positiven Testergebnis tatsächlich Krebs hat, formal ausgedrückt $P(K|T+) = ?$

Um den Satz von Bayes hier anwenden zu können, brauchen wir die umgekehrte bedingte Wahrscheinlichkeit $P(T+|K)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(T+)$.

$$P(T+) = P(T+ \cap K) + P(T+ \cap \bar{K})$$

Daraus folgt dann:

$$P(T+) = P(T+|K) \cdot P(K) + P(T+|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})$$

Nun können wir $P(K|T+)$ berechnen:

$$P(K|T+) = \frac{P(T+|K) \cdot P(K)}{P(T+)} = \frac{P(T+|K) \cdot P(K)}{P(T+|K) \cdot P(K) + P(T+|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})}$$

$$P(K|T+) = \frac{0,80 \cdot 0,01}{0,80 \cdot 0,01 + 0,20 \cdot 0,99} = 0,039$$

Dieses Ergebnis erscheint doch äußerst paradox und wurde von Vielen nicht so erwartet. Selbst bei positivem PSA-Test liegt die Wahrscheinlichkeit, Prostatakrebs zu haben, bei nur 3,9%. Der Grund ist folgender: Aus den Kennzahlen der Verlässlichkeit des Tests ergibt sich, dass es 20 Mal wahrscheinlicher ist, dass der Test einen Fehler macht als dass der Patient Prostatakrebs hat. Wenn die Wahrscheinlichkeit $P(K|T+)$ so gering ist, ergibt sich dann die Frage, wozu der PSA-Test eigentlich gut sein soll. Um diese Frage zu beantworten, werde ich nun folgende Berechnung anstellen:

$$P(\bar{K}|T-) = \frac{P(T-|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})}{P(T-)} = \frac{P(T-|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})}{P(T-|K) \cdot P(K) + P(T-|\bar{K}) \cdot P(\bar{K})}$$

$$P(\bar{K}|T-) = \frac{0,80 \cdot 0,99}{0,20 \cdot 0,01 + 0,80 \cdot 0,99} = 0,9975$$

Hier habe ich die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass ein Patient nach negativem Testergebnis auch tatsächlich keinen Krebs hat. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,75% ist man nach einem negativen PSA-Test auch gesund. Die Frage der Sinnhaftigkeit des Tests wird damit zumindest teilweise beantwortet. Es geht um die Absicherung der Gesundheit und nicht um Absicherung der Krankheit.

3.3 Erwähnung weiterer diagnostischer Tests

Ähnlich wie bei den eben dargelegten Tests verlaufen auch Tests auf Hepatitis C, Drogentests, Schwangerschaftstests oder auch Tests zu Brustkrebs oder Darmkrebs. All diese Tests sind mit einer hohen Unsicherheit verbunden und benötigen immer weiterführende Untersuchungen zur vollständigen Sicherheit des Patienten. Es braucht auch eine Sensibilisierung und die richtige Interpretation der Ergebnisse, um nach einem positiven Test nicht gleich in Panik zu verfallen. Deshalb sollte die Behandlung der Diagnose seltener Ereignisse im Mathematikunterricht nicht fehlen und mit dem Thema AIDS erhält es auch noch die Aufmerksamkeit, die es benötigt.

3.3.1 Test zu Trisomie 21

Nur kurz möchte ich das Testverfahren zu Trisomie 21 erwähnen, auch als Down-Syndrom bekannt. Diese genetische Anomalie kann durch eine Fruchtwasseruntersuchung bei einer Schwangeren festgestellt werden. In 99% aller Fälle ist das Testergebnis korrekt positiv und in 99% der Fälle ist es korrekt negativ. In der Gruppe der 25jährigen Mütter ist nach Datenanalysen 1 von 1.250 Föten vom Down-Syndrom betroffen. Nach einer analogen Berechnung wie beim PSA-Test oder AIDS Test kann man leicht einsehen, dass bei einem positiven Ergebnis der Fruchtwasseruntersuchung Föten nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 7% tatsächlich vom Down-Syndrom betroffen sind. Es kann davon ausgegangen werden, dass viele untersuchte und positiv getestete Föten gesunde Kinder hätten werden können und trotzdem abgetrieben wurden¹¹⁶.

3.3.2 Test zu Mastdarmkrebs

Als nächstes sehen wir uns den diagnostischen Test für Mastdarmkrebs an. Dieser Test beruht auf dem Nachweis von Blut im Stuhl, welcher ein Indiz für diese Art von Krebs ist. Für diesen Test wurden folgende Genauigkeiten festgelegt: Wenn der Patient an Mastdarmkrebs leidet, so erkennt der Test den Krebs in 50% der Fälle. Leidet der Patient nicht an diesem Krebs, so ist das Ergebnis zu 97% richtig negativ. Wenn wir nun die Altersgruppe zwischen 75 und 79 Jahren betrachten, leiden 0,2% der Menschen dieser Gruppe an Mastdarmkrebs, ohne Symptome aufzuweisen. In absoluten Zahlen bedeutet dies:

Von 100.000 Untersuchten leiden 200 an Mastdarmkrebs, ohne es zu merken. Bei 50% dieser 200, also bei 100, wird der Test ein richtig positives Ergebnis liefern. Bei

¹¹⁶vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 70.

den anderen 100 ist der Test falsch negativ. In der Gruppe der 99.800 Untersuchten, welche diesen Krebs nicht haben, weist der Test in 97% ein richtig negatives Ergebnis aus, bei 3% ein falsch negatives, dies entspricht 2.994 Untersuchten. Also fällt der Test bei 3.094 Untersuchten positiv aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Untersuchter mit positivem Testergebnis tatsächlich an Mastdarmkrebs leidet, beträgt 3,2%. Betrachten wir die Altersgruppe der 30-34jährigen, so ist Mastdarmkrebs ca. 100 Mal seltener als in der Gruppe der 75-79jährigen. Von 100.000 Personen dieser Gruppe haben nur 2 diesen Krebs. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem positiven Test tatsächlich Krebs zu haben, beträgt in der jüngeren Altersgruppe nur 0,033% ¹¹⁷. Man sieht in allen diagnostischen Tests, dass es wichtig ist, die Zahl der Erkrankten zu kennen. Ist dies nicht der Fall, so ist es de facto unmöglich, die Wahrscheinlichkeit, dass jemand erkrankt ist bei positiver Testung, anzugeben.

3.3.3 Funktionaler Zusammenhang von Falsch-Positiv Fehlern in Abhängigkeit der Infektionsrate

Wir haben beispielsweise beim HIV-Test eine Infektionsrate von 0,1% aufgrund von Daten aus Österreich und Deutschland zugrunde gelegt. Doch die Daten sind teilweise recht unterschiedlich, allein, wenn man sich die globale Infektionsrate von 0,5% ansieht. In einigen Teilen Afrikas könnte diese noch höher sein, rechnet man noch die Dunkelziffer mit ein, die gerade in armen Entwicklungsländern sehr hoch sein kann. Deshalb erscheint es sinnvoll, die Größe der Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Infektionsrate x als Funktion zu untersuchen¹¹⁸.

Nehmen wir dazu wieder $P(HIV + |T+)$ her (Spezifität 99%; Sensitivität 99,8%).

$$P(HIV + |T+) = \frac{x \cdot 0,998}{x \cdot 0,998 + (1 - x) \cdot 0,01}$$

mit $x \in [0\%; 1\%]$ (dargestellt in Abbildung 1) und $x \in [0\%; 10\%]$ (dargestellt in Abbildung 2)

Als weitere Unsicherheit kann noch die Test-Spezifität ansehen werden, die bei Untersuchungen teilweise sehr unterschiedlich angegeben wird. Sei nun die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Spezifität x mit Infektionsrate 0,1% betrachtet:

$$P(HIV + |T+) = \frac{0,001 \cdot 0,998}{0,001 \cdot 0,998 + 0,999 \cdot (1 - x)}$$

¹¹⁷BORNHOLDT,DUBBEN: Der Schein der Weisen, S 154-158.

¹¹⁸im Folgenden vgl. BÖER: AIDS, S 120.

mit $x \in [99\%; 100\%]$ (dargestellt in Abbildung 3) und $x \in [99,9\%; 100\%]$ (dargestellt in Abbildung 4)

Dies sei in folgenden Abbildungen dargestellt¹¹⁹.

Abbildung 1

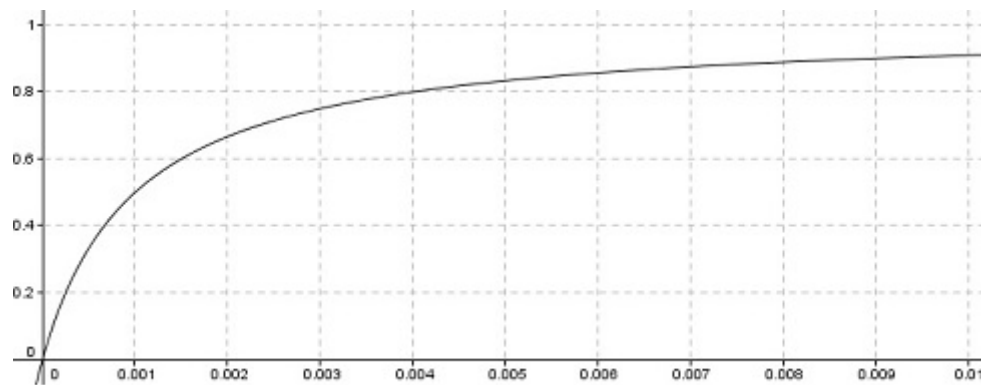
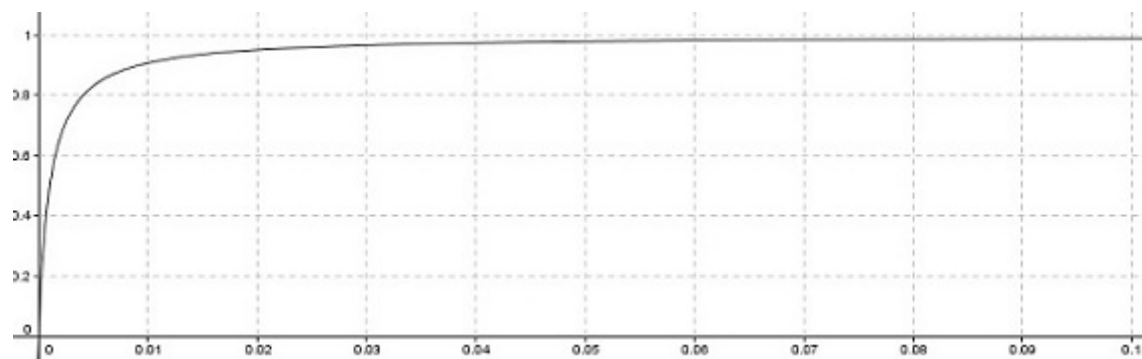


Abbildung 2



¹¹⁹Abbildungen nach: BÖER: AIDS, S 121-122.

Abbildung 3

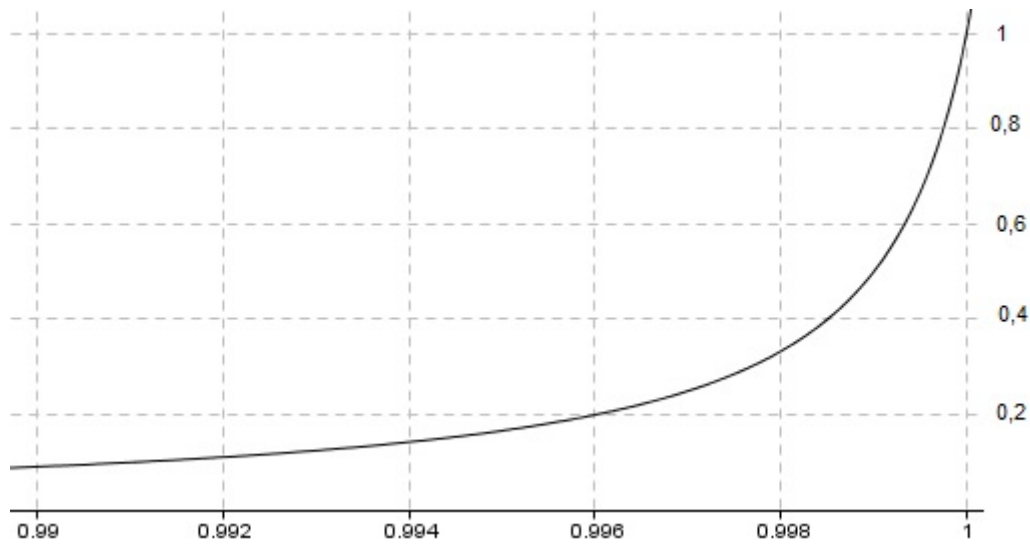
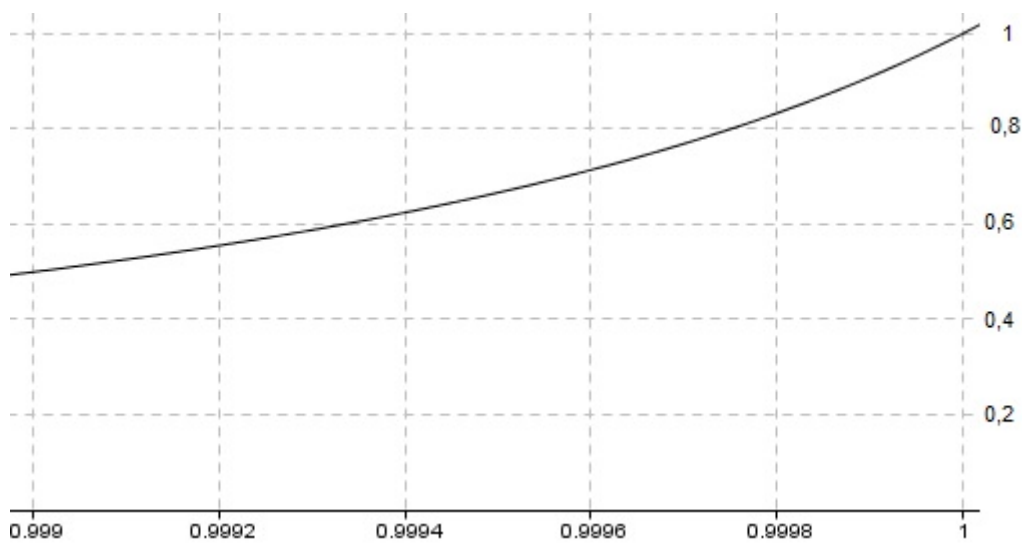


Abbildung 4



3.3.4 Hausarzt oder Spezialist

Es kann des Öfteren vorkommen, dass spezielle Erkrankungen wie Krebs durch die falsche Diagnose von Allgemeinmediziner unbehandelt bleiben, aber auch Fachärzte können Leiden übersehen, die ein Hausarzt ohne weiteres erkannt hätte, weil Fachärzte sich nur auf Untersuchungen in ihrem Spezialgebiet konzentrieren. Als Beispiel sei hier eine Blinddarmentzündung genannt. Zu welchem Arzt sollte man am besten gehen? Versuchen wir diese Frage zu lösen, indem wir uns mit der Möglich-

keit einer Krebsdiagnose beschäftigen. Bei den in dieser Betrachtung verwendeten Zahlen handelt es sich um grobe Schätzungen, was aber im Prinzip wenig Einfluss auf die endgültige Aussage hat¹²⁰.

Von 1.000 Patienten, die von einem Hausarzt untersucht werden, haben 4 Krebs. 3 der 4 Krebsfälle können vom Hausarzt richtig diagnostiziert werden. Bei 100 Patienten von 1.000 vermutet der Hausarzt fälschlicherweise Krebs. Aufgrund der Diagnose des Hausarztes werden nun 13 Patienten zu weiteren Untersuchung an einen Spezialisten überwiesen. Von den 13 haben 3 tatsächlich Krebs, also hat der Hausarzt eine Trefferquote von 23%. Wenn wir die Quote von 75% richtig positiven und 99% richtig negativen Diagnosen vom Hausarzt auch bei Spezialisten annehmen, so würde man in etwa dieselbe Trefferquote erwarten. Dass dem nicht so ist, sei im Folgenden gezeigt:

100 Hausärzte schicken nun 1.300 Patienten zu Spezialisten, von diesen haben 300 tatsächlich Krebs. Davon werden 225 korrekt positiv diagnostiziert und von den 1.000 krebsfreien Patienten werden 990 korrekt negativ diagnostiziert. Das heißt, Spezialisten habe eine Trefferquote von ca. 96%. Auf diese Trefferquote dürften sich Spezialisten eigentlich nichts einbilden, da ihnen von den Hausärzten schon eine garantiert gefährdete Gruppe geschickt wurde, während Allgemeinmediziner zuerst im großen trüben Teich fischen müssen. Meist liegt die Quote von 75% der richtig positiven Diagnosen bei Spezialisten deutlich höher, was aber meist zu Lasten der richtig negativen Erkennung geht und die Trefferquote trotzdem sinken kann. Nehmen wir an, ein Spezialist erkennt zu 99% einen Krebskranken als solchen, und in 95% der Fälle werden krebsfreie Patienten mit einem negativen Testergebnis wieder nach Hause geschickt. Trotz einer drastischen Erhöhung der Quote für richtig positive Testergebnisse und einer kleinen Änderung der Quote von richtig negativen Diagnosen, sinkt die Trefferquote trotzdem um etwa 10%. $\frac{223}{235}$ im Gegensatz zu $\frac{297}{347}$.

Trotz allem, wir sollten zuerst den Allgemeinmediziner zu Vorselektion aufsuchen, damit die Spezialisten weiterhin den größten Teil der Krebsfälle diagnostizieren und behandeln können. Sonst besteht die Gefahr, dass diese ihre richtig positive Diagnosequote aufgrund der Mehrzahl an Patienten nicht halten können, weil beispielsweise weniger Zeit für eine Untersuchung bleibt und dadurch mehr Krebserkrankungen nicht erkannt werden können.

¹²⁰vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 70.

¹²¹vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 71-73.

3.3.5 Verbesserte Diagnostik

Zum Abschluss sei nun noch eine Erwähnung der Heilungschancen bei verbesserter Tumordiagnostik betrachtet. Wurde früher nur eine grobe Einteilung in kleine und große Tumore getroffen, so können heute Einteilungen viel feiner in kleine, mittlere, große und sehr große Tumore getroffen werden. Paradoxerweise kann die kleinere Grenzbestimmung von Tumoren zu rechnerisch verbesserten Heilungschancen führen als wenn Tumore nur grob in Gruppen eingeteilt werden. Dabei sei vorausgesetzt, dass mit beiden Methoden dieselben Tumore betrachtet und behandelt werden können. Denn gehörte ein Tumor früher zu der größeren kleinen Gruppe mit schlechten Prognosen, gehört er jetzt zur Gruppe der kleineren mittleren Tumore. Damit verliert die KLEIN Gruppe einen Tumor mit schlechten Prognosen und die MITTEL Gruppe bekommt einen Tumor mit guten Prognosen dazu¹²².

¹²²vgl. BOSBACH, Lügen mit Zahlen, S 150.

4 Paradoxa der Physik

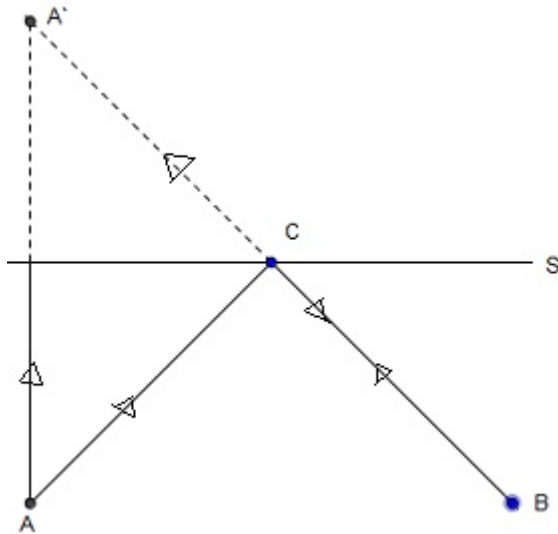
Im nun folgenden Abschnitt will ich Paradoxa betrachten, wie sie in unserer physikalischen Welt vorkommen und die Hintergründe mit Hilfe der Mathematik beleuchten.

4.1 Das Spiegelparadoxon

Die Grundfrage hierbei lautet: Wieso vertauscht der Spiegel links und rechts, aber nicht oben und unten? Etwas naturwissenschaftlicher ausgedrückt handelt es sich um das Problem der Vertauschung der Bilder entlang der vertikalen Achse, wobei die Bilder entlang der horizontalen Achse nicht vertauscht werden. Dabei wäre ein Lösungsansatz, dass man erkennt, dass der Spiegel sich nicht um irgendwelche Reflexionsachsen kümmert, sondern nur das auf ihn treffende Licht reflektiert. Weiters wird man sich bei genauerer Betrachtung im Klaren sein, dass ein Spiegel nicht links und rechts, sondern vorne und hinten vertauscht. Dazu zuerst eine etwas saloppe Erklärung. Man stellt sich vor einen Spiegel so, dass die Nasenspitze das Glas berührt. Dann denke man sich von hinten so platt gedrückt, dass man von einer dreidimensionalen zu einer zweidimensionalen Erscheinung wird. Wenn man weiter durch die zweidimensionale Spiegelebene gedrückt wird und dann wieder dreidimensional wird, eben mit der Nase auf der Spiegelebene auf der anderen Seite des Spiegels, wurde also nur hinten und vorne vertauscht. Mathematisch gesprochen handelt es sich um eine Invertierung und nicht um eine Drehung¹²³.

¹²³vgl. FREISTETTER: Wissenschaftliche Paradoxien, S 18-19.

Wenn man jemand anderen im Spiegel beobachtet und nicht sich selbst, kann man den Lösungsansatz ganz leicht verstehen¹²⁴.



Ein grundlegendes physikalisches Gesetz lautet, dass der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist. Wenn man einen Lichtstrahl zurückverfolgt und hinter dem Spiegel geradlinig fortsetzt, gelangt man zum virtuellen Bild A' . Die Lage von A' ist bei einem ebenen Spiegel unabhängig von der Lage des Beobachters. Für die Personen A und B ist die Lage des Spiegelbildes an derselben Stelle. Wir legen nun auf die Spiegelskizze in der Draufsicht ein Koordinatensystem, wobei die x-Achse in der Spiegelebene verläuft. A hat dabei die Koordinaten $(1|-2)$ und A' daraus folgend die Koordinaten $(1|2)$. Volkstümlich ausgedrückt dreht also der Spiegel (als x-Achse) das Vorzeichen der y-Koordinate um. Dies kann man mathematisch durch eine Matrix ausdrücken¹²⁵:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A$$

In uns selbst ersetzen wir die Spiegelung des Spiegels durch eine unbewusste Drehung und eine andere Spiegelung, wie wenn eine andere Person vor uns stehen würde.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung y = Spiegelung x und Drehung um 180 Grad¹²⁶.

Wie schon gesagt, liegt die Ansicht des Tausches von links und rechts in uns selbst und nicht in der Asymmetrie des Spiegels.

¹²⁴Abbildung nach: steyrerbrains.at/spiegel/spiegel_2a, 6.12.2018

¹²⁵vgl. steyrerbrains.at/spiegel/spiegel_2a, 6.12.2018

¹²⁶vgl. steyrerbrains.at/spiegel/spiegel_3, 6.12.2018

4.2 Das Band Paradoxon I

Hierbei betrachten wir zwei kugelförmige Gebilde, einen Fußball und die Erde¹²⁷. Legen wir nun ein Band um den Fußball und um den Äquator der Erde (wie wir alle wissen, ist die Erde keine perfekte Kugel, daher die nähere Festlegung der Lage des Bandes). Der Umfang der Erde am Äquator beträgt, wie wir aus vielen Mathematiklehrbüchern wissen, ca. 40.005 km. Der Umfang eines Fußballs der Größe 5 beträgt laut eigener Messung ca. 70 cm. Verlängern wir beide Bänder um 1 Meter, so ergibt sich ein Abstand des Bandes von der Oberfläche des Fußballs sowie von der Erdoberfläche von 16 cm, wenn man das verlängerte Band kreisförmig um den jeweiligen Körper legt. Was uns anfangs wie ein Paradoxon vorkommt, lässt sich mathematisch ganz leicht erklären (erwarten würden wir uns ja bei einem kugelförmigen Körper der Größe unserer Erde weit mehr Abstand).

Wie allgemein bekannt ist, gilt bei Kreisen (ein Band um eine Kugel gelegt ist nichts anderes als ein Kreis): $U = 2\pi r$. Der Unterschied der Radien ist der gesuchte Abstand zwischen Oberfläche der Kugel und dem kreisförmig um 1 m verlängerten Bandes, welches um die jeweilige Kugel gelegt wird.

R_1 sei der Radius des an der Oberfläche gelegten Bandes

R_2 sei der Radius des 1 m verlängerten Bandes, um die Kugel gelegt

U_1 und U_2 die jeweiligen Längen des Bandes

Daraus folgt nun folgendes:

$$R_2 - R_1 = \frac{U_2}{2\pi} - \frac{U_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot (U_2 - U_1) = \frac{1}{2\pi} \cdot 1 \approx 16\text{cm}$$

Die Größe der umspannten Kugel spielt also für den Abstand keine Rolle.

¹²⁷im Folgenden vgl. VOLLMER: Paradoxien, S 63.

4.3 Hydrostatisches Paradoxon

Das Paradoxon besagt, dass der Bodendruck in einer Flüssigkeitssäule nur von der Höhe und nicht von der Flüssigkeitsmenge abhängt. Anschaulich formuliert heißt das, dass der Druck am Boden eines vollen Fasses derselbe ist wie der Druck am Boden eines gleich hohen zylindrischen Gefäßes mit 1 cm Durchmesser¹²⁸.

Physikalisch ausgedrückt:

Der hydrostatische Schweredruck hängt bei konstanter Schwerkraft g nur von der Dichte ρ und von der Höhe h des Flüssigkeitsspiegels ab. Die Form des Gefäßes ist dabei unerheblich. Dabei sind folgende Zusammenhänge wichtig:

Kraft: $F = m \cdot a$ (Masse mal Beschleunigung)

Gewichtskraft: $F_G = m \cdot g$ (Masse mal Fallbeschleunigung)

Druck: Kraft pro Fläche

Dichte: Masse pro Volumen

Volumen = Grundfläche mal Höhe

Daraus folgt:

$$p = \frac{F}{A} \Leftrightarrow p = \frac{m \cdot g}{A} \Leftrightarrow p = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} \Leftrightarrow p = \frac{\rho \cdot g \cdot A \cdot h}{A} \Leftrightarrow p = \rho \cdot g \cdot h$$

D. h. der hydrostatische Druck hängt nur von der Dichte und Höhe der Flüssigkeit, nicht aber von der Menge ab¹²⁹.

Dieses Paradoxon machte man sich bei der Wasserversorgung zunutze, indem man Wassertürme höher platzierte als alle Wasserverbraucher und so den Wasserdruck aufrechterhielt¹³⁰.

¹²⁸vgl. VOLLMER: Paradoxien, S 63.

¹²⁹vgl. uni-miskolc.hu/ dephyma/physik/fleiss/norbi/phys9L40.doc, 11.12.2018

¹³⁰vgl. de.wikipedia.org/wiki/Hydrostatisches_Paradoxon, 11.12.2018

4.4 Das Boot Paradoxon

Wenn man eine Euromünze von einem Boot in den Teich, auf dem man fährt, wirft, dann sinkt der Wasserspiegel. Warum?

Im Boot verdrängt die Münze die Menge Wasser, welche ihrer Masse entspricht. Wenn man die Münze ins Wasser wirft, verdrängt die Münze nur Wasser gemäß ihres Volumens. In Zahlen ausgedrückt¹³¹: Eine Euromünze hat eine Masse von 7,8 g und ein Volumen von 1,1 cm³. Durch 1 kg Masse zusammen im Boot werden 1 l Wasser zusätzlich verdrängt. Also werden durch die Zusatzmasse der Münze 0,0078 l Wasser verdrängt. Wenn die Münze ins Wasser geworfen wird, verdrängt sie nur mehr 0,0011 l Wasser. Da die Münze im Wasser weniger Wasser verdrängt als im Boot, muss der Wasserspiegel des Sees zwangsläufig sinken¹³².

¹³¹Münzgrößen nach: de.wikipedia.org/wiki/euromünzen, 19.12.2018

¹³²vgl. VOLLMER: Paradoxien, S 63-64.

5 Simpson Paradoxon und Will Rogers Phänomen

5.1 Das Simpson Paradoxon

Das Simpson Paradoxon kann man folgendermaßen erklären:

*"Die Paradoxie besteht in einer Möglichkeit, dass bei einer Zusammenfassung von Daten aus verschiedenen Gruppen zu einer einzigen Gruppe sich die Richtung einer Beziehung umkehrt."*¹³³

Oder salopp ausgedrückt:

*„Zweimal verloren und doch gewonnen.“*¹³⁴

Das Simpson Paradoxon wurde bekannt durch einen Fall, der sich 1973 an der University of California in Berkeley ereignete. Die Universität wurde verklagt, da Frauen weniger Chancen auf einen Studienplatz hatten als Männer und man dadurch dem Vorwurf der Diskriminierung ausgesetzt war. Grundlage für deren Vorwurf waren die Zulassungszahlen, die belegten, dass 44% der männlichen Bewerber, aber nur 35% der weiblichen Bewerber zugelassen werden¹³⁵.

Die Zahlen im Detail¹³⁶:

Bewerber männlich	zugelassen männlich	Bewerber weiblich	zugelassen weiblich
2691	1198	1835	628

Um neben der Universität auch noch die Leiter der jeweiligen Fachbereiche als Frauendiskriminierer brandmarken zu können, sah man sich auch noch die Zulassungs-

¹³³HESSE: Achtung Denkfalle, S 26.

¹³⁴BORNHOLDT,DUBBEN: Wahrscheinlichkeit, S 142.

¹³⁵vgl. BOSBACH, Lügen mit Zahlen, S 154.

¹³⁶vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Wahrscheinlichkeit, S 141.

quoten in den einzelnen Fachbereichen genauer an¹³⁷.

(Spalten unterteilt in: Fachbereich, männliche Bewerber, zugelassen männlich, zugelassen männl in %, weibliche Bewerber, zugelassen weiblich, zugelassen weiblich in %)

FB	männl. Bew.	zug. m.	zug. m. in %	weibl. Bew.	zug. w.	zug. w. in %
A	825	512	62%	108	89	82%
B	560	353	63%	25	17	68%
C	325	120	37%	593	202	34%
D	417	138	33%	375	202	54%
E	191	53	28%	393	94	24%
F	373	22	6%	341	24	7%

Dabei wurde festgestellt, dass in vier von sechs Fachbereichen Frauen höhere Zulassungsquoten hatten als Männer und in den beiden anderen Fachbereichen lag der Quotenunterschied bei nur 4%. Wie konnte dann ein Plus von 11% höherer Zulassungsquote für Männer auf gesamt universitärer Ebene herauskommen? Die Lösung liegt darin, dass sich 51% der Männer, aber nur 7% der Frauen an den Fachbereichen A und B angemeldet haben, die wohl aufgrund der Zulassungsquoten leichtere Aufnahmetests hatten oder die Latte der Aufnahmekriterien niedriger angelegt wurde. An die Fachbereiche E und F wagten sich 40% der Frauen, aber nur 21% der Männer heran. Da sich Frauen zu einem großen Teil an Fachbereichen mit niedriger Zulassungsquote angemeldet hatten, der Großteil der Männer an Fachbereichen mit hoher Zulassungsquote beworben hatte, kam dieses Paradoxon zustande. Im Endeffekt kann man wohl sagen, dass weibliche Bewerber keineswegs benachteiligt wurden, männliche Bewerber haben es sich nur einfacher gemacht.

Im Folgenden sei noch ein vereinfachtes fiktives Beispiel dargestellt, welches einen noch drastischeren Fall beleuchten soll als die Situation von Berkely¹³⁸.

FB	männl. Bew.	zug. m.	zug. m. in %	weibl. Bew.	zug. w.	zug. w. in %
A	80	50	63%	10	8	80%
B	60	40	67%	5	4	80%
C	40	10	25%	80	20	25%
D	40	10	25%	30	15	50%
	220	110	50%	125	47	37,6 %

¹³⁷im Folgenden vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 151.

¹³⁸im Folgenden vgl. BOSBACH, Lügen mit Zahlen, S 155.

Die Zulassungsquoten an dieser fiktiven Hochschule scheinen eindeutig zu belegen, dass Frauen diskriminiert werden (50% der männlichen, aber nur 37,6% der weiblichen Bewerber wurden an der Hochschule zugelassen). Wenn man sich aber die einzelnen Fachbereiche ansieht, zeigt sich ein anderes Bild. In keinem der 4 Fachbereiche haben weibliche Bewerber eine niedrigere Zulassungsquote als männliche Bewerber. In 3 Fachbereichen sind die Unterschiede in den Zulassungsquoten sogar recht deutlich. Hier könnte man schon eher von Diskriminierung der Männer sprechen. Um eine Erklärung zu erhalten, müssen wir die Zahlen genauer unter die Lupe nehmen. 80 von 125 Frauen haben sich bei Fachbereich 3 beworben, an dem sowohl $\frac{3}{4}$ der Männer als auch $\frac{3}{4}$ der Frauen nicht zugelassen wurden. Diese Tatsache hat die Zulassungsquote aus der Gruppe der Frauen stark gedrückt. Bei den Männern bewarben sich die meisten an Fachbereich 1 und 2, an welchen die Mehrheit der Bewerber, egal, ob männlich oder weiblich, angenommen wurde. Da sich 140 von 220 Männern an Fachbereich 1 und 2 beworben hatten, bringt dies eine starke Erhöhung der Gesamtzulassungsquote in der Gruppe der Männer mit sich.

Man kann also sagen, dass die Auswahl der Fachbereiche und der Zulassungsquoten der Fachbereiche entscheidend war, aber nicht das Geschlecht der Bewerber.

Aufgrund von detaillierten Betrachtungen wurde die Universität in Berkeley auch nicht wegen Diskriminierung von Frauen verurteilt.

5.2 Beispiele zum Simpson Paradoxon

Wie sehr mit Daten die Allgemeinheit in die Irre geführt werden kann, wenn man das Simpson Paradoxon nur geschickt für sich nutzen kann, soll nun in einzelnen Beispielen angeführt werden.

5.2.1 Raucherinnen leben länger

Im Jahr 1972 wurde im Distrikt Wickham (Großbritannien) eine große Studie in Auftrag gegeben. Unter anderem sollte die Lebenserwartung der Bevölkerung untersucht werden. Dabei wurden 1814 Frauen in eine Gruppe von 582 Raucherinnen und in eine Gruppe von 732 Nichtraucherinnen eingeteilt. Nach 10 Jahren wurde eine Kontrolle dieser beiden Gruppen durchgeführt. 139 von 582 Raucherinnen waren inzwischen verstorben, 230 von 732 Nichtraucherinnen waren gestorben. Dies bedeutet auch, dass 76% der Raucherinnen noch lebten, aber nur noch 68% der Nichtraucherinnen. Dies könnte den Schluss zulassen, dass Rauchen das Leben verlängert¹³⁹.

¹³⁹vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Wahrscheinlichkeit, S 137-138.

Doch bevor man in Erwartung eines längeren Lebens vorschnell zur Zigarette greift, sollte man sich die Zahlen in den einzelnen Altersgruppen ansehen¹⁴⁰.

Altersgruppe 18-44	
269 von 288 Raucherinnen leben(93%)	
327 von 340 Nichtraucherinnen leben(96%)	
Altersgruppe 45-64	
167 von 245 Raucherinnen leben(68%)	
147 von 199 Nichtraucherinnen leben(74%)	
Altersgruppe über 64	
7 von 49 Raucherinnen leben(14,3%)	
28 von 193 Nichtraucherinnen leben(14,3%)	

Jetzt kann man sehen, dass das Ergebnis für alle Altersgruppen ins Gegenteil umgekehrt wird, wenn man das Alter der Frauen berücksichtigt.

5.2.2 Die Ausgrenzung ethnischer Minderheiten in Neuseeland

Im Jahr 1993 wurde vom neuseeländischen Justizministerium eine Untersuchung der Zusammensetzung von Geschworenen-Jurys in Auftrag gegeben. Dabei sollte herausgefunden werden, ob der Anteil der Maori an der Gesamtbevölkerung in den einzelnen Distrikten ungefähr dem Anteil der Maori an Geschworenen-Jurys in den einzelnen Distrikten entspricht. Diese Untersuchung ergab, dass die Maori in allen 13 Distrikten unterrepräsentiert waren¹⁴¹.

	Anteil an Bevölkerung (Alter 20-64)	Anteil an Jury		Anteil an Bevölkerung (Alter 20-64)	Anteil an Jury
Whangarei	17,0	16,8	Palmerston North	8,9	4,3
Auckland	9,2	9,0	Wellington	8,7	7,5
Hamilton	13,5	11,5	Nelson	3,9	1,7
Rotorua	27,0	23,4	Christchurch	4,5	3,3
Gisborne	32,2	29,5	Dunedin	3,3	2,4
Napier	15,5	12,4	Invercargill	8,4	4,8
New Plymouth	4,1	16,8			

¹⁴⁰vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 146.

¹⁴¹vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 139-140.

Um den Vorwurf der verfehlten Minderheiten den Wind aus den Segeln zu nehmen, wurde das Ergebnis nicht mehr nach Distrikten unterteilt, sondern lediglich das landesweite Ergebnis betrachtet. Demnach betrug der Anteil der Maori an der Gesamtbevölkerung 9,5% und der Anteil der Geschworenen-Jurys 10,1%. Die Maori waren also in den Geschworenen-Jurys überproportional vertreten¹⁴².

Was aber nicht beachtet wurde ist, dass die Justiz in den einzelnen Distrikten unterschiedlich viel zu tun hat und auch die Einwohnerzahlen recht unterschiedlich sind. Anteile sagen hier nur wenig aus und darum sehen wir uns die absoluten Zahlen der Geschworenen und die erwartete Anzahl der Maori in den Geschworenen-Jurys an. Dabei sieht man, dass in den einzelnen Distrikten bis zu 12 Geschworenenplätze zu wenig an Maori vergeben wurden. Landesweit hätten 350 Geschworenenplätze an die Maori gehen müssen, tatsächlich waren es aber nur 300.¹⁴³

5.2.3 Kriminalitätsstatistiken

Ausländer sind kriminell

Im Folgenden nehmen wir an, dass in einer fiktiven Stadt 120.000 Einwohner leben, die grob in die Gruppe der Inländer mit der Größe von 100.000 Einwohnern und in die Gruppe der Ausländer mit 20.000 Einwohnern eingeteilt werden können. Nach Durchsicht der 1. Kriminalitätsstatistik stellt man fest, dass im vorigen Jahr 280 Straftaten verübt worden sind, wovon 180 auf das Konto von Inländern und 100 auf das Konto von Ausländern gehen. Anders gesagt werden pro 1.000 ausländischen Einwohnern 5 Straftaten im Jahr verübt, während pro 1.000 Inländern nur 1,8 Straftaten registriert wurden. Als bald könnte man also die Schlagzeile „Ausländer erhöhen Kriminalitätsrate unsere Stadt“ lesen. Doch dieser allzu kurzsichtigen Schlussfolgerung kann schnell das Handwerk gelegt werden, wenn wir unser Datenmaterial genauer durchleuchten¹⁴⁴.

Im Folgenden seien die Zahlen getrennt nach Bezirken aufgeführt¹⁴⁵:

1.Bezirk			
	Einwohner	Straftaten pro Jahr	Straftaten pro 1000 Einwohner
Ausländer	10000	10	1
Inländer	90000	90	1

¹⁴²vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 140-141.

¹⁴³vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 150.

¹⁴⁴vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 150.

¹⁴⁵vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Warscheinlichkeit, S 148.

2.Bezirk	Einwohner	Straftaten pro Jahr	Straftaten pro 1000 Einwohner
Ausländer	10000	90	9
Inländer	10000	90	9

Die beiden Bezirke unterscheiden sich von der wirtschaftlichen Seite her gesehen sehr stark. Im 2. Bezirk leben aufgrund der günstigen Wohnungen in den Betonbauten eher einkommensschwache Familien. Hier leben 20.000 Einwohner, die jeweils zur Hälfte Inländer oder Ausländer sind. Im gehobenen und teuersten 1. Bezirk leben 9 Mal so viele Inländer als Ausländer. Doch wenn wir uns die Kriminalitätsrate ansehen, ist diese bei Inländern gleich hoch wie bei Ausländern. Also könnte man sagen, die Schlagzeile entbehrt jeder Grundlage.

Rassenspezifikum der Todesstrafe in Florida

Hierbei handelt es sich um ein Beispiel mit realen Daten zur Verlängerung der Todesstrafe in Florida zwischen 1976 und 1987. Die Daten seien in folgender Tabelle veranschaulicht¹⁴⁶:

Hautfarbe Opfer	Hautfarbe Täter	Todesurteil Ja	Todesurteil Nein	Anteil Ja
Weiß	Weiß	53	414	11,3%
	Schwarz	11	37	22,9%
Schwarz	Weiß	0	16	0,0%
	Schwarz	4	139	2,8%
	Weiß	53	430	11,0%
	Schwarz	15	176	7,9%
Weiß		64	451	12,4%
Schwarz		4	155	2,5%

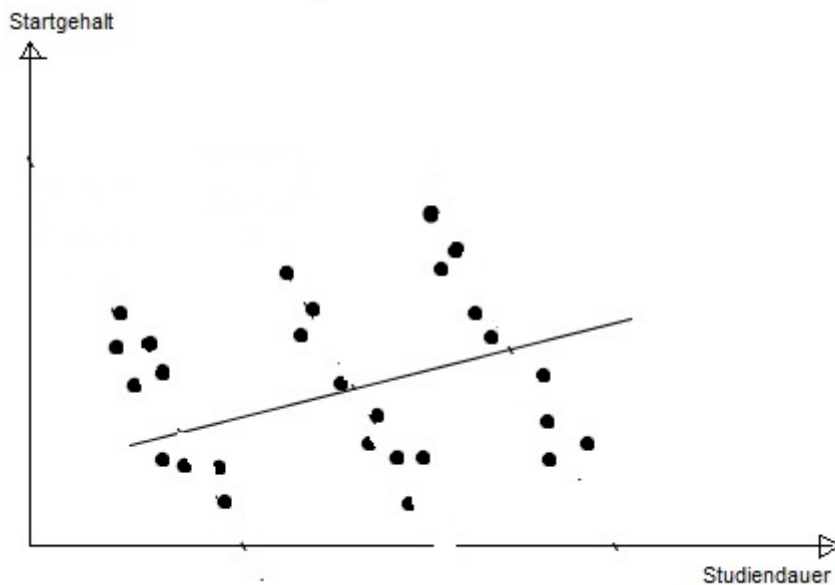
Nun wollen wir darstellen, in welche Richtung uns diese Zahlen führen können. Wenn man die Hautfarbe der Opfer außen vor lässt, dann werden mehr Täter mit weißer Hautfarbe zum Tode verurteilt als jene mit schwarzer Hautfarbe (gemessen in Prozentanteilen an der Anzahl der Mordprozesse). Weiße Täter werden häufiger zum Tode verurteilt als schwarze Täter. Berücksichtigt man die Hautfarbe der Opfer, dann ist in beiden Opfergruppen der Anteil verhängter Todesurteile bei schwarzen Angeklagten größer. Wird die Hautfarbe des Täters vernachlässigt und liegt der Fokus auf der Hautfarbe der Opfer, so wird bei mehr weißen als schwarzen Tä-

¹⁴⁶vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 34.

tern die Todesstrafe verhängt. Wieder erhalten wir einen Widerspruch der beiden Schlussfolgerungen. Diesem Widerspruch liegt zugrunde, dass ein Todesurteil häufiger ausgesprochen wurde, wenn das Opfer weiß war und dass Weiße weitaus häufiger Weiße umbringen als sie Schwarze umbringen¹⁴⁷.

5.2.4 Wenn man länger studiert, verdient man besser

Nach einer Recherche des Handelsblattes scheinen doch Akademiker, die länger studieren, ein höheres Einstiegsgehalt zu beziehen. Dies wurde auch noch graphisch untermauert¹⁴⁸.



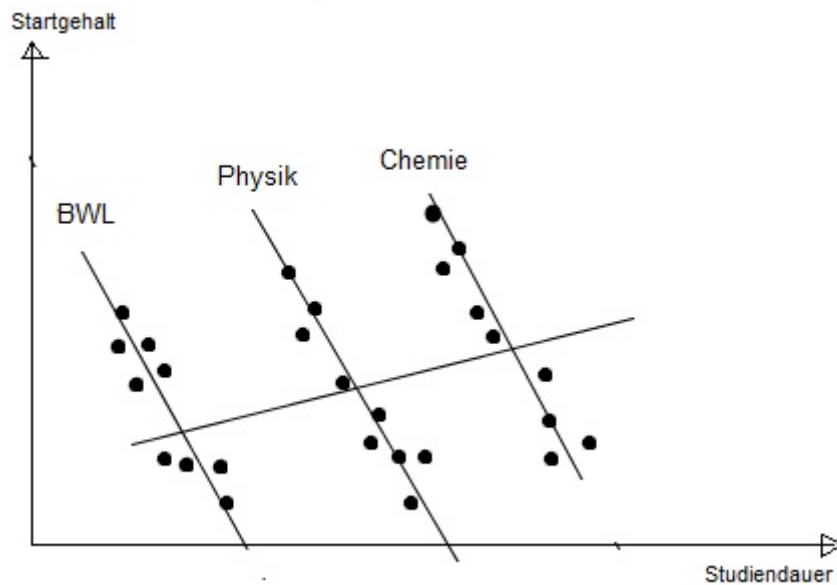
Dabei wurden Studiendauer und das zugehörige Einstiegsgehalt in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Dies waren nachweisbare Fakten und auf den ersten Blick schon ein wenig überraschend. Die Korrelationsgerade hatte eine positive Steigung und somit wurde diese Behauptung auch mathematisch untermauert. Dass hierbei 3 Studienfächer in einen Topf geworfen wurden, wurde nicht erwähnt. Denn wenn die Fächer getrennt betrachtet werden, ergibt sich ein ganz anderes Bild, nämlich, dass eine längere Studiendauer das Einstiegsgehalt reduziert. Dem Faktum, dass schwere Studien längere Studienzeiten nach sich ziehen, aber auch höhere Gehälter, da sich viele aufgrund der Komplexität eines Studiums dieses nicht antun, wird hier genüge getan. Das Einstiegsgehalt hängt vom Studienfach und von der Studiendauer ab¹⁴⁹.

¹⁴⁷vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 35.

¹⁴⁸Abbildung nach: KRÄMER: Denkste, S 151.

¹⁴⁹vgl. KRÄMER: Denkste, S 151-152.

Die folgende Abbildung enthält diesselben Punkte, aber mehr Zusatzinformationen¹⁵⁰.



Man sieht: 3 Korrelationsgeraden mit negativer Steigung können trotz allem eine Korrelationsgerade mit positiver Steigung ergeben, wenn man die Gruppierung der Studienfächer weglässt.

5.2.5 Punkteanteil erhöht und trotzdem durchgefallen

Hier sei ein Szenario betrachtet, wie es im Schulalltag jederzeit vorkommen könnte¹⁵¹:

Eine schriftliche Mathematik-Prüfung mit 2 Aufgaben, bei der es für einen Schüler um die Zulassung zur Matura geht. Um die Fairness zu wahren, wird vom Klassenlehrer ein unabhängiger Zweitkorrektor hinzugezogen. Die Prüfung wird vom Klassenlehrer folgendermaßen bewertet:

	1.Aufgabe	2. Aufgabe	Gesamt
Erreichbare Punkte	30	60	90
Erreichte Punkte	11	35	46
Anteil	36,7%	58,3%	51,1%

Sei nun angenommen, dass mit einer Quote von 50% die Zulassung zur Matura gesichert wäre. Nach der Erstkorrektur ist also die Prüfung knapp positiv. Dem

¹⁵⁰Abbildung nach: KRÄMER: Denkste, S 151.

¹⁵¹im Folgenden vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 27-29.

Zweitkorrektor ist die Ungleichgewichtung der Aufgaben ein Dorn im Auge und setzt beide Aufgaben mit 60 zu erreichenden Punkten an. Beide Aufgaben werden vom Zweitkorrektor um einen Punkt besser bewertet (zur doppelten Punktzahl der 1. Aufgabe wird noch ein Punkt hinzugefügt).

	1.Aufgabe	2. Aufgabe	Gesamt
Erreichbare Punkte	60	60	120
Erreichte Punkte	23	36	59
Anteil	38,3%	60,0%	49,2%

Bei beiden Aufgaben bewertet der Zweitkorrektor den Schüler besser, doch überraschenderweise erreicht der Schüler jetzt nicht mehr 50% der Gesamtpunkte und wäre damit durchgefallen, und das trotz quotenmäßig höherer Bewertung beider Einzelaufgaben.

5.2.6 Resümee

Das Simpson-Paradoxon tritt immer dann auf, wenn Daten von Gruppen vergleichbarer Größe vereinigt werden. Dadurch können Tatsachen mit ganz einfachen Tricks verfälscht werden, wie wir in den genannten Beispielen gesehen haben¹⁵².

¹⁵²vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 36.

5.3 Eine geometrische Interpretation des Simpson Paradoxons

1. Beispiel: Baseball

Als Grundlage für die geometrische Interpretation verwenden wir den Vergleich von Trefferstatistiken zweier fiktiver Baseballspieler¹⁵³.

Spieler A		Versuche	Treffer	Durchschnitt
	gegen Rechtshänder	202	45	$0,223 = A_r$
	gegen Linkshänder	250	71	$0,284 = A_l$
	Gesamt	452	116	$0,257 = A$
Spieler B		Versuche	Treffer	Durchschnitt
	gegen Rechtshänder	250	58	$0,232 = B_r$
	gegen Linkshänder	108	32	$0,296 = B_l$
	Gesamt	358	90	$0,251 = B$

Wie man sieht, ist die Trefferquote von Spieler A höher als die Trefferquote von Spieler B, obwohl Spieler A sowohl gegen Rechtshänder, als auch gegen Linkshänder eine niedrigere Trefferquote als Spieler B aufweist. Der Schlüssel zum Verständnis dieses Paradoxons liegt in den unterschiedlichen Gewichtungen der Durchschnittswerte gegen Rechts- bzw. Linkshänder.

$$a_r = \frac{202}{452} = 0,447 \quad a_l = \frac{250}{452} = 0,553$$

$$b_r = \frac{250}{358} = 0,698 \quad b_l = \frac{108}{358} = 0,302$$

Die um 0,25 höhere Gewichtung der für beide höheren Trefferquote reichte aus, um aus zwei schlechteren Trefferquoten doch noch eine bessere Gesamttrefferquote zu machen.

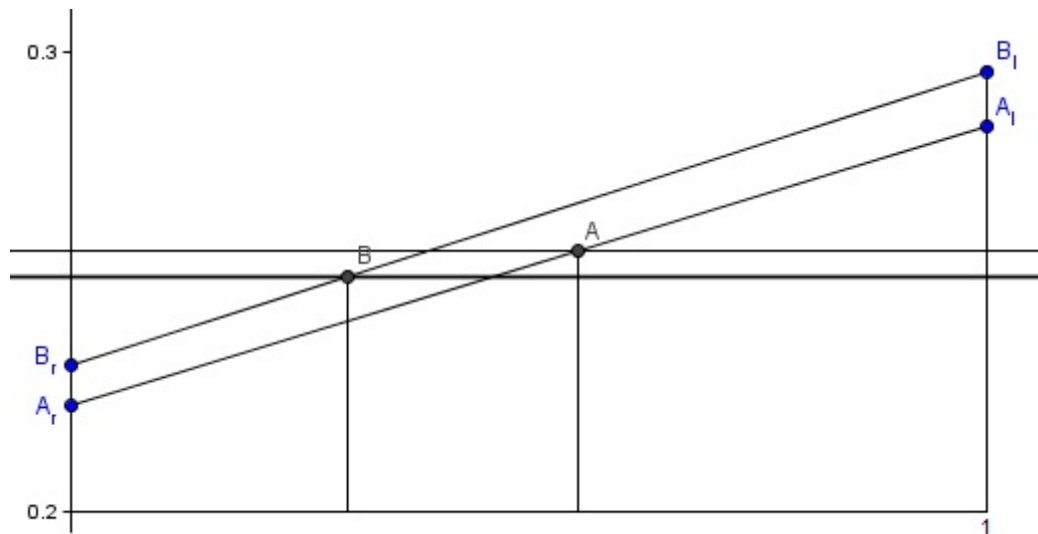
$$A = a_r \cdot A_r + a_l \cdot A_l$$

$$B = b_r \cdot B_r + b_l \cdot B_l$$

Wenn man horizontale Linien durch A und B zieht, sieht man, dass trotz $A_r < B_r$ und $A_l < B_l$, $A > B$ ist. Die geometrische Abbildung dazu sieht folgendermaßen aus¹⁵⁴:

¹⁵³im Folgenden vgl. TAN: A geometrical interpretation, S 340.

¹⁵⁴Abbildung nach TAN: A geometrical interpretation, S 340.



2.Beispiel: Fußball

Als Ergänzung sei hier noch ein fiktives Beispiel aus dem Fußball genannt¹⁵⁵.

Spieler 1 trifft zu Hause 60% und auswärts 80% der Elfmeter.

Spieler 2 trifft zu Hause 50% und auswärts 70% der Elfmeter.

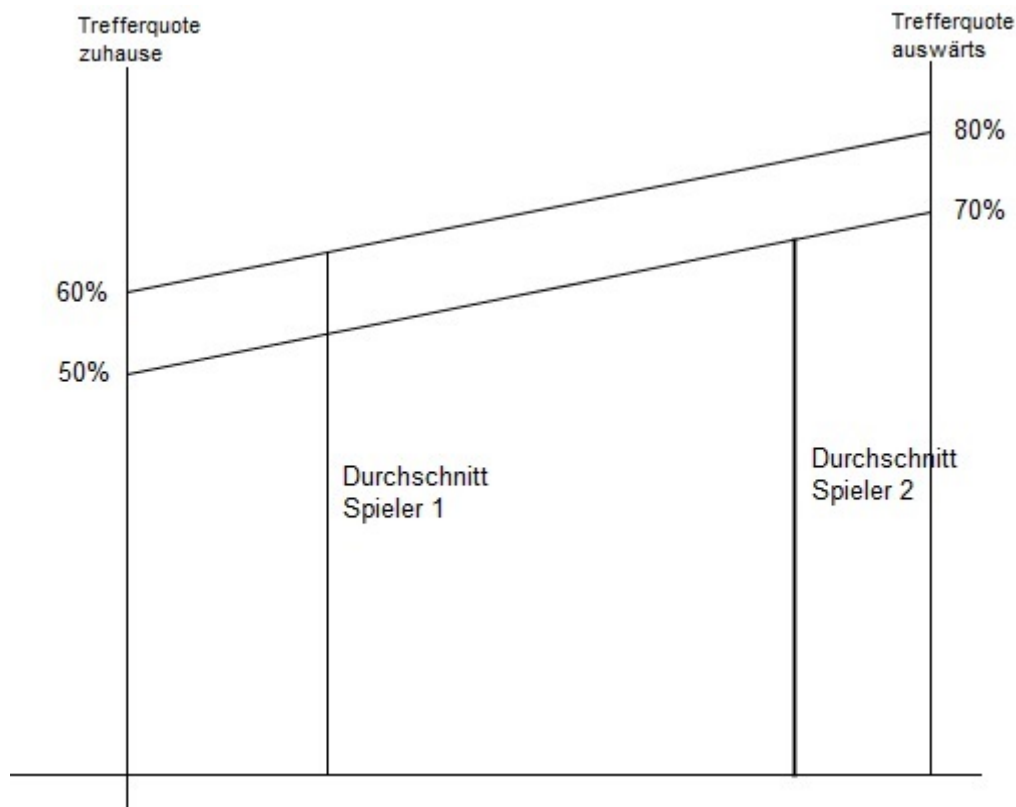
Spieler 1	Versuche	Tore	Quote
Heim	15	9	0,50
Auswärts	5	4	0,80
Spieler 2	Versuche	Tore	Quote
Heim	2	1	0,50
Auswärts	10	7	0,70

Insgesamt beträgt die Trefferquote von Spieler 1 65% und von Spieler 2 66,6%.

Trotz dass Spieler 2 zu Hause als auch auswärts seltener einen Elfmeter verwandelt, liegt die Gesamtquote der verwandelten Elfmeter trotzdem über der Quote von Spieler 1. Wie schon vorhin gesagt, ist die gesamte Trefferquote nichts anderes als das gewichtete arithmetische Mittel der Trefferquoten aus Heim- bzw. Auswärtsspielen. Alle diese Gewichte bewirken, dass Spieler 2 trotz 2 schlechterer Teilquoten eine bessere Gesamtquote besitzt, bei Spieler 2 liegt eine höhere Gewichtung von 0,833 auf der besseren Teilquote, während bei Spieler 1 die höhere Gewichtung von 0,75 auf der schlechteren Teilquote liegt.

¹⁵⁵im Folgenden vgl. KRÄMER: Denkste, S 152-154.

Hier noch die geometrische Veranschaulichung dazu¹⁵⁶.



Die Punkte auf der linken senkrechten Achse zeigen die Trefferquoten beider Spieler zu Hause, diejenigen auf der rechten Achse die Trefferquoten beider Spieler auswärts. Die Gesamttrefferquote liegt dann auf einer Geraden, die Heim- und Auswärtsquotenpunkte verbindet. Schießt ein Spieler mehr Elfmeter zu Hause, so liegt die Gesamttrefferquote näher bei der linken Achse, schießt er mehr Elfmeter auswärts, liegt die Gesamttrefferquote näher bei der rechten Achse. Das Verhältnis der Entfernungen der Gesamttrefferquote von der linken bzw. rechten Achse entspricht dem Verhältnis der auswärts bzw. zu Hause verwandelten Elfmeter. Wenn die größere der beiden geringeren Trefferquoten kleiner ist als die kleinere der beiden größeren Torquoten und dann auch die Gewichte passen, kommt ein paradoxes Ergebnis zustande.

¹⁵⁶ Abbildung nach KRÄMER: Denkste, S 154.

3.Beispiel: Rauchen

	Alter zu Studienbeginn		Alter zu Studienbeginn	
	55-64		65-74	
	Überlebende	Teilnehmer (20 Jahre)	Überlebende	Teilnehmer (20 Jahre)
Raucher	64	115	7	36
Nichtraucher	81	121	28	129
Summe	145	236	35	165

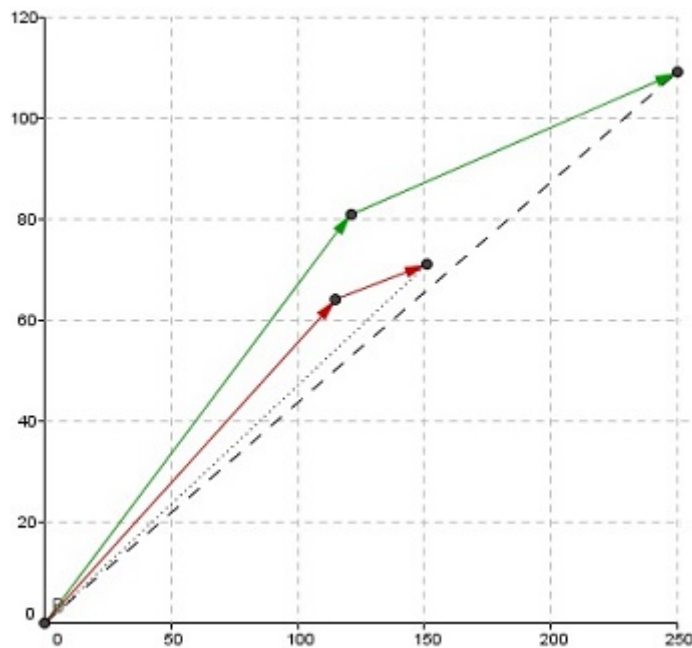
47% der Raucher waren nach 20 Jahren noch am Leben, aber nur 44% der Nicht-raucher. Die Interpretation der Studie, dass Raucher länger leben, ergibt sich nur, wenn man das Alter der Studienteilnehmer außer Acht lässt. In den untersuchten Altersgruppen ist es nämlich umgekehrt (67% Nichtraucher – 56% Raucher in der Gruppe 55-64; 22%-19% in der Gruppe 65+).

Zur Veranschaulichung verwenden wir hier die Vektordarstellung.

Auf der 1. Achse wird die Größe der untersuchten Gruppe eingetragen, auf der 2. Achse die Zahl der Überlebenden aus der jeweiligen Gruppe, die vom Ursprung ausgehenden Strecken stellen die Verhältnisse für die jüngere Altersgruppe dar. Von diesen Zwischenwerten ausgehend, werden nun die Werte für die ältere Gruppe hinzuaddiert. Die Endpunkte, verbunden mit dem Ursprung, haben nun Steigungen, welche die Überlebenschancen der Raucher bzw. Nichtraucher darstellen. Aus diesem Diagramm lässt sich herauslesen, dass die Raucher insgesamt besser abschneiden, weil sie in der Klasse der Älteren einen sehr geringen Teil ausmachen und die schlechte Überlebensrate dieser Altersgruppe vor allem Nichtraucher trifft.¹⁵⁷.

¹⁵⁷ vgl. GRAMS: Klüger irren, S 62-64.

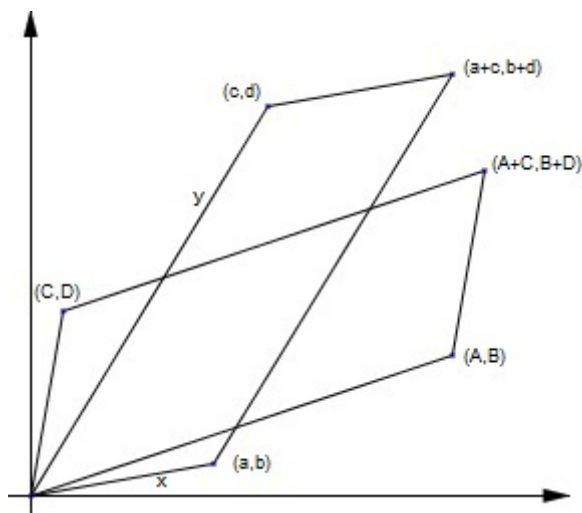
Hier nun die entsprechende Abbildung¹⁵⁸:



Grün entspricht Nichtraucher, Rot entspricht Raucher.

Allgemein

Nun folgt eine allgemeine geometrische Erklärung mit Hilfe folgender Abbildung¹⁵⁹.



Dazu sei folgendes erklärt: Die Quotienten $\frac{b}{a}$ bzw. $\frac{d}{c}$ sind die Steigungen der Geraden x bzw. y zum Punkt $(a|b)$ bzw. zum Punkt $(c|d)$. Wenn man die Steigungen vergleicht, erkennt man, dass $\frac{b}{a} < \frac{B}{A}$ und $\frac{d}{c} < \frac{D}{C}$, aber trotzdem $\frac{d+b}{c+a} > \frac{B+D}{A+C}$ ergibt¹⁶⁰.

¹⁵⁸Abbildung nach GRAMS: Klüger irren, S 64.

¹⁵⁹Abbildung nach HESSE: Achtung Denkfalle, S 32.

¹⁶⁰vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 33.

5.4 Das Will Rogers Phänomen

Dieses Phänomen tritt auf, wenn man Daten in zwei Gruppen zusammenfasst. Wechselt ein Element von einer Menge in eine andere, so nimmt der Mittelwert der Datengrößen in beiden Mengen zu. Beschrieben wurde dieses Phänomen zuerst vom amerikanischen Komiker Will Rogers, wenn auch unbeabsichtigt. Dabei ging es um die Umsiedelung von Farmern aus Oklahoma nach Kalifornien in den 1830er Jahren, die zu Folge hatte, dass die durchschnittlichen Intelligenzquotienten in beiden Staaten stiegen. Was als Witz gemeint war (nur die Dümmersten zogen aus Oklahoma weg, diese waren aber noch immer intelligenter als alle Bewohner Kaliforniens) enthält bei genauerer Betrachtung einen nicht zu verachtenden mathematischen Inhalt¹⁶¹. Nun einige Beispiele.

5.4.1 Höhere Überlebenschance bei Krebspatienten

Nachdem rund 50 Jahre vergangen waren, erhielt das Phänomen öffentliche Aufmerksamkeit. In zwei medizinischen Studien, die sich mit dem Einfluss neuerer diagnostischer Verfahren auf die Beurteilung der Prognose von Krebserkrankungen auseinandersetzten, wurde festgestellt, dass eine Gruppe von Patienten mit Bronchialkarzinom, die im Zeitraum nach 1977 behandelt wurden, eine höhere 6-Monats-Überlebensrate aufwiesen als die Vergleichsgruppe, die zwischen 1953 und 1964 am selben Ort behandelt wurde. Es lag nahe, diese Tatsache dem Fortschritt in der Therapie zuzuweisen, aber auch diagnostische Methoden hatten sich verbessert, was zu einer Änderung der Stadieneinteilung führte (kleinere Streuungen konnten im Gegensatz zu früher nun auch festgestellt werden). Die Möglichkeit, kleinere Herde zu entdecken, führten zu einer Grenzverschiebung zwischen den Stadien, sodass ein Teil der Krebsfälle, welche früher eine günstige Prognose hatten, nun mit einer schlechteren Prognose reklassifiziert wurden. Die Prognose der reklassifizierten Patienten war schlechter als derjenigen, die in der Gruppe der günstigen Prognosegruppe verblieben, aber besser als die Patienten, die sich von vornherein in der Gruppe der schlechteren Prognosen befanden. Dadurch nahm die 6-Monats-Überlebensrate in den beiden Prognosegruppen zu, obwohl sich an den Prognosen der einzelnen Patienten nichts veränderte¹⁶².

Dazu sei noch ein Rechenbeispiel zur Veranschaulichung dargestellt¹⁶³.

Ausgehend von hypothetischen Stadien A, B, C, D der Krebserkrankung, wird für jedes Stadium die mittlere Überlebensdauer berechnet:

¹⁶¹vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 38-39.

¹⁶²vgl. GOLDER, bildgebende Diagnostik, S 348.

¹⁶³im Folgenden vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 42-43.

A: 10 Jahre; B: 8 Jahre; C: 4 Jahre; D: 1 Jahr

Die einzelnen Patienten haben folgende Prognosen:

A. 20, 16, 12; B: 10, 8, 6; C: 5, 4, 3; D: 1

Nun wird der gravierendste Fall aus einem weniger weit fortgeschrittenen Stadium durch bessere Diagnosetechnik in das nächstschlimmere Krankheitsstadium hochgestuft. Und siehe da, die durchschnittliche Überlebensdauer steigt in Stadium A auf 18, in B auf 10, in C auf 5 und D auf 2 Jahre. In allen Stadien stieg die durchschnittliche Überlebensdauer durch die Neugruppierung, obwohl sich an den individuellen Prognosen nichts veränderte.

5.4.2 Erhöhung der durchschnittlichen Verkaufszahlen

Man nehme an, eine Firma sei betraut mit dem Vertrieb von Mobiltelefonen in Wien mit zwei Vertriebsstandorten Nord und Süd¹⁶⁴. Die Verkaufszahlen an den einzelnen Vertriebsstellen sehen folgendermaßen aus: Die drei Mitarbeiter im Norden verkaufen je 6.000, 6.000, 7.000 Stück. Die vier Mitarbeiter im Süden verkaufen je 5.000, 10.000, 15.000, 20.000 Stück. Da dem Direktor der Firma die Verkaufszahlen nicht hoch genug sind, wird eine neue Gebietsleiterin eingestellt mit dem Auftrag, die Verkaufszahlen im 2. Halbjahr zu erhöhen. Sie schaffte es tatsächlich bis zum Ende des Jahres die durchschnittlichen Verkaufszahlen im 2. Halbjahr sowohl im Norden als auch im Süden gegenüber dem 1. Halbjahr um 16,7% im Norden bzw. 6,7% im Süden zu erhöhen. Doch bei den absoluten Verkaufszahlen der Firma gab es im 2. Halbjahr nicht die geringste Änderung.

Wie es dazu kommen konnte, sei in folgender Tabelle aufgeschlüsselt.

1.Halbjahr		2. Halbjahr	
Nord	Süd	Nord	Süd
5000	5000	5000	5000
6000	10000	6000	15000
7000	15000	7000	20000
	20000	10000	
Durchschnitt	6000 12500	7000 13333	

Der Absatz von jedem der 7 Verkäufer änderte sich im 2. Halbjahr nicht. Die neue Gebietsleiterin hatte lediglich einen mittelmäßigen Verkäufer aus dem Süden in den Norden versetzt. Im Norden wurde er zum besten Verkäufer und durch diese Versetzung stiegen in beiden Vertriebsstellen die durchschnittlichen Verkaufszahlen.

¹⁶⁴im Folgenden vgl. BOSBACH, Lügen mit Zahlen, S 146-148.

5.4.3 Kurze Erwähnung weiterer Beispiele

Es würde noch viele weitere Beispiele für das Will-Rogers-Phänomen geben, einige seien hier noch kurz erwähnt¹⁶⁵:

- Erhöhung der Spielstärke von Mannschaft A und B durch Versetzung eines Spielers von A nach B
- Erhöhung des Leistungsniveaus durch Versetzung eines Schülers vom Gymnasium in die NMS
- Erhöhung der Prozentanteile einer Partei durch Verschiebung eines Dorfes von Wahlkreis A zu Wahlkreis B (in beiden Wahlkreisen)

5.4.4 Erklärung des Phänomens

Dieses Phänomen kann in folgenden Fällen eintreten¹⁶⁶:

- Seien $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ zwei Mengen, wobei $\max A < \max B$.
Wechsel eines Elements b_i aus der Menge B in die Menge A bringt das Phänomen mit sich
- Seien $\bar{a}$ und $\bar{b}$ die Mittelwerte der Mengen A und B , dann bringt jeder Wechsel eines Elements b_i , wobei $\bar{a} < b_i < \bar{b}$ zu gelten hat, das Phänomen mit sich.

Im Folgenden möchte ich die mathematische Erklärung dazu liefern.

Gegeben seien 2 Mengen A und B mit gleicher Messgröße. Die Anzahl der Elemente A sei n mit der Summe S_A , B hat m Elemente, deren Summe beträgt S_B . Der Durchschnittswert der Elemente von A sei größer als Durchschnittswert der Elemente von B .

$$\frac{S_A}{n} > \frac{S_B}{m}$$

¹⁶⁵im Folgenden vgl. BOSBACH, Lügen mit Zahlen, S 149.

¹⁶⁶im Folgenden vgl. GOLDER, bildgebende Diagnostik, S 348.

Die Verschiebung eines Elements a_i , der Menge A in die Menge B , führt zur Erhöhung der Mittelwerte beider Mengen

$$S_A - \frac{a_i}{n-1} > \frac{S_A}{n}$$

$$\frac{S_B + a_i}{m+1} > \frac{S_B}{m}$$

wenn a_i zwischen den Mittelwerten der beiden Mengen liegt.

Umgekehrt führt eine Verschiebung von b_i aus B in die Menge A zu Senkung der Mittelwerte beider Mengen.

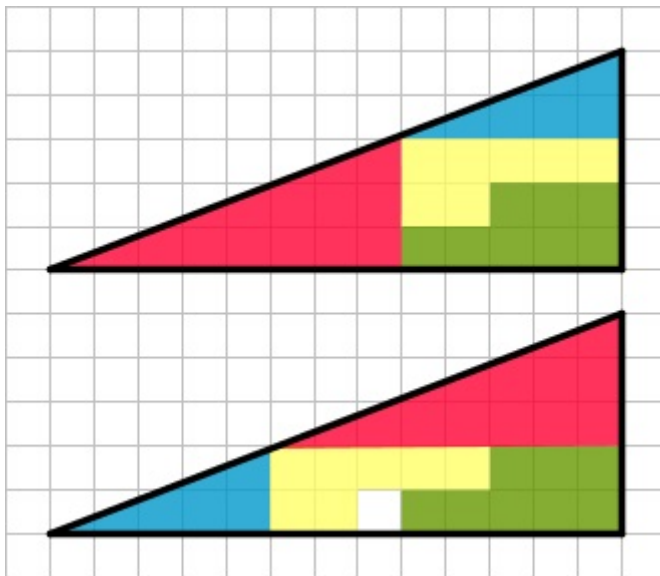
Voraussetzungen sind also:

- Das Element, welches verschoben wird, hat einen geringeren Wert als der Durchschnitt der Elemente der Menge, aus der es entfernt wird.
- Das Element, welches verschoben wird, hat einen höheren Wert als der Durchschnitt der Elemente der Menge, in die es verlagert wird.

6 Geometrische Paradoxa

6.1 Das Curry Paradoxon - Das Rätsel des fehlenden Quadrats

(1) Zunächst sei eine Darstellung des Paradoxons abgebildet¹⁶⁷.



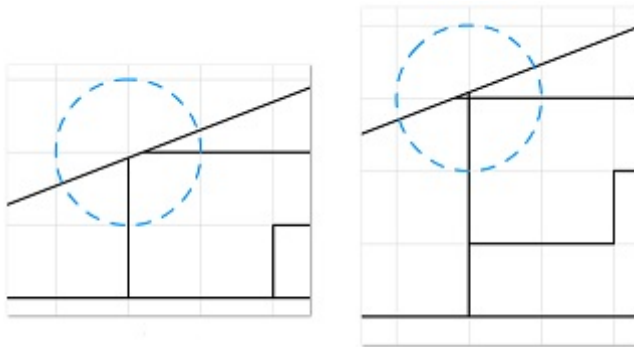
In der Abbildung sehen wir 2 rechtwinklige Dreiecke unterschiedlicher Größe, die aus jeweils vier Teilen bestehen. Das untere Dreieck entsteht durch Verschiebung der 4 Teile des oberen Dreiecks. Nachdem 3 Teile des oberen Dreiecks verschoben wurden, entsteht das untere Dreieck, welches offensichtlich um 1 Quadrat größer ist als das obere Dreieck. Da wir aber wissen, dass allein durch Verschiebung von Teilflächen sich der Flächeninhalt eines Objekts nicht verändern kann, ergibt sich ein Paradoxon (Anleitung Verschiebung: Blaues Dreieck nach unten-Rotes Dreieck nach oben, sodass die Ecken des großen Dreiecks gleich bleiben-Gelbe Figur an Seitenkante des blauen Dreiecks legen).

¹⁶⁷ Abbildung nach de.wikipedia.org/wiki/Fehlendes-Quadrat-Rätsel, 10.1.2019

Dieses Paradoxon ist eine Schöpfung von Paul Curry, einem Amateurmathematiker, aus dem Jahr 1953. Die hier angegebene Darstellung ist gegenüber der Grundidee von Curry leicht modifiziert (Curry schnitt Teile aus einem Rechteck, wobei das obere Dreieck in der Lage nicht verändert wurde, sowie die gelbe und grüne Figur vertauschte Lagen hatten und auch das fehlende Quadrat erschien an einer anderen Stelle), aber die Idee dahinter ist dieselbe¹⁶⁸.

(2) Im Folgenden sei die Lösung des Paradoxons dargestellt¹⁶⁹.

Grundsätzlich kann es einem geübten Auge schon auffallen, was am unteren Dreieck nicht passt, aber in Computeranimationen ist es schwer zu erkennen. Eine entscheidende Rolle spielt jener Bereich, in dem die beiden Teildreiecke aneinandergrenzen. Bei äußerst genauer Betrachtung ist die Hypotenuse des neuen Gesamtdreiecks keine echte Gerade, aber die Abweichung ist so gering, dass sie einem ungeübten Betrachter kaum auffällt¹⁷⁰.



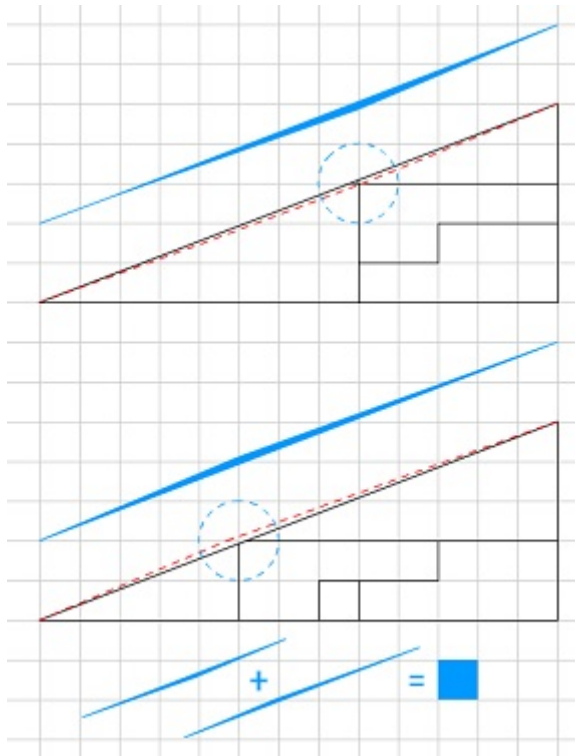
Bei echter Konstruktion wird man erkennen, dass beim oberen Dreieck die Ecke der gelben Figur etwas über die Diagonale herausragen würde und wenn das blaue und das rote Teildreieck vertauscht werden, entsteht eine kleine Überlappung entlang der Diagonalen des unteren Gesamtdreiecks.

¹⁶⁸vgl. GARDNER: Mathemagische Tricks, S 135-136.

¹⁶⁹im Folgenden vgl. lichtmikroskop.net/optik/dreiecksraetsel-zauberquadrat.php, 13.1.2019

¹⁷⁰Abbildung entnommen aus: lichtmikroskop.net/optik/dreiecksraetsel-zauberquadrat.php, 13.1.2019

In der folgenden Darstellung sehen wir die Auflösung des Paradoxons¹⁷¹.



Wenn man die Differenz, welche sich entlang der Hypotenuse sowohl am oberen als auch am unteren Dreieck ergibt, addiert, ergibt es genau die Fläche des hinzu kommenden Quadrats.

(3) Die Differenz ergibt sich dabei durch die unterschiedlichen Steigungen der beiden Teildreiecke ($\frac{2}{5}$ bzw. $\frac{3}{8}$) gegenüber der Steigung des Gesamtdreiecks ($\frac{5}{13}$).
 Größe der Winkel: Gesamtdreieck $21,04^\circ$; rotes Dreieck $20,56^\circ$; blaues Dreieck $21,80^\circ$.
 Beim Abzählen der Längeneinheiten der verschiedenen Figuren wird einem auffallen, dass es sich hierbei um Fibonacci-Zahlen handelt (Kathetenlängen 2 und 5; 3 und 8; 5 und 13 bzw. Breitenlängen des zusammengesetzten Rechtecks 3 und 5), und hauptsächlich deshalb entsteht das Paradoxon des fehlenden Quadrats¹⁷².

¹⁷¹Abbildung entnommen aus: lichtmikroskop.net/optik/dreiecksraetsel-zauberquadrat.php, 13.1.2019

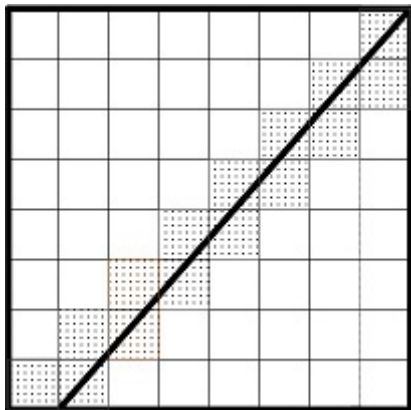
¹⁷²vgl. STRICK: Mathematik ist schön, S 233.

6.2 Das Schachbrettparadoxon

Ausgangspunkt ist ein Schachbrett $8 \times 8 = 64$ Quadraten.

Das Schachbrett wird entlang einer Linie, welche die Endpunkte im rechten oberen Eck des Bretts und linken unteren Eck des zweiten Quadratkästchens von links hat, zerschnitten. Das nun entstandene untere Dreieck wird um ein Kästchen nach unten geschoben, sodass ein überstehendes Dreieck entsteht. Dieses wird abgeschnitten und in den freien, dreiecksförmigen Platz eingefügt, welcher links unten durch das Verschieben entstanden ist. Damit entsteht ein Rechteck mit der Größe von $7 \times 9 = 63$ Quadraten. Es fehlt also ein Quadrat gegenüber der ursprünglichen von 64 Quadraten.

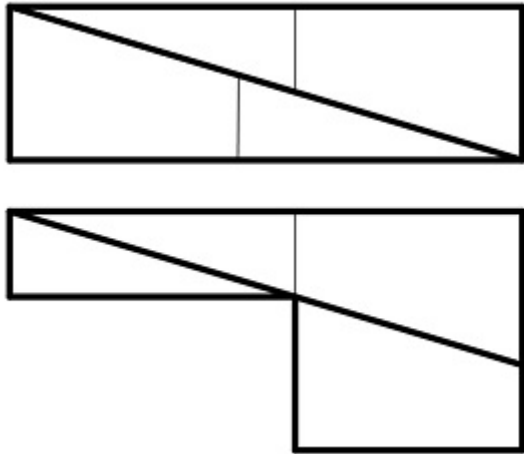
Wenn die Quadrate eingezeichnet sind, erkennt man leicht, dass diese entlang der Schnittlinie nicht genau zusammenpassen. Das kleine Dreieck hat auch eine Höhe von $1\frac{1}{7}$, sodass das linke untere Kästchen des neu entstandenen Rechtecks nicht die Fläche 1 hat, wie jedes Kästchen der ursprünglichen Figur. Dies ist bei allen Kästchen der Fall, sodass die Summe der Flächen, die größer als 1 sind, genau die Fläche 1 ergeben, um die das neu entstandene Rechteck kleiner ist¹⁷³.



¹⁷³vgl. GARDNER: Mathemagische Tricks, S 126-127.

6.3 Hoopers Paradoxon

Ausgangsfigur ist hier ein 10×3 Einheiten großes Rechteck¹⁷⁴.



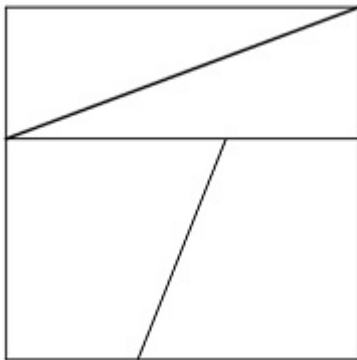
Mithilfe einer Teilung des Rechtecks in zwei rechtwinkelige Dreiecke und zwei Trapeze wird ein 30 Einheiten großes Rechteck scheinbar in zwei kleinere Rechtecke mit einer Gesamtfläche von 32 Einheiten verwandelt. Die Schnitte erfolgen entlang der Diagonalen, wodurch zwei Dreiecke entstehen und diese Dreiecke werden jeweils so geschnitten, dass ein rechtwinkeliges Dreieck mit Kathetenlänge 6 und ein Trapez mit Grundlinienlänge 4 entsteht. Die so entstandenen kleineren Dreiecke werden ebenso wie die Trapeze aufeinander gelegt, und so ergeben sich zwei Rechtecke, deren gemeinsame Fläche 32 groß ist. Die Lösung besteht darin, dass die Höhe der beiden kleinen Dreiecke tatsächlich nicht zwei beträgt, so wie es einem ungeübten Auge erscheinen mag, sondern um $\frac{1}{5}$ kürzer ist, ein also für das geschulte Auge leicht aufzulösendes Paradoxon¹⁷⁵.

¹⁷⁴Abbildung nach GARDNER: Mathemagische Tricks, S 129.

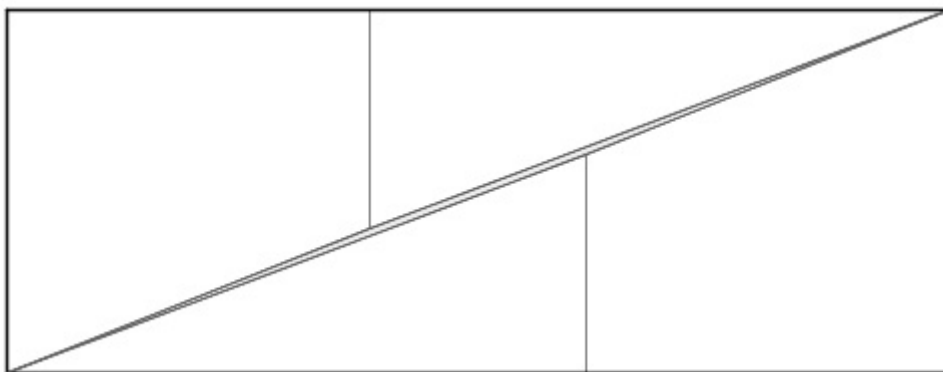
¹⁷⁵vgl. GARDNER: Mathemagische Tricks, S 128-129.

6.4 Variante des Schachbrettparadoxons-Sam Loyd Paradoxon

Hier wird ein 8×8 Quadrat in zwei Rechtecke (3×8) und (5×8) geteilt. Das kleinere Rechteck wird durch eine Teilung entlang der Diagonale in 2 rechtwinkelige Dreiecke verwandelt und das größere Rechteck in 2 Trapeze mit Grundlinienlänge 3 und 5¹⁷⁶.



Diese 4 Teile werden nun zu einem (5×13) großen Rechteck neu zusammengefügt. Dabei ist aus der Größe von 64 Kästchen scheinbar in der Neuzusammensetzung eine Größe von 65 geworden. Dies ist aber nur eine Folge von kleinen Ungenauigkeiten, welche dem ungeschulten Auge nicht auffallen¹⁷⁷.



Der graue Teil in der Mitte ist ein, genauer gesagt, langgezogenes Parallelogramm¹⁷⁸. Diese Fläche ergibt sich aus den unterschiedlichen Steigungen der aneinandergelegten Figuren, wie schon beim Curry Paradoxon. Die Steigung der Dreiecke beträgt

¹⁷⁶Abbildung nach usku.blogspot/2015/12/6465.htm, 17.1.2019

¹⁷⁷vgl. HESSE: Dameopfer, Paragraph 28.

¹⁷⁸Abbildung nach HESSE: Dameopfer, Paragraph 28.

($\frac{3}{8}$), während die Steigung der Trapezseite ($\frac{2}{5}$) beträgt. Die Fläche kann berechnet werden durch die Formel $a = a \cdot h_a$ (Seite mal zugehöriger Höhe des Parallelogramms).

$$a_P = \sqrt{a_D^2 + b_D^2} = \sqrt{73} ; b_P = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

a_P ist nichts anderes als die Hypotenuse der kleinen Dreiecke und b_P entspricht der Seite b des Trapezes. Für die Höhe h_a des Parallelogramms benötigt man noch den Winkel des Parallelogramms, denn

$$h_a = b \cdot \sin \alpha.$$

Diesen erhält man aus der Differenz der Winkel, die den Steigungen ($\frac{2}{5}$) und ($\frac{3}{8}$) entsprechen, $\arctan \frac{2}{5} = 21,801401^\circ$ und $\arctan \frac{3}{8} = 20,556045^\circ$.

Der Winkel α des Parallelogramms hat somit die Größe von $1,245364^\circ$.

Damit erhält man für $h_a = \sqrt{29} \cdot \sin 1,245364 = 0,11704$ und daraus folgernd für $A_P = \sqrt{73} \cdot \sqrt{29} \cdot \sin 1,245364 = 1$.

Das Parallelogramm hat also genau die Fläche, um die sich die Fläche des Rechtecks gegenüber der Fläche des Quadrats vergrößert hat. Wieder spielen Fibonacci-Zahlen eine entscheidende Rolle.

6.5 Erzeugung des Loyd-Paradoxons

Das Paradoxon wird unterstützt von folgenden Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen¹⁷⁹:

- Das Zahlenverhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen strebt sehr schnell dem Grenzwert $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$ entgegen, sodass sich die Steigungswinkel der Dreiecke immer weniger voneinander unterscheiden.
- Das Quadrat einer Fibonacci-Zahl unterscheidet sich vom Produkt des oberen und des unteren Nachbarn der Fibonacci-Folge stets um 1, immer abwechselnd um +1 und dann -1.

$$\text{Beispiel: } 2^2 = (1 \cdot 3) + 1; 3^2 = (2 \cdot 5) - 1; 5^2 = (3 \cdot 8) + 1; 8^2 = (5 \cdot 13) - 1; \\ 13^2 = (8 \cdot 21) + 1; 21^2 = (13 \cdot 34) - 1$$

Die zu konstruierenden Längen brauchen nicht unbedingt Elemente der Fibonacci Zahlenreihe zu sein, sondern müssen nur die eben genannten Eigenschaften erfüllen. Es genügt, drei Zahlen a , b , c zu finden, sodass das Rechteck mit den Seitenlängen a , b ungefähr so groß ist wie das Quadrat mit der Seitenlänge c . Man betrachtet dafür alle möglichen Faktorenzerlegungen $a \cdot b$ für c^2+1 bzw. c^2-1 .

Ebenso können die Zahlentripel a , b , c für die Erzeugung des Curry-Paradoxon benutzt werden, indem man b , c für die Katheten des ursprünglichen Dreiecks sowie a

¹⁷⁹im Folgenden vgl. STRICK: Mathematik ist schön, S 235.

für die kürzere Kathete des kleineren aufgesetzten Dreieckteils verwendet. Die Steigungswinkel werden mit $\alpha = \arctan \frac{c}{a}$ und $\beta = \arctan \frac{b}{c}$ bezeichnet¹⁸⁰.

Geeignete Zahlentripel seien nun in folgender Tabelle angeführt¹⁸¹.

c	c ²	c ² - 1	a	b	α	β	a	b	α	β
3	9	8	2	4	33,69°	36,87°	10	2	5	33,69°
4	16	15	3	5	36,87°	38,66°				
5	25	24	4	6	38,66°	39,81°	26	2	13	21,80°
			3	8	30,96°	32,01°				
			2	12	21,88°	22,62°				
6	36	35	5	7	39,81°	40,60°				
7	49	47	6	8	40,60°	41,19°	50	5	10	35,54°
			4	12	29,74°	30,26°		2	25	15,95°
			3	16	23,20°	23,63°				
			2	24	15,95°	16,26°				
8	64	63	7	9	41,19°	41,63°	65	5	13	32,01°
			3	21	20,56°	20,85°				
9	81	80	8	10	41,63°	41,99°	82	2	41	12,38°
			5	16	29,05°	29,36°				
			4	20	23,96°	24,23°				
			2	40	12,53°	12,68°				
10	100	99	9	11	42,27°	36,87°				
			3	33	33,69°	16,86°				

Legende für Curry Paradoxon	Legende für Loyd Paradoxon
b,c ... Katheten des Gesamtdreiecks	a,b ... Seitenlängen des Rechtecks
a ... Kürzere Kathete des oberen kleinen Dreiecks	c ... Seitenlänge des Quadrats
α ... Steigungswinkel des oberen kleinen Dreiecks	
β ... Steigungswinkel des Gesamtdreiecks	

¹⁸⁰vgl. STRICK: Mathematik ist schön, S 247.

¹⁸¹vgl. STRICK: Mathematik ist schön, S 235.

Bis jetzt habe ich Figuren mit Seitenlängen betrachtet, sodass sich scheinbar ein Gewinn oder Verlust von einer Flächeneinheit bei Neuordnung der Teilfiguren ergibt. Bei geeigneter Wahl der Seitenlängen ist es aber auch möglich, einen scheinbaren Gewinn oder Verlust von mehreren Flächeneinheiten zu konstruieren. Für die zu findenden Seitenlängen r_1, q, r_2 des gewünschten Flächenunterschiedes von $\pm x$ müssen nur folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$r_1 + q = r_2 \text{ und } q^2 = (r_1 \cdot r_2) \pm x.$$

Dabei sind r_1, r_2 die Seitenlängen des Rechtecks, q ist die Seitenlänge des Quadrats¹⁸².

Dabei kann man für q jede beliebige Seitenlänge sowie für x den gewünschten Größenunterschied der beiden Flächen einsetzen. Wenn man zum Beispiel für $q=10$ wählt und einen Größenunterschied von 4 wünscht, so ergeben sich folgende Bedingungen:

$$r_1 + 10 = r_2 \text{ und } 100 = (r_1 \cdot r_2) + 4.$$

Mit Hilfe des Einsetzungsverfahrens erhält man:

$$100 = [r_1 \cdot (r_1 + 10)] + 4 \Rightarrow r_1^2 + 10r_1 - 96 = 0.$$

Mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir $r_1 = 6$ und $r_2 = 4$. Es kann aber auch der Größenunterschied ermittelt werden, wenn 2 der 3 Flächenseiten gegeben sind.

Selbstverständlich werden sich für gewünschte ganzzahlige Größenunterschiede, die notwendig sind, um mit Einheitsquadraten das Paradoxon zu unterstützen, nicht immer rationale Seitenlängen ergeben. Falls man einen Unterschied von zwei oder drei Flächeneinheiten wünscht, kann dies nur mit Hilfe von irrationalen Seitenlängen erreicht werden.

Für einen Flächenunterschied von 4 Flächeneinheiten ist die Länge der Quadratseite aus folgender Zahlenreihe zu wählen: 2, 4, 6, 10, 16, 26, ... Für einen Flächenunterschied von 5 Flächeneinheiten haben wir die Länge der Quadratseite aus der Zahlenreihe 3, 4, 7, 11, 18, ... zu wählen. Um diese Reihen zu ermitteln, müssen wir lediglich die Differenz zwischen einer Zahl zum Quadrat und dem Produkt der benachbarten Zahlen bilden. Die Zahlenreihe muss dabei dem Bildungsgesetz $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, wobei a_1 und a_2 frei wählbar sind. Werden zwei Startwerte aus der Reihe der Fibonacci-Zahlen gewählt, so ergibt sich ein Flächenunterschied von 1. Die oben genannten Reihen haben als Startwerte 2 und 4 bzw. 3 und 4.

Für die Startwerte 1 und 4 ergibt sich die Zahlenreihe 1, 4, 5, 9, 14, ... und ein scheinbarer Flächenunterschied von 11 Einheiten. Derselbe Flächenunterschied er-

¹⁸²vgl. GARDNER: Mathemagische Tricks, S 133.

gibt sich für die Startwerte 2 und 5. Bei einem so großen Flächenunterschied ist dann das Paradoxon bereits leicht zu durchschauen¹⁸³.

Zur Übersicht seien hier nochmals einige Reihen angeführt:

Größenunterschied	Startwerte	Folge
1	$a_1 = 1; a_2 = 1$	$\langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots \rangle$
2	$a_1 = \sqrt{2}; a_2 = 2\sqrt{2}$	$\langle \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, \dots \rangle$
3	$a_1 = \sqrt{3}; a_2 = 2\sqrt{3}$	$\langle \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 8\sqrt{3}, \dots \rangle$
4	$a_1 = 2; a_2 = 4$	$\langle 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, \dots \rangle$
5	$a_1 = 1; a_2 = 3$	$\langle 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots \rangle$
9	$a_1 = 3; a_2 = 3$	$\langle 3, 3, 6, 9, 15, 24, 39, \dots \rangle$
11	$a_2 = 1; a_2 = 5$	$\langle 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \dots \rangle$

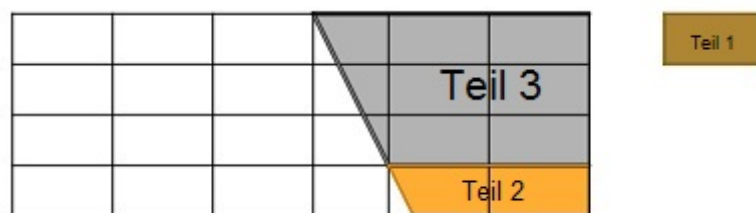
¹⁸³vgl. GARDNER: Mathemagische Tricks, S 132.

6.6 Vermehrung von Schokolade

Zum Abschluss dieses Kapitels möchte ich noch ein Paradoxon vorführen, welches sehr für Kinder in praktischer Vorführung geeignet ist. Dafür braucht man eine Tafel Schokolade mit Längsreihen und 4 Querreihen, sodass man diese in 24 Stück entlang der Bruchlinie teilen könnte. Man teilt diese Tafel nun in 4 Stücke. Die Schnittlinien sind in folgender Abbildung beschrieben¹⁸⁴.



Man nimmt Teil 1 und Teil 2 heraus, schiebt Teil 3 nach oben entlang der Schnittlinie und dann setzt man Teil 2 rechts unten ein. Übrig bleibt der rechteckige Teil 1, um die sich die Schokoladentafel scheinbar vergrößert hat¹⁸⁵.



Das geschulte Auge erkennt dabei natürlich sofort, dass die dritte Reihe nicht mehr ganz so dick ist wie die der ursprünglichen Tafel. Nun die Erklärung dazu: Die schräge Schnittlinie schneidet die zweite senkrechte Linie von links genau bei einem Viertel der Höhe des kleinen Schokoladeteils, die dritte senkrechte Linie genau bei der Hälfte und die vierte genau bei Dreiviertel der Stückhöhe. Da man nun Teil 2 nach rechts und unten verschiebt, verschiebt sich dieser Teil insgesamt um ein Viertel der Höhe einen kleinen Teilstücks nach unten, und da dies in allen vier Spalten geschieht, entsteht eine Überlänge von der Größe eines Teilstücks¹⁸⁶.

¹⁸⁴Abbildung nach HERRMANN, Mathematik, S 72.

¹⁸⁵Abbildung nach HERRMANN, Mathematik, S 74.

¹⁸⁶vgl. HERRMANN, Mathematik, S 71-74.

7 Paradoxa der Spieltheorie

7.1 Das St. Petersburger Paradoxon

7.1.1 Grundsätzliches

Das St. Petersburger Paradoxon tritt bei einem Spiel auf, in welchem eine faire Münze geworfen wird (d. h. $P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$), und zwar so lange, bis das Ereignis Kopf eintritt. Wenn dieses Ereignis beim n -ten Wurf eintritt, so hat die Bank dem Spieler 2^n Euro als Gewinn auszuzahlen. Das Paradoxon ergibt sich aus der Frage nach dem fairen Einsatz des Spielers, welcher vom erwarteten Gewinn abhängig ist. Bei der Ermittlung des Erwartungswertes erkennt man, dass der erwartete Gewinn unendlich ist und daher der Spieler, unabhängig von der Höhe des Einsatzes, gegenüber der Bank immer einen Vorteil hat¹⁸⁷.

Ein Spiel wird dann als fair angesehen, wenn der Reingewinn, sowohl der des Spielers als auch der der Bank, gleich Null ist. Anders gesagt, sollte der erwartete Gewinn dem Einsatz entsprechen¹⁸⁸.

Zunächst sei noch eine tabellarische Auflistung der Gewinne samt Gewinnwahrscheinlichkeiten angeführt¹⁸⁹.

Münzwürfe	Wahrscheinlichkeit	Gewinn
K	$\frac{1}{2}$	2
ZK	$\frac{1}{4}$	4
ZZK	$\frac{1}{8}$	8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underbrace{Z \dots Z}_{n-1} K$	$(\frac{1}{2})^n$	2^n

¹⁸⁷vgl. CLARK: Paradoxien, S 224.

¹⁸⁸vgl. SZEKELY: Paradoxa, S 35.

¹⁸⁹im Folgenden vgl. SIEGERT: Das-Sankt-Petersburger Paradoxon, S 2.

Der Erwartungswert (der erwartete Gewinn) $E(x)$ wird mit folgender Formel berechnet:

$$E(X) = \sum_{n=1}^k P(X = G_n) \cdot G_n = \sum_{n=1}^k 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^k 1 = k$$

wobei G_n der Gewinn nach dem n -ten Wurf ist.

Da bei diesem Spiel vorerst keine Obergrenze für die Anzahl der Würfe festgelegt ist (theoretisch kann es sehr lange dauern, bis die Münze das erste Mal Kopf zeigt), ist auch der Erwartungswert unendlich groß, was zur Folge hat, dass für ein faires Spiel auch der Einsatz unendlich groß sein müsste. Folglich ergibt sich ein Paradoxon.

7.1.2 Auswirkungen des St. Petersburger Paradoxons

Trotz des Vorteils, welcher ein Spieler gegenüber der Bank hat, wird doch bei jedem Spieler eine Aversion gegen einen zu hohen Einsatz entstehen¹⁹⁰. Daniel Bernoulli hat dafür den Begriff des abnehmenden Erwartungswertes kreiert. Als Beispiel könnte eine Gehaltserhöhung von 100 Euro dienen. Beträgt ein Gehalt nur 1000 Euro, so hat die Erhöhung um 100 Euro einen beträchtlichen Wert für die arbeitende Person. Bekommt man diese Erhöhung monatlich, so wird die 100 Euro Erhöhung nach 5 Jahren und einem Gehalt von 7000 Euro einen geringeren Wert haben als zu Beginn, als man nur 1000 Euro verdiente. Wenn wir in höhere Sphären des Geldbesitzes gehen, hat wohl ein Ertrag von 1 Milliarde Euro nicht denselben Wert für einen Person, wenn man schon 1 Milliarde hat, als wenn man von praktisch 0 diese Milliarde bekommt. Die zweite Milliarde könnte das Leben nie mehr so bereichern wie die erste Milliarde, obwohl sich am hinzu gewonnen Geldbetrag nichts verändert hat.

Ein weiterer Aspekt ist das Risiko, welches der Spieler trägt, auch in Erwartung eines sehr hohen Gewinns. Viele Menschen haben mehr Angst davon Geld zu verlieren. Diese Angst wird auch nicht durch die beinahe unendliche Menge an Geld, die man gewinnen kann, genommen. Ab einer gewissen Wahrscheinlichkeit eines Gewinns wird man nicht mehr bereit sein, hohe Geldsummen als Einsatz zu bezahlen. Beim St. Petersburger Spiel müsste 29 Mal Zahl erscheinen und beim 30. Wurf Kopf, um mindestens 1 Milliarde Euro zu gewinnen. Allerdings liegt die Chance zu gewinnen auch nur bei einem Milliardstel. Niemand wäre wohl bereit, 10000 Euro hinzublättern, nur für eine Chance von 10^{-9} , um eine Milliarde zu gewinnen. Denn selbst für die Rückgewinnung des Einsatzes dürfte beim 14. Mal Kopf erscheinen,

¹⁹⁰im Folgenden vgl. CLARK: Paradoxien, S 225-226.

was wohl verständlicherweise für viele ein großes Risiko wäre.

7.1.3 Lösungsansätze für das St. Petersburg Paradoxon

Einen unendlich hohen Geldbetrag zu haben sind sowohl für den Spieler als auch für die Bank unrealistisch. Daher arbeitete man an Veränderungen, welche ich im Folgenden darstellen werde.

Begrenzte Ressourcen

Man muss die Tatsache akzeptieren, dass kein Mensch und keine Institution über einen gewissen Geldbetrag hinauskommt und die Ressourcen begrenzt sind. Wenn wir davon ausgehen, dass ein Casino durchaus 10 Millionen Euro als Gewinn zur Verfügung stellen kann, dann wäre der Erwartungswert des Gewinns eines Spielers

$$E(X) = \sum_{n=1}^k P(X = G_n) \cdot G_n = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \dots + \left(\frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{2^{25}} + \dots \right) \cdot 10^7$$

wobei $\sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx 1,19 \cdot 10^{-7}$.

Das heißt: $E(X) = 23 + 1,19 \approx 24,2$

Also wird ein Einsatz von 25 Euro für ein faires Spiel sorgen, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Bank bei jedem Spiel geringfügig im Vorteil ist. Buffon, einer der Vertreter dieses Ansatzes, legte sich nach der Untersuchung von 2084 Spielergebnissen fest, dass ein Einsatz von 10 Geldeinheiten als fair zu beurteilen ist¹⁹¹.

Der Ansatz von Feller

Feller entwickelte eine Formel für einen fairen Einsatz, unter der Berücksichtigung der schon vorher gespielten n Spiele¹⁹². Dabei muss gelten:

$$\forall \varepsilon < 0 : P\left(\left|\frac{G_n}{T_n}\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1$$

für $n \rightarrow \infty$. Dabei stellt G_n den angehäuften Gewinn und T_n den angehäuften Einsatz dar. Die Formel für einen fairen Einsatz nach n Spielen lautet:

$$T_n = n \cdot \log_2 n$$

¹⁹¹vgl. SZEKELY: Paradoxa, S 35-36.

¹⁹²im Folgenden vgl. SZEKELY: Paradoxa, S 36.

Da der Einsatz von den zuvor bereits gespielten Spielen abhängt, löst sich das Paradoxon nun auf.

In der folgenden Tabelle soll noch der faire Einsatz pro Spiel in Abhängigkeit von der Anzahl der Spiele dargestellt werden¹⁹³:

n	10	100	1000	10000	100000	1000000
$\log_2 n$	3,32	6,64	9,97	13,29	16,61	19,93

Erwarteter Nutzen

Daniel Bernoulli versuchte eine Lösung zu erarbeiten, welche nicht auf dem erwarteten Gewinn, sondern auf dem erwarteten Nutzen basiert. Dabei braucht man eine Nutzenfunktion $N(G)$, deren erste Ableitung positiv sein soll, was bedeutet, dass ein zusätzlicher Gewinn immer einen zusätzlichen Nutzen bringen wird, aber wirklich entscheidend ist das negative Vorzeichen der zweiten Ableitung, denn damit lässt sich das Paradoxon auflösen.

Für das St. Petersburg Spiel ergibt sich dann:

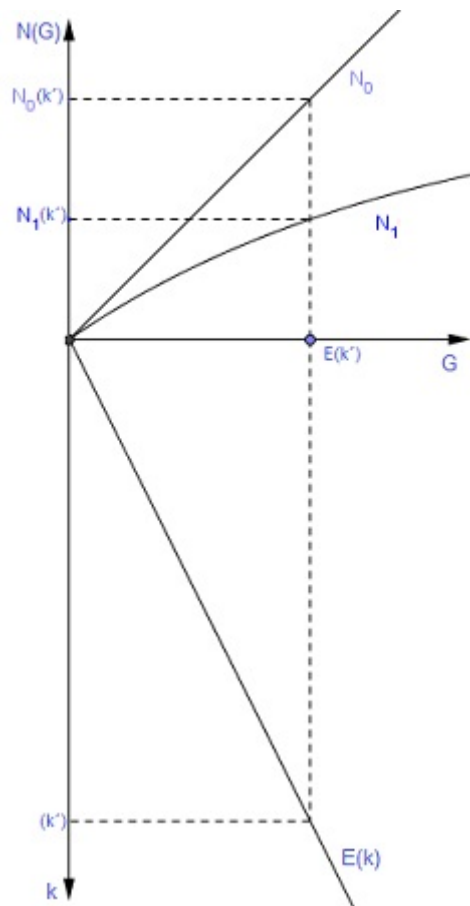
$$E_N = P(G) \cdot N(G) = \sum_{n=1}^k P(X = G_n) \cdot N(G_n) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \cdot N(2^n)$$

wobei E_N als Erwartungsnutzen bezeichnet wird¹⁹⁴.

¹⁹³vgl. SIEGERT: Das-Sankt-Petersburger Paradoxon, S 24.

¹⁹⁴vgl. JERGER: Das St. Petersburg-Paradoxon, S 408.

In folgender Abbildung soll die Erwartungsnutzenfunktion graphisch veranschaulicht werden¹⁹⁵.



Im unteren Quadranten ist der Zusammenhang von Erwartungswert und maximaler Wurfzahl dargestellt.

Im oberen Quadranten stellt die Gerade N_0 jene Situation dar, in der der Spieler bereit wäre, den erwarteten Gewinn als Einsatz zu bezahlen.

N_1 stellt die Situation dar, in welcher der Spieler einen kleineren Betrag als den erwarteten Gewinn setzt.

k' stellt die normierte Anzahl der Würfe dar.

Da die zweite Ableitung von N_1 stets negativ ist, muss es einen Grenzwert geben, ab dem $N_1(G_0) < N_0(G_0)$ ist¹⁹⁶.

Die von Daniel Bernoulli aufgestellte Formel lautet:

$$N(G) = a \cdot \log\left(\frac{G}{b}\right)$$

¹⁹⁵Abbildung nach JERGER: Das St. Petersburg-Paradoxon, S 409.

¹⁹⁶im Folgenden vgl. JERGER: Das St. Petersburg-Paradoxon, S 409.

oder äquivalent

$$N(G) = a \cdot (\log G - \log b)$$

Dabei sind a und b positive Parameter der Nutzenfunktion und mit $\log$ ist der Zehnerlogarithmus gemeint. Wenn man die eben formulierte Formel in die Formel für den Erwartungsnutzen einsetzt, ergibt sich:

$$E_N = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \cdot [a \cdot \log(2^n) - a \cdot \log b] = a \cdot \sum_{n=1}^k \frac{n}{2^n} \cdot \log 2 - a \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \cdot \log b$$

Die Ausdrücke $\sum_{n=1}^k \frac{n}{2^n}$ und $\sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n}$ konvergieren für $k \rightarrow \infty$ gegen 2 bzw. 1.

Daher sieht die vereinfachte Formel für den erwarteten Nutzen folgendermaßen aus:

$$E_N = a \cdot (\log 2 - \log b)$$

Im Vergleich mit der Nutzenfunktion $N(G)$ ist ersichtlich, dass das St. Petersburg Spiel den gleichen Nutzen bringt wie ein sicherer Gewinn von 2.

Moralischer Ansatz

Nikolaus Bernoulli versuchte, den moralischen Aspekt in die Auflösung des Paradoxons einzubringen. Für große n würden die Wahrscheinlichkeiten für einen Gewinn von 2^n so gering sein, dass diese von der menschlichen Vernunft nicht erkannt werden können und somit als moralisch unmöglich angesehen werden. Die Grenzen der moralischen Erkennbarkeit sind aber schwer zu bestimmen und daher scheint es leichter, einen Grenzbereich zu bestimmen als die exakte Grenze selbst. Für Nikolaus Bernoulli liegt die Grenze des Einsatzes bei 20 Münzen, weil hier die Chance auf einen Reingewinn schon sehr gering ist¹⁹⁷.

Der Ansatz von Cramer

Nach Gabriel Cramer gibt es einen Punkt, ab dem ein höherer Gewinn keinen zusätzlichen Nutzen mehr bringt¹⁹⁸. Laut Cramer wird dafür der Wert 2^{24} angesetzt. Der erwartete Gewinn ist mit Berücksichtigung dieser Grenze:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{24} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^n + \sum_{n=25}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^{24}$$

¹⁹⁷vgl. SIEGERT: Das-Sankt-Petersburger Paradoxon, S 11.

¹⁹⁸im Folgenden vgl. SIEGERT: Das-Sankt-Petersburger Paradoxon, S 12.

Eine weitere Möglichkeit der Lösung des Paradoxons sieht Cramer in der Beschreibung des Verhältnisses zwischen Nutzen und Wert von großen Geldmengen. Der Nutzen $N(x)$ sei festgelegt als $N(x) = \sqrt{x}$, d. h. dass beispielsweise ein 16 Mal höherer Gewinn nur einen 4 Mal höheren Nutzen für den Gewinner hat. Aus diesem Zusammenhang entwickelt Cramer den Begriff des moralischen Erwartungswertes, festgelegt durch folgende mathematische Formulierung in Bezug auf das St. Petersburg Spiel:

$$E_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sqrt{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1$$

auch zu beschreiben als Nutzen.

Der Einsatz ist dann das Quadrat des moralischen Erwartungswertes: $(\sqrt{2} + 1)^2 \approx 5,83$

Der Ansatz von Euler

Zuletzt sei noch der Lösungsansatz von Euler erwähnt, welcher einen von Daniel Bernoulli aufgreift, in dem der Wert des Gewinns in Abhängigkeit vom Vermögen des Gewinners betrachtet wird, also je höher das Vermögen des Spielers ist, desto niedriger ist der Wert des Gewinns. Anstelle des Münzwurfs betrachtet Euler den Würfelwurf. Das Spiel endet hier, sobald eine ungerade Zahl gewürfelt wird. Das Spiel ist äquivalent zum Münzwurfspiel anzusehen.

Die allgemeine Formel für den Wert lautet:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (A + G_n)^{p_n}$$

wobei p_n die Wahrscheinlichkeit, den Betrag G_n zu gewinnen und A das Vermögen des Spielers darstellt. Sowohl A als auch G_n sind als positive Zahlen vorausgesetzt. Der Wert des St. Petersburg Spiels beträgt demnach

$$W = \prod_{n=1}^{\infty} (A + 2^n)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} - A = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \ln(A + 2^n) \right] - A$$

Euler arbeitet hier mit dem geometrischen Mittel, da Ausreißer nicht so stark den Mittelwert verändern und daher die hohen Gewinne, welche aber selten auftreten, nicht so sehr ins Gewicht fallen und daher plausibel erscheinen¹⁹⁹.

¹⁹⁹vgl. SIEGERT: Das-Sankt-Petersburger Paradoxon, S 17.

Es sei noch eine Tabelle angeführt, in welcher für ein Vermögen A der Wert W berechnet ist²⁰⁰.

Vermögen A	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Wert W	4,28	5,47	7,89	10,97	14,24	17,55	20,87

7.1.4 Modifikation des Petersburger Spiels

Zum Abschluss will ich noch eine Modifikation des St. Petersburger Spiels betrachten. Bei allen vorhergehenden Betrachtungen war vorausgesetzt, dass es sich bei der geworfenen Münze um eine faire Münze handelt, d.h. die Wahrscheinlichkeit, Kopf zu erhalten, gleich $\frac{1}{2}$ ist, ebenso wie die Wahrscheinlichkeit, Zahl zu erhalten. Falls wir aber mit einer unfairen Münze spielen, bei der $P(K) > P(Z)$ oder $P(K) < P(Z)$, wie beeinflusst dies das Paradoxon?

Sei nun p die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis Kopf und $q=1-p$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis Zahl, dann ergeben sich folgende Ergebnisse für Gewinne und Wahrscheinlichkeiten.

Folge	Gewinn	Warscheinlichkeit
K	2	p
ZK	2	$q \cdot p$
ZZK	2	$q^2 \cdot p$
$ZZZK$	2	$q^3 \cdot p$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underbrace{Z \dots Z}_{n-1} K$	2^n	$q^{n-1} \cdot p$

Wenn nun $\tilde{G}$ der Gewinn eines St. Petersburger Spiels mit nicht fairen Münzen ist, dann ergibt sich für den Erwartungswert:

$$E(\tilde{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \cdot p \cdot 2^n = 2p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [2(1-p)]^n$$

$$E(\tilde{G}) = \begin{cases} \infty & p \in [0; \frac{1}{2}] \\ \frac{2p}{1-2(1-p)} & p \in (\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

²⁰⁰vgl. SIEGERT: Das-Sankt-Petersburger Paradoxon, S 15.

Falls also die Münze so beschaffen ist, dass $P(K) > \frac{1}{2}$, so ergibt sich ein Erwartungswert, welcher kleiner als ∞ ist und somit das Paradoxon auflöst. Ein fairer Einsatz wäre in diesem Fall

$$1 + \frac{1}{2p - 1}$$

Ist also $p=51\%$, so ergibt sich ein fairer Einsatz von 51 Euro.

Bei $p=0,9$ ist der faire Einsatz 2,25 Euro, bei $p=0,99$ wäre 2,02 Euro der faire Einsatz²⁰¹.

Im Folgenden sei noch eine Tabelle mit $P(K)$ samt fairem Einsatz angeführt.

$P(K)$	0,50001	0,5001	0,501	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56
$E(\tilde{G})$	51001	5001	501	51	26	17,66	13,50	11	9,33
$P(K)$	0,57	0,58	0,59	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	0,99
$E(\tilde{G})$	8,14	7,25	6,55	6	3,5	3	2,66	2,25	2,02

7.2 Das Parrondo Paradoxon

Dieses Paradoxon geht zurück auf den Spanier Juan Parrondo, welcher im Jahr 1996 die Entdeckung gemacht hat, dass sich zwei ungünstige Optionen zu einer günstigen Situation kombinieren lassen. Dabei kann ein doppelter Verlust relativ einfach in einen Gewinn umgewandelt werden²⁰². Anders gesagt:

*„Es gibt Paare von verlustreichen Spielen, die zu einer gewinnbringenden Kombination werden, wenn man sie nacheinander spielt.“*²⁰³

7.2.1 Darstellung der Spiele (vereinfacht)

Am einfachsten sind die Spiele mithilfe von 3 Münzen durchzuführen. Dazu benötigen wir eine faire Münze mit $P(K) = P(Z) = \frac{1}{2}$ und vier nicht faire Münzen, wobei folgende Wahrscheinlichkeiten zugrunde gelegt werden können:

Münze A: $P(K) = \frac{9}{10}$; $P(Z) = \frac{1}{10}$

Münze B: $P(K) = \frac{1}{10}$; $P(Z) = \frac{9}{10}$

Münze C: $P(K) = \frac{3}{4}$; $P(Z) = \frac{1}{4}$

Münze D: $P(K) = \frac{1}{4}$; $P(Z) = \frac{3}{4}$

Beim ersten Spiel X wird eine faire Münze geworfen und man gewinnt oder verliert einen Euro, je nachdem, ob man auf das Ereignis richtig oder falsch getippt hat.

²⁰¹vgl. SIEGERT: Das-Sankt-Petersburger Paradoxon, S 6.

²⁰²vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 108.

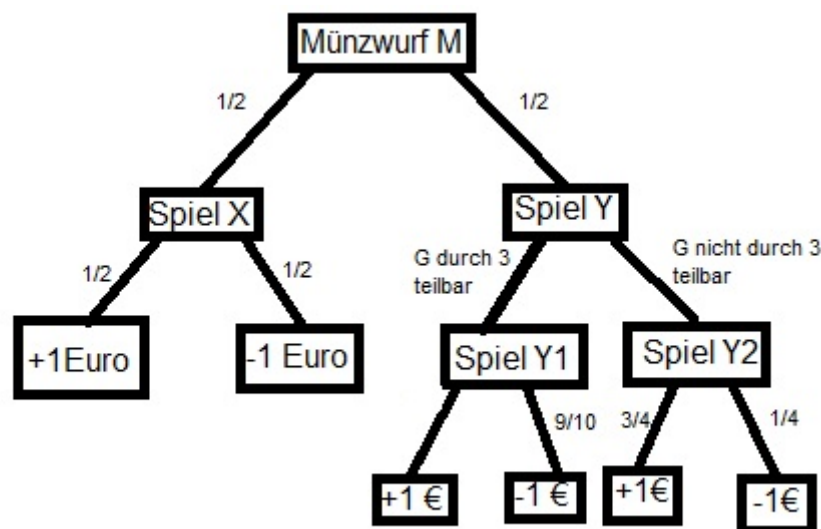
²⁰³CLARK: Paradoxien, S 184.

Auf lange Sicht ergibt sich also ein Gewinn von 0. Es handelt sich dabei um ein ungünstiges Spiel, wenn man eine Spielgebühr einrechnet. Das zweite Spiel Y gestaltet sich etwas komplizierter, denn dabei hängt die Fortsetzung des Spiels Y vom bisher erspielten Geldbetrag ab.

- Ist der bisherige Gewinn des Spielers durch 3 teilbar, so wird mit einer für den Spieler ungünstigen Münze geworfen. Entscheidet sich der Spieler für Kopf, so wird mit Münze B geworfen, entscheidet sich der Spieler für Zahl, so wird mit Münze A geworfen.
- Ist der bisherige Gewinn nicht durch 3 teilbar, so wird mit einer für den Spieler günstigen Münze geworfen; Münze C bei Entscheidung für Kopf und Münze D bei Entscheidung für Zahl.

Das eigentliche Spiel besteht aus einer Kombination der beiden angeführten Spiele und kann über eine hohe Anzahl von Runden gespielt werden, und eine faire Münze entscheidet darüber, in welcher Runde Spiel X und in welcher Runde Spiel Y gespielt wird, wobei nach jeder Runde neu durch einen Münzwurf entschieden wird. Also ist die Reihenfolge der Spiele nicht vorhersagbar²⁰⁴.

Hier noch eine schematische Darstellung des eigentlichen Spiels²⁰⁵.



Das Parrondo Spiel wird hier etwas vereinfacht dargestellt, eigentlich wird die Münze W für ein Spiel X mit -0,005 zu Ungunsten des Spielers manipuliert. Münze A wird für Spiel Y₁ mit -0,005 ebenso wie Münze D mit -0,005 zu Ungunsten des Spielers

²⁰⁴vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 108.

²⁰⁵Abbildung nach GUPTA: Parrondo's Paradox, S 2.

manipuliert. Es wird vorausgesetzt, dass der Spieler bei jedem Spiel immer das Ereignis Zahl wählt. Münzen B und C fallen aufgrund dieser fixen Wahl aus dem Spiel²⁰⁶.

7.2.2 Analyse des Spiels in vereinfachter Form

Bei Spiel X ist der erwartete Gewinn $E_X = \frac{1}{2} \cdot (+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$

Bei Spiel Y_1 ist der erwartete Gewinn der Münzen A und B: $E_{Y_1} = \frac{1}{10} \cdot (+1) \cdot \frac{9}{10} \cdot (-1) = -\frac{8}{10}$

Bei Spiel Y_2 ist der erwartete Gewinn der Münzen C und D: $E_{Y_2} = \frac{3}{4} \cdot (+1) \cdot \frac{1}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$

Die Münzen A und B kommen dabei in $\frac{5}{13}$ und die Münzen C und D in $\frac{8}{13}$ aller Spiele Y zum Einsatz.

$$E_Y = \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{8}{10}\right) + \frac{8}{13} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{40}{130} + \frac{8}{26} = 0$$

Es handelt sich somit sowohl bei Spiel X als auch bei Spiel Y um faire Spiele, welche dem Spieler auf lange Sicht in eine ungünstige Situation ohne Gewinn bringt. Wenn man nun im Parrondo Spiel beide Spiele kombiniert und eine faire Münze über die Reihenfolge der Spiele entscheiden lässt, geht die Situation für den Spieler durch diese Zufallswahl in Richtung Gewinn²⁰⁷.

7.2.3 Analyse des eigentlichen Parrondo Spiels

Dafür werden Ereigniswahrscheinlichkeiten der Münzen A, D geringfügig um 0,005 geändert und für Spiel X eine neue Münze W eingeführt mit $P(K)=0,505$ und $P(Z)=0,495$, sowie die Münzen B und C weggelassen, da vorausgesetzt wird, dass der Spieler immer das Ereignis Zahl wählt²⁰⁸.

Münze A: $P(K) = 0,905$; $P(Z) = 0,095$

Münze D: $P(K) = 0,255$; $P(Z) = 0,745$

$$E_X = 0,505 \cdot (-1) + 0,495 \cdot (+1) = -0,01$$

$$E_{Y_1} = 0,095 \cdot (+1) + 0,905 \cdot (-1) = -0,81$$

$$E_{Y_2} = 0,745 \cdot (+1) + 0,255 \cdot (-1) = -0,49$$

$$E_Y = \frac{5}{13} \cdot (-0,81) + \frac{8}{13} \cdot 0,49 = -0,01$$

²⁰⁶vgl. CLARK: Paradoxien, S 184.

²⁰⁷vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 111.

²⁰⁸vgl. CLARK: Paradoxien, S 184.

Nun betrachten wir konkret ein Parrondo Spiel, welches über 12 Runden läuft und die Spiele X und Y sich abwechseln, beginnend mit Spiel X²⁰⁹.

$$\begin{aligned}
P(6 \times Z) &= 0,495^6 &= 0,0147 & \text{(Gewinn 6)} \\
P(5 \times Z + 1 \times K) &= 0,495^5 \cdot 0,505 \cdot 6 = 0,0900 & \text{(Gewinn 4)} \\
P(4 \times Z + 2 \times K) &= 0,495^4 \cdot 0,505^2 \cdot 15 = 0,2297 & \text{(Gewinn 2)} \\
P(3 \times Z + 3 \times K) &= 0,495^3 \cdot 0,505^3 \cdot 20 = 0,3124 & \text{(Gewinn 0)} \\
P(2 \times Z + 4 \times K) &= 0,495^2 \cdot 0,505^4 \cdot 15 = 0,2390 & \text{(Gewinn - 2)} \\
P(1 \times Z + 5 \times K) &= 0,495 \cdot 0,505^5 \cdot 6 = 0,0975 & \text{(Gewinn - 4)} \\
P(6 \times K) &= 0,505^6 &= 0,0166 & \text{(Gewinn - 6)}
\end{aligned}$$

Der erwartete Gewinn ergibt sich somit:

$$E_X = 6 \cdot 0,0147 + 4 \cdot 0,0900 + 2 \cdot 0,2297 + 0 \cdot 0,3124 - 2 \cdot 0,2390 - 4 \cdot 0,0975 - 6 \cdot 0,0166 = -0,06$$

Somit sieht man, dass wir nach den ersten sechs Runden einen Verlust haben werden.

Spiel Y ist in der Aufschlüsselung etwas komplizierter. Die Wahrscheinlichkeit, 6 Euro zu gewinnen ist noch einfach mit $E_Y = 0,095^2 \cdot 0,745^4 = 0,0028$ zu errechnen. Insgesamt gibt es 64 mögliche Abfolgen, um zu den Gewinnen 4 Euro, 2 Euro, 0 Euro, -2 Euro, -4 Euro und -6 Euro zu kommen, welche in der Tabelle am Ende des Abschnittes angeführt sind.

Aus all diesen Wahrscheinlichkeiten ergibt sich für den erwarteten Gewinn:

$$E_Y = 6 \cdot 0,00278 + 4 \cdot 0,00890 + 2 \cdot 0,014065 + 0 \cdot 0,055749 - 2 \cdot 0,019208 - 4 \cdot 0,009463 - 6 \cdot 0,00346 = -0,44988$$

Da der erwartete Gewinn negativ ist, ist auch Spiel Y ein Verlustspiel.

Nun betrachten wir das Parrondo Spiel als Kombination der beiden Spiele mit 6 gespielten Runden in der Abfolge X, Y, X, Y, X, Y. Die Abfolgen samt Wahrscheinlichkeiten sind in der 2. Tabelle am Ende des Abschnittes angeführt.

Den Werten folgend ergibt sich für den erwarteten Gewinn:

$$E_P = 6 \cdot 0,00640 + 4 \cdot 0,02603 + 2 \cdot 0,53928 + 0 \cdot 0,26970 - 2 \cdot 0,06269 - 4 \cdot 0,08833 - 6 \cdot 0,00758 = 0,69687$$

²⁰⁹im Folgenden vgl. HESSE: Achtung Denkfalle, S 115-117.

Für das Parrondo Spiel kann also ein Gewinn erwartet werden. Es ergibt sich aus der Kombination zweier ungünstiger Spiele für den Spieler doch noch ein günstiges Spiel, in dem ein Gewinn eingefahren werden kann.

Spiel Y: Abfolgen mit Kontoständen samt Wahrscheinlichkeiten

€ 6G	G	G	G	G	G	1	2	3	4	5	6	0,095	0,745	0,745	0,095	0,745	0,745	0,00278
€ 4V	G	G	G	G	G	-1	0	1	2	3	4	0,905	0,745	0,095	0,745	0,745	0,095	0,00338
	G	V	G	G	G	1	0	1	2	3	4	0,095	0,255	0,0950	0,745	0,745	0,095	0,00012
	G	G	V	G	G	1	2	1	2	3	4	0,095	0,745	0,255	0,745	0,745	0,095	0,00095
	G	G	G	V	G	1	2	3	2	3	4	0,095	0,745	0,745	0,905	0,745	0,095	0,00338
	G	G	G	G	V	1	2	3	4	3	4	0,095	0,745	0,745	0,095	0,255	0,095	0,00012
	G	G	G	G	V	1	2	3	4	5	4	0,095	0,745	0,745	0,095	0,745	0,255	0,00095
€ 2V	V	G	G	G	G	-1	-2	-1	0	1	2	0,905	0,255	0,745	0,745	0,095	0,745	0,00907
	V	G	V	G	G	-1	0	-1	0	1	2	0,905	0,745	0,905	0,745	0,095	0,745	0,03217
	V	G	G	V	G	-1	0	1	0	1	2	0,905	0,745	0,095	0,255	0,095	0,745	0,00116
	V	G	G	G	V	-1	0	1	2	1	2	0,905	0,745	0,095	0,745	0,255	0,745	0,00907
	V	G	G	G	V	-1	0	1	2	3	2	0,905	0,745	0,095	0,745	0,745	0,905	0,03217
	G	V	V	G	G	1	0	-1	0	1	2	0,095	0,255	0,905	0,745	0,095	0,745	0,00116
	G	V	G	V	G	1	0	1	0	1	2	0,095	0,255	0,095	0,255	0,095	0,745	0,00004
	G	V	G	G	V	1	0	1	2	1	2	0,095	0,255	0,095	0,745	0,255	0,745	0,00033
	G	V	G	G	V	1	0	1	2	3	2	0,095	0,255	0,095	0,745	0,745	0,905	0,00116
	G	G	V	V	G	1	2	1	0	1	2	0,095	0,745	0,255	0,255	0,095	0,745	0,00033
	G	G	V	G	V	1	2	1	2	1	2	0,095	0,745	0,255	0,745	0,255	0,745	0,00255
	G	G	V	G	V	1	2	1	2	3	2	0,095	0,745	0,255	0,745	0,745	0,905	0,00907
	G	G	G	V	V	1	2	3	2	1	2	0,095	0,745	0,745	0,905	0,255	0,745	0,00907
	G	G	G	V	G	1	2	3	2	3	2	0,095	0,745	0,745	0,905	0,745	0,905	0,03217
	G	G	G	G	V	1	2	3	4	3	2	0,095	0,745	0,745	0,095	0,255	0,905	0,00116
€ 0V	V	V	G	G	G	-1	-2	-3	-2	-1	0	0,905	0,255	0,255	0,095	0,745	0,745	0,00310
	V	V	G	V	G	-1	-2	-1	-2	-1	0	0,905	0,255	0,745	0,255	0,745	0,745	0,02433
	V	V	G	V	G	-1	-2	-1	0	-1	0	0,905	0,255	0,745	0,745	0,905	0,745	0,08636
	V	V	G	G	V	-1	-2	-1	0	1	0	0,905	0,255	0,745	0,745	0,095	0,255	0,00310
	V	G	V	V	G	-1	0	-1	-2	-1	0	0,905	0,745	0,905	0,255	0,745	0,745	0,08636
	V	G	V	G	V	-1	0	-1	0	-1	0	0,905	0,745	0,905	0,745	0,905	0,745	0,30649
	V	G	V	G	V	-1	0	-1	0	1	0	0,905	0,745	0,905	0,745	0,095	0,255	0,01101
	V	G	G	V	V	-1	0	1	0	-1	0	0,905	0,745	0,095	0,255	0,905	0,745	0,01101
	V	G	G	V	G	-1	0	1	0	1	0	0,905	0,745	0,095	0,255	0,095	0,255	0,00040
	V	G	G	G	V	-1	0	1	2	1	0	0,905	0,745	0,095	0,745	0,255	0,255	0,00310
	G	V	V	V	G	1	0	-1	-2	-1	0	0,095	0,255	0,905	0,255	0,745	0,745	0,00310
	G	V	V	G	V	1	0	-1	0	-1	0	0,095	0,255	0,905	0,745	0,095	0,255	0,00040
	G	V	G	V	V	1	0	1	0	-1	0	0,095	0,255	0,095	0,255	0,905	0,745	0,00040
	G	V	G	V	G	1	0	1	0	1	0	0,095	0,255	0,095	0,255	0,095	0,255	0,00001
	G	V	G	G	V	1	0	1	2	1	0	0,095	0,255	0,095	0,745	0,255	0,255	0,00011
	G	G	V	V	V	1	2	1	0	-1	0	0,095	0,745	0,255	0,255	0,905	0,745	0,00310
	G	G	V	V	G	1	2	1	0	1	0	0,095	0,745	0,255	0,255	0,095	0,255	0,00011
	G	G	V	G	V	1	2	1	2	1	0	0,095	0,745	0,255	0,745	0,255	0,255	0,00087
	G	G	G	V	V	1	2	3	2	1	0	0,095	0,745	0,745	0,905	0,255	0,255	0,00310
€ 2V	V	V	V	G	G	-1	-2	-3	-4	-3	-2	0,905	0,255	0,255	0,905	0,745	0,095	0,00377
	V	V	V	G	V	-1	-2	-3	-2	-3	-2	0,905	0,255	0,255	0,095	0,255	0,095	0,00014
	V	V	V	G	V	-1	-2	-3	-2	-1	-2	0,905	0,255	0,255	0,095	0,745	0,255	0,00106
	V	V	G	V	V	-1	-2	-1	-2	-3	-2	0,905	0,255	0,745	0,255	0,255	0,095	0,00106
	V	V	G	V	G	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0,905	0,255	0,745	0,255	0,745	0,255	0,00833
	V	V	G	G	V	-1	-2	-1	0	-1	-2	0,905	0,255	0,745	0,745	0,905	0,255	0,02956
	V	G	V	V	V	-1	0	-1	-2	-3	-2	0,905	0,745	0,905	0,255	0,255	0,095	0,00377
	V	G	V	V	G	-1	0	-1	-2	-1	-2	0,905	0,745	0,905	0,255	0,745	0,255	0,02956
	V	G	V	G	V	-1	0	-1	0	-1	-2	0,905	0,745	0,905	0,745	0,905	0,255	0,10491
	V	G	G	V	V	-1	0	1	0	-1	-2	0,905	0,745	0,095	0,255	0,905	0,255	0,00377
	G	V	V	V	V	1	0	-1	-2	-3	-2	0,095	0,255	0,905	0,255	0,255	0,095	0,00014
	G	V	V	G	V	1	0	-1	-2	-1	-2	0,095	0,255	0,905	0,255	0,745	0,255	0,00106
	G	V	V	G	V	1	0	-1	0	-1	-2	0,095	0,255	0,905	0,745	0,905	0,255	0,00377
	G	V	G	V	V	1	0	1	0	-1	-2	0,095	0,255	0,095	0,255	0,905	0,255	0,00014
	G	G	V	V	V	1	2	1	0	-1	-2	0,095	0,745	0,255	0,255	0,905	0,255	0,00106
€ 4G	V	V	V	V	V	1	0	-1	-2	-3	-4	0,095	0,255	0,905	0,255	0,255	0,905	0,00129
	V	G	V	V	V	-1	0	-1	-2	-3	-4	0,905	0,745	0,905	0,255	0,255	0,905	0,03591
	V	V	G	V	V	-1	-2	-1	-2	-3	-4	0,905	0,255	0,745	0,255	0,255	0,905	0,01012
	V	V	V	G	V	-1	-2	-3	-2	-3	-4	0,905	0,255	0,255	0,095	0,255	0,905	0,00129
	V	V	V	V	V	-1	-2	-3	-4	-3	-4	0,905	0,255	0,255	0,905	0,745	0,905	0,03591
	V	V	V	V	V	-1	-2	-3	-4	-5	-4	0,905	0,255	0,255	0,905	0,255	0,745	0,01012
€ 6V	V	V	V	V	V	-1	-2	-3	-4	-5	-6	0,905	0,255	0,255	0,905	0,255	0,255	0,00346

Parrondo Spiel in Abfolge X, Y, X, Y, X, Y : Kontostände und Wahrscheinlichkeiten

€6G	G	G	G	G	G	1	2	3	4	5	6	0.495	0.745	0.495	0.095	0.495	0.745	0.00640
€4V	G	G	G	G	G	-1	0	1	2	3	4	0.505	0.745	0.495	0.745	0.495	0.095	0.00652
	G	V	G	G	G	1	0	1	2	3	4	0.495	0.255	0.495	0.745	0.495	0.095	0.00219
	G	G	V	G	G	1	2	1	2	3	4	0.495	0.745	0.505	0.745	0.495	0.095	0.00652
	G	G	G	V	G	1	2	3	2	3	4	0.495	0.745	0.495	0.905	0.495	0.095	0.00777
	G	G	G	G	V	1	2	3	4	3	4	0.495	0.745	0.495	0.095	0.505	0.095	0.00083
	G	G	G	G	V	1	2	3	4	5	4	0.495	0.745	0.495	0.095	0.495	0.255	0.00219
€2V	V	G	G	G	G	-1	-2	-1	0	1	2	0.505	0.255	0.495	0.745	0.495	0.745	0.01751
	V	G	V	G	G	-1	0	-1	0	1	2	0.505	0.745	0.505	0.745	0.495	0.745	0.05220
	V	G	G	V	G	-1	0	1	0	1	2	0.505	0.745	0.495	0.255	0.495	0.745	0.01751
	V	G	G	G	V	-1	0	1	2	1	2	0.505	0.745	0.495	0.745	0.505	0.745	0.05220
	V	G	G	G	V	-1	0	1	2	3	2	0.505	0.745	0.495	0.745	0.495	0.905	0.06215
	G	V	V	G	G	1	0	-1	0	1	2	0.495	0.255	0.505	0.745	0.495	0.745	0.01751
	G	V	G	V	G	1	0	1	0	1	2	0.495	0.255	0.495	0.255	0.495	0.745	0.00588
	G	V	G	G	V	1	0	1	2	1	2	0.495	0.255	0.495	0.745	0.505	0.745	0.01751
	G	V	G	G	V	1	0	1	2	3	2	0.495	0.255	0.495	0.745	0.495	0.905	0.02085
	G	G	V	V	G	1	2	1	0	1	2	0.495	0.745	0.505	0.255	0.495	0.745	0.01751
	G	G	V	G	V	1	2	1	2	1	2	0.495	0.745	0.505	0.745	0.505	0.745	0.05220
	G	G	V	G	V	1	2	1	2	3	2	0.495	0.745	0.505	0.745	0.495	0.905	0.06215
	G	G	G	V	V	1	2	3	2	1	2	0.495	0.745	0.495	0.905	0.505	0.745	0.06215
	G	G	G	V	G	1	2	3	2	3	2	0.495	0.745	0.495	0.905	0.495	0.905	0.07401
	G	G	G	G	V	1	2	3	4	3	2	0.495	0.745	0.495	0.095	0.505	0.905	0.00793
€0V	V	V	G	G	G	-1	-2	-3	-2	-1	0	0.505	0.255	0.505	0.095	0.495	0.745	0.00228
	V	V	G	V	G	-1	-2	-1	-2	-1	0	0.505	0.255	0.495	0.255	0.495	0.745	0.00599
	V	V	G	V	G	-1	-2	-1	0	-1	0	0.505	0.255	0.495	0.745	0.505	0.745	0.01787
	V	V	G	G	V	-1	-2	-1	0	1	0	0.505	0.255	0.495	0.745	0.495	0.255	0.00599
	V	G	V	V	G	-1	0	-1	-2	-1	0	0.505	0.745	0.505	0.255	0.495	0.745	0.01787
	V	G	V	V	G	-1	0	-1	0	-1	0	0.505	0.745	0.505	0.745	0.505	0.745	0.05325
	V	G	V	G	V	-1	0	-1	0	1	0	0.505	0.745	0.505	0.745	0.495	0.255	0.01787
	V	G	G	V	V	-1	0	1	0	-1	0	0.505	0.745	0.495	0.255	0.505	0.745	0.01787
	V	G	G	V	G	-1	0	1	0	1	0	0.505	0.745	0.495	0.255	0.495	0.255	0.00599
	V	G	G	V	V	-1	0	1	2	1	0	0.505	0.745	0.495	0.745	0.505	0.255	0.01787
	G	V	V	V	G	1	0	-1	-2	-1	0	0.495	0.255	0.505	0.255	0.495	0.745	0.00599
	G	V	V	G	V	1	0	-1	0	-1	0	0.495	0.255	0.505	0.745	0.505	0.745	0.01787
	G	V	V	G	V	1	0	-1	0	1	0	0.495	0.255	0.505	0.745	0.495	0.255	0.00599
	G	V	G	V	V	1	0	1	0	-1	0	0.495	0.255	0.495	0.255	0.505	0.745	0.00599
	G	V	G	V	G	1	0	1	0	1	0	0.495	0.255	0.495	0.255	0.495	0.255	0.00201
	G	V	G	G	V	1	0	1	2	1	0	0.495	0.255	0.495	0.745	0.505	0.255	0.00599
	G	G	V	V	V	1	2	1	0	-1	0	0.495	0.745	0.505	0.255	0.505	0.745	0.01787
	G	G	V	V	V	1	2	1	0	1	0	0.495	0.745	0.505	0.255	0.495	0.255	0.00599
	G	G	G	V	V	1	2	3	2	1	0	0.495	0.745	0.495	0.905	0.505	0.255	0.02127
€2V	V	V	V	G	G	-1	-2	-3	-4	-3	-2	0.505	0.255	0.505	0.905	0.495	0.095	0.00277
	V	V	V	G	V	-1	-2	-3	-2	-3	-2	0.505	0.255	0.505	0.095	0.505	0.095	0.00030
	V	V	V	G	G	-1	-2	-3	-2	-1	-2	0.505	0.255	0.505	0.095	0.495	0.255	0.00078
	V	V	G	V	V	-1	-2	-1	-2	-3	-2	0.505	0.255	0.495	0.255	0.505	0.095	0.00078
	V	V	G	V	G	-1	-2	-1	-2	-1	-2	0.505	0.255	0.495	0.255	0.495	0.255	0.00205
	V	V	G	G	V	-1	-2	-1	0	-1	-2	0.505	0.255	0.495	0.745	0.505	0.255	0.00612
	V	G	V	V	V	-1	0	-1	-2	-3	-2	0.505	0.745	0.505	0.255	0.505	0.095	0.00232
	V	G	V	V	G	-1	0	-1	-2	-1	-2	0.505	0.745	0.505	0.255	0.495	0.255	0.00612
	V	G	V	G	V	-1	0	-1	0	-1	-2	0.505	0.745	0.505	0.745	0.505	0.255	0.01823
	V	G	G	V	V	-1	0	1	0	-1	-2	0.505	0.745	0.495	0.255	0.505	0.255	0.00612
	G	V	V	V	V	1	0	-1	-2	-3	-2	0.495	0.255	0.505	0.255	0.505	0.095	0.00078
	G	V	V	V	G	1	0	-1	-2	-1	-2	0.495	0.255	0.505	0.255	0.495	0.255	0.00205
	G	V	V	G	V	1	0	-1	0	-1	-2	0.495	0.255	0.505	0.745	0.505	0.255	0.00612
	G	V	G	V	V	1	0	1	0	-1	-2	0.495	0.255	0.495	0.255	0.505	0.255	0.00205
	G	G	V	V	V	1	2	1	0	-1	-2	0.495	0.745	0.505	0.255	0.505	0.255	0.00612
€4G	V	V	V	V	V	1	0	-1	-2	-3	-4	0.495	0.255	0.505	0.255	0.505	0.905	0.00743
	V	G	V	V	V	-1	0	-1	-2	-3	-4	0.505	0.745	0.505	0.255	0.505	0.905	0.02214
	V	V	G	V	V	-1	-2	-1	-2	-3	-4	0.505	0.255	0.495	0.255	0.505	0.905	0.00743
	V	V	V	G	V	-1	-2	-3	-2	-3	-4	0.505	0.255	0.505	0.095	0.505	0.905	0.00282
	V	V	V	V	G	-1	-2	-3	-4	-3	-4	0.505	0.255	0.505	0.905	0.495	0.905	0.02636
	V	V	V	V	V	-1	-2	-3	-4	-5	-4	0.505	0.255	0.505	0.905	0.505	0.745	0.02214
€6V	V	V	V	V	V	-1	-2	-3	-4	-5	-6	0.505	0.255	0.505	0.905	0.505	0.255	0.00758

7.3 Das Umtausch Paradoxon

Für das Spiel, welches diesem Paradoxon zugrunde liegt, benötigt man zwei Umschläge, in welchen gewisse Geldbeträge liegen. Man weiß, dass in einem Umschlag der doppelte Betrag liegt als im anderen Umschlag, d. h. es liegen 100 Euro und 50 Euro oder 100 Euro und 200 Euro, 200 Euro und 400 Euro, ... in den Umschlägen. Um nicht durch die Dicke der Umschläge einen Vorteil bei der Auswahl zu haben, sei angenommen, dass sich in den Umschlägen nur Schecks befinden. Der Spielleiter wählt nun zufällig einen Umschlag aus und danach lässt der Spielleiter die Möglichkeit des Tausches zu.

Die Frage, welche dem Paradoxon nun zugrunde liegt, ist: Soll man tauschen?

Man weiß, dass in einem Umschlag a Euro liegen und im anderen liegen entweder $2a$ Euro oder $\frac{a}{2}$ Euro. Durch die zufällige Wahl der Umschläge hat jede der zwei Varianten die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Der erwartete Gewinn ist also:

$$E_a = 2a \cdot \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot a$$

Tauschen ist also die bessere Alternative.

Nach dem Tausch fragt dann der Spielleiter, ob man nochmals tauschen will, und nach der vorhergehenden Rechnung, die auch für diese Situation gilt, tauscht man wieder. Dieses Spiel kann man immer weiter treiben und der Tausch bleibt immer lukrativer als das Behalten²¹⁰.

Bevor ich zur Analyse dieser Situation komme, möchte ich noch eine kleine Modifikation dieses Spiels betrachten. Es befinden sich zwei unterschiedlich hohe Geldbeträge in zwei Umschlägen und wurden von zwei unabhängigen Personen in diese Umschläge gelegt. Für beide bestand freie Wahl der Beträge. Man gewinnt, wenn man den Umschlag mit dem höheren Geldbetrag wählt. Soll man zufällig oder strategisch wählen?

Die Frage lässt sich durch folgende Analyse beantworten.

Seien X und Y die beiden zu gewinnenden Geldbeträge. Man denkt sich einen Betrag Z und wenn der geöffnete Umschlag einen Betrag X enthält, der kleiner als Z ist, tausche ich, ansonsten nicht.

²¹⁰vgl. KRÄMER: Denkste, S 132-133.

Es gibt 3 mögliche Ausgänge:

- X und Y sind beide kleiner als Z.
- Z liegt zwischen X und Y.
- X und Y sind beide größer als Z.

$P(A)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Fall eintritt, $P(B)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Fall eintritt und $P(C)$ sei die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Fall eintritt. Wenn der erste Fall eintritt, tauscht man, im dritten Fall wählt man X. In diesen beiden Fällen gewinnt man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Bei Eintreten des zweiten Falles gewinnt man mit Sicherheit. Die Gewinnwahrscheinlichkeit W ist somit:

$$W = \frac{1}{2} \cdot [P(A) + P(C)] + P(B)$$

wobei $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ gilt, und daraus folgt

$$W = \frac{1}{2} \cdot [P(A) + P(B) + P(C)] + \frac{1}{2} \cdot P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot P(B)$$

Da $P(B) > 0$ gilt, wählt man mit dieser Methode also besser als wenn man über den Tausch zufällig entscheidet²¹¹.

Nun wieder zurück zum ersten Spiel. Hier könnte das Spiel unendlich lang fortgesetzt werden und man würde als Spieler immer besser abschneiden. Ein Haken an der Annahme, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ das Doppelte und mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ die Hälfte des gewählten Geldbetrages im anderen Umschlag ist, ist, dass, nach einem Satz aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, auf der Menge der natürlichen Zahlen keine Gleichverteilung möglich ist. In unserem Fall wird aber Gleichverteilung angenommen. Wenn man nun den Umschlag öffnet, sieht man, dass sich a Euro im Umschlag befinden und ich weiß, dass der Gewinn entweder a oder $\frac{a}{2}$ ist. Ist a der Gewinn, dann gewinne ich durch tauschen, ist $\frac{a}{2}$ der Gewinn, dann verliere ich durch tauschen.

²¹¹vgl. BRUSS: Schnippchen, S 106-107.

Das heißt:

$$E(G) = 2a \cdot P(G = a | G = a \wedge G = \frac{a}{2}) + \frac{a}{2} \cdot P(G = \frac{a}{2} | G = a \wedge G = \frac{a}{2})$$

Je nach Verteilung der Zufallsvariablen G kann $E(G) > a$ oder $E(G) < a$ sein. Hohe Gewinnbeträge werden mit zunehmender Höhe immer unwahrscheinlicher bei solchen Spielen. Da $P(G = \frac{a}{2} | G = a \wedge G = \frac{a}{2})$ dadurch irgendwann einmal größer wird als $P(G = a | G = a \wedge G = \frac{a}{2})$, können wir annehmen, dass, wenn diese auf das Doppelte anwächst, sich tauschen nicht mehr lohnt und sich damit das Paradoxon in Luft auflöst²¹².

²¹²vgl. KRÄMER: Denkste, S 134-135.

8 Paradoxa aus der Analysis

8.1 Das Band Paradoxon II (Die Schnecke auf dem Gummiband)

Hierbei handelt es sich um eine virtuelle Szenerie, bei der eine beliebig alt werden-
de Schnecke und ein beliebig dehnbares Gummiband eine zentrale Rolle spielen²¹³.
Diese Darstellung der Situation soll den für viele Betrachter nicht für möglich ge-
haltenen Ausgang der Fragestellung untermauern. Nehmen wir an, eine Schnecke
krabbelt vom linken Ende eines 1 m langen Gummibandes mit einer Geschwindig-
keit von 1 cm/min in Richtung rechtes Ende. Am Ende jeder Minute wird das Band
um 1 m blitzartig gedehnt. Die Frage lautet: Kommt die Schnecke jemals am rechten
Ende des Gummibandes an?

Die meisten Gefragten würden dies verneinen, mit der Begründung, dass sich das
Ende des Bandes von der Position der Schnecke immer weiter entfernt. Wir wollen
jetzt eine Begründung dafür liefern, dass entgegen der Meinung der meisten Men-
schen die Schnecke doch das rechte Ende erreicht, wenn auch sehr viel Zeit braucht,
aber wir haben ja beliebig viel Zeit zur Verfügung.

In der 1. Minute legt die Schnecke 1 cm zurück und hat noch 99 cm vor sich, d. h.
sie hat $\frac{1}{100}$ der Bandlänge zurückgelegt. Dann folgt die blitzartige Dehnung und am
Beginn der 2. Minute wird das Band auf 2 m gedehnt und zwar gleichmäßig, sodass
sich bei 2-facher Bandlänge beides, der zurückzulegende Weg und auch der bereits
zurückgelegte Weg, auf das 2-fache ansteigen, d. h. am Beginn der 2. Minute hat die
Schnecke 2 cm hinter sich und noch 198 cm vor sich und sie hat weiterhin $\frac{1}{100}$ ihres
Weges zurückgelegt. Während der 2. Minute legt die Schnecke wieder 1 cm zurück,
also $\frac{1}{200}$ der gestreckten Bandlänge. Am Ende dieser 2 Minuten hat sie 3 cm hinter
sich und 197 cm vor sich. Anders gesagt: Sie hat am Ende der 2. Minute $\frac{1}{100} + \frac{1}{200}$ der
Bandlänge zurückgelegt. Nach der zweiten Streckung, diesmal um das 1,5fache, hat
die Schnecke 4,5 cm hinter sich und 295,5 cm vor sich. Während der 3. Minute legt
die Schnecke wieder 1 cm, diesmal $\frac{1}{300}$ der Gesamtlänge, zurück. Nach 3 Minuten hat
sie 5,5 cm zurückgelegt und 294,5 cm noch vor sich, dann folgt wieder eine Dehnung,

²¹³im Folgenden vgl. SCHUPPAR,HUMENBERGER: Elementare Numerik, S 76.

diesmal um das $\frac{4}{3}$ -fache. Lassen wir dies beliebig lange so weitergehen.

Betrachten wir im Folgenden nicht mehr den absoluten Weg, sondern die Anteile des Bandes, welche die Schnecke in der jeweils n -ten Minute zurücklegt. Wenn man sich die vorhergehende Beschreibung der Situation ansieht, kann gefolgert werden, dass die Schnecke in der n -ten Minute, in der das Band n Meter lang ist, einen Weg von $\frac{1}{100 \cdot n}$ zurücklegt.

Nach n Minuten beträgt der Gesamtanteil also:

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \cdots + \frac{1}{100 \cdot n}$$

Um zu zeigen, dass die Schnecke ankommen wird, muss die obere Summe zumindest den Wert 1 erreichen, denn dann wären 100% des Weges zurückgelegt. Die nächste Frage lautet also: Gibt es $n \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \cdots + \frac{1}{100 \cdot n} \geq 1$ oder einfacher:

$$\exists n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 100$$

Bei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ handelt es sich für $n \rightarrow \infty$ um die harmonische Reihe, welche divergiert und daher die Partialsummen jede noch so große Grenze überschreiten.

Im Folgenden sei noch die Divergenz gezeigt²¹⁴.

SATZ: Die harmonische Reihe

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

divergiert für $n \rightarrow \infty$

Beweis:

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \cdots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{8}{16} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Divergenz $\square$

²¹⁴vgl. HAVIL: Gamma, S 33.

Wir wissen nun um die Divergenz der harmonischen Reihe, daher gibt es ein n , so dass $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 100$.

Also haben wir festgestellt, dass die Schnecke tatsächlich ihr Ziel erreicht. Um die Zeit, welche die Schnecke braucht, zu bestimmen, müssen wir n berechnen. Die Minimalzahl der Glieder, die man braucht, damit diese Ungleichung erfüllt ist, beträgt nach WRENCH

$$15092688622113788323693563264538101449859497$$

Um ein Gefühl zu bekommen, wie groß diese Anzahl an Summanden ist, sei folgendes Beispiel gegeben:

Durchschnittliche Computer können ca. 10^{12} Rechenoperationen pro Sekunde ausführen. Für die Anzahl an benötigten Operationen, welche notwendig sind, um die Zahl 100 zu überschreiten, würde ein Computer $5 \cdot 10^{14}$ Milliarden Jahre brauchen.

Hat man die genaue Zahl nicht ad-hoc zur Verfügung, so hilft uns zur Feststellung der Größenordnung folgende Überlegung²¹⁵:

Wir wissen $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$ und daraus kann man folgern: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln(n)$

Wenn wir nun $n \rightarrow \infty$ gehen lassen, ergibt sich folgende Grenzwertaussage:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) \right] = 0,57721566$$

Dieser Grenzwert wird die Euler-Mascheroni Konstante genannt.

Dadurch erhalten wir eine bessere Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln(n) + 0,57722$$

und wir können die Zeit, die die Schnecke braucht, um zum Ende des Gummibandes zu kommen, berechnen.

²¹⁵im Folgenden vgl. SCHUPPAR,HUMENBERGER: Elementare Numerik, S 76.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(n) + 0,57722 \geq 100 \Leftrightarrow \ln(n) \geq 99,42278 \Leftrightarrow n \geq e^{99,42278} \approx 1,51 \cdot 10^{43} (\text{Minuten})$$

oder $2,87 \cdot 10^{37}$ Jahre.

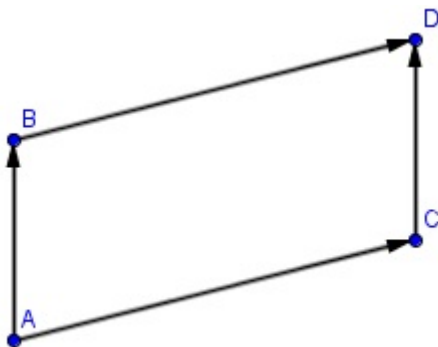
Zur besseren Einordnung dieser Zeitdauer ist zu sagen, dass nach derzeitlichen wissenschaftlichen Erkenntnissen der Urknall vor etwa $1,4 \cdot 10^{10}$ Jahren stattgefunden hat. Zusätzlich sei noch zu sagen, dass die Geschwindigkeit der Schnecke, die Dehnungsgeschwindigkeit und die ursprüngliche Länge des Bandes völlig willkürlich gewählt wurden und andere Größen nichts an der Tatsache verändern, dass die Schnecke das rechte Ende des Bandes erreicht. Man muss ihr nur genügend Zeit dafür lassen.

8.2 Braess Paradoxon

Hierbei handelt es sich um eine Situation, die der Verkehrsplanung entstammt. Es kann passieren, dass sich bei Erweiterung des Verkehrsnetzes und gleichbleibendem Verkehrsaufkommen die Fahrtzeiten für die einzelnen Autofahrer verlängern²¹⁶.

Dazu sei folgendes Beispiel gegeben²¹⁷:

Gegeben sind die vier Orte A, B, C, D, wobei jeweils zwei Orte durch vier Straßen miteinander verbunden werden (Straße 1 verbindet A mit B, Straße 2 verbindet A mit C, Straße 3 verbindet C mit D und Straße 4 verbindet B mit D). Dieses Straßennetz könnte durch ein Parallelogramm in folgender Form dargestellt werden.



²¹⁶vgl. BRAESS: Verkehrsplanung, S 258.

²¹⁷im Folgenden vgl. BRAESS: Verkehrsplanung, S 258.

Die Fahrzeit für die Strecke von A nach C beträgt ebenso wie die Fahrzeit von B nach D $(50+x)$ Minuten, wobei x die Verkehrsdichte auf einer bestimmten Strecke darstellt, in der Einheit der Fahrzeuge/h (in Tausend gemessen). Von A nach B sowie von C nach D benötigt man $10 \cdot x$ Minuten. Mathematisch gesprochen heißt dies:

$$t_{AC}(x) = t_{BD}(x) = (50 + x)$$

$$t_{AB}(x) = t_{CD}(x) = 10 \cdot x$$

Für die Strecken AC und BD hat die Verkehrsdichte nur wenig Einfluss, also könnte es sich um eine gut ausgebaute Autobahn handeln. Bei den Strecken AB und CD könnte es sich um schlecht ausgebaute Landstraßen handeln, da hier die Verkehrsdichte einen wesentlich größeren Einfluss auf die Fahrzeit hat. Nachdem jeder Autofahrer nach der für sich besten Lösung sucht, ergibt sich für den Gesamtstrom $|X|=6$, welcher von A nach D fährt, wobei $X_{ABD} = X_{ACD} = 3$ (jeweils die Hälfte der Autofahrer fährt auf gleich optimalen Strecken), der Zeitaufwand von 83 min pro Autofahrer. Für die Fahrt von A über B nach D bzw. von A über C nach D ergibt sich also:

$$T_{ACD}(x) = t_{AC}(x) + t_{CD}(x) = (50 + x) + (10x) = 11x + 50$$

Für $x=3$ ergibt sich also der Zeitaufwand von 83 Minuten.

Wird nun eine neue Straße zwischen B und C gebaut, welche nur in eine Richtung befahren werden kann (eine Brücke über den See beispielsweise, den die Autobahnen aufgrund der verbauten Straßenfläche großräumig umfahren mussten), ergibt sich für $t_{BC}(x) = (10 + x)$ min. Für den Gesamtstrom $|X|=6$ und gleichmäßiger Verteilung $X=2$ auf alle drei möglichen Strecken ABD, ACD und ABCD ergibt sich theoretisch

$$T_{ABD}(x) = (50 + x) + 10x = 11x + 50$$

$$T_{ACD}(x) = (50 + x) + 10x = 11x + 50$$

$$T_{ABCD}(x) = 10x + (10 + x) + 10x = 21x + 30$$

Setzt man nun $x=2$ ein, so ergibt sich theoretisch eine Fahrzeit von 72 Minuten.

Worauf man bei oberflächlicher Betrachtung leicht vergisst: Die Straße AB wird von den Nutzern der Strecke ABD und ABCD, und die Straße CD wird von den Nutzern der Strecke ABCD gleichzeitig genutzt, und da sowohl die Straße AB als auch die Straße CD nicht doppelstöckig vorhanden sind, ist die Berechnung der Fahrzeit mit 72 Minuten nicht korrekt. Auf den Straßen AB und CD beträgt nämlich die Verkehrsdichte $x=4$ und somit lautet die korrekte Berechnung der Fahrzeit:

$$T_{ABD} = t_{AB}(4) + t_{BD}(2) = 10 \cdot 4 + (50 + 2) = 92min$$

$$T_{ACD} = t_{AC}(2) + t_{CD}(4) = (50 + 2) + 10 \cdot 4 = 92min$$

$$T_{ABCD} = t_{AB}(4) + t_{BC}(2) + t_{CD}(4) = 10 \cdot 4 + (10 + 2) + 10 \cdot 4 = 92min$$

Bei gleichbleibender Verkehrsdichte und gleichmäßiger Verteilung brauchen also alle Autofahrer für die Strecke von Ort A nach Ort B nach Eröffnung der neuen Straße BC um neun Minuten länger an ihr Ziel als vor der Eröffnung. In ungünstigen Fällen kann sich also die Fahrzeit bei Erweiterung des Straßennetzes erhöhen.

Die Verkehrsdichte betrug vor der Eröffnung der Strecke BC sowohl auf der Nord- als auch auf der Südroute $x=3$. Wenn sich bei gleichbleibender Gesamtdichte der Verkehrsfluss auf der Nordroute erhöht, dann erhöht sich auch die Fahrzeit auf der Nordroute und die Fahrzeit auf der Südroute wird geringer, sodass mit diesem Wissen wieder einige Autofahrer von der Nordroute auf die Südroute wechseln. Deshalb wird sich die Verkehrsdichte auf beiden Routen immer bei $x=3$ einpendeln. Natürlich könnten einige Autofahrer nach der Eröffnung der Brücke und Erkenntnis der längeren Fahrzeit wieder auf ihre alte Routen zurückwechseln, sodass $X_{ABD} = X_{ACD} = 2,5$ wäre und $X_{ABCD} = 1$. Wenn aber Autofahrer gleichmäßig auf die Nord- und Südroute wechseln, ergibt sich für die Brückenroute eine noch kürzere Fahrzeit und die Autofahrer wären wieder in Versuchung auf die Brückenroute zu wechseln, da sich nun mit 81 Minuten eine kürzere Fahrzeit ergibt als es sie in letzter Zeit auf der Nord- und Südroute gab. Und mit dem Rückwechsel würden wieder alle Autofahrer länger brauchen. Denn für Autofahrer zählt nicht, dass sie auf einer anderen Strecke weniger Zeit brauchen, solange es noch eine Strecke gibt, auf der die Fahrzeit noch kürzer ist²¹⁸.

²¹⁸vgl. BORNHOLDT,DUBBEN: Wahrscheinlichkeit, S 80-81.

8.3 Eulers Reihen

8.3.1 Unendliche Summen

Zunächst werfen wir einmal einen Blick auf unendliche Summen. Damit soll gemeint sein, dass solche Summen trotz einer unendlichen Anzahl von Summanden trotz allem eine endliche Summe ergeben. Unendliche Summen der Form

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

nennt man eine Reihe.

Sehen wir uns ein Beispiel dafür an. $S = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$

Wenn man jetzt den Faktor q ausklammert, ergibt sich

$$S = 1 + q \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$$

Wie man sieht, steht in der Klammer derselbe Term wie es auch dem ursprünglichen Summenterm entspricht. Daher kann man sagen, dass $S = 1 + q \cdot S$ oder $S \cdot (1 - q) = 1$ ist, und folglich kann man eine Formel für diese Summe herleiten, welche lautet:

$$\sum_k = 0^\infty q^k = \frac{1}{1 - q}$$

Dies gilt nur für $|q| < 1$, denn für $|q| > 1$, sei hier $q=2$ als Beispiel genommen, ergibt sich laut Formel $-1=1+2+4+8$ und die Aufsummierung positiver Zahlen kann unmöglich eine negative Zahl ergeben. Nehmen wir nun für $q = \frac{1}{10}$ und es ergibt sich für

$$\sum_k = 0^\infty \frac{1}{10^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

die Dezimalbruchentwicklung für $\frac{10}{9} = 1,1111\dots = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$, was genau unserer Annahme entspricht²¹⁹.

²¹⁹vgl. BARTHE: Unendliche Summen, S 19.

8.3.2 Reihenentwicklungen

Die vorhin betrachtete Reihe heißt geometrische Reihe und diese war für lange Zeit die einzige, mit der Mathematiker arbeiten konnten. Anfang des 17. Jahrhunderts kamen die sogenannten Teleskopreihen dazu, bei welcher die Terme Glieder enthalten, die sich gegenseitig wegheben²²⁰. Beispiele dazu wären:

1. Beispiel

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k \cdot (k+1)} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots \right] = \\ &= 2 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots \right] = 2\end{aligned}$$

2. Beispiel

$$\begin{aligned}T_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \dots \\ (1-q) \cdot T_1 &= (1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \dots) - (q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 5q^5 + \dots) \\ (1-q) \cdot T_1 &= 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots\end{aligned}$$

Dies ist also die geometrische Reihe S , welche vorhin betrachtet wurde.

Also ist die Summe der Reihe T_1 nichts anderes als die Summe der geometrischen Reihe geteilt durch $(1-q)$.

$$T_1 = \frac{S}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

²²⁰im Folgenden vgl. BARTHE: Unendliche Summen, S 20-22.

3.Beispiel

Wie bereits in einem Kapitel zuvor gezeigt wurde, hat die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ keine endliche Summe, die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ schon. Hier die Herleitung nach Mark Finkelstein.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{6} \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{8} \right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$$

Für $k = 1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$ und $n = 1, 2, \dots$ gilt:

$$\frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{2^n}{2^n + (2k-1)} - \frac{2^n}{2^n + 2k} \right) = \frac{1}{2^n + 2k-1} - \frac{1}{2^n + 2k-1}$$

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln 2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

Also ergibt sich für die alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \ln 2$$

8.3.3 Eulers alternierende Reihen

Die Reihe 1-1+1-1+1-1+...

Eine recht einfache Reihe $1-1+1-1+1-1+\dots$ sorgte für große Diskussionen. Denn einerseits konnte diese Summe geschrieben werden als $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$, was zur Folge hatte, dass die Summe dieser Reihe gleich 0 ist. Andererseits ergibt die Reihe bei anderer Klammerung mit $1-(1+1)-(1+1)-\dots$ die Summe 1. Eine dritte Version mit einer Herleitung ähnlich jener der geometrischen Reihe ergibt für $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - S$, was einer Summe von $\frac{1}{2}$ entspricht (Argument nach Grandi). Bekanntlich ist $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$, was der Grundlage der Argumentation von Euler entsprach. Setzt man nun für $q=1$ ein, ergibt sich $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, was im Grunde die Annahme von Grandi bestätigte²²¹.

²²¹vgl. KLINE: Euler, S 307-308.

Betrachtung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)$

Zur Herleitung der Summe²²²:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + - \dots$$

$$4S = (1-2+3-4+-\dots) + (1-2+3-4+-\dots) + (1-2+3-4+-\dots) + (1-2+3-4+-\dots)$$

$$4S = (1-2+3-4+-\dots) + 1 + (-2+3-4+5-+-\dots) + 1 + (-2+3-4+5-+-\dots) - 1 + \\ + (3-4+5-6+-\dots)$$

$$4S = 1 + [(1-2-2+3) + (-2+3+3-4) + (3-4-4+5) + (-4+5+5-6) + \dots] \Rightarrow 4S = 1$$

und somit gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1) = \frac{1}{4}$$

Die Grundlage für den Erhalt solch paradoxer Ergebnisse ist, dass man dabei die absolute Konvergenz völlig außer Acht lässt, was aber für die Umordnung solcher Reihen notwendig ist²²³.

Herleitung der Summen für die verallgemeinerte harmonische Reihe nach Euler

Die verallgemeinerte harmonische Reihe wird folgendermaßen dargestellt:

$$H_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

Als Erstem gelang es Euler, diese Summe für geradzahlige n zu bestimmen. Als Beispiel sehen wir sich die Herleitung für den Fall $n=2$ an²²⁴.

Dazu benötigt man die Potenzreihenentwicklung von $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

²²²de.wikipedia.org/wiki/Alternierende_Reihe_(Euler), 11.2.2019

²²³vgl. ebd.

²²⁴im Folgenden vgl. BARTHE: Unendliche Summen, S 22-23.

Hätte die Reihe endlich viele Glieder, könnte man diese als Polynom auffassen und es würde gelten:

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades wären und $p(0)=1$. Euler wendete diese Tatsache auf

$$p(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \dots$$

an, und da alle Bedingungen erfüllt sind, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \dots &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \dots = \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right) \cdot x^2 + (\dots) \cdot x^4 + \dots \end{aligned}$$

Da der Koeffizient von x^2 in beiden Darstellungen der Funktion $p(x)$ derselbe sein muss (Eigenschaft von Polynomen und Potenzreihen), ergibt sich:

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots\right) \Rightarrow 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Weitere errechnete Summen der verallgemeinerten harmonischen Reihe wären:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 6} = \frac{2^{24} \cdot 76977927 \cdot \pi^2 6}{27!}$$

Trotz aller Bemühungen gelang es Euler nicht, die Summen für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ für ungerade $n \geq 3$ zu berechnen.

9 Kurze Erwähnung weiterer Paradoxa

9.1 Das Gefangenenparadoxon

Die Situation wird folgendermaßen dargestellt.

Drei Häftlinge A, B, C sitzen in Einzelzellen und warten auf ihre Hinrichtung. Ohne ihr Wissen wird Los gezogen, bei dem alle drei Häftlinge die gleiche Chance haben, gezogen zu werden. Derjenige, auf dem das Los fällt, wird begnadigt. Der Wärter kennt das Ergebnis und Häftling A bittet ihn, ihm den Namen desjenigen zu nennen, der begnadigt wird. Der Wärter sagt, dass Häftling C hingerichtet wird. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit von A und B, begnadigt zu werden²²⁵?

Häftling A glaubt nun, dass die Chance auf seine Begnadigung von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ gestiegen ist. Durch Klopfen verständigt A nun C und auch dieser glaubt, dass eine Überlebenschance von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ gestiegen ist. Sehen wir uns an, ob dies tatsächlich so ist.

Zuerst ist $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ (Die Wahrscheinlichkeit, dass A, B, C begnadigt werden)

$$P(W = B|A) = P(W = C|A) = \frac{1}{2} \quad P(W=B|B)=0 \quad P(W = B|X = C) = 1 = P(W = C|B)$$

(Wahrscheinlichkeit, dass der Wärter Häftling B die Wahrheit sagt, unter der Bedingung, dass A, B oder C begnadigt werden)

Uns interessiert nun $P(A|W = C)$.

$$P(A|W = C) = \frac{P(W = C|A) \cdot P(A)}{P(W = C|A) \cdot P(A) + P(W = C|B) \cdot P(B) + P(W = C|C) \cdot P(C)}$$

$$P(A|W = C) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

²²⁵vgl. KRÄMER: Denkste, S 98.

Die Überlebenschancen von Häftling A bleiben bei $\frac{1}{3}$, während die Chancen von Häftling B, begnadigt zu werden, auf $\frac{2}{3}$ gestiegen sind²²⁶.

Das Paradoxe an dieser Situation ist, dass es für die Berechnung der Überlebenschancen tatsächlich einen Unterschied macht, wer zuerst von der Hinrichtung von C erfährt.

9.2 Das Geburtstagsparadoxon

Hier beschäftigen wir uns mit der Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einer Gruppe von n Personen mindestens 2 Personen am selben Tag Geburtstag haben²²⁷. Für die Bearbeitung der Frage ist es leichter, mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu arbeiten.

Man wählt nun eine Person und eine zweite, die Wahrscheinlichkeit für verschiedene Geburtstage liegt bei $\frac{364}{365}$. Wenn nun eine dritte Person gewählt wird, ist die Wahrscheinlichkeit für einen von den beiden zuvor gewählten Personen verschiedenen Geburtstag $\frac{363}{365}$. Für $n \leq 365$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Geburtstag der n -ten Person von den Geburtstagen der $n-1$ zuvor gewählten Personen verschieden ist $\frac{365-(n-1)}{365}$. Also folgt:

$$P(A) = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{365-(n-1)}{365} = 1 - \frac{(365-1)!}{365^{n-1} \cdot (365-n)} = 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)}$$

Die Ergebnisse seien nun noch in folgender Tabelle zusammengefasst.

n	1	2	3	4	5	10
P(A)	0%	0,274%	0,82%	1,636%	2,714%	11,695%
n	20	21	22	23	25	30
P(A)	41,144%	44,369%	47,57%	50,73%	56,87%	70,632%
n	40	41	50	57	60	69
P(A)	89,123%	90,315%	97,037%	99,012%	99,412%	99,896%
n	70	80	89	100	105	
P(A)	99,916%	99,991%	99,99919%	99,999969%	99,99999403%	

Man braucht also überraschenderweise nur eine Gruppe von 23 Leuten, damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit über 50% steigt und bei 58 Leuten über 99%. Schon ab 106 Personen in der Gruppe ist der Unterschied zu 100% kleiner als 10^{-10} .

²²⁶vgl. FALK: three Prisoners, S 201.

²²⁷im Folgenden vgl. BARTH: Brühmte Aufgaben der Stochastik, S 370.

9.3 Das Benford-Paradoxon oder Problem der führenden Ziffer

Der Mathematiker Simon Newcomb entdeckte 1881 bei seiner Arbeit mit Logarithmenbüchern, dass diese auf der ersten Seite viel abgenutzter sind als auf den hinteren Seiten. Dazu muss man wissen, dass Logarithmenbücher nach der Anfangsziffer gegliedert waren und Newcomb zog daraus den Schluss, dass Logarithmen von Zahlen mit Anfangsziffern 1, 2, 3 viel häufiger gesucht wurden als Logarithmen von Zahlen mit Anfangsziffern 7, 8, 9. Aus seinen Beobachtungen heraus entwickelte Newcomb eine Formel für die relative Häufigkeit des Auftretens der Anfangsziffer d , wobei $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ist:

$$\log_{10}\left(\frac{d+1}{d}\right)$$

Da er aber für dieses Phänomen keine Erklärung fand und die Intuition der Gleichverteilung der Anfangsziffern widersprach, geriet es für 50 Jahre in Vergessenheit. Nach dieser Zeit nahm sich der Physiker Frank Benford der Untersuchung dieses Phänomens an, mit großem Eifer und Untersuchung von größeren Datenmengen. Erklärung fand er trotzdem keine. Aufgrund der weit höheren Zahl an untersuchter Datenmenge war es möglich, die Annahme von Newcomb zu bestätigen.

$P(\text{1. Ziffer von } Z \text{ ist } d) = \log_{10}(d+1) - \log_{10}(d)$ mit $Z \in \mathbb{R}^+$

Seither ist es bekannt als das Benford-Gesetz²²⁸.

Nun ein Blick darauf, wie diese Formel zustande kommt.

Sei X eine zufällig gewählte Zahl aus der riesigen Menge an Daten (Messergebnisse, Statistiken, ...).

Die erste Ziffer von X ist genau dann eine 1, wenn gilt:

$$10^n \leq X < 2 \cdot 10^n$$

Die erste Ziffer von X ist genau dann eine 2, wenn gilt:

$$2 \cdot 10^n \leq X < 3 \cdot 10^n$$

²²⁸vgl. HUMENBERGER: Benford-Gesetz, S 26-27.

Allgemein formuliert:

Die erste Ziffer von X ist genau dann eine Zahl $d \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ wenn gilt:

$$d \cdot 10^n \leq X < (d+1) \cdot 10^n$$

mit $n \in \mathbb{N}$, passend.

Diese Ungleichung ist äquivalent zur folgenden Ungleichung:

$$n + \log_{10}(d) \leq \log_{10}(X) < n + \log_{10}(d+1)$$

Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn die erste Nachkommastelle von $\log_{10}(X)$ zwischen $\log_{10}(d)$ und $\log_{10}(d+1)$ liegt und diese sei nun Y genannt. Dieses Y ist genauso eine Zufallsvariable wie es X und $\log_{10}(X)$ sind. Y nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an und hat die Eigenschaft der Gleichverteilung.

Daraus folgt: X hat d als erste Ziffer genau dann, wenn

$$\log_{10}(d) < Y < \log_{10}(d+1)$$

und $\log_{10}(d+1) - \log_{10}(d)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür²²⁹.

Die Wahrscheinlichkeiten der führenden Ziffern sei in folgender Tabelle zusammengefasst²³⁰.

Erste Ziffer	Wahrscheinlichkeit
1	30,10%
2	17,61%
3	12,49%
4	9,69%
5	7,92%
6	6,69%
7	5,80%
8	5,12%
9	4,58%

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziffer 1 als führende Ziffer auftritt, ist also sehr hoch. Es widerspricht der Intuition des Menschen und ist deshalb als Paradoxon zu bezeichnen.

²²⁹vgl. KRÄMER: Denkste, S 68-69.

²³⁰vgl. KRÄMER: Denkste, S 67.

Eine allgemeine Formulierung des Benford-Gesetzes(Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Ziffer d zur Basis B an der n-ten Stelle) lautet²³¹:

$$P_n(d) = \sum_{k=\lfloor B^{n-1} \rfloor}^{B^n-1} \log_B \text{Bigl}(1 + \frac{1}{k \cdot B + d})$$

Damit lassen sich die Auftrittswahrscheinlichkeiten von Ziffern an einer bestimmten Stelle (von vorne gezählt) in verschiedenen Zählsystemen berechnen.

Nun seien noch die Wahrscheinlichkeiten von Ziffern an 2. und 3.Stelle zusammengefasst²³²:

	0	1	2	3	4
2.Ziffer	0,120	0,114	0,109	0,104	0,100
3.Ziffer	0,1018	0,1014	0,1010	0,1006	0,1002
	5	6	7	8	9
2.Ziffer	0,097	0,0,93	0,090	0,088	0,085
3.Ziffer	0,0998	0,0994	0,0990	0,0986	0,0983

Man sieht: Je weiter die Ziffern hinten stehen, desto kleiner wird das Intervall der Auftrittswahrscheinlichkeiten. Die Auftrittswahrscheinlichkeit der Ziffer 1 bleibt aber an allen Stellen die höchste.

²³¹de.wikipedia.org/wiki/Benfordsches_Gesetz, 14.2.2019

²³²vgl. HUMENBERGER: Benford-Gesetz, S 32.

9.4 Die Zenonschen Paradoxa

9.4.1 Achilles und die Schildkröte

„Achilles rennt schneller als die Schildkröte und gewährt ihr deshalb einen Vorsprung: Achilles läuft von d_1 los, die Schildkröte von d_2 . Zu dem Zeitpunkt, an dem Achilles den Vorsprung der Schildkröte aufgeholt und d_2 erreicht hat, ist die Schildkröte bereits an d_3 . Bis Achilles d_3 erreicht hat, ist die Schildkröte an d_4 angekommen. Jedes Mal, wenn Achilles den Abstand aufholt, ist die Schildkröte schon weiter vorangekommen. Wie kann Achilles mit der Schildkröte gleichziehen, da er doch unendlich viele Abstände überwinden muss?“²³³

9.4.2 Die Rennbahn (Regressive Form)

„Bevor Achilles zum Ende der Rennbahn gelangt, muss er zunächst die erste Hälfte zurücklegen. Ehe ihm das gelingen kann, muss er die Hälfte dieser Strecke zurücklegen, nämlich das erste Viertel der Rennbahn und so weiter. Er gelangt von der Startlinie aus nirgendwohin, ohne zuerst unendlich viele Intervalle durchlaufen zu haben.“²³⁴

9.4.3 Der Pfeil

„Ein Pfeil kann nicht an einem Ort sein, an dem er nicht ist. Auch kann er sich nicht an dem Ort bewegen, an dem er sich befindet. Aber ein fliegender Pfeil ist immer jeweils an dem Ort, an dem er sich gerade befindet. Also befindet sich der Pfeil immer im Ruhezustand.“²³⁵

²³³CLARK: Paradoxien, S 19.

²³⁴CLARK: Paradoxien, S 209.

²³⁵CLARK: Paradoxien, S 187.

9.5 Die Richard Paradoxie

„Die Menge der reellen Zahlen, die anhand von einer endlichen Anzahl von Wörtern definierbar ist, ist abzählbar. Allerdings können wir mit endlich vielen Wörtern eine weitere reelle Zahl beschreiben, die aus einer Aufzählung der Elemente dieser Menge gebildet ist. Demnach gibt es genau dann eine reelle Zahl, die durch die Aufzählung definiert ist, wenn sie es nicht ist.“²³⁶

9.6 Die Russel Paradoxie

„Die meisten Mengen (Klassen), an die man gewöhnlich denkt, sind nicht Elemente ihrer selbst. Die Menge der natürlichen Zahlen ist nicht eine natürliche Zahl, die Menge der Nationen ist nicht eine Nation und die Menge der Französinen ist keine Französin. Jedoch ist die Menge all dessen, was keine Französin ist, ein Element ihrer selbst, da sie keine Französin ist. Dasselbe gilt auch für die Menge aller Mengen, da sie selbst eine Menge ist. Allerdings ist die Menge jener Mengen, die sich selbst nicht als Elemente entfalten, sowohl Element ihrer selbst als auch nicht Element ihrer selbst.“²³⁷

9.7 Das Paradoxon der Münzenkante

Üblicherweise wird bei Münzwurfbeispielen das Ereignis: „Münze fällt auf ihre Kante“ nicht berücksichtigt, da die Wahrscheinlichkeit dafür verschwindend gering ist. Werfen wir nun einen Blick darauf, wie die Münze beschaffen sein müsste, sodass $P(\text{Zahl}) = P(\text{Wappen}) = P(\text{Kante}) = \frac{1}{3}$ ist.

Eine Münze kann geometrisch als Zylinder aufgefasst werden, bei dem die Grundfläche Wappen, die Deckfläche Zahl und der Mantel Kante bedeutet. Wenn man die Münze wirft, muss die Rotationsachse durch den Mittelpunkt und parallel zu Grund- und Deckfläche verlaufen. Die Münze wird genau auf die Kante fallen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, wenn die Höhe und ihr Durchmesser im Verhältnis $\tan(30) : 1$, was dem Verhältnis 0,577:1 entspricht, stehen.²³⁸

²³⁶CLARK: Paradoxien, S 211.

²³⁷CLARK: Paradoxien, S 215.

²³⁸vgl. SZEKELY: Paradoxa, S 67-68.

9.8 Das Paradoxon von Jakob und Laban

Zum Abschluss meiner Arbeit möchte ich noch einen Bogen zu meinem Zweitfach katholische Religion schlagen. In der Bibel im Buch Genesis heißt es, dass Jakob von Laban als Lohn für seine Arbeit Schafe erhielt. Obwohl die Anzahl der Schafe immer sehr klein war, wurde Jakob vermögender als Laban, obwohl die Schafherde von Laban sehr groß war. Wie kam es nun zu diesem Paradoxon?

Eine Grundlage war, dass Jakob immer nur Schafe erhielt, aber nicht zurückgab, während Laban stets einige an Jakob abtrat. Seien nun J_n und L_n die durchschnittliche Zahl der Schafe von Jakob und Laban im n -ten Jahr, wobei $J_0 = 0$ und $L_N \in \mathbb{N}$, groß. Wenn man nun annimmt, dass jedes Schaf jährlich U Lämmer hat und q der Anteil an Schafen ist, den Laban an Jakob abgibt, und $(1 - q) = p$ jener Anteil an Schafen ist, welcher bei Laban verbleibt, so ergibt sich:

$$L_{n-1} - L_n = U \cdot p \cdot L_n \text{ und } J_{n-1} - J_n = U \cdot J_n + U \cdot q \cdot L_n$$

Daraus folgt:

$$L_n = L_0(1 + U \cdot p)^n \text{ und } J_n = L_0(1 + U)^n - L_0(1 + U \cdot p)^n$$

und schlussendlich :

$$\frac{J_n}{L_n} = \left(\frac{1 + U}{1 + U \cdot p} \right)^n - 1$$

Da für $n \rightarrow \infty$ $\left(\frac{1+U}{1+U \cdot p} \right)^n$ gegen unendlich strebt, wird Jakob nach einiger Zeit tatsächlich reicher als Laban²³⁹.

Da wir aus der Bibel wissen, dass Jakob 14 Jahre im Dienst von Laban stand und wir annehmen, dass jedes Schaf im Durchschnitt 3 Lämmer gebärt, würde schon eine jährliche Abgabe von 7% von Labans Herde an Jakob ausreichen, um ihn nach 14 Jahren reicher werden zu lassen als seinen Herrn.

²³⁹vgl. SZEKELY: Paradoxa, S 67-68.

Anhang

Im Folgenden führe ich die Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten für die Tabelle im Kapitel 2.3.2 durch.

Zuerst seien die Entsprechungen der Buchstaben mit den jeweiligen 4er Blöcken angeführt.

A	B	C	D	E	F	G	H
KKKK	KKKZ	KKZK	ZKKK	KKZZ	KZKZ	ZKKZ	ZKZK
I	J	L	M	N	Q	R	T
ZKZK	ZZKK	KZZK	KZZZ	ZKZZ	ZZKZ	ZZZK	ZZZZ
(8-0):(15-7)=8:8	(A-B)	(9-1):(8-2)=8:6	(B-C)	(9-3):(9-5)=6:4	(C-D)		
(9-3):(15-3)=6:12	(A-C)	(9-3):(8-2)=6:6	(B-D)	(8-3):(9-2)=5:7	(C-E)		
(9-3):(15-1)=6:14	(A-D)	(8-7):(8-1)=1:7	(B-E)	(8-0):(9-1)=8:8	(C-F)		
(8-7):(15-0)=1:15	(A-E)	(8-0):(8-4)=8:4	(B-F)	(10-0):(9-5)=10:4	(C-G)		
(8-0):(15-3)=8:12	(A-F)	(10-0):(8-2)=10:6	(B-G)	(9-4):(9-2)=5:7	(C-H)		
(10-0):(15-1)=10:14	(A-G)	(9-0):(8-1)=9:7	(B-H)	(10-1):(9-2)=9:7	(C-I)		
(9-0):(15-0)=9:15	(A-H)	(10-1):(8-1)=9:7	(B-I)	(8-3):(9-0)=5:9	(C-J)		
(10-1):(15-0)=9:15	(A-I)	(8-3):(8-1)=5:7	(B-J)	(9-1):(9-1)=8:8	(C-L)		
(8-3):(15-0)=5:15	(A-J)	(9-1):(8-2)=8:6	(B-L)	(8-0):(9-1)=8:8	(C-M)		
(9-1):(15-1)=8:14	(A-L)	(8-0):(8-2)=8:6	(B-M)	(9-0):(9-2)=9:7	(C-N)		
(8-0):(15-1)=8:14	(A-M)	(9-0):(8-1)=9:7	(B-N)	(9-0):(9-0)=9:9	(C-Q)		
(9-0):(15-0)=9:15	(A-N)	(9-0):(8-1)=9:7	(B-Q)	(8-1):(9-0)=7:9	(C-R)		
(9-0):(15-0)=9:15	(A-Q)	(8-1):(8-1)=7:7	(B-R)	(15-0):(9-0)=15:9	(C-T)		
(8-1):(15-0)=7:15	(A-R)	(15-0):(8-1)=15:7	(B-T)				
(15-0):(15-0)=15:15	(A-T)						

(8-1):(9-4)=7:5	(D-E)	(8-1):(8-3)=7:5	(E-F)	(10-0):(8-0)=10:8	(F-G)
(8-0):(9-3)=8:6	(D-F)	(10-1):(8-1)=9:7	(E-G)	(9-4):(8-1)=5:7	(F-H)
(10-2):(9-1)=8:8	(D-G)	(9-1):(8-0)=8:8	(E-H)	(10-1):(8-1)=9:7	(F-I)
) (9-2):(9-4)=7:5	(D-H)	(10-2):(8-0)=8:8	(E-I)	(8-3):(8-3)=5:5	(F-J)
(10-5):(9-0)=5:9	(D-I)	(8-4):(8-0)=4:8	(E-J)	(9-1):(8-4)=8:4	(F-L)
(8-1):(9-0)=7:9	(D-J)	(9-2):(8-1)=7:7	(E-L)	(8-0):(8-4)=8:4	(F-M)
(9-1):(9-1)=8:8	(D-L)	(8-1):(8-1)=7:7	(E-M)	(9-0):(8-1)=9:7	(F-N)
(8-0):(9-1)=8:8	(D-M)	(9-1):(8-0)=8:8	(E-N)	(9-0):(8-3)=9:5	(F-Q)
(9-0):(9-0)=9:9	(D-N)	(9-1):(8-0)=8:8	(E-Q)	(8-1):(8-3)=7:5	(F-R)
(9-2):(9-0)=7:9	(D-Q)	(8-2):(8-0)=6:8	(E-R)	(15-0):(8-3)=15:5	(F-T)
(8-1):(9-0)=7:9	(D-R)	(15-1):(8-0)=14:8	(E-T)		
(15-0):(9-0)=15:9	(D-T)				
(9-2):(10-1)=7:9	(G-H)	(10-2):(9-1)=8:8	(H-I)	(8-0):(10-0)=8:10	(I-J)
(10-5):(10-5)=5:5	(G-I)	(8-4):(9-1)=4:8	(H-J)	(9-2):(10-1)=7:9	(I-L)
(8-1):(10-1)=7:9	(G-J)	(9-2):(9-2)=7:7	(H-L)	(8-1):(10-1)=7:9	(I-M)
(9-1):(10-2)=8:8	(G-L)	(8-1):(9-2)=7:7	(H-M)	(9-1):(10-2)=8:8	(I-N)
(8-0):(10-2)=8:8	(G-M)	(9-1):(9-1)=8:8	(H-N)	(9-5):(10-0)=4:10	(I-Q)
(9-0):(10-5)=9:5	(G-N)	(9-1):(9-1)=8:8	(H-Q)	(8-2):(10-0)=6:10	(I-R)
(9-2):(10-1)=7:9	(G-Q)	(8-2):(9-1)=6:8	(H-R)	(15-1):(10-0)=14:10	(I-T)
(8-1):(10-1)=7:9	(G-R)	(15-1):(9-1)=14:8	(H-T)		
(15-0):(10-1)=15:9	(G-T)				
(9-4):(8-1)=5:7	(J-L)	(9-4):(8-1)=5:7	(M-N)		
(8-3):(8-1)=5:7	(J-M)	(9-2):(8-3)=7:5	(M-Q)		
(9-3):(8-0)=6:8	(J-N)	(8-1):(8-1)=7:1	(M-R)		
(9-1):(8-0)=8:8	(J-Q)	(15-0):(8-7)=15:1	(M-T)		
(8-4):(8-0)=4:8	(J-R)	(9-5):(9-3)=4:6	(N-Q)		
(15-3):(8-0)=12:8	(J-T)	(8-2):(9-3)=6:6	(N-R)		
(8-0):(9-1)=8:8	(L-M)	(15-3):(9-1)=12:8	(N-T)		
(9-4):(9-2)=5:7	(L-N)	(8-4):(9-1)=4:8	(Q-R)		
(9-2):(9-4)=7:5	(L-Q)	(15-3):(9-1)=12:8	(Q-T)		
) (8-1):(9-0)=7:9	(L-R)	(15-7):(8-0)=8:8	(R-T)		
(15-0):(9-0)=15:9	(L-T)				

Literaturverzeichnis

- AIGNER, Martin ; BEHREND, Erhard: *Alles Mathematik : Von Pythagoras zu Big Data*. Wiesbaden : Springer Fachmedien, ⁴2016.
- BARTHE, Daniel: Leonhard Eulers unendliche Summen. In: Erhard BEHREND (Hg.) ; u.a.: *π und Co : Kaleidoskop der Mathematik*. Berlin [u.a.] : Springer, 2008.
- BASIEUX, Pierre: *Abenteuer Mathematik : Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion*. Heidelberg : Spektrum, ⁵2011.
- BECK-BORNHOLDT, Hans-Peter ; DUBBEN, Hans-Herrmann: *Der Schein der Weisen : Irrtümer und Fehltritte im täglichen Denken*. Reinbeck bei Hamburg : Rowohlt, 2003.
- BÖER, Heinz: AIDS-Was ist von einem positiven Test-Ergebnis zu halten. In: Hans-Stefan SILLER (Hg.) ; u.a.: *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4*. Wiesbaden : Springer Fachmedien, 2018, S 111-124.
- BOSBACH, Gerd ; KORFF, Jens Jürgen: *Lügen mit Zahlen : Wie wir mit Statistiken manipuliert werden*. München : Heyne, 2011.
- BRAESS, Dietrich: Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. In: *Unternehmensforschung* 12 (1968) S 258-268.
- BRUSS, Franz Thomas: Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen. In: *Spektrum der Wissenschaft Nr.6* (2000) S 106-107.
- CLARK, Michael: *Paradoxien von A bis Z*. Stuttgart : Reclam, 2012.
- DIETHELM, Kai: *Gemeinschaftliches Entscheiden : Untersuchung von Entscheidungsverfahren mit mathematischen Hilfsmitteln*. Berlin [u.a.] : Springer, 2016.
- DUBBEN, Hans-Herrmann ; BECK-BORNHOLDT, Hans-Peter: *Mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit : Logisches Denken und Zufall*. Reinbeck bei Hamburg : Rowohlt, ⁵2010.
- EISENFÜHR, Franz ; WEBER, Martin: *Rationales Entscheiden : mit 59 Tabellen*. Berlin [u.a.] : Springer, ⁴2003.

- FALK, Ruma: A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners.
In: *Cognition* 43 (1992) S 197-223.
- FREISTETTER, Florian: Wissenschaftliche Paradoxien. In:
scienceblogs.de-eMagazine Nr.28 (2016).
- GARDNER, Martin: *Mathemagische Tricks*. Vieweg : Braunschweig, 1981.
- GOLDER, Werner: Das-Will-Rogers-Phänomen und seine Bedeutung für die
bildgebende Diagnostik. In: *Der Radiologe* (2009) S 348-354.
- GUPTA, Abhijit Kar: *Parrondo's Paradox: new results and new ideas*, 2016.
- HALLER, Rudolf ; BARTH, Friedrich: *Berühmte Aufgaben der Stochastik : von
den Anfängen bis heute*. München : Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2014.
- HAVIL, Julian: *Gamma : Eulers Konstante, Primzahlstrände und die Riemannsche
Vermutung*. Berlin [u.a.] : Springer, 2013.
- HERRMANN, Norbert: *Mathematik wo sie sie nicht erwarten*. Berlin; Boston : De
Gruyter, 2016.
- HESSE, Christian: *Achtung Denkfalle! : Die erstaunlichsten Alltagsirrtümer und
wie man sie durchschaut*. München : Beck, 2011.
- HESSE, Christian: *Damenopfer : Erstaunliche Geschichten aus der Welt des
Schach*. München : Beck, 2015.
- HUBKA, Bernd: *Ein einfacher Beweis des Arrow-Theorems*. Wien, 1975.
- HUMENBERGER, Hans: Eine elementarmathematische Begründung des
BENFORD-Gesetzes. In: *Der Mathematikunterricht* 54 (2008) S 24-34.
- JERGER, Jürgen: Das St. Petersburg-Paradoxon. In: *WiSt* 8 (1992) S 407-410.
- KLEINHUIS, Christian: *Intransitive Paradoxa*. Bonn, 2005.
- KLINE, Morris: Euler and infinite Series. In: *Mathematics Magazine* 56 (1983), S
307-314.
- KOPERMANN, Klaus: *Mathematische Aspekte der Wahlverfahren :
Mandatsverteilung bei Abstimmungen*. Mannheim; Wien; Zürich :
BI-Wissenschaftsverlag, 1991.
- KRÄMER, Walter: *Denkste! : Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der
Zahlen*. Frankfurt am Main; New York : Campus, ²1996.
- KUNZ, Volker: Kenneth J. Arrow, Social Choice and Individual Values, New
Haven 1951. In: Steffen KAILITZ (Hg.): *Schlüsselwerke der
Politikwissenschaft*. Wiesbaden : VS, 2007, S 18-22.
- KURRILD-KLITGARD, Peter: Trump, Condorcet and Borda : Voting paradoxes
in the 2016 Republican presidential primaries. In: *European Journal of
Political Economy* 50 (Oktober 2017).

- MEYER, Jörg: Einfache Paradoxien der beschreibenden Statistik. In: *Stochastik in der Schule* 15 (1995) S 27-50.
- MEYER, Jörg: Paradoxien bei direkten Wahlen. In: *Mathematik lehren* 88 (1998) S 45-54.
- NOHLEN, Dieter: *Wahlrecht und Parteiensystem*. Opladen & Farmington Hills : Barbara Budrich, 62009 [UTB ; 1527].
- ORDEHOOK, Peter: *Game theory and political theory : an introduction*. Cambridge [u.a.] : Cambridge University Press, 1986.
- RUMP, Christopher: Strategies for rolling the Efron Dice. In: *Mathematics Magazine* 74 (2001) S 212-216.
- SCHUPPAR, Berthold ; HUMENBERGER Hans: *Elementare Numerik für die Sekundarstufe*. Berlin [u.a.] : Springer, 2015.
- SIEGERT, Sabine: *Das Sankt-Petersburg-Paradoxon*[Diplomarbeit]. Potsdam : Universität, 2010.
- STRICK, Hans Klaus: *Mathematik ist schön*. Berlin [u.a.] : Springer, 2017.
- SZÉKELY, Gábor J.: *Paradoxa : Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Thun; Frankfurt am Main : Deutsch, 1990.
- SZIPRO, George: *Die verflixte Mathematik der Demokratie*. Berlin [u.a.] : Springer, 2011.
- TAN, A.: A Geometric Interpretation of Simpson's Paradox. In: *The College Mathematics Journal* 17 (1986) S 340-341.
- USISKIN, Zalman: Max-Min Probabilities in the Voting Paradox. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 35 (1964) S 857-862.
- VOLLMER, Gerhard: Paradoxien und Antinomien. In: *Naturwissenschaften* 77 (1990) S 49-66.

Verzeichnis der verwendeten Internetquellen

Aids Hilfe Wien: HIV Statistik. [Online]:

<http://www.aids.at/information/hiv-statistik> [Zugriff am 26.11.2018]

Bundesministerium für Inneres: Nationalratswahl 2017. [Online]:

<https://wahl17.bmi.gv.at/> [Zugriff am 19.9.2018]

Burmeister, Norbert: Die Hydrostatik. [Online]:

<http://uni-miskolc.hu/dephyma/physik/fleiss/norbi/phys9L40.doc> [Zugriff am 11.12.2018]

Fendrich, Martin: Divisorverfahren. [Online]:

<http://www.wahlrecht.de/verfahren/divisorverfahren.html> [Zugriff am 29.8.2018]

Fendrich, Martin: Direktmandats-Paradoxon. [Online]: <http://www.wahlrecht.de/systemfehler/sperrklausel.htm#direktmandatsparadoxon>

[Zugriff am 21.8.2018]

Fendrich, Martin: Populations-Paradoxon. [Online]:

<http://www.wahlrecht.de/verfahren/paradoxien/population.html> [Zugriff am 1.9.2018]

Fendrich, Martin: Parteizuwachsparadoxon. [Online]:

<http://www.wahlrecht.de/verfahren/paradoxien/parteizuwachs.html> [Zugriff am 1.9.2018]

Fendrich, Martin: Sperrklausel-Paradoxon. [Online]:

<http://www.wahlrecht.de/systemfehler/sperrklausel.htm> [Zugriff am 3.9.2018]

Fendrich, Martin: Paradoxien des Bundestags-Wahlsystems. [Online]:

<http://www.wahlrecht.de/systemfehler/spektrum.html> [Zugriff am 3.9.2018]

Fendrich, Martin: Mögliche Auswirkungen der Nachwahl 2005 im Wahlkreis

Dresden I. [Online]:

<http://www.wahlrecht.de/ueberhang/beispiel-bundestagswahl-2005.html> [Zugriff am 3.9.2018]

Fendrich, Martin: Zu billige Restsitze. [Online]:

<https://www.wahlrecht.de/systemfehler/billige-restsitze.html> [Zugriff am 8.9.2018]

Fendrich, Martin: Zwei-Verfahren-Paradoxon. [Online]:

<http://www.wahlrecht.de/systemfehler/zweiverfahren.html> [Zugriff am 10.9.2018]

Fendrich, Martin ; Schneider, Andreas: Abstimmungsparadoxon. [Online]:

<http://www.wahlrecht.de/systemfehler/referendum.html> [Zugriff am 10.9.2018]

- Fendrich, Martin: Ausgleichsmandate. [Online]:
<http://www.wahlrecht.de/lexikon/ausgleichsmandate.html> [Zugriff am 21.8.2018]
- Fendrich, Martin: Ausgleichsmandate-Paradoxon. [Online]:
<https://www.wahlrecht.de/systemfehler/ausgleichsmandate.htm> [Zugriff am 21.8.2018]
- Fendrich, Martin: No Show Paradoxon. [Online]:
<http://www.wahlrecht.de/lexikon/noshow.html> [Zugriff am 04.10.2018]
- Kopfakrobaten: Reflexionsgesetz und virtuelles Bild. [Online]:
http://www.steyrerbrains.at/math/Spiegel/Spiegel_2a.html [Zugriff am 6.12.2018]
- Kopfakrobaten: Warum scheint uns der Spiegel links und rechts zu vertauschen?. [Online]: http://www.steyrerbrains.at/math/Spiegel/Spiegel_3.html
- Mißfeldt, Martin: Dreiecksrätsel mit Zauberquadrat (inkl. Lösung). [Online]:
<https://www.lichtmikroskop.net/optik/dreiecksraetsel-zauberquadrat.php> [Zugriff am 13.1.2019]
- New York Times: Presidential Election Results: Donald J. Trump Wins. [Online]:
<https://www.nytimes.com/elections/2016/results/president> [Zugriff am 17.9.2018]
- Stadt Wien: Wiener Gemeinderats- und Bezirksvertretungswahlen 2015. [Online]:
<https://www.wien.gv.at/politik/wahlen/grbv/2015/index.html> [Zugriff am 19.9.2018]
- STEINBEIS, Maximilian: Das neue britische Wahlrecht wäre in Deutschland verfassungswidrig. [Online]: <https://verfassungsblog.de/das-neue-britische-wahlrecht-wre-deutschland-verfassungswidrig/> [Zugriff am 04.10.2018]
- UNAIDS: Global HIV & AIDS statistics-2018 fact sheet. [Online]:
<http://www.unaids.org/en/resources/fact-sheet> [Zugriff am 26.11.2018]
- USKU: $64=65!$?. [Online]: <https://usku.blogspot.com/2015/12/6465.html> [Zugriff am 17.1.2019]
- Wahlkreisbüro von Michael Hennrich MdB: Berliner Absage für Rot-Grün. [Online]: <http://www.cdu-denkendorf.de/uploads/media/2011-10-14.pdf> [Zugriff am 29.8.2018]
- Wikipedia: Gerrymandering. [Online]:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Gerrymandering> [Zugriff am 26.8.2018]
- Wikipedia: Electoral College. [Online]:
https://de.wikipedia.org/wiki/Electoral_College [Zugriff am 26.8.2018]

- Wikipedia: Ergebnisse der Landtagswahlen in Österreich. [Online]: https://de.wikipedia.org/wiki/Ergebnisse_der_Landtagswahlen_in_Österreich [Zugriff am 8.9.2018]
- Wikipedia: Hydrostatisches Paradoxon. [Online]: https://de.wikipedia.org/wiki/Hydrostatisches_Paradoxon [Zugriff am 11.12.2018]
- Wikipedia: Euromünzen. [Online]: <https://de.wikipedia.org/wiki/Euromünzen> [Zugriff am 19.12.2018]
- Wikipedia: Fehlendes-Quadrat-Rätsel. [Online]: <https://de.wikipedia.org/wiki/Fehlendes-Quadrat-Rätsel> [Zugriff am 10.1.2019]
- Wikipedia: Alternierende Reihe (Euler). [Online]: [https://de.wikipedia.org/wiki/Alternierende_Reihe_\(Euler\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Alternierende_Reihe_(Euler)) [Zugriff am 11.2.2019]
- Wikipedia: Benfordsches Gesetz. [Online]: https://de.wikipedia.org/wiki/Benfordsches_Gesetz [Zugriff am 14.2.2019]
- Winkelmann, Michael: Miwin'sche Würfel. [Online]: <http://miwin.com/> [Zugriff am 08.11.2018]

Zusammenfassung

Diese Arbeit soll einen Überblick über verschiedene Paradoxa aus den unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik geben, wobei auch ein kleiner Abstecher in den Bereich der Physik gemacht wird.

Aus der Fülle an Paradoxa kann selbstverständlich nur eine Auswahl getroffen werden, welche einen Querschnitt darstellen soll und auch der Bezug zur Realität sowie zur Welt, in der wir leben, nicht fehlen darf. Dieser Bezug wird insbesondere durch die Kapitel 1 und 3, in denen paradoxe Situationen bei Wahlen sowie bei der Verlässlichkeit medizinischer Tests beleuchtet werden, hergestellt, sowie durch ein Paradoxon der Verkehrsplanung in Kapitel 8. Durch Bearbeitung des Simpson Paradoxons und Will Rogers Phänomens wird auch gezeigt, wie sehr unsere Lebenswelt und Meinungsbildung durch geschickte Anwendung von Statistiken manipuliert werden kann. Wie sehr uns die bloße Anschauung täuschen kann, wird im Kapitel über geometrische Paradoxa betrachtet.

Einen großen Teil der Arbeit nimmt auch der Bereich der Spieltheorie, der Münzwurf- und Würfelspiele ein, wo das Phänomen der Intransitivität genauer unter die Lupe genommen wird. Zuletzt wird noch das Phänomen der großen Zahlen und der Unendlichkeit betrachtet und zusätzlich werden noch einige Paradoxa ohne detaillierte Betrachtung erwähnt.

Wie schon im Titel angesprochen, ist vieles anders als es auf den ersten Blick scheint, besonders in der Mathematik. Durch Beleuchtung des Hintergrundes und das Anbieten von Lösungsansätzen der hier betrachteten paradoxen Situationen kann ein Anfang im Umgang mit solchen Situationen gesetzt werden.

Abstract

This thesis seeks to give an overview on different paradoxes from diverse fields of mathematics with a small excursion into the domain of physics.

Of course, only a selection on the great abundance of paradoxes can be made. One part of the thesis represents paradoxes, which have a relation to the reality and the world we live. In chapter 1 the paradoxical situations in elections are highlighted and chapter 3 is focused on the reliability of medical tests. Parts of chapter 8 are dedicated to the paradox of traffic planning and management. By dealing with the Simpson paradox and the Will Rogers phenomenon, it is shown how much the opinion formation and world of living can be manipulated through skilful use of statistics. The chapter on geometrical paradoxes covers the topic how the pure notion can deceive us.

A significant part of the thesis includes the area of game theory, coin toss and games of dice, where the phenomenon of intransitivity is scrutinized. Finally, the phenomenon of large numbers and infinity are considered as well as some paradoxes without detailed contemplation.

As mentioned in the title, a lot of things are different than it seems at first glance, especially in mathematics. By considering the background and offering approaches to the presented paradoxical situations, it might be possible to deal with such situations in a better way in the future.