



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

## **Die Mathematik macht den Ton**

Geometrische Konzepte in der Musik

verfasst von / submitted by

**Sandra Hoschek**

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
**Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)**

Wien, 2018 / Vienna 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geschichte,  
Sozialkunde und Politische Bildung

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith



# Danksagung

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie, an erster Stelle meinen Eltern, die mir diese Ausbildung ermöglicht und mich in jeder Phase meines Lebens unterstützt haben. Ich möchte mich auch bei meinen Studienkollegen für die schöne und unvergessliche Zeit an der Universität bedanken. Mein besonderer Dank gilt natürlich auch meinem Betreuungslehrer Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, der mir ermöglicht hat, meine eigenen Vorstellungen und Ideen in dieser Arbeit umzusetzen und mich stets mit seinem fachlichen Rat und seinen raschen und konstruktiven Rückmeldungen unterstützte.



# Inhaltsverzeichnis

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Einleitung .....</b>                                     | <b>7</b>  |
| <br>                                                        |           |
| <b>1. Musikalische Akustik .....</b>                        | <b>9</b>  |
| 1.1. Wellen und Schwingungen .....                          | 9         |
| 1.1.1. Harmonische Schwingung .....                         | 12        |
| 1.2. Die Physik des Schalls .....                           | 14        |
| 1.2.1. Tonhöhe .....                                        | 14        |
| 1.2.2. Lautstärke .....                                     | 16        |
| 1.2.3. Klangfarbe .....                                     | 19        |
| 1.3. Oberschwingungen und die Fourier-Analyse .....         | 22        |
| 1.3.1. Anwendungsbeispiel .....                             | 23        |
| 1.4. Überlagerung harmonischer Schwingungen .....           | 29        |
| 1.4.1. Interferenz .....                                    | 29        |
| 1.4.2. Schwebung .....                                      | 32        |
| 1.4.3. Residualtöne .....                                   | 34        |
| 1.4.4. Kombinationstöne .....                               | 36        |
| 1.5. Graphische Darstellung von Tönen .....                 | 37        |
| 1.5.1. Lissajous-Figuren .....                              | 37        |
| 1.5.2. Harmonographische Zeichnungen .....                  | 39        |
| 1.5.3. Chladnische Klangfiguren .....                       | 40        |
| <br>                                                        |           |
| <b>2. Stimmungssysteme in der Musik .....</b>               | <b>41</b> |
| 2.1. Pythagoreische Stimmung .....                          | 41        |
| 2.2. Natürlich-harmonische Stimmung .....                   | 47        |
| 2.3. Mitteltontemperatur .....                              | 50        |
| 2.4. Temperierte Stimmungen .....                           | 52        |
| 2.4.1. Ungleichschwebende Temperatur .....                  | 52        |
| 2.4.2. Gleichschwebende bzw. gleichstufige Temperatur ..... | 53        |
| 2.5. Vergleich der Stimmungssysteme .....                   | 57        |
| 2.6. Die Bedeutung von Mittelwerten .....                   | 59        |
| 2.7. Konsonanz und Dissonanz .....                          | 61        |

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| <b>3. Tonsysteme, Tonarten und Tonleitern .....</b>  | <b>64</b>  |
| 3.1. Pentatonik .....                                | 65         |
| 3.2. Hexatonik .....                                 | 67         |
| 3.3. Heptatonik .....                                | 68         |
| 3.3.1. Kirchentonarten .....                         | 69         |
| 3.3.2. Dur .....                                     | 72         |
| 3.3.3. Moll .....                                    | 74         |
| 3.4. Chromatik .....                                 | 77         |
| <br><b>4. Symmetrie in der Musik .....</b>           | <b>79</b>  |
| 4.1. Geometrisch-musikalische Transformationen ..... | 80         |
| 4.1.1. Isometrische Transformationen .....           | 81         |
| 4.1.1.1. Translation .....                           | 83         |
| 4.1.1.2. Spiegelung .....                            | 86         |
| 4.1.1.3. Drehung .....                               | 90         |
| 4.1.1.4. Kombination.....                            | 92         |
| 4.1.2. Skalare Transformationen .....                | 93         |
| 4.1.2.1. Horizontale Skalierung .....                | 94         |
| 4.1.2.2. Vertikale Skalierung .....                  | 95         |
| 4.1.3. Nicht-symmetrische Transformationen .....     | 95         |
| 4.2. Harmonische Symmetrien .....                    | 96         |
| 4.2.1. Symmetrische Akkorde .....                    | 97         |
| 4.2.2. Symmetrische Tonleitern .....                 | 100        |
| <br><b>Schlussfolgerungen .....</b>                  | <b>105</b> |
| <br><b>Abbildungsverzeichnis .....</b>               | <b>107</b> |
| <b>Tabellenverzeichnis .....</b>                     | <b>111</b> |
| <b>Literaturverzeichnis .....</b>                    | <b>113</b> |
| <b>Zusammenfassung .....</b>                         | <b>117</b> |
| <b>Abstract .....</b>                                | <b>118</b> |

# Einleitung

Es liegt in der Natur des Menschen, die Welt mit all ihren Rätseln und Mysterien begreifen und jede Ungereimtheit wissenschaftlich erklären zu wollen. Seit der Antike zählt die Musik zu den sieben freien Künsten und seit jeher wurden Versuche unternommen, die Musik in ihrer Komplexität zu erfassen. Die Darlegung eines kreativen, musikalischen Prozesses ist schließlich kein Leichtes. Aus diesem Grund bedarf es einer weiteren Wissenschaft, die dabei hilft, das Wesen von Musik offen zu legen. Bereits seit mehreren Jahrhunderten wurde die Beziehung von Mathematik und Musik von Philosophen, Wissenschaftlern, Physikern, Theoretikern, Musikern und zahlreichen anderen diskutiert und versucht, die Musik mit Hilfe der Mathematik zu erklären. Es wurde schnell erkannt, dass die Geometrie, die ebenfalls zu den sieben freien Künsten zählt und heute einen Teilbereich der Mathematik bildet, in einem engen Zusammenhang zur Musik steht.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit ebendieser Verbindung von Musik und Geometrie und versucht, die Musik in ihrer Gesamtheit mithilfe geometrischer Konzepte zu erfassen. Es soll dargelegt werden, dass sich die Geometrie in allen musikalischen Bereichen finden lässt und der musikalische Aufbau einer Komposition ohne die Zuhilfenahme geometrischer Konzepte nicht erklärt werden kann.

Das erste Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit den physikalischen Eigenschaften von Klang und geht einigen Fragen der musikalischen Akustik auf den Grund. Bei jedem Klangereignis treffen Schwingungen, ausgehend von einer Schallquelle, auf unser Ohr. Dort wird die aufgenommene Information weiterverarbeitet und letztendlich als Klang wahrgenommen. Fungieren also beispielsweise die menschliche Stimme oder ein Musikinstrument als Schallquelle, kann ihr erzeugter Klang nur durch die Verarbeitung von Schallwellen in unserem Ohr wahrgenommen werden. Schwingungen unterliegen physikalischen Prozessen, weswegen sie mathematisch beschrieben und untersucht werden können.

Für ein Zusammenspielen mehrerer Instrumente und einen weltweiten Austausch ist die Einigung auf ein einheitliches Stimmungssystem unumgänglich. Das heute gebräuchliche Stimmungssystem hat einen langen Entwicklungsprozess hinter sich und schaut auf eine mehrere Jahrhunderte währende Geschichte zurück. Die Anforderungen und Kriterien, die an

Stimmungssysteme gestellt werden, und ihre jahrhundertelange Weiterentwicklung werden im zweiten Kapitel behandelt.

In einem Stimmungssystem werden zwar die Frequenzen aller Töne genau festgelegt, doch Musiker verwenden bei ihren Kompositionen nicht alle im Stimmungssystem festgelegten Töne. An dieser Stelle werden die Tonsysteme relevant, die eine Auswahl der in einem Musikstück verwendeten Töne treffen.

Musik schafft es, Menschen in eine bestimmte Gefühlslage zu versetzen und Emotionen mithilfe einer Kombination von Tönen auszudrücken. Beim Erreichen dieses Ziels spielen Tonsysteme eine wichtige Rolle. Sie stehen in einer engen Beziehung zu Tonarten und Tonleitern und aus diesem Grund ist ebendiese Verbindung Thema des dritten Kapitels.

Man könnte meinen, dass beim Vermitteln von Gefühlen in Musikstücken, also beim tatsächlichen Komponieren eines Werkes, die Mathematik fehl am Platz ist. Im vierten Kapitel wird aber ersichtlich, dass sich viele Musiker beim Komponieren ihrer Stücke an Kompositionstechniken, die sich auf die Geometrie zurückführen lassen, bedienen. Viele Kompositionen weisen Anzeichen von Symmetrie auf, nicht nur bezüglich der eingesetzten Kompositionstechniken, sondern auch direkt in den verwendeten Tonleitern und Akkorden. Im vierten Kapitel wird auf die Bedeutung der Symmetrie in der Musik näher eingegangen.

Alle Kapitel wurden mit Hilfe ausführlicher Literaturrecherche erstellt und die behandelten Inhalte durch zahlreiche Bildquellen veranschaulicht. Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

# 1. Musikalische Akustik

Musik ist in ihrer Gesamtheit nur schwer zu erfassen. Auch wenn das Gehörte schriftlich in einer Partitur festgehalten werden kann, übersteigt eine gefühlvolle Darbietung doch meist die Möglichkeiten eines einfachen Stück Papiers. Beim Studieren einer Partitur werden dem Leser unter anderem die beteiligten Instrumente, die Tonart, das Tempo, die Melodie und die Lautstärke sofort ersichtlich, ebenso können diese Informationen aber auch beim bloßen Hören vermittelt werden. Wie ist es aber möglich, eine Klarinette von einer Violine zu unterscheiden? Warum klingen einige Noten angenehmer als andere, wenn sie gleichzeitig gespielt werden? Wie ist es möglich, tiefe von hohen Tönen zu unterscheiden? Mit diesen und noch weiteren Fragen beschäftigt sich die musikalische Akustik.

## 1.1. Wellen und Schwingungen

Luft besteht aus Atomen und Molekülen, die sich mit einer Geschwindigkeit von 450-500 m/s fortbewegen. Aufgrund ihrer enormen Geschwindigkeit stoßen die Moleküle häufig gegeneinander, ihre Geschwindigkeit wird durch den Aufprall aufgrund ihrer Elastizität aber nicht gemindert. Ein Molekül legt durchschnittlich  $6 \cdot 10^{-8}$  Meter zurück, bevor es mit einem weiteren zusammenstößt. Mit diesen Daten kann leicht berechnet werden, dass ein derartiger Zusammenstoß etwa  $10^{10}$  Mal pro Sekunde zwischen zwei Molekülen stattfindet, da

$$\frac{\text{mittlere Geschwindigkeit}}{\text{durchschnittliche freie Strecke}} \sim 10^{10} \text{ Kollisionen pro Sekunde}$$

gilt. Vibriert ein Objekt, stoßen die Luftmoleküle an ihre Nachbarn und es entsteht eine Kettenreaktion, die schließlich in Form einer Welle resultiert. Die entstehende Schallwelle verursacht eine Folge von Kompressionen und Expansionen der Luftpartikel, was unsere Ohren als Schall wahrnehmen.<sup>1</sup> Eine Schallwelle entsteht nicht durch ein individuelles Molekül, sondern durch ihre gemeinsame Interaktion. Die Bewegung ist eine fließende, die sich, durch die Zusammenstöße der Moleküle bedingt, immer weiter ausbreitet, bis sie schließlich abklingt. Schallwellen lassen sich gut mit Wasserwellen vergleichen, die ebenso eine Folgereaktion der Zusammenstöße der Wassermoleküle sind. Im Unterschied zu Wasserwellen handelt es sich bei

---

<sup>1</sup> Arbonés/Milrud 2018, S. 103

Schallwellen aber um Longitudinalwellen, das heißt, sie bewegen sich in Richtung der Ausbreitungsrichtung fort. Bei Wasserwellen handelt es sich um Transversalwellen, deren Ausbreitung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung erfolgt.

Bei dem Gespräch mit unserem direkten Gegenüber scheinen die Schallwellen im selben Augenblick bei unseren Ohren anzukommen, in dem die andere Person die Worte ausspricht. Mit zunehmendem Abstand kann aber festgestellt werden, dass die Schallwellen doch etwas Zeit brauchen, bis sie bei unseren Ohren ankommen. Dies erklärt beispielsweise das Phänomen, dass in einem großen Konzertsaal die Bewegungen des Dirigenten nie mit dem Takt der Musik übereinstimmen, wenn der Hörer sich weiter von der Bühne entfernt aufhält. Die Geschwindigkeit von Schallwellen in trockener Luft bei einer Raumtemperatur von 20°C beträgt 344 m/s, das bedeutet, Schall braucht ungefähr drei Sekunden, um einen Kilometer zurückzulegen.<sup>2</sup>

Für die Musik von entscheidender Bedeutung ist die Tatsache, dass es sich bei Luft um ein nicht-dispersives Medium handelt. Damit ist gemeint, dass sich alle Schallwellen, unabhängig von ihrer Frequenz, mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten.<sup>3</sup> Wenn Luft diese Eigenschaft nicht hätte, wäre das Zusammenklingen von hohen und tiefen Tönen nicht möglich und Musik, so wie wir sie kennen, nicht realisierbar.

Eine Welle lässt sich durch drei grundlegende physikalische Eigenschaften beschreiben: die Geschwindigkeit  $v$ , die Wellenlänge  $\lambda$  und die Frequenz  $f$ . Die Beziehung zwischen den einzelnen Komponenten kann durch die Gleichung  $v = \lambda \cdot f$  ausgedrückt werden. Die Geschwindigkeit einer Schallwelle ist, wie bereits erwähnt, bei einer Raumtemperatur von 20°C mit 344 m/s angegeben. Die Frequenz wird in Hertz (Hz) gemessen und ist als die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde definiert. Der Unterschied zwischen einer Schwingung und einer Welle besteht darin, dass es sich bei einer Schwingung um eine lokale, mehr oder weniger regelmäßige Änderung einer physikalischen Größe in der Zeit handelt, hingegen die Welle das räumliche und zeitliche Fortschreiten einer solchen Bewegung meint.<sup>4</sup> Die meisten Orchester stimmen seit der zweiten Stimmungskonferenz, die im Jahr 1939 in London stattgefunden hat, den Standardkammerton  $a^1$  mit 440 Hz. Das bedeutet, dass das Trommelfell des Ohres beim Erklingen dieses Tons 440 Mal pro Sekunde schwingt. Um die Zeit für den Durchlauf einer

---

<sup>2</sup> Hall 1997, S. 25

<sup>3</sup> Ebenda, S. 25

<sup>4</sup> Barkowsky 1996, S. 28 zitiert nach Schaurhofer 2009, S. 26

einzelnen Schwingung anzugeben, wird häufig auf die Periode  $\tau$  einer Schwingung verwiesen. Da die Frequenz die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde angibt, gilt die Beziehung  $\tau = \frac{1}{f}$  einer Sekunde. Die Länge einer solchen Periode, also der Abstand von einem Wellenhügel bis zum nächsten entlang der Ausbreitungsrichtung, wird mit  $\lambda$  bezeichnet. Die Wellenlängen des Schalls reichen von ungefähr  $\lambda = 2\text{cm}$  für die höchsten noch hörbaren bis zu  $\lambda = 20\text{m}$  für die tieferen Töne.<sup>5</sup>

Bei dem Ton  $a^1$  handelt es sich um einen sogenannten „reinen Ton“. Reine Töne werden von einer einzigen Sinusschwingung erzeugt und kommen in der Natur so gut wie nicht vor. Als Beispiele für reine Töne gelten beispielsweise Töne, die durch eine Stimmgabel oder eine Pfeife erzeugt werden. Reine Töne sind stets periodische Schwingungen.

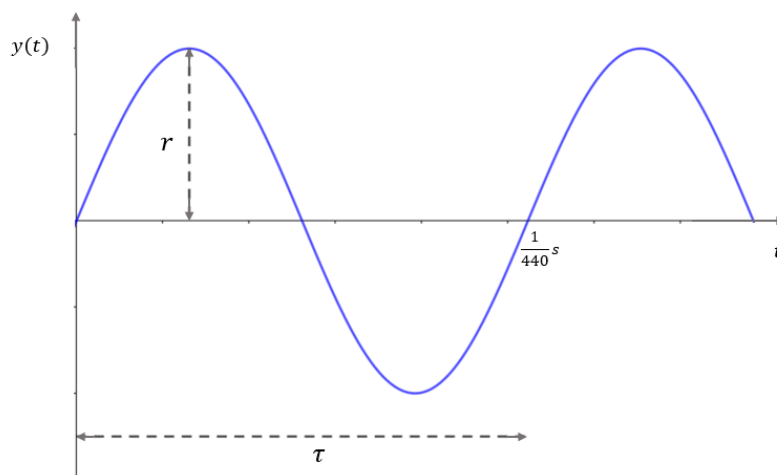


Abbildung 1.1.: Schwingung des reinen Tones  $a^1$  mit 440 Hz

Bei „natürlichen Tönen“ (auch: „unreine Töne“) wird bereits von „Klang“ gesprochen. Diese Töne bestehen aus einer Summe von Sinusschwingungen, deren Frequenzen meist in einem ganzzahligen Verhältnis zueinanderstehen. Anders ausgedrückt: Die Frequenzen der Oberschwingungen stehen meist in einem ganzzahligen Verhältnis zur Grundfrequenz.<sup>6</sup> Beispiele für natürliche Töne sind das Zupfen einer Gitarrensaite oder das Anschlagen einer Taste auf dem Klavier. Bei diesen Vorgängen wird jeweils ein komplexer Ton erzeugt, der aus einer Hauptschwingung besteht, die von vielen anderen Wellen, den sogenannten

<sup>5</sup> Hall 1997, S. 25

<sup>6</sup> Vgl. Posch 2013, S. 8 und Schaurhofer 2009, S. 23

Oberschwingungen, begleitet wird. Bei natürlichen Tönen handelt es sich ebenfalls um periodische Schwingungen.

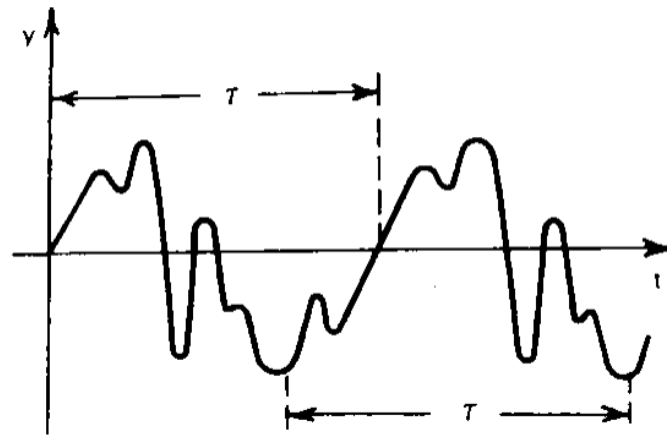


Abbildung 1.2.: Komplexe periodische Schwingung

### 1.1.1. Harmonische Schwingung

Harmonische Schwingungen sind Schwingungen, die durch eine allgemeine Sinusfunktion beschrieben werden können. Der Graph einer Sinusfunktion kann mit Hilfe des Einheitskreises ermittelt werden. Während ein Punkt eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt, bewegt sich der Punkt auf der  $y$ -Achse auf und ab. Diese Bewegung wird mit Hilfe der Sinusfunktion veranschaulicht.

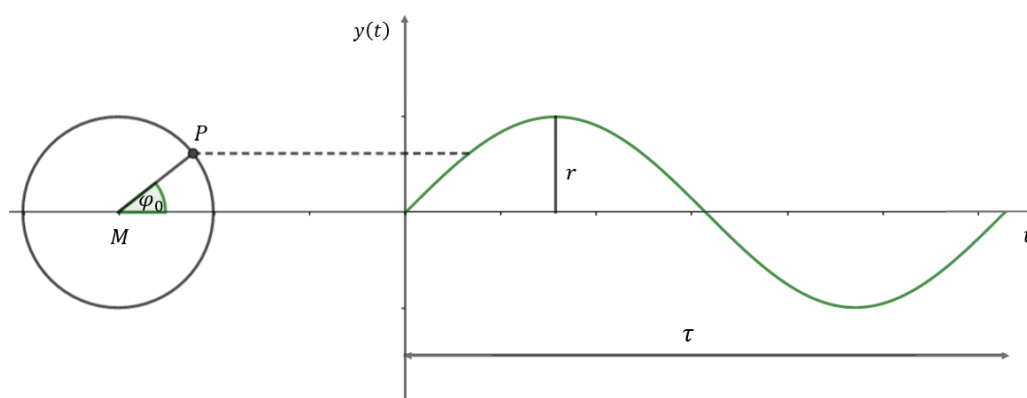


Abbildung 1.3.: Allgemeine Sinusfunktion

Eine Sinusfunktion ist durch drei Parameter definiert. Die Amplitude  $r$  bezeichnet die größte Auslenkung von der Nulllage. Die Periode  $\tau$  beschreibt die Zeit für einen vollen Umlauf der Kreisbewegung, also jene Zeit, nach der nach einer vollen Schwingung wieder die maximale Auslenkung erreicht ist. Da die Frequenz die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde angibt, gilt die Beziehung  $\tau = \frac{1}{f}$  bzw.  $f = \frac{1}{\tau}$ . Der Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  gibt das Ausmaß der Verschiebung der Funktion in Richtung der x-Achse an.

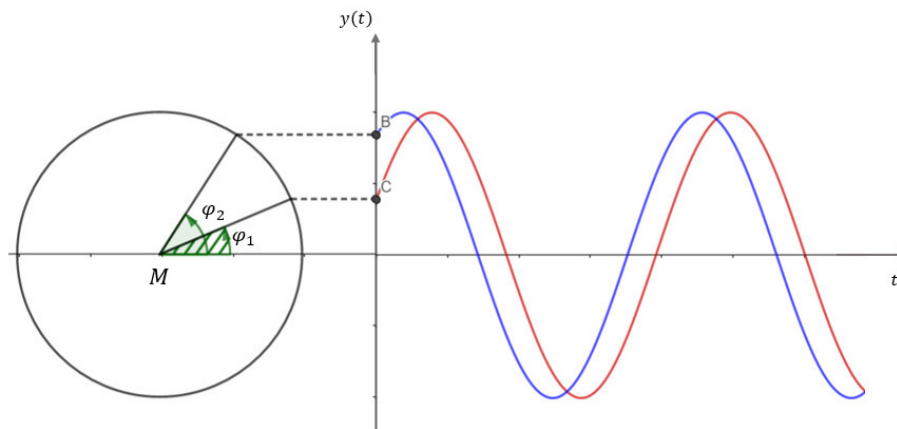


Abbildung 1.4.: Verschiebung um die Nullphasenwinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$

Zusätzlich zur Frequenz ist auch die Angabe der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  (Maß für die Geschwindigkeit des Punktes P, der die Kreisbewegung ausführt) gebräuchlich. Da die Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, ist das Winkelmaß  $a(t)$  (Bogenmaß des bis zum Zeitpunkt  $t$  zurückgelegten Winkels) zur der Zeit  $t$  direkt proportional und es gilt  $a(t) = \omega t$ . Für einen vollen Umlauf auf dem Kreis gilt  $a(\tau) = 2\pi$ . Somit gilt  $2\pi = \omega \tau$  und daraus folgt  $\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f$ .<sup>7</sup> Die Winkelgeschwindigkeit wird auch oft als Kreisfrequenz bezeichnet, da sie das  $2\pi$ -fache der Frequenz der Schwingung ist. Eine harmonische Schwingung kann durch die folgende Gleichung dargestellt werden:

$$s(t) = r \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

<sup>7</sup> Vgl. Malle/Ramharter/Ulovec/Kandl 2005, S. 100

## 1.2. Die Physik des Schalls

Selbst dem musikalischen Laien fällt auf, dass beim Hören von Schall einige Merkmale besonders hervorstechen. Zu diesen Merkmalen zählen Lautstärke, Tonhöhe und Klangfarbe. Diese Eigenschaften sind charakteristisch für Schall und können, mit Ausnahme der Klangfarbe, physikalisch gemessen werden.

### 1.2.1. Tonhöhe

Die Tonhöhe wird durch die Frequenz der Oszillation bestimmt, also daran, wie oft ein Körper pro Sekunde schwingt. Die Frequenz wird in Hertz angegeben, benannt nach dem deutschen Physiker Heinrich Hertz, der als erster Wissenschaftler die Existenz elektromagnetischer Wellen nachweisen konnte.

Die Sinusfunktion eines Tons mit der Frequenz 632 Hz schwingt 632-mal in der Sekunde und benötigt für eine volle Schwingung demnach  $\frac{1}{632} \approx 0,0015823 \text{ s} = 1,5823 \text{ ms}$ . Die Tonhöhe des Klangs ist proportional zu seiner Frequenz.<sup>8</sup> Das bedeutet, eine niedrige Frequenz entspricht niedrigen Tönen und eine hohe Frequenz entspricht hohen Tönen.

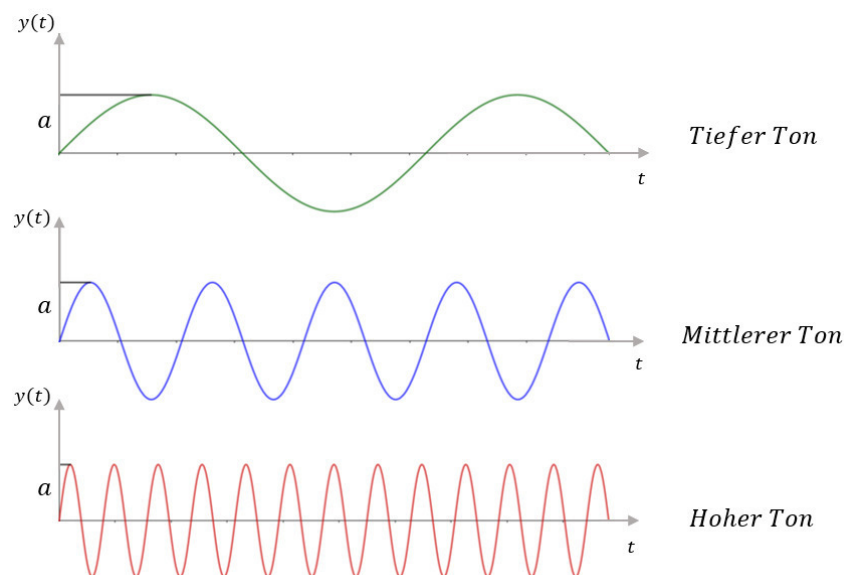


Abbildung 1.5.: Darstellung unterschiedlicher Tonhöhen

<sup>8</sup> Arbonés/Milrud 2018, S. 104

Einige Töne sind entweder zu tief oder zu hoch, sodass sie das menschliche Ohr nicht wahrnehmen kann. Wenn die Töne ungefähr zwischen 16 Hz und 20 000 Hz liegen, können sie vom Menschen wahrgenommen werden. Der genaue Umfang ist aber von Mensch zu Mensch verschieden und nimmt mit zunehmendem Alter ab. Für die Musik ist vor allem der Frequenzbereich von 16 – 4500 Hz interessant. Ein Klavier mit 88 Tasten hat etwa einen Frequenzbereich von 27 – 4186 Hz und deckt somit im Vergleich zu anderen Instrumenten und der menschlichen Stimme einen sehr großen Frequenzbereich ab.

| Instrument   | Frequenzbereich (Hz) |
|--------------|----------------------|
| Klavier      | 27 – 4186            |
| Violine      | 196 – 3520           |
| Tuba         | 40 – 440             |
| Sopranstimme | 262 – 1047           |
| Bassstimme   | 80 – 330             |

Tabelle 1.1.: Durchschnittlicher Frequenzbereich einiger Instrumente im Vergleich

Charakteristisch für Frequenzen ist, dass sie exponentiell wachsen. Am Beispiel des Klaviers wird dies besonders gut ersichtlich. Durch die Nummerierung aller Tasten auf dem Klavier von 1 für den tiefsten Ton  $A_2$  bis 88 für den höchsten Ton  $c^5$  wird zunächst ein lineares Wachstum sichtbar: Von  $A_2$  muss 12 Tasten weitergezählt werden, um zum nächsten  $A_1$  zu gelangen und so weiter. Somit sind alle Tasten der Nummern 1, 13, 25, 37, 49, ... dem Ton A zugehörig. Beim betrachten der Frequenzen wird aber ersichtlich, dass das Wachstum nicht linear, sondern exponentiell stattfindet.  $A_2$  ist mit 27,5 Hz gestimmt und nimmt bis zum nächsten A nicht um einen bestimmten Wert zu, sondern die Frequenz wird verdoppelt, also mit 2 multipliziert. Somit ergibt sich für  $A_1$  die Frequenz 55 Hz, für A die Frequenz 110 Hz und so weiter bis  $a^4$  mit  $27,5 \cdot 2^7 = 3520$  Hz.<sup>9</sup>

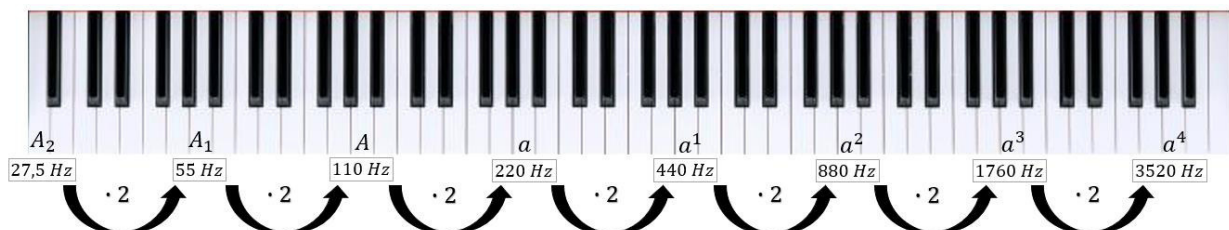


Abbildung 1.6.: Exponentielles Wachstum der Frequenzen

<sup>9</sup> Vgl. Arbonés/Milrud 2018, S. 17

Geringe Frequenzunterschiede sind für das menschliche Ohr nur schwer zu unterscheiden, weswegen in westlichen Orchestern nur insgesamt 90 Tonhöhen festgelegt wurden, mit denen musikalisch gearbeitet wird.<sup>10</sup> Auch wenn es tausende identifizierbare Tonhöhen gibt, wird nur ein Minimum davon für die Komposition eingesetzt. Die Frequenz spielt, wie in Kapitel 2 ersichtlich wird, eine entscheidende Rolle bei der Bildung von Stimmungssystemen. Für die Komposition und den weltweiten musikalischen Austausch ist es notwendig, allen relevanten Tonhöhen eine bestimmte Frequenz zuzuordnen zu können.

### 1.2.2. Lautstärke

Schallwellen breiten sich immer gleichmäßig, von der Schallquelle ausgehend, aus. Dieser Umstand bedeutet aber, dass nur ein Teil der Wellen auch tatsächlich bei unseren Ohren ankommt, wenn wir Schall wahrnehmen. Als Maß für die Messung dieser Teilleistungen gilt die Intensität, die in Watt pro Quadratmeter angegeben wird.

Es gibt zwei Empfindungsgrenzen für einen Ton mit gegebener Frequenz: Eine untere Grenze oder Hörschwelle, die die gerade noch hörbare Intensität darstellt, und eine obere Hörgrenze, oberhalb welcher physiologischer Schmerz hervorgerufen wird, was letztlich zu physikalischer Beschädigung des Hörmechanismus führen kann.<sup>11</sup> Diese Grenzen sind von Mensch zu Mensch verschieden und stark von der Frequenz abhängig. Während die Hörschwelle eine Intensität von  $10^{-12} \text{ Watt/m}^2$  aufweist, wird der Schmerzgrenze eine Intensität von  $1 \text{ Watt/m}^2$  zugeschrieben. Der Bereich dazwischen ist jener, den unsere Ohren wahrnehmen können und hat einen Umfang von  $\frac{1}{10^{-12}} = 10^{12} \text{ Watt/m}^2$ . Die Intensitäten können demnach in dem Verhältnis 1:1 000 000 000 000 ausgedrückt werden. Um das Hantieren mit derartig großen Zahlen zu vermeiden wird das Intensitätsverhältnis mit Hilfe einer logarithmischen Skala angegeben – in Dezibel.

Mit der folgenden Formel können Intensitäten in Dezibel ausgedrückt werden:

$$\text{Dezibelanzahl} = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \quad \text{mit } I_0 = 10^{-12} \text{ Watt/m}^2.$$

Man kann sagen, dass  $n$  Dezibel einer Leistungsdichte von  $10^{\left(\frac{n}{10}\right)-12} \text{ Watt/m}^2$  entsprechen.<sup>12</sup>

---

<sup>10</sup> Loy 2011, S. 16

<sup>11</sup> Roederer 2000, S. 103 f.

<sup>12</sup> Vgl. Roberts 2016, S. 84 und Benson 2007, S. 14

**Definition 1.1.** (Schallintensitätspegel)

Setzt man die Hörschwelle  $I_0 = 10^{-12} \text{ Watt/m}^2$  bei einer Frequenz von 100 Hz als Bezugsintensität fest und sei  $I$  die Schallintensität, dann nennt man  $L = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right)$  (gemessen in Dezibel) den Schallintensitätspegel.<sup>13</sup>

Diese Definition kann dazu benutzt werden, die Intensität durch die effektive Druckänderung  $p$  auszudrücken, die leichter messbar ist.

**Definition 1.2.** (Schalldruckpegel)

Sei  $p$  der Schalldruck und die Schalldruckänderung der Hörschwelle bei einer Frequenz von 1000 Hz sei mit einer ungefähren durchschnittlichen Druckänderung von  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \mu\text{Pa}$  gegeben. Dann nennt man  $L = 20 \cdot \log \left( \frac{p}{p_0} \right)$  (gemessen in Dezibel) den Schalldruckpegel.<sup>14</sup>

In der folgenden Tabelle werden die musikalische Lautstärkenempfindung, die Schallintensität und ihre physikalische Messung in Dezibel im Vergleich dargestellt.

| Lautstärke    | Intensität (Watt/m <sup>2</sup> ) | Dezibel |
|---------------|-----------------------------------|---------|
| Schmerzgrenze | 1                                 | 120     |
| fff           | $10^{-3}$                         | 90      |
| ff            | $10^{-4}$                         | 80      |
| f             | $10^{-5}$                         | 70      |
| mf            | $10^{-6}$                         | 60      |
| p             | $10^{-7}$                         | 50      |
| pp            | $10^{-8}$                         | 40      |
| ppp           | $10^{-9}$                         | 30      |
| Hörschwelle   | $10^{-12}$                        | 0       |

Tabelle 1.2.: Vergleich zw. musikalischer Lautstärkenempfindung, Schallintensität und physikalischer Messung

<sup>13</sup> Vgl. Roederer 2000, S.106

<sup>14</sup> Vgl. ebenda, S. 106 f.

Manchmal kann es nützlich sein sich den Wert berechnen zu können, um den eine Intensität erhöht wird, wenn sie mit einem bestimmten Faktor multipliziert wird. Der folgende Satz dient der Berechnung in derartigen Fällen.

**Satz 1.1.** (Erhöhung der Schallintensität)

*Eine Erhöhung der Schallintensität um den Faktor  $d$  bedeutet eine Erhöhung um  $10\log_{10}(d)$  Dezibel.<sup>15</sup>*

**Beispiel 1.1.** (Erhöhung der Schallintensität)

*Was passiert, wenn die Intensität vertausendfacht bzw. verdoppelt wird?*

$$10\log_{10}(1000) = 10 \cdot 3 = 30 \text{ dB}$$

Eine Erhöhung der Intensität um den Faktor 1000 resultiert lediglich in einer Erhöhung um 30 dB.

$$10\log_{10}(2) \approx 3 \text{ dB}$$

Wenn die Intensität verdoppelt wird, führt dies zu einer Erhöhung um 3 dB.

Grundsätzlich kann gesagt werden, dass die Intensität des Klangs proportional zur Amplitude der Schwingung ist.<sup>16</sup> Schallwellen mit einer kleinen Amplitude klingen also leiser und weisen eine niedrigere Intensität auf, Schallwellen mit einer größeren Amplitude wird eine höhere Intensität zugeschrieben.

Bei der Lautstärkenempfindung handelt es sich um eine subjektive Wahrnehmung, bei der mehrere Faktoren eine Rolle spielen. So sind Frequenzen und Intensitäten nicht von der Lautstärke zu trennen. Wird ein Ton beispielsweise lauter, glauben viele Menschen eine Änderung der Tonhöhe wahrzunehmen, obwohl die Frequenz unverändert geblieben ist.<sup>17</sup> Beim Vergleich von Tönen mit gleicher Intensität aber unterschiedlicher Frequenz tendiert der

---

<sup>15</sup> Roberts 2016, S. 85

<sup>16</sup> Arbonés/Milrud 2018, S. 105

<sup>17</sup> Harkleroad 2009, S. 7

Mensch dazu, so haben Fletcher und Munson festgestellt, die Töne als unterschiedlich laut wahrzunehmen.<sup>18</sup>

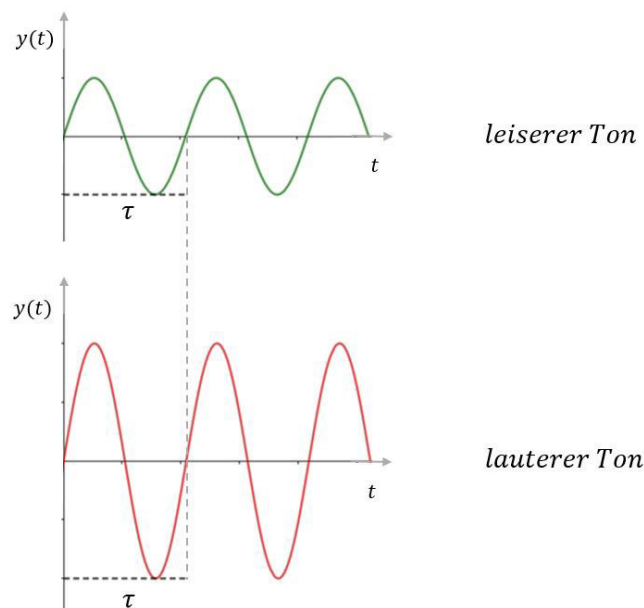


Abbildung 1.7.: Harmonische Schwingungen mit unterschiedlichen Lautstärken

### 1.2.3. Klangfarbe

Die Tonhöhe ist mit der Frequenz und die Lautstärke mit der Schallintensität einer Schallwelle verbunden, die Klangfarbe hingegen kann aber von keiner spezifischen physikalischen Größe beschrieben und somit auch nicht gemessen werden. Die Klangfarbe wird in der Literatur meist als jener Parameter der Töne beschrieben, der Tönen ihre Persönlichkeit verleiht. Die Klangfarbe ist jenes Kriterium, das es dem Hörer erlaubt, verschiedene Instrumente und Stimmen anhand des Klangs, unabhängig von Tonhöhe und Lautstärke, zu unterscheiden. Die Beschreibung von Gareth Loy macht deutlich, wie schwer es ist, Klangfarbe als Begriff in seiner Gesamtheit zu erfassen: „*Timbre is everything about a tone that is not its pitch, not its duration, and not its loudness.*“<sup>19</sup> Den Grund für die schwere Fassbarkeit des Begriffs begründet Hall folgendermaßen: „*Lautstärke und Tonhöhe sind einfache eindimensionale, kontinuierliche Größen, die sich nur in eine Richtung verändern können (laut-leise bzw. hoch-tief), während die Klangfarbe komplex und eine multidimensionale Größe ist und sich in verschiedenen, voneinander unabhängigen Richtungen ändern kann.*“<sup>20</sup>

<sup>18</sup> Roederer 2000, S. 109

<sup>19</sup> Loy 2011, S. 28

<sup>20</sup> Hall 1997, S. 114

Es wurde bereits die Unterscheidung zwischen reinen und natürlichen Tönen in der Musik getroffen. Reine Töne kommen in der Natur nicht vor und bestehen aus nur einer einzigen Sinusschwingung. Ein natürlicher Ton hat einen wesentlich komplexeren Aufbau und besteht nicht nur aus einer Sinusschwingung, sondern aus mehreren, die zusammen den gehörten Ton ergeben. Es findet also eine Überlagerung reiner Töne statt.<sup>21</sup> Jede dieser Sinusschwingungen wird als Partialton (auch: Harmonische) bezeichnet, da jede dieser Schwingungen für die Charakteristik des gehörten Tons entscheidend ist. Aufgrund des Verhaltens der Partialtöne bezüglich Frequenz, Amplitude und Zeit ist es unseren Ohren möglich, zwischen Instrumenten zu unterscheiden.<sup>22</sup> Der tiefste Partialton wird als Grundton bezeichnet. Meist wird ein gehörter Ton in der Frequenz des Grundtons wahrgenommen. Die restlichen Partialtöne weisen eine höhere Frequenz auf und werden deswegen Obertöne genannt. Die Frequenz der Obertöne entspricht bei Saiten- und Blasinstrumenten den positiven Vielfachen ganzer Zahlen von der Grundfrequenz.<sup>23</sup> Wenn also eine Violine einen Ton mit der Grundfrequenz  $f$  spielt, bilden  $2f, 3f, 4f, \dots$  die zugehörigen Obertöne zum Grundton. Wenn die Frequenzen der Obertöne keine ganzen Vielfachen der Grundfrequenz sind, dann werden sie als anharmonisch bezeichnet. Als Beispiele für anharmonische Schwingungen können unter anderem Xylophonstäbe oder eine Glocke genannt werden.

**Beispiel 1.2.** (Grundton, Partialtöne und Obertöne)

| Nr. | Hertz | Frequenz | Grundton | Partialton    | Oberton    |
|-----|-------|----------|----------|---------------|------------|
| 1   | 50    | $f$      | Grundton | 1. Partialton | -          |
| 2   | 100   | $2f$     | -        | 2. Partialton | 1. Oberton |
| 3   | 150   | $3f$     | -        | 3. Partialton | 2. Oberton |
| 4   | 200   | $4f$     | -        | 4. Partialton | 3. Oberton |

Partialtöne sind theoretisch nach oben unbegrenzt und physikalisch bis zum 43. Partialton nachweisbar. In der Musik können sie nur bis zum 16. Partialton in unserem Notenbild dargestellt werden, da die Abstände zwischen den Tönen kleiner als Halbtonschritte werden. Auch wenn sie nicht aufgeschrieben werden, so tragen sie dennoch zur Klangfarbe bei. Es gilt: Je mehr Obertöne erklingen, umso heller wird der Klang.<sup>24</sup>

<sup>21</sup> Roederer 2000, S. 128

<sup>22</sup> Loy 2011, S. 29

<sup>23</sup> Ebenda, S. 29

<sup>24</sup> Amon 2005, S. 209

Ähnlich wie Licht, das in seine farblichen Bestandteile zerfällt, wenn es auf ein Prisma trifft, gibt es auch die Möglichkeit, die Zusammensetzung von Schwingungen in einem sogenannten Spektrum zu veranschaulichen. Ein Spektrum stellt die Intensitäten und Frequenzen der Sinuswellen, deren Überlagerung den Ton ergibt, graphisch dar. Die folgende Abbildung zeigt vier verschiedene periodische Schwingungen und ihr dazugehöriges Spektrum.

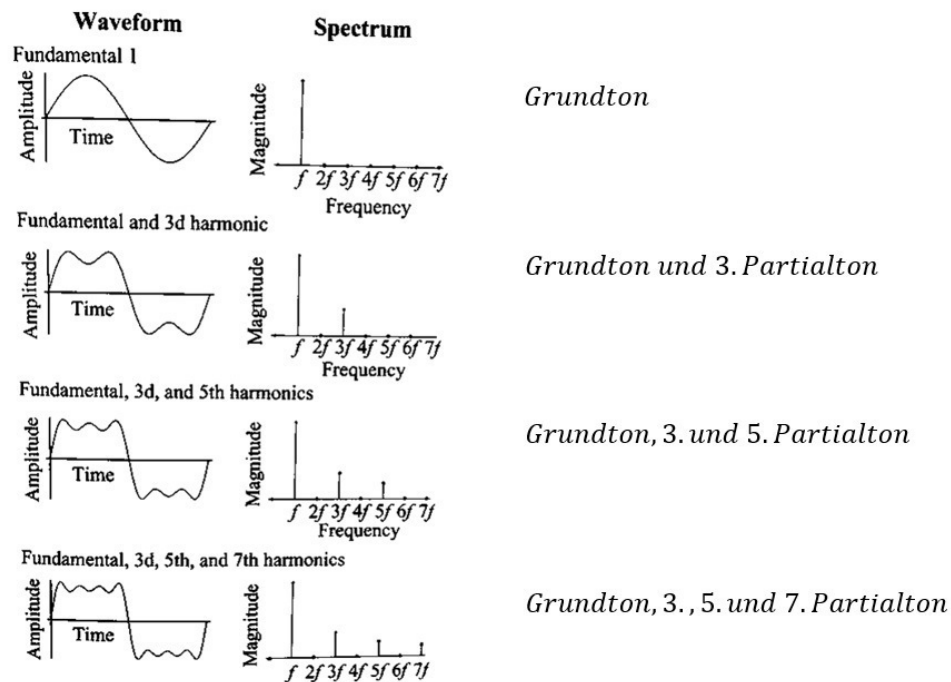


Abbildung 1.8.: vier Periodische Schwingungen mit dazugehörigen Spektren

Wie man anhand der ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz erkennen kann, handelt es sich bei den obigen Abbildungen um harmonische Spektren. Die nächste Abbildung zeigt ein anharmonisches Spektrum. Hier sind die Frequenzen demnach keine ganzen Vielfachen der Grundfrequenz.

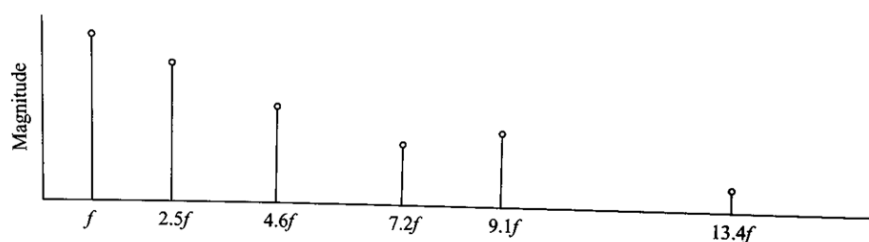


Abbildung 1.9.: anharmonisches Spektrum

## 1.3. Oberschwingungen und die Fourier-Analyse

Wie in den obigen Ausführungen bereits ersichtlich wurde, ermöglichen es Obertöne dem Hörer zwischen verschiedenen Instrumenten zu unterscheiden. Selbst wenn Instrumente die gleiche Note spielen, vermag unser Gehör zwischen den verwendeten Instrumenten zu differenzieren. Woran liegt das aber genau?

Um diese Frage klären zu können muss zunächst der Begriff der Obertonreihe erklärt werden. Durch das Spielen eines natürlichen Tons mit der Frequenz  $f$  sind ebenfalls Obertöne hörbar, die mit einer Frequenz von  $2f, 3f, 4f, \dots$  zu hören sind. Als Obertonreihe wird ebendiese unendliche Folge von Obertönen zu einem bestimmten Grundton bezeichnet.

### Beispiel 1.4. (Obertonreihe)

Bestimme die Obertonreihe zu  $a^l$  mit  $f = 440 \text{ Hz}$ .

$$440, 880, 1320, 1760, 2200, 2640, \dots$$

Unser Gehör kann die Grundtonhöhe beim Hören eines Tons identifizieren und so die gehörte Note bestimmen, gleichzeitig sammelt es auch Informationen von den Partialtönen und interpretiert das Ergebnis als Klangfarbe.<sup>25</sup> Die Obertöne werden aber nicht einzeln unterschieden, sondern erst die Kombination der Obertöne ermöglicht eine Unterscheidung zwischen Instrumenten.

Die Obertöne sind auch verantwortlich für ein angenehmes oder unstimmiges Zusammenklingen von Tönen. Je mehr Obertöne übereinstimmen, desto angenehmer klingen die Töne zusammen. Konsonanz und Dissonanz werden noch im 2. Kapitel näher behandelt.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer harmonischen Schwingung mit zwei Obertonschwingungen. Die 4. Partialschwingung schwingt mit der vierfachen Frequenz der 1. Partialschwingung, es gilt  $f_4 = 4f_1$ . Die 4. Partialschwingung führt demnach in der gleichen Zeit viermal so viele volle Schwingungen aus wie die erste Partialschwingung. Die Schwingung des gehörten Tons ergibt sich aus der Summe aller Partialtöne.

---

<sup>25</sup> Roberts 2016, S. 105

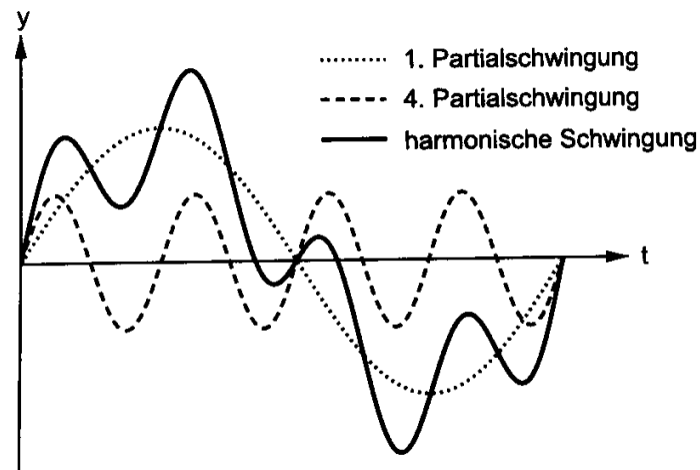


Abbildung 1.10.: Harmonische Schwingung mit zwei Partialschwingungen

Mit Hilfe mathematischer Berechnungen ist es möglich, eine harmonische Schwingung in ihre Partialschwingungen zu zerlegen und umgekehrt, bei gegebenen Partialschwingungen auf die Schwingung des gehörten Tons zu schließen.

**Definition 1.3.** (Fourier-Analyse, Fourier-Synthese)

*Die Bestimmung der harmonischen Komponenten einer gegebenen komplexen periodischen Bewegung nennt man Fourier-Analyse; die Bestimmung der komplexen periodischen Bewegung aus einer Reihe von harmonischen Komponenten nennt man Fourier-Synthese.*<sup>26</sup>

Bei der Fourier-Analyse wird also eine Welle in eine meist unendliche Summe von Sinus- und Cosinusschwingungen zerlegt. Die Frequenzen der zu ermittelnden Komponenten sind dabei die ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz der periodischen Welle und die Amplituden können mithilfe von Integralen berechnet werden. Möglich ist dieser Berechnungsvorgang dank der physikalischen Eigenschaft von Wellen. Die Überlagerung harmonischer Schwingungen beruht nämlich auf dem Prinzip der ungestörten Superposition, welches besagt: Überlagern sich mehrere Schwingungen, so ist die resultierende Schwingung eine Addition der Einzelschwingungen.<sup>27</sup>

Die mathematische Berechnung für die Approximation einer periodischen Schwingung durch die Addition von Sinus- und Cosinusschwingungen beruht auf der Fourier-Reihe.

<sup>26</sup> Roederer 2000, S. 145

<sup>27</sup> Preiner 2005, S. 37

**Definition 1.4.** (Fourier-Reihe)

Die Fourier-Reihe einer Funktion  $g(x)$  ist die Entwicklung dieser Funktion nach Sinus- und Cosinusfunktionen und ist für die Periode von  $2\pi$  definiert.<sup>28</sup>

Die Fourier-Reihe ist gegeben mit:

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \dots + A_n \cos nx + B_n \sin nx, \quad n \rightarrow \infty$$

oder

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos kx + B_k \cdot \sin kx].$$

Die Approximation der periodischen Schwingung wird mit steigender Anzahl der Terme exakter. „Die Originalfunktion erhält man, wenn man die Funktion gegen  $\infty$  gehen lässt.“

Die Variable  $x$  ist für eine Periode der Schwingung definiert, also  $x \in [0; 2\pi]$ . Mit  $x = \omega t$  und  $\omega = 2\pi f$  erhält man die Abhängigkeit von der Zeit  $t$ , wobei  $f$  für Frequenz steht.<sup>29</sup>

Die Konstante  $\frac{A_0}{2}$  verschiebt die Schwingung entlang der Ordinate, wenn sie ungleich null ist.<sup>30</sup>

$A_k$  und  $B_k$  werden Fourier-Koeffizienten genannt. Sie bestimmen die Phase und Amplitude der Schwingung eines jeden Terms. Fourier hat für die Berechnung von  $A_k$  und  $B_k$  folgende Integrale festgelegt:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

---

<sup>28</sup> Barkowsky 1996, S. 38

<sup>29</sup> Ebenda, S. 27

<sup>30</sup> Ebenda, S. 37

## Herleitung der Integrale für die Fourier-Koeffizienten

Zunächst nehmen wir an, dass die Fourier-Reihe  $g(x)$  überall gleichmäßig konvergent ist und somit in allen Punkten den Grenzwert  $f(x)$  hat. Darum kann man anstatt  $g(x)$  gleich  $f(x)$  schreiben, sodass

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos kx + B_k \cdot \sin kx]$$

gilt.

Sei  $u$  mit  $1 \leq u \leq n$  ein beliebiger Term der Fourier-Reihe, den wir berechnen wollen. Wir multiplizieren als nächstes die Gleichung mit  $\cos ux$ .

$$f(x) \cdot \cos ux = \frac{A_0}{2} \cdot \cos ux + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos kx \cdot \cos ux + B_k \cdot \sin kx \cdot \cos ux]$$

Nun bilden wir auf beiden Seiten das Integral von  $x = 0$  bis  $x = 2\pi$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos ux \, dx &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{A_0}{2} \cdot \cos ux + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cdot \cos kx \cdot \cos ux + B_k \cdot \sin kx \cdot \cos ux] \right\} dx \\ &= \frac{A_0}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos ux \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos ux \, dx + B_k \cdot \int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos ux \, dx \right] \end{aligned}$$

Die Integrale  $\int_0^{2\pi} \cos ux \, dx$  und  $\int_0^{2\pi} \sin kx \cdot \cos ux \, dx$  sind für ganzzahlige  $k$  und  $u$  immer gleich Null.

Für die weitere Berechnung bleibt also übrig:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos ux \, dx = \sum_{k=1}^N \left[ A_k \cdot \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot \cos ux \, dx \right]$$

Wir betrachten nun den Fall, bei dem  $k = u$  mit  $u \geq 1$  ist. Das Summenzeichen fällt weg und es bleibt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos ux \, dx = A_u \cdot \int_0^{2\pi} \cos ux \cdot \cos ux \, dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ergibt im Fall von  $k = u$  den Wert  $\pi$ . Somit wird die Gleichung zu

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx = A_k \cdot \pi.$$

Um  $A_k$  zu isolieren muss nur mehr durch  $\pi$  dividiert werden und man erhält

$$A_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx.$$

Da der Cosinus von 0 gleich 1 ist, kann  $k = 0$  gesetzt werden und es gilt

$$A_0 = \int_0^{2\pi} f(x) dx. \text{ }^{31}$$

Die Herleitung für  $B_k$  erfolgt analog.

### 1.3.1. Anwendungsbeispiel

Anhand eines einfachen Beispiels soll nun eine praktische Anwendung der Fourier-Reihen vorgeführt werden. In der Akustik kann durch dieses Vorgehen ein Ton in seine Partialschwingungen zerlegt werden. In der Realität handelt es sich natürlich um weitaus kompliziertere Funktionen als im folgenden Beispiel, um die Vorgehensweise aber besser zu verdeutlichen wird im Folgenden mit einem einfachen Beispiel verfahren.

---

<sup>31</sup> Barkowsky 1996, S. 40

Gegeben sei die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq \pi \\ -1 & \text{für } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Gesucht ist die Fourier-Reihe von  $f(x)$ .

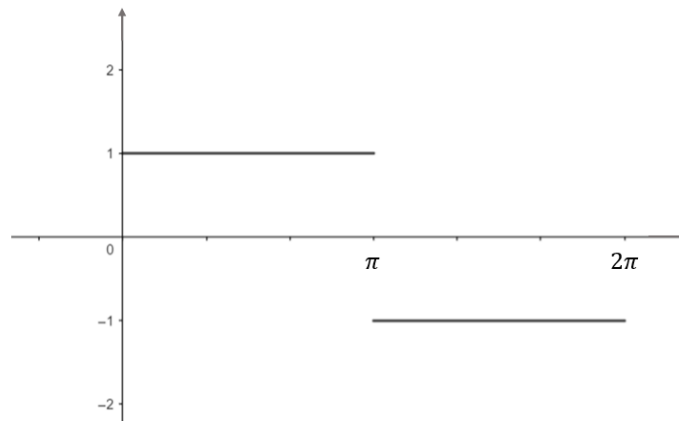


Abbildung 1.11.: Rechteckskurve

Die Funktionswerte von  $f(x)$  wiederholen sich nach jedem Intervall der Länge  $2\pi$ , darum handelt es sich bei  $f(x)$  um keine Treppenfunktion, auch wenn dies zunächst den Anschein hat, sondern um eine Rechteckskurve. Bei dieser Funktion handelt es sich um eine ungerade Funktion, wie bei allen Sinusfunktionen. Aus diesem Grund sind die Cosinus-Koeffizienten gleich Null<sup>32</sup> und die Fourier-Reihe hat daher folgende Form:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin kx.$$

Zunächst bestimmen wir den Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{-\cos kx}{k} \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi k} \cdot [-\cos k\pi - (-\cos 0)] = \frac{2}{\pi k} \cdot [-\cos k\pi + \cos 0] = \frac{2}{\pi k} \cdot [-\cos k\pi + 1]. \end{aligned}$$

<sup>32</sup> Strang 2003, S. 453

Für  $\cos(k\pi)$  müssen zwei Fälle unterschieden werden:

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} -1 & \text{für } k = 1, 3, 5, \dots \\ 1 & \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

**1. Fall:**  $k = 1, 3, 5, \dots$

$$B_k = \frac{2}{\pi k} \cdot (1 + 1) = \frac{4}{\pi k}$$

**2. Fall:**  $k = 2, 4, 6, \dots$

$$B_k = \frac{2}{\pi k} \cdot (-1 + 1) = 0$$

Es ergibt sich also für die Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Wählt man für  $k = 1$ , dann ergibt sich die einfache Sinusfunktion  $f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin x$ , wählt man  $k = 2$ , dann ergibt sich die Funktion  $f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x \right)$ .

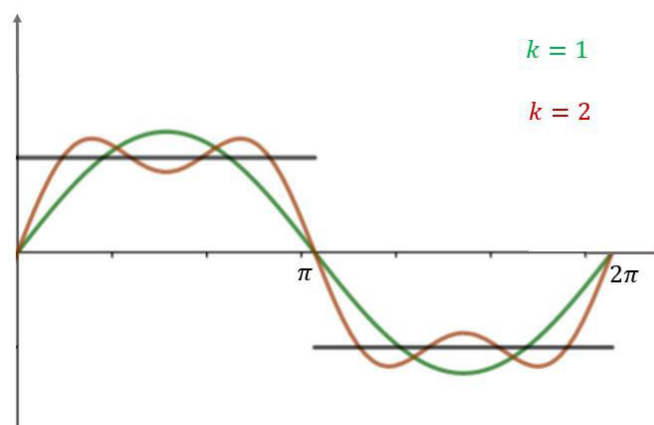


Abbildung 1.12.:  $f(x)$  mit  $k = 1$  und  $k = 2$

Je größer  $k$  gewählt wird, desto mehr nähert sich die Fourier-Reihe der gegebenen Funktion an. In der folgenden Abbildung ist  $k = 19$  und die Fourier-Reihe ergibt sich mit

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x + \frac{1}{5} \cdot \sin 5x + \frac{1}{7} \cdot \sin 7x + \dots + \frac{1}{35} \cdot \sin 35x + \frac{1}{37} \cdot \sin 37x \right).$$

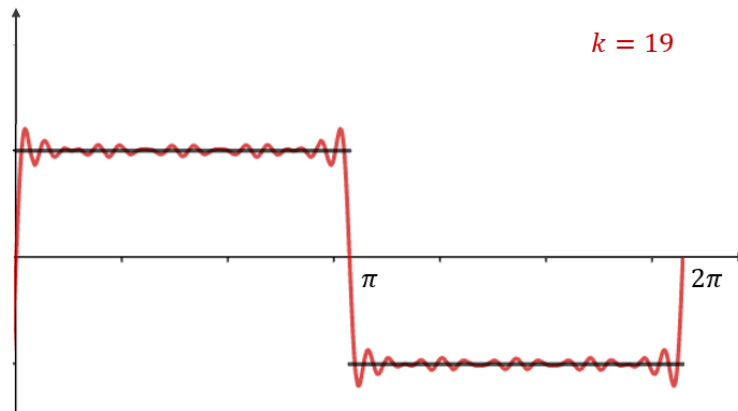


Abbildung 1.13.:  $f(x)$  mit  $k = 19$

Die Über- und Unterschwinger in der Umgebung der Sprungstellen werden als Gibbs'sches Phänomen bezeichnet. Sie verschwinden auch dann nicht, wenn die Funktion zur Approximation durch eine endliche Anzahl von Summengliedern angenähert wird.

## 1.4. Überlagerung harmonischer Schwingungen

Bei der Überlagerung harmonischer Schwingungen können unterschiedliche Phänomene auftreten. Der Frequenz wird an dieser Stelle eine entscheidende Rolle zugeschrieben. Im Folgenden werden einige dieser Phänomene vorgestellt.

### 1.4.1. Interferenz

Interferenz beschreibt die Überlagerung zweier oder mehrerer Schallsignale mit gleicher Frequenz, die sich durch Addition ihrer Amplituden entweder verstärken oder auslöschen. Im Folgenden werden mehrere mögliche Fälle unterschieden.

In allen folgenden Abbildungen sind zur besseren Erklärung die beiden Teilschwingungen immer in rot und grün und die resultierende Schwingung in blau dargestellt.

Sind die Phasen zweier Wellen identisch, erhält man eine harmonische Bewegung der selben Frequenz und der selben Phase, die Amplitude ist jedoch die Summe der beiden Teilschwingungen.

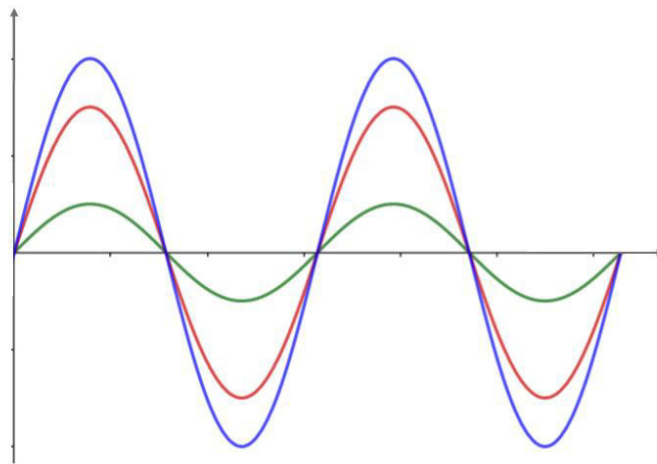


Abbildung 1.14.: Gleiche Phasen, unterschiedliche Amplituden

Findet eine exakte Überlagerung der beiden Schwingungen statt (beide Schwingungen sind in Frequenz, Phase und Amplitude identisch), dann ist die Amplitude der resultierenden Schwingungen genau doppelt so groß wie bei einer der Teilschwingungen. Bei diesem besonderen Fall wird von konstruktiver Interferenz gesprochen.

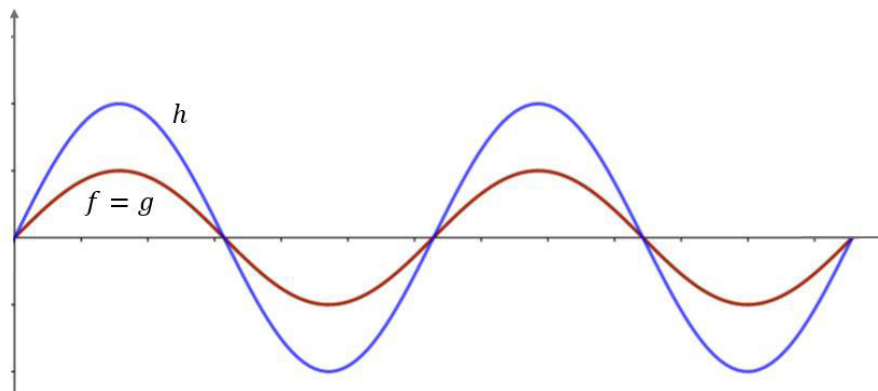


Abbildung 1.15.: Konstruktive Interferenz (gleiche Amplituden und Phasen)

Wenn die beiden Schwingungen verschiedene Phasen besitzen, bleibt die Frequenz der harmonischen Bewegung zwar die selbe, doch die Amplitude kann nicht mehr durch Addition der Teilamplituden berechnet werden. Wenn die Amplituden der beiden Schwingungen gleich groß sind, dann kann die Amplitude der resultierenden Schwingung in diesem Fall alle Werte zwischen Null und dem Doppelten der einfachen Amplitude annehmen.<sup>33</sup>

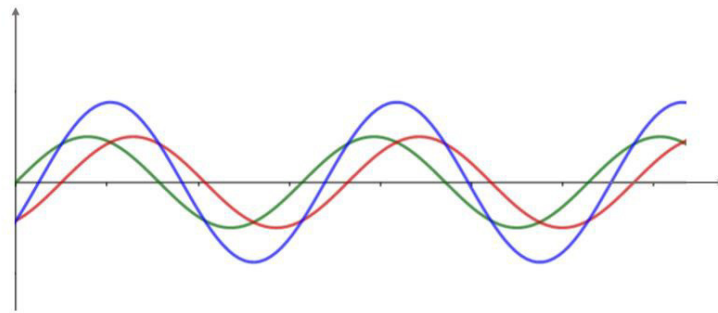


Abbildung 1.16.: Gleiche Amplituden, unterschiedliche Phasen

Bei dem Spezialfall, bei dem die Amplituden der beiden Schwingungen gleich groß sind und die Schwingungen um  $180^\circ$  verschoben sind, löschen sich die beiden Schwingungen vollständig aus und der Hörer hört überhaupt keinen Ton. In diesem Fall wird von destruktiver Interferenz gesprochen.

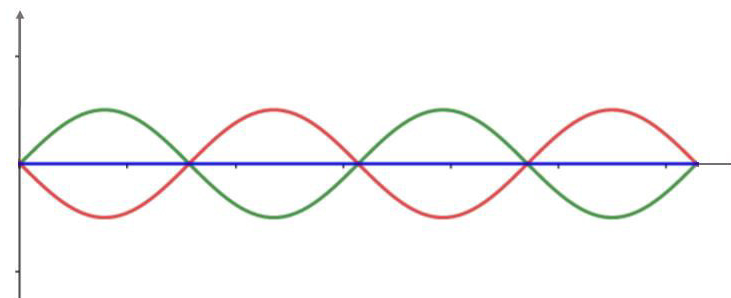


Abbildung 1.17.: Destruktive Interferenz (gleiche Amplituden,  $180^\circ$  phasenverschoben)

Wenn die Amplituden der beiden Schwingungen nicht gleich groß sind, aber eine Phasenverschiebung um  $180^\circ$  stattfindet, dann findet die destruktive Interferenz nicht vollständig statt und es verbleibt eine Restschwingung.

---

<sup>33</sup> Hall 1997, S. 84

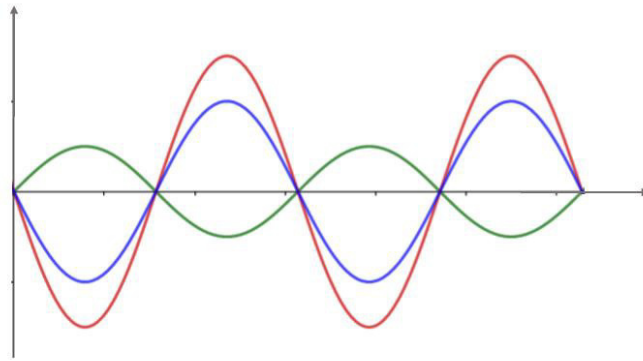


Abbildung 1.18.: Unterschiedliche Amplituden, 180° phasenverschoben

### 1.4.2. Schwebung

Interferenz tritt bei Wellen mit identischen Frequenzen auf, doch was geschieht, wenn die Frequenzen nicht exakt gleich sind? Durch Überlagerung von zwei in der Tonhöhe eng benachbarten Tönen entstehen Schwebungen. Bei Schwebungen können Töne nicht mehr getrennt gehört werden, sondern sie verschmelzen zu einem einzigen Ton mit dem charakteristischen Schwebungsvorgang eines periodisch schwankenden An- und Abschwellens.<sup>34</sup>

Wie kann man sich diesen Prozess vorstellen? Eine Zeit lang überlagern sich die Wellen und es findet eine konstruktive Interferenz statt – die Wellen verstärken sich und der gehörte Ton wird lauter. Allmählich kommen die Wellen aber aus dem Gleichtakt und die Interferenz wird schließlich destruktiv – die Wellen löschen sich aus. Der Hörer nimmt die beiden Töne nicht getrennt wahr, sondern er vernimmt eine Tonhöhe, deren Intensität regelmäßig zu- und abnimmt.<sup>35</sup>

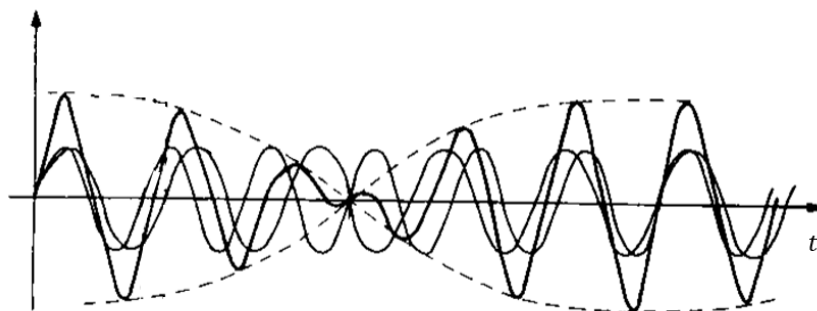


Abbildung 1.19.: Schwebung

<sup>34</sup> Eimert/Humpert 1973, S. 302

<sup>35</sup> Vgl. Hall 1997, S. 85

Schwebungen sind nur bis zu einem bestimmten Frequenzunterschied der beiden Stammfrequenzen hörbar. Am besten lassen sich Schwebungen an Sinustönen beobachten, deren Frequenzen im mittleren Hörbereich auf weniger als 16 Hz zusammenrücken. Bei mehr als 20 Hz Abstand zwischen den beiden Stammfrequenzen werden Kombinationstöne wahrgenommen (siehe Kapitel 1.4.4.).<sup>36</sup>

Die Frequenz der resultierenden Schwingung entspricht dem Mittelwert der beiden sich überlagernden Schwingungen mit den Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$ , also gilt  $f = \frac{f_1+f_2}{2} = f_1 + \frac{\Delta f}{2}$ , wobei  $\Delta f = f_2 - f_1$  ist. Der Frequenzunterschied  $\Delta f$  wird auch als Schwebungsfrequenz  $f_s$  bezeichnet. Beträgt der Frequenzunterschied zweier gleichzeitig erklingender Schwingungen beispielsweise 3 Hz, dann ist der Schwebungsvorgang – das An- und Abschwellen der Intensität – drei Mal pro Sekunde hörbar. Das bedeutet, je kleiner der Frequenzunterschied, desto weniger Schwebungen gibt es und desto langsamer sind sie.

Unser Gehör ist nicht im Stande nacheinander gespielte Töne mit geringem Frequenzunterschied zu unterscheiden, doch durch das gleichzeitige Spielen dieser Töne und das Achten auf Schwebungen können die unterschiedlichen Tonhöhen ausgemacht werden. Aus diesem Grund stellen Schwebungen ein wichtiges Hilfsmittel beim Stimmen von Instrumenten dar. Je schneller die Schwebungen stattfinden, umso größer ist der Unterschied der beiden Frequenzen. Ziel beim Stimmen von Instrumenten ist es, keine Schwebungen mehr zu hören, dann sind die Instrumente nämlich gleichgestimmt. In der Praxis ist es jedoch sehr schwierig Schwebungen zu hören, die langsamer als einmal pro 2-3 Sekunden sind, weshalb es bereits ein gutes Stimmungsergebnis ist, wenn die Frequenzen bis auf 0,5 Hz übereinstimmen.<sup>37</sup>

Schwebungen stellen die Grundlage von Helmholtz's Lehre über Konsonanz und Dissonanz dar. Wenn zwei Töne ähnliche Partialtöne in ihrer Obertonreihe haben, die in ihren Frequenzen aber nicht exakt übereinstimmen, sondern sich leicht unterscheiden, dann entstehen Schwebungen, die in Form von Dissonanzen resultieren. Dissonanzen sind ab einem Frequenzunterschied von 10 Hz hörbar. Ab 20 Hz Unterschied klingen die Töne zwar immer noch rau und unstimmig, werden aber bereits als zwei einzelne Töne wahrgenommen. Mit weiterem zunehmenden Abstand nimmt auch die raue Stimmung ab.<sup>38</sup>

---

<sup>36</sup> Vgl. Eimert/Humpert 1973, S. 302

<sup>37</sup> Hall 1997, S. 85

<sup>38</sup> Vgl. Roberts 2016, S. 113 und Loy 2011, S. 173

### 1.4.3. Residualtöne

Das Phänomen des Residualtons in der Musik ist ein besonders interessantes. Im Folgenden wird dieses Phänomen näher erläutert und dabei vor allem auf die Arbeiten von Gareth E. Roberts Bezug genommen.

Werden zwei reine Töne mit 200 Hz und 400 Hz und gleicher Amplitude gleichzeitig gespielt, dann nimmt der Hörer zwar beide Töne wahr, legt den Grundton aber bei 200 Hz fest. Werden zusätzlich noch reine Töne mit 600 Hz, 800 Hz und 1000 Hz gespielt, bleibt der Grundton weiterhin bei 200 Hz. Was passiert aber, wenn der Grundton nicht gespielt wird? Überraschender Weise klingt 200 Hz trotzdem als Grundton heraus. Dieses Phänomen des abwesenden Grundtons wird als Residualton bezeichnet. Im folgenden Beispiel soll dieses Phänomen näher verdeutlicht werden.

#### **Beispiel 1.3.** (Residualton)

*Welcher Grundton wird vernommen, wenn die folgenden reinen Töne mit den Frequenzen*

*200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600*

*(in Hz) gleichzeitig gespielt werden?*

Der Grundton wird bei 50 Hz wahrgenommen, weil

$$ggT(200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600) = 50.$$

In diesem Beispiel wird ersichtlich, dass der größte gemeinsame Teiler der Frequenzen den Grundton festlegt. Daher ist es egal, ob der Grundton gespielt wird oder nicht, er wird in beiden Fällen von unseren Ohren wahrgenommen.

Durch die graphische Darstellung von Sinuskurven und ihren Summen kann der Residualton näher veranschaulicht werden. In der folgenden Abbildung werden zunächst der Grundton und zwei Oberschwingungen als einzelne Sinuskurven dargestellt und anschließend die Summen gebildet. Auffallend ist, dass die Summen der Schwingungen dabei dieselbe Periodizität aufweisen, wie der Grundton.

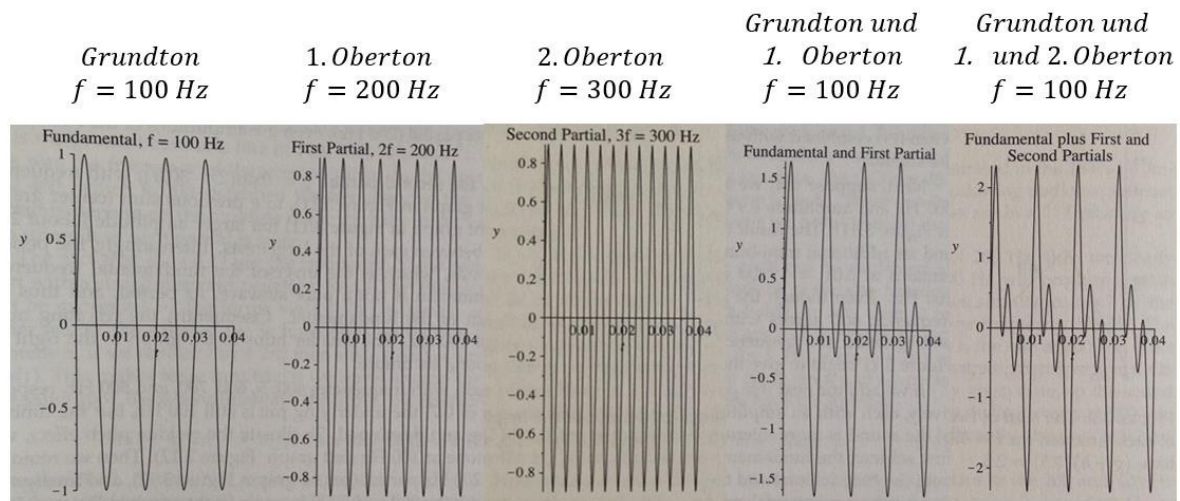


Abbildung 1.20.: Graphische Addition von Sinuskurven

### Theorem 1.1.

Seien die Partialtöne mit den Frequenzen  $f_1, f_2, \dots, f_n$  mit  $f_i \in \mathbb{N}$  reine Sinustöne, die gleichzeitig gespielt werden und sei  $d \in \mathbb{N}, d > 1$  der größte gemeinsame Teiler von allen  $n$  Frequenzen. Dann wiederholt sich die periodische Sinuswelle alle  $\frac{1}{d}$  Zeiteinheiten.<sup>39</sup>

### Beweis 1.1.

Es ist zu zeigen, dass  $f\left(t + \frac{1}{d}\right) = f(t)$  für alle  $t$  gilt.

Seien die Partialtöne mit  $y_1 = a_1 \sin(2\pi f_1 t)$ ,  $y_2 = a_2 \sin(2\pi f_2 t)$ , ... dargestellt und sei  $f(t) = y_1 + y_2 + \dots + y_n$  die Summe aller Partialtöne.

Nehmen wir an, dass der  $\text{ggT}(f_1, f_2, \dots, f_n) = d$  ist, dann  $\exists k_i \in \mathbb{N}$ , sodass  $f_1 = k_1 \cdot d$ ,  $f_2 = k_2 \cdot d$ , ... gilt.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 f\left(t + \frac{1}{d}\right) &= a_1 \sin\left(2\pi f_1 \left(t + \frac{1}{d}\right)\right) + a_2 \sin\left(2\pi f_2 \left(t + \frac{1}{d}\right)\right) + \dots + a_n \sin\left(2\pi f_n \left(t + \frac{1}{d}\right)\right) \\
 &= a_1 \sin\left(2\pi \left(t f_1 + \frac{f_1}{d}\right)\right) + a_2 \sin\left(2\pi \left(t f_2 + \frac{f_2}{d}\right)\right) + \dots + a_n \sin\left(2\pi \left(t f_n + \frac{f_n}{d}\right)\right)
 \end{aligned}$$

<sup>39</sup> Roberts 2016, S. 101

$$\begin{aligned}
&= a_1 \sin(2\pi f_1 t + k_1 2\pi) + a_2 \sin(2\pi f_2 t + k_2 2\pi) + \dots + a_n \sin(2\pi f_n t + k_n 2\pi) \\
&= a_1 \sin(2\pi f_1 t) + a_2 \sin(2\pi f_2 t) + \dots + a_n \sin(2\pi f_n t) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

□

Unabhängig davon, wie viele Obertöne erklingen, die Periode bleibt immer gleich groß – die Frequenz bleibt also stets unverändert und die Größe der Periode ist abhängig vom größten gemeinsamen Teiler aller Frequenzen. Wenn nur die Obertöne zusammenklingen und der Grundton fehlt, bleibt die Frequenz unverändert. Selbst wenn der Grundton inklusive der ersten beiden Obertöne fehlt, die Periode ändert sich nicht. Anhand dieser Tatsache sollte das Phänomen des Residualtons einfacher zu verstehen sein. Selbst wenn der Grundton nicht gespielt wird, so wird er trotzdem vom Hörer als Grundton wahrgenommen, weil die Summe der Obertöne eine harmonische Schwingung, die die selbe Frequenz wie der Grundton aufweist, ergibt.

#### 1.4.4. Kombinationstöne

Wenn zwei laute Töne mit unterschiedlichen Frequenzen  $f_1, f_2$  mit  $f_1 > f_2$  zusammen gespielt werden, dann wird zusätzlich zu den beiden Tönen mit den gegebenen Frequenzen auch ein Ton mit der Frequenz  $f_1 - f_2$  wahrgenommen. Dieser Ton wird als Differenzton bezeichnet. Helmholtz fand später heraus, dass ein weiterer Ton mit der Frequenz  $f_1 + f_2$ , der als Summationston bezeichnet wird, zu hören ist. Dieser Ton sei allerdings weitaus schwächer und deswegen schwerer herauszuhören.<sup>40</sup> Zusammen zählen Differenz- und Summationston zum Phänomen der Kombinationstöne.

Auch wenn Kombinationstöne einige Parallelen zum Phänomen der Schwebung aufweisen, handelt es sich dennoch um unterschiedliche Vorgänge. Bei der Schwebung hören wir keinen Ton in der Frequenz der Schwebung, weil in der Basilarmembran unserer Ohren keine Weiterleitung der durch die Erregung ausgelösten Informationen stattfindet. Nehmen beide Ohren je einen unterschiedlichen Ton wahr, ist das Phänomen der Schwebung erkennbar, Kombinationstöne können aber nicht wahrgenommen werden.<sup>41</sup> Das Phänomen der Schwebung

---

<sup>40</sup> Benson 2007, S. 155

<sup>41</sup> Ebenda, S. 155 f.

ist nur bei zwei Tönen mit einem Abstand bis zu einer kleinen Terz, Kombinationstöne sind unabhängig vom Abstand der beiden Töne hörbar.<sup>42</sup> Helmholtz vertrat die Ansicht, dass wir Kombinationstöne aufgrund der nichtlinearen Verarbeitung in unseren Ohren wahrnehmen, eine genaue Erklärung konnte aber noch nicht gefunden werden, weswegen die Kombinationstöne zu den offenen Fragen der Psychoakustik zählen.

## 1.5. Graphische Darstellung von Tönen

Mit dem uns bekannten Wissen über Sinus- und Cosinusfunktionen, harmonischen Schwingungen und Wellenbewegungen im Allgemeinen ist es heutzutage mittels der Technik ein Leichtes, den Verlauf von Klängen graphisch darzustellen. Vor rund 150 Jahren standen die Menschen noch vor anderen Problemen und es mussten erst Mittel und Wege gefunden werden, um Töne graphisch festzuhalten. Im Folgenden werden einige Erfindungen und Entdeckungen vorgestellt, mit denen Töne und die damit einhergehende Schwingung von Schallwellen sichtbar gemacht werden können.

### 1.5.1. Lissajous-Figuren

Lissajous-Figuren sind Resultate eines um die Mitte des 19. Jahrhunderts stattgefundenen Experiments von Jules Lissajous. Zu Beginn seiner Forschung platzierte Lissajous einen kleinen Spiegel an der Spitze einer Stimmgabel, lenkte einen Lichtstrahl auf ihn und der Spiegel projizierte diesen auf einen dunklen Schirm. Er versetzte die Stimmgabel in Schwingung und nahm einen weiteren Spiegel zu Hilfe, um die Schwingungen seitwärts projizieren zu können und so die Sinuswelle sichtbar zu machen.

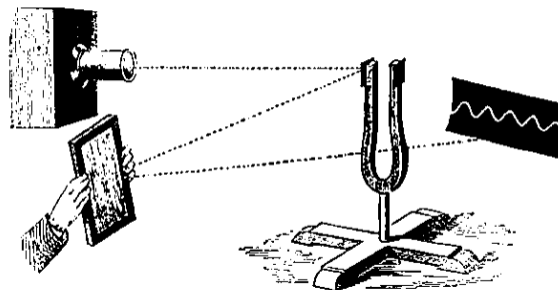


Abbildung 1.21.: Sichtbarmachen der Vibration

<sup>42</sup> Loy 2011, S. 175

In einem nächsten Experiment fügte er eine weitere waagrechte Stimmgabel, die ebenfalls einen Spiegel an ihrer Spitze befestigt hatte, hinzu und stellte sie im rechten Winkel zur ersten Stimmgabel auf. Versetzte er nun beide Stimmgabeln in Schwingung und projizierte die Bewegung auf einen dunklen Untergrund, entstanden durch die Bewegung des Lichtstrahls Formen, die heute als Lissajous-Figuren bekannt sind.

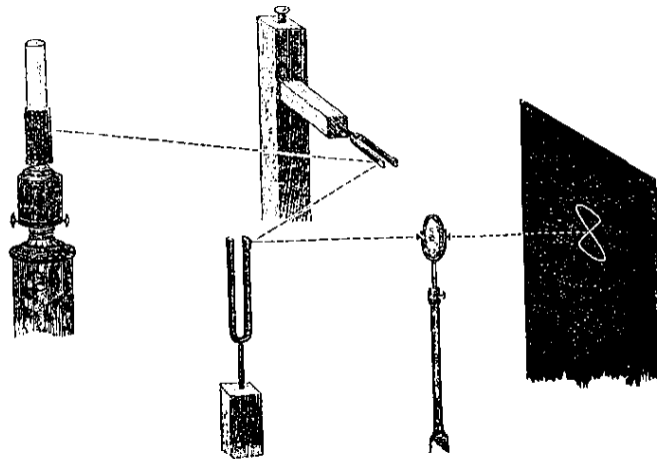


Abbildung 1.22.: Entstehung von Lissajous-Figuren

Lissajous entdeckte, dass es beim Erscheinen der Figuren entscheidend war, dass die Frequenzen der Stimmgabeln in einem einfachen Verhältnis zueinanderstehen.<sup>43</sup> Aus diesem Grund geben die Figuren Auskunft über das Frequenzverhältnis und die Phasenlage zweier Schwingungen. Sie sagen aber nichts über die Tonhöhe aus. Bei Betrachtung der folgenden Abbildung wird ersichtlich, dass die Figur im obigen Bild beispielsweise ein Frequenzverhältnis von 1:2 aufweist (die Stimmgabeln unterscheiden sich also um eine Oktave) und die Phase  $90^\circ$  beträgt.

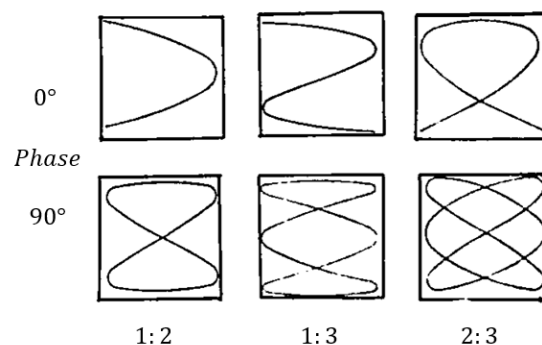


Abbildung 1.23.: Beispiele für Lissajous-Figuren

<sup>43</sup> Ashton 2017, S. 200

### 1.5.2. Harmonographische Zeichnungen

Mithilfe eines Harmonographen können Töne ebenfalls graphisch dargestellt werden. Anders als bei den Lissajous-Figuren, die durch Vibration von Stimmgabeln entstehen, arbeiten Harmonographen mit Längenverhältnissen. Ein Harmonograph besteht aus zwei Pendeln, die im rechten Winkel zueinander schwingen. Am Schaft des einen Pendels befindet sich ein Stück Papier und das andere Pendel ist mit einer Verlängerung und einem Stift versehen. Wenn die Pendel schwingen wird eine Zeichnung angefertigt, die das Resultat der gemeinsamen Bewegungen der Pendel ist.

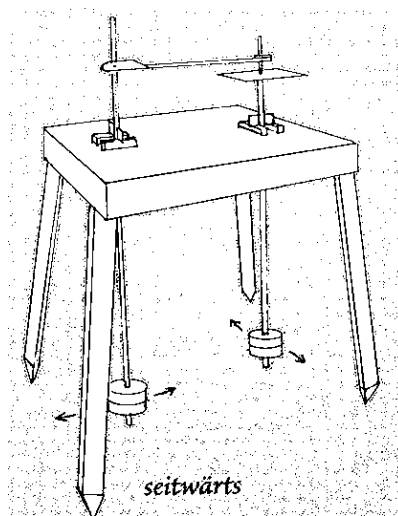


Abbildung 1.24.: Harmonograph

Die Längen der Pendel können nun so variiert werden, dass sie den gewünschten Frequenzverhältnissen bestimmter Töne entsprechen. Die Formen, die der Harmonograph erzeugt, sind denen von Lissajous entdeckten Figuren sehr ähnlich. Das mag im ersten Moment vielleicht überraschen, da der Harmonograph mit Längenverhältnissen und nicht mit Tönen arbeitet, ist aber ein Zeichen für die tiefe Verbindung zwischen Zahlenverhältnissen in Musik und Natur.

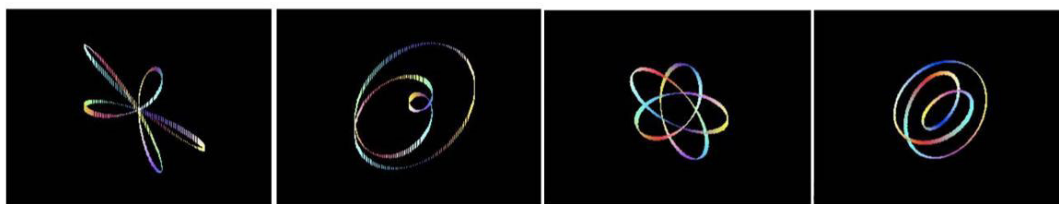


Abbildung 1.25.: Verschiedene harmonographische Zeichnungen mit dem Verhältnis 3:2

### 1.5.3. Chladnische Klangfiguren

Ende des 18. Jahrhunderts entdeckte Ernst Chladni, dass Platten und Membranen ebenfalls in Schwingung versetzt werden können. Er streute feinen Sand auf eine quadratische Platte und bestrich sie an einer Kante mit einem Geigenbogen, um sie auf diese Weise in Eigenschwingung zu bringen. An den stark vibrierenden Stellen setzte sich der Sand in Bewegung und wanderte zu jenen Stellen, die in Ruhe waren. Auf diese Weise resultierten bestimmte Töne in bestimmten Mustern im Sand. Durch Berührung der Platte an einer harmonischen Teilung entstanden weitere Klangfiguren. Das Muster der Klangfiguren war außerdem von der Form der Platte abhängig: Auf einer quadratischen Platte entstanden meist eckige Muster, auf einer runden Platte runde Muster und auf einer dreieckigen Platte dreieckige Muster.

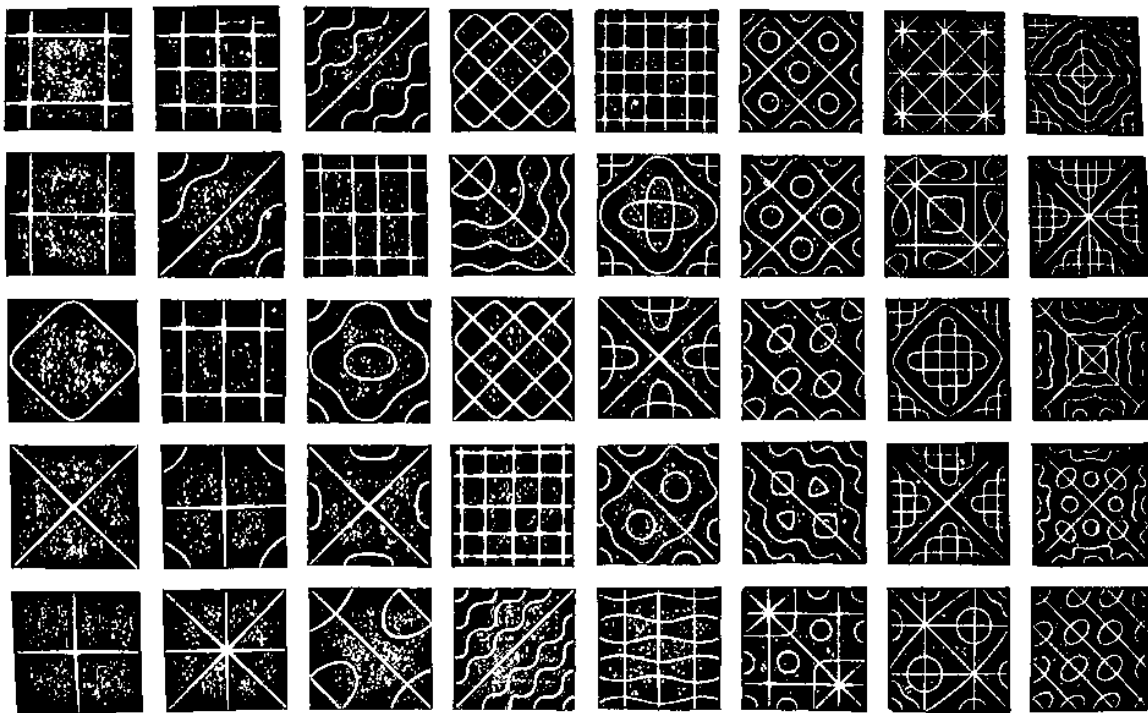


Abbildung 1.26.: Chladnische Klangfiguren

Interessant ist, dass es meist harmonische Töne waren, die schlussendlich ansehnliche Muster ergaben. Diese Gemeinsamkeit teilen alle bereits erwähnten Darstellungsformen, denn disharmonische Töne führen zu einem Chaos.<sup>44</sup>

<sup>44</sup> Vgl. Ashton 2017, S. 232

## 2. Stimmungssysteme in der Musik

Tonhöhe, Lautstärke und Klangfarbe sind jene charakteristischen Eigenschaften, die einen Ton definieren. Um ein Instrument stimmen und ein Zusammenspielen mehrerer Instrumente überhaupt erst möglich machen zu können, benötigt es zunächst die Festlegung einer Normfrequenz. Die Angabe des Kammertons  $a^1$  ist an dieser Stelle aber nicht ausreichend – es bedarf eines Stimmungssystems. Dieses definiert die Frequenzverhältnisse der spielbaren Töne eines Instruments innerhalb einer Oktave und ermöglicht auf diese Weise eine Berechnung der absoluten Frequenzen aller Töne ausgehend von der Normfrequenz. Über die Jahrhunderte wurden zahlreiche Stimmungssysteme entwickelt, von denen im Folgenden, die für die Musik am bedeutendsten behandelt werden.

### 2.1. Pythagoreische Stimmung

Die pythagoreische Stimmung gilt als das älteste und mit annähernd 2000 Jahren (von ca. 500 v. Chr. bis 1500 n. Chr.) auch als das am längsten gebräuchliche Stimmungssystem im abendländischen Kulturraum. Pythagoras von Samos, einem der bekanntesten Mathematiker und Philosophen der Antike, wird die Entdeckung der Beziehung zwischen Zahlen- und Tonverhältnissen zugeschrieben.

Laut einer Legende bemerkte er beim Vorbeigehen an einer Schmiede, dass die auf einen Amboss schlagenden Eisenhämmer mit Ausnahme eines Paares stets konsonante Töne ergaben. Durch Experimente soll er herausgefunden haben, dass die Tonhöhe vom Gewicht der Hämmer, nicht aber von der Kraft des Schlages oder von der Form der Hämmer abhängig war. Er wog die Hämmer ab und beschwerte gleich lange und gleich dicke Saiten mit denselben Gewichten und hörte, als er die Saiten anschlug, die gleichen Konsonanzen. Er erkannte, dass die Saiten mit den Gewichten 12 und 6 um eine Oktav verschieden klangen, weswegen er das Oktavverhältnis 2:1 ableitete. Auf diese Weise soll Pythagoras auch die weiteren relevanten Intervallproportionen der pythagoreischen Stimmung gefunden haben.<sup>45</sup>

Diese Legende konnte unter anderem von Jonquière, der bewiesen hatte, dass zwar die überlieferten Verhältnisse für Saitenlängen stimmten, nicht aber die Proportion zwischen den

---

<sup>45</sup> Vgl. Amon 2005, S. 254 und Münxelhaus 1976, S. 36

auf den Saiten hängenden Gewichten und der Körpermasse der tatsächlichen Hämmer, widerlegt werden.<sup>46</sup> Pythagoras hat demnach nicht auf diese Weise die Beziehung zwischen Zahlen und Tönen entdeckt, trotzdem diente er als Namensgeber für diese musikalische Stimmung. Die Anhänger jener Schule, die Pythagoras selbst gegründet hat, nannten sich Pythagoreer. Sie versuchten, mit Hilfe von Zahlen die harmonische Einheit des Universums auszudrücken und vertraten die Ansicht, dass sich in allen Bereichen des Lebens die zahlenmäßig selben Gesetzmäßigkeiten finden lassen. Sie schufen akustische und musikalische Studien, in denen sie die Verbindung zwischen Musik und Zahlen genauer behandelten. Eine besondere Bedeutung bei diesen Studien nahmen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 ein. Werden diese Zahlen als Kreise dargestellt und reihenweise übereinandergesetzt entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit jeweils drei Kreisen als Seitenlängen. Die Summe der Zahlen ergibt 10, weswegen die ebenfalls unter dem Namen Tetraktys bekannte Zahlenfolge auch als ein Sinnbild für Vollkommenheit und Einheit gilt.

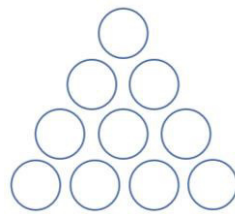


Abbildung 2.1.: Tetraktys

Bei ihren Studien nahmen die Pythagoreer ein bestimmtes Instrument zu Hilfe – das Monochord. Dieses Instrument besteht aus einer einzigen Saite, die auf einem rechteckigen Resonanzkasten gespannt ist und durch einen verschiebbaren Steg geteilt werden kann. Die Saite ist nur an einer Seite des Resonanzkörpers befestigt, das andere Ende wird mit einem Gewicht belastet. Die Saite wird auf diese Weise gleichmäßig gespannt und kann durch Zupfen in Eigenschwingung versetzt werden. Der Resonanzkörper verstärkt die Schwingung und es wird ein deutlicher Ton hörbar.

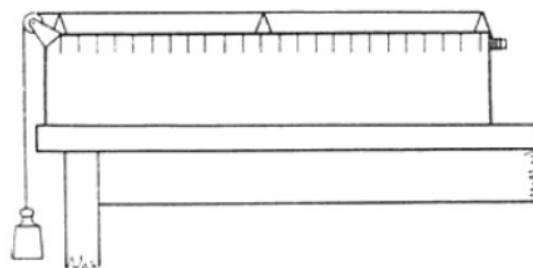


Abbildung 2.2.: Monochord

<sup>46</sup> Vgl. Münxelhaus 1976, S. 37

Durch Variieren der Länge der Saite mit Hilfe des Steges entstehen weitere Töne, die mit jenem Ton, der durch Zupfen der ganzen Saite erzeugt wird, in Beziehung gesetzt werden können. Die Spannung der Saite bleibt aufgrund des angebrachten Gewichtes trotz der Verschiebung des Steges konstant. Die Pythagoreer entdeckten durch Experimentieren die harmonischen Zusammenklänge einzelner Töne und drückten ihre Beziehung in Zahlenverhältnissen aus. Durch das Halbieren der Saite hörten sie eine Oktave, teilten sie die Saite im Verhältnis 2:3 vernahmen sie eine Quinte und brachten sie nur drei Viertel der ursprünglichen Länge zum Schwingen hörten sie eine Quarte.

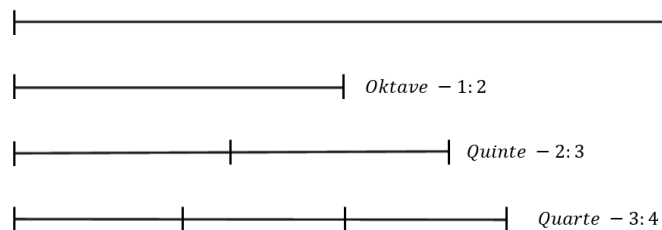


Abbildung 2.3.: Monochordexperimente

An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass sich Saitenlängen verkehrt proportional zu Frequenzen verhalten, denn eine auf die Hälfte verkürzte Saite schwingt mit doppelter Frequenz.<sup>47</sup> So entspricht beispielsweise das Verhältnis der Saitenlängen 2:3 dem Verhältnis der Frequenzen von 3:2. Zwei Tonintervalle sind also genau dann gleich, wenn ihre Frequenzen im gleichen Verhältnis zueinanderstehen.<sup>48</sup>

Da dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte das Multiplizieren der entsprechenden Verhältniszahlen entspricht<sup>49</sup>, gilt:

$$\text{Quinte} + \text{Quarte} = \text{Oktave}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Der musikalische Abstand zwischen Quinte und Quarte ergibt sich wiederum durch Division:

$$\text{Quarte} - \text{Quinte} = \text{Ganzton}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{8}$$

<sup>47</sup> Amon 2005, S. 253

<sup>48</sup> Schröder 1990, S. 50

<sup>49</sup> Ebenda, S. 49

Die pythagoreische Stimmung basiert auf den Intervallen der Oktave, Quinte und Quarte, die sich alle mit der Zahlenfolge der Tetraktys darstellen lassen. Amon beschreibt die pythagoreische Stimmung deswegen als den Versuch, mit den ersten vier Zahlen alle Intervalle zu berechnen. Weil das systembildende Intervall die Quint ist, wird die pythagoreische Stimmung auch häufig Quintstimmung genannt.<sup>50</sup>

Die pythagoreische Tonleiter enthält sieben Töne (c, d, e, f, g, a und h) und besteht aus fünf großen und zwei kleinen Tonschritten. Durch eine Verkettung von Quinten können die einzelnen Töne der Tonleiter ermittelt werden: Geht man vom Ton c eine Quinte aufwärts erhält man den Ton g. Durch eine Verkettung weiterer Quinten erhält man ausgehend vom Ton g zunächst d, dann a und e und schließlich den Ton h. Unter Verwendung einer absteigenden Quinte vom Ton c aus erhält man den Ton f.

$$f \leftarrow c \rightarrow g \rightarrow d \rightarrow a \rightarrow e \rightarrow h$$

Um nun die Stimmung der Tonleiter berechnen zu können, kann das Monochord zu Hilfe genommen werden. Wie bereits erwähnt verhalten sich die Saitenlängen proportional zu den Frequenzen der gehörten Töne. Die Intervalle Prime (c), Quarte (f), Quinte (g) und Oktave (c<sup>1</sup>) können demnach mit den Verhältniszahlen 1,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$  und 2 ausgedrückt werden. Die Frequenzverhältnisse der vier fehlenden Noten können mit Hilfe der Quinte leicht berechnet werden.

Der Ton d ist zwar eine aufsteigende Quinte von g entfernt, weil sich der Ton d dann aber in einer anderen Oktave befindet, muss um eine Oktave reduziert und deswegen mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  multipliziert werden:

$$d = g \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Es wird ersichtlich, dass der Ton d einen Ganzton bzw. zwei Halbtonschritte von c entfernt ist.

---

<sup>50</sup> Vgl. Amon 2005, S. 255

Die Frequenzverhältnisse der Töne a, e und h können auf ähnliche Weise ermittelt werden. Es muss nur darauf geachtet werden, ob eine Erhöhung um eine Oktave stattfindet und ob aus diesem Grund eine Multiplikation mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  stattfinden muss.

$$a = d \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$$

$$e = a \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{64}$$

$$h = e \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$$

In der folgenden Tabelle werden unter anderem die Frequenzverhältnisse der Töne des pythagoreischen Tonsystems aufgelistet. Ebenfalls wird in der letzten Zeile ersichtlich, dass die pythagoreische Tonleiter aus fünf Ganz- und zwei Halbtonschritten besteht.

| <b>Tonbezeichnung</b>                                         | c | d             | e               | f                 | g             | a               | h                 | c <sup>1</sup>    |
|---------------------------------------------------------------|---|---------------|-----------------|-------------------|---------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| <b>Saitenlänge bezogen auf c</b>                              | 1 | $\frac{8}{9}$ | $\frac{64}{81}$ | $\frac{3}{4}$     | $\frac{2}{3}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{128}{243}$ | $\frac{1}{2}$     |
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf c</b>                       | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$     | $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{243}{128}$ | 2                 |
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf den tieferen Nachbarten</b> | - | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$   | $\frac{256}{243}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$   | $\frac{9}{8}$     | $\frac{256}{243}$ |

Tabelle 2.1.: pythagoreisches Tonsystem

Auch wenn dieses Stimmungssystem auf den ersten Blick unproblematisch erscheint, so werden bei näherer Betrachtung der Frequenzverhältnisse doch einige Unstimmigkeiten ersichtlich. Die große Problematik der pythagoreischen Stimmung liegt darin, dass zwei Halbtöne keinen Ganzton ergeben.

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} \neq \frac{9}{8}$$

$$\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}} \neq \frac{3^2}{2^3}$$

$$2^{19} \neq 3^{12}$$

Da 2 und 3 Primzahlen sind, fällt eine Potenzierung von 2 niemals mit einer Potenzierung von 3 zusammen.

Was bedeutet das nun für die Musik? Wenn wir den Tonraum von sieben Oktaven betrachten, beinhaltet dieser zwölf übereinandergestellte Quinten. Die zwölfte Quinte stimmt mit der siebten Oktave aber nicht überein, da die Quinten ein wenig größer sind, als die Oktaven.

Rechnerisch ergibt sich folgendes:

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = 1,013643265...$$

Wenn zwölf Quinten genau sieben Oktaven entsprechen würden, dann wäre das Ergebnis gleich Eins gewesen. Zwischen der zwölften Quinte und der siebten Oktave entsteht aber eine Differenz ( $1,0136 - 1 = 0,0136$ ), die als pythagoreisches Komma bezeichnet wird und etwa einem Achtelton entspricht.<sup>51</sup> Das pythagoreische Komma entspricht der Proportion

$$\frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{524288}{531441} \approx 0,9865.$$

In der folgenden Grafik wird dieser Umstand mit Hilfe des Quintenzirkels verdeutlicht. Im Zentrum der Spirale werden ausgehend vom Punkt C Quintensprünge durchgeführt. Nach mehreren Quintensprüngen wird ersichtlich, dass die Punkte, die mit den Quinten erzielt werden, nicht genau mit den Tönen des Quintenzirkels übereinstimmen. Je mehr Quintensprünge durchgeführt werden, desto größer wird der Abstand zu den Tönen. Schließlich wird das genaue Ausmaß der Differenz am Ende der Spirale im pythagoreischen Komma ersichtlich.

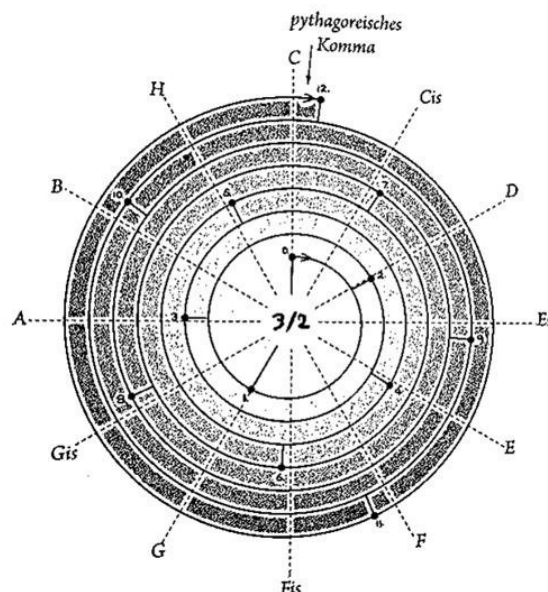


Abbildung 2.4.: pythagoreisches Komma

<sup>51</sup> Vgl. Schaurhofer 2009, S. 9

## 2.2. Natürlich-harmonische Stimmung

Die natürlich-harmonische Stimmung ist auch unter den folgenden Namen bekannt: reine Stimmung, Quint-Terz-Stimmung und diatonische Stimmung. In der Literatur kommt es aufgrund dieser Fülle an Namen häufig zu Verwirrungen.

Unser Ohr hört im Sinne der natürlich-harmonischen Stimmung. Diese entsteht, wenn jedes Intervall seinem Tonverhältnis in der Obertonreihe entsprechend intoniert wird.<sup>52</sup> Wie bereits im ersten Kapitel erwähnt, handelt es sich bei der Obertonreihe um ein physikalisches Phänomen, das entsteht, wenn ein Körper schwingt. Ein natürlicher Ton besteht nicht nur aus einer einzigen Sinusschwingung, sondern setzt sich aus einer Grundschiwingung und den ebenfalls mitschwingenden Oberschwingungen zusammen. Die Frequenzen der Obertöne sind dabei die ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz.

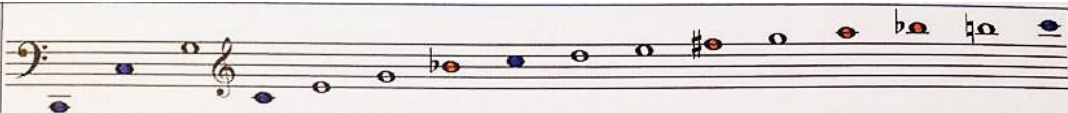
|                   |                                                                                     |       |       |       |       |       |       |       |       |        |        |        |        |        |        |        |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Noten             |  |       |       |       |       |       |       |       |       |        |        |        |        |        |        |        |
| Proportion        | 1                                                                                   | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     | 15     | 16     |
| Partialtöne       | 1                                                                                   | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     | 15     | 16     |
| Obertöne          | Gt.                                                                                 | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9      | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     | 15     |
| Saiten-verhältnis | $1/1$                                                                               | $1/2$ | $1/3$ | $1/4$ | $1/5$ | $1/6$ | $1/7$ | $1/8$ | $1/9$ | $1/10$ | $1/11$ | $1/12$ | $1/13$ | $1/14$ | $1/15$ | $1/16$ |
| Frequenz          | f                                                                                   | 2f    | 3f    | 4f    | 5f    | 6f    | 7f    | 8f    | 9f    | 10f    | 11f    | 12f    | 13f    | 14f    | 15f    | 16f    |

Abbildung 2.5.: Obertonreihe über dem angenommenen Grundton C

In der obigen Abbildung ist die Obertonreihe des Grundtons C dargestellt. Die Partialtöne sind theoretisch nach oben unbegrenzt, aber nur bis zum 16. Partialton in unserem Notenbild darstellbar, da danach die Abstände kleiner als Halbtonschritte werden.<sup>53</sup> In der Abbildung wird der Grundton C zusammen mit den um ein bis vier Oktaven höher liegenden c, c<sup>1</sup>, c<sup>2</sup> und c<sup>3</sup> in blau hervorgehoben. Die orange gefärbten Töne werden ekmelische Töne genannt. Sie werden in der Musik nicht verwendet, da sie etwas tiefer sind als Halbtöne und folglich in der gebräuchlichen Notation nicht dargestellt werden können. Alle Intervalle, die aus der Obertonreihe gebildet werden können, sind reine Intervalle und entsprechen demnach der natürlich-harmonischen Stimmung.

<sup>52</sup> Vgl. Amon 2005, S. 257

<sup>53</sup> Ebenda, S. 209

Wird also beispielsweise eine Quinte genau im Verhältnis 2:3 gestimmt, kann man von einer reinen Quinte sprechen. Wenn nun jedes Intervall seinem Tonverhältnis entsprechend gestimmt wird, spricht man von einer reinen Stimmung.

Wie kam es nun zur Entwicklung der natürlich-harmonischen Stimmung? Aristoxenos von Tarent, ein Schüler von Aristoteles, widersprach der von den Pythagoreern entwickelten pythagoreischen Stimmung und vertrat die Ansicht, dass ausschließlich das Gehör maßgebend für die Entwicklung einer musikalischen Stimmung sein sollte. Einige Jahrhunderte später teilte Didymos von Alexandria das Monochord in fünf Teile und ersetzte die pythagoreische Terz  $\frac{64}{81}$  durch die reine Terz  $\frac{4}{5}$ . Die kleine Terz bestimmte er mit  $\frac{5}{6}$ .<sup>54</sup> Durch dieses Vorgehen ist die Abweichung bei den Tönen e, a und h als Oberterzen von c, f und g geringer.<sup>55</sup> Die reine Terz klingt wesentlich konsonanter als die pythagoreische Terz, da sie auf der Obertonreihe aufgebaut ist.<sup>56</sup> Ab dem 13. Jahrhundert erlangte die natürlich-harmonische Stimmung zunehmend an Bedeutung und setzte sich mehr und mehr gegen die pythagoreische Stimmung durch.

Im Gegensatz zur pythagoreischen Stimmung, die auf reinen Quinten basiert, ist die natürlich-harmonische Stimmung aus reinen Quinten und reinen Terzen aufgebaut. Wie bei der pythagoreischen Stimmung werden die Intervalle Prime (c), Quarte (f), Quinte (g) und Oktave (c<sup>1</sup>) durch die Verhältniszahlen 1,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$  und 2 ausgedrückt, aber zusätzlich die Terz (e) mit der Verhältniszahl  $\frac{5}{4}$  bestimmt. Nun müssen nur mehr die Töne d, a und h berechnet werden.

Zur Berechnung von d muss g wie bei der pythagoreischen Stimmung um eine Quinte erhöht werden, wobei das Ergebnis um eine Oktave reduziert werden muss:

$$d = g \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Da a eine Terz von f entfernt ist, ergibt sich:

$$a = f \cdot \frac{5}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

---

<sup>54</sup> Amon 2005, S. 257

<sup>55</sup> Glaeser 2014, S. 381

<sup>56</sup> Vgl. Roberts 2016, S. 127

Abschließend wird zur Berechnung von h der Ton e um eine Quinte erhöht:

$$h = e \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}.$$

Es ergibt sich die folgende natürlich-harmonische Skala:

| <b>Tonbezeichnung</b>                                         | c | d             | e              | f               | g             | a              | h              | c <sup>1</sup>  |
|---------------------------------------------------------------|---|---------------|----------------|-----------------|---------------|----------------|----------------|-----------------|
| <b>Saitenlänge bezogen auf c</b>                              | 1 | $\frac{8}{9}$ | $\frac{4}{5}$  | $\frac{3}{4}$   | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{5}$  | $\frac{8}{15}$ | $\frac{1}{2}$   |
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf c</b>                       | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{5}{4}$  | $\frac{4}{3}$   | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$  | $\frac{15}{8}$ | 2               |
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf den tieferen Nachbarten</b> | - | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{9}{8}$  | $\frac{16}{15}$ |

Tabelle 2.2.: natürlich-harmonische Skala

Obwohl die natürlich-harmonische Stimmung, bestehend aus reinen Intervallen, ein Ideal in Theorie und Praxis darstellt, stehen ihrer Verwirklichung doch einige Schwierigkeiten im Weg. Zum einen besteht immer noch dasselbe Problem wie bei der pythagoreischen Stimmung: Zwölf reine Quinten entsprechen nicht genau sieben Oktaven. Außerdem bleibt ebenfalls das Problem bestehen, dass zwei Halbtöne keinen Ganzton ergeben. Beim Betrachten der Tabelle wird ersichtlich, dass es bei der reinen Stimmung sogar zwei verschiedene Ganztöne gibt, die als großer  $\left(\frac{9}{8}\right)$  und kleiner Ganzton  $\left(\frac{10}{9}\right)$  bezeichnet werden. Der Unterschied zwischen den Ganztönen  $\left(\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80}\right)$  wird als syntonisches oder didymisches Komma bzw. Terzkomma bezeichnet. Interessant ist außerdem, dass der Unterschied zwischen der pythagoreischen Terz  $\frac{81}{64}$  und der reinen Terz  $\frac{5}{4}$  ebenfalls dem syntonischen Komma entspricht.

Eine weitere Problematik der reinen Stimmung ist, dass die Töne gis und as, die im Prinzip dieselbe Note bezeichnen, nicht identisch sind.

Zur Berechnung von gis wird e um eine reine Terz erhöht:

$$gis = e \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16} = 1,5625.$$

Um das genaue Frequenzverhältnis von as zu erhalten, muss c<sup>1</sup> um eine reine Terz vermindert werden:

$$as = c^1 : \frac{5}{4} = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Eine kleine Terz besteht aus drei Halbtonschritten, eine große Terz aus vier Halbtonschritten und eine Oktave beinhaltet zwölf Halbtonschritte. Man sollte also annehmen, dass jeweils vier kleine und drei große hintereinander ausgeführte Terzen eine Oktave ergeben. Diese Annahme kann mit den folgenden Berechnungen widerlegt werden:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^4 = 2,0736 > 2$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = 1,9531 < 2.$$

Der Unterschied zwischen einer Oktave und drei reinen großen Terzen wird als kleine Diesis  $\left(2 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{128}{125} = 1,024\right)$  und der Unterschied zwischen vier reinen kleinen Terzen und einer Oktave wird als große Diesis  $\left(\left(\frac{6}{5}\right)^4 : 2 = \frac{648}{625} = 1,0368\right)$  bezeichnet.<sup>57</sup>

## 2.3. Mitteltemperatur

Als im Zuge der Entwicklung der Mehrstimmigkeit um 1500 die reine Terz  $\left(\frac{4}{5}\right)$  allgemein anerkannt wurde, musste man sich mit dem Problem des Terzkommas und der Tatsache, dass es zwei verschieden große Ganztöne gab, auseinandersetzen. Zur Lösung dieses Problems wurde ein d gestimmt, das genau dem Mittelwert zwischen dem großen und dem kleinen Ganzton entsprach. Innerhalb der reinen Terz c-e ist dieses mittlere d das geometrische Mittel, das die Terz in zwei gleichgroße Ganztöne teilt.<sup>58</sup> Da der Ton d mithilfe des Mittelwerts gestimmt wurde, wurde die Stimmung „Mitteltemperatur“ bzw. „mitteltönige“ Stimmung genannt. Aufgestellt wurde die Stimmung in den Jahren 1511, 1523/29 und 1577 von Arnold Schlick, Pietro Aron und Francisco Salinas.<sup>59</sup>

Die Mitteltemperatur ist auf reinen Terzen aufgebaut, da es auch Ziel der Stimmung war, möglichst viele reine Terzen zu verwenden. Insgesamt konnten acht reine Terzen erzielt werden, allerdings auf Kosten der Quinten, die wirklich sehr verstimmt sind. Die zwölfte Quinte gis-es ist so stark verstimmt, dass sie als Wolfsquint bezeichnet wird, weil sie „wie ein Wolf

---

<sup>57</sup> Vgl. Schöffler 2017, S. 127

<sup>58</sup> Vogel 1976, S. 273

<sup>59</sup> Amon 2005, S. 258

heult“.<sup>60</sup> Um diese Unstimmigkeiten zu umgehen wurden beispielsweise bestimmte Tonarten vermieden, gebrochene Tasten verwendet (um verschiedene Töne zu erzeugen) oder Tonarten umgeschrieben.<sup>61</sup> Trotz der Problematik bei der Stimmung hat die Mitteltontemperatur auch einige Vorteile. So gibt es zum einen nur einen Typ von Ganztönen und außerdem wird das syntonische Komma ausgeglichen, indem vier aufeinanderfolgende Quinten um je ein Viertel des syntonischen Kommas erniedrigt werden.

Werden vier Quinten hintereinander ausgeführt und alles um zwei Oktaven hinunterversetzt, so muss dieser Vorgang exakt eine Terz ergeben. Die Terz soll dabei aber nicht vergrößert, sondern die Quint verkleinert werden. Vier nacheinander ausgeführte Quinten müssen demnach bei dem selben Ton enden wie eine Terz und zwei Oktaven. Eine Terz und zwei Oktaven erzeugen ein Frequenzverhältnis von  $\frac{5}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 5$ . Da vier nacheinander ausgeführte Quinten demselben Frequenzverhältnis entsprechen sollen, ist das Frequenzverhältnis der neuen Quint  $\sqrt[4]{5}$ . Mit diesem Frequenzverhältnis kann die Tonleiter der mitteltönigen Stimmung abgeleitet werden.<sup>62</sup>

Die Intervalle Prime (c), Terz (e) und Oktave (c<sup>1</sup>) sind mit den Verhältniszahlen  $1, \frac{5}{4}$  und 2 gegeben. Das Frequenzverhältnis der neuen Quint (g) ist  $\sqrt[4]{5}$ .

Um d zu berechnen muss c um zwei Quinten erhöht und um eine Oktave reduziert werden:

$$d = c \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5} : 2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Das Frequenzverhältnis des Tons f ergibt sich durch die Erhöhung von c um eine Oktave und eine Verminderung um eine Quinte:

$$f = c \cdot 2 : \sqrt[4]{5} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}$$

Eine Erhöhung von d um eine Quinte liefert das Frequenzverhältnis von a:

$$a = d \cdot \sqrt[4]{5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{5^3}$$

---

<sup>60</sup> Vogel 1976, S. 275

<sup>61</sup> Vgl. Amon 2005, S. 259

<sup>62</sup> Vgl. Neuwirth 1997, S. 35 f.

Zur abschließenden Berechnung von h wird e um eine Quinte erhöht:

$$h = e \cdot \sqrt[4]{5} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt[4]{5}$$

Also ist die mitteltönige Stimmung wie folgt gegeben:

| <b>Tonbezeichnung</b>                                         | c | d                    | e             | f                                 | g             | a                                 | h                               | c <sup>1</sup> |
|---------------------------------------------------------------|---|----------------------|---------------|-----------------------------------|---------------|-----------------------------------|---------------------------------|----------------|
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf c</b>                       | 1 | $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{2}{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}$ | $\sqrt[4]{5}$ | $\frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{5^3}$ | $\frac{5}{4} \cdot \sqrt[4]{5}$ | 2              |
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf den tieferen Nachbarton</b> | - | 1,1180               | 1,1180        | 0,0957                            | 1,1180        | 1,1180                            | 1,1180                          | 1,0700         |

Tabelle 2.3.: Skala der Mitteltontemperatur

## 2.4. Temperierte Stimmungen

Bei der temperierten Stimmung wird zusätzlich unter zwei verschiedenen Stimmungen unterschieden. Gemeinsam ist beiden Stimmungen, dass zwölf Quinten sieben Oktaven entsprechen und der Quintenzirkel somit exakt abschließt. Bei der pythagoreischen und bei der natürlich-harmonischen Stimmung übersteigen zwölf Quinten stets sieben Oktaven um das pythagoreische Komma, die Quinten sind also etwas zu groß. Bei der Mitteltontemperatur sind die Quinten etwas zu klein, da  $(\sqrt[4]{5})^{12} = 125 < 128 = 2^7$  gilt und zwölf Quinten somit kleiner sind als sieben Oktaven. Um den Quintenzirkel nun exakt schließen zu können, gibt es zwei Möglichkeiten: Wenn das pythagoreische Komma ungleichmäßig auf Terzen und Quinten verteilt wird, spricht man von einer ungleichschwebenden Stimmung. Wird das pythagoreische Komma aber gleichmäßig auf alle Quinten verteilt, dann wird diese Stimmung als gleichschwebend oder gleichstufig bezeichnet.

### 2.4.1. Ungleichschwebende Temperatur

Mit der ungleichschwebenden Stimmung wurde in der Musik vor allem im 17. und 18. Jahrhundert gearbeitet. Im Laufe dieser Zeit gab es mehrere Versuche von Musikern und Musiktheoretikern, eine Skala zu erstellen, bei der eine ungleichmäßige Verteilung des pythagoreischen Kommas auf Quinten und Terzen stattfindet. Da diese Stimmung versucht, einen Ausgleich zwischen Quinten und Terzen zu schaffen, können alle Intervalle, die bei der

mitteltönigen Stimmung unbrauchbar waren, hier wieder verwendet werden.<sup>63</sup> Andreas Werckmeister gilt als Begründer der gleichschwebenden Stimmung, obwohl er selbst noch ungleichschwebend stimmte. Seine Ansätze lieferten aber einen wesentlichen Beitrag für die Entwicklung der gleichstufigen Stimmung. Er entwickelte vier ungleichschwebende Stimmungen, von denen eine den Namen Werckmeisterische Temperatur trägt und eine weite Verbreitung erlangte. Diese spezielle Stimmung besteht aus acht reinen und vier mitteltönigen Quinten, denn Werckmeister vertrat die Ansicht, dass die Terzen im Gegensatz zu Quinten und Oktaven am meisten an Verstimmung vertragen würden.<sup>64</sup> Allen von ihm entwickelten Stimmungen ist gemein, dass ein problemloses Transponieren und ein Spielen in allen Tonarten möglich ist.

Die bekanntesten und am weitesten verbreiteten ungleichschwebenden Stimmungen sind jene, die von Johann Philipp Kirnberger festgelegt wurden. Kirnberger war Komponist und Musiktheoretiker und arbeitete bei seinen drei Stimmungsmodellen, wie Werckmeister, ebenfalls mit reinen und temperierten Quinten. Die Tonarten der Kirnberger-Stimmung sind ein Mischsystem von natürlich-harmonischen, pythagoreischen und mitteltönigen Werten.<sup>65</sup>

| <b>Tonbezeichnung</b>                                         | c | d             | e              | f               | g             | a                 | h                 | c <sup>1</sup>  |
|---------------------------------------------------------------|---|---------------|----------------|-----------------|---------------|-------------------|-------------------|-----------------|
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf c</b>                       | 1 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{5}{4}$  | $\frac{4}{3}$   | $\frac{3}{2}$ | $\frac{161}{96}$  | $\frac{15}{8}$    | 2               |
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf den tieferen Nachbarton</b> | - | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{161}{144}$ | $\frac{180}{161}$ | $\frac{16}{15}$ |

Tabelle 2.4.: Skala der Kirnberger-Stimmung

## 2.4.2. Gleichschwebende bzw. gleichstufige Temperatur

Die gleichschwebende Stimmung setzte sich um 1850 gleichzeitig mit dem Aufkommen des Klaviers durch und da man bessere Quinten als bei der mitteltönigen Stimmung anstrebte, nahm man stärker verstimmte Terzen in Kauf. Deswegen wurde das pythagoreische Komma gleichmäßig auf alle Quinten aufgeteilt. Wie groß muss also eine Quinte sein, damit sich der Quintenzirkel exakt schließt? Da zwölf Quinten sieben Oktaven entsprechen müssen ist folglich jene Zahl gesucht, bei der die zwölfte Potenz  $2^7$  ergibt. Also ergibt sich für die Quinte das Frequenzverhältnis  $\sqrt[12]{2^7} \approx 1,4983$ . Alle Quinten sind nun um ein Zwölftel des

<sup>63</sup> Vgl. Amon 2005, S. 260

<sup>64</sup> Ebenda, S. 260 und Vogel 1976, S. 279

<sup>65</sup> Amon 2005, S. 260

pythagoreischen Kommas tiefer gestimmt, um ein exaktes Schließen des Quintenzirkels zu ermöglichen.

Die Berechnung der Tonleiter erfolgt auf ähnliche Weise wie bei der mitteltönigen Stimmung, nur wird die Quinte im Frequenzverhältnis  $\sqrt[12]{2^7}$  gestimmt. Somit sind Prime (c), Quinte (g) und Oktave (c<sup>1</sup>) mit den Frequenzverhältnissen 1,  $\sqrt[12]{2^7}$  und 2 gestimmt.

Zuerst wird c um zwei Quinten erhöht und anschließend um eine Oktave reduziert, um das Frequenzverhältnis zu d zu erhalten:

$$d = c \cdot \sqrt[12]{2^7} \cdot \sqrt[12]{2^7} : 2 = \sqrt[12]{2^2}$$

Die Quarte (f) wird durch eine Erhöhung um eine Oktave und eine Verminderung um eine Quinte berechnet:

$$f = c \cdot 2 : \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{2^5}$$

Die Terz (e) wird berechnet, indem d um die Sekunde (d) erhöht wird:

$$e = d \cdot \sqrt[12]{2^2} = \sqrt[12]{2^4}$$

Abschließend muss d um eine Quinte erhöht werden, um a zu erhalten und zur Berechnung von h muss e um eine Quinte erhöht werden:

$$a = d \cdot \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{2^9}$$

$$h = e \cdot \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{2^{11}}$$

Somit ergibt sich die Tonleiter der gleichschwebenden Temperatur durch die folgenden Verhältnisse:

| <b>Tonbezeichnung</b>                                         | c | d                | e                | f                | g                | a                | h                   | c <sup>1</sup> |
|---------------------------------------------------------------|---|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|---------------------|----------------|
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf c</b>                       | 1 | $\sqrt[12]{2^2}$ | $\sqrt[12]{2^4}$ | $\sqrt[12]{2^5}$ | $\sqrt[12]{2^7}$ | $\sqrt[12]{2^9}$ | $\sqrt[12]{2^{11}}$ | 2              |
| <b>Frequenzverhältnis bezogen auf den tieferen Nachbarton</b> | - | $\sqrt[12]{2^2}$ | $\sqrt[12]{2^2}$ | $\sqrt[12]{2}$   | $\sqrt[12]{2^2}$ | $\sqrt[12]{2^2}$ | $\sqrt[12]{2^2}$    | $\sqrt[12]{2}$ |

Tabelle 2.5.: Skala der gleichschwebenden Stimmung

Es wird ersichtlich, dass abgesehen von Prime und Oktave kein Intervall wirklich rein ist, die Differenzen sind allerdings so gering, dass sie vom Ohr „zurecht gehört“ werden.<sup>66</sup> Die gleichstufige Stimmung hat auch den Vorteil, dass eine Oktave aus zwölf gleichgroßen Halbtonschritten besteht. Somit ist bei dieser Stimmung auch das Problem beseitigt, dass zwei Halbtöne keinen Ganzton ergeben. Da innerhalb der Tonart die gleichen Intervallverhältnisse bestehen, kann ein Transponieren in andere Tonarten völlig problemlos stattfinden. So bestehen beispielsweise alle kleinen Terzen aus drei und alle großen Terzen aus vier Halbtonschritten. Wie an diesem Beispiel ersichtlich wird, hat sich ein neues System von Intervallen eingebürgert: Die Intervalle Sekunde, Terz, Sexte und Septime kommen jeweils in zwei Typen – als großes oder kleines Intervall – vor. Der Unterschied beträgt einen Halbtonschritt. Zusätzlich können Intervalle vermindert oder übermäßig sein, was ebenfalls eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung um einen Halbtonschritt bedeutet. Primen, Quarten, Quinten und Oktaven, die weder übermäßig noch vermindert sind, werden als „rein“ bezeichnet, wobei mit dieser Ausdrucksweise keine Beziehung zur reinen Stimmung hergestellt werden soll. In der folgenden Tabelle werden alle Intervalle mit ihren zugehörigen Halbtonschritten aufgelistet. Die in Klammer stehenden Intervallbezeichnungen werden in der Praxis für gewöhnlich nicht verwendet.

| <b>Intervallbezeichnung</b>          | <b>Halbtonschritte</b> |
|--------------------------------------|------------------------|
| reine Prime                          | 0                      |
| übermäßige Prime/kleine Sekunde      | 1                      |
| große Sekunde                        | 2                      |
| kleine Terz                          | 3                      |
| große Terz (verminderte Quarte)      | 4                      |
| reine Quarte                         | 5                      |
| übermäßige Quarte/verminderte Quinte | 6                      |
| reine Quinte                         | 7                      |
| kleine Sexte (übermäßige Quinte)     | 8                      |
| große Sexte                          | 9                      |
| kleine Septime                       | 10                     |
| große Septime                        | 11                     |
| reine Oktave                         | 12                     |

Tabelle 2.6.: Intervalltabelle

---

<sup>66</sup> Vgl. Amon 2005, S. 261

Das gleichstufig temperierte Tonsystem besteht aus insgesamt 35 Tonwerten, die sich aus sieben Stammtönen, die jeweils hochalteriert (is-Werte), tiefalteriert (es-Werte) und jeweils doppelt hoch- und tiefalteriert (isis- und eses-Werte) sind, ergeben.<sup>67</sup> Da eine Oktav aber auf zwölf Halbtöne beschränkt ist, ist es offensichtlich, dass viele der Tonwerte zusammenfallen, sprich die selben Plätze im Tonraum einnehmen müssen. Eine Schlüsselrolle nimmt hierbei die Enharmonik ein. Unter Enharmonik versteht man ebendieses Phänomen, dass viele Töne mit dem gleichen Klang unterschiedliche Namen tragen. Am anschaulichsten kann dies am Klavier dargestellt werden.

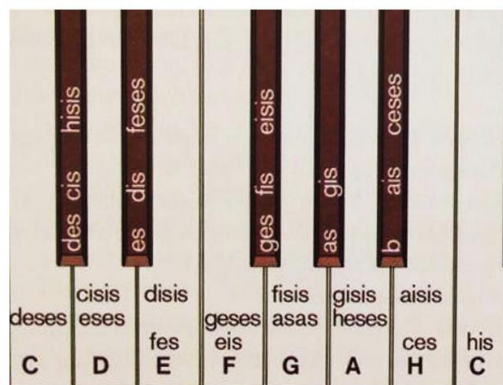


Abbildung 2.6.: Namen der Noten am Klavier

Obwohl sich die gleichstufige Stimmung mit ihren irrationalen Frequenzverhältnissen als sehr praxistauglich erwies und heute viele Instrumente mit festen Tonhöhen (beispielsweise Klavier und Gitarre) gleichstufig gestimmt werden, betonen doch einige Musiktheoretiker immer wieder die Nachteile dieser Stimmung. So wird häufig kritisiert, dass durch die gleichmäßigen zwölf Halbtonschritte die Tonartencharakteristik verloren gehen würde. Vogel ging noch einen Schritt weiter und behauptete, dass es in der Praxis nicht möglich sei, gleichschwebend zu stimmen, da selbst die besten Klavierstimmer die gleichstufige Temperatur nach dem Gehör nicht exakt legen könnten. Aus diesem Grund sei die gleichstufige Temperatur, abgesehen von ihrer Anwendung bei elektronischen Musikinstrumenten, nur eine theoretische Fiktion.<sup>68</sup>

<sup>67</sup> Amon 2005, S. 124

<sup>68</sup> Vogel 1976, S. 277

## 2.5. Vergleich der Stimmungssysteme

Das Hinzufügen eines Intervalls entspricht der Multiplikation der Frequenzverhältnisse. So entspricht beispielsweise das Intervall einer Oktave dem Frequenzverhältnis 2:1, ein Intervall von zwei Oktaven dem Frequenzverhältnis 4:1 und ein Intervall von 3 Oktaven dem Frequenzverhältnis 8:1. Unsere Wahrnehmung von musikalischer Instanz zwischen zwei Noten ist also logarithmisch in der Frequenz, da Logarithmen Produkte in Summen umwandeln.<sup>69</sup>

Um einen Vergleich zwischen den verschiedenen musikalischen Stimmungen zu ermöglichen, führte Alexander Ellis um das Jahr 1875 die Cent-Skala ein. Laut dieser Skala ist eine Oktave in 1200 Cent eingeteilt, wobei ein Cent gleich  $^{1200}\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{1200}} = 1,0005778$  ist. Diese Rechnung ist in der Tatsache begründet, dass eine Oktave in 1200 Teile, die miteinander multipliziert wieder 2 ergeben sollen, zerlegt wird. Da seit der Einführung von temperierten Stimmungen die Oktave in zwölf Halbtonschritte eingeteilt ist, entsprechen demnach 100 Cent einem Halbtonschritt und 200 Cent folglich einem Ganztonschritt. Ein Cent entspricht also einem Hundertstel eines Halbtons.

Die Frequenzänderung bei einer in Hertz nicht darstellbaren Tonhöhenänderung um einen Cent beträgt 0,06%.<sup>70</sup> Unterscheiden sich also Töne nur durch wenige Centwerte, dann ist die Differenz so gering, dass das menschliche Ohr keinen Unterschied wahrnehmen kann. Ein geübter Hörer kann Töne mit einem Unterschied von vier bis acht Cent unterscheiden, abhängig ist dies von Frequenz, Dauer und Lautstärke der Töne.<sup>71</sup>

### Definition 2.1. (Cent-Skala)

*Sei das Frequenzverhältnis zweier Töne in einem Intervall gegeben mit  $f_1:f_2$ , dann ist die Größe  $c$  (in Cent) des Intervalls definiert durch*

$$c = \frac{1200}{\log_{10} 2} \cdot \log_{10} \left( \frac{f_1}{f_2} \right) \quad \text{bzw.}$$

$$c = 1200 \cdot \log_2 \left( \frac{f_1}{f_2} \right).^{72}$$

---

<sup>69</sup> Vgl. Benson 2007, S. 165 f.

<sup>70</sup> Eimert/Humpert 1973, S. 47

<sup>71</sup> Roberts 2016, S. 138

<sup>72</sup> Vgl. Ebeling 1999, S. 41

**Beispiel 2.1. (Quarte)**

Bei der natürlich-harmonischen Skala ist das Frequenzverhältnis des Intervalls c-f gegeben mit 4:3. Das entspricht also

$$\frac{1200}{\log_{10} 2} \cdot \log_{10} \left( \frac{4}{3} \right) = 498,0450 \text{ Cent.}$$

**Beispiel 2.2. (Pythagoreisches Komma)**

Als pythagoreisches Komma wird der Unterschied zwischen zwölf Quinten und sieben Oktaven bezeichnet. Folglich ist das pythagoreische Komma mit  $\frac{1200}{\log_{10} 2} \cdot \log_{10} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{12} : 2^7 \right) = 23,46 \text{ Cent}$  gegeben (entspricht etwa einem Achtelton (25 Cent)).

Eine Umrechnung von Cent ( $c$ ) in ein Frequenzverhältnis ( $f_1 : f_2$ ) kann mit Hilfe der folgenden Formel erfolgen:

$$\frac{f_1}{f_2} = 10^{\left( \frac{c}{1200/\log_{10} 2} \right)}.$$

**Beispiel 2.3. (Quinte)**

Eine Quinte mit 701,96 Cent entspricht demnach einem Frequenzverhältnis von 3:2, weil  $10^{\left( \frac{701,96}{1200/\log_{10} 2} \right)} = 1,5 = \frac{3}{2}$  gilt.

In der Tabelle 2.6 werden die fünf vorgestellten Stimmungssysteme mit Hilfe der Cent-Skala verglichen. In der jeweils ersten Spalte (grün) wird das Frequenzverhältnis ausgedrückt und in der zweiten Spalte (orange) sind die zugehörigen Cent-Werte zu sehen. Bei der mitteltönigen Stimmung sind die Dezimalzahlen auf die vierte Nachkommastelle und alle Cent-Werte auf ganze Zahlen gerundet. Die Cent-Werte beziehen sich auf die Intervalle ausgehend vom Grundton c. Aus diesem Grund hat die Prime (c-c) immer den Cent-Wert 0 und die gesamte Oktave (c-c') immer 1200 Cent.

Beim Betrachten der Tabelle fällt auf, dass die Cent-Werte bis auf den ersten und letzten Wert immer variieren. Ein besonders interessantes Beispiel stellt die Terz dar. Die pythagoreische Terz weicht um 22 Cent von der reinen Terz ab. Es überrascht also nicht, dass die reine Terz,

die auf der Obertonreihe basiert, wesentlich konsonanter klingt als die pythagoreische Terz. Die Abweichung entspricht schließlich beinahe einem Achtelton. In der heute gebräuchlichen Stimmung entspricht die Terz 400 Cent und liegt somit zwischen den Werten der pythagoreischen und reinen Stimmung.

|    | <i>Pythagoreisch</i> |      | <i>rein</i>    |      | <i>mitteltönig</i> |      | <i>ungleich-schwebend</i> |      | <i>gleichstufig</i> |      |
|----|----------------------|------|----------------|------|--------------------|------|---------------------------|------|---------------------|------|
|    | FV                   | C    | FV             | C    | FV                 | C    | FV                        | C    | FV                  | C    |
| c  | 1                    | 0    | 1              | 0    | 1                  | 0    | 1                         | 0    | 1                   | 0    |
| d  | $\frac{9}{8}$        | 204  | $\frac{9}{8}$  | 204  | 1,1180             | 193  | $\frac{9}{8}$             | 204  | $\sqrt[12]{2^2}$    | 200  |
| e  | $\frac{81}{64}$      | 408  | $\frac{5}{4}$  | 386  | $\frac{5}{4}$      | 386  | $\frac{5}{4}$             | 386  | $\sqrt[12]{2^4}$    | 400  |
| f  | $\frac{4}{3}$        | 498  | $\frac{4}{3}$  | 498  | 1,3375             | 503  | $\frac{4}{3}$             | 498  | $\sqrt[12]{2^5}$    | 500  |
| g  | $\frac{3}{2}$        | 702  | $\frac{3}{2}$  | 702  | 1,4953             | 697  | $\frac{3}{2}$             | 702  | $\sqrt[12]{2^7}$    | 700  |
| a  | $\frac{27}{16}$      | 906  | $\frac{5}{3}$  | 884  | 1,6719             | 890  | $\frac{161}{96}$          | 895  | $\sqrt[12]{2^9}$    | 900  |
| h  | $\frac{243}{128}$    | 1110 | $\frac{15}{8}$ | 1088 | 1,8692             | 1083 | $\frac{15}{8}$            | 1088 | $\sqrt[12]{2^{11}}$ | 1100 |
| c' | 2                    | 1200 | 2              | 1200 | 2                  | 1200 | 2                         | 1200 | 2                   | 1200 |

Tabelle 2.7.: Vergleich der behandelten Stimmungssysteme

## 2.6. Die Bedeutung von Mittelwerten

Mittelwerte nehmen in der Musik und besonders bei musikalischen Stimmungssystemen eine wichtige Rolle ein. Auf ebendiesen Zusammenhang zwischen den musikalischen Stimmungen und dem arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel wird im Folgenden genauer eingegangen.

**Definition 2.2.** (arithmetisches Mittel)

Seien die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gegeben und sei  $n$  die Anzahl dieser Zahlen. Dann ist das arithmetische Mittel definiert durch

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i.$$

**Definition 2.3.** (geometrisches Mittel)

Seien die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gegeben und sei  $n$  die Anzahl dieser Zahlen. Dann ist das geometrische Mittel definiert durch

$$m = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

**Definition 2.4.** (harmonisches Mittel)

Seien die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gegeben und sei  $n$  die Anzahl dieser Zahlen. Dann ist das harmonische Mittel definiert durch

$$m = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Bereits die Pythagoreer erkannten beim Aufstellen der pythagoreischen Stimmung den Zusammenhang zwischen Mittelwerten und der Musik. Eine besondere Bedeutung bei dieser Stimmung nahmen die Tetraktys 6:8:9:12 ein. Beim Betrachten der Intervalle Oktave  $\left(\frac{2}{1} = \frac{12}{6}\right)$ , Quarte  $\left(\frac{4}{3} = \frac{8}{6}\right)$  und Quinte  $\left(\frac{3}{2} = \frac{9}{6}\right)$  wird ersichtlich, dass ihre Frequenzverhältnisse aus den Zahlen 6, 8, 9 und 12 bestehen. Die Zahl 9 ist das arithmetische Mittel der Zahlen 6 und 12, die Zahl 8 ist das harmonische Mittel dieser Zahlen.<sup>73</sup> Das arithmetische Mittel (9) teilt die Oktave  $\left(\frac{2}{1} = \frac{12}{6}\right)$  in Quarte  $\left(\frac{12}{9} = \frac{4}{3}\right)$  und Quinte  $\left(\frac{9}{6} = \frac{3}{2}\right)$  und das harmonische Mittel (8) teilt sie in Quinte  $\left(\frac{12}{8} = \frac{3}{2}\right)$  und Quarte  $\left(\frac{8}{6} = \frac{4}{3}\right)$ . Der Ganzton  $\left(\frac{9}{8}\right)$  ergibt sich aus einem Vergleich des arithmetischen Mittels mit dem harmonischen Mittelwert.<sup>74</sup>

Bei der natürlich-harmonischen Stimmung lassen sich ebenfalls viele Verknüpfungen zu den Mittelwerten erkennen. So ergibt beispielsweise das arithmetische Mittel der Intervallverhältnisse von Prime  $\left(\frac{1}{1}\right)$  und Oktave  $\left(\frac{2}{1}\right)$  eine Quinte:

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{2}{1}}{2} = \frac{3}{2}.$$

<sup>73</sup> Vgl. Posch 2013, S. 52

<sup>74</sup> Münxelhaus 1976, S. 84

Ihr harmonisches Mittel ergibt eine Quarte:

$$\frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Die Terz ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel von Prime und Quinte  $\left(\frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}\right)$  und die

Sekunde aus dem arithmetischen Mittel von Prime und Terz  $\left(\frac{1+\frac{5}{4}}{2} = \frac{9}{8}\right)$ .

Das geometrische Mittel ist vor allem bei der Mitteltontemperatur von Bedeutung. Um das syntonische Komma und zwei verschieden große Ganztöne zu vermeiden, wurde die Sekunde so gestimmt, dass sie genau dem harmonischen Mittel der beiden Ganztöne entspricht. Der große Halbton entsprach bei der natürlich-harmonischen Stimmung dem Frequenzverhältnis  $\frac{9}{8}$  und der kleine Halbton entsprach  $\frac{10}{9}$ . Die Sekunde wurde als geometrisches Mittel dieser Proportionen festgelegt  $\left(\sqrt{\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ . Die Terz wurde auf diese Weise in zwei gleich große Ganztöne geteilt.<sup>75</sup>

## 2.7. Konsonanz und Dissonanz

Wie bereits in Kapitel 1.3. angesprochen wurde, sind Obertöne unter anderem für ein angenehmes bzw. unangenehmes Zusammenklingen von Tönen verantwortlich. Angenehme Töne werden als konsonant, unangenehme Töne als dissonant bezeichnet. Doch welche Rolle spielen die Obertöne genau und was für eine Bedeutung haben Konsonanzen und Dissonanzen für die Entwicklung von Stimmungssystemen?

Bereits die Pythagoreer haben erkannt, dass Töne angenehmer zusammenklingen, wenn ihre Frequenzen im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen zueinanderstehen. Den Pythagoreern waren nur sechs konsonante Intervalle bekannt: Die Oktave  $\left(\frac{2}{1}\right)$ , die Quinte  $\left(\frac{3}{2}\right)$ , die Quarte  $\left(\frac{4}{3}\right)$ , Oktave plus Quinte  $\left(\frac{3}{1}\right)$ , Oktave plus Quarte  $\left(\frac{8}{3}\right)$  und die Doppeloktave  $\left(\frac{4}{1}\right)$ . Terz  $\left(\frac{81}{64}\right)$  und Sext

---

<sup>75</sup> Vogel 1976, S. 273

$\left(\frac{27}{16}\right)$  galten als dissonant und wurden in den anschließend entwickelten musikalischen Stimmungen verbessert.<sup>76</sup>

Während die Pythagoreer Konsonanzen über das Verhältnis der Frequenzen definierten, entwickelte Helmholtz im 19. Jahrhundert einen anderen Ansatz für das Auftreten des Phänomens von Konsonanzen und Dissonanzen. Helmholtz versuchte Konsonanzen und Dissonanzen über Schwebungen (siehe Kapitel 1.4.2.) zu definieren. Für ihn waren Intervalle dann konsonant, wenn zwischen ihren Partialtönen keine oder möglichst wenige Schwebungen auftreten. Dissonanz ergäbe sich demnach umgekehrt daraus, dass die Frequenzen einiger Partialtöne sehr dicht beieinanderliegen und Schwebungen entstehen lassen.<sup>77</sup> Plomp und Levelt fanden bei ihren Forschungen jedoch heraus, dass es sich bei der Wahrnehmung von Konsonanzen und Dissonanzen um einen weitaus komplizierteren Prozess handelt, der nicht so einfach dargelegt werden kann.

Wird ein Ton gespielt, erklingen zusätzlich zur Grundfrequenz noch die Oberschwingen, deren Frequenzen die ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz sind. Wird also beispielsweise der Ton a mit 220 Hz gespielt, klingen auch noch Obertöne mit den Frequenzen 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz, 1320 Hz, ... mit. Der Ton a<sup>1</sup> (mit 440 Hz) liegt eine Oktave über dem Ton a und werden die beiden Töne gespielt, klingen sie angenehm zusammen. Der Grund ist in den Oberschwingungen zu finden: Die Obertöne von a<sup>1</sup> erklingen mit den Frequenzen von 880 Hz, 1320 Hz, 1760 Hz, ... und stimmen damit in allen Obertönen mit jenen von a überein. Wird statt dem Ton a<sup>1</sup> ein Ton mit 435 Hz und den Obertönen 870 Hz, 1305 Hz, 1740 Hz, ... gespielt, verursacht dies ein dissonantes Zusammenklingen der Töne. Je mehr Obertöne also exakt übereinstimmen, desto angenehmer ist das Zusammenklingen der Töne für unser Gehör.

Halb- und Ganztonintervalle, übermäßige Quarte und Septime enthalten jeweils sehr viele Partialtöne, deren Frequenzen um weniger als eine Viertel Oktave abweichen, weswegen diese Intervalle rau und dissonant klingen. Bei anderen Intervallen (kleine und große Terz, Quarte, Quinte und Sexte) lässt sich feststellen, dass viele Partialtöne zusammenfallen und einige immer mehr oder weniger weit getrennt sind.<sup>78</sup>

---

<sup>76</sup> Benson 2007, S. 148

<sup>77</sup> Pierce, S. 65

<sup>78</sup> Ebenda, S. 70

Betrachten wir das Verhalten der Partialtöne am Beispiel der Quinte. Das Frequenzverhältnis einer reinen Quinte ist mit  $\frac{3}{2}$  gegeben. Wenn zwei Töne in diesem Frequenzverhältnis gespielt werden, dann stimmt der dritte Partialton der tieferen Note mit dem zweiten Partialton der höheren Note überein und die Töne haben folglich einige höhere Obertöne gemeinsam. Weicht das Verhältnis aber etwas von  $\frac{3}{2}$  ab, dann klingen der dritte Partialton der tieferen und der zweite Partialton der höheren Note eher hart zusammen und die beiden Töne werden als dissonant wahrgenommen.<sup>79</sup>

Über die Jahrhunderte wurden zahlreiche Stimmungssysteme entwickelt und immer wieder Verbesserungen bereits bestehender Systeme vorgenommen, um ein ausgeglichenes Verhältnis zwischen den Tonabständen zu schaffen und so Dissonanzen, wenn möglich, zu vermeiden. Aus diesem Grund kann gesagt werden, dass Konsonanzen und Dissonanzen ein entscheidendes Kriterium bei der Entwicklung von Stimmungssystemen darstellen.

---

<sup>79</sup> Vgl. Benson 2007, S. 146

### 3. Tonsysteme, Tonarten und Tonleitern

Für das Zusammenspielen mehrerer Instrumente ist die Entwicklung eines einheitlichen Stimmungssystems notwendig. Dieses legt die Frequenzen der Tonhöhen anhand einer Normfrequenz fest. Auf diese Weise erhält jeder Ton eine bestimmte Frequenz und die musikalischen Intervalle sind anhand der Verhältnisse der Frequenzen genau definiert. Der Tonvorrat, also alle Töne, die bei Kompositionen theoretisch verwendet werden können, ist unbegrenzt. Musiker arbeiten beim Komponieren eines Stückes aber nie mit dem gesamten Tonraum, sondern nutzen nur eine begrenzte Anzahl von Tönen. Diese Auswahl von Tönen und Intervallen, die zueinander in Beziehung stehen, wird als *Tonsystem* bezeichnet.<sup>80</sup>

Im Laufe der Geschichte hat es diverse Tonsysteme gegeben, von denen einige in diesem Kapitel vorgestellt werden. Für eine nähere Betrachtung von Tonsystemen bedarf es aber zuvor noch einer genaueren Definition der Begriffe „Tonart“ und „Tonleiter“. Diese beiden Begriffe sind eng mit dem Tonsystem verbunden, weswegen eine genaue Abgrenzung für das Verständnis der anschließenden Ausführungen essentiell ist.

Bei der Wahl der Tonart wählt der Musiker aus dem bereits verkleinerten Bereich des Tonsystems jene Töne aus, die er für seine Komposition einzusetzen gedenkt. Die Tonart kann demnach als ein Ausschnitt des Tonsystems und dieses wiederum als ein Ausschnitt des Gesamtsystems interpretiert werden.<sup>81</sup> Die Tonart ist durch den Grundton, der auch den Namen der jeweiligen Tonart bestimmt, definiert. Den zweiten Bezugspunkt bei der Bestimmung der Tonart stellt die Feststellung des Tongeschlechts dar. Das Tongeschlecht bezieht sich auf die Zuordnung von Tonarten, Tonleitern, Akkorden und ganzen Musikstücken zu Dur oder Moll, von denen es jeweils zwölf Tonarten gibt.

Jene Töne, die in der Tonart innerhalb der Oktav ausgewählt werden, sind nach bestimmten Reihungskriterien angeordnet – als Tonleiter (auch: Tonskala). Eine Tonleiter ist als eine Folge von Tonschritten, die der Tonhöhe nach geordnet sind, definiert.<sup>82</sup> Tonleitern sind demnach durch die Abstände zwischen den einzelnen Noten, die sogenannten Tonstufen, bestimmt.

---

<sup>80</sup> Vgl. Vogel 1975, S. 156

<sup>81</sup> Vgl. ebenda, S. 156

<sup>82</sup> Amon 2011, S. 391

Kommen wir nach der Klärung der Begriffe „Tonart“ und „Tonleiter“ nochmals auf den Begriff des Tonsystems zurück. Wie durch die obigen Ausführungen ersichtlich wurde, setzt sich ein Tonsystem aus der Tonart und ihrer jeweiligen Tonleiter zusammen. Das Festlegen der Tonhöhen durch ein Stimmungssystem ist natürlich die Grundvoraussetzung für den Aufbau eines Tonsystems. Es kann also gesagt werden, dass ein Tonsystem durch die Anzahl der Tonstufen innerhalb der Oktave und die Stimmung der einzelnen Intervalle bestimmt ist.<sup>83</sup>

Im Folgenden können nicht alle Tonsysteme vorgestellt werden, da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Aus diesem Grund beschränken sich die Ausführungen auf die in der Musik bekanntesten Tonsysteme.

### **3.1. Pentatonik**

Das Wort „Pentatonik“ kommt vom Griechischen „penta“ für „fünf“, weshalb die Penatonik auch oft als Fünftonmusik bezeichnet wird. Die Pentatonik zeichnet sich daher, wie der Name schon verrät, durch fünf Noten und fünf Notenabstände aus. Sie zählt zu den ältesten Tonsystemen und ist teilweise auch noch heute in einigen asiatischen Ländern in Verwendung. Es wird zwischen hemitonischer und anhemitonischer Pentatonik unterschieden, wobei die anhemitonische Pentatonik die bekanntere Form darstellt. Während die Tonleiter der hemitonischen Pentatonik unter anderem aus Halbtonschritten besteht, setzt sich die Tonleiter, der anhemitonischen Pentatonik ausschließlich aus Ganztonschritten zusammen. Das bedeutet, dass in der anhemitonischen Pentatonik keine kleinen Sekunden und damit die Intervalle e-f und h-c nicht vorkommen.

Da die hemitonische Pentatonik wie bereits erwähnt in der Musik weit unbedeutender ist, wird sie an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt. Die folgenden Ausführungen beziehen sich deshalb ausschließlich auf die anhemitonische Pentatonik. Diese besteht aus drei großen Sekunden (zwei Halbtonschritte) und zwei kleinen Terzen (drei Halbtonschritte).

Es gibt mehrere Ansätze für die Entstehung der Pentatonik, die einfachste Entwicklungsmöglichkeit stellt jedoch die Folge von Quinten und die Reduzierung auf eine Oktave dar. So besteht die pentatonische Tonleiter aus fünf Tönen der Quintfolge c-g-d-a-e.<sup>84</sup>

---

<sup>83</sup> Vgl. Amon 2005, S. 294

<sup>84</sup> Reimer 2011, S. 34

Da jeder dieser Töne als Ausgangsbasis der Tonleiter verwendet werden kann, gibt es fünf verschiedene Möglichkeiten, einen Ton als Stammtone festzulegen. Diese fünf verschiedenen Tonleitern werden als Modi bezeichnet. Da unser heutiges chromatisches Tonsystem aus zwölf Halbtonschritten besteht, können die fünf Modi jeweils auf zwölf chromatische Tonstufen transponiert werden.<sup>85</sup>

In der folgenden Abbildung werden links zunächst die fünf verschiedenen Modi, bei denen jeweils ein anderer Ton der pentatonischen Tonfolge c-g-d-a-e als Bezugston verwendet wird, abgebildet. Durch Transponieren (tonhöhenversetztes, intervallgetreues Wiederholen einer Melodie oder eines Abschnitts auf einer anderen Tonstufe derselben Tonart oder in einer anderen Tonart<sup>86</sup>) auf den Ton c entstehen die fünf pentatonischen Modi, die rechts davon dargestellt werden. Abschließend werden ganz rechts die Intervallabstände in der Form von Ganztonabständen ( $1 = \text{Ganzton}$ ,  $1\frac{1}{2} = \text{ein Ganzton und ein Halbton}$ ) veranschaulicht.

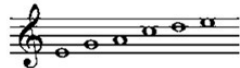
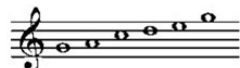
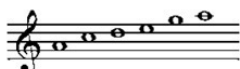
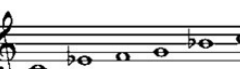
|                            |                                                                                     |   |                                                                                      |                                           |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| <i>Durpentatonik</i>       |   | → |   | $1 - 1 - 1\frac{1}{2} - 1 - 1\frac{1}{2}$ |
| <i>neutrale Pentatonik</i> |  | → |  | $1 - 1\frac{1}{2} - 1 - 1\frac{1}{2} - 1$ |
| <i>Mollpentatonik</i>      |  | → |  | $1\frac{1}{2} - 1 - 1\frac{1}{2} - 1 - 1$ |
| <i>neutrale Pentatonik</i> |  | → |  | $1 - 1\frac{1}{2} - 1 - 1 - 1\frac{1}{2}$ |
| <i>Mollpentatonik</i>      |  | → |  | $1\frac{1}{2} - 1 - 1 - 1\frac{1}{2} - 1$ |

Abbildung 3.1.: pentatonische Modi

Beim Betrachten der in der rechten Spalte dargestellten Intervallabstände wird ersichtlich, dass die Abstände einem bestimmten Muster folgen: Die Zahlenfolge bleibt im Prinzip dieselbe, nur wird die erste Zahl der vorherigen Folge ausgelassen und stattdessen am Ende der aktuellen Folge angefügt.

<sup>85</sup> Vgl. Amon 2005, S. 296

<sup>86</sup> Amon 2011, S. 395

Die Begriffe „Dur“ und „Moll“ sind im Zusammenhang mit der Pentatonik etwas verwirrend, da es sich im Grunde bei der Pentatonik um ein geschlechtsloses Tonsystem handelt.<sup>87</sup> Aus diesem Grund stellen die beiden Begriffe in Bezug auf die Pentatonik lediglich eine Orientierungshilfe dar.

## 3.2. Hexatonik

Die Hexatonik wird auch als Ganztonleiter bezeichnet. Sie setzt sich aus sechs temperierten Ganztönen zusammen und besitzt, wie der Name schon andeutet, keine Halbtöne. Damit besteht die Ganztonleiter ausschließlich aus großen Sekunden. Da der Tonvorrat auf zwölf Töne begrenzt ist, gibt es insgesamt nur zwei Ganztonleitern: Die erste Tonleiter ausgehend von c und die zweite Tonleiter um einen Halbton nach oben bzw. unten transponiert.



Abbildung 3.2.: Ganztonleitern

Die obigen Ganztonleitern können natürlich noch transponiert, also beispielsweise um einen Ganzton hinauf- oder hinunterversetzt, werden. Die durch diesen Prozess entstehenden Tonleitern werden allerdings dieselben Noten wie die beiden dargestellten Tonleitern aufweisen. Bei der Ganztonleiter gibt es, im Gegensatz zur Pentatonik, keinen Grundton, weswegen in diesem Tonsystem komponierte Stücke oft als schwebend oder exotisch beschrieben werden.<sup>88</sup> Obwohl die Intervallstruktur der Ganztonleiter von Symmetrie und Einheitlichkeit geprägt ist, entsteht, bedingt durch das Fehlen der Hälfte der Noten in der uns vertrauten chromatischen Tonleiter, kein ansprechender Klang. Dieser Umstand könnte auch als Grund dafür angesehen werden, dass sich die Hexatonik gegen die anderen Tonsysteme nicht durchsetzen konnte. Dennoch wurde sie seit ihrem Aufkommen im 19. Jahrhundert von einigen bekannten

---

<sup>87</sup> Vgl. Moser 1968, S. 84

<sup>88</sup> Vgl. Thüringer 1930, S. 6

Komponisten, unter anderem von Michail Glinka, Modest Mussorgski, Claude Debussy und Giacomo Puccini, verwendet.<sup>89</sup>

### 3.3. Heptatonik

Bei der Heptatonik (von griech. hepta „sieben“) handelt es sich um ein Tonsystem mit sieben Tonabständen. Sie entwickelte sich aus der anhemitonischen Pentatonik durch Erweiterung der fünfstufigen Quintkette auf sieben Töne. Da der fünftönige Ausschnitt der Quintfolge Pentatonik genannt wurde, wird bei der auf sieben Töne erweiterten Quintkette von Heptatonik gesprochen.

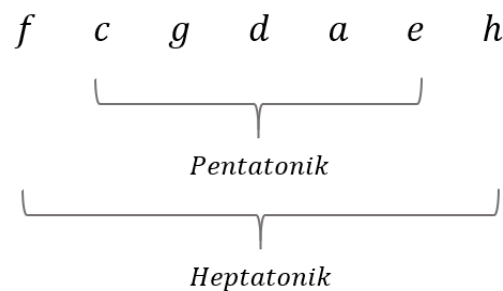


Abbildung 3.3.: Erweiterung der Pentatonik zur Heptatonik

Das Prinzip der siebenstufigen Leitern entspricht dem Bestreben, den Oktavraum mit gleichen, möglichst verschmelzungsfähigen Intervallen auszufüllen.<sup>90</sup> Alle heptatonischen Tonleitern, die aus Ganz- und Halbtonschritten bestehen, werden als diatonisch bezeichnet. Genauer gesagt bezeichnen jene Tonleitern, die zur Diatonik zählen, den Wechsel zwischen fünf Ganz- und zwei Halbtönen.<sup>91</sup> Zur Diatonik gehören die Kirchentonarten und die aus ihnen hervorgegangenen Tongeschlechter Dur und Moll. Je nachdem, wie sich die Ganz- und Halbtonschritte innerhalb der Tonleiter verteilen, wird zwischen den Tongeschlechtern unterschieden.

<sup>89</sup> Vgl. Reimer 2011, S. 34

<sup>90</sup> Amon 2005, S. 298

<sup>91</sup> Vgl. ebenda, S. 299

### 3.3.1. Kirchentonarten

Bei den Kirchentonarten handelt es sich um ein sehr altes Tonsystem, das bereits im Altertum von den Griechen verwendet wurde und später im Mittelalter zum bestimmenden Tonsystem in der Musik wurde. Zunächst wurde nur zwischen acht Modi unterschieden, später kamen noch vier weitere dazu. Zu Beginn gab es die vier authentischen Modi dorisch, phrygisch, lydisch und mixolydisch, die sich vor allem durch die Lage der Halbtöne voneinander unterschieden, und die vier plagalen Modi hypodorisch, hypophrygisch, hypolydisch und hypomixolydisch. Im 16. Jahrhundert fügte Glareanus noch die zwei authentischen Modi ionisch und äolisch und die zwei plagalen Modi hypoionisch und hypoäolisch hinzu und erweiterte so die Anzahl der Kirchentonarten auf insgesamt zwölf.<sup>92</sup>

Aus den beiden Kirchentonarten ionisch und äolisch entwickelten sich später die Tongeschlechter Dur und Moll. In Bezug auf die anderen Tongeschlechter lassen sich aber ebenfalls einige Parallelen zu Dur und Moll erkennen. So wird beispielsweise den lydischen und mixolydischen Kirchentonarten ein Durcharakter und den dorischen und phrygischen Kirchentonarten ein Mollcharakter zugeschrieben.<sup>93</sup>

Eine Klassifizierung der Kirchentonarten erfolgt aufgrund der Eigenschaften von Ambitus, Tenor und Finalis. Ambitus bezeichnet den Melodieumfang eines Modus, also den Abstand vom tiefsten bis zum höchsten Ton. Der Ambitus hat meist einen Umfang von einer Oktave, doch authentische Modi unterschreiten und plagale Modi überschreiten eine Oktave oft um einen Ton.<sup>94</sup> Die Finalis stellt den zentralen Bezugspunkt eines Modus dar. Während authentische Tonarten mit der Finalis enden (und manchmal auch beginnen) liegt die Finalis bei plagalen Tonarten auf dem vierten Ton. Der Tenor stellt den tragenden Ton der Melodie dar. Dieser Ton wurde entweder durch häufiges Wiederholen oder durch Kreisen der Melodie um diesen Ton in den Vordergrund gerückt. Der Tenor liegt bei den authentischen Tonarten eine Quinte und bei den plagalen Tonarten eine Terz über der Finalis. Eine Ausnahme stellen an dieser Stelle der phrygische und der hypomixolydische Modus dar. Bei diesen beiden Tonarten wurde der Tenor h durch c ersetzt, da h auch in Form eines b vorkommen konnte und dieser Ton dadurch unsicher erschien.<sup>95</sup>

---

<sup>92</sup> Vgl. Moser 1968, S. 76

<sup>93</sup> Vgl. Amon 2005, S. 302

<sup>94</sup> Vgl. ebenda, S. 300

<sup>95</sup> Vgl. ebenda, S. 300 f.

In Tabelle 3.1. sind die Tonleitern der zwölf Modi abgebildet. Rechts davon werden die Tonabstände mit den Zahlen 1 (= Ganztonschritt) und  $\frac{1}{2}$  (= Halbtonschritt) veranschaulicht. Da ein Zusammenhang zwischen den Tonleitern nur bei einem Vergleich der Tonabstände authentischer Modi ersichtlich wird, wird auf eine Verschriftlichung der Abstände bei plagalen Modi verzichtet. In den restlichen vier Spalten werden zur besseren Verdeutlichung und zum Erkennen von Zusammenhängen die tiefsten (t.T.) und höchsten Töne (h.T.) der Tonleitern, Finalis (F) und Tenor (T) festgehalten.

Beim Betrachten der Tonabstände wird ersichtlich, dass eine Verbindung zwischen den einzelnen Abständen der authentischen Modi besteht. Die erste Zahl wird bei der neuen Folge immer übersprungen und am Ende angefügt. Der Übergang von äolisch zu ionisch stellt eine Ausnahme dar, da es noch eine weitere Kirchentonart gibt, die in der Auflistung in der Tabelle fehlt. Diese weitere Kirchentonart heißt lokrisch und zeichnet sich durch die Tonabstände  $\frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1$  aus. Die lokrische Kirchentonart ist allerdings ein theoretisches Konstrukt der Barockzeit und wird in der Praxis kaum verwendet. Aus diesem Grund wird der lokrische Modus an dieser Stelle auch nicht weiter ausgeführt.

Richten wir unsere Aufmerksamkeit nun auf die vier rechten Spalten der Tabelle. Es wird ersichtlich, dass bei authentischen Tonarten der tiefste Ton der Tonleiter und die Finalis übereinstimmen und außerdem jede authentische Tonleiter mit der nächst höheren Note ohne Vorzeichen beginnt. Letzteres Phänomen lässt sich ebenfalls bei den plagalen Kirchentonarten beobachten. Die lokrische Tonleiter beginnt mit dem Ton h und würde so die Stelle zwischen äolischer (Finalis auf dem Ton a) und ionischer Tonleiter (Finalis auf dem Ton c<sup>1</sup>) ausfüllen. Die Finalis einer plagalen Tonleiter stimmt mit der Finalis der entsprechenden authentischen Tonleitern überein. Sie entspricht bei diesen Tonleitern allerdings nicht der ersten sondern der vierten Note.

Sowohl authentische als auch plagale Tonleitern enden eine Oktave über dem ersten Ton. Der Tenor liegt, wie bereits erwähnt, bei authentischen Tonleitern eine Quinte und bei plagalen Tonleitern eine Terz über der Finalis. Bei einigen Tonleitern treten allerdings bei dieser Vorgehensweise Probleme auf und der Tenor muss um einen Halb- bzw. Ganzton versetzt werden.

| Skalentyp                    | Tonleiter | Tonabstände                                     | t.<br>T.              | F                     | T                                     | h.<br>T.              |
|------------------------------|-----------|-------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| <i>dorisch</i>               |           | $1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1$ | <i>d</i>              | <i>d</i>              | <i>a</i>                              | <i>d</i> <sup>1</sup> |
| <i>hypodorisch</i>           |           |                                                 | <i>A</i>              | <i>d</i>              | <i>f</i>                              | <i>a</i>              |
| <i>phrygisch</i>             |           | $\frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1$ | <i>e</i>              | <i>e</i>              | ( <i>h</i> )<br><i>c</i> <sup>1</sup> | <i>e</i> <sup>1</sup> |
| <i>hypophrygisch</i>         |           |                                                 | <i>H</i>              | <i>e</i>              | ( <i>g</i> )<br><i>a</i>              | <i>h</i>              |
| <i>lydisch</i>               |           | $1 - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2}$ | <i>f</i>              | <i>f</i>              | <i>c</i>                              | <i>f</i> <sup>1</sup> |
| <i>hypolydisch</i>           |           |                                                 | <i>c</i>              | <i>f</i>              | <i>a</i>                              | <i>c</i> <sup>1</sup> |
| <i>mixolydisch</i>           |           | $1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1$ | <i>g</i>              | <i>g</i>              | <i>d</i>                              | <i>g</i> <sup>1</sup> |
| <i>hypo-<br/>mixolydisch</i> |           |                                                 | <i>d</i>              | <i>g</i>              | ( <i>h</i> )<br><i>c</i>              | <i>d</i> <sup>1</sup> |
| <i>äolisch</i>               |           | $1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1$ | <i>a</i>              | <i>a</i>              | <i>e</i>                              | <i>a</i> <sup>1</sup> |
| <i>hypoäolisch</i>           |           |                                                 | <i>e</i>              | <i>a</i>              | <i>c</i>                              | <i>e</i> <sup>1</sup> |
| <i>ionisch</i>               |           | $1 - 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - \frac{1}{2}$ | <i>c</i> <sup>1</sup> | <i>c</i> <sup>1</sup> | <i>g</i> <sup>1</sup>                 | <i>c</i> <sup>2</sup> |
| <i>hypoionisch</i>           |           |                                                 | <i>g</i>              | <i>c</i> <sup>1</sup> | <i>e</i> <sup>1</sup>                 | <i>g</i> <sup>1</sup> |

Tabelle 3.1.: Kirchentonarten

Auffallend ist, dass in keiner Tonleiter ein Generalvorzeichen ( $\sharp/b$ ) vorkommt. Ein Transponieren ist zwar möglich, sofern die Intervallstrukturen eingehalten werden, wird in der Praxis jedoch kaum angewandt. Wenn beispielsweise aus Gründen der leichteren Singbarkeit eine Transposition vorgenommen wird, dann nur in die Oberquart mit konstantem  $b$ -Vorzeichen und in seltenen Fällen in die Oberquint.<sup>96</sup>

In der Praxis arbeiteten Komponisten vor allem mit den dorischen, phrygischen, mixolydischen, ionischen und äolischen Kirchentonarten. Aus den ionischen und äolischen Kirchentonarten entstanden die heute in der Musik gebräuchlichen Tongeschlechter Dur und Moll. Bis diese sich jedoch gegen die restlichen Kirchentonarten durchsetzen konnten, dauerte es einige Zeit.

### 3.3.2. Dur

Der Ursprung der Durskala ist, wie bereits erwähnt, in der ionischen Kirchentonart begründet. Zusammen mit der Mollskala bilden die beiden Tongeschlechter die Grundlage der durmolltonalen Musik. Unter der Dur-Moll-Tonalität wird die Gesamtheit aller Dur- und Molltonarten verstanden und ebendieses Tonsystem löste im 16. und 17. Jahrhundert die Kirchentonarten ab. Über das Wesen der Durskala gehen die Meinungen der Musiktheoretiker auseinander, unleugbar ist jedoch, dass ein enger Zusammenhang zwischen der Durtonleiter und der Obertonreihe des Grundtones besteht.<sup>97</sup>

Wie bei allen Tonleitern der Heptatonik besteht die Durtonleiter aus fünf Ganz- und zwei Halbtonschritten. Die Intervallabstände aller Durtonleitern sind durch die Zahlenfolge  $1 - 1 - 1/2 - 1 - 1 - 1 - 1/2$  definiert, wobei 1 für einen Ganz- und  $1/2$  für einen Halbtonschritt steht. Für die Durskala ist die große Terz zwischen dem ersten und dritten Ton der Tonleiter charakteristisch. Dadurch erhält die Durtonleiter einen hellen und offenen Klangcharakter.<sup>98</sup>



Abbildung 3.4.: C-Dur-Tonleiter

---

<sup>96</sup> Amon 2005, S. 301

<sup>97</sup> Vgl. Steinbauer 2006, S. 12

<sup>98</sup> Vgl. Amon 2005, S. 306

Die einfachste Durtonleiter ist C-Dur, da bei dieser Skala keine Generalvorzeichen verwendet werden müssen. Wie können aber nun andere Durtonleitern gebildet werden? Zunächst werden die Noten, ausgehend von jenem Ton, auf den die Tonleiter gebildet werden soll, ohne Generalvorzeichen aufsteigend notiert.

Möchte man die Tonleiter von G-Dur bilden, würde dieser Schritt so aussehen:



Abbildung 3.5.: G-Dur-Tonleiter ohne Generalvorzeichen

Anschließend betrachtet man die Abstände zwischen den einzelnen Intervallen und vergleicht sie mit den charakteristischen Intervallabständen der Durskala. Liegt ein Ton einen Halbton über der gewünschten Note, kann der Ton mit Hilfe eines *b*-Vorzeichens erniedrigt werden. Liegt der Ton einen Halbton unter dem gewünschten Ton, kann der Ton durch ein *#*-Vorzeichen erhöht werden.

Im Fall von G-Dur würde dieser Schritt wie folgt aussehen. Der Abstand zwischen der ersten und zweiten Note muss nach den Intervallverhältnissen von Durtonleitern einem Ganzton entsprechen. Tatsächlich wird ein Ganztonschritt benötigt, um von g auf a zu kommen. Fährt man auf diese Weise fort erkennt man, dass alle Intervallabstände bis auf das Intervall e-f korrekt sind. Eigentlich würde laut den Intervallabständen der Durtonleiter ein Ganztonschritt benötigt werden, um von e zu f zu gelangen, die beiden Noten entsprechen aber einem Abstand von einem halben Tonschritt. Aus diesem Grund muss f auf fis erhöht werden. Nun fehlt nur noch der letzte Halbtonschritt von fis auf g.

Auf diese Weise ergibt sich die folgende G-Dur-Tonleiter:



Abbildung 3.6.: G-Dur-Tonleiter

Beim Vergleich mit der C-Dur-Tonleiter wird ersichtlich, dass sich alle Noten um sieben Halbtonschritte erhöht haben. Es wurde also die C-Dur-Tonleiter auf G-Dur transponiert.

Werden weitere Durskalen auf andere Grundtöne transponiert wird erkennbar, dass sich jede Skala durch eine andere Anzahl der Generalvorzeichen auszeichnet. Da sich eine Tonart meist länger durch ein Musikstück hält, werden die Vorzeichen am Anfang jeder Zeile nach dem Notenschlüssel notiert. Ein geschulter Musiker erkennt also sofort, in welcher Tonart das Stück komponiert wurde.



Abbildung 3.7.: Es-Dur- und E-Dur-Tonleiter

### 3.3.3. Moll

Die Mollskala entwickelte sich zwar ebenso wie die Durskala aus den Kirchentonarten, die beiden Tonleitern unterscheiden sich in ihrem Wesen aber stark voneinander. Im Gegensatz zur Durtonleiter, deren Wesen in der Obertonreihe begründet ist, wird die Molltonart als reines Kunstprodukt angesehen.<sup>99</sup>

Im Klang unterscheidet sich die Molltonart ebenso stark von der Durtonleiter. Beim Hören eines Musikstückes ist es folglich ein Leichtes zu bestimmen, ob das Stück in Dur oder Moll komponiert wurde. Während Werke in Dur hell und freundlich klingen, werden Stücke in Moll häufig mit den Ausdrücken „melancholisch“, „deprimierend“, „nachdenklich“ oder „traurig“ beschrieben. Ihren zurückhaltenden und mehr geschlossenen Klangcharakter erhält die Molltonleiter durch die kleine Terz zwischen dem ersten und dritten Ton.<sup>100</sup>

Im Gegensatz zu Dur, wo es nur eine Tonleiter gibt, wird bei Moll zwischen drei verschiedenen Molltonleitern unterschieden. Diese sind, genau wie die Durtonleiter, auf alle zwölf chromatischen Töne transponierbar.

<sup>99</sup> Vgl. Steinbauer 2006, S. 12

<sup>100</sup> Vgl. Amon 2005, S. 307

| Skalentyp                | Tonleiter (mit Grundton a)                                                        | Tonabstände                                                             |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| <i>natürliches Moll</i>  |  | $1 - 1\frac{1}{2} - 1 - 1 - 1\frac{1}{2} - 1 - 1$                       |
| <i>harmonisches Moll</i> |  | $1 - 1\frac{1}{2} - 1 - 1 - 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}$ |
| <i>melodisches Moll</i>  |  | $1 - 1\frac{1}{2} - 1 - 1 - 1 - 1 - 1\frac{1}{2}$                       |

Tabelle 3.2.: Molltonarten

So gibt es zum einen das natürliche Moll (auch: reines bzw. äolisches Moll), das der Durtonleiter im Grunde sehr ähnlich ist. Die natürliche Molltonleiter beginnt eine Terz tiefer als die Durtonleiter, hat aber alle Töne mit der dazugehörigen Durtonleiter gemein. Zu jeder Molltonart gibt es also eine Paralleltonart in Dur. Die beiden Tonarten haben dann jeweils dieselben Töne und folglich auch dieselben Generalvorzeichen.

In der folgenden Abbildung wird dieser Umstand verdeutlicht. Im Inneren sind die Moll- und im Äußeren die Durtonarten abgebildet. Auffallend ist, dass sich zum einen die jeweils gegenüberliegenden Tonarten bezüglich ihres Vorzeichens unterscheiden und sich außerdem bezüglich ihrer Vorzeichenanzahl auf insgesamt sechs ergänzen.

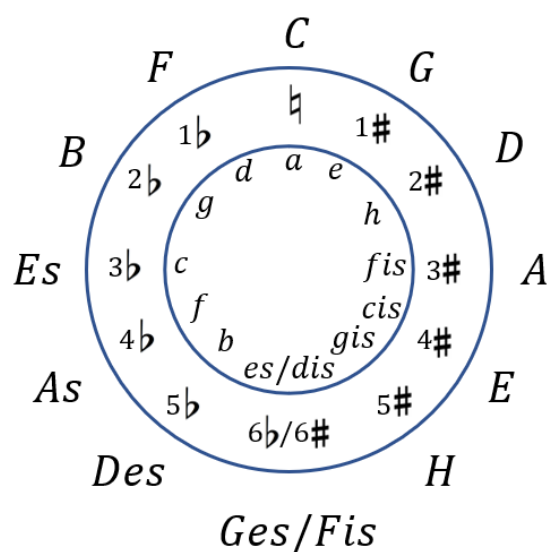


Abbildung 3.8.: Paralleltonarten

Bei dieser graphischen Darstellung handelt es sich um einen Quintenzirkel, der Grundlage der durmolltonalen Musik. Der Quintenzirkel ist eine abstrahierte Darstellung der Tonartengrundtöne mit den zwölf Tönen der chromatischen Skala. Die Grundtöne haben dabei jeweils einen Intervallabstand von einer Quinte zueinander und sind nach der Anzahl ihrer Vorzeichen geordnet. Teilt man den Quintenzirkel in Viertelkreise, so stehen die Töne an den Randwerten im Abstand großer Sexten und unterscheiden sich jeweils durch drei Vorzeichen; die Drittelkreise haben Großterzabstand und vier Vorzeichen Unterschied und Sechstelkreise bilden Ganztonabstände mit jeweils unterschiedlichen Vorzeichen.<sup>101</sup>

Um Dur und Moll besser auseinanderhalten zu können, hat sich die Schreibweise eingebürgert, Durtonarten mit Groß- und Molltonarten mit Kleinbuchstaben zu benennen. Wie in der Darstellung zum Beispiel ersichtlich wird entspricht die C-Dur-Tonleiter der a-Moll-Tonleiter. Weiters wird durch das Auflösungszeichen ersichtlich, dass diese beiden Tonleitern die einzigen sind, die keine Generalvorzeichen enthalten.

In Notenschreibweise lassen sich C-Dur und a-Moll wie folgt darstellen:



Abbildung 3.9.: Paralleltonarten C-Dur und a-Moll

Die harmonische Molltonleiter ist der natürlichen Molltonleiter sehr ähnlich, nur ist die siebte Stufe um einen Halbton erhöht. In Tabelle 3.2. wird dies durch die Änderung von g auf gis ersichtlich. Die Tonleiter, die sich auf diese Weise ergibt, enthält jedoch eine hörbare Lücke zwischen der erniedrigten sechsten und der erhöhten siebten Stufe. Diese übermäßige Sekunde, die nicht immer melodisch klingt, wird als Hiatus bezeichnet.<sup>102</sup>

Da der Hiatus im harmonischen Moll nur schwer zu singen ist, versucht man ihn in der melodischen Molltonleiter (auch: dorische Molltonleiter) zu vermeiden. Um dies zu erreichen wird entweder die sechste Stufe erhöht (aufsteigendes melodisches Moll) oder die siebte Stufe

<sup>101</sup> Amon 2005, S. 217

<sup>102</sup> Vgl. Martineau 2017, S. 274

erniedrigt (absteigendes melodisches Moll). Das absteigende melodische Moll ist allerdings mit dem natürlichen Moll identisch.<sup>103</sup>

In Tabelle 3.2. wird f auf fis erhöht, es handelt sich in diesem Fall also um eine aufsteigende harmonische Molltonleiter.

### 3.4. Chromatik

Die diatonischen Skalen bestehen aus sieben Tönen mit fünf Ganz- und zwei Halbtonschritten. Durch Ergänzung der diatonischen Skala auf alle möglichen Noten innerhalb der Oktave wird die chromatische Skala mit zwölf Tönen gebildet. Somit ist die Diatonik Voraussetzung für die Entwicklung und Bildung der Chromatik. Im 19. Jahrhundert wurde in der Musik bereits der ganze Tonvorrat von zwölf Tönen innerhalb der Oktave ausgeschöpft, obwohl noch mit den siebentönigen diatonischen Tonleitern komponiert wurde. Durch diese größere melodische Vielfalt war es möglich, eine höhere Spannung und Emotionalität in musikalischen Stücken ausdrücken zu können.<sup>104</sup> Im 20. Jahrhundert setzte sich die Chromatik schließlich durch und ist heute eines der am weitesten verbreitetsten Tonsystemen in der Musik.

Bei der chromatischen Skala handelt es sich um ein Tonsystem mit zwölf Halbtonabständen. Das Intervall zweier Nachbarsnoten ist demnach immer eine kleine Sekunde. Am besten kann die chromatische Skala mit Hilfe des Klaviers veranschaulicht werden. Da alle Tonabstände identisch sind, ist es egal, welcher Ton als Grundton verwendet wird. Geht man also von einem beliebigen Ton auf dem Klavier der Reihe nach alle Töne weiter, bis man wieder beim Ausgangston eine Oktave höher bzw. tiefer angelangt ist, hat man eine chromatische Tonleiter erzeugt. Eine chromatische Tonleiter zeichnet sich also durch einen gleichmäßigen An- bzw. Abstieg der Tonhöhen im Rahmen einer Oktave aus.

Graphisch lässt sich diese Folge von Tönen mit jeweils einem halben Ton Abstand und gleichem Ausgangston wie Endton am besten in Form eines Kreises veranschaulichen. Es ist demnach unbedeutend, bei welchem Ton begonnen wird, da alle Töne gleichmäßig verteilt und demnach für die Komposition gleich bedeutend sind.

---

<sup>103</sup> Vgl. Martineau 2017, S. 273 und Amon 2005, S. 307 f.

<sup>104</sup> Vgl. Amon 2005, S. 50

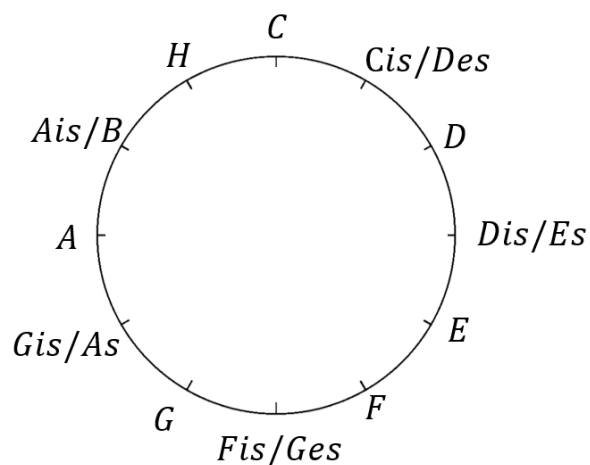


Abbildung 3.10.: Chromatische Töne

Im Folgenden werden zwei Tonleitern auf den Grundton *c* dargestellt. Aufsteigende chromatische Skalen werden mit dem *#* –Vorzeichen und absteigende chromatische Tonleitern mit dem *b* –Vorzeichen notiert. Bei den absteigenden chromatischen Tonleitern stellt der Ton *fis* jedoch eine Ausnahme dar, weswegen statt einem *ges* ein *fis* notiert wird.



Abbildung 3.11.: auf- bzw. absteigende chromatische Tonleiter auf *c*

## 4. Symmetrie in der Musik

Der Aufbau verschiedener Musikstücke kann sehr unterschiedlich gestaltet sein, weswegen sich für einen Vergleich der einzelnen Werke besonders das Betrachten der Motive eignet. Unter einem Motiv versteht man die kleinste, nicht weiter zerlegbare musikalisch-melodische Sinneinheit, die durch verschiedene Tonhöhen und Tondauern bestimmt ist und den Charakter eines ganzen oder zumindest eines wesentlichen Teils eines Werkes bestimmt.<sup>105</sup> Ein Musikstück besteht aus mehreren Motiven, die zu einem einheitlichen Werk verknüpft werden. Bei der Komposition von Motiven lassen sich Musiker häufig von geometrischen Konzepten, die die Variation einzelner Motive erleichtern, aber dennoch die Struktur eines Stückes komplexer erscheinen lassen, inspirieren. Häufig stellen sich Musikstücke, deren Struktur zunächst sehr komplex erscheint, als simpel heraus, wenn sie in ihre kleinsten Einheiten zerlegt werden und auf diese Weise der Aufbau des Stückes nachvollzogen werden kann.

Bei den eingesetzten Kompositionstechniken, die auf geometrischen Konzepten beruhen, wird der Symmetrie eine wesentliche Bedeutung zugeschrieben. Das Wort Symmetrie kommt aus dem Griechischen und bedeutet Gleichmaß und Gleichmäßigkeit.<sup>106</sup> Man spricht von Symmetrie, wenn im Laufe einer Transformation mindestens eine Eigenschaft des betroffenen Objekts unverändert bleibt.<sup>107</sup> Symmetrie liegt also genau dann vor, wenn ein Objekt gedreht, gespiegelt oder verschoben, seine Gestalt bei diesem Prozess aber nicht verändert wird.

Betrachtet man ein Rechteck, so sind diese geometrischen Prozesse gut vorstellbar, doch wie erklärt sich der Einsatz von symmetrischen Transformationen in der Musik und wie wird das Resultat in musikalischen Werken ersichtlich? Es gibt diverse symmetrische Prozesse, die auf unterschiedliche Weise eingesetzt werden können, um mehrere kleine Motive zu einem komplexen Musikstück zu erweitern. Im Folgenden werden einige symmetrische Transformationen, die in der Musik Anwendung finden, vorgestellt.

---

<sup>105</sup> Vgl. Amon 2005, S. 193

<sup>106</sup> Amon 2011, S. 533

<sup>107</sup> Vgl. Darvas 2007, S. 20

## 4.1. Geometrisch-musikalische Transformationen

Musiker arbeiten bei der Entwicklung ihrer Musikstücke häufig mit Kompositionstechniken, die ihren Ursprung in der Geometrie haben. In einigen Fällen ist der geometrisch-musikalische Aspekt bereits im Klang zu erkennen, während er bei anderen Kompositionen erst im Notenbild ersichtlich wird.<sup>108</sup> Bezüglich der eingesetzten geometrischen Kompositionstechniken wird zwischen isometrischen und skalaren Transformationen unterschieden. Bei ihrer Unterscheidung spielen die Notenabstände eine wesentliche Rolle. Während bei isometrischen Transformationen die Abstände zwischen den Noten stets unverändert bleiben, erhöhen oder verringern sie sich bei skalaren Transformationen. Werden die Intervallgrößen bei isometrischen Transformationen exakt beibehalten, spricht man von einer realen, werden sie jedoch an die jeweilige Tonart angepasst, spricht man von einer tonalen Ausführung.<sup>109</sup>

Bei der Behandlung von isometrischen und skalaren Transformationen ist es wesentlich, zwischen horizontalen und vertikalen Transformationen zu unterscheiden. Vertikale Transformationen beziehen sich auf eine Veränderung der Tonhöhe, horizontale Transformationen betreffen eine Änderung der Zeitachse. Am einfachsten lässt sich dies verdeutlichen, indem Notenlinien in einem Koordinatensystem mit einer Achse für die Zeit (horizontale Achse) und einer Achse für die Tonhöhe (vertikale Achse) dargestellt werden. Bei Transformationen können entweder die vertikale oder die horizontale Achse verändert werden, während die andere unverändert bleibt. Es gibt aber ebenso Transformationen, bei denen sowohl die vertikale, als auch die horizontale Achse verändert wird. Letzteres ist allerdings nur für isometrische Transformationen zutreffend, bei skalaren Transformationen findet lediglich eine Änderung einer der beiden Achsen statt.



Abbildung 4.1.: Notenlinien im Koordinatensystem

<sup>108</sup> Vgl. Arbonés/Milrud 2018, S. 69

<sup>109</sup> Vgl. Amon 2005, S. 194

### 4.1.1. Isometrische Transformationen

Bei isometrischen Transformationen wird zwischen Translation, Spiegelung und Drehung unterschieden, wobei bei jeder der genannten Transformationen die Intervallabstände des veränderten Motivs im Vergleich zum ursprünglichen Notenbild unverändert bleiben. Vor einer Beschäftigung mit der Bedeutung dieser Transformationen in der Musik ist es jedoch ratsam, zunächst die mathematische Seite von Translation, Spiegelung und Drehung zu betrachten. Da bei der Durchführung aller drei Transformationen stets die Zusammensetzung des Objekts (der Abstand der Intervalle) nicht verändert wird, werden derartige Transformationen in der Mathematik in der Abbildungsgeometrie beschrieben.

#### Definition 4.1. (Kongruenzabbildung)

*Unterscheiden sich zwei Figuren in der Ebene nur durch ihre Lage und stimmen sie sonst in den Größen entsprechender Winkel und Strecken überein, dann werden die beiden Figuren als kongruent bzw. deckungsgleich bezeichnet. Eine Figur  $F_1$  ist genau dann kongruent zur Figur  $F_2$ , wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, die  $F_1$  auf  $F_2$  abbildet.<sup>110</sup>*

Aus dieser Definition wird ersichtlich, dass Translation, Spiegelung und Drehung zu den Kongruenzabbildungen zählen.

#### Definition 4.2. (Translation)

*Eine Translation liegt in der Ebene genau dann vor, wenn jedem Punkt  $P$  der Figur ein Bildpunkt  $P'$  zugeordnet werden kann, sodass dieser von  $P$  aus in konstanter Richtung konstante Entfernung hat.<sup>111</sup>*

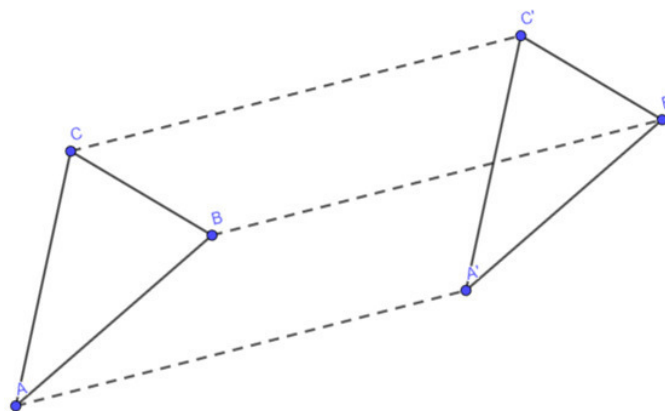


Abbildung 4.2.: Translation

<sup>110</sup> Vgl. Kirsche 1998, S. 72

<sup>111</sup> Vgl. Schupp 1968, S. 5

**Definition 4.3.** (Spiegelung)

Eine Spiegelung liegt in der Ebene genau dann vor, wenn jedem Punkt  $P$  der Figur ein Bildpunkt  $P'$  zugeordnet werden kann, sodass die Verbindungsstrecke  $\overline{PP'}$  senkrecht auf eine vorgegebene Gerade steht und von dieser halbiert wird.<sup>112</sup>

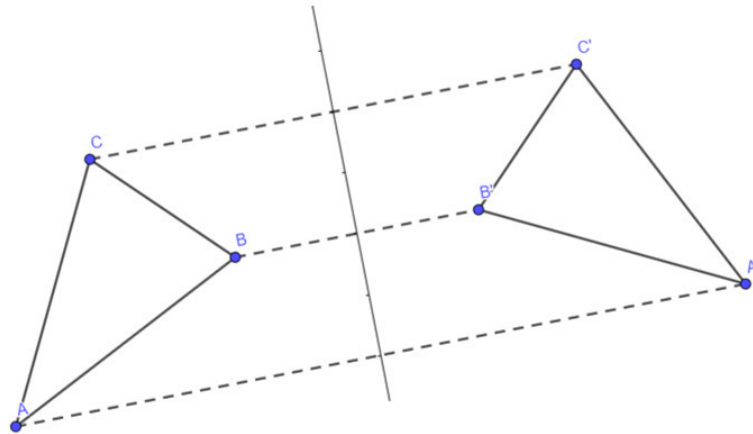


Abbildung 4.3.: Spiegelung

**Definition 4.4.** (Drehung)

Eine Drehung liegt in der Ebene genau dann vor, wenn jedem Punkt  $P$  der Figur ein Bildpunkt  $P'$  zugeordnet werden kann, sodass beide Punkte gleichweit von einem festen Punkt  $Z$  entfernt sind und der Winkel  $\angle PZP'$  konstant ist.<sup>113</sup>

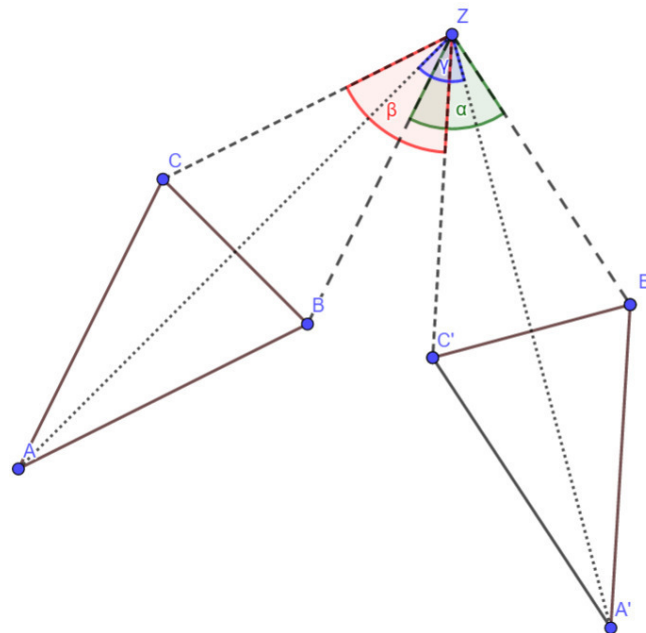


Abbildung 4.4.: Drehung

<sup>112</sup> Vgl. Schupp 1968, S. 5

<sup>113</sup> Vgl. ebenda, S. 7

Nachdem nun die mathematische Aussagekraft von Translation, Spiegelung und Drehung behandelt wurde, widmen wir uns nun der Bedeutung dieser Begriffe in der Musik.

#### **4.1.1.1. Translation**

Bei einer Translation werden alle Noten des Motivs in dieselbe Richtung verschoben, das heißt entweder in Richtung der vertikalen oder der horizontalen Achse. Das einfachste und in der Musik wohl auch häufigste Anwendungsverfahren ist die Wiederholung, also das mehrmalige Spielen eines Motivs hintereinander. Bei dieser horizontalen Transformation handelt es sich um keine Arbeit am Motiv im eigentlichen Sinn, dennoch ermöglichen Wiederholungen dem Hörer einen leichteren Zugang zu musikalischen Werken.<sup>114</sup> Beethoven begann beispielsweise seine beeindruckende Mondscheinsonate mit der Wiederholung eines aus drei Tönen bestehenden Motivs.





Abbildung 4.6.: Kanon zu „Frère Jacques“

Beim abgebildeten Kanon stimmt die Tonlage der ersten Stimme mit der zweiten überein, es findet also lediglich eine horizontale Translation statt. Singt die zweite Stimme aber beispielsweise eine Oktave tiefer, dann wurde die erste Stimme transponiert und es hat ebenfalls eine vertikale Translation stattgefunden. Das Verschieben von Noten entlang der vertikalen Achse wird als Transposition bezeichnet. Unter Transposition wird das tonhöhenversetzte, intervallgetreue Wiederholen eines Motivs in einer anderen Tonstufe derselben Tonart oder in einer anderen Tonart verstanden.<sup>115</sup> Statt also ein Motiv in der selben Tonhöhe wiederzugeben, kann es auf eine andere Tonhöhe transponiert und anschließend wiederholt werden. Im folgenden Auszug aus Johann Sebastian Bachs Präludium wurde, wie im Vergleich mit dem zweiten Takt ersichtlich wird, der erste Takt um einen Ganztonschritt nach oben transponiert. Da der Ton e nur um einen Halbtonschritt nach oben transponiert wird, um die Tonart beizubehalten, handelt es sich um eine tonale Ausführung.



Abbildung 4.7.: Erstes Präludium von Johann Sebastian Bach

<sup>115</sup> Vgl. Amon 2011, S. 395

Werden mehrere Transpositionen in verschiedenen Tonlagen hintereinander ausgeführt, wird von einer Sequenz gesprochen. Bezüglich ihrer Intervallabstände weisen sie häufig einen Bezug zu Sekunden, Quarten und Quinten auf.<sup>116</sup> Die folgende Abbildung zeigt die ersten beiden Takte von Johann Pachelbels Kanon in D. Sowohl im Violin- als auch im Bassschlüssel sind Transpositionen erkennbar, deren Folge eine Sequenz ergibt. Während die Melodie stetig um einen Ganztonschritt abnimmt, also stets eine Transposition um eine große Sekunde stattfindet, findet im Bassschlüssel eine Transposition eines vier Noten umfassenden Motivs statt. Die Intervallabstände der Transpositionen im Vergleich zum ursprünglichen Motiv betragen dabei eine kleine Terz im ersten Takt und im zweiten Takt zunächst eine große Sekunde und anschließend eine reine Quarte.



Abbildung 4.8.: Kanon in D von Johann Pachelbel

Translationen finden aber nicht nur bei kurzen Motiven statt, sondern können auch ganze Ausschnitte eines Musikstücks betreffen. So repräsentieren sogar musikalische Großformen wie beispielsweise die dreiteilige A-B-A-Liedform und das Rondo Translationen. Mit Großbuchstaben werden an dieser Stelle Ausschnitte eines Musikstücks bezeichnet. Bei der A-B-A-Form wird also zunächst ein erster Teil A und anschließend ein komplett anderer Teil B (ein ähnlicher Auszug zum Teil A wird in der Musik mit A' bezeichnet) gespielt und schließlich am Ende nochmals der erste Teil wiederholt. Beim Rondo gibt es mehrere Variationen der Reihenfolge der gespielten Abschnitte, meistens werden die Ausschnitte wie folgt aneinandergereiht: A-B-A-C-A bzw. A-B-A-C-A-B-A.<sup>117</sup>

<sup>116</sup> Amon 2005, S. 194

<sup>117</sup> Vgl. Wilson 1986, S. 103

#### 4.1.1.2. Spiegelung

Melodisch-kontrapunktische Gestaltungen wie Umkehrung und Krebs haben einen direkten Bezug zur Symmetrie, denn sie entstehen durch horizontale und vertikale Spiegelung.<sup>118</sup> Werden beide Spiegelungen hintereinander durchgeführt, wird von einer Doppelspiegelung, die einer Drehung um 180° entspricht, gesprochen. In der folgenden Abbildung soll die Verbindung zwischen den horizontalen und vertikalen Spiegelungen und ihrer Kombination veranschaulicht werden.

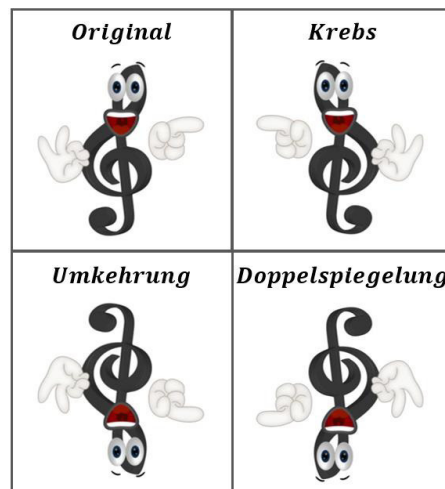


Abbildung 4.9.: Arten von Spiegelungen

Die von Komponisten weit häufiger eingesetzte Spiegelung ist die Umkehrung. Bei dieser horizontalen Transformation werden die Intervalle eines Motivs in die entgegengesetzte Richtung umgekehrt. Für dieses Vorgehen muss eine imaginäre horizontale Spiegelachse an den Notenlinien gedacht werden. Jene Noten, die auf der Spiegelachse liegen, bleiben unverändert, während die restlichen Noten an die Achse gespiegelt werden. Häufig geht die Umkehrung auch mit einer Transposition um eine Quinte einher, sodass das veränderte Motiv im gleichen Tonraum entsprechend dem Original zu liegen kommt.<sup>119</sup>

Wie wichtig die Wahl der Spiegelachse ist, wird in der folgenden Abbildung ersichtlich. Im zweiten Takt wurde an der Note h und im dritten Takt an der Note c gespiegelt.

<sup>118</sup> Amon 2011, S. 539

<sup>119</sup> Amon 2005, S. 195



Abbildung 4.10.: tonale Umkehrung

In Abbildung 4.10. wurden zwar die Noten gespiegelt, allerdings nicht die Intervallabstände. Im ersten Takt beträgt der Abstand zwischen h und c einen Halbtonschritt und h und e liegen fünf Halbtonschritte voneinander entfernt. Im zweiten Takt jedoch beträgt der Abstand von h zum nächsten Ton a einen Ganztonschritt und der Abstand zu f sechs Halbtonschritte. Es wird also ersichtlich, dass die Intervallabstände von jenen des ursprünglichen Motivs abweichen. Dieses Phänomen lässt sich auch für den dritten Takt, in dem an den Ton c gespiegelt wird, beobachten. Der Abstand im ursprünglichen Motiv beträgt zwischen c und h einen Halbtonschritt und zwischen c und e zwei Ganztonschritte. Die Abstände der gespiegelten Noten im dritten Takt betragen jedoch einen Ganztonschritt und drei Halbtonschritte. Somit wird auch hier jeweils eine Abweichung um einen Halbtonschritt erkennbar.

Das in der Musik verwendete chromatische Tonsystem besteht aus zwölf Halbtonschritten. Da nicht alle Noten, die ohne Vorzeichen dargestellt werden können, auf den Notenlinien genau einen Ganzton auseinanderliegen (e-f und h-c haben nur einen Halbtonschritt Abstand), muss auf die Vorzeichen der Noten geachtet werden, wenn die Intervallabstände gespiegelt werden sollen. Wird bei Transformationen auf die Vorzeichen, also auf die genauen Intervallabstände, geachtet, spricht man von einer exakten Ausführung. Werden allerdings lediglich die abgebildeten Noten gespiegelt, ohne die Ganz- und Halbtonabstände miteinzubeziehen, spricht man von einer tonalen Ausführung.<sup>120</sup> Tonale Ausführungen werden in der Musik bevorzugt, da bei diesen keine Änderung der Tonart stattfindet, allerdings sind sie im Gegensatz zu exakten Ausführungen mathematisch betrachtet inkorrekt, da die Intervallabstände nicht korrekt gespiegelt werden.

In der folgenden Abbildung wird das in Abbildung 4.10. gezeigte Motiv exakt gespiegelt. Es wird ersichtlich, dass zwar keine graphische Spiegelung der Noten, aber dafür eine genaue Spiegelung der Intervallabstände stattfindet.

<sup>120</sup> Vgl. Roberts 2016, S. 170



Abbildung 4.11.: exakte Umkehrung

Viele Musiker verwenden die Umkehrung als Hilfsmittel bei der Komposition ihrer Stücke. Als Beispiel kann hier der ungarische Komponist Béla Bartók mit dem Auszug „Subjekt und Reflektion“ aus seinem Stück „Mikrokosmos“ genannt werden.



Abbildung 4.12.: Ausschnitt aus Bartóks „Subjekt und Reflektion“

Die Spiegelung in Bartóks Werk wird im Vergleich zwischen den Noten im Violin- und im Bassschlüssel ersichtlich. Die erste Note ist in beiden Fällen ein b, im Violinschlüssel folgt ein Halbtonschritt nach oben, im Bassschlüssel ein Halbtonschritt nach unten. Auch für die folgenden Noten wird auf diese Weise fortgefahren. Da die Noten im Violinschlüssel am Klavier mit der rechten und jene im Bassschlüssel mit der linken Hand gespielt werden, wird die Symmetrie auch anhand der Handbewegungen ersichtlich.

Die zweite Möglichkeit ein Motiv zu spiegeln, ist eine Spiegelung an der vertikalen Achse. Diese Transformation, bei der die Melodie des Motivs in ihrer Richtung umgekehrt wird, wird als Krebs bezeichnet. Der Krebs liegt also genau dann vor, wenn die neue Melodie beginnend mit der letzten Note des ursprünglichen Motivs gespielt wird und die Noten des Originals rückwärts durchlaufen werden. Das Motiv wird im Prinzip also rückwärts gespielt. Prinzipiell kann jede Melodie gekrebst werden, doch werden die Tondauern abgeändert, damit musikalische Sinnhaftigkeit erhalten bleibt.<sup>121</sup> Der zweite Takt in der folgenden Abbildung ist durch Spiegelung des ersten Taktes an der vertikalen Achse entstanden.

<sup>121</sup> Amon 2011, S. 539



Abbildung 4.13.: Krebs

Wenn, wie im Falle der Abbildung 4.13., sowohl die Originalmelodie als auch der Krebs nacheinander gespielt werden, spricht man von einer melodischen Symmetrie.<sup>122</sup>

Das berühmte „Halleluja“ aus dem von Georg Friedrich Händel komponierten Oratorium in „Messias“ kann an dieser Stelle als Beispiel genannt werden. Aus der Darstellung in der zweiten Notenzeile wird ersichtlich, dass die Noten exakt gespiegelt sind, wenn man sich eine vertikale Spiegelachse durch den Ton g vorstellt.



Abbildung 4.14.: Händels „Halleluja“

Wird das Musikstück komplexer, ist es wesentlich schwerer eine Transformation mittels Krebs herauszuhören, weswegen diese Transformation häufig erst im Notenbild ersichtlich wird. Durch das Ausbalancieren der Tonhöhen wird dieser Transformation eine ästhetische Bedeutung zugeschrieben, weswegen sie vielen westeuropäischen Musikern eine Grundlage bei der Komposition ihrer Werke bot.<sup>123</sup>

Die Kombination einer vertikalen und einer horizontalen Spiegelung wird als Doppelspiegelung bezeichnet. Da diese Transformation aber einer Drehung um 180° entspricht, wird sie erst im nächsten Kapitel behandelt.

<sup>122</sup> Arbonés/Milrud 2018, S. 77

<sup>123</sup> Wilson 1986, S. 104

#### 4.1.1.3. Drehung

Werden eine Umkehrung und ein Krebs hintereinander ausgeführt entspricht dies einer Drehung um 180°. Demnach ist die Doppelspiegelung die einzige Drehung, die in der Musik einen Sinn ergibt. Andernfalls wären die auf dem Papier festgehaltenen Noten nicht spielbar. Die Kombination von Krebs und Umkehrung wird häufig auch als Krebsumkehrung oder Spiegelkrebs bezeichnet. Das bei der Krebsumkehrung entstehende Motiv ist nicht davon abhängig, welche der beiden Transformationen zuerst durchgeführt wird, denn das Ergebnis ist stets dasselbe. Relevant ist lediglich die Wahl jener Note, die als Spiegelachse dient und an die die anderen Noten bei der Umkehrung gespiegelt werden. In der folgenden Abbildung werden beide möglichen Reihenfolgen abgebildet und es wird ersichtlich, dass die Ergebnisse identisch sind. In beiden Fällen wurde die zweite Notenlinie als Spiegelachse bestimmt.



Abbildung 4.15.: exakte Krebsumkehrung

Wolfgang Amadeus Mozart hat in seinem Stück „Der Spiegel“ den Einsatz von Krebs und Umkehrung perfektioniert. Das besondere an seiner Partitur ist, dass sie auch lesbar ist, wenn sie auf den Kopf gestellt wird. Bei diesem Duett für Geigen stehen sich die Musiker also gegenüber und spielen gleichzeitig die Umkehrung der selben Noten, nur in umgekehrter Reihenfolge. Die Spiegelachse befindet sich bei diesem Stück auf der dritten Notenlinie.

## Der Spiegel

Allegro

W. A. Mozart

*mf*

W. A. Mozart

Allegro

Abbildung 4.16.: „Der Spiegel“ von W. A. Mozart

#### **4.1.1.4. Kombination**

Zwei Kombinationen von vertikalen und horizontalen Transformationen wurden bereits erwähnt. Eine Kombination von einer vertikalen und einer horizontalen Translation ergibt einen Kanon und eine Kombination von einer vertikalen und einer horizontalen Spiegelung führt zu einer Drehung um  $180^\circ$ , die auch als Krebsumkehrung bezeichnet wird. Es sind aber auch Kombinationen von Translation und Spiegelung möglich.

Die erste Möglichkeit stellt die Kombination einer vertikalen Translation und die anschließende Spiegelung an einer vertikalen Achse dar. Bei diesem Vorgang wird das Motiv zunächst transponiert und die Melodie dann in umgekehrter Reihenfolge aufgezeichnet. Abbildung 4.17. zeigt ein mögliches Beispiel für eine derartige Kombination. Das Motiv im ersten Takt wird im zweiten Takt um eine reine Quinte nach unten transponiert und anschließend im dritten Takt vertikal gespiegelt.



Abbildung 4.17.: Transposition und Krebs

Die zweite Möglichkeit besteht in der Kombination einer vertikalen Translation und der Spiegelung an einer horizontalen Achse. Auch für diese Kombination ist es also notwendig, das Motiv zunächst zu transponieren, anschließend wird die Umkehrung der Transposition notiert. In Abbildung 4.18. wurde das Motiv im zweiten Takt ebenfalls um eine reine Quinte nach unten transponiert. Anschließend wurde die Transposition im dritten Takt an die zweite Notenlinie gespiegelt.



Abbildung 4.18.: Umgekehrte Transposition

Viele bekannte Komponisten haben sich in ihren Werken nicht auf die Einsetzung einer bestimmten Transformation beschränkt, sondern mehrere als Hilfsmittel bei der Komposition ihrer Stücke verwendet.

### 4.1.2. Skalare Transformationen

Betrachten wir zunächst die geometrische Seite skalarer Transformationen. Im Anschluss an die Kongruenzabbildungen, bei denen Bild und Urbild übereinstimmen, werden nun die sogenannten Ähnlichkeitsabbildungen behandelt, also Abbildungen, bei denen Bild und Urbild inkongruent sind. Für die Definition von Ähnlichkeitsabbildungen muss zusätzlich zur Definition von Kongruenzabbildungen der Begriff der zentrischen Streckung geklärt werden.

**Definition 4.5.** (zentrische Streckung)

*Eine zentrische Streckung liegt in der Ebene genau dann vor, wenn ein Fixpunkt  $S$  ( $S \neq S'$ ) existiert und jedem Punkt  $P \neq S$  ein Bildpunkt  $P'$  zugeordnet werden kann, sodass  $P'$  auf  $\overline{PS}$  liegt und  $P'S = k \cdot PS$  mit  $k > 0, k \in \mathbb{R}$  gilt.<sup>124</sup>*

Die Ähnlichkeitsabbildung kann nun mit Hilfe der Kongruenzabbildung und der zentrischen Streckung definiert werden.

**Definition 4.6.** (Ähnlichkeitsabbildung)

*Zwei Figuren werden als ähnlich bezeichnet, wenn die eine in die andere durch die Kombination einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung überführt werden kann. Transformationen, bei denen Urbild und Bild ähnlich sind, heißen Ähnlichkeitsabbildungen.<sup>125</sup>*

In der Musik haben die isometrischen Transformationen Translation, Spiegelung und Drehung die Eigenschaft, dass die Abstände der Intervalle zwischen den Noten unverändert bleiben. Bei skalaren Transformationen ist dies aber nicht der Fall und das Maß einer Note wird entweder bezüglich der Tonhöhe oder der Zeitdauer verändert. Es wird also wie bei isometrischen Transformationen zwischen einer vertikalen und einer horizontalen Transformation unterschieden.

---

<sup>124</sup> Schupp 1968, S. 32

<sup>125</sup> Ebenda, S. 40 f.

#### **4.1.2.1. Horizontale Skalierung**

Bei der horizontalen Skalierung wird eine Skalierung auf der Zeitachse vorgenommen, es wird also die Geschwindigkeit eines Stückes beeinflusst. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, die Kennzeichnung beim Metronom zu ändern. Am Beginn eines jeden Stückes sind eine Viertelnote und eine Zahl, die durch ein Gleichheitszeichen getrennt sind, abgebildet. Die Zahl gibt die Anzahl der Schläge einer Viertelnote pro Minute an.

Die Geschwindigkeitsangabe in Abbildung 4.19. bedeutet also, dass die Dauer von 40 Viertelnoten eine Minute beträgt. Ändert man die Angabe des Metronoms auf 80 Schläge pro Minute, wird die Geschwindigkeit verdoppelt und das Musikstück muss doppelt so schnell gespielt werden.

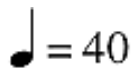


Abbildung 4.19.: Metronom

Statt einer Änderung des Metronoms können aber auch die Notenwerte selbst geändert werden, während die Metronomangabe unverändert bleibt. Die Position der Noten auf den Notenlinien bleibt bei diesem Vorgang gleich, lediglich ihre Dauer wird verkürzt oder verlängert. Auf diese Weise können beispielsweise zu lange Partituren durch eine Verkleinerung der Notenwerte verkürzt oder komplizierte Partituren, die viele Sechzehntel- oder Zweiunddreißigstelnoten aufweisen, durch eine Vergrößerung der Notenwerte vereinfacht dargestellt werden.

Eine Vergrößerung der Notendauern wird als Augmentation und eine Verkleinerung der Notendauern als Diminution bezeichnet.<sup>126</sup> In der folgenden Abbildung wurden die Notenwerte verkleinert, es hat also eine Diminution stattgefunden.



Abbildung 4.20.: horizontale Skalierung (Diminution)

<sup>126</sup> Amon 2005, S. 195

#### **4.1.2.2. Vertikale Skalierung**

Statt einer Skalierung der Notendauern, kann auch eine Skalierung der Tonhöhen vorgenommen werden. Das bedeutet, die Intervallabstände zwischen den Noten können vergrößert oder verkleinert werden. Diese Methode der Motivbearbeitung ist mathematisch zwar nachvollziehbar, für die Musik ist diese Methode jedoch kaum relevant. Begrifflich kommt es an dieser Stelle zu Überschneidungen mit der horizontalen Skalierung, da eine Vergrößerung der Intervalle ebenfalls mit dem Begriff Augmentation und eine Verkleinerung der Intervalle mit dem Begriff Diminution bezeichnet wird. In der folgenden Abbildung wird eine Augmentation, also eine Vergrößerung der Intervalle dargestellt. Die Intervallabstände haben sich von einer reinen Quarte auf eine reine Quinte vergrößert.

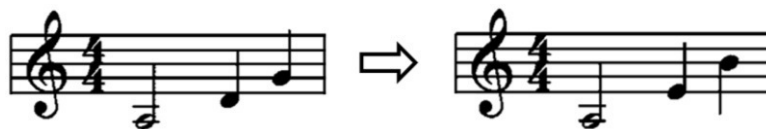


Abbildung 4.21.: vertikale Skalierung (Augmentation)

#### **4.1.3. Nicht-symmetrische Transformationen**

Amon nennt noch vier weitere Methoden der Motivverarbeitung, jedoch sind bei diesen Kompositionstechniken keine Bezüge zur Symmetrie herstellbar. Der Vollständigkeit halber werden sie im Folgenden trotzdem kurz vorgestellt.

Eine weitere Methode der motivisch-thematischen Arbeit ist die Abspaltung. Bei dieser Kompositionsmethode wird das Motiv reduziert und der abgespaltene Teil meist an einer anderen Stelle eingesetzt.<sup>127</sup> Das Gegenstück zur Abspaltung stellt die Erweiterung dar. Statt das Motiv zu reduzieren, werden bei der Erweiterung entweder melodische Elemente eingebaut, die bereits in anderen Takten des Stücks verwendet wurden, oder die Struktur des Motivs wird grundsätzlich ausgeweitet und es werden komplett neue Elemente hinzugefügt.



Abbildung 4.22.: Abspaltung und Erweiterung

<sup>127</sup> Amon 2005, S. 195

Die Variation stellt eine weitere Möglichkeit dar, ein Motiv zu verändern. Da es zahlreiche Möglichkeiten gibt ein Stück durch beispielsweise Verzierungen, Triolen oder Synkopen auszuschnücken, lässt sich diese Kompositionstechnik mathematisch nicht beschreiben.

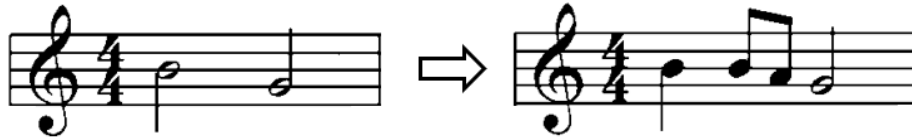


Abbildung 4.23.: Variation

Abschließend nennt Amon noch die entwickelnde Variation, die sich ebenfalls nicht mathematisch beschreiben lässt. Diese spezielle Form der Variation ist nicht auf ein Motiv beschränkt, sondern es wird ein Entwicklungsprozess in Gang gesetzt, der sich konstruktiv durch das ganze Stück hindurch fortsetzt. Zugleich wird das Entwickelte ständig variiert, um sich aus diesem wieder weiter zu entwickeln, weshalb jeder Ton des Musikstücks logisch aus dem motivischen Kern ableitbar ist.<sup>128</sup>

## 4.2. Harmonische Symmetrien

Der Begriff der Harmonie hatte über die Jahrhunderte verschiedene Bedeutungen in der Musik. Für die Griechen beschrieb „harmonia“ beispielsweise ein allgemeines Ordnungsprinzip, die römische Kultur verband damit das Zusammenwirken zweier gegensätzlicher Kräfte.<sup>129</sup> Seit dem 19. Jahrhundert wird Harmonie mit Akkorden verbunden, also mit dem Zusammenklang der in einem Akkord verwendeten Töne.

Wie bereits in Kapitel 4.1. ersichtlich wurde, sind symmetrische Konzepte bei der Verarbeitung von Motiven in Kompositionen relevant, die Symmetrie wird aber bereits im Tonsystem selbst ersichtlich. Symmetrien sind nicht erst nach dem Einsatz bestimmter Kompositionstechniken in einem Stück präsent, sondern Akkorde und Tonleitern können selbst einen gewissen Grad an Symmetrie aufweisen. Im Folgenden wird auf Akkorde und Tonleitern und ihren Bezug zur Symmetrie eingegangen.

---

<sup>128</sup> Amon 2005, S. 196

<sup>129</sup> Ebenda, S. 91

### 4.2.1. Symmetrische Akkorde

Unter einem Akkord wird ein Zusammenklang von mindestens drei verschieden hohen Tönen verstanden. Der Charakter eines Akkords wird durch die Anzahl der zusammenklingenden Töne, durch ihre Lage und Verteilung im Tonraum und durch eine spezielle Akkordfarbe bestimmt.<sup>130</sup> So wird beispielsweise ein Durdreiklang als hell und ein Molldreiklang als rau empfunden.

Nicht alle Akkorde weisen Anzeichen von Symmetrie auf, es gibt jedoch eine spezielle Gruppe von Akkorden, deren Noten symmetrisch zueinander sind. Die sogenannten Isointervallakkorde sind Klänge, die aus den gleichen Intervallen aufgebaut sind, weswegen sie auch als symmetrische Akkorde bezeichnet werden. Das Besondere an symmetrischen Akkorden ist, dass alle Töne des Akkords gleichwertig sind und es aus diesem Grund keinen Grundton gibt bzw. jeder Ton als Grundton interpretiert werden kann.<sup>131</sup>

Zu den symmetrischen Akkorden zählen der verminderte Dreiklang, der verminderte Septakkord und der übermäßige Dreiklang. Dreiklänge setzen sich, wie der Name schon andeutet, aus drei Tönen zusammen, ein Septakkord besteht aus vier Tönen. Beim verminderten Dreiklang betragen die beiden und beim verminderten Septakkord die drei Intervallabstände jeweils eine kleine Terz, beim übermäßigen Dreiklang entsprechen die beiden Intervallabstände jeweils einer großen Terz. Aufgrund ihrer Intervallabstände zählen der verminderte Dreiklang und der verminderte Septakkord zu den Kleinterzklängen und der übermäßige Dreiklang zu den Großterzklängen. Bei den Klein- und Großterzklängen wird die Symmetrie bei der Betrachtung der Notendarstellung und einer Assoziation mit einer Kreisdarstellung aller chromatischen Töne besonders schön ersichtlich.

Der verminderte Dreiklang besteht, wie bereits erwähnt, aus zwei kleinen Terzen. Der Intervallabstand zwischen dem höchsten und dem tiefsten Ton beträgt demnach eine verminderte Quinte. Im Folgenden werden zunächst drei verschiedene verminderte Dreiklänge dargestellt, die dann anschließend mit Hilfe der Kreisdarstellung veranschaulicht werden. Die Symmetrie wird zum einen durch die Darstellung der Notenwerte auf den Notenlinien ersichtlich, wobei allerdings auf die Vorzeichen, die einen Ton um einen Halbtonschritt erhöhen bzw. erniedrigen, geachtet werden muss. Eindeutig wird die Symmetrie erst beim Betrachten

---

<sup>130</sup> Eimert/Humpert 1973, S. 7

<sup>131</sup> Vgl. Amon 2005, S. 129

der chromatischen Skala. Die verwendeten Noten sind durch einen Kreis markiert und durch Linien verbunden. Beim Vergleichen der auf diese Weise entstehenden Dreiecke wird ersichtlich, dass es sich jeweils um kongruente gleichschenklige Dreiecke handelt. Wird ein Dreieck innerhalb des Kreises gedreht, markieren seine Eckpunkte die Noten weiterer Dreiklänge. Jene Noten, die durch die kürzeren Dreiecksseiten verbunden sind, sind jeweils drei Halbtonschritte voneinander entfernt, was einer kleinen Terz entspricht. Die längere Seite verbindet die tiefste mit der höchsten Note, wobei der Abstand genau der Diagonalen des Kreises entspricht. Da die Kreisdarstellung in zwölf gleichgroße Halbtonschritte unterteilt wird, entspricht der Abstand vom tiefsten zum höchsten Ton sechs Halbtonschritten, also einer verminderten Quinte.

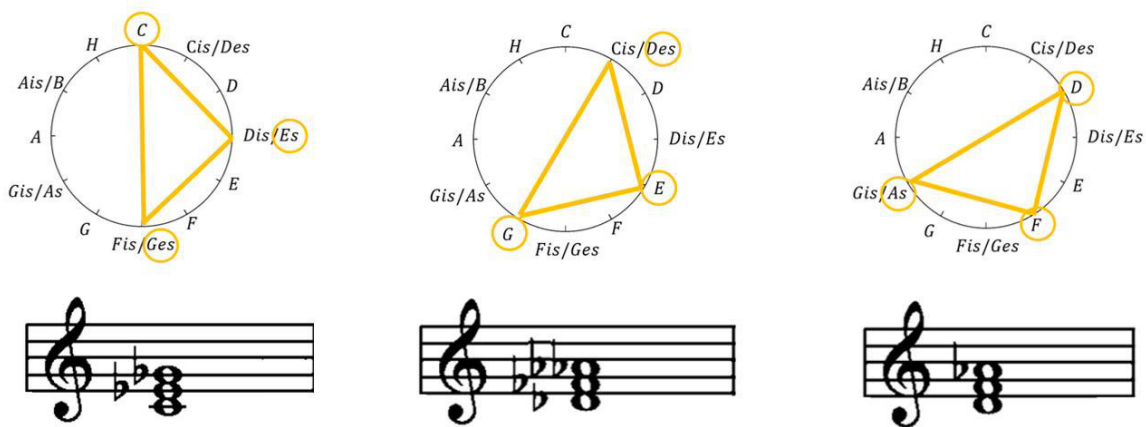


Abbildung 4.24.: verminderte Dreiklänge

Die Intervallabstände beim verminderten Septakkord betragen ebenfalls jeweils eine kleine Terz, dieser Akkord setzt sich jedoch aus vier Noten zusammen. Es gibt insgesamt nur drei klangverschiedene verminderte Septakkorde, da alle anderen Umkehrungen dieser drei Akkorde sind.<sup>132</sup> Die Töne eines Septakkords können also zur Bildung eines neuen Septakkords umgeschichtet werden, da sich die Noten jedoch nicht ändern, ist die Abweichung klanglich kaum spürbar.

In Abbildung 4.25. werden die drei verminderten Septakkorde in Notenschreibweise und mit Hilfe der Kreisdarstellung veranschaulicht. Die Symmetrie der Akkorde wird anhand der quadratischen Figuren in den Kreisdarstellungen der chromatischen Skala ersichtlich. Wie bei den verminderten Dreiklängen betragen die Abstände zwischen den Noten jeweils drei Halbtonschritte. Die Tatsache, dass es nur drei verschiedene Septakkorde gibt und die restlichen

<sup>132</sup> Amon 2005, S. 131

durch Umkehrung dieser gebildet werden, wird in der Abbildung durch den Umstand ersichtlich, dass in den drei Abbildung jeder Ton insgesamt einmal markiert wurde.

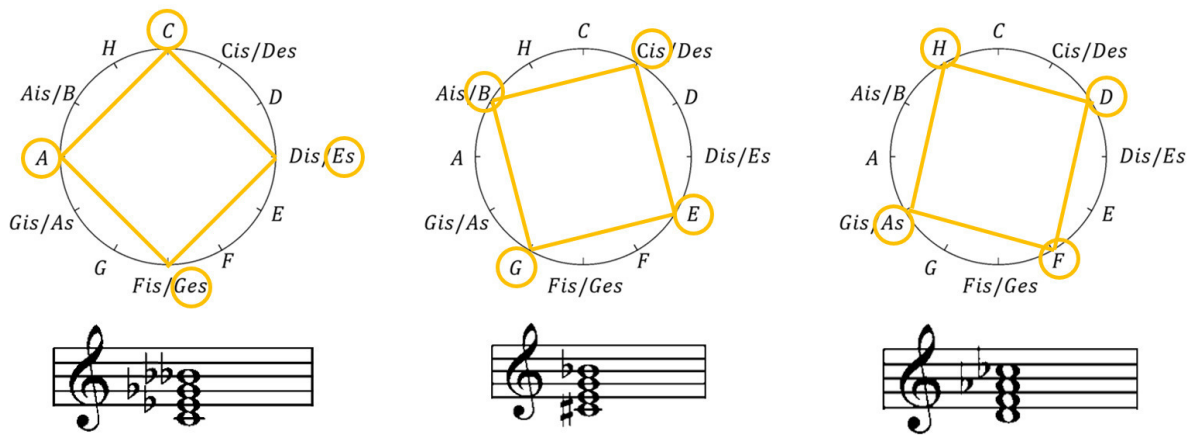


Abbildung 4.25.: verminderte Septakkorde

Der übermäßige Dreiklang besteht aus zwei großen Terzen, die als Akkordrahmen eine übermäßige Quinte ergeben. Wie bei den verminderten Septakkorden gibt es auch nur eine begrenzte Anzahl von übermäßigen Dreiklängen, da sich die übrigen durch die Umkehrung von diesen ergeben.

In der folgenden Abbildung werden diese vier übermäßigen Dreiklänge dargestellt. Bei der Figur, die sich durch die Verbindung der dargestellten Töne in der Kreisdarstellung ergibt, handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck. Beim Betrachten der Kreisdarstellung wird ersichtlich, dass alle Töne jeweils vier Halbtonschritte Abstand voneinander haben und der Intervallabstand vom tiefsten zum höchsten Ton 8 Halbtonschritte beträgt.

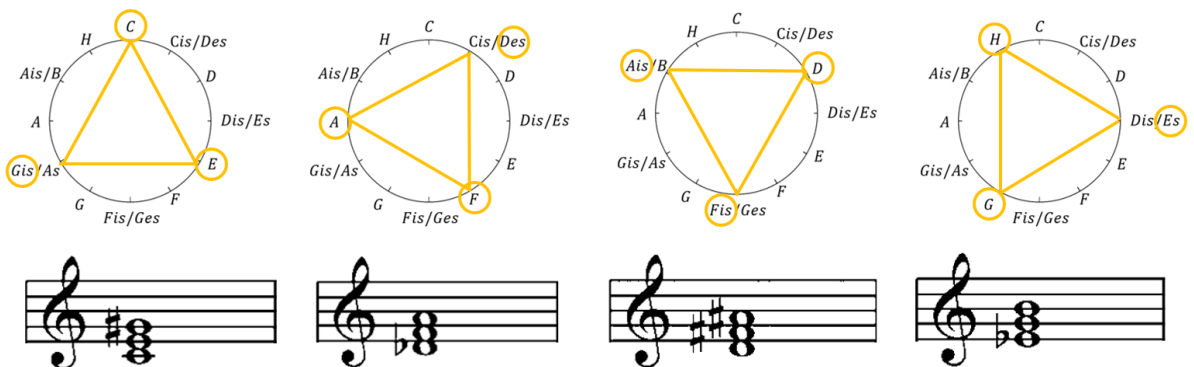


Abbildung 4.26.: übermäßige Dreiklänge

Beim Vergleich der Figuren, die bei verminderten Dreiklängen, verminderten Septakkorden und übermäßigen Dreiklängen durch Verbindung der verwendeten Töne in der chromatischen Kreisdarstellung entstehen, wird ersichtlich, dass es sich in allen Fällen um symmetrische Figuren handelt. Ein gleichschenkliges Dreieck hat eine Symmetrieachse, ein Quadrat vier und ein gleichseitiges Dreieck drei. Die Symmetrie der Intervallabstände wird somit auch in den geometrischen Figuren, die durch Verbindung der in den Akkorden verwendeten Töne in der Kreisdarstellung entstehen, ersichtlich.

Mit der Weiterentwicklung musikalischer Strukturen im 20. Jahrhundert werden die symmetrischen Akkorde erweitert und es kommen noch Ganztonakkorde, Halbtonakkorde, sowie Quint-, Quart- und Tritonusklänge zur Gruppe der Isointervallakkorde hinzu.<sup>133</sup> Mit dem Aufkommen der atonalen Musik zählen ebenfalls Akkorde, die mit der Transformation der Spiegelung verbunden sind, zur Gruppe symmetrischer Akkorde.

Interessant ist, dass sich auch bei nicht-symmetrischen Akkorden das Phänomen erkennen lässt, dass alle Typen eines bestimmten Akkords eine kongruente Figur in der chromatischen Kreisdarstellung aufweisen, wenn die Töne des jeweiligen Akkords durch Linien verbunden werden. Ein Problem bei der Kreisdarstellung ist allerdings, dass Töne nicht doppelt markiert werden können, wenn der Intervallabstand genau eine Oktave beträgt.<sup>134</sup> Wird also beispielsweise der Akkord c-g-c gespielt, der ein tiefes und ein hohes c umfasst, dann kann dieser Akkord nur durch eine Linie in der Kreisdarstellung, die die beiden Noten c und g verbindet, dargestellt werden. In diesen Fällen stößt die Kreisdarstellung folglich an ihre Grenzen.

#### **4.2.2. Symmetrische Tonleitern**

Neben Akkorden können auch Tonleitern symmetrische Konzepte beinhalten. Symmetrische Skalen haben allerdings im Gegensatz zu nicht-symmetrischen Tonleitern den Nachteil, dass sie nur begrenzt transponierbar sind, da ihre Intervallbeschaffenheit schnell zu Kopien mit gleichem Tonvorrat führt.<sup>135</sup> Im Folgenden werden einige symmetrische Skalen vorgestellt und

---

<sup>133</sup> Amon 2011, S. 540

<sup>134</sup> Vgl. Tymoczko, S. 113

<sup>135</sup> Amon 2005, S. 309

ihre Symmetrie mit Hilfe der bereits bei symmetrischen Akkorden verwendeten Kreisdarstellung der chromatischen Tonleiter veranschaulicht.

Bei der chromatischen Skala handelt es sich ohne Zweifel um eine symmetrische Tonleiter, da alle zwölf chromatischen Töne einen Intervallabstand von einem Halbton aufweisen.

Offensichtlich ist die Ganztonleiter, bei der der Abstand der Intervalle zwischen den Nachbarsnoten immer einen Ganztonschritt beträgt, ebenfalls symmetrisch. Da sie auf den chromatischen Tönen basiert und sich eine Ganztonleiter aus sechs verschiedenen Tönen zusammensetzt, gibt es insgesamt nur zwei verschiedene Ganztonleitern. In der folgenden Abbildung sind links die beiden Ganztonleitern abgebildet und rechts in der Kreisdarstellung die verwendeten Töne in grün markierten Kreisen dargestellt. Beim Betrachten der Verteilungen der grünen und nicht ausgefüllten kleinen Kreise wird die Symmetrie der Tonleitern ersichtlich.



Abbildung 4.27.: Ganztonleiter

Eine besondere Bedeutung bei symmetrischen Tonleitern hat die Oktatonik. Die Skala dieses Tonsystems wird als symmetrisch bzw. zyklisch bezeichnet, weil sich die Ganz- und Halbtonabstände abwechseln. Demnach gibt es auch bei der Oktatonik zwei verschiedene Tonleitern, die entweder mit einem Ganz- oder Halbton beginnen und anschließend ein Wechsel zwischen Ganz- und Halbtonschritten stattfindet.

In der folgenden Abbildung werden die beiden Skalen des oktagonischen Tonsystems mit ihren jeweiligen Tonabständen dargestellt.

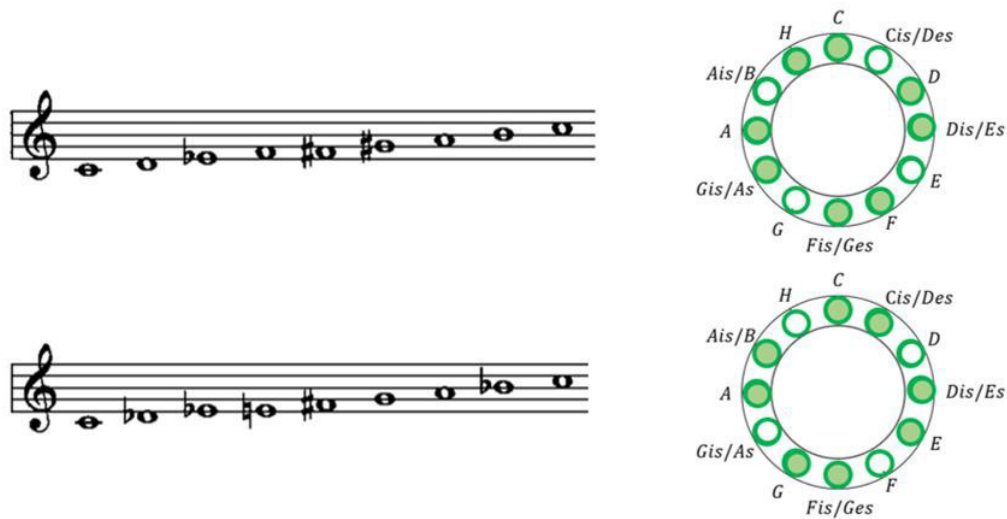


Abbildung 4.28.: Tonleitern der Oktatonik

Arbonès und Milrud weisen darauf hin, dass es insgesamt sieben symmetrische Tonleitern gibt, die eine Oktave umfassen und die Intervalle, die ein Notenpaar jeweils trennen, symmetrisch verteilen. Diese Feststellung stützen sie auf den französischen Komponisten Olivier Messiaen, der diese Tonleitern in der Mitte des 20. Jahrhunderts als symmetrisch klassifiziert hat.<sup>136</sup> Die ersten beiden von Messiaen genannten symmetrischen Tonleitern sind die bereits erwähnte Ganztonleiter und die oktagonische Tonleiter. Die fünf noch fehlenden Tonleitern werden im Folgenden vorgestellt, es wird aber auf eine vollständige Abbildung aller Transpositionen der Tonleiter verzichtet und jeweils nur eine mögliche Tonleiter dargestellt.

Die dritte von Messiaen als symmetrisch bezeichnete Tonleiter besteht aus drei Gruppen, die jeweils vier Töne umfassen und auf der Intervallfolge  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  aufgebaut sind.

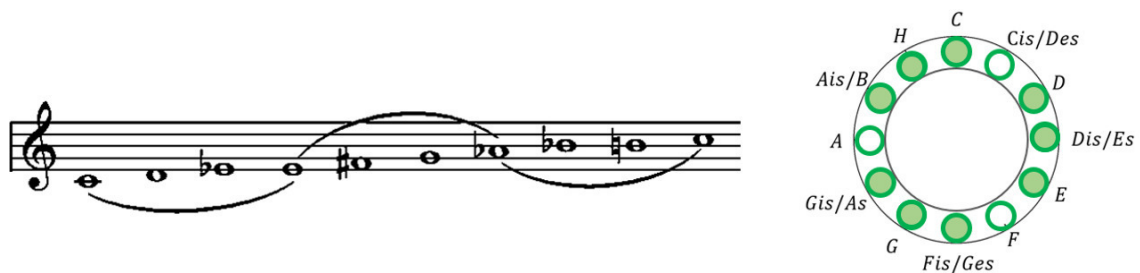


Abbildung 4.29.: dritte symmetrische Tonleiter

<sup>136</sup> Vgl. Arbonès/Milrud 2018, S. 93 f.

Eine weitere symmetrische Tonleiter besteht aus der Intervallfolge  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  und enthält zwei Gruppen.

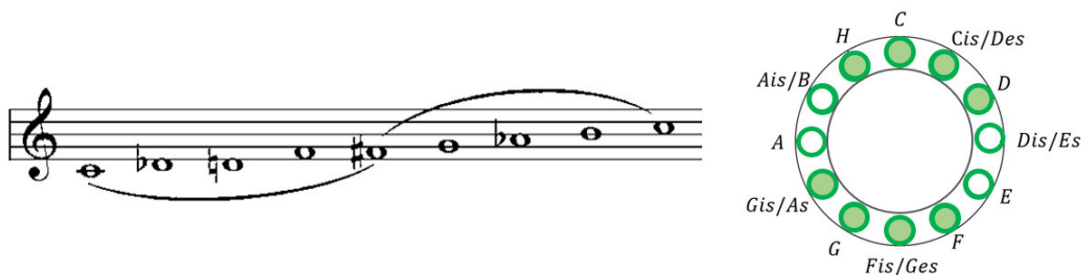


Abbildung 4.30.: vierte symmetrische Tonleiter

Bei der fünften Tonleiter, die aus zwei Gruppen besteht, wird die Symmetrie bereits in der Intervallfolge einer Gruppe ersichtlich. Diese Tonleiter besteht aus sechs verschiedenen Tönen und zeichnet sich durch die Intervallabstände  $\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2}$  aus.

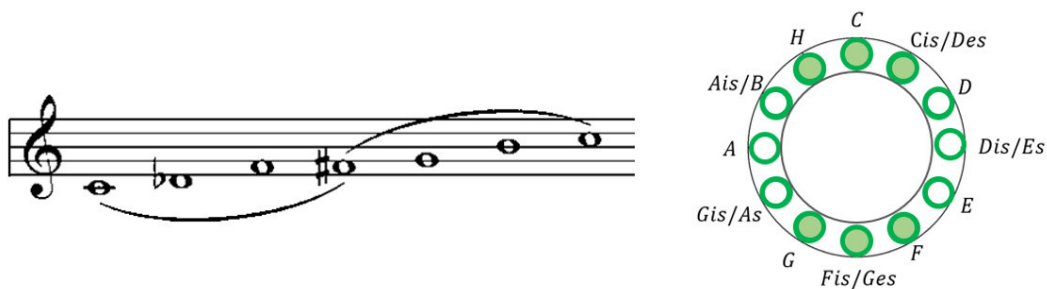


Abbildung 4.31.: fünfte symmetrische Tonleiter

Eine weitere Tonleiter ist in zwei Gruppen aus fünf Tönen unterteilt, die durch die Intervallabstände  $1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  voneinander getrennt sind.

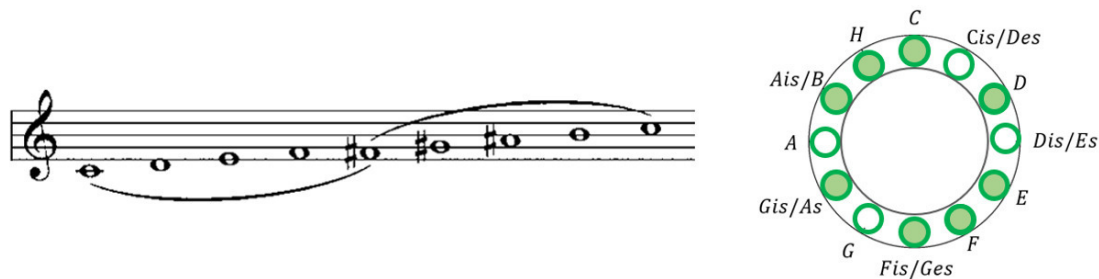


Abbildung 4.32.: sechste symmetrische Tonleiter

Die letzte von Messiaen genannte symmetrische Tonleiter setzt sich aus den Tonabständen  $1/2 - 1/2 - 1/2 - 1 - 1/2$  zusammen und besteht aus zwei Gruppen mit jeweils sechs Tönen.

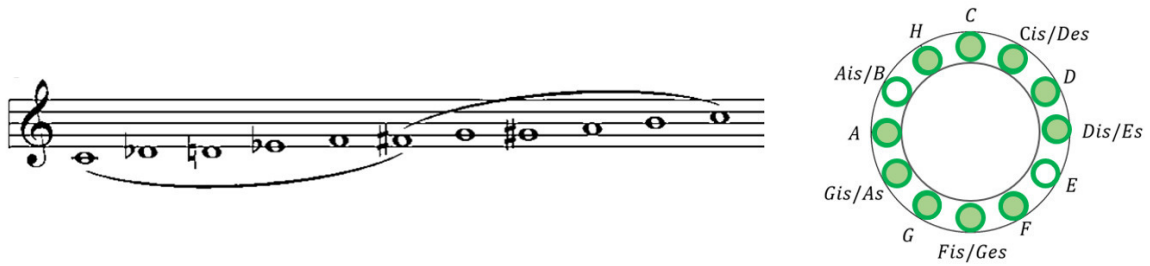


Abbildung 4.33.: siebte symmetrische Tonleiter

# Schlussfolgerungen

Die Verbindung zwischen Mathematik und Musik wurde in der Literatur bereits ausgiebig diskutiert, der Bedeutung von Geometrie in der Musik wird aber häufig weniger Beachtung geschenkt. Diese Arbeit knüpft an dieser Stelle an und behandelt die in der Musik präsenten geometrischen Konzepte.

Geometrie stellt nicht nur bei physikalischen Schwingungen, die sich ausgehend von einer Schallquelle ausbreiten, ein wichtiges Hilfsmittel bei der Beschreibung mathematischer Vorgänge dar, sondern ist ebenfalls beim tatsächlichen Kompositionsvorgang präsent. Viele bekannte Musiker der Geschichte bedienten sich bei der Komposition ihrer Musikstücke an Transformationen, die auf Grundlagen der Geometrie beruhen. Der Einsatz geometrischer Konzepte in der Musik ist aber keinesfalls ein Trend der Moderne, sondern seit mehreren Jahrhunderten ein wichtiger Bestandteil der theoretischen Musiklehre. Bereits in der Antike wurde die Relevanz der Geometrie bei der Entwicklung von Stimmungssystemen, ohne die ein Zusammenspielen mehrerer Instrumente nicht möglich wäre, erkannt. Da Musik und Mathematik und die Beziehung der Musik zur Geometrie im Speziellen auf eine lange gemeinsame Vergangenheit zurückblicken, wird in dieser Arbeit auch auf einige geschichtliche Fakten Bezug genommen und es werden unter anderem bekannte Persönlichkeiten und berühmte Musiker vorgestellt.

Die Musik kann zwar mit Hilfe der Mathematik beschrieben und untersucht werden, jedoch ist letztere nicht in allen Bereichen der Musik gleich stark präsent. Manchmal bedarf es einer näheren Betrachtung aus einer musiktheoretischen Sicht, um anschließend auf die auf diese Weise gewonnenen Erkenntnisse mit Hilfe der Mathematik näher eingehen zu können. So lässt sich beispielsweise bei der Betrachtung von Tonsystemen, Tonleitern und Tonarten anfänglich keine enge Verbindung zur Mathematik feststellen. Bei einer genaueren Auseinandersetzung mit der Thematik wird aber ersichtlich, dass vor allem symmetrische Konzepte eine Verbindung zu Tonsystemen aufweisen und einen wichtigen Beitrag zu der Komposition von Musikstücken leisten.

Ich persönlich vertrete die Überzeugung, dass Musik eine Kunstform ist, die man nicht erlernen kann. Ein leidenschaftlicher Musiker, der es schafft, seine Emotionen in seinen Stücken zu vermitteln und den Hörer in eine bestimmte Gefühlslage zu versetzen, ist etwas, das dem

Menschen entweder angeboren ist oder nicht. Das Spielen eines Instrumentes kann zwar gelernt werden, doch nicht jeder kann mit seiner Musik wahre Gefühle ausdrücken. Somit hat die Musik etwas Mystisches und Unerklärliches an sich und mit Hilfe der Mathematik kann dieses Mysterium rund um die Musik zumindest in bestimmten Aspekten durchleuchtet werden. Ich schließe meine Ausführungen mit den Worten Galileo Galileis:

*„Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.“*

# Abbildungsverzeichnis

|       |                                                                                                                                                                                            |    |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1.  | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 11 |
| 1.2.  | Roederer, Juan G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik<br>(Springer, Berlin/Heidelberg 2000) S. 22 .....                                                               | 12 |
| 1.3.  | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 12 |
| 1.4.  | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 13 |
| 1.5.  | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek; vgl. Arbonès, Javier; Milrud, Pablo:<br>Die Mathematik der Musik. Rhythmus, Resonanz und Harmonie (Librero,<br>Kerkdriel 2018) S. 104 ..... | 14 |
| 1.6.  | <a href="https://thumbs.dreamstime.com/t/klaviertastatur-lang-12872275.jpg">https://thumbs.dreamstime.com/t/klaviertastatur-lang-12872275.jpg</a> (Stand:<br>27.5.2018) .....              | 15 |
| 1.7.  | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 19 |
| 1.8.  | Loy, Gareth: Musimatics. The Mathematical Foundations of Music Volume 1<br>(The MIT Press, Cambridge/London 2011) S. 31 .....                                                              | 21 |
| 1.9.  | Loy, Gareth: Musimatics. The Mathematical Foundations of Music Volume 1<br>(The MIT Press, Cambridge/London 2011) S. 32 .....                                                              | 21 |
| 1.10. | Preiner, Judith: Die Fourier-Analyse in der Musik (ungedr. naturwissenschaftl.<br>Diss. Salzburg 2005) S. 27 .....                                                                         | 23 |
| 1.11. | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 27 |
| 1.12. | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 28 |
| 1.13. | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 29 |
| 1.14. | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 30 |
| 1.15. | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 30 |
| 1.16. | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 31 |
| 1.17. | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 31 |
| 1.18. | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                        | 32 |
| 1.19. | Roederer, Juan G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik<br>(Springer, Berlin/Heidelberg 2000) S. 36.....                                                                | 32 |
| 1.20. | Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. Exploring the Connections<br>(John Hopkins University Press, Baltimore 2016) S. 99 f. ....                                                  | 35 |

|       |                                                                                                                                                                                                |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.21. | Ashton, Anthony: Der Harmonograph. In: Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste. Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie (Librero, Köln 2017) S. 200 .....                           | 37 |
| 1.22. | Ashton, Anthony: Der Harmonograph. In: Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste. Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie (Librero, Köln 2017) S. 200 .....                           | 38 |
| 1.23. | Eimert, Herbert; Humpert, Hans Ulrich: Das Lexikon der elektronischen Musik (Gustav Bosse Verlag, Regensburg 1973) S. 190 .....                                                                | 38 |
| 1.24. | Ashton, Anthony: Der Harmonograph. In: Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste. Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie (Librero, Köln 2017) S. 204 .....                           | 39 |
| 1.25. | Kim, Eugene Mikyung: Harmonograph. A Visual Representation of Sound. In: International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (Seoul 2012) S. 492 .....          | 39 |
| 1.26. | Ashton, Anthony: Der Harmonograph. In: Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste. Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie (Librero, Köln 2017) S. 235 .....                           | 40 |
| 2.1.  | Erstellt mit <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                          | 42 |
| 2.2.  | Schröder, Eberhard: Mathematik im Reich der Töne (= Mathematische Schulbücherei 106, Teubner Verlag, Leipzig 1990) S. 46 .....                                                                 | 42 |
| 2.3.  | Erstellt mit <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                          | 43 |
| 2.4.  | Ashton, Anthony: Der Harmonograph. In: Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste. Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie (Librero, Köln 2017) S. 227 .....                           | 46 |
| 2.5.  | Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 209 ..... | 47 |
| 2.6.  | Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 125 ..... | 56 |
| 3.1.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                              | 66 |
| 3.2.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                              | 67 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3.  | Erstellt mit <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek; vgl. Vogel, Martin: Die Lehre von den Tonbeziehungen (= Orpheus-Schriftenreihe zu Grundfragen von Musik 16, Verlag für systemische Musikwissenschaft, Bonn/Bad Godesberg 1975) S. 166 ..... | 68 |
| 3.4.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 72 |
| 3.5.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 73 |
| 3.6.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 73 |
| 3.7.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 74 |
| 3.8.  | Erstellt mit <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek; vgl. Martineau, Jason: Elemente der Musik. In: Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste. Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie (Librero, Köln 2017) S. 275 .....                | 75 |
| 3.9.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 76 |
| 3.10. | Erstellt mit <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                                        | 78 |
| 3.11. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 78 |
| 4.1.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 80 |
| 4.2.  | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                                          | 81 |
| 4.3.  | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                                          | 82 |
| 4.4.  | Erstellt mit <i>Geogebra</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                                          | 82 |
| 4.5.  | Benson, Dave J.: Music. A Mathematical Offering (Cambridge University Press 2007) S. 313 .....                                                                                                                                               | 83 |
| 4.6.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 84 |
| 4.7.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 84 |
| 4.8.  | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 85 |
| 4.9.  | <a href="http://il6.picdn.net/shutterstock/videos/9727358/thumb/1.jpg">http://il6.picdn.net/shutterstock/videos/9727358/thumb/1.jpg</a> .....                                                                                                | 86 |
| 4.10. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 87 |
| 4.11. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 88 |
| 4.12. | Hodges, Wilfrid; Wilson, Robin J.: Musical Patterns. In: Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum, ed. Assayag, Gerard; Feichtinger, Hans Georg; Rodriguez, Jose Francisco (Springer, Berlin/Heidelberg 2002) S. 85 .....         | 88 |
| 4.13. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 89 |
| 4.14. | Arbonès, Javier; Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. Rhythmus, Resonanz und Harmonie (Librero, Kerkdriel 2018) S. 78 .....                                                                                                              | 89 |
| 4.15. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                                                                                                                                            | 90 |

|       |                                                                                                                                 |     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.16. | Arbonès, Javier; Milrud, Pablo: Die Mathematik der Musik. Rhythmus, Resonanz und Harmonie (Librero, Kerkdriel 2018) S. 82 ..... | 91  |
| 4.17. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                               | 92  |
| 4.18. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                               | 92  |
| 4.19. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                               | 94  |
| 4.20. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                               | 94  |
| 4.21. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                               | 95  |
| 4.22. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                               | 95  |
| 4.23. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> , Sandra Hoschek .....                                                               | 96  |
| 4.24. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 98  |
| 4.25. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 99  |
| 4.26. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 99  |
| 4.27. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 101 |
| 4.28. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 102 |
| 4.29. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 102 |
| 4.30. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 103 |
| 4.31. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 103 |
| 4.32. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 103 |
| 4.33. | Erstellt mit <i>Finale Songwriter 2010</i> und <i>PowerPoint</i> , Sandra Hoschek .....                                         | 104 |

# Tabellenverzeichnis

|      |                                                                                                                                                                                                         |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. | Roberts, Gareth E.: From Music to Mathematics. Exploring the Connections (John Hopkins University Press 2016) S. 87 .....                                                                               | 15 |
| 1.2. | Roederer, Juan G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik (Springer, Berlin/Heidelberg 2000) S. 106 .....                                                                              | 17 |
| 2.1. | Vgl. Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 256 .....     | 45 |
| 2.2. | Vgl. Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 257 .....     | 49 |
| 2.3. | Vgl. Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 259 .....     | 52 |
| 2.4. | Glaeser, Georg: Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik (Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, Berlin/Heidelberg 2014) S. 383 .....                                         | 53 |
| 2.5. | Vgl. Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 261 .....     | 54 |
| 2.6. | Vgl. Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 125 .....     | 55 |
| 2.7. | Vgl. Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 253-261 ..... | 59 |
| 3.1. | Vgl. Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 300 .....     | 71 |

|                                                                                                                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2. Vgl. Amon, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005) S. 307 ..... | 75 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

# Literaturverzeichnis

AMON, Reinhard: Lexikon der Harmonielehre. Nachschlagewerk zur durmolltonalen Harmonik mit Analysechiffren für Funktionen, Stufen und Jazz-Akkorde (Doblinger, Wien/München 2005)

AMON, Reinhard: Lexikon der musikalischen Form. Nachschlagewerk und Fachbuch über Form und Formung der Musik von Mittelalter bis zur Gegenwart (Doblinger, Wien 2011)

ARBONÉS, Javier; MILRUD, Pablo: Die Mathematik der Musik. Rhythmus, Resonanz und Harmonie (Librero, Kerkdriel 2018)

ASHTON, Anthony: Der Harmonograph. In: Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste. Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie (Librero, Köln 2017) 181-236

BARKOWSKY, Johannes: Das Fourier-Theorem in musikalischer Akustik und Tonpsychologie (= Schriften zur Musikpsychologie und Musikästhetik 8, Peter Lang Verlag, Frankfurt am Main 1996)

BENSON, Dave J.: Music. A Mathematical Offering (Cambridge University Press 2007)

DARVAS, György: Symmetry. Cultural-historical and Ontological Aspects of Science-Arts Relations. The Natural and Man-made World in an Interdisciplinary Approach (Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin 2007)

EBELING, Martin: Tonhöhe physikalisch – musikalisch – psychologisch – mathematisch (= Systemische Musikwissenschaft Band 2, Peter Lang Verlag, Frankfurt am Main 1999)

EIMERT, Herbert; HUMPERT, Hans Ulrich: Das Lexikon der elektronischen Musik (Gustav Bosse Verlag, Regensburg 1973)

GLAESER, Georg: Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik (Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, Berlin/Heidelberg 2014)

HALL, Donald E.: Musikalische Akustik. Ein Handbuch (Schott, Mainz 1997)

HARKLEROAD, Leon: The Math behind the Music (Cambridge University Press 2009)

HODGES, Wilfrid; WILSON, Robin J.: Musical Patterns. In: Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum, ed. Assayag, Gerard; Feichtinger, Hans Georg; Rodrigues, Jose Francisco (Springer, Berlin/Heidelberg 2002)

KIM, Eugene Mikyung: Harmonograph. A Visual Representation of Sound. In: International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (Seoul 2012) 489-494

KIRSCHE, Peter: Einführung in die Abbildungsgeometrie. Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeiten (= mathematik-abc für das Lehramt, Teubner, Stuttgart/Leipzig 1998)

LOY, Gareth: Musimatics. The Mathematical Foundations of Music Volume 1 (The MIT Press, Cambridge/London 2011)

MALLE, Günther; RAMHARTER, Esther; ULOVEC, Andreas; KANDL, Susanne: Mathematik verstehen 6 (öbv, Wien 2005)

MARTINEAU, Jason: Elemente der Musik. In: Quadrivium. Die vier klassischen freien Künste. Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie (Librero, Köln 2017) 237-290

MOSER, Hans Joachim: Allgemeine Musiklehre (= Sammlung Göschen Band 220/220a, de Gruyter, Berlin 1968)

MÜNXELHAUS, Barbara: Pythagoras musicus (= Orpheus-Schriftenreihe zu Grundfragen von Musik 19, Verlag für systemische Musikwissenschaft, Bonn/Bad Godesberg 1976)

NEUWIRTH, Erich: Musikalische Stimmungen (Springer, Wien/New York 1997)

PIERCE, John R.: Klang. Musik mit den Ohren der Physik (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1999)

POSCH, Brigitte: Musik und Mathematik im Unterricht. Vernetzungsmöglichkeiten, Beispiele und fachdidaktische Analyse (ungedr. naturwissenschaftl. Diss. Wien 2013)

PREINER, Judith: Die Fourier-Analyse in der Musik (ungedr. naturwissenschaftl. Diss. Salzburg 2005)

REIMER, Manfred: Der Klang als Formel. Ein mathematisch-musikalischer Streifzug (Oldenbourg Verlag, München 2011)

ROBERTS, Gareth E.: From Music to Mathematics. Exploring the Connections (John Hopkins University Press, Baltimore 2016)

ROEDERER, Juan G.: Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik (Springer, Berlin/Heidelberg 2000)

SCHAURHOFER, Agathe: Musik und ihre mathematische Saite (ungedr. naturwissenschaftl. Diss. Wien 2009)

SCHRÖDER, Eberhard: Mathematik im Reich der Töne (= Mathematische Schulbücherei 106, Teubner Verlag, Leipzig 1990)

SCHÜFFLER, Karlheinz: Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma. Mathematische Temperierungstheorie in der Musik (Springer, Wiesbaden 2017)

SCHUPP, Hans: Abbildungsgeometrie. Eine elementare Einführung (Verlag Julius Beltz, Weinheim/Berlin 1968)

STEINBAUER, Othmar: Das Wesen der Tonalität (Wien 2006)

STRANG, Gilbert: Lineare Algebra (Springer, Berlin/Heidelberg 2003)

THÜRINGER, Josef: Die Ganztonleiter und ihr Verhältnis zu den Dur- und Molltonarten (= Zur Musik- und Harmonielehre 1, Verlag von F. Gräffner-Leuschner, Oberschützen 1930)

TYMOCZKO, Dmitri: A Geometry of Music. Harmony and Counterpoint in the Extended Common Practice (Oxford University Press 2011)

VOGEL, Martin: Die Lehre von den Tonbeziehungen (= Orpheus-Schriftenreihe zu Grundfragen von Musik 16, Verlag für systemische Musikwissenschaft, Bonn/Bad Godesberg 1975)

VOGEL, Martin: Reine Stimmung und Temperierung. In: Musik und Zahl. Interdisziplinäre Beiträge zum Grenzbereich zwischen Musik und Mathematik, ed. Schnitzler, Günter (= Orpheus-Schriftenreihe zu Grundfragen von Musik 17, Verlag für systemische Musikwissenschaft, Bonn/Bad Godesberg 1976)

WILSON, Dana: Symmetry and its “love-hate” role in music. In: Computers and Mathematics with Applications, Vol. 12 (1) (1986) 101-112

# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Beziehung von Mathematik und Musik und versucht, die Bedeutung geometrischer Konzepte für die Musik aufzuzeigen.

Die Arbeit gliedert sich in insgesamt vier Kapitel. Im ersten Kapitel werden wichtige Fragen der musikalischen Akustik behandelt und auf die physikalischen Aspekte von Klang und Schallausbreitung eingegangen. Es werden die charakteristischen Eigenschaften besprochen, die zur Zusammensetzung eines Tons beitragen, anhand eines Anwendungsbeispiels und der Fourier-Analyse wird auf die Rolle von Obertönen hingewiesen, die Überlagerung harmonischer Schwingungen wird diskutiert und abschließend wird auf die graphische Darstellung von Tönen Bezug genommen.

Thema des zweiten Kapitels sind der Aufbau und die Entwicklung von Stimmungssystemen in der Musik. Mit Hilfe der Cent-Skala wird ein Vergleich der fünf vorgestellten Stimmungssysteme vorgenommen und anschließend auf die Bedeutung des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittelwerts bei der Erstellung eines Stimmungssystems eingegangen. Der Abschluss des Kapitels erfolgt durch die Behandlung von Konsonanz und Dissonanz, einschließlich ihres Einflusses auf die Bildung von Stimmungssystemen.

Das dritte Kapitel geht auf die Bedeutung von Tonsystemen und ihre Beziehung zu Tonarten und Tonleitern ein. Es werden mehrere bekannte Tonsysteme vorgestellt und ihre Bedeutung in der Musik diskutiert.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit symmetrischen Konzepten in der Musik und behandelt im Besonderen den Einsatz von Kompositionstechniken, die eine enge Verbindung zu geometrischen Konzepten aufweisen. Es werden zahlreiche Transformationen musikalischer Motive vorgestellt und diese anhand von Illustrationen und Notenbeispielen veranschaulicht. Abschließend wird auf harmonische Symmetrien eingegangen und ihre Bedeutung für die Musik anhand symmetrischer Akkorde und symmetrischer Tonleitern aufgezeigt.

# Abstract

This paper deals with the relation of music and mathematics and tries to show the significance of geometric concepts in music.

The paper is divided into a total of four chapters. The first chapter deals with important issues of musical acoustics and the physical aspects of sound and its propagation. It discusses the characteristic features that contribute composition of sound, uses an example and the Fourier analysis to highlight the role of harmonics, contains a discussion about superposition of harmonic vibrations and finally references to graphic representations of sound.

The second chapter discusses temperaments in music, including an analysis about their structure and development. The five presented temperaments are compared by using the cent scale and the importance of the arithmetic, geometric and harmonic mean and their function by creating temperaments are mentioned. The chapter closes with presenting consonance and dissonance, including their influence on shaping temperaments.

The third chapter deals with the meaning of tonal systems and their relation to keys and scales. This chapter includes a presentation of several well-known tonal systems and discusses their significance in music.

The last chapter deals with symmetrical concepts in music and demonstrates the use of compositional techniques, that are related to geometric concepts. Numerous transformations of musical motifs are presented and exemplified by using illustrations and sheet music. A discussion about harmonic symmetries and their significance in music follows, including an explanation of symmetric chords and symmetric scales.