



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

**„Instanziierung des bohrschen
Komplementaritätsprinzips durch
informationstheoretische Ansätze in der Quantenphysik“**

Verfasst von / submitted by

Sebastian Kalinka

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt/
degree programme code as it appears on the student
record sheet: A190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt/
degree programme as it appears on the student record
sheet: Lehramtsstudium UF Mathematik / UF Physik

Betreut von / Supervisor: Mag. Dr. Beatrix Hiesmayr, Privatdoz.

„How wonderful that we have met with a paradox.
Now we have some hope of making progress.“

- Niels Bohr

Abstract

German/Deutsch

Diese Arbeit befasst sich mit der Komplementarität von der ‚Information über den Weg‘ (eines Quantenobjekts) und der ‚Information über das Interferenzmuster‘ in der Quantenphysik. Dazu wird das bohrsche Komplementaritätsprinzip im Rahmen der Kopenhagener Deutung erläutert und interpretiert. Eng verbunden mit dieser Instanziierung des Komplementaritätsprinzips ist der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus, welcher auch häufig in Schulen gelehrt wird. Dieser soll kritisch beleuchtet und seine Bedeutung in Bezug auf das Komplementaritätsprinzip herausgearbeitet werden. Es wird sich zeigen, dass der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus keine Notwendigkeit zur Interpretation der scheinbar paradoxen Quantenphänomene darstellt und im Rahmen der Quantenmechanik bereits überholt ist. An seine Stelle tritt die Komplementarität der oben genannten Informationen, die in gewisser Weise eine Verallgemeinerung von Bohrs Instanziierung des Komplementaritätsprinzips darstellen. Dieser informationstheoretische Zugang ermöglicht zudem eine vereinheitlichte Behandlung des Doppelspalts, der Mott-Streuung und des Zerfalls von Kaonen, wie in dieser Arbeit gezeigt wird.

English/Englisch

This diploma thesis deals with the complementarity of ‚which-way information‘ and the ‚information about interference patterns‘ in quantum physics. Therefore, it is reasonable to explain and interpret Bohr’s principle of complementarity. The term wave-particle duality is closely connected to this instantiation of the principle of complementarity and is often taught in schools, since it is part of the curriculum. Hence, this expression has to be looked at critically and the relation of this duality to the principle of complementarity needs to be elaborated. This thesis is going to show that the term wave-particle duality is not necessary to deal with seemingly paradox quantum phenomena and that the term itself is obsolete. Instead, the complementarity of the two pieces of information mentioned above will step in, which are in some sense a generalisation of Bohr’s instantiation of the complementarity principle. Furthermore, this information-theoretical approach enables a unified treatment of the double slit, the Mott scattering and the kaon decay, as will be shown in this thesis.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Bohrs Position zur Quantenphysik und Quantenmechanik	9
3	Formulierungen des bohrschen Komplementaritätsprinzips	13
3.1	Como-Version	15
3.2	Pre-EPR-Version	18
3.3	Post-EPR-Version	21
4	Komplementarität und der Welle-Teilchen-Dualismus	25
5	Quantifizierung der Komplementarität - Predictability und Visibility	33
6	Anwendungsbeispiele	40
6.1	Predictability und Visibility als funktionale Abhängigkeiten	40
6.2	Ein Experiment mit dem Doppelspalt	42
6.3	Mott-Streuung	48
6.4	Kaon als Analogon zum Doppelspalt	50
7	Das Erzwingen von Welcher-Weg-Information durch Detektoren	55
8	Diskussion der Ergebnisse in Bezug auf Bohr	66
9	Didaktische Schlussfolgerungen	69
9.1	Auf schulischer Ebene	69
9.2	Auf universitärer Ebene	73
10	Zusammenfassung	76
11	Literaturverzeichnis	78
12	Abbildungsverzeichnis	80

1 Einleitung

Die Entwicklung der Quantenphysik gilt als eine der bedeutendsten Errungenschaften der Physik im 20. Jahrhundert. Mittlerweile ist sie durch Experimente bestens bestätigt, wird aber dennoch permanent weiterentwickelt. Trotz der experimentellen Erfolge stellte und stellt sich vor allem die Interpretation der Quantenphysik als große Herausforderung dar. Insbesondere scheinbar paradoxes Verhalten, wie das Auftreten von Interferenzmustern bei Teilchen wie Elektronen und diskrete Phänomene für kontinuierlich geglaubte Entitäten (wie etwa Licht), sorgte für heftige Diskussionen. Wie kann etwas gleichzeitig Welle und Teilchen sein oder sich zumindest so verhalten, obwohl diese (klassischen) Begriffe doch unvereinbar sind? Die (scherzhafte) Bemerkung eines Physikers zeigte die damals herrschende Verwirrung auf: „Am Montag, Mittwoch und Freitag ist das Licht ein Teilchen; Dienstag, Donnerstag und Samstag ist es eine Welle; nur am Sonntag, da ruht es.“¹ Begriffe wie jener des Welle-Teilchen-Dualismus traten ans Tageslicht und prägten die nachfolgende Physikwelt. Ursprünglich wurde erwartet, dass diese Probleme im Sinne einer klassischen Theorie gelöst werden könnten. Es gab die Hoffnung, dass sich widersprüchliche Phänomene wie der genannte Welle-Teilchen-Dualismus bloß als vorläufige Probleme herausstellten - wie etwa die Inkompatibilität von den Galilei-Transformationen und den Maxwellgleichungen, welche durch die Relativitätstheorie geklärt wurden. Weltbekannte Physiker, wie etwa Einstein, der durch seine Beschreibung der Lichtquanten den Begriff des **Welle-Teilchen-Dualismus** quasi vom Zaun gestoßen hatte, pochten auf eine derartige Lösung.² Erst als Werner Heisenberg und Erwin Schrödinger die **Quantenmechanik als Beschreibung der Quantenphänomene** einführten, wurde die Welt der Physik komplett auf den Kopf gestellt. Heisenberg erkannte, dass er **keine Raum-Zeit-Beschreibung** brauchte, um die Ausgänge von (Quanten)experimenten korrekt vorherzusagen. Aus diesem Grund entschied er sich, eine derartige Beschreibung aufzugeben. Dies war

¹ Urheber unbekannt; vgl. Sexl, 2007, S.45

² So vermutete Einstein zu Beginn, dass die Lösung des Welle-Teilchen-Dualismus durch die Beschreibung der Entstehung (elektromagnetischer) Wellen durch die Überlagerung der Felder von eng benachbarten „singulären Punkten“ entstehen würde. (vgl. dazu Einstein, 1909, Vortrag zur 81. Versammlung)

selbstverständlich ein äußerst gewagter Schritt, denn seit Beginn der klassischen Mechanik war eine Beschreibung der Bewegungen mit Raum- und Zeitkoordinaten üblich und notwendig (sei es direkt oder indirekt im Rahmen der statistischen Physik), um Vorhersagen treffen zu können. Heisenbergs neue Variablen waren nun aber nicht mehr dazu da, die Bewegung, sondern die **Wahrscheinlichkeiten der Ausgänge eines Experiments** zu beschreiben.³ Auch die Wellenmechanik warf unzählige Fragen auf. Wie sind die Wellen - also die Lösungen der Schrödingergleichung - zu verstehen und welche Bedeutung hat eine derartige Welle für ein Teilchen wie etwa ein Elektron? In gewisser Weise wurde dadurch die paradoxe Situation des Welle-Teilchen-Dualismus verstärkt. Die Quantenmechanik lieferte jedenfalls keine schnell ersichtlichen Lösungen für die widersprüchlichen Beobachtungen. Im Gegenteil: Die Ausgänge von Experimenten können **nicht mehr deterministisch** vorhergesagt werden, und der in der Quantenmechanik auftretende Formalismus benötigt zwangsweise eine Wellenfunktion beziehungsweise eine Beschreibung durch abstrakt wirkende Matrizen. Kritiker (allen voran Einstein) warfen ein, es handle sich bloß um einen Formalismus, der zwar funktioniere, aber in keinsten Weise eine vernünftige Abbildung der Realität darstelle. Nun hat aber bereits Galileo Galilei die Physik als eine mathematische Wissenschaft zur Beschreibung der Natur bezeichnet und auch die Quantentheorie bildet hier keine Ausnahme. Für theoretische PhysikerInnen ist es daher möglich, äußerst produktiv an der Mathematik der Quantenphysik - in den meisten Fällen ist das die Quantenmechanik - zu arbeiten und diese in Verbindung mit den experimentellen Daten zu setzen, ohne sich den interpretativen und epistemologischen Problemen zu widmen. Eine Sichtweise, der vor allem **Niels Bohr** (*1885, †1962), einer der Wegbereiter der Quantenphysik, höchstwahrscheinlich nicht viel abgewinnen konnte. Er beschäftigte sich äußerst intensiv mit der Interpretation der Quantentheorie. Nach Bohrs Ansicht konnte der Weg zum Verständnis der experimentell betrachteten Quantenphänomene nicht an den philosophischen Problemen vorbeiführen, welche die Quantenwelt mit sich brachte. Er sah die Abwendung von der klassischen Mechanik und ihrer Raum-Zeit-Beschreibung, sowie die Einführung der abstrakteren Quantenmechanik als Chance, die Verständnisschwierigkeiten zu lösen, welche größtenteils durch das Festhalten an der Gültigkeit

³ vgl. Plotinsky, 2012, S.30

klassisch-mechanischer Bilder entstanden seien.⁴ Als Standardinterpretation etablierte sich die **Kopenhagener Deutung**, welche ursprünglich um 1927 von Werner Heisenberg und Niels Bohr formuliert wurde. Allerdings beinhaltet diese Interpretation teils radikale Ansichten, wie beispielsweise die Abkehr von sowohl der Realität als auch der Lokalität⁵. Aus diesem Grund sollte gleich zu Beginn der Arbeit angemerkt werden, dass **neben der Kopenhagener Deutung noch weitere, teilweise stark konträre Interpretationen und Theorien der Quantenphysik existieren**, die zu den gleichen Ergebnissen beziehungsweise Vorhersagen führen und sich stellenweise größer werdender Beliebtheit erfreuen. Hinzu kommt, dass die Kopenhagener Deutung selbst nicht unbedingt eindeutig ist. Bohrs Interpretationen der Quantenphysik unterliefen des öfteren Wandlungen, welche sich oft deutlich von seinen vorgehenden Ideen unterschieden. Dies lag vor allem auch an den intensiv geführten Debatten mit seinem Freund und Kollegen Albert Einstein, der eine durchwegs konträre Position zu Bohr einnahm.⁶ Zusätzlich erschwert wird das Definieren einer eindeutigen Kopenhagener Deutung durch das Hinzutreten weiterer Interpretationen, welche sich von Bohrs Ansichten absetzen, trotzdem aber in die Rubrik der Kopenhagener Deutung fallen. **Wird in dieser Arbeit von der Kopenhagener Deutung gesprochen, so ist damit Bohrs letztliche Interpretation der Quantenmechanik beziehungsweise der Quantentheorie gemeint**, und nicht die ursprüngliche Formulierung aus dem Jahre 1927. Wird an Stellen eine frühere Version verwendet, wird explizit darauf hingewiesen. Zudem kann immer nur eine **Interpretation der bohrschen Interpretation** gegeben werden, denn was Bohr wirklich meinte oder dachte, das weiß schlussendlich niemand. Daher ist es für andere LeserInnen durchaus möglich, auf Basis von Bohrs Schriften unterschiedliche Schlüsse zu ziehen und eine anderweitige Stellung einzunehmen. Dennoch haben all diese Versionen unzählige Gemeinsamkeiten: So sprach auch Werner Heisenberg vom Kopenhagener Geist der Quantentheorie, welcher sich in jeder die-

⁴ vgl. Bohr, 1925, S.48

⁵ In Bohrs späteren Versionen im Rahmen der EPR-Debatte kann man die Quantenmechanik in gewisser Weise sogar als lokal bezeichnen, allerdings gehen die Ansichten hier stark auseinander.

⁶ Eine umfangreiche Behandlung findet man beispielsweise in Carsten Held: Die Bohr-Einstein-Debatte: Quantenmechanik und physikalische Wirklichkeit, 1998

ser Interpretationen wiederfindet und besonders in Bohrs Sichtweisen hervortritt.⁷ Ein kurzer Überblick über Bohrs Ansätze (und deren Änderungen) ist daher unerlässlich und wird im folgenden Kapitel gegeben. In allen Deutungen Bohrs spielt das **Komplementaritätsprinzip** eine entscheidende Rolle. Dieses Prinzip beschränkt sich in seiner allgemeinen Formulierung jedoch nicht nur auf die Physik, sondern findet sich in anderen wissenschaftlichen Gebieten wie etwa der Psychologie oder der Ethnologie⁸ wieder. Kurz und etwas ungenau formuliert, beschreibt das Prinzip die Gegensätzlichkeit zweier gleichzeitig auftretender Aspekte eines Phänomens, die jedoch beide nötig sind, um das entsprechende Phänomen in seiner Gesamtheit zu beschreiben. Diese Arbeit wird sich insbesondere mit der **Komplementarität zweier Informationen**, nämlich von Welcher-Weg-Information und der Information über das Interferenzmuster, beschäftigen. Diese Komplementarität ist sehr eng mit dem Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus verbunden - dabei entspricht die Welcher-Weg-Information einer ‚Teilcheneigenschaft‘ und das Interferenzmuster einer ‚Welleneigenschaft‘. Allerdings erfreut sich der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus weit größerer Beliebtheit und hat auch Einzug in Populärkultur und den Lehrplan an Schulen gefunden. Die Interpretation des Welle-Teilchen-Dualismus und seine Bedeutung wird jedoch oft sehr ungenau und unpräzise formuliert, während die Komplementarität von Welcher-Weg-Information und dem Interferenzmuster kaum verwendet wird.

Im folgenden Kapitel wird ein kurzer Überblick über Bohrs Zugang zur Quantenphysik und entsprechende Gegenstimmen seiner Kollegen gegeben - dabei wird stellenweise schon auf Bohrs endgültige Interpretation Bezug genommen. Im nächsten Kapitel wird das bohrsche Komplementaritätsprinzip definiert und seine Entwicklung, zwangsläufig gekoppelt mit der Entwicklung von Bohrs Interpretation der Quantenphysik, diskutiert. Die dabei aufgezeigten Gedankengänge und Konzepte werden im 4. Kapitel auf den Welle-Teilchen-Dualismus angewandt. Insbesondere wird dabei gezeigt, dass in Bohrs Versionen dem Begriff des **Welle-Teilchen-Dualismus keine relevante Bedeutung zukommt** und es nicht notwendig ist, eine Komplementarität dieser beiden Begriffe zu folgern. Stattdessen beschränkt man sich auf die komplementären Beobachtungen des

⁷ vgl. Heisenberg, 1930, S. iv

⁸ Ein Beispiel ist das asiatische Yin und Yang.

Weges und des Interferenzmusters. Diese Komplementarität wird in Kapitel 5 quantifiziert und interpretiert - im Speziellen geht es um die Ableitung einer Ungleichung. Sie zeigt, in welchem Ausmaß eine teilweise Welcher-Weg-Information mit der Information über das Interferenzmuster kompatibel ist. Diese wird anschließend verallgemeinert und auf drei Beispiele angewandt, um die Gültigkeit der Komplementarität zu verdeutlichen. Danach wird versucht, Information durch zusätzliche Messungen zu erzwingen, womit die Komplementarität beider Informationen dennoch nicht umgangen werden kann. Abschließend folgen didaktische Bemerkungen, welche Konsequenzen und Möglichkeiten es für den Einsatz dieser Interpretation im Rahmen von Schule und Universität gibt.

2 Bohrs Position zur Quantenphysik und Quantenmechanik

Stark vereinfacht stellte die Quantenphysik die Physiker der damaligen Zeit (aber auch heute noch) vor zwei Probleme. Zum einen musste eine **mathematische Beschreibung** von Quantenphänomenen gefunden werden. Dieses Problem wurde von Heisenberg und Schrödinger durch die Beschreibung der Quantenmechanik in der Matrizenbeziehungsweise Wellenform gelöst. Zum anderen war eine zufriedenstellende **Interpretation der Quantenphänomene und der Quantenmechanik** notwendig. Niels Bohr war sein Leben lang damit beschäftigt, eine für ihn zufriedenstellende Interpretation der Quantenmechanik zu finden. Dabei ist das Komplementaritätsprinzip sicher eines von Bohrs bedeutendsten konzeptuellen Beiträgen zur Physik als auch zur Philosophie. Es muss aber berücksichtigt werden, dass Bohr seine Ansichten und Interpretationen oft modifiziert und sehr vorsichtig und langwierig formuliert hat. Dies führte auch häufig zu Kritik seitens seiner Physikkollegen: Bohrs Schriften seien vage, unpräzise und ließen zu viel Spielraum. Für Bohrs Schüler Carl Weizsäcker war Bohrs Interpretation unvollständig und bräuchte ihrer selbst eine Interpretation.⁹ Insbesondere Einstein, der die Quantenmechanik Zeit seines Lebens nicht akzeptieren wollte, führte lebenslang Debatten mit Niels Bohr über die Interpretation der Grundlagen der Quantenmechanik und Quantenphysik. Auch Bohrs Komplementaritätsprinzip wurde von Einstein wegen seiner Unklarheit kritisiert:

„Despite much effort [he has] expended on it, he was unable to achieve [a] sharp formulation of [his principle of] complementarity.“¹⁰

Die manchmal getätigte Aussage, Einstein hätte die Quantenmechanik nicht verstanden, ist aber äußerst kritisch zu sehen. Einsteins Problem mit der Quantenmechanik lag vielmehr in den philosophischen Konsequenzen, welche diese mit sich bringt und die seiner Ansicht nach nicht zielführend wären. So gab Einstein zu, dass die Quantenmechanik und insbesondere die Interpretationen durch Bohr zwar logisch möglich seien und

⁹ vgl. Weizsäcker, 1971, S.25

¹⁰ Einstein, 1949, p. 674

sich nicht widersprechen würden, jedoch seinem „wissenschaftlichen Instinkt“ zuwider seien.¹¹ Von anderer Seite wird argumentiert, dass Bohrs Schriften gerade wegen ihrer vorsichtigen Formulierung präzise seien – wenn auch unkonventionell. Bohr selbst war die Komplexität und Verworrenheit seiner Interpretationen stets ein Dorn im Auge. Er war sogar davon überzeugt, dass eine unmissverständliche und klare Darstellung komplexer Sachverhalte auch im Rahmen der Quantentheorie möglich sei. In „Discussions with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics“ (1949) beklagte er vor allem **die Ineffizienz der Sprache als Ausdruck seiner Ideen**. Dementsprechend muss jede spezielle Formulierung vorsichtig interpretiert und dabei stets die genauen Bedeutungen von Bohrs zugrundeliegenden Konzepten berücksichtigt werden – eine größtenteils mühsame und langwierige Aufgabe. So hielt Bohr fest:

„We must be clear that when it comes to atoms, language can be used only as in poetry. The poet, too, is not nearly so concerned with describing facts as with creating images and establishing mental connections.“¹²

Deshalb erfordert die Thematik eine Interpretation auf philosophischer Ebene, die über eine rein physikalisch-mathematische Interpretation weit hinausreichen kann. Gerade der mathematische Aspekt ist in Bohrs Arbeiten äußerst schwach ausgeprägt, was Kritiker oft als Vernachlässigung und Unzulänglichkeit anprangern. Allerdings ist zu bezweifeln, dass Bohr der Mathematik nicht genug Aufmerksamkeit schenkte. Er merkte sogar an, dass **unsere Sprache und unsere Fähigkeit zur Visualisation in Bezug auf die Atomprozesse und Quantenobjekte im Allgemeinen an ihre Grenzen stoße**, die nur mithilfe der Mathematik (stellenweise) überwunden werden können.¹³ Damit war er auf einer Linie mit Heisenberg, der von der Unzulänglichkeit der Sprache nicht überrascht war. Schließlich sei diese ja entstanden, um Prozesse des alltäglichen Lebens zu beschreiben, und diese bestünden immer aus einer **immensen Vielzahl an Atomen**. Für Heisenberg bietet sich die Mathematik ebenfalls zur Überwindung dieser Grenze an, um nicht aufgrund unpassender Formulierungen in eine Krise zu geraten.¹⁴

¹¹ vgl. Einstein, 1936, S. 375

¹² Bohr, zitiert in Steve Giles, 1993, S.28

¹³ vgl. Bohr, 1925, S.51

¹⁴ vgl. Heisenberg, 1930, S.11

Bohrs Arbeiten und sein Komplementaritätsprinzip kann man als Versuch verstehen, dem Formalismus der Quantenphysik, also der Quantenmechanik, eine sprachliche Interpretation und Grundlage zu bieten - auch wenn sich diese oft gegen unsere Intuition und ‚Alltagslogik‘ stellt.¹⁵

Oftmals werden Bohrs Interpretationen dem Positivismus (wie etwa dem von Ernst Mach) zugeordnet, da Bohr vor allem das **Beobachtbare - also die Messung** - in das Zentrum seiner Thesen und seines Komplementaritätsprinzips stellte. Bohrs Ansichten trennen sich jedoch von den meisten Formen des Empirismus und Positivismus, da vor allem in seiner finalen Interpretation Quantenobjekte auftreten, deren Beschreibung **prinzipiell nicht möglich ist** und sich so der Beobachtung entziehen. Auch wenn die Art und Weise, in der diese Objekte existieren, von der Theorie nicht beschrieben wird - beziehungsweise nicht beschrieben werden kann -, war die Bedeutung dieser Quantenobjekte für Bohr äußerst groß. Allerdings spielte Bohr bis zum Jahr 1937 mit dem Gedanken, den Quantenobjekten gewisse Eigenschaften zuzuordnen, sei es auch nur zum Zeitpunkt der Messung. Die zugeordneten Eigenschaften müssen aber der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation genügen, weshalb maximal die Hälfte der Größen, die das Verhalten eines klassisch-physikalischen Systems beschreiben, für diese Zuordnung zur Verfügung stehen - zum Beispiel ein eindeutiger Ort oder ein eindeutiger Impuls, nie aber beide gemeinsam. Dieser Zuordnung stand Bohr jedoch schon von Beginn an skeptisch gegenüber, da jegliche beobachtete physikalische Größe nur in Messinstrumenten beobachtet werden kann.¹⁶ In seiner letztlichen Ontologie der Quantenphysik wird dementsprechend **jegliche Zuordnung von Observablen auf Quantenobjekte ausgeschlossen**. Die Quantenobjekte an sich gelten also als völlig unbeschreibbar - **sowohl vor, während und nach der Messung**.¹⁷ Wichtig ist aber, dass Bohrs Ansichten die Existenz von Quantenobjekten, auch wenn man nichts über diese aussagen kann, erlaubt und seine Interpretation nicht nur auf das Beobachtbare reduziert.

¹⁵ vgl. Plotinsky, 2012, S. vi

¹⁶ vgl. Bohr, 1938, S.104;
Bohr 1949, S.64;
sowie Bohr, 1954, S. 73

¹⁷ vgl. Bohr, 1938 S.9

Allerdings manifestieren sich Quantenobjekte nur **durch ihre Interaktion mit der ,klassischen Welt‘**, wo erst Fragen wie beispielsweise „Wo befindet sich ein Objekt?“ sinnvoll behandelt werden können.¹⁸ Schon am Beginn von Bohrs Überlegungen, noch vor der Entwicklung der Quantenmechanik, war der Gedanke der Unbeschreibbarkeit von Objekten auf der Quantenebene ersichtlich. Auf die Frage von Harald Høffding „Where can the photon be said to be?“ antwortete Bohr schlichtweg mit „To be, to be, what does it mean to be?“.¹⁹ Es stellt sich die zwangsläufige Frage, was denn nun beschreibbar ist und was eine Interaktion mit der klassischen Welt sein soll. Folgt man Bohrs finaler Interpretation, so ist diese Frage nicht beantwortbar. Für ihn hatte die gesamte Quantenmechanik **symbolischen Charakter**. Das Auftreten von Größen wie dem planckschen Wirkungsquantum h wurde so gedeutet, dass ab diesen Punkt die klassische Beschreibung nicht mehr ausreicht.²⁰ Insofern war für Bohr die Quantenmechanik kein Problem - er betonte sogar von Beginn an ihren rationalen Charakter.²¹ Die Irrationalität, von der Bohr in seinen Arbeiten spricht, ist also sicherlich nicht auf die Quantenmechanik selbst zu beziehen. Vielmehr ist sie eine rationale Theorie von etwas Irrationalem - das heißt, von etwas, dass sich unserem rationalen Denken oder Denken im Allgemeinen entzieht, sodass eine klassische Beschreibung nicht korrekt sein kann. Viele Kritiker hielten Bohr dieses Akzeptieren der Irrationalität innerhalb einer Theorie entgegen - allerdings missversteht diese Kritik Bohrs Ansätze, da sie den Unterschied zwischen der Rationalität einer Theorie und der Irrationalität von dem, was diese Theorie behandelt, übergeht. Insofern sieht Bohr sein Komplementaritätsprinzip und die Quantenmechanik als ein rationales Konzept, welches hilft die Irrationalität und somit die Unbeschreibbarkeit der Quantenobjekte in gewisser Weise handzuhaben. Um auch in dieser Arbeit einen rationalen Umgang mit der irrationalen Quantenphysik zu ermöglichen, werden die hier angeschnittenen Begriffe und Interpretationen im Folgenden chronologisch näher erläutert.

¹⁸ vgl. Plotnitsky, 2012, S.50

¹⁹ vgl. Wheeler, 1998, S.131

²⁰ vgl. Bohr, 1929, S.7, S.19f.

²¹ vgl. Bohr, 1925, S.48, sowie Bohr 1949, S.62

3 Formulierungen des bohrschen Komplementaritätsprinzips

Der Begriff Komplementarität beinhaltet drei miteinander verknüpfte, aber dennoch zu unterscheidende Aspekte in Bohrs Werken²²:

1. ein allgemein philosophisches Konzept
2. eine Reihe von physikalischen Konzepten, die sich speziell auf die Quantenmechanik beziehen, und welche Instanziierungen des allgemeinen physikalischen Konzeptes sind, aber auch unabhängig davon eine Signifikanz als physikalische Konzepte haben
3. eine Interpretation von Quantenphänomenen und der Quantenmechanik, die auf dem allgemeinen Konzept der Komplementarität und deren Instanziierungen (also auf 1. und 2.) beruht

Das Komplementaritätsprinzip in seiner allgemeinen Form ist also auf einer Metaebene angesiedelt und kann in verschiedenen Bereichen eingesetzt werden. Wird das Prinzip auf ein konkretes Gebiet oder konkrete Situation umgelegt, spricht man von einer **Instanziierung des (allgemeinen) Komplementaritätsprinzips**. Insofern kann eine Komplementarität im Rahmen der Quantenphysik beschrieben und im Sinne der Quantenmechanik quantifiziert werden - das Komplementaritätsprinzip an sich wird dadurch aber niemals bewiesen. In einer seiner Veröffentlichungen, den ‚Discussions with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics‘, kam er einer halbwegs genauen Festlegung jedoch nahe:

„The evidence obtained under different experimental conditions cannot be comprehended within a single picture, but must be regarded as complementary in the sense that only the totality of the phenomena exhaust the possible information about the objects.“²³

²² vgl. Plotinsky, 2012, S. v

²³ vgl. Bohr, 1949, S.40

Betrachtet man obiges Zitat von Bohr genauer und lässt weitere seiner Ausführungen mit einfließen, kann **Komplementarität nach Bohr (als allgemeines Konzept) definiert werden durch**²⁴

- a) eine **gegenseitige** Ausschließung zweier (oder mehrerer) Phänomene, Ideen und Auffassungen; jedoch
- b) die Möglichkeit jede einzelne **separat** zu jedem Zeitpunkt anzuwenden, und
- c) die Notwendigkeit **beide** (beziehungsweise alle) zu nutzen, um eine **allumfassende Darstellung** der zu berücksichtigenden Phänomene zu erhalten.

Vor allem die **Nicht-Kommensurabilität** - also die nicht gleichzeitige Bestimmbarkeit - wird oftmals stark hervorgehoben.²⁵ Als Instanziierung in der Physik erklärt beispielsweise Anton Zeilinger, dass „zwei physikalische Größen dann komplementär zueinander [sind], wenn es nicht einmal im Prinzip möglich ist, einen Apparat zu bauen, mit dem beide Größen gleichzeitig bestimmt werden können [...] [Sie] sind dann komplementär zueinander, wenn die Informationen über beide nicht gleichzeitig vorhanden sein können.“²⁶ Diese Formulierung konkretisiert vor allem Punkt (a). Zudem führt Anton Zeilinger kurz darauf weiter aus: „Diese beiden Phänomene sind [...] zwei verschiedenen Seiten ein und derselben Medaille.“²⁶ Dies kann problemlos (wenn auch mit etwas interpretativem Spielraum) als Punkt (b) und (c) aufgefasst werden.

Im Großen und Ganzen gibt es **drei Stufen in der Entwicklung** der Instanziierungen des Komplementaritätsprinzips²⁷:

1. Die Como-Version (aus Bohrs Vorträgen in Como), welche auf der Komplementarität der Raum-Zeit-Beschreibung und der Forderung nach Kausalität beruht;
2. die Version vor dem Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon (EPR), basierend auf der Komplementarität von Beschreibungen in Raum und Zeit gegenüber Erhaltungssätzen; sowie

²⁴ vgl. Plotnitsky, 2012, S. 6f.

²⁵ Die beiden anderen Punkte werden meistens implizit angenommen.

²⁶ Zeilinger, 2004, S.81

²⁷ vgl. Plotnitsky, 2012, S. 28

3. die Version nach dem Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon, welche vorhergehendes Konzept um die Begriffe Phänomen (phenomenon) und Atomizität (atomicity) erweitert und das Prinzip vor allem auf komplementäre Beobachtungen und Messanordnungen anwendet.

3.1 Como-Version

Vorweg muss klargestellt werden, dass Bohr die Komplementarität der Raum-Zeit-Beschreibung und der Forderung nach Kausalität nach nicht einmal einem Jahr aufgrund der Diskussionen mit Einstein verwarf, und einen Schwenk auf die Komplementarität von beobachtbaren Quantenphänomenen vornahm.²⁸ Weiters war der Begriff der Komplementarität noch neu und nicht vollständig ausgeprägt. Zudem unterscheidet sich die Como-Version teilweise deutlich von Bohrs späteren Auffassungen, wird aber oft (fälschlicherweise) als Bohrs Interpretation referenziert.

In dieser Version sieht Bohr die Komplementarität zwischen der durch Beobachtung (Messungen) gewonnenen **Beschreibung durch Raum-Zeit-Koordinaten** und der **Kausalität** von unabhängigen, nicht gestörten („undisturbed“) Quantenvorgängen. Die Unvereinbarkeit dieser beiden Konzepte tritt merklich auf, wenn sich die Wirkung im Bereich der Größenordnung von dem planckschen Wirkungsquantum h befindet.²⁹ Dies ist vor allem für Experimente im Mikrokosmos der Fall. Der Begriff der Kausalität bräuchte eigentlich ebenfalls eine genauere Behandlung und wird oft etwas unterschiedlich definiert. In dieser Arbeit genügt es, die Kausalität in Bezug auf das Verhalten eines Systems zu sehen, dessen Entwicklung definiert ist durch die Tatsache, dass der Zustand des Systems eindeutig und in allen Punkten durch den Zustand in einem ausgewählten Punkt bestimmt ist.³⁰ Die als kausal gedachten Quantenprozesse liefern

²⁸ vgl. Plotinsky, 2012, S.43

²⁹ Bohr, 1929, S.19

³⁰ Hierzu sind zwei Bemerkungen zu machen:

1. Üblicherweise wird zusätzlich unter Kausalität verstanden, dass kausale Einflüsse (im Sinne von Ursache-Wirkung) nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit stattfinden können. Dies führt auf den Begriff der Lokalität, welchem in der EPR-Debatte große Bedeutung zukommt. In dieser Arbeit genügt jedoch der oben angeführte Aspekt.
(auf nächster Seite fortgesetzt)

lediglich aufgrund der **Störung** (**‚disturbance‘**) durch die Messung keine deterministischen Ergebnisse. Zwar ist der Begriff Störung naheliegend, da eine Interaktion von Messapparat und Quantenobjekt bei einer Messung nicht verhindert und somit kein ungestörtes Verhalten dieser Objekte beobachtet werden kann. Jedoch lässt das Konzept der Störung die Möglichkeit einer Beschreibung der ungestörten Quantenobjekte zwangsläufig offen. Denn wenn tatsächlich jede Messung - ja jede Beobachtung - als Störung verstanden werden muss, so kann **keine Information über das ungestörte Quantenobjekt** gewonnen werden. Nun wird aber die Beschreibung des (ungestörten) Verhaltens durch die Schrödingergleichung und die Wellenfunktionen beziehungsweise der dazu äquivalenten Matrizenmechanik übernommen. Allerdings betont Bohr bereits in dieser Version den **symbolischen Charakter** dieser Beschreibung (vgl. Kapitel 4), die notwendigerweise auf **(unzureichende) klassische Begriffe** aufbaut. Weiters erlauben in dieser Version die Messergebnisse eine Zuordnung von physikalischen Eigenschaften zu den (gestörten) Quantenobjekten. In seinen späteren Werken äußert sich Bohr wie folgt zu solchen Ansätzen:

„I warned especially against phrases, often found in the physical literature, such as ‚disturbing of phenomena by observation‘ or ‚creating physical attributes to atomic objects by measurements.‘ Such phrases, which may serve to remind of the apparent paradoxes in quantum theory, are at the same time apt to cause confusion, since words like ‚phenomena‘ and ‚observation‘, just as ‚attributes‘ and ‚measurement‘, are used in a way hardly compatible with common language and practical definition.“³¹

Neben dem problematischen Begriff der Störung liegt die Unklarheit des Komplen-

-
2. Des Weiteren wird diese Formulierung der Kausalität manchmal auch mit dem Begriff des Determinismus gleichgesetzt, allerdings sind die Definitionen hier nicht eindeutig, spielen in dieser Arbeit aber keine zentrale Rolle. Nach ‚Plotinsky - Niels Bohr and Complementary‘ bezeichne ich Kausalität als einen ontologischen Begriff (als Teil der zu interpretierenden und beschreibenden Realität) und Determinismus als einen epistemologischen Begriff (also als Teil unseres Wissens über die Realität). Insbesondere impliziert dies, dass nicht-kausales Verhalten zwangsweise nicht deterministisch beschrieben wird, aber eine nicht-deterministische Beschreibung nicht zwangsweise ein nicht-kausales Verhalten zugrunde liegen hat.

³¹ Bohr, 1949, S. 63f.

taritätsprinzips dieser Version vor allem in der Kausalität und zeigt sich wie folgt: Wenn sich das ungestörte Verhalten von Quantenobjekten (sei es nun kausal oder nicht) und die Beobachtung (beispielsweise durch eine Messung) gegenseitig ausschließen, folgt daraus unweigerlich, dass das ungestörte Verhalten prinzipiell unbeobachtbar ist. In welchem Sinne man dann von Kausalität sprechen könnte, ist äußerst fragwürdig. Eine Kausalität wie in klassischen Systemen wäre nicht sehr naheliegend, da selbst in den Anfängen der Quantenphysik (Plancksches Strahlungsgesetz, Bohrsches Atommodell, ...) die klassischen Modelle versagten. Eine Möglichkeit wäre, von mathematischer Kausalität zu sprechen, in der die Gleichungen der Quantenmechanik das relevante mathematische Objekt - beispielsweise eine Wellenfunktion im Falle der Schrödingergleichung - zu jeder Zeit bestimmen, wenn es zu einer gewissen Zeit bekannt ist. Dann wäre aber eher von einem gegenseitigen Ausschluss von Beobachtung und Definition zu sprechen, da der Formalismus sich nur auf die Wahrscheinlichkeiten möglicher Messergebnisse bezieht, nicht auf das, was schlussendlich tatsächlich beobachtet wird. Wie sich das aber in eine Kausalität im Sinne der Physik beziehungsweise der von uns betrachteten Realität übertragen lässt, ist vollkommen unklar.³²

Allerdings kann auch viel Positives aus dem Como-Vortrag gewonnen werden:

- Die Hervorhebung der Irrationalität der Quantenphysik, der wir **notwendigerweise mit unzureichenden klassischen Begriffen** begegnen müssen und aus denen wir die Quantenmechanik formen
- Die Betonung der **symbolischen Gestalt der Quantenmechanik** (die im Laufe der Zeit immer radikaler wurde), insbesondere die Wahrscheinlichkeitsdeutung der Wellenfunktion (durch Max Born)
- Die Diskontinuität und **Einzelheit (,individuality‘)**³³ **der Quantenprozesse**, die später in seinen zentralen Begriffen von Quantenphänomen und Atomizität ihre Konkretisierung fanden

³² vgl. Plotinsky, 2012, S. 54

³³ Der Begriff ,individuality‘ ist in diesem Kontext schwer zu übersetzen, der Autor wählt hier den eher ausgefallenen Begriff Einzelheit. In der Post-EPR-Version wird näher darauf eingegangen.

- Die Hervorhebung der **nicht reduzierbaren Rolle der Messinstrumente**, die in späteren Versionen noch mehr Bedeutung gewinnen.

3.2 Pre-EPR-Version

Bereits in dem Artikel ‚The Quantum of Action and the Description of Nature‘³⁴ aus dem Jahre 1929 verschwand die Komplementarität von Raum-Zeit-Beschreibung und Kausalität vollständig.³⁵ Stattdessen fokussierte er sich auf eine Komplementarität zwischen einer **Raum-Zeit-Beschreibung und den Erhaltungssätzen von Energie und Impuls**. Somit rückte die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation immer mehr ins Zentrum. Grund dafür war die in Bohrs Augen symbolische Bedeutung des planckschen Wirkungsquantums, die eine reziproke (komplementäre)³⁶ Symmetrie zwischen der Raum-Zeit-Beschreibung und den Erhaltungssätzen (insbesondere Impuls und Energie) darstellt.³⁷ Dies wird sofort klar, wenn man die entsprechenden mathematischen Ausdrücke betrachtet:

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim h$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h$$

Vor allem aber kommen sich **gegenseitig ausschließende, experimentelle Anordnungen** beziehungsweise Messungen immer mehr in den Vordergrund. Auch die Quantenmechanik wird in einem noch stärkeren Kontext als symbolisch betrachtet: Sie dient nicht mehr als Beschreibung der Quantenobjekte, sondern stellt **lediglich einen Algorithmus zur meist wahrscheinlichkeitsbehafteten Voraussage von Messungen**

³⁴ Bohr, 1929; auch abzurufen unter http://www.informationphilosopher.com/solutions/scientists/bohr/quantum_of_action.html

³⁵ Der Vollständigkeit wegen muss betont werden, dass ein deterministisches und damit kausales Verhalten (im Sinne der obigen Definition!) auf Quantenebene in anderen Interpretationen gegeben ist. Etwa in der Viele-Welten-Theorie oder in Alternativen zur Quantenmechanik selbst, wie etwa der Bohmschen Theorie. In diesen wird die Störung der Messung/Beobachtung durch den Formalismus beschrieben, allerdings auf Kosten der Lokalität.

³⁶ In den Versionen nach dem Como-Vortrag änderte Bohr den Begriff der Komplementarität kurzzeitig auf Reziprozität.

³⁷ vgl. Bohr, 1929, S.94

dar.³⁸ Bohr vergleicht die Quantentheorie mit den Versuchen, in früheren Zeiten eine kausale Raum-Zeit-Beschreibung der Phänomene wie etwa in der kinetischen Gastheorie zu finden. Diese werden für unsere unmittelbaren Sinneswahrnehmungen nicht als Bewegung von materiellen Körpern aufgefasst. Die Frage, ob nun auch Quantenphänomene so beschrieben werden könnten, beantwortet Bohr wie folgt:

„This goal has not been attained, still, without a renunciation of the causal space-time mode of description that characterizes the classical physical theories [...] Nevertheless, the very recognition of the limited divisibility of physical processes, symbolized by the quantum of action, has justified the old doubt as to the range of our ordinary forms of perception when applied to atomic phenomena. Since, in the observation of these phenomena, we cannot neglect the interaction between the object and the instrument of observation, the question of the possibilities of observation again comes to the foreground. Thus, we meet here, in a new light, the problem of the objectivity of phenomena which has always attracted so much attention in philosophical discussion.“³⁹

Ein essentieller Punkt in Bohrs Epistemologie tritt hier hinzu: Die grundlegende Unterscheidung zwischen Quantenobjekte (‘objects’) und beobachtbaren Quantenphänomenen (‘phenomena’), definiert durch die Effekte der Interaktion zwischen Quantenobjekt und Messapparatur. Begriffe, die er in seiner letztlichen Interpretation noch klarer voneinander abgrenzen wird. In dieser Version ist aber insbesondere eine **Zuordnung von Eigenschaften zu Quantenobjekten zumindest zum Zeitpunkt der Messung noch möglich**. Während aber die klassische Physik und die Relativitätstheorie als Exaktifizierung unserer (Alltags)erfahrung und Sprache beziehungsweise unserer Formen der Wahrnehmung (angepasst an unsere Sinneserfahrungen) aufgefasst werden können, so können solche Formen unserer Wahrnehmung, wie auch immer man sie anpasst, nicht auf Quantenobjekte übertragen werden.⁴⁰ Deshalb folgert Bohr:

„It lies in the nature of physical observation, nevertheless, that our experience must

³⁸ vgl. Bohr, 1929, S.17f.

³⁹ Bohr 1929, S. 92f.

⁴⁰ vgl. Bohr, 1929, S.97f.

ultimately be expressed in terms of classical concepts, neglecting the quantum of action. It is, therefore, an inevitable consequence of the limited applicability of the classical concepts that the results attainable by any measurement of atomic quantities are subject to an inherent limitation.“⁴¹

Die Betonung der Notwendigkeit klassischer Konzepte zur Beschreibung von Quantenobjekten trotz ihrer begrenzten Gültigkeit war bereits Bestandteil der Como-Version. Hier bezieht sie sich jedoch auf die Beobachtung des Quantenphänomens, also im Prinzip auf die Messung beziehungsweise Beobachtung. Das ‚ungestörte‘ Verhalten der Quantenobjekte, von dem in der Como-Version die Rede war, wird nicht mehr damit in Verbindung gebracht. Das Komplementaritätsprinzip instanziiert sich nun in diesen Quantenphänomenen und damit in den Messungen und Beobachtungen, welche zwangsläufig mit den uns zur Verfügung stehenden klassischen Konzepten beschrieben werden müssen. Dies ist ein entscheidender Punkt, auch in Bezug auf die in Kapitel 4 folgenden Bemerkungen zum Welle-Teilchen-Dualismus. Dies hält Bohr wie folgt fest:

„In considering the well-known paradoxes which are encountered in the application of the quantum theory to atomic structure, it is essential to remember, in this connection, that the properties of atoms are always obtained by observing their reactions [...], and that the above-mentioned limitation on the possibilities of measurement is directly related to the apparent contradictions which have been revealed in the discussion of the nature of light and of material particles.“⁴²

Hierbei sollte Folgendes beachtet werden: Die Formulierung „the properties of atoms are always obtained ...“ unterscheidet sich deutlich von Bohrs späterer Sichtweise, in der er den Begriff des Quantenphänomens von Quantenobjekten deutlich abgrenzt. Sie weist darauf hin, dass eine Zuordnung von Eigenschaften zu Quantenobjekten in dieser Version möglich ist. Spricht Bohr zudem von den „contradictions which have been revealed in the discussion of the nature of light and of material particles“, bezieht er sich in dieser Version verstärkt auf das Doppelspaltexperiment. Obwohl er in diesem Kontext zwar Begriffe wie Welle und Teilchen verwendet, so sind diese nur als sprachliche

⁴¹ Bohr, 1929, S.94f.

⁴² Bohr, 1929, S.95

Hilfsmittel aufzufassen. Das Komplementaritätsprinzip legt er **keineswegs auf das Wellen- und Teilchenmodell um, sondern auf die Unbestimmtheitsrelationen** von Ort-Impuls beziehungsweise Energie-Zeit⁴³ - denn gerade das stellt die Komplementarität von Raum-Zeit-Beschreibung und den physikalischen Erhaltungssätzen dar. Es muss hier abschließend betont werden, dass die Unbestimmtheitsrelation verständlicherweise nicht äquivalent zum Komplementaritätsprinzip ist, sondern lediglich eine Instanziierung dieses philosophischen Konzepts. Obwohl Bohr sein Konzept vor allem auf die Unbestimmtheitsrelationen bezog, wird diese Arbeit zeigen, dass das Komplementaritätsprinzip auch in diesem Kontext vermutlich eine allgemeinere Rolle spielt.

3.3 Post-EPR-Version

Bohrs Ansichten zur Quantenphysik und sein Komplementaritätsprinzip wurden stark durch seine Auseinandersetzungen mit Einstein und der EPR-Debatte beeinflusst. Hinzu kamen einige Diskussionen über die Quantenelektrodynamik und Quantenfeldtheorien, sowie andere kleinere Einflüsse seines Umfelds. All diese Punkte können aufgrund ihres Umfangs im Rahmen dieser Arbeit nicht ausgearbeitet werden. Stattdessen soll hier nur Bohrs letztere Interpretation und Version des Komplementaritätsprinzips skizziert werden. Er **grenzte Quantenobjekte komplett von unserer Vorstellung aus** und ging damit einen radikalen Weg. Denn solange Dinge - selbst wenn diese für uns nicht zugänglich und unerkennbar sind - zumindest denkbar sind, könnte unsere Vorstellung und unser Denken mit der tatsächlichen Realität, die wir versuchen zu beschreiben, übereinstimmen (auch wenn wir nie sicher sein können, dass diese es tut).⁴⁴ In diesem Fall ist dies nicht mehr möglich. Für Bohr gelten Quantenobjekte als nicht beschreibbar, ihnen können keine Eigenschaften zugeordnet werden - sie können nicht einmal wahrgenommen werden (sei es durch Beobachtung, Messung oder Sonstiges). Stattdessen führte er das Konzept des **(Quanten)phänomens** („phenomenon“) ein, das durch die **Effekte bei der Interaktion der Quantenobjekte mit den Messgeräten** auftritt; in Abwesenheit von jeglicher spezifizierbaren Ontologie auf der Quantenebene. Alle

⁴³ vgl. Plotinsky, 2012, S.71ff.

⁴⁴ Im Prinzip spiegelt das Einsteins Sicht der Dinge wider.

betrachteten physikalischen Eigenschaften sind nun **Teil der Messanordnung** und werden als solche nun **mithilfe der klassischen Physik** beschrieben - allerdings ist die Zuordnung durch Komplementaritäten eingeschränkt und die Vorhersage der Messwerte erfordert eine quantenmechanische Beschreibung. Die Quantenmechanik und ihre Variablen sind rein symbolisch zu verstehen und liefern Wahrscheinlichkeiten dafür, was in den Messinstrumenten beobachtbar (beziehungsweise gemessen) wird, wenn sie mit Quantenobjekten interagieren - sie **liefern keine Repräsentation der Eigenschaften der Quantenobjekte**.⁴⁵ Allerdings bedeutet das nicht, dass klassische Objekte (wie etwa die Messapparaturen) tatsächlich klassische Objekte in ihrer letztlichen Beschaffenheit sind, da sie durchaus auf tiefster Ebene Quantenobjekte sein können. Bohr vermutet, dass Messinstrumente (bildlich gesprochen) eine Quantenschicht (‚quantum strata‘) besitzen, die ihre Interaktion mit den Quantenobjekten ermöglicht. Die durch Messinstrumente beobachtbaren Quantenphänomene sind in diesem Kontext definiert durch praktisch irreversible Verstärkungseffekte (‚practically irreversible amplification effects‘) in den Messinstrumenten - sei es beispielsweise ein Detektor oder eine Fotoschirm.⁴⁶ In diesem Sinne ist ein Messapparat nur teilweise klassisch zu beschreiben. Allerdings ist eine klassische Behandlung notwendig, denn wir haben keine anderen Konzepte und sprachliche Mittel als eben jene Konzepte und jene Sprache, die das reflektieren, was wir uns denken (können). Dies setzt zwangsläufig voraus, dass klassische Konzepte in den Beschreibungen der Quantenphänomene, beobachtet in den Messinstrumenten durch Interaktion mit den unbeschreibbaren und nicht wahrnehmbaren Quantenobjekten, benutzt werden. Bohrs Position war, dass die Natur uns möglicherweise nicht erlaubt, eine bessere Vorgehensweise im Umgang mit Quantenobjekten und Quantenphänomenen zu finden.⁴⁷ In dieser Sichtweise ist demnach zwangsläufig eine Grenze beziehungsweise ein Schnitt (‚cut‘) zu ziehen, ab dem Objekte (näherungsweise) klassisch beschrieben werden können. Der Schnitt sei also dort zu machen, wo die Beschreibung durch Quantenmechanik quasi äquivalent zur klassischen Beschreibung

⁴⁵ vgl. Bohr, 1949, S. 64

⁴⁶ vgl. Bohr, 1949, S.51

⁴⁷ In diesem Falle wäre die Quantenmechanik eine vollständige Theorie der Quantenphänomene, und zwar eben so vollständig, wie die Natur es erlaubt zu sein. Einstein hingegen strebte sich stark gegen diese Sichtweise.

sei, so Bohr.⁴⁸ Die Betonung liegt hier auf ‚quasi‘, denn Bohr meint hier mit Äquivalenz nicht, dass die Prozesse tatsächlich klassisch ablaufen.⁴⁹

In jedem Fall aber spielt die genaue Messanordnung, bestimmt durch die Art der Messung beziehungsweise Vorhersagung, die wir treffen wollen, eine große Rolle in Bohrs Interpretation. **Komplementarität (zumindest in ihrer Instanziierung) beinhaltet daher immer komplementäre Messanordnungen**, wie sich auch in folgendem Zitat zeigt:

„A most conspicuous characteristic of atomic physics is the novel relationship between phenomena observed under experimental conditions demanding different elementary concepts for their description. Indeed, however contrasting such experiences might appear when attempting to picture a course of atomic processes on classical lines, they have to be considered as complementary in the sense that they represent equally essential knowledge about atomic systems and together exhaust this knowledge.“⁵⁰

Die Komplementarität liegt zwar genauso wie in der Pre-EPR-Version in den beobachteten Quantenphänomenen (also in den beobachtbaren Effekten der Interaktion zwischen Quantenobjekt und Messapparat). Allerdings erlauben die Quantenphänomene in keinsten Weise einen Rückschluss auf die Quantenobjekte - auch nicht zum Zeitpunkt der Messung. Entscheidend ist also nur mehr **die Messanordnung und die daraus gewonnene Beobachtung**. Trotzdem muss man festhalten, dass Bohr die Unbestimmtheitsrelation noch immer als zentrale Instanziierung seines Komplementaritätsprinzips sieht:

„In particular, the impossibility of a separate control of the interaction between the atomic objects and the instruments indispensable for the definition of the experimental conditions prevents the unrestricted combination of space-time coordination and dynamical conservation laws on which the deterministic description in classical physics rests. In fact, any unambiguous use of concepts of space and time refers to an expe-

⁴⁸ vgl. Bohr, 1935, S.701

⁴⁹ Diese Ansicht war und ist Angriffspunkt für zahlreiche Kritiker, denn wo und vor allem wie sich dieser Übergang von der Quantenebene zur klassischen vollziehen soll, ist unklar. Dieses Problem wird vor allem von Dekohärenztheorien adressiert.

⁵⁰ Bohr, 1954, S.73f.

rimental arrangement involving a transfer of momentum and energy, uncontrollable in principle[.]“⁵¹

Wichtigster Punkt bleibt aber die Komplementarität bezüglich der Messanordnung. Zu guter Letzt tritt noch der Begriff der Atomizität (‘atomicity’) hinzu. Dieser Begriff ist allerdings nur teilweise im üblichen Sinne zu verstehen. Zwar ist damit noch immer eine Unteilbarkeit gemeint, wie Demokrit bei den Atomen postulierte. Allerdings bezieht Bohr diese Unteilbarkeit nicht auf physikalische Objekte, wie sie in der Natur „gefunden“ werden.⁵² Stattdessen bezieht sich die Atomizität auf die **Unteilbarkeit und Diskontinuität von Quantenphänomenen**, die in dieser Arbeit im Folgenden als **Einzelheit** (‘individuality’) bezeichnet wird. Beispielsweise kann beim Doppelspaltexperiment jeder Fleck auf dem Schirm - hinterlassen durch eine Interaktion mit einem Quantenobjekt - als individuelles Quantenphänomen gedeutet werden.

⁵¹ Bohr 1954, S.72f.

⁵² Dies würde in dieser Interpretation auch keinen Sinn ergeben, da eine Beschreibung von Quantenobjekten verboten ist.

4 Komplementarität und der Welle-Teilchen-Dualismus

Dieser Abschnitt behandelt den Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus in Bezug auf die Kopenhagener Deutung und auf das Komplementaritätsprinzip. Obwohl Bohr sich ausführlich mit komplementären Beziehungen und deren Beschreibung beschäftigte, spielte der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus **keine große Rolle** in seinen Arbeiten - seine Abhandlungen über das Doppelspaltexperiment beschäftigten sich mit der Komplementarität von Ort und Impuls und nicht mit jener von Welle und Teilchen.⁵³ Auch mit ähnlichen, aber abgeschwächten Formulierungen ging er schon in frühen Ausarbeitungen äußerst vorsichtig um. Trotzdem hat sich der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus stark in die Physik verankert, geprägt durch die **scheinbar** notwendige Anwendung sich ausschließender Modelle von Welle und Teilchen in Versuchen. Es ist dabei essentiell, zwischen dem **Formalismus und dem im Experiment Beobachtbaren**, also dem tatsächlich Messbaren, zu unterscheiden, da diese im Rahmen der Quantenmechanik nicht mehr zusammenfallen. Es hat insbesondere keinen Sinn, einen Wellen-Teilchen-Dualismus im Formalismus der Quantenmechanik zu suchen, da es in diesem schlichtweg keine Unterscheidung von Wellen- und Teilchenmodell gibt. Oftmals wird behauptet, dass zur Behandlung des Photoeffekts das Teilchenmodell (des Lichts) verwendet wird, beziehungsweise für die Elektronenbeugung das Wellenmodell (des Elektrons). Diese Argumentation entsteht dadurch, dass mithilfe der ‚alten‘ Quantentheorie, also jener **vor** der genauen mathematischen Ausarbeitung durch Schrödinger und Heisenberg (im Jahre 1926), argumentiert wird. Durch die De-Broglie Beziehung $\lambda = h/p$ (postuliert im Jahr 1924) beziehungsweise die Energiequantelung von elektromagnetischen Wellen $E = hf$ (aus dem Jahre 1900) können den Teilchen (Materie)wellen zugeordnet werden und umgekehrt kann den Wellen eine Art Teilchencharakter attestiert werden. Dabei wird übersehen, dass ab der Entwicklung der Quantenmechanik als Formalismus der Quantenphysik all diese Beziehungen sofort aus dieser folgen. Sowohl der Photoeffekt als auch die Elektronenbeugung können mithilfe der Schrödingergleichung gelöst werden⁵⁴, **ohne zwischen irgendwelchen Modellen**

⁵³ vgl. Bohr, 1931, S.18

⁵⁴ Natürlich kann auch die Heisenbergsche Bewegungsgleichung - das Äquivalent zur Schrödingergleichung in der Matrizenmechanik - verwendet werden.

wechseln zu müssen. Die Aussage, man verwende in einem Fall das Teilchenmodell und im anderen das Wellenmodell zur Beschreibung, kann als veraltet betrachtet werden - man verwendet **genau eine Beschreibung, nämlich jene der Quantenmechanik.** Vielmehr muss die Frage lauten, ob dieser Formalismus zu komplementären Phänomenen in der von uns wahrgenommenen physikalischen Wirklichkeit führt. In anderen Worten: Es geht um die Interpretation der Quantenmechanik in Bezug auf unsere Beobachtungen.

Zuerst muss aber der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus definiert werden. In dieser Arbeit bezeichnet er die Sichtweisen, dass...

1. ...ein Quantenobjekt sowohl Welle als auch Teilchen ist.
2. ...ein Quantenobjekt Welleneigenschaften und Teilcheneigenschaften besitzt, und diese je nach Experiment zeigt.
3. ...ein Quantenobjekt sich wellenähnlich oder teilchenähnlich verhält (je nach Experiment).
4. ...die Quantenmechanik korrekte Vorhersagen über Quantenphänomene trifft, die Quantenobjekte aber nicht direkt beobachtbar sind und unsere Sprache zur Beschreibung der Erscheinungen im Mikrokosmos nicht ausreicht. Aus diesem Grund sind wir gezwungen auf klassische Begriffe wie Welle und Teilchen für die Beschreibung von Teilaspekten der Phänomene zurückzugreifen. Diese Begriffe, die sich scheinbar widersprechen, sich in Wahrheit jedoch ergänzen, müssen in der (übergeordneten) Theorie eine höhere Einheit bilden.⁵⁵

Bevor diese Begriffe mit Bohrs Deutungen und dem Komplementaritätsprinzips verglichen werden, erweisen sich einige kurze Vorbemerkungen als hilfreich: Die Formulierungen werden zum einen immer vorsichtiger und gehen zum anderen immer mehr vom Quantenobjekt weg und hin zur reinen Beobachtung (analog zu Bohrs verschiedenen Versionen). In den Punkten (1) und (2) wird, wie aus der klassischen Physik gewohnt, aus den experimentellen Ergebnissen auf den Charakter der ‚neuen‘ Quantenobjekte

⁵⁵ vgl. Sexl, 2007, S.45

geschlossen. Mit dieser Vorgehensweise ergibt sich ein offensichtlicher Widerspruch zu (1), da sich die Begriffe von Welle und Teilchen schon rein aufgrund der Aussagenlogik nicht auf ein gemeinsames Objekt beziehen können. Ein Objekt kann nicht kontinuierlich und diskret zugleich sein.⁵⁶ Es folgt auch ein Widerspruch für (2), da die nötigen Wellen- beziehungsweise Teilcheneigenschaften, welche man im Rahmen der Quantenmechanik verlangen müsste, nicht in einem Objekt vereinbar sind. Bereits ohne Bezug zu Bohrs Interpretationen können also **(1) und (2) verworfen werden**. Diese Formulierungen wurden hier nur erwähnt, weil sie oftmals salopp benutzt werden. Von Interesse ist also die Umlegung des Komplementaritätsprinzips auf die Formulierungen (3) und (4).

Die (stellenweise problematische) **Como-Version** ist die einzige, in der die Wellenfunktion als Beschreibung des (kausalen) ungestörten Verhaltens eines Quantenobjekts interpretiert wird und in welcher (durch Messungen gestörten) Quantenobjekten gewisse Eigenschaften zugeordnet werden können. Insofern kann man eine Komplementarität von Wellenmodell und Teilchenmodell formulieren, wenn auch in etwas eingeschränkter Form. Der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus wird in der Como-Version kurzzeitig angesprochen (allerdings nicht explizit):

„The two views of the nature of light are rather to be considered as different attempts at an interpretation of experimental evidence in which the limitation of the classical concepts is expressed in complementary ways [...] The individuality of the elementary electrical corpuscles is forced upon us by general evidence. Nevertheless, recent experience [...] requires the use of the wave theory. In fact, wave mechanics just as the matrix theory on this view represents a symbolic transcription of the problem of motion of classical mechanics adapted to the requirements of quantum theory. The problem of the nature of the constituents of matter presents us with an analogous situation.“⁵⁷

Diese Argumentation trifft mit etwas interpretativem Spielraum **Formulierung (3)**:

⁵⁶ Auch in der Bohmschen Theorie, in der sowohl das Konzept von Welle als auch das von Teilchen verwendet wird, sind sie nicht in einem Objekt vereint - vielmehr begleitet und leitet die Welle das Teilchen.

⁵⁷ Bohr, 1927, S. 27

Die Ursache der bloß ‚ähnlichen‘ Eigenschaften kann in der Unzulänglichkeit der klassischen Begriffe (von Wellenmodell und Teilchenmodell), die **zur Beschreibung der Quantenobjekte** notwendig sind, gesehen werden. Allerdings hält Bohr auch fest, dass Wellenfunktionen keinen direkten Bezug zu unserer Wahrnehmung haben, da diese in einem Koordinatenraum ‚leben‘, dessen Dimension gleich der Freiheitsgrade des Systems und somit im Allgemeinen größer als die Dimension des Raumes unserer Wahrnehmung ist.⁵⁸ Zudem ist besonders hervorzuheben, dass die Wellenfunktion nur eine symbolische Übertragung (‚symbolic transcripton‘) von der Quantenphysik zur klassischen Physik darstellt. Anton Zeilinger formulierte das so: „Die Annahme, dass sich diese Wahrscheinlichkeitswellen tatsächlich im Raum ausbreiten, ist also nicht notwendig – denn alles, wozu sie dienen, ist das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten. Es ist daher viel einfacher und klarer, die Wellenfunktion nicht als etwas Realistisches zu betrachten, das in Raum und Zeit existiert, sondern lediglich als mathematisches Hilfsmittel, mit Hilfe dessen man Wahrscheinlichkeiten berechnen kann. Zugespitzt formuliert, wenn wir über ein bestimmtes Experiment nachdenken, befindet sich Ψ [Anm.: Die Wellenfunktion] nicht da draußen in der Welt, sondern nur in unserem Kopf.“⁵⁹ Insofern ist der wellenähnliche Teil der Beschreibung nicht physikalischer, sondern mathematischer Natur. Dies ist die Bornsche Wahrscheinlichkeitsdeutung der Wellenfunktion, welche bereits im Como-Vortrag von Bohr eingebracht wird. All die Beziehungen, die für einen Wellencharakter sprechen, wie etwa die Materiewellen (und das sind nichts anderes als Lösungen der Schrödingergleichung), sind statistischer Natur und haben keinen Platz in unserer Realität. Insofern kann man Quantenobjekte als teilchenähnliche Entitäten beschreiben, die als Ensemble von mehreren solchen Objekten einer statistischen Verteilung gehorchen. Man sieht hier deutlich die Problematik, die Bohr von der Como-Version abweichen ließ: Es gibt keinen Grund, diese mathematische Interpretation der Wellenfunktion auf das Verhalten der ungestörten und damit unbeobachtbaren Quantenobjekte umzulegen. Führt man diese Linie klar weiter, so muss man zwangsläufig Formalismus und Beobachtung trennen, wie es in den späteren Versionen getan wird. Die **Pre-EPR-Version** schränkt die Beschreibung der Quantenobjekte drastisch ein,

⁵⁸ vgl. Bohr, 1927, S.76f.

⁵⁹ vgl. Zeilinger, 2004, S.269

und zwar auf den Zeitpunkt der Messung. Sie trennt Formalismus von Beobachtung. Die Quantenmechanik dient nur mehr dazu, Voraussagen für Messungen und Beobachtungen zu liefern. Wie bereits oben erwähnt, hat ein Welle-Teilchen-Dualismus und eine Komplementarität zwischen Welle und Teilchen im Rahmen eines solchen rein mathematischen Formalismus keinen Sinn, wenn er keine direkte Repräsentation in der von uns wahrgenommenen Realität hat. Bohr versuchte komplementäre Beobachtungen, wie etwa jene beim Doppelspaltexperiment, durch die Unbestimmtheitsrelationen zu klären und nicht mithilfe von klassischen Wellen oder Teilchen. Die notwendigen klassischen Begriffe sind vor allem jene von Ort und Impuls. Inwiefern eine Komplementarität bei Quantenphänomenen - also bei den Effekten der Interaktion der Quantenobjekte mit der Messapparatur - notwendig ist, kann im Großen und Ganzen wie in der Post-EPR-Version behandelt werden, weshalb gleich zu dieser übergegangen wird.

Da in der Post-EPR-Version eine Beschreibung von Quantenobjekten in keinsten Weise mehr erlaubt ist, fallen die Versionen (1) bis (3) automatisch weg, auch wenn sie mithilfe von obigen Bemerkungen ebenfalls verworfen werden könnten. Der Fokus liegt vollkommen auf den Quantenphänomenen und damit auf den von uns machbaren Beobachtungen/Messungen. Wo sich hier die Komplementarität instanziiert, wird vor allem im Doppelspaltexperiment (und analogen Versuchen) klar: Die ‚Spuren‘ der Interaktion von Messapparatur und Quantenobjekten können wir auf dem Schirm betrachten. In jedem Fall kann man einen kleinen **Fleck** auf dem Schirm ausmachen, von welchem wir annehmen, dass er eine durch die „Kollision“ von einem Quantenobjekt mit dem Schirm entstandene Spur ist. Jede solche Kollision ist in ihrer Erscheinung ähnlich einer Kollision mit einem sehr kleinen Objekt, welches (idealisiert) im Rahmen der klassischen Physik beschrieben wird - dies erlaubt aber nicht den Rückschluss, dass es sich tatsächlich um Teilchen handelt. Man kann nur sagen, dass Quantenphänomene in dem Sinne diskret sind, als dass sie diskontinuierlich gegenüber anderen Quantenphänomenen sind.⁶⁰ Hierfür wurde bereits in Kapitel 3.3 der Begriff Atomizität („atomicity“) beziehungsweise Einzelheit („individuality“) eingeführt. Nun kommt hinzu, dass diese Flecken im Allgemeinen ein **Interferenzmuster** wie bei Wellen bilden. Es kann

⁶⁰ vgl. Plotinsky, 2012, S. 149

gar nicht deutlich genug betont werden, dass die Interferenzerscheinungen demnach nicht als kontinuierliches Muster auftreten. In Bezug auf den Doppelspalt sieht man also nicht kontinuierliche Streifen, sondern es sind eben diese **einzelnen Flecken auf dem Schirm, die dann das Interferenzmuster bilden** (vgl. Abb. 4.1).

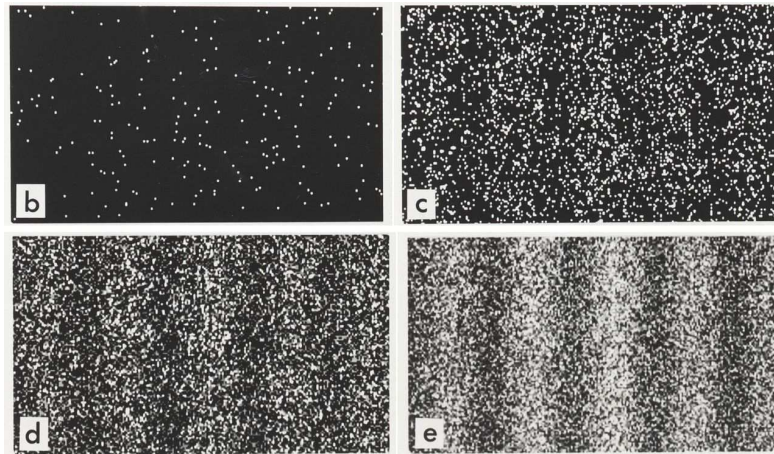


Abbildung 4.1: Interferenzmuster beim Doppelspaltexperiment mit verschiedener Anzahl an Quantenobjekten

Quelle: de.wikipedia.org/wiki/Doppelspaltexperiment

Das Interferenzmuster entsteht nur durch die Wahrscheinlichkeitsdistribution. Erst durch die extrem hohe Anzahl solcher Flecken entsteht ein kontinuierlicher Eindruck. Geht man noch einen Schritt weiter, kann man hier sogar den Begriff Interferenz hinterfragen. Denn eigentlich „interferieren“ die Wahrscheinlichkeitsdistributionen. In gewisser Weise wäre die Bezeichnung ‚Korrelationsmuster‘ - also das Muster von korrelierten (anstelle von beliebigen) Verteilungen von Flecken - ein besserer Ausdruck. In dieser Arbeit wird aber der Begriff der Interferenz beibehalten. Versucht man allerdings herauszufinden, **durch welchen Spalt** das Quantenobjekt ging, verschwindet das Interferenzmuster und wir erhalten ein zufälliges Muster, wie es für klassische Teilchen üblich wäre. Bohr bezog sich hierbei größtenteils auf Detektoren, die dieses Wissen erzwingen (vgl. Abb. 4.2). Allerdings kann eine solche Information bereits auf andere Weise vorliegen, wie in den folgenden Kapiteln gezeigt wird.

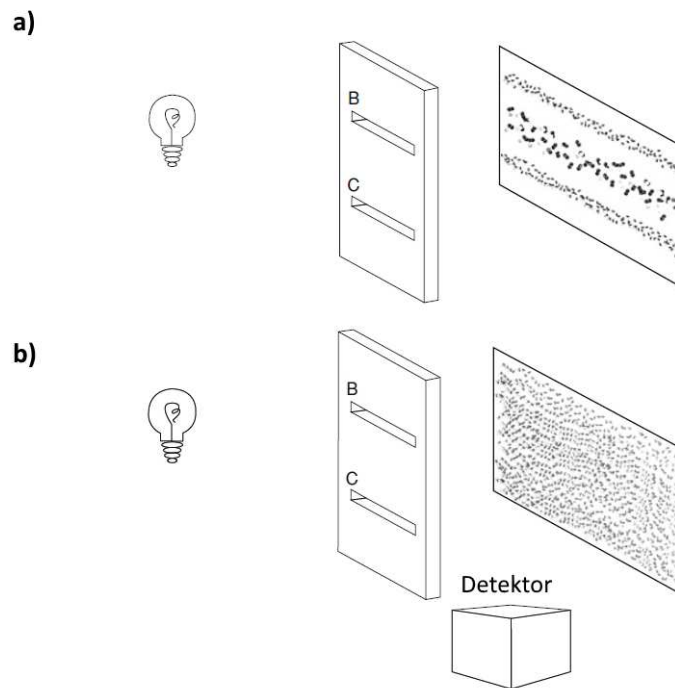


Abbildung 4.2: Interferenzmuster a) ohne Kenntnis des Wege und b) bei Kenntnis des Weges

Quelle: Plotinsky, 2012, S. 75

Zusammenfassend erhalten wir

1. ein Interferenzmuster,
2. bestehend aus diskreten Flecken,
3. welches zusammenbricht, sofern man herausfinden kann, welchen Weg das Quantenobjekt genommen hat.

Natürlich könnte man den ersten Punkt mit einer Welleneigenschaft assoziieren und die letzten beiden mit einer Teilcheneigenschaft. Insofern könnte man von der **Formulierung (4)** des Welle-Teilchen-Dualismus ausgehen. Immerhin spricht sie sehr viele Punkte von Bohrs Interpretation an: Die Unbeschreibbarkeit der Quantenobjekte, die Unzulänglichkeit unserer Sprache zur Beschreibung in solchen Situationen und die Notwendigkeit klassischer Begriffe zur Darstellung der beobachtbaren Quantenphänomene.

Auf der anderen Seite ist diese Verknüpfung eben nicht notwendig. Die Betonung liegt hierbei darauf, dass man diese Verknüpfung machen **könnte** - **man muss aber nicht**. Es gibt keinen zwingenden Grund, von den Flecken auf dem Schirm - also von der Einzelheit der Quantenphänomene - oder von dem Wissen über den Weg auf Teilcheneigenschaften zu schließen. Ebenso wenig muss wegen einem durch Flecken gebildeten Interferenzmuster eine Welleneigenschaft vorliegen. Verzichtet man auf diese Rückschlüsse und geht man rein von den drei oben beobachteten Punkten aus, zeigt sich das Komplementaritätsprinzip in Bohrs Worten wie folgt:

„It is only the circumstance that we are presented with a choice of either tracing the path of a particle or observing interference effects.“⁶¹

Natürlich wird im Sprachgebrauch weiterhin von Wellen- und Teilcheneigenschaften die Rede sein, sei es als Zuordnung zum Quantenobjekt oder zur Beschreibung von Quantenphänomenen. Auch wenn diese Formulierungen im ersten Falle nicht richtig und im zweiten Falle nicht notwendig sind, so sind sie vor allem eines: bequem. Es ist wichtig zu unterscheiden, ob die Formulierungen tatsächlich aufgrund der Unzulänglichkeit unserer Sprache und klassischen Wahrnehmung entstehen oder aus rein ökonomischen Gründen zusätzlich weiter vereinfacht beziehungsweise verkürzt werden. Beispielsweise ist die in diesem Abschnitt verwendete Formulierung ‚einen Spalt/Weg nehmen‘ beziehungsweise Bohrs Ausdruck „tracing the path“ nicht korrekt; denn das Wissen, welchen Weg beziehungsweise Spalt ein Quantenobjekt genommen hat, ist eigentlich eine (verbotene) Beschreibung dieses Quantenobjekts. Diese Formulierung meint, dass mithilfe einer Messapparatur ein Ereignis registriert werden kann, welches analog zu klassischen Ereignissen ist, die einen Rückschluss auf den Weg erlauben würden. Ist die zugrundeliegende Interpretation allerdings bekannt, so liegt es nahe, solche ungenauen Formulierungen trotzdem zu verwenden, da eine präzise Formulierung zum einen äußerst umständlich und schwer nachzuvollziehen ist, zum anderen von weiteren wesentlichen Punkten ablenkt. Aus diesen (eigentlich rein ökonomischen) Gründen werden auch in dieser Arbeit derartige Aussagen verwendet - es sollte dabei aber stets die vollständige und korrekte Formulierung im Hinterkopf behalten werden.

⁶¹ vgl. Bohr, 1949, S.46

5 Quantifizierung der Komplementarität - Predictability und Visibility

Dieser Abschnitt thematisiert vor allem die Abhandlungen aus dem Paper ‚Fringe Visibility and Which-Way Information: An Inequality‘ von Berthold-Georg Englert. Im Zentrum steht die **Quantifizierung der Komplementarität** von ‚*a priori* Welcher-Weg-Information‘ - bezeichnet als **Predictability** $\mathcal{P}$ - und der Information über das ‚*a priori* Interferenzmuster‘ - bezeichnet als **Visibility** $\mathcal{V}_0$. Der Ausdruck *a priori* meint, dass diese beiden Größen durch den Anfangszustand des Quantensystems $\rho_Q^{(i)}$ und der Versuchsanordnung gegeben sind. Dies ist besonders wichtig in Bezug auf Kapitel 7, in welchem eine etwas andere Quantifizierung von Welcher-Weg-Information und Information über das Interferenzmuster erforderlich ist.

Zur Beschreibung solcher Komplementaritäten ist die Verwendung eines **Interferometers mit zwei Wegen** naheliegend. In gewisser Weise stellt auch ein Doppelspalt ein solches Interferometer dar und ist das Standardbeispiel für die Behandlung von solchen Begriffen. Allerdings erfordert dies im Allgemeinen die Behandlung der kontinuierlichen Größen Impuls und Ort. Dies führt stellenweise zu mathematisch äußerst komplex zu beschreibenden Situationen.⁶² Stattdessen betrachten wir ein Mach-Zehnder-Interferometer (vgl. Abb. 5.1).

Es besteht aus einem Beam-Splitter (BS), einem Beam-Merger (BM) und dazwischen einem Phase-Shifter (PS). Das Quantensystem lässt sich offensichtlich durch ein **Zweizustandssystem** beschreiben - die beiden Wege werden mit den Quantenzahlen $+1$ und -1 bezeichnet. Der Vorteil eines Zweizustandssystems besteht darin, dass diese durch die Pauli-Matrizen (beziehungsweise allgemeiner durch die Pauli-Operatoren) dargestellt werden können.

⁶² Eine einfache Behandlung des Doppelspalts, welche diese Komplementaritäten herausarbeitet, kann auf Wikipedia unter ‚Englert-Greenberger-Yasin duality relation‘ gefunden werden, wird in dieser Arbeit aber nicht genauer behandelt, da der folgende Abschnitt qualitativ die gleichen Ergebnisse liefert und nach Meinung des Autors einen besseren Einstieg in die Thematik bietet.

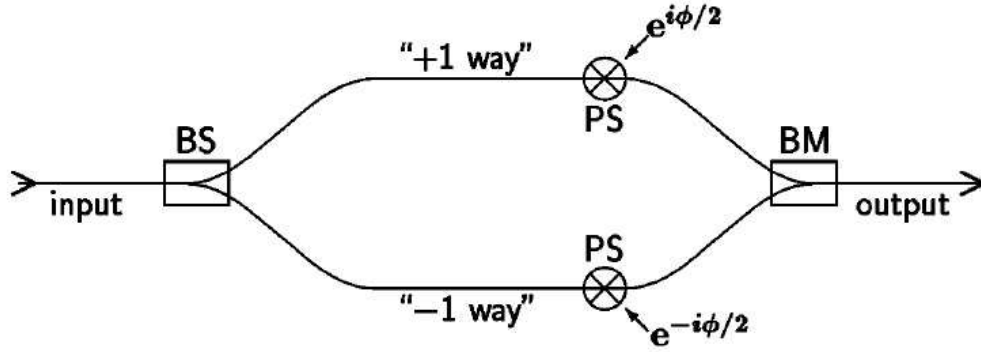


Abbildung 5.1: Schematisches Zwei-Wege-Interferometer (in unserem Fall ein Mach-Zehnder-Interferometer)

Quelle: Englert, 1996, S.2155

Der Zustand des Quantensystems, bevor es in das Interferometer eintritt, lautet somit

$$\begin{aligned}\rho_Q^{(i)} &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{s}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + s_x^{(i)}\sigma_x + s_y^{(i)}\sigma_y + s_z^{(i)}\sigma_z).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Dabei ist $\mathbf{s}^{(i)} = \text{tr}_Q\{\boldsymbol{\sigma}\rho_Q^{(i)}\}$ der (anfängliche) Blochvektor.

Der **Beam-Splitter** kann repräsentiert werden durch

$$\rho_Q \rightarrow \exp(-i\frac{\pi}{4}\sigma_y) \rho_Q \exp(i\frac{\pi}{4}\sigma_y),$$

wohingegen der **Beam-Merger** durch den adjungierten unitären Operator dargestellt wird.

Der **Phase-Shifter** in der Mitte der Anordnung wird beschrieben durch

$$\rho_Q \rightarrow \exp(-i\frac{\phi}{2}\sigma_z) \rho_Q \exp(i\frac{\phi}{2}\sigma_z).\tag{5.2}$$

Durch das Interferometer wird der Zustand $\rho_Q^{(i)}$ in den Endzustand

$$\rho_Q^{(f)} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{s}^{(f)} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (5.3)$$

übergeführt. Explizit ist dieser mithilfe der oben dargestellten Operatoren für Beam-Splitter/Merger und Phase-Shifter gegeben durch

$$\rho_Q^{(f)} = \exp(i\frac{\pi}{4}\sigma_y) \exp(-i\frac{\phi}{2}\sigma_z) \exp(-i\frac{\pi}{4}\sigma_y) \rho_Q^{(i)} \exp(i\frac{\pi}{4}\sigma_y) \exp(i\frac{\phi}{2}\sigma_z) \exp(-i\frac{\pi}{4}\sigma_y).$$

Dies führt zu dem **finalen Blochvektor**

$$\mathbf{s}^{(f)} = \begin{pmatrix} -s_x^{(i)} \\ s_y^{(i)} \cos \phi + s_z^{(i)} \sin \phi \\ s_y^{(i)} \sin \phi - s_z^{(i)} \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Nun lässt sich die Observable ρ_z messen - insbesondere die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Wert -1 auftritt. Dies ist abhängig vom Phasenwinkel ϕ (also der Einstellung des Phase-Shifters) und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} p_\phi &= \text{tr}_Q \left\{ \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_z) \rho_Q^{(f)} \right\} \\ &= \frac{1}{2}(1 - s_y^{(i)} \sin \phi + s_z^{(i)} \cos \phi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Man erhält also ein **Interferenzmuster** bezüglich des Phasenwinkels ϕ , gekennzeichnet durch die Schwingungsterme $\sin \phi$ und $\cos \phi$. Die Deutlichkeit des Interferenzmuster wird durch die Skalare $s_y^{(i)}$ und $s_z^{(i)}$ bestimmt. Dadurch lässt sich die *a priori* **Visibility** $\mathcal{V}_0$ definieren durch

$$\mathcal{V}_0 = \sqrt{(s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2}. \quad (5.6)$$

Die Visibility als Maß für die Deutlichkeit des Interferenzmusters tritt auch in der Experimentalphysik auf. Explizit sagt sie aus, wie gut man Minima und Maxima in Interferenzmuster unterscheiden kann. Während sie im Englischen ebenfalls ‚fringe visibility‘ $\mathcal{V}_0$ genannt wird, bezeichnet man sie im Deutschen oft als Interferenzkontrast

$\mathcal{K}$ und wird berechnet mit

$$\mathcal{K} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} .$$

Wendet man diese Definition auf p_ϕ an und interpretiert die Wahrscheinlichkeitsamplitude dabei als die (klassische) Intensität, erhält man ebenfalls Ausdruck (5.6). Allerdings ist diese Formulierung für die Visibility oft nicht hinreichend, wie zu Beginn des Kapitels 6 diskutiert wird.

Für die *a priori* **Welcher-Weg-Information** benötigen wir die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen im oberen beziehungsweise unteren Weg registriert wird. Dazu braucht man jedoch eine andere experimentelle Anordnung (vgl. Abb. 5.2).

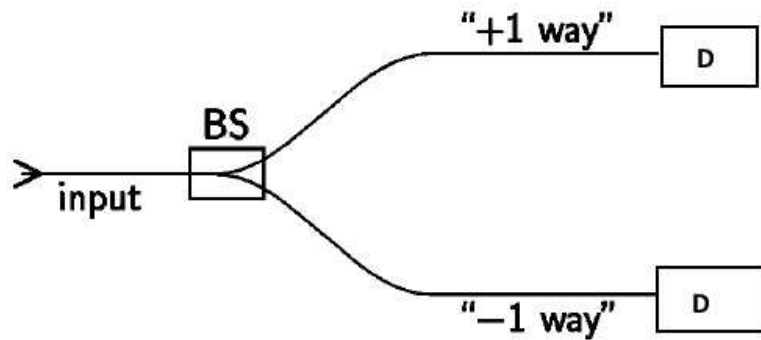


Abbildung 5.2: Experiment zur Bestimmung der Predictability $\mathcal{P}$

Quelle: nach Englert, 1996, S.2155

Der zu betrachtende Zustand lautet nun

$$\exp(-i\frac{\pi}{4}\sigma_y) \rho_Q^{(i)} \exp(i\frac{\pi}{4}\sigma_y) ,$$

wodurch sich die **Wahrscheinlichkeiten für die beiden Wege** zu

$$\begin{aligned} p_{+1} &= \text{tr}_Q \left\{ \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \sigma_z) \exp(-i\frac{\pi}{4}\sigma_y) \rho_Q^{(i)} \exp(i\frac{\pi}{4}\sigma_y) \right\} \\ &= \text{tr}_Q \left\{ \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \sigma_x) \rho_Q^{(f)} \right\} = \frac{1}{2} (1 - s_x^{(i)}) , \end{aligned}$$

beziehungsweise zu

$$\begin{aligned} p_{-1} &= \text{tr}_Q \left\{ \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \sigma_z) \exp(-i \frac{\pi}{4} \sigma_y) \rho_Q^{(i)} \exp(i \frac{\pi}{4} \sigma_y) \right\} \\ &= \text{tr}_Q \left\{ \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \sigma_x) \rho_Q^{(f)} \right\} = \frac{1}{2} (1 + s_x^{(i)}) \end{aligned}$$

ergeben.

Die (betragsliche) Differenz dieser beiden Wahrscheinlichkeiten

$$\mathcal{P} = |p_{+1} - p_{-1}| \quad (5.7)$$

bezeichnet man als *a priori* **Predictability** $\mathcal{P}$.⁶³ Diese (reelle) Zahl liegt im Intervall $[0, 1]$ und ist ein Maß für die *a priori* Welcher-Weg-Information. Das kann man sich wie folgt vorstellen: Wettet man auf den wahrscheinlicheren Weg (dies ergibt sich je nach Experimentanordnung), so beträgt die Wahrscheinlichkeit den Weg korrekt vorherzusagen $(1 + \mathcal{P})/2$. Ist das Interferometer komplett symmetrisch - ist also insbesondere $p_{+1} = p_{-1} = 1/2$ -, so ist $\mathcal{P} = 0$ und 50% der Vorhersagungen sind richtig, die anderen 50% falsch.⁶⁴ Da die Länge eines Blochvektors niemals die Einheit übersteigen kann, also

$$\|\mathbf{s}\|^2 = (s_x^{(i)})^2 + (s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2 \leq 1 ,$$

folgt mit

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}_0^2 = (s_x^{(i)})^2 + (s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2 = \|\mathbf{s}\|^2 ,$$

dass die Ungleichung

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}_0^2 \leq 1 \quad (5.8)$$

erfüllt sein muss. Für reine Zustände gilt offensichtlich die Gleichheit.

Da es sich um ein Zweizustandssystem handelt, lässt sich dies auch mithilfe der **Bloch-**

⁶³ Um den Ausdruck *a priori* stärker zu betonen, wäre auch die Bezeichnung $\mathcal{P}_0$ möglich. Im Gegensatz zur *a priori* Visibility $\mathcal{V}_0$ besteht im Verlauf dieser Arbeit allerdings keine Verwechslungsgefahr, weshalb darauf verzichtet wird.

⁶⁴ Mathematisch richtig formuliert konvergiert die relative Häufigkeit der richtigen beziehungsweise falschen Vorhersagungen *p-fast-sicher* gegen 0,5.

kugel darstellen (vgl. Abb 5.3). Die Komponenten des finalen Blochvektors $s^{(f)}$ bestehen aus Komponenten des initialen Blochvektors $s^{(i)}$ (vgl. Glg. 5.4). Insbesondere rotiert der finale Blochvektor in der $y - z$ Ebene, bedingt durch die Änderung des Phasenwinkels ϕ . Je kleiner diese Rotation ist, desto schwächer ist die Interferenz und somit die *a priori* Visibility $\mathcal{V}_0$. Die Rotation wird dann kleiner, wenn der finale Blochvektor näher an den Polen bezüglich der x-Achse ist, also je größer $|-s_x| = \mathcal{P}$ ist. Die beiden Ausdrücke $\mathcal{P}$ und $\mathcal{V}_0$ schließen sich also zu einem gewissen Grad **gegenseitig aus**, fügen sich aber (quadriert) zum Betrag des Blochvektors $s^{(i)}$ beziehungsweise $s^{(f)}$ **zusammen**. Beschreibt dieser einen reinen Zustand, so liegt er genau auf der Oberfläche der Blochkugel, weshalb

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}_0^2 = 1$$

für reine Zustände genau erfüllt ist.

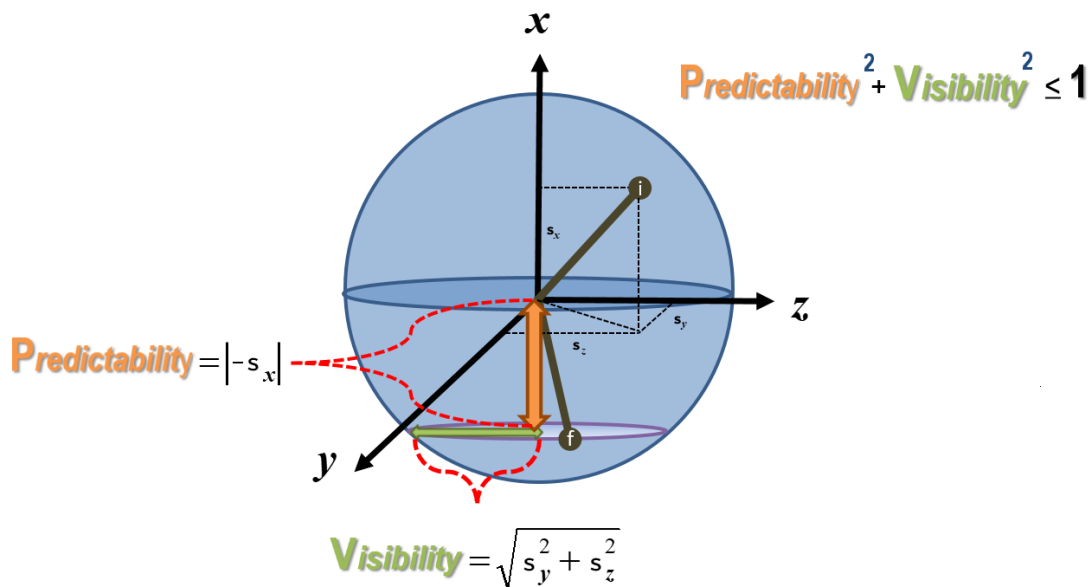


Abbildung 5.3: Darstellung von Predictability $\mathcal{P}$ und Visibility $\mathcal{V}_0$ anhand der Blochkugel

Es ist leicht zu argumentieren, dass die so quantifizierte Dualität tatsächlich eine Instanziierung des allgemeinen Komplementaritätsprinzips ist, denn

1. die beobachteten Phänomene schließen sich **gegenseitig aus** (wenn auch nur in

den Extremfällen vollständig!)

2. Sowohl die Messungen zu Predictability als auch Visibility sind zu jedem Zeitpunkt **seperat durchführbar** (vgl. die komplementären Messanordnungen in Abb. 5.1 und 5.2); und
3. erst beide Größen gemeinsam **kombinieren sich** zum komplett möglichen Wissen über das Quantenphänomen (quantifiziert durch $\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}_0^2 \leq 1$).

Während Bohr sein Komplementaritätsprinzip größtenteils durch die Unbestimmtheitsrelationen von Ort und Impuls beziehungsweise von Energie und Zeit verwirklicht sah⁶⁵, liegt hier ein etwas anderer Fall vor, da die Ungleichung ohne der Verwendung einer Unbestimmtheitsrelation zwischen zwei Observablen herleitbar ist. Dies wird vor allem aber in Kapitel 7 deutlich. Jedenfalls zeigt sich dadurch, dass diese **Komplementarität (und damit das Komplementaritätsprinzip) über die Unbestimmtheitsrelation hinausreicht**. Umso mehr stellt sich die Frage, wie $\mathcal{P}$ und $\mathcal{V}_0$ interpretiert werden sollen. Wie bereits durchwegs in diesem Kapitel angeklungen, werden die beiden Größen als **Maße für Information**⁶⁶ aufgefasst. Im Zentrum stehen also nicht zwangsläufig komplementäre Beobachtungen, sondern zueinander komplementäre Informationen (hier von Weg und Interferenzmuster), die mit den von uns machbaren Beobachtungen zusammenhängen und aus der Eigenschaft $\|s\|^2 \leq 1$ für den Blochvektor des Dichteoperators folgt.

Über den genauen Zusammenhang von Beobachtung und Information lässt sich natürlich genauso diskutieren wie über die Frage, ob und wie weit eine derartige Interpretation von der Kopenhagener Deutung beziehungsweise Bohrs Sichtweisen abweicht. Es lassen sich mit Sicherheit für beide Seiten Argumente finden, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen wird - in dieser Arbeit verbleibt der Autor auch mit dem Informationsansatz in der Kopenhagener Deutung.

⁶⁵ Natürlich hat Bohr sein Komplementaritätsprinzip nicht mit der Unbestimmtheitsrelation gleichgesetzt, sondern hat es mit prinzipiell komplementären Quantenphänomenen (also Beobachtungen) verbunden. Er versuchte jedoch meistens diese Komplementarität mit der Unbestimmtheitsrelation zu verknüpfen.

⁶⁶ Obwohl dies intuitiv zumindest im Ansatz verständlich erscheint, ist die Definition von Information an sich äußerst kompliziert und nicht eindeutig.

6 Anwendungsbeispiele

Die Komplementarität von Welcher-Weg-Information und der Information über das Interferenzmuster wird in diesem Kapitel auf weitere Experimentieranordnungen angewandt. Es werden drei Beispiele gegeben, welche sich vor allem auf das Paper ‚Quantitative complementarity in two-path interferometry‘⁶⁷ beziehen und sowohl die Gültigkeit als auch Anwendbarkeit der Komplementarität dieser Information widerspiegeln. Es soll aber bereits hier festgehalten werden, dass in vielen anderen Messanordnungen die Quantifizierung von derartigen Komplementaritäten noch nicht gelungen ist. Insbesondere solche Anordnungen, in denen es mehr als zwei mögliche Wege gibt, scheinen bezüglich solcher Quantifizierungen problematisch. Ob und auf welche Art eine Quantifizierung komplementärer Informationen in solchen Systemen möglich ist, ist noch Teil der Forschung.

6.1 Predictability und Visibility als funktionale Abhängigkeiten

Im vorhergehenden Kapitel waren *a priori* Visibility und Predictability **konstant**. Insbesondere erhält man in manchen Fällen die Visibility durch das für die Experimentalphysik gängige Maß für den Interferenzkontrast

$$\mathcal{K} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

Dass dies aber **nur einen Spezialfall** für ein Zwei-Wege-Interferometer darstellt, lässt sich schnell intuitiv begründen. Wir beginnen dabei mit dem Ausdruck $\cos[\theta(x)]$, wobei $\theta(x)$ den Phasenunterschied der beiden Wege des Interferometers darstellt. Da das Betragsquadrat der Wahrscheinlichkeitsamplitude $|\Psi(x)|^2$ (beziehungsweise die Intensität in klassischer Sprechweise) nicht negativ sein kann, betrachten wir

$$|\Psi(x)|^2 \quad [\cong I(x)] \sim 1 - \cos[\theta(x)].$$

Aus diesem Ausdruck folgt sofort $\mathcal{K} = 1$. Wird der Term $\cos[\theta(x)]$ um einen konstanten

⁶⁷ A. Bramon, G. Garbarino, B. C. Hiesmayr, 2003

Faktor $\mathcal{V}_0 \leq 1$ gestaucht, also

$$|\Psi(x)|^2 \quad [\cong I(x)] \sim 1 - \mathcal{V}_0 \cos[\theta(x)],$$

so verringert sich der Unterschied der Intensitätsmaxima und Intensitätsminima. Der Ausdruck vor dem Interferenzterm (hier durch den Cosinus dargestellt) gibt also die Deutlichkeit des Interferenzmusters an und kann als Visibility identifiziert werden. Für ein konstantes $\mathcal{V}_0$ folgt sofort

$$\mathcal{K} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{1 + \mathcal{V}_0 - (1 - \mathcal{V}_0)}{1 + \mathcal{V}_0 + (1 - \mathcal{V}_0)} = \mathcal{V}_0.$$

In Kapitel 5 ergab sich das Interferenzmuster (vgl. Glg. 5.5) zu

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{1}{2}(1 - s_y^{(i)} \sin \phi + s_z^{(i)} \cos \phi) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{((s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2)} \cos \tilde{\phi}). \end{aligned}$$

Der Term vor dem Cosinus⁶⁸ ist konstant, also gilt

$$\mathcal{K} = \mathcal{V}_0 = \sqrt{((s_y^{(i)})^2 + (s_z^{(i)})^2)}.$$

Allerdings ist der hier hervorgehobene Term in Interferenzmustern **üblicherweise nicht konstant**, weshalb die verallgemeinerte Darstellung

$$|\Psi(x)|^2 \quad [\cong I(x)] \sim (1 - \mathcal{V}_0(x) \cos[\theta(x)]) \quad (6.1)$$

⁶⁸ Es ist zu beachten, dass im Allgemeinen $\tilde{\phi} \neq \phi$ gilt. Zur Umformung wurde benutzt, dass sich die Summen von Sinus- und Cosinusschwingungen mit gleicher Frequenz als eine einzelne Schwingung mit neuem Argument $\tilde{\phi}$ schreiben lässt. Sind diese zusätzlich gleichphasig, gilt

$$a \sin \phi + b \cos \phi = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \tilde{\phi}.$$

Insbesondere ist hervorzuheben, dass die Vorzeichen der ursprünglichen Amplitude keinen Einfluss auf die neue Amplitude haben (jedoch auf $\tilde{\phi}$, was hier aber uninteressant ist).

naheliegender ist. Es ist unschwer zu erkennen, dass im Allgemeinen

$$\mathcal{K} \neq \mathcal{V}_0(x)$$

gilt, da die Visibility nun von x abhängig ist. In gewissem Sinne ist die Visibility somit eine Verallgemeinerung des Interferenzkontrasts, da sie die Interferenzfähigkeit in jedem Punkt x angibt, während sich der Interferenzkontrast stets als gemittelter Wert auf das ganze Muster bezieht. Ebenso ist die Predictability - also die Welcher-Weg-Information - von der Position des Detektors abhängig, was an den folgenden Beispielen leicht ersichtlich werden wird. Somit ergibt sich eine verallgemeinerte Version der komplementären Relation (5.6) zu

$$\mathcal{P}^2(x) + \mathcal{V}_0(x)^2 \leq 1 \quad \forall x . \quad (6.2)$$

6.2 Ein Experiment mit dem Doppelspalt

Prinzipiell sind Experimente mit dem Doppelspalt nicht oder nur sehr schwer analytisch berechenbar, auch die kontinuierlichen Größen von Ort und Impuls (im Gegensatz zur Versuchsanordnung in Kapitel 5) erschweren die Berechnungen. Daher betrachten wir eine Abänderung des Doppelspaltexperiments. Die Versuchsanordnung besteht aus einem Doppelspalt, einer Linse und einem Schirm, welche mit Quantenobjekten (beispielsweise Photonen) interagieren. Etwas ungenau, aber leichter vorstellbar formuliert, wird das Photon durch den Doppelspalt geschickt und mithilfe der Linse auf dem Schirm abgebildet (vgl. Abb. 6.1). In der Brennebene (Abstand f) kommt es zur vollständigen Interferenz, vor beziehungsweise nach der Brennebene kann man teilweise die Abbildung des Doppelspalts erkennen.

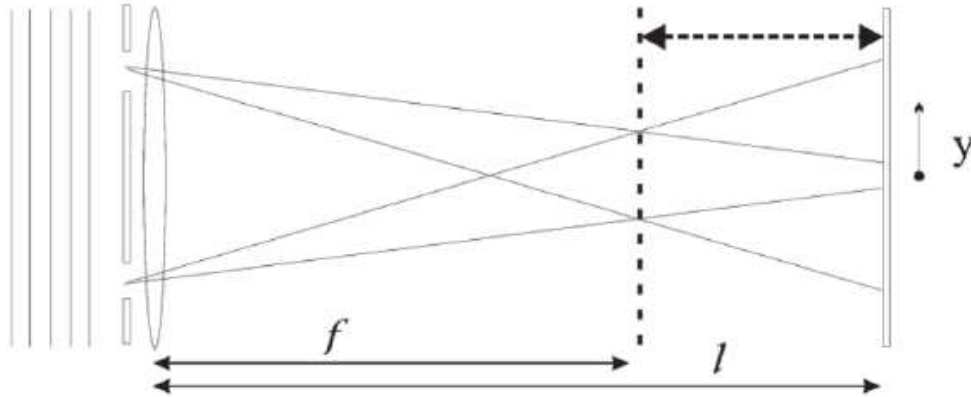


Abbildung 6.1: Ein Quantenobjekt, im Formalismus beschrieben durch eine Wahrscheinlichkeitswelle, trifft auf den Doppelspalt und wird anschließend mithilfe einer Linse auf dem Schirm abgebildet.

Quelle: Hiesmayr, Theoretische Physik III Skriptum 2016/17, S.96

Unter der Annahme, dass die Transmissionsfunktionen (also die Wahrscheinlichkeitsamplituden) als Gauß-Strahlen dargestellt werden können, ergeben sich unter Berücksichtigung des Zerfließens des Wellenpaketes die beiden Amplituden nach etwas längerer Rechnung zu

$$\mathcal{A}_1(y) = \exp\left(-\frac{\left(y + \frac{d}{2}\left(1 - \frac{l}{f}\right)\right)^2}{\sigma_l^2}\right) \cdot \exp\left(ik \frac{l^2}{x_0 \sigma_l^2 k^2} \left(l - \frac{d}{2l}y + y^2 + \frac{d^2}{4l^2}\right)\right)$$

$$\mathcal{A}_2(y) = \exp\left(-\frac{\left(y - \frac{d}{2}\left(1 - \frac{l}{f}\right)\right)^2}{\sigma_l^2}\right) \cdot \exp\left(ik \frac{l^2}{x_0 \sigma_l^2 k^2} \left(l + \frac{d}{2l}y + y^2 + \frac{d^2}{4l^2}\right)\right) \quad .$$

Die Gesamtwellenfunktion ergibt sich zu

$$\mathcal{A}_{ges}(y) = \mathcal{A}_1(y) + \mathcal{A}_2(y),$$

weshalb das Betragsquadrat der gesamten Wahrscheinlichkeitsamplitude (dies entspricht der klassischen Intensitätsverteilung $I(y)$) gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{ges}|^2 &= \underbrace{N \cdot \exp\left(-\frac{d^2}{4\sigma_l^2}\left(1 - \frac{l}{f}\right)^2\right)}_{\tilde{N}} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{y^2}{\sigma_l^2}\right) \cdot 2 \cosh(A_l y)}_{f(y)} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cosh(A_l y)} \cdot \cos(B_l y)\right) \\
&= \tilde{N} \cdot f(y) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cosh(A_l y)} \cdot \cos(B_l y)\right)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

mit

$$A_l = \frac{d}{\sigma_l^2} \left(1 - \frac{l}{f}\right)$$

$$B_l = \frac{ld}{kx_0^2 \sigma_l^2}$$

sowie einer Normierungskonstante N beziehungsweise $\tilde{N}$ und einer für das spezielle Experiment charakteristischen Funktion $f(y)$.

Nach (6.1) ist dann die *a priori* Visibility für einen gewissen Punkt am Schirm

$$\mathcal{V}_0(y) = \frac{1}{\cosh(A_l y)}. \tag{6.4}$$

Für die Predictability benötigen wir die Wahrscheinlichkeit $p_{1/2}(y)$, dass der Fleck auf der Position y am Schirm aus dem ersten beziehungsweise zweiten Spalt kommt. Dies erhält man durch

$$p_1(y) = |\mathcal{A}_1(y)|^2,$$

beziehungsweise durch

$$p_2(y) = |\mathcal{A}_2(y)|^2.$$

Daraus ergibt sich die Predictability zu

$$\mathcal{P}(y) = |p_1(y) - p_2(y)| = |\tanh(A_l y)|. \tag{6.5}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass **für jede Position y am Schirm** die Gleichung

$$\mathcal{P}(y)^2 + \mathcal{V}_0(y)^2 = \tanh^2(A_l y) + \frac{1}{\cosh^2(A_l y)} = 1 \tag{6.6}$$

erfüllt ist. Da hier nur reine Zustände verwendet wurden, bedeutet dies, dass die **vollständige Information über das System** vorhanden ist. Die beiden komplementären Informationen ergänzen sich daher zur Einheit 1 - in diesem Beispiel ist also das **bohorsche Komplementaritätsprinzip exakt erfüllt**.

Die *a priori* Predictability und Visibility sind in der Abbildung 6.2 eingezeichnet.⁶⁹ Die Visibility nimmt am Schirm sowohl nach links als auch nach rechts ab (beziehungsweise nach oben und nach unten, wenn man die Doppelspalte wie in der Abbildung 6.1 waagrecht ausrichtet). Die Predictability verhält sich gegenteilig dazu. Dies lässt sich einfach erklären: Je weiter außen am Schirm wir uns befinden - also **je größer der Abstand von $y = 0$** ist -, desto eher können wir sagen, durch welchen Spalt die jeweiligen Quantenobjekte gekommen sind.⁷⁰ Die Welcher-Weg/Spalt-Information und somit auch die Predictability ist also größer. In der Mitte des Schirmes (also bei $y = 0$) ist die Wahrscheinlichkeit für die beiden einzelnen Spalte gleich groß - es handelt sich also um eine komplett symmetrische Situation, in der keine Information über den Weg vorliegt. Dementsprechend ist die Visibility hier maximal.

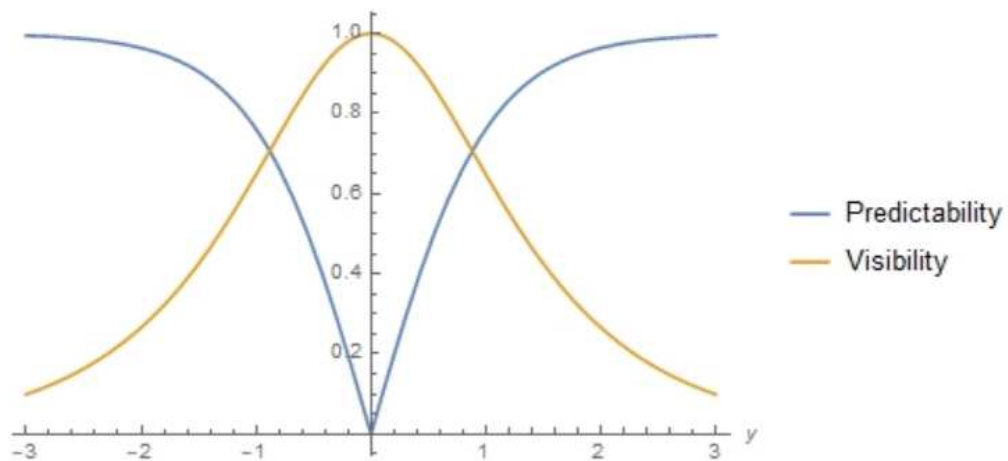


Abbildung 6.2: Predictability und Visibility im Doppelspaltversuch (für $l \neq f$)

⁶⁹ nicht quadriert!

⁷⁰ Wie bereits oben erwähnt, sind solche Formulierungen sehr schlampig. Gemeint ist, dass ein Ereignis registriert wird, welches in einem rein klassischen Sinne einen Rückschluss auf das Passieren des Teilchens durch den Spalt ermöglichen würde. Was das Quantenobjekt tut, kann und darf in der Kopenhagener Interpretation eigentlich nicht beschrieben werden.

Ein weiterer interessanter Punkt ist die **Änderung des Schirmabstandes** l , welcher Einfluss auf den Wert A_l hat und somit ebenfalls auf Predictability und Visibility. Besonders hervorzuheben ist der Fall $A_l = 0$, denn dann gilt $\mathcal{V}(y) = 1$ für alle y und daher $\mathcal{P}(y) = 0$ für alle y . Das Interferenzmuster entspricht hier dem ‚standardmäßigen‘ Doppelspaltmuster. Auf keiner Position am Schirm lässt sich eine Information über den Weg des Quantenobjekts gewinnen. Je weiter die Schirmposition von der Brennebene abweicht, umso größer wird die Predictability. Dies ist in Abbildung 6.3 für drei verschiedene Positionen ($l < f$, $l = f$ sowie $l > f$) dargestellt. Man beachte, dass das Interferenzmuster immer mehr die Form der einzelnen Gauß-Funktionen annimmt, was die Zunahme der Welcher-Weg-Information verdeutlicht.

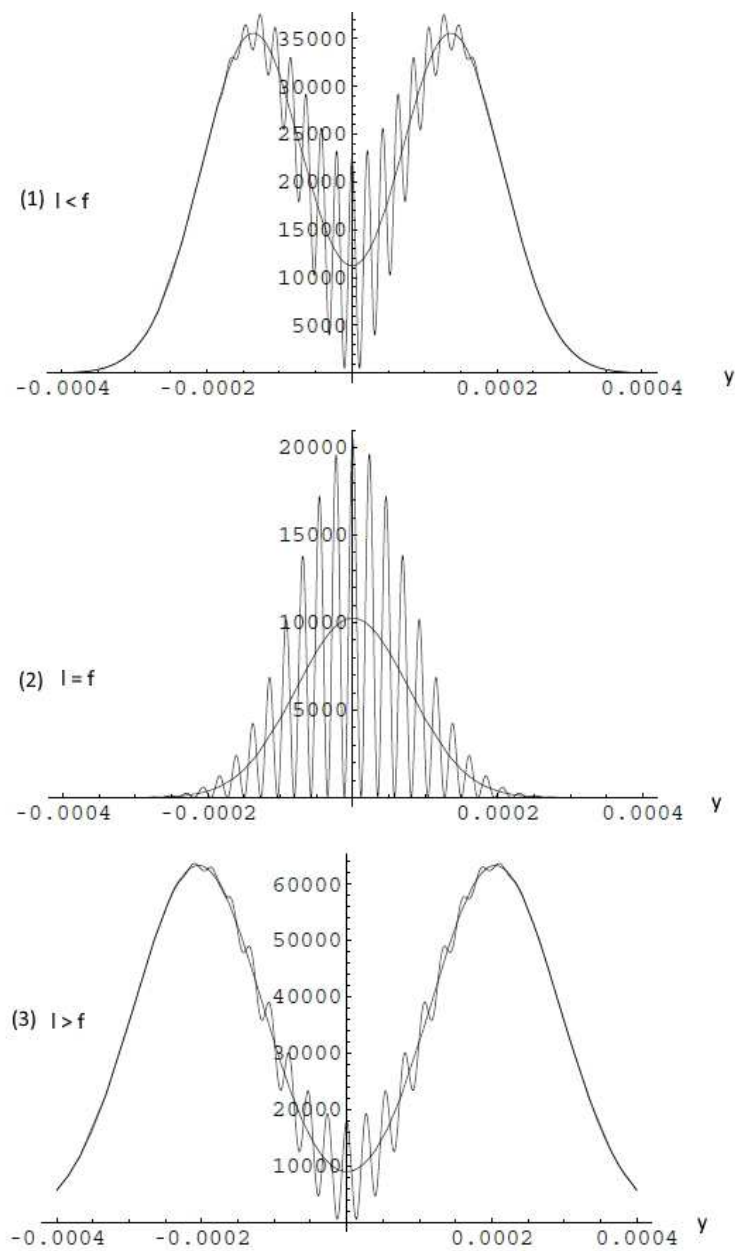


Abbildung 6.3: Interferenzmuster für drei verschiedene Schirmpositionen bei einer Linse mit $f = 0.11m$. Dabei ist (1) $l = 0.1m < f$, (2) $l = 0.11m = f$ und (3) $l = 0.125m > f$.

Quelle: Hiesmayr, Theoretische Physik III Skriptum 2016/17, S.99

6.3 Mott-Streuung

Die Mott-Streuung bezeichnet die **Rutherford-Streuung zweier identischer Teilchen**. In dieser Arbeit behandeln wir nur Teilchen mit Spin 0 (beispielsweise Alpha-Teilchen). Die beiden Pfade sind dabei um π versetzt (vgl. Abb 6.4). Da die Teilchen ununterscheidbar sein sollen, werden beide Wahrscheinlichkeitsamplituden (beide Wege beziehungsweise Möglichkeiten) addiert, weshalb für die Gesamtwellenfunktion gilt

$$|A_{ges}(\theta)|^2 = |\mathcal{A}(\theta) + \mathcal{A}(\theta + \pi)|^2.$$

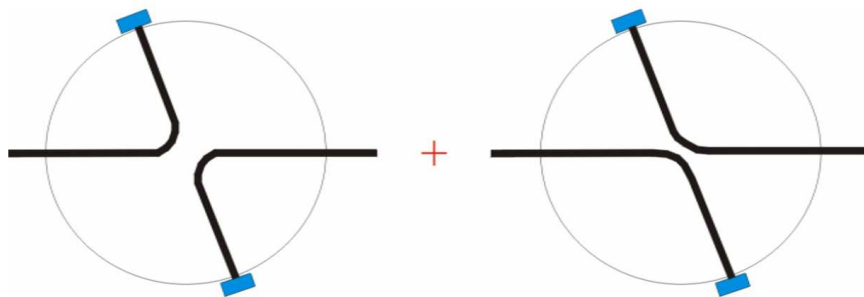


Abbildung 6.4: Die beiden Wege bei der Mott-Streuung

Quelle: Hiesmayr, Theoretische Physik III Skriptum 2016/17, S.101

Dabei ist die quadrierte Wahrscheinlichkeitsamplitude proportional zum differentiellen Streuquerschnitt⁷¹

$$|A(\theta)|^2 \propto \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)},$$

wobei q_1 die Ladung des gestreuten Teilchens, q_2 die Ladung des Kerns und E die anfängliche (kinetische) Energie des Teilchens sind. Daraus ergibt sich unmittelbar

$$|A_{ges}(\theta)|^2 \propto \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2} \left| \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \pm e^{i\phi} \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta+\pi}{2})} \right|^2, \quad (6.7)$$

⁷¹ vgl. A. Bramon, G. Garbarino, B. C. Hiesmayr, 2003, S.7

mit einer relativen Phase $\pm e^{i\phi}$. Damit folgt

$$|A_{ges}(\theta)|^2 \propto \frac{q_1^2 q_2^2}{16E^2} \left(\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta+\pi}{2})} + 2 \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2) \cdot \sin^2(\frac{\theta+\pi}{2})} \cdot \cos(\phi) \right), \quad (6.8)$$

mit der Phase

$$\phi = \eta \ln\left(\tan \frac{\theta}{2}\right),$$

mit dem Sommerfeldparameter η .

Mithilfe der Transformation

$$e^x = \tan^2 \theta/2 = \frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$$

erhält man für das Betragsquadrat der Gesamtwellenfunktion den Ausdruck

$$|A_{ges}(x)|^2 \propto 1 + \frac{1}{\cosh(x)} \cos(\eta x). \quad (6.9)$$

Aus dieser Form lässt sich (wie bereits beim Doppelspalt) die Visibility ablesen

$$\mathcal{V}_0(x) = \frac{1}{\cosh(x)}. \quad (6.10)$$

Die Predictability ergibt sich nach kurzer Rechnung aus

$$\mathcal{P} = |p_1(\theta) - p_2(\theta)| = \left| |\mathcal{A}(\theta)|^2 - |\mathcal{A}(\theta + \pi)|^2 \right|$$

zu

$$\mathcal{P}(\theta) = \left| \frac{2 \cos(\theta)}{1 + \cos^2(\theta)} \right|,$$

was sich mit der oben genannten Transformation überführen lässt in

$$\mathcal{P}(x) = |\tanh(x)|. \quad (6.11)$$

Nun sieht man sofort, dass

$$\mathcal{P}(x)^2 + \mathcal{V}_0(x)^2 = \tanh^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 \quad \forall x. \quad (6.12)$$

Auch in diesem Beispiel ist also das **bohorsche Komplementaritätsprinzip (exakt) erfüllt**. Die Ausdrücke für Predictability und Visibility entsprechen jenen von Kapitel 6.1 (vgl. dazu auch obige Abb. 6.2). Allerdings kommen keine experimentspezifischen Konstanten wie A_l vor, weshalb nur bei $x = 0$ auch $\mathcal{P} = 0$ beziehungsweise $\mathcal{V}_0 = 1$ gilt.⁷² Für $x = 0$ (entspricht $\theta = \pi/2$) tragen beide Wahrscheinlichkeitsamplituden mit $p_1 = p_2 = 1/2$ bei, weshalb keine Information über den Weg vorliegt. Für $x \neq 0$ ($\theta \neq \pi/2$) wird die Predictability immer größer, während die Visibility abnimmt.

Darüber hinaus gilt der Zusammenhang auch für Teilchen mit Spin ungleich 0, für die Predictability und Visibility müssen kleine Modifikationen vorgenommen werden - die Grundstruktur bleibt aber erhalten.⁷³ Sollten die beiden Teilchen jedoch unterschiedliche Spinzustände besitzen, gibt es keine Interferenz, da man (zumindest theoretisch) herausfinden könnte, woher das Teilchen kam.

6.4 Kaon als Analogon zum Doppelspalt

Kaonen sind **Elementarteilchen** und gehören zu den Mesonen. Sie haben einige besondere Eigenschaften: so ist für ihre Beschreibung eine neue Quantenzahl - die Strangeness - notwendig. Zudem verletzen sie die CP-Symmetrie⁷⁴, was hier allerdings vernachlässigt wird. Insgesamt gibt es vier verschiedene Kaonen; für die folgenden Beobachtungen sind aber nur das neutrale Kaon K^0 mit Strangeness +1 sowie sein neutrales Antiteilchen $\bar{K}^0$ mit Strangeness -1 relevant. In einem Kaonenstrahl zerfallen bereits

⁷² Zur Erinnerung: Beim Doppelspalt war für $l = f$ (also Schirm in Brennebene) die Visibility für alle Positionen gleich 1.

⁷³ Es tritt der Spinfaktor $C_S = \frac{(-1)^{2S}}{2S+1}$ für Teilchen mit Spin S vor den Interferenzterm in Glg. 6.8 hinzu. Die Visibility und Predictability ergeben sich dann zu

$$\mathcal{V}_0 = \frac{C_S}{\cosh(x)}$$

und

$$\mathcal{P} = \frac{2S + |\tanh(x)|}{2S + 1} .$$

Vgl. dazu auch Bramon, G. Garbarino, B. C. Hiesmayr, 2003, S.8

⁷⁴ Diese besagt, dass sich die physikalischen Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge nicht ändern, wenn alle Teilchen durch ihre Antiteilchen ersetzt und zusätzlich alle Raumkoordinaten gespiegelt werden.

nach kurzer Zeit ($t \approx 10^{-10} \text{ s}$) einige Kaonen in zwei Pionen. Erst nachdem lange Zeit (fast) nichts passiert ($t \approx 10^{-8} \text{ s}$), zerfallen die restlichen Kaonen in drei Pionen. Aus diesem Grund ist es naheliegend, ein Kaon als **Superposition eines langlebigen und eines kurzlebigen Zustandes** - $|K_L\rangle$ und $|K_S\rangle$ - zu beschreiben⁷⁵:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S\rangle + |K_L\rangle)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|K_S\rangle + |K_L\rangle)$$

Daraus folgt auch die Darstellung des langlebigen beziehungsweise kurzlebigen Zustands der Kaonen in der Basis der Kaonen und Anti-Kaonen mit

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle).$$

Die **Zeitentwicklung** der Kaonen wird mithilfe einer effektiven (also zweidimensionalen) Schrödingergleichung beschrieben, mit einem aufgrund des Zerfalls nicht hermiteschen Hamiltonian. Die kurz- und langlebigen Zustände sind jene, die den Hamiltonian diagonalisieren und ergeben sich zu

$$\begin{aligned} |K_S(t)\rangle &= e^{-i\lambda_S t} |K_S\rangle \\ |K_L(t)\rangle &= e^{-i\lambda_L t} |K_L\rangle. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Dabei ist $\lambda_{S,L} = m_{S,L} + i/2\tau_{S,L}$, wobei $m_{S,L}$ die Massen des kurz- und langlebigen

⁷⁵ Beachtet man die CP-Verletzung, lauten diese Zustände eigentlich

$$|K^0\rangle = \frac{N}{2p}(|K_S\rangle + |K_L\rangle)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{N}{2q}(-|K_S\rangle + |K_L\rangle),$$

wobei $p = 1 + \varepsilon$ und $q = 1 - \varepsilon$ sowie $N^2 = |p|^2 + |q|^2$ gilt. Dabei ist ε der die CP-Symmetrie verletzende Parameter.

Zustandes darstellen und $r_{S,L}$ die sogenannte Zerfallsbreite⁷⁶ ist. Dadurch ist auch die Zeitentwicklung des Kaon-Zustands und Anti-Kaon-Zustands gegeben durch

$$\begin{aligned} |K^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\lambda_S t} |K_S\rangle + e^{-i\lambda_L t} |K_L\rangle) \\ |\bar{K}^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\lambda_S t} |K_S\rangle - e^{-i\lambda_L t} |K_L\rangle) . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Nun lässt sich auch hier eine **Komplementarität zweier Informationen**, nämlich der Welches-Teilchen-Information und der Information über die Strangenesszahl zeigen. Durch Umschreiben von Glg. (6.14) in die Basis von $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ erhält man

$$\begin{aligned} |K^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 + e^{-1/2\Delta\Gamma t - i\Delta m t}}{\sqrt{1 + e^{-\Delta\Gamma t}}} |K^0\rangle + \frac{1 - e^{-1/2\Delta\Gamma t - i\Delta m t}}{\sqrt{1 + e^{-\Delta\Gamma t}}} |\bar{K}^0\rangle \right) \\ |\bar{K}^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 - e^{-1/2\Delta\Gamma t - i\Delta m t}}{\sqrt{1 + e^{-\Delta\Gamma t}}} |K^0\rangle + \frac{1 + e^{-1/2\Delta\Gamma t - i\Delta m t}}{\sqrt{1 + e^{-\Delta\Gamma t}}} |\bar{K}^0\rangle \right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

mit $\Delta\Gamma = \Gamma_L - \Gamma_S$ und $\Delta m = m_L - m_S$. Dies beschreibt die Oszillation zwischen den Zuständen von Kaon und Anti-Kaon, auch genannt Strangeness-Oszillation.⁷⁷ In einfachen Worten: Hat man zu einem gewissen Zeitpunkt ($t = 0$) ein Kaon, kann zu einem späteren Zeitpunkt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein Anti-Kaon gefunden werden. Die Wahrscheinlichkeit ein Kaon beziehungsweise ein Anti-Kaon zu finden,

⁷⁶ Mit Zerfallsbreite Γ bezeichnet man eine besonders in der Elementarteilchenphysik verwendete Messgröße, durch welche die Lebensdauer von kurzlebigen Teilchenzuständen bestimmt werden kann!

⁷⁷ Die Strangeness-Quantenzahlen oszillieren zwischen +1 (Kaon) und -1 (Anti-Kaon).

wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Kaon erzeugt wurde, ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 P(K^0(t)|K^0) &= |\langle K^0|K^0(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{1 + e^{-1/2\Delta\Gamma t - i\Delta m t}}{\sqrt{1 + e^{-\Delta\Gamma t}}} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos(\Delta m t)}{\cosh(\frac{\Delta\Gamma}{2}t)} \right) \\
 P(\bar{K}^0(t)|K^0) &= |\langle \bar{K}^0|K^0(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{1 - e^{-1/2\Delta\Gamma t - i\Delta m t}}{\sqrt{1 + e^{-\Delta\Gamma t}}} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos(\Delta m t)}{\cosh(\frac{\Delta\Gamma}{2}t)} \right).
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Die Visibility ergibt sich damit zu

$$\mathcal{V}_0 = \frac{1}{\cosh(\frac{\Delta\Gamma}{2}t)}. \tag{6.17}$$

Für die Predictability betrachten wir $|K^0(t)\rangle$ in der Basis $|K_S\rangle$ und $|K_L\rangle$ (vgl. Glg. 6.14). Durch einfaches Umformen lässt sich dies darstellen als

$$|K_0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\Gamma_L}{2}t - im_L t} (e^{\frac{\Delta\Gamma}{2}t + i\Delta m t} |K_S\rangle + |K_L\rangle).$$

Die beiden Zustände $|K_S\rangle$ und $|K_L\rangle$ können als zwei (abstrakte) **Spalte beziehungsweise Wege interpretiert** werden. Da $\Delta\Gamma < 0$ gilt, ist der Ausdruck $e^{\frac{\Delta\Gamma}{2}t}$ streng monoton fallend. Der ‚Spalt‘ $|K_S\rangle$ wird also im Laufe der Zeit immer schmaler, während die beiden ‚Spalte‘ zum Zeitpunkt $t = 0$ gleiche Breite haben. Für die Predictability ist es daher naheliegend, die Wahrscheinlichkeiten $p_1 := P(|K_S(t)\rangle | K^0)$ und $p_2 := P(|K_L(t)\rangle | K^0)$ zu betrachten. Dies sind die Wahrscheinlichkeiten ein kurzlebiges beziehungsweise langlebiges Kaon zu finden, unter der Bedingung, dass zu Beginn ein Kaon erzeugt wurde. In anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Kaon durch den $|K_S\rangle$ beziehungsweise $|K_L\rangle$ Spalt gegangen ist. Ausdrücken von Glg. (6.13) in der Basis von $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ liefert sofort die Predictability

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= |p_1 - p_2| = \left| |\langle K^0|K_S(t)\rangle|^2 - |\langle K^0|K_L(t)\rangle|^2 \right| \\
 &= \left| \tanh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) \right|.
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Wie bereits in den vorhergehenden Beispielen erhalten wir mit $x := \frac{\Delta\Gamma}{2}t$ erneut

$$\mathcal{P}(x)^2 + \mathcal{V}_0(x)^2 = \tanh^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 \quad \forall x, \quad (6.19)$$

womit die Komplementarität beider Informationen für jeden beliebigen Zeitpunkt gezeigt und somit das **bohorsche Komplementaritätsprinzip (exakt) erfüllt** ist.

Dieses Ergebnis lässt sich auch intuitiv verstehen und begründen. Je länger gewartet wird, umso kleiner wird die Wahrscheinlichkeit ein kurzlebiges Kaon zu finden (und umso größer wird die Wahrscheinlichkeit, ein langlebiges zu finden). Im Extremfall, wo mit Sicherheit gesagt werden kann, dass sich das Kaon im Zustand $|K_L\rangle$ befindet, erhält man zu 50% ein Kaon und zu 50% ein Anti-Kaon, wie sich leicht aus der entsprechenden Basisdarstellung ablesen lässt. Dies stimmt auch mit den Wahrscheinlichkeiten aus Glg. (6.16) überein. Die Wahrscheinlichkeit, ein Kaon beziehungsweise ein Anti-Kaon zu finden, pendelt sich auf 1/2 (50%) ein und die Interferenz verschwindet, was auch in Abbildung 6.5 zu sehen ist.

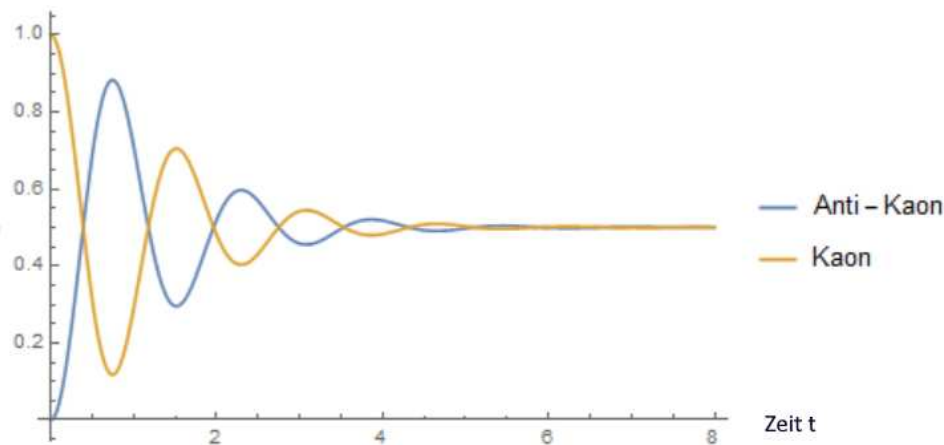


Abbildung 6.5: Wahrscheinlichkeit ein Kaon beziehungsweise Anti-Kaon zu finden unter der Bedingung, dass zu Beginn ein Kaon erzeugt wurde. Die Wahrscheinlichkeit pendelt sich auf 1/2 ein.

Die **Information** über langlebige beziehungsweise kurzlebige Kaonen ist also **komplementär** zur Interferenzfähigkeit von Kaon und Anti-Kaon.

7 Das Erzwingen von Welcher-Weg-Information durch Detektoren

In diesem Abschnitt modifizieren wir die Messapparatur aus Kapitel 5, wieder basierend auf dem Paper ‚Fringe Visibility and Which-Way Information: An Inequality‘ von Berthold-Georg Englert. Wir setzen voraus, dass das unmodifizierte Quantensystem eine maximale *a priori* Visibility ($\mathcal{V}_0 = 1$) hat. Der initiale Blochvektor lautet demnach⁷⁸

$$\mathbf{s}_Q^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

In die Messapparatur werden nun **Detektoren** eingefügt, welche den Weg ermitteln sollen, den die Quantenobjekte nehmen (vgl. Abb 7.1). Der Zustand des gesamten

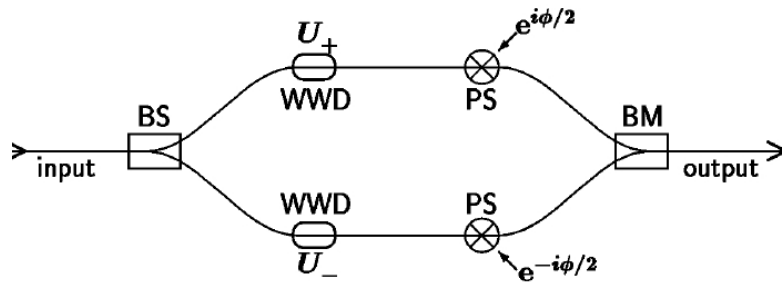


Abbildung 7.1: Interferometer mit Welcher-Weg-Detektor

Quelle: Englert, 1996, S.2155

Systems ergibt sich mithilfe des Tensorprodukts und wird durch den Dichteoperator

$$\rho^{(i)} = \rho_Q^{(i)} \otimes \rho_D^{(i)} \quad (7.1)$$

⁷⁸ Natürlich gäbe es noch andere Möglichkeiten, bis auf Vorzeichen liefern sie jedoch alle das gleiche Ergebnis.

dargestellt. Die Änderung des Detektorzustandes $\rho_D^{(i)}$ durch die Interaktion mit dem Quantenobjekt wird durch

$$\rho^{(i)} \rightarrow U_{\pm}^{\dagger} \rho^{(i)} U_{\pm} \quad \text{für den } \pm 1\text{-Weg}$$

beschrieben, wobei U_+ und U_- unitäre Operatoren sind. Der Vorgang in der Mitte des Interferometers wird nun naheliegenderweise mithilfe des Operators

$$\exp\left(i \frac{\phi}{2}\right) \frac{\mathbb{1} + \sigma_z}{2} \otimes U_+ + \exp\left(-i \frac{\phi}{2}\right) \frac{\mathbb{1} - \sigma_z}{2} \otimes U_-$$

ausgedrückt, der den Phase-Shifter ersetzt.⁷⁹ Der **finale Zustand des gesamten Quantensystems** errechnet sich mithilfe von⁸⁰

$$\begin{aligned} \rho^{(f)} &= \\ &= \exp\left(i \frac{\pi}{4} \sigma_y\right) \left[\exp\left(-i \frac{\phi}{2}\right) \frac{\mathbb{1} + \sigma_z}{2} \otimes U_+^{\dagger} + \exp\left(i \frac{\phi}{2}\right) \frac{\mathbb{1} - \sigma_z}{2} \otimes U_-^{\dagger} \right] \rho_Q^{(i)} \otimes \rho_D^{(i)} \\ &\quad \exp\left(i \frac{\pi}{4} \sigma_y\right) \left[\exp\left(i \frac{\phi}{2}\right) \frac{\mathbb{1} + \sigma_z}{2} \otimes U_+ + \exp\left(-i \frac{\phi}{2}\right) \frac{\mathbb{1} - \sigma_z}{2} \otimes U_- \right] \exp\left(-i \frac{\pi}{4} \sigma_y\right). \end{aligned}$$

Dies lässt sich nach kurzer Rechnung vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \rho^{(f)} &= \frac{\mathbb{1} + \sigma_x}{4} \otimes U_+^{\dagger} \rho_D^{(i)} U_+ + \frac{\mathbb{1} - \sigma_x}{4} \otimes U_-^{\dagger} \rho_D^{(i)} U_- \\ &\quad - \frac{\sigma_z - i\sigma_y}{4} \exp(-i[\phi - \theta]) \otimes U_+^{\dagger} \rho_D^{(i)} U_- \\ &\quad - \frac{\sigma_z + i\sigma_y}{4} \exp(i[\phi - \theta]) \otimes U_-^{\dagger} \rho_D^{(i)} U_+ . \end{aligned} \tag{7.2}$$

⁷⁹ Beachte, dass für $U_{\pm} = \mathbb{1}$ der Ausdruck genau dem Phaseshifter $\exp(i \frac{\phi}{2} \sigma_z)$ entspricht.

⁸⁰ Um die Rechnung nicht noch unübersichtlicher zu gestalten, wurden die Faktoren $\otimes \mathbb{1}$ weggelassen.

Um nur den Zustand des Quantenobjekts $\rho_Q^{(f)}$ zu erhalten, muss die partielle Spur über den Hilbertraum des Systems von ρ_D berechnet werden, also

$$\rho_Q^{(f)} = \text{Tr}_D(\rho^{(f)}),$$

was wieder durch einen Dichteoperator der Form

$$\rho_Q^{(f)} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{s}_Q^{(f)} \boldsymbol{\sigma})$$

beschrieben werden kann. Setzt man $\mathcal{C} := \text{tr}_D(U_+^\dagger \rho_D^{(i)} U_-)$ und damit $\mathcal{C}^* = \text{tr}_D(U_-^\dagger \rho_D^{(i)} U_+)$, sowie $\alpha := \phi - \theta$, erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned} \rho_Q^{(f)} &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + i \frac{e^{-i\alpha} \mathcal{C} - e^{i\alpha} \mathcal{C}^*}{2} \sigma_y - \frac{e^{-i\alpha} \mathcal{C} + e^{i\alpha} \mathcal{C}^*}{2} \sigma_z \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} - \Im(e^{-i\alpha} \mathcal{C}) \sigma_y - \Re(e^{-i\alpha} \mathcal{C}) \sigma_z \right), \end{aligned}$$

wobei $\Re(\mathcal{C})$ den Realteil und $\Im(\mathcal{C})$ den Imaginärteil von $\mathcal{C}$ bezeichnet. Daher ergibt sich der Blochvektor zu

$$\mathbf{s}_Q^{(f)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Re(\mathcal{C}) \sin \alpha - \Im(\mathcal{C}) \cos \alpha \\ -\Re(\mathcal{C}) \cos \alpha - \Im(\mathcal{C}) \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Wie in Kapitel 5 betrachten wir nun die Wahrscheinlichkeit, den Wert -1 zu erhalten, also

$$\begin{aligned} p_\phi &= \text{tr}_Q \left(\left(\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_z) \rho_Q^{(f)} \right) \right) = \frac{1}{2} (1 + \Re(\mathcal{C}) \cos \alpha + \Im(\mathcal{C}) \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \underbrace{\sqrt{\Re(\mathcal{C})^2 + \Im(\mathcal{C})^2}}_{=|\mathcal{C}|} \cos(\tilde{\alpha}) \right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Dies liefert wieder ein **Interferenzmuster der Form (6.1)**⁸¹ und die **Visibility** ergibt sich zu

$$\mathcal{V} = |\mathcal{C}|. \quad (7.5)$$

Selbige Rechnungen können ziemlich analog mit einem allgemeinen Anfangszustand $\rho_Q^{(i)}$ durchgeführt werden, und liefern für die Visibility

$$\mathcal{V} = |\mathcal{C}| \mathcal{V}_0. \quad (7.6)$$

Daraus ist unmittelbar zu erkennen, dass gilt

$$\mathcal{V} \leq \mathcal{V}_0 .$$

Durch ein Erzwingen der Weg-Information verringern wir also die Visibility und damit die Information über das Interferenzmuster im Vergleich zum Versuch ohne Detektoren.

Den Endzustand des Detektors erhält man durch

$$\rho_D^{(f)} = \text{tr}_D(\rho^{(f)}) = \frac{1}{2} U_+^\dagger \rho_D^{(i)} U_+ + \frac{1}{2} U_-^\dagger \rho_D^{(i)} U_- := \frac{1}{2} \rho_D^{(+)} + \frac{1}{2} \rho_D^{(-)} .$$

Dies entspricht der **Summe der zwei finalen Detektorzustände für die beiden zugehörigen Wege** (± 1), gewichtet durch den Anteil der Quantenobjekte, welche den jeweiligen Weg nehmen. Aufgrund der Symmetrie (so wurde ja $\rho_Q^{(i)}$ bezüglich dem Interferometer gewählt) ergibt sich also genau 50% für jeden Weg. Um die Welche-Weg-Information aus dem Detektor zu erhalten, muss eine Messung an diesem vorgenommen werden. In anderen Worten: Es muss eine **passende Observable W gemessen** werden. Die möglichen Messergebnisse sind die Eigenwerte W_k ($k \in \mathbb{N}$) mit den zugehörigen (nicht entarteten) Eigenvektoren $|W_k\rangle$. Die Wahrscheinlichkeit den i.ten

⁸¹ Das in Glg. 7.4 auftretende Minus mag auf den ersten Blick etwas seltsam erscheinen. Es entsteht durch die Umformung

$$1 + \Re(\mathcal{C}) \cos \alpha + \Im(\mathcal{C}) \sin \alpha = (1 - ([-\Re(\mathcal{C})] \cos \alpha + [-\Im(\mathcal{C})] \sin \alpha) .$$

Messwert W_i zu erhalten, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 p_{W_i} &= \text{tr}_D(P_{W_i} \rho_D^{(f)}) = \sum_k \underbrace{\langle W_k | W_i \rangle}_{=\delta_{k,i}} |W_i\rangle \rho_D^{(f)} \langle W_k| \\
 &= \langle W_i | \rho_D^{(f)} | W_i \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\langle W_i | \rho_D^{(+)} | W_i \rangle}_{=p(W_i|+1)} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle W_i | \rho_D^{(-)} | W_i \rangle}_{=p(W_i|-1)}.
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Dabei ist $p(W_i | \pm 1)$ die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert W_i zu erhalten, wenn sich das Teilchen auf den $+1$ beziehungsweise -1 Weg befindet. Angenommen man will den richtigen Weg erraten und erhält den entsprechenden Messwert W_i , so ist es sinnvoll **auf jenen Weg zu setzen, der einen größeren Beitrag zu p_{W_i} leistet**. Wäre beispielsweise $p(W_i | +1) > p(W_i | -1)$, so sollte die Wahl auf den $+1$ -Weg fallen. Im ungünstigsten Fall sind die Beiträge von W_i zu den beiden Wegen des Interferometers gleich groß, in diesem Fall leistet der Messwert **keinen Beitrag zur Welcher-Weg-Information**. Im optimalen Fall leistet der Wert W_i nur Beitrag zu einem der beiden Wege - dann kann für dieses Quantenobjekt der **Weg eindeutig bestimmt** werden. Ein Maß, welches angibt, wie gut unsere Chancen beim Erraten des Weges nach mehrfacher Durchführung des Experiments sind (also nach dem Durchschicken mehrerer Quantenobjekte), ist gegeben durch die sogenannte ‚**Likelihood**‘ $\mathcal{L}_W$. Diese ist definiert durch

$$\mathcal{L}_W := \sum_k \text{Max} \left\{ \frac{1}{2} \langle W_k | \rho_D^{(+)} | W_k \rangle ; \frac{1}{2} \langle W_k | \rho_D^{(-)} | W_k \rangle \right\}. \tag{7.8}$$

Dass dies ein sinnvolles **Maß für das richtige Raten des Weges** darstellt, lässt sich leicht erkennen. Trägt **jeder** mögliche Messwert W_k nur zu **einem** der beiden Wege bei - ist also entweder $p(W_k | +1) = 0$ oder $p(W_k | -1) = 0$ für den jeweiligen Messwert W_k -, so folgt wegen

$$\text{Max} \left\{ \frac{1}{2} \langle W_i | \rho_D^{(+)} | W_i \rangle ; \frac{1}{2} \langle W_i | \rho_D^{(-)} | W_i \rangle \right\} = \langle W_i | \rho_D^{(f)} | W_i \rangle$$

sofort, dass

$$\mathcal{L}_W = \sum_k \langle W_k | \rho_D^{(f)} | W_k \rangle = 1,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aus der Vollständigkeitsrelation folgt.⁸²

Im gegenteiligen Fall, wenn **jeder** Messwert W_k **genau gleich viel** zu beiden Wegen beiträgt - also $p(W_k|+1) = p(W_k|-1)$ -, erhält man

$$\text{Max}\left\{\frac{1}{2}\langle W_i|\rho_D^{(+)}|W_i\rangle; \frac{1}{2}\langle W_i|\rho_D^{(-)}|W_i\rangle\right\} = \frac{1}{2}\langle W_i|\rho_D^{(+)}|W_i\rangle = \frac{1}{2}\langle W_i|\rho_D^{(f)}|W_i\rangle,$$

wobei benutzt wurde, dass für $p(W_i|+1) = p(W_i|-1)$ der Zusammenhang

$$\langle W_i|\rho_D^{(f)}|W_i\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle W_i|\rho_D^{(+)}|W_i\rangle}_{=p(W_i|+1)} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle W_i|\rho_D^{(-)}|W_i\rangle}_{=p(W_i|-1)} = \langle W_i|\rho_D^{(+)}|W_i\rangle$$

gilt. Daher ergibt sich die Likelihood zu

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{2} \sum_k \langle W_k|\rho_D^{(+)}|W_k\rangle = \frac{1}{2}.$$

Diese beiden Extremfälle sind auch intuitiv klar: Wenn die vom Detektor gelieferten Messwerte jeweils eindeutig einem Weg zugeordnet werden können, kann der Weg, welchen das Teilchen genommen hat, mit Sicherheit ($= 1$) bestimmt werden. Wenn es keine Möglichkeit gibt, die jeweiligen Messwerte eher dem einen oder dem anderen Weg zuzuordnen, bleibt nur noch (absolutes) Raten - bei einem Zwei-Weg-Interferometer entspricht das gerade einer 50% zu 50% Chance, beziehungsweise $1/2$ zu $1/2$.

Im Allgemeinen befindet sich der Wert der Likelihood $\mathcal{L}_W$ also im Intervall $[\frac{1}{2}; 1]$. Im Sinne eines **Maßes für die Welcher-Weg-Information** liegt es nahe, die Likelihood so zu skalieren, dass sie bei vollständigem Unwissen den Wert 0 und bei vollständiger Welcher-Weg-Information den Wert 1 annimmt:

$$\mathcal{K}_W = 2\mathcal{L}_W - 1 \quad 0 \leq \mathcal{K}_W \leq 1 \quad (7.9)$$

⁸² Dies ist auch intuitiv leicht zu erkennen, denn die Wahrscheinlichkeit **irgendeinen** Messwert zu erhalten, beträgt zwangsläufig 1.

Benutzt man zusätzlich die leicht nachzurechnende Identität

$$\text{Max}\{x; y\} = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}|x - y|,$$

erhält man den Ausdruck

$$\mathcal{K}_W = \frac{1}{2} \sum_k |\langle W_k | \rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)} | W_k \rangle|. \quad (7.10)$$

Der Wert $\mathcal{K}_W$ hängt ab von der Observable W und insbesondere deren Eigenwerte W_k , die man misst. Die **maximale Unterscheidbarkeit** der Wege wird als ‚**Distinguishability**‘ $\mathcal{D}$ bezeichnet und ist definiert durch

$$\max_W \mathcal{K}_W = \mathcal{D}.$$

Den maximalen Wert für $\mathcal{K}_W$ erhält man sichtlich, wenn die Eigenvektoren $|W_k\rangle$ gleichzeitig die Eigenvektoren der Differenz $\rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)}$ sind. Dadurch lässt sich $\mathcal{D}$ explizit anschreiben als

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \text{tr}_D(|\rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)}|). \quad (7.11)$$

Aus mathematischer Sicht stellt der Ausdruck $\mathcal{D}$ den Abstand (bezüglich der Spurnorm) zwischen $\rho_D^{(+)}$ und $\rho_D^{(-)}$ dar. Der Sachverhalt lässt sich auch mithilfe der Blochkugel darstellen: Im Optimalfall liegen beide Zustände auf der Blochkugel gegenüber, im schlechtesten Fall liegen sie am selben Punkt.

Es ist zusätzlich hervorzuheben, dass wir insgesamt die Ungleichung

$$0 \leq \mathcal{K}_W \leq \mathcal{D}$$

erhalten. Der Wert 0 lässt sich hierbei als die Predictability interpretieren, da wir ein symmetrische Messanordnung (also $\mathcal{P} = 0$) vorausgesetzt haben. Für eine asymmetrisches Interferometer beziehungsweise einen beliebigen Anfangszustand $\rho_Q^{(i)}$ mit $\mathcal{P} \neq 0$ lässt sich quasi analog zeigen, dass

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{K}_W \leq \mathcal{D} \quad (7.12)$$

gilt. Selbst im schlechtesten Fall ist die mithilfe von Detektoren gewonnene Welcher-Weg-Information also **nie schlechter als die Predictability**. Insbesondere entspricht die Predictability jener Welcher-Weg-Information, die man bei ‚nutzlosen‘ Detektoren (beziehungsweise in Abwesenheit von Detektoren) erhalten würde. Auf der anderen Seite kann die mithilfe von Detektoren gewonnene Welcher-Weg-Information - quantifiziert durch den Wert $\mathcal{K}_W$ - niemals den Wert $\mathcal{D}$ übersteigen. Die Distinguishability $\mathcal{D}$ stellt **eine naturgegebene Obergrenze** dar. Der Physiker Berthold Englert formulierte dies so:

„[T]he distinguishability $\mathcal{D}$ represents Nature’s information about the ways whereas the knowledge $\mathcal{K}_W$ is what Man can learn from measuring the observable W , the inequality $\mathcal{K}_W \leq \mathcal{D}$ states an obvious hierarchy: Man cannot be smarter than Nature.“⁸³

Da nun auch in dieser Experimentieranordnung die Welcher-Weg-Information mithilfe von $\mathcal{D}$ und die Deutlichkeit des Interferenzmusters durch $\mathcal{V}$ quantifiziert sind, gilt es nun die Ungleichung

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1 \quad (7.13)$$

zu zeigen. Sofern der Detektor in einem reinen Zustand ist, also

$$\rho_D^{(i)} = |d\rangle \langle d|,$$

erhält man

$$\rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)} = \underbrace{U_+^\dagger |d\rangle \langle d| U_+}_{:=|d_+\rangle \langle d_+|} - \underbrace{U_-^\dagger |d\rangle \langle d| U_-}_{:=|d_-\rangle \langle d_-|}.$$

Nun kann man zur Berechnung von $\mathcal{D}$ entweder die Spurnorm dieses Operators ermitteln oder ausnutzen, dass $\mathcal{D}$ aufgrund von

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_k |\langle W_k | \rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)} | W_k \rangle|$$

einfach **die (betragliche) Summe der Eigenwerte von $\rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)}$ darstellt** (mul-

⁸³ vgl. Englert, 1999, S.29

tipliziert mit dem Faktor $1/2$). Da $|d_+\rangle$ und $|d_-\rangle$ nicht orthogonal zueinander sein müssen, erhält man für die beiden Eigenwerte $\pm\sqrt{1 - |\langle d_-|d_+\rangle|^2}$, woraus sofort folgt, dass

$$\mathcal{D} = \sqrt{1 - |\langle d_-|d_+\rangle|^2} = \sqrt{1 - |\langle d|U_-U_+^\dagger|d\rangle|^2}. \quad (7.14)$$

Die Visibility ergibt sich aus Glg. (7.5) mit $\mathcal{C} := \text{tr}_D(U_+^\dagger \rho_D^{(i)} U_-)$ zu

$$\mathcal{V} = |\langle d|U_-U_+^\dagger|d\rangle|. \quad (7.15)$$

Somit erhält man unmittelbar

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 = 1, \quad (7.16)$$

womit die **Gleichheit bei reinen Zuständen** gezeigt ist.

Der allgemeine Beweis von Glg. (7.12) erfolgt mithilfe der Dreiecksungleichung für die Spurnorm

$$\text{tr}(|A \pm B|) \leq \text{tr}(|A|) + \text{tr}(|B|).$$

Die Spektralzerlegung von $\rho_D^{(i)}$ liefert

$$\rho_D^{(i)} = \sum_k D_k |d_k\rangle \langle d_k|,$$

wobei $D_k \geq 0$, $\sum_k D_k = 1$ und $\langle d_j|d_k\rangle = \delta_{j,k}$ gilt. Eingesetzt in Glg. (7.10) liefert das

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \text{tr}_D \left(\left| \sum_k D_k U_+^\dagger |d_k\rangle \langle d_k| U_+ - \sum_k D_k U_-^\dagger |d_k\rangle \langle d_k| U_- \right| \right) \\ &\stackrel{\text{Dr.unglg}}{\leq} \frac{1}{2} \sum_k D_k \text{tr}_D \left(\left| U_+^\dagger |d_k\rangle \langle d_k| U_+ - U_-^\dagger |d_k\rangle \langle d_k| U_- \right| \right) \\ &= \sum_k D_k \sqrt{1 - |\langle d_k|U_-U_+^\dagger|d_k\rangle|^2}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

wobei im letzten Schritt das Ergebnis für reine Zustände (7.14) verwendet wurde.

Für die Visibility ergibt sich

$$\mathcal{V} = \left| \sum_k D_k \langle d_k|U_-U_+^\dagger|d_k\rangle \right|. \quad (7.18)$$

So erhält man

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq \sum_{j,k} D_j D_k \left(\sqrt{1 - |u_j|^2} \sqrt{1 - |u_k|^2} + \frac{1}{2} u_j^* u_k + \frac{1}{2} u_k^* u_j \right), \quad (7.19)$$

wobei $u_k := \langle d_k | U_- U_+^\dagger | d_k \rangle$. Da stets $|u_k| \leq 1$ gilt - es handelt sich ja schließlich nur um Skalarprodukte von Einheitsvektoren -, erhält man schlussendlich die gesuchte Ungleichung

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq \sum_{j,k} D_j D_k = 1. \quad (7.20)$$

Diese Herleitung beruht auf einem symmetrischen Interferometer (also solche mit $\mathcal{P} = 0$ und $\mathcal{V}_0 = 1$), gilt aber **auch für asymmetrische Interferometer**, wie sich ziemlich analog zeigen lässt.⁸⁴

Die hier erhaltenen Größen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{V}$ unterscheiden sich von den Größen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{V}_0$ aus Kapitel 5 (und 6). Die *a priori* Predictability und Visibility ist durch den anfänglichen Zustand $\rho_Q^{(i)}$ in Bezug auf die Messanordnung gegeben, während die hier beschriebenen Größen aus der Quantenbeschreibung des Detektors folgen.⁸⁵ Dies zeigt sich auch darin, dass sich durch die den Operator zugehörigen unitären Operatoren $U_- U_+^\dagger := \exp(iX)$ eine neue Observable X definieren lässt, mit der sich die Distinguishability und die Visibility schreiben lassen als⁸⁶

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \text{tr}_D \left(\left| \rho_D^{(i)} - e^{-iX} \rho_D^{(i)} e^{iX} \right| \right) \quad (7.21)$$

⁸⁴ Insbesondere führt das zu der Ersetzung $\rho_D^{(+)} - \rho_D^{(-)} \rightarrow p_{+1} \rho_D^{(+)} - p_{-1} \rho_D^{(-)}$, wobei $\mathcal{P} = |p_{+1} - p_{-1}|$. Dabei ergibt sich

$$\mathcal{V} = |\mathcal{C}| \mathcal{V}_0, \\ \mathcal{D} \leq \sqrt{1 - (1 - \mathcal{P}^2) |\mathcal{C}|},$$

was sofort auf $\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1$ führt.

⁸⁵ Dies widerspricht sich nicht mit dem Postulat, dass Messapparate klassisch beschrieben werden müssen, denn Zugriff hat man schlussendlich nur auf die Messung der Observable W , was analog zu anderen Messungen im Rahmen der Kopenhagener Deutung abläuft (und damit auch die gleichen Probleme mit sich bringt).

⁸⁶ vgl. Englert, 1996, S.2157

$$\mathcal{V} = |\text{tr}_D(\rho_D^{(i)} e^{iX})| . \quad (7.22)$$

Trotzdem sind **beide Paare ein Maß für die Informationen über den Weg und das Interferenzmuster**. Sie sind **Instanziierungen des Komplementaritätsprinzips**, wenn auch unter etwas verschiedenen Umständen. Allerdings ist diese Trennung von *a priori* Information und solcher, die man erst durch Messung erhält, unklar voneinander getrennt. Denn der Detektor zählt auch zur Messanordnung und würde man seinen Zustand $q_D^{(i)}$ und die entsprechenden Operatoren $U_{\pm}$ bereits kennen, wären die Distinguishability und Visibility ebenfalls *a priori* festgelegt. Die Kenntnis dieser Größen ist aber in der Praxis im Allgemeinen nicht der Fall, weshalb solche Unterscheidungen dennoch sinnvoll sind.

8 Diskussion der Ergebnisse in Bezug auf Bohr

Das Erzwingen von Informationen durch Messungen, wie etwa der Information über den Weg durch Detektoren, war bereits Thema in Bohrs Abhandlungen, insbesondere zum Doppelspalt. Allerdings sprach er in diesem Kontext nicht von **(komplementären) Informationen**, sondern von **(komplementären) Beobachtungen** beziehungsweise Messungen. Es gilt daher die **Instanziierungen des bohrschen Komplementaritätsprinzips** in Bezug auf *a priori* Predictability und Visibility (wie sie in Kapitel 5 eingeführt wurden) und Distinguishability und Visibility (wie sie in diesem Kapitel behandelt wurden). Kritisch zu betrachten ist auch der Zusammenhang zur **Unbestimmtheitsrelation**, da diese zwar eine zentrale Rolle in Bohrs Umsetzungen des Komplementaritätsprinzips einnahm, in Bezug auf die hier eingeführten Observablen ist die Situation jedoch etwas komplizierter.

Hier muss erneut erwähnt werden, dass für Bohr nur die Quantenphänomene, also das Beobachtbare, für sein Komplementaritätsprinzip von Bedeutung war. Es kümmerte ihn (aus einer ontologischen Perspektive) nicht, ob im Rahmen des Formalismus nun eher das Wellenmodell oder das Teilchenmodell zum Einsatz kam. Das Quantenobjekt an sich war sowieso nicht beschreibbar. Ob beispielsweise im Zusammenhang mit einem Elektron nun eine Wellenlänge oder ein Impuls auftrat⁸⁷, war rein dem Formalismus zuzuschreiben und nicht der von uns wahrnehmbaren Realität. Ob die Mathematik zur Beschreibung des Photoeffekts uns nun eher an das Teilchenmodell erinnert oder die Elektronenbeugung an das Wellenmodell - all das hatte in diesem Sinne keine Relevanz für das Komplementaritätsprinzip. Was aber Relevanz hatte, waren **die tatsächlich machbaren Beobachtungen**, beispielsweise die Interferenzmuster auf einem Schirm. Betrachtet man nun die Ergebnisse aus Kapitel 5, so können diese Interferenzmuster im Prinzip innerhalb der klassischen Physik beschrieben werden - das Selbige gilt für einen Doppelspalt mit ungleich breiten Spalten. Problematisch wird dies erst, wenn man tatsächlich auf Einzelteilchen abzielt.⁸⁸ Die komplementäre Beobachtung tritt für

⁸⁷ Mit Zusammenhang ist hier gemeint, dass dadurch eine Vorhersage für die Wahrscheinlichkeiten möglicher Messergebnisse gemacht werden kann.

⁸⁸ Man muss dabei stets beachten, dass zu Bohrs Lebzeiten solche Versuche schlichtweg nicht realisierbar waren.

Bohr erst dann auf, wenn der Weg durch Detektoren exakt bestimmt wird⁸⁹, und das Interferenzmuster dadurch zusammenbricht. Auf der anderen Seite ist es völlig legitim zu argumentieren, dass ein schmalerer Spalt beziehungsweise ein asymmetrisches Interferometer **ebenso eine Ermittlung des Weges ermöglichen** (wenn auch im Allgemeinen nur teilweise). Wie Bohr sein Komplementaritätsprinzip nun verstanden haben wollte, könnte nur er selbst beantworten - es ist schlussendlich aber von geringfügiger Bedeutung. Denn sofern man die Interpretation als Information auf die in dieser Arbeit betrachteten Größen anwendet, lässt sich damit auf jeden Fall eine Form des Komplementaritätsprinzips quantifizieren. Zwar haben die beiden ermittelten Relationen $\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}_0^2 \leq 1$ und $\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1$ etwas unterschiedliche Bedeutungen, beides sind aber Relationen, welche die Komplementarität von Welcher-Weg-Information und der Information über das Interferenzmuster beschreiben. Dieser Ansatz kann problemlos als **Verallgemeinerung von Bohrs Instanziierung des Komplementaritätsprinzips** gesehen werden. Englert argumentiert hier auch im Zusammenhang mit der Unbestimmtheitsrelation. Betrachtet man die Gleichungen (7.21) und (7.22), so lässt sich die Ungleichung $\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1$ nur aus der einen Observable X ableiten. Englert argumentiert, dass diese Relation somit **logisch unabhängig von einer Unbestimmtheitsrelation** (nach Heisenberg-Roberston) sei, welche sich stets auf zwei Observable bezieht.⁹⁰ Allerdings lassen sich die Ungleichungen aus Kapitel 5 beziehungsweise 7 ebenfalls (wenn auch nicht notwendigerweise) mithilfe einer Heisenberg-Robertson Unbestimmtheitsrelation ableiten.⁹¹ Dabei ist allerdings hervorzuheben, dass (bis jetzt) nur in wenigen Versuchen ein solcher Zusammenhang der Unbestimmtheitsrelation mit der Interferenzfähigkeit hergeleitet werden konnte.⁹² Wie und ob die in dieser Arbeit gezeigte Komplementarität mit der Unbestimmtheitsrelation in Verbindung steht, lässt also Raum für weiterführende Diskussionen und kann noch nicht eindeutig geklärt werden. Insofern deutet dies darauf hin, dass das Komplementaritätsprinzip auch in der Quantenphysik - sei es nun in Bezug auf Informationen oder Beobachtungen - umfas-

⁸⁹ Das entspräche einer Distinguishability $\mathcal{D} = 1$, wenn man von reinen Zuständen ausgeht.

⁹⁰ Englert, 1996, S.2156f.

⁹¹ vgl. Dürr, Rempe, 2000, S.1021ff.

⁹² vgl. Dürr, Rempe, 2000, S.1023f.

sendere Bedeutung hat, als von Bohr gedacht. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass sich jede Idee jeweils in den Gewändern ihrer Zeit kleidet - damals war es quasi modern, alles mithilfe der Unbestimmtheitsrelation zu untersuchen. Es ist daher gut möglich und wahrscheinlich, dass ein heute noch lebender Bohr eine andere Interpretation vertreten würde.

9 Didaktische Schlussfolgerungen

In diesem Kapitel werden Folgerungen für die Umlegung der in der Arbeit besprochenen Themen auf die Schule und die Universität (für StudentInnen) gegeben. Dies beinhaltet zum einen den Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus und allgemeinere sprachliche Formulierungen, sowie den Einsatz der Komplementarität von Welcher-Weg-Information und der Information über das Interferenzmuster. Dieser Teil der Arbeit ist zwangsläufig mit der Meinung und Einschätzung des Autors verbunden und kann daher keine objektive Wertung abgeben - allerdings können Ideen für den Lehrprozess entnommen werden.

9.1 Auf schulischer Ebene

Da es nicht Ziel dieser Arbeit ist, ein vollständiges didaktisches Konzept der Quantenphysik zu präsentieren, soll hier bloß auf das Münchner Konzept zur Quantenmechanik verwiesen werden, welches komplett ausgearbeitet und frei zur Verfügung steht.⁹³ Der folgende Abschnitt basiert zu großen Teilen auf diesem Konzept.

Wie insbesondere in den vorhergehenden Kapiteln diskutiert, ist unsere Sprache und unsere Wahrnehmung der Realität (zumindest nach Bohr) für Beschreibungen auf Quantenebene unzureichend. Diese Problematik zieht sich logischerweise auch durch den Unterricht. Hier tritt aber als größeres Problem hinzu, dass der Formalismus der Quantenmechanik, aufgrund seiner Abstraktheit, nicht oder erst am Ende des Kapitels gelehrt wird. Die Quantenphysik wird in ihren ersten Ansätzen präsentiert - also dem bohrschen Atommodell, der Energiequantelung (Plancksches Strahlungsgesetz und Photoeffekt), sowie Materiewellen (De-Broglie-Beziehung). Dass sich daraus die Quantenmechanik ergab und wie diese mit solchen Situationen mathematisch umgeht, kann nicht gleich im Anschluss angesprochen werden.⁹⁴ Hinzu kommt, dass **Quantenobjekte innerhalb dieses Unterrichtslehrgangs beschrieben werden können** und insbesondere aus den Beobachtungen im Experiment auf den teilchen- und wel-

⁹³ abzurufen unter https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt_materialien/milq/index.html, letzter Zugriff: 26.04.2018 (16:32)

⁹⁴ Zumindest raten so gut wie alle Didaktik-Konzepte davon ab.

lenähnlichen Charakter der Objekte selbst geschlossen wird. Ruft man sich die vier Formulierungen des Welle-Teilchen-Dualismus aus Kapitel 4 in Erinnerung, so könnte man hier die Interpretation (3) anwenden. Allerdings wird im Rahmen des Konzepts die **Wellenfunktion als ,statisches Vorhersage-Werkzeug‘** charakterisiert. Im Prinzip führt dies durch die Beschreibbarkeit der Quantenobjekte auf ähnliche Probleme wie in der Como-Version: Wo genau der Welle-Teilchen-Dualismus im Zusammenspiel von Formalismus und physikalischer Realität zu suchen ist, wird zunehmend unklar. Anstelle von Diskussionen über Bohrs Ansätze ist es hier aber sinnvoller auf genaue Ausarbeitungen (scheinbar) widersprüchlicher Beobachtungen und deren Interpretation überzugehen. Dies geschieht in diesem Unterrichtskonzept ebenfalls durch ein **Mach-Zehnder-Interferometer**, allerdings unterscheidet sich der Aufbau (vgl. Abb. 8.1) etwas von jenem in Kapitel 5 und 7. Die Rolle des Phase-Shifters nehmen hier Spiegeln ein, die ebenfalls für einen Phasenunterschied sorgen - allerdings ist dieser fix.

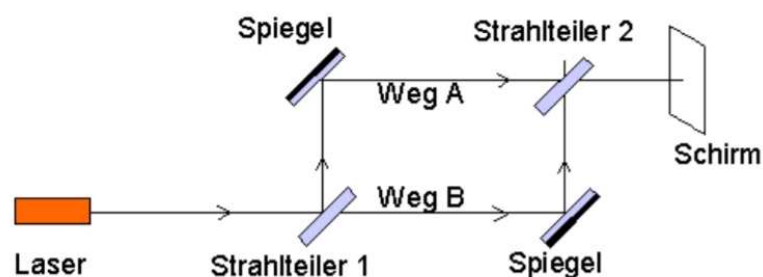


Abbildung 9.1: Systematischer Aufbau des Mach-Zehnder-Interferometers

Quelle: didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt_materialien/milq/index.html

Zudem ergibt sich das Interferenzmuster nicht durch Verstellen des Phasenwinkels. Stattdessen erhält man es aus der Tatsache, dass eigentlich auch hier keine diskrete Situation vorliegt und die Wahrscheinlichkeitsamplituden als kontinuierliche Größen behandelt werden müssen (vgl. Abb. 8.2). Dabei spielt sowohl das Zerfließen der (statistisch zu interpretierenden) Wellenpakete als auch deren Interaktion mit den optischen Geräten im Versuchsaufbau eine Rolle.

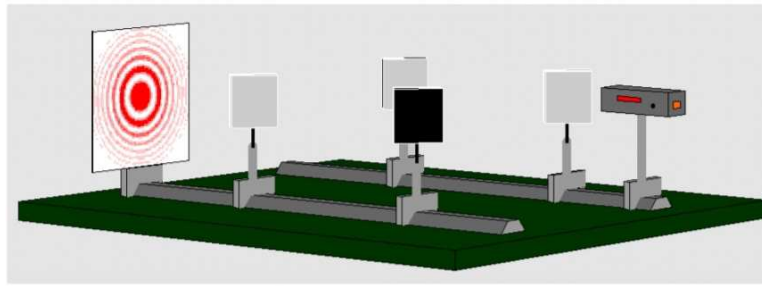


Abbildung 9.2: Interferenzmuster bei einem Mach-Zehnder-Interferometer

Quelle: didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt_materialien/milq/index.html

So kompliziert diese Situation dadurch auf quantitativer Ebene wird⁹⁵, so übersichtlich wird die Behandlung auf qualitativer Basis. Will man überprüfen, ob man den Quantenobjekten auch innerhalb des Interferometers einen Weg zuordnen kann (so wie man es bei Teilchen könnte), so fügt man in jeden Pfad einen Polarisationsfilter ein. Durch Verstellen der Filter werden **die Wege voneinander unterscheidbar** - die beiden Extremfälle sind dabei parallele beziehungsweise waagrechte Einstellungen der Filter und somit bestmögliches Interferenzmuster beziehungsweise kein Interferenzmuster (vgl. Abb 8.3). Daraus folgt unmittelbar, dass ein **Wissen über den Weg komplementär ist zum Interferenzmuster**. Es obliegt dabei der Lehrkraft, ob man diese Beobachtungen nun mit wellen- und teilchenähnlichen Eigenschaften verknüpfen will, wie es der Formulierung (4) des Welle-Teilchen-Dualismus aus Kapitel 4 entspricht, oder ob man die Verknüpfung von Interferenzbild und Weg-Information mit diesen Begriffen unterlässt. Wählt man die erste Möglichkeit, muss klar betont werden, dass die Begriffe von Welle und Teilchen nur in einem symbolischen Kontext zur Beschreibung der Beobachtungen benutzt werden. Anschließend können weitere Möglichkeiten zur Unterscheidung des Weges in verschiedenen Messanordnungen besprochen werden - beispielsweise der Doppelspalt mit unterschiedlich breiten Spalten oder durch Einfügen von Detektoren.

⁹⁵ Diese wird natürlich nicht mit den SchülerInnen behandelt.

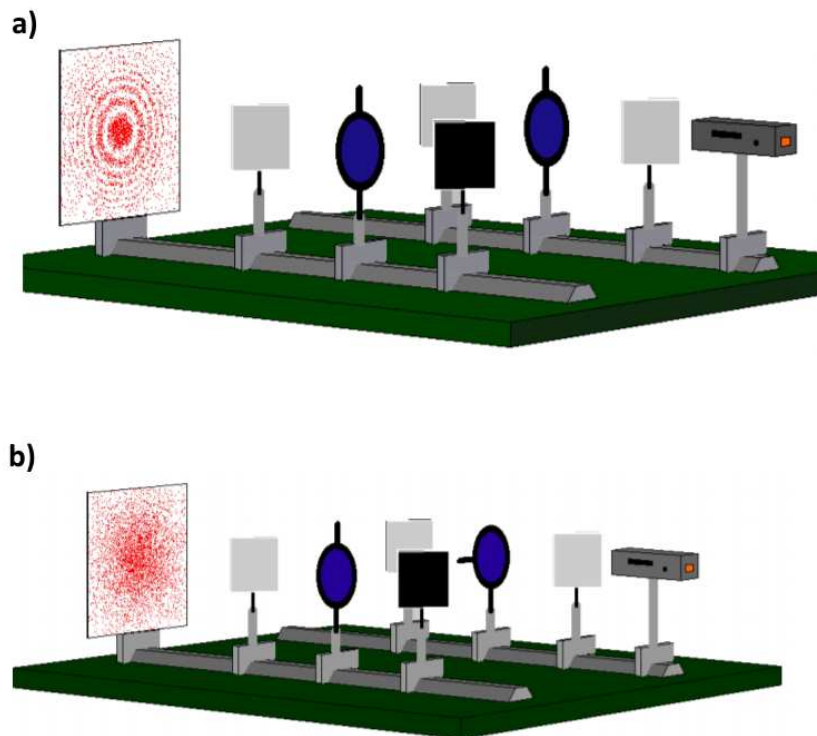


Abbildung 9.3: Beobachtung bei a) parallel eingestellten Filtern beziehungsweise bei b) orthogonal eingestellten Filtern.

Quelle: didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt_materialien/milq/index.html

Man muss hier anmerken, dass die Komplementaritäten aus Kapitel 5 (*a priori* Predictability und Visibility) **nicht** von jenen aus Kapitel 7 (Distinguishability und Visibility) unterschieden werden. Zwar haben die Größen an sich eine unterschiedliche Bedeutung, **beide Relationen stellen jedoch eine Komplementarität von Weginformation und Information über das Interferenzmuster dar** und müssen daher diesbezüglich nicht getrennt werden.⁹⁶ Abschließend ist noch festzuhalten, dass den Schülerinnen und Schülern durchwegs vermittelt werden sollte, dass es keine ‚richtige‘ Interpretation der Quantenphysik gibt. Jegliche Diskussionen über Welle-Teilchen-Dualismus beziehungs-

⁹⁶ Es ist auch diskutierbar, ob die Polarisationsfilter nun zur Messanordnung gehören oder als Detektoren dienen.

weise Komplementaritäten von Beobachtungen oder Informationen machen allerdings nur Sinn, wenn sie im Rahmen einer in sich schlüssigen Interpretation stattfinden.

9.2 Auf universitärer Ebene

Der große Unterschied besteht hier vor allem darin, dass eine **mathematische Grundlage der Quantenmechanik** (wie sie im Rahmen von entsprechenden Einführungsvorlesungen behandelt wird) gegeben ist. Während ein tieferer Einblick in Bohrs Werke und deren Interpretation in größerem Umfang eher in einem Seminar anzusiedeln ist, kann die Komplementarität von Welcher-Weg-Information und der Information über das Interferenzmuster durchaus innerhalb einer Einführungsvorlesung der Quantenmechanik diskutiert werden. Da hier auch eine mathematische Quantifizierung wünschenswert ist, ist ein Aufbau wie auf schulischer Ebene nicht sinnvoll. Stattdessen empfiehlt sich eine **Behandlung wie in Kapitel 5**, da die Messanordnungen zum Erhalt der Welcher-Weg-Information und des Interferenzmusters sehr leicht nachvollziehbar und nicht allzu schwer zu rechnen sind. Allerdings muss eine Motivation für den Versuchsaufbau aus Kapitel 5 gegeben werden.

Ein Einstieg ist **mithilfe des Doppelspaltversuchs** möglich. Interpretiert man die Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsamplitude im Sinne der Kopenhagener Deutung und geht man nicht auf Bohrs finale Version ein, kann man die Quantenteilchen als teilchenähnliche Objekte im Sinne der klassischen Mechanik deuten, wobei Messungen an diesen Objekten statistischen Gesetzen unterworfen sind.⁹⁷ Es ergibt sich wiederum Diskussionsbedarf, wo man hier einen Welle-Teilchen-Dualismus erkennen will, wenn man der Wahrscheinlichkeitsamplitude keine reale Bedeutung zuordnet. Weiters ist keine Komplementarität zwischen den sichtbaren Flecken und dem Interferenzmuster gegeben. Es liegt nun nahe, nach anderen komplementären Beobachtungen zu suchen, die schlampig formuliert einer Welleneigenschaft und einer Teilcheneigenschaft entsprechen. Deckt man einen Spalt zu, erhält man am Schirm ein (annähernd) normalverteiltes Muster, welches an Streuung klassischer Teilchen am Einzelspalt erinnert.

⁹⁷ In Bohrs letztllicher Interpretation wäre dies natürlich nicht möglich, da man Quantenobjekte nicht beschreiben darf, und somit ein Schluss von den Flecken am Schirm auf den teilchenähnlichen Charakter der Quantenobjekte nicht erlaubt ist.

Es liegt nun auf der Hand, diese Beobachtungen genauer zu untersuchen. Angenommen man öffnet den verdeckten Spalt zumindest ein bisschen - erhält man dann ein Interferenzmuster oder doch eher eine Verteilung, die an klassische Teilchen erinnert? Dies auszurechnen ist etwas umständlich, man kann aber qualitativ die entstehenden Muster diskutieren (vgl. Abb. 8.4).

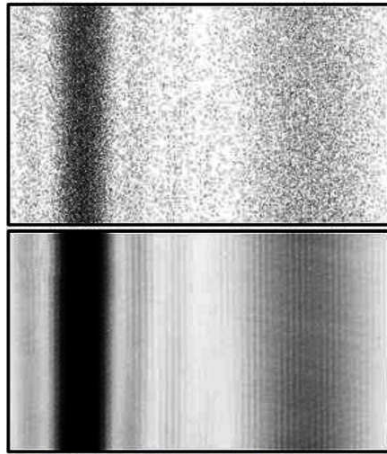


Abbildung 9.4: Interferenzmuster bei unterschiedlich breiten Spaltöffnungen
Quelle: [nature.com/articles/s41598-018-19380-4](https://www.nature.com/articles/s41598-018-19380-4)

Man erhält zwar ein Interferenzmuster, allerdings erkennt man auch mehr oder weniger stark die Verteilung der Einzelspalte. Weiß man also genau, durch welchen Spalt das Quantenobjekt geht (beispielsweise indem man den anderen Spalt abdeckt), erhält man kein Interferenzmuster. Sind beide vollständig geöffnet, kann ich nichts über den Weg sagen - man erhält das bestmögliche Interferenzmuster. Für **ungleich breite Öffnungen** scheint man irgendetwas dazwischen zu erhalten. Es ist naheliegend, dies zu quantifizieren und es nicht bei ‚irgendetwas dazwischen‘ zu belassen. Da dies für den Doppelspalt im Allgemeinen äußerst kompliziert ist, geht man auf das einfacher zu behandelnde Mach-Zehnder-Interferometer über. Die Behandlung erfolgt analog zu Kapitel 5. Dabei muss beachtet werden, dass das Interferenzmuster nicht auf einmal auf den Schirm aufgefangen wird, sondern durch Verstellung des Phasenwinkels entsteht. Zudem sollte thematisiert werden, wie die Visibility zur Quantifizierung (der Information) des Interferenzmusters definiert ist. Vor allem wenn im Folgenden noch weitere

Anwendungsbeispiele durchgenommen werden, ist ein Einschub wie in Kapitel 6.1 zu empfehlen. Dies erleichtert den **Übergang zu einer nicht konstanten Visibility** ungemein. Anschließend kann die Bedeutung der Größen Predictability und Visibility diskutiert werden - natürlich müssen die Schlussfolgerungen nicht die gleichen wie in dieser Arbeit sein. Beispielsweise ist es nicht verboten, das Interferenzmuster mit einer Welleneigenschaft und die Information über den Weg mit einer Teilcheneigenschaft zu verbinden - es ist aber eben nicht notwendig.⁹⁸ Zu guter Letzt ist noch zu klären, inwiefern das **Einfügen von Detektoren** zu thematisieren ist. Für eine Einführungsvorlesung ist die dahinterstehende Mathematik höchstwahrscheinlich zu anspruchsvoll, eine Präsentation der Ergebnisse ist aber trotzdem sinnvoll. Dass die Information auch nicht durch ‚verbesserte‘ Messanordnungen erzwungen werden kann, ohne die andere Information zu verlieren, ist eine wichtige Ergänzung und zeigt auch das breite Anwendungsgebiet dieser Komplementarität auf.

Sollte die hier präsentierte Komplementarität im Rahmen einer Vorlesung behandelt werden, so sind parallel dazu verlaufende Übungen optimal. Dadurch würde eine bessere Plattform zur Diskussion entstehen und eine zusätzliche Motivation des Themas für die Studentinnen und Studenten geschaffen werden.

⁹⁸ Hier besteht das Potential einer angeregten Diskussion im Plenum.

10 Zusammenfassung

Diese Arbeit zeigt zum einen, dass das bohrsche Komplementaritätsprinzip eine bedeutende und umfassende Rolle in der Quantenphysik spielt. Zum anderen wird klar, dass die Instanziierung dieses Prinzips eine genau zugrundeliegende Interpretation der Quantenphysik benötigt. Insbesondere zeigt sich, dass die Komplementarität beziehungsweise Dualität von Welle und Teilchen im Rahmen der Kopenhagener Deutung äußerst problematisch bis hin zu nicht tragbar ist. Zwar treten Wellen(eigenschaften) und Teilchen(eigenschaften) im Rahmen des (mathematischen) Formalismus auf und erfüllen durchaus ihren Zweck zur Voraussage der Messergebnisse, allerdings sagen diese nichts über die physikalische Realität der Quantenobjekte oder Quantenphänomene aus. In Bohrs letzthcher Version kann und darf die Quantenmechanik keine Quantenobjekte mehr beschreiben, sondern lediglich Quantenphänomene. Dies sind die Interaktionen der (unbeschreibbaren) Quantenobjekte mit den Messgeräten. Alle betrachteten physikalischen Eigenschaften sind nun **Teil der Messanordnung** und werden als solche nun mithilfe der klassischen Physik beschrieben - allerdings ist die Zuordnung durch Komplementaritäten eingeschränkt und die Vorhersage der Messwerte erfordert eine quantenmechanische Beschreibung. Insofern ist die Komplementarität von Welle und Teilchen - wenn überhaupt - bloß in einem mathematischen Kontext gegeben. Welche Gesamtheit im Rahmen des Komplementaritätsprinzips diese beiden dualen Begriffe beschreiben sollen, steht somit vollkommen offen und ist streng genommen sinnlos, da der mathematische Formalismus keinen für uns beobachtbaren physikalischen Bezug hat. Die wahrnehmbaren Quantenphänomene sind beispielsweise diskontinuierliche Flecken auf einem Schirm, die sich zu einem (Interferenz)muster anordnen können. Inwiefern man hier von Teilchen- und Welleneigenschaften sprechen will, ist diskutierbar, allerdings auf keinen Fall logisch notwendig. Dies führt zum entscheidenden Punkt der Arbeit: Die komplementären Beobachtungen kann man als Information über das Interferenzmuster und Information über den Weg/Pfad, welches eines Teilchens in der Messanordnung nimmt, interpretieren. Die Komplementarität dieser beiden Informationen zeigt die Ungleichung

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}_0^2 \leq 1 ,$$

wobei die Predictability $\mathcal{P}$ und die Visibility $\mathcal{V}_0$ Maße für die Information über den Weg beziehungsweise das Interferenzmuster sind. Wie in dieser Arbeit diskutiert, kann die so

quantifizierte Komplementarität auf verschiedene Experimente angewandt werden, die scheinbar den Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus zeigen sollen. In all diesen Fällen liegt die Komplementarität nicht in den Begriffen von Welle und Teilchen, welche in in dieser Interpretation in den Formalismus verschoben werden, sondern in den beiden Informationen über Weg und Interferenzmuster, sowie den damit verbundenen Beobachtungen. Weiters wurde gezeigt, dass sich diese Komplementarität auch nicht durch Erzwingen einer Information umgehen lässt. Benutzt man beispielsweise Detektoren, um die Information über den Weg zu erhalten, führt dies wieder auf eine Ungleichung

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 \leq 1 ,$$

wobei die Distinguishability $\mathcal{D}$ nun die ‚erzwungene‘ Welcher-Weg-Information quantifiziert. Natürlich können in all diesen Fällen die Größen $\mathcal{P}$ (beziehungsweise $\mathcal{D}$) und $\mathcal{V}_0$ (beziehungsweise $\mathcal{V}$) mit teilchen- und wellenähnlichen Eigenschaften assoziiert werden - dies ist aber im Rahmen einer strengen Auslegung nicht logisch zwingend. Somit gibt diese Arbeit einen Ausblick auf einen neueren beziehungsweise anderen Zugang zur Quantenphysik, der sich vor allem mit (komplementären) Informationen befasst, die wir aus Experimenten gewinnen können. Zwar gibt es einige Situationen, in welchen die Beschreibung durch dieses Konzept (noch) unklar ist; es bleibt allerdings abzuwarten, welche Erkenntnisse und Fortschritte im Laufe der Zeit in dieser Richtung gemacht werden. Es ist zu hoffen, dass diese Sichtweise in mehreren Aspekten ein klareres Verständnis der oft so irrational wirkenden Quantenphysik ermöglicht - so wie sie es bei dem paradoxen Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus getan hat.

11 Literaturverzeichnis

- Bohr, N., 1925, Atomic theory and mechanics, Aus: Philosophical writings of Niels Bohr, 3. Ed., Woodbridge, Ox Bow Press, 1987.
- Bohr, N., 1927, The quantum postulate and the recent development of atomic theory. Aus Philosophical writings of Niels Bohr, 3. Ed., Woodbridge, Ox Bow Press, 1987.
- Bohr, N., 1929, The quantum of action and the description of nature, Aus: Philosophical writings of Niels Bohr, 1. Ed., Woodbridge, Ox Bow Press 1987.
- Bohr, N., 1931, Space-time continuity and atomic physics. Aus: Niels Bohr: Collected works, Band 6, Amsterdam: Elsevier, 1996.
- Bohr, N., 1938, The causality problem in atomic physics, Aus: The philosophical writings of Niels Bohr, 4. Ed.: Causality and complementarity, J. Faye and H.J. Folse, Woodbridge, Ox Bow Press, 1998.
- Bohr, N., 1949, Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics, Aus Philosophical writings of Niels Bohr, 3. Ed., Woodbridge, CN: Ox Bow Press, 1987.
- Bohr, N., 1954, Unity of knowledge, Aus: Philosophical writings of Niels Bohr, 2. Ed., Woodbridge, Ox Bow Press, 1987.
- Englert, B., 1996, Fringe Visibility and Which-Way Information: An Inequality, Physical Review Letters Vol. 77, N.11.
- Englert, B., 1999, Remarks on Some Basic Issues in Quantum Mechanics, Tübingen: Zeitschrift für Naturforschung 54a.
- Bramon, A., Garbarino G., Hiesmayr B., 2003, Quantitative complementarity in two-path interferometry, American Physical Society a69.
- Dürr, S. und Rempe, G., 2000, Can wave-particle duality be based on the uncertainty relation?, American Association of Physics Teachers Vol. 68.

- Weizsäcker, C.F., 1971, The copenhagen interpretation. In Quantum theory and beyond, Cambridge University Press.
- Plotinsky, A., 2012, Niels Bohr and Complementarity - An Introduction, Springer.
- Einstein, A., 1936, Physik und Realität, Franklin Institute Nr. 349.
- Einstein, A., 1949, Remarks to the essays appearing in this collective volume - Reply to criticism (German transcript), Aus: Albert Einstein: Philosoph-scientist, Schilpp A., New York: Tudor.
Auch abzurufen unter
<https://www.marxists.org/reference/archive/einstein/works/1940s/reply.htm>
- Heisenberg, W., 1930, The physical principles of the quantum theory, F.C. Dover 1949.
- Wheeler, J.A., 1998, Geons, black holes, and quantum foam: A life in physics. New York: W. Norton.
- Sexl, U., 2007, Physik 8, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH.
- Giles, S., 1993, Theorizing Modernism: Essays in Critical Theory, Routledge.
- Zeilinger, A., 2004, Einsteins Schleier - Die neue Welt der Quantenphysik, München C. H. Beck oHG.

12 Abbildungsverzeichnis

4.1	Interferenzmuster beim Doppelspaltexperiment	30
4.2	Interferenzmuster ohne und mit Detektoren	31
5.1	Zwei-Wege-Interferometer	34
5.2	Experiment zur Bestimmung der Predictability $\mathcal{P}$	36
5.3	Darstellung von Predictability $\mathcal{P}$ und Visibility $\mathcal{V}_0$ anhand der Blochkugel	38
6.1	Doppelspalt mit Linse	43
6.2	Predictability und Visibility im Doppelspaltversuch	45
6.3	Doppelspalt-Interferenzmuster bei unterschiedlichen Schirmpositionen	47
6.4	Die beiden Wege bei der Mott-Streuung	48
6.5	Wahrscheinlichkeiten (Anti-)Kaonen	54
7.1	Interferometer mit Welcher-Weg-Detektor	55
9.1	Systematischer Aufbau des Mach-Zehnder-Interferometers	70
9.2	Interferenzmuster bei einem Mach-Zehnder-Interferometer	71
9.3	Mach-Zehnder-Interferometer mit Polarisationsfilter	72
9.4	Interferenzmuster bei unterschiedlich breiten Spaltöffnungen	74

Die Quellen sind bei den entsprechenden Abbildungen vermerkt.

Da laut Studienverordnung (2015) der Abstract auch im Anhang verlangt wird, ist dieser hier erneut angeführt.

Abstract

German/Deutsch

Diese Arbeit befasst sich mit der Komplementarität von der ‚Information über den Weg‘ (eines Quantenobjekts) und der ‚Information über das Interferenzmuster‘ in der Quantenphysik. Dazu wird das bohrsche Komplementaritätsprinzip im Rahmen der Kopenhagener Deutung erläutert und interpretiert. Eng verbunden mit dieser Instanziierung des Komplementaritätsprinzips ist der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus, welcher auch häufig in Schulen gelehrt wird. Dieser soll kritisch beleuchtet und seine Bedeutung in Bezug auf das Komplementaritätsprinzip herausgearbeitet werden. Es wird sich zeigen, dass der Begriff des Welle-Teilchen-Dualismus keine Notwendigkeit zur Interpretation der scheinbar paradoxen Quantenphänomene darstellt und im Rahmen der Quantenmechanik bereits überholt ist. An seine Stelle tritt die Komplementarität der oben genannten Informationen, die in gewisser Weise eine Verallgemeinerung von Bohrs Instanziierung des Komplementaritätsprinzips darstellen. Dieser informationstheoretische Zugang ermöglicht zudem eine vereinheitlichte Behandlung des Doppelspalts, der Mott-Streuung und des Zerfalls von Kaonen, wie in dieser Arbeit gezeigt wird.

English/Englisch

This diploma thesis deals with the complementarity of 'which-way information' and the 'information about interference patterns' in quantum physics. Therefore, it is reasonable to explain and interpret Bohr's principle of complementarity. The term wave-particle duality is closely connected to this instantiation of the principle of complementarity and is often taught in schools, since it is part of the curriculum. Hence, this expression has to be looked at critically and the relation of this duality to the principle of complementarity needs to be elaborated. This thesis is going to show that the term wave-particle duality is not necessary to deal with seemingly paradox quantum phenomena and that the term itself is obsolete. Instead, the complementarity of the two pieces of information mentioned above will step in, which are in some sense a generalisation of Bohr's instantiation of the complementarity principle. Furthermore, this information-theoretical approach enables a unified treatment of the double slit, the Mott scattering and the kaon decay, as will be shown in this thesis.