



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Wo liegen die Schwierigkeiten beim Konzept der
Funktion im Schulunterricht?“

verfasst von / submitted by

Corina Sofie Riepler

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements of the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt/
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 482 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik
und UF Bewegung und Sport

Betreut von / Supervisor:

Prof. Mag. Dr. Bernhard Krön Privatdoz

Danksagung

Zu Beginn möchte ich mich vor allem bei Mag. Dr. Bernhard Krön für die Hilfe bei der Themenstellung und die ausgezeichnete Betreuung bedanken.

Ebenfalls geht ein großer Dank an Elisabeth Raneburger, die in kürzester Zeit meine Diplomarbeit korrigiert hatte.

Ein großer Dank geht auch an meine Studienkollegin Katja Rauter, die während meines Studiums zu meiner besten Freundin wurde. Dank ihr zog ich mein Studium erst durch, denn wir verbrachten viele schlaflose Lernnächte miteinander.

Vor allem aber möchte ich mich an dieser Stelle bei meinen Eltern für die Hilfestellungen und die uneingeschränkte Unterstützung bedanken und natürlich auch für deren finanziellen Mitteln, die mein Studium erst ermöglichten.

Auch meinem Bruder möchte ich hiermit danken, dass er mich als seine Schwester und gleichzeitig auch Mitbewohnerin aushielt, mich immer unterstützte und zum Teil auch mein privater Koch war.

Schlussendlich möchte ich hiermit auch die Gelegenheit nutzen all jenen zu danken, die ich während meines Studiums kennenlernen durfte, und die mich immer hilfsbereit unterstützt haben.

Abstract

Obwohl Funktionen leicht klar definiert werden können, haben Schülerinnen und Schüler oft große Verständnisschwierigkeiten im Zusammenhang mit der Begriffsbildung.

In meiner Diplomarbeit werden die Gründe für diese Schwierigkeiten beschrieben und mögliche Konsequenzen diskutiert.

Das Hauptkapitel besteht aus mehreren Studien zum Funktionsbegriff, die in Österreich, Deutschland, der Schweiz oder Großbritannien durchgeführt wurden. Dabei wurden sowohl Schülerinnen und Schüler, als auch Studierende getestet. Anhand dieser Untersuchungen konnte ich herausfinden, wo die diesbezüglichen Schwierigkeiten der Schüler und Schülerinnen im Schulunterricht liegen.

Die möglichen Konsequenzen, die von Lehrerinnen und Lehrern in Betracht gezogen können, hängen davon ab, welche Ursachen die Lernschwierigkeiten haben. Zuletzt werden Möglichkeiten gezeigt, wie der Funktionsbegriff verständlich aufgebaut werden kann.

Vorwort

Der Funktionsbegriff gilt heute als einer der zentralen Begriffe der Mathematik. Er wird in vielen Teilen der Schulmathematik benötigt. Da er so klar definiert ist, war ich ursprünglich der Meinung, dass er keine Probleme bereitet. Diese Meinung vertrete ich nach meinen persönlichen Erfahrungen mit Schülerinnen und Schülern und nach dem Verfassen meiner Diplomarbeit nicht mehr, da er sehr wohl sowohl für die Schülerinnen und Schülern, als auch für die Studentinnen und Studenten große Schwierigkeiten bereitet.

Auf dieses Thema bin ich zum ersten Mal Anfang letzten Sommers gestoßen. Ich hatte mit meiner ersten Klasse HAK die Einführung des Funktionsbegriffs begonnen und bemerkte, dass die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten damit hatten. Schon die Definition wurde von den meisten Schülerinnen und Schülern nicht verstanden. Daher beschloss ich, diese Schwierigkeiten genauer zu untersuchen, um auch eine Lösung zu finden, wie ich meinen Schützlingen den Funktionsbegriff besser näherbringen kann. Denn der Funktionsbegriff ist für die gesamte Oberstufe wichtig. Deshalb auch einen Dank an meine Schülerinnen und Schüler der BHAK Wien 10.

Zum Aufbau meiner Diplomarbeit:

Im ersten Kapitel werde ich einen kurzen, allgemeinen Überblick über den Funktionsbegriff geben. Dabei wird seine historische Entwicklung skizziert und verschiedene Definitionen in verschiedenen Schultypen verglichen. Außerdem wird beschrieben, wo der Begriff außerhalb des Schulunterrichts verwendet wird.

Im zweiten Kapitel wird erklärt, wie wichtig allgemeine Grundvorstellungen für das bessere Verinnerlichen sind. Dann wird genauer auf die benötigten Grundvorstellungen des Funktionsbegriffes eingegangen.

Das dritte Kapitel ist das Hauptkapitel. Hier werden zuerst allgemeine Lernschwierigkeiten beschrieben und dann die wissenschaftstheoretischen Schwierigkeiten nach Sierpinska erörtert. Daraufhin werden mehrere Studien mit sowohl Schülerinnen und Schülern als auch Studentinnen und Studenten beschrieben, dann verglichen und anschließend herausgefunden, welche Schwierigkeiten die Schülerinnen und Schüler beim Konzept des Funktionsbegriffes im Schulunterricht haben.

Beim vierten und letzten Kapitel werden die möglichen Konsequenzen für das Unterrichten des Funktionsbegriffes beschrieben. Dafür wird zuallererst mit der Entstehung der Lernschwierigkeiten begonnen. Danach werden die Stufen des Verständnisses des Funktionsbegriffes

erklärt, damit die Lehrperson immer im Hinterkopf hat, wie die Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff aufnehmen. Zum Schluss werden Möglichkeiten zum Aufbau des Funktionsbegriffes, dessen Definition und Eigenschaften von Funktionen gegeben.

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionsbegriff	1
1.1	Geschichte	1
1.2	Definitionen des Funktionsbegriffs	4
1.3	Entstehung des Funktionsbegriffs im Mathematikunterricht	8
1.4	Funktionsbegriff im Mathematikunterricht	9
1.5	Funktionsbegriff außerhalb des Mathematikunterrichts	10
1.5.1	Veränderungen	10
1.5.2	Ursachen	11
1.5.3	Zufällige Verknüpfungen	11
1.6	Funktionseigenschaften	11
1.6.1	Nullstellen	11
1.6.2	Extremstellen	13
1.6.3	Monotonie	13
1.6.4	Stetigkeit	14
2	Grundvorstellungen	15
2.1	Modellbildung	15
2.2	Allgemeine mathematische Grundvorstellungen	15
2.2.1	Primäre und sekundäre Grundvorstellungen	17
2.2.2	Normative und deskriptive Gesichtspunkte	17
2.2.3	Wieso Grundvorstellungen in der Mathematik?	18
2.2.4	Ziel der Grundvorstellungen	20
2.3	Grundvorstellungen von Funktionen	20
2.3.1	Funktionen im alltäglichen Leben	21
2.3.2	Drei Grundvorstellungen der Funktion	21
2.3.3	Vergleich der drei Grundvorstellungen	25
3	Schwierigkeiten der Funktionen	28
3.1	Lernschwierigkeiten im Allgemeinen	28
3.1.1	Was sind Lernschwierigkeiten?	28

3.1.2	Definitionen	29
3.1.3	Rechenschwierigkeiten	30
3.2	Wissenschaftstheoretische Schwierigkeiten des Funktionsbegriffes	31
3.2.1	16 Hindernisse der Funktion von Sierpinski	31
3.3	Didaktische Schwierigkeiten des Funktionsbegriffs	39
3.3.1	„Concept image“ und „Concept definition“	39
3.3.2	Studie von Bakar und Tall	41
3.3.3	Studie von Kösters	49
3.3.4	Studie von Stoye	53
3.3.5	Studie von Kokol-Voljć	59
3.3.6	Studie von Hattikudur	64
3.3.7	Studie von Davis	65
3.3.8	Studie von Moschkovic	65
3.3.9	Studie von Weigand	66
3.3.10	Resultat	75
4	Konsequenzen	83
4.1	Entstehung von Lernschwierigkeiten	83
4.2	Funktionsbegriff im Unterricht	83
4.3	Entwicklung des Funktionsbegriffes im Schulunterricht	86
4.4	Funktionsbegriff als Leitbegriff	87
4.5	Stufen des Verständnisses des Funktionsbegriffes im Schulunterricht	87
4.5.1	Stufe 1: Inhaltliche, nichtformale Kenntnis des Begriffes	87
4.5.2	Stufe 2: Formale Kenntnis des Begriffs	88
4.5.3	Stufe 3: Integrierte Kenntnis des Begriffes	89
4.5.4	Stufe 4: Kritische Kenntnis des Begriffes	89
4.6	Aufbau der Definition des Funktionsbegriffes	90
4.7	Aufbau der Funktionseigenschaften	90
5	Abbildungsverzeichnis	92
6	Tabellenverzeichnis	94
7	Literaturverzeichnis	96

1 Funktionsbegriff

David Hilbert ist folgender Einstellung: „Nächst dem Zahlbegriff ist der Funktionsbegriff der wichtigste in der Mathematik“ (Heuser, 2009, S. 102). Durch diese Aussage legt er nahe, welche wichtige Rolle der Funktionsbegriff in der Mathematik spielt. Er ist nicht nur in der Anwendung zu finden, sondern man kann ihn in fast allen Teilen der Mathematik verwenden (Heuser, 2009, S. 102).

1.1 Geschichte

Überlegungen zum Funktionsbegriff gab es schon ca. 2000 v. Chr. Dabei waren die Babylonier die Ersten, die mit funktionalen Zusammenhängen auf den „Plimpton 322“ – Tafeln (siehe Abb. 1) arbeiteten und somit die erste Funktion in Tabellenform schufen. Die „Plimpton 322“ – Tafeln sind Keilschrifttafeln und gehören zu der Sammlung von George Arthur Plimpton (Hischer, 2012, S. 102).



Abbildung 1: „Plimpton 322“ – Tafeln (Hischer, 2012, S. 102)

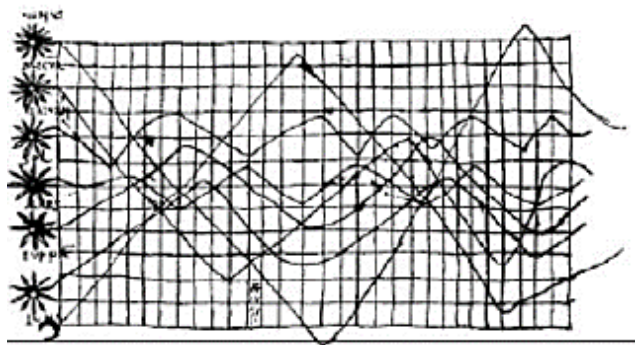


Abbildung 2: Erste Darstellung einer zeitabhängigen Funktion (Laakmann, 2013, S. 73)

Die Entwicklung ging weiter in der Antike und im Mittelalter. Hier wurde zum ersten Mal eine graphische Darstellung konstruiert, die als archimedische Spirale dargestellt wurde. Im 10. und 11. Jahrhundert galt diese graphische Darstellung als erste zeitabhängige Funktion. Sie zeigt den Verlauf der Planetenstrecken sowohl von Jupiter, Merkur, Mars und Venus als auch die Bahnen der Sonne und des Mondes (siehe Abb. 2). Obwohl dieses Diagramm sehr schlampig angefertigt wurde, wird es als erste Funktion mit einem Koordinatensystem angesehen. Oresme (1323 – 1382) erstellte ein Diagramm, das unserem heutigen Balken- und Säulendiagramm ähnlich ist. Dabei stand für ihn vor allem die zeitliche Veränderung im Vordergrund. Die Formeldarstellung für die Funktionen entstand erst durch die Einführung der Buchstaben anstelle von Unbekannten durch Viète (1540 – 1603) und Descartes (1596 – 1650). Somit entstanden ab dem 17. Jahrhundert schon die heutigen vier wichtigsten Darstellungsarten (Tabelle, Graphik, Balken- und Säulendiagramm sowie Formel) der funktionalen Zusammenhänge (Laakmann, 2013, S. 73).

Erst ab diesem Zeitpunkt begann die Entwicklung unseres heutigen Funktionsbegriffes. Zuerst verwendete den Begriff „Funktion“ der zweite Begründer der Analysis, **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716), im Jahre 1673, wobei er diesen nur als einen geometrischen Begriff im Auge hatte (Feldt-Caesar, 2017, S. 186; Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm, & Weigand, 2016, S. 25). Er sah Funktionen als „Strecken bzw. deren Längen, die beispielweise von Abszissen, Ordinaten, Tangenten oder Normalen abgeschnitten und von einem festen Kurvenpunkt bestimmt werden“ (Feldt-Caesar, 2017, S. 186).

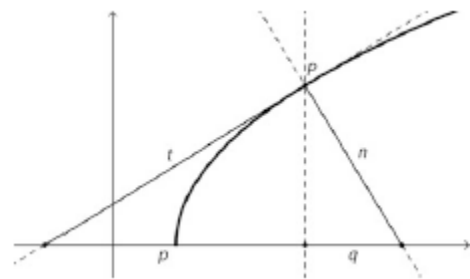


Abbildung 3: modellhafte Funktion von Leibniz (Greefrath et al., 2016, S. 25)

Bei einem darauffolgenden Briefwechsel mit **Johann Bernoulli**, in dem beide ihre Ideen austauschten, stellte Bernoulli 1718 mit seinem Bruder Jacob Bernoulli folgende Definition auf:

“Man nennt Funktion einer veränderlichen Größe eine Größe, die auf irgendeine Weise aus eben dieser veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist.” (Bernoulli, zitiert nach Malle, 1996, S. 5)

In diesen Zeilen verfasste Bernoulli zum ersten Mal eine Definition des Funktionsbegriffes, mit der man weg von der geometrischen Sichtweise kam (Malle, 1996, S. 5).

Zu Beginn des 18. Jahrhunderts spezialisierte sich der Schüler Bernoullis, **Leonhard Euler** (1707 – 1783), auf den Funktionsbegriff und baute ihn weiter aus. Er versuchte hierbei zwischen dem Algebraischen und Geometrischen zu differenzieren und schaffte deshalb einen Funktionsterm und einen Funktionsgraphen. Er verfasste dazu in seinem Buch „Introductio in analysin infinitorum“ im Jahre 1748 folgende Definitionen:

- „Eine Funktion einer veränderlichen Zahlengröße ist ein analytischer Ausdruck („expressio analytica“), der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Zahlengröße, aus Zahlen selbst oder konstanten Zahlengrößen zusammengesetzt ist.
- Eine Funktion wird durch eine von links nach rechts von freier Hand („in libero manuscriptu“) gezeichnete Kurve definiert“ (Büchter & Henn, 2010, S. 17).

Auch von Euler kommt die heute noch bestehende Schreibweise der Funktionen $f(x)$ (Büchter & Henn, 2010, S. 17; Greefrath et al., 2016, S. 26).

Wie sich später herausstellte, erschuf Euler durch die Entwicklung des Funktionsbegriffs eine Grundlage für viele Mathematiker im 18. Jahrhundert. Denn ab diesem Zeitpunkt kam es zu einer großen Weiterentwicklung in der Funktionstheorie und Analysis (Greefrath et al., 2016).

Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805 – 1859) abstrahierte 1837 den Funktionsbegriff weiter. Er differenzierte anstatt eines Terms die unabhängige und abhängige Größe voneinander und

strebte als erster Mathematiker nach der Eindeutigkeit als charakteristischem Merkmal (Büchter & Henn, 2010, S. 17; Nitsch, 2015, S. 18):

„Eine Funktion heißt y von x , wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert von y entspricht; gleich, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetz von x abhängt oder nicht, ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.“ (Büchter & Henn, 2010, S. 17)

Richard Dedekind stellte (1831 – 1916) im Jahre 1869 die auch noch heute brauchbare und ausreichende Definition für den Funktionsbegriff her:

„Unter einer Abbildung Φ eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\Phi(s)$ bezeichnet wird.“ (Büchter & Henn, 2010, S. 18)

Hier wird diese nicht als eine Vorschrift gesehen und der Begriff „Abbildung“ wird sowohl damals als auch heute als ein Synonym für „Funktion“ gebraucht. Weiters gelangte Dedekind 1887 durch die Miteinbeziehung von Relationen und aus der Grundlage von den allgemeinen Mengen zur folgenden mengentheoretischen Funktionsdefinition:

„Aus zwei nichtverschwindenden Mengen A, B können wir geordnete Paare $p = (a, b)$ bilden, deren erstes Element a ein Element von A , deren zweites Element b ein Element von B ist. [...] betrachten wir die Menge P solcher Paare, und zwar von der Beschaffenheit, dass jedes Element a von A in einem und nur einem Paar p von P als erstes Element auftritt. Jedes Element a bestimmt auf diese Weise ein und nur ein Element b , nämlich dasjenige, mit dem es zu einem Paar $p = (a, b)$ verbunden auftritt; dieses durch a bestimmte, von a abhängige, dem a zugeordnete Element bezeichnen wir mit $b=f(a)$ und sagen, dass hiermit in A [...] eine eindeutige Funktion von a definiert sei.“ (Hausdorff, zitiert nach Stölting, 2008, S. 23)

Durch diese Definition kam man sowohl von der graphischen als auch rechnerischen Darstellung weg und es entstand ein Funktionsbegriff mit der Eindeutigkeit zwischen zwei Mengen (Laakmann, 2013, S. 74).

Einhundert Jahre später kam eine neue Definition zum mengentheoretischen Funktionsbegriff, welcher von „**Nicolas Bourbaki**“ ausging. „Nicolas Bourbaki“ war eine Vereinigung französischer Mathematiker, die 1934 gegründet wurde. Eine ihrer Regeln war, dass niemand in ihrer Gruppe älter als 50 Jahre sein durfte, weshalb im 20. Jahrhundert ein großer personeller Wechsel in dieser Vereinigung vorgenommen wurde. Sie verfolgten einerseits das Ziel, schon bestehende Feststellungen weiterzuentwickeln und andererseits diese in logische Beziehungen zu bringen und daraus die Buchreihe „Éléments de mathématique“ herzustellen. Dadurch machte die Entwicklung im 20. Jahrhundert einen großen Schritt nach vorne. Im Band „Théorie des Ensembles“ ist folgende Definition des Funktionsbegriffes angeführt:

„Seien A und B Mengen sowie F eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$. Das Tripel $f := (F; A; B)$ heißt Funktion, wenn für alle $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x; y) \in F$.“ (Greefrath et al., 2016, S. 31)

Die anfänglichen Definitionen des Funktionsbegriffes waren nur skizzenhaft und ungenau. Je öfter sie nun bearbeitet wurden, desto präziser wurden sie und somit wurde einerseits die Kommunikation bezüglich des Begriffs besser und der Begriff selbst umso verständlicher. Jedoch kam es durch die Präzisierung auch zu Verlusten, wobei manche früheren Begriffe verschwunden sind und deshalb ergänzende Begriffe und verschiedenen Definitionen wieder aufgenommen werden mussten. Somit ging zum Beispiel der Stetigkeitsaspekt dadurch verloren, dass die Kurve nicht mehr freihändig gezeichnet wurde, und musste deshalb wieder neu erfasst werden. Dass die Definitionen immer präziser wurden, heißt nicht, dass jede vollständig war oder gar eine irgendwann die letzte Variante sein wird und somit die Entwicklung abgeschlossen werden könnte. Es werden immer weitere, präzisere und vollständigere Definitionen in der Zukunft vorkommen (Laakmann, 2013, S. 74f.).

1.2 Definitionen des Funktionsbegriffs

Es gibt die unterschiedlichsten Formulierungen von Definitionen für den Funktionsbegriff. Diese möchte ich in den folgenden Zeilen vorstellen.

Auch ist die Definition abhängig davon, welche Schule besucht wird. Dabei kommen die unterschiedlichsten Formulierungen zustande. Die nachstehenden Definitionen sind Beispiele aus den Schulbüchern verschiedener Verlage der **vierten Schulstufe**:

Definition:

„Eine Funktion f ist eine eindeutige Zuordnung. Für jeden zulässigen Eingabewert x legt sie eindeutig einen Funktionswert y fest.“ (Brand et al., 2011, S. 102)

Definition:

„Eine Zuordnung, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y zuordnet, heißt Funktion oder Abbildung.“ (Geretschläger et al., 2008, S. 60)

Definition:

„Sei A eine Menge von reellen Zahlen. Wird jeder Zahl $x \in A$ genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so heißt diese Zuordnung (reelle) Funktion.“ (Malle et al., 2014, S. 126)

Hingegen wird der Definitionsbegriff in der ersten Klasse **Handelsakademie** durch folgende Definitionen beschrieben. Auch hier wurden verschiedene Schulbücher unterschiedlichster Verlage verwendet.

Definition:

„Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Jedem Element x einer Menge A (Definitionsmenge) wird dabei genau ein Element y einer Menge B (Zielfmenge) zugeordnet.“

(Allerstorfer et al., 2016, S. 98)

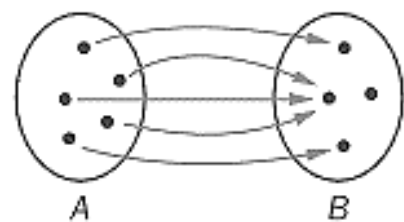


Abbildung 4: Definition Funktion
(Allerstorfer et al., 2016, S. 98)

Definition:

„Eine Zuordnung, die jedem Element x einer Menge D genau ein Element y einer Menge W zuordnet, heißt Funktion.“ (Tinhof et al., 2013, S. 132)

Definition:

„Die Funktion ordnet jedem Element des Definitionsbereichs seinen Funktionswert (oder Wert) bezüglich dieser Funktion zu.“ (Pauer et al., 2014, S. 96)

Definition:

„Die Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Wert, den die unabhängige Variable annehmen kann, genau einen Wert, den die abhängige Variable annehmen kann, zuordnet.“ (Schodl et al., 2012, S. 123)

In unterschiedlichen Büchern, die an der **Universität** von Studentinnen und Studenten verwendet werden, kann man Definitionen der Funktion in der folgenden Form finden.

Definition:

„Eine Relation f heißt Funktion, falls für alle x, y, z gilt: Ist (x, y) aus f und (x, z) aus f , so ist $y = z$ (rechtseindeutig). Man schreibt $y = f(x)$, falls (x, y) aus f gilt.“ (Gartmaier et al., S. 212)

Bezieht man den Definitionsbereich in die Definition mit ein, so gilt Linkstotalität. Dies bedeutet, dass jedes Element des Definitionsbereiches einem anderen Element zugeordnet werden muss:

„Eine Relation f heißt auf einer Menge A , falls f rechtseindeutig und linkstotal ist.“ (Gartmaier et al., 2015, S. 212)

Definition:

„Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge f des kartesischen Produkts $A \times B$ heißt Funktion, wenn für alle $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.“ (Greefrath et al., 2016, S. 42)

Definition:

„ X und Y seien zwei nichtleere, aber ansonsten völlig beliebige Mengen. Unter einer Funktion oder Abbildung f von X nach (oder in) Y versteht man eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ in vollkommen eindeutiger Weise genau eine $y \in Y$ zuordnet. Dieses dem Element x zugeordnete Element y bezeichnen wir auch mit $f(x)$ und nennen es den Wert der Funktion f an der Stelle x oder das Bild vom x unter f , während x ein Urbild von $f(x)$ heißt. X wird die Definitionsmenge oder der Definitionsbereich, Q die Zielmenge von f genannt.“ (Heuser, 2009, S. 104)

Zuerst einmal ist wichtig zu erwähnen, dass der Funktionsbegriff nicht zu den Grundbegriffen zählt, die einfach zu beschreiben sind. Er ist abhängig von anderen Begriffen, deshalb müssen zuallererst diese veranschaulicht werden (Gartmaier et al., 2015, S. 212).

Mit den oben genannten Definitionen wird ersichtlich, dass der Funktionsbegriff auf zwei Arten darstellbar ist. Einerseits kann man ihn durch eine Zuordnung beschreiben, wobei diese Möglichkeit den Abbildungscharakter hervorhebt, und daher wird dies oft mit Pfeildiagrammen und Stabdiagrammen (siehe Abb. 5) beschrieben. Jedoch gilt

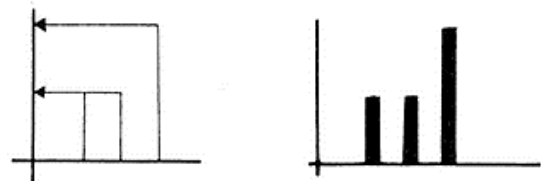


Abbildung 5: Pfeil- und Stabdiagramm (Van Dormolen, 1978, S. 124)

diese Definition als nicht sehr geeignet, da sie nicht die Funktion selbst beschreibt, sondern nur erklärt, was sie macht (Gartmaier et al., 2015, S. 212; Van Dormolen, 1978, S. 124).

Andererseits kann der Funktionsbegriff auch durch die Relation verdeutlicht werden. Hierbei wird das kartesische Produkt verwendet und meist durch Diagramme (siehe Abb. 6) dargestellt. Diese formal exakte Definition wird bei der ersten Variante als Hilfsmittel benutzt. Sie benötigt immer eine Linksloyalität und auch eine Rechtsloyalität, damit die Funktion überhaupt definiert werden kann (Gartmaier et al., 2015, S. 212; Van Dormolen, 1978, S. 124).

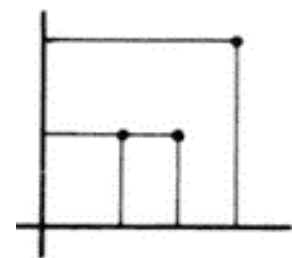


Abbildung 6: Diagramm (Van Dormolen, 1978, S. 124)

Betrachten wir nun all diese beschriebenen Definitionen, dann können wir erkennen, dass in der Schule quasi immer die Definition der Funktion anhand der Zuordnung vorgenommen wird. Dabei ist wichtig, zuvor zu beachten, dass die Definitionsmenge und die Wertemenge definiert werden, damit die Definition verstanden werden kann. Diesen Anspruch erfüllt jedoch nicht jedes Buch, denn einige Autoren und Autorinnen lassen dies weg, was dazu führt, dass die Schülerinnen und Schüler oft ein unvollständiges Verständnis von den Begriffen bekommen und sie somit oft nur auswendig lernen und dabei das Verständnis für den Hintergrund auf der Strecke bleibt. Dagegen helfen nur mehr einige richtige und ergänzende Sätze der Lehrperson, damit der Funktionsbegriff nicht durch ungeklärte Begriffe falscheingepägt wird. In vielen Schulen in Bayern wird die Funktion ebenfalls anhand der Zuordnung eingeführt, wobei oft folgende Definition verwendet wird:

„Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem x -Wert genau einen y -Wert zuordnet.“ (Gartmaier et al., 2015, S. 213)

Sie wird deshalb angewendet, weil es keine weiteren Erklärungen benötigt, sondern sofort klar ist, was der Funktionsbegriff bedeutet. Dabei werden zum besseren Verständnis zusätzlich noch Wertetabellen und Funktionsgraphen verwendet (Gartmaier et al., 2015, S. 213; Van Dormolen, 1978, S. 124; Hofbauer, 1988, S. 103).

Um die Zuordnung ganz wegzulassen, kann die Definition des Funktionsbegriffes anhand der Relation beschrieben werden. Erst in den 1970er und 1980er Jahren wurde diese Variante im Mathematikunterricht verwendet. Wie oben ersichtlich, kommt bei keiner Definition der Schulbücher eine Definition anhand des kartesischen Produkts vor. Solch eine Definition wird entweder erst in höheren Klassen des Gymnasiums verwendet oder ist spätestens dann in Büchern der Universität zu finden. Dies hat den Grund, dass sie zu schwer und unverständlich für die Schülerinnen und Schüler ist, „da sie ein hohes Maß an formalem Denken erfordert“ (Vollrath & Weigand, 2007; zitiert nach Gartmaier et al., 2015, S. 213). Wenn die Definition anhand der Relation nach der Zuordnung eingeführt wird, muss den Schülerinnen und Schülern erstens erklärt werden, wieso ihnen überhaupt eine weitere Bedeutung mitgeteilt wird, wieso also damit die Zuordnung, die normalerweise extra definiert werden muss, weggelassen werden kann. Und zweitens sollte ihnen erklärt werden, dass der beschriebene Funktionsbegriff mit dieser Definition denselben Funktionsbegriff wie mit der Definition anhand der Zuordnung darstellt (Van Dormolen, 1978, S. 125; Greefrath et al., 2016, S. 43f.; Gartmaier et al., 2015, S. 213).

„Der maßgebliche Unterschied zwischen den verwendeten Definitionen an der Schule und Hochschule liegt also einerseits in der Art der Definition, andererseits aber auch in der Strenge in Bezug auf den verwendeten Formalismus“ (Nardi, 1996, zitiert nach Gartmaier et al., 2015, S. 213).

1.3 Entstehung des Funktionsbegriffs im Mathematikunterricht

Es gab nicht nur einen großen Fortschritt des Funktionsbegriffs selbst, sondern die Funktionen fanden ab dem 20. Jahrhundert auch Platz in der Schulmathematik. Im Jahre 1905, während der Meraner Reform, nahmen die Funktionen den Kern der Schulmathematik ein. Eingeführt wurde dies durch Felix Klein. Er wollte, dass der Funktionsbegriff in den höheren Schulen Platz findet, indem man ihn nicht durch komplizierte Definitionen einführt, sondern ihn durch einfache Beispiele den Schülerinnen und Schülern bekannt macht. Dabei war es Klein äußerst wichtig, mithilfe des funktionalen Denkens die gesamte Mathematik zusammenzuführen, denn in den preußischen Lehrplänen war die Mathematik in Analysis, Algebra und Geometrie unterteilt. Jedoch ist der Funktionsbegriff überall in diesen Stoffgebieten zu finden und kann somit die gesamte Mathematik verbinden. Selbst bei den einführenden Beispielen hatten die Reformer im Hinterkopf, dass die Schülerinnen und Schüler nicht die Definition des Funktionsbegriffs auswendig lernen, stattdessen sollen sie durch unbewusstes Lernen zum Verständnis kommen. Dabei gelten die Funktionen nicht als ein Unterrichtsgegenstand, stattdessen sollten sie als Werkzeuge agieren, um mit ihnen ans gewünschte Ziel zu kommen. „In dieser Auffassung des Funktionsbegriffs kann es in der Schule keine Untersuchung „pathologischer“ Funktionen wie der Dirichlet- oder der Bolzanofunktion geben, denn Funktionen sollten das Verständnis und die Anschaulichkeit algebraischer Ausdrücke erhöhen“ (Laakmann, 2013, S. 75). Für die Reformer war nicht nur die algebraische Darstellung der Funktionen wichtig, sondern man durfte auch die Graphen nicht in den Hintergrund stellen (Laakmann, 2013, S. 75).

Durch Pickert kam es in den 50er Jahren wieder zu einem Aufruhr in der Schulmathematik. Er kritisierte, dass die Funktionen allgemein zu wenig Explizität besäßen, die Begriffe „Funktion“ und „Umkehrfunktion“ zu ungenau beschrieben und die Variablen kaum behandelt würden. Dazu kommt noch, dass die Funktionen mit den Kurven laut Klein ident seien. Ein weiterer Kritikpunkt ist für Pickert auch, dass sich die Schulmathematik von der Universitätsmathematik enorm unterscheide und es kaum Überschneidungen gebe, was natürlich für den Übergang des Schülers und der Schülerin schlecht sei, da sie fast keine Anknüpfung finden würden (Laakmann, 2013, S. 75).

Durch das Bemängeln des Unterschiedes zwischen der Schul- und Universitätsmathematik, wurde dieser Unterschied in den 60er Jahren eingesehen und somit führte man in den Mathematikunterricht die Struktur ein. Jetzt wurde besonders auf den Definitions- und Wertebereich ein Auge geworfen und „Funktionen wurden als rechtseindeutige Relationen aufgefasst und als mathematische Objekte betrachtet, die verknüpft werden können“ (Laakmann, 2013, S. 76). Nun führte man auch die „pathologischen“ Funktionen in den Mathematikunterricht ein (Laakmann, 2013, S. 76).

1.4 Funktionsbegriff im Mathematikunterricht

Aus didaktischer Sicht stellt sich die Frage, ob zur Einführung des Funktionsbegriffs während des Mathematikunterrichts formale Definitionen überhaupt sinnvoll sind, da diese oft von den Schülerinnen und Schülern nicht verstanden werden. Sinnvoller wäre hingegen, anhand eines verständlichen und realitätsnahen Beispiels den Lernenden den Funktionsbegriff vertraut zu machen.

Um entscheiden zu können, ob eine Definition im Schulunterricht sinnvoll ist, ist es günstig, die Pro- und Contra-Argumente gegeneinander abzuwägen. Beginnen wir mit den Argumenten, die gegen die Definitionen bei einer Einführung sind:

- Das Verständnis der Schülerinnen und Schüler für eine Definition des Funktionsbegriffes, beispielsweise bei Aufgaben mit verschiedenen Haarfarben und Augenfarben, ist nur wenig bis kaum vorhanden.
- Auch mit anderen Begriffen, wie Variablen, Termen, Wahrscheinlichkeit und auch zum Teil mit Grenzwerten, kann ohne ausführliche Definitionen weitergearbeitet werden. Stattdessen wird hier nur sprachlich und auf einfache Weise der Begriff erklärt, wobei die Kinder dies auch auf Anhieb verstehen.
- Bei Aufgaben, bei denen der Funktionsbegriff schlussendlich wirklich vorhanden ist und somit gebraucht wird, kann der Funktionsbegriff nicht mit der Definition verbunden werden, da die Definition nicht verstanden wurde.
- Außerdem ist es aufgrund der unterschiedlichen Funktionstypen der Analysis möglich, auch ohne Definition zu arbeiten.

Es gibt aber auch gute Gründe für eine allgemeine, genaue Definition zum Beginn eines Themas:

- Mit einer Definition, kann man zuallererst einmal die gemeinsamen Eigenschaften darstellen, was wiederum alles viel übersichtlicher und verständlicher macht. Bezogen auf die Definition können daraufhin verschiedenste Bezeichnungen des Funktionsbegriffes miteinander vernetzt werden.
- Außerdem sollten die Lernenden aufgrund des Mathematikunterrichts dazu fähig sein, verschiedenste Strukturen und Muster zu erkennen und diese dann mit Hilfe einer Abstraktion beschreiben zu können. Somit wird auch hier die Funktionsdefinition dringend benötigt.
- Auch ist die Funktionsdefinition wichtig, um Unklarheiten, ob die eine oder andere Funktion wirklich eine Funktion ist, zu klären. Dies benötigt man unter anderem bei

Funktionen, die nur stückweise definiert sind, wie beispielsweise Funktionen mit Sprungstelle usw.

- Da vor allem wichtige Begriffe der Analysis, der analytischen Geometrie und der Stochastik vom Funktionsbegriff abhängen, ist diese genaue Klärung innerhalb einer Definition äußerst wichtig. Somit werden diese Begriffe für die Schülerinnen und Schüler verständlicher.

Nach Abwägung der Argumente beider Seiten kommt man zu dem Entschluss, dass der Funktionsbegriff in den **Jahrgangsstufen eins bis acht** nicht definiert, sondern den Schülerinnen und Schülern mit einem konkreten und verständlichen Beispiel beigebracht werden sollte. In der **achten und neunten Schulstufe** sollte die Funktion anhand der Zuordnung gezeigt werden, somit wird die Bedeutung des Begriffes den Schülerinnen und Schülern vertrauter. Erst in der **zehnten bis zwölften Stufe** sollte die formale Definition den Jugendlichen beigebracht werden, um damit eine formale Grundlage für die Oberstufe und die Universität herzustellen (Greefrath et al., 2016, S. 44ff.).

1.5 Funktionsbegriff außerhalb des Mathematikunterrichts

Schon im Vor- und Grundschulalter kommen die Kinder mit Funktionen in Kontakt. Zu dieser Zeit wissen sie jedoch noch nicht, dass es sich hierbei um Funktionen handelt, sondern sie lernen dies implizit, indem sie zum Beispiel in Speisekarten oder Fahrplänen die Abhängigkeiten miteinander verknüpfen. Dies passiert in vielen alltäglichen Situationen, wobei ich im Folgenden ein paar Beispiele nennen möchte. Auf die Alltagssituationen wird später in der Sekundarstufe 1 aufgebaut. Die Kinder und Jugendlichen können sofort eine Verbindung herstellen und verstehen den Funktionsbegriff somit leichter und schneller. (Greefrath et al., 2016, S. 36)

1.5.1 Veränderungen

Ständig verändert sich vieles auf unserer Welt, begonnen mit unserer Körpergröße und unserem Körpergewicht. Je älter wir werden, desto größer und natürlich dann auch schwerer werden wir. Allein schon diese Situation lässt sich anhand von mathematischen Werkzeugen und Mitteln darstellen. In der Schule wird dies in der Sekundarstufe 1 begonnen, wobei dazu Tabellen, Diagramme und

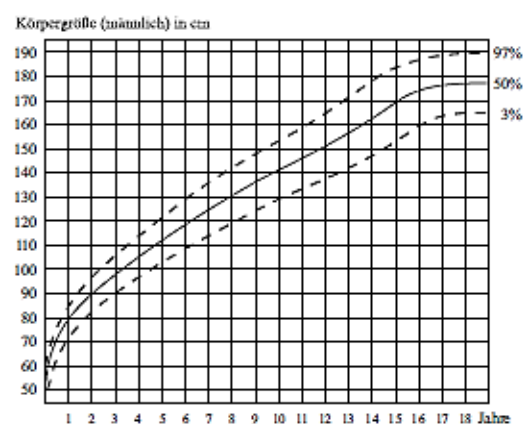


Abbildung 7: Wachstumskurve von Jungen (Greefrath et al., 2016, S. 37)

Graphen verwendet werden, um dies zu verdeutlichen. Stellt man diese zeitliche Abhängigkeit innerhalb eines Koordinatensystems dar, kann man genau erkennen, mit welchem Alter man

welche Größe und welches Gewicht erreicht hat. Anhand dieses Graphen kann man auch gut erkennen, dass man als Kind ein größeres Wachstum und stärkere Gewichtszunahme als in der Jugend aufweist (siehe Abb. 7). Allein schon mit diesem Beispiel kann in der Schule der Funktionsbegriff unbewusst eingeführt werden, sodass die Schülerinnen und Schüler sich mit ihm beschäftigen, ohne überhaupt zu wissen, dass sie sich schon mit Funktionen beschäftigen (Greefrath et al., 2016, S. 36f.).

1.5.2 Ursachen

Auch zeitliche Kausalitäten kann man auf unserer Erde vermehrt entdecken, „bei denen gewisse Ursachen zwangsläufig entsprechende Wirkungen zur Folge haben“ (Greefrath et al., 2016, S. 37). Beispiele dafür sind: Je schneller man schwimmt, desto schneller erreicht man das Ziel. Oder: Je höher man den Berg hinaufsteigt, desto geringer wird der Druck. Dabei ist hier meist die Ursache festgelegt, welche frei wählbar ist, währenddessen die Wirkung abhängig von der Ursache ist und sich somit so verändert, dass sie zur Ursache passt. Mit diesen Beispielen sollen die Kinder und Jugendlichen eine bessere Beziehung zur Umwelt und zur Natur bekommen. Diese Ursachen beruhen auf den Naturgesetzen (Greefrath et al., 2016, S. 37f.).

1.5.3 Zufällige Verknüpfungen

Diese Zusammenhänge gehen von den Menschen selbst aus. Folgende Beispiele zeigen das: Je mehr man einkauft, desto mehr muss man bezahlen. Oder: Die Höhe des Einkommens hängt vom jeweiligen Arbeitsgeber ab. Diese Relationen gehen nicht von Naturgesetzen aus wie bei den oben genannten „Ursachen“, sondern von der Anwendbarkeit und Wirtschaftlichkeit. Hier sind die Zusammenhänge abhängig von den Menschen, welche meist zufällig gewählt werden (Greefrath et al., 2016, S. 38f.).

1.6 Funktionseigenschaften

1.6.1 Nullstellen

Die Nullstelle ist eine Zahl, die innerhalb des Definitionsbereichs liegt und deren Funktion den Wert Null ergibt. Eine Nullstelle ist genau da, wo die Funktion sich mit der x -Achse schneidet oder diese berührt. Die Nullstellen können innerhalb einer Funktion entweder einmal, zweimal oder auch öfter vorkommen. Besitzt eine Funktion eine Nullstelle, so wird diese als einfache Nullstelle bezeichnet. Bei einer zweistelligen Nullstelle ist dies eine zweifache Nullstelle und bei jeder weiteren werden diese als mehrfache Nullstellen bezeichnet. Besitzt der Graph der Funktion eine Nullstelle, ist diese einfache Nullstelle die Abszisse der Schnittpunkte (Schmidradner, 1992, S. 46; Tinhof et al., 2013, S. 139; Klinger, 2015, S. 132). Verfügt eine

Funktion über eine zweifache Nullstelle, dann sind diese „die Abszissen der Berührungspunkte des Graphen der Funktion mit der x -Achse“ (Schmidradner, 1992, S. 46).

Auch hier gibt es die verschiedensten Definitionen von Lehrbuch zu Lehrbuch. Wir beginnen mit den Definitionen der Schulbücher des **Gymnasiums**:

Definition:

„Die Nullstelle einer Funktion f ist jener x -Wert, für den gilt $f(x) = 0$. Der Graph schneidet die x -Achse im Punkt $N(x/0)$.“ (Brand, Dorfmayr, Lachner, Mistlbacher, & Nussbaumer, 2011, S. 112)

Definition:

„Eine Stelle (Argument), an der eine Funktion f den Wert 0 annimmt heißt Nullstelle der Funktion. Für eine Nullstelle x gilt: $f(x) = 0$. Die Nullstellen einer Funktion sind die x -Koordinaten (Abszissen) der gemeinsamen Punkte von Graph und 1. Achse.“ (Geretschläger et al., 2008, S. 86)

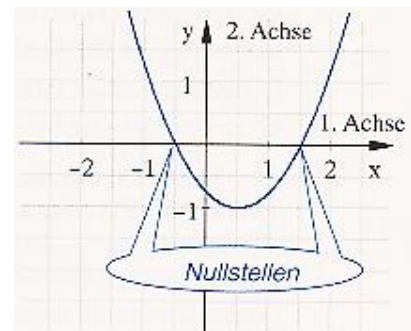


Abbildung 8: Definition der Nullstellen (Geretschläger et al., 2008, S. 86)

Auch in den Lehrbüchern der **Handelsakademie** werden die Nullstellen thematisiert und folgendermaßen definiert:

Definition:

„Eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = 0$ heißt Nullstelle der Funktion f . Der Punkt $N(x_0/0)$ ist Schnittpunkt oder Berührungspunkt der Funktion f mit der x -Achse.“ (Tinhof et al., 2013, S. 139)

Definition:

„Eine Stelle x heißt Nullstelle der Funktion f , wenn $f(x) = 0$.“ (Allerstorfer et al., 2016, S. 100)

Wiederum fällt auf: Je höher man in der Mathematik kommt, desto komplexer wird diese. Und somit wird die Nullstelle auf der **Universität** wie folgt definiert:

Definition:

„Sei $A \subset C$ und $f: A \rightarrow C$ eine Funktion. Dann heißt $x_0 \in A$ Nullstelle von f , falls gilt: $f(x_0) = 0$.“ (Klinger, 2015, S. 132)

Aus all diese Definitionen können wir erneut erkennen, dass, egal, welche Schule man besucht, der Sinn der Definitionen immer derselbe bleibt, nur die Formulierung anders lautet.

Vergleicht man jedoch die Definitionen der Schule mit jenen der Universität, kann man erkennen, dass diese anhand der Menge definiert wird und bei den Studentinnen und Studenten schon ein gewisses Hintergrundwissen vorausgesetzt wird.

1.6.2 Extremstellen

Die Extremwerte, zu denen auch Maximum und Minimum zählen, können folgendermaßen definiert werden:

„Die Stelle a heißt lokale Maximumstelle von f , wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ mit $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in U_\varepsilon(a) \cap D$ gilt $f(x) \leq f(a)$. Dann heißen $f(a)$ lokales Maximum und der Punkt $(a/f(a))$ lokaler Hochpunkt von f . Die Stelle a heißt globale Maximumstelle von f , wenn für alle $x \in D$ gilt $f(x) \leq f(a)$. Dann heißt $f(a)$ globales Maximum und der Punkt $(a/f(a))$ globaler Hochpunkt von f .“ (Büchter & Henn, 2010, S. 257)

Analog wird auch die globale und lokale Minimumstelle definiert, die wiederum einen globalen und lokalen Tiefpunkt ergibt. Dabei kann man aus der Definition erkennen, dass jede globale Maximum-/Minimumstelle gleichzeitig auch eine lokale Maximum-/Minimumstelle ist. Bei der Definition selbst wird von keinem Intervall, von keiner Stetigkeit oder Differenzierbarkeit ausgegangen. Die Extremstellen werden somit allgemein definiert (Büchter & Henn, 2010, S. 257).

1.6.3 Monotonie

Die Monotonie gilt als eine Charakterisierung, die für den Funktionsbegriff von Bedeutung ist, da sie sehr hilfreich für die Einführung des Funktionsbegriffes sein kann. Die Monotonie wird zwischen zwei groben Fällen differenziert. Erhöhen sich die unabhängigen Werte bei der (streng) monoton steigenden Funktion, so erhöhen sich auch die davon abhängigen Werte. Die unabhängigen Werte verringern sich bei der (streng) monoton fallenden Funktion, wenn deren abhängige Werte zunehmen (Steinweger, 2013, S. 201).

Definition:

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$, wobei $A, B \subset \mathbb{R}$ heißt

- streng monoton steigend (wachsend), wenn $\forall x, y \in A$ mit $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,
- monoton steigend (wachsend), wenn $\forall x, y \in A$ mit $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$,
- streng monoton fallend, wenn $\forall x, y \in A$ mit $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- monoton fallend, wenn $\forall x, y \in A$ mit $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (Klinger, 2015, S. 47).

Die Monotonie kann auch, wie in dem einen oder anderen Schulbuch ersichtlich ist, mit einem Intervall definiert werden:

„Das Intervall $[a; b]$ gehöre zum Definitionsbereich der Funktion f . Die Funktion f heißt im Intervall $[a; b]$ streng monoton steigend, falls für die beliebige

$x_1, x_2 \in [a; b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$. Die Funktion f heißt im Intervall $[a; b]$ streng monoton fallend, falls für die beliebige $x_1, x_2 \in [a; b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$.“ (Geretschläger et al., 2008, S. 62)

Diese Definition ist für die Schülerinnen und Schüler um einiges einfacher, da viele Symbole wie $\forall$ oder $\Rightarrow$ wegfallen und die Definition somit mit mehr Wörtern gefüllt ist.

1.6.4 Stetigkeit

Die Stetigkeit ist eine Eigenschaft, die zu Beginn der Funktionen eher irrelevant ist, da sie den einen oder anderen Begriff zur Definitionsbildung benötigt. Grob gesagt kann man die Stetigkeit so definieren, dass man mit einem Stift einen Graphen zeichnet, ohne dabei einmal den Stift anzuheben. Diese Definition ist mathematisch nicht ganz richtig, sondern nur zum Verständnis der Studentinnen und Studenten da. In der Mathematik wird die Stetigkeit wie folgt definiert (Steinweger, 2013, S. 201; Klinger, 2015, S. 137).

Definition:

„Eine Funktion $f: A \rightarrow R$ mit $A \subset R$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in A$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Ist eine Funktion stetig in jedem Punkt $x_0 \in A$, so heißt sie stetig. Ist sie in mindestens einem Punkt $x_0 \in A$ nicht stetig, so heißt sie unstetig.“ (Klinger, 2015, S. 137)

2 Grundvorstellungen

In diesem Kapitel möchte ich näher auf Grundvorstellungen allgemein eingehen. Dabei wird auch beschrieben, wieso wir Grundvorstellungen überhaupt gebrauchen können und an welches Ziel wir damit kommen wollen. Daraufhin gehe ich anhand dieses Vorwissens genauer auf die Grundvorstellungen der Funktionen ein, um herauszufinden, wie wichtig sie dort sein können.

2.1 Modellbildung

Um mit Mathematik umgehen zu können, benötigen wir zu Beginn eine Modellbildung. Damit diese veranschaulicht werden kann, erstellen wir zuallererst einen Modellierungsprozess (siehe Abb. 9). Zu Beginn des Prozesses wird eine reale Gegebenheit in ein mathematisches

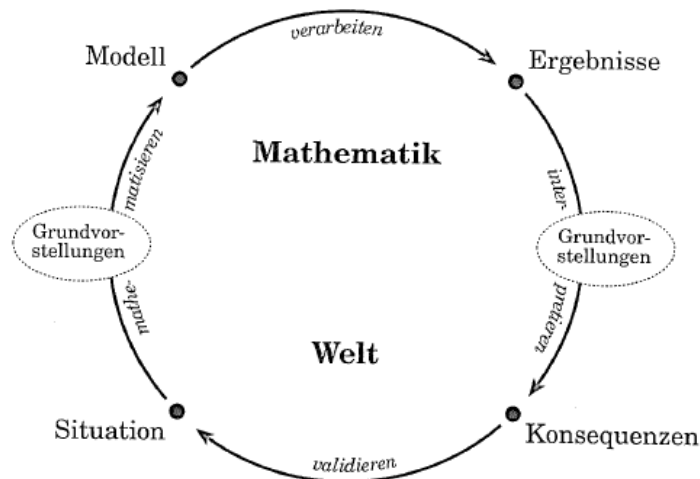


Abbildung 9: Modellierungsprozess (vom Hofe, 2003, S. 5)

Modell umgewandelt. Dies entsteht dadurch, dass man mathematische Begriffe oder Verfahren verwendet, um somit die reale Situation darstellen zu können. Daraufhin interpretiert man die zuvor errechneten mathematischen Resultate anhand der realen Situationen. Zu guter Letzt wird betrachtet, ob das mathematische Ergebnis mit der realen Situation übereinstimmen kann oder ob man mit einem neuen Modell beginnen muss. Um somit die mathematischen Inhalte und Verfahren, die innerhalb der Situation gebraucht werden, durchlaufen zu können, benötigt man zum Beginn Grundvorstellungen (vom Hofe, 2003, S. 5).

2.2 Allgemeine mathematische Grundvorstellungen

Grundvorstellungen verfügen bei uns in Österreich, Deutschland und der Schweiz über eine große Bedeutung. Laakmann definiert sie folgendermaßen: „Mit den Grundvorstellungen wird eine inhaltliche Orientierung gegeben, welche Vorstellungen mit den Inhalten, Begriffen und

Verfahren eines Themengebiets verbunden sind“ (Laakmann, 2013, S. 45). Jede Grundvorstellung kann auf ein bestimmtes Fach bezogen werden, wobei wir uns natürlich in die mathematische Ebene begeben: „Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt“ (Greefrath et al., 2016, S. 17). Deshalb ist es im Zuge des mathematischen Handelns wichtig, zwischen der Realität und der Mathematik eine Verknüpfung herzustellen. Dabei sollten sowohl alltägliche Dinge in mathematische Sicht umgewandelt als auch mathematische Resultate anhand des alltäglichen Lebens beschrieben werden. Diese Transformation wird anhand geistiger Thematik mathematischer Begriffe vollzogen, wobei dieser Prozess als Grundvorstellung bezeichnet wird. Eine Grundvorstellung

„charakterisiert somit fundamentale mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen. Er beschreibt damit Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen oder kurz: Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität.“ (vom Hofe, 1995, S. 98)

Grundvorstellungen sind die Basis für ein gelingendes Arbeiten, denn durch sie kann ein Übungsprozess überhaupt erst gestartet werden. Dabei sollte jeder mathematische Inhalt nicht nur aus einer Grundvorstellung bestehen, sondern aus so vielen Grundvorstellungen wie möglich, die sich schlussendlich ergänzen und somit zu einer verständlichen und richtigen Endlösung führen. Eine Grundvorstellung steht jedoch niemals still oder ist zu Ende, sondern sie kann immer weiterentwickelt werden und gilt somit als dynamisch. Ist die Vorstellung innerhalb eines Teilgebiets vollständig, dann muss sie in einem anderen Gebiet weiterentwickelt werden. So ist zum Beispiel die Grundvorstellung der natürlichen Zahlen anhand der Multiplikation tragfähig, doch gilt dies noch nicht für die Bruchzahlen und muss daher dort erst erweitert werden (Büchter & Henn, 2010, S. 30f.; Greefrath et al., 2016, S. 16f.; Laakmann, 2013, S. 44f.; Kleine, 2012, S. 36f.).

Grundvorstellungen haben ihren Beginn im Mathematikunterricht der Volksschule. Schon die jüngsten Schülerinnen und Schüler, die die erste Klasse Primarstufe besuchen, werden durch altersgerechte Abstraktion und Präzision an die bisher bekannten mathematischen Begriffe herangeführt und somit die subjektiven Grundvorstellungen erweitert. Dies funktioniert nicht konstant und von einem auf den anderen Tag, sondern entsteht allmählich. Erst durch ein optimales Anknüpfen an das Vorwissen können die Grundvorstellungen darauf aufgebaut werden. Zum Beispiel wird in der ersten Klasse Volksschule mit dem Zahlenbegriff anhand der natürlichen Zahlen begonnen und daraufhin folgen dann die Grundrechnungsarten. Die Kinder

verbinden mathematische Begriffe mit Ausdrücken aus dem Alltag. Daher verknüpfen sie beispielsweise das „Addieren“ mit dem Begriff „etwas dazugeben“ oder „zusammenfügen“ (Büchter & Henn, 2010, S. 30f.; Laakmann, 2013, S. 44f.).

2.2.1 Primäre und sekundäre Grundvorstellungen

Die Grundvorstellungen können anhand der Grundlage, auf der sie aufgebaut werden, wiederum differenziert werden. Hier ist wichtig, dass die Grundvorstellungen möglichst nahe an das subjektive Wissen des einzelnen Schülers und der einzelnen Schülerin anschließt. Besonders relevant ist diese Unterscheidung bei dem Kapitel „Funktionale Zusammenhänge und Funktionen“. So muss in der Volksschule für das Erlernen der natürlichen Zahlen als Elemente der Menge durch geeignete Materialien an das bisherige Wissen der Kinder angeknüpft werden. Im Folgenden werden die beiden differenzierten Grundvorstellungen vorgestellt (Greefrath et al., 2016, S. 19; Büchter & Henn, 2010, S. 31).

- Die primäre Grundvorstellung entsteht schon, bevor die Kinder überhaupt in die Schule eintreten. Dabei kommen sie mit echten Gegenständen in Kontakt, welche unterbewusst mit mathematischen Begriffen vernetzt werden. Zum Beispiel zählen die Kinder hier die Legosteine oder Stofftiere ab. Diese Grundvorstellung vereinigt die Realität mit der Mathematik.
- Die sekundäre Grundvorstellung verbindet die bisher in der Realität bekannten Vorstellungen und Darstellungen mit jenen der Mathematik und erstellt daraus einen neuen mathematischen Begriff. Zum Beispiel werden hier die vorher gezählten Legosteine und Stofftiere anhand eines Zahlenstrahls, Koordinatensystems oder Graphen abgebildet.

Zuallererst ist es notwendig, den Kindern die primären Vorstellungen anzueignen, da diese sich auf den Alltag und die Realität beziehen und noch ein Stück von der Mathematik entfernt sind. Daraufhin ist es wichtig, die primären mit den sekundären Vorstellungen zu verbinden, um den Bezug zur Mathematik herzustellen. Bei der Einführung der Begriffe wie Folge, Grenzwert, Ableitung und Integral muss auch unbedingt die sekundäre Vorstellung eingeführt werden, da diese Grundbegriffe gewiss bis ins Detail genau verstanden werden müssen, damit überhaupt in der Mathematik weitergearbeitet werden darf. Dabei ist es wichtig, dass die primäre Vorstellung verstanden wurde (Greefrath et al., 2016, S. 19; Büchter & Henn, 2010, S. 31; Pfeifer, 2012, S. 12).

2.2.2 Normative und deskriptive Gesichtspunkte

Die Grundvorstellungen sind imstande, die eigenen Vorstellungen mit den mathematischen Inhalten zu verknüpfen, wobei wir zwischen folgenden zwei Gesichtspunkten unterscheiden können: dem normativen oder auch universellen und dem deskriptiven bzw. individuellen Gesichtspunkt.

- Beim **normativen Gesichtspunkt** teilen uns die Grundvorstellungen mit, welches Wissen den Schülerinnen und Schüler anzueignen ist und welche Begriffe und Verfahren von ihnen gekannt werden sollten. Dadurch wird auch den Lehrpersonen erleichtert, einen guten Unterricht zu führen. Diese Grundvorstellungen sind von Fach zu Fach unterschiedlich und deshalb ist es wichtig, diese so zu differenzieren. Das Ziel ist es, mithilfe des Mathematikunterrichts in der Schule zu diesem Gesichtspunkt zu gelangen.
- Der **deskriptive Gesichtspunkt** hingegen geht vom Lernenden selbst aus. Er ist abhängig von den Lernprozessen der Schülerinnen und Schüler selbst. Sie müssen anhand ihrer eigenen Erfahrungen und Vorstellungen zum Ziel kommen. Überprüfen kann eine Lehrkraft die individuellen Grundvorstellungen, indem sie entweder beobachtet, wie das Kind oder der Jugendliche lernt, oder durch mündliche und schriftliche Beiträge der Schützlinge. Dies ist vor allem für die Unterstützung im Unterricht und innerhalb der Lerngruppe wichtig.

Der individuelle Gesichtspunkt, der von der eigenen Sicht ausgeht, muss nicht unbedingt mit dem normativen Gesichtspunkt übereinstimmen. Zum Problem wird dies erst dann, wenn sich die beiden Gesichtspunkte miteinander nicht vertragen (Laakmann, 2013, S. 45f.; Greefrath et al., 2016, S. 18f.; Büchter & Henn, 2010, S. 30f.).

Für das Lernen eines Begriffes ist es wichtig, mit dem normativen Gesichtspunkt zu beginnen. Es wird von ihm ausgegangen, da er die Basis der Vorstellungen bildet und: und man somit auf ihm aufbauen kann. Durch das nötige Vorwissen, das miteinbezogen werden muss, kann schlussendlich zu dem deskriptiven Gesichtspunkt gelangt werden (Laakmann, 2013, S. 46).

2.2.3 Wieso Grundvorstellungen in der Mathematik?

Nun stellt sich die Frage, wieso Grundvorstellungen in der Mathematik überhaupt benötigt werden. Da zu dieser Frage eine Menge Antworten zu geben wären, unterteilen wir sie in die Gründe der Lernenden und der Lehrenden. Beginnen wir mit den **Gründen der Lernenden**:

- Grundvorstellungen sind für Lernende vor allem dazu da, damit sie den Sinn der Mathematik entdecken und sie nicht sofort als irrelevant bezeichnen. Denn durch die Vorstellungen kann eine Beziehung mit dem alltäglichen Leben hergestellt werden und verstanden werden, wozu die Mathematik im Alltag von Nutzen ist. Dabei knüpfen die Grundvorstellungen immer an das bereits Bekannte an und können dadurch noch besser und schneller erlernt werden. Vorstellungen zu entwickeln ist also deshalb so wichtig, damit die Lernenden die Zusammenhänge erkennen können und diese Zusammenhänge dann schlussendlich zum eigenen Sinn der Mathematik führen (Greefrath et al., 2016, S. 20).

- Weiteres ist eine Grundvorstellung eine Grundlage, auf die aufgebaut wird. Gibt es keine Grundlage, kann auf nichts aufgebaut werden. Dabei wird eine Grundvorstellung meistens mit einer weiteren Grundvorstellung erweitert. Diese Reihe von Grundvorstellungen wird niemals ein Ende finden, da sie immer weiter aufgebaut werden können (Pfeifer, 2012, S. 16).
- Außerdem sind die Vorstellungen bedeutsam für die Bildung und das Verständnis des Begriffes. Das vollständige Verständnis sollte ein „*operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen*“ (vom Hofe, 1995, S. 98). Das Verstehen der Mathematik kann es überhaupt erst zu einem Interesse an ihr führen. Wird der Inhalt nicht verstanden, wird nie ein Interesse zustande kommen, da die Kinder und Jugendlichen nicht wissen, wofür sie die Mathematik überhaupt einmal benötigen werden. Dabei liegt dies klar auf dem Tisch, denn den Lernenden wird die Mathematik nach der Schule „*helfen, die sie umgebende Welt, die Wissenschaften, gesellschaftliche Entscheidungen und kulturelle Prozesse zu verstehen*“ (Malle, 2002, S. 82). Durch diese Begründung erkennen die Kinder und Jugendlichen gleich, wofür sie die Mathematik nach der Schule brauchen können, und das Interesse wird daraufhin steigen (Pfeifer, 2012, S. 14).

Somit können wir erblicken, dass Grundvorstellungen in der Mathematik für Schülerinnen und Schüler ein äußerst wichtiger Teil sind und die Mathematik ohne sie gar nicht vorstellbar ist. Doch die Vorstellungen sind nicht nur für die Lehrenden bedeutsam, sondern auch **die Lehrenden** können davon im Unterricht profitieren:

- Für Lehrende sind die Grundvorstellungen einerseits dafür da, um eine gute Gestaltung des Unterrichts zu konstruieren. Für die lehrende Person ist dabei wichtig, dass sie weiß, was die Lernenden sich unter den benötigten Begriffen vorstellen müssen. Mit diesem Hintergrundwissen soll sie den Unterricht so gestalten, dass die Kinder und Jugendlichen sich die Vorstellungen so aneignen, dass sie auch richtig sind. Benötigt man dabei mehrere Grundvorstellungen bei einem Begriff, soll der Unterricht so aufgebaut werden, dass er dies entsprechend berücksichtigt.
- Außerdem kann andererseits anhand der Grundvorstellungen ein klares Konzept für den Unterricht erstellt werden. Dieses Konzept ist für Lehrerinnen und Lehrer dazu da, damit sie für die einzelnen Begriffe eine annähernde Struktur haben. Somit können sie sich besser auf das Hineinversetzen in die Schülerinnen und Schüler konzentrieren, um dadurch die Fehler und Schwierigkeiten ihrer Schützlinge zu erkennen. Beispiele, bei denen mehrere Grundvorstellungen verwendet werden müssen, können dazu gebraucht werden, dass der Lehrende herausfinden kann, welche Grundvorstellung bei dem Lernenden nicht begriffen wurde und somit kann daraufhin die Fehlerbehebung eingeleitet werden (Greefrath et al., 2016, S. 20).

Somit wird ersichtlich, dass Grundvorstellungen vor allem in der Mathematik von großer Bedeutung sind und dass ohne sie sogar das Rechnen kaum vorstellbar ist. Dies gilt nicht nur für Schülerinnen und Schüler, auch für Professorinnen und Professoren sind die Grundvorstellungen von Bedeutung, damit sie Mathematik den Schützlingen überhaupt beibringen können.

2.2.4 Ziel der Grundvorstellungen

Das Ziel der Grundvorstellungen ist es, sich seine eigenen Vorstellungen aus den mathematischen Begriffen zu machen. Erst wenn sich eine eigene Ansicht gebildet hat, wurde der Begriff wirklich verstanden, denn die eigenen Vorstellungen und die Grundvorstellungen sind nicht dasselbe. Sie werden erst vollständig verstanden, indem der Weg dorthin durch eigene Erfahrungen vollzogen wurde. Das Ziel ist dann erreicht, wenn der Begriff sich soweit verinnerlicht hat, dass der Schüler und die Schülerin bei einem vorgegebenen Beispiel zumindest einen Ansatz oder ein Konzept findet, wie die Aufgabe gelöst werden könnte. Dabei wird zum Problem, wenn die eigenen Vorstellungen mit den Grundvorstellungen nicht übereinstimmen (Büchter & Henn, 2010, S. 30f.; Greefrath et al., 2016, S. 16f.; Pfeifer, 2012, S. 13).

2.3 Grundvorstellungen von Funktionen

Wir stellen uns vor, wir sind in einer 10. Klasse und haben in den vergangenen Jahren unseren Schülerinnen und Schülern alles, angefangen von der linearen Funktion, über die quadratische Funktion, bis hin zu den Exponentialfunktionen, beigebracht. Wir haben das Gefühl, dass sie alles verstanden haben, da sie sowohl während des Unterrichts als auch in den Schularbeiten

- mit Ausnahme des ein oder anderen Schülers oder der ein oder anderen Schülerin - eine recht solide Leistung erbracht haben. Aufgrund dessen wollen wir ihnen kurz vor ihrer Matura einen Graphen einer Funktion präsentieren, bei der ein Fallschirmsprung dargestellt ist (siehe Abb. 10). Dabei wird ihnen vorgegeben, dass sie

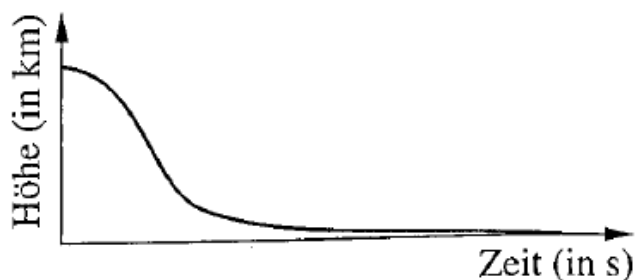


Abbildung 10: Fallschirmspringen (Leuder & Prediger, 2005, S. 1)

ihn zu interpretieren haben. Daraufhin kommen Aussagen wie „Der nimmt Anlauf und springt erst ganz waagerecht ab.“ – „Nee, das liegt daran, dass das Flugzeug nach rechts fliegt, wenn er herausspringt.“ (Leuder & Prediger, 2005, S. 1). Oder ein anderer Schüler meint: „Das kann irgendwie nicht sein! Der müsste doch eher senkrecht landen oder ist das so ein Gleitfallschirm?“ (Leuder & Prediger, 2005, S. 1). Nun stellt man sich selbst die Frage, was man eigentlich all die Jahre falsch gemacht hat und woran das liegen könnte, dass die Schülerinnen und Schüler ein einfaches Ablesen von einem Graphen nicht schaffen, auch wenn sie schon mit Parametern innerhalb einer Exponentialfunktion klarkommen. Um diesen Fehler zu finden,

müssen wir tiefer in die Materie eindringen und zum Beginn der Funktionen zurückgehen, also zum Funktionsbegriff (Leuder & Prediger, 2005, S. 1).

Betrachten wir dieses Beispiel genauer, können wir erkennen, dass hier von Anfang an die Grundvorstellungen nicht richtig verstanden wurden und somit dieses Defizit bis zur zehnten Klasse mitgezogen wurde, ohne dass dies irgendwer erkannte.

2.3.1 Funktionen im alltäglichen Leben

Um sich Grundvorstellungen von Funktionen überhaupt anzueignen, ist es zu Beginn wichtig, zu erkennen, wo diese in unserem alltäglichen Leben vorkommen und wofür Funktionen überhaupt gebraucht werden. Denn ohne diese Vorstellung können die Schützlinge während eines praktischen Beispiels in der Mathematik dies kaum auf den Alltag beziehen.

Der Begriff „Funktion“ ist vielfältig anwendbar. Er kann als außermathematischer Begriff im Alltag, als Begriff in der Mathematik oder auch versteckt im Alltag der Mathematik vorkommen. Als Erstes betrachten wir den außermathematischen Begriff „Funktion“. Wenn etwas „funktioniert“, dann läuft etwas ohne Fehler. Dabei sind keine Fragen mehr zu beantworten und alle Probleme gelöst, es läuft alles glatt. Nehmen wir beispielsweise eine Maschine her: Wenn diese keine Fehler hat, dann funktioniert sie. Nun kommen wir zu dem versteckten mathematischen Begriff „Funktion“. Diese entdeckt man zum Beispiel bei einer Temperaturkarte. Hier müssen zuerst Längen- und Breitengrad des Ortes festgestellt werden, um dann die dortige Temperatur zu einem bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen (Leuder & Prediger, 2005, S. 1ff.).

2.3.2 Drei Grundvorstellungen der Funktion

Bei den vielen Zielen, die die Schülerinnen und Schüler allein schon bei den Funktionen erreichen müssen, sind Grundvorstellungen unverzichtbar. Dabei können Funktionen in drei Grundvorstellungen geteilt werden, wobei Zuordnungs-, Kovariations- und Objektvorstellung unterschieden werden. Diese drei Grundvorstellungen möchte ich im Folgenden darlegen und daraufhin vergleichen.

2.3.2.1 Zuordnungsvorstellung

Definition:

„Eine Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet.“ (vom Hofe, 2003, S. 6)

Definition:

„Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so, dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.“ (Vollrath, 1989, S. 8)

Anhand dieser zwei Definitionen können wir erkennen, dass die Zuordnung ziemlich gleich definiert wird. Bei diesem Aspekt kommt sowohl die Zuordnung als auch die Abhängigkeit zum Vorschein. Die Zuordnung selbst ist bei der Funktion in einer Tabelle immer zeilenweise (horizontal) zu entdecken (siehe Abb. 11), wobei hier jedem x immer ein $f(x)$ zuzuordnen ist. Somit bekommt zum Beispiel bei einer Quadratfunktion von $x \rightarrow x^2$ jede reelle Zahl ein Quadrat. Dabei kann man diesen Zusammenhang bei positiven Zahlen auch geometrisch deuten, da die Seitenlänge eines Quadrates nun zum Flächeninhalt des Quadrates wird. Ebenfalls kann die Zuordnungsvorstellung anhand eines Graphen innerhalb eines Koordinatensystems gut verdeutlicht werden. Dies ist jedoch nicht die einzige Darstellungsform. Auch in Pfeil-diagrammen oder Nomogrammen können die Funktionen dargestellt werden, wobei hier durch Pfeile genauso die Zuordnung gut gezeigt werden kann. Die Darstellungen selbst sind nicht nur als Illustration da, sondern als Ausdrucksmittel, damit mit ihrer Hilfe Beispiele gelöst werden können. Die Zuordnung ist die wichtigste der drei Grundvorstellungen, da ohne sie das Verständnis des Funktionsbegriffs kaum zu erwecken ist (Malle, 2000, S. 8; Vollrath, 1989, S. 8ff.; Greefrath et al., 2016, S. 48; Laakmann, 2013, S. 83).

a Tabelle:

x	$f(x)$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

c Funktionsterm:

$$f(x) = 2 \cdot x$$

b Graph:

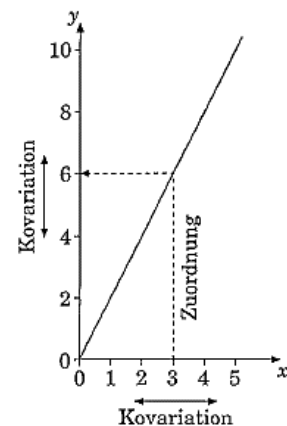


Abbildung 11: Tabelle, Graph und Funktionsterm einer linearen Funktion (Malle, 2000, S. 9)

Typische Beispiele für die Zuordnungsvorstellung sind:

- Jeder Tageszeit kann eine Temperatur zugeordnet werden.
- Jedem Gericht auf einer Speisekarte wird ein Preis zugeordnet.
- Für den Eintritt in ein Schwimmbad zahlt man € 3. Will man jedoch länger im Schwimmbad verweilen, zahlt man für jede darauffolgende Stunde € 1. Wie teuer ist der Eintritt bei fünf Stunden Aufenthalt?
- An welchen Stellen hätte die Funktion den Wert Null (Büchter & Henn, 2010, S. 34; Laakmann, 2013, S. 83)?

Dabei werden oft die folgenden Fragestellungen verwendet:

- Welcher Größe x kann ein Wert y zugeordnet werden?
- Welcher Wert y kann einem Argument x zugeordnet werden (Büchter & Henn, 2010, S. 34)?

2.3.2.2 Kovariationsvorstellung

Definition:

„Verändert sich die eine Größe, so verändert sich die zugeordnete Größe in bestimmter Weise.“ (vom Hofe, 2003, S. 6)

Definition:

„Durch Funktionen erfaßt man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.“ (Vollrath, 1989, S. 12)

Auch bei diesem Aspekt können wir erkennen, dass es kaum einen Unterschied zwischen den Definitionen gibt und sie sich nur in der Formulierung, nicht aber der Vorstellung nach, unterscheiden. Dabei gibt die Definition die Beziehung zwischen x und y an, wobei wenn x größer wird, auch y größer wird. Dies wird bei der Kovariationsvorstellung als spezifische Dynamik bezeichnet. Somit kann gesagt werden, dass die Kovariation anhand von Größen oder Variablen „miteinander-variiert“. Durch die Entstehung der Kovariation ist glücklicherweise das Starre verloren gegangen und alles in Bewegung geraten. Wegen der bewegbaren Größen ändern sich Körper, Flächen und Linien. „Die Seite ändert den Winkel, der Winkel die Seite, die Höhe den Inhalt, der Radius den Kreis, die Kante den Körper“ (Engel, 1992, zitiert nach Vollrat, 1989, S. 12f.). Bei der Darstellung einer Kovariation in einer Tabelle ist diese immer spaltenweise (vertikal) zu erblicken (siehe Abb. 11). Hier ist zu sehen, wie sich $f(x)$ bei einem veränderten x verhält (Malle, 2000, S. 8; Vollrath, 1989, S. 12f.; Greefrath et al., 2016, S. 48; Leuder & Prediger, 2005, S. 3).

Um mit der Kovariationsvorstellung vertraut zu werden, sollten in der Schule zuerst die qualitativen Veränderungen beigebracht werden, wobei zum Beispiel eine Aussage wie „Bei steigender Größe der Wohnung steigt auch die Miete“ getroffen und diese verstanden werden soll. Erst dann sollte mit der quantitativen Veränderung begonnen werden, denn ansonsten könnte es passieren, dass die Schülerinnen und Schüler durch die quantitativen Veränderungen in Kombination mit einer Rechnung nur verwirrt werden (Laakmann, 2013, S. 84).

Beispiele für die Kovariationsvorstellung sind:

- Die Temperatur eines Tees sinkt bei zunehmender Zeit so lange, bis er ausgekühlt ist.
- Auf Grund des Radius steigt der Flächeninhalt des Kreises quadratisch.
- Wächst die Seitenlänge eines Quadrats, so steigt auch der Flächeninhalt streng monoton (Büchter & Henn, 2010, S. 34; Greefrath et al., 2016, S. 48).

Typische Fragen:

- Falls x steigt, wie verwandelt sich dann $f(x)$?
- Wie muss man x modellieren, damit $f(x)$ fällt (Malle, 2000, S. 9)?

- Welche Verkettung liegt bei den beiden Größen vor (Laakmann, 2013, S. 84)?

2.3.2.3 Objektvorstellung (Vorstellung von der Funktion als Ganzes)

Definition:

„Eine Funktion wird als Ganzes, als eigenständiges mathematisches Objekt sui generis betrachtet.“ (vom Hofe, 2003, S. 6)

Definition:

„Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes.“ (Vollrath, 1989, S. 15)

Auch diese Definitionen ähneln sich im Inhalt. Bei dieser Vorstellung werden nicht die einzelnen Eigenschaften der Wertepaare oder Abschnitte betrachtet, sondern sie werden zusammengeschlossen und somit als Ganzes dargestellt. Dies beschreibt Vollrath als den dynamischen Aspekt des funktionalen Denkens. Daraufhin folgt der ganzheitliche Aspekt, bei dem in der zusammengeschlossenen Einheit alle Wertepaare zusammenpassen sollten, denn somit wird die Objektvorstellung leichter verstanden, als wenn der ganzheitliche Aspekt mit der Objektvorstellung miteinander kaum etwas zu tun hat (Vollrath, 1989, S. 15).

Besonders anhand einer Graphik kann eine Funktion den Schülerinnen und Schülern helfen, die Funktion als Ganzes zu sehen, da sie so beispielsweise eine lineare Funktion als eine Gerade sehen können und somit während des Behandeln dieser Funktion, diese Funktion sich auch mental vorstellen können. Genauso betrachten sie die quadratische Funktion als Parabel und haben diese Gestalt während des Lösen immer im Hinterkopf. Schwerer erkennbar ist die Objektvorstellung bei einer Tabelle. Die linearen Funktionen können von den Schülerinnen und Schülern noch relativ einfach erkannt werden, weil diese Werte immer mit demselben Faktor steigen. Allerdings wird dies bei der quadratischen Funktion schwieriger, da dort die Lernenden ausgehend vom Extrempunkt die Symmetrie erkennen müssen. Bei Funktionen höheren Grades kann dies von einem Schüler oder einer Schülerin kaum mehr erkannt werden, weil es dafür einen größeren mathematischen Hintergrund benötigt (Laakmann, 2013, S. 85).

Diese dritte Vorstellung ist vor allem für die Analysis der oberen Schulstufen sehr wichtig. Sie wird bei Funktionen einerseits verwendet, um mit zwei Funktionen zu operieren und sie somit beispielsweise miteinander zu addieren, zu subtrahieren oder zu multiplizieren, um eine neue Funktion zu erhalten. Andererseits kann bei schwierigen Funktionen die Funktion als Ganzes auch zerlegt werden, um sie einfacher zu machen und anschließend Ableitungs- und Integrationsregeln auszuführen (Greefrath et al., 2016, S. 49f.).

Folgende Beispiele sind typisch für die Objektvorstellung:

- Durch die Exponentialfunktion kann eine Abkühlung eines Tees dargestellt werden.
- Durch trigonometrische Funktionen werden die harmonischen Schwingungen der Abhängigkeiten der Geschwindigkeiten, des Ortes und der Beschleunigungen gemessen (Greefrath et al., 2016, S. 49).
- Eine Kosinusfunktion ist dieselbe Funktion wie eine Sinusfunktion, die um $\frac{\pi}{2}$ nach links versetzt wird (Büchter & Henn, 2010, S. 34).

Eine typische Fragestellung ist hier:

- Wie wird die Funktion gesehen, wenn sie als Ganzes auftritt (Büchter & Henn, 2010, S. 34)?

2.3.3 Vergleich der drei Grundvorstellungen

Vergleicht man nun vorerst die **Zuordnungsvorstellung** mit der Kovariationsvorstellung, kann man erkennen, dass bei der Zuordnungsvorstellung die Zusammenhänge der Funktion punktuell zu sehen sind, also nur einzelne Punkte betrachtet werden, wobei jeder Wert x genau einen Wert y besitzt. Außerdem verfügt sie über einen Simultanaspekt, was bedeutet, dass die Variablen statisch sind und somit als „feste, aber beliebige“ Werte zu sehen sind. Und zu guter Letzt ist noch zu erwähnen, dass ihre Wertetabelle waagrecht gelesen wird. Das Erkennungsmuster der Zuordnungsvorstellung ist das Verwenden von einzelnen Abschnitten (Greefrath et al., 2016, S. 48f.; Büchter & Henn, 2010, S. 34f.; Laakmann, 2013, S. 86).

Die **Kovariationsvorstellung** hingegen wird in einem lokalen Bereich der Definitions- oder Wertemenge betrachtet, das bedeutet, dass ganze Teile des Graphen angeschaut werden. Hier gibt es sowohl eine Änderung der Variablen x und y als auch eine Änderung beim Graphen. Sie liegt dem Veränderlichenaspekt zugrunde, bei dem sich die Variablen x und y verändern. Bei dieser Vorstellung muss die Tabelle senkrecht durchgearbeitet werden. So sehen wir, dass sich die Kovariationsvorstellung hauptsächlich mit dem Änderungsverhalten beschäftigt (Greefrath et al., 2016, S. 48f.; Büchter & Henn, 2010, S. 34f.; Laakmann, 2013, S. 86).

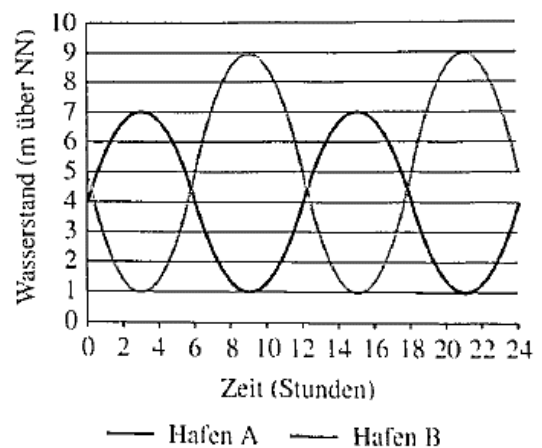
Die Differenzen-, Quotienten- oder Produktgleichheit wird mit der **Objektvorstellung** durch die Wertepaare in einer Tabelle festgelegt. Bei ihr treten immer einzelne Elemente auf, die sich dann als Ganzes zusammenschließen (Greefrath et al., 2016, S. 48f.; Büchter & Henn, 2010, S. 34f.; Laakmann, 2013, S. 86).

Betrachtet man nun die Definitionen (Kap 1.2), kann man erkennen, dass jede Definition nur anhand der Zuordnungsvorstellung beschrieben wird und dass die Kovariations- und Objektvorstellung ganz weggelassen werden. Für die Definition selbst genügt dies, doch für den praktischen Teil der Mathematik wird vor allem die Kovariationsvorstellung unbedingt benötigt. Es wurde herausgefunden, dass sowohl die Zuordnungs- als auch die Kovariationsvorstellung

bei den Lehrenden nicht auf dem Stand sind, auf dem sie sein sollten. Dabei ist die Kovariationsvorstellung noch weiter unterentwickelt, da diese nur wenig gebraucht wird (Malle, 2000, S. 9).

Damit Schülerinnen und Schüler mit Funktionen überhaupt arbeiten können, müssen sie zuerst über die Grundvorstellungen verfügen, denn diese stellen zwischen dem alltäglichen Leben und den Funktionen eine wichtige Verbindung dar. Die Grundvorstellungen selbst bilden die Grundlage der Funktionen. Deshalb benötigt man unterschiedliche Grundvorstellungen, um verschiedenste Anschauungen zu bekommen. Auf Grund dessen wird nicht nur eine Vorstellung herausgenommen und diese gelernt, sondern alle drei sind wichtig, denn sie sind miteinander verbunden und bauen jeweils aufeinander auf (Leuder & Prediger, 2005, S. 3; Laakmann, 2013, S. 86).

Dass die Grundvorstellungen nicht nur einzeln gebraucht werden, sondern dass sie sich gegenseitig benötigen, möchte ich anhand eines Beispiels zeigen: Wir haben ein exponentielles Wachstum gegeben. Ist der Lernende nun mit der Zuordnungsvorstellung vertraut, kann dieser anhand eines Graphs die Werte ablesen und bei gegebenem Funktionsterm diese auch berechnen. Dabei kann sogar die Frage beantwortet werden, zu welcher Zeit die Bevölkerung doppelt so viele Leute aufweist. Versteht der Lernende auch die Kovariationsvorstellung, so kann dieser mitverfolgen, wie sich die Anzahl der Bevölkerung mit zunehmender Zeit verändert. Er erkennt somit auch schon die Veränderungen bei einer Größe. Dabei



— Hafen A — Hafen B
 wie sich die Anzahl der Bevölkerung mit
 Abbildung 12: Gezeiten (Leuder & Prediger, 2005, S. 3)

könnte dies folgendermaßen dargestellt werden: Wächst die Zeit, so wächst auch die Zahl um denselben Prozentsatz. Sind die Schülerinnen und Schüler mit beiden Vorstellungen vertraut, so haben sie das allgemeine, charakteristische Muster der exponentiellen Funktionen und zeitgleich auch die Objektvorstellung verstanden, da sie somit die Funktion als Ganzes sehen können (Leuder & Prediger, 2005, S. 3).

Ein weiteres Beispiel, das zeigt, dass alle drei Grundvorstellungen benötigt werden, ist die Gezeitenabfolge (siehe Abb. 12). Hier kann man anhand eines Graphen den Verlauf von Ebbe und Flut darstellen. Dieser Graph wiederum zeigt, dass dies ein charakteristisches, periodisches Muster ist, bei dem sowohl Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung als auch die Funktion als Ganzes vorkommt, und dass sie voneinander abhängig sind (Leuder & Prediger, 2005, S. 3).

3 Schwierigkeiten der Funktionen

In diesem Kapitel wird es vorrangig um Lernschwierigkeiten bei den Funktionen gehen. Zuerst will ich definieren, was Lernschwierigkeiten überhaupt sind. Dann gehe ich speziell auf die Schwierigkeiten der Funktionen sowohl im wissenschaftlichen als auch im didaktischen Sinne ein, sodass die Fragen beantwortet werden, woran die Schwierigkeiten der Funktion liegen und wieso diese nicht gleich aufgefasst und behoben werden.

3.1 Lernschwierigkeiten im Allgemeinen

Lernschwierigkeiten sind in der heutigen Zeit ein großes Thema, da Kinder und Jugendliche nicht mehr so lernen können wie früher und aus verschiedensten Gründen beeinflusst werden.

3.1.1 Was sind Lernschwierigkeiten?

Zuallererst stellen wir uns die Frage, was Lernschwierigkeiten überhaupt sind. Lernschwierigkeiten können sowohl bei Erwachsenen als auch bei Kindern und Jugendlichen auftreten. Von einer Lernschwierigkeit wird dann gesprochen, wenn einem selbst das Lernen nicht so gelingt, wie man sich dies selbst erhofft hat oder auch wie das andere von einem erwartet haben. Vor allem in der Schule, in der die Kinder und Jugendlichen die meiste Zeit ihres Kindes- und Jugendalters verbringen kommt es häufig zu Lernschwierigkeiten, wenn der Schüler oder die Schülerin mit seinem oder ihrem eigenen Lernen nicht zufrieden ist und auch seine oder ihre tatsächlichen Lernleistungen nicht so sind, wie sie sein sollten und wie er oder sie sich das selbstvorgestellt hat. Erstreckt sich dies über eine längere Zeitspanne, dann wird der Ausdruck Lernschwierigkeit verwendet (Gold, 2016, S. 19).

Als Lernschwierigkeit gilt jedoch nicht, wenn eine Schülerin oder ein Schüler in einem Test oder in einer Schularbeit einmal weniger Punkte erzielt hat als die anderen Male. Somit wird, um derartige Verwechslungen zu vermeiden, die Lernschwierigkeit auch Minderleistung genannt. Um eine Lernschwierigkeit zu erkennen und diese ersichtlich zu machen, nimmt man in der Schule immer den Durchschnitt der Klasse oder des Jahrganges her (Gold, 2016, S. 19f.).

Bei Lernschwierigkeiten können nach Zielinski vor allem zwischen Leserechtschreibschwierigkeiten, bei denen die Aneignung von Schreiben und Sprechen schwer fällt, und Rechenschwierigkeiten, bei denen das Lernen von mathematischen Operationen schwierig erscheint, unterschieden werden. Dabei liegt der Bedingungsfaktor hier beim Erfassen, Verarbeiten und Wiedergeben des Stoffes. Lernschwierigkeiten können auch bei intellektuellen Kindern vorkommen. Trotz hoher Intelligenz sind die Lernprozesse begabter Kinder, die unter Lernschwierigkeiten leiden, nicht erfolgreich (Fischer, 2009, S. 180).

3.1.2 Definitionen

Verschiedenste Autoren definieren die Lernschwierigkeit unterschiedlich. Deshalb schauen wir uns einige davon an und vergleichen diese.

Definition:

„Lernschwierigkeiten sind Schwierigkeiten in der Auseinandersetzung mit Lernanforderungen aller Art, die sich in minderen Schulleistungen beim Lesen, in der Rechtschreibung und/oder beim Rechnen niederschlagen. Auch langsame und schwache Lerner lassen sich darunter subsumieren.“ (Gold, 2011, S. 12)

Definition:

„Lernschwierigkeiten (...) ein allgemeiner Ausdruck für eine heterogene Gruppe von Störungen, die sich in bedeutsamen Schwierigkeiten beim Erwerb oder Gebrauch des Hörverständnisses, Sprechens, Lesens, Schreibens, Denkens oder Rechnens manifestieren. Diese Störungen liegen im Individuum selbstbegründet, sind vermutlich auf Dysfunktionen des zentralen Nervensystems zurückzuführen und können über die gesamte Lebensspanne hinweg auftreten.“ (Hammill, zitiert nach Zielinski, 1998, S.12)

Definition:

„Von Lernschwierigkeiten spricht man im Allgemeinen, wenn die Leistungen eines Schülers unterhalb der tolerierbaren Abweichungen von verbindlichen institutionellen, sozialen und individuellen Bezugsnormen (Standard, Anforderungen, Erwartungen) liegen oder wenn das Erreichen (bzw. Verfehlen) von Standards mit Belastungen verbunden ist, die zu unerwünschten Nebenwirkungen im Verhalten, Erleben oder in der Persönlichkeitsentwicklung des Lernenden führen.“ (Weinert & Zielinski, zitiert nach Zielinski, 1998, S. 13)

Betrachten wir nur diese drei Definitionen, dann können wir schon erkennen, dass sie denselben Sinn ergeben, jedoch alle voneinander verschieden sind. Das Problem ist, dass „Lernschwierigkeiten“ nicht genau definiert werden können, da sie Überschneidungen mit den Begriffen wie Lernbehinderung, Leistungsversagen oder Lernstörungen haben. Somit werden oft auch diese Bezeichnungen als Synonym für Lernschwierigkeiten verwendet. Dabei driftet der Begriff „Lernbehinderung“ noch am weitesten von diesen drei Begriffen ab, da Lernbehinderung meist als eine schwere Form des Schulversagens gilt, weil die Intelligenz der betroffenen Personen unter dem Durchschnitt liegt. Diese Personen benötigen dann zusätzlich eine weitere Hilfe (Zielinski, 1998, S. 12).

Betrachten wir nun die Definition von Hammill, die ursprünglich von der NJCLD geschrieben wurde, dann ist ersichtlich, dass hier die Lernschwierigkeiten vom Individuum selbst ausgehen und äußere Bedingungen, wie gesellschaftlich-kulturelle Aspekte und der Unterricht, eher in den Hintergrund gestellt werden und somit nicht primär für die Lernschwierigkeiten

verantwortlich sind. Diese individuellen Ursachen, die bestimmt in einzelnen Fällen auftreten, müssen durch ärztliche Untersuchungen und psychologische Tests untermauert/bewiesen sein. Die Definition von Zielinski vertritt eine andere Sichtweise. Hier wird die jeweilige Bezugsnorm in Betracht gezogen, das heißt, dass die Anforderungen der jeweiligen Schule an den Lernschwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler schuld. Dies ist zwar unvorstellbar, jedoch gehen die Lernschwierigkeiten heutzutage meist von diesen Bezugsnormen aus und somit wird das Versagen des Lernenden anhand seiner Note innerhalb der Klasse oder seiner Vornote festgestellt. Dabei gilt bei dieser Definition auch als Lernschwierigkeit, wenn eine Schülerin oder ein Schüler mithilfe intensiven Lernaufwands und einer Menge Nachhilfestunden die Anforderungen erfüllt, jedoch die Überforderung zu Aggressionen und Schulängsten führt bzw. er oder sie gar den sozialen Kontakt verliert (Zielinski, 1998, S. 13f.).

Somit können wir erkennen, dass diese Definitionen nichts über die Ursachen der Lernschwierigkeiten aussagen, sondern dass sie nur dazu dienen, dass Personen, deren Leistungen nicht ausreichend sind, anhand einer Diagnose herausgefiltert und somit gezielt behandelt werden können (Zielinski, 1998, S. 14).

3.1.3 Rechenschwierigkeiten

„Rechenschwäche ist gekennzeichnet durch anhaltende Schwierigkeiten im Erfassen rechnerischer Sachverhalte, im Umgang mit Zahlen und in der Bewältigung von Rechentechniken“ (Leitner, Ortner, & Ortner, 2008, S. 378).

Die Rechenschwierigkeit kann unterschieden werden zwischen einer Rechenschwäche und einer speziellen Rechenschwäche. Die Rechenschwäche findet in der Schule statt. Hier wird die Leistung des Schülers oder der Schülerin nicht erbracht. Bei der speziellen Rechenschwäche ist der Lernende überdurchschnittlich begabt und seine Leistungen in der Schule sind auch in Ordnung. Diese spezielle Rechenschwäche wird auch als Dyskalkulie bezeichnet (Leitner, Ortner, & Ortner, 2008, S. 378).

Rechenschwierigkeiten stehen in unserer Gesellschaft nicht sonderlich im Vordergrund. Als viel dramatischer werden die Lese- und Rechtschreibschwierigkeiten angesehen, da die Lese- und Rechtschreibkompetenzen überall benötigt werden. Deshalb werden die Rechenschwierigkeiten nur an sekundärer Stelle gereiht. Jedoch wurde herausgefunden, dass schon über 15 % der Schülerinnen und Schüler beim Operieren mit Zahlen unter dem Durchschnitt liegen. Deshalb sollte auch auf die Rechenschwierigkeit ein Auge geworfen werden (Zielinski, 1998, S. 123).

3.2 Wissenschaftstheoretische Schwierigkeiten des Funktionsbegriffes

Funktionen wurden sowohl auf wissenschaftstheoretische Schwierigkeiten als auch auf didaktische Schwierigkeiten untersucht. Betrachten wir zuerst die wissenschaftstheoretischen Schwierigkeiten, die von Anna Sierpiska in 16 Hindernissen für Schülerinnen und Schüler unterteilt wurde.

3.2.1 16 Hindernisse der Funktion von Sierpiska

Durch das Erlernen eines neuen mathematischen Begriffes versteht man oft gewisse Zusammenhänge oder Strukturen besser, als wenn immer wieder in kleinen Zügen neue Erkenntnisse in einem längeren Zeitraum gewonnen werden (Kösters, 1995, S. 25).

Sierpiska hat die Übergänge von den alten Ansichten zu den neuen genau untersucht. Weiß man über die neuen Denkweisen Bescheid, kann man die alten zuordnen. Sie werden als epistemologische Hindernisse (Brousseau, zitiert nach Kösters, 1995, S. 25) bezeichnet, die man annehmen muss (Kösters, 1995, S. 25).

Dies bezieht sich auf die Geschichte der Mathematik gleich wie auf die Schülerinnen und Schüler, die einen neuen Begriff erlernen müssen. Epistemologische Hindernisse sind Schwierigkeiten, die man von individuellen Lernschwierigkeiten unterscheidet. Sie beziehen sich auf den Stoff selbst und können durch eine gute Vorbereitung aus der Welt geschafft werden. Wer dieses wissenschaftliche Hindernis erreicht hat, kann dies als sehr großen Sprung in der Lerngeschichte ansehen (Kösters, 1995, S. 25).

Sierpiska entdeckte 16 wissenschaftstheoretische Hindernisse, bei denen die Entwicklung des Funktionsbegriffes herausgefiltert wird. Man findet sie sowohl bei Schülern als auch in der Geschichte wieder (Kösters, 1995, S. 25).

Diese 16 Hindernisse möchte ich im Folgenden vorstellen:

3.2.1.1 *Hindernis 1: Keine praktischen Probleme in der Mathematik*

PLATO meinte, dass Mathematik nicht für die normale Gesellschaft leicht verständlich sei, da sie sich nicht mit praktischen Problemen beschäftige. Wenn der Unterricht sehr an Mathematik orientiert vorgetragen wird, können auch Schüler ihn sehr schwer verstehen. Dies wird jedoch oft zum Problem, da die Leute sich dann auch nicht mit den einfachsten Rechnungen beschäftigen wie zum Beispiel die Menge einer Ware oder den Preis einer Ware zu berechnen. Dies passiert bei den Schülern jedoch noch nicht (Sierpiska, 1988, S. 568f.; Kösters, 1995, S. 26).

3.2.1.2 *Hindernis 2: Keine Berechnungsmethoden zur Erstellung von numerischen Tabellen in der Mathematik*

Die Griechen dachten, dass es sich bei Tabellen nicht um Wissenschaft handle, da dies eher praktisches Wissen als mathematisches Wissen sei. Ptolemäus beschrieb die Mathematik nur

als EUKLIDische Elemente, als einige geometrische Sätze sowie als die ebene und sphärische Geometrie. Dies reichte ihm aus, um die Astronomie und die Geographie zu studieren (Sierpinska, 1988, S. 569; Kösters, 1995, S. 26).

Schülerinnen und Schüler erkennen oft nicht, dass die Tabellen auch zu den Funktionen gehören, da die Funktionen auch nicht zum Mathematikunterricht zählen und somit auch nicht in Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff stehen. Solange sie dieses wissenschaftliche Hindernis nicht erkennen, können sie leider nicht Abhängigkeiten studieren (Sierpinska, 1988, S. 569; Kösters, 1995, S. 26).

3.2.1.3 Hindernis 3: Betrachtung der Phänomene als Veränderungen; Aufgrund der Konzentration auf die Änderung der Dinge übersieht man, was sich ändert.

Aristoteles definierte in seinem Buch „Physik“ eine Veränderung als eine Aktualisierung des Möglichen. Er fügte hinzu, dass es genauso viele Veränderungen wie auch Möglichkeiten gebe. Er sah an Veränderungen die qualitative Veränderung, Abnahme und Zunahme, Erscheinen und Verschwinden, Verschiebung, Bauen, Lernen, Behandlung einer Krankheit, Rotation, sowie reifer und älter werden. Aristoteles interessierte sich nur für die Veränderungen selbst, jedoch nicht, woher sie kamen. Er erfand auch kein regelaufbauendes Verfahren, um dies zu messen (Sierpinska, 1988, S. 569f.; Kösters, 1995, S. 27).

Anhand einer ihrer Untersuchungen war unter anderem von Sierpinska eine Frage an einige Schülerinnen und Schüler, welche linearen Funktionen einen Fixpunkt hätten. Dabei erfuhr sie, dass einige von den Lernenden auch bei der wiederholten Anwendung des gleichen Prozesses Schwierigkeiten hatten. In graphischer Darstellung konnten sie den Auftrag ausführen, jedoch sie konnten ihn nicht erklären (Sierpinska, 1988, S. 569f.; Kösters, 1995, S. 27).

Einige Lernende interessierten sich nur für die Gestalt dieser Linie und die Verschiebung von Punkten auf der Zickzacklinie. Einige erkannten nur die Folge der Punkte $(x_n, f(x_n))$, wobei die meisten $f(x_n) = a \cdot f(x_{n-1})$ dachten. Jedoch fast keiner erkannte, dass die Funktion sich immer wieder auf den vorangegangenen Funktionswert bezog. Deshalb entwickelte sich eine Folge der

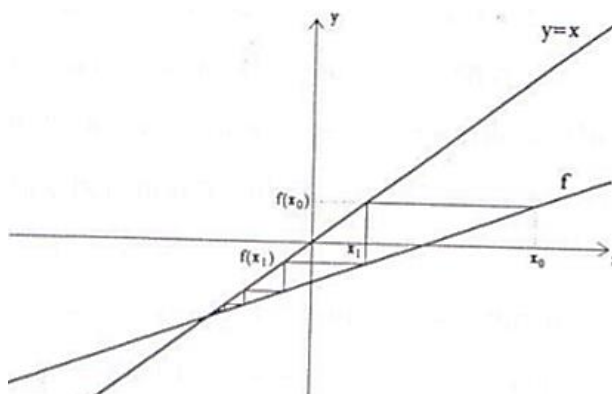


Abbildung 13: Beispiel einer linearen Funktion (Kösters, 1995, S. 27)

nachstehenden Art und es entstand: $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$ Glücklicherweise erkannten viele Lernende zumindest eine Veränderung. Wieso sich die Funktion verändert, erkannten sie leider nicht. Die Erkundung der beteiligten Größen ist jedoch für die Entwicklung des Funktionsbegriffes Voraussetzung (Sierpinska, 1988, S. 570; Kösters, 1995, S. 27f.).

3.2.1.4 Hindernis 4: Denken in Gleichungen und in daraus zu bestimmenden Unbekannten

Euler sprach in der Mathematik als erster Mathematiker von der Analysis, von variablen und konstanten Größen und in der Algebra von bekannten und unbekannten Größen. Dies war für Euler selbst und das Weiterforschen des Funktionsbegriffes sehr wichtig (Sierpinska, 1988, S. 570f.; Kösters, 1995, S. 28).

Um Textaufgaben und Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösen zu können, reicht für den Mathematikunterricht aus, wenn die Lernenden zwischen bekannten und unbekannten Größen in Zusammenhang mit Variablen unterscheiden können. Der Unterschied zwischen konstanten und variablen Größen bei Funktionen kommt erst später (Sierpinska, 1988, S. 571; Kösters, 1995, S. 28).

In Sierpinskas Studie war folgendes Beispiel gegeben, das dieses Problem darstellt: Es gibt zwei Firmen, die Drucker verleihen. Die Grundgebühr der ersten Firma ist \$ 300 pro Monat und man zahlt für jede Kopie, die man macht, \$ 0,04. Die zweite Firma verlangt eine Grundgebühr von \$250 und man zahlt pro Kopie nochmal \$ 0,06.

- a) Ab welcher Kopienanzahl kosten das Ausleihen der beiden Drucker dasselbe?
- b) Welcher Drucker ist kostengünstiger, wenn man viele Kopien benötigt?

Die erste Frage ist durch eine Gleichung mit einer Unbekannten zu lösen: $300 + 0,04x = 250 + 0,06x$. Das Denken der Schüler liegt alleine in Gleichungen und daraus zu bestimmenden Unbekannten. Um jedoch die zweite Antwort zu erhalten, muss die Anzahl der Kopien als abhängige Variable vom Preis genommen werden. Daher sind bei einem Gleichungssystem x und y unbekannte Zahlen. Bei Funktionen sind die Variablen x und y jedoch aus einem Bereich. Deshalb müssen die Schülerinnen und Schüler die Variablen in Einzelaspekte und Bereichsaspekte aufteilen (Malle, zitiert nach Kösters, 1995, S. 29).

Wovon eine Funktion bei einem Gleichungssystem mit nur einer Unbekannten abhängt, verstehen die Schülerinnen und Schüler meist nicht. Dadurch können sie die Entwicklung des Funktionsbegriffes oft schwer verstehen, da sie über die Abhängigkeit nicht Bescheid wissen (Sierpinska, 1988, S. 571; Kösters, 1995, S. 29).

3.2.1.5 Hindernis 5: Die Unwichtigkeit der Anordnung der Variablen

Die Mathematiker verstanden es erst spät, dass die Anordnung der Variablen in der Entwicklung des Funktionsbegriffes eine große Bedeutung hat. Fermat und Descartes unterschieden als Erstes zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen. Ihre Anordnung spielte jedoch in der von ihnen entwickelten analytischen Geometrie keine Rolle (z. B. bei einer Ellipsengleichung). Bei Newton war die Anordnung der Variablen schon wichtiger, da bei ihm die Größe abhängig von der Zeit war. Viele Schüler sehen die Variablen in einem Gleichungssystem als gleich an. Sie verstehen nicht, dass die eine Variable von der anderen abhängig ist. Durch

eine Funktionsgleichung kann man eine Koordinate berechnen, wenn eine andere gegeben ist. Keine Koordinate steht jedoch vor einer anderen (Sierpinska, 1988, S. 571; Kösters, 1995, S. 28).

Der Funktionsbegriff kann nur gebildet werden, wenn das epistemologische Hindernis abgeschlossen ist (Sierpinska, 1988, S. 571; Kösters, 1995, S. 28).

3.2.1.6 Hindernis 6: Zahlen sind heterogen.

Die Griechen hatten lange Zeit eine uneinheitliche Vorstellung von Größen. Sie unterschieden nur zwischen Zahlen und gleichmäßigen Größen. Proportionen und Gleichungen sowie Brüche und Quotienten sahen sie nicht als dasselbe an (Sierpinska, 1988, S. 571; Kösters, 1995, S. 28).

Die meisten Schülerinnen und Schüler haben keine einheitliche Vorstellung von $\mathbb{R}$, da sie denken, dass die irrationalen Zahlen nicht zu $\mathbb{R}$ gehören (Schmid, zitiert nach Kösters, 1995, S. 29). Eine falsche Vorstellung von $\mathbb{R}$ kann jedoch das Bilden des Funktionsbegriffes sehr erschweren, da dadurch die Definitions- und Zielmenge sehr eingeschränkt werden (Sierpinska, 1988, S. 571f.; Kösters, 1995, S. 28f.).

3.2.1.7 Hindernis 7: Pythagoräische Sichtweise von Zahlen: Alles ist Zahl.

Zahlen und Größen sind für viele Mathematiker dasselbe. Im Gegensatz dazu ist für viele von ihnen der Unterschied zwischen Variablen, die physikalische Größen darstellen, und numerischen Variablen sehr wichtig. Dadurch kann man das gesamte Konzept einer Funktion verstehen. Die Gleichung $y = x^2$ bedeutet dasselbe wie die Gleichung $x = y^2$. Wenn diese Gleichungen jedoch physikalisch zusammenhängen, kann eine Vertauschung nicht vollzogen werden. Denn zum Beispiel ist $s = \frac{g}{2} t^2$ nicht dasselbe wie $t = \frac{g}{2} s^2$. Manche Schülerinnen und Schüler entwickeln ein anwendungsfernes Verständnis von Funktionen, das heißt, dass sie nicht zwischen Größen und Zahlen unterscheiden (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 30).

3.2.1.8 Hindernis 8: Unterscheidung der Gesetze der Physik mit den Funktionen der Mathematik anhand zwei unterschiedlicher Wissensbereiche

Die Mathematik und die Physik schlossen sich erst im Mittelalter zusammen. Man interessierte sich das erste Mal für komplexe Funktionen und auch für physikalische Funktionen und nicht nur für verschiedene Teile eines Ganzen (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 30).

Einige Schülerinnen und Schüler sehen einfach keinen Zusammenhang zwischen Physik und Mathematik. Die größten Probleme bereiten ihnen die Variablen x und y , die meistens in der Physik verwendet werden (Brantner, zitiert nach Kösters, 1995, S. 30).

Die Lernenden können den Funktionsbegriff nur als Einheit verstehen, wenn sie lernen, zwischen einer physikalischen Größe und einer Zahl zu unterscheiden. Sie müssen jedoch auch die Verbindung zwischen einem physikalischen Gesetz und einer mathematischen Funktion begreifen (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 30).

3.2.1.9 Hindernis 9: Privilegierte Abhängigkeiten anhand von Proportionen

Die Proportionen in der Mathematik waren bis zum 17. Jahrhundert von hoher Bedeutung. Man probierte alles durch Proportionen zu formulieren. (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 31).

Sehr bedeutend sind in der Schule neben den linearen Funktionen auch die Proportionen, die mit Schlussrechnungen berechnet werden. Daher haben die Schülerinnen und Schüler die Proportionen immer im Hinterkopf und denken, dass alles von den Proportionen abhängt (Ulovec, zitiert nach Kösters, 1995, S. 31).

Dieses Bild stört das Wachstum von nichtlinearen Funktionen (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 31).

3.2.1.10 Hindernis 10: Starker Glaube an die Kraft formaler algebraischer Operationen

Das nächste Hindernis steht stark im Zusammenhang mit dem wissenschaftlichen Hindernis (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 31).

3.2.1.11 Hindernis 11: Als Funktionen werden jene Abhängigkeiten bezeichnet, die anhand analytischer Ausdrücke beschrieben werden können.

Um Funktionen genauer zu untersuchen, sollte man schon ein Wissen über spezielle algebraische Verfahren vorweisen können. Jedoch darf man nicht denken wie Vieta, dass man durch die Lehre von den Gleichungen alle mathematischen Probleme sofort lösen könne. Newton hat die Ableitung von Termen nur durch eine vorgegebene Rechenoperation vorgenommen. Z. B.: wenn $a = x^m$, dann $a' = mx^m$ (kein Fehler! Für NEWTON war a dasselbe wie $a'(x)$). Im 17. und 18. Jahrhundert verwendete man die Proportionen und Gleichungen hauptsächlich für die Gestaltung von funktionalen Abhängigkeiten. Wollte man jedoch damit rechnen, ging das leider nicht, da die Proportionen und Gleichungen keine Bedeutung mehr hatten. Die Proportionen und Gleichungen stellten nur mehr die Theorie der Verknüpfungen mathematischer Strukturen dar. Die Mathematiker Bernoulli, Euler und Cauchy kannten die Funktionen als eine Art zergliedernde Ausdrücke an. Im Gegensatz dazu hatten Dirichlet und Lobatschewski eine andere Vorstellung davon (Sierpinska, 1988, S. 574; Kösters, 1995, S. 31).

Viele Schülerinnen und Schüler sehen eine Funktion nur als einen analytischen Ausdruck, wie z. B. einen Term oder eine Gleichung. Wie Euler den Funktionsbegriff entwickelt hat, wissen nur wenige (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 32).

3.2.1.12 Hindernis 12: Beschreibung der Definition anhand eines Zusammenhangs, dessen Erfahrung und Einsicht unbekannt ist. Festlegung der Definition anhand des Objektes

Die Entstehung des Funktionsbegriffes ging über mehrere Stufen hinweg (siehe Kapitel 1.1). Im 19. Jahrhundert wurde das erste Mal der Funktionsbegriff formuliert. Bei Euler musste eine Funktion noch mit freier Hand zu zeichnen sein. Dies veränderte sich im Laufe der Zeit stark, denn die Funktionen wurden immer vielseitiger und waren nicht mehr so einfach darzustellen, wie zum Beispiel die DIRICHLETsche Sprungfunktion (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 32).

Die Schülerinnen und Schüler lernen meistens über eine lange Zeit nur differenzierbare Funktionen kennen. Außerdem wird die graphische Darstellung nur durch eine einzige Kurve repräsentiert, daher besteht die Funktion auch aus nur einer einzigen Formel. Da den Lernenden nur ein geringer Teil der Funktionen bekannt ist, entwickeln sie eine falsche Vorstellung von Funktionen. So entstehen Funktionsprototypen (siehe Kapitel 3.3.3.2). Die meisten Schüler entscheiden Grenzfälle nach ihren eigenen Funktionsvorstellungen, da sie denken, dass die Definitionen nicht logisch bindend sind. Dass es jedoch für Grenzfälle eine korrekte Definition gibt, wissen viele Schüler nicht (Sierpinska, 1988, S. 572; Kösters, 1995, S. 32).

Die Entwicklung des allgemeinen Funktionsbegriffes wird vor allem durch die Prototypen gestört, da sie eine beschränkte Sichtweise des Funktionsbegriffes bewirken (Sierpinska, 1988, S. 572f.; Kösters, 1995, S. 32).

3.2.1.13 Hindernis 13: Funktionen sind Folgen von Zahlenpaaren.

Die ältesten Methoden, um Abhängigkeiten darzustellen, sind Tabellen. Setzt man Tabellen mit Funktionen gleich, so würde das bedeuten, dass alle Funktionen nur Folgen von Zahlenpaaren sind. Diese Vorstellung wird durch die Anschauung gefestigt, dass nacheinander entweder endlich oder unendlich viele Zahlen für die Variablen verwendet werden dürfen. Für Cauchy waren Variable tatsächlich Folgen von Zahlen. Einige Lernende sehen nur einzelne Zahlenpaare in Graphen. Das bedeutet, dass deshalb die Funktionen nur das Aufeinanderfolgen von Zahlenpaaren für sie sind. Auch Tabellen sind für manche Schülerinnen und Schüler nicht Teil der Mathematik (siehe Kapitel 3.2.1.2) und einige andere sehen darin nur eine Aufeinanderfolge von Zahlenpaaren. Ebenfalls kann man die Funktionswerte durch von fremder Hand vorgenommene Änderung nicht berechnen (Sierpinska, 1988, S. 573; Kösters, 1995, S. 33).

Durch das Hindernis 6 (siehe Kapitel 3.2.1.6) bewirkt die Diskretisierung eine Einengung der Menge der Elemente x , die der Menge der Elemente y in einer Abbildung zugeordnet ist, und eine Menge der Elemente y , die der Menge der Elemente in einer Abbildung zugeordnet ist (Sierpinska, 1988, S. 573; Kösters, 1995, S. 33).

3.2.1.14 Hindernis 14: Die Koordinaten eines Punktes sind Strecken und keine Zahlen.

Die Differential- und Integralrechnung entwickelte sich hauptsächlich durch das Arbeiten mit Kurven. Kurven wurden im 18. Jahrhundert nicht abhängig von Graphen gesehen, wenn sie beispielsweise in Form einer Gleichung gegeben waren. Newton war der Meinung, dass durch die Kurven die Gleichungen entstanden. Die Kurven bestanden zuerst nur aus bewegten Punkten mit geometrischen Objekten bzw. Bahnen. Wichtig ist, dass die Kurven zuerst hier waren und durch die Gleichungen nur beschrieben wurden (Sierpinska, 1988, S. 574; Kösters, 1995, S. 33).

Da für viele Lernende die Koordinaten eines Punktes nur Strecken und keine Zahlen sind, fällt es ihnen sehr schwer, im Koordinatensystem die x -Koordinaten bzw. y -Koordinaten festzustellen. Schuld daran ist auch, dass in der Schule die Koordinaten eines Punktes als Strecken eingetragen werden, anstatt sie als Punkte auf den Achsen einzuzichnen:

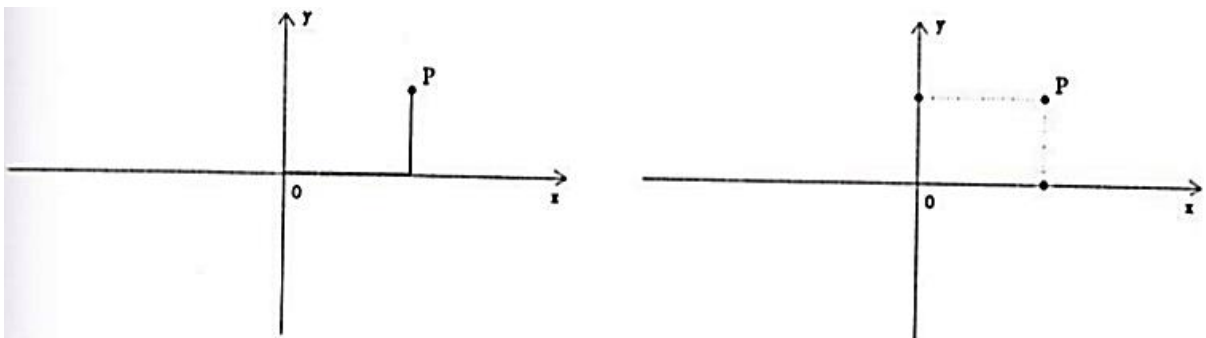


Abbildung 14: Einzeichnen eines Punktes anhand von Strecken vs. Punkten (Kösters, 1995, S. 34)

Die Lernenden verstehen nicht, dass es sich hierbei um einen Graphen handelt, und erkennen den Zusammenhang zwischen Zahlen und Größen nicht, wenn die Koordinaten eines Punktes als Strecken gesehen oder die Kurven als geometrische Objekte betrachtet werden (Sierpinska, 1988, S. 574; Kösters, 1995, S. 33f.).

3.2.1.15 Hindernis 15: Der Graph einer Funktion ist ein geometrisches Modell funktionaler Abhängigkeiten. Er muss nicht exakt sein und kann auch Punkte (x, y) enthalten, die die Funktion nicht erfüllen.

In der Astronomie tauchte im 11. Jahrhundert der erste Graph auf. Durch ihn werden die Veränderung der Latitude der Position der Planeten (vertikale Achse) und die Abhängigkeit von der Longitude (horizontale Achse) dargestellt. Diese Graphen wurden jedoch immer nur beobachtet, aber nie berechnet. Die folgende Abbildung zeigt eine Aufzeichnung einer solchen Beobachtung:

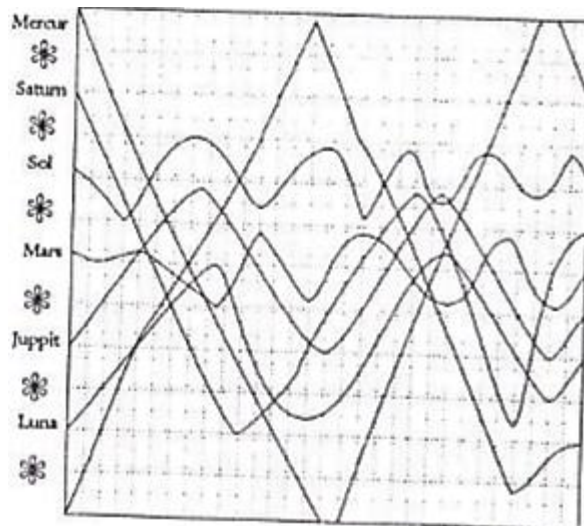


Abbildung 15: Aufzeichnung einer Beobachtung von Planeten (Kösters, 1995, S. 35)

Getrennt voneinander entwickelten sich die Vorstellungen von Graphen und Kurven. Für die Mathematiker waren Kurven jedoch nur eine günstige Bestimmung von geometrischen Modellen. Die Modelle mussten die Abhängigkeiten jedoch nicht exakt ausdrücken. Die Stabdiagramme von Oresmes gingen eher in die qualitative Richtung anstatt in die quantitative (Sierpinska, 1988, S. 575; Kösters, 1995, S. 34f.).

Der Funktionsgraph besteht bei einigen Lernenden aus Punkten (x, y) , hierbei gibt es jedoch einen Zusammenhang zwischen x und y . Diese Bestimmung ist durch eine Gleichung gegeben. Der Graph spiegelt diese Abhängigkeit nicht wider, da er eine geometrische Figur ist. Da der Graph nicht die gleiche Funktion darstellt wie beispielsweise die Funktion in einer Gleichung erschwert das epistemologische Hindernis das Übersetzen von der graphischen in die algebraische Darstellungsform und natürlich auch umgekehrt (Sierpinska, 1988, S. 575; Kösters, 1995, S. 34).

3.2.1.16 Hindernis 16: Veränderungen der Variablen sind Veränderungen der Zeit.

Ein großes wissenschaftliches Hindernis liegt darin, dass alle Änderungen in der Zeit passieren und eine bestimmte Ursache haben. Auch bei Aristoteles bewirkte die zeitliche Änderung einen anderen Zustand. Im Buch, das Aristoteles schrieb, waren für ihn fünf Fragen von besonderer Bedeutung. Diese musste man beantworten können, damit man den Grund einer Veränderung oder das Auftreten einer neuen Gegebenheit (er nennt sie H) versteht. Folgende fünf Fragen waren für ihn von großer Bedeutung:

- (1) „Wie kommt H zustande?“
- (2) Woher kommt H?
- (3) Was wird aus H?
- (4) Welchen Prinzipien liegt das Zustandekommen von H zugrunde?

(5) Welche Schritte müssen getan werden, damit H zustande kommt?“ (Kösters, 1995, S. 36)

Noch einige Fragen in Bezug auf eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ bezüglich eines Funktionsbegriffes:

- „Ist f eine physikalische Beziehung (durch Erfahrung oder ein Experiment gefunden) oder eine künstliche Beziehung?
- Welches sind die Elemente von X (Zahlen, geometrische Figuren, ...)?
- Welches sind die Elemente von Y ?
- Nach welchen Prinzipien (Regeln, Formeln) werden die den Elementen von X zugeordneten Elemente von Y ermittelt?
- Welcher Algorithmus liefert zu jedem Element aus X das zugehörige Element aus Y ?“ (Kösters, 1995, S. 36)

Daraus erkennt man, dass Aristoteles richtig in seiner Denkweise in Bezug auf den Funktionsbegriff war und dass die zeitliche Änderung eine große Rolle spielt. Diese Vorstellungen von Aristoteles, dass alle Veränderungen einen Grund haben und die Zeit eine große Bedeutung hat, stellten eine große Schwierigkeit in der Entwicklung der Physik dar. Am Anfang war es für viele Physiker schwierig, eine andere Denkweise einzuschlagen (Sierpiska, 1988, S. 575; Kösters, 1995, S. 35f.).

Schülerinnen und Schüler verwechseln sehr oft funktionale und kausale Zusammenhänge bei Funktionen wie zum Beispiel: Wenn sich x ändert, dann ist das der Grund für die Änderung von y . Sie denken dann zusätzlich noch wie Aristoteles, dass jede Veränderung sich in der Zeit verändert (Sierpiska, 1988, S. 575; Kösters, 1995, S. 36).

Das epistemologische Hindernis kommt sehr oft in der Physik vor. Eine sehr große Einschränkung würde es bedeuten, wenn Veränderungen von Funktionen nur auf die Zeit angewiesen wären (Sierpiska, 1988, S. 575; Kösters, 1995, S. 36f.).

3.3 Didaktische Schwierigkeiten des Funktionsbegriffs

3.3.1 „Concept image“ und „Concept definition“

Da unser Gehirn sehr komplex funktioniert, widerspricht es oft der Logik der Mathematik. Nicht nur durch die Logik allein werden Begriffe verstanden, sondern auch indem wir Fehler machen und diese Fehler dann wiederum einsehen. Damit wir verstehen können, wie diese Prozesse positiv oder negativ ablaufen, sollten wir zuerst wissen, wie die mathematischen Konzepte definiert sind und welche kognitiven Prozesse es gibt. Anschließend sollten die beschriebenen Prozesse unterschieden werden können. Die meisten Konzepte werden nicht genau definiert,

sie werden erst durch eine gezielte Anwendung gelernt und mit der Zeit langsam verfeinert. Anschließend gibt es erst eine genaue Definition (Tall & Vinner, 1981, S. 151).

Definitionen werden sowohl in der Schule als auch in der Uni gelehrt. Müssen Schülerinnen und Schüler oder Studentinnen und Studenten entscheiden, ob eine gegebene Darstellung eine Funktion ist oder nicht, machen sie dies nicht anhand einer Definition, sondern verwenden das „Concept image“ (Vinner & Dreyfus, 1989, S. 356).

Das „**Concept image**“ wird als eine kognitive Struktur bezeichnet, die alle psychischen Bilder, Eigenschaften und Prozesse eines Individuums beschreibt, die möglichst nahe an der Definition liegen sollten. Langsam und allmählich wird dies aufgebaut, indem das Individuum neue Erfahrungen macht. Das passiert, damit sich die Schülerinnen und Schüler aus Beispielen und Gegenbeispielen von Funktionen ihre eigenen Vorstellungen machen. Dabei besitzt schlussendlich jede Person sein individuelles „Concept image“. Zum Beispiel hatten wir früher keine Vorstellung von einem „Haus“ oder einer „Orange“. Doch jetzt wurde unser Wissen so weit ausgedehnt, dass wir diese Begriffe verstehen und somit ein „Concept image“ aufgebaut haben (Vinner & Dreyfus, 1989, S. 356; Tall & Vinner, 1981, S. 152; Vinner, 1983, S. 293).

Manche bestehenden Konzepte können wiederum in unterschiedliche Konzepte unterteilt werden. Dies ist beim „Concept image“ der Fall, dazu verwenden wir die „Concept definition“. Das bedeutet, die „Concept definition“ ist Teil des „Concept image“. Unter „**Concept definition**“ wird hier eine verbale Definition verstanden, die einen bestimmten Begriff definiert. Dieses Konzept ist ähnlich wie eine formale Definition, nur dass der zu verstehende Begriff vom Individuum selbst, mithilfe von eigenen Wörtern, die oft nicht dem mathematischen Sinn entsprechen, gebildet wird. Dabei kann diese individuelle Definition bei der einen Person leer sein oder gar nicht existieren, während sie bei der anderen Person Teile des „Concept image“ haben kann. Die „Concept definition“ wird in der Schule anhand der Funktionen mit der DIRICHLETschen bzw. DEDEKINDschen Definition gelehrt, welche aussagt, dass die „Funktion als eindeutige Zuordnung von Elementen einer Menge B zu Elementen einer Menge A“ (Kösters, 1995, S. 59) wird. Da den Schülerinnen und Schülern die Funktion anhand einer Formel beigebracht wird und auch in dieser Weise die Funktion geübt wird, haben die Lernenden eine falsche Vorstellung und glauben, dass die Funktion immer anhand einer Formel oder Regel dargestellt wird. Zum „Concept image“ selbst zählen neben den Funktionen auch noch die Wertetabelle und der Graph (Tall & Vinner, 1981, S. 152f.; Vinner, 1983, S. 293f.; Kösters, 1995, S. 59).

Das „Concept image“ und die „Concept definition“ wurden von Vinner und Dreyfus in einer Studie an Schülerinnen und Schülern und Lehrern und Lehrerinnen getestet. Jedoch gibt es auch andere Untersuchungen, die diese Konzepte miteinschließen. Im Folgenden möchte ich einige dieser Studien vorstellen und diese anschließend vergleichen.

3.3.2 Studie von Bakar und Tall

Schon oft wurden Untersuchungen durchgeführt, bei denen festgestellt wurde, was sich Schülerinnen und Schüler unter einer Funktion vorstellen. Dabei wurde herausgefunden, dass die Lernenden meistens die Definition des Funktionsbegriffes nicht verstehen. Haben sie die Aufgabe, zu erkennen, ob bei einem gegebenen Graphen eine Funktion vorliegt, stellen sie dies quasi nie anhand der Definition fest, sondern nehmen sich eine prototypische Funktion her, die sie sich selbst aus einigen Beispielen erstellt haben, vergleichen diese mit der gegebenen Aufgabe und treffen anschließend eine Entscheidung. Dabei haben die Funktionsprototypen, die von den Schülerinnen und Schülern selbst zusammengebastelt wurden, keine Eigenschaften der Definition des Funktionsbegriffes, sondern nur solche, die die Schützlinge selbst als wichtig empfinden (Kösters, 1996, S. 9).

Wenden wir dieses Konzept an einem Beispiel des alltäglichen Lebens an, beispielsweise an einem Vogel. Ein Vogel wird vorgestellt und es wird gezeigt, dass er fliegt, Federn und einen Schnabel besitzt sowie Eier legt. Dann muss anhand dieser Kriterien dies bei weiteren Lebewesen überprüft werden. Wir versuchen zu überprüfen, ob ein Huhn ein Vogel ist. Es verfügt über Flügel, Federn, einen Schnabel und legt auch Eier, jedoch fliegt es nicht. Aber einige Vögel fliegen nicht, deshalb zählt das Huhn zu den Vögeln. Ist eine Fledermaus ein Vogel? Sie fliegt und hat auch Flügel, aber sie ist auf keinen Fall ein Vogel. Auf diese Weise wird auch der Funktionsbegriff abgeleitet (Tall & Baker, 1992, S. 39f.).

Solch eine Untersuchung fand an Schülern und Studenten sowohl in England als auch in Österreich statt. Erstmals erfolgte diese Untersuchung im Jahre 1991 und wurde von Baker und Tall anhand eines Fragebogens in England durchgeführt. Drei Jahre später, im Jahre 1994, verwendete im Zuge einer Diplomarbeit Christine Kösters annähernd denselben Fragebogen und ermittelte an österreichischen Lernenden die Bedeutung des Funktionsbegriffes (Kösters, 1996, S. 9).

Wie diese Studien aussahen und was damit erreicht werden sollte, wird im Folgenden beschrieben:

Die folgende Studie wurde an Schülerinnen und Schülern durchgeführt, die das Level A in Mathematik erreicht haben. Dabei wird gezeigt, dass sie den Funktionsbegriff praktisch anwenden können, jedoch den theoretischen Sinn dahinter nicht verstehen. An der Studie nahmen 28 Studentinnen und Studenten im Alter von 16 bis 17 Jahren, die ihr erstes Studienjahr fast hinter sich hatten, und 109 Schülerinnen und Schüler, die mit ihrem Studium erst beginnen sollten, teil (Tall & Baker, 1992, S. 39f.).

3.3.2.1 Vorstellung des Funktionsbegriffs

Bei der ersten Aufgabe wurde an 28 Studentinnen und Studenten, die ihr erstes Studienjahr bald beendeten, festgestellt, ob sie in einem Satz erklären konnten, was sie sich unter einer Funktion vorstellen und ob sie nach Möglichkeit auch eine Definition angeben können. Keiner konnte eine richtige Definition angeben, aber sie konnten Erklärungen für eine Funktion nennen (Tall & Baker, 1992, S. 40).

Beispielsweise wurden folgende Erklärungen abgegeben:

- Eine Funktion kann man wie eine Gleichung mit variablen Eingaben betrachten. Man gibt Werte ein, die sie anschließend als Ausgabe ausspuckt.
- Eine Maschine, die für eine eingegebene Zahl eine Ausgabe ausgibt.
- Ein Ausdruck, welcher eine Reihe von Antworten mit verschiedene Werten von x gibt.
- Eine Form der Gleichung, die eine Kurve/ einen Weg auf einem Graphen beschreibt.
- Eine Möglichkeit, eine Kurve in einem kartesischen Graphen anhand von x - und y -Koordinaten zu beschreiben.
- Eine Reihenfolge, die eine Kurve oder eine gerade Linie auf einem Graphen darstellt.
- Ein mathematischer Befehl, der eine Variable in einen anderen Wert ändern kann.
- Eine Reihe von Berechnungen, um eine endgültige Antwort zu erhalten, zu der man eine Ziffer gereiht hat.

Betrachten wir nun die Antworten der Studentinnen und Studenten, können wir erkennen, dass erfreulicherweise fast alle wussten, dass der Prozess so abläuft, dass man durch eine Eingabe einer Zahl anhand eines Verfahrens zu einer Ausgabe einer Zahl kommt. Jedoch erwähnte niemand, dass dieser Vorgang nur auf einen bestimmten Bereich angewendet werden kann oder dass die Funktion ein Intervall von Werten benötigt. Außerdem verwendeten die Studentinnen und Studenten anstatt mathematisch spezifischen Wörtern, wie Terme oder Folgen, umgangssprachliche Bezeichnungen. Die Fachbegriffe der Mathematik zu kennen ist wichtig, damit die Schülerinnen und Schüler den Lehrer und die Lehrerin oder die Beispielangaben überhaupt verstehen können. Immerhin ist bzw. muss der Lehrende dazu fähig sein, anhand seiner/ ihrer Definition zu erkennen, wie sein/ ihr Schützling die Definition aufgefasst hat und ob diese Definition überhaupt so stimmt (Tall & Baker, 1992, S. 40f.).

3.3.2.2 Darstellung einer Funktion als Graph

Bei dieser Befragung wurden wieder die 28 Studentinnen und Studenten von vorher mit 109 weiteren Studierenden, die ihr Studium erst begonnen hatten, befragt. Sie bekamen einen Fragebogen, mit den folgenden Graphen. Sie mussten nun entscheiden, ob der Graph eine Funktion darstellt oder nicht. Antworteten sie mit nein, mussten sie eine zusätzliche Begründung angeben (Tall & Baker, 1992, S. 41f.).

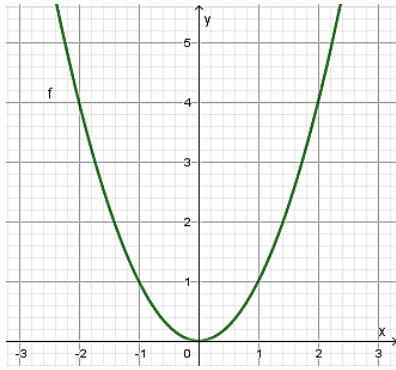


Abbildung 17: Abbildung (a) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	100	0
Studenten	97	3

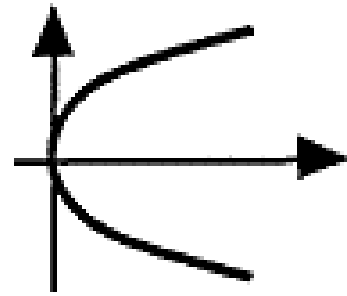


Abbildung 16: Abbildung (b) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)

	b)	
Schüler	95	4
Studenten	80	20

Tabelle 1: Ergebnisse der Abbildungen (a) und (b) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)

Die Auswertung dieses Teiles ergab, dass alle Schülerinnen und Schüler und Studentinnen und Studenten angaben, dass Graph (a) eine Funktion sei. Fast alle Schülerinnen und Schüler waren auch der Meinung, dass Graph (b) eine Funktion sei, bis auf zwei. Diese begründeten, dass er „anders ausschaue“ und der andere, dass $f'(y) = x'$ sei. Bei den Studentinnen und Studenten äußerten fast alle, dass (b) aufgrund der doppelten y -Werte für x keine Funktion sei (Tall & Baker, 1992, S. 42).

Dieselbe Frage wurde auch bei folgenden zwei Halbkreisen gestellt. Dort waren die Antworten der Schülerinnen und Schüler und Studentinnen und Studenten radikal anders.

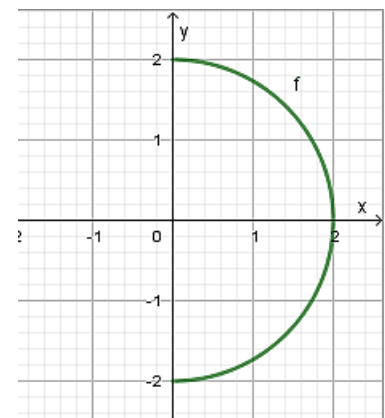
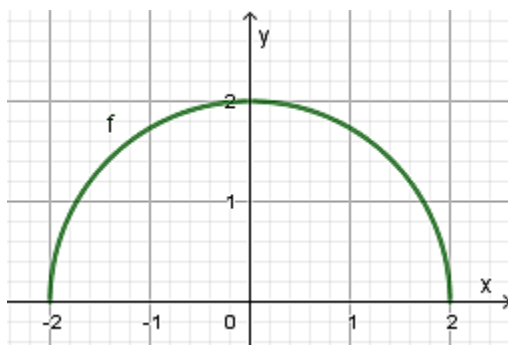


Abbildung 19: Abbildung (c) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)

Schüler	61	36
Studenten	91	9

Tabelle 2: Ergebnisse der Abbildungen (c) und (d) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)

Abbildung 18: Abbildung (d) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	43	57
Studenten	70	28

Bei diesem Beispiel gab es einen Rückgang auf 61 % der Schülerinnen und Schüler, die erkannten, dass (c) eine Funktion ist. Jedoch stieg die Zahl jener, die bemerkten, dass (d) keine Funktion ist, auf 57 %. Die Begründungen, dass (c) keine Funktion sein kann, waren:

- Der Graph der Funktion müsste weitergehen, nicht einfach aufhören.
- Er hört einfach auf, die Werte sind hier nicht beschränkt.
- Die Linien müssten weiterlaufen.
- Funktionen sind normalerweise fortlaufend, sie brauchen eine Bedingung.
- Die Funktion könnte für keinen Wert gelten.

So erkennt man, dass die Schüler das Wort „kontinuierlich“ nicht richtig einsetzen können, sondern nur mit der Umgangssprache, wie „hört auf“, den Graphen als falsch ansehen (Tall & Baker, 1992, S. 42f.).

Den Graphen (d) gaben die meisten Schülerinnen und Schüler als falsch an, weil sie behaupteten, dass jede Funktion durch eine Formel definiert sei. Dies war somit keiner von ihren Prototypen, denn diese Funktion war nicht laut ihrer Formel definiert. Das heißt, die Schüler gaben diese Funktion aus ganz falschen Gründen als falsch an (Tall & Baker, 1992, S. 42).

Weiters wurden ein Viertelkreis und ein Kreis innerhalb eines Koordinatensystems dargestellt und wieder wurden dieselben Schülerinnen und Schüler befragt, wobei diesmal die Studenten und Studierenden ausgelassen wurden.

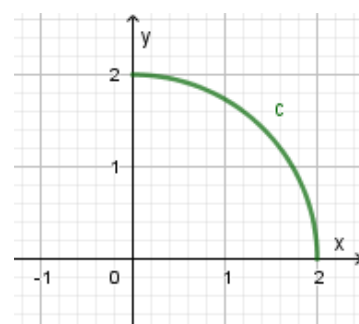
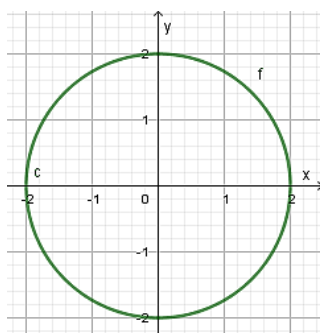


Abbildung 21: Abbildung (e)
(in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 43)

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	29	61
Studenten	Nicht befragt	

Abbildung 20: Abbildung (f) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 43)

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	64	29
Studenten	65	35

Tabelle 3: Ergebnisse der Abbildungen (e) und (f) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 43) Beim gegebenen Viertelkreis

behaupteten nur 29 % aller Schülerinnen und Schüler, dass er eine Funktion sei. Dabei wurden diesmal Studentinnen und Studenten gar nicht gefragt. Von den 61 % Schülerinnen und Schüler, die „nein“ ankreuzten, gaben die folgenden Begründungen an:

- Funktionen können nicht für irgendeinen Wert gelten.
- Wenn der Graph einer Funktion weitergehen würde, dann würde er nicht einfach stoppen.

Anhand einer weiteren Diskussion wurde herausgefunden, dass die Schülerinnen und Schüler den Viertelkreis deshalb nicht als Funktion sehen, weil er ein Teil eines Kreises ist und dieser nicht ganz gezeichnet wurde (Tall & Baker, 1992, S. 43f.).

Schauen wir uns nun das Ergebnis des Kreises an. Hier antworteten ca. zwei Drittel sowohl der S als auch der Studentinnen und Studenten, dass dies eine Funktion darstelle. Der Rest, der diese Funktion mit „nein“ beurteilte, argumentierte dies wie folgt:

- Sie können keine Funktion ausführen, die auf sich selbst zurückgeht.
- Die Gleichung des Kreises ist $x^2 + y^2 = 25$, was implizit, aber nicht explizit, suggeriert, dass y nicht eindeutig durch x bestimmt wird.
- Zu jedem x -Wert werden mehrere y -Werte zugeordnet.

Die letzte Antwort wurde von den meisten Studentinnen und Studenten, die sich gegen eine Funktion entschieden hatten, gewählt (Tall & Baker, 1992, S. 44).

Weiteres kamen auch noch folgende Graphen vor:



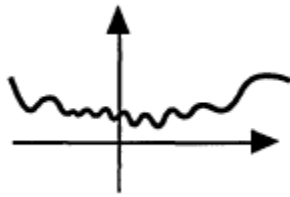


Abbildung 22: Abbildung (g) (Tall & Baker, 1992, S. 45)



Abbildung 24: Abbildung (h) (Tall & Baker, 1992, S. 45)

Abbildung 23: Abbildung (i) (Tall & Baker, 1992, S. 45)

Bei

diesen drei Graphen

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	50	32
Studenten	91	8

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	14	79
Studenten	72	26

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	11	82
Studenten	39	58

Tabelle 4: Ergebnisse der Abbildungen (g), (h) und (i) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 45)

gab es noch mehr Konflikte bei den Schülerinnen und Schülern. Sie können keine Parallelen zwischen ihnen und den selbst erstellten Prototypen machen finden und deshalb passen diese Graphen nicht in ihr Schema, obwohl die Graphen (g) und (h) sogar die Funktionsdefinition erfüllen. An den Prozentzahlen der Studentinnen und Studenten kann man erkennen, dass sie mit diesen Beispielen besser zurechtkommen. Die Gründe, warum die Schülerinnen und Schüler die Graphen (g) und (h) als Funktion ablehnten, waren folgende:

- Graphen sind normalerweise glatt und besitzen entweder nur Linien oder nur Kurven, jedoch keine Kombination.
- Die Zeilen sind nur zufällig gewählt und ergeben keinen Sinn. Sie sind vollkommen absurd.
- Sie sind nicht einheitlich.
- Sie sind zu unregelmäßig.
- Sie ist zu kompliziert, um sie als eine Funktion zu definieren.
- Sie ist völlig irregulär und kann nicht durch eine Funktion dargestellt werden.

Betrachten wir die Ergebnisse des Graphen (i), erkennen wir, dass die Ergebnisse hier besser ausfallen. Schauen wir uns jedoch die Begründungen an, sieht man, dass die Schülerinnen und Schüler und Studentinnen und Studenten ihn nicht als Funktion bezeichnet haben, da er nicht so aussieht wie andere Graphen, mit denen sie sonst operieren, weil das Muster unregelmäßig ist oder weil eine Formel fehlt. Dabei neigen ihre Prototypen immer dazu, dass sie "durch eine Formel gegeben" sind, eine "glatte" Grafik haben, "normal" sind und so weiter. Einzig drei Schüler gaben die Antwort, dass bei einem x -Wert drei y -Werte zu finden seien, dass die Kurve wieder zurück gehe und dass hier eine Spitze zu finden sei, die nicht von einer Funktion auszuführen sei. Diese beantworteten dieses Beispiel zwar richtig, jedoch achteten

sie bei den früheren Beispielen nicht darauf und gaben dort nie diese Begründung an. Also sehen diese drei Schülerinnen und Schüler eine Funktion als einen mathematischen Befehl oder eine Identität. So lässt sich daraus schließen, dass kein einziger Schüler ein zusammenhängendes Funktionskonzept erstellen konnte (Tall & Baker, 1992, S. 45f.).

Von den Studentinnen und Studenten beantworteten 7 % alle Fragen einheitlich richtig. Zum folgenden Graphen wurden nur Studentinnen und Studenten befragt:

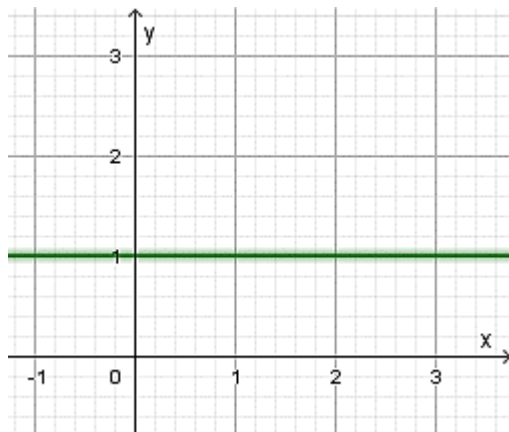


Abbildung 25: Abbildung (j) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 46)

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	Nicht befragt	
Studenten	55	44

Tabelle 5: Ergebnis der Abbildung (j) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 46)

Dabei stellte sich heraus, dass nur die Hälfte aller Studierenden wusste, dass eine Konstante überhaupt eine Funktion ist. Eine ihrer Begründungen war, dass y nicht von x abhängig sei. Andere waren der Meinung, dass ohne eine Variable gar keine Funktion möglich sein könne (Tall & Baker, 1992, S. 46).

3.3.2.3 Algebraische Ausdrücke als Funktionen

Als Nächstes untersuchten Baker und Tall 109 Mathematikstudenten und -studentinnen, die schon einmal von Funktionseigenschaften gehört hatten. Von ihnen wurden 38 Studentinnen und Studenten als „Fortgeschrittene“ eingestuft, da sie mindestens eine Antwort mit zum Beispiel „Jedem x darf nur ein y Wert zugeordnet werden“ oder „Die Funktion muss gleichwertig sein“ angaben. Die Fortgeschrittenen hatten die Aufgabe, eine Funktion anhand einer Gleichung zu erkennen. Einige von diesen Gleichungen wurden vorher sogar schon als Graph dargestellt. Bei dieser Untersuchung kamen folgende Ergebnisse heraus:

		Studenten (Gesamt: 109)		Fortgeschrittene (Gesamt: 38)	
Funktionsgleichung?		JA (in %)	NEIN (in %)	JA (in %)	NEIN (in %)
1	$y = x^2$	96	4	95	3
2	$y = 4$	30	69	47	53
3	$x^2 + y^2 = 1$	62	37	40	60

4	$y = \frac{3}{x}$	91	9	84	16
5	$x \cdot y = 5$	82	17	82	18
6	$y = \pm \sqrt{4 \cdot x - 1}$	67	33	34	66
7	$y = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \leq 0 \\ x, & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{wenn } x > 1 \end{cases}$	92	7	95	5
8	$y = 0$, wenn x irrational	50	48	42	58
9	$y = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \text{ rational} \\ 1, & \text{wenn } x \text{ irrational} \end{cases}$	75	22	79	21

Tabelle 6: Ergebnisse der algebraischen Ausdrücke bei Funktionen von Baker und Tall (Tall & Baker, 1992, S. 47)

Legen wir nun ein Augenmerk auf die Tabelle 6, können wir erkennen, dass $y = x^2$ von fast allen als eine Funktion gesehen wurde. Bei der Konstante $y = 4$ fiel das Ergebnis auch diesmal, sogar bei beiden Gruppen, schlecht aus. Somit glaubten nur 47 % der Fortgeschrittenen, dass dies eine Funktion ist. Den Kreis sahen viele als eine Funktion an, wobei das Resultat der Fortgeschrittenen noch besser ausfiel. Obwohl die Gleichungen der Beispiele 4) und 5) an der Stelle 0 nicht definiert sind, erkannte die Mehrheit der Studentinnen und Studenten, dass diese Funktionen sind, da diese Gleichungen den Prototypen entsprechen. Beim Beispiel 6) lieferten die Fortgeschrittenen den größten Vorsprung, da hier deren Begründung „Jedem x wird genau ein y zugeordnet“ am meisten Bedeutung hat. Für die Aufgaben 7), 8) und 9) werden die verschiedensten Definitionen einer Funktion benötigt. Für die „normalen“ Studentinnen und Studenten sind diese Aufgaben schwer zu lösen, da sie in kein Konzept ihrer Prototypen hineinpassen. Trotzdem gaben viele Studenten bei Beispiel 7) eine richtige Antwort ab. Die Gleichung des Beispiels 8) wurde meist deshalb nicht als richtig gewertet, weil laut der Begründungen der Studierenden die Funktion nicht für alle reellen Zahlen definiert ist. Auch 8) und 9) passen nicht zu den Prototypen der Lernenden und wurden als Funktion ausgeschlossen, weil:

- es keine mathematische Verbindung gibt.
- y nicht proportional zu x ist.
- sie nicht kontinuierlich bei der reellen Zahlengerade ist (Tall & Baker, 1992, S. 47f.).

3.3.2.4 Resultat

Baker und Tall sind der Meinung, dass das Konzept der Funktion nicht theoretisch und praktisch im Mathematikunterricht gelehrt werden kann. Deshalb lassen wir die Definition einmal im Hintergrund, denn wie wir an den Begründungen der obigen Fragen erkennen, ist das Lehren einer Theorie, die 1960 eingeführt wurde, nicht sinnvoll. Betrachten wir die andere Seite, das Lehren des Funktionsbegriffs anhand eines Beispiels, dann entwickeln die Schülerinnen und Schüler einen Prototyp, der jedoch andere Eigenschaften besitzt als die Definition. Also

ist auch Weg nicht sinnvoll. Nicht nur bei den Schülerinnen und Schülern tritt dieses Problem auf, sondern auch bei den Mathematikstudenten und Mathematikstudentinnen, die eigentlich schon ein spezielles Wissen haben sollten (Tall & Baker, 1992, S. 49).

Das Konzept des Funktionsbegriffes ist sehr schwierig, denn es wird erst Jahrhunderte später sichtbar, ob das Konzept, das verwendet wurde, auch geklappt hat. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln nämlich erst im Laufe ihrer Schulbahn den Funktionsbegriff weiter und begreifen ihn erst nach Jahren. Somit sind ihre Prototypen anfangs zwar eingeschränkt, indem die Grenzen zum Beispiel nicht beachtet werden. Jedoch erhöht sich durch vermehrte Beispiele von Funktionen und auch durch Beispiele, bei denen keine Funktion gezeigt wird, das Spektrum des Lernenden und er kommt immer näher an das Ziel des Konzeptes heran. Dieser Prototyp stimmt jedoch nicht mit der Definition überein und deshalb entstehen Konflikte (Tall & Baker, 1992, S. 49f.).

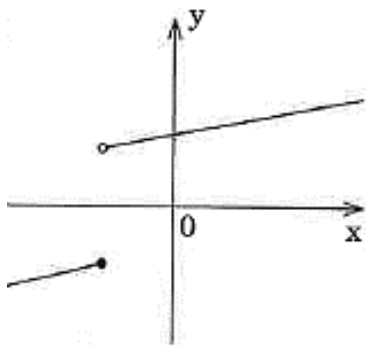
Außerdem gibt es laut Baker und Tall zu wenig Literatur, mithilfe derer die Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff verstehen lernen. Deshalb sollte sich etwas ändern. Das beste Beispiel in der heutigen Zeit ist der Technologieeinsatz in der Schule. Anhand des Computers oder Taschenrechners können die Funktionen gezeichnet werden und es kann den Lernenden gezeigt werden, dass eine Angabe bearbeitet und daraufhin das entsprechende Ergebnis ausgespuckt wird. Einige solche Versuche wurden schon gestartet und waren erfolgreich. Dieses Problem wird jedoch nicht so einfach gelöst sein, sondern es werden weitere schwierigere Konflikte auf uns zukommen, die dann von den Lehrenden bewältigt werden sollten, worauf anschließend ein neues Konzept aufgestellt wird (Tall & Baker, 1992, S. 50).

3.3.3 Studie von Kösters

Claudia Kösters führte in Österreich dieselbe Studie anhand annähernd derselben Fragebögen von Baker und Tall durch. Sie untersuchte 147 Schülerinnen und Schüler im Alter zwischen 15 und 18 Jahren von verschiedenen österreichischen Schulen und 39 Studentinnen und Studenten vom 1. bis zum 10. Semester (Kösters, 1996, S. 9).

3.3.3.1 *Darstellung einer Funktion als Graph*

Bei dem Punkt, bei dem die Lernenden herausfinden mussten, welcher Graph eine Funktion ist, ergänzte sie noch folgende vier Graphen:



	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	71	27
Studenten	87	13

Tabelle 7: Ergebnis der Abbildung (k) (in Anlehnung an Kösters, 1995, S. 104)

Abbildung 26: Abbildung (k)
(Kösters, 1995, S. 104)

Zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler), die hier nein ankreuzten, empfanden als Problem, dass dazwischen eine Sprungstelle ist. Vier von ihnen behaupteten, dass hier Vektoren zu sehen seien und den restlichen zwei fielen nicht mal die Vektoren auf. Aufgrund des Sprunges lehnten nur vier Studentinnen und Studenten diesen Graphen als Funktion ab (Kösters, 1995, S. 104).

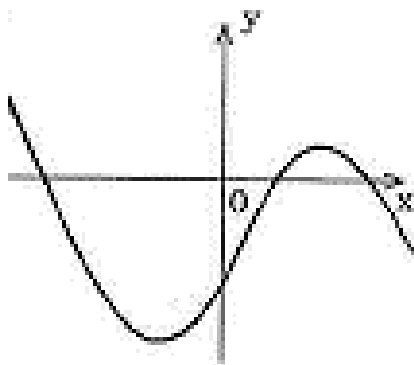


Abbildung 28: Abbildung (l) (Kösters, 1995, S. 104)

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	100	0
Studenten	100	0

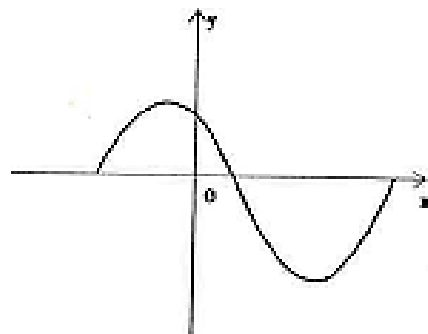


Abbildung 27: Abbildung (m) (Kösters, 1995, S. 104)

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	94	6
Studenten	92	5

Tabelle 8: Ergebnisse der Abbildungen (l) und (m) (in Anlehnung an Kösters, 1995, S. 105)

Das Beispiel l) ist ein typisches Beispiel in der Schule. Die Schüler hatten diesen Graphen schon als einen Prototypen eingespeichert. Hingegen kann m) als Prototyp gesehen werden, und deshalb gaben nur sieben Schülerinnen und Schüler eine richtige Antwort, da sie entdeckten, dass eine Funktion nicht einfach auf einmal aufhören kann. Nur zwei Studentinnen und Studenten gaben als Bemerkung an, dass die Funktion auf einem bestimmten Intervall zu sehen ist (Kösters, 1995, S. 105).

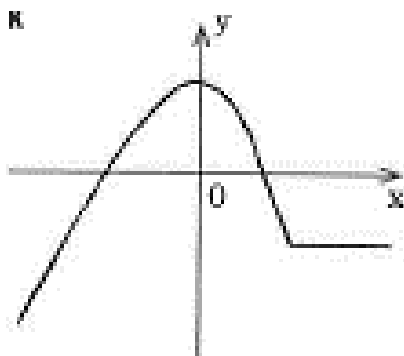


Abbildung 29: Abbildung (n) (Kösters, 1995, S. 105)

	JA (in %)	NEIN (in %)
Schüler	72	27
Studenten	92	5

Tabelle 9: Ergebnis der Abbildung (n) (in Anlehnung an Kösters, 1995, S. 105)

Die meisten Schülerinnen und Schüler, die sich bei diesem Graphen gegen eine Funktion entschieden, merkten an, dass eine Funktion nicht teilweise eine quadratische und teilweise eine lineare sein könne. Auch meinten ein paar, dass ein Term vorhanden sein müsse, der den gesamten Definitionsbereich betreffe. Zwei Studierende lehnten diesen Graphen aus demselben Grund wie die Schülerinnen und Schüler ab (Kösters, 1995, S. 105f.).

3.3.3.2 Funktion als Prototyp

Sowohl in der Schule als auch in der Universität wird den Lernenden die Definition der Zuordnung beigebracht, welche während des Lösens der Beispiele nicht verwendet wird. Damit die Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff für sich selbst verstehen, erstellt jeder und jede einen individuellen Prototyp. Dieser entsteht durch das Lösen mehrerer unterschiedlicher Beispiele. Daraus ergibt sich folgendes System:

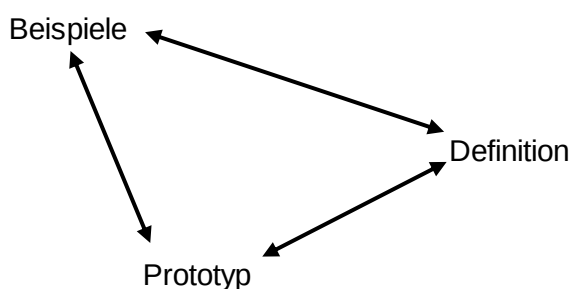


Abbildung 30: System eines Prototypen (Kösters, 1995, S. 110)

Die Prototypen, die von den Schülerinnen und Schülern individuell erstellt werden, haben im Vergleich zu den Definitionen mehrere charakteristische Merkmale, die man aus einer Definition nicht herauslesen kann. Diesen Funktionsprototypen wenden die Lernenden anschließend an den zu lösenden Beispielen an. Dabei kann man an den Ergebnissen der Untersuchungen erkennen, dass die Verwendung eines Prototyps nicht immer zu einem richtigen Ergebnis führt. Wenn ein Beispiel mit Grenzfällen gegeben ist, kann die Funktion nicht anhand eines Prototyps bestimmt werden. Hier muss dafür die Definition herangezogen werden (Kösters, 1995, S. 110f.).

Betrachten wir die Ergebnisse, können wir sehen, welche Vorstellungen die Schülerinnen und Schüler von einem Funktionsbegriff haben. Der Prototyp jedes Schülers und jeder Schülerin ist anders. Dabei haben sie aber immer ein paar Eigenschaften gemeinsam. Da die Funktion ein Abschnitt der Funktionslehre ist, ist sie sowohl mit einem Graphen als auch mit einer Funktionsgleichung, also einem Term, verbunden. Deswegen hat Köster im Zuge ihrer Diplomarbeit ein paar Eigenschaften eines Graphen und eines Terms herausgefunden, an die sich die Schülerinnen und Schüler bei ihren selbstgemachten Prototypen orientieren. Dabei hat der Graph die Eigenschaften, dass

- er nicht zu viele Ecken besitzt.
- er keine Sprünge hat.
- er über ein überschaubares Monotonieverhalten verfügt.
- er nicht in sich selbst umschlungen ist.

Der Term ist mit folgenden Eigenschaften verbunden:

- Er muss auf der rechten Seite mindestens eine Variable haben.
- Die Variablen x und y dürfen nicht auf derselben Seite sein.
- Er muss auf dem gesamten Definitionsbereich wirksam sein.

Der Definitionsbereich ist hier ein Intervall, bei dem der linke Randpunkt nicht rechts vom Ursprung sein darf (Kösters, 1996, S. 13).

3.3.3.3 *Resultat*

Die Ergebnisse der Studie von Köster stimmten mit Baker und Tall's Studie überein. Es konnte nur ein Drittel aller befragten Schülerinnen und Schüler eine Definition zum Funktionsbegriff aufstellen. Zwei Drittel der Lernenden beherrschten hingegen, dass eine Funktion eine Zuordnung ist. In Österreich sind für die Jugendlichen vor allem die Darstellung und die Formel der Funktion eine wichtige Eigenschaft, dagegen gibt es in Bezug auf die Funktion kein Reglement. Sowohl österreichische Schülerinnen und Schüler als auch österreichische Studentinnen und Studenten bewerteten eine Funktion als Graph anhand ihrer eigenen, selbst erstellten Prototypen. Somit bestätigten die meisten die konstante Funktion in einem Graphen als Funktion und waren bei einer algebraischen Darstellung dagegen. Funktionen, die stückweise definiert sind, sahen sie weder in einem Graphen noch in einer Formel als Funktion an. Den Kreis oder Halbkreis ordneten die Jugendlichen als falsche Funktion zu, die Begründung stimmte jedoch nicht, denn sie glaubten, dass dies ein geometrisches Objekt sei (Kösters, 1995, S. 112).

3.3.4 Studie von Stoye

Stoye untersuchte im Jahr 1988/89 449 Schülerinnen und Schüler von 21 Klassen der neunten und zehnten Schulstufe im Kreis Bernau in Deutschland, um herauszufinden, wieviel die Schülerinnen und Schüler über Funktionen wissen und ob sie dieses Wissen sinnvoll anwenden können oder nur anhand von Prototypen entscheiden (Stoye, 1990, S. 766).

Die Untersuchung bestand aus drei Teilen. Die Lernenden bekamen ein Arbeitsblatt mit fünf Fragen, die innerhalb von 45 min zu beantworten waren. Dabei hatten sie zwei Tage zuvor den Auftrag bekommen, sich den Stoff zum Thema Funktionen noch einmal anzuschauen und selbst durchzugehen (Stoye, 1990, S. 766).

3.3.4.1 Vorstellung des Funktionsbegriffs

3.3.4.1.1 Aufgabe 2

Bei der ersten Testung der Vorstellung des Funktionsbegriffs sollten sie zwei Beispiele von Funktionen aus ihrem Alltag oder anderen Fächern angeben. Dabei wurden folgende Klassen von Antworten gebildet:

- Formeln aus der Physik
- Funktionen und Aufgaben aus der Gesellschaft
- Eine Beschreibung der Abhängigkeiten von Größen, wie zum Beispiel, dass der Preis abhängig von der Größe und Menge ist
- Das Nutzen von beispielweise Mengen – Preise
- Gar keine Antwort

40 % der Jugendlichen gaben überraschenderweise ein Beispiel aus dem Fach Physik an, weitere 40 % eines aus ihrem Alltag. Positiv war auch, dass nur 1 % der Schülerinnen und Schüler aus der zehnten Schulstufe keine Antwort auf dieses Beispiel gab (Stoye, 1990, S. 768f.).

Erstaunlicherweise ist die Vorstellung der Funktion bezogen auf den Alltag weniger problematisch, da dies über 80 % der Lernenden richtig beantworten konnten. Wahrscheinlich wurden ihnen solche Beispiele während des Unterrichts präsentiert und wurden somit gleich zu der Datenbank ihrer eigenen Prototypen hinzugefügt.

3.3.4.1.2 Aufgabe 3

Die zweite Aufgabe zur Testung der Vorstellung des Funktionsbegriffes bestand darin, dass die Schülerinnen und Schüler erklären mussten, was sie unter einer Funktion verstehen. Hier probierten 80 % eine Definition des Funktionsbegriffs anhand der Zuordnung aufzustellen. Im Folgenden werden Antworten von jenen Schülerinnen und Schülern aufgelistet, die eine falsche Antwort gaben.

- Eine Funktion ist die Menge aller geordneten Wertepaare.
- Der y -Wert ist die Funktion.
- Eine Funktion ist immer eine Gerade.
- Eine Funktion besitzt sowohl ein Original als auch ein Bild.
- Die Funktion ist eine Gleichung, mit der dann Zahlenpaare erstellt werden können.
- $y = mx + n$

Diese Antworten gab nur ein Bruchteil der Jugendlichen ab. Trotzdem erkennt man, dass diese den Sinn des Funktionsbegriffes nicht verstanden haben. Auch jene, die eine richtige Definition formulierten, kapieren den Funktionsbegriff nicht zu 100 %, was wir bei den nächsten beiden Aufgabenstellungen sehen werden (Stoye, 1990, S. 769f.).

Man kann erkennen, dass der Großteil der Schülerinnen und Schüler einen Funktionsbegriff so sehen, dass sie eine Zahl nehmen und dadurch eine andere Zahl herausbekommen. Auch hier wird der Sinn des Funktionsbegriffes nicht verstanden.

3.3.4.2 Darstellung einer Funktion als Graph

3.3.4.2.1 Aufgabe 4

Durch diesen Teil wird überprüft, ob die Schülerinnen und Schüler die Definition des Funktionsbegriffes wirklich verstanden haben.

Sie hatten hier die Aufgabe, anhand der folgenden Graphen festzustellen, ob er eine Funktion $f(x) = y$ darstellt.

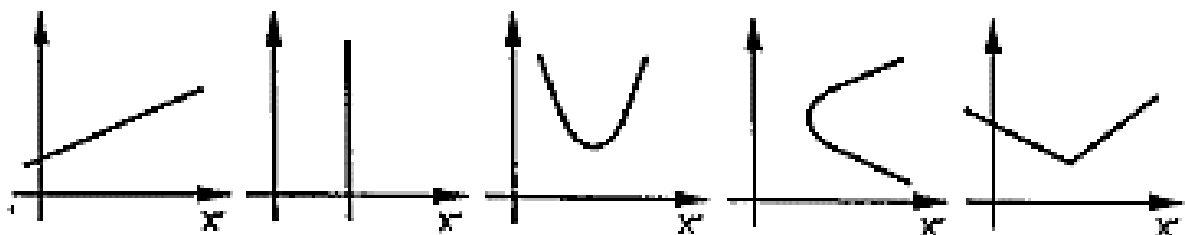


Abbildung 31: graphische Beispiele zu Aufgabe 4 (Stoye, 1990, S. 771)

Dabei wurden die nachstehenden Antworten als richtig gewertet:

- Ja, weil jedem x -Wert genau einen y -Wert zugeordnet wird./ Nein, weil einem x -Wert mehrere y -Werte zugeordnet werden.
- Ja, da es eine eindeutige Abbildung ist./ Nein, da es keine eindeutige Abbildung ist.
- Ja, da jedes Original ein Bild besitzt./ Nein, weil nicht alle Originale nur ein Bild besitzen.

Als falsch wurden beispielsweise folgende Begründungen angesehen:

- Ja, weil dieser Graph einen Schnittpunkt mit der y -Achse vorweist.
- Nein, weil er keinen Anstieg besitzt.
- Nein, weil er fällt und steigt.
- Nein, da dies eine quadratische Funktion ist.
- Es ist keine lineare Funktion, weil es kein n besitzt.
- Der letzte Graph ist keine Funktion, da er Eckpunkte besitzt.

Den ersten Graphen bewerteten 90 % der Schülerinnen und Schüler der neunten Stufe und 95 % der Schülerinnen und Schüler der zehnten Stufe richtig als eine Funktion. Die Begründungen waren jedoch nur bei ungefähr 50 % von ihnen richtig. Die zweite Darstellung, die keine Funktion darstellt, wird in der zehnten Schulstufe von 80 % der Untersuchten als richtig gewertet, in der neunten Stufe antworteten hier nur 60 % richtig, wobei ca. 50 % die richtige Begründung anführten. Die restlichen Antworten fielen annähernd gleich aus, wobei die richtigen Argumentationen trotz eines hohen Anteils an richtigen Entscheidungen ungefähr nur bei 50 % blieben (Stoye, 1990, S. 771f.).

Da die Funktionen meistens richtig erkannt wurden, jedoch die korrekte Begründung dafür fehlte, ist daraus zu schließen, dass die Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff noch nicht verstanden haben, sondern ihren eigenen Prototypen erstellt haben und diesen anwenden, um ein Beispiel zu lösen.

3.3.4.3 Algebraische Ausdrücke einer Funktion

3.3.4.3.1 Aufgabe 1

Hier mussten die Schüler zwei Funktionen angeben, die sie aufgrund des Mathematikunterrichts noch kennen. Auf diese Fragen wurden von den Schülerinnen und Schülern folgende Antworten gegeben:

- Unterscheidungen von verschiedensten Funktionstypen, wie lineare Funktion oder quadratische Funktion
- Funktionsgleichungen von linearen Funktionen, wie z.B. $y = 3x + 2$.
- $y = mx + n$, $y = mx$
- Geometrische Darstellungen
- Keine richtigen Antworten oder sogar keine Antwort

Der Großteil der Schülerinnen und Schüler gab eine konkrete Funktion an. Nur eine Person aus der zehnten Stufe gab eine geometrische Abbildung an, aus der neunten Stufe gar niemand. Erstaunlicherweise gaben nur 3 % dieser Jugendlichen gar keine oder keine richtige Antwort (Stoye, 1990, S. 768f.).

Aus diesem Ergebnis schließen wir, dass die Lernenden sich aufgrund von mehreren Beispielen Funktionsgleichungen gemerkt haben und diese hier gleich angewendet haben.

3.3.4.4 *Darstellung einer Funktion anhand der Wertepaare*

3.3.4.4.1 Aufgabe 5

Auch hier wird anhand gegebener Wertepaare getestet, ob die Schülerinnen und Schüler den Funktionsbegriff verstanden haben.

Nun lautete die Aufgabe, anhand von mehreren Wertepaaren zu erkennen, ob lineare Funktionen gebildet werden:

- a) $(3; 6), (4; 7), (5; 8), (10; 13), (12; 15)$
- b) $(1; 7), (7; 7), (11; 7)$
- c) $(2; 3), (2; 5), (2; 7)$

Zum Beispiel c) wurden folgende richtige Antworten gegeben:

- Nein, da diese Funktion parallel zur y -Achse ist.
- Nein, weil der x -Wert mehrere y -Werte besitzt.
- Nein, da einem x -Wert unterschiedliche y -Wert zugeordnet werden.

Als falsch wurden bei c) diese Begründungen gewertet:

- Nein, weil kein Anstieg zu finden ist.
- Nein, da kein Schnittpunkt mit der y -Achse besteht.
- Nein, weil für den Anstieg keine rechenbare Lösung herauskommt.

Genauso hier wurden die Fragen von 60 % bis 80 % der Lernenden der neunten und zehnten Klasse richtig beantwortet, die Quote der richtigen Begründungen lagen jedoch bei beiden Klassen immer nur bei 40 %. Schaut man die letzten beiden falschen Antworten an, ist zu erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler bei einer gegebenen Tabelle mit Zahlenpaaren denken, dass dies eine lineare Funktion sei und der Graph einen Anstieg haben müsse. Ein paar der Jugendlichen zeichneten den Graphen innerhalb eines Koordinatensystems und gaben die Begründung anhand des Koordinatensystems an oder wiesen den Graphen hin (Stoye, 1990, S. 772f.).

Auch hier fehlte bei den meisten Jugendlichen das richtige Argument, dass dies eine lineare Funktion ist. Sie gehen wieder nur von prototypischen Beispielen aus.

3.3.4.5 *Funktionen bezogen auf einen Sachkontext*

3.3.4.5.1 Aufgabe 6

Mit dieser Aufgabe will man überprüfen, ob die Lernenden an einem Graphen Werte ablesen und diese interpretieren können. Aufgrund dessen wurde folgendes Beispiel gestellt:

Die untenstehende Grafik zeigt die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit in Bernau an einem Jännertag. Beantworte folgenden Fragen:

- Welche Temperatur hatte es um 7:00 Uhr?
- Wann war es am wärmsten?
- Um welche Uhrzeit hatte es $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- Wann hatte es $1\text{ }^{\circ}\text{C}$?

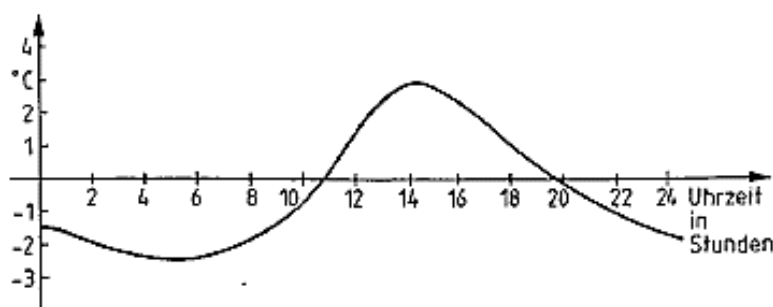


Abbildung 32: Temperaturverlauf (Stoye, 1990, S. 773)

Bei den Fragen a) bis c) antworteten ca. 95 % aller Lernenden richtig. Die letzte Frage bereitete ihnen Schwierigkeiten. Hier antworteten nur 35 % korrekt. Ungefähr 60 % der Schülerinnen und Schüler des neunten und zehnten Jahrgangs gaben hier nur einen Wert, nämlich den ersten um 12:00 Uhr, an. Erst als sie aufgefordert wurden, noch einmal zu schauen, und als dabei gefragt wurde, ob das alle Werte sind, entdeckten sie den zweiten (Stoye, 1990, S. 773f.).

An diesem Aufgabenteil erkennen wir, dass die Schülerinnen und Schüler fähig sind, sowohl den x -Wert der Temperatur als auch den y -Wert des Zeitpunktes von einem Graphen abzulesen.

3.3.4.6 Darstellungswechsel von Funktionen

3.3.4.6.1 Aufgabe 7

Bei diesem letzten Beispiel wurde getestet, ob die Schülerinnen und Schüler fähig sind, zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen zu wechseln. Es wurde eine Tabelle angegeben, bei der die Kraft bei einer bestimmten gedehnten Feder gemessen wurde:

Kraft F in N (Newton)	2	3	6	7
Länge der Feder in cm	21	23	29	31

Tabelle 10: Ergebnisse von der Messung der Kraft der Feder (Stoye, 1990, S. 774)

- Wie lang ist die Feder bei einer Kraft von 4 N?
- Wenn keine Kraft angreift, wie lang ist die Feder? Gib eine Begründung an!
- Gib mit den obenstehenden Werten eine Funktion an!

Die Schülerinnen und Schüler antworteten auf b) mit folgenden richtigen Begründungen:

- Da die Schraubenfeder 17 cm lang ist, sind die Werte proportional zueinander.
- Die Feder hat eine Länge von 17 cm, dabei sinkt die Kraft immer um eins und die Länge immer um zwei. Wir müssen so lange diesen Kraftwert abziehen, bis der Wert Null ergibt.
- Bei Null ist die Schraubenfeder 17 cm, weil wenn man 1 N weitergeht, dann muss man auch 2 cm weitergehen.

Bei Aufgabe b) gaben ungefähr 70 % der Schülerinnen und Schüler diese richtigen Antworten an. Den Aufgabenteil a) beantworteten 80 % der Lernenden des neunten und zehnten Jahrgangs korrekt (Stoye, 1990, S. 774f.).

Beim Aufgabenteil c) gaben 55 % der Lernenden der neunten Stufe und 40 % der Lernenden der zehnten Stufe eine richtige Gleichung an. Dabei hatten sie eine von den drei folgenden Varianten gewählt:

- Sie kamen zu einer Gleichung aufgrund inhaltlicher Reflexion. Dabei war die Lösung $y = 2x + 17$. Die Überlegung der Schülerinnen und Schüler begann damit, dass die Feder mit der Kraft 0 eine Länge von 17 cm besitzt, also dem Punkt (0; 17) entspricht. Wenn die Kraft um 1 N steigt, verlängert sich die Feder um 2 cm, deshalb ist die Steigung 2.
- Auch konnten sie die Gleichung anhand linearer Gleichungssysteme aufstellen. Beispielsweise verwendeten sie die Gleichungen $21 = 2m + n$ und $23 = 3m + n$.
- Ein anderer Teil der Lernenden benützte den Satz für lineare Funktionen aus der achten Klasse: $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ (Stoye, 1990, S. 775).

An diesem Teil ist nochmal ersichtlich, dass die Lernenden Werte ablesen und interpretieren können. Die Schwierigkeit liegt hier deutlich bei der Umwandlung der unterschiedlichen Darstellungsformen.

3.3.4.7 Resultat

Durch diese Aufgaben wird deutlich, dass die Idee, dass der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht eine weite Breite fassen soll, aufgegangen ist. Die Schülerinnen und Schüler verwenden als Begründung nie die eindeutige Abbildung, außer bei Beispiel 3 definieren die meisten den Funktionsbegriff als solchen.

Anhand der Begründungen bei den Aufgaben 4 und 5 ist zu erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler lineare Funktionen mit Funktionen gleichsetzen. Dies kann daran liegen, dass der Funktionsbegriff in der achten Schulstufe zeitgleich mit den linearen Funktionen eingeführt wird.

Die Aufgabe 6 lässt uns erkennen, dass das Interpretieren von Funktionsgraphen den Lernenden noch schwerfällt. In den meisten Büchern sind viele Beispiele, bei denen die Schülerinnen und Schüler Graphen selbst konstruieren müssen, und nur wenige, die interpretiert werden können. Durch den Einsatz von modernen Technologien ist es schon viel einfacher, Graphen zu zeichnen und diese von den Jugendlichen interpretieren zu lassen.

An den unterschiedlichsten/verschiedenen Begründungen der Lernenden können wir erkennen, wie gut sie den Funktionsbegriff verstanden haben, wie ihre Vorstellungen dazu sind und welche Eigenschaften des Funktionsbegriffes für sie wichtig sind (Stoye, 1990, S. 775f.).

3.3.5 Studie von Kokol-Voljč

Diese Studie wurde 1996 im Rahmen einer Diplomarbeit in Klagenfurt durchgeführt. Kokol-Voljč befragte 24 Schülerinnen und Schüler, die um die 15 Jahre waren und schon acht Schuljahre absolviert hatten. Die Untersuchung selbst fand in Slowenien statt. Dabei ist hier bezüglich des Funktionsbegriffs noch wichtig anzumerken, dass Slowenien diesen nur theoretisch einführt und auch die Themen danach nur theoretisch weiterführt (Kokol-Voljč, 1996, S. 197).

Diese Untersuchung verlief schriftlich anhand eines Fragebogens. Es gab insgesamt sechs verschiedene Gruppen, wobei sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch die Lehrerinnen und Lehrer befragt wurden. Wir betrachten jedoch nur die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler. Kokol-Voljč wollte feststellen, welche Schwierigkeiten die Lernenden bei dem Funktionsbegriff aufweisen. Also testete er den Unterschied zwischen der formalen Definition und den Vorstellungen der Lernenden und untersuchte, wie sie die Funktionen in verschiedensten Darstellungsformen erkannten und ob sie den Funktionsbegriff auch im alltäglichen Leben einsetzen konnten (Kokol-Voljč, 1996, S. 197f.).

3.3.5.1 Vorstellung des Funktionsbegriffes

3.3.5.1.1 Gruppe A

Diese Gruppe bestand aus drei Fragen, die alle Bezug auf die Vorstellung des Funktionsbegriffes nahmen. Kokol-Voljč wollte dabei „concept definition“ und „concept image“ (siehe 3.1) bei den Schülerinnen und Schülern untersuchen (Kokol-Voljč, 1996, S. 198).

Bei der ersten Frage wollte er wissen, was die Lernenden mit dem Funktionsbegriff verbinden. Dabei wurden folgende zwei Bereiche von Antworten genannt:

- Die Funktion kommt aus dem Alltag und ist eine Aufgabe, Tätigkeit oder Rolle.
- Die Funktion gilt als ein mathematischer Begriff. Diese Aussagen wurden fast immer unverständlich formuliert wie „eine Abhängigkeit zwischen Größen“ (Kokol-Voljč, 1996, S. 199).

Meistens entsteht durch diese zwei Bereiche eine Verwirrung, da die Schülerinnen und Schüler die beiden Antworten nicht kombinieren können und somit nicht verstehen, dass eine Funktion beides sein kann. Denn die Lernenden sind nicht fähig, dass sie ein Synonym zu Funktionsbegriff finden. Außerdem fehlt auch die Verknüpfung dieser zwei Antworten (Kokol-Voljć, 1996, S. 198f.).

Die zweite Frage, bei der die Lernenden den Funktionsbegriff in eigenen Worten definieren sollten, fiel folgendermaßen aus: Die Schülerinnen und Schüler hatten riesige Schwierigkeiten, ihre individuelle Vorstellung einer Funktion formal auszudrücken. Kaum jemand konnte einen mathematischen Sachverhalt beschreiben (Kokol-Voljć, 1996, S. 198f.).

Bei der dritten Aufgabe mussten sie den Funktionsbegriff anhand einer formalen Definition beschreiben. Dabei erinnerten sich nur wenige an eine mögliche Definition (Kokol-Voljć, 1996, S. 198f.).

3.3.5.2 Darstellung einer Funktion als Graph

3.3.5.2.1 Gruppe E

Bei dieser Aufgabe wurde getestet, ob die Kinder und Jugendlichen eine Verbindung zwischen einer Funktion und einem Graphen herstellen können, zum Beispiel auch Aufgaben, die darauf hinzielen, was man einer Graphik alles entnehmen kann. Sie mussten bei jeder Verneinung auch eine Begründung hinschreiben. Folgende Resultate ergaben sich:

- Wie bereits bei Gruppe D festgestellt, überwiegt auch hier die lineare Funktion, denn die Lernenden erkennen eine Funktion nur in der Form einer Geraden. Ersichtlich wird dies, wenn wir uns alle Graphen, die keine Geraden sind, anschauen. Jene Schülerinnen und Schüler, die dann „Nein“ antworteten, gaben zum Beispiel als Begründung an, dass „Solch eine Gerade keine Funktion ist“ oder einfach nur „Weil keine Gerade zu sehen ist“. Dabei ist bei den Lernenden die Gerade als Graph im Hinterkopf und nur dies ist für sie als Funktion gültig. Die Funktionseigenschaften selbst werden nicht herangezogen.
- Als Beispiele dieser Gruppe sind vor allem die Beispiele 10 und 11 nennenswert. Folgende Angaben waren dazu gegeben.

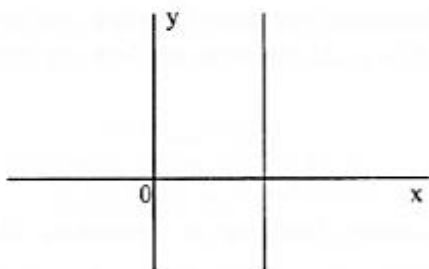


Fig. 2.

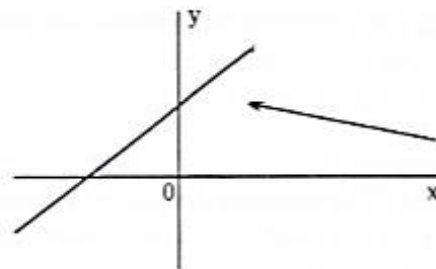


Fig. 3.

Abbildung 33: Figur 2 und Figur 3 (Kokol-Voljć, 1996, S. 201f.)

Der linke Graph, Figur 2 (siehe Abb. 15), wurde von 25 % der Schülerinnen und Schüler richtig als keine Funktion gewertet. Der Rest war der Meinung, dass diese Darstellung eine Funktion sei. All jene, die richtig antworteten, gaben jedoch keine treffende Argumentation ab, denn die Begründungen liefen wieder auf die lineare Funktion zurück. Sie argumentierten zum Beispiel, dass „die Gerade y nicht berührt wird“. Wiederum wurden hier die Funktionseigenschaften gar nicht beachtet. Die Figur 3 (siehe Abb. 15) wurde mit einem Anteil von 50 % als falsch gewertet. Wenn dann eine Begründung vorhanden war, gaben die Lernenden an, dass „dies eventuell zwei Funktionen sein könnten“ (Kokol-Voljć, 1996, S. 201f.).

3.3.5.3 *Algebraische Ausdrücke einer Funktion*

3.3.5.3.1 Gruppe D

Bei dieser Gruppe wurde untersucht, ob die Schülerinnen und Schüler eine Verbindung zwischen der Vorstellung des Begriffes und einer algebraischen Gleichung herstellen können. Dies wurde getestet, indem Gleichungen angegeben wurden und die Lernenden untersuchen mussten, ob die Gleichung eine Funktion darstellt. Dabei sollten sie zusätzlich immer eine Begründung angeben (Kokol-Voljć, 1996, S. 198).

Daraus ergaben sich folgende Ergebnisse:

- Die Bedeutung der linearen Funktionen ist bei den Lernenden sehr hoch, da einerseits bei einer Vorgabe einer linearen Funktion, diese immer richtig erkannt wurde, und andererseits andere Funktionen, die keine lineare Funktionen darstellten, als falsch gewertet wurden.
- Ein Beispiel lautete $x = 3$. Anhand dieser Gleichung sollte erkannt werden, ob eine Funktion vorliegt. Dabei bewerteten viele Schülerinnen und Schüler diese Gleichung als falsch und argumentierten, dass „kein y zu finden ist“ oder dass „sie nicht wissen, wieviel das y ist“ (Kokol-Voljć, 1996, S. 201).

3.3.5.4 *Funktionen bezogen auf einen Sachkontext.*

3.3.5.4.1 Gruppe B

Hier war nur eine Frage zu beantworten. Die Schülerinnen und Schüler mussten anhand eines vorgegebenen Textes, der sich auf den Alltag bezog, erkennen, ob es sich um eine Funktionsabhängigkeit handelt und diese anhand eines Graphen darstellen. Das Thema war dabei, eine Zeitabhängigkeit darzustellen, bei der die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden musste. Das Ziel dieser Aufgabe war, herauszufinden, ob die Lernenden imstande sind, die Umwelt mittels einer Funktion darzustellen. Dieses Beispiel lösten nur 25 % aller Schülerinnen und Schüler richtig. Die anderen zeichneten teilweise zu großzügig, zum

Beispiel waren Kurven dabei, die zu wenige Krümmungen besaßen (Kokol-Voljć, 1996, S. 198f.).

3.3.5.4.2 Gruppe F

Bei dieser Gruppe war wieder das „angewandte funktionale Denken“ gefragt. Es gab zwei Beispiele mit einem versteckten mathematischen Text, bei denen die Schülerinnen und Schüler die funktionalen Abhängigkeiten herauslesen sollten. Das Resultat lautete wie folgt:

- Die Lernenden äußerten sich zu den beiden Fragen ganz gut. Der einzige Kritikpunkt bei dieser Aufgabe war, dass die Schülerinnen und Schüler oft die Größen mit den Maßeinheiten verwechselten.
- Betrachten wir nun ein Beispiel genauer. Bei diesem Beispiel ging es um einen Zauberer Merlin, der am Abend Zauberbücher gelesen hatte und dabei oft neben der brennenden Kerze eingeschlafen war. Da dies zu gefährlich war, erfand er eine Waage, die ab einer bestimmten Größe auf die andere Seite schwang und somit die Kerze auf der anderen Seite mit einem Käppchen zum Erlöschen brachte. Diejenigen, die diese Aufgabe als keinen funktionalen Zusammenhang sahen, begründeten dies mit „dem Nichtvorkommen einer Größe“. Auch aus folgender Argumentation erkennen wir, dass für die Lernenden die Zahlenwerte fehlen: „Weil es keine Größen gibt, dass wir rechnen könnten, [und] es ist die Dicke der Kerze und die Höhe, bis sie abbrennen sollte, nicht angegeben“ (Kokol-Voljć, 1996, S. 202). Die meisten der 46 % der Schülerinnen und Schüler, die „Ja“ als Antwort gaben, argumentierten, dass die Funktion von Kerze, Waage, Gewicht und Kerzenständer erbracht werde. Weiters kam als Antwort, dass der Automat eine Funktion habe, die er auch verrichte. Einige waren auch der richtigen Meinung, dass dieses Textbeispiel abhängig von dem Gewicht der Kerze und der Zeit sei. Somit hat die Kerze nach einer bestimmten Zeit ein bestimmtes Gewicht, dass sich die Waage bewegt und die Kerze erlischt (Kokol-Voljć, 1996, S. 202).

3.3.5.5 Darstellungswechsel von Funktionen

3.3.5.5.1 Gruppe C

Bei dieser Gruppe wurde getestet, wie gut die Lernenden den Funktionsbegriff verstanden haben. Sie hatten die Aufgabe, anhand einer Darstellungsform der Zuordnung, wie Pfeildia-
gramm, Zuordnungsdiagramm, Tabelle oder Text, zu erkennen, ob dies eine Funktion ergab. Dabei sollte auch jedes Mal eine Begründung angegeben werden. Es ergaben sich folgende Ergebnisse:

- Die Schülerinnen und Schüler erkannten bei jedem Beispiel eine Funktion, da sie jedes Mal ein Verhältnis feststellten.

- Wurde mit „Nein“ geantwortet, gab es keine essentielle Begründung, die die sich an den Eigenschaften der Funktionen orientierte, sondern meistens gefielen den Schülerinnen und Schülern die Wertepaare nicht und sie argumentierten damit, dass „die Paare ungeeignet ausgewählt wurden“.
- Bei einer Frage hatten sie folgendes Pfeildiagramm gegeben:

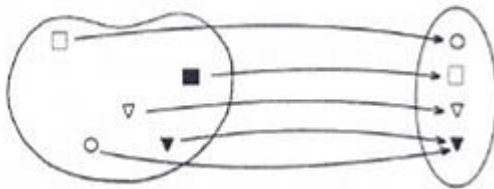


Abbildung 34: Pfeildiagramm (Kokol-Voljć, 1996, S. 200)

Dabei antworteten 62 % der Schülerinnen und Schüler, dass dies keine Funktion sei. Als Begründung gaben sie beispielweise an, dass nicht die gleichen Figuren miteinander verbunden seien, also ein Quadrat nicht mit einem Kreis verbunden sein dürfe. Die anderen meinten, dass das schwarze Dreieck mit zwei Figuren verbunden ist sei und dies nicht sein dürfe.

- Die meisten Schwierigkeiten gab es in dieser Gruppe bei den mathematischen Texten. Nehmen wir folgendes Beispiel zur Veranschaulichung her: „Die Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl sein. Quadrat, jeder anderen Zahl ihren Wert mit entgegengesetztem Zeichen zuordnet“ (Kokol-Voljć, 1996, S. 200). Hierin erblickten nur wenige Lernende eine Funktion. Die meisten argumentierten, dass die geteilten Vorschriften sie behindern würden und es nur eine Vorschrift für alle Fälle geben sollte (Kokol-Voljć, 1996, S. 198ff.).

3.3.5.6 Ergebnis

Betrachten wir nun die Studie von Kokol-Voljć genauer, können wir erkennen, dass es einige Schwierigkeiten für die Schülerinnen und Schüler beim Funktionsbegriff gibt. Beginnen wir mit den Schwierigkeiten bei der Gegenüberstellung der formalen Definition und der individuellen Vorstellung des Lernenden. Hier merken wir, dass ein riesiger Unterschied besteht, der eigentlich nicht sein sollte. Gehen wir weiter zu der Darstellung der Funktion. Bei diesem Teil der Untersuchung, bei der die Schülerinnen und Schüler anhand verschiedenster Darstellungsformen die Funktion erkennen mussten, wurde nur aufgrund der Veranschaulichung bewertet und die Funktionseigenschaften wurden ganz weggelassen. Weitere Schwierigkeiten bestehen beim allgemeinen Funktionsbegriff und bei Beispielen, die nicht eine lineare Funktion darstellen. Denn alle Beispiele, die keine lineare Funktion darstellten, wurden von den meisten Lernenden nicht als Funktion erkannt. Probleme kamen weiters dort vor, wo es den Funktionsbegriff nicht direkt zum Vorschein kam. Die Schülerinnen und Schüler haben auch Schwierigkeiten mit der Ausdrucksweise in der Mathematik. Das zeigt, dass die Sprache der Mathematik

ihnen nicht leichtfällt. Positiv filtert sich durch diese Studie heraus, dass Schülerinnen und Schüler, da sie noch weniger Erfahrungen mit dem Funktionsbegriff gemacht haben und somit noch nicht so viel formales Wissen besitzen, bei den Beispielen in den Gruppen B und F, bei denen alltägliche Situationen vorkommen, noch flexibler sind und überraschend gut abschneiden. Diese Studie wurde auch an Lehrern und Lehrerinnen durchgeführt. Dabei stellte man fest, dass diese dieselben Schwierigkeiten wie die Lernenden haben und somit die Schwierigkeiten auch im Laufe der Zeit nicht verschwinden, sondern leider immer bestehen werden (Kokol-Voljć, 1996, S. 203f.).

3.3.6 Studie von Hattikudur

Hattikudur (2012) führte seine Studie an 180 Middle-school students durch. Er untersuchte die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler bezüglich des graphisch-situativen Darstellungswechsels der linearen Funktionen. Dabei bezog er sich speziell auf die Schwierigkeiten der Steigung und des y -Achsenabschnitts, um herauszufinden, wo die Lernenden die größeren Schwierigkeiten haben (Nitsch, 2015, S. 119ff.).

In dieser Studie gab es verschiedene Aufgaben, bei denen die Lernenden nach einer verbalen Beschreibung die Graphen zeichnen mussten. Dabei wurde zwischen den Aufgabetypen quantitative und qualitative Items unterschieden. Die quantitativen Items enthalten Zahlenwerte und die entsprechenden Achsenbeschriftungen, die qualitativen Items besitzen hingegen keine Zahlenwerte. Dabei kam heraus, dass ein Viertel aller Schülerinnen und Schüler die Steigung nicht richtig erkannte und einem Drittel der y -Achsenabschnitt misslang. Bei dieser Studie wurde auch deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler beim y -Achsenabschnitt größere Probleme als bei den qualitativen Aspekten hatten (Nitsch, 2015, S. 121).

Die folgenden häufigen Fehler der Schülerinnen und Schüler stellte Hattikudur fest. Bei der **Steigung** kam er zu folgenden Ergebnissen:

Kontext	Fehler
Quantitativ	Arithmetischer Fehler; falsche Steigung
Qualitativ	Geringere Steigung als die gegebenen Gerade; dieselbe Steigung wie die gegebene Gerade

Tabelle 11: Häufige Fehler bei der Steigung (in Anlehnung an Nitsch, 2015, S. 121)

Die nachstehende Tabelle gibt die typischen Fehler des **y -Achsenabschnitts** an:

Kontext	Fehler
Quantitativ	Falsche Betrachtung des x -Wertes (Zeit Fehler); inkorrektter y -Achsenabschnitt
Qualitativ	Durchquerung des Graphen durch den Ursprung; Verrücken auf der x -Achse statt auf der y -Achse

Tabelle 12: Häufige Fehler des y -Achsenabschnitts (in Ahnlehnung an Nitsch, 2015, S. 121)

Dabei wurde in dieser Studie herausgefunden, dass die Schülerinnen und Schüler häufiger Schwierigkeiten mit dem y -Achsenabschnitt als mit der Steigung aufweisen (Nitsch, 2015, S. 121f.).

3.3.7 Studie von Davis

Davis untersuchte 8 Schülerinnen und Schüler einer Highschool. Er videografierte sie mehrere Wochen während des Mathematikunterrichts, um festzustellen, wie sie mit dem y -Achsenabschnitt in verschiedenen Darstellungsformen umgingen (Nitsch, 2015, S. 120).

Der y -Achsenabschnitt begann als starting point bei einem Alltagsbeispiel. Dies war einfacher für die Lernenden, da sie sich dies in ihrer realen Welt vorstellen konnten. Jedoch konnte der Anfangspunkt auch zu Verwirrung führen, wenn dieser nicht als sinnvoll ankam. Bei einem Beispiel sollte der Zusammenhang zwischen den Eiskugeln in einer Tüte und deren Preis angegeben werden, wobei der Preis der Tüte noch einzuberechnen war. Hier hatten die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten, den Anfangswert zu ermitteln, da sie sich nicht vorstellen konnten, eine leere Tüte zu kaufen. Außerdem unterscheiden sie zwischen Graphen mit positiven Werten im ersten Quadranten und Graphen mit zusätzlichen negativen Werten. Diese werden als full domain Graphen bezeichnet, wobei hier der y -Achsenabschnitt als Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse bezeichnet wird. Bei einem Graphen anhand eines Sachkontextes, einem limited domain Graphen, wird der y -Achsenabschnitt als starting point bezeichnet (Nitsch, 2015, S. 120f.).

Die Schwierigkeit für die Schülerinnen und Schüler liegt hier darin, dass sie die mathematische Abstraktion mit den anschaulichen Alltagsvorstellungen nicht verbinden können. Außerdem stellte Davis auch fest, dass die Schülerinnen und Schüler ihre individuelle Fachsprache entwickeln und diese anhand der Beispiele dann anwenden. Diese funktioniert jedoch nur bei einfachen Anfangsbeispielen. Werden die Aufgaben komplexer, tun sie sich damit schwerer (Nitsch, 2015, S. 120f.).

3.3.8 Studie von Moschkovic

Er untersuchte anhand eines Testes und einer Videoaufzeichnung 18 Studentinnen und Studenten aus Amerika, die die neunte und zehnte Klasse besuchten. Sie absolvierten schon zwei

Vorlesungen zu lineare und quadratische Funktionen und einen Algebra-Kurs. Moschkovic wollte in dieser Studie die Schwierigkeiten der Studentinnen und Studenten bezüglich des graphisch-algebraischen Darstellungswechsels herausfinden (Moschkovic, 1998, S. 169f.).

Obwohl die Lernenden im Mathematikunterricht und während dieser Studie nur Erfahrungen mit dem y -Achsenabschnitt für diese Form hatten, verwendeten viele in dieser Studie den x -Achsenabschnitt in der Form $y = mx + b$ entweder als m oder b in einer Gleichung. Das Ergebnis des Testes fiel folgendermaßen aus: 13 der 18 Studentinnen und Studenten, also 72 %, verwendeten den x -Achsenabschnitt mindestens einmal, während sie mit Gleichungen der Form $y = mx + b$ arbeiteten. In der Gleichung, die von ihnen erzeugt wurde, wurde von 5 Studentinnen und Studenten anstatt des Parameters m der x -Achsenabschnitt eingesetzt und 12 Studentinnen und Studenten setzten ihn anstelle des Parameters b ein. Sechs der Schülerinnen und Schüler beschrieben auch Linien, die sich entlang der x -Achse von links nach rechts oder von rechts nach links bewegen, als Folge der Änderung von b in einer Gleichung. Dieses Konzept zeigte sich auch bei den Video-geführten Peer-Diskussionen und bei den Post-Test-Antworten mehrerer Studentinnen und Studenten. Als die Videos betrachtet wurden, wurde erst erkannt, dass wirklich eine stabile Vorstellung besteht und kein Fehler, der einfach zu korrigieren ist. Dadurch wird probiert, eine Verbindung zwischen der algebraischen und graphischen Darstellung zu erzeugen. Bei einer graphischen Darstellung ist der x -Achsenabschnitt ein spezifischer Punkt, bei der algebraischen hingegen ist dieser nicht explizit. Jedoch wird auch hier der y -Achsenabschnitt verwendet, damit die Lernenden nicht verwirrt werden. Es gibt aber auch Fälle, bei denen es notwendig ist, den x -Achsenabschnitt zu betrachten, denn beispielsweise ist bei der Steigung von -1 der x -Achsenabschnitt $-b$ (Moschkovic, 1998, S. 170; Nitsch, 2015, S. 122).

Somit können wir erkennen, dass die Schwierigkeit bei den linearen Funktionen beim Darstellungswechsel von der graphischen zur algebraischen Darstellung darin liegt, dass die Lernenden den x -Achsenabschnitt als wichtig empfinden und sie der Meinung sind, dass der x -Achsenabschnitt auch bei der algebraischen Darstellung vorkommen muss (Nitsch, 2015, S. 122).

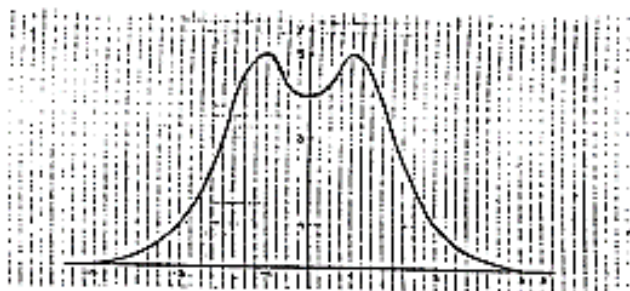
3.3.9 Studie von Weigand

Diese Studie fand einerseits in einem 11. Jahrgang in Bayern an 54 Schülerinnen und Schülern statt. Die Schülerinnen und Schüler, die diese Schule besuchen, müssen ein Mindestalter von 19 Jahren besitzen und die mittlere Reife abgelegt haben. Das Spannende an diesem Jahrgang ist, dass alle die mittlere Reife woanders abgelegt haben, sei es im Gymnasium, in einer Realschule, in einer Fachschule oder gar in einer Berufsaufbauschule, denn in allen Schulen besteht ein anderer Lehrplan. Außerdem ist bei allen der Mathematikunterricht schon einige Zeit her. Andererseits testete Weigand 39 Schülerinnen und Schüler aus dem Gymnasium, die ebenfalls die 11. Schulstufe besuchen. Der Test selbst bestand aus 16 Fragen, wobei

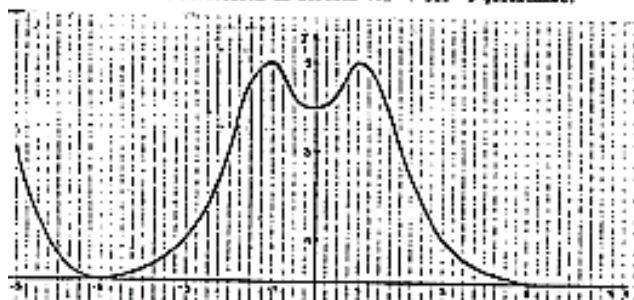
geprüft wurde, welche Unterschiede die Lernenden bezüglich der Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge innerhalb einer Tabelle und eines Graphen feststellen. Dabei wurde genauer betrachtet, wie sie mit Funktionseigenschaften argumentieren und arbeiten und wie gut sie Funktionseigenschaften innerhalb einer Tabelle und eines Graphen unterscheiden und verbinden können. Der Test teilte sich zu Fragengruppe A und Fragengruppe B. Bei der Fragengruppe A hatten die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe, bei den gegebenen Beispielen die Funktionseigenschaften zu erkennen und sie anschließend verbal, in eigenen Worten, zu beschreiben, während bei Fragengruppe B noch ein Beispiel zu lösen war (Weigand, 1988, S. 287ff.).

Im Folgenden werden die Graphen und Tabellen der Funktionen, die für diese Studie erstellt wurden, aufgelistet:

I. Betrachten Sie die folgende graphisch dargestellte Funktion:

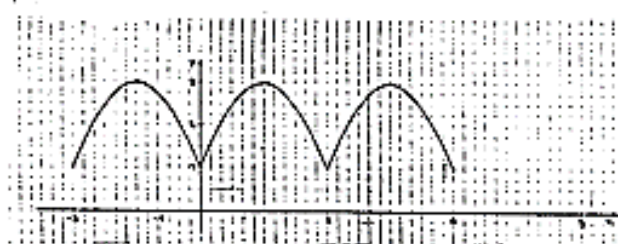


- A) Welche besondere Eigenschaft fällt Ihnen bei der dargestellten Funktion auf? Beschreiben Sie kurz (in Worten, mit Hilfe mathematischer Ausdrücke, ...) diese Eigenschaft!
- ☐ Mir fällt keine besondere Eigenschaft auf.
 - ☐ Kurze Beschreibung:
 - ☐ Ich kann diese Eigenschaft nicht mit Worten beschreiben.
- B) Die bei A) erkannte Eigenschaft der Funktion soll auf dem gesamten Definitionsbereich gelten. Nun ist die obige Funktion zusätzlich im Bereich von -2 bis -5 gezeichnet:



- ☐ Zeichnen Sie den weiteren Verlauf der Funktion im Bereich von 5 bis 7 in das Koordinatensystem ein!
- ☐ Ich kann den weiteren Verlauf nicht einzeichnen.

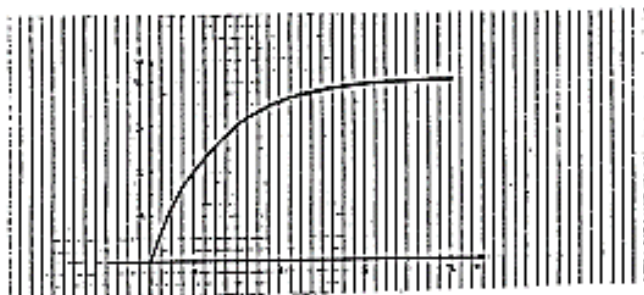
II. Die folgende Funktion ist im Bereich -3 bis +5 dargestellt:



- A) Beschreiben Sie kurz (in Worten, mit Hilfe mathematischer Ausdrücke, ...) den Verlauf der Funktion:
- ☐ Kurze Beschreibung:
 - ☐ Ich kann den Verlauf nicht mit Worten beschreiben.

- B) Die aus der Darstellung zu erkennende Gesetzmäßigkeit soll für den ganzen Definitionsbereich gelten.
- ☐ Zeichnen Sie den weiteren Verlauf der Funktion im Bereich von $x = 6$ bis $x = 7$ in obiges Koordinatensystem ein.
 - ☐ Ich kann den weiteren Verlauf der Funktion nicht zeichnen.

III. Gegeben ist die folgende graphisch dargestellte Funktion:



A) Beschreiben Sie kurz (in Worten, mit Hilfe mathematischer Ausdrücke, ...) den Verlauf der dargestellten Funktion:

o Kurze Beschreibung:

o Ich kann den Verlauf nicht mit Worten beschreiben.

B) Welchen y-Wert wird Ihrer Meinung nach die dargestellte Funktion für $x = 11$ annehmen? Geben Sie den vermuteten Wert an:

o Antwort: $x = 11 \rightarrow y = \dots$

o Kann ich nicht beantworten.

V. Durch die angegebene Tabelle wird eine Funktion festgelegt.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	..
y	5	4,5	4	3,5	3	2	1	0,5	0	0,5	1	..

A) Welche Besonderheit fällt Ihnen bei dieser Funktion auf? Beschreiben Sie kurz in Worten, mit Hilfe mathematischer Ausdrücke, ... diese Besonderheit:

o Mir fällt keine Besonderheit auf

o Kurze Beschreibung:

o Ich kann die Besonderheit nicht mit Worten beschreiben.

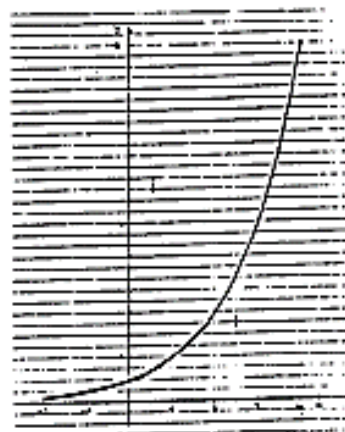
B) Die folgende Tabelle stellt dieselbe Funktion wie oben dar, lediglich um die zu $x = -6$ und $x = -7$ gehörenden y-Werte erweitert. Welche y-Werte würden Sie den Werten $x = -6$ und $x = -7$ zuordnen?

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	..
y	5,5	5	4,5	4	3,5	3	2	1	0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	..

o Tragen Sie die y-Werte für $x = 6$ und $x = 7$ in die Tabelle ein

o Kann ich nicht beantworten.

IV. Die folgende Funktion ist im Bereich von -1 bis 4 gezeichnet:



A) Beschreiben Sie (in Worten, mit Hilfe mathematischer Ausdrücke, ...) die Gesetzmäßigkeit, die Ihrer Meinung nach der Funktion zugrunde liegt:

o Ich erkenne keine Gesetzmäßigkeit

o Kurze Beschreibung:

o Ich kann die Gesetzmäßigkeit nicht mit Worten beschreiben.

B) Welche y-Werte werden Ihrer Meinung nach durch die dargestellte Funktion den Werten $x = 5$ und $x = 6$ zugeordnet?

o Antwort: $x = 5 \rightarrow y = \dots$

$x = 6 \rightarrow y = \dots$

o Kann ich nicht beantworten.

VI. Betrachten Sie die durch die Tabelle festgelegte Funktion im Bereich von $x = -3$ bis $x = 8$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	..
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	..

A) Beschreiben Sie (in Worten, mit Hilfe mathematischer Ausdrücke, ...) welche Gesetzmäßigkeit Ihnen bei dieser Funktion auffällt.

o Mir fällt keine Gesetzmäßigkeit auf

o Kurze Beschreibung:

o Ich kann die Gesetzmäßigkeit nicht mit Worten beschreiben.

B) Die Gesetzmäßigkeit für obige Funktion soll für den gesamten Definitionsbereich gelten. Welche y-Werte sind dann den Werten $x = 6$, $x = 7$ und $x = 8$ zugeordnet?

o Tragen Sie diese y-Werte in die obige Tabelle ein:

o Kann ich nicht beantworten.

VII. Gegeben ist die durch die Tabelle festgelegte Funktion:

x	..	0	1	2	3	4	5	6	7	..
y	..	1	3	4	4,5	4,73	4,87	4,94	4,97	..

1) Beschreiben Sie kurz (in Worten, mit Hilfe mathematischer Ausdrücke) den Verlauf der durch die Tabelle festgelegten Funktion.

- ☐ Kurze Beschreibung:
-
- ☐ Ich kann den Verlauf nicht mit Worten beschreiben.

3) Welchen y-Wert wird Ihrer Meinung nach die dargestellte Funktion für $x = 70$ annehmen? Geben Sie den vermuteten Wert an:

- ☐ Antwort: $x = 70 \rightarrow y = \dots\dots\dots$
- ☐ Kann ich nicht beantworten.

VIII. Gegeben ist die durch die Tabelle dargestellte Funktion:

x	..	-4	-3	-2	-1	0	1	2	..
y	..	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	1	2	4	..

1) Beschreiben Sie (in Worten, mit Hilfe mathematischer Ausdrücke, ...) die Gesetzmäßigkeit, die der folgenden Funktion zugrunde liegt.

- ☐ Hier gibt keine Gesetzmäßigkeit auf
- ☐ Kurze Beschreibung:
-

☐ Ich kann die Gesetzmäßigkeit nicht mit Worten beschreiben.

3) Die Gesetzmäßigkeit obiger Funktion soll für den gesamten Definitionsbereich gelten. Welche y-Werte sind dann den x-Werten $x = 3$ und $x = 4$ zugeordnet?

- ☐ Antwort: $x = 3 \rightarrow y = \dots\dots\dots$
- $x = 4 \rightarrow y = \dots\dots\dots$
- ☐ Kann ich nicht beantworten.

Abbildung 35: Testaufgaben der Studie von Weigand (Weigand, 1988, S. 322ff.)

Um ein Ergebnis zu dieser Studie formulieren zu können, waren Weigand die folgenden vier Punkte wichtig:

3.3.9.1 Begründungen der Funktionseigenschaften

Frage 1: „In welcher Darstellungsform wird die getestete Eigenschaft häufiger entdeckt?“ (Weigand, 1988, S. 310)

Dieser Fragestellung wurde in der Fragegruppe A auf den Grund gegangen. Zuallererst wurden die Funktionseigenschaften anhand von Begründungen getestet. Das Ergebnis wird in der folgenden Tabelle getrennt zwischen Graph und Tabelle aufgelistet. Dabei werden die Zahlen von jenen Schülerinnen und Schülern verwendet, die die Eigenschaften erkannten.

	Symmetrie	Periodizität	asymptotisches Verhalten	exponentielles Verhalten
Graph	31	13	15	4
Tabelle	20	23	15	16

Tabelle 13: Ergebnisse der Fragegruppe A zu den Eigenschaften (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 310)

Betrachten wir die Ergebnisse genauer, erkennen wir, dass nur wenige der Schülerinnen und Schüler eine Eigenschaft anhand einer Begründung ausdrücken können. Beim Erkennen der Eigenschaft an einer Extrapolationsaufgabe lösen die Lernenden dies unbewusst. Hier können wir einzelne Verständnisstufen bilden. Die erste Stufe ist das intuitive Erkennen einer Eigenschaft, mit der unbewusst operiert werden soll, wenn ein Problem zu lösen ist. Die nächste Stufe ist das bewusste Sehen der Eigenschaften des Graphen und das bewusste Lesen von

verschiedenen Darstellungen. Und zu guter Letzt erreicht man die dritte Stufe, bei der die herausgefundenen Eigenschaften auch gut argumentiert werden können (Weigand, 1988, S. 308ff.)

3.3.9.2 Modellieren anhand von Funktionseigenschaften

Frage 2: „Bildet die Testeigenschaft die Grundlage für die Lösung der Extrapolationsaufgabe? Welcher Unterschied ergibt sich zwischen den beiden Darstellungsformen?“ (Weigand, 1988, S. 311)

Darauf wurde in der Fragengruppe B das Augenmerk gelegt. Die Schülerinnen und Schüler hatten hier die Aufgabe, die bestehenden Funktionen weiter zu zeichnen oder die gefragte Extrapolationsaufgabe zu lösen. Dabei sollte herausgefunden werden, ob sie die Eigenschaft der Funktion erkannten (Weigand, 1988, S. 311).

Die nachstehende Tabelle zeigt die Ergebnisse der Gruppe B. Hier wurden die Graphen, die weiter zu zeichnen waren, qualitativ bewertet. Bei den Fragen bezüglich des asymptotischen Verhaltens war ein Wert anzugeben, der kleiner als der Grenzwert ist.

	Symmetrie	Periodizität	asymptotische Verhalten	exponentielles Verhalten
Graph	51	48	15	10
Tabelle	45	47	24	40

Tabelle 14: Ergebnisse der Fragengruppe B zu den weiterzuführenden Graphen (in Ahnlehnung an Weigand, 1988, S. 312)

Aus dieser Tabelle können wir entnehmen, dass die Schülerinnen und Schüler bei den Extrapolationsaufgaben automatisch die Funktionseigenschaften sowohl bei der Tabelle als auch beim Graphen ohne signifikanten Unterschied erkannten und diese angewendet haben. Das asymptotische und exponentielle Verhalten wurde beim Graphen deutlich schlechter gelöst als bei der Tabelle (Weigand, 1988, S. 311f.).

3.3.9.3 Kategorisieren der verbalen Begründungen

Frage 3: „Welche unterschiedlichen Sichtweisen liegen den verbalen Beschreibungen der getesteten Eigenschaften in den beiden Darstellungsformen zugrunde?“ (Weigand, 1988, S. 313)

Diese Fragestellung bezieht sich nur auf die Fragengruppe A. Hier werden die verbalen Begründungen der Funktionseigenschaften der Schülerinnen und Schüler genauer betrachtet. Dabei wird zwischen geometrischen und algebraischen Argumentationen unterschieden.

Kategorie A: **Algebraische Argumentation**

- Dieselben x -Werte, bis auf das Vorzeichen, sind immer denselben y -Werten zugeordnet. (Symmetrie)
- Die y -Werte bestehen aus einer Zahlenfolge, die immer dieselbe ist: 0/ 1/ 2/ 0/ 1/ 2. (Periodizität)
- Die y -Werte kommen immer näher an den Wert 4 heran. (asymptotische Verhalten)
- Der nachstehende y -Wert ist doppelt so groß wie der vorherige x -Wert. (exponentielles Verhalten)

Kategorie G: **Geometrische Argumentation**

- Die Funktion ist symmetrisch zur y -Achse. (Symmetrie)
- Die Funktion besitzt aneinandergereihte Parabelspitzen. (Periodizität)
- Die Funktion hat eine Dreieckswellenform, die immer wieder kommt. (asymptotisches Verhalten)
- Die Funktion ist wie eine Parabel. (exponentielles Verhalten)

Kategorie A/G: **Algebraische/ Geometrische Argumentation**

- Hier kommen Begründungen der Kategorie A und auch der Kategorie G vor.

Kategorie NZ: **Keine Zuordnung möglich**

- Dies ist eine Exponentialfunktion.
- Dies ist eine stückweise affine Funktion.
- Dies ist eine gerade Funktion.
- Dies ist eine periodische Funktion.

Kategorie KA: **Keine Antwort**

Die nachstehende Tabelle zeigt das Ergebnis der Lernenden bezüglich der Klassifizierung und den Eigenschaften:

		A	A/G	G	NZ	KA
Symmetrie	Graph	4	4	36	1	8
	Tabelle	15	2	29	3	4
Periodizität	Graph	9	5	27	2	10
	Tabelle	24	3	16	2	8
asymptotisches Verhalten	Graph	5	6	36	0	6
	Tabelle	10	4	31	1	7

exponentielles Verhalten	Graph	11	5	22	3	12
	Tabelle	19	2	14	1	17

Tabelle 15: Ergebnis der Klassifizierung und der Eigenschaften (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 313)

Betrachtet man in der Tabelle die Kategorien A/G und NZ, können wir sagen, dass der größte Teil der Lernenden entweder die geometrische oder die algebraische Argumentation bevorzugt. Bei der Symmetrie und Periodizität war der Unterschied in den Argumentationen zwischen Graph und Tabelle sehr groß. Beim exponentiellen Verhalten ist der Unterschied bezüglich der algebraischen Argumentation allerdings schon kleiner und beim asymptotischen Verhalten ist kaum ein Unterschied zu erkennen (Weigand, 1988, S. 312ff.).

3.3.9.4 Kohärenz zwischen Auffassen und Feststellen der Funktionseigenschaften

Frage 4: „Ist das Erkennen einer Funktionseigenschaft im Graphen (bzw. in der Tabelle) mit einer geometrischen (bzw. algebraischen) Sichtweise verbunden?“ (Weigand, 1988, S. 314)

Die erste Tabelle zeigt den Unterschied zwischen rein geometrischer und nicht rein geometrischer Begründungen anhand des Graphen. Die zweite legt hingegen die rein algebraischen und nicht rein algebraischen Argumentationen in einer Tabelle dar. Dabei wird bei beiden Tabellen zusätzlich noch die Zahl der Personen angegeben, die wirklich die Testeigenschaften erkannt haben.

Graph	Symmetrie	Periodizität	asymptotisches Verhalten	exponentielles Verhalten
Kategorie G	36	27	36	22
Testeigenschaft erkannt	27	8	9	0
Kategorien A, A/G	8	14	11	16
Testeigenschaft erkannt	4	5	6	4

Tabelle 16: Unterschied zwischen rein geometrischer und nicht rein geometrischer Begründungen anhand des Graphen (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 315)

Tabelle	Symmetrie	Periodizität	asymptotisches Verhalten	exponentielles Verhalten
Kategorie A	15	24	10	19
Testeigenschaft erkannt	10	16	7	13
Kategorien G, A/G	31	19	35	16
Testeigenschaft erkannt	9	7	8	2

Tabelle 17: Unterschied zwischen rein algebraischer und nicht rein algebraischer Argumentationen hinsichtlich einer Tabelle (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 315)

Nach einer genauen Betrachtung der Tabelle wird erkennbar, dass die geometrische Anschauung innerhalb des Graphen bei den Schülerinnen und Schülern hinsichtlich des Erkennens der Funktionseigenschaften nicht erfolgreich ist. Beim asymptotischen und exponentiellen Verhalten ist allerdings die algebraische Begründung besser. Laut der Tabelle ist es sowohl bei der Symmetrie und beim asymptotischen Verhalten als auch beim exponentiellen Verhalten günstiger, die algebraische Anschauung zu bevorzugen. Bei der Periodizität liegt der Wert jedoch leicht darunter (Weigand, 1988, S. 314f.).

3.3.9.5 Resultat der Kontrollgruppe

Als Kontrollgruppe werden in dieser Studie die Schülerinnen und Schüler aus der elften Jahrgangsstufe eines „normalen Gymnasiums“ bezeichnet. In diesem Abschnitt werden manche Ergebnisse der Kontrollgruppe gezeigt, um diese mit der Testgruppe zu vergleichen. Zuerst werden die Ergebnisse der 39 Probanden zum Erkennen der Funktionseigenschaften aus der Aufgabengruppe A aufgezeigt.

	Symmetrie	Periodizität	asymptotisches Verhalten	exponentielles Verhalten
Graph	35	18	33	5
Tabelle	31	21	28	15

Tabelle 18: Ergebnisse des Erkennens der Funktionseigenschaften der Aufgabengruppe A (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 316)

Bei diesen Schülerinnen und Schülern war nur die Eigenschaft des exponentiellen Verhaltens am Graphen ein Problem, denn hier war der Unterschied am größten (Weigand, 1988, S. 315f.).

Die nachstehende Tabelle zeigt nur die Symmetrie und Periodizität der Anschauung der Funktionseigenschaften in der Aufgabengruppe A auf:

		A	A/G	G	NZ	KA
Symmetrie	Graph	1	6	30	0	2
	Tabelle	3	5	28	2	1
Periodizität	Graph	3	12	22	0	2
	Tabelle	14	5	12	3	5

Tabelle 19: Ergebnisse der Symmetrie und Periodizität der Anschauung der Funktionseigenschaften (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 316)

Hier ist ersichtlich, dass das Erkennen der Symmetrie bei Graph und Tabelle kaum einen Unterschied aufzeigt. Auch ist dies beim asymptotischen Verhalten der Fall, denn diese beiden Eigenschaften hatte diese Gruppe während des Unterrichts bearbeitet. Bei der Periodizität und

dem exponentiellem Verhalten liegt hingegen ein größerer Unterschied vor (Weigand, 1988, S. 316).

3.3.9.6 Vergleich von Kontroll- und Testgruppe

Der Vergleich der Kontrollgruppe mit der Testgruppe zeigt, dass die Ergebnisse annähernd dieselben sind, obwohl die Lernenden der Kontrollgruppe während des Unterrichtes die Periodizität und das exponentielle Verhalten noch nicht durchgenommen hatten. Ein großer Unterschied liegt zwischen Test- und Kontrollgruppe bei der Symmetrie und dem asymptotischen Verhalten, also bei jenen Eigenschaften, welche die Kontrollgruppe schon im Unterricht durchgenommen hatte. Von der Kontrollgruppe werden der Graph und die Wertetabelle annähernd gleich behandelt, wobei bei der Symmetrie der geometrische Aspekt bevorzugt wird und die Tabelle eigentlich nur zum Zeichnen des Graphen benötigt wird. Damit sehen wir, dass der Mathematikunterricht den geometrischen Aspekt vorzieht. Auch zeigt das asymptotische Verhalten, dass zwischen dem Graphen und der Tabelle nicht unterschieden wird, da es in folgender standardisierter Form in der Schule aufgeschrieben wird: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$ (bzw. 5). Ebenso die Begründungen des exponentiellen Verhaltens tragen Folgen des Mathematikunterrichts. Somit wird das exponentielle Verhalten durch die x - y -Zusammenhänge oder durch die Beziehung von aufeinanderfolgenden Funktionswerten (rekursive Sichtweise) beschrieben. Beispiele zu x - y -Zusammenhänge sind:

- $y = 2^x$
- Die x -Werte sind die Exponenten der Basis 2, wobei damit die y -Werte beschrieben werden.

Hingegen wird die Beziehung der aufeinanderfolgenden Funktionswerte wie folgt artikuliert:

- Steigen die x -Werte um 1, so verdoppeln sich die passenden y -Werte.
- Der nachkommende y -Wert ist doppelt so groß wie der davorstehende.

Der Vergleich zwischen den Sichtweisen der Testgruppe und der Kontrollgruppe sieht folgendermaßen aus:

	x - y -Zusammenhang	Rekursive Sichtweise
Testgruppe	13 % (7 Probanden)	28 % (15 Probanden)
Kontrollgruppe	41 % (16 Probanden)	13 % (5 Probanden)

Tabelle 20: Vergleich zwischen den Sichtweisen der Testgruppe und der Kontrollgruppe (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 318)

Die Ergebnisse der zwei Gruppen sind völlig unterschiedlich. Bedenklich ist, dass durch das Spezialisieren der Funktionsgleichungen im Schulunterricht der elften Klasse die heuristischen Strategien nicht ausgebildet werden (Weigand, 1988, S. 317f.).

3.3.9.7 *Ergebnis*

Aus dem Resultat dieser Studie können wir erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler trotz ihrer Vorkenntnisse über Funktionsgraphen Schwierigkeiten bei den Begründungen der Funktionseigenschaften anhand des Graphen und dem Zeichnen des Graphen mit einer Tabelle haben. Außerdem wird ersichtlich, dass durch das Erarbeiten des Funktionsgraphen in der Mittelschule nicht unbedingt ein Kenntnis dieser Darstellungsart vorhanden sein muss. Die Aufgabe der Symmetrie wurde bei der Testgruppe als einzige Aufgabe anhand des Graphen besser als mit der Tabelle gelöst, obwohl in der Mittelschule der Graph nur bei der Termdarstellung überwiegend als Darstellung gebraucht wurde. Die geometrische Sichtweise überwiegt dann, wenn bei Graphen und Tabellen keine einfache Gesetzmäßigkeit (anhand) der Werte zu erblicken ist. Die algebraische Sichtweise wird hingegen dann in der Tabelle bevorzugt, wenn ein einfaches Bildungsgesetz der Werte ersichtlich ist (Weigand, 1988, S. 318).

Somit ergibt sich, dass der Mathematikunterricht vor allem an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen und anschließend darauf aufbauen sollte. Durch diese Studie ist ersichtlich, dass die Funktionseigenschaften durch den algebraischen Aspekt von den Lernenden unbewusst und ohne Hilfe des Graphen aus der Tabelle abgelesen werden könnte (Weigand, 1988, S. 319).

3.3.10 Resultat

3.3.10.1 *Schwierigkeiten bei der Vorstellung der Funktion*

Lernschwierigkeiten treten oft im Bereich der Funktionsdefinition auf. Dabei liegt die Hauptschwierigkeit darin, dass die Schülerinnen und Schüler die Zuordnung der Funktion mit anderen Zuordnungen verwechseln. Der Grund dafür ist, dass sie hier nicht nur ein Funktionskonzept besitzen, sondern zwei, die parallel ablaufen: „Concept image“ und „Concept definition“ (siehe Kapitel 3.3.1), die von Tall und Vinner entwickelt wurden. Das „Concept image“ entsteht, wie schon oben genauer beschrieben, anhand eigener Vorstellungen. Lernen die Lernenden die „Concept definition“, wird das „Concept image“ nicht einfach ersetzt, sondern es existiert weiterhin. Verbinden sich die beiden Konzepte nicht, schotten sie sich im Laufe der Zeit voneinander ab. Wenn die beiden Konzepte jedoch nicht die gleichen Vorstellungen haben, besteht die Gefahr, dass sich zwei unverträgliche Konzepte bilden (Nitsch, 2015, S. 104f.).

Laut Vinner sind die Funktionsdefinitionen, die die Schüler von sich geben, dieselben, die im Schulbuch angegeben sind. Dies führt Vinner darauf zurück, dass diese keinem „Concept image“ entsprechen, sondern nur auswendig gelernt wurden (Nitsch, 2015, S. 106).

Sowohl die Studie von **Bakar und Tall** (siehe Kapitel 3.3.2), die in Großbritannien realisiert wurde, als auch die von **Kösters** (siehe Kapitel 3.3.3), die die Studie mit denselben Fragen in Österreich durchführte, zeigten, dass die Schülerinnen und Schüler massive Probleme mit der Funktionsdefinition und dem Funktionsbegriff haben. Sie wissen zwar, wie eine Funktion funktioniert, also dass durch einen eingegebenen Wert ein anderer Wert ausgespuckt wird, jedoch nicht, dass dies in einem bestimmten Bereich ablaufen muss. Definitionen konnten sie angeben, aber nicht in mathematischer Sichtweise. In Kösters Studie kam dasselbe Ergebnis heraus. Es wussten wenigstens zwei Drittel der Befragten, dass eine Funktion eine Zuordnung ist (Tall & Baker, 1992, S. 40f.; Kösters, 1995, S. 112).

Betrachten wir nun die Studie von **Stoye** (siehe Kapitel 3.3.4). Auch hier sind die Schülerinnen und Schüler mit dem Funktionsbegriff und der Funktionsdefinition überfordert. Sie wissen wie die Lernenden der vorher erwähnten Studien, dass sie eine Zahl nehmen müssen und dass sie anhand eines Prozesses eine andere Zahl herausbekommen. Nun versuchen die Lernenden auch die Definition anhand der Zuordnung aufzustellen. Stoye untersuchte weiters die Vorstellung des Funktionsbegriffs im Alltag, wobei in diesem Bereich der Schnitt mit 80% korrekten Antworten sehr gut ausfiel. An den Beispielen, die hauptsächlich aus der Physik und dem alltäglichen Leben stammen, kann man erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler wissen, wofür die Funktion im Alltag zu gebrauchen ist (Stoye, 1990, S. 768f.).

Auch in der Studie von **Kokol-Voljč** (siehe Kapitel 3.3.5) war zu erkennen, dass die Schülerinnen und Schüler große Schwierigkeiten mit der Funktionsdefinition haben. Sie haben Schwierigkeiten, die originale Definition mit der eigenen Vorstellung zu verbinden, da sie zwei Bilder von Funktionen haben. Auf der einen Seite verstehen sie die Funktion als eine Arbeit, Tätigkeit oder Rolle und auf der anderen Seite ist sie ein mathematischer Begriff, der von den Lernenden kaum verstanden wird. Auch können sie die Funktion mit keinem mathematischen Sachverhalt verbinden (Nitsch, 2015, S. 107f.; Kokol-Voljč, 1996, S. 198f.).

So wird einerseits zwischen dem Problem der eindeutigen Zuordnung, bei dem die Kinder und Jugendlichen eine Funktion nur dann erkennen, wenn genau einem x -Wert genau ein y -Wert zugeordnet wird und sie somit beispielsweise eine konstante Funktion nicht als Funktion begreifen, und andererseits dem Problem der unkorrekten Symmetrieüberlegung unterschieden. Hierbei sind die Schülerinnen und Schüler der Meinung, dass wegen der Definition, dass jeder x -Wert genau einen y -Wert besitzt, auch gilt, dass jedem y -Wert genau ein x -Wert zugeordnet werden muss (Laakmann, 2013, S. 101). Somit können wir bei allen Studien erkennen, dass sowohl die Definition des Funktionsbegriffs als auch die Vorstellung der Funktion auf mathematischer Ebene den Schülerinnen und Schülern nicht ganz klar ist und dass die Definitionen meist nur auswendig gelernt werden, ohne den Sinn dahinter zu verstehen. Die Lernenden können jedoch die Funktion auf den Alltag oder andere Fächer beziehen, was bedeutet, dass

sie die Funktion im Allgemeinen verstanden haben, jedoch dies nicht auf die Mathematik beziehen können.

3.3.10.2 Schwierigkeiten bei der Darstellung einer Funktion als Graph

Laut der Studie von **Baker und Tall** (siehe Kapitel 3.3.2) können die Schülerinnen und Schüler nur anhand ihrer individuell erstellten Prototypen entscheiden, ob ein Graph eine Funktion abbildet oder nicht. Ist eine Kleinigkeit anders als ihr Prototyp, gibt es zum Beispiel Spitzen, dann gehört diese Funktion nicht mehr in ihr Konzept und wird ausgeschlossen. Verbinden sie eine Funktion mit etwas anderem, wie beispielsweise den Viertelkreis mit einem Kreis, wird dieser Viertelkreis nicht als eine Funktion gesehen, da dieser Viertelkreis ein Teil eines Kreises ist und ein Kreis auch keine Funktion darstellt. Auch wenn kein Term für eine Funktion angegeben werden kann, weil diese stückweise definiert ist oder es eine konstante Funktion ist, wird diese Funktion abgelehnt. Aus all diesen Beispielen kann man schließen, dass die Schülerinnen und Schüler sowie auch Studentinnen und Studenten nicht von einer Zuordnung ausgehen, sondern nur von ihren Prototypen. **Köster** (siehe Kapitel 3.3.3) kam zu denselben Ergebnissen und belegte somit, dass die Lernenden nur von ihren Prototypen ausgehen. Zusätzlich fügte sie noch Graphen, wie zum Beispiel eine stückweise definierte Funktion, zu ihrer Studie hinzu. Diese passt wieder in keine der Prototypen der Lernenden hinein, denn sie denken, dass ein Stück dieser Funktion fehlt. Somit ist diese Funktion für sie auch keine Funktion (Tall & Baker, 1992, S. 42ff.; Kösters, 1995, S. 104f.; Laakmann, 2013, S. 100).

Die Studie von **Stoye** (siehe Kapitel 3.3.4) ergibt auch, dass die Schülerinnen und Schüler nicht anhand der Definition entscheiden, sondern anhand der individuellen Prototypen. Dabei erkennt man bei dieser Studie, dass in ihren Prototypen kein Fallen und Steigen in einem Graphen vorkommen darf, denn dann sehen sie diese als keine Funktion an. Auch quadratische Funktionen sind für sie keine Funktionen. Dies kann daran liegen, dass der Funktionsbegriff anhand der linearen Funktion eingeführt wird und dass deshalb für sie nur die lineare Funktion als eine Funktion gilt (Stoye, 1990, S. 771f.).

Kokol-Voljć (siehe Kapitel 3.3.5) kam zum Ergebnis, dass die Schülerinnen und Schüler eine Funktion nur erkennen, wenn sie eine Gerade und somit eine lineare Funktion ist. Sie beachten kaum die Funktionseigenschaften. Auch hier wird als Grund die Einführung des Funktionsbegriffes anhand der linearen Funktion genannt (Kokol-Voljć, 1996, S. 201f.).

Die meisten Schülerinnen und Schüler kennen zwar die genaue Definition des Funktionsbegriffes, jedoch können sie bei graphischen Darstellungen nicht erkennen, ob eine Funktion dargestellt ist oder nicht. Auch wurde herausgefunden, dass Lernende eine Funktion, die nicht als Term dargestellt wurde, als schwierig empfinden und somit stückweise definierte und konstante Funktionen sofort ablehnen oder auch Funktionen mit diskretem Definitionsbereich nicht als Funktion erkennen (Markovits, zitiert nach Laakmann, 2013, S. 100). Oft wird auch die

Funktion selbst mit einer Darstellungsform verwechselt und somit ist eine Funktion zum Beispiel ein Graph. Schülerinnen und Schüler begreifen auch die eindeutige Zuordnung der Funktion nicht und behaupten deshalb, dass beispielsweise ein Kreis eine Funktion sei (Barzel, 2000, S. 39). Einerseits ist ein Grund, wieso die Lernenden die linearen Funktionen einer Funktion zuordnen, die Fehlvorstellung der Genauigkeit der Lernenden. Denn die Kinder und Jugendlichen denken, dass gerade Linien als „genauer“ gelten. Deshalb gelten bei ihnen Graphen mit natürlichen Formen von Kurven nicht als Funktion, da laut den Lernenden zu unregelmäßige und zu viele Kurven sind (Kössler, zitiert nach Laakmann, 2013, S. 102). Andererseits gilt als weiterer Grund, dass die linearen Funktionen zu allererst in der Schule als Funktion durchgenommen werden und sie sich diese als eine Funktion einprägen (Laakmann, 2013, S. 102).

Aus all diesen Studien lässt sich schließen, dass alle Schülerinnen und Schüler nicht anhand der Definition und der Funktionseigenschaften entscheiden, ob ein Graph eine Funktion darstellt, sondern dies anhand ihres selbstgemachten Prototypen oder einer linearen Funktion bestimmen.

3.3.10.3 Schwierigkeiten bei algebraischen Ausdrücken einer Funktion

Hier haben sowohl die Schülerinnen und Schüler und die Studentinnen und Studenten in **Baker und Talls** Studie (siehe Kapitel 3.3.2) als auch diese in der Studie von **Köster** (siehe Kapitel 3.3.3) teilweise eine andere Meinung bezüglich der Funktion in einer Gleichung oder einer graphischen Darstellung. Das heißt, dass eine Funktion, die als Graph dargestellt ist, als eine Funktion bestätigt wird und in algebraischer Form zum Beispiel nicht. Bei der Entscheidung, ob eine Gleichung eine Funktion ist, achten die meisten Lernenden zuerst auf das x innerhalb der Gleichung. Ist dieses nicht vorhanden, entscheiden sie sich dagegen (Tall & Baker, 1992, S. 47f.; Kösters, 1995, S. 106ff.).

Stoye (siehe Kapitel 3.3.4) ließ die Schülerinnen und Schüler eine Funktionsgleichung aufschreiben. Dies funktionierte sehr gut. Die meisten gaben eine lineare Funktion an. Daraus lässt sich schließen, dass sie sich diese von ihren Anfangskenntnissen gemerkt und jetzt angewendet haben. Auch hier bezieht sich das Ergebnis der Studie auf die linearen Funktionen (Stoye, 1990, S. 768f.).

Die Studie von **Kokol-Voljč** ergibt, dass die Schülerinnen und Schüler sich wiederum auf die lineare Funktion beziehen und nur diese als richtig gelten lassen. Wenn ein y in einer Gleichung fehlt, wird diese als keine Funktion gewertet (Kokol-Voljč, 1996, S. 198).

Vergleichen wir all diese Studien bezüglich des algebraischen Ausdrucks einer Funktion, können wir feststellen, dass die Lernenden keinen Zusammenhang zwischen einem Graphen und einer Gleichung erkennen. Auch wenn die Variable x oder y innerhalb der Gleichung fehlt, wird

diese sofort als Funktion ausgeschlossen. Entspricht eine Gleichung nicht einer linearen Funktion, wird auch diese nicht als eine Funktion anerkannt.

3.3.10.4 Schwierigkeiten von Funktionen bezogen auf einen Sachkontext

Die Lernenden hatten bei **Stoye** (siehe Kapitel 3.3.4) die Aufgabe, verschiedene Fragen bezüglich des Alltages aufgrund einer Graphik zu beantworten. Das beantworteten die Schülerinnen und Schüler sehr gut und lagen fast alle richtig. Sie konnten anhand der Graphik und Frage eine Verbindung zum Alltag herstellen (Stoye, 1990, S. 773f.).

Mussten die Schülerinnen und Schüler wie bei der Studie von **Kokol-Voljč** (siehe Kapitel 3.3.5) anhand eines Sachkontextes einen Graphen zeichnen, fiel ihnen dies sehr schwer und es wurde meistens ungenau oder ganz falsch gezeichnet. Wenn sie nur die funktionale Abhängigkeit innerhalb des Sachkontextes herausfinden und beschreiben mussten, konnte dies nur ungefähr die Hälfte beantworten. Das zeigt deutlich, dass sie mit Funktionen, bezogen auf das alltägliche Leben, innerhalb eines Sachkontextes Schwierigkeiten haben (Kokol-Voljč, 1996, S. 198ff.).

Die Schülerinnen und Schüler verstehen meistens den Bezug zwischen einer Funktion und der realitätsnahen Situation, die damit gezeigt wird, nicht (Barzel, 2000, S. 39). Nicht nur Barzel erkannte dies, sondern dies wird auch durch die genannten Studien bestätigt. Dabei fällt den Lernenden dieser Teil der Funktionen leichter als die vorher genannten Lernschwierigkeiten der Funktion.

3.3.10.5 Schwierigkeiten von Funktionen beim Darstellungswechsel

3.3.10.5.1 Allgemeine Schwierigkeiten beim Darstellungswechsel

Bossé, Adu Gyamfi und Cheetham (2011) stellten aufgrund vorhandener Literatur und Studien ein Modell zur Feststellung des individuellen Darstellungswechsels auf. Dabei werden folgende drei Dimensionen unterschieden: „fact gaps“, „attribute density“ und „confounding facts“ (siehe Abbildung 22) (Nitsch, 2015, S. 113).

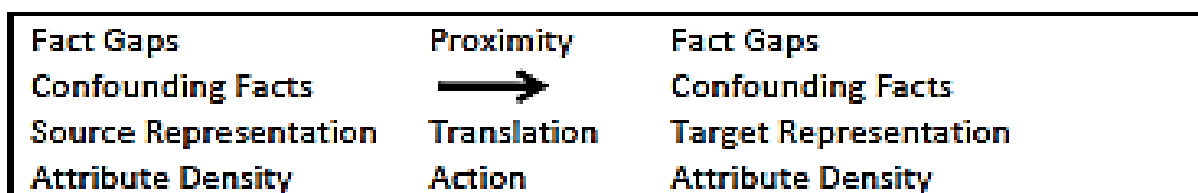


Abbildung 36: Mehrdimensionale Verschlüsselung von Darstellungswechsel nach Bossé, Adu Gyamfi und Cheetham (Nitsch, 2015, S. 113)

Fact Gaps betreffen die Ausgangs- und Zieldarstellungsform, bei denen laut Schülerinnen und Schüler Informationen fehlen. Dies könnte sowohl im Kontext als auch beim Lösungsweg sein und beispielsweise die Eigenschaften betreffen. Zum Beispiel nehmen wir einen Graph, der zu einer Gleichung gemacht werden soll, bei dem aber der y-Achsenabschnitt nicht gegeben

ist. Hier kann der y -Achsenabschnitt nicht abgelesen werden, sondern nur durch Einsetzen eines Punktes in die Formel $y = mx + b$ herausgefunden werden. Nun ist für die Aufgabe das Können der Schülerinnen und Schüler wichtig. Sie sollten solch eine Musterorientierung verinnerlicht haben und somit ohne Ablesen des y -Achsenabschnittes die Funktionsgleichung aufstellen können. Oft haben die Lernenden auch mehrere Muster zur Verfügung, aus denen sie dann ein geeignetes aussuchen können. Die Lernschwierigkeiten entstehen dann, wenn sie nur eine Möglichkeit haben und diese dann anwenden sollten (Nitsch, 2015, S. 113f.).

Confounding Facts können in der Ausgangs- und/oder Zieldarstellungsform vorkommen. Diese Störfaktoren könnten zum Beispiel bei einer ungeordneten Wertetabelle auftreten, da diese zuerst geordnet werden muss, damit weitergearbeitet werden kann. Auch hier kann es zu Schwierigkeiten kommen, wenn der Lernende ein starres Schema auswendig gelernt hat, da er die ungeordnete Tabelle dann nicht wahrnimmt (Nitsch, 2015, S. 114).

Attribute Density betrifft die Informationsdichte der Ausgangs- und/oder Zieldarstellungsform. Hier wird einerseits die Anzahl der Informationen einer Darstellungsform beurteilt, andererseits werden die benötigten Schritte für das Finden der Informationen in den Darstellungsformen bewertet. So ist die Dichte der Wertetabelle und der situativen Beschreibung gering (low density), da es nur wenige Informationsquellen gibt. Beim Graphen und bei einer Gleichung hingegen ist die Dichte hoch (high density), weil dort viele Informationen zu finden sind (Nitsch, 2015, S. 114).

Somit wurde festgestellt, dass die schwierigsten Darstellungswechsel viele fact gaps und confounding facts, aber nur wenige attribute density enthalten (Nitsch, 2015, S. 114).

3.3.10.5.2 Schwierigkeiten beim Darstellungswechsel von linearen Funktionen

Sachkontext → Graph

Bei der Studie von **Hattikudur** wurde herausgefunden, dass die Steigung der Funktion Schülerinnen und Schüler leichter fällt und die Schwierigkeiten bei der qualitativen Anschauung des y -Achsenabschnitts liegen (Nitsch, 2015, S. 121f.).

Bei der Studie von **Davis** eruierte man, dass den Lernenden das Zeichnen eines Graphen, der einen mathematischen Kontext ausdrückt, schwerer fällt als das Zeichnen eines Graphen bei alltäglichen Beispielen. Auch fand er heraus, dass die Schülerinnen und Schüler sich ihre individuelle Fachsprache aneignen (Nitsch, 2015, S. 120f.).

Hier liegen die Schwierigkeiten wegen des Anfangsunterrichtes bei der Festlegung der Steigung und bei dem y -Achsenabschnitt. Dies liegt daran, dass die Schülerinnen und Schüler das Grundverständnis der linearen Funktionen noch nicht besitzen und außerdem auch schon einen individuellen Prototypen abgespeichert haben. Die Schwierigkeit mit der Steigung liegt

darin, dass sie zwei Variablen in Betracht ziehen müssen. Das fällt ihnen jedoch beim y -Achsenabschnitt leichter, da sie nur eine Variable betrachten müssen, denn die zweite Variable ist hier Null. Wenn die Schwierigkeit beim y -Achsenabschnitt ist, liegt dies daran, dass sie hierbei keinen Bezug zum Alltag herstellen können. Denn die Steigung können sie anhand des intuitiven Verständnisses mit dem Alltag verbinden (Nitsch, 2015, S. 119f.).

Graph $\rightarrow$ Algebraische Form

Hier liegt die Schwierigkeit darin, dass die Schülerinnen und Schüler sich auf den x -Achsenabschnitt konzentrieren und deshalb meinen, dass auch dieser in der algebraischen Form vorkommen müsse und deshalb das Beispiel für sie schwer oder gar nicht zu lösen sei (Nitsch, 2015, S. 122).

3.3.10.6 Lernschwierigkeiten bei Funktionseigenschaften

Weigand (siehe Kapitel 3.3.6) fand bei seiner Studie heraus, dass Schülerinnen und Schüler Funktionseigenschaften häufiger anhand einer Tabelle erkennen. Anhand eines Graphen wurde nur die Eigenschaft der Symmetrie öfter erkannt (Weigand, 1988, S. 308ff.).

Bei der Fertigstellung eines Graphen oder einer Tabelle anhand der Eigenschaften konnte von den Lernenden wieder die Tabelle öfter vervollständigt werden. Den Graphen ergänzten sie erneut anhand der Symmetrie häufiger (Weigand, 1988, S. 311f.).

Bei den Begründungen der Funktionseigenschaften, bei denen zwischen geometrischer und algebraischer unterschieden wurde, erkannte man, dass der Unterschied der Begründungen anhand der Tabelle und des Graphen bei der Symmetrie und der Periodizität sehr groß ist. Beim exponentiellen Verhalten sind die Unterschiede der Begründungen schon geringer und beim asymptotischen Verhalten gibt es kaum einen Unterschied (Weigand, 1988, S. 312ff.).

Bei Weigand wurde auch herausgefunden, dass das Erkennen der Funktionseigenschaft anhand der geometrischen Anschauung bei einem Graphen nicht von Vorteil ist, sondern beim asymptotischen und exponentiellen Verhalten die algebraische Anschauung besser ist. Die algebraische Anschauung anhand einer Tabelle fiel hingegen bei den Schülerinnen und Schülern beim Erkennen der Symmetrie, des asymptotischen und exponentiellen Verhalten recht gut aus. Betrachtet man die Ergebnisse der Periodizität, ist ersichtlich, dass diese weniger gut verstanden wurde (Weigand, 1988, S. 314f.).

3.3.10.7 Zusammenfassung

Vergleicht man all diese Studien, können wir erkennen, dass es keinen Unterschied macht, ob die Schülerinnen und Schüler in Österreich, Deutschland, Großbritannien, Slowenien oder gar in Amerika zur Schule gehen. Es ist also egal, aus welcher Kultur oder Heimat die Kinder und Jugendlichen kommen und nach welchem Lehrplan sie unterrichtet wurden, denn alle haben

Schwierigkeiten mit dem Funktionsbegriff. Kösters fand heraus, dass die Schülerinnen und Schüler sich selbst einen individuellen Prototypen (siehe Kapitel 3.3.3.2) anhand der im Unterricht gemachten Beispiele basteln und diesen dann bei zu lösenden Aufgaben anwenden. Dieser entspricht leider meist nie der Definition und ist deshalb teilweise falsch. Aus dem Vergleich aller Studien lässt sich schließen, dass kein einziger Schüler und keine einzige Schülerin ein zusammenhängendes Funktionskonzept erstellen konnte (Nitsch, 2015, S. 108f.; Kösters, 1995, S. 110f.).

Wie bekannt, können Funktionen verschieden dargestellt werden, wie zum Beispiel durch Funktionsgleichungen, Graphen, Tabellen und verbale Beschreibungen. Bei den Untersuchungen, bei denen zwischen verschiedensten Darstellungen gewechselt werden musste, wurde festgestellt, dass ein Wechsel zwischen einem Graphen und einem Term den Schülerinnen und Schülern größere Schwierigkeiten bereitet als ein Wechsel zwischen einer graphischen und einer symbolischen Darstellung (Laakmann, 2013, S. 103).

Auch die Eigenschaften der Funktionen sind für die Schülerinnen und Schüler schwer zu erkennen. Dabei fällt ihnen das Erkennen anhand einer Tabelle leichter als bei anderen Darstellungsformen von Funktionen (Weigand, 1988, S. 308ff.).

4 Konsequenzen

In diesem Kapitel wird herausgefunden aufgezeigt, woher die Lernschwierigkeiten überhaupt kommen und wie diese bestmöglich behandelt werden können.

4.1 Entstehung von Lernschwierigkeiten

Die Entstehung von Lernschwierigkeiten ist nicht direkt essenziell für die Konsequenzen, jedoch benötigen wir sie für die Diagnose der Lernschwierigkeiten, damit wichtige Inhaltsbereiche herausgefiltert werden und anschließend bei der Auswertung differenziert werden kann (Nitsch, 2015, S. 19).

Lernschwierigkeiten treten während der Aneignungsphase auf. Sie beginnen schon bei den **Vorstellungen**, bei denen bereits mathematische Inhalte erklärt werden. Somit stellen diese einen wichtigen Abschnitt für das mathematische Verständnis dar. Weiters liegen Lernschwierigkeiten auch bei der selbstständigen Aneignung der mathematischen Vorstellungen und bei den „Fehlvorstellungen“, die die Schülerinnen und Schüler sich daraufhin selbst machen (Nitsch, 2015, S. 19).

Jedoch hängen Lernschwierigkeiten nicht immer von der Schule und deren Lerngebieten und Vorstellungen ab, sondern auch die **Familie** kann dabei Einfluss nehmen, indem sie das Kind vereinsamen lässt, ihm zu wenig Geborgenheit schenkt oder eine zu nachgiebige oder ungleiche Erziehungshaltung aufweist. Weiters können **Freunde und Schulkollegen** Einfluss auf die Lernschwierigkeiten nehmen, wenn beispielsweise ein schlechtes Klassenklima vorherrscht und der ein oder andere Mitschüler oder die eine oder andere Mitschülerin sogar gehänselt wird. Die **sozioökonomischen Verhältnisse** können die Lernschwierigkeiten ebenfalls beeinflussen, wenn zum Beispiel beengte Wohnverhältnisse, ungünstige Wohnumgebung und wirtschaftliche Minderbemittlung vorhanden sind (Zielinski, 1998, S. 54f.; Leitner et al., 2008, S. 22ff.).

4.2 Funktionsbegriff im Unterricht

Laut Klein soll der Funktionsbegriff folgendermaßen eingeführt werden:

„Wir wollen nur, dass der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder anderen Eulerschen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll gewiß nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler in großer Zahl findet, dem Schüler als

lebendiges Besitztum überliefert werden.“ (Klein 1908, zitiert nach Vollrath, 2003)

In mehreren Zeitschriften und Lehrbüchern wurde dies geändert und somit auch in der Schule umgesetzt. Klein wollte den Funktionsbegriff in der Schule den Schülerinnen und Schülern allgemein vermitteln, doch leider wurde die Umsetzung des Funktionsbegriffes im Unterricht eine Verengung. Dabei kritisiert Pickert (1956) folgende Punkte beim Erlernen des Funktionsbegriffes:

- Die Differenzierung zwischen Funktion und Kurve ist nicht klar.
So ist für Schülerinnen und Schüler beispielsweise $x - y = 1$ eine Funktionsgleichung einer Geraden und $x^2 + y^2 = 1$ die Funktionsgleichung eines Kreises.
- Das Verständnis zwischen Funktion und Umkehrfunktion wird undeutlich im Unterricht dargestellt.
Beispielsweise wird die Umkehrfunktion $y = x - 1$ für die Umformung der Gleichung $x = y + 1$ gehalten.
- Das Verständnis bezüglich der Variablen ist eingengt.
So sehen die Lernenden eine Variable als eine veränderliche Größe wie Zeit oder Weg.
- Da die Funktionsgleichungen so sehr in den Vordergrund gerückt werden, wird von den Schülerinnen und Schülern behauptet, dass Funktionen nur anhand der Gleichungen dargestellt werden können.
- Da fast nur Funktionen im Bereich $\mathbb{R}$ durchgemacht werden, wird übersehen, dass Funktionen auch in anderen Zahlenmengen zu finden sind.
- Schülerinnen und Schüler erkennen nicht, dass besondere Relationen und Folgen anhand einer Funktion dargestellt werden können.
- Anstatt f wird im Mathematikunterricht meistens $f(x)$ verwendet, somit wird der Funktionswert oft mit dem Funktionsnamen vertauscht (Vollrath, 2003, S. 126f.).

Aufgrund dieser Punkte wurde stark auf didaktischer Ebene diskutiert und man kam zu folgenden Konsequenzen für den Unterricht:

- Differenzierung zwischen Funktion und Graph
- Untersuchung der Kurven (allgemeine Punktemengen) aufgrund von Graphen einer Funktion
- Angabe der Funktionen mit Mengen von Paaren anhand unterschiedlicher Arten wie Aufzählungen der Elemente, Terme, Gleichungen, Fallunterscheidung usw.
- Betonung des Definitions- und Wertebereichs, um anschließend den Definitionsbereich zu variieren

- Darlegung einer Funktion als rechtseindeutige Relation und einer Folge als Funktion mit Definitionsbereich
- Entwicklung von Veranschaulichungen wie zum Beispiel Graphen, Pfeildiagrammen, Maschinendiagrammen ...
- Funktionen können verglichen und verknüpft werden, um neue Modelle für die Strukturbetrachtungen zu bekommen.

Im Unterricht ist es wichtig, dass dadurch nicht das Formale zu sehr in die Tiefe geht, die Begriffe nicht zu streng genommen werden und die Begrifflichkeit nicht zu früh verfestigt wird. Somit soll vermieden werden, dass die Definition des Funktionsbegriffes anhand der rechtseindeutigen Relation eingeführt wird und zu viele verschiedene Beispiele gemacht werden, um die Verengung zu umgehen (Vollrath, 2003, S. 128).

Auch die **Definition** des Funktionsbegriffes wird oft vermieden, da Vinner und Dreyfus gezeigt haben, dass das „concept image“ (siehe Kapitel 3.3.1) notwendig ist. Dieses wird somit anhand von Beispielen und Darstellungen den Schülerinnen und Schülern beigebracht (Vinner, zitiert nach Vollrath, 2003, S. 128).

Bei den Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim „**Lesen**“ von **Darstellungen** muss der Übergang zwischen lokalen zu globalen Betrachtungen genauer betrachtet und geübt werden (Janvier, zitiert nach Vollrath, 2003, S. 128).

Die **Eigenschaften** sind bei verschiedenen Darstellungen verschieden schwierig. So ist die Proportionalität für die Lernenden bei einer Tabelle leichter zu erkennen als bei einem Graphen, denn bei einem Graphen sehen sie die Geradlinigkeit eher. Somit sollte hier auf den Graphen ein genaueres Auge geworfen werden und dieser mehr in den Unterricht eingebaut werden (Vollrath, 2003, S. 128).

Ebenfalls waren das genaue Lehren des Definitionsbereiches und Wertebereiches, die Differenzierung zwischen Wertebereich und Wertevorrat und auch die Trennung zwischen Funktion und Graph nicht erfolgreich. So wurde erkannt, dass nicht frühzeitig Begriffe exakt gelehrt und gelernt werden sollten, da deren Sinn nicht verstanden wird. Daher hat auch die axiomatische Methode durch Freudenthal keinen Platz beim Lehren der Mathematik gefunden. Statt dieser Methode sollte lieber die genetische Methode eingesetzt werden, bei der die kognitive Struktur des Lernenden und auch die Struktur des Gegenstandes im Vordergrund stehen (Vollrath, 2003, S. 128f.).

4.3 Entwicklung des Funktionsbegriffes im Schulunterricht

Vollrath fand heraus, dass eine Definition bei Schülerinnen und Schülern nicht ausreicht, um ein Beispiel zu lösen. Es müssen Vorstellungen entwickelt werden, damit der Funktionsbegriff verinnerlicht werden kann. Daraufhin sollten die Lernenden sich Arbeitstechniken aneignen und Beziehungen zu Nachbarbegriffen herstellen, um schlussendlich die eigenen mathematischen Überlegungen zur Begriffsbildung zu machen. Um logische Abhängigkeiten zwischen Nachbarbegriffen herzustellen, werden Begriffspyramiden oder Begriffsnetze verwendet. Ein Problem ist noch, in welcher Reihenfolge die Begriffe eines Begriffsnetzes gelehrt werden sollten. Folgende Möglichkeiten stehen zur Auswahl:

- Von Unterbegriffen zu Oberbegriffen

Hier werden zuerst die Proportionalität und Antiproportionalität bearbeitet und dann erst wird auf den Funktionsbegriff eingegangen. Dabei geht diese Variante von dem Prinzip „Vom Besonderen zum Allgemeinen“ aus.

- Vom Oberbegriff zu Unterbegriffen

Um die Begriffe Menge-Relation für die Schülerinnen und Schüler möglichst schnell zur Verfügung zu stellen, ist es für Lehrerinnen und Lehrer essenziell, die wichtigsten mathematischen Begriffe durch eine Spezialisierung während des Unterrichtes einzuführen. Somit sind Proportionalitäten spezielle Paarmengen sowie auch die Ordnungsrelationen.

Durch zahlreiche Untersuchungen wurde herausgefunden, dass die erste Möglichkeit bei „spontanen“ Begriffsbildungen zu verwenden ist und die andere bei „wissenschaftlichen“ Begriffen benutzt werden sollte, da der zweite Weg eher der kindgerechte Weg ist. In den meisten Schulbüchern kommt eine Kombination dieser beiden Möglichkeiten vor. Die optimale Strategie gibt es nicht, denn sie ist individuell. So spielen hier sowohl die Unterrichtserfahrungen, Argumentationen und Meinungen als auch der Gegenstand, die Altersstufe und die Lernfähigkeit des Schülers und der Schülerin mit hinein. Zu den besten Ergebnissen führte bis jetzt folgende Strategie zur Einführung des Funktionsbegriffes: Zuerst werden die Paarmengen behandelt, dann werden die Proportionalität und Antiproportionalität als Unterbegriffe gesehen und anschließend wird der Oberbegriff Funktion erschaffen, welcher später dann in die Unterbegriffe stetige Funktion, Folge, differenzierbare Funktion gegliedert wird (Vollrath, 1974, S. 43ff.).

Laut Van Hiele (1964) gibt es verschiedene Stufen für die Aneignung und das Verständnis des Funktionsbegriffes. Diese bauen aufeinander auf. Begonnen wird mit **Denkniveaustufen**, bei denen verschiedenstes Material gebraucht wird. Beginnen wir bezüglich des Funktionsbegriffes in der Grundstufe. Hier wird der Funktionsbegriff anhand bestimmter Funktionen, Darstellungsarten und typischer Fragestellungen vorgestellt. Die nächste Stufe ist die **Exploration**,

bei der die Eigenschaft der Rechtseindeutigkeit in den Vordergrund rückt. In der nächsten Phase, der **Explizierung**, werden die Schülerinnen und Schüler mit der Schreibweise und der Fachsprache der Funktion vertraut gemacht. In der letzten Phase, der **Orientierung**, sollten die Lernenden selbst die Schreibweise, die zur jeweiligen Problemsituation gehört, einsetzen und die Eigenschaften des Funktionsbegriffes verwenden können (Vollrath, 1974, S. 46).

4.4 Funktionsbegriff als Leitbegriff

Um den Schülerinnen und Schülern den Funktionsbegriff zu lehren, wird er als Leitbegriff gewählt, um im Unterricht Bezug darauf zu nehmen. Ein Leitbegriff, bei dem wichtig ist, das Begriffsverständnis und die Fähigkeiten mit dem Funktionsbegriff umzugehen, während des Lehrgangs herauszubilden, wird **langfristig** kalkuliert. Außerdem sollten unbedingt Querverbindungen hinsichtlich der Kernthemen gemacht werden (Vollrath, 2003, S. 142f.).

Die einzelnen Abschnitte beim Erlernen eines Themas werden als Unterrichtssequenzen bezeichnet, in denen ein Begriff aus mehreren Unterbegriffen erlernt wird. Zum Beispiel werden bei der Schlussrechnung die proportionalen und antiproportionalen Funktionen als Schlüsselrolle festgelegt, die dann als Schlüsselbegriffe bezeichnet werden. Diese Schlüsselbegriffe werden **mittelfristig** geplant (Vollrath, 2003, S. 143).

Ebenfalls sollten Begriffe von Funktionen in einer Unterrichtseinheit gelehrt werden und diese sollten auch von den Schülerinnen und Schülern verstanden werden. Diese Unterrichtseinheiten werden **kurzfristig** geplant. Als solche Begriffe, die als Standardbegriffe bezeichnet werden, können zum Beispiel die „wachsende Funktion“ und die „fallende Funktion“ genannt werden (Vollrath, 2003, S. 143).

Benennt man im Mathematikunterricht einen Begriff als Leitbegriff, Schlüsselbegriff oder Standardbegriff, dann wird ihm eine bestimmte Rolle zugewiesen (Vollrath, 2003, S. 143).

4.5 Stufen des Verständnisses des Funktionsbegriffes im Schulunterricht

Hier wird anhand eines Stufenmodelles ein mögliches Unterrichtsmodell für das Lehren des Funktionsbegriffes präsentiert, das für die Sekundarstufe 1 verwendet werden kann. Dieses Modell wurde didaktisch durchdacht und anhand eines Unterrichtsweges ausprobiert (Vollrath, 1974, S. 51).

4.5.1 Stufe 1: Inhaltliche, nichtformale Kenntnis des Begriffes

Bei dieser Stufe sollte der Begriff den Schülerinnen und Schülern schon einigermaßen vertraut sein und sie sollten ihn anhand einer Tabelle, eines Pfeildiagrammes, einer graphischen Dar-

stellung, einer Menge geordneter Paare, spezieller Operatoren und besonderer Proportionalitäten oder Antiproportionalitäten anwenden können. Dabei ist der Funktionsbegriff explizit nicht zu verwenden. In dieser Stufe sollten folgende Fähigkeiten beherrscht werden:

- I. Die Schülerinnen und Schüler sollten wichtige Modelle beherrschen, die identifiziert werden sollen und mit denen sie auch operieren sollen. Außerdem sollten sie die Modelle richtig verwenden und innerhalb der Problemaufgaben anwenden können.
- II. Die Schülerinnen und Schüler sollten spezielle Relationen, die keine Funktionen sind, verstehen, zum Beispiel „ $\leq$ “ oder „ist Bruder von“. Auch durch eine Tabelle oder anhand eines Pfeildiagrammes sollten die speziellen Relationen erkannt werden.

Im Algebra-Unterricht im Gymnasium werden Definitionen von speziellen Funktionen zuerst eingeführt, wie zum Beispiel von einer ganzen rationalen Funktion, gebrochenen rationalen Funktion usw. Diese Definitionen sind aber nur Unterbegriffe, denn die Oberbegriffe wären für die Schülerinnen und Schüler nur eine Belastung. Somit werden als Unterbegriffe für den Funktionsbegriff die Proportionalität, Antiproportionalität und auch die Waren-Preis-Relation thematisiert. Daher sollten folgende weitere Punkte beherrscht werden:

- III. Die Lernenden beherrschen Unterbegriffe, können Beispiele und Gegenbeispiele herstellen und typische Probleme bewältigen.
- IV. Kenntnis einer Begriffsbezeichnung
- V. Erkennen einer Funktion anhand eines vorgelegten Objektes
- VI. Mit dem Begriff kann anhand von Techniken umgegangen werden.
- VII. Kenntnis und Anwendung wichtiger Eigenschaften
- VIII. Verknüpfung des Begriffes mit Kurven, Graphen, Pfeildiagrammen usw.

Diese Leistungen gehen vor allem zur Phase der Propädeutik des Funktionsbegriffs über. Bis jetzt ist der Funktionsbegriff, so wie er ist, in Ordnung in der Hauptschule. Jedoch wird dies nicht immer so bleiben (Vollrath, 1974, S. 51f.).

4.5.2 Stufe 2: Formale Kenntnis des Begriffs

Hier wird die Definition des Funktionsbegriffes herausgebildet, wobei man die Vorkenntnisse analysiert, erweitert und ordnet. Dabei sollten folgende Fähigkeiten beherrscht werden:

- I. Kenntnis einer Definition des Funktionsbegriffes
- II. Begründung der Entscheidung, wieso ein Objekt zum Funktionsbegriff gehört
- III. Begründung der Entscheidung, wieso ein Objekt nicht zum Funktionsbegriff gehört
- IV. Entscheidung, ob ein Objekt bei Grenzfällen zum Funktionsbegriff gehört
- V. Erstellung von individuellen Beispielen des Funktionsbegriffes
- VI. Erstellung von individuellen Gegenbeispielen des Funktionsbegriffes

- VII. Ersetzen der definierten Aussageform durch den Funktionsbegriff, zum Beispiel:
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist ersetzbar durch $f'(x)$.
- VIII. Ersetzen des Funktionsbegriffes durch die definierte Aussageform
- IX. Erkennung der Merkmale des Funktionsbegriffes anhand einer komplexen Problemsituation und anschließende Anwendung anhand des Funktionsbegriffes
- X. Angabe der Stellen, wo Eigenschaften des Funktionsbegriffes vorkommen, anhand der einschlägigen Beweise (Vollrath, 1974, S. 52f.).

4.5.3 Stufe 3: Integrierte Kenntnis des Begriffes

Hier werden die Eigenschaften des Funktionsbegriffes, die in der vorherigen Stufe gebraucht wurden, genauer erörtert. Dabei sollten der Schüler und die Schülerin folgende Punkte können:

- I. Erreichen der Unterbegriffe durch selbstständige Wahl von Zusatzbedingungen
- II. Erkenntnis eines leeren Begriffes anhand von Zusatzforderungen
- III. Erkenntnis einer Zusatzbedingung, die keine Einschränkung darstellt
- IV. Erkenntnis der Beziehung zwischen betreffendem Begriff und Ober-, Unter-, Nebenbegriff und das Darstellen der Beziehung der Begriffe Funktion – Proportionalität – Folge – Relation – Produktmenge innerhalb eines Diagrammes
- V. Kennen eines Netzes von Eigenschaften des Funktionsbegriffes

Bei diesen Punkten ist es wichtig, im Hinterkopf zu haben, dass man beim Funktionsbegriff die Eigenschaften erst durch die Zusatzforderungen, wie der Stetigkeit, Monotonie usw., bekommt (Vollrath, 1974, S. 53f.).

4.5.4 Stufe 4: Kritische Kenntnis des Begriffes

Bei dieser Stufe sollen die Lernenden einüben, dass der Funktionsbegriff auf unterschiedliche Weise beschrieben werden kann. Dabei sollten der Schüler und die Schülerin folgende Punkte können:

- I. Erkenntnis des gleichen Begriffes anhand einer äquivalenten Fassung
- II. Beweisen der Äquivalenz

Danach sollte man nicht davon ausgehen, dass der Schüler und die Schülerin zentrale Begriffe, wie zum Beispiel die Wurzeln des Funktionsbegriffes, weiß, denn diese Stufe wird frühestens gegen Ende der Sekundarstufe 2 erreicht (Vollrath, 1974, S. 54).

4.6 Aufbau der Definition des Funktionsbegriffes

Gehen wir vom Stufenschema der vorher genannten Lernziele aus, kommen wir nun zu folgendem Schema:

- I. Damit eine Einseitigkeit des Funktionsbegriffes vermieden wird, sollten unterschiedliche Beispiele gemacht werden.
- II. Vor allem die Einführungsbeispiele sollten gut überlegt werden, da diese bei den Schülerinnen und Schülern am längsten hängen bleiben. Solch ein Beispiel folgendes Bewertungsproblem:
10 Teilnehmer werden von 5 Punkterichtern mit ganzen Zahlen von 0 bis 6 bewertet. Anhand der Mittelbildung bekommt jeder Teilnehmer eine Bewertungszahl. Von Vorteil ist hier die Möglichkeit des Überganges vom Relations- zum Funktionsbegriff. Von Nachteil ist die Einschränkung von Funktionen mit endlich vielen Elementen.
- III. Anhand eines Objektes soll entschieden werden, ob dies eine Funktion darstellt.
- IV. Die Darstellungsformen einer Funktion können bezüglich des Sachkontextes variiert werden.
- V. Betrachtung von Grenzübjekten
- VI. Wird die Funktion anhand einer Darstellung wiedergegeben, sollten die Lernenden das Material variieren und aufgrund ihrer Stärke auf eine bestimmte Problemsituation anwenden (Vollrath, 1974, S. 63ff.).

4.7 Aufbau der Funktionseigenschaften

Haben die Schülerinnen und Schüler erstmal verstanden, dass eine Funktionseigenschaft die Proportionalität und Antiproportionalität ist, verändert sich ihre Sicht rasant. Eine Funktion f heißt proportional, wenn $f(rx) = rf(x)$. Antiproportional ist sie, wenn gilt $f(rx) = \frac{1}{r}f(x)$ (Vollrath, 2003, S. 147f.).

Um diese Eigenschaft zu ermitteln, wird dies am einfachsten anhand einer Tabelle abgebildet. Das folgende Beispiel wird dies verdeutlichen:

GEWICHT	PREIS
50 g	1,20 €
150 g	3,60 €

LEISTUNG	ZEIT
20 W	6 h
60 W	2 h

Tabelle 21: Beispiel zur Ermittlung von proportional und antiproportional (Vollrath, 2003, S. 147)

Ist die erste Größe gegeben, kann man durch Operieren zur zweiten Größe gelangen. Zum Beispiel kosten 50 g

eines Objektes € 1,20. Wie viel € kostet dann ein 150 g schweres Objekt? So wird vorgegangen, um zur Lösung zu kommen: 150 g sind das Dreifache von den 50 g. Somit ist auch der Preis dieses Objekts das Dreifache von den 50 g. Jetzt ist nur mehr das Dreifache von den € 1,20 zu berechnen und das ergibt dann € 3,60 (Vollrath, 2003, S. 147f.).

Beim Aufbau des Funktionsbegriffes in der zweiten Stufe des Lernens sollte mit der oben beschriebenen Variante begonnen werden. Hier entdecken die Schülerinnen und Schüler Funktionen als Träger von Eigenschaften. Dabei könnte der ein oder andere Lernende auch Zusammenhänge erkennen, wie zum Beispiel, dass proportionale Funktionen wachsend sind, jedoch nicht jede wachsende Funktion proportional ist. Erst in der nächsten Stufe ist das Erkunden der Zusammenhänge der Eigenschaften an der Reihe, wobei zuerst die Eigenschaften selbst bewiesen werden müssen, um die Zusammenhänge nachzuweisen. Bis jetzt wurden anhand von graphischen oder tabellarischen Darstellungen die Eigenschaften der Funktion begründet. Beweise können jetzt sogar mit der Termdarstellung und der Funktionsgleichung durchgeführt werden (Vollrath, 2003, S. 156).

5 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: „Plimpton 322“ – Tafeln (Hischer, 2012, S. 102)	1
Abbildung 2: Erste Darstellung einer zeitabhängigen Funktion (Laakmann, 2013, S. 73)	1
Abbildung 3: modellhafte Funktion von Leibniz (Greefrath et al., 2016, S. 25)	2
Abbildung 4: Definition Funktion (Allerstorfer et al., 2016, S. 98)	5
Abbildung 5: Pfeil- und Stabdiagramm (Van Dormolen, 1978, S. 124)	6
Abbildung 6: Diagramm (Van Dormolen, 1978, S. 124)	6
Abbildung 7: Wachstumskurve von Jungen (Greefrath et al., 2016, S. 37)	10
Abbildung 8: Definition der Nullstellen (Geretschläger et al., 2008, S. 86)	12
Abbildung 9: Modellierungsprozess (vom Hofe, 2003, S. 5)	15
Abbildung 10: Fallschirmspringen (Leuder & Prediger, 2005, S. 1)	20
Abbildung 11: Tabelle, Graph und Funktionsterm einer linearen Funktion (Malle, 2000, S. 9)	22
Abbildung 12: Gezeiten (Leuder & Prediger, 2005, S. 3)	26
Abbildung 13: Beispiel einer linearen Funktion (Kösters, 1995, S. 27)	32
Abbildung 14: Einzeichnen eines Punktes anhand von Strecken vs. Punkten (Kösters, 1995, S. 34)	37
Abbildung 15: Aufzeichnung einer Beobachtung von Planeten (Kösters, 1995, S. 35)	38
Abbildung 16: Abbildung (b) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)	43
Abbildung 17: Abbildung (a) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)	43
Abbildung 18: Abbildung (d) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)	44
Abbildung 19: Abbildung (c) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)	44
Abbildung 20: Abbildung (f) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 43)	45
Abbildung 21: Abbildung (e) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 43)	45
Abbildung 22: Abbildung (g) (Tall & Baker, 1992, S. 45)	46
Abbildung 23: Abbildung (i) (Tall & Baker, 1992, S. 45)	46
Abbildung 24: Abbildung (h) (Tall & Baker, 1992, S. 45)	46
Abbildung 25: Abbildung (j) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 46)	47
Abbildung 26: Abbildung (k) (Kösters, 1995, S. 104)	50
Abbildung 27: Abbildung (m) (Kösters, 1995, S. 104)	50
Abbildung 28: Abbildung (l) (Kösters, 1995, S. 104)	50
Abbildung 29: Abbildung (n) (Kösters, 1995, S. 105)	51
Abbildung 30: System eines Prototypen (Kösters, 1995, S. 110)	51
Abbildung 31: graphische Beispiele zu Aufgabe 4 (Stoye, 1990, S. 771)	54
Abbildung 32: Temperaturverlauf (Stoye, 1990, S. 773)	57
Abbildung 33: Figur 2 und Figur 3 (Kokol-Voljć, 1996, S. 201f.)	60
Abbildung 34: Pfeildiagramm (Kokol-Voljć, 1996, S. 200)	63

Abbildung 35: Testaufgaben der Studie von Weigand (Weigand, 1988, S. 322ff.)	69
Abbildung 36: Mehrdimensionale Verschlüsselung von Darstellungswechsel nach Bossé, Adu Gyamfi und Cheetham (Nitsch, 2015, S. 113)	79

6 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Ergebnisse der Abbildungen (a) und (b) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)	43
Tabelle 2: Ergebnisse der Abbildungen (c) und (d) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 42)	44
Tabelle 3: Ergebnisse der Abbildungen (e) und (f) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 43)	45
Tabelle 4: Ergebnisse der Abbildungen (g), (h) und (i) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 45)	46
Tabelle 5: Ergebnis der Abbildung (j) (in Anlehnung an Tall & Baker, 1992, S. 46)	47
Tabelle 6: Ergebnisse der algebraischen Ausdrücke bei Funktionen von Baker und Tall (Tall & Baker, 1992, S. 47)	48
Tabelle 7: Ergebnis der Abbildung (k) (in Anlehnung an Kösters, 1995, S. 104)	50
Tabelle 8: Ergebnisse der Abbildungen (l) und (m) (in Anlehnung an Kösters, 1995, S. 105)	50
Tabelle 9: Ergebnis der Abbildung (n) (in Anlehnung an Kösters, 1995, S. 105)	51
Tabelle 10: Ergebnisse von der Messung der Kraft der Feder (Stoye, 1990, S. 774)	57
Tabelle 11: Häufige Fehler bei der Steigung (in Anlehnung an Nitsch, 2015, S. 121)	64
Tabelle 12: Häufige Fehler des y -Achsenabschnitts (in Anlehnung an Nitsch, 2015, S. 121)	65
Tabelle 13: Ergebnisse der Fragengruppe A zu den Eigenschaften (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 310)	69
Tabelle 14: Ergebnisse der Fragengruppe B zu den weiterzuführenden Graphen (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 312)	70
Tabelle 15: Ergebnis der Klassifizierung und der Eigenschaften (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 313)	72
Tabelle 16: Unterschied zwischen rein geometrischer und nicht rein geometrischer Begründungen anhand des Graphen (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 315)	72
Tabelle 17: Unterschied zwischen rein algebraischer und nicht rein algebraischer Argumentationen hinsichtlich einer Tabelle (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 315)	72
Tabelle 18: Ergebnisse des Erkennens der Funktionseigenschaften der Aufgabengruppe A (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 316)	73
Tabelle 19: Ergebnisse der Symmetrie und Periodizität der Anschauung der Funktionseigenschaften (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 316)	73
Tabelle 20: Vergleich zwischen den Sichtweisen der Testgruppe und der Kontrollgruppe (in Anlehnung an Weigand, 1988, S. 318)	74

Tabelle 21: Beispiel zur Ermittlung von proportional und antiproportional (Vollrath, 2003, S. 147).....	90
---	----

7 Literaturverzeichnis

- Allerstorfer, C., Langer, M., & Siegl, A. (2016). *Angewandte Mathematik @ HAK 1*. Linz: Veritas Verlag.
- Barzel, B. (Februar 2000). Ich bin eine Funktion. *Mathematik lehren*(98), S. 39-40.
- Brand, C., Dorfmayr, A., Lachner, J., Mistlbacher, A., & Nussbaumer, A. (2011). *Thema Mathematik 5*. Linz: Veritas Verlag.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Feldt-Caesar, N. (2017). *Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen. Eine theoretische Betrachtung und exemplarische Konkretisierung am Ende der Sekundarstufe 2*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Fischer, C. (2009). Individuelle Förderung besonders begabter Kinder mit Lern- und Leistungsschwierigkeiten. In C. Fischer, U. Westphal, & C. Fischer - Ontrup, *Individuelle Förderung: Lernschwierigkeiten als schulische Herausforderung. Lese-Rechtschreibschwierigkeiten - Rechenschwierigkeiten* (S. 180). Berlin: LIT - Verlag.
- Gartmaier, M., Gruber, H., Hacher, T., & Heid, H. (2015). *Fehler: Ihre Funktionen im Kontext individueller und gesellschaftlicher Entwicklung*. Münster: Waxmann Verlag.
- Geretschläger, R., Griesel, H., & Postel, H. (2008). *Elemente der Mathematik 5*. Nordrhein - Westfalen: Schroedel Verlag.
- Gold, A. (2011). *Lernschwierigkeiten: Ursachen, Diagnostik, Intervention* (Bd. 1. Auflage). Stuttgart: Kohlhammer.
- Gold, A. (2016). *Lernen leichter machen: Wie man im Unterricht mit Lernschwierigkeiten umgehen kann*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Heuser, H. (2009). *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Hischer, H. (2012). *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur, Funktion, Zahl*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hofbauer, H. -G. (1988). *Der Funktionsbegriff in der Schule*. Diplomarbeit, Universität Wien.

- Kleine, M. (2012). *Lernen fördern: Mathematik. Unterricht in der Sekundarstufe 1* (Bd. 1. Auflage). Seelze: Friedrich Verlag.
- Klinger, M. (2015). *Vorkurs Mathematik für Nebenfachstudierende. Mathematisches Grundwissen für den Einstieg ins Studium als Nicht - Mathematiker*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Kokol-Voljć, V. (1996). Funktionsbegriff - Fehlvorstellungen von Schülern und Lehrern. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz, & E. Schneider, *Trends und Perspektiven. Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur "Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt vom 26. - 30.9.1994* (S. 197-204). Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky.
- Kösters, C. (1995). *Didaktische Probleme des Funktionsbegriffes*. Diplomarbeit, Universität Wien.
- Kösters, C. (April 1996). Was stellen sich Schüler unter Funktionen vor? *Mathematik lehren*, S. 9-13.
- Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Eine Untersuchung rechnerunterstützten Lernumgebungen*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Leitner, W., Ortner, A., & Ortner, R. (2008). *Handbuch Verhaltens- und Lernschwierigkeiten* (Bd. 7. Auflage). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- Leuder, T., & Prediger, S. (47 (2). April 2005). Funktioniert's? Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, S. 1-7.
- Malle, G. (1996). Aus der Geschichte lernen. *mathematik lehren*(27), S. 4-8.
- Malle, G. (Dezember 2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, S. 8-11.
- Malle, G., Woschitz, H., Koth, M., & Salzger, B. (2014). *Mathematik verstehen 5* (Bd. 1. Auflage). Wien: ÖBV.
- Moschkovic, J. N. (1998). Students' use of the x-intercept as an instance of a transitional conception. In: *Educational Studies in Mathematics* 37, S. 169-197.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose zu Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Pauer, F., Scheirer-Weindorfer, M., & Simon, A. (2014). *Mathematik anwenden HAK 1*. Wien: ÖBV.

- Pfeifer, M.-E. (2012). *Grundvorstellungen zu funktionalen Abhängigkeiten - eine exemplarische Realisierung mittels Lernpfad*. Diplomarbeit, Universität Wien.
- Schmidradner, C. (1992). *Funktionsbegriff*. Diplomarbeit, Universität Wien.
- Schodl, M., Gut, J., Karajan, S., Turner, M., & Blanckenstein, U. (2012). *Angewandte Mathematik HAK I*. Wien: Manz.
- Sierpinska, A. (1988). Epistemological Remarks on Functions. In *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 568-575). Veszprem.
- Steinweger, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen - Gleichungen - Funktionale Beziehungen*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Stölting, P. (2008). *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe 1*. Paris: Univerité Paris 7 Denis Diderot, UFR Mathématiques.
- Stoye, W. (1990). Befragung von Schülern zum Funktionsbegriff - Ergebnisse im Vergleich. *Mathematik in der Schule*(28 (11)), S. 766-777.
- Tall, D., & Baker, M. (1992). Student´ mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 23, S. 39-50.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image und concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematik*, S. 151-169.
- Tinhof, F., Fischer, W., Gerstendorf, K., Girlinger, H., & Paul, M. (2013). *Mathematik 1*. Linz: Trauner Verlag.
- Van Dormolen, J. (1978). *Didaktik der Mathematik*. Braunschweig: Vieweg.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definition for the Concept of function. *Journal for Research in Mathematic Education*, 20(4), S. 356-366.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(3), S. 293-305.
- Vollrath, H.-J. (1974). *Didaktik der Algebra* (Bd. 1.Auflage). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, S. 8-12.
- Vollrath, H.-J. (2003). *Algebra in der Sekundarstufe* (Bd. 2.Auflage). Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.
- vom Hofe, R. (Juni 2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. *Mathematik lehren, Heft 118*, S. 4-8.
- Weigand, H.-G. (6. Juni 1988). Zur Bedeutung von Zeitfunktionen für den Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik. Zeitschrift der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, S. 287-325.
- Zielinski, W. (1998). *Lernschwierigkeiten: Ursachen - Diagnostik - Intervention* (Bd. 3. Auflage). Stuttgart: Kohlhammer.