universität wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Beiträge der Gelehrten des islamischen Mittelalters zur Entwicklung der Algebra
Eine Analyse anhand des Beispiels von Auszügen aus *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala* von Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī“

verfasst von / submitted by

Cordula Thekla Eggerth

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Arts (MA)

Wien, 2018 / Vienna 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt / degree programme code as it appears on the student record sheet:	A 066 676
Studienrichtung lt. Studienblatt / degree programme as it appears on the student record sheet:	Masterstudium Arabische Welt: Sprache und Gesellschaft UG2002
Betreut von / Supervisor:	Univ.-Prof. Dr. Stephan Prochazka

Inhaltsverzeichnis

1. **Einleitung** 4

2. **Zur Bedeutung der (Natur)wissenschaften im mittelalterlichen islamischen Orient** ... 7

2.1. Rahmenbedingungen der wissenschaftlichen Entwicklungen im mittelalterlichen islamischen Orient 7

2.2. Entwicklung der mathematischen Wissenschaften 19

3. **Zu den Anfängen und der Entwicklung der Algebra unter besonderer Betrachtung der islamischen Gelehrten des Mittelalters** 28

3.1. Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Algebra und Entwicklung der Wissensbasis 28

3.2. Zur Verwendung von sprachlicher Ausformulierung und Symbolik in der Algebra und einschlägigen Begriffen 34

4. **Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī und seine Beiträge zur wissenschaftlichen Entwicklung** 42

5. ***Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala*** 47

5.1. Historische Einordnung des *Kitāb al-ğabr* 47

5.2. Sprachliche Anmerkungen zum Werk 51

5.3. Diskussion der Inhalte des Werkes und ausgewählter Textausschnitte aus *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala* 57

5.3.1. Vorwort (*bismi llāhi r-raḥmāni wa-r-raḥīmi*) 57

5.3.2. Einleitung (*muqaddima*) 61

5.3.3. Über die Multiplikation (*bāb aḍ-ḍarb*) 75

5.3.4. Über die Addition und die Subtraktion (*bāb al-ğamᶜ wa-n-nuqṣān*) 82

5.3.5. Über die Division (*bāb al-qism*) 84

5.3.6. Anwendungsbeispiele 87

5.3.7. Über die sechs Probleme (*bāb al-masāʾil as-sitt*) 88

5.3.8. Verschiedene Angelegenheiten (*bāb al-masāʾil al-muḫtalifa*) 93

5.3.9. Über die Geschäfts-/Handelstransaktionen (*bāb al-muʿāmalāt*) 100

5.3.10. Über die Vermessung (*bāb al-misāḥa*) 105

5.3.11. Über die Vermächtnisse/Erbschaften (*kitāb al-waṣāyā*) 109

6. **Conclusio** 120

Glossar 127

Bibliographie 135

Anhang 140

Deutsche Zusammenfassung 140

Englische Zusammenfassung / English Abstract 141

1. Einleitung

Das erste inhaltliche Kapitel erörtert die Bedeutung der Wissenschaften und insbesondere der Naturwissenschaften im mittelalterlichen islamischen Orient. Denn bereits ab dem 4. Jh. n. Chr. formierten sich Gemeinschaften von Gelehrten, wie zum Beispiel jene in Nisibis und Gondēšāpur, die jeweils eigene Forschungsschwerpunkte setzten.[1] Diese Aktivitäten intensivierten sich anschließend während der Herrschaft der Umayyadendynastie, von deren Herrschern für sie als interessant geltende Wissenschaftsbereiche unterstützt wurden, und erreichten ihren Höhepunkt während der Herrschaftsperiode der Abbasidendynastie im Rahmen des „Hauses der Weisheit" (*bayt al-ḥikma*) in Bagdad.[2] Der Abbasidenkalif al-Maʾmūn, der von 813 bis zu seinem Tod im Jahre 833 n. Chr. regierte, förderte die Entwicklung der Wissenschaften, Künste und Kultur.[3] Während der Herrschaftszeit des Kalifen al-Maʾmūn war auch Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī, dessen Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala* in der vorliegenden Arbeit genauer analysiert wird, am Haus der Weisheit in Bagdad tätig.[4] Das Haus der Weisheit, eine Gemeinschaft von Gelehrten und ihren Schülern in der Region, blieb zwar bis zur Belagerung und Zerstörung der Stadt Bagdad durch die Mongolen Mitte des 13. Jh. n. Chr. bestehen, verlor jedoch sodann an Bedeutung.[5]

Darüber hinaus wird in diesem Kapitel aufgrund des Fokus auf die Tätigkeit des Gelehrten al-Ḫuwarizmī auf dem Gebiet der Mathematik verstärkt Bezug genommen auf die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften. Die historische Entwicklung der mathematischen Ideen und Konzepte wird vorgestellt und die Anwendungsbereiche in der damaligen Umgebung werden umrissen.

Im nächsten Kapitel werden die Anfänge der Entwicklung der Algebra unter besonderer Betrachtung der Beiträge der islamischen Gelehrten des Mittelalters analysiert. Hierzu wird ein Überblick über die Wissenbasis, die vor der Bearbeitung der Thematik durch die arabisch-islamischen Gelehrten des Mittelalters geschaffen wurde, gegeben. Diese wissenschaftliche Grundlage umfasst im Wesentlichen die Beiträge der babylonischen, indischen und

[1] Berggren 1986; Ragep 2013.
[2] Berggren 1986; Ragep 2013.
[3] Berggren 1986; Ragep 2013.
[4] Linden 2017; Strick 2009.
[5] Linden 2017; Strick 2009.

griechischen Mathematiker. Auf viele von deren Werken konnten die arabisch-islamischen Gelehrten zurückgreifen und basierend darauf Korrekturen, Erweiterungen und Zusammenfassungen machen.[6] Ergänzend dazu wird angemerkt, dass die Mathematik und insbesondere das Gebiet der Algebra nicht seit jeher von der in der heutigen Zeit allgemein verwendeten formalen Notation geprägt waren.[7] In der Tat handelt es sich hinsichtlich der rein formalen Notation und Symbolik in der Algebra um eine relativ „neue" Entwicklung, die sich erst über die Jahrhunderte entwickelte.[8] Zur Zeit des Wirkens von al-Ḫuwarizmī wurden Forschung sowie Lehre im Bereich der Algebra noch in rein verbaler Form (eventuell ergänzt um geometrische Skizzen zur Argumentation) betrieben.[9] Mit der Zeit bildeten sich für viele Begriffe der Algebra Kurzschreibweisen und schließlich eine losgelöste formale Symbolik und Notation.[10] Dieser Prozess wird auch in der vorliegenden Arbeit thematisiert. In den Kapiteln über das al-Ḫuwarizmīs Werk zur Algebra werden einige seiner ausgearbeiteten Beispielfälle sowohl in verbaler als auch umgewandelt in formaler Schreibweise dargestellt und diskutiert.

Es folgt sodann ein Kapitel über den Autor des betrachteten Werkes Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī, der aller Wahrscheinlichkeit nach aus Ḫuwarizm in der Region Ḫorāsān stammte, und im 8. und 9. Jh. n. Chr. lebte und wirkte.[11] Er zog im Zuge seiner wissenschaftlichen Aktivitäten nach Bagdad und war unter Kalif al-Maʾmūn am Haus der Weisheit als einer der führenden Gelehrten tätig.[12]

Das nächste Kapitel ist dem Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala* (kurz *Kitāb al-ǧab*r) von Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī gewidmet. Das Werk, das wahrscheinlich ungefähr um 830 n. Chr. verfasst wurde, wird historisch in das Umfeld eingebettet und einige sprachliche Anmerkungen im Hinblick auf zum Verständnis notwendige Fachausdrücke werden beleuchtet.[13] In den nachstehenden Unterkapiteln werden die Inhalte des Werkes vorgestellt und diskutiert, wobei ausgewählte Textstellen transkribiert werden und in die Diskussion miteinbezogen werden. Die Analyse umfasst sämtliche Kapitel des Werkes, sowohl

[6] Karpinski 1915; Rebstock 1992.
[7] Karpinski 1915; Rebstock 1992.
[8] Karpinski 1915; Rebstock 1992.
[9] Karpinski 1915; Rebstock 1992.
[10] Karpinski 1915; Rebstock 1992.
[11] Karpinski 1915; Rebstock 1992.
[12] Karpinski 1915; Rebstock 1992.
[13] Karpinski 1915; Rebstock 1992.

jene, die rein mathematische Inhalte aufarbeiten, als auch jene, die die mathematischen Erkenntnisse auf praktische Probleme wie beispielsweise geschäftliche Angelegenheiten, Vermessungsaktivitäten sowie Erbschaften und Vermächtnisse anwenden. Außerdem werden einige der Beispiele, die vom Autor in rein verbaler Form dargelegt wurden, auch in der in der heutigen Zeit geläufigeren formalen Notation ausgedrückt und den verbal ausgeführten Beispielen gegenübergestellt. Zum Verständnis notwendige Fachausdrücke werden an der jeweiligen relevanten Stelle erklärt und in die Analyse miteinbezogen.

Als Ergänzung zur Lektüre der Inhalte des Werkes dient ein Glossar, das sowohl generelle Fachausdrücke zum Thema als auch Vokabular zu den jeweiligen Kapiteln und analysierten Textausschnitten enthält.

2. Zur Bedeutung der (Natur)wissenschaften im mittelalterlichen islamischen Orient

2.1. Rahmenbedingungen der wissenschaftlichen Entwicklungen im mittelalterlichen islamischen Orient

Als Vorläufer der wissenschaftlichen Zentren der mittelalterlichen islamischen Wissenschaften entstanden bereits vom 4. bis in das 7. Jh. n. Chr. Gemeinschaften zur Aufarbeitung und Vermittlung der Wissenschaften (zusätzlich zu den Bibliotheken) wie die so genannte „Schule" von Nisibis bzw. später auch „Schule" von Edessa im Bereich der klassischen Wissenschaften oder die „Akademie" von Gondēšāpur, die sich dem medizinischen Bereich widmete, und weitere kleinere Lern- und Übersetzungsgemeinschaften unter anderem in Merv und Ktesiphon.[14] Die sprachliche Ausgestaltung der damaligen Forschungsergebnisse und Werke erfolgte auf Griechisch oder Syrisch.[15]

Die Schule von Nisibis, ein geistiges Zentrum der frühen nestorianischen Kirche (bzw. Christlichen Kirche des Ostens), wurde in der Mitte des 4. Jh. n. Chr. gegründet, und befand sich in der Region der heutigen Stadt Nusaybin, die in der südöstlichen Türkei an der Grenze zu Syrien liegt.[16] Diese Institution widmete sich insbesondere der Philosophie und Theologie sowie teils der Medizin.[17] In etwa um 360 n. Chr. wurde Nisibis von den Persern erobert, woraufhin die Aktivitäten der Bildungseinrichtung weitgehend nach Edessa, das heutige Şanlıurfa an der türkisch-syrischen Grenze war, verlagert wurden.[18] Die Schule von Edessa war bereits im 2. Jh. n. Chr. gegründet worden, und hatte sich bis zum 4. Jh. n. Chr. zu einer Drehscheibe für den wissenschaftlichen Austausch und die Lehre entwickelt, wobei auch diese Schule von nestorianischem Glaubensgut geprägt war.[19] Nach der nestorianischen Kirchenspaltung, die bis zur Mitte des 6. Jh. n. Chr. vollzogen wurde, musste die Schule von Edessa gegen Ende des 5. Jh. n. Chr. aufgrund von Vorwürfen der Häresie durch den byzantinischen Kaiser schließen, und verlegte ihre Aktivitäten sodann wiederum nach Nisibis.[20]

Ein weiteres frühes Zentrum des Gelehrtentums war in Gondēšāpur entstanden – ein Ort, der sich im heutigen südwestlichen Iran im Grenzgebiet zum Irak befindet.[21] Gondēšāpur war in

[14] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[15] Berggren 2013; Herrmann 2016; Falagas et al. 2006.
[16] Berggren 1986; Ragep 2013; Falagas et al. 2006.
[17] Berggren 2013; Falagas et al. 2006; Muslim Heritage 2017.
[18] Berggren 2013; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[19] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[20] Berggren 1986; Herrmann 2016; Muslim Heritage 2017.
[21] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.

der vorislamischen Zeit eine der wichtigsten Städte im Reich der Sassaniden im Bereich der Kultur und Wissenschaften.[22] Die Akademie von Gondēšāpur beschäftigte auch Gelehrte aus dem Bereich der Mathematik und Astronomie, legte aber angeblich ihren Schwerpunkt auf medizinische Entwicklung und umfasste sowohl eine Bibliothek als auch ein Krankenhaus, in dem medizinische Erkenntnisse gelehrt wurden – jedoch wird die tatsächliche Existenz einer derartig umfassenden und bedeutenden Einrichtung im säkularen Bereich von Archäologen bezweifelt.[23] Die Akademie von Gondēšāpur soll auch vor der Verfolgung durch die Byzantiner flüchtenden nestorianischen Gelehrten und griechischen Philosophen Zuflucht geboten und die Möglichkeit der wissenschaftlichen Betätigung gegeben haben.[24] Im Rahmen der Akademie wurden griechische und syrische Werke verschiedenster Wissenschaftsdisziplinen in die mittelpersische Sprache (d.h. Pahlavi) übersetzt.[25] Doch auch indische, chinesische und weitere ostasiatische Gelehrte wurde nach Gondēšāpur bestellt, um bei der Übersetzung fremdsprachlicher Texte ins Mittelpersische beizutragen.[26] Um 640 n. Chr. wurde jedoch die Sassanidendynastie militärisch vom muslimisch-arabischen Heer geschlagen, was die Zerstörung der Stadt zur Folge hatte.[27] Die Akademie selbst konnte zwar noch einige Zeit fortbestehen, nachdem sie sich als muslimische Bildungseinrichtung positioniert hatte.[28] Sie verlor allerdings zunehmend an Bedeutung im muslimisch-arabischen Reich, das an anderen Orten seine wissenschaftlichen Zentren errichtete, weswegen die Akademie in Gondēšāpur schließlich (im 10. Jh. n. Chr.) aufgelöst wurde.[29]

Anfangs der Herrschaft der Umayyadendynastie gab bereits der erste Kalif der Dynastie, Muʿāwiya I., im 7. Jh. n. Chr. die Sammlung von Büchern in Damaskus in Auftrag, woraufhin dann die Errichtung einer Bibliothek angesichts des großen Umfangs der gesammelten Werke erfolgte.[30] Die Förderung der wissenschaftlichen Entwicklung im muslimisch-arabischen Kulturkreis intensivierte sich während der Herrschaftszeit der Umayyaden in etwa ab 730 n. Chr., vor allem in der Region von Sind, die im heutigen Pakistan gelegen war, und im Bereich des heutigen Afghanistan.[31] Erste Werke umfassten die Dokumentation und Aufarbeitung naturwissenschaftlicher (und bevorzugt astronomischer) Phänomene basierend auf persischen

[22] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[23] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[24] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[25] Berggren 1986; Falagas et al. 2006; Muslim Heritage 2017.
[26] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[27] Berggren 1986; Ragep 2013; Falagas et al. 2006.
[28] Berggren 1986; Linden 2017; Muslim Heritage 2017.
[29] Falagas et al. 2006; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[30] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[31] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017; Encyclopaedia Britannica 2017.

und indischen Quellen jeglicher Art, die von den Gelehrten in arabischer Sprache verfasst wurden.[32] Auch aus den Traditionen der Sassaniden in Bezug auf die Wissenschaften fanden sich einige Einflüsse in der arabisch-islamischen Umayyadendynastie wieder.[33] Denn als die arabischen Eroberer 640 n. Chr. die Macht im Reich der Sassaniden übernahmen, wurde auch umfassendes kulturelles, wissenschaftliches, staatstragendes und verwaltungsbezogenes Wissen sozusagen mitübernommen, und auch im Umayyadenreich weiterverwendet.[34] Dank der guten Ausbildung und der Erfahrung im Verwaltungsbereich im ehemaligen Persischen Reich konnten zahlreiche Gelehrte und Beamte hohe Positionen und Ämter im Umayyadenreich einnehmen.[35] Ab 750 n. Chr. wurde das islamische Herrscherhaus der Umayyaden durch die Abbasiden abgelöst, wobei die Abbasiden durch persische Truppen aus der Region Ḫurāsān unterstützt wurden.[36] Hiermit konnten die persischen Angehörigen des Staatsapparates ihre Macht stärken, und auch familiäre Verbindungen, die z.B. im Falle von Abbasidenkalif al-Maʾmūn schlagend wurden, betrafen sogar das Herrscherhaus, das sich somit den persischen Traditionen annäherte.[37] Die Tradition der intensiven Förderung von kultureller und wissenschaftlicher Entwicklung war ebenso bereits im Sassanidenreich von großer Bedeutung und wurde nun auch im Abbasidenreich angewandt.[38]

Während der Herrschaftsperiode des Kalifen al-Manṣūr der Abbasidendynastie wurde eine Delegation von Gelehrten aus dem Sind nach Bagdad geschickt, im Rahmen derer indische Gelehrte aus dem Bereich der astronomischen Wissenschaften dem muslimischen Universalgelehrten al-Fazārī bei der Übersetzung von in Sanskrit verfassten astronomischen Texten auf Anfrage des Abbasidenkalifen zur Seite standen.[39] Al-Fazārī, der aller Wahrscheinlichkeit nach aus al-Kūfa im Irak stammte, widmete sich vor allem den Wissenschaftsgebieten der Philosophie, Mathematik und Astronomie, wobei letztere Aktivitäten auch ein starkes Interesse des Gelehrten an der Astrologie umfassten.[40] Er leistete Pionierarbeit in der Übersetzung indischer Texte und in der Organisation und Aufbereitung von deren Inhalten in der arabischen Sprache.[41] Die Epoche seines Wirkens fiel in die Herrschaftszeit des Kalifen al-Manṣūr, i.e. ungefähr 755 bis zu seinem Tod im Jahre 775 n.

[32] Berggren 1986; Ragep 2013.
[33] Linden 2017.
[34] Linden 2017.
[35] Linden 2017; Sezgin 2010.
[36] Berggren 1986; Van der Waerden 1985; Ragep 2013.
[37] Linden 2017.
[38] Linden 2017.
[39] Berggren 1986; Van der Waerden 1985; Ragep 2013.
[40] Berggren 2013; Van der Waerden 1985; Ragep 2013.
[41] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.

Chr., und dessen Nachfolgern.[42] Basierend auf den davor durchgeführten Übersetzungsaktivitäten und seinen Recherchen zu der Materie stellte der Gelehrte al-Fazārī schließlich ein „Handbuch der Astronomie" mit dem Titel *Zīǧ al-Sindhind*, zusammen, bis zum damaligen Zeitpunkt bekannte astronomische Gepflogenheiten und Analysevorgänge aufarbeitete, und die dazu vorhandenen mathematischen Grundlagen miteinbezog.[43] Al-Fazārī bestimmte den Gründungszeitpunkt der Stadt Bagdad auf Anfragen des Kalifen al-Manṣūr unter Beachtung astrologischer Anhaltspunkte, und legte ihn sodann auf das Jahr 762 n. Chr., das eine günstige astrologische Konstellation versprach.[44] Bagdad, das im ehemaligen Sassanidenreich gelegen war, wurde sodann zur neuen Hauptstadt des Abbasidenreiches ernannt, und trat an die Stelle von Damaskus.[45] Die damals gelegten Grundsteine zur wissenschaftlichen Behandlung der Astronomie unter Einbeziehung mathematischer Methoden und astrologischer Einflüsse wurden später insbesondere von al-Bīrūnī im 10./11. Jh. n. Chr. wieder aufgegriffen und kritisch diskutiert.[46] Kalif al-Manṣūr hatte für Bagdad die Vision, die Stadt zu einem politischen, wissenschaftlichen, kulturellen und wirtschaftlichen Zentrum des Reiches auszubauen, was in weiterer Folge auch gelang.[47] Die Entwicklungsbestrebungen der Abbasiden schlossen auch sassanidische Einflüsse ein und es wurden ähnliche Praktiken in Bezug auf deren Bildungseinrichtungen durchgeführt.[48] Bereits al-Manṣūr zeichnete sich durch seine Großzügigkeit gegenüber den Gelehrten aus, denen er wirtschaftliche und politische Unterstützung bot.[49]

Al-Manṣūrs Sohn al-Mahdī wurde zum Nachfolger auserkoren und übernahm die Herrschaft von 775 bis 780 n. Chr., wobei er sich auf die Umsetzung der Ziele, die sein Vater für das Reich festgelegt hatte, konzentrierte.[50] Al-Mahdī versuchte, Konflikte mit anderen Völkern beizulegen, und Frieden zu stiften sowie den wirtschaftlichen und kulturellen Aufstieg seines Reiches bestmöglich zu unterstützen.[51] Im Gegensatz zu seinem Vater investierte al-Mahdī großzügiger in die künstlerische und wissenschaftliche Entwicklung und erhielt daneben auch einen prunkvollen Hofstaat nach persischem Modell.[52] Nach einer kurzfristigen

[42] Berggren 1986; Ragep 2013.
[43] Berggren 1986; Linden 2017; Ragep 2013.
[44] Berggren 1986; Linden 2017; Ragep 2013.
[45] Berggren 1986; Ragep 2013; Linden 2017.
[46] Berggren 1986; Ragep 2013.
[47] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[48] Berggren 1986; Muslim Heritage 2017.
[49] Berggren 1986; Ragep 2013; Sezgin 2010.
[50] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[51] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[52] Sezgin 2010; Ragep 2013.

Thronübernahme durch al-Mahdīs Sohn Mūsā al-Hādī, der im Zuge von Intrigen weichen musste, folgte Hārūn ar-Rašīd, der Sohn einer Haremsdame von al-Mahdī, als Herrscher ab 786 n. Chr nach.[53] Hārūn ar-Rašīd förderte ebenfalls die Übersetzungsaktivitäten in verschiedenen wissenschaftlichen Bereichen und aus verschiedenen Sprachen wie beispielsweise dem Sanskrit, dem Griechischem oder Persischen und die Sammlung von originalen wissenschaftlichen Abhandlungen.[54] Er gab auch den Bau einer Bibliothek in Bagdad in Auftrag, um den wissenschaftlichen Austausch und die wissenschaftliche Betätigung unter den Gelehrten seines Reiches anzuregen.[55] Mit dem Anlegen dieser Bibliothek setzte er den Grundstein für das später als „Haus der Weisheit" (*bayt al-ḥikma*) bekannte intellektuelle Zentrum der islamischen Blütezeit der Wissenschaften, des so genannten goldenen Zeitalters des Islams.[56] Zur Zeit des Kalifen Hārūn ar-Rašīd war die Bibliothek allerdings noch rein für den privaten Gebrauch gedacht, und war konzeptionell und institutionell nicht umfassend ausgestaltet.[57]

Während der Herrschaftsperiode von al-Maʾmūn, dem siebenten Abbasidenkalif, von 813 bis zu seinem Tod im Jahre 833 n. Chr. erlebte die Dynastie ihre wirtschaftliche, kulturelle und wissenschaftliche Hochblüte.[58] In religiöser und staatstragender Hinsicht unterstützte al-Maʾmūn die Lehre der *muʿtazila*[59], gemäß der der Koran als Gottgeschaffenes und von Gott Offenbartes gesehen wird, und erhob diese Lehre um 830 n. Chr. in "dogmatischen Rang".[60] Auf diese Strömung wirkten sich auch griechische Einflüsse aus dem Bereich der Philosophie aus, und der rationale Zugang zum Religiösen (im Sinne der Betonung des willensfreien Entscheidens der Menschheit) wurde in den Vordergrund gestellt.[61] Doch nicht nur im politisch-religiösen Bereich wurden Einflüsse des Griechischen sichtbar, denn Kalif al-Maʾmūn förderte auch großzügig die wissenschaftliche Entwicklung, wobei er zahlreiche griechischen Werke aus den Gebieten der Astronomie, Mathematik, Medizin, Philosophie, und Logik in die arabische Sprache übersetzen und bearbeiten ließ.[62] Zusätzlich hatte er großes Interesse an

[53] Berggren 1986; Ragep 2013.
[54] Sezgin 2010; Encyclopaedia Britannica 2017; Ragep 2013.
[55] Berggren 1986; Encyclopaedia Britannica 2017; Ragep 2013.
[56] Berggren 1986; Ragep 2013.
[57] Berggren 1986; Encyclopaedia Britannica 2017; Ragep 2013.
[58] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[59] Anmerkung: Die Benennung *muʿtazila* stammt vom arabischen Verb *iʿtazala - yaʿtazilu*, was „sich zurückziehen" bzw. „sich absetzen" bedeutet. Die Form *muʿtazila* ist das Aktivpartizip des genannten Verbes, und bedeutet daher „sich zurückziehend" bzw. „sich absetzend". Bisher wurden für diese Benennung verschiedene Erklärungen geliefert, von denen allerdings keine als allgemein und alleinig gültig anerkannt wurde. (Quelle: Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017)
[60] Berggren 1986; Ragep 2013.
[61] Berggren 1986; Ragep 2013.
[62] Berggren 1986; Sezgin 2010.

persischen Werken, deren Übersetzung er ebenfalls bei den ihm nahestehenden Gelehrten in Auftrag gab.[63] Im Zuge dessen wurde zur Förderung der Wissenschaften ausgehend von der private Bibliothek des Kalifen in Bagdad um 825 n. Chr. ein Kreis von Gelehrten namens *bayt al-ḥikma* (i.e. „Haus der Weisheit“) mit dem Ziel der Übersetzung von fremdsprachigen wissenschaftlichen Beiträgen und zur Diskussion unter Gelehrten und deren Schülern ins Arabische geformt.[64] Die Aktivitäten dieses Kreises von Gelehrten intensivierten sich in der Blütezeit der islamischen Wissenschaften, die vom 9. bis zum 13. Jh. n. Chr. Gelehrte förderte und ihnen Raum zur Forschung bot, und dadurch Wissen im Haus der Weisheit sammeln und weiterentwickeln konnte.[65] Hierbei ist allerdings anzumerken, dass das das Haus der Weisheit aller Wahrscheinlichkeit nicht als eine strukturierte Bildungseinrichtung oder Universität anzusehen war, sondern eher als eine Gemeinschaft von Gelehrten und deren Schülern, aus der Diskussionen und Forschungen in verschiedenen Fachgebieten hervorgingen.[66]

Die Förderung von Wissenschaftlern bezog sich nicht nur auf muslimische Gelehrte, sondern auch christliche und jüdische Gelehrte erhielten die Möglichkeit, im *bayt al-ḥikma* Beiträge zu leisten.[67] In Bezug darauf nahm Dimitri Gutas ebenfalls kritisch Stellung, indem er sich von der europäisch beeinflussten Sichtweise des „nach Wissen und Erkenntnis strebenden Herrscherhauses“ abkehrte, und die forschungs- und übersetzungsbezogenen Entwicklungen im Rahmen des *bayt al-ḥikma* als eine Eigenheit der zur damaligen Zeit regierenden Abbasiden charakterisierte.[68]

Übersetzt wurden Werke von Autoren wie beispielsweise Aristoteles, Euklid, Galen, Brahmagupta, Plato und Pythagoras, wobei nicht nur direkte Übersetzungen vorgenommen wurden, sondern manche Übersetzer auch eigene Erkenntnisse sowie verbesserte Stellen in den zu übersetzenden Werken und/oder klärende Kommentare bzw. Korrekturen ergänzten.[69] Auch die Titel wurden oftmals in einer arabisch gefärbten Form wiedergegeben.[70] Solch ein Übersetzer war u.a. Ṯābit b. Qurra aus Ḥarrān, der im 9./10. Jh. n. Chr. lebte und wirkte, und dessen sprachliche Talente für die Übersetzung von griechischen Texten ins Arabische von den Banū Mūsā, i.e. drei Brüder, die als Mäzene der Wissenschaften in Bagdad auftraten, entdeckt

[63] Berggren 1986; Sezgin 2010.
[64] Berggren 1986; Linden 2017; Ragep 2013.
[65] Sezgin 2010; Ragep 2013; Strick 2009.
[66] Gutas 1998.
[67] Berggren 1986; Museum of the History of Science Oxford 2017; Ragep 2013.
[68] Gutas 1998.
[69] Berggren 1986; Museum of the History of Science Oxford 2017; Hogendijk 1994.
[70] Berggren 1986; Sezgin 2010; Ragep 2013.

und unterstützt wurden.[71] Doch Ṯābit b. Qurra erweiterte seine Karriere als Übersetzer um eigene Forschungsaktivitäten im Bereich der Mathematik und Medizin, was der Kalif und seine Mäzene ebenfalls unterstützten.[72] Neben Ṯābit b. Qurra arbeiteten einige weitere talentierte Übersetzer, u.a. Al-Ḥağğāğ b. Maṭar, ʾIsḥāq b. Ḥunayn, ʾAḥmad b. Mūsā und Qusṭā b. Lūqā an der Aufarbeitung griechischer Werke von Euklid, Archimedes, Apollonios, Diophantos und Menelaos, um einige zu nennen.[73] Hierbei ist anzumerken, dass ein bestimmtes Werk nicht ausschließlich von einem Übersetzer bearbeitet wurde.[74] Die Werke wurden meist mehrmals überbearbeitet, und die Übersetzungen verbessert bzw. korrigiert.[75]

Abgesehen von der Übersetzung und Sammlung bestehender und fremdsprachiger Werke wurden auch von den im „Haus der Weisheit" beschätigten Gelehrten selbst Forschungsergebnisse erarbeitet.[76] Zum Beispiel der Gelehrte al-Ḥuwarizmī, dessen Schwerpunkt auf der Mathematik lag, kam im Rahmen der Forschungsinstitution zu Ergebnissen, die einen entscheidenden Beitrag zur Weiterentwicklung der Algebra leisten konnten.[77] Unter anderem prägte er die Wörter „Algebra" und „Algorithmus", und unterstützte er die Verbreitung des Dezimalsystems sowie der indischen Ziffern in der arabisch-islamischen Region. Auch im Bereich der Physik und Astronomie wurde Beiträge gemacht, nämlich von Muḥammad Mūsā, der die Universalität der Gesetze der Physik erforschte und Ibn al-Hayṯam, der verschiedene Experimente zu optischen Gegebenheiten durchführte.[78] Eine Reihe von medizinischen Erkenntnissen zur Augenheilkunde und zur chemischen Zusammensetzung von Mineralien wurden von Ḥunayn b. ʾIsḥāq gemacht und in mehreren Büchern festgehalten.[79] Die genannten Erkenntnisse waren nicht nur unmittelbar von Bedeutung, sondern behielten auch noch bis in die Renaissance-Zeit ihren Stellenwert in der Wissenschaft und Lehre.[80] Generell ermutigte insbesondere Kalif al-Maʾmūn über die individuellen Forschungsaktivitäten der Gelehrten hinaus auch gemeinsame Projekte mehrerer Gelehrter und bot dafür finanzielle Unterstützung an.[81]

[71] Berggren 1986; Sezgin 2010.
[72] Berggren 1986; Sezgin 2010.
[73] Berggren 1986; Sezgin 2010.
[74] Berggren 1986; Sezgin 2010.
[75] Berggren 1986; Sezgin 2010.
[76] Berggren 1986; Ragep 2013.
[77] Afridi 2013; Museum of the History of Science Oxford 2017; Ragep 2013.
[78] Berggren 1986; Hogendijk 1999.
[79] Berggren 1986; Afridi 2013.
[80] Hogendijk 1994; Sezgin 2010.
[81] Berggren 1986; Hogendijk 1999; Ragep 2013.

Zusätzlich wurden Observatorien errichtet, um astronomische Phänomene zu dokumentieren, und weiter zu erforschen.[82] Das erste Observatorium wurde von Kalif al-Maʾmūn um 830 n. Chr. in Auftrag gegeben und diente der Beobachtung von Sonne und Mond.[83] Das „Haus der Weisheit" ermöglichte Gelehrten verschiedener Wissenschaftsgebiete unter anderem der Geisteswissenschaften, Mathematik, Astronomie, Medizin, Biologie, Geographie und Alchemie, an der Weiterentwicklung und Bewahrung der wissenschaftlichen Ergebnisse teilzunehmen.[84] Die Quellen für die wissenschaftliche Bearbeitung im Rahmen des „Haus der Weisheit" stammten zwar zu weiten Teilen aus dem Griechischen, jedoch nicht ausschließlich, denn auch indische, persische und weitere fremdsprachliche Dokumente waren von Interesse.[85] Hierfür wurden Gelehrte auch in fremde Gebiete geschickt, um dort Werke zu erkunden, und in die Heimat zu bringen.[86] Diese Werke wurden dann übersetzt, für die Erhaltung im Rahmen der Sammlung in Bagdad vorbereitet, und/oder darauf aufbauende oder dadurch inspirierte Weiterentwicklungsaktivitäten wurden angestrengt.[87] Durch diese ständigen Bestrebungen nach mehr Wissen und Quellen konnte das „Haus der Weisheit" bis zur Hälfte des 9. Jh. n. Chr. zur weltweit größten Sammlung von Werken der Gelehrten verschiedener Regionen der damaligen Zeit ausgebaut werden.[88]

Geforscht wurde verstärkt auf den Gebieten der Astronomie, (Al)chemie, Mathematik, Medizin und Ingenieurwissenschaften, sowohl in angewandter bzw. experimenteller als auch theoretischer Hinsicht. Forschungsthemen der Astronomie waren einerseits praktisch und andererseits auch religiös behaftet.[89] In ersterem Bereich wurden astronomische Ergebnisse angestrebt, um Handel und Reisen in der Seefahrt und Navigation zu verbessern. Darüber hinaus konnte die Bestimmung des Mondkalenders, günstiger Zeitpunkte für religiöse Zeremonien, der Gebetszeiten und der Gebetsrichtung einfacher gestaltet werden mittels Ergebnissen aus dem Bereich der Astronomie.[90] Observatorien wurden angelegt und astronomische Messinstrumente entwickelt, um die Planeten, die Sonne und den Mond genauer beobachten zu können, und dadurch Distanzmessungen durchführen zu können.[91]

[82] Berggren 1986; Museum of the History of Science Oxford 2017.
[83] Berggren 1986; Ragep 2013.
[84] Afridi 2013; Berggren 1986; Ragep 2013.
[85] Berggren 1986; Sezgin 2010; Ragep 2013.
[86] Museum of the History of Science Oxford 2017; Berggren 1986; Ragep 2013.
[87] Berggren 1986; Sezgin 2010; Ragep 2013.
[88] Berggren 1986; Ragep 2013.
[89] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[90] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[91] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.

Die Wissenschaft der Chemie war im arabisch-islamischen Mittelalter noch nicht als selbstständige Disziplin etabliert, da sie oftmals als Hilfswissenschaft der Metall-, Farbstoff- und Keramikherstellung, sowie der Pharmazie und Medizin gesehen wurde.[92] Die Alchemie hingegen war eine Art Vorläufer für die Chemie, die allerdings mehr durch Einflüsse von Energien jeglicher Art (z.B. durch Steine, Metalle oder ähnliche Substanzen) sowie den dadurch hervorgerufenen Verformungsvorgängen und durch eine spirituelle und symbolische Komponente geprägt war.[93] Zudem wurden astrologische Kräfte und Energien mit verschiedenen Metallen, Mineralien und Stoffen assoziiert, um gewisse Wirkungen und Vorgänge zu erklären.[94]

Im Bereich der Mathematik wurden während des arabisch-islamischen Mittelalters existierende Werke von griechischen, persischen, indischen, chinesischen und weiteren fremdsprachigen Regionen übersetzt und gesammelt.[95] Darüber hinaus wurden von muslimischen Gelehrten eigene mathematische Erkenntnisse gemacht und verschriftlicht.[96] Großes Interesse zeigten die islamischen Gelehrten beispielsweise an Zahlen- und Ziffernsystemen, wobei sie vorwiegend entweder arabische Buchstaben zur Repräsentation verwendeten, oder die aus dem Indischen stammenden Ziffern (einschließlich der Ziffer Null) gebrauchten, und die Verwendung des Dezimalsystem betonten.[97]

Unter anderem im wirtschaftsbezogenen Gebrauch wurde ein auch im Babylonischen vorkommendes Zahlensystem, das auf der Zahl 60 basierte, verwendet.[98] Die islamischen Gelehrten, die an Zahlenbereichen interessiert waren, wurden u.a. auch von griechischen Mathematikern beeinflusst, deren Werke ins Arabische übersetzt wurden, und als Grundlage für Weiterentwicklungen oder Korrekturen dienten.[99] Praktischen Nutzen konnte das gewonnene Wissen über die mathematischen Methoden in Bezug auf Maßvorgänge, erbrechtliche Sachverhalte, Geldwechsel und den Handel im alltäglichen Leben und in der staatlichen Administration entfalten.[100] Eines der bedeutenden eigenständig entwickelten mathematischen Teilgebiete im islamischen Mittelalter war die Algebra, abgeleitet vom arabischen Wort *al-ǧabr*, die sich auf die Ausgleichsrechnung und einschlägige Algorithmen

[92] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[93] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[94] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[95] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[96] Strick 2009.
[97] Strick 2009.
[98] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[99] Strick 2009.
[100] Museum of the History of Science Oxford 2017.

dazu bezog.[101] Schließlich trafen diese Entwicklungen die Vorbereitungen darauf, dass sich die Algebra in späteren Zeiten von den konkreten Zahlen lösen konnte, und das Rechnen mit Variablen auf abstrakterer Ebene ermöglicht wurde.[102] Ein weiteres Gebiet, in dem die muslimischen Gelehrten beachtliche Beiträge leisteten, war die Geometrie, wobei diese als „heilige Lehre von den Formen, Linien und Räumen" galt und von griechischen Einflüssen geprägt war.[103] Anwendung fanden die Forschungsergebnisse aus der Geometrie und Trigonometrie vor allem in der Astronomie, Architektur und in der landwirtschaftsbezogenen Konstruktionstechnik (z.B. für Wasserräder und Ausstattung zur Bearbeitung von Felder und landwirtschaftlichen Flächen).[104]

In engem Zusammenhang mit den mathematischen Wissenschaften standen ingenieurwissenschaftliche Erfindungen.[105] Derartige Errungenschaften bezogen sich vermehrt auf Geräte und Prozesse zur Verbesserung der Landwirtschaft in trockenen Regionen und zum besseren Haushalten in der Wasserversorgung (z.B. mittels Wasserleitungen, Bewässerungskonstrukten oder Wasserspeichern).[106] Außerdem wurden Fortschritte in der Papier-, Metall- und Werkzeugherstellung gemacht.[107]

Der Fokus der Medizin im islamischen Mittelalter lag auf Pharmazie, Chirurgie und Anatomie.[108] Für die Produktion von Heilmitteln wurden traditionelle Kräuter und pflanzliche Substanzen sowie Mineralien und alchemistische Erzeugnisse verwendet und getestet, wobei diese Heilmittel (inklusive Zusammensetzung und Wirkungen) oft umfassend dokumentiert wurden.[109] Als Basis für derartige Erkenntnisse dienten Vorarbeiten, die sowohl in der griechischen Medizin als auch in den bestehenden islamischen Akademien gemacht wurden, ergänzt mit Informationen aus dem Fernen Osten (u.a. aus China oder Indien).[110] Die Lehrbücher und -methoden, die im islamischen Mittelalter entwickelt wurden, wurden noch Jahrhunderte später sowohl in Europa als auch im arabischen Raum geschätzt und verwendet.[111] Unterstützung wurde während der Herrschaftszeit von al-Maʾmūn nicht nur durch das Herrscherhaus geboten, sondern auch seitens wohlhabender Händler und Militärbeamten.[112]

[101] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[102] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[103] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[104] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[105] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[106] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[107] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[108] Berggren 1986; Museum of the History of Science Oxford 2017.
[109] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[110] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[111] Museum of the History of Science Oxford 2017.
[112] Berggren 1986; Ragep 2013; Museum of the History of Science Oxford 2017.

Durch diese Unterstützung und Bewunderung konnte für die Wissenschaften eine besondere Position in der Gesellschaft geschaffen werden, was wiederum dazu führte, dass die Berufe des Gelehrten und des Übersetzers stark aufgewertet wurden.[113] Kalif al-Maʾmūn war sogar persönlich interessiert an den Forschungsaktivitäten im „Haus der Weisheit", weswegen er selbst die Gelehrten während der Arbeit besuchte, sich nach ihren Forschungsergebnisse erkundigte, und auch an intellektuellen Diskussionen sowie an Exkursionen teilnahm.[114] Daher konnte die Einrichtung auch hochrangige und führende Gelehrte aus den arabischen und persischen Regionen für sich gewinnen.[115] Die Gelehrten des „Haus der Weisheit" waren außerdem nicht bloß der Forschungsinstitution zugeordnet, sondern unterhielten über ihre Grenzen hinaus weitreichende Verbindungen in die Wirtschaft, Beamtentum, Medizin und Technik des Herrschaftsgebietes der Abbasiden.[116] Es wurde also versucht, das Wissen direkt in die Gesellschaft einzubringen und zur Weiterentwicklung und Gestaltung zu verwenden. Außerdem diente das „Haus der Weisheit" als eine Art Vorbild für die Gründer der späteren Universitäten und weiteren Bildungseinrichtungen.[117]

Die Blütezeit setzte sich unter al-Maʾmūns Nachfolger al-Muʿtasim, der von 833 bis 842 n. Chr. regierte, und dessen Sohn al-Wāṯiq bi-llāh, der von 842 bis 847 n. Chr. herrschte, fort.[118] Die Regierungszeit von al-Wāṯiq bi-llāh war zwar durch die Aufstände der arabischen Beduinenstämme Banū Hilāl und Banū Sulaym im Ḥiğāz und weitere kriegerische Auseinandersetzungen geprägt, doch der Kalif war bemüht, die Aktivitäten zur Förderung der Wissenschaft aufrechtzuerhalten und die Lehre der *muʿtazila* zu unterstützen.[119] Nach seinem Tod im Jahre 847 stach sein Bruder al-Mutawakkil die Söhne von al-Wāṯiq bi-llāh aus und übernahm bis 861 n. Chr. den Thron.[120] Für das *bayt al-ḥikma* leitete diese Übernahme allerdings den Beginn des Niedergangs ein.[121] Denn al-Mutawakkil unterstützte nicht wie seine Vorgänger die Lehre der *muʿtazila*, im Rahmen derer die breit angelegten Forschungsaktivitäten und jegliche wissenschaftliche Betätigung Zuspruch fanden, sondern wählte eine strengere und wörtliche Auslegung des Korans.[122] Angesichts dieser Einstellung lehnte al-Mutawakkil rationalistische und wissenschaftlichen Strömungen ab, was schließlich auch dazu führte, dass

[113] Berggren 1986; Sezgin 2010.
[114] Berggren 1986; Ragep 2013; Strick 2009.
[115] Afridi 2013; Berggren 1986; Hogendijk 1994.
[116] Berggren 1986; Hogendijk 1994.
[117] Afridi 2013; Berggren 1986; Ragep 2013.
[118] Berggren 1986; Strick 2009; Ragep 2013.
[119] Berggren 1986; Ragep 2013.
[120] Berggren 1986; Strick 2009.
[121] Afridi 2013; Berggren 1986; Ragep 2013.
[122] Berggren 1986; Ragep 2013; Museum of the History of Science Oxford 2017.

das *bayt al-ḥikma* nicht mit seiner Weltanschauung übereinstimmte, und somit wahrscheinlich bereits unter al-Mutawakkil die teilweise Auflösung begonnen wurde.[123] Bis zur Mitte des 13. Jh. n. Chr. verebbten die Aktivitäten des einstigen „Haus der Weisheit" zunehmend.[124] Schon ab dem 11. Jh. n. Chr. begann das Abbasidenreich aufgrund von religiös-politischen Verwerfungen verschiedener Gruppierungen und seiner unüberblickbar gewordenen Ausbreitung zu wanken.[125] Die letzten Kalifen versuchten, mehr und mehr Macht im religiösen und politischen Sinne in ihrer Person zu konzentrieren, und ließen den Wissenschaften, Künsten und philosophischen Strömungen immer weniger Freiraum zugunsten einer strikt orthodoxen Glaubensüberzeugung.[126] Das Goldene Zeitalter der islamischen Wissenschaften war beendet.[127] Schließlich wurde Bagdad im Zuge der Belagerung durch die Mongolen unter der Führung von Hülägü, dem damaligen Khan und Enkel des Dschingis Khan, im Jahre 1258 zusammen mit den weiteren Bibliotheken und Bildungseinrichtungen der Stadt zerstört und geplündert.[128]

[123] Berggren 1986; Ragep 2013; Museum of the History of Science Oxford 2017.
[124] Linden 2017; Strick 2009.
[125] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[126] Museum of the History of Science Oxford 2017; Strick 2009.
[127] Linden 2017.
[128] Linden 2017; Strick 2009.

2.2. Entwicklung der mathematischen Wissenschaften

Nachdem die griechischen Gelehrten die Grundlagen der „modernen Mathematik“ gelegt hatten, wurden deren Inhalte im Rahmen der intensiven Übersetzungsaktivitäten und Forschungsgemeinschaften der islamischen Gelehrten wie beispielsweise am bereits erwähnten „Haus der Weisheit“ aufgearbeitet, ergänzt, kommentiert und teils auch darauf basierend neue Beiträge entwickelt.[129] Diese wissenschaftlich bedeutende Zeitspanne befand sich zwischen den griechischen Grundlagenbeiträgen und der späteren Bearbeitung durch europäische Mathematiker der Zeit der Renaissance – Periode, die also in etwa vom 8. Jh. n. Chr. bis in das 15. Jh. n. Chr. reichte.[130]

Im Hinblick auf die zur damaligen Zeit gemachten Beiträge ist anzumerken, dass die Bezeichnung „islamische/arabische Gelehrte“ bzw. „islamische/arabische Mathematik“ sich nicht ausschließlich auf arabischsprachige bzw. muslimische Personen bezieht, da auch Juden, Christen und Vertreter anderer Religionsgruppen Beiträge während diesem Abschnitt der mathematischen Geschichte im islamischen Herrschaftsbereich bzw. in der arabischsprachigen Region leisteten.[131] Daher soll der angesprochene Begriff in den folgenden Abschnitten in seiner erweiterten Form verwendet werden, die auch nicht muttersprachlich arabische Gelehrte und nicht-islamische Gelehrte, die in der genannten Region lebten und wirkten, miteinschließt. Eine starke Präsenz der mathematischen Gelehrten zeigte sich in der Region des heutigen Irak und Iran, jedoch fanden auch teils geografische Verschiebungen statt, da die Grenzen der arabischen Königreiche und Kalifate sich in ständigem Wandel befanden (in einem Bereich vom heutigen Spanien im Westen bis an die Grenzen des heutigen Chinas im Osten).[132] Die Aktivitäten im Bereich der Mathematik intensivierten sich in der arabisch-islamischen Region ab dem 8. Jh. n. Chr. mit den zunehmenden Übersetzungen von vor allem griechischen und indischen Werken in die arabische Sprache, letztere insbesondere im Hinblick auf das Zahlensystem und die Art von Ziffern, die verwendet wurden.[133] Die Mathematik wurde stark gefördert während der Herrschaftszeit von Abbasidenkalif Hārūn ar-Rašīd von 786 bis 809 n. Chr., der aus Eigeninteresse Werke aus dem Griechischen (u.a. von Euklid) für seine private Bibliothek übersetzen ließ.[134] Diese Unterstützung für die Wissenschaften verstärkte sich nachfolgend unter dem Abbasidenkalifen al-Maʾmūn weiterhin, wobei, wie im Obigen

[129] Rebstock 1992; O’Connor & Robertson 2017.
[130] O’Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[131] O’Connor & Robertson 2017; Rashed 2015 Agnoletti 2016.
[132] Rashed 1994; O’Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[133] O’Connor & Robertson 2017; Kheirandish 2013.
[134] Ismail & Atan 2010; Rashed 1994; Rebstock 1992.

angemerkt, das „Haus der Weisheit“ sozusagen gegründet und damit institutionalisiert wurde.[135] Diese Institution umfasste sowohl Lehrangebot, Forschung als auch Übersetzungsprojekte. Anzumerken sei an dieser Stelle, dass die Übersetzungen nicht von rein linguistisch ausgebildeten Experten ohne tiefere mathematische Kenntnisse in Theorie und Praxis durchgeführt wurden, sondern dass durchaus erfahrene mathematisch und ingenieurwissenschaftlich (Universal)gelehrte sich damit beschäftigten, wie zum Beispiel al-Kindī[136] oder Ḥunayn b. ʾIsḥāq[137].[138] Die Übersetzungsaktivitäten dienten also neben der reinen sprachlichen Ausgestaltung auch zur Aufarbeitung des damals verfügbaren Standes der Forschung, und dazu, neue Erkenntnisse aus der Bearbeitung existierender Forschungsergebnisse zu gewinnen.[139] Daher wurden oftmals „erweiterte Übersetzungen“ erarbeitet, die auch Kommentare, kritische Bemerkungen und/oder Ergänzungen enthielten.[140] So wurden beispielsweise aus dem Griechischen Werke von Euklid, Archimedes, Menelaos, Ptolemäus und Diophantos bearbeitet, die Beiträge zu den Teilgebieten der Geometrie, Arithmetik, Optik, Mechanik, sphärischen Phänomenen, Vermessung und astronomischen Mathematik leisteten.[141]

Einen herausragenden Beitrag im Teilgebiet der Algebra (*ʿilm al-ǧabr wa-l-muqābala*) stellten die Forschungen von al-Ḫuwarizmī dar, die weitreichende Ergänzungen zu den auf geometrischen Ergebnissen basierenden Arbeiten der griechischen Gelehrten machten.[142] Die Besonderheit seiner Arbeiten lag darin, dass nunmehr sowohl Zahlen als auch geometrische Komponenten auf einem abstrakteren Level als „algebraische Objekte“ gesehen werden konnten, was die Reichweite der Algebra entscheidend in ihren Möglichkeiten des Erfassens von Problemen erweiterte um einen abstrakteren Zugang.[143] Al-Ḫuwarizmī schuf somit eine Art Ausgleichsrechnung, die es ermöglichte, verschiedene Typen von Gleichungen des ersten und zweiten Grades durch das Wegnehmen von negativen Mengen und das Abziehen von positiven Mengen derselben Potenz auf beiden Seiten der Gleichung systematisch zu lösen, wobei er auch die zugehörigen Beweise für die standardisierten Umformungen lieferte.[144] Der Begriff *al-ǧabr* bezog sich auf das Verschieben von negativen Teilen, wie z.B. der Wandlung

[135] O’Connor & Robertson 2017; Rashed 2015; Muslim Heritage 2017.
[136] Im 9. Jh. n. Chr.
[137] Im 9. Jh. n. Chr.
[138] O’Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017; Kheirandish 2013.
[139] Rashed 2015; Rebstock 1992; Muslim Heritage 2017.
[140] O’Connor & Robertson 2017; Rebstock 1992; Muslim Heritage 2017.
[141] Rebstock 1992; Kheirandish 2013; O’Connor & Robertson 2017.
[142] Rashed 1994; O’Connor & Robertson 2017; Agnoletti 2016.
[143] O’Connor & Robertson 2017; Agnoletti 2016.
[144] Rebstock 1992; Kheirandish 2013; Ismail & Atan 2010.

des Ausdrucks 6x = 14-x zu 7x = 14 durch die Addition von x auf der linken Seite.[145] Ähnliche Ideen zur Ausgleichsrechnung konnten in den Grundlagen der Terminologie bei dem griechischen Mathematiker Diophantus von Alexandria festgestellt werden.[146] Jedoch gab es aller Wahrscheinlichkeit kein derartig umfangreiches Werk zur Algebra, wie jenes von al-Ḫuwarizmī zur damaligen Zeit, das die Grundlagen der Algebra in solch systematischem Ausmaß didaktisch und anwendungsbezogen aufarbeitete.[147] Der Begriff *al-muqābala* bezog sich auf das Ausgleichen der positiven Komponenten ohne Unbekannte, wie z.B. bei der Wandlung von $10 + x^2 = 5 + x$ zu $5 + x^2 = x$ durch Subtraktion von 5 auf der linken Seite.[148]
Diese algebraischen Beiträge wurden sodann auf die Arithmetik, Trigonometrie, euklidische Zahlentheorie und die Geometrie angewandt, wodurch sich schließlich unter anderem die polynomiale Algebra, numerische Algorithmen für die Lösung von Gleichungssystem, die elementare Zahlentheorie und auch die geometrische Lösung von Gleichungen ergaben.[149] Anschließend an die Forschung von al-Ḫuwarizmī verfasste der persische, muslimische Mathematiker und Astronomen al-Māhānī noch im 9. Jh. n. Chr. Kommentare zu den Werken von Archimedes, Menealaos sowie Euklid, die zum Teil auch schon als Übersetzungen in arabischer Sprache vorlagen.[150] Der ebenso im 9. Jh. n. Chr. wirkende arabische Mathematiker ʾAbū Kāmil fungierte als Bindeglied zwischen den Forschungen von al-Ḫuwarizmī (9. Jh. n. Chr.) und al-Karağī (10. Jh. n. Chr.), indem er *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala* des ersteren Autors weiterführte.[151] Eine besondere Entwicklung an dieser Stelle war ʾAbū Kāmils Schreibweise von Potenzen einer beliebigen unbekannten Variable x (i.e. Vielfache von x^n) in Form von Prosatext – eine Art symbolische Darstellung, die zur damaligen Zeit eine Neuheit darstellte.[152] Al-Karağī machte im 10. Jh. n. Chr. Bestrebungen in Richtung einer Algebra, die nicht mehr ausschließlich auf geometrischen Vorgängen beruhte.[153] Er definierte beispielsweise Regeln, wie x bzw. Potenzen und Quotienten davon zu behandeln sind, und wie sie kombiniert werden können. [154] Die Grundlagen seiner Ideen besitzen bis heute

[145] Muslim Heritage 2017; Kheirandish 2013.
[146] Muslim Heritage 2017; Kheirandish 2013.
[147] Ismail & Atan 2010; Muslim Heritage 2017.
[148] Muslim Heritage 2017.
[149] O'Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[150] O'Connor & Robertson 2017: Anmerkung: Al-Māhānī versuchte vergeblich das so genannte „Archimedische Problem" zu lösen, bei dem ein Raum mit Hilfe einer Ebene gegeben ein bestimmtes Verhältnis von Volumina in zwei Stücke geteilt werden sollte.
[151] Rebstock 1992; O'Connor & Robertson 2017.
[152] Rebstock 1992; Rashed 2015; O'Connor & Robertson 2017.
[153] Rebstock 1992; O'Connor & Robertson 2017.
[154] O'Connor & Robertson 2017; Rashed 1994; Muslim Heritage 2017.

noch in der algebraischen Arithmetik ihre Gültigkeit.[155] Die Vorgänge können also in der algebraischen Arithmetik auf unbekannten Variablen wie beispielsweise „x" genauso durchgeführt werde, wie es bei konkreten Variablen in der Form von Zahlen der Fall wäre.

Die Arbeiten zur Erweiterung der algebraischen Theorien und Methoden zogen sich weiter über das 11. Jh. n. Chr., als der persische Universalgelehrte ʿUmar al-Ḫayyām sich mit der Einteilung von Typen kubischer Gleichungen[156] (in vermeintlich ungefähr 15 Hauptgruppen) mittels geometrischen Lösungen durch Kegelschnitte beschäftigte.[157] Demnach wurde von ʿUmar al-Ḫayyām also wieder ein Rückgriff auf die Geometrie gemacht im Bereich der Algebra, was im Gegensatz zu der Richtung, die von al-Karaǧī eingeschlagen worden war, stand.[158] Aṭ-Ṭūsī hielt sich im 12. Jh. n. Chr. ebenfalls nicht an die von al-Karaǧī vorgeschlagenen Methoden der Algebra, die die Verwendung von Gleichungen mit Unbekannten nahe legten, um Lösungen zu finden.[159] Er verwendete wiederum die Einschläge aus der Geometrie, die bereits von ʿUmar al-Ḫayyām unterstützt wurden, wodurch Kurven durch Gleichungen analysiert werden konnten.[160]

Daneben wurden im Rahmen der mittelalterlichen islamischen Mathematik bedeutende Beiträge zu den Zahlensystemen und Arten von Ziffern (*ʿilm al-ʿadad*) bzw. Arithmetik (*ʿilm al-ḥisāb*) gemacht, die u.a. die verschiedenen damals verwendeten Zahlensysteme und Ziffernsätzen verglichen.[161] Zunächst wurde das auf dem Zählen mittels Hand und Fingern basierte System verwendet, gemäß dem die Zahlenbedeutung in Textform geschrieben werden.[162] Da es ein intuitives und leicht verständliches System war, fand dieses System großen Anklang im Kreise von Händlern und Geschäftsleuten.[163] Beispielsweise al-Baġdādī und ʾAbū l-Wāfā schrieben mehrere Abhandlungen darüber.[164] Letzterer setzte sich zwar ebenso intensiv mit den indischen Ziffern und dem Dezimalzahlensystem auseinander, jedoch verfügten diese in der Geschäftswelt lange über keine so weite Verbreitung.[165] Ein weiteres Zahlensystem, das zur damaligen Zeit in Gebrauch war, war das Sexagesimalsystem, bei dem Textstücken bzw. Buchstaben des arabischen Alphabets neben ihrer wortwörtlichen Bedeutung auch ein Wert in

[155] O'Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[156] i.e. Gleichungen dritten Grades.
[157] Molland 2013; O'Connor & Robertson 2017.
[158] O'Connor & Robertson 2017.
[159] O'Connor & Robertson 2017; Rashed 1994.
[160] O'Connor & Robertson 2017.
[161] Molland 2013; O'Connor & Robertson 2017.
[162] Molland 2013; O'Connor & Robertson 2017.
[163] O'Connor & Robertson 2017; Rashed 2015.
[164] O'Connor & Robertson 2017; Rashed 2015; Muslim Heritage 2017.
[165] Berggren 1986; O'Connor & Robertson 2017.

Form einer konkreten Zahl zugeordnet war.[166] Verwendet wurde dieses arithmetische System bereits bei den Babyloniern.[167] Verbreitet war es auch in Gelehrtenkreisen aus dem Bereich der Astronomie.[168] Mit Hilfe von Operationen in der Basis 60 wurden Winkelfunktionen berechnet.[169] Das dritte der Systeme war das indische System, das auf dem dezimalen Stellenwertsystem basiert, und über neun[170] bzw. zehn[171] eigene Ziffern verfügt.[172] Einer der Wegbereiter für dieses System war der arabische Astronom und Mathematiker al-Battānī im 9. Jh. n. Chr., der sich auch mit der Anwendung der Zahl Null beschäftige.[173] Die Ziffern laufen von Null bzw. Eins bis Neun, und die Zählrichtung beginnt bei der rechts außen stehenden Stelle und führt je nach Operation um eine Stelle weiter nach links gemäß dem Stellenwertsystem mit der Basis Zehn.[174] Die Dezimalpalette besteht aus neun verschiedenen Ziffern sowie der Null und entstammt in ihrer ursprünglichen Version der Brahmi-Schrift aus Indien.[175] Die Zahlzeichen (bzw. Ziffern) sind eigenständige Zeichen, können aber je nach Sprache bzw. Region eine eigene Schreibweise annehmen.[176] Al-Ḫuwarizmī verwendete bereits im 9. Jh. n. Chr. das Dezimalsystem mit den indischen Ziffern[177], das er wahrscheinlich im Rahmen seiner wissenschaftlichen Tätigkeit im „Haus der Weisheit“ in Bagdad kennengelernt hatte.[178] Dieses System wurde al-Ḫuwarizmī aller Wahrscheinlichkeit nach von indischen Gelehrten aus Sind, die auf Anfrage von Abbasidenkalif al-Manṣūr an den Hof geladen wurden, im Rahmen von Übersetzungstätigkeiten zugänglich.[179] Die (angeblichen) grundlegenden Arbeiten von al-Ḫuwarizmī zum indischen System sind heutzutage nicht mehr im Original vorhanden.[180] Ungefähr 150 Jahre nach al-Ḫuwarizmī widmete sich der arabische Astronom Kūšyar b. Labbān dem Thema, und verfasste ein Lehrbuch über die Verwendung der neun Ziffern (١, ٢, ٣, ٤ [181] bzw. ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩) und zusätzlich dem Zeichen für Null (٠), das mit der

[166] Berggren 1986; O’Connor & Robertson 2017.
[167] Rashed 1994; O’Connor & Robertson 2017.
[168] Berggren 1986; O’Connor & Robertson 2017.
[169] Berggren 1986.
[170] Bei Betrachtung ohne Null.
[171] Bei Betrachtung einschließlich Null.
[172] O’Connor & Robertson 2017.
[173] Muslim Heritage 2017.
[174] Berggren 1986.
[175] O’Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[176] Berggren 1986; O’Connor & Robertson 2017.
[177] Anmerkung: ab hier bezeichnet als „indisches Zahlensystem“.
[178] Kheirandish 2013; Berggren 1986.
[179] Kheirandish 2013; Berggren 1986.
[180] Kheirandish 2013; Berggren 1986.
[181] Wobei dies die Standardschreibweise im Osten des arabisch-islamischen Raumes in der Zeit von Kūšyar b. Labbān war.

Bedeutung einer leeren Position behaftet war.[182] Zusätzlich erklärte der Astronom in seinem Lehrbuch die Verwendung des Dezimalstellenwertsystems inklusive der möglichen arithmetischen Rechenoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sowie des Berechnens von Wurzeln und gewisser Ausgleichsvorgänge.[183]

Al-ʾUqlīdisī[184] beschäftigte sich neben al-Baġdādī im 10. bzw. 11. Jh. n. Chr. mit der Anwendung der Arithmetik mit Hilfe des indischen Zahlensystems mittels Stiften auf Papier, indem er die notwendigen Umformungen dafür aufzeigte, sodass die bis dahin gewöhnliche Schreibweise mittels mit Sand überzogener Tafel und Finger/Stock, vereinfacht werden konnte, indem al-ʾUqlīdisī die Löschvorgänge überflüssig machte.[185] Die bis dahin gewöhnliche Prozedur des Rechnens wurde nicht mit Hilfe von Stift und Papier durchgeführt, sondern mit dem oben beschriebenen „Staubbrett" bzw. „Sandbrett", auf dem meist nur einige wenige Zahlen bzw. Operationen gleichzeitig betrachtet werden konnten, da die Tafel, auf der gearbeitet wurde, relativ klein war.[186] Kūšyar b. Labbān führte seine Erklärungen zur Arithmetik im indischen Zahlensystem (wahrscheinlich wie auch al-Ḫuwarizmī in Prosatext aus, und zeichnete die Zahlen in Form von Ziffern nur auf, wenn er tatsächlich von Operationen auf dem „Sandbrett" sprach.[187]

Das indische Zahlensystem eröffnete den islamischen Gelehrten neue Möglichkeiten in Bezug auf mathematische Methoden und Algorithmen basierend auf dem Dezimalstellenwertsystem, wie beispielsweise das Ermitteln von Wurzeln und ganzzahlige Exponenten.[188] Im 14./15. Jh. n. Chr. verfeinerte der persische Universalgelehrte al-Kāšī die angesprochenen Rechenmethoden insbesondere in Bezug auf die approximative Berechnung von reellen Zahlen und Dezimalbrüchen, was eine in der islamischen Mathematik erreichte Neuerung darstellte.[189] Abgesehen davon berechnet er die Zahl Pi[190] auf 16 Dezimalstellen genau, was zur damaligen Zeit ein herausragendes Ergebnis war.[191] Darüber hinaus entstand während seiner Forschungszeit auch ein allgemeines mathematisches Lehrbuch mit Anwendungsfällen in

[182] Berggren 1986.
[183] Berggren 1986.
[184] Anmerkung: Der Name al-ʾUqlīdisī leitete sich wohl von Euklid, d.h. auf Arabisch ʾUqlīdis, ab, was darauf hinweist, dass der Gelehrte wohl Werke von Euklid übersetzte und bearbeitete. (Quelle: Berggren 1986)
[185] Berggren 1986; O'Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[186] Berggren 1986.
[187] Berggren 1986.
[188] O'Connor & Robertson 2017: z.B. umgesetzt durch ʾAbū l-Wāfā, ʿUmar al-Ḫayyām und al-Karaǧī.
[189] O'Connor & Robertson 2017; Berggren 1986.
[190] In formaler Notation: π.
[191] Muslim Heritage 2017.

Wirtschaft, Astronomie und Ingenieurwissenschaften, das so genannte *Miftāḥ al-Ḥisāb*[192], das noch Jahrhunderte später in der Lehre verwendet wurde.[193]

Abgesehen von den obigen Teilgebieten wurden in der mittelalterlichen islamischen Mathematik bedeutende eigenständige Beiträge im Bereich der Zahlentheorie gemacht.[194] Im Rahmen des „Haus der Weisheit" in Bagdad wurde der Mathematiker Ṯābit b. Qurra im 9. Jh. n. Chr. von den damals im technischen, astronomischen und mathematischen Bereich weithin bekannten persischen Gelehrtenbrüdern des Bānū Mūsā[195] ausgebildet. Ṯābit b. Qurra kam basierend auf den Forschungen von Pythagoras (aus dem 5. Jh. n. Chr.) zu einem Theorem über „befreundete Zahlen", womit er Zahlenpaare aus der Menge der Natürlichen Zahlen (ℕ) bezeichnete, für die die Summe der jeweiligen echten Teiler die jeweils andere Zahl ergibt.[196] Er schrieb außerdem über das Verhältnis von geometrischen Mengen zueinander, was ein bis dahin noch nicht behandelter Sachverhalt war.[197] An diese Erkenntnisse, deren Grundlage Werke der griechischen Arithmetik bildeten, schlossen im 10. Jh. n. Chr. al-Baġdādī, und al-Haiṯam sowie im 13. Jh. n. Chr. al-Fārisī an und verfeinerten die Ergebnisse von Ṯābit b. Qurra.[198] Al-Haiṯam fand u.a. als erster heraus, dass der Ausdruck 1+(p-1)! teilbar durch p ist, falls p eine Primzahl ist, was heutzutage unter dem Name „Wilson-Theorem" bekannt ist.[199] Er lieferte zwar keinen Beweis für dieses Theorem, das letztendlich im 18. Jh. n. Chr. von Lagrange bewiesen wurde, konnte aber diese Aussage bereits im 10. Jh. n. Chr. unterbreiten.[200]

Neben den mathematischen Errungenschaften in den Bereichen der Zahlentheorie, Zahlensysteme und Algebra konnten die islamischen Mathematiker einige Weiterentwicklungen in der Trigonometrie (*ḥisāb al-muṯallaṯāt*), weiteren Teilgebieten der Geometrie (*riyāḍat al-handasa*) und der Astronomie (*ʿilm al-falak*) vorweisen.[201] Al-Kindī, der im 9. Jh. n. Chr. wirkte, leistete zahlreiche Beiträge zu allen der genannten Teilgebiete der mathematischen Wissenschaften.[202] Im ersteren Bereich verwendete al-Battānī im 9. Jh. n. Chr. im Gegensatz zu seinen griechischen Vorläufern, die noch mittels Sehnen Winkel berechneten,

[192] i.e. "Schlüssel zur Arithmetik".
[193] Muslim Heritage 2017.
[194] O'Connor & Robertson 2017; Berggren 1986.
[195] Anmerkung: Die Brüder des Bānū Mūsā beschäftigten sich insbesondere mit der Geometrie basierend auf den Forschungsergebnissen der griechischen Vorläufer und mit der Mechanik. (Quelle: O'Connor & Robertson 2017)
[196] O'Connor & Robertson 2017: Beispielsweise wurden als solches Zahlenpaar die Zahlen 220 und 284 genannt.
[197] Muslim Heritage 2017.
[198] O'Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[199] O'Connor & Robertson 2017.
[200] O'Connor & Robertson 2017.
[201] O'Connor & Robertson 2017.
[202] Muslim Heritage 2017.

die Winkelfunktionen des Sinus, Cosinus und Tangens, wobei er auch das Verhältnis der drei Winkelfunktionen erörterte.[203] Die Errungenschaften von al-Battānī erleichterte somit die Durchführung von Winkelmessungen und -operationen, die vor allem in der Vermessung (ʿ*ilm al-misāḥa*) und Astronomie gebraucht wurden, entscheidend.[204]

Die Methoden der Trigonometrie wurden basierend auf den Werken der griechischen Vorläufer[205] beispielsweise durch den iranischen Mathematiker und Astronom al-Qūhī im 10. Jh. n. Chr. verfeinert.[206] Daneben analysierte er auch die Verwendungsmöglichkeiten und den Bauprozess des Astrolabiums, eines Instrumentes zur Simulation des Himmels, das in Form einer Scheibe konstruiert wurde, anhand von Methoden der Geometrie.[207] Weitere bedeutende Forschungsergebnisse erlangte al-Hayṯam mit der Entwicklung von mathematischen Methoden (basierend auf Kegelschnitten) zur Erkundung der Eigenschaften von Spiegeln – ein Beitrag, der eher in Richtung der Konzeption mathematischer Methoden für die Physik geht.[208] Hervorzuheben sind in der Trigonometrie ebenfalls die Ausarbeitungen von ʿUmar al-Ḫayyām, der trigonometrische Methoden und Ergebnisse aus bestehenden Näherungsverfahren nutzte, um algebraische Gleichungen auf geometrische Art und Weise zu lösen.[209]

Die islamischen Gelehrten waren zumeist Universalgelehrte, die sich nicht rein mit der Mathematik beschäftigten, sondern ihre Fähigkeiten auch in weiteren Natur- und/oder Ingenieurwissenschaften einsetzten.[210] Somit erarbeiteten viele von ihnen zusätzlich Theorien und praktische Methoden für Wissenschaften wie die Astronomie, z.B. zur Zeit- und Kalenderrechnung, Optik, Mechanik, Sphärenkunde, Konstruktion von astronomischen Geräten (wie dem Astrolabium) oder zur Messung von Distanzen und/oder Geschwindigkeiten sowie der Beobachtung der Beschaffenheit von Himmelskörpern.[211]

Abseits von der theoretischen Ebene (ʿ*ilm*) im wissenschaftlichen Diskurs wurden die mathematischen Erkenntnisse auch in verschiedenen Wirtschafts- und Gesellschaftsbereichen im praktischen Sinne (ʿ*amal*) angewandt.[212] Dokumente aus dem 9. und 10. Jh. n. Chr. zeugten davon, dass gewisse Erkenntnisse der Mathematik auch relevant waren für die ordnungsgemäße Führung des Verwaltungsapparates, und dass daher auch praktische Fähigkeiten bestimmter

[203] Muslim Heritage 2017.
[204] Muslim Heritage 2017.
[205] Z.B. Archimedes und Euklid.
[206] O'Connor & Robertson 2017.
[207] O'Connor & Robertson 2017.
[208] O'Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[209] O'Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[210] O'Connor & Robertson 2017.
[211] O'Connor & Robertson 2017.
[212] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.

Berufsgruppen (z.B. Sekretäre, Heeresschreiber, Kanzleiassistenten) in Bezug auf mathematische Methoden zur Erfüllung der Berufspflichten notwendig waren.[213] Insbesondere wurden von den Arbeitgebern grundlegende Kenntnisse in den Rechenvorgängen der Addition (*ǧamʿ*), Multiplikation (*taḍʿīf*) sowie Subtraktion und Division (beides zusammen als „Teilung" (*tafrīq*) bezeichnet).[214] Zudem war die Umrechnung von Beträgen (*taṣrīf*) von Bedeutung, wobei hiermit beispielsweise die Umrechnung von einer bestimmten Geldeinheit in eine andere gemeint ist.[215] Auch für die Berechnung von Wertverhältnissen zwischen verschiedenen Geldmengen und Rohstoffen (*nisba*) waren Rechenkenntnisse notwendig.[216] Über das reine Rechnen (*ḥisāb*) hinaus wurden für bestimmte Berufe Zusatzkenntnisse gefordert, wie zum Beispiel die Flächen- und Distanzberechnung (inklusive einfacher geometrischer Aufgaben) von Vermessungsbeamten, die Lohnberechnung von Heeresschreiber und Personalbeamten, die erbschafts-, schuld- und wirtschaftsrechtlichen Methoden von Rechtssekretären und die steuerbezogenen Methoden von den Steuerbeamten.[217] Zur Kontrolle der Qualität und der Einhaltung der Geschäftsvorgaben und guten Sitten diente das geschäftliche Rechnen (*ḥisāb muʿāmalāt*), das die Tätigkeiten des (Ver)kaufens, des Termingeschäfts, des Verleihens von Geld, der Zinsen und des Unternehmens abdeckt.[218] Zu späterer Zeit wurden wiederum Kenntnisse der Algebra zum Lösen von Gleichungen bis zum zweiten Grad vor allem in der Kapitalrechnung und hinsichtlich erbschaftsbezogenen Sachverhalten wichtiger.[219] Insgesamt wurde dem Rechnen in der Gesellschaft ein hoher Stellenwert beigemessen, da es den Menschen half, gute Sitten von schlechten Angewohnheiten zu unterscheiden, was auch im Sinne des religiösen Denkens geprägt war.[220] Im beruflichen Alltag war zunächst das traditionelle Rechensystem mittels Griffel (*ḥisāb bi-l-qalam*) bzw. Staub (*ḥisāb at-turāb* oder auch *ḥisāb al-ġubār*) weit verbreitet.[221] Eine weniger aufwändige Rechenmethodik, die allerdings in der Praxis wenig gelehrt wurde, war jene mittels indischem Zahlensystem (*ḥisāb al-hind*), das erst ab dem 11. Jh. n. Chr. zunehmend in der Ausbildung der genannten Berufe unterrichtet wurde.[222]

[213] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.
[214] Rebstock 1992.
[215] Rebstock 1992.
[216] Rebstock 1992.
[217] Rebstock 1992.
[218] Rebstock 1992.
[219] Rebstock 1992.
[220] Rebstock 1992.
[221] Rebstock 1992.
[222] Rebstock 1992.

3. Zu den Anfängen und der Entwicklung der Algebra unter besonderer Betrachtung der islamischen Gelehrten des Mittelalters

3.1. Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Algebra und Entwicklung der Wissensbasis

Die Algebra ist ein Teilgebiet der Mathematik, das je nach betrachtetem Zeitabschnitt einen bestimmten Schwerpunkt hat, und sich mit der Lösung von Gleichungen etwaiger Typen sowie mit Operationen auf mathematischen Objekten beschäftigt.[223] Des Weiteren werden die Eigenschaften bestimmter Objekte bzw. von Operationen auf Objekten festgestellt und auf abstrakter Ebene (d.h. mit Unbekannten) dargestellt.[224] Gearbeitet wird in enger Verbindung mit der Arithmetik und der Geometrie.[225] In der elementaren Algebra wird vor allem auf die Rechenoperationen auf den Zahlenmengen $\mathbb{N}$ [226], $\mathbb{Z}$ [227], $\mathbb{Q}$ [228] und $\mathbb{R}$ [229] Bezug genommen und mit einfachen Formen von Gleichungen mit Variablen gearbeitet.[230] Darüber hinaus wurden zahlreiche weitere Bereiche, wie unter anderem die lineare Algebra oder die abstrakte Algebra bis hin zur Computeralgebra, erforscht.[231]

Die Anfänge der algebraischen Forschung gehen auf das 2. bis 1. Jtsd. v. Chr. zurück, als die Babylonier versuchten Gleichungen bis zum zweiten Grad (z.B. vom Typ $x^2 + b = ax$, wobei „x“ die Unbekannte darstellt) mittels allgemein anwendbarem Näherungsverfahren[232] zu lösen.[233] Im indischen Raum befassten sich Forscher mit der praktischen Lösung von Gleichungen ersten und zweiten Grades.[234] Während der genannten Epoche beschäftigten sich auch die Ägypter mit algebraischen Sachverhalten, insbesondere mit der Lösung von Gleichungen ersten Grades (d.h. lineare Gleichungen) unter Zuhilfenahme von Methoden der Geometrie.[235] Ebenso entwickelten indische Gelehrte um Baudhayana und Apastamba in etwa im 8./7. Jh. v. Chr. Verfahren zur Lösung von quadratischen Gleichungen.[236]

[223] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[224] Histoire de l’algèbre 2018; Hunger Parshall 1988; Rebstock 1992.
[225] Histoire de l’algèbre 2018; Hunger Parshall 1988; Rebstock 1992.
[226] i.e. Menge der natürlichen Zahlen.
[227] i.e. Menge der ganzen Zahlen.
[228] i.e. Menge der rationalen Zahlen (bzw. „Brüche“).
[229] i.e. Menge der reellen Zahlen.
[230] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[231] Busard 1997; Histoire de l’algèbre 2018.
[232] Anmerkung: z.B. mittels Algorithmus der linearen Interpolation, der die Folge der Rechenschritte vorgab, die notwendig waren, um ein Ergebnis zu ermitteln.
[233] Karpinski 1915; Histoire de l’algèbre 2018.
[234] Histoire de l’algèbre 2018; Hunger Parshall 1988.
[235] Karpinski 1915; Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[236] Karpinski 1915; Histoire de l’algèbre 2018: Die Verbindung mit der Geometrie wurde u.a. von Euklid betont.

Anders als die im Obigen vorgestellten Forschungen zur Algebra, die eher anwendungsbezogen war, gingen die griechischen Gelehrten Mitte des 1. Jtsd. v. Chr. bis ca. 300 n. Chr. in eine theoretischere und zugleich enger mit der Geometrie verbundene Richtung.[237] Diophantos von Alexandria, dessen Lebenszeit ungefähr auf die Zeitspanne zwischen 1. Jh. v. Chr. und 3. Jh. n. Chr. datiert wird, verfasste die „Arithmetica", eine grundlegende Abhandlung zu den Rechenoperationen mit Buchstaben (i.e. Unbekannten) als Vorläufer der Theorien zur Lösung von algebraischen Gleichungen und zur Zahlentheorie.[238] Sein Werk leistete einen entscheidenden Beitrag dazu, dass sich sowohl die Algebra als auch die Arithmetik von der Geometrie abheben konnten, und somit eigene Wege (in eine abstraktere, symbolische Richtung) gehen konnten.[239] Die Eigenschaften von symbolischen Unbekannten sollten durch Umformungen von Gleichungen ermittelt werden können.[240] Zugleich intensivierte er die Bestrebungen nach dem Erreichen von genauen Ergebnissen im Gegensatz zu den bis dahin meist mit Näherungsverfahren erarbeiteten Lösungen von Gleichungen.[241] Diophantos führte auch eine erste Version der symbolischen Notation in der Form von Abkürzungen (anstatt ausgeschriebener Worte) für Teile seiner Ausarbeitungen ein – wobei aber zu ergänzen ist, dass er diese Notation nicht für Begründungen und Beweise, sondern nur in manchen Formulierungen anwendete.[242] Bis in das 7. Jh. n. Chr. ergaben sich noch weitere Beiträge zur Lösung von Gleichungen bis zum dritten Grad – großteils basierend auf der Geometrie – durch chinesische und indische Gelehrte.[243]

Im islamischen Mittelalter (ca. im 8./9. Jh. n. Chr.) förderten insbesondere die Abbasidenkalifen al-Manṣūr, Hārūn ar-Rašīd und al-Maʾmūn die wissenschaftliche Entwicklung und die Übersetzung von fremdsprachigen Werken in die arabische Sprache großzügig.[244] Während dieser regionalen Blütezeit der Wissenschaften verfasste der dem „Haus der Weisheit" des Abbasidenhofes in Bagdad angehörende persische Gelehrte al-Ḫuwarizmī Anfang des 9. Jh. n. Chr. das Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala*[245], in dem er aus praktischer Perspektive verschiedene Fälle der Anwendung von algebraischen Umformungen

[237] Histoire de l'algèbre 2018; Rebstock 1992: „Enger mit der Geometrie verbunden" bedeutet hier, dass Teile von geometrischen Elementen, wie z.B. Seiten von Dreiecken oder anderen Objekten, als Komponenten von Gleichungen angesehen wurden und Gleichungen zumeist auch mittels geometrischen Skizzen gelöst wurden.
[238] Histoire de l'algèbre 2018; Rebstock 1992.
[239] Histoire de l'algèbre 2018; Hunger Parshall 1988.
[240] Karpinski 1915; Histoire de l'algèbre 2018.
[241] Busard 1997; Histoire de l'algèbre 2018.
[242] Histoire de l'algèbre 2018; Gheverghese 2010.
[243] Karpinski 1915; Histoire de l'algèbre 2018.
[244] Berggren 1986; Gheverghese 2010; Linden 2017.
[245] Zu Deutsch: „Die Kurzfassung zum Rechnen mittels Ergänzung und Ausgleich".

und der Lösung von Gleichungen vorführte.[246] Seine Forschungen basierten zu einem großen Teil auf dem Wissen der griechischen Vorläufer, die die geometrischen Grundlagen erarbeitet hatten.[247] Für derartige Anwendungsfälle wählte er beispielsweise den Bereich der erbschaftsbezogenen Rechenvorgänge, geschäftlichen Berechnungen und Vermessungsaufgaben.[248] Er kategorisierte die verschiedenen Fälle in Typen von Gleichungen und beschrieb die Vorgänge, die zur Lösung eben dieser verschiedenen Gleichungstypen notwendig sind, was zumeist auch anhand mindestens eines Anwendungsfalles dargestellt wurde.[249] Hierfür musste die beschriebene Ausgangssituation zunächst in eine mathematische Ausdrucksweise transferiert werden, wovon dann die Lösung in einem System von Bekannten und Unbekannten ermittelt werden konnte.[250] Jedoch fand die Darstellung des Problems in der mathematischen Sachverhalte noch nicht in der heutigen symbolischen Notation statt.[251] Von diesem Werk leitet sich aller Wahrscheinlichkeit nach aus dem arabischen Nomen *al-ğabr* der Begriff „Algebra“ ab, der sich auf die Wiederherstellung eines Ganzen aus mehreren Stücken bzw. die Verbindung eines Bruches zu einem Ganzen bezieht.[252] Unter den islamischen Gelehrten der Algebra etablierten sich zwei Strömungen – einerseits die Gelehrten, die sich auf die arithmetische Richtung konzentrierten, und andererseits jene, die Anhänger der geometrischen Richtung waren.[253] Erstere sahen die Arithmetik als ein Mittel zur Umsetzung von algebraischen Ideen, insbesondere dank Berechnungsmethoden zur numerischen Lösung von Gleichungen.[254] Einer von ihnen war z.B. al-Karağī, der sich im 10. Jh. n. Chr. mit der Einbeziehung von Unbekannten in Polynomgleichungen befasste.[255] Letztere Gruppe von Gelehrten stützten sich auf der zum damaligen Zeitpunkt vorliegenden Erkenntnisse (v.a. jene von den griechischen Gelehrte) der Geometrie, um die Darstellung von Wurzelausdrücken und Gleichungslösungen basierend auf geometrischen Hilfsmitteln und Formen zu verbessern.[256] Beispielsweise al-Mahānī (9. Jh. n. Chr.), al-Ḥasan b. al-Hayṯam (10.-11. Jh. n. Chr.) und ʿUmar Ḫayyām (11.-12. Jh. n. Chr.), die an Lösungen für kubische Gleichungen im allgemeinen Fall arbeiteten, gehörten dieser Richtung an.[257] Von aṭ-Ṭūsī im (12. Jh. n. Chr.) und in der Folge

[246] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[247] Histore de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[248] Histore de l’algèbre 2018; Gheverghese 2010; Rebstock 1992.
[249] Rebstock 1992; Gheverghese 2010; Berggren 1986.
[250] Rebstock 1992; Berggren 1986.
[251] Histoire de l’algèbre 2018; Busard 1997; Rebstock 1992.
[252] Histoire de l’algèbre 2018; Busard 1997; Rebstock 1992.
[253] Histoire de l’algèbre 2018; Busard 1997; Rebstock 1992.
[254] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[255] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[256] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[257] Histoire de l’algèbre 2018; Busard 1997; Rebstock 1992.

von al-Kāšī (14.-15. Jh. n. Chr.) wurden die für sie jeweils vielversprechendsten Erkenntnisse der beiden Richtungen aufgegriffen, wobei sie Lösungsansätze abwägten und die für sie „am besten passendste“ Lösung in ihren Werken vorschlugen.[258]

Hinsichtlich der verwendeten Zahlensysteme variierten diese u.a. vom Sexagesimalsystem bis hin zum Dezimalsystem mit indischen Zahlen (mit oder ohne die Verwendung der Null).[259] Ab dem 11. Jh. n. Chr. wurden die indischen Zahlen auch in Spanien verwendet.[260] Sie fanden jedoch erst im 16./17. Jh. n. Chr. großräumigere Verbreitung in Europa.[261] Dies war eine Epoche, in der nicht nur in Europa, sondern auch weltweit auch Gleichungen höheren Grades gelöst wurden, und in der das Dezimalssytem zunehmend Anklang fand.[262] In Europa wurde dies im Kreise von Cardano, Ferrari und Tartaglia vorangetrieben.[263] Arabische Werke wurden vor allem im südeuropäischen Raum geschätzt und zunehmend übersetzt, wobei deren Beliebtheit insbesonder im Handel hinsichtlich Rechenmethoden immer größer wurde.[264] Zugleich zeichnete sich ab dem 16./17. Jh. n. Chr. unter dem Einfluss des französischen Mathematikers Viète, der die Unbekannten (so wie auch schon Diophantos von Alexandria unter den griechischen Mathematikern der Antike) in der Form von Buchstaben darstellte, eine Tendenz in Richtung der symbolischen Repräsentation algebraischer Methoden zur Lösung von Gleichungen ab.[265] Es wird also in der Algebra in dieser Epoche zunehmend mit Buchstaben anstand von konkreten Zahlen, wie es in den früheren Anwendungsfällen vorgeführt worden war, gearbeitet.[266] Von der Tendenz zur symbolischen Repräsentation und allgemeinen Formulierung waren auch die Rechenoperatoren[267] betroffen, die ebenfalls mit abstrakten Zeichen dargestellt wurden, denen gewisse Eigenschaften zugewiesen wurden.[268] Beispielsweise wurde der Rechenoperator „plus“ nicht mehr als ganzes Wort geschrieben, sondern als das knappe Symbol „+“, das mit der Bedeutung des Addiervorgangs behaftet war, ausgedrückt.[269] Unter den französischen Gelehrten um Descartes wurden z.B. die Unbekannten als Buchstaben „x, y, z“ bezeichnet und die Parameter als „a, b, c“, also eine Art abstraktere

[258] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[259] Berggren 1986.
[260] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[261] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[262] Busard 1997; Histoire de l’algèbre 2018
[263] Busard 1997; Histoire de l’algèbre 2018.
[264] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[265] Busard 1997; Histoire de l’algèbre 2018.
[266] Busard 1997; Histoire de l’algèbre 2018.
[267] Anmerkung: Vorschläge und Ideen für die Verwendung von Symbolen für die Rechenoperatoren, wie sie Viète nützte, stammten von Widmann aus dem 15. Jh. n. Chr. (Quelle: Busard 1997)
[268] Busard 1997; Histoire de l’algèbre 2018.
[269] Busard 1997; Histoire de l’algèbre 2018.

Formulierung für Berechnungen, die die allgemeine Lösung von algebraischen Aufgaben erleichtern sollte.[270] Die Art und Weise, wie die Rechenvorgänge durchgeführt wurden, war sowohl für die Verwendung von Buchstaben (also abstrakter Repräsentation) dieselbe wie für die Verwendung von konkreten Zahlen, und dank einer neuen „Formelsprache" können Sacherverhalte, die in Worten nur kompliziert ausgedrückt werden konnten, in Formelgebilden übersichtlicher und auf kompaktere Weise dargestellt werden.[271] Ansätze für einen abstrakteren Zugang und eine symbolische Notation waren vorhanden, jedoch nicht einheitlich.[272] In dieser Zeit, in der unter anderem Fermat und Descartes wirkten, lag auch die Einführung der „algebraischen Geometrie" im Bildungswesen, im Rahmen der geometrische Körper und Formen mit Hilfe von algebraischen Gleichungen[273], wobei letztere durch „Ausgleichen" verändert wurden und auch der Zahlenbereich der komplexen Zahlen (ℂ) Verwendung hielt Einzug in die Mathematik, was schließlich im 18. Jh. n. Chr. unter anderem von Lagrange und Euler intensiviert wurde.[274] Auch die Ordnung, der zu lösenden Gleichungssysteme in der algebraischen Geometrie erhöhte sich, wie bereits angesprochen, ab dem 16. Jh. n. Chr., und reichte über lineare sowie quadratische Gleichungen hinaus hin zu Gleichungen der 3. und 4. Ordnung.[275]

Am Anfang des 19. Jh. n. Chr. ging die „klassische Algebra", die von Forschungen zur Lösung algebraischer Gleichungen bis zum vierten Grad geprägt war, über zur „modernen Algebra", für die unter anderem Galois und Abel wegbereitend waren.[276] Die beiden wiesen darauf hin, dass mit den damaligen Möglichkeiten des Rechnens und der Bildung von Wurzeln im generellen Fall ab der fünften Ordnung keine Lösung mehr möglich war.[277] Von Galois wurden ebenfalls bis dahin noch nicht offiziell definierte Forschungen zu später so genannten Gruppen und Körpern, d.h. algebraischen Strukturen, angestellt.[278] Im Laufe der Zeit wurde das Gebiet der algebraischen Strukturen offiziell definiert und entscheidend um spezielle Formen von Algebren bzw. auch zusätzliche Strukturen erweitert (wie z.B. Relationale Algebra, Bool'sche Algebra, Lineare Algebra).[279] Diese Forschungsbestrebungen setzen sich bis in 20./21. Jh. n. Chr. fort, wobei dank sich verbessernden computerbasierten Berechnungsmethoden mehr und

[270] Corry 2010; Rebstock 1992.
[271] Histoire de l'algèbre 2018.
[272] Corry 2010.
[273] Wie z.B. Kurvengleichungen.
[274] Rebstock 1992; Histoire de l'algèbre 2018.
[275] Histoire de l'algèbre 2018.
[276] Rebstock 1992; Histoire de l'algèbre 2018.
[277] Rebstock 1992; Histoire de l'algèbre 2018.
[278] Rebstock 1992; Histoire de l'algèbre 2018.
[279] Rebstock 1992; Histoire de l'algèbre 2018.

mehr Fortschritte auf dem Gebiet erzielt werden konnten.[280] Außerdem wurde der Algebra eine axiomatische Sichtweise zugrunde gelegt, in der die Algebra schließlich als „eine die Mathematik einende Sprache“ bezeichnet wurde.[281]

[280] Rebstock 1992; Histoire de l‘algèbre 2018.
[281] Rebstock 1992; Histoire de l‘algèbre 2018.

3.2. Zur Verwendung von sprachlicher Ausformulierung und Symbolik in der Algebra und einschlägigen Begriffen

Der Bereich der Algebra und die darin verwendeten sprachlichen Ausdrucksformen waren nicht von vornherein einheitlich und gegeben, sondern waren mitunter einem starken Wandlungsprozess unterworfen.[282] Ein wesentlicher Teil der Algebra war und ist seit jeher das Arbeiten mit Gleichungen und das Aufzeigen von Eigenschaften, der zum Lösen der Gleichungen benötigten bzw. angenommenen mathematischen Gegebenheiten.[283] Die Bezeichnung „Gleichung" selbst war bis in das 16. Jh. n. Chr. nicht einheitlich definiert.[284] Erst später wurden „Gleichungen" als mathematischen Einheiten angesehen, auf denen auf beiden Seiten zugleich Operationen (im Sinne von Äquivalenzumformungen) durchgeführt werden können, wodurch schließlich der Werte der unbekannten Variablen bestimmt werden kann.[285] Über den geschichtlichen Verlauf der Algebra zeichnete sich die Entwicklung ab, dass die in der Algebra genützten Konzepte der Zahlenbereiche laufend erweitert und genauer ausgearbeitet wurden.[286] Daneben wandelten sich die Darstellungsformen der Gleichungen und mathematischen Ideen der Algebra im Laufe der Zeit, sodass sich schließlich eine symbolische Sprache entwickelte, mit der Algorithmen für den allgemeinen Fall ausgearbeitet werden können.[287]

Lineare algebraische Probleme wurden bereits bei den Babyloniern[288] und Ägypter im 1. Jtsd. v. Chr. gelöst, wobei in dieser Epoche aber noch keine symbolische Notation stattfand, sondern sämtliche mathematischen Ideen und Lösungsvorschläge in Fließtext auf Tontafeln festgehalten wurden.[289] Eine damals verwendete Vereinfachung der Darstellung war eine spezielle Notationsform für ausgewählte Brüche (wie z.B. ½ oder ¼).[290] Die damals bekannten Rechenvorgänge wurden als detailliert beschriebene Prozeduren zum Finden der Unbekannten in Fließtext mit Verweis auf Ergebnistabellen (z.B. bezüglich häufig gebrauchten Multiplikations-, Divisions-, und Wurzelberechnungen) festgehalten.[291] Viele dieser

[282] Corry 2010.
[283] Corry 2010.
[284] Corry 2010.
[285] Corry 2010.
[286] Corry 2010.
[287] Corry 2010.
[288] Im Stellenwertsystem mit der Basis 60, dem so genannten Sexagesimalsystem. (Quelle: Corry 2010)
[289] Corry 2010.
[290] Corry 2010.
[291] Corry 2010.

Prozeduren behandelten explizit Praxisfälle (wie z.B. bezüglich der Erbteilung oder der Aufteilung von Marktgeschäften), die als Anhaltspunkt zu didaktischen Zwecken dienten.[292]

In etwa ab dem 5. Jh. v. Chr. wurden von griechischen Gelehrten erste Ideen zur Proportionslehre (im geometrischen Sinne) ausgearbeitet, die allerdings ebenfalls in Fließtextform ergänzt um Skizzen angefertigt wurden.[293] Griechische Gelehrte, wie u.a. Euklid und Diophantus von Alexandria, waren es auch, die algebraische Probleme (insbesondere lineare und quadratische Gleichungen) mit geometrischen Argumenten und Skizzen zu lösen versuchten.[294] Aus dem geometrischen Ansatz entstanden algebraische Gleichungen, die mittels „Ausgleichsrechnung" verbal gelöst werden konnten, wobei der betrachtete Zahlenbereich sich zu dieser Zeit auf die natürlichen Zahlen ohne Null beschränkte.[295] Diophantus war damals der erste bekannte Gelehrte, der eine Art Kurzschreibweise für seine mathematischen Ausarbeitungen (bezüglich Potenzen, Gleihheitszeichen und unbekannten Variablen) verwendete – was aber dennoch weit entfernt von der heutigen Symbolik war, da sie seiner persönlichen Nutzung dienten, und nicht allgemein anwendbar waren.[296] Außerdem wurden sämtliche Buchstaben des griechischen Alphabets zur Darstellung von Zahlen genützt, sodass in algebraischen Gleichungen keine vorhandenen Zeichen übrig waren, um unbekannte Variablen explizit zu kennzeichnen.[297]

Die indischen Mathematiker des 1. Jtsd. v. Chr. und in den ersten Jahrhunderten n. Chr. lösten ebenfalls in verbaler Form Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und auch mehreren unbekannten Variablen.[298] Sie waren es auch, die das dezimale Stellenwertsystem in seiner Anwendung für algebraische Problemlösung (inklusive der Verwendung von positiven sowie negativen Zahlen und der Null) erprobten, das wiederum in der Entwicklung der Symbolik in der Algebra der Renaissance in Europa ein wichtiger Baustein war.[299]

Bis in das 9. Jh. n. Chr. waren bereits zahlreiche Werke von griechischen, babylonischen, indischen und jüdischen Mathematikern ins Arabische übersetzt worden.[300] Die bereits vorhandenen mathematischen Erkenntnisse wurden zu dieser Zeit nicht nur zusammengefasst, sondern auch um neue Erkenntnisse, inbesondere im Hinblick auf systematische

[292] Corry 2010.
[293] Corry 2010.
[294] Corry 2010.
[295] Corry 2010.
[296] Corry 2010.
[297] Kvasz 2008; Corry 2010.
[298] Corry 2010.
[299] Corry 2010; Oaks 2007.
[300] Corry 2010; Oaks 2007.

Lösungsalgorithmen für Gleichungen zweiten Grades, erweitert.[301] Zudem wurde das zuvor nicht weit verbreitete indische Zahlensystem vermehrt verwendet und um eine Notation für Dezimalbrüche erweitert.[302] Im arabisch-islamischen Raum erlangte der Gelehrte al-Ḫuwarizmī aus dem 9. Jh. n. Chr. große Bekanntheit dank seiner Ausarbeitungen zur Algebra, allen voran das Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala*.[303] Er hatte die Absicht, mit seinem Werk einen Praxisratgeber zur Verfügung zu stellen – was aber angesichts der anspruchsvollen Lektüre seiner Ausarbeitungen zur damaligen Zeit außerhalb von Gelehrtenkreises wohl relativ schwer umsetzbar war.[304] Al-Ḫuwarizmī bereitete Algorithmen zur Lösung von sechs Gleichungstypen auf, welche der Form[305] „$ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, und $bx + c = ax^2$“ waren, wobei die Ziffer Null sowie negative Zahlenbereiche nicht als gültige Lösungen und/oder Koeffizienten zugelassen waren.[306] In diesem Fall (sowie bei den weiteren islamischen Gelehrten) wurden algebraische Ausarbeitungen (inklusive der Schreibweise von Zahlen) rein textuell und ohne symbolische Notation gemacht.[307] Als Untermauerung seiner Lösungen für algebraische Probleme nützte al-Ḫuwarizmī die geometrischen Erkenntnisse von Euklid, und stellte dadurch eine klare Verbindung zwischen den zuvor rein geometrischen Werken und der Algebra – insbesondere der Lösung von quadratischen Gleichungen – her.[308] Der wesentliche Beitrag der islamischen Gelehrten (und in bedeutendem Ausmaß von al-Ḫuwarizmī) zur Algebra insgesamt liegt darin, dass sie systematisch die verschiedenen Fälle von zu lösenden Gleichungssystemen zusammenfassten, Algorithmen zur Lösung anboten, und ihre Denkweisen mit geometrischen Argumenten untermauerten.[309] Im Gegensatz zu den vorherigen Ausarbeitungen der Griechen, wurde laut den islamischen Gelehrten die Lösung einer algebraischen Gleichung als Zahl angegeben, und nicht mehr als ein geometrisches Objekt (wie z.B. eine Gerade oder Fläche).[310] Dies löste die Algebra von rein fallbasierten geometrischen Schlüssen, und erhob sie auf eine abstraktere Ebene, auf der die Gleichungen gelöst werden konnten.[311] Außerdem verwendeten Gelehrte wie al-Ḫuwarizmī zwar verbale Formulierungen für algebraische Zusammenhänge,

[301] Kvasz 2008; Corry 2010.
[302] Kvasz 2008; Corry 2010.
[303] Kvasz 2008; Corry 2010.
[304] Kvasz 2008; Corry 2010.
[305] Anmerkung: Die Gleichungen wurden zur Erleichterung des Verständnisses für die LeserInnen dieser Arbeit in der heutigen, vertrauten symbolischen Notation der Algebra dargestellt.
[306] Kvasz 2008; Corry 2010.
[307] Kvasz 2008; Corry 2010.
[308] Corry 2010; Oaks 2007.
[309] Corry 2010; Oaks 2007.
[310] Kvasz 2008; Corry 2010; Oaks 2007.
[311] Corry 2010; Oaks 2007.

jedoch hatten die Worte, die Sie benützten, eine präzise Bedeutung.[312] Ein Beispiel dafür sind die folgenden Bezeichnungen für Potenzen:

- *šayʾ* (wörtlich „Ding“) zur Darstellung von „x“ (bzw. an mancher Stelle auch *ǧiḏr*[313] genannt)
- *māl* (wörtlich „Vermögen“) zur Darstellung von „x^2“
- *kaʿb* (wörtlich „Würfel“) zur Darstellung von „x^3“.[314]

Die Konstanten wurden oftmals in Dirham, der Bezeichnung für sich damals im Umlauf befindliche Münzen, ausgedrückt.[315] Eine weitere Bezeichnung für die Konstanten erfolgte in Einheiten (*āḥād*). Zwar gab es zur damaligen Zeit noch keine explizite Symbolik für die Operatoren der Addition und Subtraktion.[316] Doch die der alltäglichen Sprache angehörigen Wörter *wa*[317] sowie *ʾillā*[318] wurden in etwa für die Addition und Subtraktion im Rahmen der verbalen Formulierung von Rechenschritten verwendet.[319]

Zur Darstellung von Potenzen versuchte al-Ḫuwarizmī zunächst, die Probleme so weit wie möglich zu reduzieren, und dann auf die reduzierte Form, die obigen Definitionen von vereinfachten, „kanonischen“ Gleichungstypen anzuwenden.[320] Falls die Exponenten höher als jene, die über Definitionen verfügen, waren, wurden die vorhandenen Potenzen mehrmals geschrieben, wie z.B. für x^5 wurde *kaʿb mal* also x^3 mal x^2 geschrieben.[321] In solch einer kanonischen Form waren dann nur mehr positive Teilbeträge vorhanden, und der Koeffizient des Teils der Gleichung mit dem maximalen Exponenten sollte eins sein.[322] Mittels den drei Berechnungsmethoden *al-ǧabr*, *ar-radd* und *al-muqābala* konnte eine derartige reduzierte Form erreicht werden.[323] Hierbei bezeichnet *al-ǧabr* den „Vorgang des Ausgleichs, wenn ein Term auf der einen Seite abgezogen wird, dass dieser Wert beidseitig addiert werden sollte, um die Verminderung auszugleichen“.[324] *Ar-radd* (bzw. auch *ʾikmāl*) bezeichnet den Vorgang des Ergänzens/der Vervollständigung, im Zuge dessen alle von eins verschiedenen Koeffizienten der maximalen Potenz der Gleichung durch Division der gesamten Gleichung durch diesen

[312] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[313] Anmerkung: zu Deutsch „Wurzel“.
[314] Oaks 2007; Kvasz 2008: Quelle bezieht sich auf die gesamte Aufzählung.
[315] Oask 2007.
[316] Oask 2007.
[317] Anmerkung: zu Deutsch „und“.
[318] Anmerkung: zu Deutsch „ausgenommen“.
[319] Oaks 2007.
[320] Oaks 2007; Kvasz 2008.
[321] Kvasz 2008.
[322] Kvsaz 2008; Oaks 2007.
[323] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[324] Kvasz 2008; Oaks 2007: z.B. der Ausdruck 100 - 20x = 80 wird durch Hinzufügen von 20x zu 100 = 80 + 20x umgeformt.

Koeffizientenwert entfernt werden sollte.[325] *Al-muqābala* bezieht sich auf den Fall, in dem gleiche Potenzen mit jeweils verschieden großen Koeffizienten auf beiden Seiten vorkommen.[326] In diesem Fall sollte der Term mit dem kleineren Koeffizienten vom größeren abgezogen werden.[327] Die erläuterte Vorgangsweise gab den Lösungsschritten für algebraische Gleichungen einen gewissen allgemeinen Charakter.[328]

Diese Berechnungsformen wurden dank zahlreichen Übersetzungen aus dem Arabischen in europäische Sprachen (allen voran in das Lateinische) in Südeuropa verbreitet, wo die algebraischen Techniken im Handel praxisbezogen eingesetzt wurden, und ebenso das Dezimalzahlensystem genutzt wurde.[329] Vom 11. bis in das 14. Jh. n. Chr. wurden die Werke meist direkt übersetzt und Berechnungsprozeduren wurden ebenfalls in rein verbaler Form verfasst.[330] Die arabischen Begriffe, die bereits von al-Ḫuwarizmī verwendet wurden, wurden in das Lateinische übersetzt und in der bestehenden Bedeutung verwendet:

- „*res*“ oder kurz „*r*“ (als Äquivalent für *šayʾ* bzw. x)
- „*census*“ oder kurz „*c*“ (als Äquivalent für *māl* bzw. x^2)
- „*cubus*“ oder kurz „*cu*“ (als Äquivalent für *kaʿb* bzw. x^3).[331]

Im 14. Jh. n. Chr. versuchten jedoch italienische und französische Gelehrte Kurzschreibweisen für unbekannte Variablen zur Abstraktion von Problemen einzuführen.[332] Regiomontanus schrieb ihm 15. Jh. n. Chr. Gleichungen folgendermaßen: „250^{r} ig 25^{c} _____ 2^{c} et 100 ig 20^{r}“, wobei die unbekannten Variablen von ihm als Hochzahlen und die Rechenoperatoren als Kurzwörter notiert wurden.[333] Weiters wurde „R“ für „Quadratwurzel“ eingeführt und Chuquet schrieb den Operator der Addition als „p“ und jenen der Subtraktion als „m“.[334] Die Unbekannten mit ihren jeweiligen (entweder positiven oder negativen) Exponenten wurden nicht explizit ausgewiesen, sondern als Superskript geschrieben, wie z.B. 7x als 7^1, $3x^2$ als 3^2, oder $3x^{-3}$ als 3^{-3m}, wobei bei letzterem „m“ den negativen Exponent signalisiert.[335] Zur Zeit von Chuquet wurden noch keine Klammern verwendet.[336] Um dennoch die Zusammengehörigkeit

[325] Kvasz 2008.
[326] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[327] Kvasz 2008: Ein Beispiel dafür wäre die Gleichung „10x = 40 + 3x“, die durch die Anwendung von *muqābala* mittels Subtraktion „von 3x auf beiden Seiten zu 7x = 40 umgeformt wird“.
[328] Kvasz 2008.
[329] Corry 2010; Oaks 2007.
[330] Corry 2010; Oaks 2007.
[331] Kvasz 2008.
[332] Corry 2010; Kvasz 2008.
[333] Kvasz 2008: In der heutigen Notationsform der Algebra würde dies laut Kvasz in etwa $250x - 25x^2 = 2x^2 + 100 - 20x$ entsprechen (2008).
[334] Corry 2010.
[335] Kvasz 2008.
[336] Kvasz 2008.

von Teilen der betrachteten Gleichung anzudeuten, wurden die zusammengehörigen Teile unterstrichen.[337]

Der deutsche Mathematiker Widmann veröffentlichte Ende des 15. Jh. n. Chr. eine Arbeit zur Algebra im wirtschaftlichen Bereich, in der erstmals für die Addition „+“ und für die Subtraktion „-“ als Sonderzeichen verwendet wurde.[338] Im deutschsprachigen Raum wurden die Abkürzungen „R“ (von „res“) für die Unbekannte x geschrieben, „z“ (von „Zensus“) für x^2 und „c“ (von „cubus“) für x^3.[339] Die höheren Potenzen wurden abermals als zusammengesetzte Potenzen x bis x^3 geschrieben, also beispielsweise „rzz“ für x^4 oder „czzz“ für x^9.[340] Basierend auf derartigen zum Teil symbolischen Notationsformen entwarfen im 15. Jh. n. Chr. die deutschen Forscher Stifel, Scheubel und Rudolff eine symbolische Notationsform unter anderem für die Grundrechnungsarten, Gleichheitszeichen und Wurzeln, was einen Anstoß für den langfristigen Standardisierungs- und Formalisierungsprozess der algebraischen Notation darstellte.[341] Stifel prägte das heute noch geläufige Zeichen für die Wurzel ($\sqrt{\ }$), das in seiner Notation den Buchstabe „r“ (für das lateinische Wort „radix“) ablöste.[342] Zudem akzeptierte Stifel erstmalig auch die Verwendung von negativen Koeffizienten in Gleichungen der reduzierten Form.[343] In seinen Arbeiten formulierte er Gleichungen der folgenden Form:

- Notation von Stifel: „2z - 5x + $\sqrt{c}$ 81 equatur 0“
- Heutige Notation: $2x^2 - 5x + \sqrt[3]{81} = 0$. [344]

Ab dem 15./16. Jh. n. Chr. konnten dann dank Voranschreiten der Abstraktion (u.a. durch Verwendung von Substitutionsmethodik) Gleichungen dritten Grades gelöst werden.[345] Die Schreibweise der Koeffizienten wurde zu dieser Zeit entscheidend von Vieta geprägt, der die Koeffizienten explizit von Unbekannten in Gleichungen unterscheiden wollte, indem er für letztere die Vokale wählte und für die Koeffizienten Konsonanten.[346] Die Potenzen definierte Vieta als die lateinischen Wörter „longitudo“ (1. Potenz), „planum“ (2. Potenz), „solidum“ (3. Potenz) und weitere höhere Potenzen.[347] Also bedeutete beispielsweise „E-solidum“ die 3.

[337] Kvasz 2008.
[338] Kvasz 2008.
[339] Kvasz 2008.
[340] Kvasz 2008; Lazrek & Sami 2002.
[341] Corry 2010.
[342] Kvasz 2008.
[343] Kvasz 2008; Lazrek & Sami 2002.
[344] Kvasz 2008; Lazrek & Sami 2002.
[345] Kvasz 2008.
[346] Kvasz 2008.
[347] Kvasz 2008; Katz 2007a.

Potenz der Unbekannten E.[348] Durch Vietas neue Symbole konnte erzielt werden, dass in einer Gleichung mehrere verschiedene Unbekannte behandelt werden konnten, da sie durch die Vokale unterscheidbar gemacht wurden.[349] Ende des 16. Jh. n. Chr. setzte Descartes auf den bestehenden Arbeiten zur Symbolik der Algebra auf und entwickelte bereits eine der heutzutage verwendeten algebraischen Symbolik sehr ähnliche Schreibweise, und ab dem 17. Jh. n. Chr. trat die Algebra weiter aus dem Schatten der Geometrie.[350] Im Gegensatz zu Vieta schlug Descartes am Ende des Alphabets liegende Buchstaben (wie x, y oder z) zur Repräsentation von unbekannten Variablen vor, während er als Parameter am Anfang des Alphabets liegende Buchstaben wählte.[351] Die Potenzen platzierte er als Superskript rechts oben von der betrachteten Komponente der Gleichung (also z.B. y^3), und die Wurzel behielt er in ihrer Grundform in der Darstellungsform von Stifel bei, ließ aber die Buchstabennotation der Ordnung der Wurzel weg und ersetzte diese (wie auch heute noch verwendet) durch Zahlen am linken oberen Rand des Wurzelzeichens (also z.B. $\sqrt[3]{8}$, was nun „die dritte Wurzel von acht" zur Bedeutung hat).[352]

Insgesamt entsprach die Repräsentation algebraischer Forschungsergebnisse und Überlegungen über die geschichtliche Entwicklung hinweg nicht immer der heutigen Darstellungsform, sondern war einem kontinuierlichen Prozess der Wandlung in Kombination mit einer Erhöhung des Abstraktiongrades unterworfen.[353] Die erste Form der Algebra war die rhetorische, in der algebraische Erkenntnisse ausschließlich verbal formuliert wurden.[354] Als eine weitere Form der Algebra entwickelte sich die synkopatische Algebra, in der anstelle der in der rhetorischen Algebra ausgeschriebenen Zahlen und Operatorenwörter Abkürzungen in Form von Buchstaben und/oder Sonderzeichen gesetzt wurden.[355] Die weitgehende Verwendung von Symbolen (losgelöst vom tatsächlichen sprachlichen Gebrauch) für die Formulierung von algebraischen Inhalten, in der die Gleichungen nicht mehr in Form von Wörtern oder Wortabkürzungen angegeben wurden, war bezeichnend für die symbolische Algebra.[356] Charakteristisch für die Generierung von algebraischen Inhalte selbst waren die Bestrebungen der Gelehrten, allgemeine Methoden im Sinne von Algorithmen zur Vollbringung von

[348] Kvasz 2008.
[349] Kvasz 2008; Lazrek & Sami 2002.
[350] Oaks 2007; Kvasz 2008.
[351] Kvasz 2008; Lazrek & Sami 2002.
[352] Oaks 2007; Lazrek & Sami 2002.
[353] Kvasz 2008a; Lazrek & Sami 2002.
[354] Oaks 2007; Katz 2007a.
[355] Oaks 2007; Katz 2007b.
[356] Oaks 2007.

Prozeduren zu erschaffen.[357] Die symbolische Darstellung entwickelte sich im Zuge von Absichten der Standardisierung, Verkürzung sowie der Vereinfachung der verbalen Schreibweise von Algorithmen unter Spezialisten, die sich mit algebraischen Methoden befassten, und wurde schließlich auch allgemein im Bildungssektor übernommen.[358] Auch inhaltlich entwickelte sich die Algebra weiter von ihrem anfänglichen Fokus auf die Bestimmung von unbekannten Variablen und der Lösung von linearer/quadratischer Gleichungen hin zur Lösung von Polynomgleichungen höherer Ordnung, Boolschen Algebra, Matrizenrechnung, Funktionen, Kegelschnitten, algebraischen Strukturen oder der Gruppentheorie.[359]

[357] Kvasz 2008a.
[358] Kvasz 2008a.
[359] Katz 2007a.

4. Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī und seine Beiträge zur wissenschaftlichen Entwicklung

Der muslimische Gelehrte Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī wurde in etwa um 780 n. Chr. in Ḫwarizm in der Region von Ḫorāsān, das sich im heutigen Gebiet von Usbekistan befindet, geboren und lebte bis ungefähr 850 n. Chr. in arabisch-islamischen Herrschaftsgebieten.[360] Al-Ḫuwarizmī erlangte Bekanntheit als Gelehrter in den Bereichen der Mathematik, Astronomie und Geographie und war in diesen Wissenschaftsgebieten im *bayt al-ḥikma* in Bagdad tätig, wobei er schließlich eine führende wissenschaftliche Position besetzte.[361] Laut Baki unternahm er auch Forschungsreisen in die Regionen des heutigen Afghanistans und Indiens.[362] Auf diesen Reisen lernte er auch regionale Gelehrte und deren Forschungsaktivitäten kennen.[363] Hierbei ist zu erwähnen, dass über die tatsächlichen Lebensumstände von al-Ḫuwarizmī nur Mutmaßungen angestellt werden können, da bisher keine definitiven Zeugnisse darüber vorliegen.[364]

Sein Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala* umfasste einen ersten systematischen Ansatz für die Darlegung von Berechnungsschritten bei der Lösung von Gleichungen des ersten und zweiten Grades.[365] Al-Ḫuwarizmīs Wissen basierte insbesondere auf den bereits vorhandenen Erkenntnissen der babylonischen, indischen und griechischen Gelehrten der Mathematik.[366] Zwar war Diophantos von Alexandria, dessen Lebenszeit im Zeitraum von ca. 100 v. Chr. bis 300 n. Chr. (ohne exakte Angaben) datiert wird, im Hinblick auf die Analysis ein Vorreiter unter den griechischen Gelehrten der Mathematik, der sich bereits mit der analytischen Lösung von Gleichungen beschäftigte.[367] Doch es ist unklar, ob al-ḪuwarizmI jemals Zugang zu seinen Erkenntnissen hatte. [368] Hierbei beachtete er keine komplexen Zahlen und/oder negativen Zahlen.[369] Diophantos schlug in seinem Werk namens Arithmetica Ansätze zur Lösung von Gleichungen zweiten Grades vor, wobei es sich allerdings noch um keinen systematischen Algorithmus handelte.[370] Diophantos selbst gab an, die Verfassung eines systematischen Algorithmus zu planen bzw. zu beabsichtigen.[371] Laut

[360] Islam Wikia 2017; Berggren 1986; Ayyubi 2006.
[361] Ragep 2013; Islam Wikia 2017.
[362] Baki 1992; Arndt 1983.
[363] Baki 1992; Al Jazeera 2015.
[364] Islam Wikia 2017; Ayyubi 2006.
[365] TechScience 2017; Arndt 1983.
[366] Berggren 1986; Ragep 2013.
[367] Karpinski 1915.
[368] Karpinski 1915.
[369] Karpinski 1915.
[370] Karpinski 1915.
[371] Karpinski 1915.

Karpinski strebte Diophantos danach, allgemeine Gleichungen als „Typen“ zu formulieren, diese dann auf so genannte kanonische Formen zu reduzieren, und sie dann zu lösen.[372] Jedoch wurden diese Bestrebungen von Diophantos nicht in die Realität umgesetzt.[373] Hipparchus war ein weiterer Gelehrter, allerdings aus dem Bereich der Astronomie, der sich (im 2. Jh. n. Chr.) mit der Lösung von Gleichungen beschäftigte und angeblich eine Abhandlung über die Algebra geschrieben haben soll.[374] Die Existenz dieser angeblichen Abhandlung konnte jedoch bisher nie mit Sicherheit bestätigt werden, und laut Karpinski wird angenommen, dass es sich hierbei nicht um eine systematische Betrachtung der Algebra handelte.[375] Zeitgleich mit al-Ḫuwarizmī wird auch der indische Mathematiker Mahaviracarya eingeordnet, dessen Spezialgebiete die Algebra und Arithmetik waren.[376] Mahaviracarya brachte unter anderem Methoden zur Berechnung der Lösung von drei Gleichungsarten zweiten Grades hervor, wobei der Fokus allerdings nicht auf den Quadraten der Unbekannten lag, sondern auf der Wurzel aus der unbekannten Variable.[377] Insgesamt kann laut Karpinski ein Austausch der Überlegungen und ein Überdenken davon zwischen den ägyptischen, griechischen, indischen, babylonischen und arabisch-islamischen Herrschaftsgebieten festgestellt werden.[378] Al-Ḫuwarizmī zeigte in weiterer Folge als erster derartige systematische Ansätze in seiner Bearbeitung der Algorithmen zur Lösung von gewissen Gleichungstypen.[379]

Nebst seinen eigenen Erkenntnissen, die aus einer Synthese der Wissensbasis, auf die er aufbaute, entstanden, führte al-Ḫuwarizmī eine Art geometrische Beweise, die die Gültigkeit seiner Folgerungen und der verwendeten Verfahren zeigten.[380] Auch die Bezeichnung für das mathematische Teilgebiet der Algebra entstammt aller Wahrscheinlichkeit nach al-Ḫuwarizmīs Ausführungen als Ableitung vom arabischen Wort *al-ğabr*, mit dem al-Ḫuwarizmī einen Schritt zur Lösung von quadratischen Gleichungen beschrieb.[381] Zudem soll das Wort „Algorithmus“ von der lateinischen Bezeichnung für al-Ḫuwarizmī – also Algoritmi – abgeleitet worden sein.[382] Ab dem 12. Jh. n. Chr. wurden seine Werke zur Algebra, zum indischen Zahlensystem

[372] Karpinski 1915.
[373] Karpinski 1915.
[374] Karpinski 1915.
[375] Karpinski 1915.
[376] Karpinski 1915.
[377] Karpinski 1915.
[378] Karpinski 1915; Kheirandish 2103.
[379] Berggren 1986; Ragep 2013.
[380] Berggren 1986; Ragep 2013.
[381] Strick 2009; Al Jazeera 2015.
[382] Strick 2009; Al Jazeera 2015.

und zur Geografie sowie Astronomie in die lateinische Sprache übersetzt und fanden dadurch großräumigere Verbreitung.[383]

Laut dem Literatur- und Autorenverzeichnis *Kitāb al-Fihrist* von an-Nadīm erarbeitete al-Ḫuwarizmī den Großteil seiner Erkenntnisse Anfang des 9. Jh. n. Chr., wobei er seinen Lebensmittelpunkt früh von Ḫwarizm nach Baghdad verlegte, wobei er sich den Strömen von Handelsreisenden und Gelehrten, die von östlicheren Ländereien nach Bagdad einwanderten, anschloss.[384] Der damaligen Kalif al-Maʾmūn förderte die Entwicklung von Kunst, Kultur und Wissenschaften intensiv, wodurch al-Ḫuwarizmī sich wissenschaftlich gut entfalten konnte.[385] Er konnte dank seiner herausragenden wissenschaftlichen Leistungen sogar in das weithin bekannte Haus der Weisheit einziehen, wo er zunächst als Übersetzer für Texte aus dem griechischen und Sanskrit diente, und wo er schließlich direkt am Hof des Kalifen auf den Gebieten der Mathematik und Naturwissenschaften forschen konnte.[386] Er untestützte die Verwendung des indischen Zahlensystems und der Ziffer Null (bezeichnend für eine Zahl ohne Wertzuordnung) als Platzhalter im Dezimalsystem.[387] Die griechischen sowie jene Werke in Sanskrit dienten ihm als Basis für seine Überlegungen.[388]

Im Bereich der Geografie stellte al-Ḫuwarizmī eine systematische Übersicht von Ptolemäus Karten bezüglich des mittleren Ostens und Afrika zusammen und erweiterte diese um Details, gab Koordinateninformation bezüglich über 2000 Städten/Inseln/Flüssen an, zeichnete Längen- und Breitengrade ein, korrigierte die von Ptolemäus zuvor nicht realitätsgetreu berechnete Länge des Mittelmeers und erweiterte die Informationen um eigene Anmerkungen.[389] Zudem beschäftigte er sich in seinem Werk *Kitāb ṣūrat al-ʾarḍ* mit der Geografie der Erde, in dem er auch Verbesserungsvorschläge basierend auf den Erkenntnissen von Ptolemäus anbrachte.[390] Er nahm auch an Forschungen zur Vermessung des Erdumfangs und einem Projekt zur Erstellung einer Weltkarte für den Kalifen in leitender Position teil.[391] Al-Ḫuwarizmī war außerdem astronomisch interessiert und kreierte einschlägige Geräte wie Sonnenuhren oder ein Astrolabium, mit dem der kreisende Himmel dargestellt werden konnte, und unter anderem die Höhe und Position von Sternen gemessen werden konnte.[392]

[383] Islam Wikia 2017; Arndt 1983.
[384] Strick 2009.
[385] Strick 2009; Ayyubi 2006.
[386] Rebstock 1992; Kheirandish 2013; Arndt 1983.
[387] Strick 2009; Al Jazeera 2015.
[388] Ayyubi 2006; Strick 2009.
[389] Arndt 1983; Berggren 1986; Ragep 2013.
[390] Islam Wikia 2017; Ayyubi 2006.
[391] TechScience 2017; Arndt 1983.
[392] Islam Wikia 2017; Ayyubi 2006.

Etwa im Jahre 830 n. Chr. verfasste er das Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala*, im Zuge dessen er vom zur damaligen Zeit regierenden Kalifen al-Maʾmūn unterstützt wurde.[393] Mit diesem Werk verfolgte al-Ḫuwarizmī eigentlich das Ziel, eine didaktische Grundlage für die Darlegung gängiger Berechnungsschritte zur Lösung von Sachverhalten in Handel, Erbschaft, Vermessung und Lagerhaltung zu erschaffen.[394] Daher sollte das Buch einerseits die theoretischen Grundlagen (damals ausschließlich in verbaler Darlegung) sowie einen nachfolgenden Praxisteil mit ausgarbeiteten Beispielfällen enthalten.[395] Das Werk wurde im 12. Jh. n. Chr. von Robert von Chester und Gerhard von Cremona in die lateinische Sprache übersetzt, wobei der Name der Übersetzung „Liber algebrae et almucabala" lautete, von dem die Bezeichnung das für den mathematische Teilgebiet der Algebra stammte.[396] Anfang des 19. Jh. n. Chr. wurde schließlich eine arabische Abschrift von Frederic Rosen bearbeitet und um Kommentare ergänzt.[397]

Insgesamt wird das Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala* als grundlegend für die Entwicklung der Algebra gesehen, da es Algorithmen zur Lösung von einer Reihe von linearen und quadratischen Gleichungen mit ergänzender Behandlung von damaligen Praxisfällen enthält.[398] Mit den drei Methoden *al-ğabr*, *ar-rad* und *al-muqābala* entwickelte al-Ḫuwarizmī, wie gesagt, eine Art generellen Lösungsansatz zur Reduktion von Gleichungen bis zum zweiten Grad auf standardisierte Formen, die dann jeweils abhängig vom Fall systematisch behandelt werden konnten, mit einer Art Beweis, in dem er seine Argumentation zeigt.[399] Die Bedeutung von al-Ḫuwarizmīs Werk, das Ausführungen in rein verbaler Form beinhaltet, lag vor allem darin, dass sich der Autor in seinen Ausführung von den griechischen rein geometrischen Ansätzen wegbewegte und somit eine breitere Basis für die Entwicklung der Algebra zuließ und ermöglichte, dass in weiterer Folge algebraische Strukturen auf einer höhere Abstraktionsebene entstehen konnten.[400] Außerdem betonte al-Ḫuwarizmī insbesondere den systematischen Lösungsweg zur Ermittlung von Unbekannten, mit dem er die gewählten an praktischen Problemfällen orientierten Beispiele bearbeitete.[401]

[393] Strick 2009; Linden 2017; Sayili 2006.
[394] TechScience Wikia 2017; Ayyubi 2006.
[395] Baki 1992; Linden 2017; Ayyubi 2006.
[396] TechScience 2017; Linden 2017; Sayili 2006.
[397] Strick 2009; Ayyubi 2006.
[398] TechScience 2017; Linden 2017; Sayili 2006.
[399] Strick 2009; Sayili 2006.
[400] Islam Wikia 2017; Ayyubi 2006.
[401] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.

In Bezug auf die Arithmetik verfasste al-Ḫuwarizmī ebenfalls ein bedeutetendes Werk, das den Namen *Kitāb al-Ǧamʿ wa-t-tafrīq bi-ḥisāb al-hind*[402] trug.[403] Von diesem Werk ist bisher kein Original bekannt, sondern es ist nur in Form einer (vermutlich in etwa aus dem 12. Jh. n. Chr. angefertigten) lateinischen Übersetzung zugänglich.[404] Darin argumentierte er für das indische Zahlensystem, das im Wesentlichen ein Stellenwertsystem der Basis 10 ist, und führte Anwendungsbeispiele der Rechenoperationen damit aus.[405]

Zu astronomischen Themengebieten verfasste al-Ḫuwarizmī das Werk *Zīǧ al-sindhid*[406] mit über 30 Kapiteln über astronomische, astrologische und sowohl auf den islamischen als auch auf den jüdischen Kalender bezogene Tabellen, die von indischen Literaturquellen beeinflusst waren.[407] Er behandelte in diesem auf ungefähr 820 n. Chr. datierten Werk auch Planeten- und Gestirnsbewegungen sowie Sonnenuhren (erweitert auf den generellen Standpunkt der Betrachtung) und pflegte bestehende Erkenntnisse auf diesem Gebiet ein.[408] Die ursprüngliche Version des Werkes ging allerdings verloren.[409]

[402] Anmerkung: zu Deutsch „*Das Buch von Addieren und Subtrahieren unter Verwendung der indischen Zahlen*".
[403] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.
[404] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.
[405] Islam Wikia 2017.
[406] Anmerkung: zu Deutsch „Astronomische Tabellen von Sindhind".
[407] Arndt 1983.
[408] TechScience 2017; Histoire de l'algèbre 2018.
[409] TechScience 2017; Histoire de l'algèbre 2018.

5. Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala

5.1. Historische Einordnung des *Kitāb al-ğabr*

Al-Ḫuwarizmī verband in seinem Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala*, kurz *Kitāb al-ğabr*, im Wesentlichen das Dezimalsystem mit indischen Ziffern, das später immer größere Verbreitung erfuhr, und neue, systematische Ansätze zur Weiterentwicklung der Algebra als eines der Hauptgebiete der Mathematik.[410] Das Dezimalsystem, d.h. ein Stellenwertsystem mit der Basis 10, stellte sich zur damaligen Zeit als leichter handhabbar dar im Vergleich zu den griechischen und römischen Ziffernsystemen, die auf Buchstaben basierten, wodurch mathematische Gleichungen nur schwer analytisch lösbar war.[411] Diese Entwicklung und Förderung des Dezimalsystems durch al-Ḫuwarizmī war wegbereitend für die spätere Einführung von Dezimalstellen und komplexeren Rechenoperationen wie beispielsweise des Logarithmierens.[412]

Der Autor selbst wurde als Gelehrter im Verzeichnis *Al-Fihrist* von an-Nadīm genannt, wobei die Informationen über ihn und seine Lebensumstände nur spärlich ausfielen.[413] Im Verzeichnis wurden al-Ḫuwarizmīs vermeintlicher Geburtsort sowie seine Werke zur Astronomie bzw. Vermessung genannt.[414] Zwar wurden die exakten Lebensdaten in *Al-Fihrist* nicht erwähnt, aber es wurde angegeben, dass al-Ḫuwarizmī unter Kalif al-Maʾmūn, der von ungefähr 810 n. Chr. bis 830 n. Chr. das Abbasidenreich regierte, wissenschaftlich tätig war.[415] Dank der Unterstützung des Kalifen fanden al-Ḫuwarizmīs Werke bereits früh regen Anklang sowie große Verbreitung und Interesse seitens weiteren Gelehrten. [416] Das Schaffen des Autors erreichte in etwa um 825 n. Chr. seinen Höhepunkt.[417] Sein Werk über die Algebra, die Zahlensysteme, Arten von Ziffern und die Überlegungen zu Ptolemäus geografischen Erkenntnissen wurden von an-Nadīm im Literatur- und Autorenverzeichnis *Al-Fihrist* nicht explizit erwähnt, jedoch nannte an-Nadīm Gelehrte, die al-Ḫuwarizmīs Werke in weiterer Folge bearbeiteten und kommentierten.[418] In Al-Fihrist wurden als weitere Gelehrte, die sich in etwa

[410] Karpinski 1915.
[411] Karpinski 1915.
[412] Karpinski 1915.
[413] Karpinski 1915.
[414] Karpinski 1915.
[415] Karpinski 1915.
[416] Karpinski 1915.
[417] Karpinski 1915.
[418] Karpinski 1915.

zur Zeit al-Ḫuwarizmīs bzw. kurz nach seiner Lebenszeit mit algebraischen Themen auseinandersetzten, Ibn Bišr, ʾAḥmad b. Dāwūd und ʾAbū Ḥanīfa, genannt.[419]

Al-Ḫuwarizmīs Arbeiten zu den Ziffernsystemen wurden nur in einer lateinischen Übersetzung festgehalten, die Mitte des 19. Jh. n. Chr. veröffentlicht wurde und in der Bibliothek der Universität Cambridge aufbewahrt wird.[420] Durch Verweise in diesem Werk aus dem Gebiet der Arithmetik wurde klarer, das al-Ḫuwarizmī aller Wahrscheinlichkeit nach der tatsächliche Autor des *Kitāb al-ğabr* war.[421] Sein Werk zur Algebra *Kitāb al-ğabr* wurde Mitte des 12. Jh. n. Chr. von Robert von Chester analysiert und in die lateinische Sprache übersetzt.[422] Jedoch übersetzte Robert von Chester die Einleitung zum Werk nicht.[423] Diese wurde u.a. in der Übersetzung von Frederic Rosen aus dem Jahre 1831 n. Chr. editiert und in die englische Sprache übersetzt.[424]

Das Wort *al-ğabr* selbst, schließlich namensgebend für „Algebra" als Teilgebiet der Mathematik wurde, wurde von al-Ḫuwarizmī in mehreren Kapitelüberschriften verwendet.[425] Bis in das 18. Jh. n. Chr. wurde das Rechnen mit den indischen Ziffern inklusive des Platzhalters Null – d.h. mittels Stellenwertsystem zur Basis 10 (bzw. Dezimalsystem) – als „algorismus" bezeichnet, was eine Ableitung des Namens al-Ḫuwarizmī in das Lateinische darstellte.[426] Neben der lateinischen Übersetzung der arithmetischen und algebraischen Werke von al-Ḫuwarizmī wurde die Verwendung des Dezimalsystems und der Algebra zur Ermittlung von unbekannten Variablen in Europa beispielsweise durch „Carmen de Algorismo" von Alexander de Villa Die im 13. Jh. n. Chr. und durch „Algorismus vulgaris", das von John von Halifax, der im 13. Jh. n. Chr. als Sacrobosco bekannt war, verfasst wurde, verbreitet.[427] Beide genannten Werke wurden in Anlehnung an al-Ḫuwarizmī Werke verfasst und dienten noch Jahrhunderte später zu didaktischen Zwecken in der universitären mathematischen Ausbildung.[428] Des Weiteren nahmen eine Reihe von arabisch-islamischen Gelehrten in ihren Arbeiten Bezug auf die Erkenntnisse von al-Ḫuwarizmī – so beispielsweise al-Masʿūdī im 9./10. Jh. n. Chr. und al-

[419] Karpinski 1915.
[420] Karpinski 1915.
[421] Karpinski 1916.
[422] Karpinski 1915.
[423] Karpinski 1915.
[424] Karpinski 1915.
[425] Karpinski 1915.
[426] Karpinski 1915.
[427] Karpinski 1915.
[428] Karpinski 1915.

Bīrūnī im 10./11. Jh. n. Chr.[429] Gleichungen wie „$x^2 + 10x = 39$ oder $3x + 4 = x^2$“, für die al-Ḫuwarizmī bereits numerische Lösungsansätze ausarbeitete, wurden noch Jahrhunderte später von mathematischen Gelehrten aufgegriffen und zur Verdeutlichung von Rechenprozeduren verwendet.[430] Hierbei machten einige Autoren den Verweis auf al-Ḫuwarizmī klar, andere (wie z.B. ʿUmar al-Ḫayyām[431]) jedoch erwähnten ihn nicht in ihren Ausarbeitungen.[432] Ibn Ḫaldūn erwähnte al-Ḫuwarizmī als jenen „Gelehrten, der sich als erster mit der Algebra auf systematische Art und Weise auseinandersetzte, und somit eine Basis für diesen Bereich schuf“.[433] Im Werk zur Algebra waren aber Einflüsse aus den Erkenntnisse der Geometrie der Griechen sichtbar – unter anderem in der Benennung der geometrischen Abbildungen mit Hilfe von Buchstaben, deren Reihenfolge sich an die griechischen Ausführungen anlehnte.[434] Zusammen mit dem Wissen der Geometrie konnte al-Ḫuwarizmī die Verbindungen zwischen geometrischer und analytischer Lösung von Gleichungen zeigen.[435] Al-Ḫuwarizmī löste Gleichungen zwar mit Hilfe von ähnlichen Umformungen wie Diophantos von Alexandria, was ein gewisses Naheverhältnis darstellen könnte, jedoch er aller Wahrscheinlichkeit keinen Zugang zu den Erkenntnisse von Diophantos.[436] Als eine wesentliche Quelle für seine Überlegungen dienten wohl die Erkenntnisse der indischen Mathematiker wie etwa Brahmagupta oder Bhaskara.[437] Die Arbeiten der indischen Mathematiker, die die Basis für al-Ḫuwarizmīs Werke darstellten, enthielten weniger praktische Anwendungsfälle und geometrische Abbildungen zur Rechtfertigung der algebraischen Umformungen.[438] Al-Ḫuwarizmī erklärte die Gesamtheit der notwendigen Schritte bis zum Ergebnis des Falles, wohingegen Vorgänger sich auf das Endergebnis konzentrierten, und nur kurz die wesentlichsten Zwischenschritte erwähnten.[439] Außerdem war deren Stil, in dem die mathematischen Erkenntnisse verfasst waren, sprachlich deutlich komplexer als jener von al-Ḫuwarizmī.[440] Ebenso wegbereitend beschrieben ihn Ibn al-Qiftī und al-Qazwīnī im 12./13. Jh.

[429] Karpinski 1915; Lin & Du 2006.
[430] Karpinski 1915; Lin & Du 2006.
[431] 11./12. Jh. n. Chr.
[432] Karpinski 1915; Rosen 1831.
[433] Karpinski 1915; Lin & Du 2006.
[434] Karpinski 1915; Lin & Du 2006.
[435] Karpinski 1915; Rosen 1831.
[436] Karpinski 1915; Rosen 1831.
[437] Rosen 1831.
[438] Rosen 1831.
[439] Rosen 1831.
[440] Rosen 1831.

n. Chr. in ihren Arbeiten über die Geschichte der Gelehrten im arabisch-islamischen Raum.[441] Mit den Erkenntnissen von al-Ḫuwarizmī beschäftigte sich im 9./10. Jh. n. Chr. auch ʾAbū Kāmil, dessen Arbeiten in Europa im 13. Jh. n. Chr. von Leonard von Pisa aufgegriffen und verbreitet wurden.[442] Im 13. Jh. n. Chr. versah Ibn al-Bannāʾ eine seiner Abhandlungen ebenfalls mit dem Titel *al-ğabr wa-l-muqābala*, was dem Werk von al-Ḫuwarizmī ähnelte, und auch inhaltlich bearbeitete Ibn al-Bannāʾ die sechs Gleichungsarten, die schon al-Ḫuwarizmī behandelt hatte, jedoch verzichtete Ibn al-Bannāʾ auf die genaue Ausarbeitung numerischer Anwendungsbeispiele.[443] Bis in das 15. Jh. n. Chr. trugen zahlreiche Übersetzungen und Kommentare (u.a. von al-ʾIṣṭaḫrī und Gerhard von Cremona) zur weiteren Verbreitung des algebraischen und arithmetischen Gedankenguts, das ursprünglich von al-Ḫuwarizmī stammte, bei.[444] Zusätzlich beschäftigten sich zunehmend Rechtsgelehrte mit dem Gebiet der Algebra, da dessen Rechenmethoden insbesondere auch für Erbteilungsfragen relevant wurden, und deren Anwendung Teil der Ausbildung und Praxis eines „guten" Rechtsgelehrten waren.[445]

[441] Karpinski 1915.
[442] Karpinski 1915.
[443] Karpinski 1915.
[444] Karpinski 1915.
[445] Karpinski 1915.

5.2. Sprachliche Anmerkungen zum Werk

Der in der vorliegenden Arbeit behandelte Text des „*Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala*“ aus dem Werk von Frederic Rosen (1831) basiert seinerseits auf einem Manuskript, das in der Bodleian-Literatursammlung in Oxford aufbewahrt wird und verschiedene Abschriften von arithmetischen und algebraischen Originalwerken enthält.[446] Weitere Manuskripte werden in Deutschland, Saudi-Arabien, Ägypten und Afghanistan aufbewahrt.[447] Das Manuskript wurde ungefähr Mitte des 14. Jh. n. Chr. angefertigt.[448] Laut Rosen war das Manuskript zwar in leserlicher und klarer Handschrift geschrieben, jedoch fehlte der Großteil der diakritischen Punkte auf den arabischen Schriftzeichen, was den Interpretationsspielraum des Schriftstücks vergrößerte.[449] Außerdem wurden, wie es Rosen anmerkte, teils Wörter bzw. Satzteile vom Autor des Manuskripts ausgelassen, woraufhin Rosen die fehlenden Stellen im Zuge des Editierens sinngemäß ergänzte, da die Originalquelle als solche nicht verfügbar war.[450] An den Rändern des Manuskripts befanden sich verschiedene Notizen, die als Erläuterungen zum Text gedacht waren, aber leider bezüglich der Lesbarkeit qualitativ schlecht einzustufen waren.[451] Einige dieser Randnotizen konnten aus einer Erklärung zum Manuskript von al-Muzayhafī, dessen Werk *muqaddima fī l-ḥisāb*[452] im gleichen Sammlungsbereich wie der Text von al-Ḫuwarizmī aufbewahrt wurde, nachgeschlagen werden.[453]

Durch das Manuskript hindurch wurden Zahlen im Fließtext in vollständig textueller Form wiedergegeben.[454] Zahlzeichen bzw. Ziffernschreibweise wurden hingegen nur in den Abbildungen bzw. teilweise in Randnotizen verwendet.[455] Der Mathematiker Colebrooke erarbeitete eine erste Erklärung von al-Ḫuwarizmīs Rechenschritten zur Lösung der in seinem Werk genannten Gleichungstypen, basierend auf dem erwähnten Manuskript aus der Sammlung in Oxford.[456] Die Ergebnisse seiner Forschungen hielt Colebrooke zusammenfassend in seiner

[446] Rosen 1831.
[447] Oaks & Alkhateeb 2005.
[448] Rosen 1831.
[449] Rosen 1831.
[450] Rosen 1831.
[451] Rosen 1831.
[452] Anmerkung: zu Deutsch: „Einführung in die arithmetischen Operationen“.
[453] Rosen 1831.
[454] Rosen 1831.
[455] Rosen 1831.
[456] Rosen 1831.

Arbeit „über die Algebra und Arithmetik unter dem Einfluss der Sanskrit-Texte von Brahmagupta und Bhaskara“ fest.[457] Die kommentierte Auflage von Frederic Rosen aus dem Jahre 1831 ist eine von zwei Druckversionen, die vom in der Bodleian-Sammlung aufliegenden Manuskript angefertigt wurden.[458] Drei in die lateinische Sprache übersetzte Versionen überstanden die Jahrhunderte bisher.[459] Erstens jene Auflage von Robert von Chester Mitte des 12. Jh. n. Chr., die Anfang des 20. Jh. n. Chr. von Karpinski und später von Hughes editiert wurde.[460] Die zweite lateinische Übersetzung stammt aus dem späten 12. Jh. n. Chr., wurde von Gerard von Cremona angefertigt und von Hughes editiert.[461] Die dritte lateinische Übersetzung wurde von Kaunzner Ende des 20. Jh. n. Chr. editiert und wird De Lunis zugeschrieben.[462] Die lateinischen Übersetzungen befassten sich insbesondere mit dem didaktischen Anfangsteil über die Umformungsoperationen und Gleichungstypen, ließen aber al-Ḫuwarizmīs Diskussion von vermessungs- und vererbungsbezogenen Sachverhalten unbehandelt.[463]

Was die Bedeutung des Begriffs „Algebra“ betrifft, so wurden bisher zahlreiche Definitionen dafür vorgeschlagen.[464] Somit lässt sich der Begriff nicht auf eine einzige Art in seiner Bedeutung auslegen, sondern lässt einen gewissen Definitionsspielraum bestehen.[465] Als erstes Werk seiner Art galt *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala* von al-Ḫuwarizmī aus dem frühen 9. Jh. n. Chr., in dem das Wort *al-ğabr*, aus dem „Algebra“ abgeleitet wurde, in Kombination mit *al-muqābala* verwendet wird.[466] Im Murray-Wörterbuch für die Englische Sprache wird „Algebra“ allgemein als „Wiedervereinigung von getrennten Teilen“ bezeichnet, sowie in Kombination mit dem Wort *al-muqābala* als „Zusammenbringen von getrennten Teilen und Gleichsetzen“.[467] In Lanes Arabisch-Englischem Wörterbuch wurde die „Algebra“ als „vollendete Addition und ausgleichende Subtraktion“ oder eben als „Vorgänge des Wiederherstellens und Ausgleichens/Kompensierens“ definiert.[468] Frederic Rosen beschrieb die „Algebra“ in seiner kommentierten Aufgabe des Texte von al-Ḫuwarizmī als

[457] Rosen 1831.
[458] Oaks & Alkhateeb 2005.
[459] Oaks & Alkhateeb 2005.
[460] Oaks & Alkhateeb 2005.
[461] Oaks & Alkhateeb 2005.
[462] Oaks & Alkhateeb 2005.
[463] Oask & Alkhateeb 2005.
[464] Gandz 1926.
[465] Gandz 1926.
[466] Gandz 1926.
[467] Gandz 1926.
[468] Gandz 1926.

„Vervollständigen und Reduzieren“, wobei er im Anmerkungsteil anführte, dass *al-ǧabr* mit der allgemeinen Bedeutung des „Wiederherstellens bzw. Einrenken eines gebrochenen Knochens“ behaftet war, also in mathematischen Belangen in etwa „das Entfernen einer negativen Menge“.[469] Bezüglich der Wortherkunft von *ǧabara* wird die Vermutung nahegelegt, dass diese nicht im Arabischen liegt, sondern in der assyrischen Sprache, in der der Begriff die „Wissenschaft der Gleichungen“ bezeichnete.[470] Eine gebräuchliche assyrische Form, nämlich *gabrū-maḥāru* hatte laut Gandz die Bedeutung „entsprechen“ bzw. „zwei Dinge gegenüberstellen“.[471]

Hinzu kam später *al-muqābala*, was eigentlich keine neuen Inhalte brachte, da dieses Wort das arabische Äquivalent zu dem aus dem Assyrischen stammenden Wort *al-ǧabr* – also „ausgleichen“ – ist.[472] Losgelöst von der tatsächlichen sprachlichen Bedeutung im Arabischen und Assyrischen wurde den beiden Wörtern schließlich die Bedeutung im mathematischen Sinne zugeordnet, sodass *al-ǧabr* und *al-muqābala* die ersten beiden der algebraischen Operationen bezeichneten – also das „Entfernen von negativen bzw. von positiven Mengen zur Vereinfachung der betrachteten Gleichung“.[473] Die Begriffe festigten sich in ihrer mathematischen Bedeutung im Laufe der Zeit.[474] Somit verwendete diese auch der Gelehrte al-Ḫuwarizmī behaftet mit ihrer „gewöhnlichen“ Bedeutung auf dem Gebiet der Mathematik.[475] Rosen beschrieb *al-muqābala* als das den „Vorgang, zwei Dinge gegenüberzustellen und zu vergleichen“, und in mathematischer Hinsicht das „Vermindern der Gleichung mittels des Entfernens von zwei gleichen positiven Mengen auf beiden Seiten der Gleichung“.[476] In dieser Bedeutung verwendete auch al-Ḫuwarizmī die beiden Ausdrücke.[477] Doch zusätzlich benützte er *al-ʾikmāl* in der Bedeutung der „Vervollständigung eines Bruches mit Hilfe der Multiplikation“ und *ar-radd* in der Bedeutung der „Reduktion [einer Gleichung] durch Division“.[478] Professor Smith stützte in seinem Buch, in dem er sich mit der Geschichte der Mathematik auseinandersetzte, die Interpretation von *al-ǧabr* als das „Umstellen einer

[469] Rosen 1831; Gandz 1926.
[470] Gandz 1926.
[471] Gandz 1926.
[472] Gandz 1926.
[473] Gandz 1926.
[474] Gandz 1926.
[475] Gandz 1926.
[476] Rosen 1831; Gandz 1926.
[477] Rosen 1831; Gandz 1926.
[478] Rosen 1831; Gandz 1926.

negativen Menge“ und *al-muqābala* als das „Umstellen einer positiven Menge zur Vereinfachung der Gleichung“.[479]

Später während des 14./15. Jh. n. Chr. wurden von arabisch-islamischen Verwaltungseinrichtungen die Begriffe *al-ǧabr w-al-ḥaṭṭ* anstelle von *al-ǧabr w-al-muqābala* verwendet, wobei ersterer in der Bedeutung des „Entfernens von negativen Mengen sowie Brüchen mittels Addition und/oder Muliplikation“ gebraucht wurde, und letzterer in der Bedeutung des „Entfernens von gleichen positiven Mengen mittels der Subtraktion und/oder Division“ auf beiden Seiten der betrachteten Gleichung.[480]

Im Hinblick auf die Schreibweise des Werkes zur Algebra von al-Ḫuwarizmī wurden die im Fließtext vorkommenden Zahlen von ihm rein in verbaler Form formuliert, obwohl ihm die Zeichen des Dezimalsystems bereits bekannt waren.[481] Gewisse Ausdrücke waren mit besonderen Bedeutungen belegt, sodass die vorliegenden Gleichungen je nach Typ mit einer Folge von Rechenoperationen in Form von Umstellungen der Sätze gelöst werden konnten.[482] Diesbezüglich verwendete al-Ḫuwarizmī für die erste Potenz (also „x“) das Wort *šayʾ*[483] *bzw. ǧiḏr*[484], für die zweite Potenz (also „x^2“) das Wort *māl*[485], und für die dritte Potenz (also „x^3“) das Wort *kaʿb*[486].[487] Höhere Potenzen wurden durch Zusammensetzen von Bezeichnungen der ersten drei Potenzen gebildet, wie z.B. „x^5“ als *kaʿb māl*.[488] Die Bezeichnungen für die jeweiligen Potenzen stammten von Wörtern aus der alltäglichen Sprachen, die mit diesen besonderen Bedeutungen belegt wurden.[489] Die Einheiten, in denen gezählt wurde, wurden meist mit *dirham*, der Bezeichnung der damals weitgehend als Zahlungsmittel verwendeten Silbermünze.[490] Zunächst schlug al-Ḫuwarizmī die Vereinfachung der betrachteten Gleichung auf eine so genannte „kanonische Form“ vor, in der keine negativen Koeffizienten vorhanden waren, und der Koeffizient der höchsten Potenz auf 1 reduziert sein sollte.[491] Um auf die „kanonische Form“ zu kommen, sollten laut al-Ḫuwarizmī die bereits im Vorfeld

[479] Gandz 1926.
[480] Gandz 1926.
[481] Kvasz 2008a.
[482] Kvasz 2008a.
[483] Zu Deutsch: „Ding“ bzw. „Sache“.
[484] Zu Deutsch: „Wurzel“.
[485] Zu Deutsch: „Besitz“ bzw. „Vermögen“.
[486] Zu Deutsch: „Würfel“.
[487] Kvasz 2008a.
[488] Kvasz 2008a.
[489] Oaks & Alkhateeb 2005.
[490] Oaks & Alkhateeb 2005.
[491] Kvasz 2008a.

beschriebenen Operationen *al-ǧabr*[492], *al-muqābala*[493] und *ar-radd*[494] durchgeführt werden.[495] Die algebraischen Operationen führte der Autor in rein verbaler Form durch, und untermauerte sie mit geometrischen Elementen.[496] In seinen Ausführungen bezüglich Lösungswegen für verschiedene Gleichungstypen ist die generell anwendbar Methodik zur Umformung von Gleichungen wegbereitend für die in späterer Zeit zunehmend, aber langsam erfolgende Abstraktion des mathematischen Teilgebiets der Algebra.[497] Aus der vollständig verbalen Beschreibung mathematischer Sachverhalte entwickelten sich zunächst Kurzschreibweisen von gewissen mathematischen Begriffen, woraus wiederum abstrakte Schreibweisen losgelöst von den Wörtern und Buchstaben gebildet wurden.[498]

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, wie al-Ḫuwarizmī die Lösung von Gleichungen verbal im Fließtext durchführte:[499]

- Gegebene Gleichung:
  „$x^2 + 10x = 39$“[500]

- Ziel:
  Löse die Gleichung durch Umformung, sodass x berechnet wird und das Ergebnis eine Zahl ist.[501]

- Al-Ḫuwarizmīs Schreibweise der Gleichung:
  „Māl und zehn šay² entsprechen neununddreißig.“[502]

- Lösungsvorschlag von al-Ḫuwarizmī:
  „Man nehme die Hälfte der Anzahl der šay², d.h. fünf, und multipliziere diese mit sich selbst. Dann bekommt man fünfundzwanzig. Man addiere dieses Ergebnis zu

[492] i.e. Hinzufügen der gleichen Menge auf beiden Seiten, wenn ein Term zuvor als „einseitig abgezogen“ angeschrieben wurde.
[493] i.e. bei Vorliegen von Termen gleichen Grades auf beiden Seiten sollte das kleinere Element vom größeren abgezogen werden.
[494] i.e. für den Fall, dass der Koeffizient des maximalen Grades die Zahl eins übersteigt, sollte die gesamte Gleichung durch diesen Koeffizienten geteilt werden.
[495] Oaks & Alkhateeb 2005; Kvasz 2008a.
[496] Oaks & Alkhateeb 2005; Kvasz 2008a.
[497] Oaks & Alkhateeb 2005; Kvasz 2008a.
[498] Oaks & Alkhateeb 2005; Kvasz 2008a.
[499] Kvasz 2008a: Diese Quelle bezieht sich auf das gesamte Beispiel.
[500] Kvasz 2008a.
[501] Kvasz 2008a.
[502] Kvasz 2008a.

neununddreißig und bekommt dadurch vierundsechzig. Von diesem Ergebnis nimmt man nun die zweite Wurzel, und erhält dadurch acht. Dann zieht man davon die Hälfte der Anzahl der šayʾ ab, und erhält fünf. Das Endergebnis für x ist drei.“[503]

Das Werk umfasst insgesamt mehrere Teile.[504] Der erste davon ist der allgemeine didaktische Teil, in dem die Rechenoperationen und Regeln dargelegt werden, und einige Anwendungsbeispiele inklusive der zugehörigen Rechenschritte besprochen werden.[505] Die nächsten Kapitel umfassen Anwendungsfälle der Algebra im Rahmen von Handelsgeschäften und Vermessungsangelegenheiten.[506] Im letzten Teil werden spezielle, erbschaftsbezogene Anwendungsfälle behandelt.[507]

[503] Kvasz 2008a.
[504] Rosen 1831; Oaks & Alkhateeb 2005.
[505] Rosen 1831; Oaks & Alkhateeb 2005.
[506] Rosen 1831; Oaks & Alkhateeb 2005.
[507] Rosen 1831; Oaks & Alkhateeb 2005.

5.3. Diskussion der Inhalte des Werkes und ausgewählter Textausschnitte aus *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala*

5.3.1. Vorwort (*bismi llāhi r-raḥmāni wa-r-raḥīmi*)[508]

5.3.1.1. Inhalt und Dikussion

Al-Ḫuwarizmī beginnt sein Werk mit einem Vorwort zur Würdigung und zum Lob Gottes. Er dankt Gott für seine Unterstützung und für die Unterstützung, die er den Gelehrten der Zeit vor ihm zukommen ließ. Er beschreibt Gott als jenen, der die Entwicklung der Wissenschaft ermöglichte, und Licht in die Dunkelheit brachte.

Darüber hinaus erweist er sich dankbar und preist er die Gelehrten, die ihm vorangegangen waren und auf deren Erkenntnissen er wissenschaftlich gesehen aufbauen kann, für ihren Mut und Eifer, Neues zu entdecken. Er spricht die „Mühen" der Gelehrten an, die es zu würdigen gilt, und die auch er nicht scheut, um seinen Beitrag zum wissenschaftlichen Fortschritt zu leisten. Was seine Vorgänger vorausschauend für ihn geleistet hatten, ohne zeitlebens eine Gegenleistung zu erwarten, sieht auch al-Ḫuwarizmī als seine Pflicht, für die Nachwelt in wissenschaftlicher Hinsicht auf jegliche Art und Weise zu leisten, so gut es sein Verstand und seine Erfahrung zulassen.

Neben der Würdigung der Mühen der vorangegangenen Gelehrten erwähnt er insbesondere auch den abbasidischen Kalifen al-Maʾmūn, während dessen Herrschaftszeit al-Ḫuwarizmī am *bayt al-ḥikma* tätig war und forschte. Er beschreibt die Liebe des Kalifen zur Wissenschaft und dessen herausragende Bestrebungen, die wissenschaftliche Entwicklung zu fördern. Aus dieser Neigung des Kalifen zugunsten der Wissenschaft schöpft al-Ḫuwarizmī den Mut und die Motivation, sein Werk über die Algebra – er nennt es „das Rechnen mit den Regeln der Vervollständigung/Ergänzung und Reduktion" – in einer Art und Weise zu schreiben, dass es für sein Verständnis „anwendungsfallbezogen" ist, und den Menschen bei der Lösung von Fällen in der Praxis, die algebraische Berechnungen erfordern, ihre Tätigkeiten zu erleichtern. Al-Ḫuwarizmī nennt insbesondere die Angelegenheit der Vererbung, Vermächtnis, der Teilungen und Gerichtsverfahren sowie von Handelsvorgängen aller Art, Vermessung und Bauaktivitäten als Bereiche, in denen das Wissen um die Regeln dieser Berechnungen sich als nützlich erweisen können.

[508] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.1 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).

Er stellt in seinen Ausarbeitungen den wissenschaftlichen Anspruch an sich, etwas Nützliches für die ihm nachfolgenden Gelehrten zu schaffen, und dankt ihnen und Gott für die Ermutigung und den Beistand zur Verfassung des Werkes.

5.3.1.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

[…]

اما رجل سبق الي ما لم يكن مستخرجا قبله فورثه من
بعده واما رجل شرح مما ابقا الاولون ما كان مستغلقا فاوضح
طريقه وسهل مسلكه وقرب ماخذه واما رجل وجد في بعض
الكتب خللا فلمّ شعثه واقام اوده واحسن الظن بصاحبه غير
زاد عليه ولا مفتخر من ذلك بفعل نفسه *

وقد شجعني ما فضل الله به الامام المامون امير المومنين
مع الخلافة التي جاز له ارثها واكرمه بلباسها وحلاه بزينتها
من الرغبة في الادب وتقريب اهله وادناءهم وبسط كنفه لهم
ومعونته اياهم علي ايضاح ما كان مستبهما وتسهيل ما كان
مستوعرا علي ان الفت من حساب الجبر والمقابلة كتابا
مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله لما يلزم الناس من
الحاجة اليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم واحكامهم
وتجاراتهم وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الارضين
وكري الانهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه مقدما
لحسن النية فيه وراجيا لان يبذله اهل الادب بفضل ما
استودعوا من نعم الله تعالي وجليل الايه وجميل بلايه عندهم
منزلته وبالله توفيقي في هذا وفي غيره عليه توكلت وهو رب
العرش العظيم وصلي الله علي جميع الانبياء والمرسلين *

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

ʾAmā rağulun sabaqa ʾila mā lam yakun mustaḫrağan qablahu fa-wariṯahu man baʿdahu wa-ʾamā rağulun šaraḥa mimmā ʾabqā l-ʾawwalūna mā kāna mustaġliqan fa-ʾawḍaḥa ṭarīqahu wa-sahala maslakahu wa-qarraba mā ḫaḍahu wa-ʾamā rağulun wağada fī baʿḍi l-kutubi ḫalalan fa-lamma šaʿiṯahu wa-ʾaqāma ʾawadahu wa-ʾaḥsana ẓ-ẓanna bi-ṣāḥibihi ġayri zādin ʿalayhi wa-lā muftaḫarin min ḏālika bi-faʿli nafsuhu.

Wa-qad šağğaʿanī mā faḍḍala llāhu bi-hi l-ʾimāmu l-maʾmūnu ʾamīru l-muʾminīna maʿa l-ḫilāfati llatī ğāza la-hu ʾarṯuhā wa-ʾakramuhu bi-labāsihā wa-ḥallāhu bi-zīnatihā mina r-raġbati fī l-ʾadabi wa-taqrībi ʾahlihi wa-ʾadnāʾihim wa-basṭi kanafihi la-hum wa-maʿūnatihi ʾayyāhum ʿalayyi ʾayḍāhu mā kāna mustabahumā wa-tashīl mā kāna mastūʿran ʿalayyi ʾanna l-fatta min ḥisābi l-ğabri wa-l-muqābalati kitāban muḫtaṣaran ḥāṣiran li-ṭ-ṭayfi l-ḥisābi wa-ğalīlihi li-mā yulzima n-nāsu mina l-ḥāğati ʾilayhi fī muʾarriṯatihim wa-waṣāyāhum wa-fī muqāsamatihim wa-ʾaḥkāmihim wa-tiğārātihim wa-fī ğamīʿin mā yataʿāmalūna bi-hi baynahum min misāḥati l-ʾarḍayni wa-kurrī l-ʾanhāri wa-l-handasati wa-ġayri ḏālika min wuğūhihi wa-funūnihi muqaddaman li-ḥusni niyyati fī-hi wa-rāğiyyā li-ʾan yabḏalahu ʾahlu l-ʾadabi bi-faḍli mā stawadaʿū min niʿmi llāhi taʿālā wa-ğalīli l-ʾāyati wa-ğamīli bi-l-ʾāyyati ʿandahum manzilati wa-bi-llāhi tawfīqī fī-hāḏa wa-fī ġayrihi ʿalayhi tawakkaltu wa-huwa rabbu l-ʿarši l-ʿaẓīmi wa-ṣallā llāhu ʿalā ğamīʿu l-ʾanbiyāʾi wa-l-mursalīna.

5.3.1.3. Übersetzung des Vorworts

Im Name Gottes, des Gnadenhaften und Barmherzigen!

Dieses Buch wurde von Muḥammad b. Mūsā al-Ḫuwarizmī verfasst, der es folgendermaßen beginnt:

Gott sei gepriesen für seine Großzügigkeit zu jenen, die es verdienen aufgrund ihrer tugendhaften Taten. So wie er uns gegenüber Verehrung gibt, danken wir ihm und erweisen uns des Fortbestehens seiner Barmherzigkeit wert und wir behalten dies bei. Wir erkennen seine Stärke an, beugen uns vor seiner Macht und verehren seine Größe. Er sandte Muḥammad, auf dem der Segen Gottes ruhen möge, mit der Mission eines Prophetes, lang nachdem ein himmlischer Gesandter erschienen war, als die Gerechtigkeit in Vernachlässigung geraten war, und als die wahre Lebensweise vergeblich ersehnt wurde. Durch ihn heilte er die Blindheit, rettete er vor Verdammnis, machte groß, was klein war, und sammelte, was verstreut war. Gepriesen sei Gott, unser Herr! Möge seine Herrlichkeit wachsen und mögen all seine Namen

geheiligt werden – außer ihm gibt es keinen Gott. Und möge sein Segen auf dem Prophet Muḥammad und seinen Nachkommen ruhen.[509]

Die Gelehrten aus Zeiten, die vergangen sind und aus Reichen, die zu existieren aufgehört haben, waren stets damit beschäftigt, Bücher über die verschiedenen Zweige der Wissenschaft und Zweige des Wissens zu schreiben in Gedanken an jene, die nach ihnen kommen. Sie waren in der Hoffnung, eine angemessene Belohnung für ihre Fähigkeit bekommen, und vertrauten darauf, dass ihre Bemühungen auf Anerkennung, Aufmerksamkeit und Erinnerung treffen würden. Sogar mit einem geringen Grad an Lob gaben sie sich zufrieden – klein im Vergleich zu den Mühen, die sie auf sich genommen hatten, und den Schwierigkeiten, die sie erfuhren, während sie Geheimnisse und Dunkelheit der Wissenschaft offenlegten. Einige widmeten sich der Tätigkeit, Wissen, das vor ihnen nicht bekannt war, der Nachwelt zu überlassen. Andere kommentierten wiederum die Schwierigkeiten aus den Arbeiten, die ihnen ihre Vorläufer überlassen hatten, indem sie eine bessere Methode oder leichteren Zugang zur Wissenschaft schufen. Wieder andere entdeckten Fehler in den Werken der Vorgänger, und reorganisierten Ungeordnetes oder passten Inkorrektes an, und korrigierten die Fehler ihrer Kollegen, ohne Hochmut ihnen gegenüber zu zeigen, und ohne sich für ihren Beitrag zu rühmen.

Diese Liebe zur Wissenschaft, durch die Gott den Imam al-Maʾmūn, den Anführer der Gläubigen, auszeichnete […], diese Freundlichkeit und Herabneigung, die er den Gelehrten zeigte, und diese Schnelligkeit, mit der er die Aufklärung der Dunkelheit sowie die Beseitigung von Schwierigkeiten schützt und unterstützt – sie hat mich ermutigt, eine knappe Arbeit über das Rechnen mit den Regeln der Vervollständigung/Ergänzung und Reduktion, beschränkt auf das, was am einfachsten und nützlichsten in der Arithmetik ist, und was die Menschen stets in Fällen der Vererbung, Vermächtnis, Teilung, gerichtlichen Verfahren und Handelsaktivitäten und all ihren Handlungsvorgängen unter sich brauchen. Oder in der Vermessung von Ländereien, beim Graben von Kanälen, in der geometrischen Berechnung und bei jeglichen anderen Aktivitäten. Ich verließ mich auf die Güte meiner Bestrebungen dazu, und hoffte, dass die Gelehrten es belohnen werden, indem sie durch ihre Gebete für mich die Exzellenz der göttlichen Gnade gewinnen. Im Gegenzug mögen die auserlesensten Segenswünsche und die reichliche Großzügigkeit Gottes mit ihnen sein! Mein Vertrauen ruht in Gott – in dies so wie in alles und in ihn setze ich mein Vertrauen. Er ist der Herr des ehrfurchtgebietenden Thrones. Möge sein Segen herabkommen auf alle Propheten und göttlichen Gesandten.

[509] Anmerkung: Ausgewählte arabische Textstelle endet hier.

5.3.2. Einleitung (*muqaddima*)[510]

5.3.2.1. Inhalt und Dikussion

In der Einleitung zu seinem Werk gibt der Autor an, beobachtet zu haben, dass die Menschen generell im Rahmen der Berechnung schlussendlich eine Zahl als Ergebnis erreichen wollen. Er stellt also die konkrete Zahl als solches als das „Ziel" des Rechnens dar. Außerdem bemerkte er, dass jede Zahl auf Einheiten besteht, und dass Zahlen generell in Einheiten teilbar sind. Der Autor spricht zwar von einer „oberen Grenze" der Aufzählung, er nennt aber weder tatsächlichen Werte noch die Eigenschaft der Unendlichkeit als mögliche Grenzen.

Für die Berechnungen mittels Vervollständigung/Ergänzung und Reduktion, also die Algebra, stehen laut al-Ḫuwarizmī ***drei Typen von Termen*** zur Verfügung:

- ***Wurzel (ǧiḏr)***: ist die einfache Potenz einer unbekannten Menge, d.h. in etwa *x* in der heutigen algebraischen Schreibweise für unbekannte Variablen.
- ***Quadrat (māl)***: ist eine Wurzel multipliziert mit sich selbst, d.h. in etwa x^2 bzw. *x*x* in der heutigen algebraischen Schreibweise für unbekannte Variablen.
- ***Einfache Zahl (ʿadad)***: ist eine konkrete Zahl, die weder auf Wurzeln noch auf Quadrate verweist.

Jeden dieser Typen kann man in Relation setzen, indem man eine Gleichung bildet – also zur damaligen Zeit einen Satz, der mittels dem Verb *ʿadala* die linke und rechte Seite gegenüberstellt und somit eine Berechnung ermöglicht.

Gemäß dem Autor ist von ***drei einfachen Fällen der Berechnung*** auszugehen:

- ***Fall 1: „Quadrate gleich Wurzeln"*** (heutige Schreibweise: „$ax^2 = bx$")
- ***Fall 2: „Quadrate gleich Zahlen"*** (heutige Schreibweise: „$ax^2 = c$")
- ***Fall 3: „Wurzeln gleich Zahlen"*** (heutige Schreibweise: „$bx = c$")

Zu jedem dieser einfachen Fälle der Berechnung gibt al-Ḫuwarizmī direkt im Fließtext Beispiele an, in denen er die Lösungsschritte explizit und detailliert in verbaler Formulierung darlegt. Eines dieser Beispiele bezüglich Fall 1 ist „Ein Quadrat ist gleich fünf Wurzeln desselben" (*mālun yaʿdalu ḫamsata ʾaǧḏārahu*). Übertragen in die moderne Schreibweise

[510] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.2 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).

entspricht dies $x^2 = 5x$. Die Gleichung löst al-Ḫuwarizmī durch Einsetzen und das Ergebnis beträgt somit fünf.

Ebenso geht er im zweiten anschaulichen Beispiel vor, mit dem er die Anwendung der Regeln verdeutlicht: „Ein Drittel des Quadrates ist gleich vier Wurzeln" (*ṯulṯu mālin yaʿdalu ʾarbaʿata ʾağḏārin*). In der modernen Schreibweise würde diese Gleichung lauten: $x^2 / 3 = 4x$. Diese formt der Autor um zu $x^2 = 12x$, indem er beide Seiten mit 3 multipliziert und schließlich 12 als Ergebnis für die unbekannte Menge x erhält.

Im Fall 2 nennt er unter anderem als Beispiel: „Ein Quadrat ist gleich neun" (*mālun yaʿdalu tisʿatan*). In moderner Schreibweise würde dies lauten: $x^2 = 9$. Das Ergebnis dafür erhält man durch das Ziehen der Quadratwurzel, was somit drei ist[511].

Auch im Fall 3 gibt der Autor anschauliche Beispiele, wie etwa „Vier Wurzeln sind gleich zwanzig" (*ʾarbaʿatu ʾağḏārin taʿdalu ʿišrīna*). Anders geschrieben wäre dies die Gleichung $4x = 20$. Die Lösung dafür entsteht durch beidseitige Division durch vier, wobei das Ergebnis für die Unbekannte x schließlich fünf ist.

Der Autor gibt zwar einzelne Beispiele, aber er hält seine Rechenregeln sehr allgemein, sodass beliebige Beispiele, die mit positiven Mengen operieren, mit Hilfe dieser Regeln gelöst werden können. Jedoch gilt es zusätzlich zu den einfachen Fällen der Berechnung noch die ***zusammengesetzten Fälle*** zu beachten, die folgende sind:

- ***Fall 4: Quadrate und Wurzeln gleich Zahlen*** ($ax^2 + bx = c$)
- ***Fall 5: Quadrate und Zahlen gleich Wurzeln*** ($ax^2 + c = bx$)
- ***Fall 6: Wurzeln und Zahlen gleich Quadrate*** ($bx + c = ax^2$)

Für diese drei zusammengesetzten Fälle schlägt al-Ḫuwarizmī ebenfalls generische Lösungsalgorithmen vor.

Im Fall 4, in dem Quadrate und Wurzeln gleich Zahlen gesetzt werden, und daraus ein Ergebnis berechnet wird, gibt al-Ḫuwarizmī die Abfolge der Schritte an, die generisch zur Lösung derartiger Gleichungen führen sollte. Er beginnt mit dem Beispiel „ein Quadrat und zehn Wurzeln von derselben Unbekannten sind gleich neununddreißig Dirham", für dessen Lösung er explizit die Rechenschritte angibt. Diese Gleichung entspricht in der moderne Formelschreibweise $x^2 + 10x = 39$. Er halbiert also die Anzahl der Wurzeln, d.h. er kommt

[511] Da nur positive Ergebnisse des Wurzelziehens berücksichtigt wurden.

somit auf $\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}$ = x. Wenn man die Wurzeln, also den Term 10x durch zwei dividiert, erhält man eben diese halbe Anzahl von Wurzeln. Dann wird fünf mit sich selbst multipliziert und ergibt 25, was wiederum zu den 39 addiert wird. Demnach steht unter der dem Wurzelsymbol die Summe von 39 und 25, also 64. Die Wurzel aus 64 minus fünf ergibt nun drei als Endergebnis. Eingesetzt in die Formel ergibt dies $\sqrt{[25 + 39]} - 5 = 3 = x$. In diesem Fall war das Quadrat der Unbekannten x gesucht, also multipliziert man drei mit sich selbst, was neun ergibt. Der Autor diskutiert auch noch weitere Beispiele, und verwendet zur Zählung meist die Einheit Dirham, da dies für die Anwender einen besseren Praxisbezug darstellen sollte. Zur Lösung von Gleichungen des Typs vier gibt es also einen generischen Lösungsweg, und der Autor merkt an, dass diese Lösungsweise auch für eine höhere oder geringere Anzahl von Quadraten möglich ist, wobei in letzterem Szenario zunächst die Anzahl der Quadrate auf ein Quadrat reduziert werden sollte. Das heißt, die Gleichung muss vor der Anwendung des angegegeben Algorithmus entsprechend mittels Äquivalenzumformungen vorbereitet werden.

Im Fall 5 werde Quadrate und Zahlen einerseits mit Wurzeln andererseits in einer Gleichung platziert. Al-Ḫuwarizmī gibt auch für diesen Fall einen detaillierten generischen Algorithmus an. Als Beispiel nennt er „ein Quadrat und einundzwanzig sind gleich zehn Wurzeln von derselben Unbekannten“. Er beginnt die Rechenschrittbeschreibung wieder explizit mit dem Wort „Lösung“. Wieder in moderner Schreibweise kann die Ausgangsgleichung folgendermaßen dargestellt werden: $x^2 + 21 = 10x$. Davon ausgehend teilt der Autor die Wurzeln durch zwei, und multipliziert dieses Ergebnis mit sich selbst, was 25 ergibt. Er stellt nun dieses Ergebnis unter die Quadratwurzel und zieht 21 innerhalb der Wurzel ab und addiert die Hälfte von 10. Dieser Vorgang kann in moderner Schreibweise als

$x = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21\right]} + \frac{10}{2}$ wiedergegeben werden, woraus nach dem Auflösen der Wurzel und der Addition 5 + 2 bzw. 5 – 2 als Ergebnis erhalten wird. Der Autor merkt hierzu an, dass der Betrag unter der Wurzel nicht negativ sein darf, da nur mit Wurzeln aus positiven Zahlen gerechnet werden kann. So wie im Fall 4 sollte die Anzahl der Quadrate, falls diese nicht ohnehin schon eins ist, wie im angegebenen Beispiel, auf eins reduziert werden, bevor der Algorithmus angewandt wird.

Im Fall 6 werden schließlich Wurzeln und Zahlen mit Quadraten in eine Gleichheitsbeziehung gesetzt. Als Beispiel behandelt der Autor „drei Wurzeln und vier sind gleich ein Quadrat“, was

in moderner Notation $3x + 4 = x^2$ entspricht. Zur Lösung dieser Gleichung müssen anfangs, falls die Anzahl der Quadrate von eins abweicht, die Quadrate reduziert oder vermehrt werden, sodass eins entsprechend erreicht wird. Dies ist hier nicht notwendig, da schon von einem Quadrat ausgegangen wird. Der Autor halbiert wieder die Wurzeln – er dividiert also 3x durch zwei. Somit ergibt sich nun die Gleichung $x^2 = \sqrt{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4\right]} + \frac{3}{2}$, was schließlich vier ergibt als Ergebnis für die Unbekannte x^2.

Insgesamt kann anhand der Erklärungen des Autors gesehen werden, dass es in den „einfachen Fällen“ (d.h. Fall 1 bis Fall 3) nicht notwendig ist, die Wurzeln zu halbieren, jedoch in den „zusammengesetzten Fällen“ (d.h. Fall 4 bis Fall 6) schon. Für jeden der Fälle wurden von al-Ḫuwarizmi unter Voraussetzung bestimmter Anfangsbedingungen generische Vorgangsweisen zur Lösung der betrachteten Gleichungen dargelegt. Für die zusammengesetzten Fälle $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$ sowie $x^2 = 3x + 4$ bietet der Autor auch geometrische Erläuterungen an, um seine Argumentation zu untermauern und den Sachverhalt geometrisch zu zeigen, wobei jeweils die entsprechenden Skizzen beigelegt werden.

5.3.2.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

واني لما نظرت فيما يحتاج اليه الناس من الحساب وجدت
جميع ذلك عددا و وجدت جميع الاعداد انما تركبت
من الواحد والواحد داخل في جميع الاعداد * ووجدت
جميع ما يلفظ به من الاعداد ما جاوز الواحد الي العشرة
يخرج مخرج الواحد ثم تثني العشرة و تثلث كما فعل
بالواحد فيكون منها العشرون والثلثون الي تمام المائة ثم تثني
المائة و تثلث كما فعل بالواحد وبالعشرة الي الالف ثم كذلك
يردد الالف عند كل عقد الي غاية المدرك من العدد *
ووجدت الاعداد التي يحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة
علي ثلثة ضروب وهي جذور و اموال وعدد مفرد لا ينسب
الي جذر ولا الي مال * فالجذر منها كل شيء مضروب في
نفسه من الواحد وما فوقه من الاعداد وما دونه من الكسور *
والمال كلما اجتمع من الجذر المضروب في نفسه *
والعدد المفرد كل ملفوظ به من العدد بلا نسبة الي جذر ولا
الي مال * فمن هذه الضروب الثلثة ما يعدل بعضهم
بعضا وهو كقولك اموال تعدل جذورا * واموال تعدل
عددا * وجذور تعدل عددا *

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

فاما الاموال التي تعدل الجذور فمثل قولك مال يعدل خمسة اجذاره فجذر المال خمسة والمال خمسة وعشرون وهو مثل خمسة اجذاره * وكقولك ثلث مال يعدل اربعة اجذار فالمال كله يعدل اثني عشر جذرا وهو ماية واربعة واربعون وجذره اثني عشر * ومثل قولك خمسة اموال تعدل عشرة اجذار فالمال الواحد يعدل جذرين وجذر المال اثنان والمال اربعة * وكذلك ما كثر من الاموال او قل يردّ الي مال واحد وكذلك يفعل بما عادلها من الاجذار يردّ الي مثل ما يردّ اليه المال *

واما الاموال التي تعدل العدد فمثل قولك مال يعدل تسعة فهو المال وجذره ثلثة * وكقولك خمسة اموال تعدل ثمانين فالمال الواحد خمس الثمانين وهو ستة عشر * وكقولك نصف مال يعدل ثمانية عشر فالمال يعدل ستة وثلثين وجذره ستة * وكذلك جميع الاموال زايدها وناقصها تردّ الي مال واحد وان كانت اقل من مال زيد عليها حتي تكمل مالا تاما وكذلك تفعل بما عادلها من الاعداد *

واما الجذور التي تعدل عددا فكقولك جذر يعدل ثلثة من العدد فالجذر ثلثة والمال الذي يكون منه تسعة * وكقولك

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

اربعة اجذار تعدل عشرين والجذر الواحد يعدل خمسة والمال الذي يكون منه خمسة وعشرون * وكقولك نصف جذر يعدل عشرة فالجذر يعدل عشرين والمال الذي يكون منه اربعماية *

ووجدت هذه الضروب الثلثة التي هي الجذور والاموال والعدد يقترن فيكون منها ثلثة اجناس مقترنة وهي اموال وجذور تعدل عددا و اموال وعدد تعدل جذورا و جذور وعدد تعدل اموالا *

فاما الاموال والجذور التي تعدل العدد فمثل قولك مال وعشرة اجذاره يعدل تسعة و ثلثين درهما ومعناه اي مال اذا زدت عليه مثل عشرة اجذار بلغ ذلك كله تسعة وثلثين * فقياسه ان تنصف الاجذار وهي في هذه المسئله خمسة فتضربها في مثلها فيكون خمسة و عشرين فتزيدها علي التسعة والثلثين فيكون اربعة وستين فتاخذ جذره وهو ثمانية فتنقص منه نصف الاجذار وهو خمسة فيبقي ثلثة وهو جذر المال الذي تريد والمال تسعة * وكذلك لو ذكر مالين او ثلثة او اقل او اكثر فاردده الي مال واحد واردد ما كان معه من الاجذار والعدد الي مثل ما رددت اليه المال * وهو نحو قولك مالان وعشرة اجذار يعدل ثمانية واربعين درهما ومعناه اي مالين

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

اذا جمعا وزيد عليهما مثل عشرة اجذار احدهما بلغ ذلك
ثمانية واربعين درهما فينبغي ان ترد المالين الي مال واحد
وقد علمت ان مالا من مالين نصفهما فاردد كل شيء في
المسئلة الي نصفه فكانه قال مال وخمسة اجذار يعدل اربعة
وعشرين درهما ومعناه اي مال اذا زدت عليه خمسة اجذاره
بلغ ذلك اربعة وعشرين فنصّف الاجذار فتكون اثنين
ونصفا فاضربها في مثلها فتكون ستة وربعا فزدها علي الاربعة
والعشرين فتكون ثلثين درهما وربعا فخذ جذرها وهو خمسة
ونصف فانقص منها نصف الاجذار وهو اثنان ونصف تبقي
ثلثة وهو جذر المال والمال تسعة * وكذلك لو قال نصف
مال وخمسة اجذار يعدل ثمانية وعشرين درهما فمعني
ذلك اي مال اذا زدت علي نصفه مثل خمسة اجذاره
بلغ ذلك ثمانية وعشرين درهما فتريد ان تكمل مالك
حتي يبلغ مالا تاما وهو ان تضعفه فاضعفه واضعف كلما
معك مما يعادله فيكون مالا وعشرة اجذار يعدل ستة
وخمسين درهما فنصّف الاجذار تكون خمسة فاضربها في مثلها
تكون خمسة وعشرين فزدها علي الستة والخمسين تكون احدا
وثمانين فخذ جذرها وهو تسعة فانقص منه نصف الاجذار وهو
خمسة فيبقي اربعة وهو جذر المال الذي اردته والمال ستة

عشر ونصفه ثمانية * وكذلك فافعل بجميع ما جاءك
من الاموال والجذور وما عادلها من العدد يصب ان شاء الله *

[…]

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

W-ānī li-mā naẓartu fīmā yaḥtāğu ʾilayhi n-nāsu mina l-ḥisābi waǧadtu ǧamīʿu ḏālika ʿadadan. Wa-waǧadtu ǧamīʿu l-ʾaʿdādi ʾannamā tarakkabat mina l-wāḥid. Wa-l-wāḥidu dāḫilun fī ǧamīʿi l-ʾaʿdādi.

Wa-waǧadtu ǧamīʿun mā yalfiẓu bi-hi mina l-ʾaʿdādi mā ǧāwaza l-wāḥid ʾilā l-ʿašarati yaḫruǧu muḫriǧ al-wāḥidi. Ṯumma tuṯannī l-ʿašarata wa-tuṯalliṯu ka-mā fuʿila bi-l-wāḥidi. Fa-yakūnu minhā l-ʿišrūna wa-ṯ-ṯalaṯūna ʾilā tamāmi l-miʾati ṯumma tuṯannī l-miʾata wa-tuṯalliṯu ka-mā fuʿila bi-l-wāḥidi wa-bi-l-ʿašarati ʾilā l-ʾalfi ṯumma ka-ḏālika yuraddidu l-ʾalfu ʿanda kulli ʿaqd ʾilā ġāyati l-mudriki mina l-ʿadadi.

Wa-waǧadtu l-ʾaʿdādu allatī yaḥtāğu ʾilayhā fī ḥisābi l-ǧabri wa-l-muqābalati ʿalā ṯalaṯati ḍurūbi wa-hiya ǧuḏūun wa-ʾamwālun wa-ʿadadun mufradun lā yansubu ʾilā ǧiḏrin wa-lā ʿilā mālin.

Fa-l-ǧiḏru minhā kullu šayʾin maḍrūbin fī nafsihi mina l-wāḥidi wa-mā fawqahu mina l-ʾaʿdādi wa-mā dūnahu mina l-kusūri. Wa-l-mālu kullumā ǧtamaʿa mina l-ǧiḏri l-maḍrūbi fī nafsihi. Wa-l-ʿadadu l-mufradu kullu malfūẓun bi-hi mina l-ʿadadi bi-lā nisbati ʾilā ǧiḏrin wa-lā ʾilā mālin.

Fa-min haḏihi ḍ-ḍurūbi ṯ-ṯalaṯati mā yaʿdalu baʿḍahum baʿḍan wa-huwa ka-qawluka ʾamwālun taʿdalu ǧuḏūran. Wa-ʾamwālun taʿdalu ʿadadan. Wa-ǧiḏrun taʿdalu ʿadadan.

Fa-ʾamā l-ʾamwālu llatī taʿdalu l-ǧuḏūra fa-maṯalu qawlika mālun yaʿdalu ḫamsata ʾaǧḏārahu. Wa-ka-qawluka ṯulṯu mālin yaʿdalu ʾarbaʿata ʾaǧḏārin, fa-l-mālu kulluhu yaʿdalu ṯnay ʿašara ǧiḏran wa-huwa miʾatu wa-ʾarbaʿatu wa-ʾarbaʿūna wa-ǧiḏruhu ʾiṯnay ʿašara. Wa-maṯalu qawlika ḫamsatu ʾamwālin taʿdalu ʿašarata ʾaǧḏārin. Fa-l-mālu l-wāḥidu yaʿdalu ǧiḏrayni. Wa-ǧiḏru l-māli iṯnāni. Wa-l-mālu ʾarbaʿatun. Wa-ka-ḏālika mā kaṯurun mina l-ʾamwāli ʾaw qallu yaruddu ʾilā mālin wāḥidin wa-ka-ḏālika yafʿalu bi-mā ʿādiluhā mina l-ʾaǧḏāri yaruddu ʾilā miṯli mā yaruddu ʾilayhi l-māli.

Wa-ʾamā l-ʾamwālu llatī taʿdalu l-ʿadada fa-maṯalu qawlika mālun yaʿdalu tisʿatan. Fa-huwa l-mālu wa-ǧiḏruhu ṯalaṯatun. Wa-ka-qawluka ḫamsatu ʾamwālin taʿdalu ṯamānīna. Fa-l-mālu l-wāḥidu ḫumsu ṯ-ṯamānīna wa-huwa sittatu ʿašara. Wa-ka-qawluka niṣfu mālin yaʿdalu ṯamāniyata ʿašara. Fa-l-mālu yaʿdalu sittata wa-ṯalaṯīna wa-ǧiḏruhu sittatun. Wa-ka-ḏālika tafʿalu bi-mā ʿādiluhā mina l-ʾaʿdādi.

Wa-ʾamā l-ǧuḏūru llatī taʿdalu ʿadadan fa-ka-qawluka ǧiḏru yaʿdalu ṯalaṯatan mina l-ʿadadi. Fa-l-ǧiḏru ṯalaṯatun. Wa-l-mālu llaḏī yakūnu minhu tisʿatun. Wa-ka-qawluka ʾarbaʿatu ʾaǧḏārin taʿdalu ʿišrīna. Wa-l-ǧiḏru l-wāḥidu yaʿdalu ḫamsata wa-l-mālu llaḏī yakūnu minhu ḫamsatun wa ʿišrūna. Wa-ka-qawluka niṣfu ǧiḏrin yaʿdalu ʿašarata. Fa-l-ǧiḏru yaʿdalu ʿāšrīna. Wa-l-mālu llaḏī yakūnu minhu ʾarbaʿumiʾatin.

Wa-waǧadtu haḏihi ḍ-ḍurūbu ṯ-ṯalaṯatu llatī hiya l-ǧuḏūru wa-l-ʾamwālu wa-l-ʿadadu yaqtarna fa-yakūnu minh ṯalaṯatu ʾiǧnāsin muqtarinatin wa-hiya ʾamwālun wa-ǧuḏūrun taʿdalu ʿadadan wa-ʾamwālun wa ʿadadun taʿdalu ǧuḏūran wa-ǧuḏūrun wa-ʿadadun taʿdalu ʾamwālan.

Fa-ʾamā l-ʾamwālu wa-l-ǧuḏūru llatī taʿdalu l-ʿadada fa-maṯalu qawlika mālun wa-ʿašaratu ʾaǧḏārihi yaʿdalu tisʿata wa-ṯalaṯīna dirhaman. Wa-maʿnāhu ʾayy mālun ʾiḏā zadta ʿalayhu miṯlu ʿašarati ʾaǧḏāra balaġa ḏālika kullihi tisʿata wa-ṯalaṯīna.

Fa-qiyāsuhu ʾan tunaṣṣifa l-ʾaǧḏāra wa-hiya fī haḏihi l-masʾilihi ḫamsatu. Fa-taḍarabuhā fī miṯlihā. Fa-yakūnu ḫamsata wa-ʿišrīna. Fa-tuzayyiduhā ʿalā t-tisʿati wa-ṯ-ṯalaṯīna. Fa-yakūnu ʾarbaʿata wa-sittīna fa-taʾaḫḫaḍu ǧiḏrahu wa-huwa ṯamāniyatun. Fa-tunaqiṣṣu minhu niṣfa l-ʾaǧḏāri wa-huwa ḫamsatun. Fa-yabqā ṯalaṯatun wa-huwa ǧiḏru l-mālin llaḏī turīdu wa-l-mālu tisʿatun. Wa-ka-ḏālika law ḏakara mālayni ʾaw ṯalaṯata ʾaw ʾaqalla ʾaw ʾakṯara fa-raddidhu ʾilā mālin wāḥidin raddid mā kāna maʿahu mina l-ʾaǧḏāri wa-lʿadadi ʾilā miṯli mā raddadta ʾilayhi l-mālu.

Wa-huwa naḥwa qawlika mālāni wa-ʿašaratu ʾaǧḏārin yaʿdalu ṯamāniyata wa ʾarbaʿīna dirhaman. Wa-maʿnāhu ʾayyi mālayni ʾiḏā ǧamīan wa-zayyada ʿalayhimā miṯlu ʿašarati ʾaǧḏārin […] balaʿa ḏālika ṯamāniyata wa-ʾarbaʿīna dirhaman. Fa-yanbaġī ʾan turadda l-mālayni ʾilā mālin wāḥidin wa-qad ʿalamta ʾanna mālan min mālayni niṣfuhumā fa-raddid kullu šayʾin fī l-masʾilati ʾilā niṣfihifa-kānahu qāla mālun wa-ḫamsatu ʾaǧḏārin yaʿdalu ʾarbaʿata wa-ʿišrīna dirhaman. Wa-maʿnāhu ʾayyi mālin ʾiḏā zadta ʿalayhi ḫamsatu ʾaǧḏārihi balaġa ḏālika ʾarbaʿata wa-ʿišrīna. Fa-naṣṣif al-ʾaǧḏāra fa-takūnu ṯnayn wa niṣfan. Fa-naqqiṣ minha niṣfa l-ʾaǧḏāri wa-huwa ṯnayni wa-niṣfun tabqā ṯalaṯatun wa-huwa ǧiḏru l-māli wa-l-mālu tisʿatun.

Wa-ka-ḏālika law qāla niṣgu mālin wa-ḫamsatu ʾaǧḏārin yaʿdalu ṯamāniyata wa-ʿišrīna dirhaman. Fa-maʿnā ḏālika ʾayyi mālin ʾiḏā zadta ʿalā niṣfihi miṯli ḫamsati ʾaǧḏārihi balaġa ḏālika ṯamāniyata wa-ʿišrīna dirhaman. Fa-tuzayyidu ʾan takmalu mālaka […]. Fa-yakūnu mālan wa-ʿašarata ʾaǧḏāri yaʿadala sittata wa-ḫamsīna dirhaman fa-naṣṣif al-ʾaǧḏāra takūnu ḫamsata fa-ḍarbhā fī miṯlihā takūnu ḫamsata wa-ʿišrīna fa-zadhā ʿalā s-sittati wa-l-ḫamsīna

takūnu ʾaḥadan wa-ṯamānīna fa-ḫaḏ ǧiḏrahā wa-huwa tisʿatun fa-naqqiṣ minhu niṣfa l-ʾaǧḏāri wa-huwa ḫamsatu fa-yabqā ʾarbaʿtun wa-huwa ǧiḏru l-māli llaḏī ʾardatuhu wa-l-mālu sittatun ʿašara wa-niṣfuhu ṯamāniyatun. Wa-ka-ḏālika fa-ʾufʿal bi-ǧamīʿin mā ǧāʾaka mina l-ʾamwāli wa-l-ǧuḏūri wa-mā ʿādalahā mina l-ʿadadi yuṣabbu ʾin ṣāʾa allāhu.

5.3.2.3. Übersetzung des gewählten Textausschnitts

Wenn ich bedenke, was die Leute generell wollen, wenn sie Berechnungen machen, ist mir aufgefallen, dass dies immer eine Zahl ist. Ich habe auch beobachtet, dass jede Zahl sich aus Einheiten[512] zusammensetzt, und dass jede Zahl in Einheiten geteilt werden kann.

Außerdem ist mir aufgefallen, dass jede Zahl von 1 bis 10 die vorhergehende Zahl um eins überschreitet. Danach wird die Zehn verdoppelt oder verdreifacht, so wie dies vorher mit den Einheiten passiert ist. Daher kommt man zu 20, 30, und so weiter – bis zu 100. Dann wird die Zahl 100 auf dieselbe Art und Weise verdoppelt und verdreifacht wie die Einer und die Zehner, bis man den Tausender erreicht. Danach kann der Prozess [des Weiterzählens] daher bis zu jeglicher komplexen Zahl weitergeführt werden, bis die maximale Grenze des Zahlensystems erreicht wird.

Ich habe beobachtet, dass die Zahlen, die in den Prozessen der Vervollständigung und der Reduktion notwendig sind, drei Typen angehören, nämlich Wurzeln[513], Quadraten[514] und einfachen Zahlen[515], wobei letztere weder Wurzeln noch Quadrate sind.

Eine Wurzel ist eine Menge, die mit sich selbst multipliziert wird, wobei sie aus Einheiten besteht, oder aufsteigenden Zahlen oder absteigenden Brüchen.[516]

Ein Quadrat ist der gesamte Betrag der Wurzel, die mit sich selbst multipliziert wird.

Eine einfache Zahl ist irgendeine Zahl, die auf keine Wurzel und kein Quadrat verweist.

[512] Anmerkung: „Einheiten“ steht hier für „Einer“ in unserem Sprachgebrauch des Rechnens.
[513] Anmerkung: Zu Englisch: „root“
[514] Anmerkung: Zu Englisch: „square“
[515] Anmerkung: Zu Englisch: „simple number“
[516] Anmerkung: „Wurzel“ entspricht in etwa „x“, also der einfachen Potenz der unbekannten Variable x im derzeitigen algebraischen Gebrauch.

Eine Zahl, die zu einer dieser drei Klassen gehört, kann äquivalent zu einer Zahl einer der anderen Klassen sein. Man kann zum Beispiel sagen: „Quadrate gleich[517] Wurzeln“, „Quadrate gleich Zahlen“ oder „Wurzeln gleich Zahlen“.

Für den ***Fall***, in dem „***Quadrate gleich Wurzeln***“ gesetzt werden, ist dies ein Beispiel: „Ein Quadrat ist gleich zu fünf Wurzeln desselben“. Die Wurzel des Quadrates ist fünf und das Quadrat ist 25, was gleich fünfmal seine Wurzel ist.

So kann sagt man „ein Drittel des Quadrates ist gleich vier Wurzeln“, dann ist das ganze Quadrat gleich zwölf Wurzeln. Das ist 144 und seine Wurzel ist zwölf. Oder man sagt „fünf Quadrate sind gleich zehn Wurzeln“, dann ist ein Quadrat gleich zwei Wurzeln. Die Wurzel des Quadrates ist zwei und das Quadrat ist vier.

Egal ob die Quadrate viele oder wenige sind (d.h. multipliziert oder dividiert werden), werden sie auf diese Art und Weise auf ein einziges Quadrat reduziert. Dasselbe wird mit den Wurzeln gemacht, die deren Entsprechungen sind. Das heißt, sie werden im selben Ausmaß reduziert wie die Quadrate.

Was den ***Fall*** betrifft, in dem „***Quadrate gleich einfachen Zahlen***“ gesetzt werden, so kann man zum Beispiel sagen „ein Quadrat ist gleich neun“. Dann ist das ein Quadrat und seine Wurzel ist drei. Oder „fünf Quadrate sind gleich 80“. Dann ist ein Quadrat gleich ein Fünftel von 80, was 16 ist. Dann ist das Quadrat 36 und seine Wurzel ist sechs.

Folglich werden alle Quadrate, Vielfachen und Untervielfachen davon auf ein einziges Quadrat reduziert. Wenn nur ein Teil eines Quadrates vorhanden ist, fügt man solange hinzu, bis man ein ganzes Quadrat erhält. Man geht genauso vor, wenn es sich um einfache Zahlen handelt.

Was den ***Fall*** betrifft, in dem „***Wurzeln gleich einfachen Zahlen***“ gesetzt werden, hat man zum Beispiel „eine Wurzel ist gleich drei“. Dann ist die Wurzel drei und ihr Quadrat ist neun. Oder „vier Wurzeln sind gleich 20“. Dann ist eine Wurzel gleich fünf und das Quadrat ist 25. Oder „eine halbe Wurzel ist gleich zehn“. Dann ist die ganze Wurzel 20 und das Quadrat, das davon gebildet wird, ist 400.

Ich habe herausgefunden, dass diese drei Typen, nämlich Wurzeln, Quadrate und Zahlen, miteinander kombiniert werden können. Also haben sich drei zusammengesetzte Typen

[517] Anmerkung: „gleich“ meint hier in etwa das Gleichheitszeichen „=“, mit dem die zwei Seiten einer Gleichung in Beziehung gesetzt werden.

ergeben. Diese sind „Quadrate und Wurzeln gleich Zahlen“, „Quadrate und Zahlen gleich Wurzeln“ und „Wurzeln und Zahlen gleich Quadrate“.

„Quadrate und Wurzeln gleich Zahlen“:

Zum Beispiel „ein Quadrat und zehn Wurzeln von demselben ergeben 39 Dirham“. Das heißt: was muss das Quadrat sein, wenn es um zehn von seinen eigenen Wurzeln erhöht wird, und immer noch 39 ergibt? Die Lösung ist dies: man halbiert die Anzahl der Wurzeln, was im derzeitigen Beispiel fünf ergibt. Dies multipliziert man mit sich selbst. Das Produkt ist 25. Man fügt dies hinzu zu 39. Die Summe ist 64. Nun nimmt man die Wurzel davon, was acht ist, und zieht davon die halbe Anzahl der Wurzeln ab, was fünf ist. Der Rest ist drei. Dies ist die Wurzel des Quadrats, das mangesucht hat. Das Quadrat selbst ist neun.

Die Lösung ist dieselbe, wenn zwei oder drei Quadrate oder mehr bzw. weniger angegeben werden. Man reduziert sie auf ein einziges Quadrat und im selben Ausmaß reduziert man auch die Wurzeln und einfachen Zahlen, die sich in der Gleichung befinden.

Zum Beispiel „zwei Quadrate und zehn Wurzeln sind gleich 48 Dirham“. Das heißt, was ist der Betrag von zwei Quadraten, die wenn sie aufsummiert werden und zu zehnmal der Wurzel von einem davon hinzugefügt werden, eine Summe von 48 Dirham ergeben? Man muss zunächst die zwei Quadrate auf eins reduzieren. Man weiß, dass ein Quadrat von den zwei die Hälfte von beiden ist. Dann reduziert man alles, was in der Aussage erwähnt wurde um die Hälfte und es wird dasselbe ergeben als wäre die Frage gewesen ein Quadrat und fünf Wurzeln von demselben sind gleich 24 Dirham, oder „was muss der Betrag eines Quadrats sein, wenn man fünfmal seine Wurzel hinzufügt gleich 24 Dirham?“. Nun halbiere die Anzahl der Wurzeln, die Hälfte ist zwei und ein halb. Mulitpliziere das mit sich selbst. Das Produkt ist sechs und ein halb. Füge dies zu 24 hinzu. Die Summe ist 30 Dirham und ein Viertel. Nimm die Wurzel daovon – sie ist fünf und ein halb. Subtrahiere davon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, was dann zwei und ein halb ergibt. Der Rest ist drei. Dies ist die Wurzel des Quadrats und das Quadrat selbst ist neun.

Die Vorgangsweise ist dieselbe, wenn das Beispiel lautet „ein halbes Quadrat und fünf Wurzeln sind gleich 28 Dirham“. Das heißt, was muss der Betrag eines Quadrats, von dem die Hälfte – wenn zur Entsprechung von fünf seiner Wurzeln addiert – gleich ist mit 28 Dirham? Die erste Aufgabe ist es, das Quadrat zu vervollständigen/ergänzen, sodass es ein ganzes Quadrat wird. Dies macht man, indem man es verdoppelt. Verdopple es daher und verdopple auch, was

hinzugefügt wird, und was gleich mit ihm ist. Dann hast du ein Quadrat und zehn Wurzeln gleich 56 Dirham. Nun halbiere die Wurzeln. Die Hälfte ist fünf. Multipliziere dies mit sich selbst. Das Produkt ist 25. Füge dies zu 56 hinzu. Die Summe ist 81. Nimm die Wurzel davon – sie ist neun. Subtrahiere davon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, was fünf ergibt. Der Rest ist vier. Dies ergibt die Wurzel des Quadrats, das du gesucht hast. Das Quadrat ist 16 und die Hälfte davon ist acht.

Mach auf diese Art weiter, wann immer du der Form „Quadrate und Wurzeln gleich Zahlen" begegnest. Es wird immer eine Antwort ergeben.

5.3.3. Über die Multiplikation (*bāb aḍ-ḍarb*)[518]

5.3.3.1. Inhalt und Dikussion

In diesem Kapitel wird das Vervielfachen von Wurzeln und Zahlen gezeigt, wobei verschiedene Anwendungsbeispiele detailliert vorgezeigt werden. Die Multiplikation selbst wird als ein Vorgang beschrieben, bei dem im einfachsten Fall eine Menge A mit einer anderen Menge B multipliziert wird. Dies bedeutet, dass A genau B mal vervielfacht werden muss, um das Multiplikationsergebnis der beiden zu erhalten – die Multiplikation kann also auch mittels der Addition ausgedrückt werden. Im allgemeinen Fall, wenn c eine Zahl ist, d eine Zahl ist, und x sowie y Wurzeln sind, dann ist bei der Multiplikation von (x+c) bzw. (x-c) mit (y+d) bzw. (y-d) zu beachten, dass jedes Glied mit jedem multipliziert werden muss, und die Summe darüber berechnet werden muss, um das Endergebnis zu erhalten. Zusätzlich ist das Vorzeichen zu beachten, denn es kann je nach Multiplikationsfall positiv oder negativ sein.

Al-Ḫuwarizmī präsentiret, wie auch in den Abschnitten davor, Rechenbeispiele mit Zahlen, Wurzeln und Quadraten, deren Durchführung er kommentiert. Im Folgenden wird eines dieser Beispiele, die rein aus Zahlen zusammengesetzt sind, beschrieben. Dieses lautet: „zehn und eins multipliziert mit zehn und zwei“. In der modernen Notation kommt dies (10 + 1) * (10 + 2) gleich. Laut dem Autor ist jedes Glied mit jedem Glied des Ausdrucks zu multiplizieren. Demnach rechnet er 10*10 + 1*10 + 10*1 + 1*2, summiert diese Teile auf, und erhält somit 132 als Ergebnis. Genau auf dieselbe Art und Weise, wie hier im Fall von rein positiven Zahlen, kann die Berechnung auch für negative Zahlen bzw. Vorzeichen durchgeführt werden. Es sollte jedoch auf die Vorzeichenbildung Acht gegeben werden, je nachdem welches Vorzeichen mit welchem multipliziert wird.

Abgesehen vom Rechnen, das sich auf Zahlen als Komponenten in den Ausdrücken beschränkt, kann auch mit Wurzeln bzw. wie al-Ḫuwarizmī sie nun nennt „Dingen“, und mit Quadraten gerechnet werden. Die Rechenregeln sind auf diese Komponenten ebenfalls anwendbar. Zur Veranschaulichung sei das Beispiel „zehn minus ein Ding multipliziert mit zehn“ betrachtet. In diesem Fall ist also eine Wurzel, hier „Ding“ genannt“, zu beachten. In der modernen Schreibweise lässt sich die Aussage als (10 – 1x) *10 anschreiben. Hierfür schlägt al-

[518] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.3 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).

Ḫuwarizmī vor, zunächst 10*10 zu berechnen, was 100 ergibt. Danach berechnet er (-1x)*10, was -10x, also minus zehn Dinge, ergibt. Danach summiert er die beiden Teile 100 und -10x, was zum Endergebnis 100 – 10x führt.

In weiterer Folge führt er die Berechnung für weitere Beispiele, wie etwa (10 + x)*10, (10+x) * (10+x), (10-x)*(10-x), und auch für das Rechnen mit Brüchen durch. Er erklärt die Rechenschritte auf eine Art und Weise, in der der Leser der Abfolge leicht folgen kann, und schließlich selbst zum Endergebnis kommt. Al-Ḫuwarizmī war auch bestrebt, dem Leser das Verständnis noch weiter zu erleichtern, indem er die Einheiten mit Dirham, eine damals weit verbreitete und allgemein bekannte Silbermünze, bezeichnete. Dadurch sollte der Leser sich besser das Rechnen in Geldeinheiten vorstellen können und der dargelegte Sachverhalt sollte greifbarer werden, als wenn bloß mit abstrakten Zahlen bzw. Mengen gerechnet worden wäre.

5.3.3.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

[…]

فالضرب الرابع ناقص * وهو مثل عشرة وواحد في عشرة
واثنين فالعشرة في العشرة ماية والواحد في العشرة عشرة زايدة
والاثنان في العشرة عشرون زايدة والواحد في الاثنين اثنان زايدان
فذلك كله ماية واثنان وثلثون * واذا كانت عشرة الا واحدا
في عشرة الا واحدا فالعشرة في العشرة ماية والواحد الناقص في
العشرة عشرة ناقصة والواحد الناقص ايضا في العشرة عشرة ناقصة
وذلك ثمانون والواحد الناقص في الواحد الناقص واحد زايد
فذلك احد وثمانون * واذا كانت عشرة واثنان في عشرة
الا واحدا فالعشرة في العشرة ماية والواحد الناقص في العشرة
عشرة ناقصة والاثنان الزايدان في العشرة عشرون زايدة فذلك
ماية وعشرة والاثنان الزايدان في الواحد المنقوص اثنان ناقصان
فذلك كله ماية وثمانية * وانما بينت هذا ليستدل به علي
ضرب الاشياء بعضها في بعض اذا كان معها عدد او استثنيت
من عدد او استثني منها عدد * فاذا قيل لك عشرة الا شيئا
ومعني الشيء الجذر في عشرة فاضرب عشرة في عشرة يكون
ماية والا شيئا في عشرة يكون عشرة اجذار ناقصة فتقول ماية الا
عشرة اشياء * فان قال عشرة وشيء في عشرة فاضرب
عشرة في عشرة يكون ماية وشيئا في عشرة بعشرة اشياء زايدة
يكون ماية وعشرة اشياء * وان قال عشرة وشيء في مثلها

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

قلت عشرة في عشرة مايه وعشرة في شيء عشرة اشياء وعشرة
في شيء عشرة اشياء ايضا وشيء في شيء مال زايد فيكون
ذلك ماية درهم وعشرين شيئا ومالا زايدا * وان قال
عشرة الا شيئا في عشرة الا شيئا قلت عشرة في عشرة بماية والا
شيئا في عشرة عشرة اشياء ناقصة والا شيئا في عشرة عشرة
اشياء ناقصة والا شيئا في الا شيئا بمال زايد فيكون ذلك ماية
ومالا الا عشرين شيئا * وكذلك لو انه قال لك درهم الا
سدسا في درهم الا سدسا يكون خمسة اسداس في مثلها وهو
خمسة و عشرون جزءًا من ستة وثلثين من درهم وهو ثلثان
و سدس السدس وقياسه ان تضرب درهما في درهم فيكون
درهما والا سدسا في درهم بسدس ناقص والا سدسا في درهم
بسدس ناقص فيبقي ثلثان والا سدسا في الا سدسا بسدس
السدس زايدا وذلك ثلثان وسدس السدس * فان قال
عشرة الا شيئا في عشرة وشيء قلت عشرة في عشرة بماية والا
شيئا في عشرة عشرة اشياء ناقصة وشيء في عشرة عشرة
اشياء زايدة والا شيئا في شيء مال ناقص فيكون ذلك ماية
درهم الا مالا * وان قال عشرة الا شيئا في شيء قلت
عشرة في شيء عشرة اشياء والا شيئا في شيء مال ناقص

فيكون عشرة اشياء الا مالا * وان قال عشرة وشيء في شيء

[…]

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

[…]

Wa-huwa maṯalu ʿašaratu wa-wāḥidu fī ʿašaratin wa-ʾiṯnayni. Fa-l-ʿašaratu fī l-ʿašarati miʾatun. Wa-l-wāḥidu fī l-ʿašarati ʿašaratun zāyidatun. Wa-l-ʾiṯnāni fī l-ʿašarati ʿišrūna zāyidatun. Wa-l-wāḥidu fī l-ʾiṯnayni ʾiṯnāni zāyidāni. Fa-ḏālika kulluhu miʾatun wa-ʾiṯnāni wa-ṯalaṯūna.

Wa-ʾiḏā kānat ʿašaratu ʾillā wāḥidan fī ʿašaratin ʾillā wāḥidan. Fa-l-ʿašaratu fī l-ʿašarati miʾatun. Wa-l-wāḥidu n-nāqiṣu fī l-ʿašarati ʿašaratun nāqiṣatun. Wa-l-wāḥidu n-nāqiṣu ʾayḍan fī l-ʿašarati ʿašaratun nāqiṣatun wa-ḏālika ṯamānūna. Wa-l-wāḥidu n-nāqiṣu fī l-wāḥidi n-nāqiṣi wāḥidun zāyidun. Fa-ḏālika ʾaḥadun wa-ṯamānūna.

Wa-ʾiḏā kānat ʿašaratu wa-ʾiṯnāni fī ʿašaratin ʾillā wāḥidan, fa-lʿašaratu fī l-ʿašarati miʾatun wa-l-wāḥidu n-nāqiṣ fī l-ʿašarati ʿašaratun nāqiṣatun. Wa-l-ʾiṯnāni z-zāyidāni fī l-ʿašarati ʿišrūna zāyidatun. Fa-ḏālika miʾatun wa-ʿašaratun wa-l-ʾiṯnāni z-zāyidāni fī l-wāḥidi l-manqūṣi ʾiṯnāni nāqiṣāni, fa-ḏālika kulluhu miʾatun wa-ṯamāniyatun.

Wa-ʾinnamā bayyantu hāḏa li-yastadalla bi-hi ʿalā ḍarbi l-ʾašiyāʾi baʿḍihā fī baʿḍin. ʾiḏā kāna maʿhā ʿadadun ʾaw staṯnaytu min ʿadadin ʾaw staṯnī minhā ʿadad. Fa-ʾiḏā qīlu li-ka ʿašaratun ʾillā šayʾan wa-maʿnā š-šayʾi l-ǧiḏru fī ʿašaratin. Fa-ḍarrib ʿašaratan fī ʿašarain yakūnu miʾatan wa-ʾillā šayʾan fī ʿašaratin yakūnu ʿašarata ʾaǧḏarin nāqiṣin. Fa-taqūlu miʾatun ʾillā ʿašaratan ʾašiyāʾin.

Fa-ʾin qāla ʿašaratun wa-šayʾun fī ʿašaratin fa-ḍarrib ʿašaratan fī ʿašarati yakūnu miʾatan wa-šayʾan fī ʿašaratin bi-ʿāšarati ʾašiyāʾin zāyidatin yakūnu miʾatan wa-ʿašaratan ʾašiyāʾin.

Wa-ʾin qāla ʿašaratun wa-šayʾun fī miṯlihā qulta ʿašaratun fī ʿašaratin miʾatun wa-ʿašaratun fī šayʾin ʿašaratu ʾašiyāʾin. Wa-ʿašaratun fī šayʾin ʿašaratu ʾašiyāʾin ʾayḍan wa-šayʾun fī šayʾin mālun zāyidun. Fa-yakūnu ḏālika miʾatu dirhamin wa-ʿišrīna šayʾan wa-mālan zāyidan.

Wa-ʾin qāla ʿašaratun ʾillā šayʾan fī ʿašaratin ʾillā šayʾan qulta ʿašaratun fī ʿašaratin bi-miʾatin wa-ʾillā šayʾan fī ʿašaratin ʿašaratu ʾašiyāʾin nāqiṣatin. Wa-ʾillā šayʾan fī ʿašaratin ʿašaratu ʾašiyāʾin nāqiḍatin wa-ʾillā šayʾan fī ʾillā šayʾan bi-mālin zāyidin fa-yakūnu ḏālika miʾatan wa-mālan ʾillā ʿišrīna šayʾan.

Wa-ka-ḏālika law ʾinnahu qāla li-ka dirhamun ʾillā sudsan fī dirhamin ʾillā sudsan yakūnu ḫamsatu ʾasdāsin fī miṯlihā wa-huwa ḫamsatun wa-ʿišrūna ǧuzʾan min sittatin wa-ṯalaṯīna min dirhamin. Wa-huwa ṯalaṯāni wa-sudsu s-sudsi. Wa-qiyāsuhu ʾan taḍraba dirhaman fī dirhamin fa-yakūnu dirhaman wa-ʾillā sudsan fī dirhamin bi-sudsin nāqiṣin wa-ʾillā sudsan fī dirhamin

bi-sudsin nāqiṣin. Fa-yabqā ṯalaṯāni wa-ʾillā sudsan fī ʾillā sudsan bi-sudsi s-sudsi zāyidan wa-ḏālika ṯulṯāni wa-sudsu s-sudsi.

Fa-ʾin qāla ʿašaratun ʾillā šayʾan fī ʿašaratin wa-ʾšayʾin. Qulta ʿašaratun fī ʿašaratin bi-miʾatin wa-ʾillā šayʾan fī ʿašaratin ʿašaratu ʾašiyāʾin nāqiṣatin. Wa-šayʾun fī ʿašaratin ʿašaratu ʾašiyāʾin zāyidatin wa-ʾillā šayʾan fī šayʾin mālun nāqiṣun. Fa-yakūnu ḏālika miʾata dirhamin ʾillā mālan. Wa-ʾin qāla ʿašaratun ʾillā šayʾan fī šayʾin qulta ʿašaratun fī ʿašaratin ʾašiyāʾin wa-ʾillā šayʾan fī šayʾin mālun nāqiṣun. Fa-yakūnu ʿašarata ʾašiyāʾin ʾillā mālan.

5.3.3.3. Übersetzung des gewählten Textausschnitts

[…]

Ein Beispiel ist „zehn und eins sollen multipliziert werden mit zehn und zwei“. Zehn mal zehn ist 100. Einmal zehn ist zehn positiv. Zweimal zehn ist 20 positiv, und wenn zwei die positive Zwei ist, dann ist alles zusammen 132.

Wenn aber das Beispiel ist „zehn minus eins wird multipliziert mit zehn minus eins“, dann ist zehn mal zehn 100. Die negative Eins mal zehn ist dann das negative Zehn. Die andere negative Eins mal zehn ist dann ebenso die negative Zehn. Das ergibt 80. Aber die negative Eins mal die negative Eins ist die positive Eins. Das Ergebnis ist 81.

Oder wenn das Beispiel ist: „zehn und zwei sollen multipliziert werden mit zehn weniger eins“. Dann ist zehn mal zehn 100 und die negative Eins mal zehn ist die negative Zehn. Die positive Zwei mal zehn ist die 20 positiv. Zusammen ergibt das 110. Die positive Zwei mal die negative Eins ergibt die negative Zwei. Dies ergibts das Produkt 108 [insgesamt].

Ich habe das erklärt, um eine Einführung in die Multiplikation von unbekannten Summen zu geben, wenn Zahlen zu ihnen addiert werden oder wenn Zahlen von ihnen abgezogen werden, oder wenn diese von Zahlen abgezogen werden.

Ein weiteres Beispiel: „zehn minus ein Ding[519] soll mit zehn multipliziert werden“. Du beginnst, indem du zehn mal zehn rechnest, was 100 ergibt – weniger ein Ding mal zehn ergibt zehn negative Wurzeln. Das Produkt ist daher 100 minus 10 Dinge[520].

[519] Anmerkung: „Ding“ entspricht hier „Wurzel“, bzw. in moderner Notation der Unbekannten x (in der 1. Potenz).
[520] Bzw. „Wurzeln“.

Wenn das Beispiel ist „zehn und ein Ding sollen multipliziert werden mit zehn“, dann multiplizierst du zehn mal zehn, was 100 ergibt. Das Ding multiplizierst du mit zehn und das ergibt zehn positive Dinge. Somit ist das Produkt 100 plus 10 Dinge.

Wenn das Beispiel ist „zehn und ein Ding sollen multipliziert werden mit sich selbst“, dann ist zehn mal zehn 100 und zehn mal ein Ding ergibt zehn Dinge. Zehn mal ein Ding ergibt zehn Dinge. Und ein Ding mal ein Ding ergibt ein positives Quadrat. Somit ist das Produkt [insgesamt] 100 Dirham und 20 Dinge und ein positives Quadrat.

Wenn das Beispiel ist „zehn minus ein Ding soll multipliziert werden mit zehn minus ein Ding“. Dann ist zehn mal zehn 100. Minus ein Ding multipliziert mit zehn ergibt minus zehn Dinge. Minus ein Ding mal zehn ist minus zehn Dinge. Aber minus ein Ding multipliziert mit minus ein Ding ergibt ein positives Quadrat. Das Produkt ist daher [insgesamt] 100 [als Zahl] und ein Quadrat und minus 20 Dinge.

Genauso wenn dir die folgende Frage gestellt wird: „ein Dirham minus ein Sechstel soll multipliziert werden mit einem Dirham minus ein Sechstel“. Das heißt, fünf Sechstel mal sich selbst, was in sechs Teile und 30 geteilt wird – oder zwei Drittel und ein Sechstel von einem Sechstel. Die Berechnung ist: du multiplizierst ein Dirham mit einem Dirham, wobei das Produkt ein Dirham ist. Dann rechnest du ein Dirham mal minus ein Sechstel, was ein negatives Sechstel ergibt. Dann rechnest du ein Dirham mal minus ein Sechstel, was ein negatives Sechstel ergibt. Nun ist das Ergebnis zwei Drittel von einem Dirham. Aber es muss noch minus ein Sechstel mit minus ein Sechstel multipliziert werden, was ein Sechstel von einem positiven Sechstel ist. Das Produkt ist [insgesamt] zwei Drittel und ein Sechstel von einem Sechstel.

Wenn das Beispiel ist „zehn minus ein Ding multipliziert mit zehn und einem Ding“, dann sagst du zehn mal zehn ist 100, und minus ein Ding mal zehn ist zehn negative Dinge. Und ein Ding mal zehn ergibt zehn positive Dinge. Und minus ein Ding mal ein Ding ergibt ein positives Quadrat. Daher ist das Produkt [insgesamt] 100 Dirham minus ein Quadrat.

Wenn das Beispiel ist „zehn minus ein Ding multipliziert mit einem Ding“, dann sagst du zehn mal ein Ding ist zehn Dinge, und minus ein Ding mal ein Ding ist ein negatives Quadrat. Daher ist das Produkt [insgesamt] zehn Dinge minus ein Quadrat.

5.3.4. Über die Addition und die Subtraktion (*bāb al-ǧamʿ wa-n-nuqṣān*)[521]

5.3.4.1. Inhalt und Dikussion

Al-Ḫuwarizmī erklärt in diesem Kapitel die Addition (*ǧamʿ*) und die Subtraktion (*nuqṣān*) anhand von Anwendungsbeispielen. Zunächst wählt er das Beispiel „die Wurzel von zwei Hundert minus zehn, addiert zu zwanzig minus die Wurzel von Hundert, ist zehn“, was in der modernen Schreibweise $20 - \sqrt{200} + \left(\sqrt{200} - 10\right) = 10$ entspricht. Dieses Beispiel enthält ausschließlich einfache Zahlen (*ʾaʿdād*) als Komponenten. Die weiteren Beispiele werden dann komplexer und verwenden basierend auf den Regeln beim reinen Rechnen mit Zahlen zusätzlich Dinge (*ʾašiyāʾ*) (bzw. Wurzeln (*ʾaǧḏār*)) und Quadrate (*ʾamwāl*). Eines dieser zusammengesetzten Beispiele ist: „die Wurzel aus Hundert und ein Quadrat, minus zwanzig Wurzeln, davon fünfzig abgezogen, und zehn Wurzeln minus zwei Quadrate, ergibt fünfzig Dirham und drei Quadrate minus dreißig Wurzeln“. Dieser Satz entspricht dem Ausdruck $100 + x^2 - 20x - (50 - 2x^2 + 10x) = 50 + 3x^2 - 30x$, wobei der rechte Teil der Gleichung durch Reduktion der Bestandteile *ʿadad*, *ǧiḏr*, sowie *māl* der linken Seite entsteht.

Tatsächlich wird in diesem Kapitel die Herangehensweise an das Addieren und Subtrahieren rein anhand von Rechenbeispiele in verbaler Form dargelegt. Auch der Umgang mit dem Wurzelziehen und Quadrieren von Konstanten wird geübt und anhand von Beispielen erklärt, sodass der Leser in verbaler Form mitdenken kann. Somit wird das Verständnis für die Rechenvorgänge erleichtert und auch in moderner formaler Notation können die angeführten Beispiele aus diesem Kapitel exakt dargestellt werden.

5.3.4.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

[521] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.4 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).

باب الجمع والنقصان * اعلم ان جذر مايتين الا عشرة
مجموع الي عشرين الا جذر مايتين فانه عشر سوا * وجذر
مايتين الا عشرة منقوص من عشرين الا جذر مايتين فهو ثلثون الا
جذري مايتين وجذرا مايتين هو جذر ثماني ماية * وماية
ومال الا عشرين جذرا مجموع اليه خمسون وعشرة اجذار الا
مالين فهو ماية وخمسون الا مالا والا عشرة اجذار * وماية
ومال الا عشرين جذرا منقوص منه خمسون وعشرة اجذار الا
مالين فهو خمسون درهما وثلثة اموال الا ثلثين جذرا * وانا

[…]

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

Bābu l-ǧamʿi wa-n-nuqṣāni:

ʾIʿlam ʾanna ǧiḏru miʾatayni ʾillā ʿašaratan maǧmūʿun ʾilā ʿišrīna ʾillā ǧiḏra miʾatayni fa-ʾannahu ʿašarun. Wa-ǧiḏru miʾatayni ʾillā ʿašaratan manqūṣun min ʿišrīna ʾillā ǧiḏra miʾatayni fa-huwa ṯalaṯūna ʾillā ǧiḏray miʾatayni wa-ǧiḏran miʾatayni huwa ǧiḏru ṯamānī-miʾatayni. Wa-miʾatun wa-mālun ʾillā ʿišrīna ǧiḏran maǧmūʿun ʾilayhi ḫamsūna wa-ʿašaratu ʾaǧḏārin ʾillā mālayni fa-huwa miʾatun wa-ḫamsūna ʾillā malān wa-ʾillā ʿašarata ʾaǧḏārin. Wa-miʾatun wa-mālun ʾillā ʿišrīna ǧiḏran manqūṣun minhu ḫamsūna wa-ʿašaratu ʾaǧḏārin ʾillā mālayni fa-huwa ḫamsūna dirhaman wa-ṯalaṯatu ʾamwālin ʾillā ṯalaṯīna ǧiḏran.

[…]

5.3.4.3. Übersetzung des gewählten Textausschnitts

Du solltest wissen, dass die Wurzel von 200 minus zehn, addiert zu 21 minus der Wurzel von 200, zehn ist. Die Wurzel von 200 minus 10, abgezogen von 20 minus die Wurzel von 200, ist 30 minus zweimal die Wurzel von 100. Zweimal die Wurzel von 200 ist gleich die Wurzel von 800. 100 und ein Quadrat minus 20 Wurzeln, vermindert um [die Zahl] 50 und zehn Wurzeln minus zwei Quadrate ist 50 Dirham und drei Quadrate minus 30 Wurzeln.

5.3.5. Über die Division (*bāb al-qism*)[522]

5.3.5.1. Inhalt und Dikussion

Im vorliegenden Kapitel beginnt der Autor sogleich mit Rechenbeispielen, ohne den theoretischen Ansatz vorab zu besprechen. Er führt Beispiele wie etwa das folgende an: „Wenn du die Wurzel von vier durch die Wurzel von neun dividieren willst, teilst du zuerst vier durch neun. Das Ergebnis ist vier Neuntel von der Einheit. Die Wurzel davon ist zwei dividiert durch drei, d.h. zwei Drittel der Einheit.“ In der heutigen Zeit würde dieses Problem demnach anfangs als $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$ angeschrieben werden. Laut al-Ḫuwarizmī sollte nun der gesamte Bruch bzw. die Division $\frac{4}{9}$ als Ganzes unter die Wurzel gezogen werden. Hierbei wird der eben geschaffene Bruch zuerst ausgerechnet und danach wird die Wurzel daraus gezogen. Schließlich formt der Autor auf gemischte Formen, die ganze Zahlen und eventuell Bruchkomponenten enthalten, um.

Im ersten Teil des Kapitels wird wiederum ausschließlich Bezug genommen auf Beispiele, die rein einfache Zahlen als Komponenten umfassen. Im zweiten Teil wird die Rechenmethodik dann wieder erweitert auf jegliche Komponenten, also auch auf Wurzeln/Dinge und Quadrate, uns somit unbekannte Variablen eines bestimmten Grades.

5.3.5.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

القسم * وان اردت ان تقسم جذر تسعة علي جذر
اربعة فانك تقسم تسعة علي اربعة فيكون اثنين وربعا فجذرها
هو ما يصيب الواحد وهو واحد و نصف * وان اردت ان
تقسم جذر اربعة علي جذر تسعة فانك تقسم اربعة علي
تسعة فيكون اربعة تساع واحد فجذرها ما يصيب الواحد وهو
ثلثا واحد * فان اردت ان تقسم جذري تسعة علي جذر
اربعة او غيرها من الاموال فاضعف جذر التسعة علي ما

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

[522] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.5 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).

ارايتك في عمل الاضعاف فما بلغ فاقسمه علي اربعة اوعلي
ما اردت ان تقسم عليه واعمل به كما عملت * وكذلك
ان اردت ثلثة اجذار تسعة او اكثر او نصف جذر تسعة او
اقل اوما كان فعلي هذا القياس فاعمله تصب ان شاء الله
تعالي *
وان اردت ان تضرب جذر تسعة في جذر اربعة فاضرب
تسعة في اربعة فيكون ستة وثلثين فخذ جذرها وهو ستة وهو
جذر تسعة مضروب في جذر اربعة * وكذلك لو اردت

[…]

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

Al-qismu:

Wa-ʿin ʾaradta ʾan taqsuma ǧiḏra tisʿatin ʿalā ǧiḏri ʾarbaʿatin, fa-ʾinnaka taqsumu tisʿata ʿalā ʾarbaʿatin. Fa-yakūnu ʾiṯnayni wa-rubʿan fa-ǧiḏruhā huwa yuṣību l-wāḥidu wa-huwa wāḥidun wa-niṣfun.

Wa-ʾin ʾaradta ʾan taqsuma ǧiḏra ʾarbʿatin ʿalā ǧiḏri tisʿatin. Fa-ʾinnaka taqsumu ʾarbaʿatan ʿalā tisʿatin. Fa-yakūnu ʾarbaʿata tusāʿi wāḥidin. Fa-ǧiḏruhā mā yuṣību l-wāḥidu wa-huwa ṯulṯa wāhidin.

Fa-ʾin ʾaradta ʾan taqsuma ǧiḏray tisʿatin ʿalā ǧiḏri ʾarbaʿatin ʾaw ġayrihā mina l-ʾamwāli, fa-ḍaʿaf ǧiḏra t-tisʿati ʿalā […] fa-mā balaġa fa-qismuhu ʿalā ʾarbaʿati ʾaw ʿalā mā ʾaradta ʾan taqsuma ʿalayhi. Wa-ka-ḏālika ʾan ʾaradta ṯalaṯata ʾağḏārin tisʿatin ʾaw ʾakṯara ʾaw niṣfa ǧiḏri tisʿatin ʾaw ʾaqalla ʾaw mā kāna fa-ʿalā hāḏa l-qiyāsi fa-ʿamaluhu tuṣibu ʾin šāʾa llāhu taʿālā.

Wa-ʾin ʾaradta ʾan taḍraba ǧiḏra tisʿatin fī ǧiḏri ʾarbaʿatin, fa-ḍrib tisʿatan fī ʾarbaʿatin, fa-yakūnu sittatan wa-ṯalaṯīna, fa-ḫuḏ ǧiḏrahā wa-huwa sittatun wa-huwa ǧiḏru tisʿatin maḍrūbun fī ǧiḏri ʾarbaʿatin.

5.3.5.3. Übersetzung des gewählten Textausschnitts

Die Division:

Wenn du die Wurzel aus neun durch die Wurzel aus vier teilen willst, dann teilst du neun durch vier, was als Ergebnis zwei und ein Viertel hat. Die Wurzel davon ist die Zahl, die du suchst. Sie ist einenthalb.

Wenn du die Wurzel von vier durch die Wurzel von neun dividieren willst, teilst du vier durch neun. Das ergibt vier Neuntel von der Einheit. Die Wurzel davon ist zwei dividiert durch drei, also zwei Drittel der Einheit.

Wenn du zweimal die Wurzel aus neun durch die Wurzel aus vier dividieren willst oder irgendein Quadrat, dann verdoppelst du die Wurzel von neun in der Art und Weise wie es im Kapitel über die Multiplikation gezeigt wurde. Du dividierst das Ergebnis der Multiplikation durch vier oder irgendeine andere Zahl. Du machst dies so, wie es obenstehend erklärt wurde.

Ebenso wenn du drei Wurzeln von neun oder mehr oder ein halb oder irgendein Vielfaches oder einen Teil von der Wurzel von neun teilen willst, ist immer dieselbe Regel zu beachten. Wenn du diese Regel anwendest, wird das Ergebnis richtig sein.

Wenn du die Wurzel von neun mit der Wurzel von vier multiplizieren willst, multipliziere neun mit vier. Dies ergibt sechsunddreißig. Nimm die Wurzel daraus. Diese ist sechs. Dies ist die Wurzel von neun, multipliziert mit der Wurzel von vier.

5.3.6. Anwendungsbeispiele[523]

5.3.6.1. Inhalt und Dikussion

Im betrachteten Kapitel versucht al-Ḫuwarizmī seine Berechnungen mit Hilfe von Mitteln der Geometrie zu untermauern und einen Beweis diesbezüglich zu führen. Er beginnt mit der Formulierung dem Ausdruck, der mittels Äquivalenzumformungen behandelt werden soll bzw. der schlussendlich berechnet werden sollte. Als erste dieser Formulierungen, die er mit einem geometrischen Beweis untermauern möchte, gibt er an „die Wurzel aus zweihundert minus zehn, addiert zu zwanzig, minus die Wurzel aus zweihundert“. In moderner Notation würde dies folgendermaßen lauten: $20 + \left(\sqrt{200} - 10\right) - \sqrt{200}$. Für diesen Fall findet al-Ḫuwarizmī ein geometrisches Argument, das den vorliegenden Fall anhand einer ausführlichen verbalen Ausführung ergänzt um eine Skizze zeigt. Er beendet aufgrund des erfolgreichen Beweises seiner Rechenmethoden den Fall mit den Worten „dies zeigte uns, was wir gesucht haben“ (*wa-ḏālika mā ʾaradnā ʾan nabayyana*).

Auf dieses erste Beispiel folgt ein weiteres Beispiel, für das es dem Autor gelingt ein geometrisches Argument zu finden, um die Korrektheit seiner Rechenmethoden zu zeigen. Für das dritte Beispiel – „Hundert und ein Quadrat minus zwanzig Wurzeln, addiert zu fünfzig, und zehn Wurzeln minus zwei Quadrate“ – kann er jedoch kein geometrisches Argument zur Untermauerung der Richtigkeit seiner Rechenmethoden angeben. Daher ergänzt er das Beispiel auch nicht um eine Skizze, sondern argumentiert in verbaler Form. Er merkt an, dass keine Skizze angegeben werden kann, da drei verschiedene Arten von Komponenten, d.h. Quadrate, Wurzeln und reine Zahlen im Beispiel vorkommen, und somit die Skizze nicht klar genug war.[524]

[523] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.6 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).
[524] Kaske 1998.

5.3.7. Über die sechs Probleme (*bāb al-masāʾil as-sitt*)[525]

5.3.7.1. Inhalt und Dikussion

Die „sechs Probleme“ stellen jeweils einen Fall der bereits im Vorfeld angesprochenen simplen sowie zusammengesetzten Gleichungstypen. An dieser Stelle werden sechs Anwendungsfälle, also pro Gleichungstyp ein Anwendungsfall, besprochen. Der Autor geht hierbei systematisch vor. Er legt hier zunächst das mathematische Problem, das berechnet werden soll, dar. Sodann wird die Vorgangsweise der Berechnungsschritte detailliert erklärt. Alle Äquivalenzumforungen, die notwendig sind, um zum Endergebnis zu gelangen, werden in verbaler Form angegeben. Außerdem wird nochmals angemerkt, dass jegliche Berechnung mit Hilfe der Regeln der Algebra letztendlich zu einem der genannten sechs Gleichungstypen führt.[526]

Problem 1:

„Ich teilte Zehn in zwei Teile und multiplizierte den einen von den zwei Teilen mit dem anderen. Dann multiplizierte ich den anderen von den zwei Teilen mit sich selbst. Das Ergebnis der Multiplikation mit sich selbst ist viermal so groß wie das Ergebnis der Multiplikation des einen Teils mit dem anderen Teil.“ [527]

In moderner Notation ließe sich das obige Beispiel folgendermaßen anschreiben: „$x^2 = 4x * (10 - x)$, wobei das Endergebnis davon nach Äquivalenzumformungen beginnend bei $x^2 = 40x - 4x^2$ dann $x^2 = 8x$ ist. Die einzelnen Umformungsschritte, anfangend mit der Zusammenfassung der Quadrate auf der linken Seite und der Wurzeln/Dinge auf der rechten Seite, werden explizit angegeben. Schließlich führen die Umformungen zum Gleichungstyp „Quadrate gleich Wurzeln“.[528]

Problem 2:

Im Zuge des zweiten Problems lässt sich die Ausgangssituation als $x^2 * \frac{25}{9} = 10^2$ anschreiben. Mittels Äquivalenzumformungen, die vom Autor detailliert erklärt werden, kann diese

[525] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.7 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).
[526] Kaske 1998.
[527] Siehe auch Teil „Übersetzung des ausgewählten Textausschnitts“ in diesem Kapitel.
[528] Kaske 1998.

Gleichung umgeformt werden zu $x^2 = 36$, was dem Gleichungstyp „Quadrate gleich Zahlen“ entspricht.

Problem 3:

Das dritte Problem hat die Ausgangssituation $\frac{(10-x)}{x} = 4$. Mittels Äquivalenzumformungen, die vom Autor detailliert erklärt werden, kann diese Gleichung umgeformt werden zu $5x = 10$, was dem Gleichungstyp „Wurzeln gleich Zahlen“ entspricht.

Problem 4:

Beim vierten Problem handelt es sich um einen zusammengesetzten Fall, nämlich: $\left(\frac{x}{3} + 1\right) * \left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20$. Zunächst bringt der Autor in diesem Fall die Brüche auf gleichen Nenner und multipliziert dann die gesamte Gleichung mit zwölf. Dann ergibt sich die Form $x^2 + 7x = 228$, worin der Gleichungstyp „Quadrate gleich Wurzeln und einfache Zahlen“ ersichtlich ist. Durch Wurzelziehen und Halbieren der Wurzel können die Lösungen für diese Gleichung berechnet werden.

Problem 5:

Das fünfte Problem behandelt die Anfangsgleichung $x^2 + (10 - x)^2 = 58$. Durch Zusammenfassen der Quadrate, Wurzeln und simplen Zahlen auf jeweils eine Position in der Gleichung kann die folgende Form erreicht werden: $x^2 + 21 = 10x$, die dem Gleichungstyp „Quadrate und Zahlen gleich Wurzeln“ entspricht. Abermals legt Autor die einzelnen Rechenschritte, die notwendig sind, um auf das Endergebnis zu kommen, detailliert dar. Das Endergebnis für die unbekannte Variable x ist also 7 oder 3.

Problem 6:

„Ich multipliziere ein Drittel einer Wurzel mit einem Viertel einer Wurzel und das Produkt ist gleich eine Wurzel und vierundzwanzig Dirham“ ist das sechste Problem, das al-Ḫuwarizmī behandelt. In formaler Notation entspricht dies der Ausgangsgleichung $\frac{x}{3} * \frac{x}{4} = x + 24$. Es kann auf die Gleichung $12x + 288 = x^2$ umgeformt werden. Diese stellt eine Instanz des

Gleichungstyps „Quadrate gleich Wurzeln und Zahlen“ dar. Daraus er sich die Lösung 24 für die Unbekannte x.

5.3.7.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

[…]

فالاولي من الست نحو قولك عشرة قسمتها قسمين
فضربت احد القسمين في الاخر ثم ضربت احدهما في نفسه
فصار المضروب في نفسه مثل احد القسمين في الاخر اربع
مرات * فقياسه ان تجعل احد القسمين شيئا والاخر
عشرة الا شيئا فتضرب شيئا في عشرة الا شيئا فيكون عشرة
اشياء الا مالا ثم تضربه في اربعة لقولك اربع مرات فيكون
اربعة امثال المضروب من احد القسمين والاخر فيكون ذلك
اربعين شيئا الا اربعة اموال ثم تضرب شيئا في شيء وهو
احد القسمين في نفسه فيكون مالا يعدل اربعين شيئا الا اربعة
اموال فاجبره بالاربعة الاموال وزدها علي المال فيكون اربعين
شيئا يعدل خمسة اموال فالمال الواحد يعدل ثمانية اجذار
وهو اربعة وستون جذرها ثمانية وهو احد القسمين المضروب في

نفسه والباقي من العشرة اثنان وهو القسم الاخر فقد اخرجتك
هذه المسئلة الي احد الابواب الستة وهو اموال تعدل جذورا
فاعلم ذلك *

[…]

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

[…]

Fa-l-ʾūlā mina s-sitti naḥwa qawlika ʿašaratun qasamtuhā qismayni fa-ḍarabtu ʾaḥada l-qismayni fī l-ʾāḫari ṯumma ḍarabtu ʾaḥadahumā fī nafsihi fa-ṣāra l-maḍrūbu fī nafsihi miṯla ʾaḥadi l-qismayni fī l-ʾāḫari ʾarbaʿa marrātin.

Fa-qiyāsuhu ʾan taǧaʿalu ʾaḥadu l-qismayni šayʾan wa-l-ʾāḫaru ʿašaratun ʾillā šayʾan. Fa-taḍarabu šayʾan fī ʿašarati ʾillā šayʾan fa-yakūnu ʿašarata ʾašiyāʾin ʾillā mālan. Ṯumma taḍarabu fī ʾarbaʿatin li-qawlika ʾarbaʿu marrātin fa-yakūnu ʾarbaʿata ʾamṯālin al-maḍrūbi min ʾaḥadi l-qismayni wa-l-ʾāḫari. Fa-yakūnu ḏālika ʾarbaʿīna šayʾan ʾillā ʾarbaʿata ʾamwālin. Ṯumma taḍrabu šayʾan fī šayʾin wa-huwa ʾaḥadu l-qismayni fī nafishi fa-yakūnu mālan yaʿdalu ʾarbaʿīna šayʾan ʾillā ʾarbaʿata ʾamwālin. Fa-ǧabruhu bi-l-ʾarbaʿati l-ʾamwāli wa-radduhā ʿalā l-māli fa-yakūnu ʾarbaʿīna šayʾan yaʿdalu ḫamsata ʾamwālin. Fa-l-mālu l-wāḥidu yaʿadala ṯamāniyata ʾaǧḏārin wa-huwa ʾarbaʿatu wa-sittūna.

ǧiḏruhā ṯamāniyatun wa-huwa ʾaḥadu l-qismayni l-maḍrūbi fī nafsihi wa-l-bāqī mina l-ʿašarati ʾiṯnāni wa-huwa l-qismu l-ʾāḫaru fa-qad ʾaḫraǧtuka haḏihi l-masʾilata ʾilā ʾaḥadi l-ʾabwābi s-sittati wa-huwa ʾamwālun taʿdalu ǧuḏūran fa-ʾaʿlim ḏālika.

[…]

5.3.7.3. Übersetzung des gewählten Textausschnitts

[…]

Das erste Problem:

Ich teilte Zehn in zwei Teile und multiplizierte den einen von den zwei Teilen mit dem anderen. Dann multiplizierte ich den anderen von den zwei Teilen mit sich selbst. Das Ergebnis der Multiplikation mit sich selbst ist viermal so groß wie das Ergebnis der Multiplikation des einen Teils mit dem anderen Teil.

Seine Berechnung erfolgt, indem du einen [der Teile] als ein Ding setzt und den anderern als zehn minus ein Ding. Dann multiplizierst du ein Ding mit zehn minus ein Ding und das ergibt zehn Dinge minus ein Quadrat. Dann multiplizierst du es mit vier, weil in der Aussage steht viermal so viel. Das ergibt viermal das Produkt von einem der beiden Teile multipliziert mit dem anderen. Dies ergibt vierzig Dinge minus vier Quadrate.

Danach multiplizierst du ein Ding mal ein Ding, also einen der Teile mit sich selbst. Dies ergibt ein Quadrat gleich vierzig Dinge minus vier Quadrate. Reduziere das um vier Quadrate und addiere diese zu einem Quadrat. Dann ist „vierzig Dinge gleich fünf Quadrate“ und ein Quadrat

wird gleich acht Wurzeln sein, das heißt vierundsechzig. Die Wurzel davon ist acht. Dieser ist einer von zwei Teilen – der, der mit sich selbst multipliziert wird.
Der Rest von Zehn ist somit zwei und das ist der andere Teil. Daher führt die Frage zu einem der sechs Fälle, nämlich zu jenem, in dem „Quadrate gleich Wurzeln“ sind. Merke das.
[…]

5.3.8. Verschiedene Angelegenheiten (*bāb al-masāʾil al-muḫtalifa*)[529]

5.3.8.1. Inhalt und Dikussion

Wie auch der Name des Kapitels andeutet, werden wiederum verschiedene Berechnungsfragen anhand von Anwendungsbeispielen aufgearbeitet. Abermals wird die Vorgangsweise detailliert kommentiert und dargelegt.

Die erste zu behandelnde Aussage ist folgende: „ich habe zehn in zwei Teile geteilt, und wenn man einen davon mit dem anderen multipliziert, dann ist das Resultat einundzwanzig.“ In formaler Notation entspricht diese Aussage $(10 - x) * x = 21$, was al-Ḫuwarizmī ausmultipliziert. Somit ergibt sich die Gleichung $10x - x^2 = 21$, die auf $x^2 + 21 = 10x$ umgeformt werden kann. In dieser Gleichung ist der bereits zuvor erklärte Gleichungstyp „Quadrate und Zahlen gleich Wurzeln“ erkennbar. Daher kann dieser Anwendungsfall auch dementsprechend gelöst werden, in dem die Wurzeln halbiert werden. Laut den einschlägigen Regeln über die Halbierung der Wurzeln ergibt sich $x = \left(\frac{10}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}$. Demzufolge ergeben sich die beiden möglichen Lösungen 5 und 2.

Darauf folgt ein Anwendungsfall, in dem der Gleichungstyp „Wurzeln gleich Quadrate“ nach mehreren Äquivalenzumformungen auftaucht. Die zugrunde liegende Aussage lautet „ich habe zehn in zwei Teile geteilt und multiplizierte jeden Teil mit sich selbst. Ich habe den kleineren vom größeren abgezogen und der Rest war vierzig.“ In formeller Notation ist der Fall also $(10 - x)^2 - x^2 = 40$. Mit Hilfe von Umformungen kann der erwähnte simple Gleichungstyp in der Form $20x = 60$ aufgezeigt werden. Die Lösung hierfür entsteht durch die Division von 60 durch 20, womit $x = 3$.

Die weiteren ausführlicher vorgestellten Fälle sind anfangs von relativ komplexer Form im Vergleich zu den zuvor besprochenen Beispielen. Die Ausgangsgleichung $(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$ kann nach drei Umformungsschritten auf die Form $x^2 + 28 = 11x$ gebracht werden. Darin ist der zusammengesetzte Gleichungstyp „Quadrate und Zahlen gleich Wurzeln“ ersichtlich. Dieser Gleichungstyp wird wiederum mittels Halbierung der Wurzeln gelöst, was in diesem Anwendungsfall zwei Lösungen, nämlich 7 und 4, ergibt.

[529] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.8 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).

Darüber hinaus folgert al-Ḫuwarizmī aus seinen Berechnungen, dass ein Bruch, wenn man ihn mit seinem Kehrwert multipliziert, immer die Zahl eins ergibt – also $\frac{x}{y} * \frac{y}{x} = 1$.

Den Teil bezüglich der Anwendungsbeispiele zu den sechs Gleichungstypen schließt der Autor mit einem praxisnahen Beispiel ab, in dem als Einheiten Dirham und Maße für Getreide vorkommen. Mit Hilfe dieser Sprachwahl sollte für den Leser verdeutlicht werden, wie eine praxisnahe Situation, in der die vorgestellten Berechnungen hilfreich sind, aussehen kann.

Die verbleibende Art von Beispielen dieses Kapitels beschäftigt sich mit der Lösung von Gleichungen, in denen Brüche oder Wurzeln vorkommen bzw. in denen ganze Summen- oder Differenzenterme quadriert werden. Deren Lösung ist meist langwieriger und erfordert eine größere Anzahl an Umformungsschritten als jene, die für die zuvor analysierten Beispiele erforderlich war. Beispiele dieser Art sind in etwa von dieser Form: „es gibt ein Quadrat, wovon zwei Drittel von einem Fünftel gleich ein Siebentel seiner Wurzel sind“. In formaler Schreibweise lässt sich diese Gleichung als $\frac{2}{3} * \frac{x^2}{5} = \frac{x}{7}$ anschreiben. Die Lösung der Gleichung erfolgt in fünf Schritten. Zunächst werden beide Seiten mit dem Kehrwert von zwei Drittel multipliziert und sodann mit fünf multipliziert, wodurch sich $x^2 = \frac{15}{2} * \frac{x}{7}$ ergibt. Davon ausgehend wird die Gleichung um eine Wurzel reduziert, also durch die Unbekannte x dividiert, woraus sich $x = \frac{15}{14}$ ergibt. Dank dieser Lösung für die Wurzel kann auch die Lösung für das Quadrat berechnet werden.

Als ein Beispiel für das Lösen von Gleichungen, mit dem das Kapitel abgeschlossen wird, und in dem Differenzenterme quadriert werden, dient folgendes: „subtrahiere drei Wurzeln von einem Quadrat und multipliziere dann den Rest mit sich selbst, und das Quadrat wird dadurch ergänzt.“ In formaler Notation ausgedrückt entspricht diese Aussage der Gleichung $(x^2 - 3x)^2 = x^2$. Ausgehen von dieser Gleichung wird zunächst ein Quadrat herausgenommen bzw. durch es dividiert, sodass der Ausdruck $x^2 - 3x = x$ verbleibt, was umgeformt $x^2 = 4x$ ergibt. Dieser Ausdruck entspricht nun dem bekannten Gleichungstyp „Quadrate gleich Wurzeln“, nach dessen Auflösung mit Hilfe der bereits im Vorfeld vom Autor angegebenen Rechenmethodik man $x = 4$ erhält.

5.3.8.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

[...]

وان قال عشرة قسمتها قسمين فضربت كل قسم في نفسه
وجمعتهما وزدت عليهما فصل ما بين القسمين من قبل ان
تضربهما فبلغ ذلك اربعة وخمسين درهما فان قياسه ان
تضرب عشرة الا شيئا في مثلها فتكون ماية ومالا الا عشرين
شيئا وتضرب الشيء الثاني من العشرة في مثله فيكون مالا ثم
تجمع ذلك فيكون ماية ومالين الا عشرين شيئا وقال زدت
عليهما فصل ما بينهما قبل ان تضربهما فقلت فصل ما
بينهما عشرة الا شيئين فجميع ذلك ماية وعشرة ومالان الا
اثنين وعشرين شيئا يعدل اربعة وخمسين درهما فاذا جبرت
وقابلت قلت ماية وعشرة دراهم ومالان يعدل اربعة وخمسين
درهما واثنين وعشرة شيئا فاردد المالين الي مال واحد وهو
ان تاخذ نصف ما معك فيكون خمسة وخمسين درهما
ومالا يعدل سبعة وعشرين درهما واحد عشر شيئا فالق سبعة
وعشرين من خمسة وخمسين فبقي ثمانية وعشرون درهما

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

ومال يعدل احد عشر شيئا فنصف الاشياء فتكون خمسة ونصفا فاضربها في مثلها فتكون ثلثين وربعا فانقص منها الثمانية والعشرين التي مع المال فيبقي اثنان وربع فخذ جذر ذلك وهو واحد ونصف فانقصه من نصف الاجذار يبقي اربعة وهو احد القسمين *

فان قال عشرة قسمتها قسمين فقسمت هذا علي هذا وهذا علي هذا فبلغ ذلك درهمين وسدسا * فقياس ذلك انك اذا ضربت كل قسم في نفسه ثم جمعتهما كان مثل احد القسمين اذا ضربت احدهما في الاخر ثم ضربت الذي اجتمع معك من الضرب في الذي بلغ القسم وهو اثنان وسدس فاضرب عشرة الا شيئا في مثلها فتكون ماية ومالا الا عشرين شيئا واضرب شيئا في شيء فيكون مالا فاجمع ذلك فيصير ماية ومالين الا عشرين شيئا يعدل شيئا مضروبا في عشرة الا شيئا وذلك عشرة اشياء الا مالا مضروبا في ما خرج من القسمين وهو اثنان وسدس فيكون ذلك احدا وعشرين شيئا وثلثي شيء الا مالين وسدسا يعدل ماية ومالين الا عشرين شيئا فاجبر ذلك وزد مالين وسدسا علي ماية ومالين الا عشرين شيئا وزد العشرين الشيء الناقصة من المايه والمالين علي الواحد والعشرين الشيء وثلثي

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

الشيء فيكون معك ماية واربعة اموال وسدس مال يعدل
احدا واربعين شيئا وثلثي شيء فاردد ذلك الي مال وقد
علمت ان المال الواحد من اربعة اموال وسدس هو خمسها
وخمس خمسها فخذ من جميع ما معك الخمس وخمس
الخمس فيكون معك اربعة وعشرون ومال يعدل عشرة اجذار
لان العشرة من احد واربعين شيئا وثلثي شيء خمسها وخمس
خمسها فنصف الاجذار وهي خمسة واضربها في مثلها فتكون
خمسة وعشرين فانقص منها الاربعة والعشرين التي مع
المال يبقي واحد فخذ جذره وهو واحد فانقصه من نصف
الاجذار وهي خمسة فبقي اربعة وهو احد القسمين * واعلم

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

Wa-ʾinna qāla ʿašaratun qismatuhā qismayni fa-ḍarabtu kulla qismin fī nafsihi wa-ǧamʿtuhumā wa-zadtu ʿalayhimā faṣla mā bayna l-qismayni min qabla ʾan taḍrabuhumā fa-balaġa ḏālika ʾarbaʿata wa-ẖamsīna dirhaman.

Fa-ʾinna qiyāsuhu ʾan taḍrabu ʿašaratan ʾillā šayʾan fī miṯlihā fa-takūnu miʾatan wa-mālan ʾillā ʿišrīna šayʾan. Wa-taḍrabu š-šayʾa ṯ-ṯānī mina l-ʿašarati fī miṯlihi fa-yakūnu mālan ṯumma taǧmaʿu ḏālika. Fa-yakūnu ḏālika miʾatan wa-mālayni ʾillā ʿišrīna šayʾan wa-qāla zadtu ʿalayhimā faṣla mā baynahumā qabla ʾan taḍrabuhumā fa-qulta faṣlun mā baynahumā ʿašaratan ʾillā šayʾayni. Fa-ǧamīʿu ḏālika miʾatun wa-ʿašaratun wa-mālāni ʾillā ʾiṯnayni wa-ʿišrīna šayʾan yaʿdalu ʾarbaʿata wa-ẖamsīna dirhaman. Fa-ʾiḏā ǧabarta wa-qābalta qulta miʾatun wa-ʿašaratu dirhamin wa-mālāni yaʿdalu ʾarbaʿatan wa-ẖamsīna dirhaman wa-ʾiṯnayni wa-ʿašarata šayʾan. Fa-raddid al-mālayni ʾilā mālin wāḥidin wa-huwa ʾan taʾaẖuḏa niṣfa mā maʿaka. Fa-yakūnu ẖamsatan wa-ẖamsīna dirhaman wa-mālan yaʿdalu sabʿatan wa-ʿišrīna dirhaman wa-ʾaḥada ʿašara šayʾan. Fa-laq sabʿata wa-ʿišrīna min ẖamsatin wa-ẖamsīna fa-baqiya ṯamāniyatun wa-ʿišrūna dirhaman wa-mālun yaʿdalu ʾaḥada ʿašara šayʾan. Fa-naṣṣif al-ʾašiyāʾa fa-takūnu

ḫamsatan wa-niṣfan fa-ʾiḍrabhā fī miṯlihā. Fa-takūnu ṯalaṯīna wa-rubʿan fa-ʾinqaṣ minhā aṯ-ṯamāniyata wa-l-ʿišrīna llatī maʿa l-māli fa-yabqā ʾiṯnāni wa-rubʿun fa-ḫaḏ ǧiḏra ḏālika wa-huwa wāḥidun wa-niṣfun fa-ʾinqaṣhu min niṣfi l-ʾağḏāri yabqā ʾarbaʿatun wa-huwa ʾaḥadu l-qismayni.

Fa-ʾinna qāla ʿašaratun qasamtuhā qismayni fa-qasamtu hāḏa ʿalā hāḏa wa-hāḏa ʿalā hāḏa fa-balaġa ḏālika dirhamayni wa-sudsan.

Fa-qiyāsu ḏālika ʾinnaka ʾiḏā ḍarabta kulla qismin fī nafsihi ṯumma ǧamaʿtahumā kāna miṯla ʾaḥadi l-qismayni ʾiḏā ḍarabta ʾaḥadahumā fī l-ʾāḫari ṯumma ḍarabta llaḏī ǧtamaʿa maʿaka mina ḍ-ḍarbi fī llaḏī balaʿa l-qisma wa-huwa ʾiṯnāni wa-sudsun. Fa-ʾḍrib ʿašaratan ʾillā šayʾan fī miṯlihā fa-takūnu miʾatan wa-mālan ʾillā ʿišrīna šayʾan wa-ḍrib šayʾan fī šayʾin fa-yakūnu mālan fa-ǧamaʿ ḏālika fa-yuṣīru miʾatan wa-mālayni ʾillā ʿišrīna šayʾan yaʿdalu šayʾan maḍrūban fī ʿašaratin ʾillā šayʾan wa-ḏālika ʿašaratu ʾašiyāʾin ʾillā mālan maḍrūban fī mā ḫarağa mina l-qismayni wa-huwa ʾiṯnāni wa-sudsun fa-yakūnu ḏālika ʾaḥadan wa-ʿišrīna šayʾan wa-ṯulṯay šayʾin ʾillā mālayni wa-sudsan yaʿdalu miʾatan wa-mālayni ʾillā ʿišrīna šayʾan fa-ʾiǧbar ḏālika wa-zad mālayni wa-sudsan ʿalā miʾatin wa-mālayni ʾillā ʿišrīna šayʾan wa-zad al-ʿišrīna š-šayʾi n-nāqiṣati mina l-miʾati wa-l-mālayni ʿalā l-wāḥidi wa-l-ʿišrīna š-šayʾi wa-ṯulṯay š-šayʾi. Fa-yakūnu maʿaka miʾatun wa-ʾarbaʿatu ʾamwālin wa-sudsu mālin yaʿdalu ʾaḥadan wa-ʾarbaʿīna šayʾan wa-ṯulṯay šayʾin raddid ḏālika ʾilā mālin wa-qad ʿalamtu ʾanna l-mālu l-wāḥidu min ʾarbaʿati ʾamwālin wa-sudsin huwa ḫumsuhā wa-ḫumsu ḫumsihā. Fa-ḫaḏ min ǧamīʿin mā maʿaka l-ḫumsu wa-ḫumsu l-ḫumsi. Fa-yakūnu maʿaka ʾarbaʿatun wa-ʿišrūna wa-mālun yaʿdalu ʿašarata ʾağḏārin li-ʾanna l-ʿašaratu min ʾaḥadin wa-ʾarbaʿīna šayʾan wa-ṯulṯay šayʾin ḫumsuhā wa-ḫumsu ḫumsihā. Fa-naṣṣif al-ʾağḏāra wa-hiya ḫamsatun wa-ḍribhā fī miṯlahā. Fa-takūnu ʾamsatan wa-ʿišrīna. Fa-ʾinqaṣ minhā l-ʾarbaʿata l-ʾarbaʿata wa-l-ʿišrīna llatī maʿa l-māli yabqā wāḥidun. Fa-ḫaḏ ǧiḏrahu wa-huwa wāḥidun fa-nqaṣhu min niṣfi l-ʾağḏāri wa-hiya ḫamsatun fa-baqiya ʾarbaʿatan wa-huwa ʾaḥadu l-qismayni.

5.3.8.3. Übersetzung des gewählten Textausschnitts

Wenn man sagt: „Ich habe Zehn in zwei Teile geteilt und jeden Teil mit sich selbst multipliziert. Ich habe sie zusammengelegt und zu ihnen die vor der Multiplikation vorhandene Differenz zwischen den zwei Teilen dazugezählt zum Multiplikationsergebnis. Alles zusammen ergibt 54.“

Die Rechnung ist dann folgende: du multiplizierst Zehn minus ein Ding mit sich selbst. Das ergibt 100 und ein Quadrat minus 20 Dinge. Dann multiplizierst du auch das andere Ding von den zehn mit sich selbst. Das ergibt ein Quadrat. Summiere das auf und es ergibt 100 plus zwei Quadrate minus 20 Dinge. Es wurde gesagt, dass die vor der Multiplikation bestehende Differenz zwischen den zwei Teilen dazugezählt werden soll. Daher sagst du, die Differenz zwischen ihnen ist zehn minus zwei Dinge. Das Ergebnis ist 100 und zehn und zwei Quadrate minus 22 Dinge, und diese sind gleich 54 Dirham.

Nachdem du dies reduziert und ausgeglichen hast, kannst du sagen, dass 100 und zehn Dirham und zwei Quadrate gleich 54 Dirham und 22 Dinge sind. Reduziere nun die zwei Quadrate auf ein Quadrat, indem du die Hälfte vom Gesamten nimmst. Es ist 55 Dirham und ein Quadrat gleich 27 Dirham und 11 Dinge. Ziehe 27 von 55 ab. Es bleiben 28 Dirham und ein Quadrat diese sind gleich 11 Dinge. Nun berechnest du die Hälfte der Dinge, was fünf und ein halb ergibt. Multipliziere das mit sich selbst. Es ergibt 30 und ein Viertel. Ziehe davon 28, die mit dem Quadrat verbunden sind, ab. Der Rest ist zwei und ein Viertel. Nimm die Wurzel davon. Sie ist einenthalb. Ziehe das von der Hälfte der Wurzeln ab. Es bleiben vier, was einer der zwei Teile ist.

Wenn man sagt: „Ich habe Zehn in zwei Teile geteilt. Den ersten Teil habe ich durch den zweiten geteilt, und den zweiten Teil habe ich durch den ersten Teil geteilt. Die Summe des Quotienten ist zwei Dirham und ein Sechstel.“

Dann ist die Berechnung folgende: Wenn du jeden Teil mit sich selbst multiplizierst und die Produkte zusammenzählst, dann ist ihre Summe gleich einer der Teile multipliziert mit sich selbst, also 25. Subtrahiere davon die 24, die mit dem Quadrat verbunden sind. Der Rest davon ist eins. Ziehe die Wurzel daraus – sie ist eins. Subtrahiere das von der Hälfte der Wurzeln. Dies ist fünf. Der Rest ist vier, was einem von den zwei Teilen entspricht.

5.3.9. Über die Geschäfts-/Handelstransaktionen (*bāb al-muʿāmalāt*)[530]

5.3.9.1. Inhalt und Dikussion

Geschäfts- und Handelstransaktionen (*muʿāmalāt*) umfassen laut al-Ḫuwarizmī jegliche Vorgänge des Kaufens (*širāʾ*), Verkaufens (*bīʿ*), Austausches (*ṣarf*) und Mietens bzw. Vermietens (*ʾiǧāra*). In derartigen Transaktionen sind immer vier Komponenten miteingebunden, nämlich Maßzahl (*ʿadad musaʿʿaru*), Preis (*siʿr*), Menge (*ṯaman*) und Summe (bzw. Wert) (*muṯaman*). Die Maßzahl ist umgekehrt proportional zur Summe und der Preis ist umgekehrt proportional zur Menge. Drei von den vier Komponenten in derartigen Berechnungen sind immer bekannt und eine davon ist unbekannt. Die Unbekannte ist aus dem durch das Fragewort „wieviel“ (*kam*) Angedeuteten ersichtlich.

Als allgemeine Anleitung zur Berechnung sollten in derartigen handelsbezogenen Angelegenheiten zwei Komponenten umgekehrt proportional sein. Diese multipliziert man miteinander und dividiert ihr Produkt sodann durch die dritte bekannte Komponente. Der Quotient dieser Divsion ergibt die gesuchte Unbekannte, die schließlich umgekehrt proportional zum Teiler der durchgeführten Division ist. Zur Verdeutlichung kann dies in formaler Notation angeschrieben werden. Es werden nun die Komponenten x, y, X und Y betrachtet. Diese werden in Relation miteinander gesetzt, sodass $x : y = X : Y$, was eine Verhältnisgleichung darstellt. Nun können die verschiedenen Komponenten durch die Umformung der Gleichung ausgedrückt werden, wobei die Innenglieder (hier: y und X) miteinander multipliziert werden, und auch die Außenglieder (hier: x und Y) miteinander multipliziert werden und in einer Gleichheitsrelation platziert werden. Die zugehörige Gleichung ist daher $x * Y = y * X$. Will man also die Komponente x ausgehend von der umgeformten Gleichung ausdrücken, entsteht die Formel $x = \frac{y * X}{Y}$. Will man die Komponente y ausdrücken, erhält man die Berechnungsformel $y = \frac{x * Y}{X}$. Nun also können diese allgemeinen Aufschlüsse bezüglich der Berechnung in geschäftlichen Angelegenheiten auf Beispielfällen angewandt werden. Al-Ḫuwarizmī führt die Berechnungen in diesem Kapitel anhand von drei Beispielfällen durch und erläutert die notwendigen Schritte, um zum Endergebnis zu gelangen.

[530] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.9 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).

Im ersten Anwendungsfall wird die folgende Fragestellung behandelt: „zehn für sechs; was ist der Preis für vier?“. Zehn wird als die Maßzahl gesetzt, vier als die Summe und sechs als der Preis. Das Fragewort „wieviel“ (*kam*) bezieht sich auf die unbekannte Menge, die in dieser Berechnung gesucht wird. In diesem Beispiel bedeutet dies ausgedrückt in formaler Schreibweise:

x … 10 (Maßzahl)

y … 6 (Preis)

X … unbekannt (Menge)

Y … 4 (Summe)

Diese Komponenten werden nun in einer Verhältnisgleichung platziert:

$$x : y = X : Y$$

Durch Umformung und Multiplikation der Innenglieder miteinander und weiterer Multiplikation der Außenglieder miteinander entsteht die Gleichung:

$$x * Y = y * X$$

Werden die konkreten Zahlen aus der Angabe dieses Beispiels eingesetzt, lauten die Verhältnisgleichung und die darauffolgende Umformung folgendermaßen:

$$10 : 6 = unbekannt : 4$$

$$10 * 4 = 6 * unbekannt$$

Teilt man nun die linke Seite der Gleichung durch die Zahl sechs, kann die unbekannte Komponente ermittelt werden. Das Endergebnis für die unbekannte Menge ist hier $\frac{10 * 4}{6}$.

Nach eben dieser Methodik werden auch der weiteren Anwendungsfälle veranschaulicht, wobei der Autor die Rechenschritte bis zur Lösung wieder detailliert angibt und auch die Ausgangskomponenten konkret benennt. Somit müssen zur Berechnung nur die einzelnen Komponenten ermittelt werden und in die vorgefertigte Methode zur Ermittlung des Endergebnisses für die unbekannte Variable eingesetzt werden. Der Autor schließt das Kapitel

mit der Behauptung, dass jegliche Berechnungen in geschäftsbezogenen Angelegenheiten mit Hilfe seiner Methode lösbar sind, ab.

5.3.9.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

ومثال ذلك في وجه منه اذا قيل لك عشرة بستة كم

لك باربعة فقوله عشرة هو العدد المسعر وقوله بستة هو السعر
وقوله كم لك هو العدد المجهول المثمن وقوله باربعة هو العدد
الذي هو الثمن فالعدد المسعر الذي هو العشرة مبائن للعدد
الذي هو الثمن وهو الاربعة فاضرب العشرة في الاربعة وهما
المتبائنان الظاهران فيكون اربعين فاقسمها علي العدد الاخر
الظاهر الذي هو السعر وهو ستة فيكون ستة وثلثين وهو العدد
المجهول الذي هو في قول القائل كم وهو المثمن ومبائنه الستة
الذي هو السعر *

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

والوجه الثاني قول القائل عشرة بثمانية كم ثمن اربعة
وربما قال اربعة منها كم ثمنها فالعشرة هي العدد المسعر وهو
مبائن للعدد الذي هو الثمن المجهول الذي في قوله كم
والثمانية هي العدد الذي هو السعر وهو مبائن للعدد الظاهر
الذي هو المثمن وهو اربعة فاضرب العددين الظاهرين المتبائنين
احدهما في الاخر وهو اربعة في ثمانية فيكون اثنين وثلثين
واقسمه علي العدد الاخر الظاهر الذي هو المسعر وهو عشرة
فيكون ثلثة وخمسا وهو العدد الذي هو الثمن وهو مبائن
للعشرة التي عليها قسمت وهكذا جميع معاملات الناس
وقياسها ان شاء الله تعالي *

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

Wa-miṯālu ḏālika fī waǧhi minhu ʾiḏā qīla li-ka ʿašaratun bi-sittatin kam li-ka bi-ʾarbaʿatin fa-qawluhu ʿašaratun huwa l-ʿadadu l-musaʿʿaru. Wa-qawluhu bi-sittatin huwa s-siʿr. Wa-qawluhu kam li-ka huwa l-ʿadadu l-maǧhūlu ṯ-ṯamani. Wa-qawluhu bi-ʾarbaʿatin huwa l-ʿadadu llaḏī huwa ṯ-ṯamanu. Fa-l-ʿadadu l-musaʿʿaru llaḏī huwa l-ʿašaratu mubāʾinun li-l-ʿadadi llaḏī huwa ṯ-ṯamanu wa-huwa l-ʾarbaʿatu. Fa-ḍrib al-ʿašarata fī l-ʾarbaʿati wa-humā l-mutabāʾināni ẓ-ẓāhirāni fa-yakūnu ʾarbaʿīna fa-qsamhā ʿalā l-ʿadadi l-ʾāḫari ẓ-ẓāhiri llaḏī huwa s-siʿru. Wa-huwa sittatun. Fa-yakūnu sittatan wa-ṯalaṯīna wa-huwa l-ʿadadu l-maǧhūlu llaḏī huwa fī qawli l-qāʾili kam wa-huwa l-muṯamanu wa-mubāʾinuhu s-sitta llaḏī huwa s-siʿru.

Wa-l-waǧhu ṯ-ṯānī qawlu l-qāʾili ʿašaratun bi-ṯamāniyatin kam ṯamana ʾarbaʿatin wa-rubbamā qāla ʾarbaʿatun minhā kam ṯamanahā fa-l-ʿašaratu hiya l-ʿadadu l-musaʿʿaru wa-huwa mubāʾinun li-l-ʿadadi llaḏī huwa ṯ-ṯamanu l-maǧhūlu llaḏī fī qawlihi kam. Wa-ṯ-ṯamāniyatu hiya l-ʿadadu llaḏī huwa s-siʿru wa-huwa mubāʾinun li-l-ʿadadi ẓ-ẓāhiri llaḏī huwa l-muṯamanu wa-huwa ʾarbaʿatun. Fa-ḍrib al-ʿadadayni ẓ-ẓāhirayni l-mutabāʾinayni ʾiḥdahuma fī l-ʾāḫari. Wa-huwa ʾarbaʿatun fī ṯamāniyatin. Fa-yakūnu ʾiṯnayni wa-ṯālaṯīna. Wa-qsamhā ʿalā l-ʿadadi l-ʾāḫari ẓ-

ẓāhiri llaḏī huwa l-musaʿʿaru wa-huwa ʿašaratun. Fa-yakūnu ṯalaṯatan wa-ḫumsan. Wa-huwa l-ʿadadu llaḏī huwa ṯ-ṯamanu wa-huwa mubāʾinun li-l-ʿašarati llatī ʿalayhā qasamta wa-hakaḏā ǧamīʿu muʿāmalāti n-nāsi wa-qiyāsuhā ʾin šāʾa l-lahu t-taʿālā.

5.3.9.3. Übersetzung des gewählten Textausschnitts

Zum Beispiel wird dir gesagt „zehn für sechs [Stück] und wieviel für vier?“. Dann ist zehn die Maßzahl und sechs ist der Preis. Der Ausdruck „wieviel“ gibt die unbekannte Menge an und vier ist die Zahl der Summe. Die Maßzahl, die zehn ist, ist umgekehrt proportional zu der Zahl der Summe, also vier. Daher multipliziere zehn mal vier. Das heißt, die zwei bekannten verhältnismäßigen Zahlen miteinander. Das Produkt davon ist vierzig. Teile dies durch die andere bekannte Zahl, die vom Preis stammt und also sechs ist. Der Quotient ist sechs und zwei Drittel. Er ist die unbekannte Zahl, auf die durch die Frage „wieviel“ Bezug genommen wurde. Er ist umgekehrt proportional zu der sechs, die der Preis ist.

Der zweite Fall ist wie folgt: nimm an, dass dir jemand diese Frage stellt: „zehn für acht; was muss die Summe für vier sein? Dies wird manchmal auch gesagt als „was muss der Preis für vier davon sein?“. Zehn ist die Maßzahl und ist umgekehrt proportional zu der unbekannten Zahl der Summe. Auf letztere wird durch den Ausdruck „wieviel“ Bezug genommen. Acht ist die Zahl des Preises und diese ist umgekehrt proportional zu der bekannten Zahl der Menge, die vier ist. Multipliziere nun die zwei bekannten verhältnismäßigen Zahlen miteinander, das heißt vier mal acht. Das Produkt davon ist zweiunddreißig. Teile dies durch die andere bekannte Zahl, die jene des Maßes ist, also zehn. Der Quotient ist drei und ein Fünftel. Dies ist die Zahl der Summe und ist umgekehrt proportional zu der zehn, die der Teiler war.

Auf diese Art können alle Berechnungen in geschäftlichen Angelegenheiten gelöst werden.

5.3.10. Über die Vermessung (*bāb al-misāḥa*)[531]

5.3.10.1. Inhalt und Dikussion

Im Kapitel über die Vermessung (*misāḥa*) legt al-Ḫuwarizmī seine Erkenntnisse zu geometrischen Sachverhalten dar, wobei er diese großteils in verbaler Form angibt. Teilweise fügt er Skizzen hinzu, um seine geometrischen Argumente zu zeigen bzw. zu verdeutlichen und eine Art Beweise für die Korrektheit seiner Aussagen zu liefern.

Er bespricht zunächst die Berechnungsformel für den Flächeninhalt von Vierecken mit gleichen Seitenlängen und Winklen, also von Quadraten. Den Flächeninhalt eines Quadrates mit beispielsweise Seitenlängen von zwei Längeneinheiten berechnet er als zwei mal zwei, was vier ergibt. Mittels dieser Formel gibt er auch die Berechnung des Flächeninhalts für verschiedene weitere Beispiele von Quadraten an, die alle nach exakt demselben Berechnungsschema konkret ermittel werden können. Durch das Ziehen der Quadratwurzel kann außerdem aus gegebener Information über den Flächeninhalt wieder der konkrete Wert für die Seitenlänge eines Quadrats berechnet werden.

Als weitere geomtrische Form wird die Fläche des gleichseitigen Dreiecks erwähnt. Diese wird durch die Formel $A = h * \frac{a}{2}$ berechnet, wobei A die Fläche ist, h die im rechten Winkel stehende Höhe auf die Seite a, und a die Basisseitenlänge ist.

Für den Umfang eines Kreises gibt es drei Formeln. Die erste lautet $Kreisumfang = d * 3\frac{1}{7}$, wobei die Variable d den Durchmesser des Kreises bezeichnet. Al-Ḫuwarizmī merkt in Bezug auf diese Formel an, dass diese keine sehr genauen Berechnungen ermöglicht. Daher haben die Gelehrten der Geometrie zwei weitere Formeln entwickelt:

1. $Kreisumfang = \sqrt{d * d * 10}$
2. $Kreisumfang = \frac{d*63832}{20000}$

Darüber hinaus wurden die Formeln für den Flächeninhalt von Kegeln und Pyramiden angegeben, die den heute verwendeten Formeln entsprechen, also Grundfläche mal Höhe dividiert durch drei. Al-Ḫuwarizmī führt zudem den geometrischen Beweis für seine Aussagen.

[531] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.10 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).

Es ist also ersichtlich, dass zur damaligen Zeit bereits verschiedene Methoden zur Berechnung von geometrischen Formen existierten, und diese auch bereits hinsichtlich der rechnerischen Präzision beurteilt wurden.

Laut al-Ḫuwarizmī können fünf Arten von Vierecke unterschieden werden:

- *Typ I:* Viereck mit rechten Winkeln und gleichen Seiten (i.e. Quadrat, *murabbaʿ*)
- *Typ II:* Viereck mit rechten Winkeln und ungleichen Seiten (i.e. Rechteck, *mustaṭīl*)
- *Typ III:* Rhombus mit gleichen Seiten und ungleichen Winkeln (i.e. Raute, *muʿayyan*)
- *Typ IV:* Rhomboid mit ungleicher Länge und Breite sowie ungleichen Winkeln – nur die kurzen und langen Seiten sind jeweils gleich (i.e. Parallelogramm, *mutawāzī l-ʾaḍlāʿ*)
- *Typ V:* Vierecke mit ungleichen Seiten und Winkeln (i.e. allgemeines Tetragon, *rubāʿī l-ʾaḍlāʿ*)

Für Vierecke vom Typ I (siehe untenstehende Abbildung 1) kann der Flächeninhalt gemäß der Formel Länge mal Breite berechnet werden, also $A = a * a = a^2$, wobei A der Flächeninhalt ist und a für die Seitenlänge des Quadrats steht. Dies erklärt al-Ḫuwarizmī anhand einer Skizze, in der er das Quadrat mitsamt den Seitenbenennungen einzeichnet.

Abbildung 1 – Typ I: Quadrat

Im Fall von Vierecken des Typs II (siehe untenstehende Abbildung 2) kann der Flächeninhalt ähnlich wie bei Typ I durch Multiplikation von Seitenlängen ermittelt werden. Allerdings muss hierbei beachtet werden, dass eine lange mit einer kurzen Seite multipliziert wird, also formal $A = a * b$, wobei a für die lange Seitenlänge steht und b die kurze Seitenlänge bezeichnet.

Abbildung 2 - Typ II: Rechteck

Typ III erfordert die Berechnung des Flächeninhalts der geometrischen Figur des Rhombus (siehe untenstehende Abbildung 3), dessen Seiten gleich lang sind. Für den Rhombus kann die Berechnung des Flächeninhalts mit Hilfe der senkrechten und waagrechten Diagonale erfolgen. Die Formel dafür ist $A = e * \frac{f}{2}$, wobei e unf f die Symbole für die Längen der Diagonalen sind. Die Anwendung dieser Formel setzt voraus, dass die beiden Diagonalen des Rhombus bekannt sind. Falls jedoch eine der beiden Diagonalen nicht bekannt ist, kann die Fläche des Rhombus in zwei Dreiecke eingeteilt werden, und über die Summe der Dreiecksflächen berechnet werden.

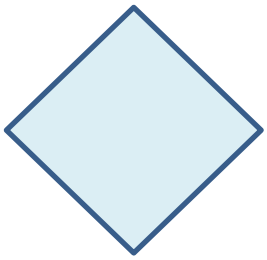


Abbildung 3 - Typ III: Rhombus (bzw. Raute)

Vierecke vom Typ IV (siehe Abbildung 4) werden Parallelogramm bzw. Rhomboid genannt und deren Flächeninhalt kann auf dieselbe Art und Weise wie bei Rauten berechnet werden. Entweder es wird die Formel unter Verwendung von Diagonalen oder Dreiecken zur Berechnung herangezogen.

Abbildung 4 - Typ IV: Rhomboid (bzw. Parallelogram)

Typ V bezieht sich auf allgemeine Tetragone bzw. Quadrangel. Für diese kann der Flächeninhalt mittels Einteilung des jeweiligen Vierecks in Dreiecke über die Summe der Dreiecksflächeninhalte berechnet werden. Das Viereck kann durch das Einzeichnen von Diagonalen in die genannten Dreiecke zur Flächeninhaltsberechnung geteilt werden.

Was die Dreiecke (*muṯallaṯ*) betrifft, so gibt es drei verschiedene Arten: das spitzwinkelige[532], das stumpfwinkelige[533] und das rechtwinkelige[534] Dreieck. Das rechtwinkelige Dreieck hat zwei Katheten (i.e. kürzere Seiten) und eine Hypothenuse (i.e. längere Seite). Aufgrund des rechten Winkels darf sein Flächeninhalt mit Hilfe der Formel $A = \frac{a * b}{2}$ berechnet werden, wobei a und b die beiden Katheten sind. Die allgemeine Formel für Dreiecke aller Arten zur Berechnung des Flächeninhalts ist $A = a * \frac{h}{2}$, also die Seitenlänge multipliziert mit der Hälfte der zugehörigen Höhe.

[532] Rebstock 1992: Im spitzwinkeligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 > c^2$.
[533] Rebstock 1992: Im stumpfwinkeligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 < c^2$.
[534] Rebstock 1992: Im rechtwinkeligen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

5.3.11. Über die Vermächtnisse/Erbschaften (*kitāb al-waṣāyā*)[535]

5.3.11.1. Inhalt und Dikussion

Im Kapitel über die Vermächtnisse bzw. Erbschaften (*kitāb al-waṣāyā*) werden acht Arten von Beispielfällen (*maṯāl*) behandelt, die Berechnungen in erbbezogenen Angelegenheiten präzisieren. Die jeweiligen Fälle sind gegliedert in die Darlegung der zu beurteilenden Situation, und darauffolgend die Berechnung (*qiyās*) der gesuchten Erbteile bzw. Unbekannten. Diese Art von Berechnungen war vor allem auch für Rechtsgelehrte und mit für rechtlichen Angelegenheiten betrautes Personal von Bedeutung, da gewisse Rechenkenntnisse zur Ausführung derartiger Berufe vorausgesetzt waren bzw. diese zunehmend in der Ausbildung miteingebunden wurden.[536] Teils sind jedoch rechtliche Kenntnisse vorausgesetzt, um den Berechnungen in der Argumentation folgen so können. In den meisten der aufgezeigten Fälle gibt al-Ḫuwarizmī außerdem Informationen über die Variation von Gegebenheiten in der Zusammenstellung des Falles und deren Auswirkungen auf die Aufteilung des zu vererbenden Vermögens. Im folgenden Abschnitt werden die jeweiligen Fälle kurz erläutert.

1. Über Haben und Schulden (*bāb min ḏālika fī l-ʿayn wa-d-dayn*)

Beispielfall:

- *„Rağulun māta wa-taraka ʾibnayni wa-ʾawṣā bi-ṯulṯi mālihi li-rağulin ʾāḫarin wa-taraka ʿašarata darāhima ʿaynan wa-ʿašarata darāhima daynan ʿalā ʾaḥadi l-ʾibnayni.“*[537]
- „Ein Mann verstirbt und hinterlässt zwei Söhne. Er vermacht ein Drittel seines Kapitals einem Fremden/einer anderen Person. Er hinterlässt Vermögen im Wert von zehn Dirham und Schulden über zehn Dirham gegenüber einem seiner Söhne.“

Laut al-Ḫuwarizmīs Löungsansatz sollten aufgrund von rechtlichen Regelungen die Schulden des einen Sohnes nicht die eingefordert werden, die Schulden wiegen jedoch seinen Erbteil auf. Sodann sollte die Summe aus den 10 Dirham Kapital und dem Wert der Immobilien berechnet werden. Nach Abzug des Drittels für den Fremden verbleiben 6 Dirham und $\frac{2}{3}$ eines „Dinges“, wobei „Ding“ hier wiederum die Unbekannte in der ersten Potenz bezeichnet. Dieses

[535] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf das gesamte Kapitel 5.3.11 (inkl. aller Unterkapitel und Textstücke).
[536] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.
[537] Rosen 1831.

Zwischenergebnis wird auf die beiden Söhne aufgeteilt. Demnach ist in formaler Notation zunächst $(10 + x) * \frac{2}{3} = 2x$, was durch Umformung schließlich zum Ergebnis x = 5 führt. Der Fremde erhält also 5 und der Sohn, der beim Vater keine Schulden hatte, erbt 5 Dirham. Zusätzlich zu dieser Lösungsvariante erwähnt al-Ḫuwarizmī noch weitere Möglichkeiten, die Situation zu lösen.

2. Über eine andere Art von Vermächtnis *bāb ʾāḫar al-waṣāyā*)

Beispielfall:

- *„Rağulun māta wa-taraka ʾummahu wa-ʾimraʾahu wa-ʾaḫāhu wa-ʾuḫtayhi li-ʾabīhi wa-ʾummihi wa-ʾawṣiyā li-rağulin bi-tusʿi mālihi.“*[538]
- „Ein Mann verstirbt und hinterlässt seine Mutter, seine Ehefrau, zwei Brüder und zwei Schwestern von denselben Eltern. Er vererbt einer anderen Person ein Neuntel seines Vermögens.“

In Bezug auf diesen Fall sei vorab hinzugefügt, dass der Ehefrau des Verstorbenen gemäß rechtlichen Regelungen der damaligen Zeit ein Achtel des Vermögens ihres verstorbenen Ehemannes zusteht. Die Mutter des Verstorbenen hat ein Anrecht auf ein Sechstel des Vermögens ihres verstorbenen Sohnes. Die Summe dieser beiden verpflichtend zustehenden Anteile ist $\frac{14}{48}$. Somit bleiben $\frac{34}{48}$ zur Aufteilung für die weiteren Erben, also hier für die zwei Brüder und die zwei Schwestern, übrig. Die genaue Aufteilung dieser Summe wird von al-Ḫuwarizmī in diesem Fall nicht gegeben. Er verweist hierzu auf die rechtliche Literatur, nach der die Teilung zu erfolgen hat.

3. Über eine andere Art von Vermächtnis (*bāb ʾāḫar al-waṣāyā*)

Beispielfall:

- *„Maṯālu ḏalika ʾimraʾatun mātat wa-tarakat zawğahā wa-ʾibnahā wa-ʾummahā ʾawṣat li-rağulin bi-ḫumsay mālihā wa-li-ʾāḫari bi-rubʿi mālihā. Fa-ʾağāza l-ʾibnu l-waṣiyatayni ğamīʿan wa-ʾağāzati l-ʾummu n-niṣfa li-humā. Wa-lam yağuzi z-zawğu šayʾan min ḏālika ʾillā ṯ-ṯulṯa.“*[539]

[538] Rosen 1831.
[539] Rosen 1831.

- *„Eine Frau verstirbt und hinterlässt ihren Ehemann, einen Sohn und ihre Mutter. Sie vererbt einer Person zwei Fünftel und einer anderen ein Viertel ihres Kapitals. Sie übergibt die zwei Erbschaften zusammen an ihren Sohn. Ihrer Mutter gibt sie die Hälfte (vom Anteil der Mutter am Rest). Ihrem Ehemann gibt sie ein Drittel."*

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die vorgestellte erbbezogene Angelegenheit in der Tat vor allem ein rechtlicher Sacherverhalt ist und weniger ein mathematischer bzw. berechnungsbezogener Sachverhalt. Falls also, wie in diesem Beispiel, eine Situation vorliegt, in der der Verstorbene einen oder mehrere seiner Erben mit einer Zahlung im Rahmen des Erbprozesses belegt hat, anderen Erben jedoch keine Zahlung vorgeschrieben wurde, ist die im Folgenden angegebene Regel zu befolgen. Falls die Zahlung bzw. die Begünstigung ein Drittel des Betrags des Erbvolumens übersteigt, dann muss der Begünstigte sich im Ausmaß des relativen Anteils, den er am Erbvolumen erhält, an den Zahlungen beteiligen. Der mit der Zahlung belegte Erbe kann andererseits Anspruch auf einen Erbteil erheben. Demnach müssen sich also die in die Erbschaft involvierten Personen an den Zahlungen beteiligen.

4. Über eine andere Art von Vermächtnis (*wa-fī waǧh ʾāḫar min al-waṣāyā*)

Beispielfall:

- *„Raǧulun māta wa-taraka ʾarbaʿata banīna wa-ʾimraʾa wa-ʾawṣiyā li-raǧulin bi-miṯli naṣīb ʾaḥadi l-banīna ʾillā miṯla naṣībi l-marʾati."*[540]
- *„Ein Mann verstirbt und hinterlässt vier Söhne und seine Ehefrau. Er vererbt an eine andere Person den Anteil von einem Sohne minus den Anteil der Ehefrau."*

Wie bereits obenstehend angemerkt, hat die Ehefrau des Verstorbenen das Anrecht auf ein Achtel des von ihrem Ehemann hinterlassenen Vermögens nach Abzug des Anteils der dritten Person. Als Unbekannte kann nun der Anteil der anderen Person mit x bezeichnet werden, wodurch das Vermögen nach Abzug des Anteils der anderen Person 1 – x ist. Der Anteil der Witwe ist somit $\frac{1}{8} * (1 - x)$. Der Anteil der Söhne ist jeweils ein Viertel des Betrags nach Abzug des Anteils des Dritten und der Witwe, was also Folgendes ergibt: $\frac{1}{4} * \frac{7}{8} * (1 - x)$. Für

[540] Rosen 1831.

den Fall, dass zwei Söhne und zwei Töchter erben würde, wäre die Aufteilung dahingehend zu ändern, dass laut geltendem Recht die Söhne Anrecht auf den doppelten Erbanteil wie die Töchter haben.

5. Über eine andere Art von Vermächtnis (*wa-fī waǧh ʾāḫar min al-waṣāyā*)

Beispielfall:

- *„ʾImraʾatun mātat wa-tarakat bnatahā wa-ʾummahā wa-zawǧahā wa-ʾawṣat li-raǧulin bi-miṯli naṣībi l-ʾummi wa-li-ʾāḫari bi-tusʿi ǧamīʿi l-māli.“*[541]
- *„Eine Frau verstirbt und hinterlässt ihre Tochter, ihre Mutter und ihren Ehemann. Sie vererbt einem Mann so viel wie den Anteil ihrer Mutter und einem anderen ein Neuntel ihres gesamten Vermögens.“*

Wenn in einem Erbfall der Ehemann der Verstorbenen und ihre Mutter erbberechtigt sind, dann steht dem Ehemann als Richtwert ein Anteil von einem Viertel am Gesamtvermögen zu und der Mutter ein Anteil von einem Sechstel des verbleibenden Vermögens. Die zur Aufteilung des zu vererbenden Vermögens notwendigen Berechnungen der Anteile der einzelnen Beteiligten werden für verschiedene Konstellationen der jeweiligen Verwandtschaftsverhältnisse und unter Berücksichtigung von Kapitel sowie Zahlungsverpflichtungen aufgeschlüsselt und anhand von Beispielen dargelegt, wobei die Anteilsvorgaben und -richtwerte aus den zugrundeliegenden rechtlichen Regelungen hervorgehen.

6. Über eine andere Art von Vermächtnis (*wa-fī waǧh āḫar min al-waṣāyā*)

Beispielfall:

- *„Raǧulun māta wa-taraka ʾarbaʿata banīna wa-ʾawṣiyā li-raǧulin bi-miṯli naṣībi ʾaḥadi bnayhi wa-li-ʾāḫari bi-rubʿin mā yabqā mina ṯ-ṯulṯi.“*[542]
- *„Ein Mann verstirbt und hinterlässt vier Söhne. Er vererbt einem Mann so viel wie den Anteil eines seiner Söhne und dem anderen ein Viertel von dem, was nach Abzug des obigen Anteils von einem Drittel verbleibt.“*

[541] Rosen 1831.
[542] Rosen 1831.

In diesem Fall kann der erste Anteil, der einem Dritten vermacht wird, mit a, und der zweite Anteil mit b bezeichnet werden. Da es vier Söhne gibt, gibt es auch vier Anteile a. Somit ergibt sich die Gleichung $4 * a = 1 - a - b$. Daraus ergibt sich nach Umformung $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - a - \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{3} - a\right) = 4 * a$, worin a zusammengefasst und ausgedrückt werden kann. Die Unbekannte a ist schließlich $\frac{11}{57}$.[543] Auch im Rahmen dieses Beispielfalles erprobt al-Ḫuwarizmī die Berechnungen und erläutert die rechtlichen Regelungen unter Variationen der Ausgangsbedingungen hinsichtlich Verwandtschaftsverhältnissen sowie Begünstigungs- und Verpflichtungsverhältnissen.

7. Über das Vermächtnis mit dem Dirham (*bāb al-waṣiyya bi-d-dirham*)

Beispielfall:

- *„Rağulun māta wa-taraka ʾarbaʿata banīna wa-ʾawṣiyā li-rağulin bi-miṯli naṣībi ʾaḥadihim wa-bi-rubʿin mā baqiya mina ṯ-ṯulṯi wa-bi-d-dirhami.“*[544]
- *„Ein Mann verstirbt und hinterlässt vier Söhne. Er vermacht jemandem einen Dirham und so viel wie den Anteil von einem Sohn und ein Viertel von dem Rest, der nach Abzug dieses Anteils von einem Drittel bleibt.“*

Setzt man in diesem Fall das Vermögen auf eins, die Vermögenssumme als x (wobei x kleiner als 1), den Anteil eines Sohnes als b und Dirham als D, dann kann laut Rosen die Gleichung $(1 - x) = 4 * D$ aufgestellt werden.[545] Dann wird durch Umformungen folgender Zwischenschritt erzielt: $x = b + \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{3} - b\right) + D$.[546] Reduziert man diese Gleichung, erhält man $\frac{11}{12} - D = \frac{19}{4} * b$ und kann daraus die Werte für den Anteil eines Sohnes und die Vermögenssumme bei gegebenem Dirhamwert berechnen.[547]

8. Über die Vollendung (*bāb at-takmila*)

Beispielfall:

[543] Rosen 1831.
[544] Rosen 1831.
[545] Rosen 1831.
[546] Rosen 1831.
[547] Rosen 1831.

- *„ʾImraʾatun mātat wa-tarakat ţamāniya banātin wa-ʾummahā wa-zawğahā ʾawṣat li-rağulin bi-takammalati ḫumsi l-māli bi-naṣībi bintin wa-li-ʾāḫarin bi-takammalati rubʿi l-māli bi-naṣībi l-ʾummi.“*[548]
- *„Eine Frau verstirbt und hinterlässt acht Töchter, ihre Mutter und ihren Ehemann. Sie vererbt einer Person so viel, wie addiert werden muss zum Anteil einer Tochter, um ihn gleich einem Fünftel des Vermögens zu machen. Einer anderen Person vererbt sie so viel, wie man addieren muss zum Anteil der Mutter, um ihn gleich einem Viertel des Vermögens zu machen.“*

Laut Frederic Rosen stehen der Mutter in diesem Fall aufgrund von rechtlichen Regelungen $\frac{2}{13}$ des Vermögens zu, wohingegen jeder der Töchter $\frac{1}{13}$ basierend auf dem verbleibenden Vermögen zusteht. In der Berechnung von al-Ḫuwarizmī wird der Anteil der Tochter (T) als $(\frac{1}{5} - b)$ bezeichnet und der Anteil der Mutter (M) als $\left(\frac{1}{4} - 2b\right)$. Diese beiden Teile werden sodann vom Gesamtvermögen, das auf eins gesetzt wurde, abgezogen. Demnach entsteht die Gleichung $1 - \left(\frac{1}{5} - b\right) - (\frac{1}{4} - 2b)$ = 13 * b, wobei 13 für die Gesamtanzahl der Teile des Erbes steht.[549] Durch Umformen und Zusammenfassen der unbekannten Variablen b kann schließlich der konkrete Wert für b ermittelt werden, der in diesem Beispielfall unter den getroffenen Annahmen über die Gegebenheiten $\frac{11}{200}$ ist.[550] Daraus kann der Anteil der Tochter als T = $\left(\frac{1}{5} - b\right) = \left(\frac{1}{5} - \frac{11}{200}\right) = \frac{29}{200}$ berechnet werden. Der Anteil der Mutter ergibt sich als M = $\left(\frac{1}{4} - 2b\right) = \left(\frac{1}{4} - 2 * \frac{11}{200}\right) = \frac{28}{200}$. [551] Somit konnte das Beispiel gelöst werden und für die Anteile der Tochter und der Mutter konnten konkrete Zahlen ermittelt werden. [552]

[548] Rosen 1831.
[549] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf den gesamten Absatz.
[550] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf den gesamten Absatz.
[551] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf den gesamten Absatz.
[552] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf den gesamten Absatz.

9. Weitere Fälle über die Berechnung von Zahlungen im Rahmen der Ehe (*ḥisāb ad-dawr*) [553]

Der so genannte Bereich ḥisāb ad-dawr bezieht sich auf die Rückführung von Bezahltem bzw. auf das „Weiterrotieren eines überschüssigen Anteils an die gesetzlich vorgesehenen Erben und Begünstigten“.[554] Die angesprochenen Fälle schließen Erbfälle in Bezug auf die Ehe in Zeiten der Krankheit (*at-tazwīǧ fī l-maraḍ)* ein, wenn also beispielsweise ein an einer schweren Krankheit leidender Mann heiratet und dann sowohl seine Frau als auch kurz darauf er verstirbt. Die zweite Gruppe der Sachverhalte in diesem Bereich betrifft die Freilassung (insbesondere von Sklaven) in Zeiten der Krankheit (*al-ʿatq fī l-maraḍ*).[555] Falls beispielsweise ein Sklave von seinem Herrn am Totenbett freigelassen wurde, und der Herr sowie nach ihm der Sklave in weiterer Folge versterben, ist den Erben des Herren ein Großteil des ursprünglichen Wertes des Sklaven zu erstatten.[556] Eine weitere Art von Fällen sind jene der Rückgabe der Aussteuer (*al-ʿatq fī d-dawr*).[557] Dazu zählt zum Beispiel, wenn ein Mann während einer Krankheit kurz vor seinem Tod jemandem ein Sklavenmädchen, mit dem er zusammengelebt hatte, schenkt, außer dem er selbst über keinen Besitz verfügt.[558] Im Falle seines Todes sind die Erben des ehemaligen Sklavenbesitzers berechtigt, die Aussteuer einzubehalten, und vom neuen Besitzer ein Bußgeld einzufordern.[559] Dieser muss das Bußgeld zwar in Kauf nehmen, darf jedoch die Sklavin bei sich und für seine Dienste behalten.[560] Der letzte der Fälle umfasst Situationen, in denen ein Mann am Krankenbett kurz vor seinem Tod jemandem Geld zur Verpflegung übergibt (*as-salam fī l-maraḍ*).[561] Der Empfänger des Geldes muss den Erben des Gebers einen Teil des Geldes zurückzahlen.

Problematisch im Hinblick auf dieses Kapitel ist die Tatsache, dass laut Rosen die Berechnungen von al-Ḫuwarizmī zwar mathematisch korrekt ausgeführt werden, doch werden diese zu strikt an die rechtlichen Vorgaben angepasst, sodass der Anschein erweckt wird, die Angaben würde rein für gewisse Fälle aufbereitet werden, um bestimmte Berechnungen zu

[553] Rosen 1831: Quelle bezieht sich auf den gesamten Abschnitt 5.3.11.9 (inkl. Unterkapitel und Textstücke).
[554] Rosen 1831; Rebstock 1992.
[555] Rosen 1831.
[556] Rosen 1831.
[557] Rosen 1831.
[558] Rosen 1831.
[559] Rosen 1831.
[560] Rosen 1831.
[561] Rosen 1831.

fördern bzw. bestimmte in die genannten Erbfälle involvierte Personen zu begünstigen.[562] Das Kapitel ist insgesamt daher stark von rechtlichem Charakter geprägt – eine Gegebenheit bzw. Auflage, an die sich die Regeln der Mathematik anzupassen hatten.[563] Begünstigt wurden in den betrachteten Fällen jedenfalls nahe Verwandte, wohingegen dem Vererbenden weniger Macht zuteil wurde, eigene Entscheidungen zu treffen.[564]

5.3.11.2. Textausschnitt und Transkription

Textausschnitt:

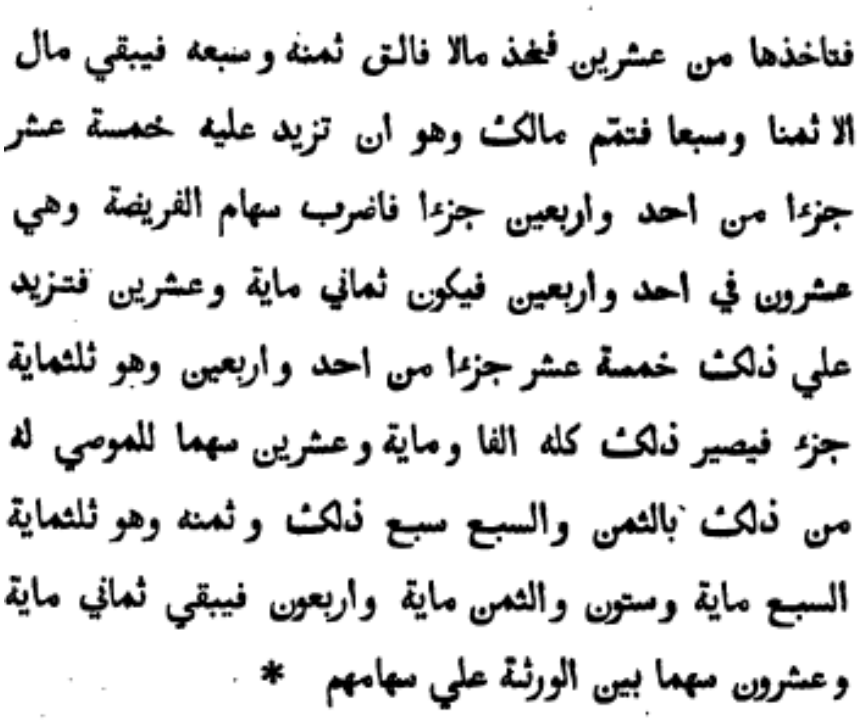
باب اخر من الوصايا *

رجل مات وترك امه وامرأته واخاه واختيه لابيه
وامه واوصي لرجل بتسع ماله فان قياس ذلك ان تقيم
فريضتهم فتخذها من ثمانية و اربعين سهما فانت تعلم ان كل
مال نزعت تسعه بقيت ثمانية اتساعه وان الذي نزعت
مثل ثمن ما ابقيت فتزيد علي الثمانية الاتساع ثمنها
وعلي الثمانية والاربعين مثل ثمنها ليتم مالك وهو ستة
فيكون ذلك اربعة وخمسين للموصي له بالتسع من ذلك
ستة وهو تسع جميع المال وما بقي فهو ثمانية واربعون
بين الورثة علي سهامهم *

فان قال امرأة هلكت وتركت زوجها وابنها وثلث
بنات واوصت لرجل بثمن مالها وسبعه فاقم سهام الفريضة

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

[562] Rosen 1831.
[563] Rosen 1831.
[564] Rosen 1831.



فتاخذها من عشرين فخذ مالا فالق ثمنه وسبعه فيبقي مال
الا ثمنا وسبعا فتتم مالك وهو ان تزيد عليه خمسة عشر
جزءا من احد واربعين جزءا فاضرب سهام الفريضة وهي
عشرون في احد واربعين فيكون ثماني ماية وعشرين فتزيد
علي ذلك خمسة عشر جزءا من احد واربعين وهو ثلثماية
جزء فيصير ذلك كله الفا وماية وعشرين سهما للموصي له
من ذلك بالثمن والسبع سبع ذلك وثمنه وهو ثلثماية
السبع ماية وستون والثمن ماية واربعون فيبقي ثماني ماية
وعشرون سهما بين الورثة علي سهامهم *

Quelle des Textauszugs: Rosen 1831.

Transkription:

Bābun ʾāḫarun mina l-waṣāyā:

Rağulun māta wa-taraka ʾummahu wa-ʾimraʾahu wa-ʾaḫāhu wa-ʾuḫtayhi li-ʾabīhi wa-ʾummihi wa-ʾawṣiyā li-rağulin bi-tusʿi mālihi.

Fa-ʾinna qiyāsu ḏālika ʾan tuqīma farīḍatahum fa-taḫḫaduhā min ṯamāniyatin wa-ʾarbaʿīna sahman. Fa-ʾanta taʿlamu ʾanna kulla mālin nazaʿta tusʿahu baqiyat ṯamāniyatu ʾatsāʿihi ʾanna llaḏī nazaʿta miṯla ṯumnin mā baqiyat fa-tazīdu ʿalā ṯamāniyati l-ʾatsāʿi ṯamanahā wa-ʿalā ṯ-ṯamāniyati wa-l-ʾarbaʿīna […] li-yatimma mālaka wa-huwa sittatun. Fa-yakūnu ḏālika ʾarbaʿatan wa-ḫamsīna li-l-muwaṣṣī li-hu bi-t-tusʿi min ḏālika sittatun wa-huwa tusʿu ğamīʿi l-māli. Wa-mā baqiya fa-huwa ṯamāniyatun wa-ʾarbaʿūna bayna l-wariṯa ʿalā sahāmihim.

Fa-ʾin qāla ʾimraʾatun halakat wa-tarakat zawğahā wa-ʾibnahā wa-ṯalāṯa banātin wa-ʾawṣat li-rağulin bi-ṯumni mālihā subʿihi. Fa-ʾaqim sahāma l-farīḍati fa-taʾaḫḫaḏuhā min ʿišrīna. Fa-ḫuḏ mālan fa-ʾaliq ṯumnahu wa-subʿahu fa-yabqā mālun ʾillā ṯumnan wa-subʿan, fa-tammim mālaka wa-huwa ʾan tazīda ʿalayhi ḫamsatu ʿašara ğuzʾan min ʾaḥadi wa-ʾarbaʿīna ğuzʾan. Fa-ʾḍrib sahāma l-farīḍati wa-hiya ʿišrūna fī ʾaḥadin wa-ʾarbaʿīna. Fa-yakūnu ṯamānī miʾatin wa-ʿišrīna

fa-tazīdu ʿalā ḏālika ḫamsata ʿašara ǧuzʾan min ʾaḥadin wa-ʾarbaʿīna wa-huwa ṯulṯu-miʾati ǧuzʾin. Fa-yuṣīru ḏālika kulluhu ʾalfan wa-miʾatan wa-ʿišrīna sahman. li-l-muwaṣṣī li-hu min ḏālika bi-ṯ-ṯumni wa-s-subʿi subʿu ḏālika wa-ṯumnuhu wa-huwa ṯulṯu-miʾatin. S-subʿu miʾatin wa-sittūna. Wa-ṯ-ṯumnu miʾatun wa-ʾarbaʿūna. Fa-yabqā ṯamānī miʾatin wa-ʿišrūna sahman bayna l-wariṯati ʿalā sahāmihim.

5.3.11.3. Übersetzung des gewählten Textausschnitts

Über eine andere Art von Hinterlassenschaft:

Ein Mann verstirbt und hinterlässt seine Mutter, seine Ehefrau und zwei Brüder sowie zwei Schwestern von denselben Eltern. Er hinterlässt einer anderen Person[565] ein Neuntel seines Vermögens.

Bemessung/Berechnung:

Du berechnest deren Anteile, indem du 48 Teile herausnimmst. Du weißt, dass wenn du ein Neuntel von einem Vermögen nimmst, acht Neuntel verbleiben. Addiere nun acht Neuntel zu einem Achtel desselben und auch zu den 48 ein Achtel, also sechs, um das Vermögen zu vervollständigen. Dies ergibt 54. Die Person, der ein Neuntel hinterlassen wird, bekommt davon sechs, was also ein Neuntel des gesamten Vermögens ist. Die restlichen 48 werden unter den Erben entsprechend ihren rechtlichen Anteilen aufgeteilt.

Wenn der Fall ist: „eine Frau verstirbt und hinterlässt ihren Ehemann, einen Sohn und drei Töchter. Und sie hinterlässt einem Fremden ein Achtel und ein Siebentel ihres Vermögens“. Dann ermittelst du die Anteile der Erben, indem du sie aus 20 herausnimmst. Nimm das Vermögen und ziehe davon ein Achtel und ein Siebentel ab. Der Rest ist das Vermögen weniger ein Achtel und ein Siebentel. Vervollständige/ergänze das Vermögen, indem du zu dem bereits Vorhandenen 15 41 Teile. Multipliziere die Teile des Vermögens, die 20 ergeben, mit 41. Das Produkt ist 820. Füge 15 41 Teile von derselben Variablen hinzu, die 300 ergeben. Die Summe ist 1120. Die Person, der das Achtel und das Siebentel vererbt wurden, erhält ein Achtel und ein Siebentel davon. Ein Siebentel davon ist 160 und ein Achtel 140. Wenn man das abzieht,

[565] Rosen 1831: „einem Fremden“ bzw. „einem Dritten“.

verbleiben 820 Teile für die Erben, die je nach deren rechtlichem Anteil diesbezüglich zugeteilt werden.

6. Conclusio

Die vorliegende Arbeit zeigte zunächst auf, welche Rahmenbedingungen zur Entwicklung der Wissenschaften und insbesondere der mathematischen Wissenschaften vorlagen. Ausgehend von kleineren, spezialisierten Gelehrtenkreisen, wie z.B. der so genannten „Schule" von Edessa oder der „Akademie" von Gondēšāpur, entwickelten sich vom 4. bis in das 7. Jh. n. Chr. umfangreichere Zentren und Bibliotheken.[566] Vor allem unter der Herrschaft der Abbasiden ab dem 8. Jh. n. Chr. erlebten Wissenschaft, Kunst und Kultur einen bedeutenden Aufschwung, der von Seiten des Herrscherhauses sowohl hinsichtlich des persönlichen Interesses als auch in Form von finanziellen Zuwendungen großzügig unterstützt wurde.[567] Das Zentrum der Forschungs-, Übersetzungs- und Lehraktivitäten verlagerte sich während der Herrschaftszeit der Abbasidendynastie nach Bagdad, wo auch al-Ḫuwarizmī, der ursprünglich aus der Region Ḫurāsān stammte, eine der führenden Positionen als Wissenschaftler am *bayt al-ḥikma* während der Regierungszeit von Kalif al-Maʾmūn erlangte.[568] Sein Werk *Kitāb al-ǧabr*, das Gegenstand der Analyse in der vorliegenden Arbeit war, verfasste er ebenfalls in dieser Zeit (um ungefähr 830 n. Chr.).[569] Als Quellen für seine eigenen Forschungsaktivitäten dienten al-Ḫuwarizmī zahlreiche Werke der griechischen, babylonischen und indischen Mathematiker, die bereits am Haus der Weisheit in die arabische Sprache übersetzt worden waren, und zu denen al-Ḫuwarizmī als Gelehrter Zugang hatte.[570]

Basierend auf den Übersetzungen der Erkenntnisse von Vorgängern diskutierten und erarbeiteten die Gelehrten des Hauses der Weisheit Ergänzungen, Korrekturen sowie Zusammenfassungen, wobei an dieser Stelle vor allem die Entwicklung der Mathematik betrachtet wird.[571] Diese für die wissenschaftliche Entwicklung bedeutende Zeitspanne befand sich zwischen den griechischen Grundlagenbeiträgen und der späteren Bearbeitung durch europäische Mathematiker der Zeit der Renaissance – ein Zeitabschnitt, der also in etwa vom 8. Jh. n. Chr. bis in das 15. Jh. n. Chr. reichte. [572]

[566] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[567] Berggren 1986; Ragep 2013; Muslim Heritage 2017.
[568] Berggren 1986; Ragep 2013; Strick 2009.
[569] Berggren 1986; Ragep 2013; Strick 2009.
[570] Berggren 1986; Ragep 2013; Strick 2009.
[571] Rebstock 1992; O'Connor & Robertson 2017.
[572] O'Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.

Im Hinblick auf die zur damaligen Zeit gemachten Beiträge ist anzumerken, dass die Bezeichnung „islamische/arabische Gelehrte“ bzw. „islamische/arabische Mathematik“ sich nicht ausschließlich auf arabischsprachige bzw. islamische Personen bezieht, da auch Anhänger anderer Religionen Beiträge während dieser Zeit im islamischen Herrschaftsbereich bzw. in arabischsprachigen Gebieten machten.[573] Daher wird dieser Begriff in dieser Arbeit in der erweiterten Form verwendet werden, die auch nicht muttersprachlich arabische Gelehrte und nicht-islamische Gelehrte, die in der genannten Region lebten und wirkten, miteinschließt.

Die Aktivitäten im Bereich der Mathematik verstärkten sich im arabisch-islamischen Reich ab dem 8. Jh. n. Chr. mit den zunehmenden Übersetzungen von griechischen und indischen Werken in die arabische Sprache.[574] Einen herausragenden Beitrag im Teilgebiet der Algebra (*ʿilm al-ğabr wa-l-muqābala*) stellten die Forschungen von al-Ḫuwarizmī dar, die weitreichende Ergänzungen zu den auf geometrischen Ergebnissen basierenden Arbeiten der griechischen Gelehrten machten.[575] Die Besonderheit seiner Arbeiten lag darin, dass nunmehr sowohl Zahlen als auch geometrische Komponenten auf einem abstrakteren Level als „algebraische Objekte“ gesehen werden konnten, was die Reichweite der Algebra in ihren Möglichkeiten des Erfassens von Problemen um einen abstrakteren Zugang erweiterte.[576]

Al-Ḫuwarizmī schuf somit eine Art Ausgleichsrechnung, die es ermöglichte, verschiedene Typen von Gleichungen des ersten und zweiten Grades durch das Wegnehmen von negativen Mengen und das Abziehen von positiven Mengen derselben Potenz auf beiden Seiten der Gleichung systematisch zu lösen, wobei er auch die zugehörigen Beweise für die standardisierten Umformungen lieferte.[577] Der Begriff *al-ğabr* bezog sich auf das Verschieben von negativen Teilen, wie z.B. der Wandlung des Ausdrucks 6x = 14-x zu 7x = 14 durch die Addition von x auf der linken Seite.[578] Ähnliche Ideen zur Ausgleichsrechnung konnten in den Grundlagen der Terminologie bei dem griechischen Mathematiker Diophantus festgestellt werden.[579] Jedoch gab es aller Wahrscheinlichkeit kein derartig umfangreiches Werk zur Algebra, wie jenes von al- Ḫuwarizmī zur damaligen Zeit, das die Grundlagen der Algebra in

[573] O’Connor & Robertson 2017; Muslim Heritage 2017.
[574] O’Connor & Robertson 2017; Kheirandish 2013.
[575] O’Connor & Robertson 2017.
[576] O’Connor & Robertson 2017.
[577] Rebstock 1992; Kheirandish 2013; Muslim Heritage 2017.
[578] Muslim Heritage 2017; Kheirandish 2013.
[579] Muslim Heritage 2017; Kheirandish 2013.

solch systematischen Ausmaß erklärte.[580] Der Begriff *al-muqābala* bezog sich auf das Ausgleichen der positiven Komponenten ohne Unbekannte, wie z.B. bei der Wandlung von $10 + x^2 = 5 + x$ zu $5 + x^2 = x$ durch Subtraktion von 5 auf der linken Seite.[581]

Der Teilbereich der Mathematik namens Algebra beschäftigt sich mit variierendem Schwerpunkt je nach der betrachteten historischen Epoche mit der Lösung von Gleichungen verschiedenen Grades und/oder mit Rechenoperationen auf mathematischen Objekten.[582] Die Anwendungsgebiete der Algebra reichen also von der Lösung einfacher Gleichungen bis hin zur Computeralgebra und Gruppentheorie. [583] Die Anfänge der Algebra reichen jedoch bis in das 2./1. Jtsd. v. Chr. zurück, als die Babylonier Approximationen zur allgemeinen Lösung von verschiedenen Gleichungstypen bis zum 2. Grad entwickelten. [584] Auch die ägyptischen und die indischen Mathematiker griffen im 1. Jtsd. v. Chr. die Thematik der quadratischen Gleichungen auf, und versuchten, die bekannten Berechnungsverfahren zu verbessern. [585] Im Vergleich zu den bis damals angestellten Forschungen waren die Aktivitäten der griechischen Gelehrten vom späten 1. Jtsd. v. Chr. bis ungefähr 300 n. Chr. eher geometrisch und abstrakter einzustufen. [586] Der Gelehrte Diophantos von Alexandria verfasste mit seiner „Arithmetica“ (datiert zwischen 1. Jh. v. Chr. und 3. Jh. n. Chr.) ein Werk über die Rechenoperationen mit Buchstaben (bzw. Unbekannten) und führte eine Art symbolische Notation in Form von Abkürzungen anstatt der ausgeschriebenen Fachwörter in Teilen seiner Ausarbeitungen ein.[587] Obwohl Diophantus seine Erkenntnisse vor der Zeit von al-Ḫuwarizmī machte, wird davon ausgegangen, dass al-Ḫuwarizmī keinen Einblick in dessen Werke hatte, bevor er *Kitāb al-ğabr* verfasste.[588]

Neben der rein verbalen Darstellung der algebraischen Beweise und Berechnungen wurden auch (wie eben anhand des Beispiels von Diophantus angesprochen) auch im europäischen Mittelalter schon Kurzschreibweisen verwendet, jedoch waren diese bei weitem nicht so abstrakt, d.h. die Symbole waren meist nicht vom Alphabet bzw. von Fachterminologien losgelöst und mit einer besonderen Bedeutung behaftet, wie die heutige standardisierte

[580] Muslim Heritage 2017.
[581] Muslim Heritage 2017.
[582] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992.
[583] Karpinski 1915; Histoire de l’algèbre 2018.
[584] Karpinski 1915; Histoire de l’algèbre 2018.
[585] Karpinski 1915; Histoire de l’algèbre 2018: Die Verbindung mit der Geometrie wurde u.a. von Euklid betont.
[586] Histoire de l’algèbre 2018; Rebstock 1992: „Enger mit der Geometrie verbunden“ bedeutet hier, dass Teile von geometrischen Elementen, wie z.B. Seiten von Dreiecken oder anderen Objekten, als Komponenten von Gleichungen angesehen wurden.
[587] Histoire de l’algèbre 2018.
[588] Karpinski 1915; Histoire de l’algèbre 2018.

algebraische Schreibweise es ist.[589] Erst ab in etwa dem 16./17. Jh. n. Chr. unter dem Einfluss von Viète begannen die Bestrebungen zur tatsächlichen, umfangreicheren Formalisierung der Notation der Algebra.[590]

Auch die Ordnung der zu lösenden Gleichungssysteme in der algebraischen Geometrie erhöhte sich, wie bereits angesprochen, ab dem 16. Jh. n. Chr., und reichte über die linearen sowie quadratischen Gleichungen, die von al-Ḫuwarizmī und seinen Zeitgenossen behandelt wurden, hinaus hin zu Gleichungen der 3. und 4. Ordnung und bald auch höherer Ordnung.[591]

Betreffend das Kitāb al-ǧabr von al-Ḫuwarizmī, so widmete er die Einleitung der Darlegung seiner Demut und Treue Gott gegenüber und seiner Dankbarkeit gegenüber den ihm vorangegangenen Gelehrten.[592] In einem der Hauptkapitel bereitete er also Algorithmen zur Lösung von sechs allgemeine Gleichungstypen auf, welche der Form[593] „$ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, und $bx + c = ax^2$“ waren, wobei die Zahl Null sowie negative Zahlenbereiche nicht als gültige Lösungen und/oder Koeffizienten zugelassen waren, und die ersten drei die einfachen Gleichungstypen repräsentieren, während letztere drei die zusammengesetzten Gleichungstypen darstellen.[594] In diesem Fall (und sowie auch bei den weiteren islamischen Gelehrten) wurden algebraische Ausarbeitungen (inklusive der Schreibweise von Zahlen) rein textuell und ohne symbolische Notation gemacht.[595] Als Untermauerung seiner Lösungen für algebraische Probleme nützte al-Ḫuwarizmī die geometrischen Erkenntnisse von Euklid und stellte dadurch eine klare Verbindung zwischen den zuvor rein geometrischen Werken und der Algebra – insbesondere der Lösung von quadratischen Gleichungen – her.[596] Der wesentliche Beitrag, allen voran von al-Ḫuwarizmī, der islamischen Gelehrten zur Algebra liegt darin, dass sie systematisch die verschiedenen Fälle von zu lösenden Gleichungssystemen zusammenfassten, Algorithmen zur Lösung anboten, und ihre Denkweisen mit geometrischen Argumenten untermauerten.[597] Im Gegensatz zu den vorherigen Ausarbeitungen der Griechen, wurde laut den islamischen Gelehrten die Lösung

[589] Kvasz 2008; Corry 2010.
[590] Kvasz 2008; Corry 2010.
[591] Histoire de l‘algèbre 2018.
[592] Rosen 1831.
[593] Anmerkung: hier aus Gründen der Leserlichkeit in der heutigen symbolischen Notation der Algebra dargestellt – bei al-Ḫuwarizmī erfolgte die Darstellung allerdings in textueller Form.
[594] Kvasz 2008; Corry 2010.
[595] Kvasz 2008; Corry 2010.
[596] Corry 2010; Oaks 2007.
[597] Corry 2010; Oaks 2007.

einer algebraischen Gleichung als Zahl angegeben, und nicht mehr als ein geometrisches Objekt (wie z.B. eine Gerade der Fläche).[598] Dies löste die Algebra von rein fallbasierten geometrischen Schlüssen, und erhob sie auf eine abstraktere Ebene, auf der die Gleichungen gelöst werden konnten.[599] Außerdem verwendeten Gelehrte wie al-Ḫuwarizmī zwar verbale Formulierungen für algebraische Zusammenhänge, jedoch hatten die Worte, die sie benützten, eine präzise Bedeutung.[600] Für die Berechnungen mittels Vervollständigung/Ergänzung und Reduktion, also die Algebra, stehen laut al-Ḫuwarizmī *drei Typen von Termen* zur Verfügung:[601]

- *Wurzel (ǧiḏr)*: ist die einfache Potenz einer unbekannten Menge, d.h. in etwa *x* in der heutigen algebraischen Schreibweise für unbekannte Variablen.[602]
- *Quadrat (māl)*: ist eine Wurzel multipliziert mit sich selbst, d.h. in etwa x^2 bzw. *x*x* in der heutigen algebraischen Schreibweise für unbekannte Variablen.[603]
- *Einfache Zahl (ʿadad)*: ist eine konkrete Zahl, die weder auf Wurzeln noch auf Quadrate verweist.[604]

Die Konstanten wurden oftmals in Dirham, der Bezeichnung für damals sich im Umlauf befindliche Münzen, ausgedrückt.[605] Eine weitere Bezeichnung für die Konstanten erfolgte in Einheiten (*āḥād*). Zwar gab es zur damaligen Zeit noch keine explizite Symbolik für die Operatoren der Addition und Subtraktion.[606] Doch die der alltäglichen Sprache angehörenden Wörter *wa*[607] sowie *ʾillā*[608] wurden in etwa für die Addition und Subtraktion im Rahmen der verbalen Formulierung von Rechenschritten verwendet.[609]

Zur Darstellung von Potenzen versuchte al-Ḫuwarizmī zunächst, die Probleme so weit wie möglich zu reduzieren, und dann auf die reduzierte Form, die obigen Definitionen von vereinfachten, „kanonischen" Gleichungstypen anzuwenden.[610] Falls die Exponenten höher als jene, die über Definitionen verfügen, waren, wurden die vorhandenen Potenzen mehrmals

[598] Kvasz 2008; Corry 2010; Oaks 2007.
[599] Corry 2010; Oaks 2007.
[600] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[601] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[602] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[603] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[604] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[605] Oask 2007.
[606] Oask 2007.
[607] Anmerkung: zu Deutsch „und".
[608] Anmerkung: zu Deutsch „ausgenommen".
[609] Oaks 2007.
[610] Oaks 2007; Kvasz 2008.

geschrieben, wie z.B. für x^5 *kaʿb māl*.[611] In einer kanonischen Form waren dann nur mehr positive Teilbeträge vorhanden, und der Koeffizient des Teils der Gleichung mit dem maximalen Exponenten sollte eins sein.[612] Mittels den drei Berechnungsmethoden *al-ǧabr, ar-radd* und *al-muqābala,* denen der Autor jeweils einen Abschnitt bzw. ein Kapitel (*bāb*) widmete, konnte eine derartige reduzierte Form erreicht werden.[613] Hierbei bezeichnet *al-ǧabr* den „Vorgang des Ausgleichs, wenn ein Term auf der einen Seite abgezogen wird, dass dieser Wert beidseitig addiert werden sollte, um die Verminderung auszugleichen".[614] *Ar-radd* (bzw. auch *ʾikmāl*) bezeichnet den Vorgang des Ergänzens/der Vervollständigung, im Zuge dessen alle von eins verschiedenen Koeffizienten der maximalen Potenz der Gleichung durch Division der gesamten Gleichung durch diesen Koeffizientenwert entfernt werden sollte.[615] *Al-muqābala* bezieht sich auf den Fall, in dem gleiche Potenzen mit jeweils verschieden großen Koeffizienten auf beiden Seiten vorkommen.[616] In diesem Fall sollte der Term mit dem kleineren Koeffizienten vom größeren abgezogen werden.[617] Diese Vorgangsweise gaben den Lösungsschritten für algebraische Gleichungen einen gewissen allgemeinen Charakter.[618] Die genannten Rechenoperationen und Regeln der Ausgleichsrechnung stellen den inhaltlich bzw. didaktisch bedeutendsten Teil des Werkes dar, da diese die Typen von Gleichungen behandeln, die in den späteren Kapiteln im Kontext von den jeweiligen Anwendungsbeispielen der Vermessung, des Erb- und Verlassenschaftsrechts und der geschäftlichen sowie handelsbezogenen Aktivitäten Werk genützt werden.[619]

Diese Berechnungsformen wurden dank zahlreicher Übersetzungen aus dem Arabischen in europäische Sprachen (zunächst in das Lateinische) in Südeuropa verbreitet, wo die algebraischen Techniken im Handel praxisbezogen eingesetzt wurden, und ebenso das Dezimalsystem und die dazugehörigen Ziffern (von 0 bis 9) genutzt wurden.[620] Vom 11. bis in das 14. Jh. n. Chr. wurden die Werke meist direkt übersetzt und Berechnungsprozeduren wurden ebenfalls in rein verbaler Form verfasst.[621] Die arabischen Begriffe, die bereits von al-

[611] Kvasz 2008.
[612] Kvsaz 2008; Oaks 2007.
[613] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[614] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[615] Kvasz 2008.
[616] Kvasz 2008; Oaks 2007.
[617] Kvasz 2008.
[618] Kvasz 2008.
[619] Kvasz 2008; Oaks 2007; Rosen 1831.
[620] Corry 2010; Oaks 2007.
[621] Corry 2010; Oaks 2007.

Ḫuwarizmī verwendet wurden, wurden in das Lateinische übersetzt und in der bestehenden Bedeutung verwendet.[622] Al-Ḫuwarizmī war somit Namensgeber und insgesamt Wegbereiter für die Entwicklung der Algebra, Unterstützer des Dezimalzahlensystems sowie der indischen Ziffern und der didaktischen Aufbereitung von mathematischen Inhalten dank seiner systematischen Art und Weise, dieses Gebiet der Mathematik zu bearbeiten und zu vermitteln.[623]

[622] Rosen 1831.
[623] Rosen 1831.

Glossar

Fachwörter zum gewählten Thema:

Arabisch	Transkription (DMG)	Deutsch
إجارة	*iğāra*	Vermietung
أصل	*ʾaṣl*	männliche und weibliche direkte Nachkommen[624]
أعمال	*ʾaʿmāl*	Operationen, Vorgänge
اقطاعات مشتركة	*iqṭāʿāt muštarika*	Kollektive Lehen[625]
باب في حساب الأرباح والخسرانات	*bāb fī ḥisāb al-ʾarbāḥ wa-l-ḫusrānāt*	Gewinn- und Verlustrechnung (GuV)[626]
بسبب	*bi-sabab*	durch vertraglich geregeltes Verhältnis
بنسب	*bi-nasab*	durch genealogische Verwandtschaft[627]
تجنيس	*tağnīs*	Umformung
تدبير	*tadbīr*	Sklavenfreilassung nach Tod des Erblassers[628]
تركة	*tarika*	Nachlass[629]
تصريف	*taṣrīf*	Umrechnung
تضعيف; ضرب	*taḍʿīf; ḍarb*	Multiplikation[630]
تفريق	*tafrīq*	Teilungsoperation (Subtraktion und Division)[631]
جذر	*ğiḏr*	Wurzel (sowohl im wörtlichen als auch im mathematischen Sinne)
جمع	*ğamʿ*	Addition
حساب	*ḥisāb*	Durchführung von Rechenoperationen (i.e. Addition, Subtraktion,

[624] Rebstock 1992.
[625] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.
[626] Rebstock 1992.
[627] Rebstock 1992.
[628] Rebstock 1992.
[629] Rebstock 1992.
[630] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.
[631] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.

		Multiplikation und Division sowie die Umrechnung)
حساب بالتخت والتراب	*ḥisāb bi-t-taḫt wa-t-turāb*	Rechnen mittels Schreibbrett und Sand
حساب بالقلم	*ḥisāb bi-l-qalam*	Rechnen mit dem Griffel/Stock
حساب الكسور	*ḥisāb al-kusūr*	Bruchrechnen
حساب المثلّثات	*ḥisāb al-muṯallaṯāt*	Trigonometrie[632]
حساب المعاملات	*ḥisāb al-muʿāmalāt*	Rechnen für Geschäftszwecke bzw. Rechnen mit Proportionen
حساب التخت; حساب الهند	*ḥisāb at-taḫt; ḥisāb al-hind*	Rechnen mit indischen Ziffern
حساب هوائي	*ḥisāb hawāʾī*	Kopfrechnen
حساب اليد	*ḥisāb al-yad*	Rechnen mit der Hand
دوريات	*dawrīyāt*	rotierende Legate[633]
رأس المال	*raʾs al-māl*	Kapital
رياضة الهندسة	*riyāḍat al-handasa*	Geometrie
سلم	*salam*	Terminerwerb
سيف	*sayf*	häufiger Name für die Unbekannte in Gleichungen bei der Berechnung von Erbteilen[634]
شركة	*širka*	Gewerbliche Gesellschaft; Teilhaberschaft im geschäftlichen Sinne
شيء	*šayʾ*	Bezeichnung für eine Unbekannte (z.B. „x“, „y“) beim Rechnen
صدق	*ṣadaqa*	Almosen; Spenden
صروف	*ṣurūf*	Geschäfte des Geldwechselns
صرّاف ;صيرف ;صيرفي	*ṣarrāf; ṣayraf; ṣayrafī*	Geldwechsler
صناعة	*ṣināʿa*	Fertigkeit; Gewerbe; Handwerk; Industrie
عتق	*ʿitq*	Freilassung

[632] Anmerkung: Die Trigonometrie ist ein Teilgebiet der Geometrie.
[633] Rebstock 1992.
[634] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.

علم	*ʿilm*	Wissenschaft; Theorie
علم الجبر والمقابلة	*ʿilm al-ǧabr wa-l-muqābala*	Algebra
علم الحساب	*ʿilm al-ḥisāb*	Arithmetik
علم الدور والوصاية	*ʿilm ad-dawr wa-l-waṣāya*	Wissenschaft vom rotierenden Vermächtnis[635] und der Testamentverfügung
علم الفرائض	*ʿilm al-farāʾiḍ*	Erbteilungsrechnung[636]
علم العدد	*ʿilm al-ʿadad*	Zahlentheorie bzw. Wissenschaft von den Zahlen
علم الفلك	*ʿilm al-falak*	Astronomie
علم المساحة	*ʿilm al-misāḥa*	Vermessungswissenschaft
علم المناظر	*ʿilm al-manāẓir*	Optik
عملي	*ʿamalī*	praktisch, angewandt
عول	*ʿawl*	verhältnismäißge Aufteilung nach dem Erbrecht
الفرائض	*al-farāʾiḍ*	erbrechtliche Regeln
فرع	*farʿ*	direkte Vorfahren[637]
فروع العلم	*furūʿ al-ʿilm*	Wissenschaftszweige
قراض	*qirāḍ*	Darlehensvergabe
لواحق	*lawāḥiq*	generelle (auch weiter entfernte) Verwandte (i.e. Vorfahren und Nachkommen insgesamt)
مختصر	*muḫtaṣar*	zusammenfassend; kurz; knapp
مذروع	*maḏrūʿ*	messbar
مرابحة	*murābaḥa*	Weiterverkauf mit Gewinn
مساقات	*musāqāt*	Mietverträge mit anteilmäßiger Erntebeteiligung
مسائل فقهية	*masāʾil fiqhiyya*	Rechtsfragen

[635] Anmerkung: "Rotierendes Vermächtnis" bezieht sich insbesondere auf den erbrechtlichen Fall, dass der Besitzer eines Vermächtnisses stirbt, und der Erbe daraufhin das Erbe annimmt, aber noch vor Übertragung des Erbgutes verstirbt, wonach dessen Erbe begünstigt wird. (Quelle: Rebstock 1992)
[636] Rebstock 1992; Kheirandish 2013.
[637] Rebstock 1992.

مقام	*maqām*	Nenner
مقدّر بالزمن	*muqaddar bi-z-zaman*	zeitlich erfassbar
مقدّر بالعدد فقط	*muqaddar bi-l-ʿadad faqaṭ*	zählbar
مواريث	*mawārīṯ*	Erbschaften
موزون	*mawzūn*	wiegbar
ميراث - مواريث	*mīrāṯ (Pl. mawārīṯ)*	Erbschaft
نسبة	*nisba*	Verhältnis (z.B. für Geldeinheiten und Maßeinheiten)
هبة	*hiba*	Schenkung
أصول	*uṣūl*	Grundlagen
وصية	*waṣiyya*	Vermächtnis

Vokabular zur Literaturquelle des Übersetzungsteils (Rosen 1831)[638]:

Arabisch	Transkription (DMG)	Deutsch
Anmerkungen („Notes“)		
جبر ب	*ğabara (bi-)*	Allgemein: einen gebrochenen Knochen heilen bzw. etwas einrenken; Mathematisch: ergänzen, vervollständigen, negative Mengen auf der anderen Gleichungsseite hinzuzählen (wobei das Vorzeichen umzukehren ist)
جبر المال بالأربعة وزادها على العشرين	*ğabara l-māla bi-l-ʾarbaʿati wa-zādahā ʿalā l-ʿišrīna*	Rechenvorgang: $x^2 - 4 = 20$ → $x^2 = 24$ bzw. „er vervollständigte das Quadrat, das um vier verringert war, und addierte es[639] zu zwanzig“
قابل ب	*qābala (bi)*	Allgemein: gegenüberstellen, konfrontieren, miteinander vergleichen Mathematisch: positive und negative Terme der gleichen Potenz vergleichen und reduzieren
ردّ	*radd*	Mathematisch: Reduktion einer Gleichung mittels Division
أهل الهندسة	*ʾahl al-handasa*	Gelehrte der Geometrie (gemäß Kontextbezug laut Rosen)[640]
Vorwort		
ورث	*wariṯa*	er vererbte
مستخرج	*mustaẖraǧ*	bekannt
مستغلق	*mustaġliq*	schwierig; abstrus

[638] Anmerkung: Vokabular in chronologischer Reihenfolge durch die Kapitel angeordnet. / Quelle des gesamten Vokabulars zur Literaturquelle des Übersetzungsteils: Rosen 1831.
[639] Anmerkung: „es“ entspricht hier der Zahl vier.
[640] Rosen 1831.

مسلك	*maslak*	Weg; Methode
مفتخر	*muftaḫar*	überheblich
شجع	*šağğaʿa*	ermutigen
رغبة	*raġba*	Ambition, Eifer
وصايا	*waṣāyā*	Vermächtnisse, Hinterlassenschaften
أحكام	*ʾaḥkām*	gerichtliche Entscheidung; Urteil
بذل	*baḏala*	großzügig etw. geben
أنبياء	*ʾanbiyāʾ*	Propheten
مرسل	*mursal*	Gesandter
Einleitung		
ركّب من	*rakkaba min*	sich zusammensetzen aus
ضروب	*ḍurūb*	Kategorien; Typen
ملفوظ	*malfūẓ*	ausgeströmt; ausgestrahlt
قولك	*qawluka*	deine Aussage
عدل	*ʿadala*	ausgleichen, ausbalancieren, gleich sein
مقترب	*muqtarib*	zusammengesetzt
نصّف	*naṣṣafa*	halbieren
يبقى	*yabqā*	es bleibt
تضربها في مثلها	*taḍrabuhā fī miṯlihā*	es mit sich selbst multiplizieren
مسئلة	*masʾila*	Ausdruck
زاد على	*zāda ʿalā*	hinzufügen; addieren zu
Über die Multiplikation		
العشرة في العشرة	*al-ʿašaratu fī l-ʿašarati*	10 * 10
عشرة زايدة	*ʿašaratun zāyidatun*	positive Zehn (bzw. +10)
واحد ناقص	*wāḥidun nāqiṣun*	negative Eins (bzw. -1)

بيّن	*bayyana*	aufklären, erklären
يستدلّ ب	*yastadallu bi*	zu etw. dienen
إلّا شيئا	*ʾillā šayʾan*	weniger ein Ding
سُدس	*suds*	Sechstel
Über die Addition und die Subtraktion		
باب الجمع والنقصان	*bāb al-ǧamʿi wa-n-nuqṣān*	Kapitel über die Addition und die Division
مجموع إلى	*maǧmūʿ ʾilā*	summiert mit; dazuaddiert zu
منقوص من عشرين	*manqūṣ min ʿišrīna*	subtrahiert von 20
Über die Division		
قسم	*qism*	Division; Teilen
يقسم تسعة على جمسة	*yaqsimu tisʿa ʿalā ḫamsa*	9 durch 5 dividieren/teilen
Über die Geschäfts-/Handeltransaktionen		
مثال	*miṯāl*	Beispiel, Modell
عدد مسعر	*ʿadad musaʿʿar*	Maßzahl
مجهول	*maǧhūl*	unbekannt
ثمن	*ṯaman*	Wert, Summe
مبائن للعدد	*mubāʾin li-l-ʿadad*	umgekehrt proportional[641]
متبائن	*mutabāʾin*	proportional[642]
ظاهر	*ẓāhir*	bekannt
قسم على	*qassama ʿalā*	teilen durch
جميع معاملات الناس	*ǧamīʿu muʿāmalāti n-nāsi*	alle Rechenoperationen der Leute
Über die Vermessung		

[641] Rosen 1831.
[642] Rosen 1831.

مربع	*murabbaʿ*	Quadrat
مستطيل	*mustaṭīl*	Rechteck
معين	*muʿayyan*	Rhombus, Raute
متوازي الأضلاع	*mutawāzī l-ʾaḍlāʿ*	Rhomboid, Parallelogramm
رباعي الأضلاع	*rubāʿī l-ʾaḍlāʿ*	Viereck (allgemein)
مثلث	*muṯallaṯ*	Dreieck
Über die Verlassenschaften/Erbschaften		
مُوَصّى	*muwaṣṣā*	der, dem etwas hinterlassen wird
فريضة ـ فرائض	*farīḍa - farāʾiḍ*	Pflicht; Anteil; Erbteil
بين الورثة على سهامهم	*bayna l-wariṯati ʿalā sahāmihim*	zwischen/unter den Erben ihrer Anteile
هلك	*halaka*	umkommen, sterben
ترك	*taraka*	hinterlassen; verlassen; lassen
سبع	*subʿ*	Siebentel
ثمن	*ṯumn*	Achtel
تمّم	*tammama*	vervollständigen
قسّام	*qassām*	Erbteiler
جاز	*ǧāza*	übergeben, überlassen
نصيب	*naṣīb*	Anteil, Quote
قسم التركة	*qism at-tarika*	Teilung des Nachlasses

Bibliographie

1. Afridi, Muhammad Adil. 2013. *Contribution of Muslim Scientists to the World: An Overview of Some Selected Fields.* International Islamic University Malaysia. < http://irep.iium.edu.my/34832/1/Contribution_of_Muslim_Scientists.pdf>; Zugriff am 20.09.2017.
2. Agnoletti, Silvia. 2016. *The Impact of Arabic Sciences in Europe and Asia.* Sismel: Florenz.
3. Al Jazeera. 2015. Al-Khwarizmi: The Father of Algebra. In *Al Jazeera.* 20.10.2015. < http://www.aljazeera.com/programmes/science-in-a-golden-age/2015/10/al-khwarizmi-father-algebra-151019144853758.html>; Zugriff am 16.09.2017.
4. Arndt, A.B. 1983. Al-Khwarizmi. In *The Mathematics Teacher*. Vol. 76, No. 9 1983: S: 668-670.
5. Ayyubi, Akmal. 2006. *Contributions of Khwârizmî to Mathematics and Geography.* Foundation for Science, Technology and Civilisation. Dezember 2006.
6. Baki, Adnan. 1992. Al-Khwarizmi's Contributions to the Science of Mathematics: Al Kitab Al Jabr wa'l Muqabalah. In *Journal of Islamic Academy of Sciences*. Vol. 5, No. 3 1992: S. 225-228.
7. Berggren, J. L. 1986. *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* Springer Verlag: New York – Berlin – Heidelberg.
8. Berggren, J. L. 2013. Islamic Mathematics. In *Volume 2: Medieval Science*. The Cambridge History of Science. Hrsgg.: Lindberg, David; Shank, Michael. Cambridge University Press: Cambridge. S. 62-83.
9. Busard, H. L. L. 1997. *Über die Entwicklung der Mathematik in Westeuropa zwischen 1100 und 1500*. In N.T.M. No. 5, Birkhäuser Verlag (Basel): S. 211-235.
10. Corry, Leo. 2010. History of Algebra. In *Tel-Aviv University Publications*. The Cohn Institute for History and Philosophy of Science and Ideas. S. 1-35. <http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/algebra%20EB.pdf>; Zugriff am 01.02.2018.
11. Encyclopaedia Britannica. 2017. *Islamic Contributions (to Formal Equations).* <https://www.britannica.com/topic/algebra/Islamic-contributions>; Zugriff am 20.09.2017.

12. Falagas, Matthew; et al. 2006. Arab Science in the Golden Age (750-1258 C.E.) and Today. In *The FASEB Journal.* Vol. 20, No. 10 (2006): S. 1581-1587.
13. Gandz, Solomon. 1926. The Origin of the Term "Algebra". In *The American Mathematical Monthly*; Vol. 33, No. 9: S. 437-440.
14. Gheverghese, George. 2010. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics.* 3rd Edition. Princeton University Press: Princeton.
15. Gutas, Dimitri. 1998. *Greek Thought, Arabic Culture. The Graeco-Arabic Translation Movement in Baghdad and Early ʿAbbāsid Society (2nd – 4th/8th – 10th Centuries)*. Routledge Publishing: London / New York.
16. Herrmann, Dietrich. 2016. *Mathematik im Mittelalter – Die Geschichte der Mathematik des Abendlands mit ihren Quellen in China, Indien und im Islam.* Springer Verlag: Berlin – Heidelberg.
17. Histoire de l'algèbre. 2018. *Histoire de l'algèbre*. <http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/histoire-de-l-algebre>; Zugriff am 02.02.2018.
18. Hogendijk, Jan. 1994. *Mathematics in Medieval Islamic Spain*. Proceedings of the International Congress of Mathematics (Basel, Schweiz). S. 1-13.
19. Hogendijk, Jan. 1999. *Bibliography of Mathematics in Medieval Islamic Civilization*. Version 13.01.1999. S. 1-33.
20. Hunger Parshall, Karen. 1988. The Art of Algebra from Al-Khwārizmī to Viete: A Study in the Natural Selection of Ideas. In *History of Science.* Vol. 26 Issue 2 2016 (Wiederveröffentlichung): S. 129-164.
21. Islam Wikia. 2017. *Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī.* <http://islam.wikia.com/wiki/Muhammad_ibn_M%C5%ABs%C4%81_al-Khw%C4%81riz m%C4%AB>; Zugriff am 26.12.2017.
22. Ismail, Mat Rofa; Atan, Kamel. 2010. Mathematics in the Malay World Prior to the Arrival of Western Mathematics. In *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. Vol. 8 2010: S. 729-734.
23. Karpinski, Louis Charles. 1915. *Robert of Chester's (12th Century) Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi* – With an Introduction, Critical Notes and an English version by Louis Charles Karpinski (*1878).

24. Kaske, Rainer. 1998. Quadratische Gleichungen bei al-Khwarizmi. In *Mathematik lehren*. Vol. 91 1998: S. 14-18. Friedrich-Verlag: Velber bei Hannover.
25. Katz, Victor. 2007a. Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. In *Educational Studies in Mathematics.* Vol 66 2007: S. 185-201.
26. Katz, Victor. 2007b. *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A Sourcebook*. Princeton University Press: Princeton.
27. Kheirandish, Elaheh. 2013. The Mixed Mathematical Sciences – Optics and Mechanics in the Islamic Middle Ages. In *Volume 3: Medieval Science*. The Cambridge History of Science. Hrsgg.: Lindberg, David; Shank, Michael. Cambridge University Press: Cambridge. S. 84-108.
28. Kvasz, Ladislav. 2008. Sprache und Zeichen in der Geschichte der Algebra – ein Beitrag zur Theorie der Vergegenständlichung. In *Journal für Mathematik-Didaktik.* Vol. 29, Issue 2, Juni 2008: S. 108-123.
29. Kvasz, Ladislav. 2008a. *Sprache und Zeichen in Algebra – Zusammenfassung*. S. 1-4.
30. Lazrek, Azzeddine; Sami, Khalid. 2002. *Notation symbolique, le tournant de la mathématique arabe.* Universit*é* Cadi Ayyad de Marrakech. S. 1-21.
31. Linden, S. 2017. *Die Algebra des Omar Chayyam – Mathematik.* Springer-Verlag Deutschland. S. 23-49.
32. Liu, Lin; Du, Rui-Zhi. 2006. The Preliminary Discussion about the Source of Al-Khwārizmī's Algebra. In *Journal of Guangxi University for Nationalities – Natural Science Edition*. Vol. 02-2006.
33. Molland, George. 2013. Mathematics. In *Volume 21: Medieval Science.* The Cambridge History of Science. Hrsgg.: Lindberg, David; Shank, Michael. Cambridge University Press: Cambridge. S. 512-531.
34. Museum of the History of Science Oxford. 2017. *Science and Technology in Medieval Islam.* <http://www.mhs.ox.ac.uk/scienceislam_education/docs/Science_and_technology_in_Medieval_Islam-Teachers_notes.pdf>; Zugriff am 02.02.2018.
35. Muslim Heritage. 2017. *Mathematics in Muslim Heritage*. <http://www.muslimheritage.com/topics/default.cfm?TaxonomyTypeID=12&TaxonomySubTypeID=59&TaxonomyThirdLevelID=-1&ArticleID=660>; Zugriff am 30.12.2017.

36. Oaks, Jeffrey. 2007. Medieval Arabic Algebra as an Artificial Language. In *Journal of Indian Philosophy*, Vol. 35: S. 543-575.
37. Oaks, Jeffrey; Alkhateeb, Haitham. 2005. *Māl*, Enunciations, and the Prehistory of Arabic Algebra. In *Historia Mathematica*. Vol. 32, Issue 4, November 2005: S. 400-425.
38. O'Connor, John; Robertson, Edmund. 2017. Arabic Mathematics: Forgotten Brilliance? In *School of Mathematics and Statistics of the University of St. Andrews Resources*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_mathematics.html>; Zugriff am 31.01.2018.
39. Ragep, Jamil. 2013. Islamic Culture and the Natural Sciences. In *Volume I: Medieval Science. The Cambridge History of Scienc*e. Hrsgg.: Lindberg, David; Shank, Michael. Cambridge University Press: Cambridge. S. 512-531.
40. Rashed, Roshdi. 1994. The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra. In *Boston Studies in the Philosophy of Science*. Vol. 156. Hrsg.: Cohen, Robert. Springer Science+Business Media Verlag.
41. Rashed, Roshdi. 2015. *Classical Mathematics from al-Khwarizmī to Descartes*. Routledge & Center for Arab Unity Studies: London, New York.
42. Rebstock, Ulrich. 1992. *Rechnen im arabisch-islamischen Orient – Die literarischen Spuren der praktischen Rechenkunst.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt: Darmstadt.
43. Rosen, Frederic. 1831. *The Algebra of Mohammed Ben Musa (Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala).*[643] J. L. Cox Print Great Queen Street: London. Gedruckt und publiziert für Oriental Translation Fund. Exemplar der General Library – U. C. Berkeley (University of California). Digitalisiert von Google (<http://books.google.com>).
44. Sayili, Aydin. 2006. *Al-Khwarizmi, Abu'l-Hamid Ibn Turk and the Place of Central Asia in the History of Science and Culture.* Foundation for Science, Technology and Civilisation. December 2006. S. 1-68.
45. Sezgin, Fuat. 2010. Introduction to the History of Arabic-Islamic Sciences. *In Science and Technology in Islam*. Volume I. Übersetzt von Renate Sarma und Sreeramula Rajeswara Sarma. Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main.

[643] Inkl. Rosens editiertem arabischen Text von "*Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala*".

46. Strick, Heinz Klaus. 2009. Mohammed Al Khwarizmi (780-850). In *Spektrum.* 01.02.2009. <http://www.spektrum.de/alias/der-mathematische-monatskalender/mohammed-al-khwarizmi-780-850/979324>; Zugriff am 21.09.2017.
47. TechScience. 2017. *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi*. <http://www.techsciencenews.com/referencetopics/Inv_timeline/timeline/muhammad-ibn-masai.html>; Zugriff am 30.12.2017.
48. Van der Waerden, Bartel. 1985. *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Springer Verlag: Berlin Heidelberg.

Anhang

Deutsche Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit erörtert die Bedeutung der Wissenschaften und insbesondere der Naturwissenschaften im mittelalterlichen islamischen Orient. Die Entwicklung der wissenschaftlichen Zentren ab dem 4. Jh. n. Chr. bis hin zum Aufblühen des Hauses der Weisheit (*bayt al-ḥikma*) unter der Herrschaft der Abbasidendynastie im 8./9. Jh. n. Chr. war maßgeblich für das Entstehen der Werke von Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī – vor allem auf dem Gebiet der Mathematik, aber auch im Bereich der Astronomie und Geografie, die zu seinen Interessen zählten. Das Werk *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala* (kurz *Kitāb al-ǧabr*), das der Analyse in der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt, wurde während der Herrschaftszeit des Abbasidenkalifen al-Maʾmūn verfasst. Als wissenschaftliche Grundlage dienten al-Ḫuwarizmī die Werke von babylonischen, indischen sowie griechischen Mathematikern, deren Inhalte er teils verwendete, erweiterte, korrigierte und/oder zusammenfasste.

Was das *Kitāb al-ǧabr* betrifft, so handelt es sich dabei nicht um ein in formaler und symbolischer Notation geschriebenes Werk, sondern um die Darstellung von mathematischen Formulierungen sowie Beweisen in rein verbaler Form, die an mancher Stelle um geometrische Skizzen erweitert wurden. In der Tat ist die rein formale Notation und Symbolik in der Algebra eine relativ „neue“ Entwicklung, die sich erst über die Jahrhunderte entwickelte. Die vorliegende Arbeit präsentiert und diskutiert die Inhalte des Werkes *Kitāb al-ǧabr* kapitelweise, wobei zu den Kapiteln jeweils ausgewählte Textstellen transkribiert (unter Verwendung der Transkriptionscodierung nach DMG), übersetzt, und in die Diskussion miteinbezogen werden. Diese Analysen beziehen sowohl auf die rein mathematischen Teile als auch auf jene, die die mathematischen Erkenntnisse auf Praxisfälle wie etwa geschäftliche Angelegenheiten, Vermessungsaktivitäten sowie Erbschaften und Vermächtnisse anwenden. Ergänzend werden einige Beispiele, die von al-Ḫuwarizmī in rein textueller Form mitgeteilt wurden, auch in der heutzutage geläufigeren formalen Schreibweise dargestellt.

Englische Zusammenfassung / English Abstract

This master thesis explores the position of sciences – notably the natural and mathematical sciences – in the medieval Islamic Middle East. The development of scientific centers from the 4th century AD to the inception and the flourishing of the House of Wisdom (*bayt al-ḥikma*) during the reign of the Abbasid dynasty in the 8th and 9th centuries positively impacted the creation of Muḥammad b. Mūsā l-Ḫuwarizmī's academic contributions, notably in the scientific areas of mathematics, but also in astronomy as well as geography.

He compiled his masterpiece *Al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala* (in short *Kitāb al-ğabr*), which was subject to the analysis in line with this master thesis, during the reign of the Abbasid caliph al-Maʾmūn (around 830 AD). The works of Babylonian, Indian as well as Greek mathematicians served as a scientific foundation, whose contents he re-used, complemented, summarized, and/or corrected as necessary.

Effectively, *Kitāb al-ğabr* is not a work drafted using formal and symbolic notation. On the contrary, al-Ḫuwarizmī represented mathematical expressions as well as proofs in a purely verbal form, which was only complemented with geometric sketches at some places. The use of purely formal notation and symbolic in the field of algebra is in fact a rather "modern" development, which has developed only over the last few hundred years. Overall, this master thesis presents and discusses the contents of *Kitāb al-ğabr* per chapter. For each chapter, selected text passages have been transcribed (using DMG transcription codes), translated, and included in the discussion. These analyses refer to the purely mathematical and more theoretical parts as well as to the more practical parts. In line with the latter, al-Ḫuwarizmī applied his mathematical insights to practical use cases regarding business, measuring, inheritance, and legacy matters. In addition to this, several examples, which were expressed by al-Ḫuwarizmī in a purely verbal form, are transformed into the nowadays more widely used common formal notation in the field of mathematics.