



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Einführung in die partiellen Differentialgleichungen
anhand der Methode der Charakteristiken“

verfasst von / submitted by

Julia Raberger

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium
UF Mathematik UF Psychologie und Philosophie

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Hörmann

Zusammenfassung

Der Inhalt der folgenden Arbeit ist das genaue Ausarbeiten der *Methode der Charakteristiken* an verschiedenen partiellen Differentialgleichungen, sowie die Verwendung von *klassischen und schwachen* Lösungen für partielle Differentialgleichungen.

In der ersten Herangehensweise wird die Methode an verschiedenen Fällen einer linearen Transportgleichung entwickelt. Dabei wird der *klassische Lösungsbegriff* für partielle Differentialgleichungen erläutert und verwendet.

Im zweiten Zugang wird die Methode der Charakteristiken an nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichungen wieder aufgegriffen. Bei den verwendeten Gleichungen kann weder Existenz noch Eindeutigkeit einer Lösung für beliebig lange Zeiten vorausgesetzt werden, weshalb ein neues Lösungskonzept benötigt wird, das Konzept einer *schwachen Lösung*.

Im letzten Kapitel finden die erarbeiteten Themengebiete ihre Anwendung und werden mit geeigneter Interpretation in einem Verkehrsflussmodell betrachtet.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe partieller Differentialgleichungen	1
2	Methode der Charakteristiken für lineare Transportgleichungen	5
2.1	Die Transportgleichung	5
2.2	Die geometrische Idee der Methode der Charakteristiken	18
3	Klassische und schwache Lösungen für einige nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen	21
3.1	Probleme mit klassischen Lösungen	22
3.1.1	Die Burgersgleichung	22
3.1.2	Allgemeine Koeffizientenfunktion a	25
3.2	Konzepte und Eigenschaften von schwachen Lösungen	29
4	Fallbeispiele und Anwendungen	35
4.1	Ausblick	40
	Literaturverzeichnis	43

1 Grundbegriffe partieller Differentialgleichungen

Literatur: Grundlage für diesen Abschnitt liefern das Kapitel 1.1 des Buches *Partielle Differentialgleichungen* von Walter A. Strauss [8] S 1 - 4 und das Kapitel 1.3 des Buches *Partial Differential Equations* von Lawrence C. Evans [3] S 6 - 9.

Differentialgleichungen spielen in den Naturwissenschaften eine große Rolle, vor allem wenn es um die Modellierung von physikalischen Problemen geht. Gleichungen, die sowohl eine Funktion als auch deren Ableitung innehaben, nennen wir Differentialgleichungen.

Grundsätzlich können wir zwei Arten von Differentialgleichungen unterscheiden, einerseits die *gewöhnlichen Differentialgleichungen* und andererseits die *partiellen Differentialgleichungen*. Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung betrachten wir eine Gleichung, die eine Funktion und deren Ableitungen in einer unabhängigen Variable enthält. Bei einer partiellen Differentialgleichung befassen wir uns mit einer Gleichung, in der eine Funktion in mehreren unabhängigen Variablen und die zugehörigen partiellen Ableitungen auftreten. Die partiellen Ableitungen ($\frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial t}$) bezeichnen wir abkürzend durch die tiefgestellten Indizes u_x, u_t .

Eine partielle Differentialgleichung in zwei unabhängigen Variablen x, t könnte beispielsweise so aussehen:

$$u_x + u_t = 0.$$

Dabei treten die unabhängigen Variablen x, t mit der abhängigen Variable u und mit deren partiellen Ableitungen in Verbindung. Folglich kann sie auch in der Form

$$F(x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t)) = u_x(x, t) + u_t(x, t) = 0$$

mit $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden.

Da in diesem Fall nur die ersten partiellen Ableitungen der Funktion u auftreten, nennen

wir sie eine partielle Differentialgleichung *erster Ordnung*.

Allgemein halten wir fest, dass die *Ordnung* den Grad der in der partiellen Differentialgleichung auftretenden höchsten Ableitung beschreibt.

Partielle Differentialgleichungen unterscheiden sich nicht nur in ihrer Ordnung, sondern auch danach, ob die Gleichung linear oder nichtlinear ist.

Bemerkung (Linearität). Eine partielle Differentialgleichung wird linear genannt, wenn sie linear in der unbekannten Funktion u und in allen ihren partiellen Ableitungen ist. Andernfalls wird sie nichtlinear genannt.

Beispiel (Linearität). Betrachten wir eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$u_t - u_{xx} = 0. \quad (1.1)$$

Wir möchten die Linearität dieser Gleichung untersuchen. Dazu überprüfen wir, ob

$$\mathcal{L}u := u_t - u_{xx}$$

ein linearer Differentialoperator ist.

Ein Operator $\mathcal{L}$ heißt linearer Operator, wenn

$$\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \text{ und } \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u$$

für beliebige (genügend oft differenzierbare) Funktionen u, v und eine Konstante c erfüllt ist.

Wir prüfen also, ob der Operator $\mathcal{L}u = u_t - u_{xx}$ linear ist:

$$\mathcal{L}(u + v) = (u + v)_t - (u + v)_{xx} = u_t + v_t - u_{xx} - v_{xx} = (u_t - u_{xx}) + (v_t - v_{xx}) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v$$

und

$$\mathcal{L}(cu) = (cu)_t - (cu)_{xx} = cu_t - cu_{xx} = c \cdot (u_t - u_{xx}) = c\mathcal{L}u.$$

Tatsächlich haben wir einen linearen Operator in der partiellen Differentialgleichung (1.1) vorliegen, dh. die Gleichung (1.1) ist linear.

Bemerkung (Homogenität). Sei $\mathcal{L}$ ein linearer Operator.

- (a) Die Gleichung $\mathcal{L}u = 0$ heißt *homogene lineare Gleichung*.
- (b) Die Gleichung $\mathcal{L}u = g$ mit $g \neq 0$ als Funktion der unabhängigen Variablen nennen wir *inhomogene lineare Gleichung*.

Nachdem wir die Gleichungen in lineare und nichtlineare partielle Differentialgleichung klassifiziert haben, widmen wir uns der Lösung einer partiellen Differentialgleichung. Eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung ist eine entsprechend oft partiell differenzierbare Funktion, die die partielle Differentialgleichung erfüllt. Einige grobe Bemerkungen sollten wir im Hinterkopf behalten, wenn wir mit partiellen Differentialgleichungen arbeiten:

Bemerkung.

- Nichtlineare partielle Differentialgleichungen sind schwieriger zu lösen als lineare partielle Differentialgleichungen.
- Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung sind komplizierter als partielle Differentialgleichungen niedriger Ordnung.
- Systeme von partiellen Differentialgleichungen sind schwerer zu lösen als einzelne (skalare) partielle Differentialgleichungen.
- Partielle Differentialgleichungen mit vielen unabhängigen Variablen sind komplexer als Gleichungen, in denen die gesuchten Funktionen nur von wenigen unabhängigen Variablen abhängen.

Daher illustrieren wir im Folgenden lieber einige typische Techniken und Methoden für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit nur zwei unabhängigen Variablen x und t .

2 Methode der Charakteristiken für lineare Transportgleichungen

Literatur: Grundlage für diesen Abschnitt liefern die Kapitel 1.2-1.3 des Buches *Partielle Differentialgleichungen* von Walter A. Strauss [8]; das Kapitel 2.1 des Buches *Partial Differential Equations* von Lawrence C. Evans [3]; aus dem Buch *Hyperbolic Partial Differential Equations* von Serge Alinhac [1] das Kapitel 1; Kapitel 3 aus dem Buch *Gewöhnliche Differenzialgleichungen* von Bernd Aulbach [2]; und die Vortragsunterlagen von Günther Hörmann [5]; sowie die Vorlesungsnotizen 2 von Julie Levandosky [6].

Es existiert keine generelle Lösungstheorie für partielle Differentialgleichungen, weswegen es für verschiedene partielle Differentialgleichungen unterschiedliche Lösungsansätze gibt. Im Folgenden Abschnitt betrachten wir eine wichtige Lösungsmethode, nämlich die *Methode der Charakteristiken*. Wir betrachten dieses Verfahren für verschiedene Formen der *Transportgleichung* genauer. Dabei werden wir die partielle Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren.

2.1 Die Transportgleichung

Eine allgemeine Transportgleichung mit $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ ist von der Form

$$u_t + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \cdot u_{x_i} + d(x, t) \cdot u = g. \quad (2.1)$$

Die Variable x beschreibt einen Punkt im Raum, wir schreiben auch $x = (x_1, \dots, x_n)$. Die Variable $t \geq 0$ bezeichnet immer die Zeit.

Sei $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto u(x, t)$ die gesuchte unbekannte Funktion aus dem C^1 -Funktionenraum. Auch $a_1, \dots, a_n, d, g : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sind C^1 -Funktionen. Der C^1 -Funktionenraum beschreibt den Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen.

Wenn $g \neq 0$ ist, wird diese partielle Differentialgleichung als *inhomogen* bezeichnet. Ist hingegen $g = 0$, dann nennen wir sie eine *homogene* partielle Differentialgleichung. In den weiterführenden Untersuchungen betrachten wir verschiedene Fälle der homogenen Transportgleichung.

Bemerkung. Wir setzen $a = (a_1, \dots, a_n)$ und bezeichnen mit dem Ausdruck $a \cdot u_x$ das Skalarprodukt, d.h.

$$a \cdot u_x = \langle a, u_x \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_{x_i}.$$

1.Fall: Die Transportgleichung enthält nur Terme mit Ableitungen von u

Seien $g, d = 0$ beide Null, dann enthält die Transportgleichung (2.1) nur Terme mit Ableitungen von u :

$$u_t + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \cdot u_{x_i} = 0. \quad (2.2)$$

Wir betrachten die Transportgleichung (2.2) zunächst in der Dimension $n = 1$, danach allgemein in n Dimensionen.

In der Dimension $n = 1$ schreiben wir die Transportgleichung (2.2) als

$$u_t + a(x, t) \cdot u_x = 0 \quad (2.3)$$

auf. Dabei beschreibt $a : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ den Koeffizienten, der eine stetig differenzierbare Funktion ist. Sei $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.3).

Betrachten wir u entlang einer differenzierbaren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$. Nach der Kettenregel gilt dann:

$$\frac{d}{dt}(u(\gamma(t), t)) = u_t(\gamma(t), t) + \dot{\gamma}(t) \cdot u_x(\gamma(t), t). \quad (2.4)$$

Zusätzlich können wir auch die gegebene partielle Differentialgleichung (2.2) entlang der gleichen differenzierbaren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ betrachten. Wir schreiben sie dann als

$$0 = u_t(\gamma(t), t) + a(\gamma(t), t) \cdot u_x(\gamma(t), t) \quad (2.5)$$

an.

Vergleichen wir nun die Ableitung (2.4) mit der partiellen Differentialgleichung (2.5), so erhalten wir daraus eine wichtige Information:

Wenn die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t), t) \quad (2.6)$$

erfüllt ist, dann ist u jedenfalls eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.5) entlang $(\gamma(t), t)$.

Weiters gilt: wenn die gewöhnliche Differentialgleichung (2.6) erfüllt ist, dann ist u entlang der Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ konstant, da wir $\frac{d}{dt}(u(\gamma(t), t)) = 0$ folgern können.

Um nun die gewöhnliche Differentialgleichung (2.6) genauer studieren zu können, wiederholen wir zuerst die Definitionen von Vektorfeldern und deren Integralkurven:

Definition 1 (Vektorfeld und deren Integralkurven). Ein Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, X(x) = (X_1(x), \dots, X_n(x)),$$

deren Komponenten X_i C^1 -Funktionen auf Ω sind. Eine Integralkurve eines Vektorfelds ist eine C^1 -Funktion

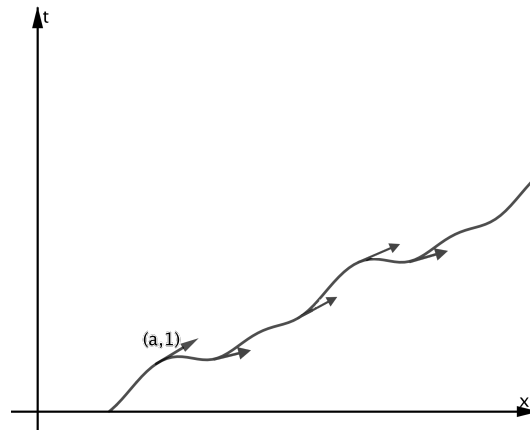
$$x : I \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n, x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

auf einem Intervall I , für die

$$x'(t) = X(x(t))$$

$\forall t \in I$ gilt.

Wie die obige Definition zeigt, handelt es sich bei der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.6) um die Gleichungen von Integralkurven eines zeitabhängigen Vektorfelds $(a, 1)$ auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Das Vektorfeld bestimmt im Fall der Transportgleichung die Richtung der Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ an jedem Punkt.


Abbildung 2.1: Vektorfeld $(a, 1)$

Definition 2 (Charakteristiken). Die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t), t)$ beschreibt mittels $t \mapsto (\gamma(t), t)$ Integralkurven des Vektorfeldes $(a, 1)$. Die Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung nennen wir *Charakteristiken*.

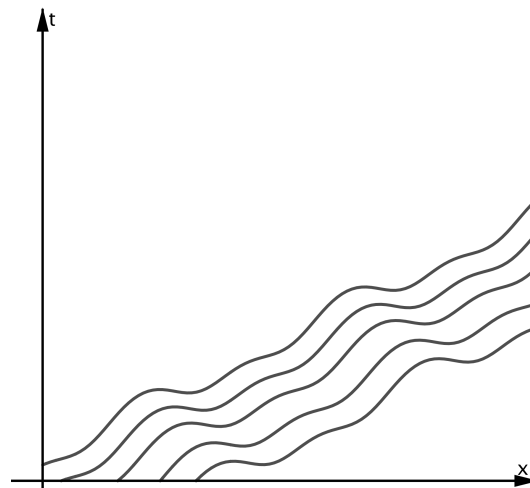


Abbildung 2.2: Charakteristiken

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und weil a eine C^1 -Funktion ist, wissen wir, dass die gewöhnlichen Differentialgleichung (2.6) zumindest lokal immer Lösungen besitzt.

Wenn eine prospektive Lösung u die notwendige Struktur besitzt, dass sie entlang der charakteristischen Kurve $(\gamma(t), t)$ konstant ist, können wir den Funktionswert eindeutig bis zur x -Achse zurückverfolgen. Falls zusätzlich eine Anfangsbedingung

$$u(y, 0) = f(y)$$

mit einer C^1 -Funktion f gegeben ist, können wir jeder Charakteristik einen Wert auf der x -Achse des Gebiets, auf dem wir die partielle Differentialgleichung betrachten, zuordnen. Zudem wählen wir $\gamma(t) = x$, sodass wir:

$$u(x, t) = u(\gamma(t), t) = u(\gamma(0), 0) = f(\gamma(0)),$$

erhalten. (Siehe Abbildung 2.3.)

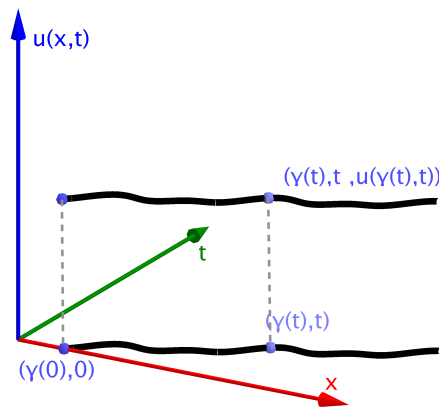


Abbildung 2.3: Anfangsbedingung $u(y, 0) = f(y)$

Eine Anfangsbedingung bedeutet, dass u zu einer bestimmten Zeit bekannt ist (etwa bei $t = 0$). Sie muss immer transversal zu den Charakteristiken vorgeschrieben werden.

Nun betrachten wir die eben behandelte Transportgleichung in mehreren Dimensionen. In n Dimensionen beschreibt $a : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion, deren Komponenten $a_1 \dots a_n$ C^1 -Funktionen sind.

Sei $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, die gesuchte Lösung.

Wir betrachten wieder die Lösung u entlang einer differenzierbaren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. So ergibt sich durch Differenzieren von u mit der Kettenregel die folgende Ableitung

$$\frac{d}{dt}(u(\gamma(t), t)) = u_t(\gamma(t), t) + \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i(t) \cdot u_{x_i}(\gamma(t), t). \quad (2.7)$$

Zusätzlich betrachten wir die Transportgleichung (2.2) entlang der selben differenzier-

baren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$0 = u_t(\gamma(t), t) + \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t), t) \cdot u_{x_i}(\gamma(t), t). \quad (2.8)$$

Vergleichen wir, wie im eindimensionalen Fall, die Gleichungen (2.7) und (2.8) miteinander, so können wir folgende Beziehung erkennen:

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\gamma(t), t) \\ a_2(\gamma(t), t) \\ \vdots \\ a_n(\gamma(t), t) \end{pmatrix} = (a_i(\gamma(t), t))_{(i=1, \dots, n)} = a(\gamma(t), t). \quad (2.9)$$

Angenommen diese gewöhnliche Differentialgleichung (2.9) ist erfüllt, dann folgern wir daraus

$$\frac{d}{dt}(u(\gamma(t), t)) = 0,$$

was bedeutet, dass u entlang der Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ konstant ist.

Im eindimensionalen Fall (vgl. Definition 2) haben wir festgelegt, dass die Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t), t)$ Charakteristiken genannt werden. So gilt analog, dass die gewöhnliche Differentialgleichung die Integralkurven des Vektorfeldes $(a, 1)$ auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ beschreibt, welche auch hier als Charakteristiken bezeichnet werden.

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir wieder, dass (2.9) zumindest lokal stets eine Lösung besitzt.

Betrachten wir die eben behandelte Transportgleichung wieder mit einer Anfangsbedingung

$$u(y, 0) = f(y),$$

wobei f eine beliebige C^1 -Funktion ist. Wir können, analog zur Abhandlung der Transportgleichung in einer Dimension, die charakteristische Kurve wieder bis zur x -Achse eindeutig beschreiben. Sei $x = \gamma(t)$, dann erhalten wir

$$u(x, t) = u(\gamma(t), t) = u(\gamma(0), 0) = f(\gamma(0)).$$

Bemerkung (Zusammenfassung). Bevor wir uns weiter mit verschiedenen Fällen der Transportgleichung beschäftigen, skizzieren wir hier den verwendeten Lösungsweg in knappen Punkten:

1. Wir nehmen $u(x, t)$ als eine Lösung der zu behandelnden partiellen Differentialgleichung $u_t + a(x, t) \cdot u_x = 0$ an und betrachten u entlang einer differenzierbaren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$.
2. Die Ableitung von $u(\gamma(t), t)$ vergleichen wir mit der gegebenen partiellen Differentialgleichung an jener differenzierbaren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$.
3. Wenn das System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen $\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t), t)$ erfüllt ist, dann ist die Lösung u entlang der differenzierbaren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ konstant.
4. Die gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben Integralkurven des Vektorfelds $(a, 1)$. Aufgrund der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und weil wir a als eine C^1 -Funktion angenommen haben wissen wir, dass wir zumindest eine lokale Lösung finden können.
5. Durch die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung gelangen wir zu einer Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Spezialfall vom Fall 1 und $n=1$: Die Transportgleichung enthält nur Terme mit Ableitungen von u und a ist eine reelle Konstante

Betrachten wir die Transportgleichung (2.1) in der Dimension $n = 1$. Seien $g, d = 0$ und sei a eine reelle Konstante. Für diesen Fall ergibt das folgende Form der Transportgleichung

$$u_t + a \cdot u_x = 0. \quad (2.10)$$

Sei $u : \mathbb{R} \times [0, \infty)$ die gesuchte unbekannte Funktion. Analog zum 1. Fall, berechnen wir die Gleichung der Charakteristiken und suchen eine konstante Lösung u .

Die gewöhnliche Differentialgleichung der Charakteristiken hat folgende Form

$$\dot{\gamma}(t) = a, \quad (2.11)$$

deren Lösung durch die Gleichung

$$\gamma(t) = a \cdot t + y \quad (2.12)$$

angegeben wird. Die Variable y beschreibt eine beliebige Konstante.

Die differenzierbare Kurve $t \mapsto (t, \gamma(t))$ beschreibt in diesem Fall eine gerade Charakteristik. Es ergibt sich folgende *Charakteristikenschar* für die Transportgleichung (2.10):

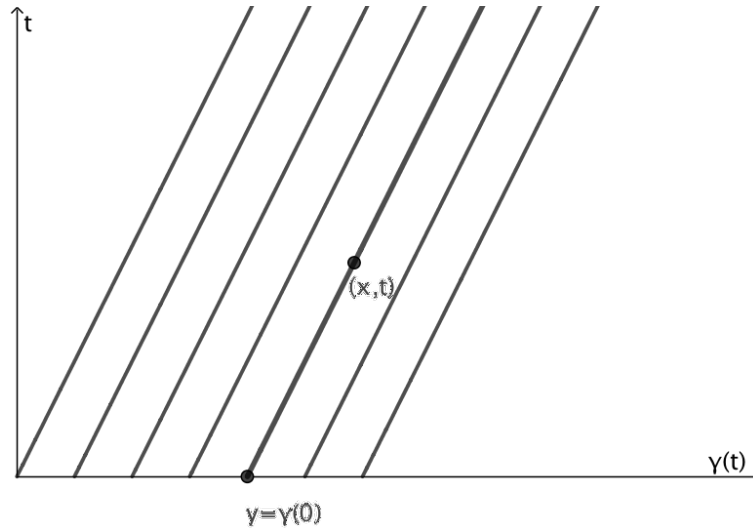


Abbildung 2.4: Charakteristikenschar

Wählen wir wieder $x = \gamma(t)$ und da die Lösung u entlang der geraden charakteristischen Kurven konstant ist, gilt also für $x = at + y = at + \gamma(0) = \gamma(t)$:

$$u(x, t) = u(\gamma(t), t) = u(\gamma(0), 0) = f(\gamma(0)) = f(y) = f(x - at),$$

falls $f \in C^1(\mathbb{R})$ an einer Anfangsbedingung $u(y, 0) = f(y)$ gegeben ist.

Wir sehen in Abbildung 2.4, dass diese Anfangsbedingung wirklich transversal zu den Charakteristiken vorgeschrieben wurde. Wenn a also konstant ist, können wir die Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.10) durch eine Translation der Anfangsbedingung erreichen. Für jedes $f \in C^1(\mathbb{R})$ löst die Funktion

$$u(x, t) := f(x - at)$$

nämlich die Transportgleichung in $t \in [0, \infty)$. Und wegen der Herleitung der Methode der Charakteristiken muss u übrigens auch bei gegebenen f so aussehen, d.h. die Lösung ist auch eindeutig.

Bemerkung (Physikalische Betrachtung). Illustrieren wir unsere Resultate nochmal in einem physikalischem Kontext. Dazu betrachten wir eine Welle im x -Raum. Die Transportgleichung (2.10) beschreibt die Bewegung der Welle mit der Geschwindigkeit a . Für die Dimension $n = 1$ können wir das Phänomen folgendermaßen visualisieren:

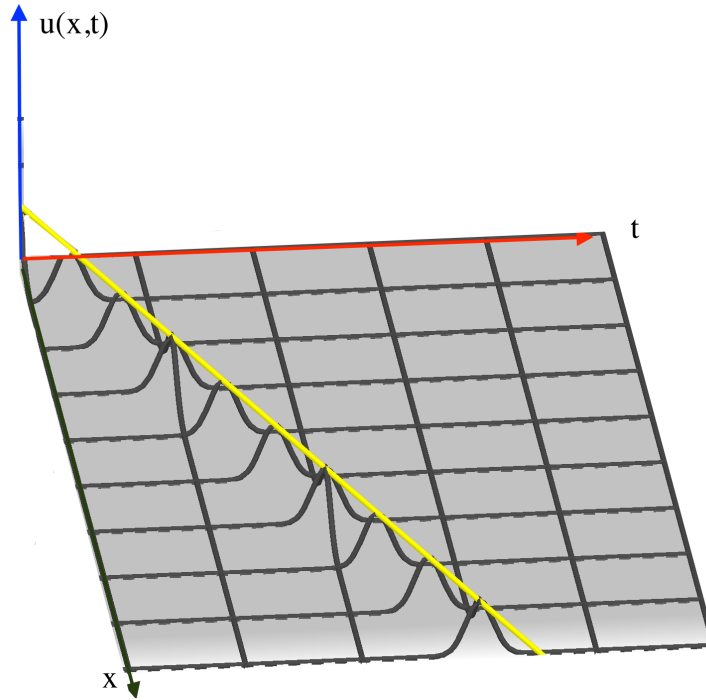


Abbildung 2.5: Transport einer Welle zu verschiedenen Zeiten t in 3D-Form

Bemerkung (Autonome gewöhnliche Differentialgleichung). Sei im Spezialfall a nun keine reelle Konstante, sondern gilt $a = a(x)$. Für die partielle Differentialgleichung

$$u_t + a(x) \cdot u_x = 0$$

beschreibt die gewöhnliche Differentialgleichung der Charakteristiken insbesondere eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\dot{\gamma}(t) = a(\gamma(t)).$$

Die Besonderheit bei autonomen Gleichungen ist, dass eine Verschiebung einer Lösungskurve in t -Richtung wieder eine Lösungskurve ergibt. Diese Eigenschaft verdanken wir der Translationsinvarianz.

2.Fall: Die allgemeine homogene Transportgleichung (wenn $d \neq 0$ gilt)

Wir hatten oben verschiedene Situationen der Transportgleichung für $d = 0$ bearbeitet. Nun betrachten wir die folgende allgemeine Transportgleichung

$$u_t + \sum_{j=1}^n a_j(x, t) \cdot u_{x_j} + d(x, t) \cdot u = 0 \quad (2.13)$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts können wir die partielle Differentialgleichung (2.13) aufspalten:

$$\langle (a(x, t), 1), \nabla u(x, t) \rangle = \langle (a(x, t), 1), (u_x(x, t), u_t(x, t)) \rangle = -d \cdot u(x, t)$$

Sei u eine Lösung der partiellen Differentialgleichung und betrachten wir diese Lösung entlang einer konkreten Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$. Es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(u(\gamma(t), t)) = u_t(\gamma(t), t) + \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i(t) \cdot u_{x_i}(\gamma(t), t). \quad (2.14)$$

Vergleichen wir (2.14) mit der der partiellen Differentialgleichung (2.13) entlang der Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$, so haben wir, wie bereits im 1. Fall, die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = (a_j(\gamma(t), t))_{(j=1, \dots, n)} \quad (2.15)$$

angenommen. Anders als im vorigen Fall, ist die Richtungsableitung entlang des Vektors $(a, 1)$ nicht mehr Null, eine Lösung u der partiellen Differentialgleichung ist daher nicht mehr konstant entlang der Charakteristiken, sondern es gilt

$$\frac{d}{dt}(u(\gamma(t), t)) = u_t(\gamma(t), t) + \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}_i(t) \cdot u_{x_i}(\gamma(t), t) = -d \cdot u(\gamma(t), t) \quad (2.16)$$

Sei $v(t) := u(\gamma(t), t)$, so können wir zunächst die *linke* Seite der partiellen Differentialgleichung beschreiben. Und da wir u an einer konkreten differenzierbaren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ betrachten, sei $\tilde{d}(t) := d(\gamma(t), t)$. Wir können nun die partielle Differentialgleichung (2.13) an der konkreten differenzierbaren Kurve $t \mapsto (\gamma(t), t)$ betrachtet folgendermaßen umschreiben:

$$\dot{v} + \tilde{d} \cdot v = 0. \quad (2.17)$$

Bei der Gleichung (2.17) handelt es sich um eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.

In der Dimension $n = 1$ betrachten wir also die gewöhnliche Differentialgleichung mit gegebenen Anfangswert:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = -\tilde{d}(t) \cdot v(t), \\ v(0) = u(\gamma(0), 0) = f(\gamma(0)) =: v_0 \end{cases}$$

Die Lösung lautet nun

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-\int_0^t \tilde{d}(\tau) d\tau}.$$

Falls $\gamma(t) = x$ gilt, erhalten wir für die Lösung an der Stelle (x, t) den Wert

$$u(x, t) = v_0 \cdot e^{-\int_0^t d(\gamma(\tau), \tau) d\tau},$$

aber ausführlicher mit der Anfangsbedingung

$$u(y, 0) = f(y)$$

lautet die Lösung

$$u(x, t) = f(\gamma(0)) \cdot e^{-\int_0^t d(\gamma(\tau), \tau) d\tau}. \quad (2.18)$$

Bemerkung (Charakteristischer Fluss). Wir möchten nochmal betonen, inwieweit Integralkurven von ihren Startpunkten abhängen. Dazu betrachten wir Flüsse, die sich für die Beschreibung von Zuständen in Abhängigkeit von der Zeit eignen. Bei einem Fluss handelt es sich um eine Abbildung, die die Integralkurven eines Vektorfelds in Abhängigkeiten von ihren Startpunkten berechnet.

Definition 3 (Charakteristischer Fluss). Der charakteristische Fluss zum Vektorfeld $(a, 1)$ ist die C^1 -Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \Phi(x, t; r) = (a(\Phi(x, t; r)), 1) \\ \Phi(x, t; 0) = (x, t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Weil $\dot{\Phi}_{n+1} = 1$ gilt, wird die Zeitkomponente durch

$$\Phi_{n+1}(x, t; r) = t + r \quad (2.20)$$

beschrieben.

Sei $\gamma(x, t; r) := (\Phi_1, \dots, \Phi_n)(x, t; r - t)$, so gilt

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}\gamma(x, t; r) = a(\gamma(x, t; r), t) \\ \gamma(x, t; t) = x \end{cases} \quad (2.21)$$

d.h. für jeden Punkt (x, t) gibt es eine charakteristische Kurve, die bei $\gamma(x, t; 0)$ die x -Achse schneidet.

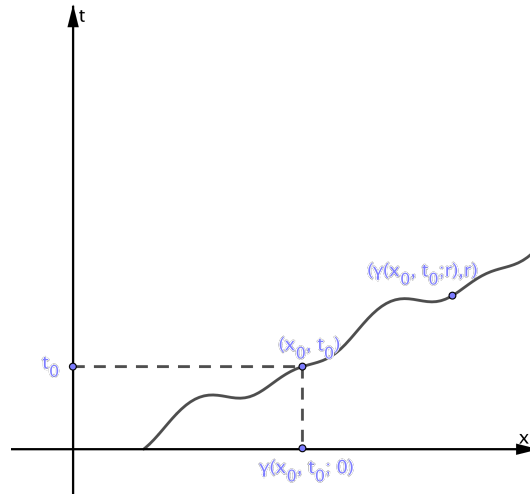


Abbildung 2.6: Charakteristischer Fluss parametrisiert mit r

Bemerkung. Wir deuten die Transportgleichung in einer Raumdimension

$$u_t + a(x, t) \cdot u_x + d(x, t) \cdot u = 0$$

nun in einem physikalischen Kontext. Die partielle Differentialgleichung beschreibt eine Welle mit der Geschwindigkeit $a(x, t)$, die jedoch nicht konstant entlang der t -Achse verschoben wird, sondern einem Zerfall ausgesetzt ist, da u nicht mehr konstant ist.

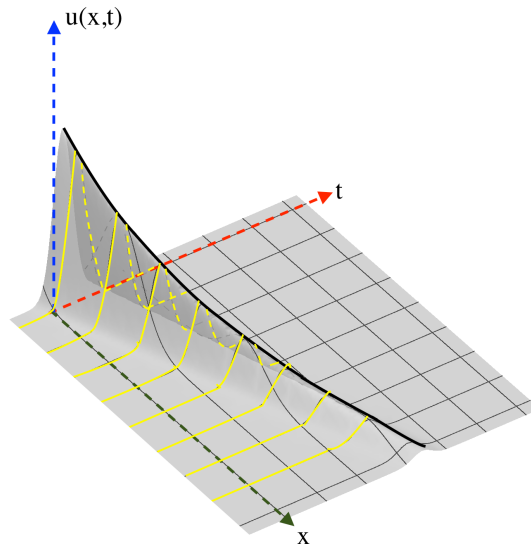


Abbildung 2.7: Transport einer Welle mit Zerfall, 3D Abbildung

2.2 Die geometrische Idee der Methode der Charakteristiken

Mit der Methode der Charakteristiken konnten wir eine partielle Differentialgleichung geschickt auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduzieren. Zur Ergänzung betrachten wir den geometrischen Hintergrund nochmal anhand der partiellen Differentialgleichung:

$$a(x, t)u_x + b(x, t)u_t = c(x, t). \quad (2.22)$$

Die Gleichung beschreibt eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit $a, b, c \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty), \mathbb{R})$.

Sei $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (2.22). Den Graph der Lösung beschreiben wir mit

$$S := \{(x, t, u(x, t)) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \times \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3. \quad (2.23)$$

Unter Verwendung des Skalarprodukts erhält die partielle Differentialgleichung folgende Form:

$$(a(x, t), b(x, t), c(x, t)) \cdot (u_x(x, t), u_t(x, t), -1) = 0. \quad (2.24)$$

Wir erkennen, dass die beiden Vektoren $(u_x(x, t), u_t(x, t), -1)$ und $(a(x, t), b(x, t), c(x, t))$ orthogonal aufeinander stehen. Der Vektor $(u_x(x, t), u_t(x, t), -1)$ beschreibt daher in jedem Punkt einen Normalvektor zur Lösungsfläche S und der Vektor $(a(x, t), b(x, t), c(x, t))$ ist ein Tangentialvektor zu S , das heißt der Vektor $(a(x, t), b(x, t), c(x, t))$ beschreibt ein Vektorfeld auf der Fläche S .

Wir möchten nun eine differenzierbare Kurve $s \mapsto (x(s), t(s), z(s))$ konstruieren, die in der Fläche S liegt und tangential zum Vektorfeld (a, b, c) liegt, also eine *Integralkurve* ist.

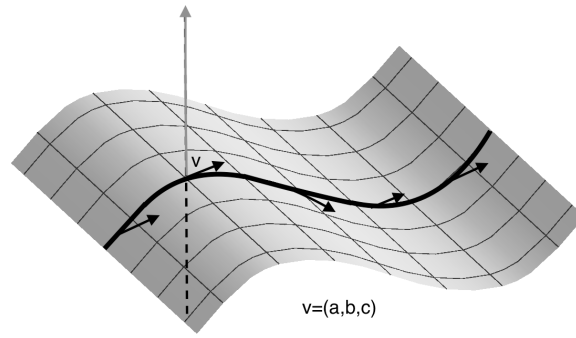


Abbildung 2.8: In jedem Punkt einer Kurve $s \mapsto (x(s), t(s), z(s))$ liegt der Vektor tangential zur Lösungsfläche S

Um nun eine solche Kurve zu konstruieren, fordern wir also, dass

$$(a(x(s), t(s)), b(x(s), t(s)), c(x(s), t(s)))$$

tangential in jedem Punkt auf der Kurve ist.

Damit muss folgendes System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x(s), t(s)) \\ \frac{dt}{ds} &= b(x(s), t(s)) \\ \frac{dz}{ds} &= c(x(s), t(s)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Lösen wir das System (2.25), so können wir durch Vereinigung der erhaltenden Charakteristiken die Fläche S konstruieren, mit der wir prinzipiell zur Lösung $u(x, t)$ gelangen können.

Bemerkung. Im Spezialfall $c = 0$ und $b = 1$ ergibt sich die partielle Differentialgleichung $a(x, t)u_x + u_t = 0$ mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen $\dot{t} = 1$ und $\dot{x} = a(x(s), t(s))$ und $\dot{z} = 0$ (also $z = \text{const.}$), die wir in den obigen Fällen bereits ausführlich gelöst haben.

3 Klassische und schwache Lösungen für einige nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen

Literatur: Grundlage für diesen Abschnitt liefern das Kapitel 14.1 des Buches *Partielle Differentialgleichungen* von Walter A. Strauss [8]; das Kapitel 1.3 des Buches *Partial Differential Equations* von Lawrence C. Evans [3]; die Vorlesungsnotizen 3 von Julie Levandosky [7]; und Satz 169.1 aus dem Buch *Lehrbuch der Analysis. Teil 2* von H. Heuser [4].

Wir haben bereits mit Lösungen für verschiedene Formen der linearen Transportgleichung gearbeitet, nun möchten wir den Lösungsbegriff im allgemeinen Zusammenhang konkretisieren.

Definition 4 (Korrekt gestellte Probleme). Folgende fundamentale Eigenschaften sollen bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen gültig sein:

- (1) Existenz: Es existiert mindestens eine Lösung $u(x, t)$, welche alle Bedingungen erfüllt.
- (2) Eindeutigkeit: Es gibt höchstens eine Lösung.
- (3) Stabilität: Kleine Änderungen der Anfangsdaten bewirken kleine Änderungen der Lösung u .

Bemerkung (Stabilität). Die Stabilität ist vor allem bei der Modellierung physikalischer Probleme von großer Wichtigkeit, da aufgrund von Messungen es nicht immer möglich ist, physikalische Daten mit mathematischer Präzision anzugeben. Um dieses Problem

in den Griff zu bekommen, fordert man von der Lösung, dass sie sich nur wenig ändert, wenn sich die (Anfangs-)Daten geringfügig ändern.

Definition 5 (Klassische Lösung). Wenn also *Existenz*, *Eindeutigkeit* und *Stabilität* einer Lösung einer partiellen Differentialgleichung erfüllt sind, dann nennen wir sie eine klassische Lösung.

3.1 Probleme mit klassischen Lösungen

Wir betrachten nun eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, die das physikalische Phänomen einer Stoßwelle beschreibt:

$$u_t + \sum_{i=1}^n a_i(u) \cdot u_{x_i} = 0 \quad (3.1)$$

Im Vergleich zur Gleichung (2.2) ist der Vektor a von der Lösung selbst abhängig.

Stoßwellen können beispielsweise bei Explosionen, beim Schallschutz, im Verkehrsfluss, bei Gletscherwellen oder beim Abbremsen von Flugzeugen auftreten.

Bevor wir die partielle Differentialgleichung (3.1) studieren, betrachten wir speziell die eindimensionale *Burgersgleichung* und ihre Eigenschaften.

3.1.1 Die Burgersgleichung

Die Burgersgleichung ist exemplarisch für die Beschreibung von Stoßwellen. Wir schreiben sie als:

$$u_t + uu_x = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \quad (3.2)$$

Diese partielle Differentialgleichung ist nichtlinear und daher im Vergleich zu den linearen partiellen Differentialgleichungen kniffliger.

Sei $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Burgersgleichung und betrachten wir u entlang einer differenzierbaren Kurve $t \rightarrow (\gamma(t), t)$. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}(u(\gamma(t), t)) = u_x(\gamma(t), t) \cdot \dot{\gamma}(t) + u_t(\gamma(t), t). \quad (3.3)$$

Wir können gleichzeitig die gegebene partielle Differentialgleichung (3.2) entlang dieser differenzierbaren Kurve betrachten:

$$u_t(\gamma(t), t) + u(\gamma(t), t) \cdot u_x(\gamma(t), t) = 0 \quad (3.4)$$

Vergleichen wir die Ableitung (3.3) mit der partiellen Differentialgleichung (3.4), so können wir folgende Beziehung erkennen:

$$\dot{\gamma}(t) = u(\gamma(t), t). \quad (3.5)$$

Die charakteristische Gleichung (3.5) hängt von der gesuchten Funktion u selbst ab. Falls also die Gleichungen

$$(i) \quad u_t(\gamma(t), t) + u(\gamma(t), t) \cdot u_x(\gamma(t), t) = 0 \text{ und}$$

$$(ii) \quad \dot{\gamma}(t) = u(\gamma(t), t) \text{ erfüllt sind,}$$

dann ist die Lösung u entlang der Charakteristiken konstant, d.h. $u(\gamma(t), t) = u(\gamma(0), 0)$. Aufgrund der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass die gewöhnliche Differentialgleichung (3.5) eine Lösungsschar abhängig von den Anfangswerten liefert, so ergibt also jede Lösung u eine eigene Charakteristikenschar.

Konkret erhalten wir als Lösung von (3.5) wegen der Konstanz entlang der Kurve $t \mapsto u(\gamma(t), t)$ einfach

$$\gamma(t) = u(\gamma(0), 0) \cdot t + \gamma(0), \quad (3.6)$$

und wir sehen, dass jede Charakteristik die Form einer Geraden hat.

Nun möchten wir noch die Steigung einer Charakteristik bestimmen, dafür verwenden wir den Differenzenquotienten, d.h. die Steigung zwischen den Punkten $(\gamma(0), 0)$ und (x, t) bestimmen wir durch die folgende Rechnung:

$$\frac{t - 0}{\gamma(t) - \gamma(0)} = \frac{t}{(u(\gamma(0), 0) \cdot t + \gamma(0)) - \gamma(0)} = \frac{t}{t \cdot u(\gamma(0), 0)} = \frac{1}{u(\gamma(0), 0)} \quad (3.7)$$

Für $u(\gamma(0), 0) \neq 0$ ist die Steigung einer Charakteristik $t \mapsto (\gamma(t), t)$ gleich $\frac{1}{u(\gamma(0), 0)}$, also der Kehrwert des Funktionswertes von u an der Stelle, wo die Charakteristik die x -Achse trifft.

Für $u(\gamma(0), 0) = 0$ ergibt sich $\gamma(t) = \gamma(0) \quad \forall t$, also eine senkrechte Gerade durch $(\gamma(0), 0)$.

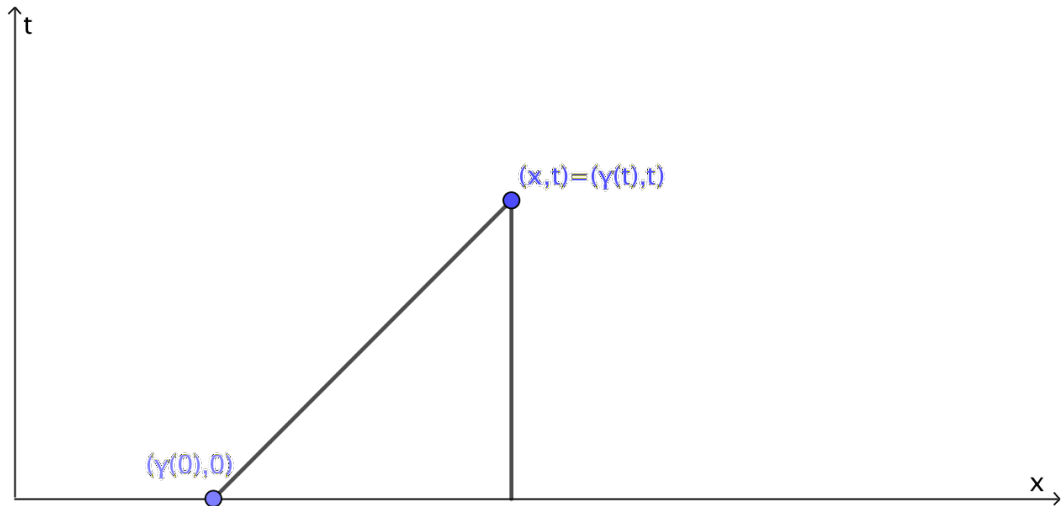


Abbildung 3.1: Steigung einer Charakteristik, wir wählen $x = \gamma(t)$.

Wir betrachten nun für die Burgersgleichung folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(y, 0) = f(y) \end{cases}$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Mit dieser Anfangsbedingung werden die Funktionswerte auf der Geraden $t = 0$ angegeben.

Wie wir eben festgestellt haben, stimmt die Steigung einer Charakteristik mit dem Kehrwert des Funktionswerts überein. Betrachten wir eine Charakteristik durch den Punkt $(x_0, 0)$ mit der Steigung $\frac{1}{f(x_0)}$. Eine andere Charakteristik durch den Punkt $(x_1, 0)$ hat wiederum die Steigung $\frac{1}{f(x_1)}$.

Angenommen sei $x_0 < x_1$ und $f(x_0) > f(x_1)$, dann schneiden sich die beiden Charakteristiken an einem Punkt (x, t) , weil $\frac{1}{f(x_0)} < \frac{1}{f(x_1)}$ gilt. Dieser unerwartete Schnitt bringt uns in Schwierigkeiten, da die Charakteristiken an diesem Schnittpunkt verschiedene Werte für u vorgeben.

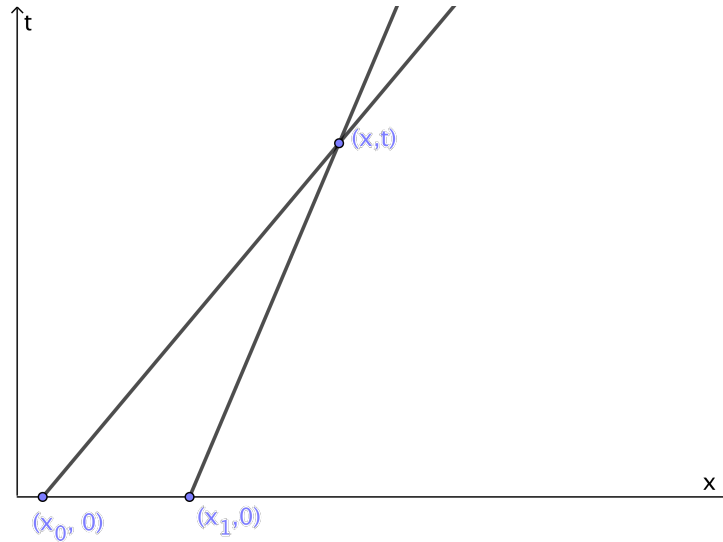


Abbildung 3.2: Charakteristiken schneiden sich

Bis zum Zeitpunkt des ersten Schnittpunktes können wir von einer klassischen Lösung für das Problem sprechen.

Am Schnittpunkt wird die Lösung mehrdeutig und verletzt die Bedingung der Eindeutigkeit einer Lösung. Aufgrund des Schnittverhaltens der Burgersgleichung (3.2) erhalten wir also keine klassische Lösung. Um trotzdem eine Lösung für lange Zeiträume anzugeben, können wir zwischen verschiedenen Lösungswegen entscheiden:

- (a) Wir fordern, dass sich die Charakteristiken nicht schneiden. Das ist beispielsweise realisierbar, wenn wir f als eine wachsende Funktion vorgeben.
- (b) Wir verändern das Lösungskonzept und lassen Schnitte der Charakteristiken zu. Solche Lösungen nennen wir dann *schwache Lösungen*.
- (c) Oder wir lassen Lösungen nur in der Nähe der Anfangslinie $t = 0$ zu, da sie für größere t ein unbekanntes Verhalten, wie z.B. Schnitte der Charakteristiken, zeigen.

3.1.2 Allgemeine Koeffizientenfunktion a

Wie wir durch das Verhalten der Burgersgleichung gesehen haben, kann es zu einem Schnittverhalten der Charakteristiken kommen. Wir untersuchen dieses Verhalten nun anhand der allgemeinen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung (3.1) und betrachten sie in der Dimension $n = 1$:

$$u_t + a(u)u_x = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (3.8)$$

Mit der Methode der Charakteristiken können wir die gewöhnliche Differentialgleichung der Charakteristiken finden:

$$\dot{\gamma}(t) = a(u(\gamma(t), t)). \quad (3.9)$$

Wenn die beiden Gleichungen

- (i) $u_t + a(u)u_x = 0$ und
- (ii) $\dot{\gamma}(t) = a(u(\gamma(t), t))$ gelten,

dann ist die Lösung u entlang der Charakteristiken konstant. Als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erhalten wir

$$\gamma(t) = a(\bar{u}) \cdot t + x_0, \quad (3.10)$$

wobei $x_0 = \gamma(0)$ und $\bar{u} = u(\gamma(0), 0)$ ist. Die Charakteristiken treten also in der Form von Geraden auf.

Betrachten wir die partielle Differentialgleichung nun mit einer Anfangsbedingung

$$u(y, 0) = f(y),$$

für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und berechnen die Steigung der Charakteristik $t \mapsto (\gamma(t), t)$ zwischen den Punkten (x, t) und $(x_0, 0)$ mithilfe des Differenzenquotienten:

$$\frac{t - 0}{x - x_0} = \frac{t}{(a(\bar{u}) \cdot t + x_0) - x_0} = \frac{t}{a(u(x_0, 0)) \cdot t} = \frac{1}{a(f(x_0))}. \quad (3.11)$$

Wie im Fall der Burgersgleichung kommt es zu einem Schnittverhalten, wenn es $x_0 < x_1$ mit $a(f(x_0)) > a(f(x_1))$ gilt. Die Lösung u ist ab dem Schnittpunkt nicht mehr eindeutig.

Existenz lokaler klassischer Lösungen

Anhand der Burgersgleichung haben wir gezeigt, dass wir nicht immer globale klassische Lösungen finden können. Auch im allgemeinen Fall können wieder Schnitte der Charakteristiken auftreten. Über den Satz über implizite Funktionen können wir eine Bedingung formulieren, um zumindest lokal klassische Lösungen anzugeben. Wiederholen wir zuerst den Satz, bevor wir die Bedingung herausarbeiten:

Satz 1 (Satz von der impliziten Funktion). *Die Menge $G \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ sei offen und sei $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $(y_0, x_0) \in G$ mit $F(y_0, x_0) = 0$. Zudem sei $\partial_{m+1}F(y_0, x_0) \neq 0$, dann existiert eine Umgebung U von x_0 und V von y_0 , sodass es genau eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow V$ mit $h(y_0) = x_0$ und $F(y, h(y)) = 0$ für alle $y \in U$ gibt.*

Ob ein Schnittverhalten zwischen den Charakteristiken auftritt, hängt von der Steigung $\frac{1}{a(f(x_0))}$ ab, wobei x_0 der Schnittpunkt der Charakteristik durch den Punkt (x, t) mit der x -Achse ist. Formen wir zunächst die Gleichung einer Charakteristik auf folgende Form um

$$0 = x_0 + t \cdot a(f(x_0)) - x =: F((x, t), x_0).$$

Vergleichen wir die Funktion F mit dem obigen Satz für $m = 2$, so spielt (x, t) die Rolle von y_0 . Wir fragen uns nun, ob sich eine Funktion $h(x, t)$ finden lässt, sodass sich die Punktmenge $F((x, t), x_0) = 0$ zumindest lokal durch $(x, t, h(x, t))$ beschreiben lässt.

Nun verwenden wir den Satz der impliziten Funktion und zeigen, dass die entsprechende Ableitung von F nicht Null ist. Dafür reicht es, wenn wir zeigen, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial F(x, t, x_0)}{\partial x_0} \neq 0$ erfüllt:

$$\text{Wir sehen: } \frac{\partial F(x, t, x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial (x_0 + t \cdot a(f(x_0)) - x)}{\partial x_0} = 1 + t \cdot a'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Falls $a'(f(x_0)), f'(x_0) \geq 0$ gilt, dann ist $1 + t \cdot a'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \neq 0$ sicher für alle $t \geq 0$ erfüllt.

Das bedeutet, im Fall $t \geq 0$ können wir jedenfalls eine klassische Lösung der Form $u(x, t) = f(h(x, t))$ angeben, falls $a'(f(x_0)), f'(x_0) > 0$ gilt.

Satz 2 (Bedingung für eine lokale klassische Lösung). *Eine lokale klassische Lösung einer partiellen Differentialgleichung $u_t + a(u)u_x = 0$ mit Anfangsbedingung $u(y, 0) = f(y)$*

existiert, falls für $t \geq 0$ die Bedingung

$$1 + t \cdot a'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \neq 0$$

erfüllt ist.

Beispiel. Im Fall der Burgersgleichung $u_t + uu_x = 0$ ist $a(u) = u$ und $a'(u) = 1$ gegeben. Die Bedingung $1 + t \cdot f'(x_0) \neq 0$ für $t \geq 0$ ist sicher erfüllt, wenn die Funktion f wachsend ist.

3.2 Konzepte und Eigenschaften von schwachen Lösungen

In den letzten Beispielen kam es zu einem Schnittverhalten der Charakteristiken und wir können die Lösung daher an bestimmten Stellen nicht mehr eindeutig fortsetzen. Möchten wir trotzdem globale Lösungen für beliebige Zeiten angeben, so müssen wir den Lösungsbegriff verändern.

Das Konzept der schwachen Lösung

Sei A eine Stammfunktion von a und sei u eine klassische Lösung, so können wir die partielle Differentialgleichung (3.8) auf folgende Form umschreiben:

$$u_t(x, t) + (A(u(x, t)))_x = 0. \quad (3.12)$$

Mit der Hilfe des Begriffes von Distributionen schreiben wir die partielle Differentialgleichung (3.12) nun schrittweise um. Eine Distribution stellt ein stetiges und lineares Funktional auf dem Raum der Testfunktionen dar.

Testfunktionen sind C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger, d.h. sie verschwinden außerhalb einer beschränkten abgeschlossenen Menge innerhalb ihres Definitionsbereiches. Sei ψ eine Testfunktion. Wir multiplizieren (3.12) mit $\psi(x, t)$ und erhalten

$$u_t(x, t) \cdot \psi(x, t) + (A(u(x, t)))_x \cdot \psi(x, t) = 0.$$

Nun integrieren wir nach x und t und spalten das Integral auf:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u_t(x, t) \psi(x, t) + A(u(x, t))_x \psi(x, t) \right) dx dt = \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t(x, t) \psi) dx dt}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (A(u(x, t))_x \psi) dx dt}_{\textcircled{2}} = 0 \end{aligned}$$

Für $\textcircled{1}$ verwenden wir den Satz von Fubini, anschließend integrieren wir partiell:

$$\textcircled{1} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t(x, t) \psi(x, t)) dx dt = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty (u_t(x, t) \psi(x, t)) dt dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(u(x, t) \psi(x, t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} u(x, t) \psi_t(x, t) dt \right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-u(x, 0) \cdot \psi(x, 0) - \int_0^{\infty} u(x, t) \psi_t(x, t) dt \right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-u(x, 0) \cdot \psi(x, 0)) dx - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \psi_t(x, t) dx dt \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Auch in ② können wir partiell integrieren:

$$\begin{aligned}
\textcircled{2} &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (A(u(x, t))_x \psi(x, t)) dx dt = \\
&= \int_0^{\infty} \left(\underbrace{(A(u(x, t)) \cdot \psi(x, t)) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} (A(u(x, t)) \cdot \psi_x(x, t)) dx \right) dt \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Fassen wir beide Integrale (3.13) und (3.14) nun wieder zusammen, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t(x, t) \psi(x, t) + A(u(x, t))_x \psi(x, t)) dx dt = \textcircled{1} + \textcircled{2} = \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (u(x, 0) \cdot \psi(x, 0)) dx - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u(x, t) \psi_t(x, t) + A(u(x, t)) \cdot \psi_x(x, t)) dx dt
\end{aligned}$$

d.h.

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} (u(x, 0) \cdot \psi(x, 0)) dx + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u(x, t) \psi_t(x, t) + A(u(x, t)) \cdot \psi_x(x, t)) dx dt. \quad (3.15)$$

Durch diese Umformung haben wir eine klassische Lösung u auf die Form von (3.15) gebracht. Wie wir sehen, muss hier u nicht mehr differenzierbar sein, da wir die partiellen Ableitungen auf die Testfunktion verschoben haben.

Also ist diese Formel z.B. auch für stückweise stetige Lösungen u sinnvoll. Stückweise stetig in 2 Dimensionen bedeutet, dass $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bis auf C^1 -Kurven in $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ stetig ist und die Limiten zur Kurve sollen von jeder Seite existieren.

Definition 6 (Schwache Lösungen). Wir nennen eine stückweise stetige Funktion u eine schwache Lösung einer partiellen Differentialgleichung $u_t + a(u) \cdot u_x = 0$, wenn die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \cdot \psi(x, 0) dx + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) \psi(x, t)_t + A(u(x, t)) \cdot \psi_x(x, t)] dx dt = 0$$

für alle Testfunktionen ψ erfüllt ist.

Aufgrund der obigen Umformungsschritte ist jede klassische Lösung zugleich eine schwache Lösung und erfüllt die Gleichung (3.15). Eine schwache Lösung ist aber nicht notwendigerweise eine klassische Lösung. Wir haben also den Lösungsbegriff so erweitert, dass wir stückweise stetige Lösungen zulassen dürfen. Angenommen es kommt bei einer Lösung u zu einer Unstetigkeit an einer Kurve $t \mapsto (\xi(t), t)$. Die einseitigen Grenzwerte $u^-(x, t)$ und $u^+(x, t)$ sollen hingegen bei Annäherung an einen Punkt (x, t) auf der Kurve existieren. Außerhalb der Kurve soll u stetig differenzierbar sein.

Wir behaupten, dass die Kurve $(\xi(t), t)$ nicht willkürlich sein kann und dass es eine Verbindung zwischen $\xi(t)$, $u^-(x, t)$, $u^+(x, t)$ gibt.

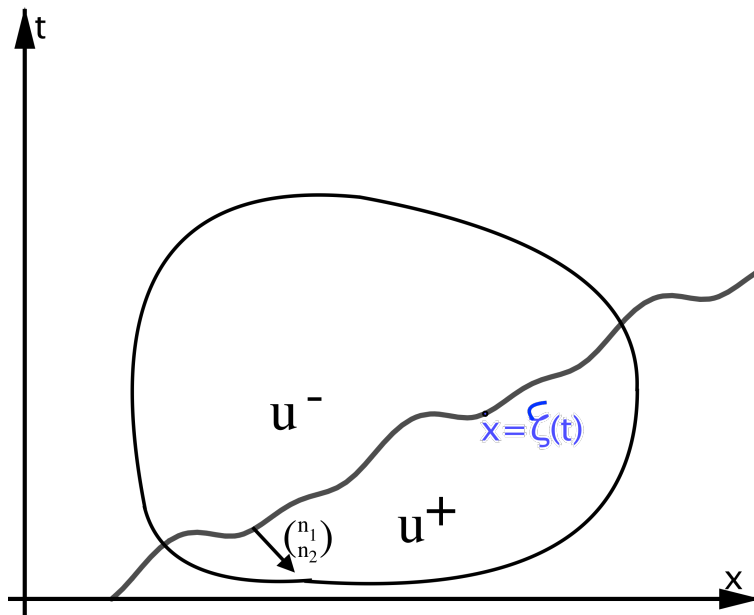


Abbildung 3.3

Wir spalten daher in zwei Regionen Ω^- und Ω^+ auf:

$$\Omega^- \equiv \{(x, t) : 0 < t < \infty, -\infty < x < \xi(t)\}$$

$$\Omega^+ \equiv \{(x, t) : 0 < t < \infty, \xi(t) < x < +\infty\}$$

Sei also $t \mapsto (\xi(t), t)$ eine stetig differenzierbare Kurve, die den Bereich $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ in zwei Bereiche Ω^- und Ω^+ aufspaltet. Dann ist u höchstens dann eine schwache Lösung, wenn u eingeschränkt auf die Bereiche Ω^- und Ω^+ eine klassische Lösung ist.

Betrachten wir erneut die Bedingung für eine schwache Lösung und sei $\psi(x, 0) = 0$,

dann spalten wir das linke Integral in die zwei Bereiche Ω^- und Ω^+ auf:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\psi_t + A(u)\psi_x) dx dt + \underbrace{\int_{-\infty}^\infty u(x, 0)\psi(x, 0) dx}_{=0} = \\
 &= \underbrace{\int_{\Omega^-} (u\psi_t + A(u)\psi_x) d(x, t)}_{\text{Bereich } \Omega^-} + \underbrace{\int_{\Omega^+} (u\psi_t + A(u)\psi_x) d(x, t)}_{\text{Bereich } \Omega^+}. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Bereich } \Omega^- &= \int_{\Omega^-} (u(x, t)\psi_t(x, t) + A(u(x, t))\psi_x(x, t)) d(x, t) = \\
 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} (u(x, t)\psi_t(x, t) + A(u(x, t))\psi_x(x, t)) dx dt = \\
 &= \int_0^\infty \underbrace{\int_{-\infty}^{\xi(t)} u(x, t)\psi_t(x, t) dx dt}_{=\textcircled{1}} + \int_0^\infty \underbrace{\int_{-\infty}^{\xi(t)} A(u(x, t))\psi_x(x, t) dx dt}_{=\textcircled{2}} = \\
 &\quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Für $\textcircled{1}$ verwenden wir die Leibnizregel und die Kettenregel:

$$\textcircled{1} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\xi(t)} u(x, t)\psi(x, t) dx - \int_{-\infty}^{\xi(t)} u_t(x, t) \cdot \psi(x, t) dx - \dot{\xi}(t) \cdot u^-(\xi(t), t) \cdot \psi(\xi(t))$$

Für $\textcircled{2}$ können wir partielle Integration anwenden:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} &= (A(u(x, t)) \cdot \psi(x, t)) \Big|_{x=-\infty}^{x=\xi(t)} - \int_{-\infty}^{\xi(t)} A'(u(x, t)) \cdot \psi(x, t) dx = \\
 &= A(u^-(\xi(t), t)) \cdot \psi(\xi(t), t) - \int_{-\infty}^{\xi(t)} a(u(x, t)) \cdot u_x(x, t) \cdot \psi(x, t) dx
 \end{aligned}$$

Schreiben wir nun (3.17) unter Berücksichtigung von $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ auf folgende Form um:

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\xi(t)} u(x, t)\psi(x, t) dx \right) dt - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} u_t(x, t) \cdot \psi(x, t) dx dt \\
 &\quad - \int_0^\infty \dot{\xi}(t) \cdot u^-(\xi(t), t) \cdot \psi(\xi(t), t) dt - \int_0^\infty A(u^-(\xi(t), t)) \cdot \psi(\xi(t), t) dt \\
 &\quad - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} a(u(x, t)) \cdot u_x(x, t) \cdot \psi(x, t) dx dt =
 \end{aligned}$$

Fassen wir nun einige Ausdrücke zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty u^-(\xi(t), t) \psi(\xi(t), t) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} \left(u_t(x, t) \cdot \psi(x, t) + a(u(x, t)) \cdot u_x(x, t) \cdot \psi(x, t) \right) dx dt - \\
 &- \int_0^\infty \left(\dot{\xi}(t) \cdot u^-(\xi(t), t) \right) \cdot \psi(\xi(t), t) + A(u^-(\xi(t), t) \cdot \psi(\xi(t), t)) dt = \\
 &= -u^-(\xi(0), 0) \cdot \underbrace{\psi(\xi(0), 0)}_{=0} - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\xi(t)} \underbrace{\left(u_t(x, t) + a(u(x, t)) \cdot u_x(x, t) \right)}_{=0 \text{ lt. der Differentialgleichung (3.12)}} \cdot \psi(x, t) dx dt - \\
 &- \int_0^\infty \left(\dot{\xi}(t) \cdot u^-(\xi(t), t) \right) + A(u^-(\xi(t), t)) \cdot \psi(\xi(t), t) dt
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt die obige Rechnung für den Bereich Ω^- die Formel:

$$\begin{aligned}
 \text{Bereich } \Omega^- &= \int_{\Omega^-} \left(u(x, t) \psi_t(x, t) + A(u(x, t)) \psi_x(x, t) \right) d(x, t) = \\
 &= - \int_0^\infty \psi(\xi(t), t) \left(\dot{\xi}(t) \cdot u^-(\xi(t), t) + A(u^-(\xi(t), t)) \right) dt \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Analog können wir auch den Bereich Ω^+ umformen, sodass sich folgende Form ergibt:

$$\begin{aligned}
 \text{Bereich } \Omega^+ &= \int_{\Omega^+} \left(u(x, t) \psi_t(x, t) + A(u(x, t)) \psi_x(x, t) \right) d(x, t) = \\
 &= \int_0^\infty \psi(\xi(t), t) \left(\dot{\xi}(t) \cdot u^+(\xi(t), t) + A(u^+(\xi(t), t)) \right) dt \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Betrachten wir (3.16) und setzen wir für die Bereiche Ω^- und Ω^+ , also (3.18) und (3.19), ein:

$$0 = \int_0^\infty \psi(\xi(t), t) \left(A(u^+(\xi(t), t) - A(u^-(\xi(t), t) - \dot{\xi}(t) \cdot (u^+(\xi(t), t) - u^-(\xi(t), t))) \right) dt \quad (3.20)$$

Da die Gleichung (3.20) für alle $\psi(x, t)$ erfüllt ist, dann können wir auf folgende Relation schließen:

$$0 = A(u^+(\xi(t), t) - A(u^-(\xi(t), t) - \dot{\xi}(t) \cdot (u^+(\xi(t), t) - u^-(\xi(t), t)))$$

d.h.

$$\dot{\xi}(t) \cdot (u^+(\xi(t), t) - u^-(\xi(t), t)) = A(u^+(\xi(t), t) - A(u^-(\xi(t), t)) \quad (3.21)$$

Für eine echte Sprungstelle, mit $u^+(\xi(t), t) \neq u^-(\xi(t), t)$, ergibt sich also die Bedingung:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{A(u^+(\xi(t), t)) - A(u^-(\xi(t), t))}{u^+(\xi(t), t) - u^-(\xi(t), t)} \quad (3.22)$$

Satz 3 (Rankine Hugoniot Bedingung). *Sei u eine stückweise stetig differenzierbare Funktion. u ist genau dann eine schwache Lösung einer partiellen Differentialgleichung $u_t + A(u)_x = 0$ mit Unstetigkeit entlang einer Kurve $t \rightarrow (\xi(t), t)$, wenn die Bedingung:*

$$\dot{\xi}(t) = \frac{A(u^+(\xi(t), t)) - A(u^-(\xi(t), t))}{u^+(\xi(t), t) - u^-(\xi(t), t)} \quad (3.23)$$

erfüllt ist.

Diese Bedingung nennen wir die Rankine-Hugoniot-Bedingung.

4 Fallbeispiele und Anwendungen

Literatur: Grundlage für diesen Abschnitt liefern die Vorlesungsnotizen 3 von Julie Levandosky [7] und das Kapitel 3.4 des Buches *Partial Differential Equations* von Lawrence C. Evans [3].

Wir möchten nun ein Verkehrsflussmodell behandeln, wo wir die oben gewonnenen Erkenntnisse anwendungsorientiert einfließen lassen können.

Es soll der Verkehrsfluss auf einer unendlich langen Autobahnstrecke ohne Auf- und Abfahrten beschrieben werden. Betrachten wir dabei ein Intervall $[x_1, x_2]$ auf der Strecke. Sei $u(x, t)$ die Dichte der Autos an einem Punkt (x, t) , also am Streckenpunkt x zur Zeit t .

Die totale Anzahl der Autos in einem Intervall zur Zeit z , also die Masse, ist durch

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx$$

angegeben. Da immer wieder Autos in das Intervall hineinfahren und auch andere das Intervall verlassen, beschreiben wir die Veränderung der Masse im Streckenabschnitt in Abhängigkeit zur Zeit t durch

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx. \quad (4.1)$$

Gleichzeitig können wir die Veränderung der Anzahl der Fahrzeuge durch den Zufluss bzw. den Abfluss beschreiben:

$$\underbrace{A(u(x_1, t))}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{A(u(x_2, t))}_{\text{Abfluss}}. \quad (4.2)$$

A beschreibt die Fließgeschwindigkeit. Setzen wir also die Ausdrücke (4.1) und (4.2) gleich und nehmen $u \in C^1[x_1, x_2]$ und $A \in C^1(\mathbb{R})$ an, dann gilt gemäß dem Hauptsatz der

Differential- und Integralrechnung und gemäß Differentiation eines Parameterintegrals:

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = A(u(x_1, t)) - A(u(x_2, t)) = - \int_{x_1}^{x_2} A(u(x, t))_x dx.$$

Weil x_1 und x_2 beliebig waren, schließen wir, dass die Dichte der Fahrzeuge am Punkt (x, t) die folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$u_t + [A(u)]_x = 0. \quad (4.3)$$

Diese partielle Differentialgleichung ist genau von der Form wie die bereits behandelten nichtlinearen hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen. Wir wissen, dass möglicherweise Schnitte der Charakteristiken auftreten können.

Sei $A(u) = \frac{u^2}{2}$ gegeben. Die Gleichung (4.3) ist dann die Burgersgleichung:

$$u_t + \left[\frac{u^2}{2} \right]_x = 0. \quad (4.4)$$

Beispiel. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0 \\ u(y, 0) &= f(y) \end{cases} \quad \text{mit der Anfangsbedingung } f(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y < 0, \\ 0 & \text{für } y > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Mit der Methode der Charakteristiken konnten wir im vorigen Kapitel eine Charakteristik $t \mapsto (\gamma(t), t)$ durch die Gleichung

$$\gamma(t) = f(x_0) \cdot t + x_0,$$

mit $x_0 \in \mathbb{R}$ konstant als Schnittpunkt mit der x -Achse, angeben.

Wir wählen $\gamma(t) = x$ und da jede Charakteristik eine Gerade darstellt, schreiben wir

$$x = f(x_0) \cdot t + x_0.$$

1. Sei $y < 0$, dann haben alle Charakteristiken die Form $x = t + x_0$. In diesem Bereich ist die Lösung

$$u(y, 0) = 1.$$

2. Sei $y > 0$, dann haben alle Charakteristiken die Form $x = x_0$. In diesem Bereich

ist die Lösung

$$u(y, t) = 0.$$

Abhängig von der Anfangsbedingung haben die Charakteristiken unterschiedliche Steigungen und somit kommt es zu einem Schnittpunkt und wir können keine klassische Lösung mehr angeben.

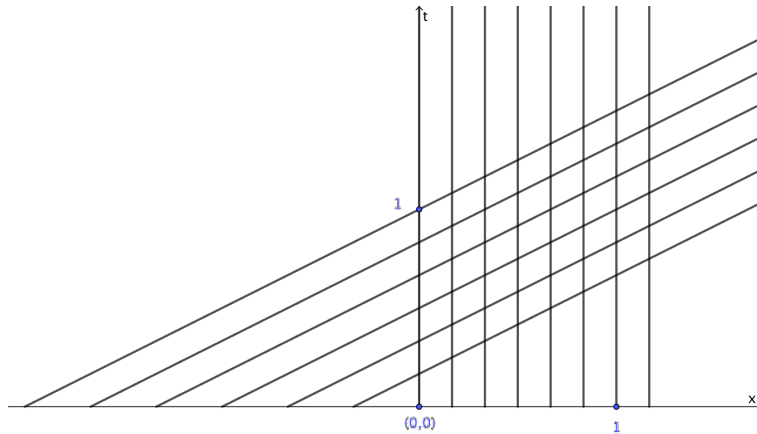


Abbildung 4.1: Die Charakteristiken schneiden sich.

Können wir eine schwache Lösung angeben?

Erinnern wir uns an die Rankine-Hugoniot Bedingung $\dot{\xi}(t) = \frac{A(u^+(\xi(t),t)) - A(u^-(\xi(t),t))}{u^+(\xi(t),t) - u^-(\xi(t),t)}$, welche für schwache Lösungen gelten muss.

Da wir $A(u) = \frac{u^2}{2}$ angegeben haben, gilt

$$\frac{(u^-(x, t))^2}{2} - \frac{(u^+(x, t))^2}{2} = \dot{\xi}(t) \cdot (u^- - u^+)$$

Die Anfangsbedingung gibt uns im Bereich $y < 0$ den Wert $u = 1$ und im Bereich $y > 0$ den Wert $u = 0$ vor. Eingesetzt bedeutet dies:

$$\frac{1}{2} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \xi'(t) \cdot (1 - 0) = \xi'(t).$$

Da wir zusätzlich den Punkt $(0, 0)$ in unserer Kurve $t \mapsto (\xi(t), t)$ enthalten haben möchten, ergibt sich die Gleichung $x = \frac{1}{2} \cdot t$. Die schwache Lösung können wir folgendermaßen angeben

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \frac{t}{2} \\ 0 & \text{für } x > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

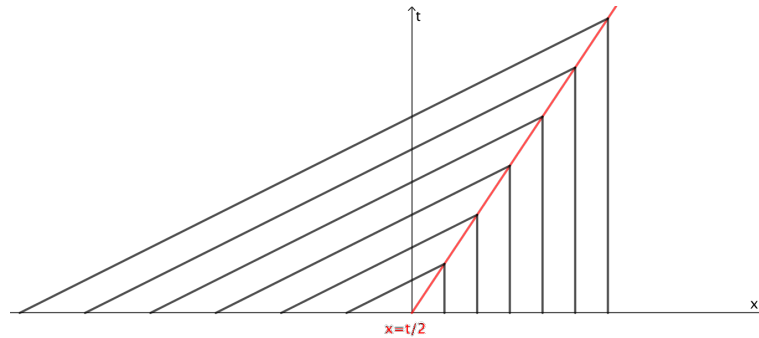


Abbildung 4.2: Charakteristiken mit eingezeichneter Unstetigkeitskurve

Setzen wir die Abbildung 4.2 in Bezug zu dem anfänglich beschriebenen Verkehrsfluss. Die Fahrzeuge, die anfänglich im Bereich $y > 0$ waren, sind stehen geblieben. Fahrzeuge aus dem Bereich $y < 0$ fahren auf diese auf. Beim Zusammenstoß der Autos kommt es zu einer Schockwelle.

Betrachten wir nun ein anderes Anfangswertproblem:

Beispiel.

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0 \\ u(y, 0) &= f(y) \end{cases} \quad \text{mit der Anfangsbedingung } f(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0, \\ 1 & \text{für } y > 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Wieder suchen wir nach den Charakteristiken und können sie wie im vorigen Beispiel angeben.

1. Sei $y < 0$, dann haben alle Charakteristiken die Form $x = x_0$. In diesem Bereich ist die Lösung

$$u(y, 0) = 0.$$

2. Sei $y > 0$, dann haben alle Charakteristiken die Form $x = t + x_0$. In diesem Bereich ist die Lösung

$$u(y, t) = 1.$$

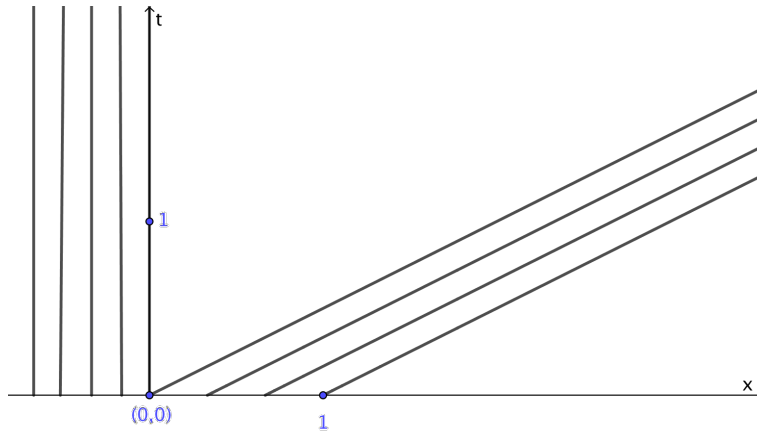


Abbildung 4.3: Die Charakteristiken schneiden sich nicht, aber es fehlen Informationen.

Anders als im vorigen Beispiel, bleiben die Autos im Bereich $y < 0$ stehen, jene Fahrzeuge, die sich im Bereich $y > 0$ befinden, fahren gleichmäßig nach rechts weg.

Im Verkehrsalltag können wir eine solche Situation z.B. bei Kreuzungen mit Ampelschaltung erkennen.

Da Informationen über den Verlauf fehlen, können wir das Anfangswertproblem mit zwei verschiedenen Möglichkeiten erweitern:

(a) Einerseits sei

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{t}{2} \\ 1 & \text{für } x > \frac{t}{2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

gegeben.

Die folgende Abbildung visualisiert den Verlauf der Charakteristiken:

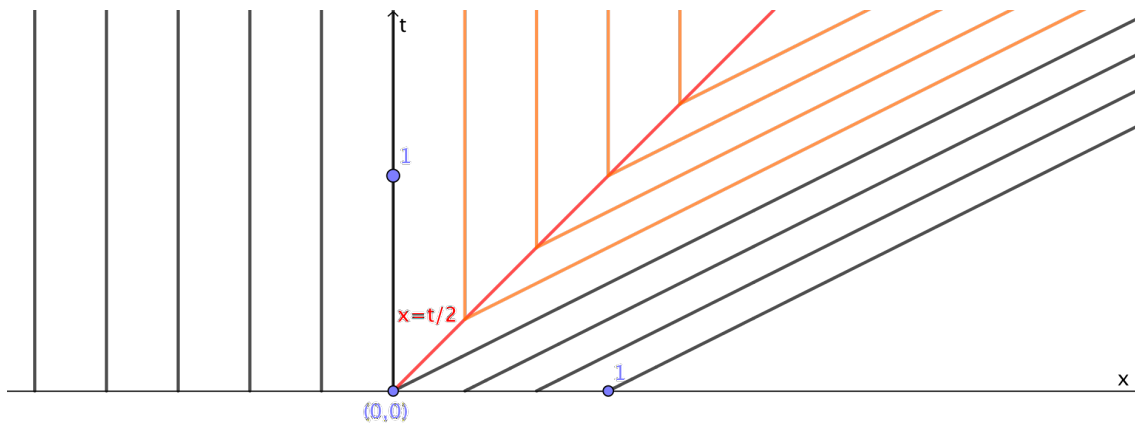


Abbildung 4.4: Die Charakteristiken starten in der Schockkurve.

- (b) Eine andere Möglichkeit die fehlenden Informationen auszufüllen, sei mit folgenden Anfangswerten:

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{für } 0 \leq x \leq t \\ 1 & \text{für } x \geq t. \end{cases} \quad (4.8)$$

Die folgende Graphik visualisiert die Charakteristiken in diesem Fall:

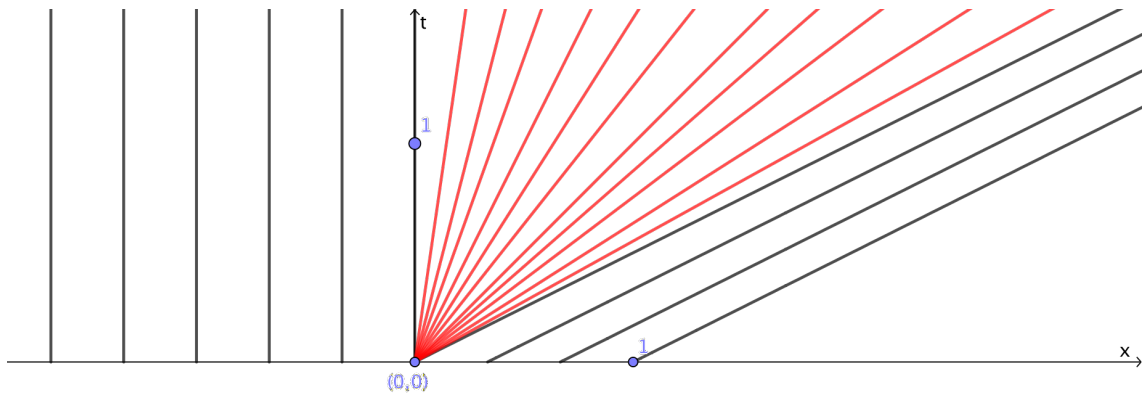


Abbildung 4.5

Bemerkung (Verdünnungswelle). In der Gasdynamik wird dieses Phänomen als Verdünnungswelle oder *rarefaction wave* bezeichnet.

Mit den zwei verschiedenen Lösungsmöglichkeiten haben wir aufgezeigt, dass Integrallösungen nicht immer unbedingt eindeutig sind. Wir konnten zwei verschiedene Lösungen aufzeigen, doch welche ist die physikalisch korrekte Lösung?

4.1 Ausblick

Die oben gestellte Frage nach nicht-physikalischen und physikalischen Integrallösungen von partiellen Differentialgleichungen der Form (3.12) kann mit verfeinerten Methoden und sogenannten Entropiebedingungen zur Theorie der eindeutigen schwachen Lösungen entwickelt werden.

Das Entropiekriterium verlangt, dass eine Lösung hinter der Stoßwelle größer ist, als vor

der Stoßwelle, d.h.:

$$A'(u^-) > \xi(t) > A'(u^+). \quad (4.9)$$

Eine physikalisch korrekte Lösung u des Anfangswertproblem (4.6) ist also nur dann gegeben, wenn

1. u konstant entlang der Charakteristiken verläuft, abgesehen von einer möglichen Unstetigkeitskurve $\xi(t)$ und
2. falls eine Unstetigkeitskurve $\xi(t)$ auftritt, muss diese die Rankine-Hugoniot-Bedingung und die Entropiebedingungen erfüllen.

Unter Berücksichtigung dieser Kriterien wird nur die Lösung (b) als physikalisch relevante Lösung verwendet.

Weitere Informationen zur Eindeutigkeit schwacher Lösungen lassen sich z.B. im Buch *Partial Differential Equations* von Lawrence C. Evans [3] im Kapitel 3.4. finden.

Literaturverzeichnis

- [1] Alinhac, Serge: Hyperbolic Partial Differential Equations. Springer Verlag 2009
- [2] Aulbach, Bernd: Gewöhnliche Differenzialgleichungen. Spektrum Akademischer Verlag. 2. Auflage 2004
- [3] Evans, Lawrence C.: Partial Differential Equations. Second Edition. American Mathematical Society 2002
- [4] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis. Teil 2. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden. 14. aktualisierte Auflage 2008
- [5] Hörmann, Günther: Linear Differential Operators with non-smooth coefficients. Vortrag an der Universität Novi Sad. February 2003
- [6] Levandosky, Julie: 2 First-Order Equations: Method of Characteristics. Notizen zur Vorlesung: Partial Differential Equations of Applied Mathematics. Herbst 2002
<https://web.stanford.edu/class/math220a/handouts/firstorder.pdf>
(Zugriff: 07.03.2018)
- [7] Levandosky, Julie: 3 Conservation Laws. Notizen zur Vorlesung: Partial Differential Equations of Applied Mathematics. Herbst 2002
<https://web.stanford.edu/class/math220a/handouts/conservation.pdf>
(Zugriff: 07.03.2018)
- [8] Strauss, Walter A.: Partielle Differentialgleichungen. Eine Einführung. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig/Wiesbaden 1995. Übersetzt von Helmut Salzmann