



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Hole in one –

Eine mathematische Betrachtung des Golfsports“

verfasst von / submitted by

David-Benedikt Schweiger

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfillment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet::

Lehramtsstudium UniStG
UF Mathematik UniStG
UF Physik UniStG

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, Juli 2018

David-Benedikt Schweiger

Danksagung

An dieser Stellen möchte ich all jenen meinen Dank ausdrücken, die mich während meiner Studienzeit und im Rahmen dieser Diplomarbeit unterstützt und begleitet haben.

Ganz besonderes möchte ich mich bei meinem Betreuer ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith bedanken, der mir nicht nur während der Erarbeitung dieser Arbeit, sondern von Anfang bis Ende meines Studiums jederzeit mit Rat und Tat zur Seite stand.

Des Weiteren bei meinen Eltern Silvia und Herbert, die mich während meiner Ausbildung nicht nur finanziell sondern vor allem liebevoll begleitet und unterstützt haben und erst so meinen Studienabschluss ermöglicht haben.

Darüber hinaus gilt mein Dank meinen Geschwistern Raffaella und Simon sowie meiner Partnerin Magdalena, die jederzeit ein offenes Ohr für mich hatten und mir so bei der Bewältigung vieler Probleme geholfen haben.

Zu guter Letzt danke ich meinen langjährigen besten Freunden Bernd, Bernhard, Gerald, Joachim und Markus, welche mir privat immer zu Seite standen und so wesentlich dazu beigetragen haben, Kraft für einen erfolgreichen Studienabschluss zu tanken, sowie meinen Studienkolleginnen und Kollegen Julia, Laura und Michael, die mich meine gesamte Studienzeit begleitet und unterstützt haben und so zu guten Freunden wurden.

Zusammenfassung

Vorliegende Diplomarbeit soll zeigen, wie sehr Mathematik und Golf miteinander verbunden sind. Durch verhältnismäßig einfache mathematische Operationen wie Wahrscheinlichkeitsrechnungen, Differenzial- oder Integralrechnungen werden z.B. Flugkurven des Balles errechnet bzw. die Chance einen gelungenen Putt zu spielen. Darüber hinaus beschäftigt sich die Arbeit auch mit der Frage, wie fair die Berechnungen für das sogenannte Handicap aus mathematischer Sicht sind.

Daneben lernen Leserinnen und Leser auch noch golfspezifische Einflussgrößen, wie zum Beispiel die sogenannten Dimples, die Einbuchtungen auf der Außenseite des Golfballs und deren Einfluß auf die Flugweite kennen. Die Arbeit soll sowohl Mathematikerinnen und Mathematiker, insbesondere Lehrende, ansprechen die neue Themen für den Unterricht suchen, wie auch Golferinnen und Golfer, die an Mathematik interessiert sind oder belegen möchten, wie schwierig es schon rein mathematisch betrachtet ist, eine gute Runde Golf zu spielen.

Abstract

This thesis was written to show the complex connection of mathematics and golfing. By using seemingly simple mathematical operations such as probability statistics, differential and integral equations the flight curves of balls can be approximated as well as the chance of striking a perfect putt. Furthermore this work shows how fair the calculations concerning handicaps are from a mathematical perspective.

The readers will also be schooled in the influences in golf, such as dimples - the notches on the surface of the ball – and their affect concerning the distance of flight. This thesis is geared to mathematicians, specifically lectors seeking new themes for lessons, as well as golfers, who are interested in mathematics or would like to prove, just how hard it is (from a mathematical perspective) to have a good game in golf.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Golfausrüstung	8
2.1	Schlägeraufbau	8
2.1.1	Griff	8
2.1.2	Schaft	9
2.1.3	Schlägerkopf	11
2.2	Schlägertypen	12
2.2.1	Hölzer	12
2.2.2	Eisen	14
2.2.3	Hybrids oder Rescues	15
2.2.4	Wedges	16
2.2.5	Putter	16
2.3	Der Golfball	17
3	Die Aerodynamik des Golfsports	20
3.1	Reynoldszahl	20
3.2	Luftwiderstand	21
3.3	Magnus-Effekt	22
3.4	Der Einfluss des Spins	24
3.5	Die Wirkung der Dimples	27
4	Die typische Flugkurve eines Golfballs	29
4.1	Die Wurfparabel	29
4.2	Flugbahn mit Luftwiderstand	31
4.3	Flugbahn mit Luftwiderstand und Spin	37
5	Wahrscheinlichkeit und Statistik des Puttens	52
5.1	Statistik	52
5.2	Ein Wahrscheinlichkeitsmodell für das Putten	59
6	Fairness der Handicapsysteme	66
6.1	Das amerikanische System der USGA	66
6.2	Das europäische System der EGA	68
6.3	Fair oder nicht fair?, dass ist hier die Frage!	69
6.4	Handicapberechnung in Teambewerben	82
7	No risk no fun?	85
8	Conclusio	91
	Literatur	92

1 Einleitung

Ich habe zwei große Interessen, Mathematik und Golf. Was lag näher, als eine Diplomarbeit zu schreiben, die diese beiden Interessensfelder miteinander verbindet. Hinzu kommt, dass ich unter anderem eine Sportklasse unterrichte. Ich bemerke immer wieder, dass die Schülerinnen und Schüler dann besonders interessiert mitarbeiten, wenn die Beispiele die ich wähle, ihren besonderen Hang zum Sport treffen. Also wollte ich mit dieser Arbeit auch zeigen, dass es bereits mit einfachen mathematischen Methoden möglich ist, Golfspezifika wie die Flugkurve des Balles oder die Wahrscheinlichkeit eines erfolgreichen Putts zu berechnen.

Am Beginn meiner Arbeit gehe ich näher auf die Golfausrüstung, insbesondere auf die Schläger und den Ball ein. Diese beiden Dinge haben einen besonderen Einfluss auf die von mir angestregten Berechnungen. Gleichzeitig soll den Golfaien aber auch ein wenig Einblick in das bei diesem Sport verwendete „Werkzeug“ gegeben werden.

Danach befasst sich die Arbeit mit der Aerodynamik des Golfsports. Ich beziehe mich auf physikalische Größen wie die Reynoldszahl oder Gesetzmäßigkeiten wie den Magnus-Effekt. Dabei gehe ich näher auf golfspezifische Einflussgrößen wie den Spin, also die Balldrehung und die Dimples, das sind die kleinen „Einbuchtungen“ auf der Oberfläche des Balls, die zu einem höheren und längeren Ballflug führen, ein.

Eine wichtige Voraussetzung für ein erfolgreiches Spiel ist eine optimale Flugkurve und die sich ergebende Flugweite des Balles. Alle Berechnungen zu diesem Kapitel erfolgten über das Lösen von verschiedenen Arten von Differentialgleichungen. Zuerst wurden lediglich die Messgrößen Abfluggeschwindigkeit und Abflughöhe in die Berechnungen miteinbezogen. Am Anfang der Berechnungen stand die Wurfparabel, also die Flugkurve im Vakuum ohne Auftrieb und Luftwiderstand. Die weiteren Berechnungen erfolgten unter Einbeziehung der von der Ballgeschwindigkeit abhängigen Kräfte Luftwiderstand und Auftrieb. Letztendlich wurden die Ergebnisse mit den Messungen des TrackMan, eines professionellen Radarmessgerätes, das im Profigolfsport eingesetzt wird, verglichen.

Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit dem erfolgreichem Putt, also dem Schlag auf dem Grün, der ins Loch führen sollte. Dabei wird auf ein Experiment von Frank Werner und Richard Greig näher eingegangen. Bei diesem wurden Golfspielerinnen und Golfspieler unterschiedlicher Spielstärken einbezogen. Eruiert wurde dabei die sogenannte „Make Zone“, also jener Bereich in dem ein Putt aus verschiedenen Distanzen fällt - in Abhängigkeit von Ballgeschwindigkeit und Richtungsabweichung.

Ausgehend von einem weiteren Experiment unter Einbeziehung von Profigolfe-

rinnen und Profigolfern, wird weiters ein Wahrscheinlichkeitsmodell vorgestellt, dass mit trigonometrischen Überlegungen und der Standardnormalverteilung die Wahrscheinlichkeit eines erfolgreichen Putts aus unterschiedlichen Distanzen errechnet.

Gegen Ende der Arbeit wird noch ein besonderes Spezifikum des Golfsportes mathematisch analysiert, das Handicap. Abhängig von der Spielstärke erhalten Spielerinnen und Spieler ein sogenanntes Handicap. „Schlechtere“ Spieler (höheres Handicap) dürfen damit mehr Schläge in einem Spiel brauchen als „bessere“. Damit soll gewährleistet werden, dass auch Golferinnen und Golfer, die formal schwächer eingestuft sind, eine Runde gewinnen können. Mittels Normalverteilung wird überprüft, wie wahrscheinlich dies auch ist.

Im letzten Kapitel unter dem Titel „No risk no fun“ wird über die Gauß'sche Normalverteilung ermittelt, ob es für das Ergebnis besser ist, risikoreich oder auf Sicherheit zu spielen. Ausgehend vom Abschlag auf ein enges Fairway wird untersucht, ob mit dem Driver (weniger fehlerverzeihend) oder mit einem Eisen (fehlerverzeihender aber kürzere Schlagweite) abgeschlagen werden sollte.

2 Golfausrüstung

In diesem Abschnitt werde ich etwas näher auf die Ausrüstung einer typischen Golfspielerin und eines typischen Golfspielers eingehen. Hierbei ist es vor allem wichtig, die Eigenschaften der unterschiedlichen Golfschläger und deren Einfluss auf das Spiel zu betrachten. Am Ende des Kapitels werde ich noch einen genaueren Blick auf die richtige Auswahl des Golfballes legen, da dieser für ein erfolgreiches Golfspiel mindestens genauso wichtig ist, wie die richtigen Golfschläger.

2.1 Schlägeraufbau

Der Aufbau eines Golfschlägers ist recht simpel und bei jedem Typ gleich. Klassisch setzt sich ein Schläger aus einem Griff, einem Schaft und einem Schlägerkopf zusammen (siehe Abb 1). Diese drei Komponenten werden im Folgenden näher vorgestellt.

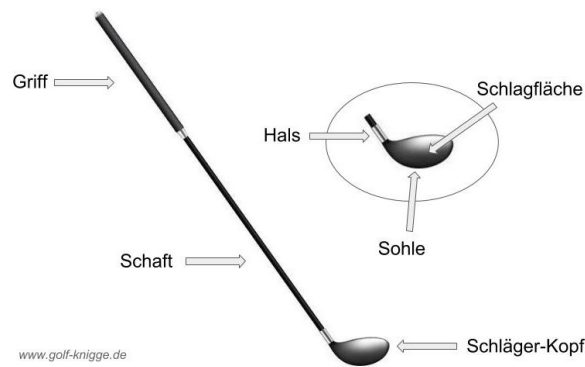


Abbildung 1: Skizze eines Schlägeraufbaus [16, Stand: 23.08.2017]

2.1.1 Griff

Der Griff eines Golfschlägers ist die Verbindung des menschlichen Körpers mit dem Spielgerät, weshalb beim Kauf neuer Schläger durchaus auch auf den richtigen Griff und hierbei vor allem auf dessen Dicke geachtet werden sollte. Die richtige Griffstärke ist ausschlaggebend dafür, ob man den Schläger locker in der Hand halten kann oder nicht und richtet sich nach der Größe der Hand der Spielerin oder des Spielers. Sowohl zu dünne als auch zu dicke Griffe führen zu ungewollten Muskelanstrengungen, was eine geringere Beweglichkeit der Handgelenke mit sich bringt. Daraus resultiert im Endeffekt eine kleinere Schwunggeschwindigkeit als mit der richtigen Griffdicke. Viele Golferinnen und Golfer wissen nicht um die Bedeutung des richtigen Griffes und kaufen daher von der Stange. Der Standarddurchmesser eines Herrengriffs beträgt 22,8mm und eines

Damengriffs 21,7mm . In nachfolgender Tabelle ist die korrekte Griffstärke für verschiedene Handgrößen abzulesen.¹

Länge Handgelenk bis Fingerspitze	Länge Mittelfinger		
	5,1 - 7,6 cm	7,6 - 10,2 cm	10,2 cm plus
unter 14,5 cm	Junior		
14,6 - 16,5 cm	Lady	Lady + 1/64	Lady + 1/32
16,6 - 17,8 cm	Man -1/64	Man	Man + 1/64
17,8 - 19,7 cm	Man	Man + 1/64	Man + 1/32
19,7 - 21,0 cm	Man + 1/64	Man + 1/32	Man + 1/20
21,0 - 22,2 cm	Man + 1/32	Man + 1/20	Man + 1/12
22,2 - 24,8 cm	Man + 1/16	Man + 1/12	Man + 1/10

Tabelle 1: Korrekte Griffstärke für unterschiedliche Handgrößen [15, Stand: 30.03.2017]

Wobei die oben erwähnte Größenkorrektur zum Standarddurchmesser addiert oder subtrahiert wird. Die Umrechnung der Größenkorrekturen sind in Tabelle 2 zu sehen.²

Korrektur	Millimeter
1/64	0,4
1/32	0,8
1/20	1,3
1/16	1,6
1/12	2,1
1/10	2,5

Tabelle 2: Größenkorrekturen der Griffstärke[15, Stand: 30.03.2017]

2.1.2 Schaft

Der Schaft ist das Verbindungsstück zwischen dem Griff und dem Schlägerkopf, wobei dieser am Griffende etwas dicker ist als in Schlägerkopfnähe. Typischerweise werden Schäfte aus Graphit oder Stahl hergestellt. Graphitschäfte werden vor allem für Hölzer verwendet, Stahlschäfte dagegen für Wedges. Die normalen Eisenschläger werden sowohl mit Graphit als auch mit Stahlschäften angeboten. Das durchschnittliche Gewicht eines Graphitschafts beträgt etwa 50g, während Stahlschäfte deutlich schwerer sind. Der obere Durchmesser beträgt ca. 1,5cm, der untere Durchmesser ca. 0,9cm. Die Anforderungen an einen Schaft sind ziemlich hoch. Zum einen sollte er möglichst leicht sein, da ansonsten mehr Arbeit

¹vgl. [15, Stand: 30.03.2017]

²vgl. [15, Stand: 30.03.2017]

aufgewendet werden müsste, um ihn zu beschleunigen. Zum anderen sollte der Schaft stabil sein, um Fliehkräfte und Verzögerungen bei Fehlschlägen auszuhalten.³

Wenn man sich nach den Eigenschaften eines Schafts umsieht, wird einem auffallen, dass für jeden Schaft drei wesentliche Kenngrößen angegeben werden. Diese sind der Flex, der Kick-Point und die Verwindungssteifigkeit (engl. Torque). Vor allem der Flex ist den meisten Golferinnen und Golfern bekannt, dieser gibt die Elastizität des Schaftes an, also wie leicht bzw. schwer sich dieser verbiegen lässt. Die von den meisten Herstellern verwendete Kennzeichnung ist in Tabelle 3 zu sehen.⁴

Flex	Bedeutung
L	Light bzw. Ladies
A	Amateur bzw. Senior
R	Regular
S	Stiff
X	Extra Stiff

Tabelle 3: Shaft-Flex, vgl. [11, Seite 128]

Ein Problem dieser Bezeichnungen ist, dass sie nicht eindeutig bestimmt sind. So kann beispielsweise ein Regular Schaft einer Firma gleichbedeutend mit einem Stiff Schaft eines anderen Herstellers sein. Den richtigen Schaftflex zu finden kann sehr wichtig sein, da ein zu weicher Schaft zu einem zu hohen und links verzogenen sowie ein zu steifer Schaft zu einem zu niedrigen und rechts verzogenen Ballflug führen kann (siehe Abb. 2).⁵

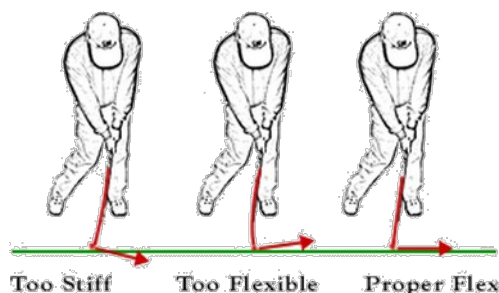


Abbildung 2: Auswirkung des Shaftflex [35, Stand: 23.08.2017]

„ Im Gegensatz zum Flex ist der Kick-Point eindeutig definiert. Das ist die Lage des Punkts der größten Auslenkung bei einem statisch durchgebogenen

³vgl. [11, Seite 127]

⁴vgl. [11, Seite 128]

⁵vgl. [3, Stand 09.04.2016]

Schaft. Er ist definiert (in Prozent) als der Abstand dieses Punkts zur Shaftspitze, dividiert durch die Gesamtlänge des Shafts. Ein niedriger Kick-Point liegt unter 40%, ein hoher über 44%.⁶ Ein niedriger Kick-Point verhilft einer Spielerin oder einem Spieler zu einem höheren Ballflug, ein weiter oben gelegener dagegen zu einem niedrigeren (siehe Abb 3).⁷



Abbildung 3: Kick-Point eines Golfschafts [3, Stand: 09.04.2016]

Die dritte und letzte Kenngröße ist, wie schon erwähnt, die Verwindungssteifigkeit oder auch Torsionssteifigkeit. Darunter versteht man die Verdrehung des Schafts in der Längsachse während des Durchschwungs. Die üblichen Werte liegen zwischen einem und zehn Grad. Je niedriger die Verwindungssteifigkeit ist, umso weniger verdreht sich das Schlägerblatt bei nicht perfekt getroffenen Bällen. Dies ist natürlich wünschenswert, allerdings macht ein kleiner Torque den Schaft steifer, was zu Weitenverlust führen kann.⁸

2.1.3 Schlägerkopf

Die meisten Schlägerköpfe der Eisenschläger bestehen nicht, wie der Name vermuten lässt, aus Eisen sondern aus unterschiedlichen Stahllegierungen. Bei den Hölzern werden vor allem Titanlegierungen verwendet. Der Grund hierfür ist das geringe Gewicht. Aufgrunddessen kann man Schlägerköpfe mit sehr großem Volumen herstellen. Das maximale Volumen eines Kopfes ist allerdings in den Golfregeln auf 460 cm^3 beschränkt worden.⁹

Bei der Herstellung eines Golfschlägerkopfes werden verschiedene Verfahren angewendet. Die meisten werden gegossen, wobei hier beim Übergang des flüssigen Metalls zu festem Metall Hohlräume entstehen können, welche im schlimmsten Fall zum Bruch des gegossenen Kopfes führen können. Diese Hohlräume können beim zweiten Herstellungsverfahren, dem Schmieden, nicht entstehen. Allerdings ist diese Methode deutlich teurer, weshalb nur wenige exklusive Golfschläger geschmiedet werden.¹⁰

Jeder Golfschlägerkopf hat vier wesentliche geometrische Eigenschaften. Zum einen die Neigung der Schlagfläche, der sogenannte Loft des Schlägers. Zum anderen der Liewinkel (kurz Lie), der Offset und der Bounce.¹¹ Der Liewinkel ist definiert als Winkel zwischen Schaft und Boden und ist maßgeblich dafür, dass

⁶[11, Seite 128]

⁷vgl. [3, Stand 09.04.2016]

⁸vgl.[3, Stand 09.04.2017]

⁹vgl.[11, Seite 142]

¹⁰vgl. [11, Seite 142-143]

¹¹vgl. [11, Seite 144]

der Schlägerkopf richtig am Gras aufliegt. Da natürlich nicht alle Golfspielerinnen und Golfspieler gleich groß sind bzw. den gleichen Golfschwung haben, ist oftmals eine Anpassung des Lie erforderlich, um den Ball richtig treffen zu können.¹²

„Der Offset beschreibt den horizontalen Abstand zwischen Shaftspitze und Schlagfläche, das heißt, um wie viel die Schlagfläche relativ zur Shaftachse zurückversetzt ist“¹³. Ein hoher Offset erleichtert es also, die Hände im Treffmoment vor den Ball zu bekommen, was essentiell für einen guten Ballflug ist. Als Bounce wird jener Winkel bezeichnet, welcher vom Auflagepunkt und der Vorderkante des Schlägerkopfes gebildet wird. Ein hoher Bouncewinkel erleichtert es beispielsweise Bunkerschläge auszuführen, weshalb man ihn hauptsächlich bei den Wedges (siehe 2.2.4) findet.¹⁴

Ein weiteres Augenmerk bei der Betrachtung eines Schlägerkopfes, stellt das Design der Schlagfläche dar. Alle, die schon ein mal einen Golfschläger gesehen haben, werden bemerkt haben, dass sich auf der Schlagfläche Rillen befinden, die sogenannten „Grooves“. Bei der Gestaltung der Schlagfläche müssen sich die Hersteller allerdings an sehr strenge Regeln was Richtung, Form und Tiefe der Rillen betrifft halten. Den Effekt der Rillen kann man am ehesten mit dem Profil eines Autoreifens vergleichen. Benötigt werden sie also vor allem bei Regen oder im tiefen Gras, verzichten könnte man auf sie, wenn man auf dem Fairway liegt.¹⁵

2.2 Schlägertypen

Im Folgenden werde ich kurz die einzelnen Golfschlägerarten vorstellen, um zu sehen, wo die größten Unterschiede liegen und wozu sie verwendet werden.

Prinzipiell gibt es 5 verschiedene Schlägertypen: Die Hölzer, Hybrids (bzw. Rescues), Eisen, Wedges und den Putter.¹⁶ Laut Regelwerk ist es einer Golfspielerin oder einem Golfspieler erlaubt, 14 Schläger auf einer Golfrunde mitzuführen, wobei jeder selbst entscheiden darf welche das sein sollen. Typischerweise sind das 3 Hölzer, ein Hybrid, 7 Eisen, 2 Wedges, und ein Putter.¹⁷

2.2.1 Hölzer

Zu den Hölzern zählt man den Driver und die sogenannten Fairwayhölzer (siehe Abb. 4 und 5). Der Name leitet sich aus der Tatsache ab, dass die Köpfe dieser Schläger früher aus Holz gefertigt wurden. Sie sind die längsten Schläger und besitzen die volumstgrößten Schlägerköpfe. Bezeichnet werden sie mit Nummern, beginnend mit 1. Das Holz 1 wird Driver genannt und ist der längste aller Golfschläger. Als Folge dessen ist er auch am schwersten zu kontrollieren und stellt für viele Golferinnen und Golfer ein Problem dar. Die Fairwayhölzer beginnen

¹²vgl. [18, Stand: 30.03.2017]

¹³[11, Seite 144-145]

¹⁴vgl.[11, Seite 145]

¹⁵vgl. [11, Seite 146]

¹⁶vgl.[26, Stand 09.04.2016]

¹⁷vgl. [11, Seite 26]

typischerweise mit dem Holz 3. Je höher die Nummer des Holzes umso höher ist der Loft und kürzer der Schaft des Schlägers (siehe Tab 4). Das 3er Holz ist somit der zweitlängste Schläger, da Hölzer mit der Nummer 2 zwar existieren aber so gut wie nicht verwendet werden. Fairwayhölzer haben prinzipiell einen kleineren Schlägerkopf als der Driver, was es erleichtert sie direkt vom Boden zu schlagen. Des Weiteren ist es mit einem höheren Loft leichter den Ball in die Luft zu bekommen. Das Holz 1 hingegen sollte nur für den Abschlag vom Tee verwendet werden. Aufgrund der Schlägerlänge, des großen Kopfes und des niedrigen Lofts können mit dem Driver die längsten Schläge produziert werden.¹⁸



Abbildung 4: Typisches Aussehen eines Drivers [33, Stand: 23.08.2017]



Abbildung 5: Typisches Aussehen eines Fairwayholzes [34, Stand: 23.08.2017]

Name	Loft in Grad	Schlägerlänge in inch	Liewinkel in Grad	Schlägerkopfvolumen in cm^3	Schwunggewicht
Driver 10.5°	verstellbar von 9.5 bis 12.5	45.50	58.00 (verstellbar)	460	D3
3W	15	43.00	56.00 (verstellbar)	179	D2
5W	18	42.50	56.50 (verstellbar)	158	D2
7W	21	42.00	58.50	148	D2

Tabelle 4: Produktspezifikationen Callaway Great Big Bertha Epic Hölzer [6, Stand 11.04.2017];[7, Stand 11.04.2017]

Die Länge eines Golfschlägers wird so gut wie immer in Inch (kurz in) angegeben. Einem Inch entsprechen 2,54 Zentimeter. Eine Formel für die Umrechnung ist also wie folgt gegeben:

$$cm = 2,54 * in$$

Eine weitere, noch nicht erwähnte, Kenngröße eines Schlägers ist sein Schwunggewicht. Dieses gibt an, wie schwer sich der Schläger während des Schwungs anfühlt und ist abhängig vom Gesamtgewicht des Schlägers und des Abstandes

¹⁸vgl.[24, Stand: 09.04.2017]; vgl. [26, Stand 09.04.2017]

seines Schwerpunktes zum oberen Griffende. Von diesem Abstand werden 14 Inch abgezogen und mit dem Gesamtgewicht in Unzen ($1\text{oz} = 28,35\text{g}$) multipliziert. Die so errechnete Zahl wird noch in einen Code (A0-E9) umgewandelt, welcher vom Hersteller angegeben wird. Für Schläger im D-Bereich gilt folgende Formel:¹⁹

$$Di = 213,5 + i * 1,75 \quad (1)$$

Einer Erhöhung der Schwungmasse um $1,75\text{ oz/in}$ entspricht also einer Erhöhung des Codes um 1. Die meisten Herrenschläger haben ein Schwunggewicht von D2-D4.²⁰

2.2.2 Eisen

Die meisten Schläger in einem Golfbag sind Eisen. Man erwirbt sie normalerweise in Form eines ganzen Sets beginnend mit dem Eisen 3 bis zum Eisen 9 oder dem Pitching Wedge. 1er und 2er Eisen kann man separat erwerben, werden allerdings kaum gespielt, da sie schwer zu treffen sind. Gleich wie bei den Hölzern erhöht sich mit zunehmender Nummer der Loft und verringert sich die Schaftlänge der Eisen (siehe Tab 5). Das bedeutet allerdings auch, dass die Schlagweite und Flughöhe mit einem Eisen 8 kürzer und höher ist als beispielsweise mit einem Eisen 4. Der Schlägerkopf ist um einiges kleiner und dünner als jener der Hölzer und mit Grooves versehen (siehe Abb 6). Verwendet werden diese Schläger vor allem für kürzere Schläge vom Fairway oder auch vom Tee. Sie sind generell leichter zu kontrollieren als die Hölzer, da sie kürzer sind und einen höheren Loft haben.²¹



Abbildung 6: Typisches Aussehen eines Golfeisens [20, Stand: 23.08.2017]

¹⁹vgl. [11, Seite 126-127]

²⁰vgl. [11, Seite 127]

²¹vgl. [27, Stand: 30.03.2017]; vgl. [26, Stand: 30.03.2017]

Name	Loft in Grad	Schlägerlänge in inch	Liewinkel in Grad	Offset in inch	Graphit Schwunggewicht	Stahl Schwunggewicht
3	19	39.00	60.00	0.22	D0	D2
4	21.5	38.50	60.50	0.20	D0	D2
5	24	38.00	61.00	0.18	D0	D2
6	27	37.50	61.50	0.16	D0	D2
7	31	37.00	62.00	0.15	D0	D2
8	35	36.50	62.50	0.14	D0	D2
9	40	36.00	63.00	0.13	D0	D2
PW	45	35.75	63.50	0.12	D0	D2

Tabelle 5: Produktspezifikationen Callaway Apex CF16 Eisen [4, Stand 11.04.2017]

2.2.3 Hybrids oder Rescues

Hybrid- oder auch Rescueschläger gibt es seit etwa Anfang der 2000er Jahre. Betrachtet man den Schlägerkopf so ist dieser ein Mix aus jenem eines Holzes und eines Eisens, daher auch der Name Hybrid (siehe Abb 7). Diese Schlägerart wurde gebaut, um die langen Eisen zu ersetzen, da die meisten Golferinnen und Golfer sie als leichter zu spielen empfinden als lange Eisen. Bezeichnet werden Hybrids mit denselben Nummern wie Eisen, wobei die jeweilige Zahl für das Eisen steht, welches ersetzt werden soll (siehe Tab 6). Ein 3-Hybrid wird also beispielsweise statt eines Eisen 3 verwendet.²²



Abbildung 7: Typisches Aussehen eine Golfhybrids [21, Stand: 23.08.2017]

²²vgl. [26, Stand:09.04.2017]

Name	Loft in Grad	Schlägerlänge in inch	Liewinkel in Grad	Schwunggewicht
3H	19	40.50	58.50	D1
4H	22	39.75	59.25	D1
5H	25	39.00	60.00	D1
6H	28	38.25	60.75	D1

Tabelle 6: Produktspezifikationen Callaway Steelhead XR16 Hybrids [9, Stand: 11.04.2017]

2.2.4 Wedges

Die Wedges sind eine Unterkategorie der Eisenschläger, da sie die selbe Schlägerkopfform haben nur mit etwas mehr Schlagflächenneigung. Generell gibt es das Pitching Wedge (PW), Gap Wedge (GW), Sand Wedge (SW) und Lob Wedge (LW), wobei das Pitching weniger Loft hat als das Gap Wedge und dieses wiederum weniger als das Sand Wedge usw. Das Hauptaugenmerk dieser Schläger liegt in der Genauigkeit und Kontrolle. Sie werden also für geringe Distanzen oder Schläge aus dem Sandbunker bzw tiefem Rough verwendet. Das Pitching Wedge ist meistens beim Kauf eines Eisensatzes inkludiert, die anderen Schläger können separat, je nach Bedarf, nachgekauft werden. Aufgrund des hohen Lofts dieser Schläger ist es einfach schnell Höhe auf den Ball zu bekommen um so beispielsweise einen Baum, der im Weg steht, zu überspielen.²³

Name = Loft in Grad	Bounce in Grad	Schlägerlänge in inch	Liewinkel in Grad	Schwunggewicht
50	10	35.50	64.00	D3
52	10	35.50	64.00	D3
54	10	35.25	64.00	D4
56	10	35.25	64.00	D4
58	8	35.00	64.00	D4
60	8	35.00	64.00	D4

Tabelle 7: Produktspezifikationen Callaway Mack Daddy Forged Wedges [8, Stand: 11.04.2016]

2.2.5 Putter

Der Putter ist jener Schläger, mit welchem der Ball in das Loch gerollt wird. Er wird also am häufigsten auf dem Grün verwendet. Die Wahl des richtigen Putters fällt meist sehr schwer, da sehr viele verschiedene Bauformen zur Auswahl stehen.²⁴ Klassisch besitzt ein Putter eine gleichmäßige Gewichtsverteilung und eine leicht bananenähnliche Krümmung. In den letzten Jahren haben allerdings die sogenannten Mallet-Putter an Beliebtheit gewonnen.²⁵ Diese haben einen

²³vgl. [29, Stand 09.04.2017]

²⁴vgl. [26, Stand 09.04.2017]

²⁵vgl. [11, Seite 146]

großen Schlägerkopf und verzeihen daher mehr Fehler bei nicht mittig getroffenen Bällen. Mallet-Putter gibt es wiederum in unterschiedlichen Größen und oft auch mit unkonventionellen Kopfformen.²⁶ Die letzte populäre Bauform ist die Blade-Form. Hierbei endet der Schaft des Schlägers an der Ferse des Schlägerkopfes und nicht wie üblich zwischen Ferse und Mitte des Kopfes (siehe Abb 8).²⁷



Abbildung 8: Verschiedene Bauformen eines Putters, von rechts: klassische, Blade und Mallet Form [13, Stand: 23.08.2017]

Egal wie der Putter gebaut wurde, das Gewicht beträgt mehr als 300g und somit mehr als bei jedem anderen Schläger. Die Schlagfläche besitzt keine Grooves, manchmal jedoch ein weiches Insert. Oftmals wird fälschlicherweise angenommen, dass Putter keine Schlagflächenneigung besitzen. Korrekterweise haben sie jedoch einen, wenn auch geringen, Loft von 2° - 4° .²⁸

2.3 Der Golfball

Viele Golferinnen und Golfer wissen nicht, welche wichtige Rolle der Golfball für das Gelingen einer guten Golfrunde spielt. Es werden daher meist gebrauchte und nicht gesäuberte Bälle gespielt, obwohl das Reinigen schon eine einfache Methode wäre, um den Score zu senken. Der Golfball ist ein Hightechprodukt und muss hohen Ansprüchen gerecht werden. Abhängig von der Priorität dieser Ansprüche werden bei der Herstellung unterschiedliche Materialien und Designs verwendet. Allerdings müssen sich die Fabrikanten an gewisse vorgegebenen Richtlinien halten, welche nicht über- bzw unterschritten werden dürfen (siehe Tab. 8).²⁹

²⁶vgl. [26, Stand: 09.04.2017]

²⁷vgl. [11, Seite 146]

²⁸vgl.[11, Seite 146]

²⁹vgl. [11, Seite 153-155]

Eigenschaft	Grenzwert
Masse	< 45,93g
Durchmesser	> 42,67mm
Sphärizität	Kugelform
Abfluggeschwindigkeit (laut Testvorschrift)	< 76,20 m/s
Distanz (laut Testvorschrift)	< 289,86 m

Tabelle 8: Richtlinien für Golfbälle vgl. [11, Seite 155]

Hierbei ist zu erwähnen, dass sowohl die Abfluggeschwindigkeit als auch die Distanz durch komplizierte Messvorschriften festgelegt sind.³⁰

Eine wichtige Eigenschaft des Balles ist seine Härte („Shore Hardness“ nach einer Testvorschrift der American Society for Testing and Materials kurz ASTM). Sie bestimmt wie viel Spin angenommen wird. Je härter ein Ball umso weniger Spin wird angenommen(siehe Abb. 9).³¹

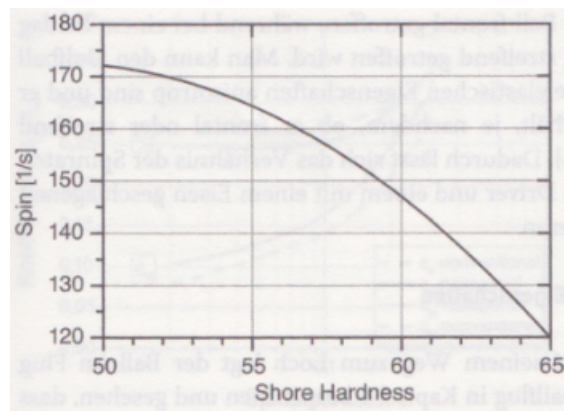


Abbildung 9: Spin in Abhängigkeit der Ballhärte [11, Seite 157]

Um obiges Diagramm zu erstellen, wurde ein Eisen 9 mit Bällen verschiedenster Härten geschlagen und dabei der Spin in Umdrehungen pro Sekunde gemessen. Man kann erkennen, dass die Zunahme der Härte um 15 schon zu einer Abnahme des Spins um etwa ein Drittel der Umdrehungen pro Sekunde führt.³²

Prinzipiell besteht ein Golfball aus einem harten Kern und einigen darüberliegenden Schichten(siehe Abb. 10).Um bei einem Golfschlag eine große Distanz zu erreichen sollte der Spin möglichst gering sein. Andererseits ist es wünschenswert bei kurzen Schlägen ins Grün viel Spin auf dem Ball zu bekommen, damit dieser so schnell wie möglich liegen bleibt. Diese beiden Gegensätze werden bei

³⁰vgl. [11, Seite 154]

³¹vgl. [11, Seite 157]

³²vgl. [11, Seite 157]

der Ballherstellung durch das Verwenden von geeigneten Designs und Kunststoffen realisiert. So kann das Spinverhältnis zwischen einem Abschlag mit dem Driver und einem Annäherungsschlag mit einem kurzen Eisen auf weniger als 0,5 reduziert werden. Klar ist auch, dass ein Golfball die meiste Zeit in der Luft verbringt, weshalb das größte Ziel der Hersteller ist, einen Ball zu produzieren, welcher den Luftwiderstand reduziert und die Auftriebskraft vergrößert. Dies sind nämlich jene Kenngrößen, welche die aerodynamischen Eigenschaften des Balls bestimmen. Um dies zu erreichen besitzt ein Golfball kleine Einbuchtungen auf seiner Oberfläche, die sogenannten „Dimples“. Bei der Anzahl und dem Design dieser Grübchen sind den Fabrikanten keine Grenzen gesetzt, der Ball muss lediglich symmetrisch sein. Deshalb wird hier auch sehr viel experimentiert. So gibt es beispielsweise Golfbälle mit runden, hexagonalen und auch dualen Dimples. Die Einbuchtungen wirken der Ausbildung einer breiten Wirbelschlepe entgegen, da sie ein frühzeitiges Abreißen der Strömung um den Ball verhindern (mehr dazu siehe 3.3). Dies ist der Grund warum ein Ball mit Dimples weiter fliegt als ohne.³³



Abbildung 10: Aufbau eines Golfballs [5, Stand: 23.08.2017]

³³vgl. [11, Seite 154-160]

3 Die Aerodynamik des Golfsports

Die Flugbahn eines Golfballes wird neben der Erdbeschleunigung von zwei aerodynamischen Kräften, die auf den Ball wirken, bestimmt. Zum einen ist dies der Luftwiderstand zum anderen eine Auftriebskraft, die aufgrund der Rotation des Balles auftritt.³⁴ Ohne diesen Kräften würde sich eine bei weitem andere Flugkurve ergeben. So bewegt sich etwa ein langsam geworfener Ball auf einer parabelförmigen Bahn, da hier die aerodynamischen Kräfte nur schwach wirken. Bei einem Golfball, der mit etwa 225 km/h durch die Luft fliegt, ist dies hingegen anders. Deshalb weicht die tatsächliche Flugkurve eines gut geschlagenen Golfballes auch von der Wurfparabel ab.³⁵

Seit dem Jahr 1848 wurden Golfbälle aus einem Gummi namens Gutta-Percha hergestellt. Direkt nach der Fertigung hatten diese eine glatte Oberfläche, welche sich aber während der Benutzung aufraute. Es zeigte sich, dass die raue Oberfläche eine deutliche Auswirkung auf die aerodynamischen Eigenschaften des Balles hatte, da diese besser flogen.³⁶ Aus diesem Grund haben Golfbälle heutzutage ca. 330 meistens runde Dimples an der Oberfläche.³⁷ (siehe Punkt 2.3)

3.1 Reynoldszahl

In der Strömungslehre verwendet man die Reynoldszahl um zu bestimmen, ob die Strömung laminar oder turbulent ist. Bei einer laminaren Strömung strömt das Fluid in Schichten, die sich nicht vermischen. Somit handelt es sich um eine Strömung ohne Turbulenzen (Verwirbelungen). Im Gegensatz dazu treten bei einer turbulenten Strömung Verwirbelungen auf.³⁸

Sie ist definiert als:

$$\text{Re} = \frac{\rho L u}{\eta} \quad (2)$$

Wobei ρ die Dichte des Fluids, u die Relativgeschwindigkeit zwischen Fluid und des umströmten Körpers, L die Dimension des Körpers (im Falle des Golfballs der Durchmesser) und η die dynamische Viskosität ist.³⁹

Der Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung erfolgt bei einer kritischen Reynoldszahl Re_{krit} , welche nicht berechnet werden kann, sondern für jedes Strömungsproblem empirisch ermittelt werden muss.⁴⁰

Vernachlässigt man den Wind entspricht im Falle eines Golfballs die Relativgeschwindigkeit u der Ballgeschwindigkeit v . Setzt man in Gleichung 2 realistische Werte für den Flug eines Golfballs ein (Balldurchmesser = 0,04267m, Dichte

³⁴vgl. [1, Seite 112]

³⁵vgl. [22, Seite 65]

³⁶vgl. [22, Seite 66]

³⁷vgl. [1, Seite 112]

³⁸vgl. [30, Stand: 25.04.2017]

³⁹vgl. [11, Seite 68]

⁴⁰vgl. [32, Stand: 25.04.2017]

der Luft = $1,1839 \text{ kg/m}^3$, dynamische Viskosität der Luft = $0,0000171 \text{ kg/ms}$ und Ballgeschwindigkeit = 75 m/s) so erhält man für die Reynoldszahl:

$$Re = \frac{1,1839 * 0,04267 * 75}{0,0000171} \approx 2,2 * 10^5$$

Dieser Wert ist im Bereich der für eine Kugel geltenden kritischen Reynoldszahl, weshalb die Strömung um einen Golfball turbulent ist.⁴¹

3.2 Luftwiderstand

Wie schon erwähnt wirken auf einen Golfball während des Fluges zwei aerodynamische Kräfte. Eine davon ist der Luftwiderstand, welcher üblicherweise wie folgt definiert ist:

$$K_w = c_w * \frac{1}{2} * \rho * A * u^2 \quad (3)$$

Wobei A die Querschnittsfläche des umströmten Körpers (im Falle des Golfballes ein Kreis mit Fläche $A = r^2\pi$) und c_w ein dimensionsloser Koeffizient namens Widerstandsbeiwert ist.⁴²

Bearmen und Harvey haben untersucht, ob der Widerstandsbeiwert unabhängig von der Reynoldszahl und somit auch unabhängig von der Relativgeschwindigkeit ist, denn dann würde der Luftwiderstand K_w quadratisch von der Relativgeschwindigkeit abhängen. Das Ergebnis ihrer Untersuchungen ist in Abbildung 11 zu sehen.⁴³

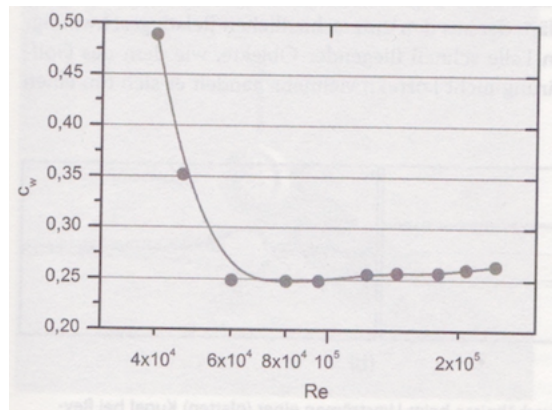


Abbildung 11: Widerstandsbeiwert c_w in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re [11, Seite 69]

Man sieht, dass der Widerstandsbeiwert im Reynoldszahlenbereich von $4 \cdot 10^4$ bis $4 \cdot 10^6$ indirekt proportional zur Relativgeschwindigkeit ist. Dies bedeutet

⁴¹vgl. [11, Seite 68]

⁴²vgl. [11, Seite 69]

⁴³[11, Seite 69]

wiederum eine lineare Abhängigkeit des Luftwiderstands von der Geschwindigkeit. Allerdings treten derartige Reynoldszahlen nur bei sehr langsam fliegenden Golfbällen auf. Der interessantere Bereich für den Golfsport ist zwischen $6 \cdot 10^4$ und $3 \cdot 10^5$. Innerhalb dieses Bereichs ändert sich der Widerstandbeiwert c_w nur marginal, weshalb man sagen kann, dass dieser nahezu unabhängig von der Relativgeschwindigkeit ist. Wie oben erwähnt ergibt sich daraus eine quadratische Abhängigkeit des Luftwiderstands von u .⁴⁴

Bewegt sich ein Körper durch die Luft versucht diese ihn zu umströmen. Dies gelingt allerdings nur solange die Reynoldszahl kleiner als Re_{krit} ist. Dann reißt die Strömung ab und es bildet sich eine Wirbelschleppe hinter dem Körper, welche ein Bereich verwirbelter Luft ist. Diese Wirbelschleppe erzeugt den überwiegenden Anteil des Luftwiderstandes eines Golfballes. Je früher die Strömung abreißt, umso breiter ist dieser Bereich und umso höher ist der Luftwiderstand.⁴⁵

3.3 Magnus-Effekt

Fliegt ein rotierender Körper durch ein Fluid, so tritt der sogenannte Magnus-Effekt auf. Er ist verantwortlich für die Auftriebskraft

$$K_M = c_M * \frac{1}{2} * \rho * A * u^2, \quad (4)$$

die auf verschiedenste Bälle in Ballsportarten wirkt, so auch auf einen Golfball. Dieser rotiert nämlich in der Luft um seine eigene Achse.⁴⁶

Erklärt wird dieser Effekt durch den asymmetrischen Strömungsabriss. Wie schon in Punkt 3.2 erwähnt, kommt es bei einem Golfball irgendwann zu einem Strömungsabriss. Der Ablösepunkt hängt von der Relativgeschwindigkeit ab, welche an der Ballunterseite höher ist als an der Balloberseite. Der Grund hierfür ist, dass sich ein Golfball rückwärts dreht (=Backspin) und somit dreht sich die Oberseite mit dem Luftstrom und die Unterseite entgegen dem Luftstrom. Durch die höhere Geschwindigkeit erfolgt die Ablösung auf dieser Seite früher, was dazu führt, dass die Wirbelschleppe zur Seite der früheren Ablösung abgelenkt wird anstatt sich hinter dem Ball auszubilden. Aufgrund des dritten Newton'schen Axioms (actio=reactio) entsteht eine entgegengesetzt gerichtete Kraft auf den Ball.⁴⁷

Die erzeugte Auftriebskraft steht sowohl auf die Flugrichtung, als auch auf die Drehachse normal. In Abbildung 12 ist die Richtung der auf einen Golfball wirkenden aerodynamischen Kräfte gezeigt.⁴⁸

⁴⁴vgl. [11, Seite 69]

⁴⁵vgl. [11, Seite 69-70]

⁴⁶vgl. [11, Seite 69-70]

⁴⁷vgl.[11, Seite 70-71]

⁴⁸vgl. [31, Seite 16-17]

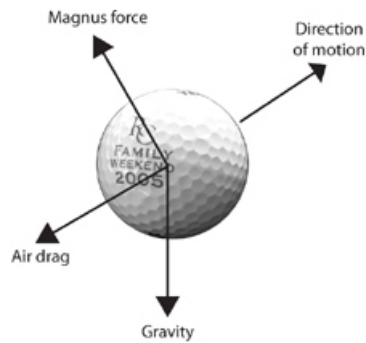


Abbildung 12: Richtung der aerodynamischen Kräfte auf einen Golfball[31, Seite 17]

Wie man deutlich erkennt steht die Die Magnus- oder Auftriebskraft tatsächlich normal auf die Bewegungsrichtung des Balles, während der Luftwiderstand entgegengesetzt zu dieser wirkt. Natürlich spielt hier auch die Gravitation oder Erdanziehung eine Rolle. Diese zeigt wie üblich in Richtung Boden. Ein komplett gerade geschlagener Ball besitzt ausschließlich Backspin. Daher zeigt in diesem Fall die Auftriebskraft nur nach oben. Dies geschieht im wahren Leben allerdings nur äußerst selten. In den meisten Fällen besitzt ein Golfball überwiegend Backspin aber auch ein wenig Seitenspin. In diesem Fall zeigt die Auftriebskraft, wegen der schrägen Drehachse, nach rechts oder links oben (siehe Abb 13). Dies führt zu, nach rechts oder links, verzogenen Golfschlägen.⁴⁹

⁴⁹vgl.[31, Seite 17]

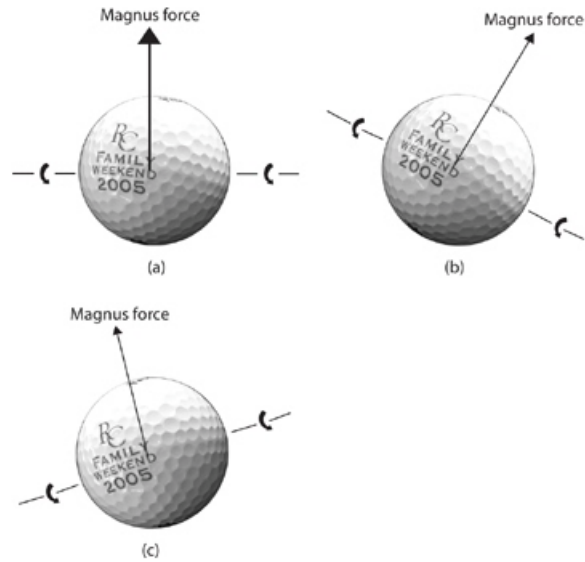


Abbildung 13: Richtung der Auftriebskraft, bei verschiedenen Spinarten[31, Seite 18]

3.4 Der Einfluss des Spins

Um den Einfluss des Spins auf die Aerodynamik zu untersuchen führt man den Spinparameter S ein. Er ist wie folgt definiert:

$$S = \frac{\omega * r}{u} \quad (5)$$

Wobei ω die Kreisfrequenz, r den Radius des Balles und u die Fluggeschwindigkeit darstellt.⁵⁰

Der Spinparameter S beschreibt also das Verhältnis der Rotationsgeschwindigkeit zur Fluggeschwindigkeit des Golfballs. Bearman und Harvey haben nun die Abhängigkeit der Koeffizienten c_w und c_M des Luftwiderstandes und der Auftriebskraft vom Spinparameter untersucht. Sie führten hierzu Messungen in einem Windkanal durch und erhielten folgendes Ergebnis (siehe Abb. 14):⁵¹

⁵⁰vgl. [11, Seite 71-72]

⁵¹vgl. [11, Seite 72]

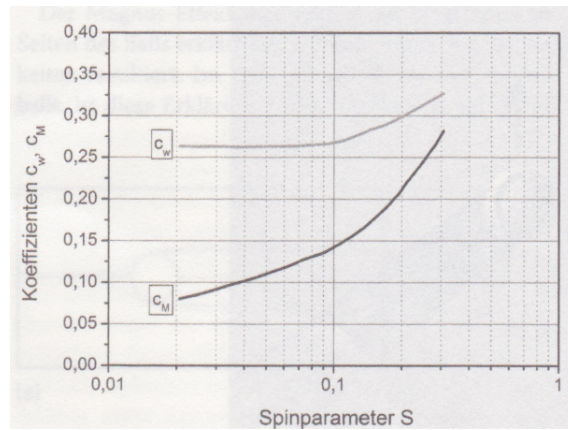


Abbildung 14: Widerstands- und Auftriebsbeiwert c_w und c_M in Abhängigkeit des Spinparameters [11, Seite 72]

Liegt der Spinparameter in einem Bereich kleiner als 0,1, so hängen sowohl der Widerstandsbeiwert als auch der Auftriebsbeiwert quadratisch von der Relativgeschwindigkeit ab. Dies liegt daran, dass die beiden Werte sich in diesem Bereich kaum ändern.⁵²

Aufgrund von Reibung reduziert sich während des Ballflugs sowohl die Geschwindigkeit als auch die Eigenrotation des Golfballs. Man nimmt an, dass diese Reibung proportional zur Rotationsgeschwindigkeit ist und kann daher mathematisch durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{\omega(t)}{\tau} \quad (6)$$

Wobei τ eine Zeitkonstante ist.⁵³

Die Lösung dieser Gleichung, mit Anfangsbedingung $\omega(0) = \omega_0$ kann wie folgt berechnet werden:

⁵²vgl. [11, Seite 72]

⁵³vgl. [11, Seite 73]

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega(t)}{dt} &= -\frac{\omega(t)}{\tau} / : \frac{\omega(t)}{\tau} \\
\Longleftrightarrow \frac{\tau * \frac{d\omega(t)}{d\tau}}{\omega(t)} &= -1 / \int dt \\
\Longleftrightarrow \int \frac{\tau * \frac{d\omega(t)}{d\tau}}{\omega(t)} dt &= \int -1 dt \\
\Longleftrightarrow \tau * \ln(\omega(t)) &= -t + k \\
\Longleftrightarrow \omega(t) &= k * e^{-\frac{t}{\tau}}
\end{aligned}$$

Durch die Anfangsbedingung erhält man für die Konstante k:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= k * e^{-\frac{0}{\tau}} \\
\Longleftrightarrow k &= \omega_0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun folgende Lösung der Differentialgleichung:

$$\omega(t) = \omega_0 * e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7)$$

Für die Zeitkonstante τ haben A.J.Smits und D.R.Smiths, mithilfe eines Windkanals, folgende Formel bestimmt:

$$\frac{1}{\tau} = 0,00002 * \frac{u}{r} \quad (8)$$

Wobei u die Ballgeschwindigkeit und r den Ballradius angibt.⁵⁴

Der Spinparameter ist eine zeitabhängige Größe, weil sowohl ω als auch u zeitabhängig sind. Es ist nun so, dass sich die Geschwindigkeit u während des Ballflugs stärker reduziert als die Rotation ω . Das bedeutet wiederum, dass der Spinparameter mit der Zeit größer wird. Wie aus Abbildung 14 ersichtlich ist, vergrößert sich bei einem größeren Spinparameter S jedoch der Auftriebsbeiwert c_M . Aus diesen beiden Tatsachen ist zu erkennen, dass der Magnus-Effekt bei einer längeren Flugdauer immer bedeutender wird. Hiermit kann man auch zwei im Golfsport oft beobachtete Phänomene erklären. Zum einen startet bei vielen Spielern ein Ball gerade, ehe er gegen Ende des Flugs doch noch eine Kurve macht. Zum anderen gibt es Golfspielerinnen und Golfspieler, die ihren Ball mit hoher Geschwindigkeit und wenig Spin in Luft schicken. Dies hat einen flachen

⁵⁴vgl.[11, Seite 73]

und geraden Ballflug zu Beginn als Folge, ehe der Ball plötzlich doch noch zu steigen beginnt und gegen Ende eine beträchtliche Höhe erreicht.⁵⁵

3.5 Die Wirkung der Dimples

Wie schon in Punkt 2.3 erwähnt, helfen die Dimples eines Golfballs den Luftwiderstand zu minimieren und die Auftriebskraft zu erhöhen. Dies ist deshalb sinnvoll, weil der Luftwiderstand den Ball abbremst und daher Länge entzieht. Auf der anderen Seite führt die durch den Magnus-Effekt erzeugte Auftriebskraft zu einem höheren und längeren Ballflug. In Abbildung 15 ist der Luftwiderstand in Abhängigkeit der Fluggeschwindigkeit sowohl für einen Ball mit als auch ohne Dimples dargestellt.⁵⁶

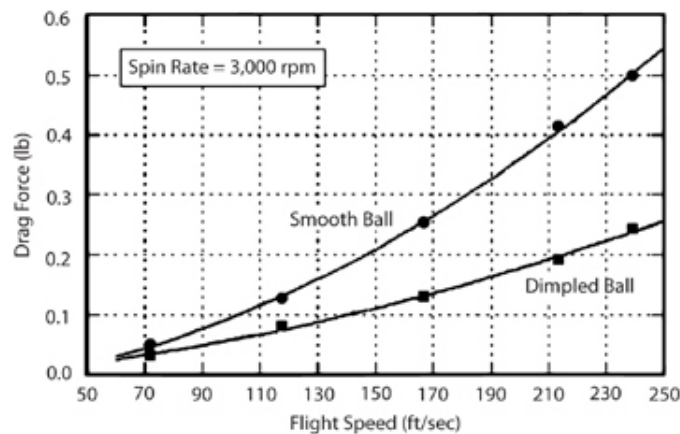


Abbildung 15: Vergleich Luftwiderstand eines glatten Balles und eines Balles mit Dimples [31, Seite 19]

In der folgenden Abbildung 16 ist nun die Auftriebskraft in Abhängigkeit der Fluggeschwindigkeit für einen glatten Ball und einen Ball mit Einbuchtungen zu sehen.

⁵⁵vgl. [11, Seite 73]

⁵⁶vgl. [31, Seite 18]

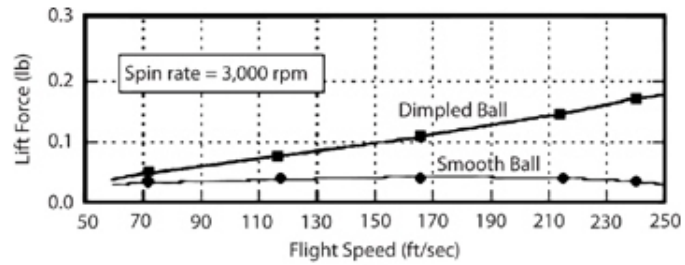


Abbildung 16: Vergleich Auftriebskraft eines glatten Balles und eines Balles mit Dimples [31, Seite 19]

Aus diesen beiden Abbildungen ist klar erkenntlich, dass mit steigender Geschwindigkeit auf der einen Seite der Luftwiderstand eines Balles mit Dimple deutlich geringer und die Auftriebskraft größer wird. Dies ist natürlich beides nützlich um einen längeren und kontrollierteren Ballflug zu erreichen.⁵⁷

⁵⁷vgl. [31, Seite 18-19]

4 Die typische Flugkurve eines Golfballs

In diesem Abschnitt werde ich, ausgehend von der bekannten Wurfparabel, die tatsächliche Flugbahn eines Golfballs unter Einfluss der in Kapitel 3 erwähnten Parameter mathematisch herleiten.

Eine analytische Lösung dieses Problems ist allerdings nur möglich, wenn man von einem linearen Zusammenhang des Luftwiderstandes und der Auftriebskraft von der Geschwindigkeit ausgeht.⁵⁸

4.1 Die Wurfparabel

Die Wurfparabel setzt sich aus einer horizontalen (x-Richtung) und vertikalen (y-Richtung) Bewegung zusammen. Die x-Komponente ist gegeben durch eine gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit $v_{x_0} = v_0 * \cos \varphi$ (= x-Komponente der Abfluggeschwindigkeit des Golfballs, wobei φ der Abflugwinkel ist). Entgegen der y-Richtung wirkt die Erdbeschleunigung ($g = 9,81 m/s^2$). Daraus ergibt sich eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit $v_{y_0} = v_0 * \sin \varphi$ und Beschleunigung $-g$. Somit erhält man folgende Bewegungsgleichungen:

$$x(t) = v_0 * \cos \varphi * t \quad (9)$$

$$y(t) = v_0 * \sin \varphi * t - \frac{1}{2} * g t^2 \quad (10)$$

Die zugehörige Bahnkurve $y(x)$ erhält man durch Elimination der Zeit t .⁵⁹

Aus Gl. 9 folgt:

$$t = \frac{x}{v_0 * \cos \varphi} \quad (11)$$

Setzt man dies nun in Gl. 10 ein erhält man:

$$y(x) = \frac{v_0 * \sin \varphi}{v_0 * \cos \varphi} * x - \frac{g}{2 * (v_0 * \cos \varphi)^2} * x^2 \quad (12)$$

Die Flugweite des Golfballs, den sogenannten Carry C, erhält man durch die Bedingung $y(C) = 0$:

⁵⁸vgl. [11, Seite 66]

⁵⁹vgl. [11, Seite 74]

$$\begin{aligned}
0 &= x * \left(\frac{v_0 * \sin \varphi}{v_0 * \cos \varphi} - \frac{g}{2 * (v_0 * \cos \varphi)^2} * x \right) \\
&\iff [x_1 = 0] \\
x_2 &= \frac{2 * v_0 * \sin \varphi * v_0 * \cos \varphi}{g} \\
(\sin \alpha * \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin(2\alpha)) &\implies C = \frac{v_0^2}{g} * \sin(2\varphi) \tag{13}
\end{aligned}$$

Den maximalen Carry erhält man für $\sin(2\varphi) = 1 \iff \varphi = 45^\circ$, also für einen Abflugwinkel von 45° . Man erkennt auch, dass die Flugweite indirekt proportional zur Erdbeschleunigung ist, weshalb ein Golfball auf dem Mond oder auf höher gelegenen Plätzen weiter fliegt.⁶⁰

In Abbildung 17 ist die Wurfparabel für einen Abflugwinkel $\varphi = 45^\circ$ und eine realistische Abfluggeschwindigkeit $v_0 = 60m/s$ zu sehen.⁶¹

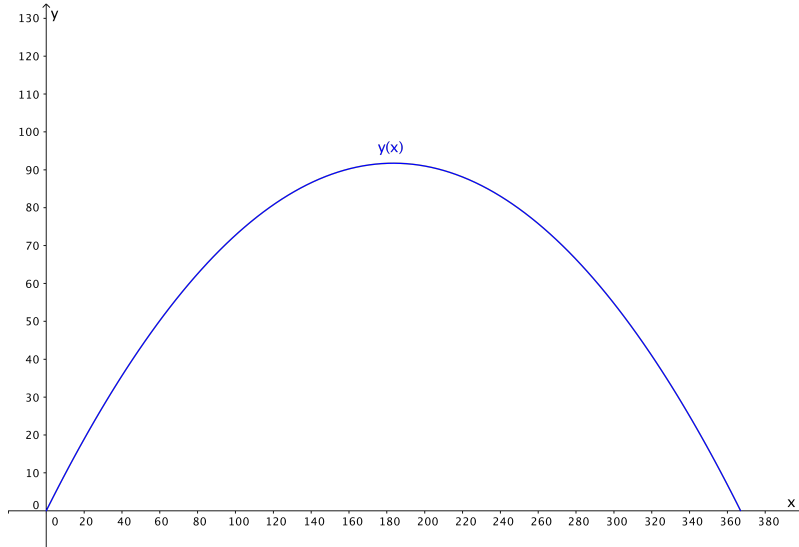


Abbildung 17: Wurfparabel mit $v_0 = 60m/s$ und $\varphi = 45^\circ$, vgl. [11, Seite 75]

⁶⁰vgl. [11, Seite 74-75]

⁶¹vgl. [11, Seite 75]

4.2 Flugbahn mit Luftwiderstand

Um den Einfluss des Luftwiderstandes auf die Flugkurve des Balles zu beschreiben, geht man von einer linearen Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit aus. Dies ist, wie in 3.2 erwähnt, für große Reynolds Zahlen wie sie im Golf erreicht werden, der Fall.⁶²

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten wie folgt:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{c}{m} * v_x \quad (14)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{c}{m} * v_y - g \quad (15)$$

Wobei $v_x = x'(t)$ und $v_y = y'(t)$ ist.⁶³

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $x'(0) = v_x(0) = v_{x_0}$ und $y(0) = 0$, $y'(0) = v_y(0) = v_{y_0}$ ergeben sich folgendermaßen:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{c}{m} * v_x / : \frac{v_x}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m * \frac{dv_x}{dt}}{v_x} = -c / \int dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{m * \frac{dv_x}{dt}}{v_x} dt = - \int c dt$$

$$\Leftrightarrow m * \ln(v_x) = -c * t + const.$$

$$\Leftrightarrow v_x(t) = k * e^{-\frac{c}{m} * t}$$

Die Konstante k ist durch die Anfangsbedingung $v_x(0) = v_{x_0}$ festgelegt.

$$v_{x_0} = k * e^{-\frac{c}{m} * 0}$$

$$\Leftrightarrow k = v_{x_0}$$

Somit folgt für $x'(t)$:

$$x'(t) = v_{x_0} * e^{-\frac{c}{m} * t} \quad (16)$$

⁶²vgl. [11, Seite 75]

⁶³vgl. [12, Seite 358]

Durch einmalige Integration von Gleichung 16 nach der Zeit t erhält man die Bewegung des Golfballes in x-Richtung.

$$\int x'(t)dt = \int v_{x_0} * e^{-\frac{c}{m}*t} dt$$

$$\text{Substitution: } u = -\frac{c}{m} * t, du = -\frac{c}{m} * dt$$

$$\Leftrightarrow x(t) = -\frac{m}{c} * v_{x_0} * \int e^u du$$

$$\Leftrightarrow x(t) = -\frac{m}{c} * v_{x_0} * e^u + \text{const.}$$

Durch Rücksubstitution folgt schließlich:

$$x(t) = -\frac{m}{c} * v_{x_0} * e^{-\frac{c}{m}*t} + k \quad (17)$$

Die Konstante k ist wiederum durch die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ gegeben:

$$0 = -\frac{m}{c} * v_{x_0} * e^{-\frac{c}{m}*0} + k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{m}{c} * v_{x_0}$$

Somit ist:

$$x(t) = \frac{m}{c} * v_{x_0} * (1 - e^{-\frac{c}{m}*t}) \quad (18)$$

64

Um die Bewegung in y-Richtung zu bestimmen muss die inhomogene Differentialgleichung $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{c}{m} * v_y - g$ gelöst werden. Hierzu muss man zuerst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (Störfunktion = 0) bestimmen und anschließend die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung hinzu addieren.

Die homogene Lösung v_h ergibt sich analog zur Lösung in x-Richtung:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{c}{m} * v_y$$

$$\Leftrightarrow v_h = k * e^{-\frac{c}{m}*t} \quad (19)$$

⁶⁴vgl. [12, Seite 358]

Die partikuläre Lösung v_p erhält man durch den Ansatz $v = \alpha * e^{0*t}$:
Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{c}{m} * \alpha - g / + g \\ \Leftrightarrow g &= -\frac{c}{m} * \alpha / : \left(-\frac{c}{m}\right) \\ \Leftrightarrow \alpha &= -\frac{gm}{c} = v_p \end{aligned} \quad (20)$$

Somit ergibt sich für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} v_y(t) &= v_h + v_p \\ \Leftrightarrow v_y(t) &= k * e^{-\frac{c}{m}*t} - \frac{gm}{c} \end{aligned} \quad (21)$$

Die Konstante k kann wieder mithilfe der Anfangsbedingung $v_y(0) = v_{y0}$ ermittelt werden:

$$\begin{aligned} v_{y0} &= k * e^{-\frac{c}{m}*0} - \frac{gm}{c} \\ \Leftrightarrow k &= v_{y0} + \frac{gm}{c} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $y'(t)$:

$$y'(t) = \left(v_{y0} + \frac{gm}{c}\right) * e^{-\frac{c}{m}*t} - \frac{gm}{c} \quad (22)$$

Die zugehörige Bewegung in y-Richtung $y(t)$ erhält man, analog zur x-Richtung, durch einmalige Integration von Gleichung 22 nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \int y'(t)dt &= \int \left(v_{y0} + \frac{gm}{c}\right) * e^{-\frac{c}{m}*t} - \frac{gm}{c} dt \\ \Leftrightarrow y(t) &= -\frac{m}{c} * \left(v_{y0} + \frac{gm}{c}\right) * e^{-\frac{c}{m}*t} - \frac{gm}{c} * t + const. \end{aligned} \quad (23)$$

Durch die Anfangsbedingung folgt für die Konstante:

$$y(0) = 0 = -\frac{m}{c} * \left(v_{y0} + \frac{gm}{c} \right) + k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{m}{c} * \left(v_{y0} + \frac{gm}{c} \right)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{m}{c} * \left(v_{y0} + \frac{gm}{c} \right) - \frac{m}{c} * \left(v_{y0} + \frac{gm}{c} \right) * e^{-\frac{c}{m} * t} - \frac{gm}{c} * t \\ \Leftrightarrow y(t) &= \frac{m}{c} * \left(\frac{mg}{c} + v_{y0} \right) * \left(1 - e^{-\frac{c}{m} * t} \right) - \frac{mgt}{c} \end{aligned} \quad (24)$$

65

Mit Hilfe von Gleichung 18 kann man Gleichung 24 auch anders ausdrücken:
Aus Gleichung 18 folgt:

$$\frac{x}{v_{x0}} = \frac{m}{c} * \left(1 - e^{-\frac{c}{m} * t} \right) \quad (25)$$

Dies kann man jetzt in Gleichung 24 einsetzen und erhält so:

$$y(x, t) = \frac{\frac{mg}{c} + v_{y0}}{v_{x0}} * x - \frac{mgt}{c} \quad (26)$$

Die gesuchte Flugkurve $y(x)$ erhält man wie schon bei der Wurfparabel durch Elimination der Zeit t .

Aus Gleichung 18 erhält man:

$$t = -\frac{m}{c} * \ln \left(1 - \frac{x}{\frac{m}{c} * v_{x0}} \right) \quad (27)$$

Setzt man dies nun in Gleichung 26 ein ergibt sich:

$$y(x) = \frac{\frac{mg}{c} + v_{y0}}{v_{x0}} * x + \frac{m^2 g}{c^2} * \ln \left(1 - \frac{x}{\frac{m}{c} * v_{x0}} \right) \quad (28)$$

Wobei wiederum $v_{x0} = v_0 * \cos \varphi$ und $v_{y0} = v_0 * \sin \varphi$ ist.⁶⁶

Der Term $\frac{m}{c}$ ist die Reibungskonstante und charakterisiert den Luftwiderstand. Mithilfe der Ballmasse, der Dichte der Luft und des Balldurchmessers wurde diese Konstante wie folgt abgeschätzt:⁶⁷

$$\frac{m}{c} = 4s \quad (29)$$

⁶⁵vgl. [12, Seite 358]

⁶⁶vgl. [11, Seite 76]

⁶⁷vgl. [11, Seite 76]

Der Graph von Gleichung 28 zeigt unter denselben Voraussetzungen wie im Vakuum, also einer Abfluggeschwindigkeit von 60m/s und einem Abflugwinkel von 45° , eine deutliche Abweichung von der Wurfparabel (siehe Abb. 18).⁶⁸

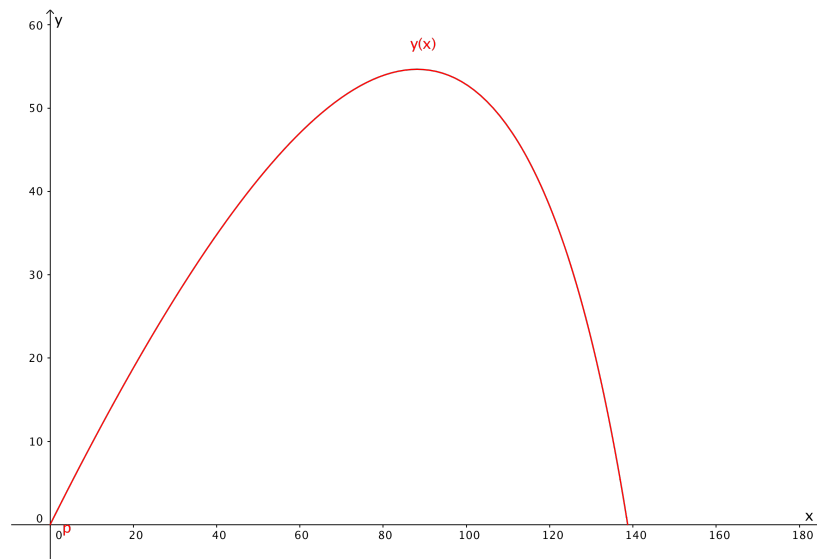


Abbildung 18: Flugkurve eines Golfballs mit Luftwiderstand

Wie man sieht ergibt sich keine symmetrische Flugkurve. Während die Flugkurve des Balles in der Aufstiegsphase noch jener der Wurfparabel ähnelt, fällt der Ball doch deutlich früher und steiler zu Boden. Auch die maximale Flughöhe wird durch den Luftwiderstand deutlich verringert. Ein konkreter Vergleich der Flugkurven mit und ohne Luftwiderstand ist in Abbildung 19 zu sehen.⁶⁹

⁶⁸vgl. [11, Seite 76-77]

⁶⁹vgl. [11, Seite 77]

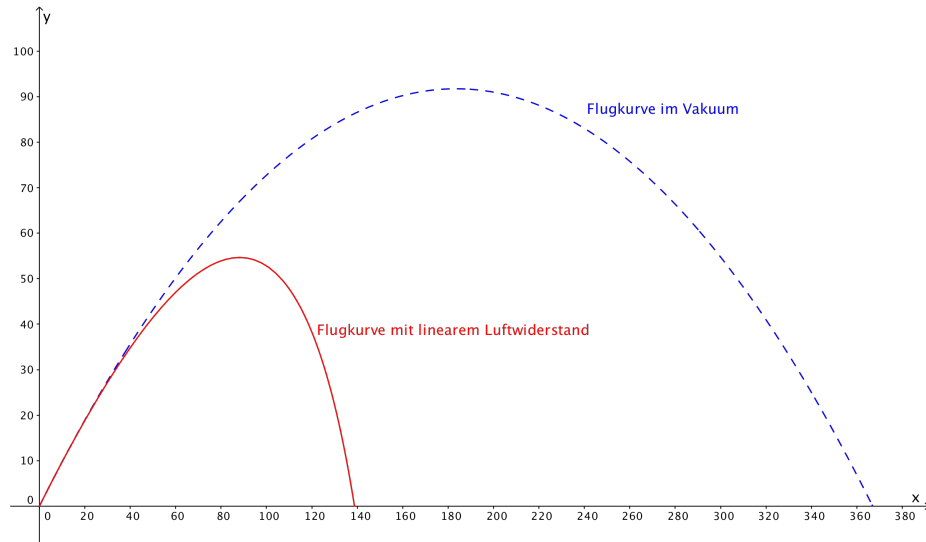


Abbildung 19: Vergleich der Flugkurven im Vakuum und unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes, vgl. [11, Seite 77]

Man sieht sehr deutlich, dass ein Golfball unter Berücksichtigung des Luftwiderstands, bei sonst gleichbleibenden Werten, deutlich kürzer fliegt als im Vakuum. Interessant ist auch die Wirkung des Luftwiderstands noch mehr zu verdeutlichen indem man diesen verdoppelt. Daraus ergibt sich eine Reibungskonstante $\frac{m}{c} = 2s$ und folgende Flugkurve (siehe Abb. 20):⁷⁰

⁷⁰vgl. [12, Seite 358-359]

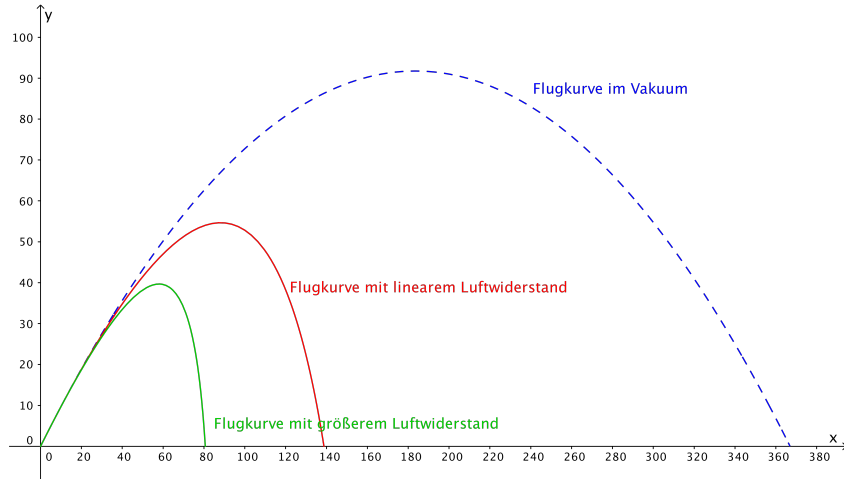


Abbildung 20: Vergleich der Flugkurven im Vakuum und jener mit Luftwiderstand sowie jener mit doppeltem Luftwiderstand

Ein doppeltem Luftwiderstand führt zwar nicht automatisch zu einer Halbierung der Distanz aber doch, wie zu erwarten war, zu einer deutlichen Verringerung.

4.3 Flugbahn mit Luftwiderstand und Spin

Um nun die tatsächliche Flugbahn eines Golfballes zu erhalten muss die Auftriebskraft, welche durch den Spin des Balles erzeugt wird berücksichtigt werden. Auch hier geht man von einer linearen Abhängigkeit dieser Kraft von der Geschwindigkeit aus, sodass:

$$L = k * v \quad (30)$$

Es ergeben sich daher folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{c}{m} * v_x - \frac{k}{m} * v * \sin \varphi \\ \Leftrightarrow \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{c}{m} * v_x - \frac{k}{m} * v_y \end{aligned} \quad (31)$$

bzw.

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{c}{m} * v_y + \frac{k}{m} * v * \cos \varphi - g$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv_y}{dt} = -\frac{c}{m} * v_y + \frac{k}{m} * v_x - g \quad (32)$$

71

Der anfängliche Auftrieb auf einen Golfball beträgt etwa 2,5oz. Daraus kann man nun den Term $\frac{k}{m}$, welcher den Auftrieb charakterisiert, abschätzen.⁷²

$$\frac{k}{m} = 0,247s^{-1} \quad (33)$$

Gleichung 31 und 32 bilden ein System von Differentialgleichungen, welches analytisch sehr schwer lösbar ist. Deshalb bedient man sich eines numerischen Lösungsverfahrens. Ein beliebtes Näherungsverfahren um Anfangswertprobleme dieser Art zu lösen ist das Runge-Kutta-Verfahren, welches auf den Überlegungen von Carl Runge und Martin Wilhelm Kutta beruht. Es ist ein Einschrittverfahren und berechnet somit Schritt für Schritt die Lösung.⁷³

Die Runge-Kutta-Lösungen für Gleichung 31 und 32 sind in Abbildung 21 für verschiedene Abflugwinkel, graphisch dargestellt.⁷⁴

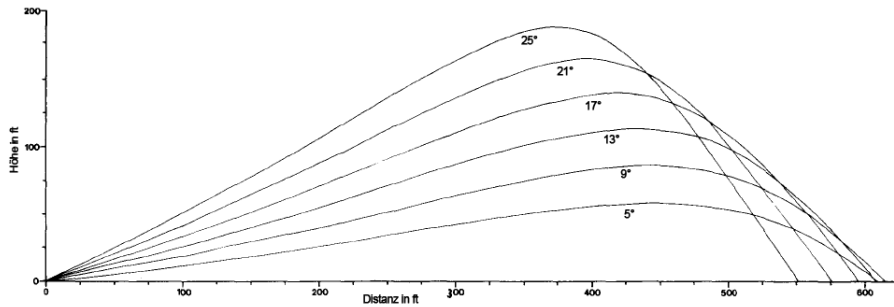


Abbildung 21: Flugkurve eines Golfballs mit Luftwiderstand und Spin berechnet mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens, $\frac{c}{m} = 0,25s^{-1}$, $\frac{k}{m} = 0,247s^{-1}$, vgl. [12, Seite 360]

Man erkennt, dass die maximale Distanz von etwa 615ft $\approx 187m$ bei einem Abflugwinkel von 9° erreicht wird. Mit zunehmenden Winkel aber überraschenderweise auch mit abnehmendem Winkel verringert sich die Distanz stetig. Die

⁷¹vgl. [12, Seite 360]

⁷²vgl. [12, Seite 361]

⁷³vgl. [10, Stand: 30.06.2018]

⁷⁴vgl. [12, Seite 360-361]

Konstanten $\frac{c}{m}$ und $\frac{k}{m}$, welche den Luftwiderstand bzw. den Auftrieb charakterisieren, sind in diesem Fall nahezu identisch. A. Cochran und J. Stobbs haben jedoch herausgefunden, dass das Verhältnis zwischen Luftwiderstand und Auftrieb zum Zeitpunkt des Abschlags etwa 2,5 zu 3,5 ist. Geht man davon aus, dass der Luftwiderstandskoeffizient $\frac{c}{m} = 0,25s^{-1}$ unverändert bleibt, ergibt sich für den Auftriebskoeffizienten $\frac{k}{m}$ Folgendes:⁷⁵

$$\frac{2,5}{3,5} = \frac{\frac{k}{m}}{0,25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m} = \frac{2,5}{3,5} * 0,25 \approx 0,179s^{-1}$$

In Abbildung 22 sind nun die Runge-Kutta-Lösungen von Gleichung 31 und 32 unter Voraussetzung dieser Werte zu sehen.⁷⁶

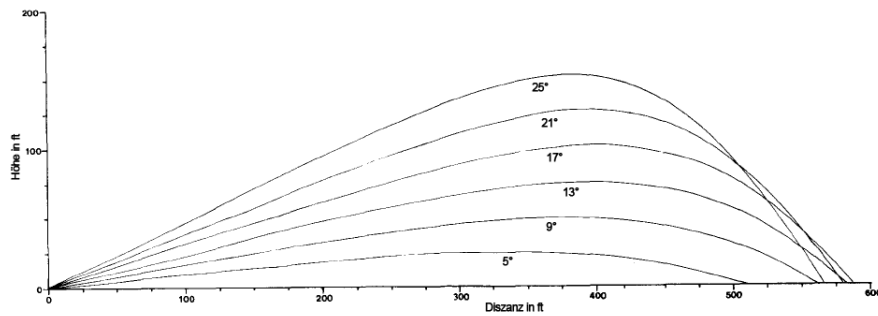


Abbildung 22: Flugkurve eines Golfballs mit Luftwiderstand und Spin berechnet mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens, $\frac{c}{m} = 0,25s^{-1}$, $\frac{k}{m} = 0,179s^{-1}$, vgl. [12, Seite 361]

Im Vergleich zu Abbildung 21 wird hier eine kürzere Maximaldistanz von etwa 588ft $\approx 179m$ erreicht. Auch der Abflugwinkel, unter welchem dies erreicht wird, unterscheidet sich deutlich und beträgt nun 16°. Laut Cochran und Stobb erreicht man den maximalen Carry unter einem Abflugwinkel von 20°. Somit kommt dieser Wert dem idealen deutlich näher als die 9° des ersten Beispiels. Diese Erkenntnisse müssten Schlägerhersteller eigentlich dazu motivieren Driver mit einem höheren Loft als den üblichen 9-11 Grad zu produzieren. Doch laut Cochran hätte dies wiederum zur Folge, dass der Ball mit einer geringeren Abfluggeschwindigkeit und mehr Backspin das Tee verlassen würde und dadurch eine kürzere Distanz erzielen würde. Außerdem bedeutet ein maximaler Carry nicht gleich maximale Distanz. Wenn der Ball nämlich in einem größeren Winkel abgeschlagen wird, so trifft er auch in einem steileren Winkel auf dem Boden auf

⁷⁵vgl. [12, Seite 361]

⁷⁶vgl. [12, Seite 361]

und wird dadurch weniger rollen. Zusammengefasst erreicht man, nach Cochran und Stobbs, die maximale Distanz unter einem Abflugwinkel von 12° oder 13°, was einem etwas höheren Winkel als dem der meisten Golfspieler entspricht.⁷⁷

Eine weitere Möglichkeit den Ballflug, unter Berücksichtigung des Luftwiderstands und des Ballspins, zu berechnen ist die Tait'sche Näherungslösung, welche auf den Überlegungen von Peter Guthrie Tait basiert. Diese Näherung geht von einem quadratischen Luftwiderstand und einer linearen Auftriebskraft aus und gilt nur für niedrige Loftwinkel.⁷⁸ Diese möchte ich nun kurz vorstellen.

Für den Luftwiderstand und die Auftriebskraft gelten folgende Formeln:

$$K_w = c_w w^2 \quad (34)$$

$$K_M = c_M \omega w \quad (35)$$

mit den Konstanten c_w und c_M .⁷⁹

Die Bewegung wird mithilfe des Geschwindigkeitsbetrags w und dem Winkel ψ relativ zur Horizontalen beschrieben. Die Bewegungsgleichungen lauten dann wie folgt:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{w^2}{a} - g * \sin \psi \quad (36)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k - \frac{g * \cos \psi}{w} \quad (37)$$

Wobei die Konstanten a und k wie folgt gegeben sind: $a = \frac{m}{c_w}$ und $k = c_M * \frac{\omega}{m}$.⁸⁰

Tait's Ansatz war nun, $\sin \psi = 0$ und $\cos \psi = 1$ zu setzen, sodass die Bewegungsgleichungen (Gl. 36 und Gl. 37) wie folgt aussehen:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{w^2}{a} \quad (38)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = k - \frac{g}{w} \quad (39)$$

Durch Lösen dieser Differentialgleichungen erhält man die Geschwindigkeit $w(t)$ und den Winkel $\psi(t)$:

⁷⁷vgl. [12, Seite 361]

⁷⁸vgl. [11, Seite 77]

⁷⁹vgl. [11, Seite 77]

⁸⁰vgl. [11, Seite 77-78]

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{w^2}{a} / * a, * dt \quad (40)$$

$$\Longleftrightarrow a * dw = -w^2 * dt / : w^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a}{w^2} dw = -dt / \int$$

$$\Longleftrightarrow a \int \frac{1}{w^2} dw = - \int dt$$

$$\Longleftrightarrow a * -\frac{1}{w} = -t + const. / * w, : (-t + const.)$$

$$\Longleftrightarrow w(t) = \frac{a}{t + const.} \quad (41)$$

Die Konstante kann mit der Anfangsbedingung $w(0) = w_0$ bestimmt werden:

$$w_0 = \frac{a}{0 + const.} / + const.$$

$$\Longleftrightarrow w_0 * const. = a / : w_0$$

$$\Longleftrightarrow const. = \frac{a}{w_0}$$

Dies eingesetzt in Gleichung 41 ergibt folgenden Ausdruck für die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
w(t) &= \frac{a}{t + \frac{a}{w_0}} \\
\Longleftrightarrow w(t) &= \frac{a * w_0}{a + t * w_0} \\
\Longleftrightarrow w(t) &= \frac{a * w_0}{a * \left(1 + \frac{tw_0}{a}\right)} \\
\Longleftrightarrow w(t) &= \frac{w_0}{1 + \frac{w_0 t}{a}} \tag{42}
\end{aligned}$$

81

Um $\psi(t)$ zu erhalten, setzt man obigen Ausdruck für $w(t)$ (Gl. 42) in die Bewegungsgleichung ein und löst dann die Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt} &= k - \frac{g}{\frac{w_0}{1 + \frac{w_0 t}{a}}} = k - \frac{g * \left(1 + \frac{w_0 t}{a}\right)}{w_0} / \int \\
\Longleftrightarrow \psi(t) &= \int k - \frac{g * \left(1 + \frac{w_0 t}{a}\right)}{w_0} dt \\
\Longleftrightarrow \psi(t) &= \int k dt - \frac{g}{w_0} \int \left(1 + \frac{w_0 t}{a}\right) dt \\
\Longleftrightarrow \psi(t) &= kt - \frac{g}{w_0} * \left(t + \frac{w_0}{2a} t^2\right) + const. \\
\Longleftrightarrow \psi(t) &= \left(k - \frac{g}{w_0}\right) t - \frac{g}{2a} t^2 + const. \tag{44}
\end{aligned}$$

Die Konstante erhält man wieder mit der Anfangsbedingung $\psi(0) = \psi_0$.

$$\psi_0 = \left(k - \frac{g}{w_0}\right) * 0 - \frac{g}{2a} * 0^2 + const.$$

$$\Longleftrightarrow const. = \psi_0$$

⁸¹vgl. [11, Seite78]

Somit erhält man für $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \left(k - \frac{g}{w_0}\right)t - \frac{g}{2a}t^2 + \psi_0 \quad (45)$$

Hier sind w_0 und ψ_0 die Abfluggeschwindigkeit bzw. der Abflugwinkel.⁸²

Anhand dieser Gleichung kann man erkennen, dass die Auftriebskraft des Magnuseffekts den Winkel vergrößert, während die Schwerkraft g und der Luftwiderstand den Winkel verkleinern. Des Weiteren würde der Abflugwinkel zunächst anwachsen, wenn die Geschwindigkeit größer als eine gewisse kritische Abfluggeschwindigkeit ist $w_{0,krit}$. Diese ist durch folgende Gleichung definiert:⁸³

$$(w_o\omega)_{krit} = \frac{mg}{c_M}$$

$$\Longleftrightarrow w_{0,krit} = \frac{mg\omega}{km\omega} = \frac{g}{k} \quad (46)$$

Die gesuchte Flugkurve des Balls unter Berücksichtigung der Auftriebskraft und des Luftwiderstands, ergibt sich aus Integration von Gleichung 42 und Gleichung 45.⁸⁴

Die horizontale Bewegung ergibt sich wie folgt:

⁸²vgl. [11, Seite 78]

⁸³vgl. [11, Seite 78]

⁸⁴vgl. [11, Seite 79]

$$x(t) = \int w(t) dt$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \int \left(\frac{w_0}{1 + \frac{w_0 t}{a}} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow x(t) = w_0 \int \left(\frac{1}{1 + \frac{w_0 t}{a}} \right)$$

$$\text{Substitution: } u = 1 + \frac{w_0 t}{a} \Rightarrow du = \frac{w_0}{a} dt$$

$$\Leftrightarrow x(t) = a \int \left(\frac{1}{u} \right) du$$

$$\Leftrightarrow x(t) = a * \ln(u)$$

Rücksubstitution

$$\Rightarrow x(t) = a * \ln \left(1 + \frac{w_0 t}{a} \right) \quad (47)$$

Die vertikale Bewegung wird folgendermaßen ermittelt:⁸⁶

$$y(t) = \int w(t) * \psi(t) dt$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \int \left(\frac{w_0}{1 + \frac{w_0 t}{a}} \right) * \left[\left(k - \frac{g}{w_0} \right) t - \frac{g}{2a} t^2 + \psi_0 \right] dt$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \int \frac{w_0 * \left[\psi_0 + \left(k - \frac{g}{w_0} \right) t - \frac{g}{2a} t^2 \right]}{1 * \frac{w_0 t}{a}} dt$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \int \frac{w_0 \psi_0 + k w_0 t - g t - \frac{g w_0}{2a} t^2}{1 + \frac{w_0 t}{a}} dt / * \frac{2a}{2a}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2} \int \frac{2a w_0 \psi_0 + 2a k w_0 t - 2a g t - g w_0 t^2}{a + t w_0} dt$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2} \int \frac{a^2 g - 2a^2 k w_0 + 2a w_0^2 \psi_0}{w_0 (a + w_0 t)} + \frac{a (2k w_0 - g)}{w_0} - g t dt$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{a^2 g}{2w_0} - a^2 k + a w_0 \psi_0 \int \frac{1}{a + w_0 t} dt + a k - \frac{a g}{2w_0} \int 1 dt - \frac{g}{2} \int t dt$$

Substitution: $u = a + w_0 t \Rightarrow du = w_0 dt$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{a^2 g}{2w_0^2} - \frac{a^2 k}{w_0} + a \psi_0 \int \frac{1}{u} du + a k - \frac{a g}{2w_0} \int 1 dt - \frac{g}{2} \int t dt$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \left(\frac{a^2 g}{2w_0^2} - \frac{a^2 k}{w_0} + a \psi_0 \right) * \ln(u) + \left(a k - \frac{a g}{2w_0} \right) * t - \frac{g t^2}{4}$$

Rücksubstitution

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{a^2 g}{2w_0^2} - \frac{a^2 k}{w_0} + a \psi_0 \right) * \ln(a + w_0 t) + \left(a k - \frac{a g}{2w_0} \right) * t - \frac{g t^2}{4}$$

⁸⁶vgl. [11, Seite 79]

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow y(t) &= \left(\frac{ag}{2w_0^2} - \frac{ak}{w_0} + \psi_0 \right) * a \ln(a + w_0 t) + ak \left(1 - \frac{ag}{2w_0 ak} \right) t - \frac{gt^2}{4} \\ \Leftrightarrow y(t) &= \left(\psi_0 - \frac{ak}{w_0} \left(1 - \frac{g}{2w_0 k} \right) \right) * a \ln(a + w_0 t) + ak \left(1 - \frac{g}{2w_0 k} \right) t - \frac{gt^2}{4}\end{aligned}\tag{48}$$

Mithilfe von Gleichung 46 ergibt sich aus Gleichung 48:

$$\begin{aligned}y(t) &= \left(\psi_0 - \frac{ak}{w_0} \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{2w_0} \right) \right) * a \ln(a + w_0 t) + ak \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{2w_0} \right) t - \frac{gt^2}{4} \\ \Leftrightarrow y(t) &= \left(\psi_0 - \frac{ak}{w_0} \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{w_0} \right) - \frac{ag}{2w_0^2} \right) * a \ln \left(1 + \frac{w_0 t}{a} \right) \\ &\quad + ak \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{2w_0} \right) t - \frac{gt^2}{4}\end{aligned}\tag{49}$$

Um nun die tatsächliche Bahnkurve zu erhalten muss man mithilfe von Gleichung 47 die Zeit t eliminieren:

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} &= \ln \left(1 + \frac{w_0 t}{a} \right) \\ \Leftrightarrow \exp \left(\frac{x}{a} \right) &= 1 + \frac{w_0 t}{a} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{a}{w_0} \left(\exp \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right)\end{aligned}\tag{50}$$

Setzt man Gleichung 50 in Gleichung 49 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \left(\psi_0 - \frac{ak}{w_0} \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{w_0} \right) - \frac{ag}{2w_0^2} \right) * a \ln \left(1 + \frac{w_0 \frac{a}{w_0} (\exp(\frac{x}{a}) - 1)}{a} \right) \\
&+ \frac{a^2 k}{w_0} \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{2w_0} \right) \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right) - \frac{ga^2}{4w_0^2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right)^2 \\
\Longleftrightarrow y(x) &= \left(\psi_0 - \frac{ak}{w_0} \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{w_0} \right) - \frac{ag}{2w_0^2} \right) * a \ln \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) \right) \\
&+ \frac{a^2 k}{w_0} \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{2w_0} \right) \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right) - \frac{ga^2}{4w_0^2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right)^2 \\
\Longleftrightarrow y(x) &= \left(\psi_0 - \frac{ak}{w_0} \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{w_0} \right) - \frac{ag}{2w_0^2} \right) x \\
&+ \frac{a^2 k}{w_0} \left(1 - \frac{w_{0,krit}}{2w_0} \right) \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right) - \frac{ga^2}{4w_0^2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - 1 \right)^2
\end{aligned} \tag{51}$$

87

Die Termdarstellung dieser Funktion sieht natürlich sehr kompliziert aus. Betrachtet man allerdings den Graph von Gleichung 51 für realistische Werte eines guten Amateurgolfers erkennt man einen nahezu linearen Anstieg zu Beginn und einen parabolischen Abfall gegen Ende der Flugbahn (siehe Abb. 23). Dies deckt sich auch mit der Realität, da am Anfang des Ballflugs, aufgrund der hohen Ballgeschwindigkeit, der Magnus-Effekt und der Luftwiderstand die vorherrschenden Kräfte sind. Je länger der Flug jedoch dauert umso stärker wird der Golfball von der Luftreibung abgebremst, weshalb in diesem Teil die Schwerkraft dominiert und es zu einem parabolischen Abfall kommt. In Gleichung 51 wird die erste Flugphase im Großen und Ganzen durch den ersten Term und die zweite Phase durch den zweiten und dritten Term charakterisiert.⁸⁸

⁸⁷vgl. [11, Seite 79]

⁸⁸vgl.[11, Seite: 67, 79-80]

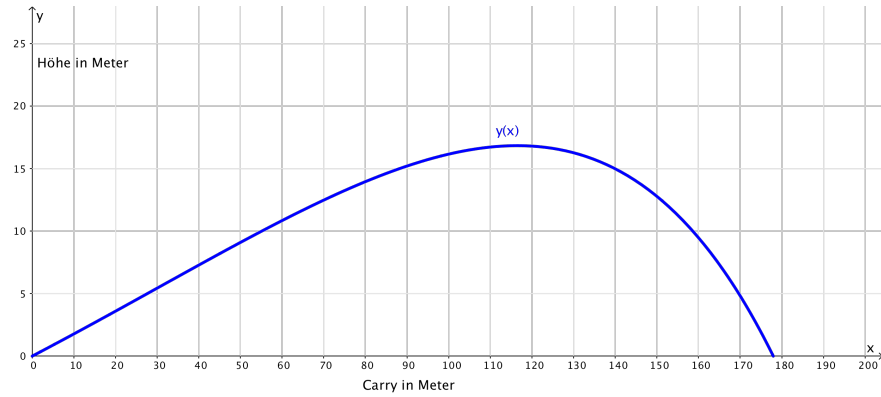


Abbildung 23: Flugkurve eines Golfballs mit Luftwiderstand und Spin nach Tait für realistische Werte: $w_0 = 60\text{m/s}$, $\psi_0 = 10^\circ = 0,1745329\text{rad}$, $k = 0,2\text{s}^{-1}$, $a = 100\text{m}$; vgl. [11, Seite: 80]

Um den Unterschied dieser Flugkurve zu den anderen bereits bearbeiteten zu verdeutlichen, ist in Abbildung 24 eine Darstellung der Wurfparabel, der Bahnkurve nur unter Berücksichtigung des Luftwiderstands und der Flugbahn mit Luftwiderstand und Spin, unter denselben Anfangsbedingungen zu sehen.

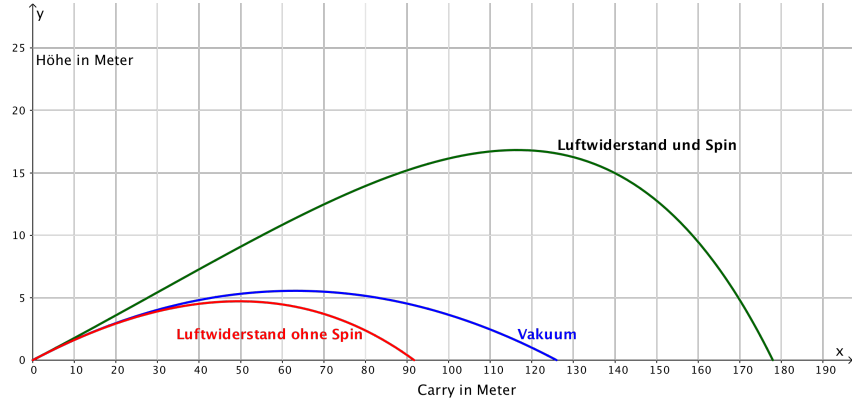


Abbildung 24: Vergleich der Flugkurven eines Golfballs in Vakuum, mit Luftwiderstand und mit Luftwiderstand und Spin, Anfangsbedingungen: $w_0 = 60\text{m/s}$, $\psi_0 = 10^\circ = 0,1745329\text{rad}$, $k = 0,2\text{s}^{-1}$, $a = 100\text{m}$; $\frac{m}{c} = 4\text{s}$; vgl. [11, Seite: 80]

Man sieht, dass der Spin des Balles und die damit verbundene Auftriebskraft zu einer deutlich größeren Distanz als im Vakuum führt, während ein Ball ohne Spin vom Luftwiderstand so abgebremst werden würde, dass er knapp ein Viertel kürzer fliegen würde als im luftleeren Raum. Die Rotation des Balles ist also eine essentielle Eigenschaft des Golfschlages, um seine Distanz zu vergrößern. Zu

erwähnen sei hier noch, dass der Ball mit einem Abflugwinkel von 10° gespielt wurde, welcher deutlich vom idealen Winkel der Wurfparabel abweicht. Wenn man stattdessen einen Abflugwinkel von 45° wählen würde, würde der Ball im Vakuum um einiges weiter fliegen. Ein derartiger Abflugwinkel ist allerdings im Golfsport unrealistisch.⁸⁹

Wie gut das Modell von Tait tatsächlich mit der Realität übereinstimmt kann mithilfe von echten Daten der Abfluggeschwindigkeit, des Abflugwinkels und der daraus resultierenden Schlaglänge (siehe Tab. 9) verdeutlicht werden. Gemessen wurden all diese Daten mithilfe des TrackMan, einem der besten Radarmessgeräte im Golfsport. Der TrackMan wird sowohl von großen Golfmarken zum Testen ihrer Produkte, als auch von Golfprofis und Golfproetten zum Verbessern ihres Spiels verwendet.⁹⁰

Schläger	Ballgeschwindigkeit	Abflugwinkel	Carry
Driver	167mph $\approx$ 74,66m/s	$10,9^\circ$	275yds $\approx$ 251m
Holz 5	152mph $\approx$ 67,95m/s	$9,4^\circ$	230yds $\approx$ 210m
Eisen 3	142mph $\approx$ 63,48m/s	$10,4^\circ$	212yds $\approx$ 194m
Eisen 5	132mph $\approx$ 59,01m/s	$12,1^\circ$	194yds $\approx$ 177m

Tabelle 9: Durchschnittswerte der Ballgeschwindigkeit, des Abflugwinkels und des Carry von Golfern der US PGA Tour, vgl. [37, Stand: 16.05.2018]

Der TrackMan misst natürlich noch weit mehr Werte, um die tatsächliche Flugkurve annähern zu können. Um die gemessenen Werte mit der Näherungslösung von Tait zu vergleichen reichen allerdings diese drei Größen aus, da in Gleichung 51 nur diese vorkommen. Des Weiteren gilt diese, wie schon erwähnt, nur für kleine Abflugwinkel, weshalb ich hier nur Schläger mit einem Abflugwinkel von rund 10° betrachtet habe. Die Werte des TrackMan wurden nach der Reihe in Gleichung 51 eingesetzt, um die Bahnkurven der jeweiligen Schläger zu erhalten (siehe Abb. 25)

⁸⁹vgl.[11, Seite: 80]

⁹⁰vgl.[38, Stand: 16.05.2018]

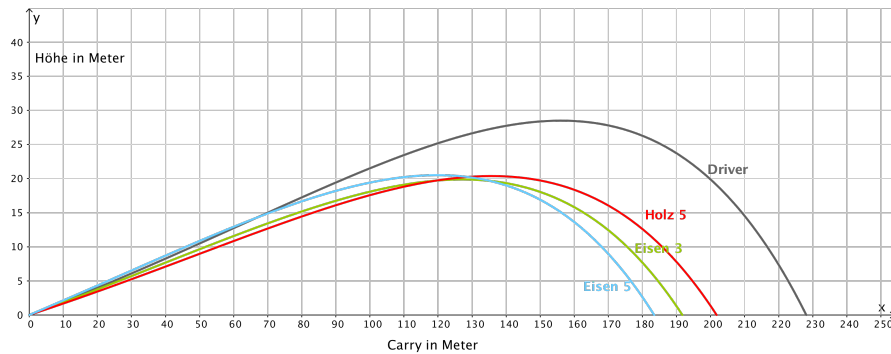


Abbildung 25: Näherungsweise Flugkurven von verschiedenen Golfschlägern für tatsächliche Werte von Golfprofis

Vergleicht man die Längen dieser Kurven mit den Werten aus Tabelle 9 so sieht man, dass es zwar eine Abweichung in der Distanz gibt, diese aber nicht allzu groß ist. Da es sich um eine näherungsweise bestimmte Bahnkurve handelt ist das Ergebnis doch sehr bemerkenswert. Eine der möglichen Fehlerquellen könnte sein, dass die Konstanten a und k , welche den Luftwiderstand bzw. die Auftriebskraft charakterisieren, hier für jeden Schläger und für jede Geschwindigkeit gleich gewählt wurden. Tatsächlich hängen der Luftwiderstand bzw. der Magnus-Effekt von der Geschwindigkeit bzw. von der Eigenrotation des Golfballs ab. So wie die Abfluggeschwindigkeit für jeden kürzeren Schläger etwas kleiner wird, wird der Spin des Balles immer größer. Der TrackMan misst diese Werte sehr genau und ein sehr komplizierter Algorithmus berechnet dann die zugehörige Bahnkurve.

Zum Abschluss dieses Kapitels möchte ich noch eine Abbildung eines Abschlags mit dem Driver des ehemaligen Weltranglistenersten Rory McIlroy, gemessen mit dem TrackMan, zeigen (siehe Abb. 26)



Abbildung 26: Flugkurve und Werte eines Drives von Rory McIlroy, gemessen mit dem TrackMan,[36, Stand: 16.05.2018]

Hier kann man gut erkennen, dass die tatsächliche Flugkurve eine Golfballs mit jener in Abbildung 23 gut übereinstimmt.

5 Wahrscheinlichkeit und Statistik des Puttens

Der von Bobby Locke (1917-1987), einem ehemaligen südafrikanischen Profigolfer, geprägte Satz - Drive for show and putt for dough - ist fast jedem Golfspieler bekannt. Es bedeutet: Der Abschlag dient der Show, mit den Putten jedoch verdient man das Geld.⁹¹ Dies zeigt also wie wichtig das Spiel auf dem Grün ist, um ein gutes Ergebnis zu erzielen. Deshalb werde ich auf diesen Bereich des Golfspiels nun genauer eingehen.

5.1 Statistik

Wenn man darüber spricht weshalb ein Putt ins Loch geht oder nicht, fallen immer die Wörter Geschwindigkeit und Linie. Wenn ich also den Ball mit der richtigen Anfangsgeschwindigkeit auf der richtigen Linie zum Ziel schicke, wird er im Loch verschwinden. Doch was ist die richtige Geschwindigkeit?⁹² Diese Frage werde ich im Folgenden versuchen zu klären.

Mathematisch kann ein Putt mithilfe von Polarkoordinaten beschrieben werden. Die mathematische Position eines Objekts im 2-dimensionalen Raum wird in Relation zu einem fixen Punkt, dem Ursprung, angegeben. Normalerweise geschieht dies durch kartesische Koordinaten, hier wird der horizontale Abstand x und der vertikale Abstand y des Objekts vom Ursprung angegeben und man erhält einen Punkt (x,y) . Bei Polarkoordinaten ist das Objekt gegeben durch einen Abstand r vom Ursprung und einem Winkel θ gemessen von der positiven x -Achse (siehe Abb. 27).⁹³

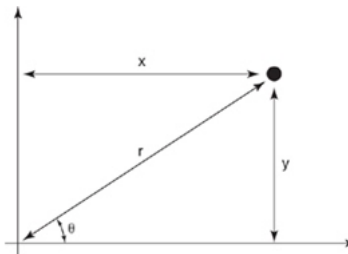


Abbildung 27: Polarkoordinaten [31, Seite 38]

Diese Koordinaten sind für einen Golfputt deshalb von Vorteil, da sie die Distanz und Richtung widerspiegeln. Deshalb wurden sie auch von Frank Werner und Richard Greig verwendet um Ergebnisse ihrer Untersuchungen des Puttens zu beschreiben. Die beiden sammelten Daten zur Genauigkeit eines Putts bei verschiedenen Golferinnen und Golfern mit unterschiedlicher Spielstärke. Jede Spielerin und jeder Spieler musste den Ball auf ein vorgegebenes Ziel, welches kein Loch war, rollen. Dieser Versuch wurde auf einem ebenen Grün und bei

⁹¹vgl. [25, Stand: 14.08.2017]

⁹²vgl. [31, Seite 38]

⁹³vgl. [31, Seite 38]

unterschiedlichen Distanzen durchgeführt. Der Punkt, an dem jeder einzelne Putt tatsächlich zu liegen gekommen war, wurde notiert. Aus den Ergebnissen aller untersuchten Golfspielerinnen und Golfspielern bestimmten Werner und Greig eine Standardabweichung σ_r für die Distanz des Schlages:

$$\sigma_r = (0,0536 + 0,0017 * HCP) * D \quad (52)$$

Wobei HCP das Handicap der Spielerin oder des Spielers, also die Spielstärke, und D die Distanz bis zum Ziel angibt.⁹⁴

Wenn man in Gleichung 52 nun Zahlen einsetzt, also zum Beispiel eine Spielerin oder ein Spieler mit Handicap 10 spielt einen Putt aus ca 4,5 Metern (etwa 15 feet) Entfernung ($D = 4,5m$ und $HCP = 10$) so ergibt sich eine Standardabweichung von:⁹⁵

$$\sigma_r = (0,0536 + 0,0017 * 10) * 4,5 = 0,3177m = 31,77cm \approx 1,059feet$$

Das bedeutet, dass etwa zwei Drittel der Putts eine Distanz aus dem Intervall $4,5 \pm 0,3177m$ rollen und daher zwischen 4,2 und 4,8 Metern (zwischen 14 und 16 feet) zum Stillstand kommen. Des Weiteren legen 95% der Putts eine Distanz aus dem Bereich $4,5 \pm 2 * \sigma_r = 4,5 \pm 0,6354m$ zurück und enden deshalb zwischen 3,9 und 5,1 Meter (zwischen 13 und 17 feet). Die restlichen 5% sind entweder mehr als 63,54cm zu kurz oder zu lang.⁹⁶

Ebenso wie für die Distanz eines Putts haben Werner und Greig eine Standardabweichung für den Winkel, also die Richtung, ermittelt. Diese ist wie folgt gegeben:

$$\sigma_\theta = (1,718 + 0,0039 * HCP)^\circ \quad (53)$$

Betrachtet man hier wieder eine Golferin oder einen Golfer mit Handicap 10 so erhält man:

$$\sigma_\theta = (1,718 + 0,0039 * 10) = 1,757^\circ$$

Somit sind circa ein Drittel aller Putts mindestens $1,757^\circ$ von der richtigen Linie entfernt.⁹⁷

Mit Hilfe einfacher trigonometrischen Überlegung erhält man die Abweichung von der Ideallinie (siehe Abb 28):

⁹⁴vgl. [31, Seite 38]

⁹⁵vgl. [31, Seite 38-39]

⁹⁶vgl. [31, Seite 39]

⁹⁷vgl. [31, Seite 39]

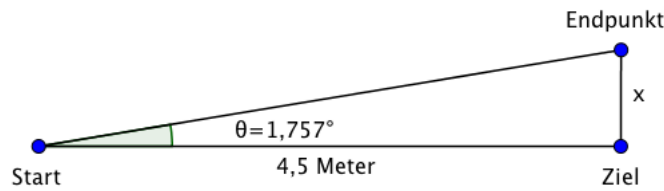


Abbildung 28: Skizze zur Herleitung der Richtungsabweichung eines Putts

$$\tan(\theta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{x}{4,5m}$$

$$\Leftrightarrow x = \tan(1,757^\circ) * 4,5m = 0,138m = 13,8cm$$

Man sieht, für einen Putt einer Golferin oder eines Golfers mit Handicap 10 aus 4,5 Metern (15 feet), beträgt die Abweichung etwa 14cm (0,55 feet). Dieser Wert scheint ziemlich gering zu sein, ist aber mehr als ausreichend um das anvisierte Loch zu verfehlen.⁹⁸

Wenn man die Werte von σ_r und σ_θ nun mit den Werten einer sehr guten Golfspielerin oder eines sehr guten Golfspielers (HCP=0) vergleicht, kann man sehen, was eine Amateurin oder einen Amateur von einer Proette oder einem Profi unterscheidet:

$$\sigma_{r_0} = (0,0536 + 0,0017 * 0) * 4,5 = 0,2412m = 24,12cm \approx 0,79feet$$

$$\sigma_{\theta_0} = 1,718^\circ$$

Man sieht also, dass bei einer Golferin oder eines Golfers mit Handicap 0, 95% aller Putts aus 4,5 Metern in einem Bereich zwischen 4,0 und 5,0 Metern zum Liegen kommen und die Richtungsabweichung $x = \tan(1,718^\circ) * 4,5m = 13,5cm$ etwas geringer ist. Auf den ersten Blick erscheint dieser Unterschied sehr gering, bei längeren Putts, etwa aus 20 Meter Entfernung, sieht dies allerdings schon ganz anders aus.

$$\sigma_r = (0,0536 + 0,0017 * 10) * 20 = 1,412m$$

$$\sigma_{r_0} = (0,0536 + 0,0017 * 0) * 20 = 1,072m$$

$$\sigma_\theta = 1,757^\circ \Rightarrow x = \tan(1,757^\circ) * 20m = 61,4cm$$

⁹⁸vgl. [31, Seite 39]

$$\sigma_{\theta_0} = 1,718^\circ \Rightarrow x = \tan(1,718^\circ) * 20\text{m} = 60,0\text{cm}$$

Aus 20 Metern enden bei einer Amateurin oder einem Amateur mit Handicap 10 also 95% aller Putts im Bereich von 17,2 und 22,8 Metern. Bei einer Spielerin oder einem Spieler mit Handicap Null hingegen kommen 95% aller Putts zwischen 17,9 und 22,1 Metern zum Stillstand. Somit ist es für eine Profgolferin und für einen Profgolfer deutlich wahrscheinlicher aus großer Distanz höchstens zwei Putts zu benötigen, als für eine Amateurin und einen Amateur.⁹⁹ Kombiniert man die Informationen der beiden Standardabweichungen, so erhält man ein Bild der Endpunkte aller Putts aus 4,5 Metern einer Spielerin oder eines Spielers mit Handicap 10 (siehe Abb. 29).¹⁰⁰

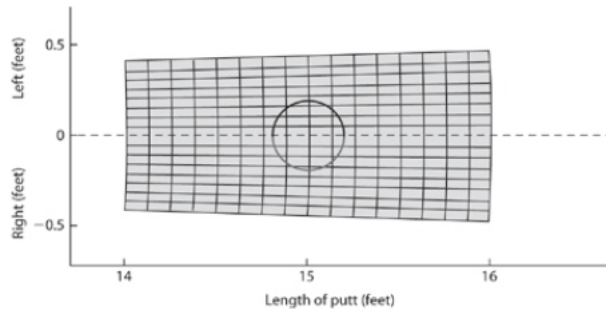


Abbildung 29: Endpunkte eines 4,5 Meter Putts eines 10-Handicappers [31, Seite 39]

Die graue Fläche umfasst $\pm$ eine Standardabweichung der Distanz und $\pm$ eine Standardabweichung der Richtung. Der Kreis in der Mitte repräsentiert das Golfloch. Angenommen die beiden Fehler der Richtung und Distanz seien unabhängig voneinander, so würden nur $0,68^2 = 0,4624 = 46,24\%$ der Putts innerhalb des grauen Bereichs liegen und somit mehr als die Hälfte außerhalb.¹⁰¹

Nun stellt sich natürlich noch die Frage, welche Putts mit den Endpunkten in Abbildung 29 tatsächlich im Loch verschwinden würden. Klar ist, dass alle Endpunkte im Inneren des Kreises im Loch landen würden. Aber auch einige Punkte außerhalb des Loches könnten fallen, so zum Beispiel ein Putt auf der richtigen Linie mit nur etwas zu viel Geschwindigkeit oder ein Putt mit der richtigen Geschwindigkeit der das Loch auf der Seite streift. Um alle jene Putts in einer Grafik darzustellen bedient man sich der sogenannten „Make Zone“ (siehe Abb. 30). Werner und Greig haben diese Zone bestimmt, indem sie einen Golfball auf einem ebenen Grün, aus einer fixen Entfernung, mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Richtungen zu einem Loch rollten. Für alle im

⁹⁹vgl. [31, Seite 37-39]

¹⁰⁰vgl. [31, Seite 39]

¹⁰¹vgl. [31, Seite 39]

Loch verschwundenen Bälle wurde der Vorgang mit der selben Richtung und Geschwindigkeit wiederholt, mit dem Unterschied, dass nun kein Loch mehr im Weg war. Die Punkte an denen die Bälle stoppten, wurde notiert und zur „Make Zone“ vereinigt. Sie ist also jene Region der Endpunkte aller versenkten Putts, wenn kein Loch im Grün gewesen wäre.¹⁰²



Abbildung 30: „Make Zone“ eines geraden Putts (Skalierung in Inch, $1in = 2,54cm$) [31, Seite 41]

Man erkennt, dass ein Putt welcher direkt ins Zentrum des Loches gespielt wurde, sogar mit einer Geschwindigkeit gespielt werden kann mit der er normalerweise 1,32 Meter (52 Inch) hinter dem Loch zum liegen gekommen wäre. Andererseits darf ein Putt, der nur knapp innerhalb der linken oder rechten Kante des Loches gespielt wird, höchstens 25,4cm (10 Inch) über das Loch rollen.¹⁰³ Der Anteil der „Make Zone“ links der vertikalen Achse stellt einen Halbkreis dar, welcher die vordere Hälfte des Golfloches wiedergibt, jedoch einen größeren Radius als dieses besitzt. Der Grund hierfür ist, dass die Position des Balles in Wirklichkeit die Position des Mittelpunktes des Golfballs beschreibt. So kann es also passieren, dass ein Putt der kurz vor der Vorderkante des Lochs stehen bleibt trotzdem fällt. Denn nicht der gesamte Ball kommt davor zum Stillstand, sondern nur der Mittelpunkt. Das bedeutet, dass etwa 45% des Golfballes über die Vorderkante schauen und somit die Wahrscheinlichkeit, dass der Ball im Loch verschwindet sehr groß ist. Werner und Greig haben den Radius dieses Halbkreises abgeschätzt mit:

$$r = 2,125 + \frac{1,944}{S} \text{inch} \approx 5,4 + \frac{4,9}{S} \text{cm} \quad (54)$$

Wobei 2,125 inch der tatsächliche Radius des Loches ist und S die sogenannte Stimp Nummer des Grüns in feet (1ft = 30,48cm) beschreibt.¹⁰⁴

Mithilfe der Stimp Nummer oder dem „Stimpfaktor“ wird die Geschwindigkeit eines Grüns angegeben. Diese Zahl wird mit einem Gerät namens „Stimpmeter“ (siehe Abb. 31) ermittelt. Das Stimpmeter wurde bereits im Jahr 1935 von Edward Simpson erfunden und wird seit 1978 offiziell zur Geschwindigkeitsmessung von Golfgrüns verwendet. Es besteht aus einer 91cm langen V-förmigen Aluminiumschiene, welche bei etwa 76 cm eine Kerbe hat, auf der ein Golfball platziert wird. Anschließend wird das obere Ende des Geräts angehoben, während das untere Ende auf das Grün gelegt wird. Bei einer Neigung von ca. 20° lässt die Kerbe den Ball die Schiene hinabrollen (siehe Abb. 32). Die Strecke,

¹⁰²vgl. [31, Seite 39-41]

¹⁰³vgl. [31, Seite 40]

¹⁰⁴vgl.[31, Seite 40-41]

welche der Ball auf dem Grün zurücklegt, wird in feet gemessen und gibt den Stimpfaktor an. Bei langsamen Grüns bewegt sich dieser Wert rund um 4,5 ft, schnelle Grüns haben eine Stimp Nummer von über 8,5ft.¹⁰⁵



Abbildung 31: Stimpmeter zur Messung der Grüngeschwindigkeit[41, Stand: 21.08.2017]

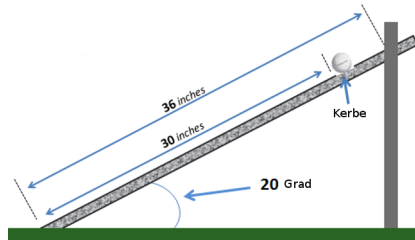


Abbildung 32: Skizze eines Stimpeters [39, Stand: 21.08.2017]

Setzt man nun Werte für schnelle ($S=10\text{ft}$) und langsame ($S=5\text{ft}$) Grüns in obige Formel ein erhält man:

$$r_{\text{schnell}} = 2,125 + \frac{1,944}{10} = 2,3194\text{in}$$

$$r_{\text{langsam}} = 2,125 + \frac{1,944}{5} = 2,5138\text{in}$$

Bei schnellen Grüns, etwa mit Stimpfaktor 10, erhält man rund 0,2in (= 0,5cm) mehr Spielraum, bei langsameren Puttoberflächen hingegen etwa 0,4in (=1,0cm). Das bedeutet, dass langsamere Grüns für einen Putt, der etwas zu langsam in Richtung Loch läuft, verzeihender sind als schnelle Grüns.¹⁰⁶

Die gerade betrachtete „Make Zone“ gilt für gerade Putts aus beliebigen Distanzen. Eine andere Konstruktionsweise der „Make Zone“ wäre die Berücksichtigung der Kombination aus Anfangsgeschwindigkeit und Richtung, welche zu einem

¹⁰⁵vgl. [11, Seite 109-110]

¹⁰⁶vgl. [31, Seite 40-41]

erfolgreichen Putt führt. Diese Zone hängt dann allerdings stark von der Länge des Putts ab. In Abbildung 33 ist die „Make Zone“ für unseren am Anfang des Kapitels betrachteten geraden Putt aus etwa 4,5 Meter (=15ft) Entfernung zu sehen.¹⁰⁷

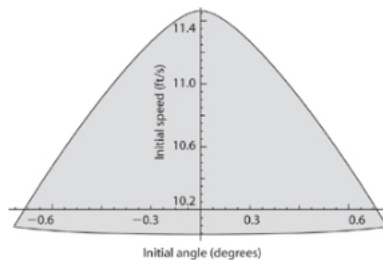


Abbildung 33: „Make Zone“ eines ebenen 15 Feet Putts [31, Seite 41]
Die horizontale Achse gibt die Richtung in Grad an, die vertikale Achse die Anfangsgeschwindigkeit in feet pro Sekunde.

Die grau hinterlegte Fläche beschreibt jede Kombination von Geschwindigkeit und Richtung, welche zu einem erfolgreichen 4,5 Meter Putt führt. Wie man erkennt, darf man nur weniger als 1 Grad von der Ideallinie entfernt sein und selbst wenn man direkt in die Mitte des Loches trifft nur etwa 1,5 ft/s (=1,6km/h) zu schnell sein. Das bedeutet, um einen 4,5 Meter Putt zu lochen, bedarf es eines sehr präzisen Schlages. Eine derart symmetrische „Make Zone“ entsteht allerdings nur bei komplett geraden Putts. Diese sind im echten Spiel jedoch relativ selten weshalb ich nun noch die Zone eines ebenfalls aus 4,5 Meter gespielten Putts, welcher jedoch bergab (2 Grad nach unten geneigt) und schräg von rechts nach links verläuft, betrachten werde (siehe Abb. 34).¹⁰⁸

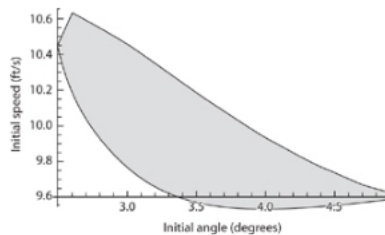


Abbildung 34: „Make Zone“ eines schrägen bergab Putt aus 15ft [31, Seite 42]

Um aus dieser Grafik schlau zu werden, wählt man zuerst einen Winkel und schaut welcher Geschwindigkeitsbereich erlaubt ist, um mit dieser Richtung den Putt einzulochen. Betrachtet man beispielsweise einen Winkel von 3,5 °, was einer Zielrichtung von etwa 11 Inch (=27,94cm) rechts vom Loch entspricht,

¹⁰⁷vgl. [31, Seite 41]

¹⁰⁸vgl. [31, Seite 41-42]

so erkennt man, dass der Putt mit mindestens 9,57 ft/s (=10,50 km/h) und höchstens 10,19 ft/s (=11,18 km/h) gespielt werden kann, um ihn im Loch zu versenken. Somit kann aus Abbildung 34 auch die Frage nach der besten Richtung eines solchen Putts beantwortet werden. Dies hängt allerdings davon ab wie man „beste“ definiert. Beispielsweise könnte man sagen, es wäre von Vorteil den größten Geschwindigkeitsbereich zu erhalten. Wenn man dies möchte müsste man einen Winkel von $3,2^\circ$ wählen, also etwa 10 Inch (= 25,4cm) rechts vom Loch zielen. Hier erhält man nämlich einen Geschwindigkeitsbereich von 9,67 ft/s (=10,61 km/h) bis 10,35 ft/s (=11,36). Der Nachteil an dieser Variante ist allerdings, dass wenn man das Loch verfehlt, der Ball weit vom Loch entfernt zum Liegen kommt und somit der darauffolgende Putt schwieriger wird. Wenn man dies vermeiden möchte sollte man, wie aus der Grafik ersichtlich wird, einen größeren Winkel und somit eine kleinere Anfangsgeschwindigkeit wählen. Der Nachteil hier ist allerdings, dass der erlaubte Geschwindigkeitsbereich immer kleiner wird. Leider wird es den meisten Golfspielerinnen und Golfspielern nicht weiterhelfen wenn man ihnen sagt, in welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit der Putt gespielt werden sollte. Man könnte die Ergebnisse jedoch wie folgt zusammenfassen: Möchte eine Spielerin oder ein Spieler einen großen Geschwindigkeitsbereich abdecken, so sollte eher wenig Richtung eingerechnet und der Putt eher schnell gespielt werden. Möchte sie oder er hingegen einen sicheren zwei Putt spielen, so sollte eine langsamere Geschwindigkeit und mehr Richtung gewählt werden.¹⁰⁹

5.2 Ein Wahrscheinlichkeitsmodell für das Putten

Ein Golfputt ist schwerer als man denkt, denn es ist eine Tatsache, dass sogar Profigolferinnen und Profigolfer gerade mal rund 60% ihrer Putts aus einer Distanz von 5 Fuß im Loch versenken. Dies ist mit ein Grund, warum Andrew Gelman und Deborah Nolan ein Modell entwickelt haben, welches sich mit der Wahrscheinlichkeit eines erfolgreichen Putts in Abhängigkeit von der Distanz beschäftigt. Verwendet wurden trigonometrische Überlegungen sowie die Gauß'sche Normalverteilung.¹¹⁰ Im Folgenden werde ich dieses Wahrscheinlichkeitsmodell näher erläutern.

Das Modell basiert auf Daten, welche von D. Berry gesammelt wurden.¹¹¹ Hierfür wurde ein Putt aus einer gewissen Distanz sehr oft unter gleichen Bedingungen durchgeführt und dokumentiert, wie oft dieser erfolgreich war. Dies wurde für einige Distanzen wiederholt. Der Quotient aus erfolgreich durchgeführten Versuchen durch die Anzahl der Versuche ergibt dann die Erfolgsquote in Prozent. Da dieser Versuch im englischsprachigen Raum durchgeführt wurde sind im folgenden Abschnitt alle Distanzen in Fuß (ft) und/oder Inch (in) angegeben. Wie bereits erwähnt entsprechen einem Fuß etwa 0,3 Meter und einem Inch rund 2,54 Zentimeter. Die erhaltenen Daten von Berry sind in Tabelle 10 zu sehen.

¹⁰⁹vgl. [31, Seite 41-43]

¹¹⁰vgl. [14]

¹¹¹vgl. [14, Seite 93]

Distanz (ft)	Anzahl durchgeführter Putts	Anzahl erfolgreicher Putts	Erfolgsquote (%)
2	1443	1346	93,28
3	694	577	83,14
4	455	337	74,07
5	353	208	58,92
6	272	149	54,78
7	256	136	53,12
8	240	111	46,25
9	217	69	31,80
10	200	67	33,50
11	237	75	31,65
12	202	52	25,74
13	192	46	23,96
14	174	54	31,03
15	167	28	16,77
16	201	27	13,43
17	195	31	15,90
18	191	33	17,28
19	147	20	13,61
20	152	24	15,79

Tabelle 10: Durchgeführte und erfolgreiche Putts aus verschiedenen Distanzen, vgl. [2, Seite 80 ff.]

Zur besseren Veranschaulichung von Tabelle 10 kann man die Erfolgsquote in Abhängigkeit der Distanz auch in einem Punktdiagramm darstellen (siehe Abb. 35)

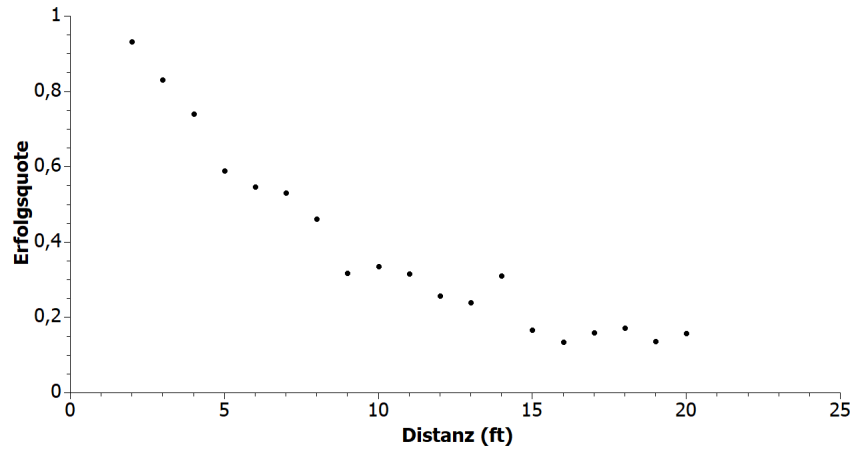


Abbildung 35: Erfolgsquote in Abhängigkeit der Distanz, vgl.[14, Seite 93]

Jede der Erfolgsquoten ist von der Form $p = \frac{y}{n}$, wobei y die Anzahl der erfolgreichen und n die Anzahl der durchgeführten Putts angibt. Die geschätzten Standardfehler s der Messwerte lassen sich wie folgt berechnen:¹¹²

$$s = \sqrt{p * (1 - p) / n} \quad (55)$$

Verwendet man nun die Aproximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung, so liegen etwa 95% aller Ergebnisse im Bereich von $\pm$ zwei Standardfehlern. Dieser Bereich entspricht also in etwa den 95% Konfidenzintervallen. In Abbildung 36 ist nun die um Fehlerbalken, welche die 95% Konfidenzintervalle repräsentieren, erweiterte Abbildung 35 zu sehen.¹¹³

¹¹²vgl. [14, Seite 93]

¹¹³vgl. [14, Seite 93]

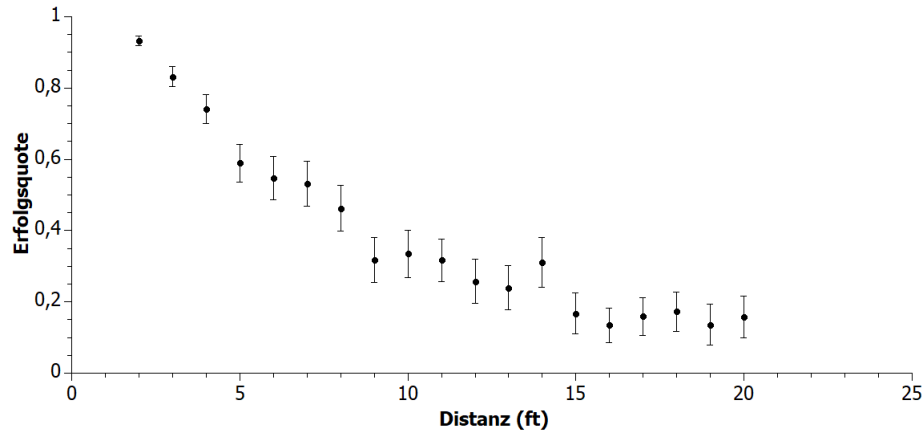


Abbildung 36: Erfolgsquote in Abhängigkeit der Distanz inklusive 95% Konfidenzintervalle, vgl.[14, Seite 94]

Anhand der Fehlerbalken bekommt man einen Eindruck wie nahe unser gesuchtes Wahrscheinlichkeitsmodell an die tatsächlichen Ergebnisse heran kommen sollte. Nun stellt sich nur die Frage, welche Art von Modell hier am geeignetsten ist. Sieht man sich Abbildung 36 genauer an, erkennt man eine leichte Kurve in den Messwerten, weshalb sich ein lineares Modell eher schlecht eignen würde (siehe Abb. 37).¹¹⁴

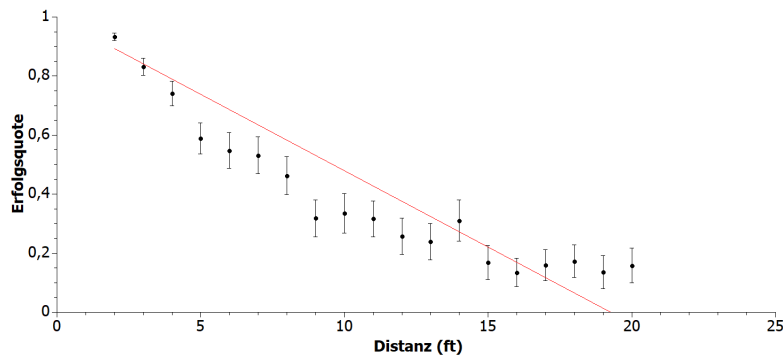


Abbildung 37: lineares Wahrscheinlichkeitsmodell

Wie man sieht geht dieser lineare Fit tatsächlich weit an den meisten Messpunkten inklusive Fehlerbalken vorbei.

Die nächste Überlegung wäre ein quadratischer Fit (siehe Abb. 38)

¹¹⁴vgl. [14, Seite 93]

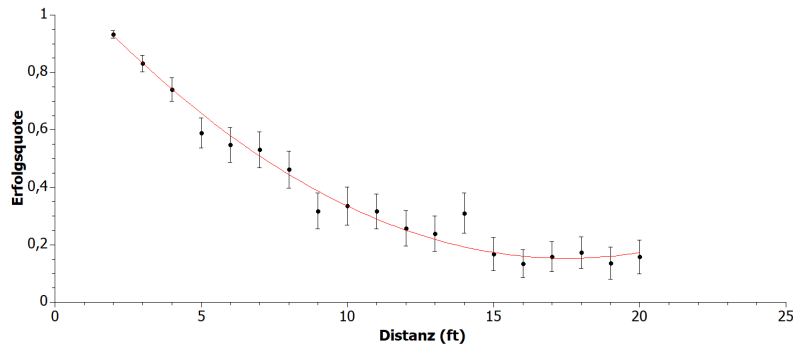


Abbildung 38: quadratisches Wahrscheinlichkeitsmodell

Dieses Modell scheint auf den ersten Blick schon recht gut zu sein, hat jedoch einige Schwachstellen. In Wirklichkeit muss sich die Erfolgswahrscheinlichkeit asymptotisch dem Wert 0 nähern, wenn die Distanz $x \rightarrow \infty$. Dies ist allerdings bei einem quadratischen Modell nicht der Fall. Hier steigt die Wahrscheinlichkeit nach Erreichen des Scheitelpunkts wieder an. Ein weiteres Problem stellt der Extremfall eines Putts mit Distanz $x=0$ dar, da hier natürlich die Erfolgswahrscheinlichkeit 100% bzw 1 sein müsste. Aber wie aus Abbildung 38 zu erkennen ist, ist dies mit diesem Modell nicht erreichbar. Es eignet sich also weder ein lineares noch ein quadratisches Wahrscheinlichkeitsmodell. Um ein passendes Modell zu finden skizzieren wir einen Putt der Distanz x (siehe Abb. 39)¹¹⁵

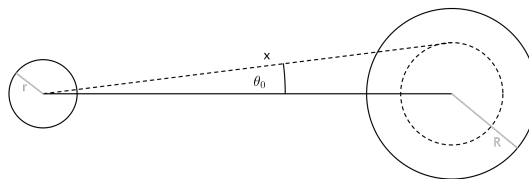


Abbildung 39: Skizze eines Putts der Distanz x , vgl. [14, Seite 94]

Damit der Ball im Loch verschwindet muss der Winkel des Golfschlages kleiner als der Grenzwinkel θ_0 sein. Durch trigonometrische Überlegungen erhält man für diesen Grenzwinkel folgenden Ausdruck:

¹¹⁵vgl. [14, Seite 93-94]

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{R-r}{x}\right) \quad (56)$$

Wobei der Lochradius $R =$ und der Ballradius $r =$ fest vorgegeben sind.¹¹⁶

Somit ist hier die einzig unbekannte Variable der von der Distanz abhängige Grenzwinkel θ_0 . Für diesen müssen wir nun nur noch die richtige Wahrscheinlichkeitsverteilung finden, wobei eine Gauß'sche Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu = 0$ sinnvoll erscheint. Der einzige Parameter ist dann die Standardabweichung σ . Mit dieser Verteilung erhält man für die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Putts aus der Distanz x folgenden Ausdruck:

$$P(\text{erfolgreicher Putt aus einer Distanz } x) = 2\Phi\left[\frac{1}{\sigma} \arcsin\left(\frac{R-r}{x}\right)\right] - 1 \quad (57)$$

wobei

$$\Phi = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} * \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) \quad (58)$$

die kumulierte Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung angibt.¹¹⁷

Man beachte, dass $\arcsin\left(\frac{R-r}{x}\right)$ nicht definiert wäre, wenn die Distanz $x < R-r$ ist. Diesen Fall muss man in unserem Model allerdings nicht berücksichtigen, da sich der Ball in diesem Fall schon im Loch befindet. Den unbekannten Parameter σ aus Gleichung 57 haben Gelman und Dolan mit 0,026 abgeschätzt. Multipliziert mit $\frac{180}{\pi}$ ergibt dies eine Standardabweichung σ von 1,5°. Legt man einen Fit dieses Modells in Abbildung 36, so sieht man, dass dieser recht gut passt. (siehe Abb. 40)¹¹⁸

¹¹⁶vgl. [14, Seite 94]

¹¹⁷vgl. [14, Seite 94]

¹¹⁸vgl. [14, Seite 94]

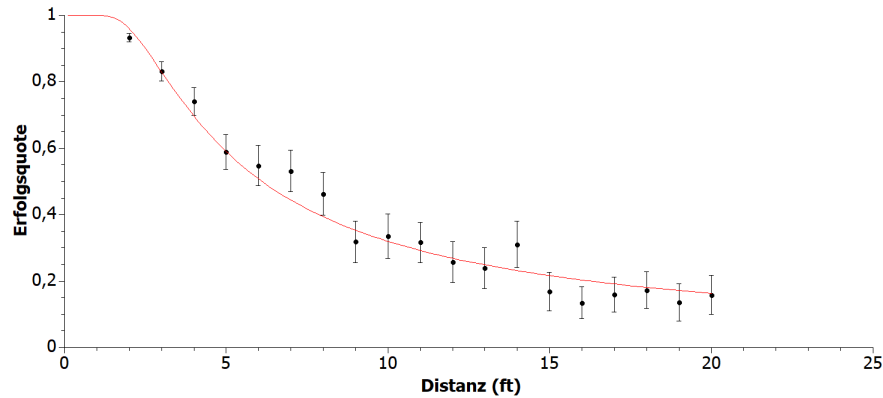


Abbildung 40: Erfolgswahrscheinlichkeit eines Putts aus der Distanz x inklusive Fit der Kurve P (erfolgreicher Putt aus einer Distanz x) $= 2\Phi\left[\frac{1}{\sigma}\arcsin\left(\frac{R-r}{x}\right)\right] - 1$, vgl. [14, Seite 94]

Auch wenn die Kurve nicht alle Punkte inklusive Fehlerbalken schneidet, ist dies doch ein sehr ansehnliches Wahrscheinlichkeitsmodell für einen erfolgreichen Putt aus einer gewissen Entfernung. Einer der Gründe warum dieses Wahrscheinlichkeitsmodell nicht perfekt ist, ist die Tatsache, dass es keine Schläge berücksichtigt, die das Loch verfehlen, weil sie zu kurz gespielt wurden. Des weiteren werden Faktoren wie Grünvariationen und Spielbedingungen unberücksichtigt gelassen. All diese Dinge zu berücksichtigen wäre allerdings zu kompliziert.¹¹⁹ Nichts desto trotz können wir nun mit unserem Modell annähernd die Wahrscheinlichkeit eines erfolgreichen Golfputts aus verschiedenen Distanzen berechnen. Es ergibt sich beispielsweise:

$$P(\text{erfolgreicher Putt aus } 3,28\text{ft}=1\text{m}) \approx 0,7909 = 79,09\%$$

$$P(\text{erfolgreicher Putt aus } 19,69\text{ft}=6\text{m}) \approx 0,1657 = 16,57\%$$

$$P(\text{erfolgreicher Putt aus } 32,81\text{ft}=10\text{m}) \approx 0,0999 = 9,99\%$$

$$P(\text{erfolgreicher Putt aus } 49,21\text{ft}=15\text{m}) \approx 0,0667 = 6,67\%$$

$$P(\text{erfolgreicher Putt aus } 65,62\text{ft}=20\text{m}) \approx 0,0501 = 5,01\%$$

¹¹⁹vgl. [14, Seite 94-95]

6 Fairness der Handicapsysteme

Von Anbeginn an war das Wetten auf den Ausgang einer Golfrunde zweier oder mehrerer Spielerinnen und Spieler von großer Bedeutung. Das Ziel eines Handicapsystems sollte nun sein zu gewährleisten, dass alle Spielerinnen und Spieler dieselbe Chance auf den Gewinn haben, egal welcher Spielstärke sie angehören. Natürlich spielt nicht immer jede Golferin und jeder Golfer auf demselben Platz oder in jeder Runde dasselbe Ergebnis. Deshalb muss ein faires Handicapsystem verschiedene Faktoren des Platzes, sowie eine größere Anzahl an Rundenergebnissen jeder einzelnen Golferin und jedes einzelnen Golfers berücksichtigen, um das richtige Handicap einer Spielerin oder eines Spielers ermitteln zu können.¹²⁰

In folgendem Abschnitt werde ich nun zwei der größten Handicapsysteme näher vorstellen und untersuchen, ob diese tatsächlich fair sind bzw. ob der oder die stärkere oder schwächere Spielerin oder Spieler bevorzugt wird.

6.1 Das amerikanische System der USGA

Das amerikanische Handicapsystem wird von der United States Golf Association verwaltet. Zunächst gilt es herauszufinden, wie schwer der Golfplatz ist, auf welchem gespielt wird. Hierzu besitzt jeder Kurs ein course rating (CR) und ein slope rating (SR). Das course rating soll den tatsächlichen Platzstandard, also das PAR des Platzes definieren. Das slope rating ist ein Ausgleichsfaktor, welcher eingeführt wurde, um das course rating für alle Spielstärken anzupassen. Es ist nämlich so, dass ein schwerer Platz für eine professionelle Golferin und einen professionellen Golfer zum Beispiel 6 Schläge schwerer zu spielen ist, für eine mittlere Spielerin oder mittleren Spieler schon 16 Schläge und für eine Anfängerin oder einen Anfänger fast unspielbar ist. Dies versucht das Handicapsystem durch das slope rating miteinzubeziehen. Mithilfe dieser beiden Werte und der Schlaganzahl S der auf diesem Platz gespielten Runde kann das Handicap H, welches an diesem Tag gespielt wurde, wie folgt berechnet werden:¹²¹

$$H = (S - CR) * \frac{113}{SR} \quad (59)$$

Um dies an einem Beispiel zu illustrieren wählen wir eine Schlaganzahl S=82 gespielt auf einem Kurs mit course rating CR=68 und einem slope rating SR=106:

$$H = (82 - 68) * \frac{113}{106} = 14,9$$

Das an diesem Tag erspielte Handicap wäre also rund 15.¹²² Wie in Punkt 6.1 erwähnt, müssen für ein aussagekräftiges Handicap mehrere Rundenergebnisse betrachtet werden. Im amerikanischen System werden hierfür

¹²⁰vgl.[31, Seite 80-82]

¹²¹vgl. [31, 82-83]

¹²²vgl. [31, Seite 83]

die Handicaps H der letzten 20 Runden herangezogen, wovon die höchsten 10 gestrichen werden. Der tatsächliche Wert ergibt sich dann durch den Mittelwert der verbleibenden 10 Werte, multipliziert mit 0,96. Die Wahl, welche einzelnen Handicaps H zu Berechnung des tatsächlichen Handicaps verwendet werden, hat natürlich einen hohen Einfluss auf das Ergebnis. So könnte man beispielsweise auch die 5 höchsten und 5 niedrigsten Werte streichen, was zu einem schlechteren Gesamthandicap führen würde. Somit ist das Streichen der höchsten 10 Werte, wie es im System der USGA der Fall ist, mit Sicherheit kein Nachteil für den Spieler.¹²³

In folgendem Beispiel zeigt sich eine Schwachstelle des amerikanischen Systems:

Gegeben seien die Schlaganzahlen der letzten 20 Runden zweier Golferinnen oder Golfer A und B

S von A: 71, 77, 71, 74, 74, 76, 79, 73, 73, 74, 74, 71, 74, 73, 74, 78, 73, 69, 77, 74

S von B: 80, 66, 79, 75, 78, 89, 68, 76, 72, 72, 80, 74, 72, 82, 78, 75, 74, 69, 77, 71

Sei der Einfachheit angenommen, dass all diese Runden auf demselben Platz mit CR=71 und SR=113 gespielt wurden, so ergeben sich die Handicaps der einzelnen Runden durch einfaches Subtrahieren von 78 von den Schlaganzahlen. Anders ausgedrückt, die Schläge über oder unter Par der jeweiligen Runde.

H von A: 0, 6, 0, 3, 3, 5, 8, 2, 2, 3, 3, 0, 3, 2, 3, 7, 2, -2, 6, 3

H von B: 9, -5, 8, 4, 7, 18, -3, 5, 1, 1, 9, 3, 1, 11, 7, 4, 3, -2, 6, 0

Nun werden jeweils die höchsten 10 Werte gestrichen und es ergibt sich:

H von A: 0, x, 0, x, x, x, x, 2, 2, x, x, 0, x, 2, 3, x, 2, -2, x, 3

H von B: x, -5, x, x, x, x, x, -3, x, 1, 1, x, 3, 1, x, x, 4, 3, -2, x, 0

Um das tatsächliche Handicap HCP der beiden Spielerinnen oder Spieler zu erhalten, bildet man nun den Mittelwert und multipliziert diesen mit 0,96:

$$A : HCP = 0,96 * \frac{0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 2 + 3 + 2 - 2 + 3}{10} \approx 1,2$$

$$B : HCP = 0,96 * \frac{-5 - 3 + 1 + 1 + 3 + 1 + 4 + 3 - 2 + 0}{10} \approx 0,3$$

Somit hätte Spielerin oder Spieler A ein Handicap von 1, obwohl sie oder er in 16 von 20 Runden 2 oder mehr über Par gespielt hat und Spielerin oder Spieler B wäre eine Scratchgolferin bzw. Scratchgolfer, also eine Spielerin oder ein Spieler mit Handicap 0, trotz der Tatsache, dass sie oder er 4 Runden mit 80 Schlägen und mehr gespielt hat. Dies ist der Grund warum das amerikanische Handicapsystem keine Durchschnittsergebnisse, sondern mögliche Ergebnisse misst.¹²⁴

¹²³vgl. [31, Seite 83]

¹²⁴vgl. [31, Seite 83-84]

6.2 Das europäische System der EGA

In Österreich und auch in vielen anderen europäischen Ländern wird nicht das amerikanische System, sondern das europäische Handicapsystem der European Golf Association (EGA) zur Ermittlung der Spielstärke herangezogen. Der größte Unterschied zum System der USGA besteht darin, dass nicht die letzten 20 Runden zur Handicapberechnung verwendet werden, sondern Handicapveränderungen nur durch vorgabenwirksame Turniere oder durch vorher anzumeldende Extra-Day-Scores Runden (EDS Runden) zu erreichen sind. Natürlich muss auch in Europa die Schwierigkeit der jeweiligen Golfplätze berücksichtigt werden. Hierzu verwendet man wieder, die schon oben erwähnten, Werte des slope ratings (SR) und des course ratings (CR). Aus dem Handicap der Spielerin oder des Spielers und aus dem SR und CR kann dann mithilfe der nachfolgenden Gleichung die sogenannte Spielvorgabe für den jeweiligen Platz und bei einem bestimmten Handicap berechnet werden.

$$HCP * \left(\frac{SR}{113} \right) - CR + PAR = \text{Spielvorgabe} \quad (60)$$

Die Spielvorgabe gibt an, wieviele Schläge eine Golfspielerin oder ein Golfspieler tatsächlich benötigen darf, um die jeweilige Stammvorgabe (=HCP) zu bestätigen. Spielt man nun in einem Turnier oder einer EDS-Runde besser als diese Spielvorgabe, so verbessert sich das Handicap. Spielt man allerdings einige Schläge schlechter, so kann sich das Handicap auch verschlechtern.¹²⁵ In Europa gibt es nun verschiedene Handicapkategorien (siehe Tab. 11)

Handicapkategorie	EGA-Handicap
1	+ HCP - 4,4
2	4,5 - 11,4
3	11,5 - 18,4
4	18,5 - 26,4
5	26,5 - 36,0
6	37 - 54

Tabelle 11: Handicapkategorien der EGA vgl. [19, Stand: 09.03.2018]

Das schwächste Handicap ist also 54. Dieses erhält man nach bestandener Platzreifeprüfung, welche man auch benötigt, um an Turnieren teilnehmen zu können. Je nach Handicapgruppe ändert sich das Handicap unterschiedlich stark wenn man besser oder schlechter als seine Spielvorgabe spielt (siehe Tab.12).¹²⁶

¹²⁵vgl. [17, Stand: 09.03.2018]

¹²⁶vgl. [19, Stand: 09.03.2018]

Handicapkategorie	EGA-Handicap	Pufferzone	Nettopunkte unter der Pufferzone	Nettopunkte über der Pufferzone
1	+ HCP - 4,4	35 - 36	Erhöhung des HCP um 0,1	Herabsetzung des HCP pro Punkt um 0,1
2	4,5 - 11,4	34 - 36	Erhöhung des HCP um 0,1	Herabsetzung des HCP pro Punkt um 0,2
3	11,5 - 18,4	33 - 36	Erhöhung des HCP um 0,1	Herabsetzung des HCP pro Punkt um 0,3
4	18,5 - 26,4			Herabsetzung des HCP pro Punkt um 0,4
5	26,5 - 36,0			Herabsetzung des HCP pro Punkt um 0,5
6	37 - 54			Herabsetzung des HCP pro Punkt um 1,0

Tabelle 12: Handicapveränderungen nach einem Turnier oder einer EDS-Runde
vgl. [19, Stand: 09.03.2018]

Die Pufferzone beschreibt jenen Punktebereich indem sich das Handicap nicht verändert.¹²⁷

Obige Tabelle 12 ist ein Beispiel für die Schweiz. Wie man erkennt, kann sich das Handicap von Spielerinnen und Spielern innerhalb der letzten drei Gruppen nicht verschlechtern.

In Österreich gilt dies hingegen nur für die Handicapgruppen 5 und 6.¹²⁸

6.3 Fair oder nicht fair?, dass ist hier die Frage!

Um diese Frage klären zu können bedarf es zunächst einiger Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bei einem Ereignis mit n möglichen Ergebnissen, gibt die nicht-negative Zahl p_j ($p_j \in \{p_k, k = 1, \dots, n\}$) die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein gewisses Ergebnis j eintritt. Hierbei gilt: Die Summe aller p_j ergibt 1.¹²⁹

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1 \quad (61)$$

¹²⁷vgl.[19, Stand: 09.03.2018]

¹²⁸vgl.[17, Stand: 09.03.2017]

¹²⁹vgl. [11, Seite 167]

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten p_j sind entweder bekannt oder es gehen bei immer wiederkehrenden Ereignissen die relativen Häufigkeiten der jeweiligen Ergebnisse in die Wahrscheinlichkeiten über. Voraussetzung hierfür ist aber eine große Anzahl an Durchführungen des Versuches. Es gilt also für große N :

$$\frac{N_j}{N} = p_j \quad (62)$$

Wobei N die Anzahl der Versuche und N_j die Anzahl mit der ein Ergebnis j eintritt angibt.¹³⁰

Wenn man nun allerdings eine Wahrscheinlichkeit für ein einmalig stattfindendes Ereignis angeben soll, so bildet man eine „subjektive Wahrscheinlichkeit“. Diese beruht auf Ergebnissen von ähnlichen Ereignissen aus der Vergangenheit. Dieses Prinzip verwenden beispielsweise Buchmacher, um Wettquoten festzulegen. Eine siebzigprozentige Hagelwahrscheinlichkeit bedeutet demnach, dass es in der Vergangenheit, bei ähnlicher Wetterlage, in 70% aller Fälle gehagelt hat.¹³¹

Das Handicap einer Golfspielerin und eines Golfspielers ist allerdings nicht immer ganzzahlig. Um die Wahrscheinlichkeiten ebensolcher nicht ganzzahliger Ergebnisse zu beschreiben, verwendet man eine stetige Funktion, die sogenannte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$. Die Fläche unter dieser Kurve ergibt wie in obiger Summe 1. Daher gilt:

$$\int p(x)dx = 1 \quad (63)$$

Charakterisiert werden solche Wahrscheinlichkeitsdichten durch 2 wichtige Kennzahlen. Zum einen ihren Erwartungswert $\langle x \rangle$, welcher eine Schätzung des zu erwartenden Ergebnisses ist und für eine große Anzahl von Wiederholungen den Mittelwert ergibt. Zum anderen ihre Streuung s^2 um den Erwartungswert, also die Abweichung der einzelnen Ergebnisse um den Erwartungswert. Für diese beiden Kennzahlen gelten folgende Formeln:¹³²

$$\langle x \rangle = \int xp(x)dx \quad (64)$$

$$s^2 = \int (x - \langle x \rangle)^2 p(x)dx \quad (65)$$

Jede Golfspielerin und jeder Golfspieler spielt nun, abhängig vom Handicap, mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eine gewisse Schlaganzahl. Der amerikanische Mathematiker Francis Scheid bestätigte empirisch die Annahme, dass das Brutto-Ergebnis einer Golfrunde, also die tatsächliche Schlaganzahl ohne

¹³⁰vgl. [11, Seite 167-168]

¹³¹vgl. [11, Seite 168]

¹³²vgl. [11, Seite 168]

Berücksichtigung des Handicaps, normalverteilt ist. Die Formel der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Gauß'schen Normalverteilung ist wie folgt gegeben:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) \quad (66)$$

Wobei $\bar{x} = < x >$ den Mittelwert und $\sigma = s$ die Standardabweichung der Verteilung angibt.¹³³

Skizziert man diese Funktion ergibt sich eine glockenförmige Kurve, welche symmetrisch zur Geraden $x = \bar{x}$ ist. Des weiteren liegen bei jeder Normalverteilung ca. 68% aller Werte im Bereich $\bar{x} \pm \sigma$, sowie rund 95% im Intervall $\bar{x} \pm 2\sigma$ und mehr als 99% im Bereich $\bar{x} \pm 3\sigma$. (siehe Abb. 41)¹³⁴

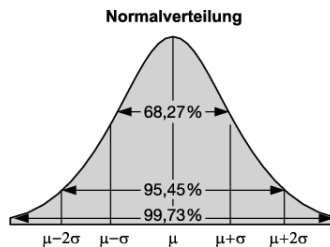


Abbildung 41: Skizze Normalverteilung wobei $\mu = \bar{x}$ [23, Stand: 02.01.2018]

Im Folgenden gehe ich, der Einfachheit halber, davon aus, dass das Handicap einer Spielerin und eines Spielers der Differenz der durchschnittlichen Schlaganzahl und des Platzstandards (PAR) entspricht. So ergibt sich für eine Spielerin oder einen Spieler die oder der im Schnitt 100 Schläge auf einem Golfplatz mit PAR 72 benötigt ein Handicap von $100 - 72 = 28$ und für eine Spielerin oder Spieler die oder der durchschnittlich 72 Schläge auf demselben Platz spielt, ein Handicap von 0. Grob gesagt ist die Standardabweichung einer guten Golferin und eines guten Golfers rund 3 Schläge und steigt für schlechtere Spielerinnen und Spieler auf 4,5 bis 5 Schläge. Näherungsweise gilt jedoch folgende Formel für die Standardabweichung:¹³⁵

$$\sigma = 3 + 1,5 * \frac{hcp}{26} = 3 + 0,058 * hcp \quad (67)$$

In Abbildung 42 ist nun eine Normalverteilung einer Spielerin oder eines Spielers mit $hcp = \bar{x} = 28$ und $\sigma = 5$, sowie einer Golferin oder Golfers mit $hcp = \bar{x} = 0$ und $\sigma = 3$ zu sehen.¹³⁶

¹³³vgl. [11, Seite 168-169]

¹³⁴vgl.[23, Stand: 02.01.2018]

¹³⁵vgl.[11, Seite 167-169]

¹³⁶vgl. [11, Seite 169]

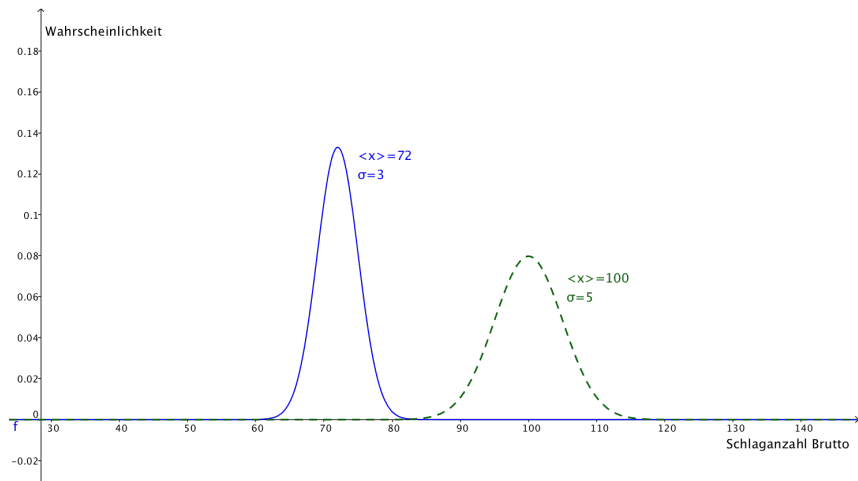


Abbildung 42: Wahrscheinlichkeitsverteilung des Bruttoergebnisses zweier Spieler mit Handicap 28 und 0. vgl. [11, Seite 169]

Hier ist deutlich zu sehen, dass die Breite der Verteilung der schwächeren Spielerin oder des schwächeren Spielers größer ist. Dies liegt an der höheren Standardabweichung. Daraus ergibt sich auch, dass die Wahrscheinlichkeit den Erwartungswert zu erreichen, für die bessere Spielerin und den besseren Spieler bei rund 14% und für die schwächere Spielerin und schwächeren Spieler nur bei ca. 8% liegt. Berechnet man nun das Handicap ein, so erhält man das sogenannte Netto-Ergebnis der beiden Golferinnen und Golfer. In folgender Abbildung 43 ist zu erkennen, dass es dadurch gelingt die Erwartungswerte gleichzusetzen.¹³⁷

¹³⁷[11, Seite 169]

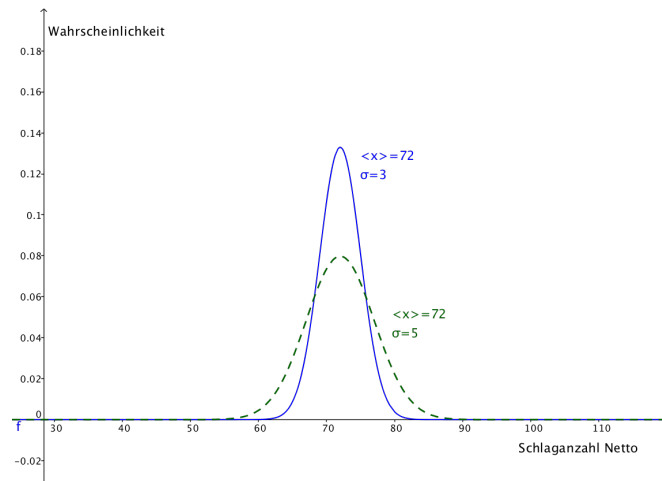


Abbildung 43: Wahrscheinlichkeitsverteilung des Nettoergebnisses zweier Spielerinnen und Spieler mit Handicap 28 und 0. vgl.[11, Seite 170]

Trotz derselben Mittelwerte bleibt die Wahrscheinlichkeit diesen zu erreichen, für die Schwächere oder den Schwächeren bei rund 8% und ist damit immer noch nur fast halb so groß wie die der stärkeren Golferin oder Golfers. Andererseits ergibt sich durch die größere Standardabweichung eine höhere Wahrscheinlichkeit vom Erwartungswert abzuweichen. Wegen der Symmetrie ist diese Wahrscheinlichkeit nach oben und unten gleich groß. Allerdings wird es in der Realität eher mehr Abweichungen nach oben geben.¹³⁸

Ob tatsächlich beide Spielerinnen und Spieler die gleichen Chancen haben ein Spiel gegeneinander zu gewinnen werde ich nun anhand des amerikanischen Systems diskutieren. Für das europäische gilt nahezu dasselbe, weshalb es genügt das amerikanische System zu betrachten. Denn obwohl die Berechnung der Handicaps in diesen Systemen verschieden ist, gilt bei beiden, dass ein einzelnes schlechtes Resultat keinen großen Einfluss auf das Handicap haben soll. Eine Folgerung aus dieser Tatsache ist, dass es schwerer ist sein Handicap zu verschlechtern als zu verbessern, was die meisten Golferinnen und Golfer freut. Tatsächlich verschlechtern sich dadurch jedoch ihre Chancen, da das Handicap oft nicht der tatsächlichen Spielstärke entspricht. Beide Handicapsystem sind so ausgelegt, dass das Handicap einer Golferin und eines Golfers nicht der Differenz des Bruttoergebnissdurchschnitts und dem Platzstandard entspricht, sondern niedriger als diese ist. Dies hat zur Folge, dass Golfspielerinnen und Golfspieler ihr Handicap im Schnitt nicht erreichen werden.¹³⁹

Obige Aussage werde ich jetzt anhand des amerikanischen Systems genauer untersuchen. Für das europäische System ergibt sich nahezu dasselbe Resultat,

¹³⁸vgl. [11, Seite 169-170]

¹³⁹vgl.[11, Seite 170-171]

weshalb ich dieses nicht im Detail betrachten werde.

Sei N_b das Bruttoergebnis und $\langle N_b \rangle$ das Mittel der Bruttoergebnisse einer Golferin oder eines Golfers. So ergibt sich, unter Vernachlässigung des slope und course ratings das Handicap hcp_0 (= einfaches Handicap) wie folgt:

$$hcp_0 = \langle N_b \rangle - PAR \quad (68)$$

Wobei PAR den Platzstandard angibt, der normalerweise bei 72 liegt.¹⁴⁰

Das Nettoergebnis N_n der Spielerin oder des Spielers erhält man durch subtrahieren des echten Handicaps hcp vom Bruttoergebnis. Dasselbe gilt natürlich auch für die Mittel der beiden Ergebnisse:

$$\langle N_n \rangle = \langle N_b \rangle - hcp \quad (69)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 68 in Gleichung 69 erhält man:

$$\langle N_n \rangle = hcp_0 + PAR - hcp$$

$$\iff \langle N_n \rangle - PAR = hcp_0 - hcp = \Delta hcp \quad (70)$$

Würde heutzutage noch das einfache System zur Berechnung des Handicaps verwendet werden, so wäre die Differenz zwischen dem echten Handicap und dem einfachen Handicap null, also $\Delta hcp = 0$. Dies würde bedeuten, dass das Nettoergebnis jeder Golfspielerin und jedes Golfspielers dem Platzstandard entsprechen würde. Allerdings wird im amerikanischen System, wie bereits erwähnt, der Durchschnitt der besten 10 von den letzten 20 gespielten Runden zur Handicapberechnung herangezogen. Aus Gleichung 66 und Normierung auf hcp_0 ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion für die besten 10 Runden:

$$p_{10}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (71)$$

Der Mittelwert ergibt sich folgendermaßen:

$$\Delta hcp = \int_{-\infty}^0 x p_{10}(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = 0,8\sigma \quad (72)$$

Man sieht also, dass das tatsächliche Handicap unterhalb des einfachen Handicaps liegt und von der Streuung abhängt. Das bedeutet, je höher die Streuung ist, umso größer ist dieser Effekt, was zur Folge hat, dass schwächere Spielerinnen und Spieler eine geringere Chance haben zu gewinnen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nettoergebnisse zweier Spielerinnen und Spieler, unter Berücksichtigung dieses Effekts, ist in Abbildung 44 zu sehen.¹⁴¹

¹⁴⁰vgl. [11, Seite 171]

¹⁴¹vgl. [11, Seite 171-172]

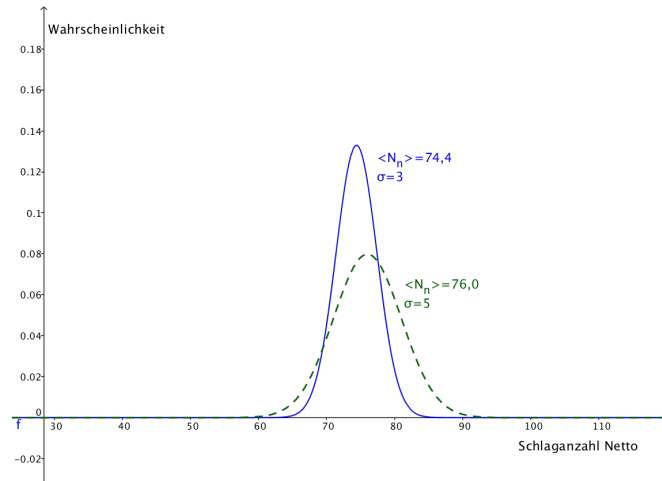


Abbildung 44: Wahrscheinlichkeitsverteilung des Nettoergebnisses zweier Spielerinnen und Spieler, unter Berücksichtigung der oben berechneten Korrektur, vgl. [11, Seite 172]

Zusätzlich gibt es im System der USGA auch noch einen sogenannten „Bonus of Excellence“, welcher diese Korrektur noch verstärkt und so die schwächeren Spielerinnen und Spieler noch etwas mehr benachteiligt. Durch diesen Bonus lautet die Formel für das amerikanische Handicapsystem wie folgt:

$$\Delta hcp = 0,8\sigma + 0,04hcp \quad (73)$$

In Gleichung 67 haben wir gesehen, dass die Streuung vom Handicap abhängt. Setzt man nun diese Gleichung in Gleichung 73 ein erhält man folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Delta hcp &= 0,8 * (3 + 0,058hcp) + 0,04hcp \\ \Leftrightarrow \Delta hcp &= 2,4 + 0,0864hcp \end{aligned} \quad (74)$$

Dies ist ein linearer Zusammenhang, welcher in Abbildung 45 zu sehen ist.¹⁴²

¹⁴²vgl. [11, Seite 172]

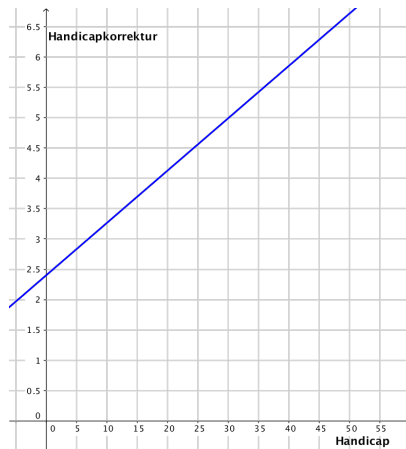


Abbildung 45: Handicapkorrektur in Abhängigkeit vom Handicap, vgl. [11, Seite 173]

Wenn wir nun wieder unsere beiden Golfspielerinnen und Golfspieler mit Handicap 0 und 28 vergleichen erkennen wir, dass die stärkere Golferin bzw. der stärkere Golfer einen Vorteil von etwa 2,5 Schlägen hat. Selbst eine Spielerin oder ein Spieler mittlerer Spielstärke, etwa mit Handicap 15, hat gegenüber einer schwächeren Golferin oder eines schwächeren Golfers mit Handicap 30, einen Bonus von über einem Schlag. Somit kann man deutlich sagen, dass das Handicapsystem der USGA sowie das der EGA bei weitem keine Chancengleichheit liefern. Es wird immer die Spielerin oder der Spieler mit besserem Handicap bevorzugt. Dies mag zwar etwas unfair klingen, tatsächlich ist es jedoch, zumindest zu einem Teil, beabsichtigt. Man möchte die schwächeren Spieler dazu bringen härter zu trainieren und ihre Handicaps zu verbessern. Damit sinkt automatisch ihre Streuung und der Schlagunterschied zu den stärkeren Kontrahenten.¹⁴³

Durch die Unterschiede in der Berechnung des Handicaps ergeben sich je nach System natürlich auch verschiedene Spielvorgaben für Spielerinnen und Spieler mit gleicher Spielstärke. Es hat sich gezeigt, dass europäische Scratch Golferinnen und Golfer einen Vorteil von einem Schlag auf ihre amerikanischen Kontrahentinnen und Kontrahenten haben würden. Bei zwei Spielerinnen und Spielern mit Handicap 28 ergibt sich sogar ein Vorteil von 2 Schlägen zu Gunsten der Europäerin oder des Europäers. Eine große Fehleinschätzung sowohl von Europäerinnen und Europäern als auch von Amerikanerinnen und Amerikanern ist es zu glauben, man müsse in jeder Runde in der Lage sein, sein Handicap spielen zu können. Tatsächlich sind aber beide Systeme so ausgelegt, dass man nicht davon ausgehen darf, sein Handicap zu erreichen. Wenn wiederum eine Spielerin oder ein Spieler andauernd sein Handicap spielen sollte, kann man als Umkehrschluss daraus ziehen, dass diese oder dieser eine zu hohe Spielvorgabe

¹⁴³vgl. [11, Seite 173-174]

besitzt.¹⁴⁴

In Abbildung 46 ist die Wahrscheinlichkeit sein Handicap zu spielen im Abhängigkeit vom Handicap zu sehen:

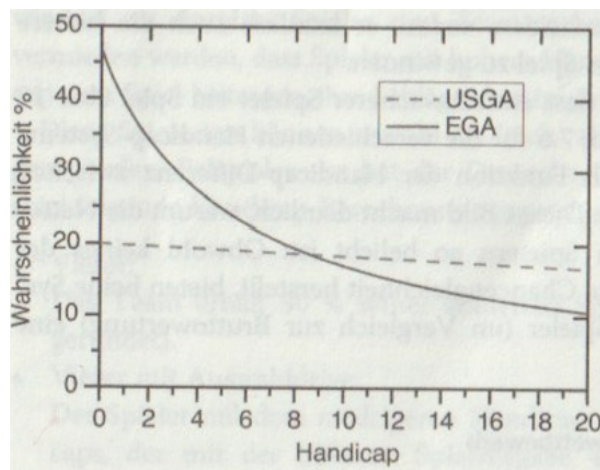


Abbildung 46: Wahrscheinlichkeit sein Handicap zu spielen in Abhängigkeit des Handicaps [11, Seite 173]

Tatsächlich liegt also die Wahrscheinlichkeit sein jeweiliges Handicap in einer Runde zu erzielen in beiden Systemen konstant unter 50%. Auffallend ist die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit im amerikanischen System von 20% bei Scratch Golferinnen und Golfern gerade mal auf 18 % für eine Spielerin und einen Spieler mit Handicap 20 sinkt. Im Unterschied dazu ist es in Europa für eine gute Golferin und einen guten Golfer deutlich wahrscheinlicher die Spielvorgabe zu erzielen und für eine schwächere und schwächeren erheblich schwieriger. Die Werte schwanken nämlich von über 40% bei einer Scratch Golferin oder einem Scratch Golfer bis etwa 10% für eine 20 Handicaperin oder Handicaper.¹⁴⁵ John Wesson hat sich noch die Frage gestellt, wie nun die konkreten Wahrscheinlichkeiten für einen Sieg einer Spielerin oder eines Spielers mit Handicap 18 gegen eine Spielerin oder einen Spieler mit Handicap 0 aussehen. Diese Handicaps wurden aufgrund der Einfachheit gewählt. Denn grob gesagt bedeutet eine Handicapdifferenz von 18, dass die oder der schlechtere Spielerin oder Spieler pro Loch einen Schlag mehr benötigen darf als ihre oder seine stärkere Kontrahentin oder Kontrahent. Als Spielform für diesen Vergleich bietet sich das „Matchplay“ an. Durch untersuchen der typischen Ergebnisse einer Scratch Golferin oder Golfers und einer Spielerin oder Spielers mit Handicap 18 erhält man für die Wahrscheinlichkeiten, eine gewisse Schlaganzahl auf einem PAR 4 Loch zu erzielen, folgende Werte (siehe Tab. 13):¹⁴⁶

¹⁴⁴[40, Seite 167-168]

¹⁴⁵vgl. [11, Seite 173-174]

¹⁴⁶vgl. [40, Seite 179]

Schlaganzahl	3	4	5	6	7	8	9
Handicap 0	0,12	0,69	0,16	0,02	0,01		
Handicap 18	0,01	0,23	0,34	0,25	0,09	0,06	0,02

Tabelle 13: Wahrscheinlichkeit einer gewissen Schlaganzahl auf einem PAR 4 für Golfspielerinnen und Golfspieler mit Handicap 0 und 18, vgl. [40, Seite 179]

Bei der Scratch Golferin oder dem Scratch Golfer, wie auch bei der 18 Handicaperin oder dem 18 Handicaper, ergibt die Addition aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1 bzw. 100%, wie es auch sein sollte. Wie erwähnt darf die oder der schlechtere Spielerin oder Spieler einen Schlag pro Loch mehr benötigen. Daraus folgt, dass beide Spielerinnen und Spieler ein Loch teilen wenn die bessere Golferin oder der bessere Golfer beispielsweise eine 4 und die oder der schwächere eine 5 spielt. Dies passiert mit einer Wahrscheinlichkeit von:

$$P(\text{Teilung} \mid \text{HCP 0 benötigt 4 Schläge}) = 0,69 * 0,34 = 0,23 = 23\%$$

Natürlich kann die Scratch Golferin oder der Scratch Golfer mit dem wahrscheinlichsten Ergebnis von 4 Schlägen auch das Loch gewinnen und zwar wenn die schwächere Spielerin oder der schwächere Spieler 6 oder mehr Schläge benötigt. Die Wahrscheinlichkeit einer 4 der besseren Golferin oder Golfers ist wie gehabt 0,69. Die Wahrscheinlichkeit für eine 6 oder höher der Spielerin oder des Spielers mit Handicap 18 erhält man wie folgt:

$$P(6 \text{ oder mehr Schläge} \mid \text{HCP 18}) = 0,25 + 0,09 + 0,06 + 0,02 = 0,42$$

Daraus erhält man, dass die bessere Spielerin oder der bessere Spieler mit einem Ergebnis von 4 mit einer Wahrscheinlichkeit von:

$$P(\text{HCP 0 gewinnt} \mid 4 \text{ Schläge}) = 0,69 * 0,42 = 0,29 = 29\%$$

gewinnt. Verlieren würde die bessere Spielerin oder der bessere mit einer 4 nur, wenn die schwächere Golferin oder der schwächere Golfer auch 4 Schläge oder weniger benötigen würde. Dies passiert mit einer Wahrscheinlichkeit von:

$$P(4 \text{ oder weniger Schläge} \mid \text{HCP 18}) = 0,23 + 0,01 = 0,24$$

$$P(\text{HCP 0 verliert} \mid 4 \text{ Schläge}) = 0,69 * 0,24 = 0,17 = 17\%$$

Zusammengefasst gewinnt die 0 Handicaperin oder der 0 Handicaper mit einem Par auf diesem Loch zu 29%, verliert zu 17% und teilt das Loch zu 23%.¹⁴⁷

Obiges Prozedere kann man nun für alle möglichen Schlaganzahlen der Scratch Golferin oder des Scratch Golfers wiederholen:

- Handicap 0 benötigt 3 Schläge:

¹⁴⁷vgl. [40, Seite 179-180]

$$P(\text{Teilung}|\text{HCP 0 benötigt 3 Schläge}) = 0,12 * 0,23 = 0,0276 = 2,76\%$$

$$P(5 \text{ oder mehr Schläge}|\text{HCP 18}) = 0,34 + 0,25 + 0,09 + 0,06 + 0,02 = 0,76$$

$$P(\text{HCP 0 gewinnt}|3 \text{ Schläge}) = 0,12 * 0,76 = 0,0912 = 9,12\%$$

$$P(3 \text{ oder weniger Schläge}|\text{HCP 18}) = 0,01$$

$$P(\text{HCP 0 verliert}|3 \text{ Schläge}) = 0,12 * 0,01 = 0,0012 = 0,12\%$$

- Handicap 0 benötigt 5 Schläge:

$$P(\text{Teilung}|\text{HCP 0 benötigt 5 Schläge}) = 0,16 * 0,25 = 0,04 = 4\%$$

$$P(7 \text{ oder mehr Schläge}|\text{HCP 18}) = 0,09 + 0,06 + 0,02 = 0,17$$

$$P(\text{HCP 0 gewinnt}|5 \text{ Schläge}) = 0,16 * 0,17 = 0,0272 = 2,72\%$$

$$P(5 \text{ oder weniger Schläge}|\text{HCP 18}) = 0,34 + 0,23 + 0,01 = 0,58$$

$$P(\text{HCP 0 verliert}|5 \text{ Schläge}) = 0,16 * 0,58 = 0,0928 = 9,28\%$$

- Handicap 0 benötigt 6 Schläge:

$$P(\text{Teilung}|\text{HCP 0 benötigt 6 Schläge}) = 0,02 * 0,09 = 0,0018 = 0,18\%$$

$$P(8 \text{ oder mehr Schläge}|\text{HCP 18}) = 0,06 + 0,02 = 0,08$$

$$P(\text{HCP 0 gewinnt}|6 \text{ Schläge}) = 0,02 * 0,08 = 0,0016 = 0,16\%$$

$$P(6 \text{ oder weniger Schläge}|\text{HCP 18}) = 0,25 + 0,34 + 0,23 + 0,01 = 0,83$$

$$P(\text{HCP 0 verliert}|6 \text{ Schläge}) = 0,02 * 0,83 = 0,0166 = 1,66\%$$

- Handicap 0 benötigt 7 Schläge:

$$P(\text{Teilung}|\text{HCP 0 benötigt 7 Schläge}) = 0,01 * 0,06 = 0,0006 = 0,06\%$$

$$P(9 \text{ oder mehr Schläge}|\text{HCP 18}) = 0,02$$

$$P(\text{HCP 0 gewinnt}|\text{7 Schläge}) = 0,01 * 0,02 = 0,0002 = 0,02\%$$

$$P(7 \text{ oder weniger Schläge}|\text{HCP 18}) = 0,09 + 0,25 + 0,34 + 0,23 + 0,01 = 0,92$$

$$P(\text{HCP 0 verliert}|\text{7 Schläge}) = 0,01 * 0,92 = 0,0092 = 0,92\%$$

Zusammengefasst ergibt sich folgende Tabelle 14:¹⁴⁸

Ergebnis Handicap 0	Wahrscheinlichkeit von Handicap 0 zu		
	gewinnen	verlieren	teilen
3	0,0912	0,0012	0,0276
4	0,29	0,17	0,23
5	0,0272	0,0928	0,04
6	0,0016	0,0166	0,0018
7	0,0002	0,0092	0,0006
Summe	0,4102	0,2898	0,3000

Tabelle 14: Wahrscheinlichkeiten für den Lochausgang in einem Match Play einer 0 Handicaperin oder eines 0 Handicapers mit einer 18 Handicaperin oder einem 18 Handicaper, vgl.[40, Seite 180]

Man sieht, die Wahrscheinlichkeit ein PAR 4 Loch zu gewinnen, liegt für die Scratch Golferin oder den Scratch Golfer bei etwa 41% für die 18-Handicaperin oder 18-Handicaper bei rund 29%. Die restlichen 30 % geben die Wahrscheinlichkeit an, das Loch zu teilen. Auf typischen PAR 4 Löchern hat also die bessere Spielerin oder der bessere Spieler einen Vorteil. Interessant ist jedoch, dass dies nicht für alle Arten von Golföchern gilt. Man könnte obige Berechnungen sowohl für PAR 3 als auch für PAR 5 Löcher wiederholen und folgende Ergebnisse erhalten. Eine Spielerin oder ein Spieler mit Handicap 18 gewinnt gegen eine Spielerin oder einen Spieler mit Handicap 0 zu 44% ein PAR 3 und zu 27% ein PAR 5. Umgekehrt gewinnt die Scratch Golferin oder der Scratch Golfer ein PAR 3 Loch mit einer Wahrscheinlichkeit von 27% und ein PAR 5 Loch mit einer Wahrscheinlichkeit von 51%. Dies bedeutet wiederum, dass die beiden Spielerinnen und Spieler ein PAR 3 Loch zu 29% und ein PAR 5 Loch zu 22% teilen. Erstaunlich ist also, dass die schlechtere Spielerin oder der schlechtere Spieler zwar einen deutlichen Nachteil auf den längeren Löchern (PAR 4 und PAR 5) hat, jedoch auf den kürzeren Spielbahnen (PAR 3) öfters das bessere

¹⁴⁸vgl. [40, Seite 180]

Ende für sich hat. Eine typische Golfrunde hat allerdings mehr PAR 4 und PAR 5 Löcher als PAR 3, weshalb der bessere Spielerinnen und Spieler insgesamt einen Vorteil besitzen.¹⁴⁹

Wir haben nun also ein Beispiel eines Matchplays unter Berücksichtigung des Handicaps betrachtet. Sobald wir dies tun ist natürlich klar, dass aufgrund der unterschiedlichen Handicapsysteme auch verschiedene Ergebnisse herauskommen müssen. Wesson hat sich mit dieser Frage ausführlich beschäftigt und die Wahrscheinlichkeit eines Sieges der besseren bzw. schlechteren Spielerin bzw. Spielers in folgendem Diagramm (siehe Abb. 47) dargestellt.

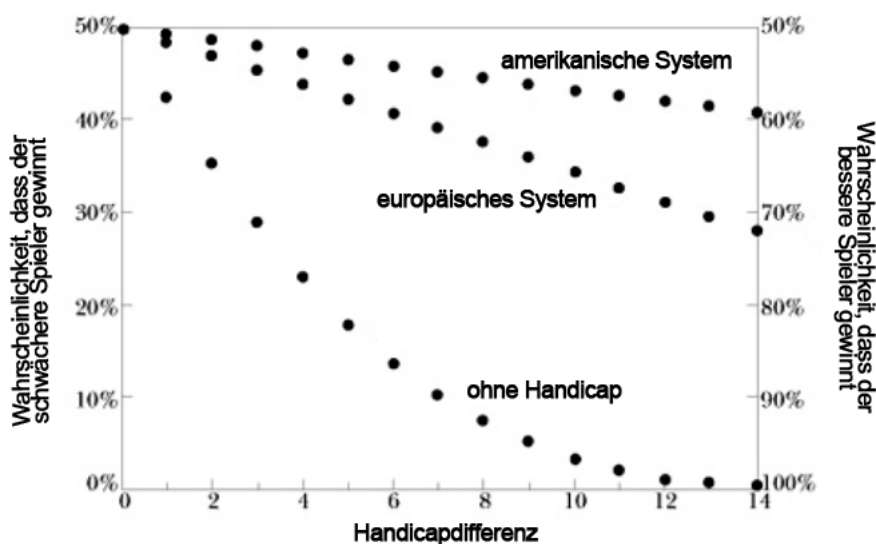


Abbildung 47: Wahrscheinlichkeit eines Matchplaysieges in Abhängigkeit der Handicapdifferenz, vgl. [40, Seite 181]

Man sieht, schon eine Handicapdifferenz von 6 bewirkt für die schwächere Spielerin oder den schwächeren Spieler nur eine etwa 15 prozentige Chance das Spiel zu gewinnen, wenn kein Handicap berücksichtigt wird. Noch drastischer wäre eine Handicapdifferenz von 12. Hier hätte sie oder er gerade mal eine Wahrscheinlichkeit von rund 1% zu gewinnen. Berücksichtigt man allerdings die Handicaps der beiden Spielerinnen und Spieler, so ändern sich diese Zahlen. In Europa würde im ersten Fall die Wahrscheinlichkeit auf über 40 % und in Amerika gar auf über 45% steigen. Selbst im Falle der größeren Differenz steigt die Chance auf einen Sieg der Außenseiterin oder des Außenseiters in Europa auf über 30 % und in Amerika auf über 40%. Abbildung 47 zeigt also klar die Wichtigkeit der Handicapsysteme im Golf, obwohl keines der beiden tatsächlich

¹⁴⁹vgl. [40, Seite 180]

allen Spielerinnen und Spielern die gleichen Wahrscheinlichkeiten einräumt ein Matchplay zu gewinnen.¹⁵⁰

6.4 Handicapberechnung in Teambewerben

Golf ist zwar prinzipiell ein Einzelsport doch vor allem im Amateurbereich, unter Freundinnen und Freunden, werden oft Varianten des Spiels gesucht, welche man in Teams mit- und gegeneinander bestreiten kann. Nachfolgend sind einige der beliebtesten und verbreitetsten Spielformen kurz beschrieben:

- Foursome (klassischer Vierer)
Hier spielen zwei Teams zu je 2 Spielerinnen oder Spielern gegeneinander. Die Besonderheit liegt darin, dass pro Team nur ein Ball gespielt wird, welcher abwechselnd von den Teammitgliedern geschlagen werden muss.
- Scramble
Die Grundregeln des Scrambles sind einfach erklärt. Es spielen normalerweise 4 Spielerinnen oder Spieler pro Team (können auch weniger sein), wobei jede oder jeder seinen eigenen Ball abschlägt. Danach wird entschieden, welcher der vier Bälle weitergespielt wird. Hat man sich geeinigt, so schlagen von diesem Punkt aus wieder alle Spielerinnen und Spieler einen Ball. Danach wird wieder der beste Ball ausgesucht und in diesem Prozedere weitergespielt, bis der Ball im Loch ist. Scramble ist wohl eine der vielseitigsten und lustigsten Spielformen im Teamgolf, denn den Regeln sind in Wirklichkeit keine Grenzen gesetzt, da diese Wettspielform nicht vorgabenwirksam ist. Deshalb gibt es auch verschiedenste Formen des Scrambles, wie beispielsweise den Texas-Scramble oder auch den Florida-Scramble. Diese unterscheiden sich im Endeffekt nur darin, ob eine gewisse Spielerin oder ein gewisser Spieler nur einen Typ Schlag, beispielsweise einen Putt, ausführen darf oder ob eine Spielerin oder ein Spieler pro Loch aussetzen muss, etc.
- Fourball (Vierball)
Hier besteht wieder jedes Team aus 2 Spielerinnen oder Spielern. Jedes Teammitglied spielt seinen eigenen Ball auf jedem Loch zu Ende. Insgesamt sind also pro Bahn 4 Bälle im Spiel, woher auch der Name Vierball stammt. Am Ende jedes Lochs zählt das bessere Ergebnis der beiden Teammitglieder zur Gesamtwertung.
- Vierer mit Auswahldrive
Dies ist eine etwas leichtere Version des klassischen Vierers. Der Unterschied liegt darin, dass jedes Teammitglied an jedem Loch seinen eigenen Ball abschlägt und man sich erst danach entscheiden muss, welcher der beiden Bälle anschließend abwechselnd weitergeschlagen wird.¹⁵¹

¹⁵⁰vgl. [40, Seite 181]

¹⁵¹vgl. [11, Seite 174-175]

Natürlich steht auch bei allen diesen Wettspielarten die Chancengleichheit im Vordergrund, weshalb es auch hier Regeln zur Berechnung des Teamhandicaps geben muss. Hier müssen allerdings gewisse Faktoren berücksichtigt werden. Vor allem, inwiefern jede Einzelspielerin und jeder Einzelspieler zum Gesamthandicap beiträgt. Wichtig ist es, dass eine Spielerin und ein Spieler mit hohem Handicap nicht nur als Teammitglied ausgewählt wird, weil sie oder er so das Gesamthandicap deutlich erhöhen würde, sondern tatsächlich eine Rolle im Spiel übernimmt.¹⁵²

In Deutschland aber auch in Österreich ist es üblich die Handicaps der oben genannten Spielformen wie folgt zu ermitteln:

- Foursome

Da hier abwechselnd gespielt wird, trägt jede Spielerin und jeder Spieler gleich viel zum Endergebnis bei. Deshalb ergibt sich das Teamhandicap aus 50% der addierten Spielvorgaben beider Spielerinnen oder Spieler:

$$hcp_{team} = 0,5 * (hcp_1 + hcp_2) \quad (75)$$

- Fourball

Hier spielt jede Spielerin und jeder Spieler für sich, jedoch erhält man trotzdem nur 90% seiner tatsächlichen Spielvorgabe, da man als Team eigentlich zwei Chancen pro Loch hat.

- Vierter mit Auswahldrive

Da man sich hier den Abschlag auf jedem Loch aussuchen darf und so natürlich deutlich häufiger der Ball der Spielerin oder des Spielers mit dem besseren Handicap gewählt wird, errechnet sich das Teamhandicap aus 60% der Spielvorgaben der stärkeren Golferin oder des stärkeren Golfers addiert mit 40% der Spielvorgabe des schwächeren Teammitglieds.

$$hcp_{team} = 0,6hcp_1 + 0,4hcp_2, \quad (76)$$

wobei $hcp_1 < hcp_2$

- Scramble

Da es sich hierbei, wie schon erwähnt, um keine vorgabenwirksame Spielform handelt, gibt es auch keine offiziellen Richtlinien, nach welchen das Teamhandicap berechnet werden soll. Üblicherweise trägt jedoch die beste Spielerin oder der beste Spieler des Teams am meisten zum Gesamtergebnis bei und die oder der schwächste am wenigsten. Daher sollten auch die Handicaps dementsprechend gewichtet werden. Erreicht wird dies beispielsweise so:

$$hcp_{team} = 0,4 * hcp_1 + 0,3 * hcp_2 + 0,2 * hcp_3 + 0,1 * hcp_4, \quad (77)$$

wobei $hcp_1 < hcp_2 < hcp_3 < hcp_4$ ¹⁵³

¹⁵²vgl. [11, Seite 175]

¹⁵³vgl. [11, Seite 175-176]

Das Wort „gewichtet“ in obiger Erklärung gibt schon Hinweis darauf, dass alle vorgestellten Berechnungsmöglichkeiten auf dem Prinzip des gewichteten arithmetischen Mittels beruhen. Diese ist wie folgt gegeben:

$$hcp_{team} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w_i * hcp_i), \quad (78)$$

Mit NAnzahl der Spielerinnen und Spieler pro Team und w_i ... frei wählbare Gewichtungsfaktoren für die folgendes gilt: $\frac{1}{N} \sum w_i = 1$ ¹⁵⁴
Um ohne Gewichtung auszukommen könnte man auch das harmonischen Mittel zur Berechnung verwenden. Dieses ist wie folgt gegeben:

$$\frac{1}{hcp_{harm}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{hcp_i} \quad (79)$$

155

In Tabelle 15 kann man die Unterschiede der verschiedenen Mittelwerte bei der Berechnung des Teamhandicaps sehr gut erkennen:

hcp ₁	hcp ₂	hcp ₃	hcp ₄	arithmetisches Mittel	gewichtetes Mittel	harmonisches Mittel
20	20	20	20	20	20	20
10	10	30	30	20	16	15
10	20	20	30	20	17	17
10	10	10	30	15	12	12
10	30	30	30	25	22	20

Tabelle 15: Berechnung des Teamhandicaps mit verschiedenen Mittelwerten, vgl. [11, Seite 177]

Wie man sieht, eignet sich das arithmetische Mittel nicht zur Berechnung da man in drei von fünf Fällen dasselbe Ergebnis erhält, obwohl im zweiten Beispiel zwei gute Spielerinnen oder Spieler im Flight sind. Des weiteren sieht man sehr gut, dass das harmonische Mittel und das gewichtete arithmetische Mittel nahezu dieselben Teamhandicaps ergeben. Hier zeigt sich deutlich, dass der harmonische Mittelwert automatisch die höheren Handicaps weniger gewichtet als die niedrigeren.¹⁵⁶

¹⁵⁴vgl. [11, Seite 176]

¹⁵⁵vgl. [11, Seite 176]

¹⁵⁶vgl. [11, Seite 177]

7 No risk no fun?

Eine Frage, die sich viele Golferinnen und Golfer im Laufe einer Runde stellen ist, ob es sinnvoller wäre beim Abschlag auf ein schmales Fairway zu riskieren und den Driver zu zücken oder doch lieber auf Nummer sicher zu gehen und ein Eisen zu verwenden. Dieser Frage möchte ich nun mathematisch auf den Grund gehen. Die beiden entscheidenden Größen hierfür sind die Distanz d und der Winkel ϕ . Um die Wahrscheinlichkeit, einen Golfball eine gewisse Distanz d in Richtung ϕ zu schlagen, berechnen zu können, muss man eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(d, \phi)$ betrachten. Perfekt wäre es, wenn jede Golfspielerin und jeder Golfspieler diese Funktion für jeden ihrer oder seiner Schläger wissen würde. In der Praxis ist dies allerdings schwierig, da man mit jedem Schläger hunderte Bälle auf der Driving Range schlagen müsste und für jeden Schlag die Werte für die Distanz und den Winkel dokumentieren müsste. Der Einfachheit halber geht man davon aus, dass sowohl die Distanz d als auch die durch den Winkel ϕ vorgegebene Richtung normalverteilt und unabhängig voneinander sind. Dann gilt nämlich für die Wahrscheinlichkeitsdichte:¹⁵⁷

$$p(d, \phi) = p(d)p(\phi) \quad (80)$$

Die Gleichung der Gauß'schen Normalverteilung kennen wir schon von oben und erhalten daher:

$$p(d, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} * \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d - \bar{d}}{\sigma_d}\right)^2\right) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} * \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{\sigma_\phi}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow p(d, \phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma_d} * \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d - \bar{d}}{\sigma_d}\right)^2\right) * \frac{1}{\sigma_\phi} * \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{\sigma_\phi}\right)^2\right) \quad (81)$$

wobei $\bar{d}$ und σ_d der Mittelwert und die Standardabweichung der Distanz und σ_ϕ die Standardabweichung des Winkels sind.¹⁵⁸

Betrachtet man nun ein Fairway mit Breite D , so ergibt sich für einen Ball mit Distanz d der auf dem Fairway landen soll, ein zulässiger Winkelbereich $-\phi_0 < \phi < \phi_0$.¹⁵⁹

¹⁵⁷vgl. [11, Seite 177-179]

¹⁵⁸vgl. [11, Seite 179]

¹⁵⁹vgl. [11, Seite 179-180]

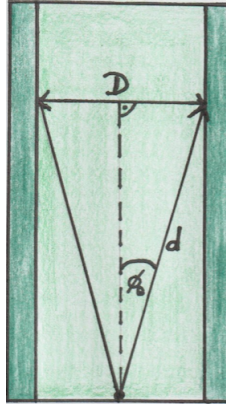


Abbildung 48: Fairway der Breite D und zulässiger Winkelbereich, vgl. [11, Seite 180]

Mithilfe von Abbildung 48 und wenigen trigonometrischen Überlegungen kann man den Winkel ϕ_0 wie folgt ermitteln:

$$\sin(\phi_0(d)) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{D}{2}}{d} = \frac{D}{2d} \quad (82)$$

Im allgemeinen ist $\frac{D}{2} \ll d$ und daher gilt:

$$\phi_0(d) \approx \sin(\phi_0(d)) = \frac{D}{2d} \quad (83)$$

160

Die Wahrscheinlichkeit obiges Fairway zu treffen wird wie folgt ermittelt

$$\begin{aligned} P(\text{Fairwaytreffer}) &= \int_0^\infty \int_{-\phi_0(x)}^{\phi_0(x)} p(x, \phi') d\phi' dx \\ &= \int_0^\infty p_d(x) \int_{-\phi_0(x)}^{\phi_0(x)} p_\phi(\phi') d\phi' \end{aligned} \quad (84)$$

Angenommen die Wahrscheinlichkeit $p_d(d)$ hat ein scharfes Maximum an der Stelle des Mittelwerts der Distanz $\bar{d}$, so kann man x in den Integrationsgrenzen des zweiten Integrals durch $\bar{d}$ ersetzen und erhält:

¹⁶⁰vgl. [11, Seite 180]

$$\begin{aligned}
P(\text{Fairwaytreffer}) &= \int_{-\phi_0(\bar{d})}^{\phi_0(\bar{d})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} * \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{\sigma_\phi}\right)^2\right) d\phi \\
\iff P(\text{Fairwaytreffer}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \int_{-\phi_0(\bar{d})}^{\phi_0(\bar{d})} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{\sigma_\phi}\right)^2\right) d\phi \quad (85)
\end{aligned}$$

Dies ist ein Integral der Form $\int \exp(-x^2) dx$. Dieses lässt sich analytisch leider nicht mehr lösen. Da es aber sehr oft vorkommt ist die numerische Lösung gegeben durch:

$$\int \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} * \text{erf}(x) \quad (86)$$

Wobei erf(x) die sogenannte Error-Funktion beschreibt.¹⁶¹

Dies angewendet auf obiges Integral der Gaußverteilung ergibt:

$$\begin{aligned}
P(\text{Fairwaytreffer}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} * \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\phi \text{erf}\left(\frac{\phi}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) \Big|_{-\phi_0(\bar{d})}^{\phi_0(\bar{d})} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} * \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\phi \text{erf}\left(\frac{\phi_0(\bar{d})}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\phi \text{erf}\left(\frac{-\phi_0(\bar{d})}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} * \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\phi * \left(\text{erf}\left(\frac{\phi_0(\bar{d})}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) - \text{erf}\left(\frac{-\phi_0(\bar{d})}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) \right) \right] \\
&\stackrel{\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} * \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_\phi * 2 * \text{erf}\left(\frac{\phi_0(\bar{d})}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} * \sqrt{2\pi}\sigma_\phi * \text{erf}\left(\frac{\phi_0(\bar{d})}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) = \text{erf}\left(\frac{\phi_0(\bar{d})}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) \quad (87)
\end{aligned}$$

Mithilfe von Gleichung 83 erhält man:

¹⁶¹vgl. [11, Seite 180-181]

$$\phi_0(\bar{d}) = \frac{D}{2\bar{d}}$$

und somit:

$$\begin{aligned} P(\text{Fairwaytreffer}) &= \text{erf}\left(\frac{\phi_0(\bar{d})}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) = \text{erf}\left(\frac{\frac{D}{2\bar{d}}}{\sqrt{2}\sigma_\phi}\right) \\ &= \text{erf}\left(\frac{D}{2\sqrt{2}\sigma_\phi\bar{d}}\right) \\ &= \text{erf}\left(\frac{2^{-\frac{3}{2}}D}{\sigma_\phi\bar{d}}\right) \end{aligned} \quad (88)$$

162

In unserem Fall hängt die Error-Funktion also vor allem vom Produkt des Mittelwerts der Distanz und der Standardabweichung der Richtung ab. Diese Error-Funktion lässt sich nun, beispielsweise für ein 10 Meter breites Fairway, in Abhängigkeit der mittleren Abschlagsdistanz zeichnen. In Abbildung 49 ist sie für zwei unterschiedliche Standardabweichungen zu sehen. Die größere Abweichung $\sigma_\phi = 0,05$ steht für einen Schlag mit dem Driver und die niedrigere $\sigma_\phi = 0,03$ für einen Schlag mit einem Eisen. Laut den Regeln der Normalverteilung liegen rund 95% aller Werte innerhalb von $\pm$ zwei Standardabweichungen. Für den Driver bedeutet dies, dass 95 % aller Schläge innerhalb von $\pm 2 * 0,05 * \frac{180}{\pi} \approx 5,7^\circ$ zum Liegen kommen. Bei einem Schlag mit einem Eisen erhält man $\pm 2 * 0,03 * \frac{180}{\pi} \approx 3,4^\circ$.¹⁶³

¹⁶²vgl. [11, Seite 180]

¹⁶³vgl. [11, Seite 181]

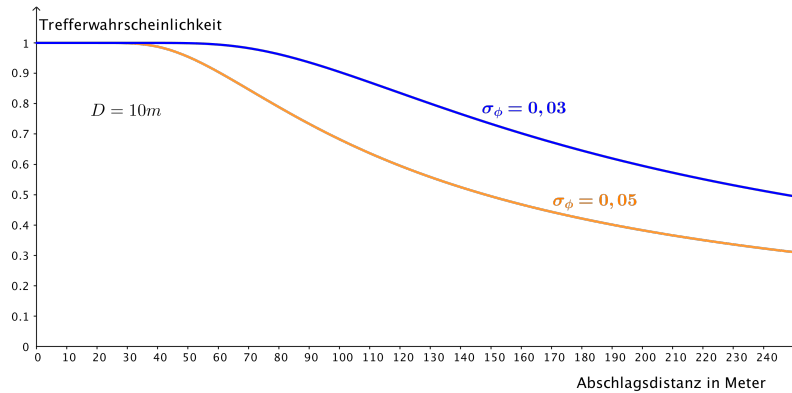


Abbildung 49: Wahrscheinlichkeit eines Fairwaytreffers in Abhängigkeit der mittleren Abschlagsdistanz, vgl. [11, Seite 181]

Um nun die Frage nach Risiko oder doch lieber Sicherheit beantworten zu können, verwendet man die Entscheidungstheorie. Diese Theorie setzt ein gewisses Risiko mit dem in diesem Fall zu erwartenden Gewinn in Beziehung. Daraus ergeben sich mehrere Optionen bzw. Alternativen. Für jede dieser ist das Produkt aus Erfolgswahrscheinlichkeit und resultierendem Nutzen zu berechnen. Die beste Alternative ist dann jene, wo dieses Produkt am größten ist. Man muss allerdings auch bei jeder Entscheidung den möglichen Verlust und die Wahrscheinlichkeit für dessen Eintreten miteinbeziehen. Wenn man dies tut ergibt sich der sogenannte Erfolgsindex E :

$$E = p_G * G + p_V * V \quad (89)$$

wobei p_G und p_V die Gewinn- bzw Verlustwahrscheinlichkeiten sind. Je höher der Erfolgsindex einer Alternative ist, umso besser ist diese.¹⁶⁴

Überträgt man diese Überlegungen nun auf den Golfsport so ist der Gewinn ein Schlaggewinn und der Verlust ein Schlagverlust, denn das Ziel ist ja, den Ball mit möglichst wenig Schlägen im Loch zu versenken. Für obiges Beispiel eines Abschlags auf ein schmales Fairway, müssen wir also sowohl für die Option Driver als auch für die Option Eisen den Erfolgsindex bestimmen. Hierzu gehen wir davon aus, dass ein erfolgreicher Eisenschlag, aufgrund der kurzen Schlagdistanz, keinem Schlaggewinn ($G=0$) und ein Fairwaytreffer mit dem Driver einem halben Schlaggewinn ($G=0,5$) entspricht. Für beide Optionen schätzen wir das Verfehlen des Fairways mit einem Schlagverlust von einem halben Schlag ab ($V=-0,5$). Die Erfolgswahrscheinlichkeiten eines Abschlags mit einem Eisen bzw. mit dem Driver lassen sich mithilfe von Abbildung 49 abschätzen. Wenn wir davon ausgehen, dass eine Eisenschlag etwa 100 Meter und ein Driver-schlag rund 150 Meter weit fliegt, erhält man für die Trefferwahrscheinlichkeit

¹⁶⁴vgl. [11, Seite 177-179]

0,9 bzw. 0,5. Aus diesen Werten fertigen wir nun eine Tabelle an, welche für alle Optionen (O_i) und Resultate (R_j) die Gewinne und Wahrscheinlichkeiten zusammenfasst. Eine solche Tabelle hilft bei der Entscheidungsfindung und heißt daher auch Entscheidungsmatrix (siehe Tab. 16).¹⁶⁵

	R₁ : Fairwaytreffer	R₂ : Fairway verfehlt
O₁ : Eisen		
Schlaggewinn	0	-0,5
Wahrscheinlichkeit	0,9	0,1
O₂ : Driver		
Schlaggewinn	0,5	-0,5
Wahrscheinlichkeit	0,5	0,5

Tabelle 16: Entscheidungsmatrix für einen Abschlag auf ein 10 Meter breites Fairway; vgl.[11, Seite 182]

Daraus erhält man folgende Erfolgindizes:

$$E_{Eisen} = 0,9 * 0 - 0,1 * 0,5 = -0,05$$

$$E_{Driver} = 0,5 * 0,5 - 0,5 * 0,5 = 0$$

Wie man sieht ist der Erfolgsindex des Drivers größer als jener des Eisens, weshalb es in unserem Beispiel besser wäre den Driver am Abschlag zu zücken. Natürlich werden die Werte in der Praxis für jede Golfspielerin und jeden Golfspieler variieren und von jenen in Tabelle 16 abweichen. Obwohl es dadurch zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen kann, bleibt die angewendete Methode zur Entscheidungsfindung dieselbe.¹⁶⁶

¹⁶⁵vgl. [11, Seite 179-182]

¹⁶⁶vgl. [11, Seite 181-182]

8 Conclusio

Diese Arbeit zeigt, dass es mit vergleichsweise einfachen mathematischen Operationen, zum Beispiel bei der Berechnung der Ball-Flugkurve gelingt, Ergebnisse zu erzielen, die nahe an jene herankommen, die über digitale Geräte die weit mehr Parameter in ihre Berechnungen miteinbeziehen (z.B. der TrackMan) berechnet werden.

Auch am Beispiel der Erfolgswahrscheinlichkeit eines Putts wird aufgezeigt, dass mathematische Erklärungen zu guten Ergebnissen führen können. Es zeigt sich aber, dass es komplexerer Modelle unter Einbeziehungen von unterschiedlichsten Faktoren wie zum Beispiel Grünvariationen, Spielbedingungen (Wetter) und andere braucht um die Ergebnisse noch besser zu gestalten.

Ein beachtenswertes Ergebnis bringt die Betrachtung des Handicaps. Gerade auf dieses ist man ja im Golfsport besonders stolz. Das Handicap soll gewährleisten, dass auch Spielerinnen und Spieler mit geringer Spielstärke gegen „bessere“ Golferinnen und Golfer gewinnen können. In dieser Arbeit wird mathematisch belegt, dass dieses Ansinnen nicht erfüllt wird.

Ein kleines Beispiel am Ende der Arbeit soll Golferinnen und Golfer motivieren, vielleicht doch einmal etwas mehr Risiko einzugehen als immer „safe“ zu spielen. Es belegt mathematisch dass es für das Ergebnis besser ist, bei einem engen Fairway den risikoreicheren Schlag mit dem Driver zu tätigen als ein fehlerverzeihendes Eisen zu nehmen.

Die Arbeit belegt einerseits mathematisch, wie sehr das Golfspiel von physikalischen Gesetzmäßigkeiten abhängig ist, was insbesondere bei der Entwicklung der Golfausrüstung immer mehr an Bedeutung gewinnt. Auf der anderen Seite wird aber auch deutlich wo mathematische Berechnungen ihre Grenzen haben und dass die Einflüsse auf ein gutes Spielergebnis sehr vielfältig sind.

Literatur

- [1] BEARMAN, P.W. ; HARVEY, J.K.: Golf Ball Aerodynamics. In: *Aeronautical Quarterly* (1976), S. 112–122
- [2] BERRY, Donald A.: *Statistics - A Bayesian Perspective*. Belmont, CA. : Duxbury Press, 1996. – ISBN 978-0-534-23472-0
- [3] BURGER, Marco: *ABC der Golfshäfte*. <http://www.golf.de/publish/equipment/expertentipps/60107696/abc-der-golfschaefte>. – Stand: 29.03.2017
- [4] CALLAWAYGOLF.COM: *Apex CF 16 irons product specs*. <http://www.callawaygolf.com/golf-clubs/iron-sets/irons-2016-apex.html>
- [5] CALLAWAYGOLF.COM: *Chrome Soft X Golf Balls*. <http://de.callawaygolf.com/golf-balls/balls-2017-chrome-soft-x.html>
- [6] CALLAWAYGOLF.COM: *Mens 2017 GBB Epic Driver product specs*. <http://www.callawaygolf.com/golf-clubs/drivers/drivers-great-big-bertha-epic-2017.html>
- [7] CALLAWAYGOLF.COM: *Mens 2017 GBB Epic fairway wood product specs*. <http://www.callawaygolf.com/golf-clubs/fairway-woods/fwoods-great-big-bertha-epic-2017.html>
- [8] CALLAWAYGOLF.COM: *Mens mack daddy forged chrome product specs*. <http://www.callawaygolf.com/golf-clubs/wedges/wedges-2017-mack-daddy-forged-chrome.html>
- [9] CALLAWAYGOLF.COM: *Mens Steelhead XR 16 Hybrid product specs*. <http://www.callawaygolf.com/golf-clubs/hybrids/hybrids-2016-steelhead-xr.html>
- [10] DE.WIKIPEDIA.ORG: *Runge-Kutta-Verfahren*. <https://de.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta-Verfahren>
- [11] EGRY, Iván: *Physik des Golfspiels - Mit Newton zum Tee*. 1. Aufl. New York : John Wiley & Sons, 2014. – ISBN 978-3-527-41254-9
- [12] ERLICHSON, Herman: Maximum projectile range with drag and lift, with particular application to golf. In: *Am. J. Phys.* 51 (1983), S. 357–362
- [13] FELDEN, Oliver: *Neue Putter von Callaway: Odyssey Works für mehr Roll*. <http://www.golfpost.de/wp-content/uploads/2015/01/Tour-Proven-Shapes.jpg>
- [14] GELMAN, Andrew ; NOLAN, Deborah: A Probability Model for Golf Putting. In: *Teaching Statistics* 24 (2002), 01, Nr. 3, S. 93–95

- [15] GOLF FOR BUSINESS: *Das statische Fitting*.
<http://www.golf-for-business.de/golfportal/statistisches-fitting.php>. Version: 2016. – Stand: 30.03.2017
- [16] GOLF KNIGGE: *Golfschläger-Arten - vom Putter bis zum Driver*. <https://golf-knigge.de/golfschlaeger-arten/>. Version: 2017. – Stand März 2017
- [17] GOLF.AT: *Vorgabensystem - ÖGV*. <http://www.golf.at/verband/rules-und-rating/vorgabesystem-zsvs/>
- [18] GOLFSTUN.DE: *Golfschläger und Golfausrüstung, Lie*.
<https://golfstun.de/glossar/lie/>. – Stand 30.03.2017
- [19] GOLFSUISSE.CH: *EGA Handicapsystem - 2016-2019/ Kurz gefasst*.
www.golfsuisse.ch/asg/binarydata/ega_handicap_system_d_kurz.pdf.
Version: 2016
- [20] GOLFUNDGUENSTIG.DE: *Callaway Apex CF 16 Herren Eisensatz 5-PW*.
<https://www.golfundguenstig.de/Golfschlaegersaetze/Eisensaetze/Callaway-Apex-CF-16-Herren-Eisensatz-5-PW.html>
- [21] GOLFUNDGUENSTIG.DE: *Callaway Steelhead XR Hybrid Herren*.
<https://www.golfundguenstig.de/Golfschlaeger/Hybrids/Callaway-Steelhead-XR-Hybrid-Herren.html>
- [22] JORGENSEN, Theodore P.: *The Physics of Golf*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer Science & Business Media, 2013. – ISBN 978-1-441-98618-4
- [23] KAMPS, Prof. Dr. U.: *Normalverteilung*.
<http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/normalverteilung.html>
- [24] KELLEY, Brent: *Meet the Woods*. <https://www.thoughtco.com/meet-the-woods-1560511>. Version: 12 2014. – Stand 30.03.2017
- [25] KELLEY, Brent: *Bobby Locke: The Quirky Golfer Who Won 4 Opens*. <https://www.thoughtco.com/bobby-locke-profile-1563703>.
Version: 2017
- [26] KELLEY, Brent: *Meet the golf clubs: Explaining the different types*. <https://www.thoughtco.com/meet-the-golf-clubs-1560507>.
Version: 02 2017. – Stand: 30.03.2017
- [27] KELLEY, Brent: *Meet the irons: An intro for golf beginners*.
<https://www.thoughtco.com/meet-the-irons-1560506>. Version: 02 2017. – Stand 30.03.2017
- [28] KELLEY, Brent: *Meet the utility/hybrid clubs*.
<https://www.thoughtco.com/meet-the-utility-hybrid-clubs-1560505>.
Version: 02 2017. – Stand: 30.03.2017

- [29] KELLEY, Brent: *Meet the wedges:An intro for golf beginners*.
<https://www.thoughtco.com/meet-the-wedges-1560509>. Version: 02
 2017. – Stand: 30.03.2017
- [30] MASCHINENBAU-WISSEN.DE: *Reynoldszahl & Strömungsarten*.
<http://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/fluidtechnik/hydraulik/202-reynoldszahl>. Version: 2009
- [31] MINTON, Roland: *Golf by the Numbers - How Stats, Math, and Physics Affect Your Game*. London : JHU Press, 2012. – ISBN 978-1-421-40452-3
- [32] SPEKTRUM AKADEMISCHER VERLAG: *Lexikon der Physik Reynolds-Zahl*.
<http://www.spektrum.de/lexikon/physik/reynolds-zahl/12399>.
 Version: 1998
- [33] STOFFEL, Hendrik: *Callaway GBB Epic Driver im Golf.de Test*.
<http://www.golf.de/publish/equipment/test-und-kaufberatung/60111487/callaway-gbb-epic-driver-im-golf-de-test>
- [34] STOFFEL, Hendrik: *Callaway GBB Epic Fairwayholz im Golf.de Test*.
<http://www.golf.de/publish/equipment/test-und-kaufberatung/60111649/callaway-gbb-epic-fairwayholz-im-golf-de-test>
- [35] THE-GOLF-EXPERIENCE.COM: *Golf Clubs*.
<http://www.the-golf-experience.com/images/Golf-Club-Shaft-Flex-Transparent.png>
- [36] TRACKMANGOLF.COM: *Rory Mcilroy - 2016 Open de France*.
<https://blog.trackmangolf.com/rory-mcilroy-2016-open-de-france/>
- [37] TRACKMANGOLF.COM: *Trackman average tour stats*.
<https://blog.trackmangolf.com/trackman-average-tour-stats/>
- [38] TRACKMANGOLF.COM/DE: *Trackman*. <https://trackmangolf.com/de/>
- [39] WALLGANG.DE: *Stimpmeter, was ist das denn?*
<https://wallgang.wordpress.com/2015/05/07/stimpmeter-was-ist-das-denn/>. Version: 2015
- [40] WESSON, John: *The Science of Golf* -. New York, London : OUP Oxford, 2009. – ISBN 978-0-199-22620-7
- [41] YUN, Hunki: *New Stimpmeter Introduced*.
<http://www.usga.org/articles/2013/01/usga-introduces-updated-stimpmeter-21474853935.html>. Version: 2013

Abbildungsverzeichnis

1	Skizze eines Schlägeraufbaus [16, Stand: 23.08.2017]	8
2	Auswirkung des Shaftflex [35, Stand: 23.08.2017]	10
3	Kick-Point eine Golfschafts [3, Stand: 09.04.2016]	11
4	Typisches Aussehen eines Drivers [33, Stand: 23.08.2017]	13
5	Typisches Aussehen eines Fairwayholzes [34, Stand: 23.08.2017]	13
6	Typisches Aussehen eines Golfeisens [20, Stand: 23.08.2017]	14
7	Typisches Aussehen eine Golfhybrids [21, Stand: 23.08.2017]	15
8	Verschiedene Bauformen eines Putters, von rechts: klassische, Blade und Mallet Form [13, Stand: 23.08.2017]	17
9	Spin in Abhängigkeit der Ballhärte [11, Seite 157]	18
10	Aufbau eines Golfballs [5, Stand: 23.08.2017]	19
11	Widerstandsbeiwert c_w in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re [11, Seite 69]	21
12	Richtung der aerodynamischen Kräfte auf einen Golfball[31, Seite 17]	23
13	Richtung der Auftriebskraft, bei verschiedenen Spinarten[31, Seite 18]	24
14	Widerstands- und Auftriebsbeiwert c_w und c_M in Abhängigkeit des Spinparameters [11, Seite 72]	25
15	Vergleich Luftwiderstand eines glatten Balles und eines Balles mit Dimples [31, Seite 19]	27
16	Vergleich Auftriebskraft eines glatten Balles und eines Balles mit Dimples [31, Seite 19]	28
17	Wurfparabel mit $v_0 = 60m/s$ und $\varphi = 45^\circ$, vgl. [11, Seite 75]	30
18	Flugkurve eines Golfballs mit Luftwiderstand	35
19	Vergleich der Flugkurven im Vakuum und unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes, vgl. [11, Seite 77]	36
20	Vergleich der Flugkurven im Vakuum und jener mit Luftwiderstand sowie jener mit doppelten Luftwiderstand	37
21	Flugkurve eines Golfballs mit Luftwiderstand und Spin berechnet mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens, $\frac{c}{m} = 0,25s^{-1}$, $\frac{k}{m} = 0,247s^{-1}$, vgl. [12, Seite 360]	38
22	Flugkurve eines Golfballs mit Luftwiderstand und Spin berechnet mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens, $\frac{c}{m} = 0,25s^{-1}$, $\frac{k}{m} = 0,179s^{-1}$, vgl. [12, Seite 361]	39
23	Flugkurve eines Golfballs mit Luftwiderstand und Spin nach Tait für relativistische Werte: $w_0 = 60m/s$, $\psi_0 = 10^\circ=0,1745329rad$, $k = 0,2s^{-1}$, $a = 100m$; vgl. [11, Seite: 80]	48
24	Vergleich der Flugkurven eines Golfballs in Vakuum, mit Luftwiderstand und mit Luftwiderstand und Spin, Anfangsbedingungen: $w_0 = 60m/s$, $\psi_0 = 10^\circ=0,1745329rad$, $k = 0,2s^{-1}$, $a = 100m$; $\frac{m}{c} = 4s$; vgl. [11, Seite: 80]	48
25	Näherungsweise Flugkurven von verschiedenen Golfschlägern für tatsächliche Werte von Golfprofis	50

26	Flugkurve und Werte eines Drives von Rory McIlroy, gemessen mit dem TrackMan,[36, Stand: 16.05.2018]	51
27	Polarkoordinaten [31, Seite 38]	52
28	Skizze zur Herleitung der Richtungsabweichung eines Putts	54
29	Endpunkte eines 4,5 Meter Putts eines 10-Handicappers [31, Seite 39]	55
30	„Make Zone“ eines geraden Putts (Skalierung in Inch, $1in = 2,54cm$) [31, Seite 41]	56
31	Stimpfmeter zur Messung der Grüngeschwindigkeit[41, Stand: 21.08.2017]	57
32	Skizze eines Stimpfmeters [39, Stand: 21.08.2017]	57
33	„Make Zone“ eines ebenen 15 Feet Putts [31, Seite 41]	58
34	„Make Zone“ eines schrägen bergab Putt aus 15ft [31, Seite 42]	58
35	Erfolgsquote in Abhängigkeit der Distanz, vgl.[14, Seite 93]	61
36	Erfolgsquote in Abhängigkeit der Distanz inklusive 95% Konfidenzintervalle, vgl.[14, Seite 94]	62
37	lineares Wahrscheinlichkeitsmodell	62
38	quadratisches Wahrscheinlichkeitsmodell	63
39	Skizze eines Putts der Distanz x , vgl. [14, Seite 94]	63
40	Erfolgswahrscheinlichkeit eines Putts aus der Distanz x inklusive Fit der Kurve P (erfolgreicher Putt aus einer Distanz x) = $2\Phi\left[\frac{1}{\sigma}\arcsin\left(\frac{R-r}{x}\right)\right] - 1$, vgl. [14, Seite 94]	65
41	Skizze Normalverteilung wobei $\mu = \bar{x}$ [23, Stand: 02.01.2018]	71
42	Wahrscheinlichkeitsverteilung des Bruttoergebnisses zweier Spieler mit Handicap 28 und 0. vgl. [11, Seite 169]	72
43	Wahrscheinlichkeitsverteilung des Nettoergebnisses zweier Spielerinnen und Spieler mit Handicap 28 und 0. vgl.[11, Seite 170]	73
44	Wahrscheinlichkeitsverteilung des Nettoergebnisses zweier Spielerinnen und Spieler, unter Berücksichtigung der oben berechneten Korrektur, vgl. [11, Seite 172]	75
45	Handicapkorrektur in Abhängigkeit vom Handicap, vgl. [11, Seite 173]	76
46	Wahrscheinlichkeit sein Handicap zu spielen in Abhängigkeit des Handicaps [11, Seite 173]	77
47	Wahrscheinlichkeit eines Matchplaysieges in Abhängigkeit der Handicapdifferenz, vgl. [40, Seite 181]	81
48	Fairway der Breite D und zulässiger Winkelbereich, vgl. [11, Seite 180]	86
49	Wahrscheinlichkeit eines Fairwaytreffers in Abhängigkeit der mittleren Abschlagsdistanz, vgl. [11, Seite 181]	89

Tabellenverzeichnis

1	Korrekte Griffstärke für unterschiedliche Handgrößen [15, Stand: 30.03.2017]	9
2	Größenkorrekturen der Griffstärke[15, Stand: 30.03.2017]	9
3	Shaft-Flex, vgl. [11, Seite 128]	10
4	Produktspezifikationen Callaway Great Big Bertha Epic Hölzer [6, Stand 11.04.2017];[7, Stand 11.04.2017]	13
5	Produktspezifikationen Callaway Apex CF16 Eisen [4, Stand 11.04.2017]	15
6	Produktspezifikationen Callaway Steelhead XR16 Hybrids [9, Stand: 11.04.2017]	16
7	Produktspezifikationen Callaway Mack Daddy Forged Wedges [8, Stand: 11.04.2016]	16
8	Richtlinien für Golfbälle vgl. [11, Seite 155]	18
9	Durchschnittswerte der Ballgeschwindigkeit, des Abflugwinkels und des Carry von Golfern der US PGA Tour, vgl. [37, Stand: 16.05.2018]	49
10	Durchgeführte und erfolgreiche Putts aus verschiedenen Distanzen, vgl. [2, Seite 80 ff.]	60
11	Handicapkategorien der EGA vgl. [19, Stand: 09.03.2018]	68
12	Handicapveränderungen nach einem Turnier oder einer EDS-Runde vgl. [19, Stand: 09.03.2018]	69
13	Wahrscheinlichkeit einer gewissen Schlaganzahl auf einem PAR 4 für Golfspielerinnen und Golfspieler mit Handicap 0 und 18, vgl. [40, Seite 179]	78
14	Wahrscheinlichkeiten für den Lochausgang in einem Match Play einer 0 Handicaperin oder eines 0 Handicapers mit einer 18 Handicaperin oder einem 18 Handicaper, vgl.[40, Seite 180]	80
15	Berechnung des Teamhandicaps mit verschiedenen Mittelwerten, vgl. [11, Seite 177]	84
16	Entscheidungsmatrix für einen Abschlag auf ein 10 Meter breites Fairway; vgl.[11, Seite 182]	90