



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Heureka!

Antike griechische Mathematiker und deren Bedeutung
für die AHS – Schulbücher und Zentralmatura

verfasst von / submitted by

Philipp Weinzierl

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UniStG
UF Mathematik UniStG
UF Geschichte, Sozialkunde, Polit.Bildg. UniStG

Betreut von / Supervisor:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Danksagung

Das wohl größte Dankeschön und meine größte Achtung möchte ich an dieser Stelle meiner Familie aussprechen. Meine Eltern Heidrun und Ernst unterstützen mich nicht nur in jeder Lebenslage, sie sind auch die größte Inspiration und die besten Vorbilder, die man sich wünschen kann.

Durch ihre Erziehung und ihre Liebe habe ich mich zu dem Menschen entwickelt, der ich heute bin. Sie haben mir gezeigt, das Leben mit Lebensfreude, aber auch mit Demut zu sehen und noch so schwierige Situationen zu meistern.

Ein weiterer besonderer Dank gilt meiner Schwester Franziska, die immer ein offenes Ohr für mich hat und mir ebenso mit Rat und Tat zur Seite steht. Ich weiß, dass ich immer auf sie zählen kann und sie mich unterstützt, wo immer sie kann.

Ebenso möchte ich mich bei meiner Freundin Verena bedanken. Sie versucht immer das Beste aus mir heraus zu holen. Vor allem aber steht sie immer hinter mir und gibt mir dadurch ein Gefühl von Sicherheit und Geborgenheit.

Generell möchte ich meiner gesamten Familie danken, dass sie immer zu mir stehen und mir stets mit großer Liebe begegnen.

Zu guter Letzt möchte ich all meinen Freunden danken, die mich auf meinem Wege begleitet und mir in Diskussionen wertvolle Impulse für diese Arbeit gegeben haben.

Ein großes und herzliches Dankeschön!

Zu guter Letzte möchte ich meinem Betreuer Mag. Dr. Peter Raith für seine Hilfe und für sein Vorschläge zur Gestaltung dieser Arbeit danken.

Kurzfassung

Die Errungenschaften und wissenschaftlichen Forschungsergebnisse im antiken Griechenland waren enorm. Vor allem in der Mathematik wurde der Grundstein für die weitere Entwicklung dieses Fachbereiches gelegt. Von Thales von Milet, über die Pythagoreer bis hin zu Euklid konnte jeder einzelne seine Ideen und Vorstellungen einbringen und somit die mathematischen Kenntnisse stetig weiterentwickeln und verbessern.

Diese, vor über 2500 Jahren entstandenen Theorien haben auch heute noch einen bedeutenden Einfluss auf den Schulunterricht und sind essenziell für die Bildung eines mathematischen Wissens. Deshalb nehmen sie einen großen und wichtigen Platz innerhalb der aktuellen Schulbücher ein.

Auch bei den Aufgaben der standardisierten Reifeprüfung lassen sich Elemente der antiken griechischen Mathematik wiederfinden.

Somit sind diese Errungenschaften keineswegs veraltet, im Gegenteil. Sie haben auch heute noch einen signifikant hohen Stellenwert innerhalb der mathematischen Lehre.

Abstract

The scientific discoveries and achievements in ancient Greek were huge. Specifically, in the subject field of mathematics they created an incredible knowledge and that is the reason why the subject mathematics, as we think of it today, could have risen this fast. Individuals like Thales from Milet, Pythagoras or Euklid brought many ideas and notions which helped the future mathematicians to further develop their theories.

These theories, which were first mentioned 2500 years ago still have a lot of influence on the current school system. They are essential for the main knowledge of mathematics. That's the reason why the achievements from ancient Greek are still very important for school books.

Moreover, they also have an influence on the final exam which you take in order to graduate because the theories from ancient Greek are the basics of today's mathematics knowledge today.

These ideas and arguments will always be important because they are essential for the basic mathematics skills.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	7
2. Die Entstehung der Mathematik.....	8
3. Die Die Ionische Periode	10
3.1. Thales von Milet	11
3.1.1. Mathematische Errungenschaften.....	12
3.1.2. Satz von Thales.....	13
3.1.3. Der Begriff des Winkels.....	14
3.2. Pythagoras und die Pythagoreer	16
3.2.1. Rechteck, - Dreieck, - und Quadratzahlen	18
3.2.2. Befreundete und vollkommene Zahlen	21
3.2.3. Inkommensurable Summen	21
3.2.4. Das pythagoreische Zahlentripel.....	24
3.2.5. Die Pythagoreer und die Musik.....	26
3.2.6. Der Satz des Pythagoras.....	28
3.2.7. Die Mittelwerte	30
3.3. Hippokrates von Chios	31
4. Die Athenische Periode	33
4.1. Platon	34
4.1.1. Die fünf platonischen Körper	35
4.2. Aristoteles	37
4.2.1. Aussagenlogik.....	38
4.2.2. Weitere mathematische Themen bei Aristoteles.....	39
4.3. Eudoxos von Knidos.....	39
4.3.1. Proportionslehre	40
5. Die Alexandrinische Periode	41
5.1. Euklid.....	42
5.1.1. Die Elemente	42
5.1.2. Das Euklidische Lehrsystem.....	44
5.1.3. Zum Satz des Pythagoras	45
5.1.4. Das Parallelenaxiom	47
5.1.5. Die Kreistangente.....	49
5.1.6. Das Fünfzehneck.....	51
5.1.7. Lineare Gleichungen	52

5.1.8.	Quadratische Gleichungen	54
5.1.9.	Primzahlen	56
5.1.10.	Euklidischer Algorithmus	58
5.2.	Archimedes	60
5.2.1.	Dreiteilung eines Winkels	60
5.2.2.	Der Näherungswert von π	61
5.2.3.	Konstruktion des Siebenecks	64
5.2.4.	Das Rinderproblem	66
5.2.5.	Kugel und Zylinder	66
5.3.	Apollonios von Perge	67
5.3.1.	Apollonios und der Kreis	68
5.3.2.	Die Kegelschnitte	69
5.3.3.	Parabel, Hyperbel und Ellipse	72
5.4.	Eratosthenes von Kyrene	74
5.4.1.	Der Erdumfang	75
5.4.2.	Das Sieb	77
6.	Die Spätzeit der griechischen Antike	78
6.1.	Heron von Alexandria	78
6.1.1.	Die Flächenformel	79
6.1.2.	Das Heron – Verfahren	82
6.2.	Klaudios Ptolemaios	83
6.2.1.	Der Satz des Ptolemaios	83
6.2.2.	Die Planetenbewegungen	85
6.2.3.	Sehnen und Sinuswerte	86
6.3.	Diophant	88
6.3.1.	Die Schreibweise Diophants	89
6.3.2.	Diophantische Lineare Gleichungen	90
6.3.3.	Zusatz zum Satz des Pythagoras	92
6.3.4.	Beispiele aus dem Werk „Arithmetika“	93
7.	Rolle in den AHS – Schulbüchern	95
7.1.	Schulbücher der 1. Klasse	95
7.2.	Schulbücher der 2. Klasse	97
7.3.	Schulbücher der 3. Klasse	99
7.4.	Schulbücher der 4. Klasse	101
7.5.	Schulbücher der 5. Klasse	102
7.6.	Schulbücher der verbleibenden Oberstufenklassen	102

8.	Bedeutung für die Zentralmatura	103
8.1.	Beispiel 1	103
8.2.	Beispiel 2	104
8.3.	Beispiel 3	105
8.4.	Beispiel 4	106
8.5.	Beispiel 5	107
8.6.	Beispiel 6	108
8.7.	Beispiel 7	109
8.8.	Beispiel 8	110
9.	Resümee.....	111
10.	Literaturverzeichnis	112
11.	Quellen	117
12.	Abbildungsverzeichnis	119

1. Einleitung

Die folgende Arbeit untersucht die Errungenschaften mathematischer Persönlichkeiten im antiken Griechenland. Vor allem aber soll aufgezeigt werden, welchen Einfluss die Erkenntnisse aus der Antike auf unseren heutigen Lehrplan haben. Dazu sollen, auf Basis der nachfolgenden mathematischen Entdeckungen, die genauen Beschreibungen und verwendeten Begriffe der aktuellen Schulbücher beleuchtet werden, sowie die Bedeutung der Errungenschaften für die Zentralmatura aufgezeigt werden.

Zu Beginn werden nun einige wichtige mathematische Persönlichkeiten und deren Entdeckungen und Erkenntnisse vorgestellt, sowie die jeweilige Epoche beschrieben, in der sie gelebt haben. Der geschichtliche Zugang in ein mathematisches Gebiet kann Schüler und Schülerinnen motivieren, einem Problem nicht mit Angst oder Abneigung gegenüberzutreten. Durch das geschichtliche und philosophische Hintergrundwissen wird nicht nur die Allgemeinbildung gefördert, sondern es liefert auch einen praktischeren und eindrucksvolleren Einstieg in ein mathematisches Fachgebiet.

Die Zentralmatura, welche im Schuljahr 2014/2015 das erste Mal durchgeführt wurde, bildet den Abschluss der Schullaufbahn für jeden Schüler und für jede Schülerin. Die Absicht dieser Arbeit ist es, an ausgewählten Beispielen der Zentralmatura aus verschiedenen Jahren die Wichtigkeit und die Bedeutung der Mathematik aus dem alten Griechenland näher darzulegen.

Um aber überhaupt das Niveau und das Wissen für eine Zentralmatura in Mathematik zu erlangen, ist der grundlegende Mathematikunterricht essenziell. Hierfür bilden die Schulbücher die Basis jenes Wissens. Anhand der drei Schulbuchreihen „Das ist Mathematik“, „Mathematik verstehen“ und „Dimension Mathematik“ soll dabei genau untersucht werden, ob und wie die griechische Mathematik Einfluss nimmt und inwiefern sie überhaupt erwähnt wird.

2. Die Entstehung der Mathematik

„Die Griechen werden allgemein als die Begründer der Wissenschaft von der Natur, also der rationalen, auf Prinzipien beruhenden und in Systemform vorgebrachten Erklärungen der Naturerscheinungen angesehen. Zugleich sind sie diejenigen, welche die (teilweise aus den orientalischen Kulturen) überbelieferten Regeln und Vorschriften zum Zählen, Messen und Auflösen von Gleichungen mit Hilfe der von ihnen entwickelten Logik systematisierten, begründeten und zu einem Theoriegebäude zusammenfassten und damit zu den Urhebern der wissenschaftlichen Mathematik wurden.“¹

Etymologisch bedeutet das Wort Mathematik „Das, was man lernen soll“.

Erst unter den Pythagoreern und etwas später unter Aristoteles entwickelte sich der heutige Begriff und unsere heutige Definition von Mathematik.² Den Grund für diese Definition der Mathematik lieferten die Peripatiker. Sie waren der Ansicht, „während man die Rhetorik, die Dichtung und die populäre Musik praktizieren könne, ohne sie studiert zu haben, so könne niemand das, was Mathematik genannt wird, verstehen, ohne es zuerst zu studieren.“³

Ein wesentlicher Beitrag zur Entstehung von mathematischen Lehrsätzen wird zu Beginn den Dorern zugeschrieben, welche zwischen 2000 und 1000 v.Chr. (durch die dorischen Wanderungen) das griechische Land besiedelten.⁴

Sie formulierten vier grundlegende Bedingungen, die ein Lehrsatz erfüllen muss:

- Ein Lehrsatz handelt von Abstrakta

Durch diesen Grundsatz ergibt sich eine bemerkenswerte Konsequenz.

Fragestellungen, die sich in Zahl und Raum ausdrücken lassen, werden begünstigt, da die Wissenschaftsdisziplinen mit den verständlichsten Abstraktionen die Oberhand gewinnen.

¹ Christoph J. Scriba, Peter Schreiber, 5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kultur, Menschen, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2010), S. 27

² Dietmar Hermann, Die Antike Mathematik, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2014), S.12 – 13

³ Herrmann, Die Antike Mathematik, S.13

⁴ vgl. Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 27

- Ein Lehrsatz muss in einer formalen Sprache ausgedrückt werden

Darunter versteht man, dass ein Formalismus nicht notwendigerweise nur eine Notation von Mitteilungen ist. Wenn die Bedeutung von Worten innerhalb einer Aussage festgelegt ist, dann entsteht daraus ein formaler Satz.

- Ein Lehrsatz muss eine *Wenn – Dann* Klausel enthalten

Durch diese Forderung steht das Wissen, welches fragmentarisch ist, im Einklang mit dem Grundsatz und verleiht ihm daher eine konkrete Bedeutung.

- Aus Lehrsätzen können weitere Lehrsätze folgen

Die Menge der Lehrsätze lässt sich demnach also vermehren, indem auf bereits akzeptierten Sätzen aufgebaut wird. Daraus resultierend, bringt das Zusammenstellen von sachlichen Begründungen das Beweisen mit sich.

Allerdings ist es so, dass dieses Regelwerk noch über Jahrhunderte weiterentwickelt wurde und sogar heute wird an einem vertieften Verständnis dafür gearbeitet.⁵

Bei der antiken griechischen Mathematik steht ein Begriff deutlich im Zentrum: Die Geometrie!

„Die Geometrie ist also die Wissenschaft von Figuren und Größen und ihren Veränderungen und ihr Zweck ist, diese zu bewerkstelligen; die Methode aber ihrer Darstellung ist synthetisch (...). Die Geometrie erreicht ihre Darstellung durch Abstraktion; sie behandelt zunächst den physikalischen Körper und seinen stofflichen Inhalt; durch Entfernen der Stofflichkeit erhält sie den mathematischen Körper, der räumlich ist.“⁶

Laut Heron von Alexandria entwickelte sich die Geometrie mit Hilfe von Landvermessungen und Landteilungen. Diese Tätigkeit war für die Menschen natürlich äußerst nützlich, und so wurde der Gattungsbegriff erweitert. Dadurch schritt die Handhabung der Messungen und Teilungen auch zu festen Körpern fort. Nun reichten

⁵ vgl. Marek Kodos, Streifzüge durch die Mathematikgeschichte, Ernst Klett Verlag (Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig 1999), S.42 – 43

⁶ Herrmann, Die Antike Mathematik, S.14

jedoch die damals üblichen Sätze nicht mehr aus und somit mussten weitere Forschungen angestellt werden.⁷

Nachdem die Perserkriege beendet waren, konnte Athen eine Vormachtstellung unter den griechischen Städten einnehmen. Während der Zeit des Perikles (ca. 495 – 429 v.Chr.) bildete sich in Athen ein Zentrum für Kunst und Wissenschaft. Es wurde die Akademie gegründet sowie die Akropolis erbaut. In der Akademie des Platon fand vorrangig die mathematische Lehre statt. Bedingt durch die Aufteilung des Weltreichs Alexander des Großen nach dessen Tod 323 v.Chr. verlagerte sich das Zentrum der Mathematik in die Stadt Alexandria. Auch hier entstanden große mathematische Durchbrüche beispielsweise von Euklid, Eratosthenes oder Apollonios. Selbst Archimedes, der nicht in Alexandria lebte, stand in engem Kontakt mit der Stadt. Der letzte erwähnenswerte Mathematiker, der noch in Athen forschte bevor das Zeitalter der Antike zu Ende ging war Proklos Diadochos. Er lieferte durch seine Kommentare zu Euklid und Platon wertvolle mathematische Hinweise. Mit dem Zusammenbruch des Römischen Reiches 476 n.Chr. wurde der endgültige Niedergang der hellenistischen Mathematik besiegelt. Das Erbe jener hellenistischen Mathematik wurde in Rom, Konstantinopel und Bagdad verwaltet.⁸

3. Die Die Ionische Periode

Die Ionische Periode (ca. 600 – ca. 450 v.Chr.) gilt als die Phase „der Entdeckung des Geistes“. Ein wichtiger Beitrag dazu war, dass die Feudalherrschaft durch die Polis – (Stadt) – Struktur abgelöst wurde. Durch das entstehende praktische Denken nahmen immer mehr Bürger am öffentlichen Leben teil. Dadurch konnten sich die Städte zu einem Zentrum entwickeln, in dem die griechische Kultur und Wissenschaft aufblühen konnte. Aufgrund dieses Aufschwungs in der Gesellschaft und innerhalb der Wissenschaft ist die Ionische Periode charakteristisch für die ersten großen Naturphilosophen. Zu diesen zählen Thales, Pythagoras sowie Hippokrates. Bedingt durch die Herausbildung des europäischen Denkens zu jener Zeit, entstand in enger Verbindung mit der Logik ebenfalls das deduktive Vorgehen in der Mathematik. Eine völlige Rekonstruktion dieses Vorgangs ist leider kaum möglich, da unmittelbare

⁷ vgl. Herrmann, Die Antike Mathematik, S.14

⁸ Herrmann, Die Antike Mathematik, S.14 – 15

Quellen einfach fehlen. Er lässt sich jedoch durch nachkommende Kommentare und überlieferte Berichte ungefähr nachvollziehen.

Am Beginn der griechischen Naturwissenschaft steht den Akteuren noch keine ausgereifte mathematische Theorie zur Verfügung. Die Philosophen versuchten dennoch, durch einfache Zahlengesetzmäßigkeiten und geometrische Figuren ihre Weltvorstellung darzustellen.

Fritz Kraft ist der Ansicht, dass die Mathematik in der Ionische Periode noch nicht als Hilfsmittel für das Erkennen der Natur und ihrer Formen bezeichnet werden kann,⁹ „weil der Eigenbereich der Mathematik als einer nur im Geiste des Menschen entstandenen und bestehenden Wissenschaft erst seit Mitte des 5. Jahrhunderts erkannt und entdeckt wurde.“¹⁰ Er setzt damit aber voraus, dass sich die Mathematik als eine vom Menschen schon weit ausgebildete Theorie dennoch als Hilfsmittel einsetzen lässt. Wegen der engen Beziehung zur äußeren Wirklichkeit und zur Natur entstand demnach der Eigenbereich der Mathematik. Die Analyse der in der Natur vorkommenden Strukturen führten zur Entdeckung und zur Ausbildungen neuer mathematischer Kenntnisse und Theorien, welche wiederum zur Erklärung weiterer Naturphänomene herangezogen wurden. Durch dauerhafte empirische Beobachtungen und deren wechselseitigen Verflechtungen mit der wissenschaftlichen Theoriebildung lassen sich nicht nur die Naturwissenschaften, sondern auch die geschichtliche Entwicklung des mathematischen Denkens charakterisieren. Dennoch gab es auch Phasen, in der Theorien durch innermathematische Impulse bestimmend waren, während es ebenso Phasen gab, in denen externe Anforderungen zu Neuentwicklungen maßgebend waren.¹¹

3.1. Thales von Milet

Thales von Milet gilt als der erste Philosoph und Mathematiker, welcher namentlich bekannt war. Er lebte circa zwischen 640 und 546 v.Chr.¹²

Die Griechen schreiben ihm „die Erschaffung eines neuen Ordnungsprinzips allen Wissens zu, die Erschaffung der Wissenschaft in unserem Sinn.“¹³

⁹ vgl. Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 27 – 29

¹⁰ Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 29

¹¹ vgl. Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 29

¹² vgl. Herrmann, Die Antike Mathematik, S. 17

¹³ Kodos, Streifzüge durch die Mathematikgeschichte, S. 41

Ebenso verstand er die Welt, als durch die Natur gegeben. Er suchte nach einer Erklärung für den Anfang jener Welt und hielt das Wasser für den Urstoff und den Grund alles Seienden.¹⁴ Laut Diogenes Laertios war er Kaufmann und kam aufgrund ausgedehnter Handlungsreisen auch nach Ägypten, wo er die ägyptische Mathematik kennenlernte.¹⁵ Darüber hinaus wird Thales von Milet „als einer der Sieben Weisen bezeichnet.“¹⁶ Seine größten Erkenntnisse und Errungenschaften gelang Thales auf dem Gebiet der Geometrie. Er wird meist als der Begründer der Geometrie bezeichnet. Neben seinen mathematischen Fähigkeiten verfügte er auch über ein großes astronomisches Wissen. So wurde er beispielsweise berühmt, weil er es schaffte, die Sonnenfinsternis vom 28. Mai 585 v.Chr. genau vorherzusagen. Diese Vorhersage spielte eine entscheidende Rolle im Krieg zwischen den Medern und den Lydern. Des Weiteren existiert eine Anekdote über einen goldenen Pokal, welcher dem Weisesten aller Griechen übergeben werden sollte. Thales erhielt den Pokal, gab ihn jedoch an Solon weiter, welcher ihn wiederum an Pittakos von Mytilene weitergab. Der Pokal wanderte zu jedem der sieben Weisen bis er schließlich wieder bei Thales ankam. Infolgedessen widmete Thales den Pokal dem Apollon – Tempel. Zusätzlich zu seinen astronomischen Beobachtungen soll Thales ebenfalls die Reibungselektrizität des Bernsteins entdeckt haben.¹⁷

3.1.1. Mathematische Errungenschaften

Thales konnte zu Lebzeiten viele neue Entdeckungen und Erkenntnisse im Bereich der Geometrie erlangen. Vermutlich führte sein astronomisches Interesse zur Weiterentwicklung seines geometrischen Wissens. Durch den Neoplatoniker Proklos wurden vier wesentliche Aussagen von Thales überliefert. Diese Aussagen lauten in Kurzform:

1. Im gleichschenkeligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.
2. Zwischen zwei sich schneidenden Geraden sind die Scheitelwinkel gleich.
3. Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt.
4. Der Durchmesser halbiert den Kreis.

¹⁴ vgl. Heinz Wilhelm Alten, ua., 4000 Jahre Algebra. Geschichte – Kultur - Menschen, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2014), S. 53

¹⁵ vgl. Herrmann, Die Antike Mathematik, S. 17

¹⁶ Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S.31

¹⁷ vgl. Herrmann, Die Antike Mathematik, S. 17 – 21

Auffallend bei all diesen Aussagen ist, dass hier meistens von Symmetriebezeichnungen die Rede ist. Dies kann bedeuten, dass Thales solche Begriffe als erster ausgesprochen hat. Dies deutet ebenso darauf hin, dass er der erste Grieche war, welcher Aussagen explizit formuliert hat. Da jedoch keine Schriften von ihm vorhanden sind und all seine Erkenntnisse nur aufgrund von Erzählungen und Kommentaren dokumentiert sind, steht sein Vermächtnis auf historisch „unsicheren Beinen.“¹⁸ Die Wissenschaft ist sich heute jedoch sicher, dass beinahe all diese Entdeckungen tatsächlich auf ihn zurückgehen.

Zu den bereits erwähnten vier Aussagen kommen noch zwei weiter zusammenhängende hinzu, wobei die zweite mit Sicherheit seine berühmteste Aussage ist:

5. Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich und halbieren einander
6. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel

3.1.2. Satz von Thales

Die sechste und letzte Aussage ist weltweit bekannt als der Satz von Thales. Jener Satz wurde durch Pamphile (1. Jh. n.Chr.) überliefert. Seine Dankbarkeit für diese grundlegende Einsicht zeigte er, indem er den Göttern einen Ochsen opferte.

Beweis Satz von Thales:

Der Satz von Thales besagt, dass ein Dreieck, welches in einen Kreis so eingeschrieben ist, dass eine Kante den Durchmesser des Kreises repräsentiert, einen rechten Winkel gegenüber jener Kante hat.¹⁹

¹⁸ vgl. Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 31 – 32

¹⁹ vgl. Jörg Neuhäuserer, Schöne Sätze der Mathematik. Ein Überblick und kurze Beweise, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2017), S. 39

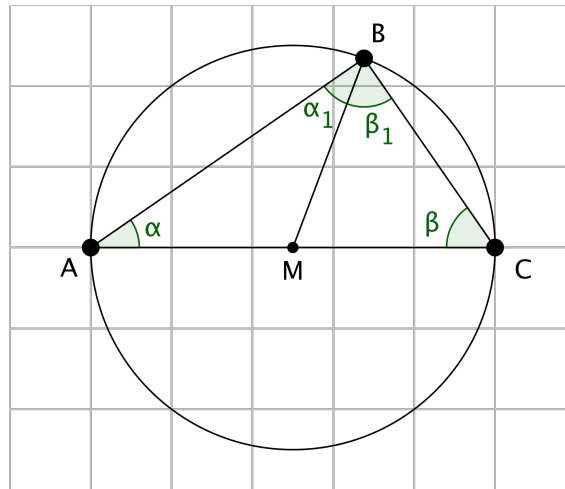


Abbildung 1²⁰ Der Satz von Thales

Um diesen Satz zu beweisen, muss das Dreieck zuerst in zwei gleichschenkelige Dreiecke durch eine Strecke vom Mittelpunkt des Kreises (M) zur Ecke gegenüber dem Durchmesser geteilt werden. Jener Winkel in der gegenüberliegenden Ecke wird in zwei Winkel geteilt, α_1 und β_1 . Durch die Gegebenheit der beiden gleichschenkeligen Dreiecke an der Grundseite ergibt sich für die Winkel:

$$2(\alpha + \beta) = \alpha + (\alpha_1 + \beta_1) + \beta = 180^\circ$$

und daraus ergibt sich durch Umformen:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ \text{ }^{21}$$

3.1.3. Der Begriff des Winkels

Erstmals in der Geschichte der Geometrie tritt bei Thales der Begriff des Winkels auf. Ebenso muss er erkannt haben, dass der rechte Winkel eine besondere Stellung einnimmt. Die Konstruktion eines rechten Winkels lässt sich in Euklids „Elementen“ I, 9 – 11 wiederfinden. Die Konstruktion ergibt sich wie folgt:

Ausgehend von einer gegebenen Strecke werden mit einem Zirkel bei gleicher Öffnung von deren Endpunkten aus zwei Kreise gezeichnet. Nun steht die Verbindungsline aus Symmetriegründen senkrecht auf die Ausgangsstrecke (siehe Abbildung 2²²).

²⁰ JNeuhäuserer, Schöne Sätze der Mathematik, S. 39

²¹ vgl. Neuhäuserer, Schöne Sätze der Mathematik, S. 39

²² Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 33

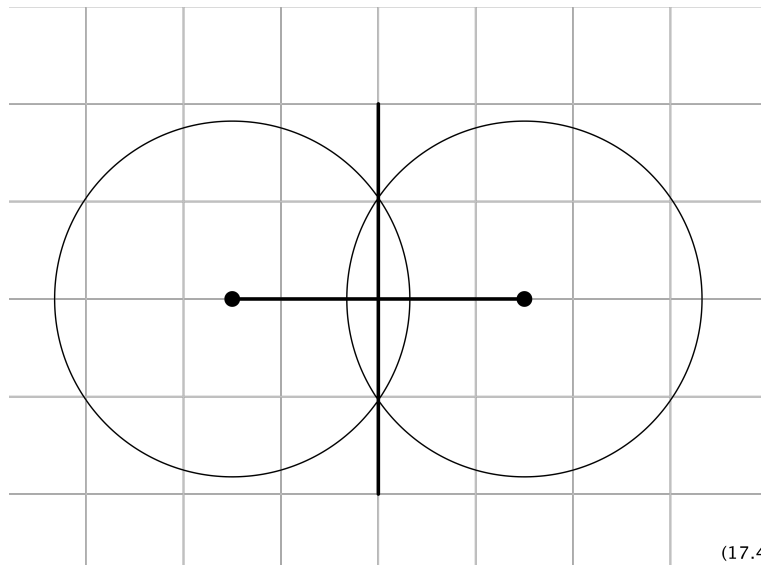


Abbildung 2 Konstruktion eines rechten Winkels

Aus dieser Vorgehensweise lässt sich die Konstruktion eines Rechtecks mit vier rechten Winkeln folgern, ebenso die Einsicht, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sein müssen. Werden zusätzlich noch die Diagonalen gezeichnet, müssen auch diese gleich lang sein und einander halbieren. Demnach hat ein Kreis, welcher durch eine Ecke des Kreises geht, die Eigenschaft, auch durch die restlichen drei Ecken zu verlaufen²³ (siehe Abbildung 3).²⁴

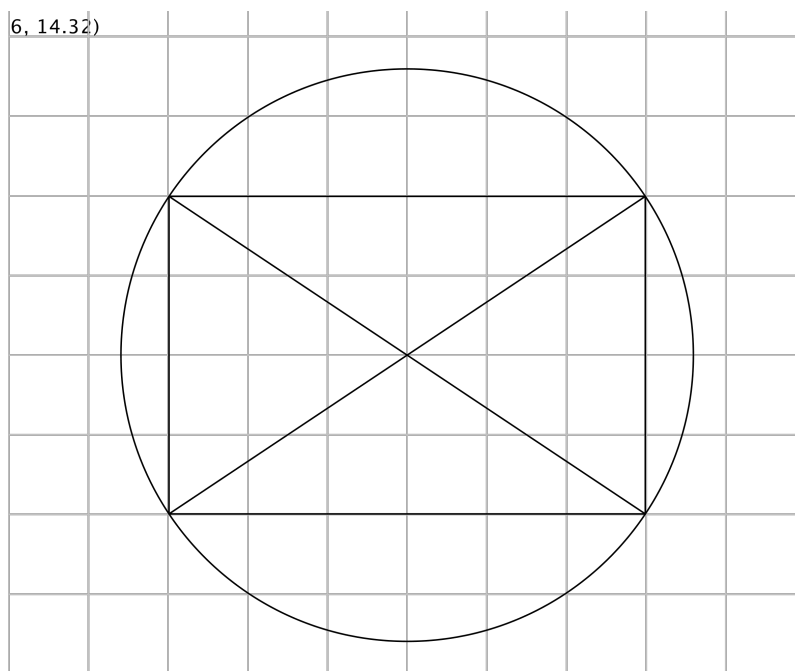


Abbildung 3 Rechteck mit Umkreis

²³ vgl. Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 31- 33

²⁴ Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S.33

Eine weitere „Überraschung“ gelang Thales in Ägypten. Er schaffte es aufgrund seiner geometrischen Kenntnisse die genaue Höhe der Cheops Pyramide, der größten Pyramide der Welt, zu bestimmen, was Pharao Ahmose II (570 – 526 v.Chr.) sprachlos machte. Die Messung der Höhe der Pyramide führte er mithilfe des Schattens eines Stabes durch.

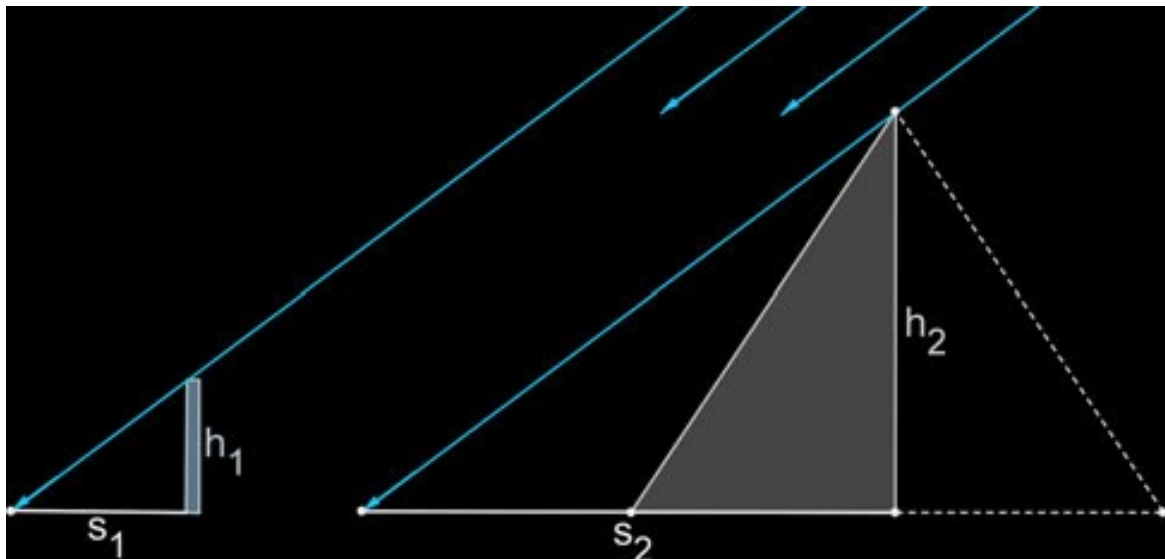


Abbildung 4 Höhenmessung der Pyramide mittels Schattenstab

Der Stab h_1 zur Höhe der Pyramide h_2 hat das selbe Verhältnis wie die der Schatten des Stabes s_1 zum Schatten der Pyramide s_2 . Dieser Satz wird auch Strahlensatz genannt. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{s_1}{s_2}$$

Alles in allem lieferte Thales viele Ideen und Erkenntnisse im Bereich der Geometrie. Seine Ansätze und Überlegungen werden auch heute noch verwendet und sind das Grundgerüst des Fachbereiches Geometrie.

3.2. Pythagoras und die Pythagoreer

Pythagoras wurde um 580 v.Chr. als Sohn eines Kaufmannes auf der Insel Samos geboren. Er arbeitete im väterlichen Handelshaus mit, wodurch er Reisen nach Ägypten,

Italien und Kleinasien unternehmen musste.²⁵ In Ägypten soll er zudem in die Priesterschaft aufgenommen worden sein. Als jedoch 525 v.Chr. Ägypten von Kambyses erobert wurde, wurde auch Pythagoras in Gefangenschaft genommen und nach Babylon verschleppt.²⁶ Auf seinen Reisen und durch die Gefangenschaft soll er sich sein großes Wissen angeeignet haben, wobei auch davon ausgegangen wird, dass er seine mathematischen Kenntnisse aus babylonischen Quellen erhielt.²⁷

Nachdem Pythagoras befreit wurde, siedelte er sich in der dorischen Stadt Kroton an. In dieser Stadt gründete er seine berühmte Schule, deren Charakter eine starke priesterliche ägyptische und babylonische Note trug. Aus dieser Schule entwickelte sich jedoch bald eine Art von Geheimorden mit sehr starkem gesellschaftlichen Einfluss. Das Hauptaugenmerk dieser Sekte lag auf der Beschäftigung mit der Mathematik. Der Orden generell hatte einen geheimen Charakter, was es heute schwierig macht zu differenzieren, was von Pythagoras entdeckt wurde und was von seinen Schülern.²⁸

Innerhalb des Ordens herrschte ein strenges Leben ganz im Zeichen von Selbstbeherrschung und Disziplin. Anders als bei Thales lag das Wesen der Welt für die Pythagoreer nicht in den Urstoffen Wasser und Luft, sondern in der Harmonie der Zahlen. Diese Auffassung war im Mittelalter noch vorhanden, wo die Musik, die Geometrie, die Arithmetik und die Astronomie die vier nichttrivialen Wissenschaften bildeten.²⁹ Aufgrund der Schwierigkeit, die mathematischen Entdeckungen den richtigen Personen zuzuordnen zu können, hielt Eudemos im Auftrag seines Lehrers Aristoteles, die Entwicklungen mathematischer Kenntnisse fest. Dieses Mathematikverzeichnis, welches uns durch Proklos Diadochos erhalten geblieben ist, sagt nun über Pythagoras, dass er die Mathematik erst in eine echte Wissenschaft verwandelte, indem er Grundlagen von einem höheren Gesichtspunkt aus sah und die Theoreme erforschte.³⁰

Der Orden blieb bis ins 4. Jahrhundert erhalten ehe er erlosch.³¹

²⁵ vgl. Johannes Lehmann, So rechneten Griechen und Römer, Urania Verlag (Leipzig, Jena, Berlin 1994), S.18

²⁶ vgl. Egmont Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert. Die Epochen der Mathematik und ihre Baumeister, Weltbild Verlag (Augsburg 1989), S. 19

²⁷ vgl. Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 35

²⁸ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 20

²⁹ vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 55

³⁰ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 21

³¹ Scriba, Schreiber, 5000 Jahre Geometrie, S. 35

3.2.1. Rechteck, - Dreieck, - und Quadratzahlen

Prinzipiell haben die Pythagoreer durch das Legen von beispielsweise Spielsteinen versucht, Beziehungen über Zahlenreihen zu finden.

Als erste einfache Entdeckung erkannten sie die sogenannten Rechteckzahlen. Bei den Rechteckzahlen handelt es sich um die Teilsummen der geraden Zahlen.

$$2 = 1 \cdot 2$$

$$2 + 4 = 2 \cdot 3$$

$$2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 4 \cdot 5$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5 \cdot 6$$

Es lässt sich erkennen, dass beim Addieren der jeweils nächsten positiven geraden Zahl, die beiden Faktoren sich jeweils um den Summanden 1 vergrößern.

Im alten Griechenland wurden die Rechteckzahlen auch Heteromeken genannt.

Die letzte und somit die n -te Rechteckzahl, lässt sich ebenfalls bestimmen.

Sie hat die Formel:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

Als nächstes werden die Dreieckzahlen betrachtet. Hierbei handelt es sich um die Teilsummen der natürlichen Zahlen. Diese wurden in Form von Dreiecken gelegt, wie Abbildung 5³² zeigt.

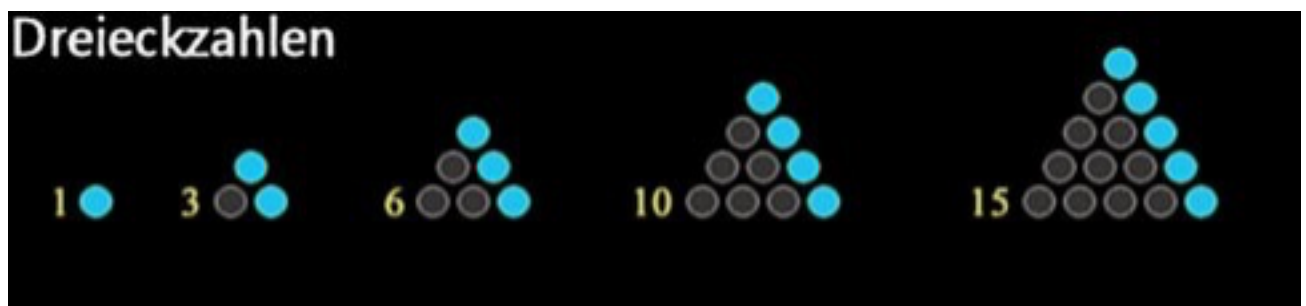


Abbildung 5 Dreieckzahlen

³² Herrmann, Die Antike Mathematik, S. 31

Formal betrachtet, lassen sich Dreieckszahlen wie folgt beschreiben:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$$

$$1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6$$

Durch das Ausklammern des Faktors 2 aus einer Folge ergibt sich eine Summe von natürlichen Zahlen, aus der man die n – te Dreieckszahl erhält:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1) = \binom{n + 1}{2}$$

Durch die letzte Umformung lässt sich also der Binomialkoeffizient herbeiführen.³³

Zuletzt seien noch die Quadratzahlen genannt. Bei Flächenanlegungen durch Spielsteine, welche essenziell für die Entwicklung der Zahlenlehre waren, war ein Begriff besonders bedeutend, jener des Gnomons. Ein Gnomon, oder auch Erkenner genannt, ist eine Figur in Form eines gedrehten „L’s“ (siehe Abbildung 6).

³³ vgl. Herrmann, Die Antike Mathematik, S. 28 – 29

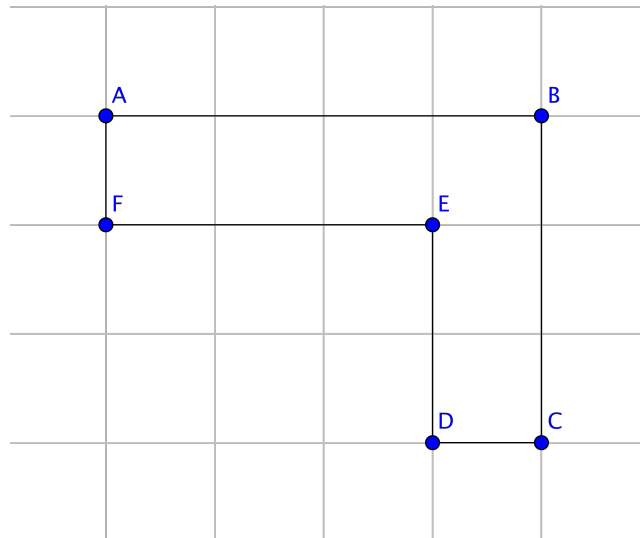


Abbildung 6 Ein Gnomon

Die Pythagoreer versuchten an ein Quadrat rechtwinklig – gleicharmige Gnomone anzulegen. Dabei fanden sie heraus, dass die Summe der ungeraden Zahlen eine Quadratzahl liefert.³⁴

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

Demnach lässt sich die Summe von ungeraden Zahlen schreiben als:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots = (2n - 1) = n^2$$

Wie bereits erwähnt, wird einfach an ein Quadrat ein Gnomon angehängt und dadurch zu einem neuen Quadrat ergänzt (siehe Abbildung 7)³⁵.

³⁴ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 32

³⁵ vgl. Herrmann, Die Antike Mathematik, S. 30

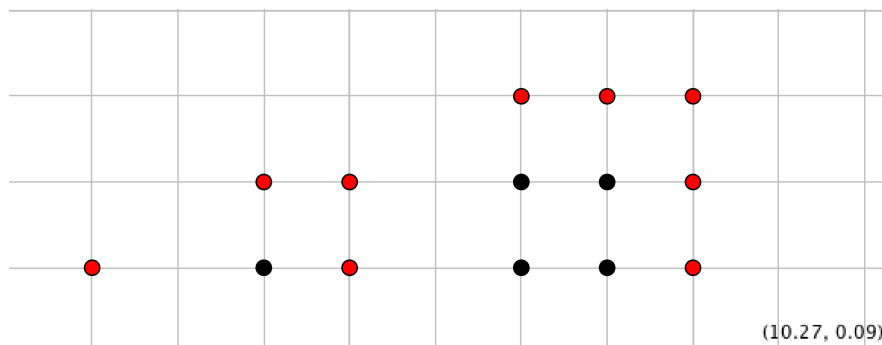


Abbildung 7 Quadratzahlen

3.2.2. Befreundete und vollkommene Zahlen

Des Weiteren beschäftigten sich die Pythagoreer mit den sogenannten befreundeten und vollkommenen Zahlen. Unter befreundeten Zahlen versteht man jene, „von denen jede gleich der Summe der Teiler der Anderen ist.“³⁶

Dies sei an einem Beispiel gezeigt. Dafür werden die Zahlen 220 und 284 betrachtet. Die Zahl 220 lässt sich auch schreiben als $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ ebenso wie sich 284 schreiben lässt als $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$. Nun wird ersichtlich, dass die Zahl 220 aus den Teilern von 284 veranschaulicht werden kann und umgekehrt.

Vollkommene Zahlen sind hingegen Zahlen, welche gleich der Summe ihrer Teiler sind. Hierzu sollen ebenfalls wieder zwei Beispiele betrachtet werden.

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

Jede Zahl bei diesen Beispielen ist Teiler der Zahl selbst. Somit sind sie vollkommene Zahlen.³⁷

3.2.3. Inkommensurable Summen

Die Pythagoreer hatten als oberstes Ziel, eine Harmonie im Zahlenreich und somit die Harmonie des Weltalls zu entdecken. Vor allem durch die Erforschung der Musik wurde dieses Vorhaben bekräftigt. Sie durchdachten die ganzzahlige Erfassbarkeit des Universums und sie wähten sich bereits in dem Glauben, das Rätsel gelöst zu haben.

³⁶ Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 33

³⁷ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 33

Doch dann stießen sie auf ein Problem, welches alles veränderte.

Sie entdeckten die irrationalen Zahlen.³⁸

Die Forschung ist sich einig, dass dies eine der wichtigsten Errungenschaften der Wissenschaft der Griechen war.³⁹ Jene Entdeckung der damaligen Zeit löste jedoch die erste Grundlagenkrise der Mathematik aus. Hippasos von Metapont soll es gewesen sein, dem diese Entdeckung gelungen ist. Da er damit eine Disharmonie auslöste, so erzählt eine Legende, wurde er aus dem pythagoreischen Bund verstoßen und er verunglückte schließlich im Meer, was als göttliche Strafe gedeutet wurde⁴⁰

Ein möglicher Auslöser für diese bahnbrechende Entdeckung könnte mit einem Quadrat zusammenhängen.

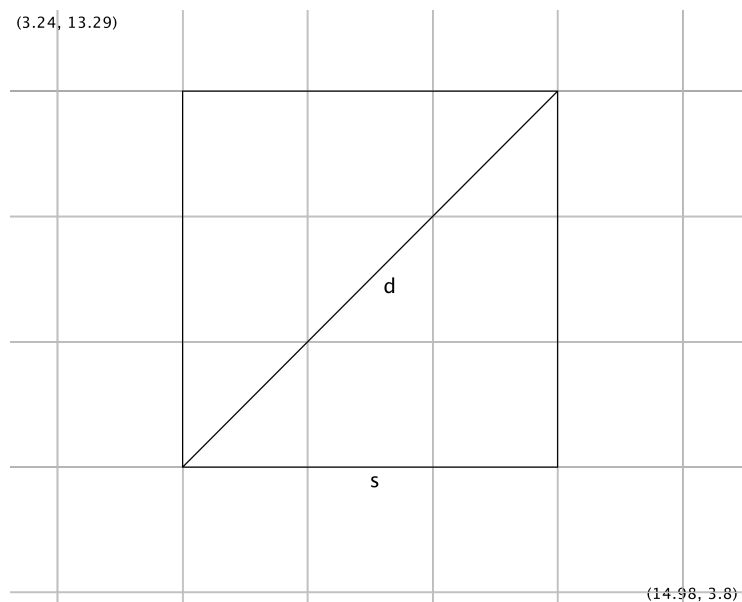


Abbildung 8 Ein Quadrat

Betrachtet man das Quadrat aus Abbildung 8, so ergibt sich aus dem pythagoreischen Lehrsatz logischerweise $d^2 = 2 \cdot s^2$, wodurch sich aus den Eigenschaften der geraden und ungeraden Zahlen, unter der Annahme, dass sich dieses Verhältnis in ganzen Zahlen ausdrücken lässt, ein offensichtlicher Widerspruch ergibt.

Dieser Widerspruch lässt sich auch rein geometrisch aufzeigen. Dazu ist es notwendig, sich nicht wie im vorigen Beispiel mit der einfachsten geometrischen Figur, dem Quadrat zu beschäftigen, sondern mit dem regulären Fünfeck. Nicht ganz zufällig war

³⁸ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 33 – 34

³⁹ Arpad Szabo, Die Entfaltung der griechischen Mathematik, Wissenschaftsverlag (Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1994), S. 191

⁴⁰ vgl. Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 35

das Pentagramm, also der fünfzackige Stern, das Ordenszeichen der Pythagoreer. Es ist anzunehmen, dass sich die Pythagoreer mit ihrem Ordenssymbol intensiv beschäftigt hatten und dadurch auf die Irrationalität von Zahlen gestoßen waren. In diesem Zusammenhang spielt das Verfahren der Wechselwegnahme eine entscheidende Rolle. Hierzu nimmt man die kürzere der beiden Strecken so oft von der Längeren weg, wie möglich. Bleibt dabei kein Rest übrig, so entsteht ein ganzzahliges Ergebnis. Bleibt allerdings ein Rest über, so wird dieser so oft wie möglich von der kürzeren Strecke abgezogen. Verbleibt nun wiederum kein Rest, so ist der vorige Rest ein gemeinsames Maß für beide Strecken. Daraus ergibt sich, dass sie in einem rationalen Verhältnis zueinanderstehen. Wenn jedoch wieder ein Rest vorhanden ist, so wird der Vorgang wiederholt. Ist der Punkt erreicht, an dem kein Rest mehr bleibt, so ist der Vorhergehende ein gemeinsames Maß für all die erzeugten Strecken. Dazu zählen auch die beiden Ausgangsstrecken. Diese werden demnach kommensurabel genannt. Tritt allerdings der Fall ein, dass die Wechselwegnahme niemals wegbriecht, so sind die beiden Ausgangsstrecken inkommensurabel zueinander und besitzen daher kein rationales Verhältnis.⁴¹

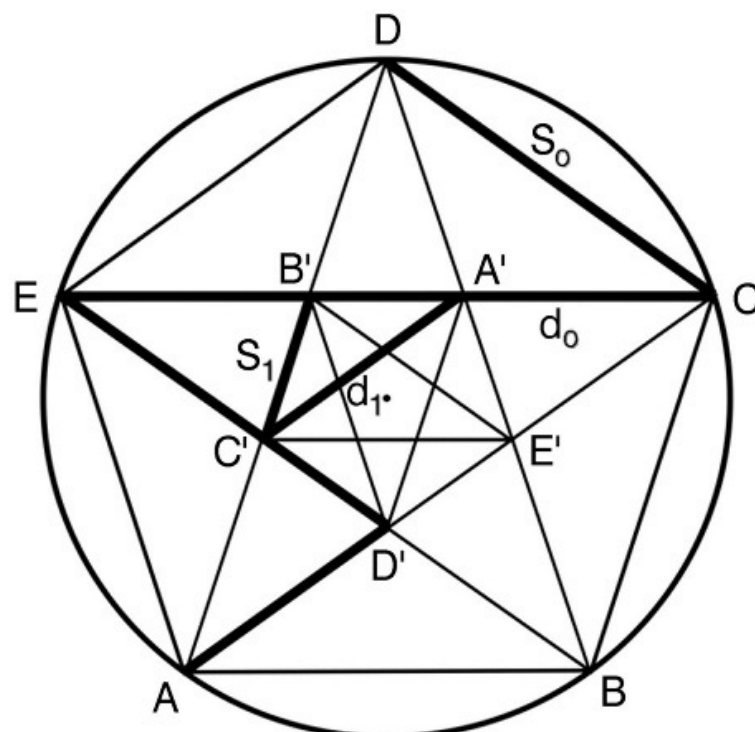


Abbildung 9 Ein regelmäßiges Fünfeck

⁴¹ vgl. Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 36

Anhand des regelmäßigen Fünfecks (siehe Abbildung 9⁴²) ist es also als wahrscheinlich anzunehmen, dass Hipassos die Irrationalität von Diagonalen und Seiten nachgewiesen hat. Und zwar wie folgt:

Die Diagonalen des Außenfünfecks (d_0) sind parallel zu jeweils einer Seite (s_0) und bilden gemeinsam im Inneren ein neues regelmäßiges Fünfeck. Daraus ergeben sich zwei Rauten (CDED' und AC'A'D') mit jeweils vier gleich langen Seiten. Folgernd hat der größere Abschnitt einer Diagonale, wie etwa ED', die Länge einer Seite des Außenfünfecks. Daraus resultierend ergibt sich, dass der kleinere Abschnitt die gleiche Länge wie die Diagonale d_1 des inneren Fünfecks haben muss. Zudem ist das Mittelstück von d_0 ident mit der Seite s_1 des inneren Fünfecks. Aus all diesen Eigenschaften ergibt sich nun die Wechselabnahme:

$$d_0 - s_0 = d_1 < s_0, \quad s_0 - d_1 = s_1 < d_1$$

$$d_1 - s_1 = d_2 < s_1, \quad s_1 - d_2 = s_2 < d_2$$

$$d_2 - s_2 = d_3 < s_2, \quad \dots$$

Somit bricht die Wechselwegnahme niemals ab und daher erhält man auch kein gemeinsames Maß für die Seiten und Diagonalen.⁴³

3.2.4. Das pythagoreische Zahlentripel

Unter einem pythagoreischen Tripel sind natürlichen Zahlen $x, y, z \in \mathbb{N}$ gemeint, welche die diophantische Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen. Dazu liefert uns Proklos eine einparametrische Lösung, welche er den Pythagoreern zuschreibt.

$$x = \frac{1}{2}(m^2 - 1); y = m; z = \frac{1}{2}(m^2 + 1), \quad \text{wobei } m \text{ ungerade ist}$$

Für eine mögliche Herleitung verwendet man ein Quadrat, an dem durch das Anhängen eines Gnomos ein neues Quadrat entsteht. Die daraus resultierende Gleichung ergibt sich unter Verwendung von figurierten Zahlen:

⁴² Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 37

⁴³ vgl. Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 37

$$(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$$

Durch das Einsetzen von $m^2 = (2n + 1)$ und der Auflösung nach $(n+1)$ ergibt sich nach Substitution:

$$n = \frac{m^2 - 1}{2} \therefore n + 1 = \frac{m^2 + 1}{2}$$

Durch Einsetzen entsteht das pythagoreische Tripel:

$$\left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2$$

Es ist nun so, dass es für jeden ungeraden Wert von m eine Lösung gibt. Daher wird es Generator genannt.

Eine weitere Herleitung ergibt sich durch den Satz des Pythagoras. Dazu wird ein teilerfremdes pythagoreisches Tripel $(a; b; c)$ betrachtet, wobei a und c ungerade sind. Daher gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = (c + a) \cdot (c - a)$$

Da b ja eine gerade Zahl ist, hat b^2 folglich den Teiler 4. Daraus resultierend, ergibt die Faktorisierung:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c + a}{2} \frac{c - a}{s}$$

Nun ergibt sich auf der linken Seite ein Quadrat, was zur Folge hat, dass auch die rechte Seite ein Produkt von zwei Quadraten ist. Ebenso lässt sich feststellen, da a und c teilerfremd sind, dass auch $(c - a)$ und $(c + a)$ teilerfremd sein müssen. Daher kann als weiterer Schritt folgendes ausgeführt werden:

$$m^2 = \frac{c + a}{2} \therefore n^2 = \frac{c - a}{2}$$

Werden die Brüche nun aufgelöst, entsteht die Darstellung für ganzzahlige $m < n$

$$a = m^2 - n^2; b = 2mn; c = m^2 + n^2$$

Anknüpfend an die vorhergegangene Herleitung ergibt sich hier nun ein 2-parametriger Generator:

$$x = mn; y = \frac{1}{2}(m^2 - n^2); z = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$$

Diesem Generator kommt eine spezielle Bedeutung und Aufgabe zu. Er soll und wird dafür verwendet, mithilfe von Tabellen alle teilerfremden pythagoreischen Tripel bis zur Zahl 100 zu ermitteln.⁴⁴

3.2.5. Die Pythagoreer und die Musik

Die musikalische Harmonielehre nahm im Kreise der Pythagoreer eine wichtige Stellung ein. Pythagoras war der Ansicht, dass sie von Zahlen abhängig ist. Sie versuchten das Weltall zu erklären, indem sie die Harmonie innerhalb der Zahlenlehre erforschten.⁴⁵

Die Pythagoreer schafften es, die Konsonanzen Oktave, Quarte und Quinte in einem Zahlenverhältnis auszudrücken. Daher gewannen sie den Eindruck, dass alle Phänomene eine Struktur besäßen, welche auf Zahlen aufgebaut ist.⁴⁶

Unter dem bereits angesprochenen Verhältnis verbirgt sich das sogenannte Frequenzverhältnis.

Der Oktavensprung hat demnach das Verhältnis $\frac{1+2}{2} = 3:2$. Dieses wird als Quinte beziehungsweise in Griechisch als „dioxeian“ bezeichnet. Das harmonische Mittel setzt sich zusammen aus $\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2+1} = 4:3$ und wird als Quarte oder „syllaba“ bezeichnet.

Beide zusammen, also Quinte und Quarte ergeben nun eine Oktave

$$(3:2) \cdot (4:3) = 2:1^{47}$$

⁴⁴ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 36 - 37

⁴⁵ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 33

⁴⁶ vgl. Szabo, Die Entfaltung der griechischen Mathematik, S. 133- 134

⁴⁷ vgl. Herrmann, Die Antike Mathematik, S. 41 – 42

Die nun verbleibenden Intervalle leiteten die Pythagoreer eben aus Quint, Quart und Oktave ab. Durch diese Ableitungen ergab sich die „pythagoreische Stimmung“.⁴⁸ Um die siebente Oktave zu erreichen, sind 12 Quantensprünge nötig. Daraus ergibt sich das Frequenzverhältnis von $(2:1)^7$ und die 12-fache Quinte $(3:2)^{12}$. Es ist nun allerdings so, dass dieses Frequenzverhältnis nicht exakt gleich ist. Diese Ungenauigkeit und der damit verbundene relative Fehler, wird pythagoreisches Komma genannt.

$$\frac{(3:2)^{12}}{(2:1)^7} = 1,0136$$

Um das Verhältnis eines Ganztones zu bekommen, ist es nötig, eine Quint auszuführen. Dafür benötigt man die Quart und einen Ganzton:

$$(4:3) \cdot x = 3:2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

Dieses Verhältnis hat nun den Vorteil, dass es durch die Oktave in zwei Quarte und einen Ganzton eingeteilt werden kann:

$$(4:3)^2 \cdot (9:8) = \frac{16}{9} \cdot \frac{9}{8} = 2:1$$

Eine Oktave lässt sich allerdings auch noch auf eine weitere Weise aufbauen, durch sechs Ganztöne.:

$$\frac{2:1}{(9:8)^6} = 2 : \frac{531,441}{262,144} = \frac{1}{1,0136}$$

Es ist jetzt ersichtlich, dass eine Oktave weniger als 6 Ganztöne ist. Das Ergebnis, welches dieses Verhältnis liefert, ist zudem der Kehrwert des pythagoreischen Kommas.

⁴⁸ vgl. Stefan Reiter, Musikalische Graphen. Entwicklung eines Verständnisses graphischer Darstellungen im fächerübergreifenden Mathematik und Musikunterricht, Waxmann Verlag (Münster 2013), S. 22

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die musikalische Harmonielehre und die damit verbundene Entwicklung der Zahlenverhältnisse, prägend für die Erkenntnisgewinnung in der Musik, sowie für die Arithmetik und Algebra war.⁴⁹

3.2.6. Der Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras ist die berühmteste und demnach bekannteste Erkenntnis der Pythagoreer.

„Bei an – Nairimi (...) findet sich die Formulierung (...): In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das über der dem rechten Winkel unterspannten Seite gebildete Quadrat gleich der Summe der beiden Quadrate, die aus den beiden Seiten, die den rechten Winkel enthalten, gebildet werden.“⁵⁰ Vereinfacht ausgedrückt bedeutet dies, „dass in jedem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite (der Hypotenuse) gleich ist der Summe aus den Quadraten über den beiden anderen Dreieckseiten, den sogenannten Katheten.“⁵¹

Beweis:

Es existieren mittlerweile über 400 verschiedene Beweise für den Satz des Pythagoras. So fanden beispielsweise Leonardo da Vinci, Albert Einstein oder der ehemalige Präsident der USA, James Garfield, jeweils einen eigenen Beweis.⁵² Warum dies allerdings gilt, bleibt und ist ein Mysterium. Das Wesen einer geometrischen Figur wird durch ihre Eigenschaften bestimmt, durch die Begrifflichkeit der Figur, welche die Wissenschaft selbst gebildet hat.⁵³

⁴⁹ Reiter, Musikalische Graphen, S. 24 – 25

⁵⁰ Lehmann, So rechneten Griechen und Römer, S. 20

⁵¹ Colerus, von Pythagoras bis Hilbert, S. 26

⁵² vgl. Lutz Nasdala, Mathematik Beweisaufgaben: Beweise, Lern – und Klausur – Formelsammlung, Springer Vieweg Verlag (Gengenbach 2016), S. 4

⁵³ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 26

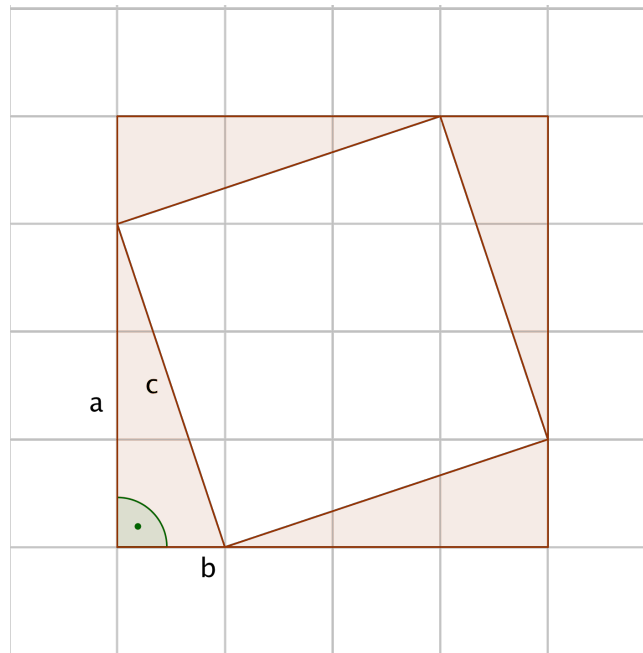


Abbildung 10 Beweisidee Satz des Pythagoras

Betrachtet man das äußere Quadrat mit den Seiten a und b , so lässt sich sein Flächeninhalt berechnen mit $(a + b)^2$. Eine weitere Möglichkeit den Flächeninhalt zu berechnen entsteht, wenn die vier Dreieck und das Quadrat im Inneren addiert werden.

Daraus ergibt sich mathematisch:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

Dies ist eine einfache und kurze Beweismethode für den Satz des Pythagoras, welche von Euklid stammt.⁵⁴

Pythagoras war es demnach gelungen, diesen Satz für jedes rechtwinkelige Dreieck aller möglichen Arten auszusprechen. Die Ägypter kannten dies bislang nur für die Seitenverhältnisse 3,4 und 5 und die Inder nur im Verhältnis 5, 12 und 13.⁵⁵

⁵⁴ vgl. Nasdala, Mathematik Beweisaufgaben, S. 93

⁵⁵ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 27

3.2.7. Die Mittelwerte

Nikomachos von Gerasa war ein Pythagoreer, der sein Augenmerk auf die Proportionen legte. Die drei wichtigsten Proportionen beziehungsweise Mittelwerte, welche durch Pappos überliefert wurde, waren das arithmetische Mittel, das harmonische Mittel und das geometrische Mittel.

- Das arithmetische Mittel A der Zahlen a und b wird definiert durch den gleichen Abstand von A zu a und b:

$$a - A = A - b \Rightarrow A = \frac{1}{2}(a + b)$$

- Das harmonische Mittel H wiederum ist definiert durch die Proportion:

$$\frac{H - a}{b - H} = \frac{a}{b}$$

Durch das Umformen dieser Proportion ergibt sich:

$$(H - a)b = a(b - H) \Rightarrow H(a + b) = 2ab \Rightarrow H = \frac{2ab}{a + b}$$

Darüber hinaus kann das harmonische Mittel auch für mehrere Variablen definiert werden. Hierfür gilt folgende Schreibweise:

$$\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots \Rightarrow H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots}$$

- Das geometrische Mittel G ist bestimmt durch die Proportion

$$\frac{G - a}{b - G} = \frac{a}{G}$$

Wiederum erhält man durch Umformungen:

$$(G - a)G = a(b - G) \Rightarrow G^2 = ab \Rightarrow G = \sqrt{ab}$$

Es lässt sich auch ein Zusammenhang zwischen diesen drei Mittelwerten herstellen:

$$H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{G^2}{A} \Rightarrow G^2 = H \cdot A \quad ^{56}$$

3.3. Hippokrates von Chios

Hippokrates von Chios, nicht zu verwechseln mit dem berühmten Mediziner Hippokrates von Kos, war ein bedeutender Mathematiker im 5. Jahrhundert v.Chr. Er war ein „etwas naiver Kaufmann“, der laut Aristoteles sein Vermögen an einen Zolleinnehmer von Byzanz verlor.⁵⁷ Eine andere Legende besagt, dass er bei einem Seehandel von Piraten beraubt wurde und dabei sein gesamtes Geld verlor. Durch den Verlust seines Vermögens widmete er sich dem Studium in Athen, wo er sich ein großes Wissen aneignete. Dadurch war es ihm möglich, als Weisheitslehrer (Sophist) seinen Lebensunterhalt zu verdienen.⁵⁸

Die drei bekanntesten mathematischen Errungenschaften von Hippokrates sind die Zurückführung der Würfelverdopplung, der Versuch der Quadratur der Mönchen und das Verfassen der Elemente der Mathematik. Die Schriften und Werke von Hippokrates sind nicht erhalten geblieben. Einzig fragmentarisch erhaltene Kommentare (zum Beispiel des Philosophen Simplikios) liefern Hinweise seines Schaffens.⁵⁹

Die Verdopplung des Würfels hat einen Orakelspruch als Ursprung. Die Einwohner der Insel Delos waren von einer Seuche betroffen. Das Orakel von Delphi zeigte ihnen einen Ausweg, wie sie die Seuche besiegen konnten. So gab es ihnen die Auskunft, wenn sie es schafften, den würfelförmigen Altar unter Berücksichtigung des Rauminhaltes zu verdoppeln, würde die Seuche abklingen.

⁵⁶ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 45 – 46

⁵⁷ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 51

⁵⁸ vgl. Lehmann, So rechneten Griechen und Römer, S. 34

⁵⁹ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 51

Hippokrates schaffte es, das Problem der Würfelverdopplung auf die des Problems zweier mittlerer Proportionen x und y gemäß $a: x = x: y = y: 2a$ zurückzuführen. Aus dem heutigen mathematischen Wissen ist bekannt, dass jenes Problem auf die Lösung der Gleichung $x^3 = 2a^3$ mit dem Zirkel und Lineal hinführt, allerdings ist dies nicht lösbar.⁶⁰

Exkurs: Die Möndchen

Die Möndchen von Hippokrates sind eine Erweiterung des Satzes von Pythagoras. Ausgehend von einem rechtwinkligen Dreieck wird, wie in Abbildung 11, ein Halbkreis über AB , eine Senkrechte DC , sowie ein Halbkreis über AC und CB konstruiert. Daraus ergeben sich zwei Möndchen M_1 und M_2 . Diese Möndchen haben nun denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC . Dies bedeutet, dass die Möndchen quadrierbar sind. 1947 hat sich dann herausgestellt, dass es insgesamt fünf verschiedene Typen von quadrierbaren Möndchen gibt.⁶¹

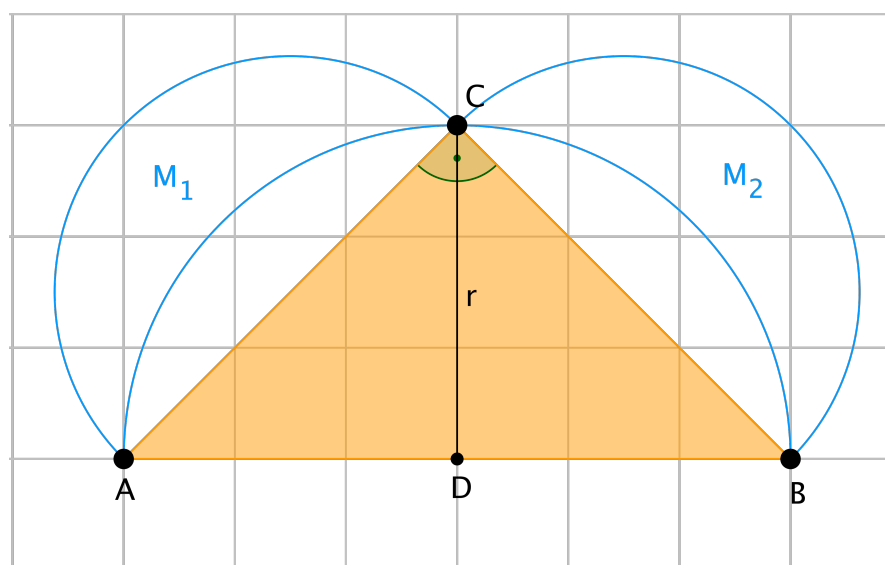


Abbildung 11⁶² Möndchen von Hippokrates

⁶⁰ vgl. Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 41

⁶¹ vgl. Hans Wußing, 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2008), S. 173

⁶² Wußing, 6000 Jahre Mathematik, S. 173

4. Die Athenische Periode

Die Athenische Periode (ca. 450 v.Chr. – 300 v.Chr.) hatte ihre wissenschaftliche Hochblüte in der Stadt Athen. Doch diese Phase war geprägt durch verschiedene Kriege, vor allem gegen die Perser. Athen schaffte es zu Beginn in drei berühmten Schlachten (490 v.Chr. bei Marathon, 480 v.Chr. bei Salamis und 479 v.Chr. bei Plataiai) die Perser abzuwehren. Zudem waren die Athener in einer führenden Position durch den 477 v.Chr. errichteten attischen Seebund, der den Frieden zwischen Griechenland, Persien und Sparta gewährleisten sollte.⁶³ In dieser von Frieden geprägten Zeit konnte sich Griechenland politisch festigen. Unter der Herrschaft von Perikles (490 – 421 v.Chr.) entwickelte sich das goldene Zeitalter der Kunst und der Wissenschaft. Das Zentrum der mathematischen Aktivitäten war von nun an Athen.⁶⁴ Der geschlossene Frieden hielt jedoch nicht lange. Nach dem Auslaufen des Friedensvertrages kam es erneut zu Auseinandersetzungen, welche im peloponnesischen Krieg endete. Athen ging als Verlierer hervor und fiel unter makedonische Herrschaft.⁶⁵

Die bedeutendsten Mathematiker in der Athenischen Periode waren Platon, Aristoteles und Eudoxos. Vor allem Platon nahm eine wichtige Rolle ein, da sich durch die Gründung seiner Akademie Athen als Anziehungspunkt für alle Studierenden Griechenlands entwickelte.⁶⁶ „In der Philosophenschule Platons, der Akademie, wurde das Idealbild der Mathematik als eine rein deduktiv herleitbare Wissenschaft ausgebildet, das die Entwicklung dieser Wissenschaft bis heute so außerordentlich stark prägte.“⁶⁷ Es lässt sich also sagen, dass die Mathematik in der Athenischen Periode in erkenntnistheoretischer Hinsicht von Platon geprägt war. Des Weiteren ging es innerhalb des mathematischen Denkens um einen Neuaufbau nach dem Zusammenbrechen der „arithmetica universalis“. So nahm die griechische Mathematik eine spezifische Form an, welche sinngemäß geometrische Algebra genannt wird. Beispielsweise war es zu dieser Zeit nicht möglich $\sqrt{2}$ als Zahl darzustellen. Deshalb wurde dieses Problem ins Geometrische verlagert.⁶⁸

⁶³ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 57

⁶⁴ vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 55

⁶⁵ vgl. Wußing, 6000 Jahre Mathematik, S. 177

⁶⁶ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 57

⁶⁷ Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 38

⁶⁸ vgl. Wußing, 6000 Jahre Mathematik, S. 179

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass die Athenische Periode geprägt war von Kriegen, sich aber durch die Entstehung bedeutender Kunstwerke (Akropolis), wichtiger Literaten (Sophokles, Euripides) und sich durch einen hohen Grad an naturwissenschaftlicher Erkenntnisse auszeichnete.⁶⁹

4.1. Platon

Für Platon war die Mathematik eine Wissenschaft, welche durch bloßes Denken zum Ergebnis führte. Seine Erkenntnistheorie, vor allem die deduktiv geführten Beweise, haben die Grundlagen der Mathematik revolutioniert.⁷⁰

427 v.Chr. wurde Platon in einer vornehmen Familie geboren und konnte dadurch eine umfassende Ausbildung genießen. Mit 20 Jahre veränderte sich sein Leben abrupt. Platon begegnete Sokrates, dem er sich als Schüler anschloss. Durch die andauernden Kriege und die ihm missfallenden politischen Verhältnisse beschloss er, Athen zu verlassen. Der Hauptgrund für seine Flucht aus Athen soll aber die Verurteilung Sokrates zum Tode gewesen sein. Durch den Tod seines Freundes und Lehrmeisters sah er keinen Grund mehr in Athen zu verweilen. Seine Reisen führten ihn nach Megara, wo er von Euklid mathematisch gelehrt wurde, bis zur Schule der Pythagoreer. Als Platon zum ersten Mal nach Sizilien reiste, schloss er eine enge Freundschaft mit Dion, dem Schwager des Tyrannen Dionysios I.

Nach seiner Rückkehr nach Athen kaufte er ein Grundstück im Nordwesten der Stadt um dort seine philosophisch – wissenschaftliche Schule zu gründen. Die Gründung der Akademie sprach sich in ganz Griechenland herum, und so versammelten sich viele angesehene Wissenschaftler, wie Archytas von Tarent, Eudoxos von Knidos und auch Aristoteles an der Akademie. Die Philosophie stand für Platon im Vordergrund, sein Einfluss auf die Mathematik war dennoch immens.⁷¹ „Er bewirkte in der Mathematik im Allgemeinen und in der Geometrie im Speziellen einen sehr großen Fortschritt durch seine Begeisterung für diese Fächer, die ersichtlich ist aus der Art, wie er seine Bücher mit mathematischen Beispielen füllte“, schrieb beispielsweise Proklos über ihn.⁷² Der Grund für seine dritte Reise nach Sizilien war die Festnahme seines Freundes Dion.

⁶⁹ Hans Wußing, Menso Folkerts, Eagle – Guide. Von Pythagoras bis Ptolemaios. Mathematik in der Antike, Edition am Gutenbergplatz (Leipzig 2012), S. 24

⁷⁰ vgl. Wußing, 6000 Jahre Mathematik, S. 179 – 180

⁷¹ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 61 – 62

⁷² Hermann, Die antike Mathematik, S. 62

Platon versuchte ihn zu befreien, wurde aber selbst verhaftet. Durch die Intervention seines Schülers Archytas von Tarent wurde er freigelassen und kehrte nach Athen zurück.

Die letzten Jahre seines Lebens verbrachte Platon lehrend an der Akademie. Laut Cicero starb er 347 v.Chr. Sein Neffe Speusippos wurde, zur Enttäuschung von Aristoteles, zum Nachfolger der Akademie erklärt.⁷³

4.1.1. Die fünf platonischen Körper

Die bedeutendsten Erkenntnisse Platons im Bereich der Mathematik sind die fünf platonischen Körper. Platon faszinierten diese Körper aufgrund ihrer perfekten Symmetrie.

Platonische Körper sind sogenannte Polyeder. Wichtig bei ihnen ist, dass ihre Außenflächen gleiche und regelmäßige Polygone sind. Dazu treffen an jeder Ecke gleich viele Kanten aneinander und sind konvex.⁷⁴ Das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder bestehen aus gleichseitigen Dreiecken an der Oberfläche. Der Würfel besteht aus sechs Quadraten an der Oberfläche, das Dodekaeder aus 12 Fünfecken.



Abbildung 12 Die fünf platonischen Körper⁷⁵

⁷³ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 62

⁷⁴ vgl. Jürgen Beetz, 1+1=10. Mathematik für Höhlenmenschen, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2013), S. 63

⁷⁵ Online unter <<https://www.studienkreis.de/mathematik/platonische-koerper-formel-berechnung/>>

Aus diesen fünf Körpern lässt sich nun folgende Tabelle erstellen:

	Ecken E	Flächen F	Kanten K
Tetraeder	4	4	6
Würfel	8	6	12
Oktaeder	6	8	12
Ikosaeder	12	20	30
Dodekaeder	20	12	30

Abbildung 13 Eigenschaften der fünf platonischen Körper

Ein moderner Beweis für die platonischen Körper ist folgender:

Es wird ein n – seitiges reguläres Polygon betrachtet, von welchem der Innenwinkel mit der Formel $\frac{n-2}{n} \cdot \pi$ berechnet werden.

Durch das Zusammenstoßen von r Flächen in einem konvexen Eck, gilt in der Schreibweise des Bogenmaßes:

$$r \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \pi \leq 2\pi \Rightarrow rn \leq 2(r+n)$$

Durch die Eigenschaft, dass ein Polygon immer mindestens drei Seiten haben muss, ergibt sich $n \geq 3$, ebenso müssen bei einem Polygon mindestens drei Flächen in einem Eckpunkt zusammentreffen, daher gilt hier $r \geq 3$. Werden diese Werte nun eingesetzt, wird ersichtlich, dass fünf ganzzahlige Lösungen existieren:

$$(n, r) = (3, 3) \rightarrow \text{Tetraeder}$$

$$(n, r) = (4, 4) \rightarrow \text{Würfel}$$

$$(n, r) = (3, 4) \rightarrow \text{Oktaeder}$$

$$(n, r) = (3, 5) \rightarrow \text{Ikosaeder}$$

$$(n, r) = (5, 3) \rightarrow \text{Dodekaeder}^{76}$$

⁷⁶ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 68 – 72

4.2. Aristoteles

Aristoteles wurde 384 v.Chr. in der Stadt Stageira geboren. Seine Familie war sehr angesehen, da sein Vater Leibarzt am makedonischen Königshof war. Dadurch war es ihm möglich, eine hervorragende Ausbildung zu genießen. Im Alter von 17 Jahren und nach dem Tod seines Vaters, wanderte Aristoteles nach Athen aus. Im Zentrum der griechischen Kultur wollte er in der Akademie Platons studieren. Er blieb nicht lange Schüler, da er durch verschieden Auseinandersetzungen mit Platon und anderen Kollegen bald eine eigene Position entwickelte. So war es ihm möglich eigene Vorträge zu halten.

Es ist ein großer Zufall und demnach auch ein Glücksfall für die Entwicklung der Mathematik, dass zweimal hintereinander überragende Philosophen bei ebenso beeindruckenden Philosophen als Schüler und Lehrer fungieren (Platon bei Sokrates und Aristoteles bei Platon). Aristoteles konzentrierte sich im Allgemeinen auf seine eigene Forschung und seine Lehre. Aus politischen Diskussionen hielt er sich meist heraus.

Nach dem Tod Platons verließ er Athen. Die nächsten Jahre waren von Reisen und Ortswechseln begleitet, bedingt durch die unsicheren politischen Verhältnisse. Während seiner Wanderjahre trat der König von Makedonien Philipp II. mit der Bitte an ihn heran, er solle sich um die Erziehung seines Sohnes, den 13-jährigen Alexander kümmern.

Es ist eine bemerkenswerte Situation, dass einer der bedeutetsten Philosophen die humanistische Erziehung eines Königssohnes annahm, der später einer der bekanntesten Weltherrscher überhaupt werden sollte.

Als der Widerstand Griechenlands gegen Makedonien gebrochen war, kehrte Aristoteles zurück nach Athen. Dort wirkte er die folgenden Jahre im Lykeion, einem öffentlich zugänglichen Gymnasium. Doch als die politischen Umstände wieder unsicherer wurden, zog er ins Haus seiner Mutter nach Chalkis auf Eubola zurück. Dort starb er im Alter von 62 Jahren.⁷⁷

⁷⁷ vgl. Otfried Höffe, Aristoteles, Beck Verlag (München 1996), S. 13 – 22

4.2.1. Aussagenlogik

Aristoteles lieferte einen großen Beitrag zur Entwicklung der Aussagenlogik. Besonders prägte er den Begriff des Syllogismus. Dies ist eine spezielle Form der Aussage, welche zwei Prämissen zusammenfasst und daraus eine Schlussfolgerung zieht.⁷⁸

Beispiel:

Alle Menschen sind sterblich
Sokrates war ein Mensch
 $\Rightarrow$ Sokrates ist sterblich

oder

Kein Rechteck ist ein Kreis
Alle Quadrate sind Rechtecke
 $\Rightarrow$ Kein Quadrat ist ein Kreis⁷⁹

Aristoteles unterschied vier verschiedene Typen von Aussagen:

Typ	Urteil	Mengenschreibweise
A	Alle S sind P	$S \subseteq P, S \neq \emptyset$
E	Keine S sind P	$S \cap P = \emptyset, S \neq \emptyset$
I	Einige S sind P	$S \cap P \neq \emptyset$
O	Einige S sind nicht P	$S \not\subseteq P$

Abbildung 14 Die vier Typen von Aussagen

Für die Buchstaben die a-, e-, i-, o- Aussagen gibt es eine wichtige Merkregel:
aff irmo bedeutet ich bejahe und nego bedeutet ich verneine.

Zudem werden immer Aussagen vorausgesetzt, die keine leere Menge sind.

Weiters besteht ein Folgezusammenhang zwischen einer allgemeinen und einer speziellen Aussage, weil sich die spezielle Aussage aus der allgemeinen Aussage ergibt.

Aus allen S sind P (SaP) folgt, dass es wirklich einige S gibt, welche P sind (SiP)

Aus kein S ist P (SeP) folgt, dass es wirklich einige S gibt, welche nicht P sind (SoP)

⁷⁸ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 83

⁷⁹ Hermann, Die antike Mathematik, S. 83

Wenn ein Satz und seine Verneinung nicht gleich sind, so nennt man diese All – Aussagen oder kontradiktatorisch.

Beispiel:

Obersatz: Alle Menschen (M) sind sterblich (P).

Untersatz: Alle Griechen (S) sind Menschen (M).

Schlussatz: Also sind alle Griechen (S) sterblich (P).⁸⁰

4.2.2. Weitere mathematische Themen bei Aristoteles

Aristoteles vertiefte sich noch in weitere mathematische Gebiete. Folgende Themen finden sich in seinen Schriften wieder:

-) In einem gleichschenkeligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent
-) Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck ergibt 180°
-) In gleichschenkeligen Dreiecken sind die Schenkel größer als die Höhe, welche von der Spitze abfällt.
-) Wird ein Parallelogramm von einer Gerade geschnitten, so teilt diese die Fläche und die Seiten des Parallelogramms im selben Verhältnis.
-) Diagonalen und Seiten eines Quadrats stehen in einem inkommensurablen Verhältnis

Dies ist nur ein kurzer Auszug aus seinen restlichen mathematischen Feststellungen.

4.3. Eudoxos von Knidos

Das genaue Leben von Eudoxos von Knidos zu rekonstruieren ist schwierig, da seine Lebensdaten bereits bei der Überlieferung äußerst widersprüchlich sind. Die näheren Umstände und historischen Quellen seines Lebens wurden von Dioenes Laertius in Apollodors Chronik beschrieben. Laut diesen Daten lebte Eudoxos von 408 v.Chr. bis 355 v.Chr. In der jüngeren Vergangenheit wird diese Datierung allerdings wissenschaftlich angezweifelt. Wann er nun wirklich lebte, ist nach wie vor nicht ganz eindeutig.

Sicher ist, dass Eudoxos im Alter von etwa 23 Jahren eine Reise nach Ägypten unternahm, um ein Empfehlungsschreiben von Agesilaos an den König Nektanebos zu

⁸⁰ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 83

überbringen. Nach seiner Rückkehr zog er nach Kyzikos und gründet dort eine Schule. Anschließend begab er sich nach Athen, wo er Platon und seine Akademie näher kennenlernte. Zu diesem Zeitpunkt war Eudoxos bereits ein berühmter Gelehrter. Es entstand ein freundschaftliches Verhältnis zwischen Platon und ihm. In der Mathematik zog er sich jedoch Platons Kritik zu, da er zu praxisorientiert dachte. Er lehrte die Lust als das höchste Gut und dies wurde als Gegenentwurf zu Platons Ideenlehre gedeutet. Im hohen Alter überredeten ihn seine Landsleute, die Lehrtätigkeit in Athen aufzugeben und wieder nach Knidos zurückzukehren. Dort verstarb er schließlich im Alter von 53 Jahren.⁸¹

4.3.1. Proportionslehre

Die Annahme der Pythagoreer, dass alle Zahlen aus einer Einheit zusammengesetzt sind, wobei die Einheit selbst unteilbar ist, untersuchte Eudoxos genau. Er entdeckte, dass Strecken, im Gegensatz zu den aus Einheiten gebildeten natürlichen Zahlen, unendlich oft teilbar sind. Deshalb kann kein gemeinsames Maß vorausgesetzt werden, weshalb die elementare Proportionslehre versagt. Eudoxos gelang es allerdings, dieses Problem zu lösen. Er konstruierte eine Proportionslehre, welche sowohl auf rationale als auch auf irrationale Größen anwendbar war. Die Definition der Verhältnissgleichheit von zwei Paaren von Größen hatte eben jene Relationen als Grundlage.⁸² „Man sagt, dass Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind; Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen „in Proportion stehend“ heißen.“⁸³ Formal bedeutet diese Theorie, dass $a : b = c : d$ impliziert und dass genau einer von drei Fällen eintreten wird (n und m beliebige ganzzahlige Vielfache):

$$na > mb \Leftrightarrow nc > md$$

$$na = mb \Leftrightarrow nc = md$$

$$na < mb \Leftrightarrow nc < md$$

⁸¹ vgl. Kai Trampedach, Platon, die Akademie und die zeitgenössische Politik, Franz Steiner Verlag (Stuttgart 1994), S. 57 – 69

⁸² vgl. Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 38 – 39

⁸³ Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 39

Auch die Vertauschbarkeit lässt sich zeigen:

$$a:b = c:d \Leftrightarrow c:d = a:b \vee b:a = d:c$$

Ebenso stammt von Eudoxos das Prinzip des Exhaustionsbeweises. In Euklids Elementen findet man dazu folgende Formulierung:⁸⁴

„Nimmt man beim Vorliegen zweier ungleicher Größen von der größeren ein Stück weg, das größer als die Hälfte ist und vom Rest wieder ein Stück weg, das größer als die Hälfte ist und wiederholt das beliebig oft, so muss einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner ist als die kleinere Ausgangsgröße.“⁸⁵

5. Die Alexandrinische Periode

Die Alexandrinische Periode (ca. 350 v.Chr. – 200 v.Chr.) war besonders von einem Feldherrn geprägt: Alexander der Große (356 v.Chr. – 323 v.Chr.). Jener Alexander, der von Aristoteles erzogen wurde, eroberte neben Kleinasien, Syrien und Ägypten auch Babylon und Persien. Er konnte sogar bis nach Afghanistan und Indien vordringen und einige neue Städte gründen. Die wohl bedeutendste Stadt in dieser Periode war Alexandria am Westrand des Niltals.

Dort entstand die wichtigste Bibliothek und größte seines Weltreiches.⁸⁶ Den Überlieferungen nach sollen bereits während der Zeit von Ptolemaios II über 200 000 Papyrusrollen in der Bibliothek aufbewahrt worden sein. Der frühere Stadtverwalter von Athen, Demetrios von Phaleron, wurde 284 v.Chr. von Ptolemaios zum ersten Bibliothekar ernannt. Er verfügte über ein derart großes Etat, dass er entweder die teuren Bücher kaufen oder sie kopieren konnte. Zur Zeit Caesars lagerten bereits über 500 000 Papyrusrollen in der berühmten Bibliothek von Alexandria.

Durch viele kriegerische Auseinandersetzungen wurde die Bibliothek nach und nach zerstört. Völlig devastiert wurde sie, als der Kalif Omar die Stadt Alexandria das erste Mal eroberte.

⁸⁴ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 89 – 90

⁸⁵ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 90

⁸⁶ vgl. Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 65

1890 wurde im Dorf Oxyrhynchos allerdings eine Papyrusrolle eines Werkes von Aristoteles (Verfassung von Athen) gefunden. Seither wird hier systematisch archiologisch geforscht.⁸⁷

Die gesammelte Literatur in Alexandria diente den Wissenschaftlern als universelle Arbeitsgrundlage. Deshalb wird die Alexandrinische Periode oft auch als Hellenistische Periode bezeichnet. Der Prozess der Hellenisierung bedeutet das Entstehen einer einheitlichen Kultur mit der Weltsprache Griechisch. Alexandria blieb noch lange nach dem Untergang der Antike ein bedeutender Studienort. Berühmte Philosophen wie Euklid, Eratosthenes und Apollonios haben in Alexandria gearbeitet.⁸⁸

5.1. Euklid

Über das Leben des Euklid ist nur wenig bekannt. Selbst die Zeit, wann er gelebt haben soll ist äußerst umstritten. Es wird angenommen, dass er zwischen 340 v.Chr. und 270 v.Chr. gelebt hat. Um etwa 300 v.Chr. soll er nach Alexandria berufen worden sein und dort gelehrt haben. Eine weitere Hypothese ist, dass Euklid nur ein Deckname für viele Mathematiker war, welche zusammengearbeitet haben. Diese Annahme ist jedoch wissenschaftlich nicht beweisbar.

Über Euklid gibt es einige Anekdoten.⁸⁹ So soll ihn König Ptolemäus Philadelphus gefragt haben, ob es nicht möglich sei, die Mathematik auch durch einen bequemeren Weg zu erlernen ohne sich anstrengen zu müssen. Er antwortete darauf, dass es für die Erlernung der mathematischen Fähigkeit keinen Königsweg gebe.⁹⁰

5.1.1. Die Elemente

Die Schriften „Die Elemente“ von Euklid gehören zu den wichtigsten und populärsten Büchern der Menschheitsgeschichte.⁹¹ Sie sind nach der Bibel die meistvervielfältigten Bücher des abendländischen Kulturkreises. Sie wurden Schätzungen zu Folge alleine durch den ersten Buchdruck 1500 Mal angefertigt.⁹² Knapp 2000 Jahre nach Erscheinen

⁸⁷ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 98 - 99

⁸⁸ vgl. Scriba, 5000 Jahre Geometrie, S. 65 – 66

⁸⁹ vgl. Wußing, 6000 Jahre Mathematik, S. 190 - 191

⁹⁰ Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 50

⁹¹ vgl. Alfred Wassermann, Stephanie Fröba, Die bedeutendsten Mathematiker, Marixverlag GmbH (Wiesbaden 2012), S. 8

⁹² vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 53

der Werke wurden sie immer noch als Mathematiklehrbücher in Schulen eingesetzt. „Die Elemente“ sind eine schriftliche Abhandlung, die nicht nur die Forschungsergebnisse des Euklid wiedergeben, sondern den gesamten Stoff der griechischen Mathematik aufarbeiten und anordnen.⁹³

Insgesamt gibt es 13 verschiedene Bücher, welche eng miteinander verbunden sind:

Inhaltliche Gliederung			
Buch	Thema	Inhalt	Autor
I	Planimetrie	Dreieckslehre	Hippokrates
II		Flächenlehre	Pythagoreer
III		Kreislehre	Theudios
IV		Vielecklehre	Pythagoreer
VI		Ähnlichkeitslehre	Eudoxos
V	Größenlehre	Proportionslehre	Eudoxos
VII	Arithmetik	Teilbarkeitslehre	Pythagoreer
VIII		Folgenlehre	Archytas
IX		Zahlenlehre	Pythagoreer
X	Größenlehre	Lehre von den Irrationalitäten	Theaitetos
XI	Stereometrie	Elementare Inhaltslehre	Pythagoreer
XII		Infinitesimale Inhaltslehre	Eudoxos
XIII		Lehre von den regulären Polyedern	Theaitetos

Durch diese Gliederung entsteht eine inhaltliche Charakterisierung, welche auf die Quellen und Autoren hinweist, die Euklid berücksichtigt hat.

Durch das Verfassen „der Elemente“ wird deutlich, dass Euklid ein hervorragender Didaktiker und Methodiker war.

Den Titel „Elemente“, der ins Lateinische übersetzt „Stoicheia“ heißt, hat Euklid nicht zufällig gewählt. „Stoicheia“ steht bezeichnend für die Grundbegriffe der Wissenschaft. Sie waren das Gerüst der Grundstoffe.⁹⁴

⁹³ vgl. Wassermann, Fröba, Die bedeutendsten Mathematiker, S. 8

⁹⁴ vgl. Jürgen Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr., Birkhäuser Verlag (Basel – Boston – Berlin 2003), S. 131 – 134

5.1.2. Das Euklidische Lehrsystem

Das erste Buch „der Elemente“ beschreibt die Vorgangsweise bezüglich der mathematischen Inhalte. Euklid ging beim Aufbau der Werke streng axiomatisch vor. Dabei spielte allerdings die Fähigkeit für logische Schlussfolgerungen eine große Rolle. Das euklidischen Lehrsystem hatte es zum Ziel, mithilfe von Postulaten und Definitionen die geometrischen Probleme so abzuleiten, dass die Strukturen des geometrischen Raumes ersichtlich wurden.

Euklidisches Lehrsystem		
Begriffe	Sätze	Regeln
Definitionen	Postulate und Propositionen	Axiome

Dieses Lehrsystem wurde zum Vorbild der wissenschaftlichen Methodik. Durch das System gingen Aussagen mit einer enormen Schärfe hervor, so blieben bei den Beweisen der Sätze keine Zweifel.

Euklid schaffte es einen deduktiven Zusammenhang zwischen unbewiesenen Grundsätzen (Postulate) und zu beweisenden Sätzen herzustellen.

Sein System besteht aus Folgenden formalen Bausteinen:

- Definition (horoi)
- Postulate (aitemata)
- Axiome (koinai ennoiai)
- Lehrsätze (theoremata)
- Aufgaben (problemata)
- Hilfssätze (lemmata)

Darüber hinaus hat Euklid, unter Berücksichtigung des Wissens von Aristoteles, die klassischen Schlussformulierungen aufgezeigt:

- Was zu beweisen war – hoper edei deixai – quod erat demonstrandum
- Was auszuführen war – hoper edei poiesai – quod erat faciendum

Die Schlussformulierungen gelten heute noch als charakteristisch für das euklidische Beweisverfahren. Proklos gliederte es zudem noch in ein hierarchisches Stufenkonzept:

- Vorlage (Protasis)
- Voraussetzung (Ekthesis)
- Behauptung (Diorismos)
- Konstruktion (Kataskeue)
- Beweis (Apodeixis)
- Schlussfolgerung (Symperasma)

Abgekürzt ist es heute bekannt in einem Dreierschritt:

- Voraussetzung
- Behauptung
- Beweis

Für die Beweise in den Büchern verwendete Euklid 465 Propositionen, sowie fünf geometrische Postulate, fünf logische Axiome und 145 Definitionen.⁹⁵

5.1.3. Zum Satz des Pythagoras

Euklid hat in „seinen Elementen“ ebenfalls einen Beweis für den Satz des Pythagoras geliefert. Der Lehrer und Mathematiker Elisha Scoot Loomis meint über den Beweis des Satzes von Pythagoras von Euklid:⁹⁶ „Das Weglassen von Euklids Beweis ist so, als ob man Shakespeares Hamlet ohne Hamlet spielen würde.“⁹⁷

Für den Beweis wird ein rechtwinkeliges Dreieck ABC betrachtet. Der rechte Winkel findet sich im Winkel $\angle BAC$ wieder. Nun werden jeweils die Quadrate über die Katheten $\overline{BA}$ mit dem Quadrat BAGF, $\overline{AC}$ mit dem Quadrat ACKH, sowie über der Hypotenuse $\overline{BC}$ mit dem Hypotenusenquadrat BDEC gezeichnet.

⁹⁵ vgl. Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr., S. 134 – 138

⁹⁶ vgl. Hans Kaiser, Wilfred Nöbauer, Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht, Verlag Holder – Pichler – Tempsky (Wien 1984), S. 122

⁹⁷ Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 122

Über das Rechteck BL lässt sich zudem sagen, dass es dieselbe Fläche hat wie $2 \cdot \Delta ABD$, da sie beide zwischen den Parallelen BD und AL liegen und die idente Grundlinie $\overline{BD}$ haben.

Aus dem gleichen Grund ist $2 \cdot \Delta FBC$ gleich dem Quadrat GB. Diese befinden sich nun beide zwischen den Parallelen FB und GC und liegen auf der Grundlinie $\overline{FB}$.

Daraus ergibt sich, dass das Rechteck BL flächengleich ist mit dem Quadrat GB.

Selbe Eigenschaft gilt für das Rechteck CL und das Quadrat HC.

Werden nun die beiden Rechtecke CL und BL miteinander addiert, entsteht das Quadrat BDEC und dieses hat somit den gleichen Flächeninhalt wie die beiden Kathetenquadrate BAGF und ACKH.⁹⁸

Innerhalb dieses Beweises hat Euklid noch einen weiteren wichtigen geometrischen Satz verwendet. Um die Gleichheit des Rechtecks BL mit dem Quadrat GB zu zeigen, verwendete Euklid den Kathetensatz.⁹⁹

Dieser besagt: „In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck aus Hypotenuse und Hypotenusenabschnitt.“¹⁰⁰

5.1.4. Das Parallelenaxiom

Das fünfte Postulat, also die fünfte wissenschaftliche Behauptung, findet sich im ersten Buch „der Elemente“ wieder. Es beschreibt das Parallelenaxiom:¹⁰¹ „Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt zweier geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“¹⁰²

John Playfair, Professor für Mathematik an der Universität Edinburgh, hat im 18.

Jahrhundert eine Definition festgelegt, welche noch bis heute bekannt ist:¹⁰³ „Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g ($P \notin g$) gibt es genau eine Parallele $h \parallel g$ zu der gegebenen Geraden mit ($P \in h$).“¹⁰⁴

⁹⁸ vgl. Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 123

⁹⁹ vgl. Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 124

¹⁰⁰ Dörte Haftendorn, Mathematik sehen und verstehen. Schlüssel zur Welt, Spektrum Akademischer Verlag (Heidelberg 2010), S. 310

¹⁰¹ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 131

¹⁰² Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr., S. 134

¹⁰³ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 131

¹⁰⁴ Hermann, Die antike Mathematik, S. 131

Aus dem Parallelaxiom lässt sich zunächst der Innenwinkelsatz im Dreieck ableiten.
Um diesen zu beweisen, wird ein Dreieck $\triangle ABC$ betrachtet.

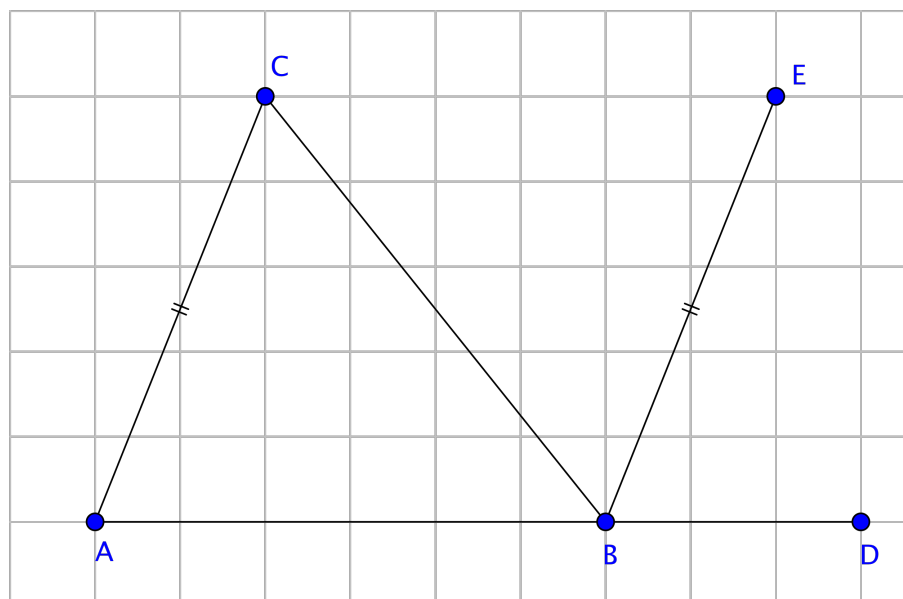


Abbildung 16¹⁰⁵ Innenwinkelsatz

Die Seite AB wird nun verlängert bis hin zum Punkt D . Vom Punkt B ausgehend wird nun die Parallele $BE \parallel AC$ gezogen.

Aufgrund dessen, dass die beiden Parallelenpaare AC und BE von der Geraden BC geschnitten werden, sind die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle CBE$ kongruent.

Da die Gerade AD ebenso das Parallelenpaar schneidet, ergibt die Summe der Winkel $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABE$ zwei rechte Winkel also 180° . Wiederum sind die Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle EBD$ kongruent.

Aus der Eigenschaft, dass der Winkel $\sphericalangle ABD$ ein gestreckter Winkel ist, folgt:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBE + \sphericalangle EBD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CAB = 2R$$

Somit wurde gezeigt, dass die Summe der Innenwinkel im Dreieck zwei rechten Winkeln entspricht.

Darüber hinaus lässt sich folgern, dass die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel dem Außenwinkel entspricht:

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB$$

¹⁰⁵ Hermann, Die antike Mathematik, S. 131

Für die Konstruktion von Parallelen lieferte Euklid ebenfalls eine Beschreibung. Gegeben ist die Gerade BC und der außerhalb der Geraden liegende Punkt A . Nun wird auf der Geraden BC ein beliebiger Punkt D gewählt und mit dem Punkt A verbunden. Anschließend wird der Winkel $\angle ADC$ auf den Schenkel AD im Punkt A übertragen. Nun entstehen kongruente Wechselwinkel an der Strecke AD und die gesuchte Parallele ergibt sich nun durch den verlängerten Schenkel des Winkels bei Punkt A .¹⁰⁶

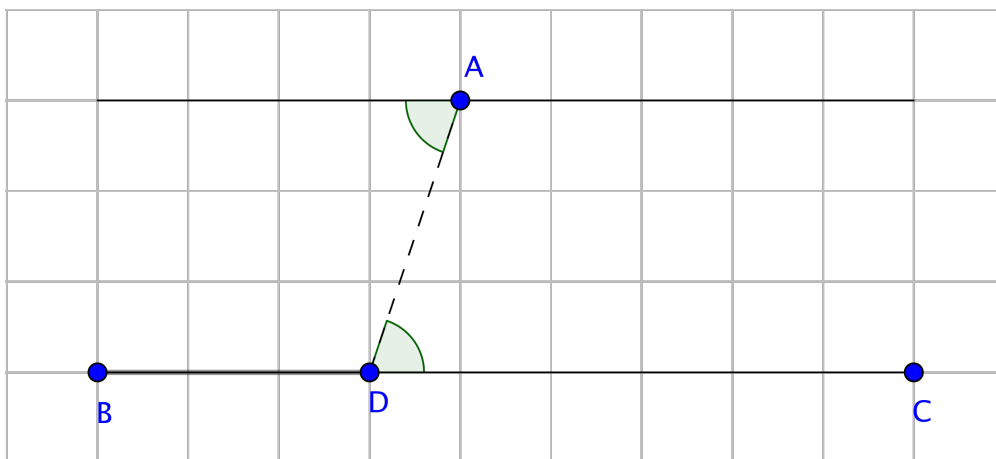


Abbildung 17¹⁰⁷ Konstruktion einer Parallelen

5.1.5. Die Kreistangente

Euklid formulierte in seinem dritten Buch „der Elemente“ eine Anleitung zur Konstruktion einer Kreistangente. Es soll von einem gegebenen Punkt ausgegangen werden, von welchem aus eine Tangente an einen Kreis gezogen werden soll.

¹⁰⁶ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 131 – 132

¹⁰⁷ Hermann, Die antike Mathematik, S. 132

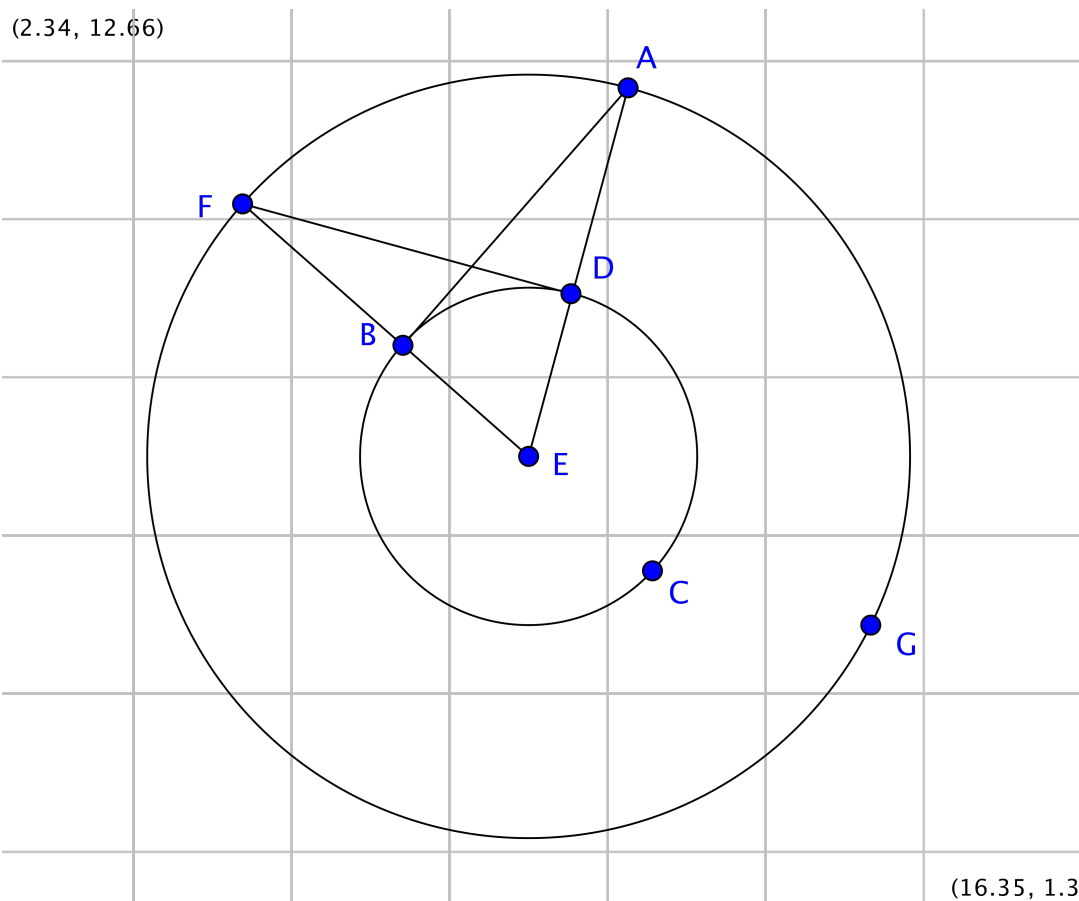


Abbildung 18¹⁰⁸ Konstruktion Kreistangente

A wird als der gegebene Punkt und BCG als der gegebene Kreis angenommen. Die Aufgabe besteht nun darin, vom Punkt A aus eine Tangente an den Kreis BCG zu konstruieren. Nun wird die Strecke vom Punkt A aus zum Mittelpunkt E des Kreises gezeichnet. Diese Strecke $\overline{EA}$ ist nun der Radius für einen neuen Kreis AFG . Jetzt werden die beiden Punkte D und F miteinander verbunden, wobei die Strecke $\overline{DF}$ gerade auf $\overline{AE}$ steht. Ebenso werden die Strecken $\overline{EF}$ und $\overline{AB}$ gezogen.

Der Punkt E ist der Mittelpunkt der beiden Kreise BCD und AFG . Deshalb haben die Strecken $\overline{EF}$ und $\overline{AE}$, sowie $\overline{ED}$ und $\overline{EB}$ dieselbe Länge.

Daraus lässt sich schließen, dass die zwei Seiten AE und EB den Seiten FE und ED entsprechen.

Diese umfassen einen gemeinsamen Winkel bei Punkt E . Nun gilt:

$$DF = AB, \Delta DEF = \Delta EBA$$

¹⁰⁸ J.J. Bruckhardt, Lesebuch zur Mathematik. Quellen von Euklid bis heute, Räber Verlag (Luzern – Stuttgart 1968), S.11

Ebenso stimmen die restlichen Winkel überein. Somit ist auch $\angle EDF = \angle EBA$.

Der Winkel $\angle EDF$ ist allerdings ein rechter Winkel. Folglich muss $\angle EBA$ ebenso ein rechter Winkel sein.

Nun muss die Strecke $\overline{AB}$ den Kreis BCD berühren, da sie rechtwinkelig auf den Kreisdurchmesser steht.¹⁰⁹

5.1.6. Das Fünfeck

Im siebten Buch „die Elemente“ findet sich eine Anleitung zur Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks. Diese Anleitung galt bis zu den Zeiten von Carl Friedrich Gauß (1777 -1855) als die beachtlichste Konstruktion von regelmäßigen Vielecken. Euklid zeichnete dazu in einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck, sowie ein regelmäßiges Fünfeck ein. Wichtig dabei ist, dass das Dreieck und das Fünfeck eine gemeinsame Ecke haben.

Daraus ergibt sich nun, dass die Differenz der Mittelwinkel der beiden Vielecke

$\frac{4}{3} - \frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{2}{15}$ ist. Diese sind rechte Winkel und sind daher doppelt so groß wie die Mittelwinkel des Fünfecks.

Folglich ist die Verbindung der Ecke eines Dreiecks mit der nächstliegenden Ecke des Fünfecks genau eine Seite des regelmäßigen Fünfecks (siehe Abbildung 19).¹¹⁰

¹⁰⁹ vgl. Bruckhardt, Lesebuch zur Mathematik, S. 11

¹¹⁰ Franka Miriam Brückler, Geschichte der Mathematik kompakt. Das wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2017), S. 58

3, 13.42)

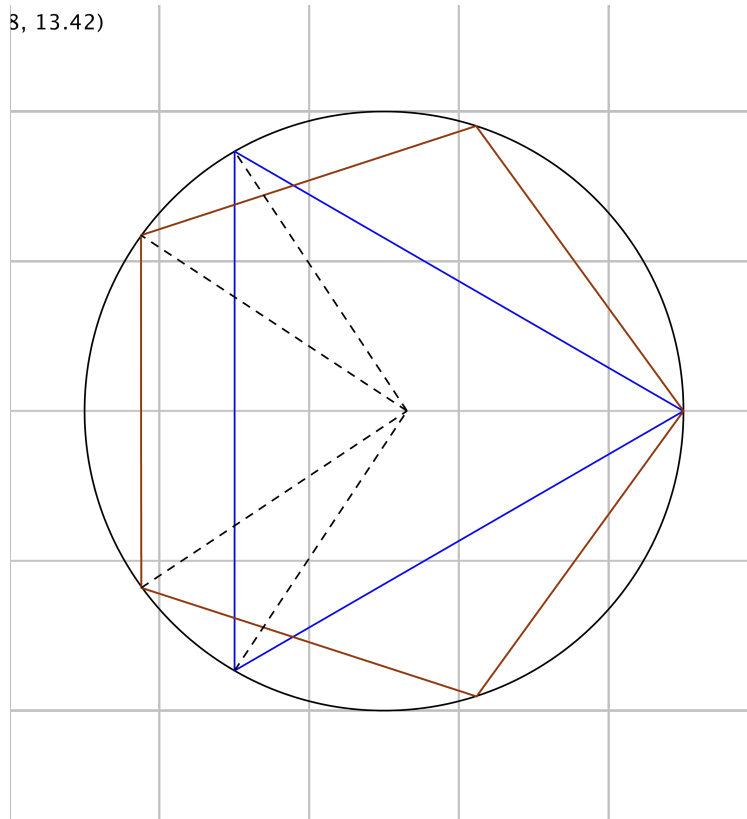


Abbildung 19¹¹¹ Konstruktion Fünfeck

5.1.7. Lineare Gleichungen

Euklid hat eine geometrische Lösung der linearen Gleichung $ax = b$ festgehalten. Dabei sind die beiden Größen a und x jeweils Streckenlängen. Daraus lässt sich folgern, dass die Größe x einen Flächeninhalt mit den beiden Seitenlängen β und γ darstellen muss. Deshalb wird die lineare Gleichung abgewandelt in $ax = \beta\gamma$.

Die Aufgabe besteht nun darin, ausgehend von einem gegebenen Rechteck mit den Seitenlängen β und γ , ein flächengleiches Rechteck mit einer Seitenlänge α zu konstruieren.

Um diese Konstruktion ausführen zu können, wird als Hilfe die Konstruktion aus dem ersten Buch „der Elemente“, Proportion 44, herangezogen. Diese lautet:¹¹² „An eine gegeben Strecke ein einem gegebenen Parallelogramm gleiches Parallelogramm in einem gegeben geradlinigen Winkel anzulegen.“¹¹³

¹¹¹ Brückler, Geschichte der Mathematik kompakt, S. 58

¹¹² vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 73

¹¹³ Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 73

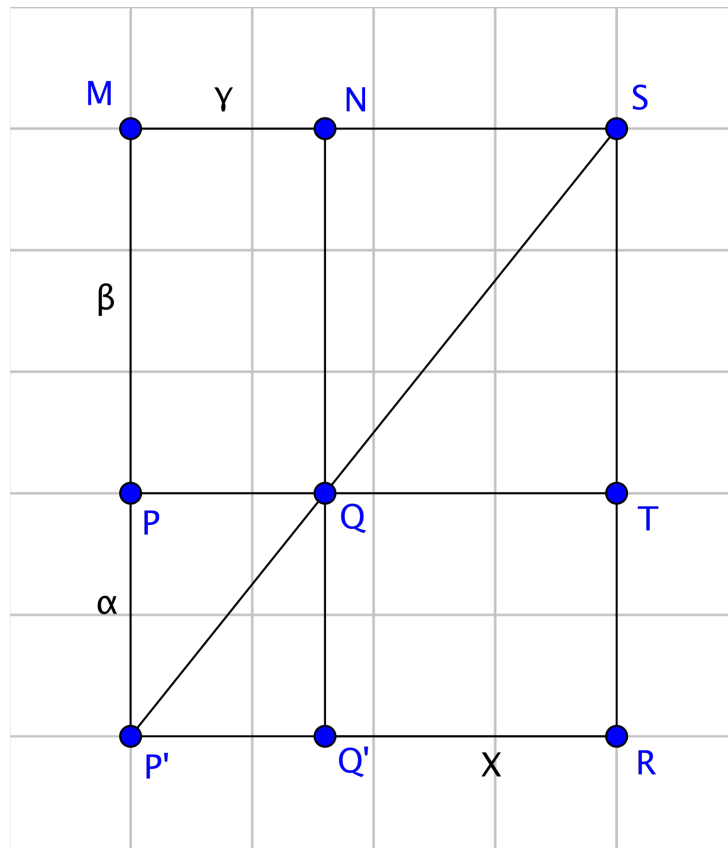


Abbildung 20¹¹⁴ Geometrische Lösung von $ax=by$

Es gibt jedoch eine zweite geometrische Möglichkeit, die Gleichung $ax = by$ zu lösen. Dafür wird nun kein Rechteck, sondern ähnliche Dreiecke betrachtet.

Im siebten Buch „die Elemente“, Proportion 12 verwendete Euklid für die Lösung den Strahlensatz und dazu verwendete dazu die Variable x als vierte Proportionale.

Daher gilt:

$$a : \gamma = \beta : x^{115}$$

¹¹⁴ Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 73

¹¹⁵ vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 73

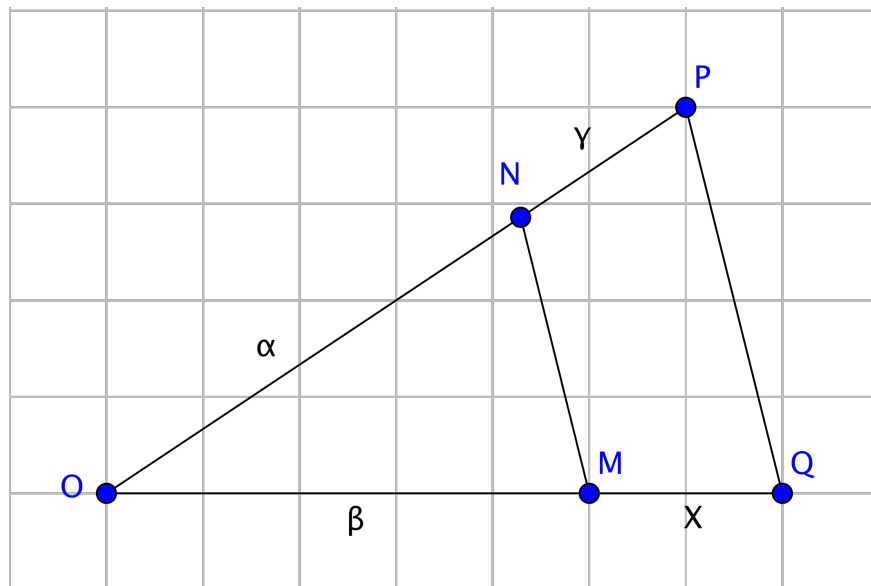


Abbildung 21¹¹⁶ Lösung der Gleichung $ax=by$ durch Strahlensatz

5.1.8. Quadratische Gleichungen

Auch für quadratische Gleichung hielt Euklid eine geometrische Lösung im zweiten Buch „der Elemente“, Proportion 11, fest:¹¹⁷ „Eine gegebene Strecke ist so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.“¹¹⁸

Nun sei die Strecke $\overline{AB}$ gegeben, auf der ein Punkt H gesucht wird. Dieser hat die Eigenschaft, dass das entstehende Quadrat über AH gleich mit dem Rechteck aus AB und BH ist:

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH}$$

¹¹⁶ Alten, 4000 Jahre Algebra, S.74

¹¹⁷ vgl. Franz Lemmermeyer, Mathematik a la Carte. Quadratische Gleichungen mit Schnitten von Kegeln, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2016), S. 15

¹¹⁸ Lemmermeyer, Mathematik a la Carte, S. 15

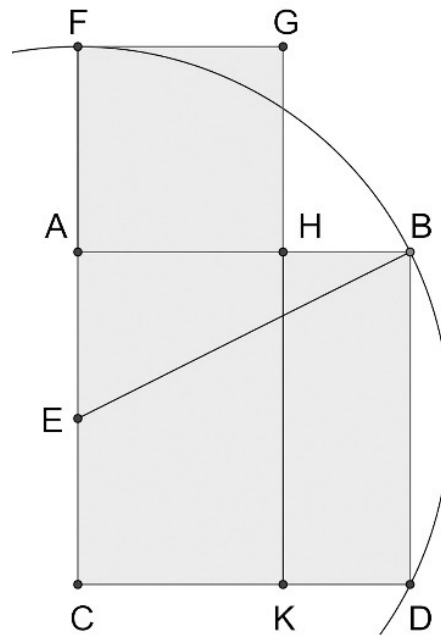


Abbildung 22¹¹⁹ Geometrische Darstellung nach Euklid

Zunächst wird das Quadrat $ABCD$ konstruiert, sowie der Mittelpunkt der Strecke AC , welchen er E nannte. Wird nun die Strecke $\overline{AC}$ bis zu dem Punkt F verlängert, so dass sich ergibt, dass $\overline{EF} = \overline{EB}$ ist, kann das Quadrat $AFGH$ ebenfalls gezeichnet werden. Nun ist H der gesuchte Punkt.

Diese geometrische Lösung lässt sich ebenso ins algebraische übertragen. Die Strecke $\overline{AB}$ soll von nun an mit a bezeichnet werden, die Strecke $\overline{AH}$ mit p und die Strecke $\overline{HB}$ mit q . Deshalb entsteht nun die Gleichung $p^2 = aq$, da die beiden Strecken p und q so geteilt werden, dass das Quadrat über $\overline{AH}$ den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der gesamten Strecke sowie dem zweiten Teil hat.

Weil ja $p + q = a$ ist, ergibt sich dadurch $p^2 = a(a - p)$, a ist demnach die vorgegebene Größe und p die gesuchte. Ausmultipliziert zeigt sich, dass diese Gleichung die quadratische Gleichung $p^2 = a^2 - ap$ ist. Durch Umformen entsteht nun $a^2 = p^2 + ap$. Die quadratische Gleichung kann nun für alle positive Lösungen gelöst werden:

$$p = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$$

¹¹⁹ Lemmermeyer, Mathematik a la Carte, S. 16

Um wieder auf Euklid zurückzukehren wird wieder von $\overline{AB} = a$ und $\overline{AE} = \frac{a}{2}$ ausgegangen.

Die Strecke $\overline{EB}$ entsteht aus dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{EB} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

Schlussendlich ergibt sich dadurch:

$$\overline{AH} = \overline{AF} = \overline{EF} - \overline{EA} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$$

Dies ist die selbige Gleichung wie sie bereits oben beschrieben wurde.

Auffallend ist jedoch, dass diese Lösung ein Spezialfall ist. Warum sich Euklid mit der Lösung eines Spezialfalles zufrieden gab, hat mit der Konstruktion des regelmäßigen

Fünfecks zu tun. Denn hierfür benötigte er den Ausdruck $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.¹²⁰

5.1.9. Primzahlen

Auch im Bereich der Primzahlen hat Euklid viele bereits bekannte Erkenntnisse zu einer einheitlichen Theorie zusammengefasst. So beispielsweise den Fundamentalsatz der Primelementzerlegung:¹²¹

„Jede Zahl ($\neq 1$) ist Primzahl oder Produkt von Primzahlen, die (bis auf die Reihenfolge) durch die Zahl eindeutig bestimmt sind.“¹²²

Seine Aussagen und Formulierungen konnten ganz einfach ergänzt und verallgemeinert werden, dass beispielsweise daraus die Eindeutigkeitsaussagen über Primteiler entstanden:¹²³ „Elemente VII, 30. Wenn zwei Zahlen, indem sie einander vervielfältigten

¹²⁰ vgl. Lemmermeyer, Mathematik a la Carte, S. 15 - 16

¹²¹ vgl. Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr., S.144

¹²² Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr., S. 144

¹²³ vgl. Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr., S.144

irgendeine Zahl bilden und irgendeine Primzahl dabei das Produkt mißt, dann muß diese auch eine der ursprünglichen Zahlen messen.“¹²⁴

Dies bedeutet:

$$p / a \cdot b \rightarrow p / a \vee p / b$$

Dies lässt sich für teilerfremde Zahlen a und b verallgemeinern zu:

$$a / b \cdot c \rightarrow a / c^{125}$$

Ein weiteres wichtiges Resultat im Bereich der Primzahlen ist der Satz über die Folgen von Primzahlen. Dieser findet sich im neunten Buch „der Elemente“, Proportion 20 wieder:¹²⁶ „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.“¹²⁷

Es werden die Primzahlen a, b und c betrachtet. Es wird nun behauptet, dass es mehr Primzahlen als jene drei gibt.

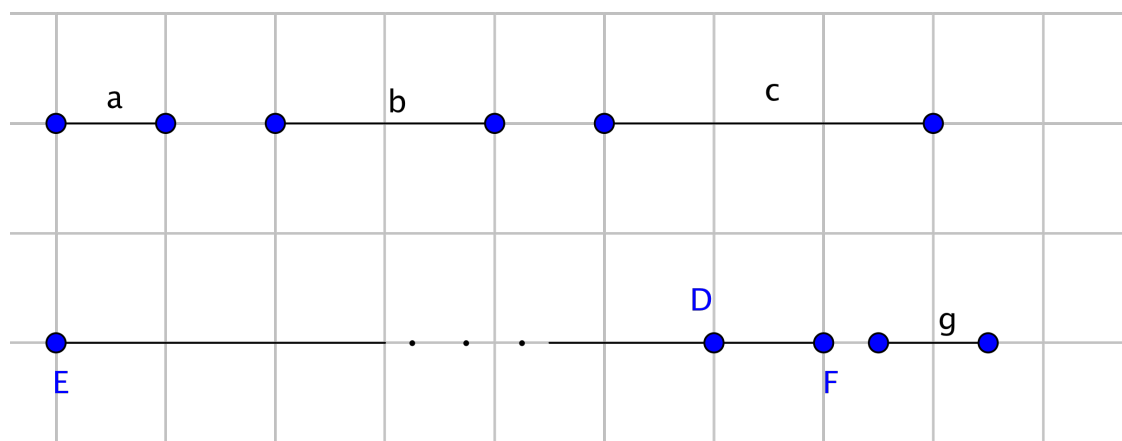


Abbildung 23 Unendlichkeit von Primzahlen

Die kleinste von a, b, c gebildete Zahl sei DE . Zu dieser Zahl DE wird nun die Einheit DF hinzugefügt. Daher ist nun entweder EF eine Primzahl oder nicht.

¹²⁴ Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr., S. 144

¹²⁵ vgl. Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr. S. 145

¹²⁶ vgl. J.J. Bruckhardt, Lesebuch zur Mathematik, S. 15

¹²⁷ J.J. Bruckhardt, Lesebuch zur Mathematik, S. 15

Es wird zuerst angenommen, dass EF eine Primzahl ist. Nun werden mehr Primzahlen als a, b, c gefunden, nämlich a, b, c und EF .

Nun sei EF keine Primzahl. Daraus ergibt sich, dass von irgendeiner Primzahl gemessen werden muss und diese Primzahl ist g . Nun lautet die Behauptung, dass g mit keiner der Primzahlen a, b oder c zusammenfällt. Wäre dies möglich, würde g dies tun.

DE wird nun von a, b und c gemessen. Auch die Primzahl g müsste nun DE messen. Allerdings misst g auch EF und somit muss sie auch den Rest, demnach die Einheit DF messen, wäre es eine Zahl. Dies wäre allerdings unlogisch und somit fällt g mit keiner der Zahlen a, b oder c zusammen und eben dies ist die Voraussetzung einer Primzahl. Daher wurden nun mehr Primzahlen als die vorgelegte Anzahl a, b, c gefunden.¹²⁸

5.1.10. Euklidischer Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus ist im siebten Buch „die Elemente“, Proportion 2 beschrieben. Er ist der älteste nicht triviale Algorithmus. Auch heutzutage ist er ungemein wichtig für die Mathematik. Der Algorithmus kommt bei Alltagsberechnungen oder bei der Verschlüsselungstechnik zum Einsatz.

Der Algorithmus liefert zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen den größten gemeinsamen Teiler. Das Verfahren per se lässt sich ganz einfach beschreiben. So wird immer fortlaufend geteilt, bis kein Rest mehr bleibt. Eine wichtige Hilfestellung dabei ist der Satz von der Division mit Rest.¹²⁹ Dieser besagt, dass „es zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen $a \geq b$ stets genau eine natürliche Zahl q und eine natürliche Zahl r gibt, so dass $a = q \cdot b + r$ und $0 \leq r < b$ gilt.“¹³⁰

Durch das fortlaufende Anwenden des Satzes der Division mit Rest entsteht ein Gleichungssystem. Dazu wird noch $a_0 := a$ und $a_1 := b$ definiert.

$a_0 = q_1 \cdot a_1 + a_2$	$(0 \leq a_2 < a_1)$	(Zeile 0)
$a_1 = q_2 \cdot a_2 + a_3$	$(0 \leq a_3 < a_2)$	(Zeile 1)
$a_2 = q_3 \cdot a_3 + a_4$	$(0 \leq a_4 < a_3)$	(Zeile 2)
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_{k-1} = q_k \cdot a_k + a_{k+1}$	$(0 \leq a_{k+1} < a_k)$	(Zeile k-1)
$a_k = q_{k+1} \cdot a_{k+1} + a_{k+2}$	$(0 \leq a_{k+2} < a_{k+1})$	(Zeile k)
$a_{k+1} = q_{k+2} \cdot a_{k+2} + a_{k+3}$	$(0 \leq a_{k+3} < a_{k+2})$	(Zeile k+1)
$\dots$	$\dots$	$\dots$

¹²⁸ vgl. J.J. Bruckhardt, Lesebuch zur Mathematik, S. 15

¹²⁹ vgl. Armin P. Barth, Algorithmik für Einsteiger. Für Studierende, Lehrer und Schüler in den Fächern Mathematik und Informatik, Springer Spektrum Verlag (Wiesbaden 2013), S. 40 – 41

¹³⁰ Barth, Algorithmik für Einsteiger, S. 41

Die bleibenden Divisionsreste ergibt sich nach dem Satz von der Division mit Rest:

$$b = a_1 > a_2 > a_3 \dots > a_{k-1} > a_k > a_{k+1} > \dots$$

Die streng monoton fallenden Divisionsreste sind alle ganzen Zahlen. Demnach muss diese Kette an Resten abbrechen und somit muss der letzte Rest $a_n \neq 0$ sein. Der nächstkommende Rest nach a_n muss daher Null sein: $a_{n+1} = 0$.

Nun ergibt sich dadurch für die beiden letzten Zeilen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lll} a_{n-2} = q_{n-1} \cdot a_{n-1} + a_n & (0 \leq a_n < a_{n-1}) & \text{(Zeile n-2)} \\ a_{n-1} = q_n \cdot a_n + a_{n+1} & (a_{n+1} = 0) & \text{(Zeile n-1)} \\ \text{d.h.: } a_{n-1} = q_n \cdot a_n & & \end{array}$$

Im Euklidischen Algorithmus ist nun jener letzte Rest $a_n \neq 0$ der größte gemeinsame Teiler von a und b .

Um dies nun beweisen zu können, muss ein weiterer Hilfssatz in Anspruch genommen werden:¹³¹

„Es seien a, b und c ganze Zahlen. Ist a ein gemeinsamer Teiler von b und c , so teilt a auch die Summe $b + c$.“¹³²

Um den Euklidischen Algorithmus zu beweisen, muss in einem ersten Schritt gezeigt werden, dass a_n ein gemeinsamer Teiler von a und b ist.

Aus der letzten Gleichung des Gleichungssystems $a_{n-1} = q_n \cdot a_n$ ist ersichtlich, dass a_n ein Teiler von a_{n-1} ist. Folglich muss a_n auch $q_{n-1} \cdot a_{n-1} + a_n$ teilen. Dieser Ausdruck ist allerdings laut Zeile n-2 genau a_{n-2} . Zeilenweises ausführen dieser Anwendung nach oben zeigt, dass a_n nun ein Teiler jeder der Zahlen

$a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{k+1}, a_k, a_{k-1}, \dots, a_3, a_2, a_1$ und a_0 ist. Somit wurde gezeigt, dass a_n eben genau ein Teiler von a und b ist.

Im nächsten und letzten Schritt muss nun gezeigt werden, dass a_n auch der größte gemeinsame Teiler (ggT) von a und b ist. Dazu wird ein beliebiger gemeinsamer Teiler von a ($= a_0$) und b ($= a_1$), der Teiler d herangezogen. Nun teilt d auch $a_0 - q_1 \cdot a_1$. Dies

¹³¹ vgl. Jochen Ziegenbalg, Oliver Ziegenbalg, Bernd Ziegenbalg, Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. Mit Beispielen aus den Computeralgebrasystemen Mathematica und Maxima, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2016), S. 62 - 63

¹³² Ziegenbalg, Algorithmen von Hammurapi bis Gödel, S. 63

ist allerdings genau a_3 . Wieder wird durch zeilenweises Ausführen nach oben gezeigt, dass d ein Teiler von jeder Zahl $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}$ und a_n ist. Der Teiler d von a und b ist demnach also ein Teiler von a_n . Somit ist a_n der größte gemeinsame Teiler.¹³³

5.2. Archimedes

Archimedes wurde als Sohn von Pheidias geboren. Er war mit König Hieron II. von Syrakus und dessen Sohn Gelon verwandt und pflegten ein gutes Verhältnis zu beiden. Archimedes erhielt seine Ausbildung während eines längeren Aufenthalts in Alexandria. Zudem stand er in einem dauerhaften Briefwechsel mit dem Astronomen Konon von Samos sowie mit Eratosthenes von Kyrene. Seine zahlreichen Werke deuten darauf hin, dass er ein tiefgründiger Denker im Bereich der Mathematik war. Er gilt als Entdecker der Gesetze für Hebel und schiefe Ebenen und der Konstruktion des Flaschenzuges. Es lässt sich sagen, dass mit Archimedes die Mathematik in der Antike ihren Höhepunkt erreichte. Viele Legenden und Geschichten sind mit seiner Person verbunden. Er war beispielsweise derart mit dem Studieren der Geometrie beschäftigt, dass er Kleidung und Körperpflege vernachlässigte. Selbst wenn er badete, soll er auf seinen mit Öl bedeckten Körper geometrische Figuren gezeichnet haben. Auch um seinen Tod ranken sich unterschiedliche Geschichten. Die berühmteste Legende ist, dass er in den Sand geometrische Figuren schrieb. Als ein römischer Soldat kam soll ihn Archimedes angeschrien haben, er solle seine Kreise nicht stören. Daraufhin erschlug hat der Soldat.¹³⁴

5.2.1. Dreiteilung eines Winkels

Eines der klassischen Probleme der griechischen Mathematik war es, einen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Das Problem war, dass dies alleine mit einem Zirkel und Lineal nicht möglich war. Daher suchten die Griechen nach einer möglichen geometrischen Lösung. Archimedes gelang es eine Lösung dafür zu finden.

¹³³ Ziegenbalg, Algorithmen von Hammurapi bis Gödl, S. 63 – 64

¹³⁴ Wußing, 6000 Jahre Mathematik, S. 194 – 196

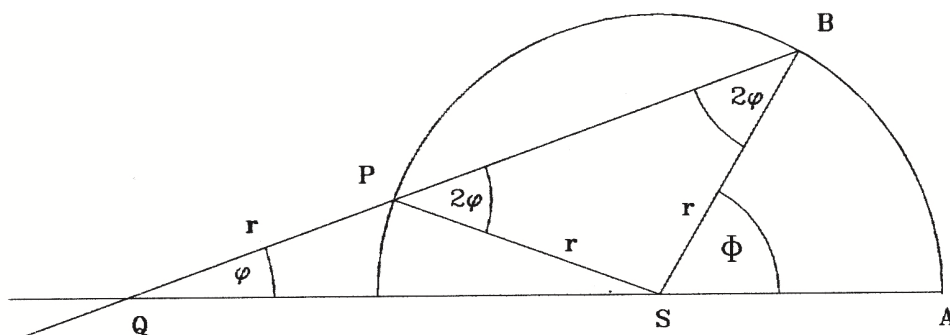


Abbildung 24 Skizze zur Dreiteilung eines Winkels

Das Problem wird durch das sogenannte Einschieben gelöst.

Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt S und eine Gerade durch die Punkte A und S (siehe Abbildung 24¹³⁵). Nun muss eine Gerade so bestimmt werden, dass sie den Kreis und die Gerade durch A und S schneidet und dass der Abstand zwischen den Punkten P und Q die Länge des Radius r hat. Wird nun angenommen, dass die Strecke $\overline{PQ}$ tatsächlich existiert, dann folgt daraus, dass der Winkel $\angle PQS = \varphi$ ist.¹³⁶

5.2.2. Der Näherungswert von π

Archimedes hat ein Verfahren entwickelt, um näherungsweise die Zahl π angeben zu können. Ausgehend vom umschriebenen regulären Sechseck führte er Winkelhalbierungen durch, bis er beim 96 – Eck angekommen war. Nun ergibt sich durch das Einschließen des Verhältnisses vom Kreisdurchmesser zum Polygonumfang die Kreiszahl. Für die Berechnungen des Umfanges des regulären $2n$ – Ecks (u_{2n}^u) und umschriebenen n – Ecks (u_n^u) geht folgende Überlegung voraus:
BC ist die halbe Seite des n – Ecks, welches mit dem Kreis mit dem Mittelpunkt E umschrieben ist. Der Winkel DE halbiert den Winkel BEC. Daraus ergibt sich, dass die Seite DC gleich ist mit der halben Seite des umschriebenen $2n$ – Ecks.

¹³⁵ Hans Humenberger, Elementarmathematische Betrachtungen zum Delischen Problem und zur Winkeldreiteilung, aus: Internationale Mathematische Nachrichten, S. 42, online unter <https://www.oemg.ac.at/IMN/imn219.pdf>

¹³⁶ vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 89

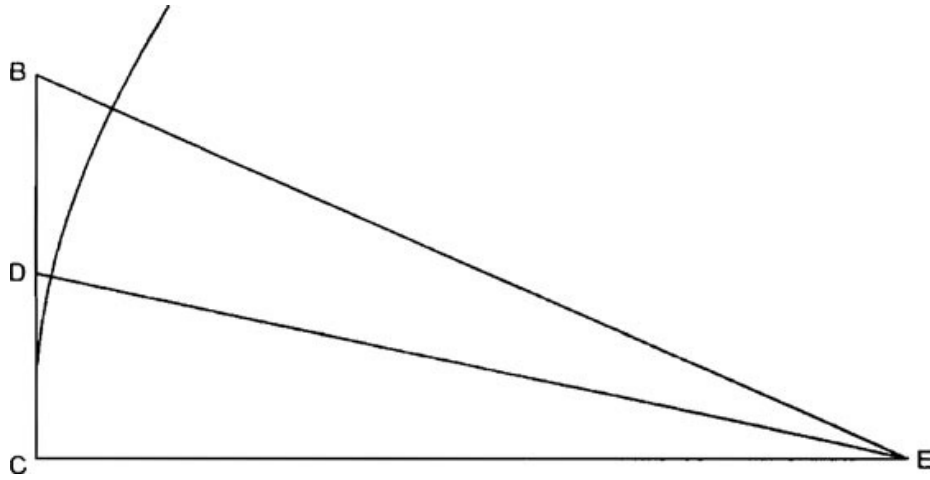


Abbildung 25 Ausgangslage¹³⁷

Durch elementargeometrische Beziehungen ergibt sich nun:

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BE + EC}{EC} = \frac{BD + DC}{DC} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{BE + EC}{BC} = \frac{EC}{DC}$$

Weiters wird definiert, dass $A_n = A_{2n} = 1$ ist. Jetzt wird festgelegt:

$$\frac{BC}{CE} = \frac{A_n}{B_n}, \frac{DC}{EC} = \frac{A_{2n}}{B_{2n}}, \frac{BC}{BE} = \frac{A_n}{C_n} = \frac{1}{C_n} \text{ und } C_n^2 = A_n^2 + B_n^2 = 1 + B_n^2 \text{ ist.}$$

Deshalb gilt nun:

$$\frac{EC}{DC} = \frac{B_{2n}}{A_{2n}} = B_{2n} = \frac{BE + EC}{BC} = \frac{B_n + C_n}{A_n} = B_n + C_n$$

Nun lässt sich der Polynomumfang schreiben als:

$$u_n^u = n \cdot 2 \cdot BC \text{ und } u_{2n}^u = 2n \cdot 2 \cdot DC$$

Für die Näherungswerte π_n^u der Kreiszahl gilt jetzt:

$$\pi_n^u = \frac{u_n^u}{2CE} = n \cdot \frac{BC}{CE} = n \cdot \frac{A_n}{B_n} = \frac{n}{B_n} \text{ und}$$

¹³⁷ Ivo Schneider, Archimedes. Ingenieur, Naturwissenschaftler, Mathematiker, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2016), S. 106

$$\pi_{2n}^u = \frac{u_{2n}^u}{2CE} = 2n \cdot \frac{DC}{CE} = 2n \cdot \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{2n}{B_n + C_n}$$

Anhand dieser Formeln lassen sich mithilfe der Werte des 6 - Ecks, $B_6 = \sqrt{3}$ und $C_6 = 2$, die Werte für π_n^u (n=6,12, 24, 48, 96 usw.) berechnen.

Wird nun das beschriebene reguläre Polygon betrachtet (siehe Abbildung 26¹³⁸), ergeben sich folgende Formeln für den Näherungswert von π :

$$\pi_n^e = n \cdot \frac{BC}{AC} = n \cdot \frac{A_n}{C_n} = \frac{n}{C_n} \text{ und}$$

$$\pi_{2n}^e = \frac{2n}{C_{2n}} = 2n \cdot [1 + (B_n + C_n)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Nun lässt sich mit den Werten des regulären Sechsecks, $A_6 = 1, B_6 = \sqrt{3}$ und $C_6 = 2$ reihenweise π_n^e (n=6, 12, 24, 48, 96 usw.) berechnen.

Dadurch, dass die Bestimmungsdreiecke der Polygone ähnlich sind, müssen die Seitenverhältnisse durch B_n und C_n nur einmal berechnet werden.

Durch das gewichtete Mittel $p_n := \frac{2\pi_n^e + \pi_n^u}{3}$ für $n = 96$ ergibt sich die Zahl 3, 1415929.

Dieses weicht erst in der siebten Nachkommastelle von der Zahl π ab.¹³⁹

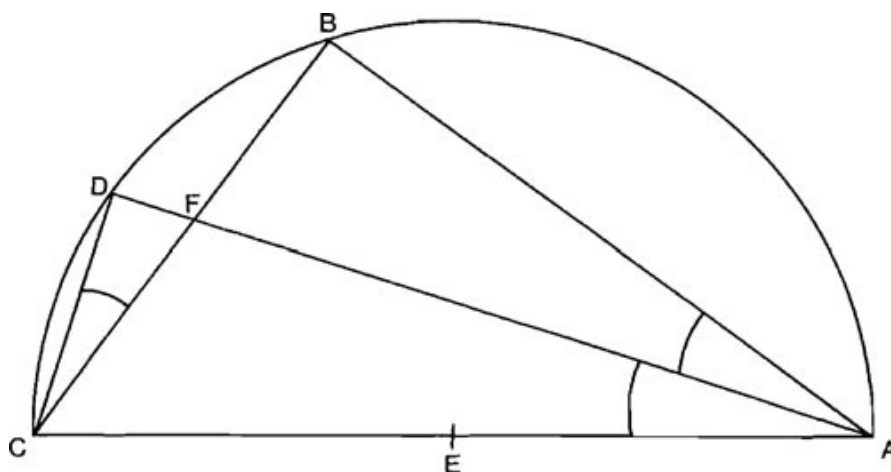


Abbildung 26 Einbeschriebene reguläre Polygone

¹³⁸ Schneider, Archimedes, S. 107

¹³⁹ vgl. Schneider, Archimedes, S. 105 – 108

5.2.3. Konstruktion des Siebenecks

Archimedes beschäftigte sich ebenfalls bereits mit der Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks. Diese Konstruktion erfolgte seiner Meinung nach in zwei Schritten:

- 1.) Es ist eine Strecke AC gegeben. Nun werden zwei Punkte D und M bestimmt, wobei $D \neq A, C$; $M \neq A, C$ anzunehmen ist. Dies wird in Abbildung 27¹⁴⁰ illustriert.

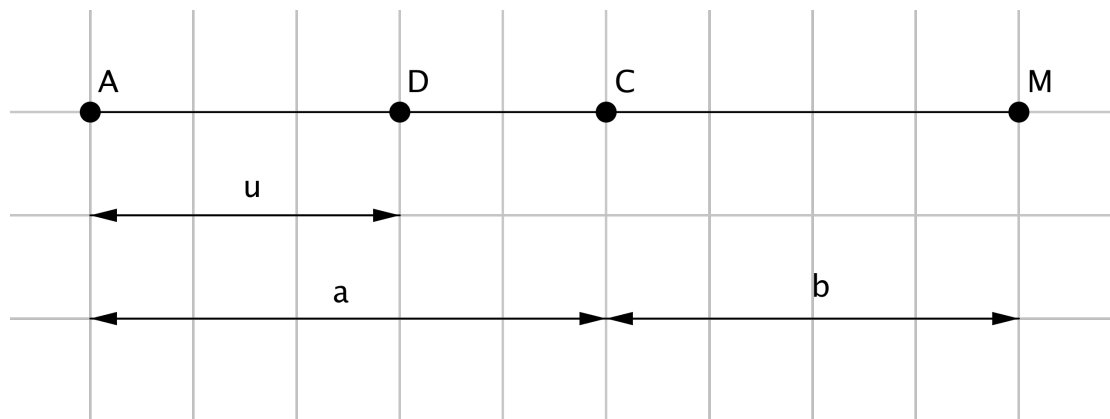


Abbildung 27 Konstruktion Siebeneck Schritt 1

Nun gilt:

$$CM^2 = AC \cdot AD \text{ und } AD^2 = CD \cdot DM$$

- 2.) Die Eigenschaften von A, D, C, M gelten wie in Schritt 1. Nun existiert ein Punkt B, welcher außerhalb der Geraden durch A und C liegt. Für die Punkte A, D, C und M gilt nun: $AB = BC = MC$. Daraus folgen die Winkel $\angle BMC = \mu = \frac{\pi}{7}$ und $\angle BAD = 2\mu = \frac{2\pi}{7}$ (siehe Abbildung 28¹⁴¹).

¹⁴⁰ Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 86

¹⁴¹ Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 87

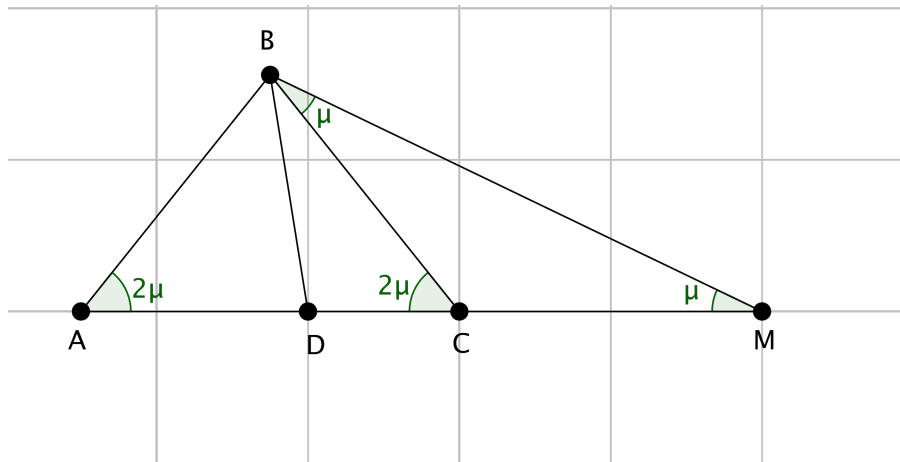


Abbildung 28 Konstruktion Siebeneck Schritt 2

Daraus ergibt sich, dass die Seite AB eine Seite eines Siebenecks, welches dem Kreis M, B, A eingeschrieben ist, sein muss.

Wird nun versucht, die Punkte D und M algebraisch zu bestimmen, so wird dafür die Lösung einer kubischen Gleichung benötigt. Die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ und $\overline{CM}$ aus Schritt 1 werden definiert als a, x und y.

Nun sind folgende Gleichungen äquivalent:

$$y^2 = ax \text{ und } x^2 = (a - x)(y + a - x)$$

Aus der Eigenschaft, dass $0 < x < a$ ist, ist die zweite Gleichung äquivalent zu $y = \frac{2x-a}{a-x}$. Somit ergibt sich, dass die Existenz der Punkte D und M mit der Existenz der Wurzel der Gleichung $ax = a^2 \left(\frac{2x-a}{a-x} \right)^2$ den gleichen Wert haben.

Wird nun $x \neq a$ gesetzt, ist diese der Gleichung $x(a - x)^2 = a(2x - a)^2$ äquivalent und somit auch der kubischen Gleichung $x^3 - 6ax^2 + 5a^2x - a^3 = 0$.

Nun hat die Funktion der kubischen Gleichung $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 5a^2x - a^3$ wegen der Bedingungen $f(0) = f(a) = -a^3$ und $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{8}$ die Nullstellen $x_1 \in$

$\left(0, \frac{a}{2}\right)$ und $x_2 \in \left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Dies ergibt sich aus dem Zwischenwertsatz für stetige

Funktionen. Nun ist ja $f(a) = -a^3 < 0$ und $f(x) \rightarrow \infty$. Daher muss für $x \rightarrow \infty$ die dritte Nullstelle von f rechts von a liegen.¹⁴²

¹⁴² vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 85 – 88

5.2.4. Das Rinderproblem

Berühmt und bekannt ist das sogenannte „Rinderproblem“, welches durch ein Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen gelöst werden kann. Das Gleichungssystem ist demnach unterbestimmt. Die Aufgabe des Rinderproblems war es, dass die Anzahl unterschiedlichen Kühe und Stiere der Rinderherde des Sonnengottes Helios bestimmt werden sollte. Um diese Anzahl bestimmen zu können, müssen neun Bedingungen erfüllt sein. Letztendlich erhält man die Pellsche Gleichung: $t^2 - 472949u^2 = 1$.

Eine Nebenbedingung dieser Gleichung ist, dass u ein Vielfaches von 9304 ist. Nun wird deutlich, dass dieses Problem beinahe unlösbar ist, da die kleinstmögliche Lösung für u bereits größer als $10^{200\,000}$ ist. Archimedes wollte mit diesem Beispiel zeigen, dass immens viele Zahlen existieren.¹⁴³

5.2.5. Kugel und Zylinder

Für Archimedes hatte der Zylinder mit einer eingeschriebenen Kugel eine große Bedeutung. Dies lässt sich daran erkennen, dass sich diese Figur auf seinem Grabstein wiederfindet. 1096 konnte ein Werk von ihm (über die Methode) in Heiberg gefunden werden. Darin findet sich ein Lehrsatz, welcher besagt, dass ein Zylinder mit derselben Grundfläche, Höhe und demselben Kugeldurchmesser wie der Großkreis der eingeschriebenen Kugel, $\frac{3}{2}$ der Fläche der Kugel ist. Durch diesen Lehrsatz ist es Archimedes gelungen, die Zylinderoberfläche O_{zyl} zu bestimmen. Die Richtigkeit dieser Annahme lässt sich wie folgt zeigen:

$$\frac{O_{zyl}}{O_{kug}} = \frac{4\pi R^2 + \pi R^2 + \pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{2}$$

Auffallend ist ebenso, dass dieses Verhältnis auch jenes des Volumens darstellt:

$$\frac{V_{zyl}}{V_{kug}} = \frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2}$$

¹⁴³ vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 101

Eine weitere Eigenschaft ist, dass die Mantelfläche des Zylinders ident ist mit der Kugeloberfläche:

$$\frac{M_{zyl}}{O_{kug}} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R^2} = 1$$

Wird dem Ganzen noch ein Kegel eingeschrieben, ergibt sich folgende Proportion:

$$V_{keg}:V_{kug}:V_{zyl} = \frac{2}{3}\pi R^3:\frac{4}{3}\pi R^3:2\pi R^3 = 1:2:3^{144}$$

5.3. Apollonios von Perge

Apollonios von Perge, auch der große Geometer genannt, wurde in Perge in der Region Pamphylien geboren. Er lebte etwa zwischen 260 v.Chr. und 195 v.Chr. und ist um einige Jahre jünger als Archimedes. Generell ist über sein Leben nur sehr wenig bekannt.¹⁴⁵ Er war ein klassischer Alexandriner, sowie ein Schüler der ersten Euklidschule und verbrachte deshalb den Großteil seines Lebens im Museion in Alexandria.¹⁴⁶ Apollonios leistete einen enormen Beitrag im Bereich der Kegelschnitte. Er schuf eine einheitliche Theorie und fasste diese in seinem achteiligen Hauptwerk „Konika“ zusammen. Dazu vervollständigte er die früheren Gedanken und Überlegungen von Menaichmos, Aristaos und von Euklid. Weiteres war er es, der die Begriffe Ellipse, Parabel und Hyperbel einführte.¹⁴⁷ Ebenfalls gehen auf ihn die apollonischen Kreise und das apollonische Problem zurück.¹⁴⁸

Sein achteiliges Werk „Konika“ ist in unterschiedliche Bereiche gegliedert. So sind die elementaren Grundlagen der Kegelschnitte essenziell in den Bücher 1 – 4 dargestellt, welche durch die Kommentare von Eutokios erhalten geblieben sind. Die späteren Bücher sind nur in Arabisch überliefert, da sie von Banu Musa übersetzt wurden. Der

¹⁴⁴ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 203 – 206

¹⁴⁵ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 233 – 234

¹⁴⁶ Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 82

¹⁴⁷ vgl. Brückler, Geschichte der Mathematik kompakt, S. 67

¹⁴⁸ vgl. Detlef Wienecke – Janz (Hrsg.), Die große Chronik Weltgeschichte. Rom und der Hellenismus 323 – 27 v. Chr., Wissen Media Verlag GmbH (Gütersloh – München 2008), S. 157

achte und letzte Teil wurde auf Basis der Kommentare von Pappos von Edmond Halley wiederhergestellt. Dieses Werk entwickelte sich zu einem der bedeutendsten in der Geschichte der Mathematik. So beschäftigten sich nachfolgende berühmte Mathematiker wie Pierre de Fermat, Johannes Kepler oder Isaac Newton damit und entwickelten Apollonios Theorien weiter.¹⁴⁹

5.3.1. Apollonios und der Kreis

Apollonios beschäftigte sich, wie sein Beiname der Geometer schon zeigt, viel mit der Geometrie. Im Speziellen setzte er sich mit Kreisen auseinander. Seine bedeutendste Überlegung in diesem Fachgebiet ist heute bekannt als der Kreis des Apollonios. Er stellte folgendes fest:

„Alle Punkte P, deren Abstände zu zwei festen Punkten C und D in einem festen Verhältnis stehen, liegen auf einem Kreis.“¹⁵⁰

Um dies zu beweisen, werden zwei Punkte C (0/0) und D (1/0) betrachtet. Ebenso wie die Punkte P einer Ebene, für die gilt, dass $\overline{CP} = 2 \cdot \overline{DP}$ ist, (siehe Abbildung 29).

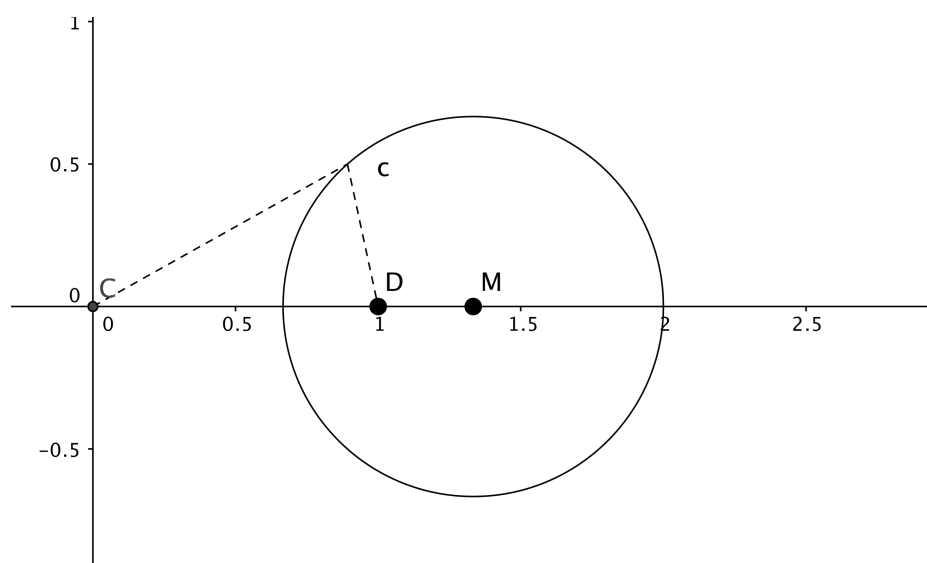


Abbildung 29¹⁵¹ Der Kreis des Apollonios

Der Punkt P hat die Koordinaten (x/y). Daraus ergibt sich, dass:

$$\overline{CD}^2 = x^2 + y^2 \text{ und } \overline{DP}^2 = (x - 1)^2 + y^2 \text{ ist.}$$

¹⁴⁹ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 234 – 235

¹⁵⁰ Lemmermeyer, Mathematik a la Carte, S. 98

¹⁵¹ Lemmermeyer, Mathematik a la Carte, S. 98

Durch das Einsetzen in die obige Formel ($\overline{CP} = 2 \cdot \overline{DP}$), entsteht die Gleichung

$$3x^2 - 8x + 3y^2 + 4 = 0$$

und damit auch:

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$$

Die allgemeine Kreisgleichung hat die Form $k: (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$. Die entstandene Gleichung spiegelt eine solche Kreisgleichung wider, aus der sich der Mittelpunkt und der Radius des Kreises ablesen lassen. So ist

$$M = \left(\frac{4}{3}/0\right) \text{ und } r = \frac{2}{3}.$$

Allgemein sieht der Beweis nun wie folgt aus:

Durch das Verhältnis $\overline{CD}:\overline{DP} = a$, entsteht die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = a^2(x - 1)^2 + ay^2$$

Wenn $a \neq 1$ ist, ergibt sich die Kreisgleichung

$$\left(x - \frac{a^2}{a^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2}$$

Daraus lassen sich wieder Mittelpunkt und Radius ablesen. Demnach ist

$$r = \frac{a^2}{a^2 - 1} \text{ und } M = \left(\frac{a^2}{a^2 - 1}/0\right), \text{ also } M = (ar/0)^{152}$$

5.3.2. Die Kegelschnitte

Kegelschnitte waren in der Antike schon immer ein Gebiet, welches genau erforscht wurde. So setzten sich bereits Aristaos, Euklid oder Archimedes intensiv damit

¹⁵² vgl. Lemmermeyer, Mathematik a la Carte, S. 98

auseinander. Apollonios allerdings wählte einen völlig neuen Zugang zu diesem mathematischen Gebiet. Er betrachtete nicht nur mehr Schnitte im rechten Winkel, sondern auch in deren beliebigen Lagen.

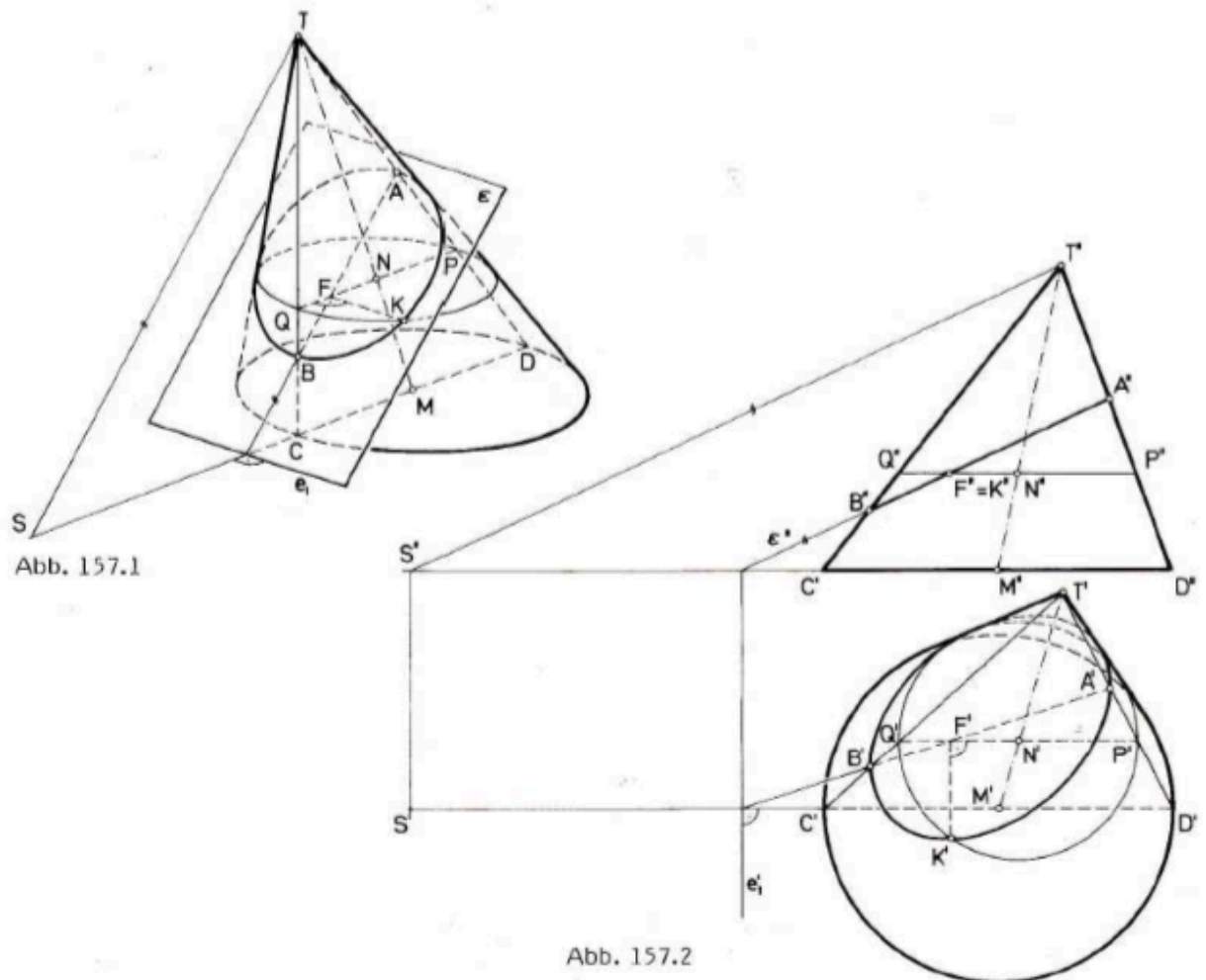


Abbildung 30 Kegelschnitte des Apollonios¹⁵³

Dazu wird ein schiefer Kreiskegel mit der Spitze T herangezogen. Die Achse dieses Kegels wird nach Apollonios definiert als die Verbindungsstrecke zwischen T und dem Mittelpunkt M des Grundkreises. Nun wird der Kegel mit der Ebene ε geschnitten, wobei die Spur in der Grundkreisebene ε_1 genannt wird. Auf eben jene Grundkreisebene gibt es einen Durchmesser $\overline{CD}$, der normal auf sie steht. Mithilfe dieses Durchmessers ist die Ebene TCD bestimmt und nun kann $\overline{AB}$ als x – Achse, eine Parallele zur Ebene ε_1 als y – Achse des Kegelschnittes gewählt werden. K ist nun ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes, durch welchen eine parallele Ebene zum Grundkreis mit dem

¹⁵³ Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 157

Mittelpunkt N gezeichnet wird. Die Schnittpunkte, welche sich dadurch mit dem Kreis ergeben, werden mit P und Q bezeichnet.

Die Strecke $\overline{FK}$ im Kreis QPK steht senkrecht auf den Durchmesser $\overline{PQ}$, wodurch sich der Höhensatz anwenden lässt:

$$\overline{FK}^2 = \overline{FQ} \cdot \overline{FP}$$

Wird nun eine Parallelebene zur Ebene ε durch den Punkt T gezeichnet, wobei diese ebenfalls durch $\overline{TS}$ verläuft, ergeben sich durch die Ähnlichkeit der Dreiecke $\Delta FQB, \Delta SCT, \Delta FPA$ und ΔSDT folgende zwei Proportionen:

$$\overline{FQ} : \overline{FB} = \overline{SC} : \overline{ST}$$

$$\overline{FP} : \overline{FA} = \overline{SD} : \overline{ST}$$

Werden nun diese Proportionen miteinander multipliziert, ergibt sich:

$$(\overline{FQ} \cdot \overline{FP}) : (\overline{FB} \cdot \overline{FA}) = (\overline{SC} \cdot \overline{SD}) : \overline{ST}^2$$

Für das Verhältnis auf der rechten Seite gilt, dass es für alle Punkte K des Kegelschnittes fix ist. Dieses Verhältnis wird nun mit α bezeichnet und die Multiplikation $\overline{FQ} \cdot \overline{FP}$ wird durch $\overline{FK}^2$ ersetzt. Das Einsetzen dieser zwei Bedingungen resultiert in:

$$\overline{FK}^2 = \alpha(\overline{FA} \cdot \overline{FB})$$

Wird $\overline{FA}$ mit x und $\overline{FB}$ mit x_1 gleichgesetzt, bewirkt dies, dass ein Symptom einer Ellipse entsteht:

$$y^2 = \alpha \cdot x \cdot x_1$$

Dies wiederum ist die Zweiabszissenform des Archimedes.

Wird nun weiters die Strecke $\overline{AB}$ mit a bezeichnet und $p = \alpha \cdot a$ definiert, erhält das Symptom der Ellipse die Gestalt:

$$y^2 = x \cdot \left(p - \frac{p}{a}x\right)$$

Das Symptom der Hyperbel lässt sich dann analog herleiten:

$$y^2 = x \cdot \left(p + \frac{p}{a}x\right)$$

Sowie das Symptom der Parabel:

$$y^2 = px^{154}$$

5.3.3. Parabel, Hyperbel und Ellipse

Die drei Symptome, welche in Punkt 5.3.2. beschrieben wurden, werden durch die Sprache der geometrischen Algebra formuliert. Nun treten allerdings Probleme auf, welche auf eine algebraische Gleichung zweiten Grades hinführen, wodurch die Sprache der geometrischen Algebra durch die Sprechweise der Flächenanlegung ersetzt wird.

Parabel:

Das Symptom $y^2 = px$ wird bei der Flächenanlegung interpretiert, indem das Rechteck, welches die Seitenlänge x und die Fläche y^2 hat, mit der zweiten Seite an die Strecke p angelegt wird und dieser somit gleichkommt. Durch die Bedeutung des griechischen Wortes „gleichkommen“, gibt Apollonios diesem Kegelschnitt den Namen Parabel.

¹⁵⁴ vgl. Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 156 - 158

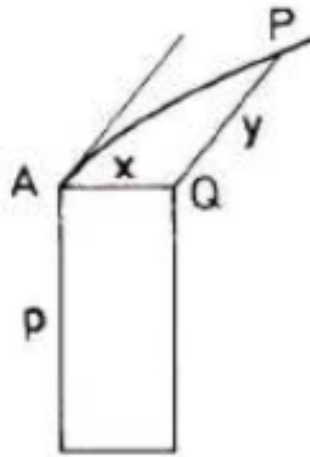


Abbildung 31 Parabel mittels Flächenanlegung¹⁵⁵

Hyperbel:

Das Symptom $y^2 = x \cdot \left(p + \frac{p}{a}x\right)$ hingegen wird aufgefasst, als Anlegung der zweiten Seite eines Rechtecks, welches die Seite x und die Fläche y^2 hat, an die Strecke p . Hierbei wird die Strecke p um die Länge $\frac{p}{a}x$ übertroffen. Dadurch entsteht ein überschießendes Rechteck. Apollonios leitete aus dem griechischen Wort „überschießen“ den Begriff Hyperbel ab.

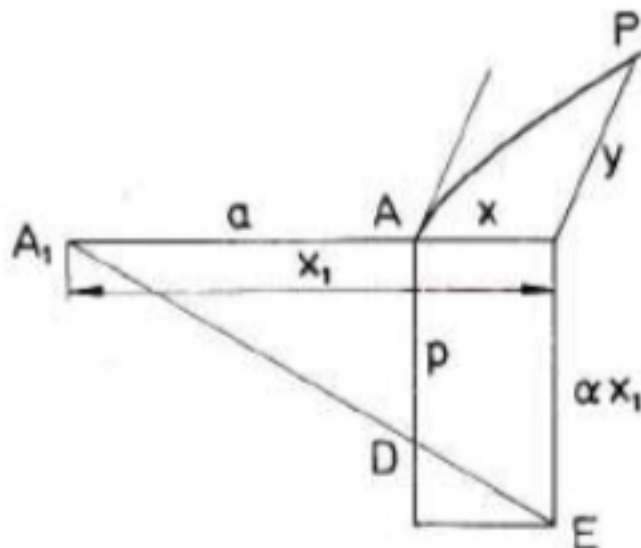


Abbildung 32 Hyperbel mittels Flächenanlegung¹⁵⁶

¹⁵⁵ Kaiser Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 158

¹⁵⁶ Kaiser Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 158

Ellipse:

Umgekehrter Weise fehlt bei der Interpretation des Symptoms $y^2 = x \cdot \left(p - \frac{p}{a}x\right)$ als Flächenanlegung eines Rechtecks mit der Seite x und dem Flächeninhalt y^2 an die Strecke p , ein Stück. Hier liegt nun also ein Defekt vor. Apollonios gibt diesem Kegelschnitt, wieder abgeleitet aus dem griechischen Wort „Defekt“, den Namen Ellipse.¹⁵⁷

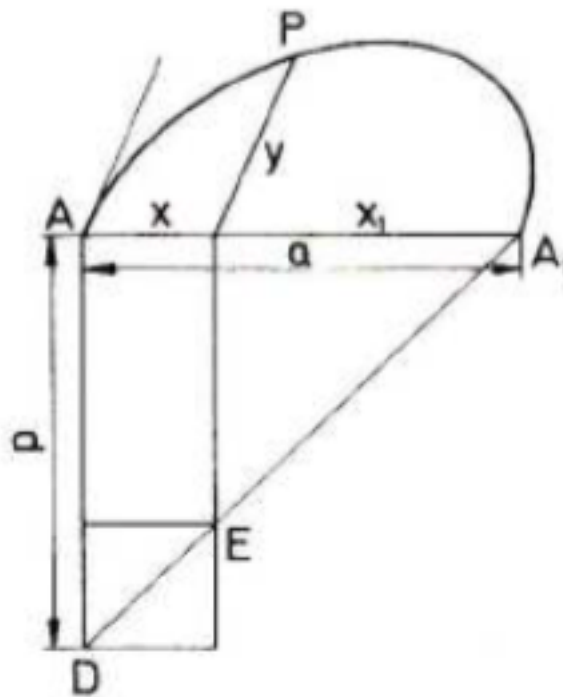


Abbildung 33 Ellipse mittels Flächenanlegung¹⁵⁸

5.4. Eratosthenes von Kyrene

Eratosthenes wurde in der nordafrikanischen Stadt Kyrene um 276 v.Chr. geboren. Er war der Sohn des Aglaos. Während seiner Jugend war er unter anderem Schüler des Philosophen Ariston von Chios, des Grammatikers Lysanias aus Kyrene und des Dichters Kallichmaos.¹⁵⁹ Anschließend wurde er von Ptolemaios III. nach Athen berufen, um dort die Erziehung des Kronprinzen Ptolemaios IV. zu übernehmen. Zudem wurde er zum Leiter der alexandrinischen Bibliothek ernannt, was zur Folge hatte, dass er eine

¹⁵⁷ vgl. Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 158

¹⁵⁸ Kaiser Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 158

¹⁵⁹ vgl. Bernhard Zimmermann, Antonios Rengakos (Hrsg.), Handbuch der griechischen Literatur der Antike, C.H. Beck Verlag (München 2014), S. 100

bedeutende Position am königlichen Hof einnahm.¹⁶⁰ Der Grund für die Ernennung zum Leiter der Bibliothek waren seine außerordentlichen Leistungen auf den Gebieten der Philosophie und der Mathematik. Eratosthenes wurde zudem auch der Fünfkämpfer genannt, da er sich auf fünf verschiedene Gebiete der Natur und Geisteswissenschaft spezialisierte:

Die Astronomie und Messkunst, die Geographie, die Literaturgeschichte, die Grammatik und die Dichtung, sowie die Ethik. Besonders die Geographie interessierte ihn sehr, denn er verfügte über etliche Methoden um genau Karten anzufertigen. Jene Karten waren damals militärstrategisch von großem Interesse, da sich das ptolemäische Reich über ein gewaltiges Gebiet erstreckte.¹⁶¹ Im Alter von 80 Jahren nahm sich Eratosthenes das Leben. Dies tat er, weil er erblindete und damit seinen Forschungen nicht mehr nachgehen konnte.¹⁶²

5.4.1. Der Erdumfang

Die Bestimmung des Erdumfanges hatte eine besondere Bedeutung, da die Vermessung für die Erstellung von Karten von großer Wichtigkeit war.¹⁶³ Eratosthenes gelang es einen ziemlich exakten Wert für den Erdumfang zu berechnen. Dazu betrachtete er zuerst die Sonnenstrahlen und nahm an, dass diese parallel auf die Erde einfallen, da die Sonne sehr weit von der Erde entfernt ist. Weiters fand er heraus, dass die Stadt Syene (siehe Abbildung 34, Punkt S) genau südlich von Alexandria läge (siehe Abbildung 34¹⁶⁴, Punkt A) und beide demnach den selben Längengrad hätten. Darüber hinaus legte er fest, dass die beiden Städte genau 5000 Stadien voneinander entfernt lagen.¹⁶⁵ Eratosthenes verwendete folgende Stadiondefinition:

$$\text{Stadion} = 600 \text{ Gudea} - \text{Fuß} = 600 \cdot 0,26455m = 158,73m^{166}$$

¹⁶⁰ vgl. Dieter Legelmann, Die Erfindung der Messkunst. Angewandte Mathematik im antiken Griechenland, Wissenschaftliche Buchgesellschaft (Darmstadt 2010), S. 55

¹⁶¹ vgl. Legelmann, Die Erfindung der Messkunst, S. 55 – 56

¹⁶² vgl. Zimmermann, Rengakos, Handbuch der griechischen Literatur der Antike, S. 100

¹⁶³ vgl. Legelmann, Die Erfindung der Messkunst, S. 56

¹⁶⁴ Franka, Brückler, Geschichte der Mathematik kompakt, S. 67

¹⁶⁵ vgl. Franka, Brückler, Geschichte der Mathematik kompakt, S. 66

¹⁶⁶ vgl. Legelmann, Die Erfindung der Messkunst, S. 56

Zudem fiel ihm auf, dass die Sonne über Syene genau dann im Zenit stand, wenn Sommersonnenwende war. An genau jenem Tag bestimmte er den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen in der Stadt Alexandria. Der Einfallswinkel betrug genau $\frac{1}{50}$ des Kreises und er glich damit exakt dem Winkel $\angle AOS$.

Nach der Proportionalität der Bogenlänge am Kreis mit dem Mittelpunktswinkel $\angle AOS$ galt für ihn:

$$\frac{u}{5000 \text{ Stadien}} = \frac{1}{50}$$

Nach seinen Berechnungen betrug der Erdumfang u $50 \cdot 5000 = 250\,000$ Stadien. Dies entsprach 39 682,5 km und damit kam Eratosthenes sehr nahe an den tatsächlichen Wert von knapp über 40 000 km heran.¹⁶⁷

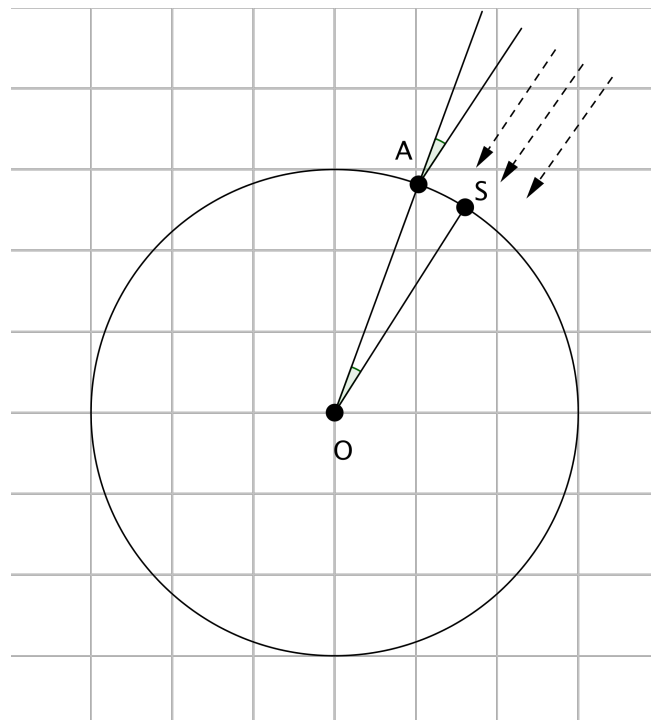


Abbildung 34¹⁶⁸ Bestimmung des Erdumfanges nach Eratosthenes

¹⁶⁷ vgl. Franka, Brückler, Geschichte der Mathematik kompakt, S. 66 – 67

¹⁶⁸ vgl. Franka, Brückler, Geschichte der Mathematik kompakt, S. 67

5.4.2. Das Sieb

Die Siebmethode des Eratosthenes stellt eine Möglichkeit dar, die Folgen von Primzahlen zu bestimmen. Von Nikomachos von Gerasa, dem wichtigsten Elementenschreiber der griechischen Arithmetik, wurde diese Methode überliefert. Es gibt vier unterschiedliche Varianten, um mithilfe des Siebes, die Folge von Primzahlen zu ermitteln:

- 1.) Eine Folge von natürlichen Zahlen bis zu einer festgelegten Grenze bestimmen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots N.$$

- 2.) Wieder eine Folge von natürlichen Zahlen mit festgelegtem Ende bestimmen, allerdings beginnend mit der Ziffer zwei

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots N.$$

- 3.) Nur ungerade Zahlen bis zu einer selbstbestimmten Grenze werden aufgeschrieben

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots 2M + 1$$

- 4.) Es werden wieder nur ungerade Zahlen geschrieben, allerdings diesmal mit der Ziffer drei beginnend

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots 2M + 1$$

Das Sieb des Eratosthenes funktioniert wie folgt:

Es wird die erste Primzahl der aufgestellten Reihe markiert. Anschließend wird das Vielfache dieser Zahl aus der Liste gestrichen. Danach geschieht dasselbe mit der nächsten Primzahl in der Folge. Dies wird so lange wiederholt, bis nur noch Primzahlen übrig sind. Natürlich dürfen dabei die bereits durchgestrichenen Zahlen nicht mehr verwendet werden.¹⁶⁹

¹⁶⁹ vgl. Per Waldal, Das Sieb des Eratosthenes. Eine Studie über natürliche Zahlen, Buchdruckerei H. Akerets Erben AG (Dielsdorf 1961), S. 11 – 14

Beispiel:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40

6. Die Spätzeit der griechischen Antike

Mit der Spätzeit, ab ca. 150 v.Chr. beginnt die Zeit des Niederganges der Mathematik. Es wurden zwar vereinzelt Probleme gelöst, jedoch wurden keine bahnbrechenden Neuentdeckungen mehr gemacht. Bestehende mathematische Erkenntnisse wurden verbessert oder weiter vertieft, wie beispielsweise die Trigonometrie.

Der Niedergang der mathematischen Hochphase hat seinen Ursprung in der Herrschaft der Römer. Diese hatten nie das Bedürfnis oder die Motivation, die Mathematik zu fördern. Ebenso war die Sprache der Mathematik sehr schwierige. Die Bücher, welche verfasst wurden, eigneten sich nicht zum Selbststudium und somit mussten sie vorgetragen werden. Durch die kriegerischen Auseinandersetzungen war keine Kontinuität der mathematischen mehr Lehre gegeben und konnte dadurch nicht wieder neu aufleben.

Dennoch traten in dieser Zeit noch wichtige Mathematiker auf, welche zur Weiterentwicklung beitrugen. Heron von Alexandria, Klaudeos Ptolemaios oder Diophantos von Alexandria sind nur einige Beispiele.¹⁷⁰

6.1. Heron von Alexandria

Heron von Alexandria lebte, wie schon der Name zeigt, in der wissenschaftlich bedeuteten Stadt der Spätantike, in Alexandria. Er unterrichtete dort am Museum. Generell ist über das Leben des Heron wenig bekannt. Er war nicht nur ein begeisterter

¹⁷⁰ vgl. Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 20 – 21

Mathematiker, sondern auch Physiker, Ingenieur, Naturforscher und Techniker. Er trägt zudem den Beinamen „mechanicus“, da er Maschinen wie automatische Tempeltüren und mechanische Theaterbühnen entwarf. Seine Werke und Schriften sind in lateinischer, griechischer und arabischer Übersetzung erhalten geblieben.

Seine Lebenszeit lässt sich nicht genau festlegen. Nur durch die Inhalte seiner Schriften lassen sich Geburt und Tod näher bestimmen. So findet sich in seinem ersten Buch „Mechanik“ ein Hinweis auf Psidonius aus Apamea.

Jener Psidonius war Lehrer von Cicero, wodurch sich ungefähr bestimmen lässt, dass Heron vor dem 1. Jh. v.Chr. gelebt haben muss.

Des Weiteren ist anzunehmen, dass Heron vor Ptolemaios lebte. In seinem Werk „Dioptra“ veranschaulicht er die Erforschung einer Mondfinsternis. Dabei verwendete er die nach geographischer Lage und Jahreszeiten verschiedenen Stunden. Ptolemaios dagegen rechnete bereits mit Äquatorialstunden.

Aus diesen und noch weiteren Gründen wird angenommen, dass Heron von Alexandria in der zweiten Hälfte des ersten Jahrhunderts n.Chr. lebte.¹⁷¹

6.1.1. Die Flächenformel

Mithilfe der Flächenformel von Heron lässt sich der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks berechnen, ohne Winkel oder andere Teile des Dreiecks zu kennen.

Um diese Formel zu beweisen wird ein Dreieck ABC mit dem Innkreispunkt I und Innkreisradius r , sowie die Berührungspunkte D, E und F betrachtet.

¹⁷¹ vgl. Manuela Rausch, Heron von Alexandria. Die Automatentheater und die Erfindung der ersten antiken Programmsteuerung, Diplomica Verlag GmbH (Hamburg 2012), S. 11 – 13

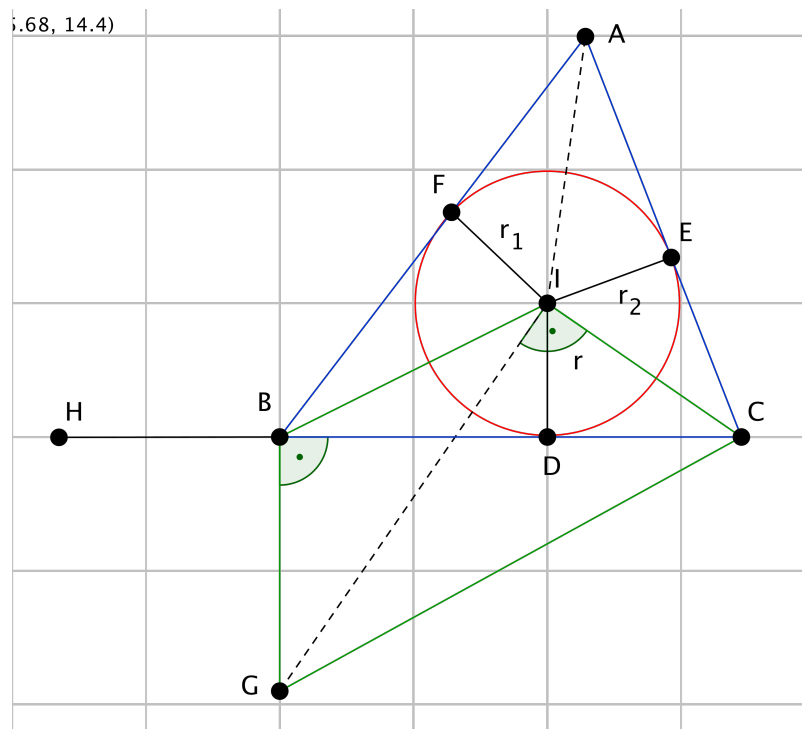


Abbildung 35¹⁷² Beweisfigur Flächenformel Heron

Die drei Teildreiecke, welche rund um den Innkreismittelpunkt entstehen, können dargestellt werden als:

$$|BC|r = 2\mathcal{F}(BCI)$$

$$|AC|r = 2\mathcal{F}(CAI)$$

$$|AB|r = 2\mathcal{F}(ABI)$$

Werden die drei Gleichungen mit dem Umfang U addiert, liefert dies eine neue Gleichung der Form:

$$(|AB| + |AC| + |BC|)r = Ur = 2\mathcal{F}(ABC)$$

Durch das Einsetzen der Tangentenabschnitte

$|AE| = |AF| = |HB|$, $|CD| = |CE|$ und $|BF| = |BD|$ ergibt sich zusammengefasst:

$$(|CD| + |BD| + |HB|)r = |CH|r = \frac{1}{2}Ur = \mathcal{F}(ABC)$$

¹⁷² Hermann, Die antike Mathematik, S. 274

Die beiden gegenüberliegenden Winkel $\angle BGC$ und $\angle BIC$ ergänzen sich zu zwei rechten Winkeln. Dies geschieht, da die Strecke $\overline{CG}$ von den Punkten B und I aus ebenfalls unter einem rechten Winkel erscheinen und somit liegen B und I auf dem Thaleskreis über $\overline{CG}$. Da die Punkte BGCI die Ecken eines Sehnenvierecks bilden, ergibt sich die Ergänzung zu zwei rechten Winkeln $\angle BGC + \angle BIC = 2R$.

Die Winkel im Innkreismittelpunkt I halbieren sich. Die Hälfte des Vollwinkels an I ergibt nun die Winkelsumme

$$\angle BID + \angle DIC + \angle AIF = \angle BIC + \angle AIF = 2R.$$

Durch die Gleichheit der Winkel $\angle BGC$ und $\angle AIF$ sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle BGC$ und $\triangle AIF$ ähnlich und somit existieren folgende Proportionen:

$$\frac{|BC|}{|BG|} = \frac{|AF|}{|FI|} = \frac{|BH|}{|ID|} \quad \therefore \quad \frac{|BC|}{|HB|} = \frac{|BG|}{|ID|} = \frac{|BK|}{|KD|}$$

Durch Addition und Erweiterung mit $|CH|$ bzw. $|CD|$ der letzten Proportion ergibt sich:

$$\frac{|CH|^2}{|CH||HB|} = \frac{|BD||DC|}{|KD||CD|} = \frac{|BD||DC|}{r^2}$$

Durch die Gegebenheit des Höhensatzes und des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle KCI$, lässt sich eine weitere Umformung durchführen, woraus $|KD||CD| = r^2$ entsteht.

Daraus folgert sich:

$$\mathcal{F}(ABC)^2 = |CH|^2 r^2 = |CH||HB||BD||DC|$$

Wird nun $|CH|$ gesetzt als $\frac{1}{2}U = s$ ergibt sich schließlich durch sukzessives Einsetzen insgesamt

$$|\mathcal{F}(ABC)|^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)^{173}$$

¹⁷³ Hermann, Die antike Mathematik, S. 273 - 276

6.1.2. Das Heron – Verfahren

In der Antike traten immer wieder Probleme bezüglich Flächenmessungen oder Landvermessungen auf. Bereits die Babylonier hatten ein Verfahren entwickelt, um solche Probleme mittels quadratischer Gleichungen zu lösen. Heron war es allerdings, der dieses babylonische Verfahren erneut in seinem Werk „Metrika“ behandelte. Ein erster Schritt, um auf die Lösung einer quadratischen Gleichung zu gelangen, ist die Quadratwurzeln zu bestimmen. Dabei tritt allerdings bereits die erste Hürde auf.

Ist eine Zahl a gegeben, so wird eine Zahl b gesucht, welche die Eigenschaft $b \cdot b = a$ hat. b ist nun also die Quadratwurzel von a : $b = \sqrt{a}$.

Im nächsten Schritt wird ein Quadrat konstruiert, welches den Flächeninhalt a hat. Ist es nun jedoch nicht möglich das passende Quadrat zum Flächeninhalt a zu konstruieren, so wird das „Prinzip der Bescheidenheit“ angewendet. Da es nicht möglich ist, das passende Quadrat zu finden, wird ein Rechteck mit der Seitenlänge 1 und der Seitenlänge a konstruiert. Bekanntlich ist ein Rechteck kein Quadrat, daher wird versucht, schrittweise das Rechteck immer „quadrat – ähnlicher“ zu zeichnen. Dies geschieht, indem eine Seite des neuen Rechtecks gewählt wird als das arithmetische Mittel der Seiten des Ausgangsrechtecks. Die zweite Seite wird nun so angepasst, dass sich der Flächeninhalt a nicht verändert.

x_0 und y_0 sind die Seiten des Ausgangsrechtecks. Die Seitenlängen des neuen Rechtecks lassen sich wie folgt berechnen:

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} \text{ und } y_1 = \frac{a}{x_1}$$

Die allgemeine Iterationsvorschrift des Heron – Verfahrens ergibt sich durch das Fortfahren mit dem neuen Rechteck anstelle des Ausgangsrechtecks:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \text{ und } y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}$$

Wird die Iteration nun gekoppelt und nach x umgeformt, entsteht folgende Form:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)^{174}$$

¹⁷⁴ vgl. Ziegenbalg, Algorithmen von Hammurapi bis Gödel, S. 55 – 56

6.2. Klaudios Ptolemaios

Klaudios Ptolemaios wurde etwa um 100 n.Chr. geboren. Über sein Leben ist nur bekannt, was sich aus seinen Werken ableiten lässt. Seine Familie stammte aus der mittelägyptischen Stadt Ptolemaios Hermeiou ab. Sein Leben verbrachte er allerdings in Alexandria.

Er ist vor allem durch seine astronomischen Schriften bekannt. Sein wichtigstes Werk „Syntaxis mathematica“, später im Arabischen „Almagest“ genannt, hatte auch tausend Jahre nach seinem Erscheinen noch eine prägende Wirkung. Denn darin beschrieb er ein geozentrisches Weltbild, welches auf heftig Kritik stieß. Doch Ptolemaios lieferte durch richtige mathematische Überlegungen, welche selbst Kopernikus und Galilei nicht widerlegen konnten, genügend Argumente um seinem Weltbild Glauben zu schenken. Darüber hinaus legte er einen Sternenkatalog mit über 1000 Fixsternen in einem Koordinatensystem an, was für die Antike außergewöhnlich war, da dies die einzigen astronomischen Daten dieser Zeit waren.

Auch im Bereich der Trigonometrie erzielte er Fortschritte. So entwickelte er eine Methode Breiten – und Längengrade durch eine Sehnentafel zu berechnen.¹⁷⁵

6.2.1. Der Satz des Ptolemaios

Ptolemaios fand heraus, dass ein Zusammenhang zwischen den Seitenlängen und den Diagonallängen eines Sehnenvierecks besteht.

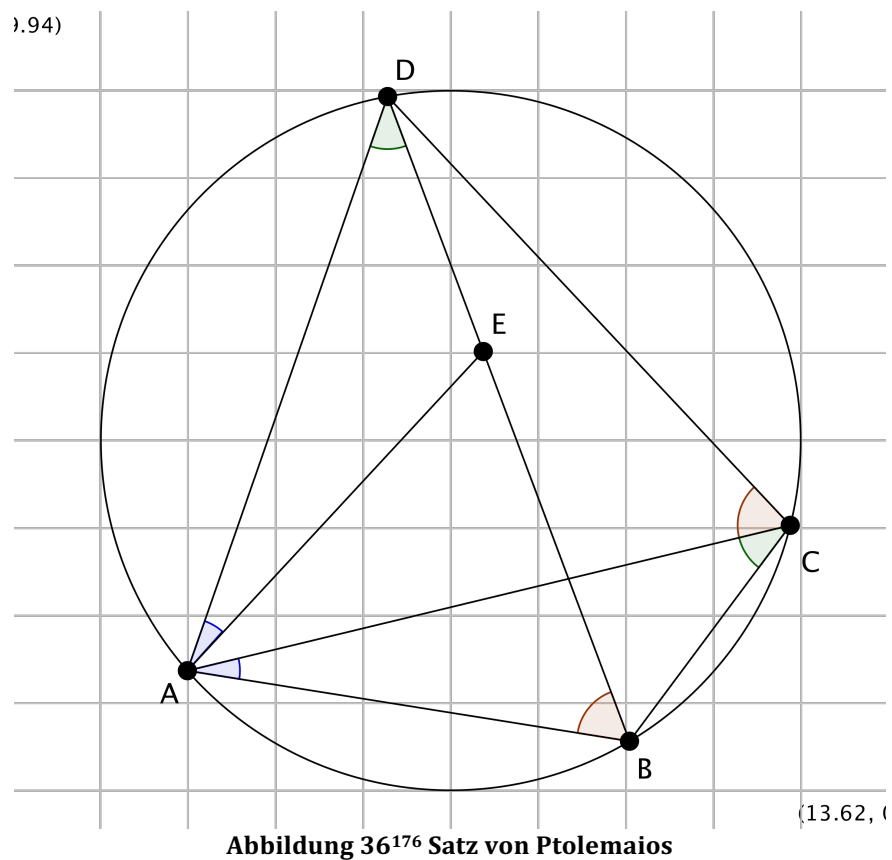
Er legte fest, wenn ein Sehnenviereck ABCD in positiver Orientierung gegeben ist, dann gilt:

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$$

Um diese Behauptung zu beweisen, wird ein Punkt $E \in |BD|$ gewählt, sodass die beiden Winkel $\angle EAD$ und $\angle BAC$ gleich groß sind. Weiter gilt, dass $2 \cdot \angle BAC < \angle BAD$ ist. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt nun, dass die Winkel $\angle ADE$ und $\angle ACB$

¹⁷⁵ Alfred Stükelberger, Gerd Graßhoff, Ptolemaios – Handbuch der Geographie. Einleitung und Buch 1 – 4, Schwabe Verlag (Basel 2017), S. 9 – 10

ebenfalls gleich groß sind. Zudem stimmen die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AED$ im Winkel bei A überein und sind damit ähnlich.



Daher gilt:

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|AD|}, \text{ also } |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |DE|$$

Die beiden Dreiecke $\triangle ABE$ und $\triangle ACD$ sind ebenfalls ähnlich, da die Winkel $\angle BAE$ und $\angle CAD$, sowie die Winkel $\angle DCA$ und $\angle EBA$ jeweils wieder gleiche Größe haben. Daraus ergibt sich:

$$\frac{|CD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|AB|}, \text{ also } |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BE|$$

Werden die beiden Gleichungen nun miteinander addiert, so liefert dies den Satz des Ptolemaios.¹⁷⁷

¹⁷⁶ Florian Berchtold, Geometrie. Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2017), S. 38

¹⁷⁷ vgl. Berchtold, Geometrie, S. 38 – 39

6.2.2. Die Planetenbewegungen

Ptolemaios fand eine Lösung für die gleichförmigen Kreisbewegungen der Planeten. Dazu führte er für jeden Planeten, der um die Erde kreist, sowie für die Sonne und den Mond, einen Hauptkreis ein, den sogenannten Deferent. Dieser sollte die beobachteten Bahnbewegungen approximieren. Auf den Hauptkreis legte Ptolemaios den Mittelpunkt eines weiteren Kreises, welchen er Epizykel nannte. Auf die Peripherie des Epizykels legte er nun den Planeten, (siehe Abbildung 37¹⁷⁸). Anschließend ließ er Deferent und Epizykel gleichmäßig rotieren, wobei er die Drehrichtung sowie die Geschwindigkeit seinen Beobachtungen anpasste. Es kristallisierte sich allerdings schnell heraus, dass ein Epizykel nicht ausreichte und setzte daher einen Zweiten auf den Ersten, einen Dritten auf den Zweiten, einen Vierten auf den Dritten und so weiter. Im Endeffekt bestand das ptolemeische System aus insgesamt 77 Kreisen. Dies bedeutete, da es nur sieben Himmelskörper gab, dass diese im Durchschnitt 11 Kreise hatten. Ptolemaios selbst meinte allerdings, dass seine Theorie nicht den Anspruch hatte, die einzig richtige zu sein. In seinem Werk „Almagest“ schrieb er ausdrücklich, dass es mehrere Möglichkeiten geben könnte und ein Astronom die einfachste davon finden müsste.¹⁷⁹

¹⁷⁸ Kordos, Streifzüge der Mathematik, S. 93

¹⁷⁹ vgl. Kordos, Streifzüge durch die Mathematik, S. 93

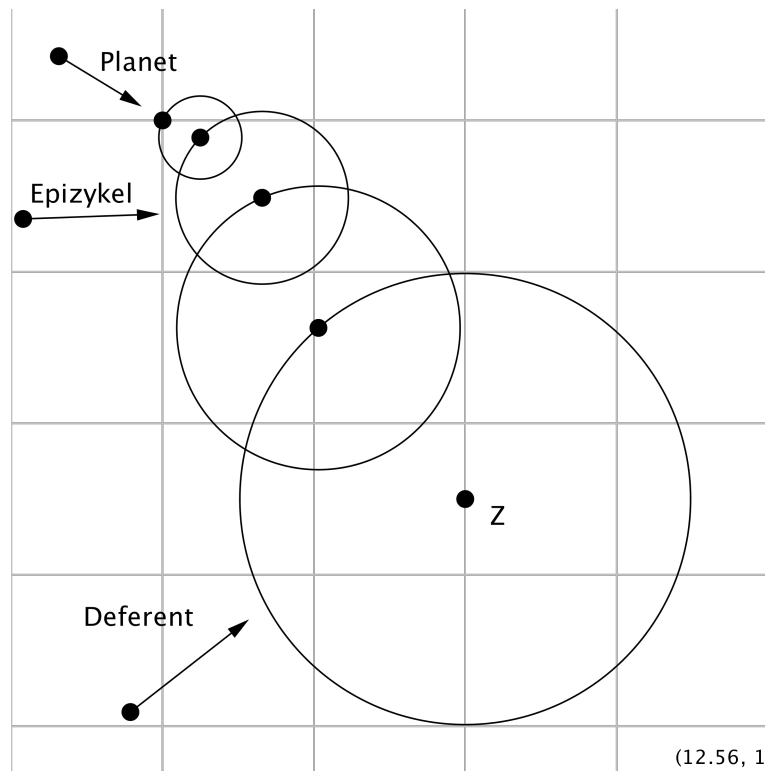


Abbildung 37 Planetenbewegungen nach Ptolemaios

6.2.3. Sehnen und Sinuswerte

Ptolemaios setzte den Kreisradius R auf den Wert 60, da er Bruchteile im babylonischen Sexagesimalsystem rechnete. Bei den Winkeln verwendete er die 360° Skala.

Daher gilt, unter Berücksichtigung dieser Umstände (siehe Abbildung 38¹⁸⁰):

$$\sin \alpha = \frac{|BE|}{|MB|} = \frac{2|BE|}{2|MB|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{crd(2\alpha)}{2R} \Rightarrow crd(2\alpha) = 2R \sin \alpha$$

¹⁸⁰ Hermann, Die antike Mathematik, S. 292

Analog funktioniert dies ebenso für die Seite des regulären Fünfecks:

$$s_5 = |BZ| = \sqrt{|ZD|^2 + |BD|^2} = \sqrt{(s_{10}) + R^2} = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Diese Seite s_5 ist nun wiederum die Sehne des 72° - Winkels und deshalb folgt:

$$\text{crd}(72^\circ) = 30 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 70 + \frac{32}{60} + \frac{3}{60^2}^{182}$$

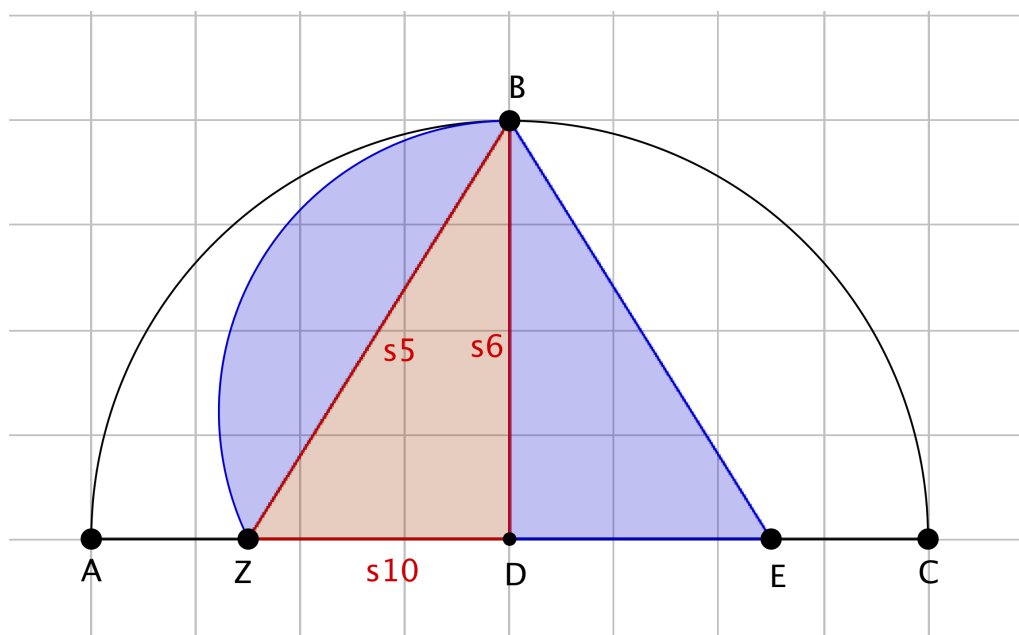


Abbildung 39¹⁸³ Seite des regulären Zehnecks

6.3. Diophant

Diophant lebte vermutlich zwischen 250 n.Chr. und 330 n.Chr. und war der letzte griechische Mathematiker der Antike. Auf sein Leben lässt sich nur aus seinem bekanntesten Werk namens „Arithmetika“ schließen, da er es Bischof Dionysios widmete, der in Alexandria wirkte. Auch Diophant fand sein wissenschaftliches Zuhause in Alexandria. Durch die Verbindung zu Dionysios kann darauf geschlossen werden, dass Diophant Christ war.

¹⁸² vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 291 – 293

¹⁸³ Hermann, Die antike Mathematik, S. 293

Seine Kenntnisse über die babylonische Mathematik verwendete er, um sein erwähntes Werk „Arithmetika“ zu schaffen. Es besteht insgesamt aus 13 Büchern, wovon 10 erhalten geblieben sind.

Es gilt als das bedeutendste Werk der Antike zur Algebra.

Über das Leben von Diophant ist nicht allzu viel bekannt. Auf seinem Grabstein allerdings findet sich ein algebraisches Rätselgedicht wieder, welches einen kleinen Aufschluss über sein Leben liefert:¹⁸⁴

Hier dies Grabmal deckt Diophant. Schauet das Wunder!
Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein.
Knabe zu sein gewährte ihm Gott ein Sechstel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, sproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da schloß er das Bündnis der Ehe,
Nach fünf Jahren entsprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schicksal erlag.
Darauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von sich scheuchend, auch er kam an das irdische Ziel.¹⁸⁵

6.3.1. Die Schreibweise Diophants

Diophants Hauptgebiet war das Untersuchen und Lösen von Gleichungen. Jede Gleichung beinhaltet, eine suchende Größe zu finden, welche heutzutage als x bezeichnet wird. Diophant allerdings entwickelte seine eigene Schreibweise und seine eigenen Bezeichnungen:¹⁸⁶

¹⁸⁴ vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 63

¹⁸⁵ Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 63

¹⁸⁶ vgl. Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert, S. 105

Diophants Symbole und Moderne Symbole ¹⁸⁷		
Bedeutung	Moderne Symbole	Diophants Symbol
Unbekannte Größe	x	γ
Deren Quadrat	x^2	$\Delta\gamma$
Deren dritte Potenz	x^3	$K\gamma$
Deren vierte Potenz	x^4	$\Delta\gamma\Delta$
Deren fünfte Potenz	x^5	$\Delta K\gamma$
Deren sechste Potenz	x^6	$K\gamma K$
Addition	+	Terme nebeneinanderschreiben AB für $A + B$
Subtraktion	-	$\uparrow$
Gleichheit	=	ι^σ

Diophant ersetzte die Zahlen durch griechische Buchstaben, über welche er noch einen Querstrich zog. Für die Ziffern von 1 bis 9 sowie die Zahlen von 10 bis 90 und von 100 bis 900 verwendete er die 24 Buchstaben des Alphabets. Ergänzend dazu machte er ebenfalls Gebrauch von drei älteren semitischen Buchstaben Vau, Koppa und Sampi.¹⁸⁸ Durch diese von ihm entwickelte Schreibweise schaffte er es, Polynome und Gleichungen symbolisch auszudrücken.¹⁸⁹

6.3.2. Diophantische Lineare Gleichungen

Eine diophantische lineare Gleichung ist definiert als eine lineare Gleichung mit mehreren Unbekannten, wobei hier nur die ganzzahligen Lösungen gesucht werden. Diophant selbst hat allerdings auch rationale Lösungen zugelassen. Die Gleichung hat in der modernen Schreibweise die Form:

$$ax + bx = c; a, b, z \in \mathbb{Z}$$

¹⁸⁷ Ian Stewart, Meilensteine der Mathematik, Spektrum – Akademischer Verlag (Coventry 2007), S. 66

¹⁸⁸ vgl. Wußing, 6000 Jahre Mathematik, S. 153

¹⁸⁹ vgl. Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 103

Ist der größte gemeinsame Teiler von a und b durch c teilbar, also $ggT(a, b)|c$, dann ist die Gleichung lösbar.¹⁹⁰

Diophant hatte in seinen Büchern detailliert beschrieben, wie solche Gleichung explizit zu lösen waren. Zuerst sollten alle negativen Ausdrücke auf beiden Seiten durch Addieren beseitigt werden. Anschließend wurde Gleiches von Gleichem abgezogen bis sich auf beiden Seiten nur noch jeweils ein Term wiederfand. Er erwähnt eine Methode, um Gleichungen zu lösen, wo auf einer Seite zwei unterschiedliche Arten von Zahlen übrigbleiben. Hier meinte er vermutlich das Lösen von quadratischen Gleichungen. Um dies anschaulicher darzustellen, findet sich in seinem sechsten Buch eine Aufgabe wieder:¹⁹¹

„Es ist ein rechtwinkliges Dreieck von der Art zu finden, dass seine Fläche um eine Kathete vergrößert, gleich einer gegebenen Zahl ist. Die gegebene Zahl sei 7.“¹⁹²

Um diese Gleichung zu lösen, muss das rechtwinklige Dreieck zuerst mit $3x$, $4x$ und $5x$ angesetzt werden. Daraus resultiert die Gleichung $6x^2 + 3x = 7$. Um nun die rationale Lösung zu erhalten, muss das Quadrat des halben Koeffizienten x mit dem Produkt des Koeffizienten x^2 und der Zahl 7 vermehrt werden und insgesamt ein Quadrat ergeben.

Da dies allerdings nicht möglich ist, wird ein rechtwinkliges Dreieck gesucht, wo das Quadrat der einer halben Kathete mit dem siebenfachen der Fläche vermehrt wird und im Endeffekt wieder ein Quadrat entsteht.

Nun wird eine Kathete mit dem Wert x gewählt und die zweite Kathete mit dem Wert 1.

Daraus ergibt sich, dass $3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, sowie das Vierfache davon, nämlich $14x + 1$ ein

Quadrat sein muss. Um die Rationalität der Seiten des Dreiecks zu gewährleisten, muss auch $x^2 + 1$ ein Quadrat sein. Das Bilden der Differenz von $(x^2 + 1)$ und $(14x + 1)$ liefert den Ausdruck $(x^2 - 14x)$. Dieser Ausdruck wiederum lässt sich in die Faktoren x und $x - 14$ zerlegen, wodurch nun 49 die quadrierte halbe Differenz dieser Faktoren ist.

Durch das Umformen der daraus ergebenden Gleichung $14x + 1 = 49$ ergibt sich $x = \frac{24}{7}$.

Daher hat eine Kathete nun den Wert $\frac{24}{7}$ und die Zweite den Wert 1. Diese werden mit sieben multipliziert und nehmen daher die Werte 24 und 7 an. Die dazugehörige Hypotenuse ist 25. Jene drei Werte werden mit dem Wert y multipliziert. Die Summe

¹⁹⁰ Hermann, Die antike Mathematik, S. 345 – 346

¹⁹¹ vgl. Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 104

¹⁹² Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 104

aus der Fläche und der zweiten Kathete ist jetzt $84y^2 + 7y$ und aus dieser entsteht die Gleichung $84y^2 + 7y = 7$. Das Auflösen der Gleichung ergibt für y den Wert $\frac{1}{4}$. Für das gesuchte Dreieck ergeben sich nun die Seiten mit der Länge $6, \frac{7}{4}$ und $\frac{25}{4}$ und damit ist die Aufgabe gelöst.¹⁹³

6.3.3. Zusatz zum Satz des Pythagoras

Der allgemein bekannte Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ ist gültig für rechtwinklige Dreiecke mit der längsten Seite c . Es gibt besondere rechtwinklige Dreiecke, welche positive ganzzahlige Lösungen der diophantischen Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ haben. Diophant ist es gelungen, all jene Lösungen durch eine spezielle Methode zu finden. Er ging dabei wie folgt vor:

Zuerst werden zwei beliebige Zahlen gewählt. Anschließend wird die Differenz ihrer Quadrate gebildet, das Doppelte ihres Produkts, sowie die Summer ihrer Quadrate. Alle Zahlen, welche nach dieser Vorschrift berechnet werden, erfüllen die diophantische Gleichung. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten die beiden Anfangszahlen zu wählen und daher gibt es auch unendlich viele Pythagoreische Zahlentripel.

Beispiel:

Ausgangszahlen: 1 und 2

Differenz der Quadrate:

$$1^2 = 1 \text{ und } 2^2 = 4$$

$$4 - 1 = 3$$

Das Doppelte ihres Produkts:

$$(1 \cdot 2) \cdot 2 = 4$$

Summer ihrer Quadrate:

$$1^2 = 1 \text{ und } 2^2 = 4$$

$$1 + 4 = 5$$

Damit ergibt sich das Tripel 3, 4 und 5.¹⁹⁴

¹⁹³ vgl. Kaiser, Nöbauer, Geschichte der Mathematik, S. 104

¹⁹⁴ vgl. Stewart, Meilensteine der Mathematik, S. 96

6.3.4. Beispiele aus dem Werk „Arithmetika“

-) Buch 1, Aufgabe 18

$$x_1 + x_2 = x_3 + 20$$

$$x_1 + x_3 = x_2 + 40$$

$$x_2 + x_3 = x_1 + 30$$

Diophant löste das Problem eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten durch zwei Methoden:

1. Diophant bestimmte: $x_1 + x_2 + x_3 = 2x$

Daher ist:

$$2x = 2x_3 + 20 \Rightarrow x_3 = x - 10$$

$$2x = 2x_1 + 30 \Rightarrow x_1 = x - 15$$

$$2x = 2x_2 + 40 \Rightarrow x_2 = x - 20$$

Werden diese drei Gleichungen nun addiert, entsteht die Gleichung $3x = 2x + 45$ und deshalb ergeben sich die Werte $x = 45, x_1 = 30, x_2 = 25$ und $x_3 = 35$.

2. Diophant legte hier fest, dass $x_3 = x$ ist.

Daher ist:

$$x_1 + x_2 = x + 20$$

$$x_2 + x = x_1 + 30$$

Durch Addition der Gleichungen ergibt sich wiederum die Gleichung

$x_1 + 2x_2 + x = x + x_1 + 50$ und daraus folgt: $x_2 = 25$.

Weiters gilt:

$$x_1 + x_2 = x + 20 \Rightarrow x_1 + 5 = x$$

$$x_1 + x = x_2 + 40 \Rightarrow x_1 + x = 65$$

Durch Einsetzen werden die Werte $x_1 = 30$ und $x = 35$ erhalten.¹⁹⁵

-) Buch 4, Aufgabe 1

Bei dieser Aufgabe ist die Zerlegung einer Zahl in zwei Kuben so gesucht, dass die Summe der Basen eine gegebene Zahl ist. Diophant wählte hierfür für die erste Zahl den Wert 370 und für die zweite Zahl den Wert 10.

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x^3 + y^3 &= 370 \end{aligned}$$

Diophant kannte keine zweite Unbekannte und daher löste er die erste Gleichung mittels $5 \pm x$.

Nun muss noch die Gleichung $(5 + x)^3 + (5 - x)^3 = 370$ erfüllt werden.

Das Vereinfachen dieser Gleichung liefert:

$$125 + 75x + 15x^2 + x^3 + 125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 370 \Rightarrow 250 + 30x^2 = 370$$

Die positive Lösung der Gleichung ist $x = 2$ und die jeweils gesuchten Basen haben die Werte 7 und 3.

Durch die Probe wird überprüft, ob die Rechnung korrekt ist: $7^3 + 3^3 = 343 + 27 = 370$

Somit hat die Probe die Rechnung bestätigt.¹⁹⁶

-) Buch 6, Aufgabe 1

Es wird hier ein rechtwinkeliges Dreieck gesucht, welches bei der Verringerung der Hypotenuse um jede Seite eine Kubikzahl ergibt.

Als Voraussetzung zur Lösung dieser Aufgabe verwendete Diophant den Generator $(2xy; x^2 - y^2; x^2 + y^2)$ für das pythagoreische Tripel und legte die Werte $y = 3, x > 3$ fest.

¹⁹⁵ vgl. Alten, 4000 Jahre Algebra, S. 105

¹⁹⁶ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 333 – 334

Daraus entwickelt sich nun das Dreieck $(x^2 - 9; 6x; x^2 + 9)$ und die Differenz aus der Hypotenuse und der Kathete ist $(x^2 + 9) - (x^2 - 9) = 18$. Dies ist allerdings nun keine Kubikzahl und daher änderte er nun den Wert von y auf den Wert 2.

Nun ist das Dreieck definiert durch $(x^2 - 4; 4x; x^2 + 4)$. Durch das erneute Bilden der Differenz ergibt sich die gewünschte Kubikzahl $(x^2 + 4) - (x^2 - 4) = 8$.

Zum Schluss muss noch überprüft werden, ob die zweite Differenz ebenfalls eine Kubikzahl ergibt. Wird da der Wert 10 angenommen, so liefert die Differenz

$$(x^2 + 4) - 4x = (x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^2 \text{ eine Kubikzahl.}$$

Die Seiten 96; 40; 104 bilden nun das gesuchte Dreieck.¹⁹⁷

7. Rolle in den AHS – Schulbüchern

Die in dieser Arbeit beschriebenen Mathematiker und deren Erkenntnisse waren bahnbrechend für die weitere Entwicklung der Mathematik. Sie ermöglichten unzählige Fortschritte und sind demnach der Grundstein des heutigen Wissenstandes. Diese wichtigen Ergebnisse aus dem antiken Griechenland haben heute noch einen großen Einfluss der am Buchmarkt befindlichen AHS – Schulbücher. Dieser Einfluss und die Bedeutung des Wissens aus der Antike soll nun im Detail beschrieben werden.

7.1. Schulbücher der 1. Klasse

Bereits in den Büchern der 1. Klasse wird ersichtlich, dass sich das mathematische Wissen der antiken Mathematiker widerspiegelt. Schon in Kapitel 2 „Besondere Lagen von Geraden“ im Schulbuch „Das ist Mathematik 1“, geschrieben von Hans Christian Reichel, Hans Humenberger, Dieter Litschauer, Herbert Groß und Vera Aue, werden, wie die Überschrift schon verrät, verschiedene Beziehungen von Geraden untersucht. Dieses Wissen über Geraden, und vor allem wie sie konstruiert werden, wurde bereits von Euklid in seinen „Elementen“ beschrieben. In dem Schulbuch finden sich genaue Beschreibungen wieder, wie Parallele konstruiert werden können. Euklid hat dies zwar genauer und mathematischer beschrieben, jedoch lassen sich ähnliche

¹⁹⁷ vgl. Hermann, Die antike Mathematik, S. 339

Ansätze darin finden, wie beispielsweise Aufgabe 1029¹⁹⁸:

„Zeichne die Strecke AD, CD und EF so, dass sie zueinander parallel sind.“¹⁹⁹

Ähnlich verhält es sich mit den Winkelarten in erwähnten Schulbuch. Besonders mit der Konstruktion eines rechten Winkels, welcher erstmals von Thales von Milet beschrieben wurde. Zwar wird in dem Schulbuch eine andere Konstruktionsart gewählt als jene von Thales, jedoch entstand der Begriff des Winkels ebenfalls im antiken Griechenland.²⁰⁰

Ein besonderes Augenmerk wird in den Schulbüchern „Das ist Mathematik 1“ und „Mathematik verstehen 1“, geschrieben von Bernhard Salzinger, Judith Bachmann, Andrea Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer und Andreas Ulovec, auch auf die geschichtlichen Hintergründe gelegt. In „Das ist Mathematik 1“ wird beschrieben, wie sich die Sichtweise auf die Erde entwickelt hat. Besonders wird auf das Weltmodell des Ptolemaios eingegangen. Sein Himmelsmodell, bei dem er die Bewegungen der Planeten beschreibt, wird anschaulich skizziert.

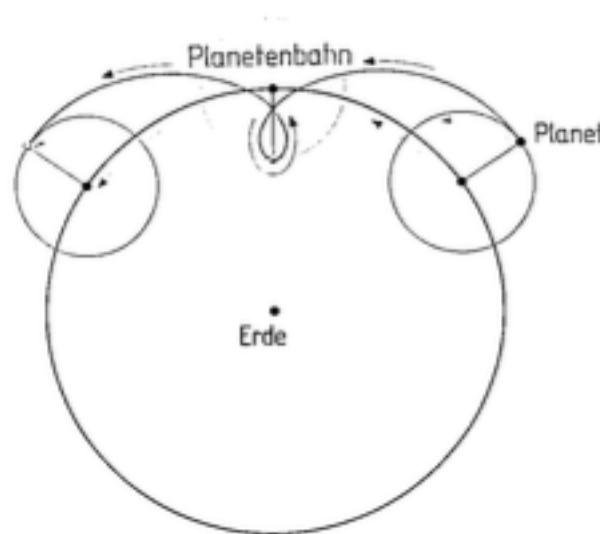


Abbildung 40²⁰¹ Himmelsbild des Ptolemaios

Dazu wird beschrieben, dass Ptolemaios sich streng daran gehalten hat, dass nur Kreise als Bahnen zugänglich sind und sich die Planeten selbst auf einem kleinen Kreis bewegen, welcher sich selbst auf einem großen Kreis um die Erde bewegt.

¹⁹⁸ vgl. Hans Christian Reichel, Hans Humenberger (u.a.), Das ist Mathematik 1, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2011), S. 188

¹⁹⁹ Reichel, Das ist Mathematik 1, S. 189

²⁰⁰ vgl. Reichel, Das ist Mathematik 1, S. 192 - 193

²⁰¹ Reichel, Das ist Mathematik 1, S. 202

Auch ein Verweis zu Aristoteles und dessen Aussage, dass die Erde keine Scheibe sei, lässt sich finden.²⁰²

Im Buch „Mathematik verstehen 1“ wird Ptolemaios ebenfalls erwähnt, allerdings in anderem Zusammenhang. Es wird gezeigt, dass Ptolemaios babylonische Zahlenzeichen verwendete und ein eigenes Symbol für die Zahl 0 einführte. Es soll darauf hingewiesen werden, dass die Zahl 0 eine unverzichtbare Bedeutung innerhalb der Mathematik einnimmt und sie deshalb bereits zu Zeiten Ptolemaios einen besonderen Stellenwert hatte.²⁰³

Des Weiteren wird in „Mathematik verstehen 1“ Diophant und sein bedeutendes Werk „Arithmetika“ erwähnt. Es soll den Schülern und Schülerinnen zeigen, dass der Ursprung der Gleichungen in der vorgeschichtlichen Zeit liegt und es für Diophant essenziell war, die Grundrechenarten zu beherrschen, um Gleichungen lösen zu können. Auch seine Vorgangsweise stets Gleiches von Gleichem abzuziehen, bis auf einer Seite nur mehr ein Term übrig ist, wird dargelegt.²⁰⁴

7.2. Schulbücher der 2. Klasse

Bedingt durch den Lehrplan der zweiten Klasse lassen sich viele Verweise und Aufgaben bezüglich antiker griechischer Mathematiker finden.

So beispielsweise Eratosthenes, dessen Sieb zur Ermittlung der Primzahlen in den beiden Schulbüchern „Das ist Mathematik 2“ und „Mathematik verstehen 2“ genau beschrieben wird. Auffallend ist, dass jeweils ein geschichtlicher Hintergrund über Eratosthenes selbst zu finden ist. Demnach wird das mathematische Wissen mit dem geschichtlichen Wissen verknüpft, um den Schülern und den Schülerinnen einen besseren historischen Überblick zu liefern.

Gleich im Anschluss daran wird das Verfahren zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers beschrieben. Dieses Verfahren hat seinen Ursprung wieder bei Euklid, daher wird dieses Verfahren der euklidische Algorithmus genannt. Auch dessen Beschreibung findet sich sowohl in „Das ist Mathematik 2“, als auch in „Mathematik verstehen 2“ wieder.

²⁰² vgl. Reichel, Das ist Mathematik 1, S. 202

²⁰³ vgl. Bernhard Salzinger, Judith Bachmann (u.a.), Mathematik verstehen 1, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2014), S. 37

²⁰⁴ vgl. Salzinger, Mathematik verstehen 1, S. 167

89 Das Sieb des Eratosthenes

Ermittle folgendermaßen alle Primzahlen bis 102!



Vorgangsweise:

1. Schreibe die Zahlen von 1 bis 102 wie angegeben auf!
2. Streiche zunächst 1, denn 1 ist keine Primzahl!
3. Streiche alle Vielfachen von 2, denn sie sind keine Primzahlen!
4. Markiere 3 – das ist die nächste ungestrichene Zahl – und streiche alle Vielfachen von 3!
5. Markiere 5 und 7 und streiche alle ihre Vielfachen!

Die Zahlen, die nicht gestrichen worden sind, sind die Primzahlen.

Abbildung 41²⁰⁵ Sieb des Eratosthenes

Besonders bemerkenswert ist, dass das Leben des Pythagoras und seine Entdeckungen, nicht nur der Satz des Pythagoras, im Schulbuch „Das ist Mathematik 2“, genau beleuchtet wird, sondern auch ein kurzer Input über die Dreieckszahlen, sowie die Bedeutung der Zahlen für die Musik gegeben wird. Wieder sind neben mathematischer Aussagen auch geschichtlich relevante Information in dieser Buchpassage beschrieben.²⁰⁶

Diese Vorgehensweise, mathematisches mit geschichtliche - philosophischem Wissen zu verknüpfen, wird auch beim Thema Satz von Thales fortgesetzt. In beiden Schulbüchern, „Das ist Mathematik 2“ und „Mathematik verstehen 2“, werden Querverweise auf Thales

²⁰⁵ Hans Christian Reichel, Hans Humenberger (u.a.), Das ist Mathematik 2, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2008), S. 25

²⁰⁶ vgl. Reichel, Das ist Mathematik 2, S. 32 – 33

von Milet und dessen Leben gegeben, sowie seine Erkenntnisse, welche „Satz von Thales“ genannt wird, vorgestellt.²⁰⁷

Darüber hinaus wird auch dargelegt, wie die Griechen in der Antike Konstruktionen angefertigt haben. Im Buch „Das ist Mathematik 2“ wird ein ganzer Absatz der Konstruktion mit Zirkel und Lineal gewidmet. Hierbei wird besonders auf die Konstruktion eines Pentagramms eingegangen.²⁰⁸

7.3. Schulbücher der 3. Klasse

Die dritte Klasse Schulbücher sind ebenfalls gekennzeichnet durch die Ideen und Beweise der griechischen Mathematik. Vor allem die Pythagoreer nehmen einen großen Teil der Inhalte in Anspruch, da in dieser Schulstufe der Satz des Pythagoras gelehrt werden soll. Wird nun das Schulbuch „Das ist Mathematik 3“ betrachtet, so kann eine Kontinuität im Bereich der geschichtlichen und mathematischen Vermittlung der Inhalte festgestellt werden. Denn es finden sich einige Querverweise auf das Leben der Pythagoreer wieder, von welchen aus das mathematische Wissen, welches erlangt werden soll, aufgebaut wird. So wird beispielsweise im Kapitel „Verhältnisse und Proportionen“ die Bedeutung der Harmonie sowie die damals herrschende Vorstellung der Himmelsphären der Pythagoreer nochmals, wie schon in „Das ist Mathematik 2“ betont. Das Buch beschreibt, dass die Pythagoreer versuchten, ihre Musiktheorie und die Vorstellung der Himmelsphären mittels Zahlenstrahl miteinander zu verbinden.²⁰⁹ Auch das Buch „Mathematik verstehen 3“ versucht, anhand geschichtlicher Inhalte den mathematischen Stoff greifbarer zu gestalten. So wird im Kapitel „Der pythagoreische Lehrsatz“ nicht nur rein dieser beschrieben, sondern darüber hinaus noch weitere Entdeckungen der Pythagoreer dargelegt, wie etwa die Quadratzahlen oder das pythagoreische Zahlentripel.²¹⁰ Dadurch sollen die Schüler und Schülerinnen einen

²⁰⁷ vgl. Reichel, Das ist Mathematik 2, S. 219 und Bernhard Salzger, Judith Bachmann (u.a.), Mathematik Verstehen 3, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2015), S. 187

²⁰⁸ vgl. Reichel, Das ist Mathematik 2, S. 227

²⁰⁹ vgl. Hans Christian Reiche, Hans Humenberger, Das ist Mathematik 3, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2009), S. 112 - 113

²¹⁰ vgl. Bernhard Salzger, Judith Bachmann (u.a.), Mathematik Verstehen 3, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2015), S. 193

klarerer und verständlicheren Hintergrund erfahren, wie sich der Satz des Pythagoras entwickelt hat.

Die Quadratzahlen und das pythagoreische Zahlentripel werden ebenso in „Das ist Mathematik 3“ dargestellt.²¹¹

Neben den geschichtlichen Aspekten treten noch weitere mathematische Themen in beiden Schulbüchern auf, welche im antiken Griechenland erarbeitet wurden.

Hier ist vor allem der Strahlensatz zu nennen, welcher bereits von Thales von Milet für die Berechnung der Höhe der Cheops Pyramide verwendet wurde.²¹²

Darüber hinaus wird in „Mathematik verstehen 3“ der Begriff des Gnomons im Zusammenhang mit den Quadratzahlen im Kapitel „Potenzen“ erklärt.²¹³

Ein weiterer geschichtlicher Hinweis in „Das ist Mathematik 3“ beschreibt die Abstandsmessung zwischen Erde und Sonne. Dabei wird die Berechnung der griechischen Astronomen Aristarch von Samos gezeigt. Dieser hatte die Idee, während Halbmond herrscht, dass der Mond so von der Sonne beschienen wird, dass sich die Geraden von der Sonne zum Mond und die Geraden von der Erde zum Mond genau in einem rechten Winkel schneiden. Nun musste nur noch der Winkel α zwischen den Geraden Erde und Sonne sowie Erde und Mond gemessen werden. Danach lässt sich ein ähnliches rechtwinkeliges Dreieck zeichnen, aus dem sich ablesen lässt, wie weit die jeweiligen Planeten voneinander entfernt sind.²¹⁴



Abbildung 42²¹⁵ Abstand zwischen Sonne und Erde

²¹¹ vgl. Reichel, Das ist Mathematik 3, S. 223

²¹² vgl. Reichel, Das ist Mathematik 3, S. 207 und Bachmann, Mathematik verstehen 3, S. 171

²¹³ vgl. Salzger, Mathematik verstehen 3, S. 83

²¹⁴ vgl. Reichel, Das ist Mathematik, S. 202

²¹⁵ Reichel, Das ist Mathematik 3, S. 202

7.4. Schulbücher der 4. Klasse

Auch in den Schulbüchern der vierten Klasse ändert sich nichts an der Herangehensweise der Autoren. Wieder wird versucht, den mathematischen Inhalt durch geschichtliche Eindrücke interessanter zu gestalten. Dies wird im ersten Kapitel im Buch „Das ist Mathematik 4“ deutlich. Hier wird in der Einleitung zu den reellen Zahlen der Glaube der Griechen in der Antike, dass die Zahlen über allem stehen, gezeigt. Es wird die „Freundschaft der Zahlen“ beschrieben und darauf hingewiesen, dass sie versuchten, die Freundschaft zwischen Menschen mittels Zahlen festzustellen. Die Griechen hatten die Idee, wenn zwei Menschenseelen gleich wären, so müssten sie im selben Verhältnis wie die beiden Zahlen 220 und 284 stehen. Die Summe der Teiler dieser beiden Zahlen ergäbe jeweils die andere Zahl. Des Weiteren wird vermerkt, dass die Entdeckung der irrationalen Zahlen bis zu den Pythagoreern zurückführt.²¹⁶ Eine Besonderheit im Buch „Mathematik verstehen 4“ ist die Beschreibung der fünf platonischen Körper, sowie ein kurzer Überblick über das Leben Platons.²¹⁷ Beide Bücher liefern zudem einen Einblick in das Leben des Archimedes, sowie seine rechnerische Annäherung an die Kreiszahl π .²¹⁸ Das arithmetische Mittel, das geometrische Mittel und das harmonische Mittel, welche von den Pythagoreern definiert wurden, finden sich rein mathematisch ebenso in beiden Büchern wieder.²¹⁹ Selbiges gilt für den Höhensatz und den Kathetensatz.²²⁰ Zudem wird in „Mathematik verstehen 4“ das Leben des Heron von Alexandria und sein entwickeltes Näherungsverfahren beschrieben.²²¹ Ein weiterer Exkurs ist in „Das ist Mathematik 4“ aufbereitet. Es werden hier die Mönchen des Hippokrates dargestellt und rechnerisch belegt.²²²

²¹⁶ vgl. Hans Christian Reichel, Hans Humenberger, Das ist Mathematik 4, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2010), S. 14 – 15

²¹⁷ vgl. Bernhard Salzger, Judith Bachmann (u.a.), Mathematik Verstehen 4, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2017), S. 157

²¹⁸ vgl. Reichel, Das ist Mathematik 4, S. 190 und Salzger, Mathematik verstehen 4, S. 161

²¹⁹ vgl. Reichel, Das ist Mathematik 4, S. 127 - 128 und Salzger, Mathematik verstehen 4, S. 247

²²⁰ vgl. Reichel, Das ist Mathematik 4, S. 162 und Salzger, Mathematik verstehen 4, S. 132 – 135

²²¹ vgl. Salzger, Mathematik verstehen 4, S. 30

²²² vgl. Reichel, Das ist Mathematik 4, S. 229

7.5. Schulbücher der 5. Klasse

In der neunten Schulstufe wird in den Schulbüchern das Kapitel Primzahlen behandelt. Vor allem aber wird auf die Unendlichkeit der Primzahlen hingewiesen. Dazu liefern die beiden Bücher „Mathematik verstehen 5“ und „Dimension Mathematik 5“ Euklids indirekten Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen. Auch hier wird wieder eine kurze Lebensbeschreibung Euklids selbst gegeben.²²³

Des Weiteren gibt es in „Dimension Mathematik 5“ vereinzelt Textpassagen, in denen die Entstehungen gewisser Begrifflichkeiten beschrieben werden. Beispielsweise findet sich eine Aufbereitung zur Entwicklung des Zahlenbegriffs. Angefangen bei den natürlichen Zahlen, dem dekadischen Zahlensystem, den ganzen Zahlen bis hin zu den Bruchzahlen, bei denen speziell auf die Griechen und deren Proportionslehre eingegangen wird.²²⁴

7.6. Schulbücher der verbleibenden Oberstufenklassen

Generell ist in den Oberstufenschulbüchern nicht mehr viel Geschichtliches oder Philosophisches zu finden. Das Basiswissen wird in der Unterstufe aufgebaut und daher werden in diesen Schulstufen mehr Querinformationen aufgezeigt.

Trotzdem gibt es noch vereinzelt Hinweise bezüglich der antiken griechischen Mathematik. So beispielsweise im Buch „Mathematik verstehen 6“, wo auf den Orakelspruch von Delphi und die damit verbundene Verdopplung des Altars eingegangen wird.²²⁵ Auch in der siebten Klasse im Schulbuch „Mathematik verstehen 7“ gibt es noch historische Informationen. Explizit werden in diesem Buch die Extremwertaufgaben des Euklid und deren Berechnungen dargelegt.²²⁶

Ebenso wird, ähnlich wie in „Mathematik verstehen 5“ die historische Entwicklung der Zahlenbereiche aufgearbeitet. Allerdings finden sich mehr Anwendungsbeispiele wie die Dreiecks – und Quadratzahlen kommensurablen Strecken.²²⁷

²²³ vgl. Gabriele Bleier, Judith Lindenberg (u.a.), Dimension Mathematik 5, Verlag E. Dorner GmbH (Wien 2009), S.254 und Günther Malle, Maria Koth (u.a.), Mathematik verstehen 5, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2017), S. 27

²²⁴ vgl. Bleier, Lindenberg (u.a.), Dimension Mathematik 5, S. 16 – 17

²²⁵ vgl. Günther Malle, Maria Koth (u.a.), Mathematik verstehen 6, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2015), S. 114

²²⁶ vgl. Günther Malle, Maria Koth (u.a.), Mathematik verstehen 7, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2016), S. 75

²²⁷ vgl. Malle, Koth, Mathematik verstehen 7, S. 246 – 250

8. Bedeutung für die Zentralmatura

Die vorgestellten mathematischen Erkenntnisse der griechischen Antike haben, wie bereits in den Schulbüchern gezeigt, auch heute noch eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht. Nun soll an einigen ausgewählten Beispielen gezeigt werden, dass sie auch im Bereich der Zentralmatura essenziell sind.

Dafür werden nun einige Beispiele aus den bisherigen standardisierten Reifeprüfungen herangezogen und analysiert, inwiefern dieses Wissen über die Lösungen der Aufgaben bereits im antiken Griechenland vorhanden, oder deren Ausgangspunkt war.

8.1. Beispiel 1

Aufgabe 5

Parallele Geraden

Gegeben sind Gleichungen der Geraden g und h . Die beiden Geraden sind nicht ident.

$$g: y = -\frac{x}{4} + 8$$

$$h: X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Begründen Sie, warum diese beiden Geraden parallel zueinander liegen!

Abbildung 43²²⁸ Parallelität von Geraden

Das Parallelenaxiom und die damit verbundene Vorgehensweise, wie parallele Geraden oder Strecken gezeichnet oder berechnet werden können, ist in Euklids „Elementen“ beschrieben. Dies war und ist der Ausgangspunkt der Parallelen in der Geometrie und somit auch der Grundstein für die Berechnung dieser Aufgabe. Durch seine

²²⁸ Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 09. Mai 2014, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201314-mathematik-ahs/>

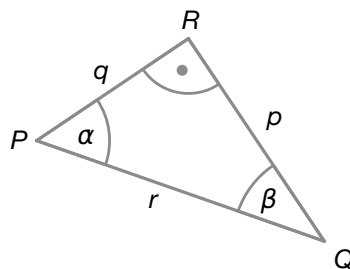
Beschreibung, wie anhand eines beliebigen Punktes eine Parallele zu einer gegebenen Geraden konstruiert werden kann, eröffnete Euklid der weiteren Forschung die Möglichkeit, um neue Eigenschaften zu entdecken. Deshalb ist in diesem Beispiel sichtbar, dass der Lösung dieser Aufgabe das Wissen der antiken griechischen Mathematik zugrunde liegt.

8.2. Beispiel 2

Aufgabe 6

Definition der Winkelfunktionen

Die nachstehende Abbildung zeigt ein rechtwinkeliges Dreieck PQR .



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie jene beiden Gleichungen an, die für das dargestellte Dreieck gelten!

$\sin \alpha = \frac{p}{r}$	☐
$\sin \alpha = \frac{q}{r}$	☐
$\tan \beta = \frac{p}{q}$	☐
$\tan \alpha = \frac{r}{p}$	☐
$\cos \beta = \frac{p}{r}$	☐

Abbildung 44²²⁹ Bedeuten des rechtwinkligen Dreiecks

²²⁹ Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 09. Mai 2014, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201314-mathematik-ahs/>

Die Pythagoreer waren stets darauf bedacht, das Harmonische und das Klangvolle in den Zahlen zu entdecken. Aus dieser Überzeugung heraus legten sie ein besonderes Augenmerk auf das rechtwinklige Dreieck. So entstand nicht nur der Satz des Pythagoras, sondern auch viele weitere Erkenntnisse über dieses spezielle Dreieck. Nicht nur die Pythagoreer, auch viele weitere Mathematiker konnten den Wissenstand über das Dreieck erweitern und so war es möglich, dass die Winkelfunktionen definiert werden konnten. Dies bedeutet, dass die intensive Beschäftigung mit den Pythagoreern und der gesamten antiken griechischen Mathematik und die damit verbundenen Erkenntnisse, Ausgangspunkt dieses Beispiels ist.

8.3. Beispiel 3

Aufgabe 1

Taschengeld

Tim hat x Wochen lang wöchentlich € 8, y Wochen lang wöchentlich € 10 und z Wochen lang wöchentlich € 12 Taschengeld erhalten.

Aufgabenstellung:

Geben Sie in Worten an, was in diesem Zusammenhang durch den Term $\frac{8x + 10y + 12z}{x + y + z}$ dargestellt wird!

Abbildung 45²³⁰ Arithmetisches Mittel

In dieser Aufgabe ist das arithmetisch Mittel des Taschengeldes pro Woche von Tim beschrieben. Bereits die Pythagoreer hatten sich intensiv mit den Mittelwerten beschäftigt, besonders Nikomachos von Gerasa. Er war es auch, der eine Definition für das arithmetische Mittel festlegte. Demnach lässt sich sagen, dass dieses Beispiel, wenn auch in einem anderen Kontext, bereits im antiken Griechenland lösbar gewesen wäre. Somit ist sichtbar, dass die damals entwickelten Mittelwerte auch in der standardisierten Reifeprüfung vorkommen und demnach auch heute noch einen essenziellen Beitrag zur Bildung mathematischer Kompetenzen beitragen.

²³⁰ Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 11. Mai 2015, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201516-mathematik-ahs/>

8.4. Beispiel 4

Aufgabe 7

Volumen eines Drehkegels

Das Volumen V eines Drehkegels hängt vom Radius r und der Höhe h ab. Es wird durch die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ beschrieben.

Aufgabenstellung:

Eine der nachstehenden Abbildungen stellt die Abhängigkeit des Volumens eines Drehkegels vom Radius bei konstanter Höhe dar.

Kreuzen Sie die entsprechende Abbildung an!

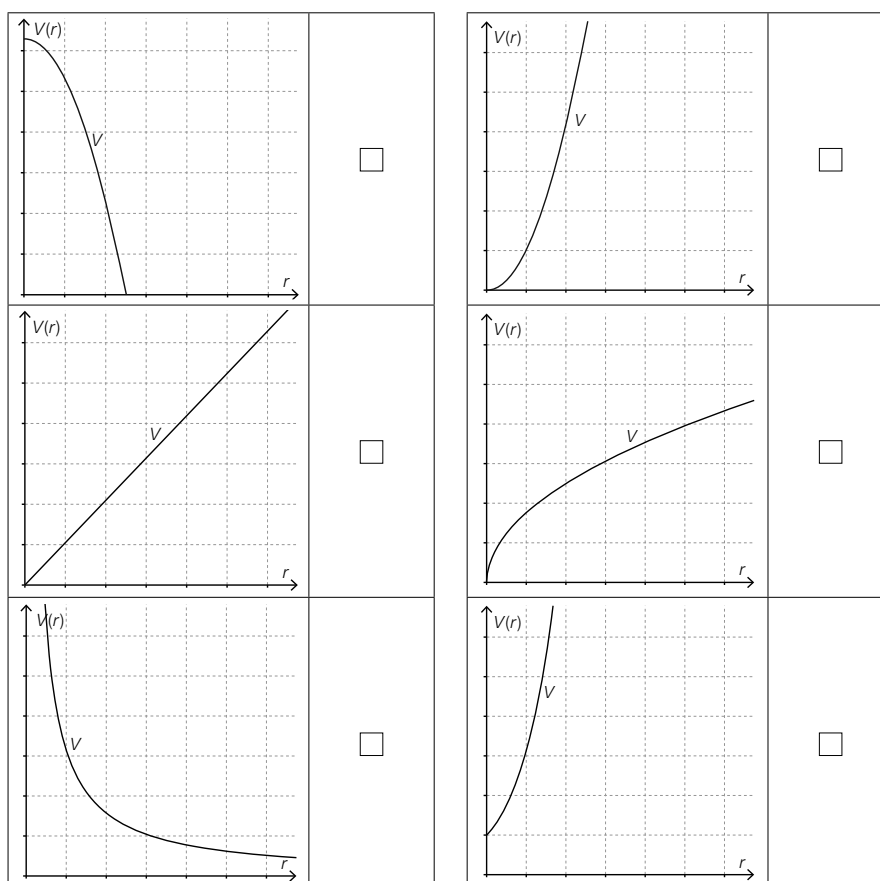


Abbildung 46²³¹ Wichtigkeit der Zahl π

Die Kreiszahl π , welche zur Lösung der Aufgabe essenziell ist, wurde ebenfalls erstmals in der Antike beschrieben. Archimedes ist es beispielsweise gelungen, einen

²³¹ Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 11. Mai 2015, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201415-mathematik-ahs/> a

Näherungswert für π zu bestimmen. Natürlich sind die späteren Entdeckungen, welche π eine besondere Stellung zuschreiben, viel später gemacht worden. Es zeigt sich auch hier wieder, dass die Überlegungen der griechischen Mathematiker die Basis für das Wissen waren, welches heute über die Mathematik herrscht.

8.5. Beispiel 5

Aufgabe 4

Quadratische Gleichung

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x - 12 = 0$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie denjenigen Wert für p , für den die Gleichung die Lösungsmenge $L = \{-2; 6\}$ hat!

Abbildung 47²³² Quadratische Gleichung

Auch die quadratischen Gleichungen haben ihren Ursprung in Griechenland. So findet sich in Euklids „Elementen“ eine genaue Beschreibung wieder. Zwar untersuchte er die geometrischen Eigenschaften der quadratischen Gleichungen, jedoch sind diese so genau formuliert und definiert, dass sich daraus die algebraische Form schließen lässt. Dies bedeutet, dass der Grundstein über das Wissen von quadratische Gleichungen bereits in der wissenschaftlich bedeutenden Zeit der Antike gelegt wurde. So konnte dieses Gebiet weiter erforscht werden und deshalb ist dieses Beispiel lösbar.

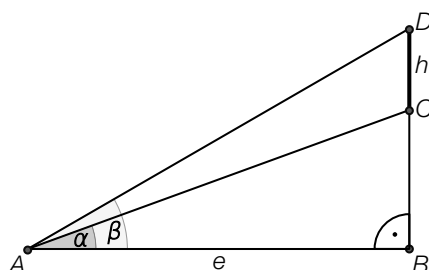
²³² Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 10. Mai 2016, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201516-mathematik-ahs/>

8.6. Beispiel 6

Aufgabe 6

Vermessung einer unzugänglichen Steilwand

Ein Steilwandstück CD mit der Höhe $h = \overline{CD}$ ist unzugänglich. Um h bestimmen zu können, werden die Entfernung $e = 6$ Meter und zwei Winkel $\alpha = 24^\circ$ und $\beta = 38^\circ$ gemessen. Der Sachverhalt wird durch die nachstehende (nicht maßstabgetreue) Abbildung veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Höhe h des unzugänglichen Steilwandstücks in Metern!

Abbildung 48²³³ Bedeutung rechtwinkliges Dreieck

Ähnlich wie in Beispiel 2 (8.2.), ist der zentrale Aspekt Aufgabe 6 (siehe Abbildung 48) das rechtwinklige Dreieck. Wiederum liegen dem Lösungsverfahren Erkenntnisse der Pythagoreer zugrunde und die damit verbundene Weiterentwicklung des geometrischen Wissens. Es soll mit diesem Beispiel verdeutlicht werden, dass es kein Zufall war, dass sich antike griechische Überlegungen in der heutigen Zentralmatura wiederfinden. Vielmehr soll aufgezeigt werden, dass diese Entdeckungen von größter Wichtigkeit waren und demnach auch oft in den Aufgaben der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung zu finden sind.

²³³ Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 10. Mai 2016, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201516-mathematik-ahs/>

8.7. Beispiel 7

Aufgabe 7

Zylindervolumen

Bei einem Drehzylinder wird der Radius des Grundkreises mit r und die Höhe des Zylinders mit h bezeichnet. Ist die Höhe des Zylinders konstant, dann beschreibt die Funktion V mit $V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot h$ die Abhängigkeit des Zylindervolumens vom Radius.

Aufgabenstellung:

Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Punkt $P = (r_1 | V(r_1))$ eingezeichnet. Ergänzen Sie in diesem Koordinatensystem den Punkt $Q = (3 \cdot r_1 | V(3 \cdot r_1))$!

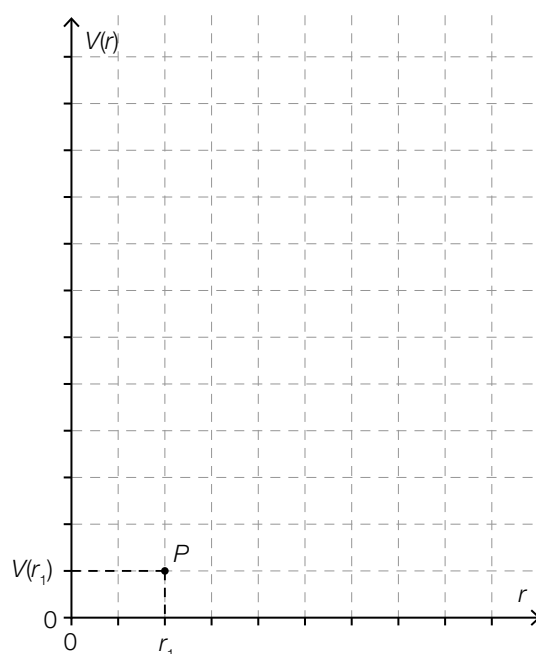


Abbildung 49²³⁴ Parallele Geraden

Die Berechnung von Volumina nahm auch in der Antike eine wesentliche Rolle ein. Egal bei welchem Mathematiker der griechischen Antike nachgelesen wird, das Volumen kommt in unterschiedlichen Formen vor. Sei es beim berühmten Orakelspruch von Delphi, bei Archimedes Zylinderberechnungen oder bei den Kegelschnitten von Apollonios. Daher ist es logisch und verständlich, dass auch Aufgaben, welche sich mit

²³⁴Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 10. Mai 2017, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201617-mathematik-ahs/>

Volumina von verschiedenen Körpern beschäftigen, ebenfalls auf das antiken Wissen Griechenlands zurückgreifen.

8.8. Beispiel 8

Aufgabe 14

Finanzschulden

Die Finanzschulden Österreichs haben im Zeitraum 2000 bis 2010 zugenommen. Im Jahr 2000 betrugen die Finanzschulden Österreichs F_0 , zehn Jahre später betrugen sie F_1 (jeweils in Milliarden Euro).

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{F_1 - F_0}{10}$ im Hinblick auf die Entwicklung der Finanzschulden Österreichs!

Abbildung 50²³⁵ Jährliche Zunahme

Bei genauerer Betrachtung dieser Aufgabe ist die direkte Einflussnahme der griechischen Mathematik zunächst nicht sofort ersichtlich. Die Antwort auf die Aufgabenstellung in diesem Beispiel lautet, eine Interpretation der jährlichen durchschnittlichen Zunahmen der Schulden des Staates Österreich zu beschreiben. Und genau hier kommt wiederum die griechische Mathematik ins Spiel. Eine durchschnittliche Zunahme oder auch Mittelwert genannt, konnten bereits die Pythagoreer, wie auch in Beispiel 8.3. gezeigt, berechnen. Demnach liegt die Basis für die Lösung wieder im Denken der griechischen Schulen.

²³⁵Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 10. Mai 2017, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201617-mathematik-ahs/>

9. Resümee

Abschließend lässt sich sagen, dass sowohl in den momentan am Buchmarkt befindlichen Schulbüchern, als auch in den Aufgaben der standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung die griechische Mathematik eine essenzielle Rolle spielt.

Anhand der ausgewählten Schulbücher und den ausgewählten Zentralmaturabeispielen wird ersichtlich, dass viele Erkenntnisse aus dem antiken Griechenland auch noch die heutigen Lehrpläne der Allgemein höher bildenden Schulen beeinflussen. Themen wie der Satz von Thales, der Satz des Pythagoras oder Berechnungen von Volumina werden im Schulfach Mathematik immer eine wichtige Stellung einnehmen und werden daher auch immer ihren Platz im Unterricht haben.

Durch die neue standardisierte kompetenzorientierte Reifprüfung werden nun nicht nur die rein mathematischen Inhalte gelehrt, sondern es wird auch darauf geachtet, dass die Schüler und Schülerinnen einen Einblick in das Leben vor mehr als 2000 Jahren erlangen. Dadurch finden sich viele geschichtliche und historische Fakten in den Schulbüchern wieder.

Im antiken Griechenland wurde die Basis der modernen Mathematik geschaffen.

Demnach sind diese Errungenschaften die Basis und der Ausgangspunkt und dies ist auch der Grund, warum sie so zahlreich in den Schulbüchern erscheinen.

Die antike griechische Mathematik wird demnach immer Bestandteil im Unterrichtsfach Mathematik sein und sie ist somit ein wichtiger Aspekt in den heutigen Lehrplänen, aus denen die aktuellen Schulbücher resultieren.

10. Literaturverzeichnis

H.- W. Alten, J. Sander, Th. Sonar, A. Djafari – Naini, B. Schmidt – Thieme, E. Wagner, Kl.- J. Förster, K.-H. Schlote, H. Wesemüller, 4000 Jahre Algebra. Geschichte – Kultur - Menschen, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2014)

Armin P. Barth, Algorithmik für Einsteiger. Für Studierende, Lehrer und Schüler in den Fächern Mathematik und Informatik, Springer Spektrum Verlag (Wiesbaden 2013)

Jürgen Beetz, 1+1=10. Mathematik für Höhlenmenschen, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2013)

Florian Berchtold, Geometrie. Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2017)

J.J. Bruckhardt, Lesebuch zur Mathematik. Quellen von Euklid bis heute, Räber Verlag (Luzern – Stuttgart 1968)

Franka Miriam Brückler, Geschichte der Mathematik kompakt. Das wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2017)

Egmont Colerus, Von Pythagoras bis Hilbert. Die Epochen der Mathematik und ihre Baumeister, Weltbild Verlag (Augsburg 1989)

Dörte Haftendorn, Mathematik sehen und verstehen. Schlüssel zur Welt, Spektrum Akademischer Verlag (Heidelberg 2010)

Dietmar Hermann, Die Antike Mathematik, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2014)

Otfried Höffe, Aristoteles, Beck Verlag (München 1996)

Hans Kaiser, Wilfred Nöbauer, Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht, Verlag Holder – Pichler – Tempsky (Wien 1984)

Marek Kodos, Streifzüge durch die Mathematikgeschichte, Ernst Klett Verlag (Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig 1999)

Johannes Lehmann, So rechneten Griechen und Römer, Urania Verlag (Leipzig, Jena, Berlin 1994)

Dieter Legelmann, Die Erfindung der Messkunst. Angewandte Mathematik im antiken Griechenland, Wissenschaftliche Buchgesellschaft (Darmstadt 2010)

Franz Lemmermeyer, Mathematik a la Carte. Quadratische Gleichungen mit Schnitten von Kegeln, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2016)

Lutz Nasdala, Mathematik Beweisaufgaben: Beweise, Lern – und Klausur – Formelsammlung, Springer Vieweg Verlag (Gengenbach 2016)

Jörg Neuhäuserer, Schöne Sätze der Mathematik. Ein Überblick und kurze Beweise, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2017)

Manuela Rausch, Heron von Alexandria. Die Automatentheater und die Erfindung der ersten antiken Programmsteuerung, Diplomica Verlag GmbH (Hamburg 2012)

Stefan Reiter, Musikalische Graphen. Entwicklung eines Verständnisses graphischer Darstellungen im fächerübergreifenden Mathematik und Musikunterricht, Waxmann Verlag (Münster 2013)

Ivo Schneider, Archimedes. Ingenieur, Naturwissenschaftler, Mathematiker, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2016)

Jürgen Schönbeck, Euklid. Um 300 v.Chr., Birkhäuser Verlag (Basel – Boston – Berlin 2003)

Christoph J. Scriba, Peter Schreiber, 5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kultur, Menschen, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2010)

Ian Stewart, Meilensteine der Mathematik, Spektrum – Akademischer Verlag (Coventry 2007)

Alfred Stükelberger, Gerd Graßhoff, Ptolemaios – Handbuch der Geographie. Einleitung und Buch 1 – 4, Schwabe Verlag (Basel 2017)

Arpad Szabo, Die Entfaltung der griechischen Mathematik, Wissenschaftsverlag (Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1994)

Kai Trampedach, Platon, die Akademie und die zeitgenössische Politik, Franz Steiner Verlag (Stuttgart 1994)

Per Waldal, Das Sieb des Eratosthenes. Eine Studie über natürliche Zahlen, Buchdruckerei H. Akerets Erben AG (Dielsdorf 1961)

Alfred Wassermann, Stephanie Fröba, Die bedeutendsten Mathematiker, Marixverlag GmbH (Wiesbaden 2012)

Detlef Wienecke – Janz (Hrsg.), Die große Chronik Weltgeschichte. Rom und der Hellenismus 323 – 27 v. Chr., Wissen Media Verlag GmbH (Gütersloh – München 2008)

Hans Wußing, 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. I: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2008)

Hans Wußing, Menso Folkerts, Eagle – Guide. Von Pythagoras bis Ptolemaios. Mathematik in der Antike, Edition am Gutenbergplatz (Leipzig 2012)

Jochen Ziegenbalg, Oliver Ziegenbalg, Bernd Ziegenbalg, Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. Mit Beispielen aus den Computeralgebrasystemen Mathematica und Maxima, Springer Spektrum Verlag (Berlin – Heidelberg 2016)

Bernhard Zimmermann, Antonios Rengakos (Hrsg.), Handbuch der griechischen Literatur der Antike, C.H. Beck Verlag (München 2014)

Schulbücher:

Hans Christian Reichel, Hans Humenberger, Dieter Litschauer, Herbert Groß, Vera Aue, Das ist Mathematik 1, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2011)

Hans Christian Reichel, Hans Humenberger, Dieter Litschauer, Herbert Groß, Vera Aue, Das ist Mathematik 2, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2008)

Hans Christian Reichel, Hans Humenberger, Dieter Litschauer, Herbert Groß, Vera Aue, Erich Neuwirth, Das ist Mathematik 3, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2009)

Hans Christian Reichel, Hans Humenberger, Dieter Litschauer, Herbert Groß, Vera Aue, Erich Neuwirth, Das ist Mathematik 4, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2010)

Bernhard Salzinger, Judith Bachmann, Andrea Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer, Andreas Ulovec, Mathematik verstehen 1, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2014)

Bernhard Salzinger, Judith Bachmann, Andrea Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer, Andreas Ulovec, Mathematik verstehen 2, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG (Wien 2015)

Bernhard Salzinger, Judith Bachmann, Andrea Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer,

Andreas Ulovec,

Mathematik verstehen 3, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
(Wien 2015)

*Bernhard Salzinger, Judith Bachmann, Andrea Germ, Barbara Riedler, Klaudia Singer,
Andreas Ulovec,*

Mathematik verstehen 4, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
(Wien 2017)

*Günther Malle, Maria Koth, Helge Woschitz, Sonja Malle, Bernhard Salzinger, Andreas
Ulovec,*

Mathematik verstehen 6, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
(Wien 2015)

*Günther Malle, Maria Koth, Helge Woschitz, Sonja Malle, Bernhard Salzinger, Andreas
Ulovec,*

Mathematik verstehen 7, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG
(Wien 2016)

Gabriele Bleier, Judith Lindenberg, Andreas Lindner, Eveln Stepancik,

Dimension Mathematik 5, Verlag E. Dorner GmbH (Wien 2009)

11. Quellen

<https://www.studienkreis.de/mathematik/platonische-koerper-formel-berechnung/>

Hans Humenberger, Elementarmathematische Betrachtungen zum Delischen Problem und zur Winkeldreiteilung, aus: Internationale Mathematische Nachrichten, S. 42, online unter <<https://www.oemg.ac.at/IMN/imn219.pdf>>

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 09. Mai 2014, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201314-mathematik-ahs/>

¹ Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 09. Mai 2014, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201314-mathematik-ahs/>

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 11. Mai 2015, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201516-mathematik-ahs/>

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 11. Mai 2015, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201415-mathematik-ahs/>

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 10. Mai 2016, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201516-mathematik-ahs/>

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik, Haupttermin 10. Mai 2016, online unter <https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201516-mathematik-ahs/>

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik,
Haupttermin 10. Mai 2017, online unter
<https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201617-mathematik-ahs/>

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung AHS – Mathematik,
Haupttermin 10. Mai 2017, online unter
<https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201617-mathematik-ahs/>

12. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Der Satz von Thales	14
Abbildung 2 Konstruktion eines rechten Winkels	15
Abbildung 3 Rechteck mit Umkreis	15
Abbildung 4 Höhenmessung der Pyramide mittels Schattenstab	16
Abbildung 5 Dreieckszahlen	18
Abbildung 6 Ein Gnomon	20
Abbildung 7 Quadratzahlen	21
Abbildung 8 Ein Quadrat	22
Abbildung 9 Ein regelmäßiges Fünfeck	23
Abbildung 10 Beweisidee Satz des Pythagoras	29
Abbildung 11 Möndchen von Hippokrates	32
Abbildung 12 Die fünf platonischen Körper	35
Abbildung 13 Eigenschaften der fünf platonischen Körper	36
Abbildung 14 Die vier Typen von Aussagen	38
Abbildung 15 Beweisskizze Euklid	46
Abbildung 16 Innenwinkelsatz	48
Abbildung 17 Konstruktion einer Parallelen	49
Abbildung 18 Konstruktion Kreistangente	50
Abbildung 19 Konstruktion Fünfeck	52
Abbildung 20 Geometrische Lösung von $ax=\beta\gamma$	53
Abbildung 21 Lösung der Gleichung $ax=\beta\gamma$ durch Strahlensatz	54
Abbildung 22 Geometrische Darstellung nach Euklid	55
Abbildung 23 Unendlichkeit von Primzahlen	57
Abbildung 24 Skizze zur Dreiteilung eines Winkels	61
Abbildung 25 Ausgangslage	62
Abbildung 26 Einbeschriebene reguläre Polygone	63
Abbildung 27 Konstruktion Siebeneck Schritt 1	64
Abbildung 28 Konstruktion Siebeneck Schritt 2	65
Abbildung 29 Der Kreis des Apollonios	68
Abbildung 30 Kegelschnitte des Apollonios	70
Abbildung 31 Parabel mittels Flächenanlegung	73
Abbildung 32 Hyperbel mittels Flächenanlegung	73

Abbildung 33 Ellipse mittels Flächenanlegung	74
Abbildung 34 Bestimmung des Erdumfanges nach Eratosthenes	76
Abbildung 35 Beweisfigur Flächenformel Heron	80
Abbildung 36 Satz von Ptolemaios.....	84
Abbildung 37 Planetenbewegungen nach Ptolemaios	86
Abbildung 38 Zusammenhang Mittelpunkt und Umfangswinkel.....	87
Abbildung 39 Seite des regulären Zehnecks	88
Abbildung 40 Himmelsbild des Ptolemaios	96
Abbildung 41 Sieb des Eratosthenes.....	98
Abbildung 42 Abstand zwischen Sonne und Erde.....	100
Abbildung 43 Parallelität von Geraden	103
Abbildung 44 Bedeuten des rechtwinkligen Dreiecks	104
Abbildung 45 Arithmetisches Mittel	105
Abbildung 46 Wichtigkeit der Zahl π	106
Abbildung 47 Quadratische Gleichung.....	107
Abbildung 48 Bedeutung rechtwinkliges Dreieck	108
Abbildung 49 Parallele Geraden	109
Abbildung 50 Jährliche Zunahme	110