



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Das Geheimnis des Nichts:

Die Entstehungsgeschichte der Zahl Null und ihre Bedeutung in
verschiedenen Bereichen der Mathematik“

verfasst von / submitted by

Zeliha Ekici

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 299 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Psychologie und
Philosophie UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

a.o. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

*“Does man not remember that We created him
before, while he was nothing?” (19:67)*

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich während der Fertigung dieser Diplomarbeit unterstützt und motiviert haben.

Zunächst möchte ich mich bei meinem Betreuer, Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, bedanken, der sich für die Betreuung meiner Arbeit bereit erklärt hat und mich fachlich kompetent mit Geduld unterstützt hat.

Ein ganz besonderer Dank geht an meine Eltern, Serkan und Emin, die immer auf meiner Seite standen und mich durch mein Leben begleiten. Ohne eure Hilfe wäre vieles für mich unrealisierbar.

Auch möchte ich mich bei meinen Geschwistern, Isa, Cansu, Meryem und Ramis bedanken, die sich tagtäglich meine Sorgen über die Arbeit anhören mussten. Bei dir, Isa, möchte ich mich nochmals für deine Ideen und Hilfestellungen beim Formatieren der Diplomarbeit bedanken. Deine brüderliche Freundschaft bedeutet mir unbeschreiblich viel.

Weiters möchte ich mich bei allen bedanken, die mir direkt oder indirekt bei meinem Studium geholfen haben.

Abschließend widme ich diese Diplomarbeit meinen Eltern, Serkan und Emin.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
Abstract.....	2
Einleitung.....	3
I. Die Entstehungsgeschichte der Zahl „Null“	4
1.1 Zahlenbewusstsein.....	4
1.2 Das erste Stellenwertsystem - Sexagesimalsystem	5
1.3 Vigesimalssystem - Maya- Ziffern	9
1.4 Ägyptisches, chinesisches und indisches Dezimalsystem	12
1.4.1 Ägyptisches Dezimalsystem	12
1.4.2 Chinesisches Dezimalsystem	16
1.4.3 Indisches Dezimalsystem	17
1.4.4 Griechisches Dezimalsystem	19
1.4.4.1 Die Perioden der griechischen Mathematik.....	19
1.4.4.2 Griechische Zahlenschrift.....	23
1.4.4.3 Die besondere Bedeutung der Zahlen für die Griechen - Eine Erklärung für die Ablehnung der Zahl Null.....	25
1.4.5 Römisches Zahlensystem	29
2 Unser dezimales Stellenwertsystem mit der Null	31
2.1 Die Geburt der Null in Indien	31
2.2 Von der Brahmi-Schrift zur Stellenschrift mit der Null	33
2.3 Indische Zahlenschrift im arabischen Orient	37
2.4 Indisch-arabische Zahlenschrift im Abendland	40
2.5 Zeichen und Wörter für Null.....	40
II. Anwendungen der Zahl „Null“	43
1 Die Eigenschaften der Zahl Null.....	43
1.1 Ist Null eine Zahl?	43
1.2 Die Null schöpft Zahlen	43
1.3 Algebraische Eigenschaften der Null	49
1.3.1 Addition, Subtraktion, Multiplikation, Vorzeichen, Potenzen	49
1.3.2 Division	50
1.3.2.1 Null durch eine Zahl.....	50

1.3.2.2	Division durch Null	51
1.3.2.2.1	Eine Zahl dividiert durch Null	51
1.3.2.2.2	Null dividiert durch Null	52
2	Gleichungen und Null.....	53
3	Wahrscheinlichkeitsrechnung	57
3.1	Blaise Pascal, Erfinder der Wahrscheinlichkeitsrechnung	57
3.2	Wetten, Gott existiert?	58
3.2.1	Entscheidungssituation vom Typ „Pascalscher Wette“	59
3.2.2	Interpretation.....	63
3.2.3	Anmerkungen zum Erwartungswert.....	64
3.3	Null-Eins-Gesetze	65
3.3.1	Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung	65
3.3.2	Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov.....	66
3.3.3	Null-Eins-Gesetz von É. Borel	68
3.3.3.1	Bedingungen für das 0-1-Gesetz von É. Borel	69
3.3.4	Null-Eins-Gesetz von Hewitt-Savage	70
4	Infinitesimalrechnung.....	73
4.1	Kartesisches Koordinatensystem	73
4.2	Steigung von Kurven.....	74
4.2.1	Steigung einer Gerade	74
4.2.2	Steigung einer krummen Linie.....	75
4.2.3	Newtons Fluxionen	77
4.2.4	G.W. Leibniz' Infinitesimalrechnung	79
4.3	Flächeninhaltsproblem.....	81
4.3.1	Grenzwert	81
4.3.2	Nullfolgen	85
4.3.2.1	Vergleichskriterium für Nullfolgen:.....	85
4.3.2.2	Sätze über Nullfolgen:	85
4.3.2.3	Beispiele für Nullfolgen	87
4.3.3	Regel von de l'Hospital	88
4.3.4	Flächeninhalt als Grenzwert	91
	Literaturverzeichnis	96

Internetquellen.....	99
Abbildungsverzeichnis	100

Zusammenfassung

Wer hätte sich gedacht, dass eine Zahl, die nichts zählt, das Schicksal der Mathematik stark beeinflussen kann. Die Zahl Null erscheint im ersten Augenblick sehr harmlos, doch sie ist einer der Stolpersteine und zugleich auch der wichtigste Bestandteil der Mathematik geworden.

Die vorliegende Diplomarbeit besteht aus zwei großen Teilen. Im ersten Teil wird auf die Entstehungsgeschichte der Zahl Null eingegangen. Im zweiten Teil befasst sich die Arbeit mit der Bedeutung dieser mystischen Zahl in verschiedenen Anwendungsbereichen der Mathematik.

Die Entstehungsgeschichte der Zahl Null ist untrennbar mit der Entstehung des dezimalen Stellenwertsystems verbunden, das heute international etabliert ist. Dieses Zahlensystem ist eine gemeinsame Leistung von vielen Kulturen. Die Mayas besaßen mehrere Zeichen für die Null, die sie für ihren religiösen Kalender verwendeten. Bei den Babyloniern war die Null eine Leerstelle für eine fehlende Stelle in ihrem Sexagesimalsystem. Die Griechen standen mit einer Abneigung gegenüber der Null und übernahmen sie nur in der Astronomie von den Babyloniern. Die Null, wie sie heute gebraucht wird, ist in Indien geboren. Die Araber übernahmen gemeinsam mit dem dezimalen Stellenwertsystem die Zahl Null von den Indern. Dieses Zahlensystem, das der Null ihr Ansehen gab, kam mit Leonardo von Pisas Rechenbuch ins Abendland.

Die Diplomarbeit geht der Frage nach, wie die Zahl „Null“ in das Zahlensystem kam und welche Kulturen sich daran beteiligt haben. Daher wurde versucht, die Zahlensysteme der erwähnten Kulturen zu beschreiben und deren Bedeutung für die Einführung der Null zu beleuchten.

Im zweiten und längeren Teil der Diplomarbeit werden die algebraischen Eigenschaften der Zahl Null, das Lösen von Gleichungen mit der Null, und die Bedeutung und Anwendung der Zahl Null in der Wahrscheinlichkeits- und Infinitesimalrechnung diskutiert und vorgestellt.

Abstract

Who would have thought that a number that represents nothing could strongly influence the fate of mathematics. At first sight, the number zero appears very harmless, yet it has become one of the stumbling blocks of mathematics and, implicitly, its most important component.

This dissertation consists of two major parts. The first part discusses the genesis of the number zero. The second part of the dissertation deals with the importance of this mystical number in various areas of application in mathematics.

The genesis of the number zero is inextricably linked with the development of the decimal place-value system, which is now internationally established. This number system is a joint achievement by many cultures. The Mayans had multiple symbols for zero, which they used for their religious calendar. The Babylonians left a space for a zero digit with no symbol in their sexagesimal system. The Greeks had an aversion to the zero and only adopted it in Babylonian astronomy. The zero, as it is used today, was born in India. The Arabs adopted the number zero from the Indians, together with the decimal place-value system. This number system, which gave the zero its reputation, came to the western world in Fibonacci's arithmetic book.

The dissertation examines the question of how the number “zero” entered the number system and which cultures participated in this. Therefore, the aim was to describe the number systems of the abovementioned cultures and to examine their importance for the introduction of zero.

The second, larger part of the dissertation discusses and presents the algebraic properties of the number zero, the solving of equations with zero, and the importance and application of the number zero in probability and infinitesimal calculus.

Einleitung

Die Zahlen beschäftigen die Menschen, seitdem sie kleine Mengen auffassen können. Das Zählen ist eine besondere Gabe des Menschen und Zahlen sind zu einem ihrer wichtigsten Werkzeuge geworden. Einige Zahlen, unter anderem die Zahl „Null“, waren für den menschlichen Geist nicht einfach zu begreifen. Bis die „Null“ den Zahlencharakter einnehmen konnte, musste sie viele Hürden und Abneigungen überwinden.

Um die Bedeutung und die Notwendigkeit der Zahl Null besser zu verstehen, muss ihre Geschichte näher betrachtet werden. Bis das Zahlensystem mit der Null seine Vollständigkeit erreichte, dauerte es Jahrtausende. Diese Leistung haben wir nicht nur einer einzigen Kultur zu verdanken. Das Dezimalsystem in der Form, in der wir sie kennen, ist im Zusammenspiel von verschiedenen kulturellen Einflüssen entstanden. Bekannt wurde das dezimale Positionssystem mit der Null in Europa in erster Linie durch das große „Rechenbuch“ „Liber Abaci“ von Lenardo von Pisa ab 1202. Wie sich das Zahlensystem mit der exotischen Zahl Null bis zu Fibonacci entwickelt hat, wird in den nächsten Kapiteln erläutert.

I. Die Entstehungsgeschichte der Zahl „Null“

1.1 Zahlenbewusstsein

In älterer Steinzeit (Paläolithikum) hatten die Menschen ein tierähnliches Leben. Sie lebten in Höhlen und ihre Aufgabe lag darin, Nahrung meist durch Jagen und Fischen zu finden. Mit dem Übergang vom Jagen und Fischen zum Ackerbau im Neolithikum entwickelte sich ihr Verständnis für die Zahlen und die Räumlichkeit. Dies wurde nach den Forschern und Forscherinnen in Höhlenmalereien sichtbar, in denen ein Bewusstsein für Formen zu beobachten ist. Menschen wurden sesshaft und es bildeten sich Dörfer. Neue Nahrungsmittel wurden hergestellt, Kupfer und Bronze geschmolzen. Diese Fortschritte beschleunigten die Bildung der Sprache. Es entstanden die ersten Zahlwörter. Die Zahlwörter sind nach Adam Smith wahrscheinlich durch Verschiebung von Betonungen entstanden. Beispielsweise wird die Betonung bei „ein Haus“ von „Haus“ auf das „ein“ verlegt. Anfangs wurde nur zwischen eins, zwei und vieles unterschieden. Folgend entstanden die größeren Einheiten durch die Addition.¹

Die ältesten Dokumente von Zahlendarstellungen sind Kerbzeichen auf Tierknochen, die zwischen 20.000 und 30.000 Jahre alt sind.² Der Archäologe Karl Absolon fand beispielsweise in den 1930er Jahren in der Höhle vom Höhlenmensch Gog einen etwa 30.000 Jahre alten Wolfsknochen mit 55 Kerben. Auffallend ist, dass diese Kerben in Fünfergruppen aufgeteilt sind und fünf der Fünfergruppen durch eine weitere Kerbe von dem Rest abgespalten ist. Diese Form der Bündelung bezeichnen wir heute als quinäres Zählsystem.³

Ein weiterer Beleg für das Zahlenbewusstsein des Homo sapiens sapiens, ist der Ishango-Knochen, der nach seinem Fundort benannt ist. Durch C-14-Datierung wurde das Alter des Knochens etwa auf 22.000 Jahre geschätzt.⁴ Die Kerben von Ishango-Knochen werden von Forschern und Forscherinnen als ein konsistentes System von Addition zur Basis 6 und 10 interpretiert.⁵ Andererseits werden diese Kerben auch als Darstellung der Verdoppelung 3 – 6,

¹ vgl. Struik (1963), S. 1ff

² vgl. Beutelspacher (2010), S. 30

³ vgl. Seife (2000), S. 12f

⁴ vgl. Haarmann (2008), S. 11

⁵ vgl. ebd., S. 12

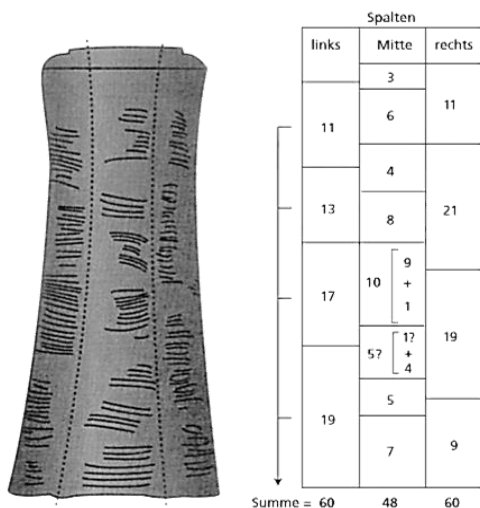


Abbildung 1: Kerbzeichen auf dem Ishango-Knochen, Haarmann, Harald. (2008). Weltgeschichte der Zahlen. München: C.H.Beck Verlag, S. 12

4 – 8, und 5 – 10 (Mitte) und der Primzahlen 11, 13, 17, 19 (linke Spalte) gedeutet.⁶ Das Zählen hat nach Struik nicht mit dem Abzählen von Händen und Fingern begonnen. Die Anzahl von fünf Objekten kann ohne Abzählen festgestellt werden, aber eine Menge mit größeren Einheiten nicht mehr. Erst durch das Fortschreiten von Handwerk und Handel öffnete sich die Tür zur Notwendigkeit von größeren Einheiten, die tatsächlich mithilfe von Händen und Fingern erfasst wurden.⁷

1.2 Das erste Stellenwertsystem - Sexagesimalsystem

Bis tatsächlich ein System von Zahlen entstand, dauerte es Jahrtausende. Das erste Stellenwertsystem wurde von den Babyloniern im zweiten Jahrtausend v.Chr. entwickelt, das sich aus dem Zahlensystem der Sumerer formte.⁸

Texte aus Mesopotamien wurden in Keilschrift auf Tontafeln geschrieben. Deshalb ist die Quellenlage besser als bei der ägyptischen Mathematik, da ein Papyrus leichter verbrennt als eine Tontafel. Ein großer Teil der erhaltenen mathematischen Texte stammt aus dem alt- und neubabylonischen Reich. Die Berechnungsmethoden wurden bei den Babyloniern mit konkreten Zahlen beschrieben, wobei theoretische Ansätze erkennbar sind.

Die Babylonier verwendeten ein Sexagesimalsystem, das heißt ein Positionssystem zur Basis sechzig. Unser Zahlensystem zur Basis zehn ist ebenfalls ein Positionssystem. Mithilfe von den zehn Ziffern (0,1,2,3,...,9) kann jede beliebig große Zahl dargestellt werden. Denn in einem Positionssystem ist die Stelle einer Ziffer entscheidend für ihren Wert. Beispielsweise hat die

⁶ vgl. Beutelspacher (2010), S. 31

⁷ vgl. Struik (1963), S. 3

⁸ vgl. Kaplan (2006), S. 18

Ziffer 2 an der Einerstelle den Wert 2 und an der Zehnerstelle den Wert 20. Zehn Einheiten im Dezimalsystem werden zur nächst größeren Einheit gebündelt.⁹

Das Sexagesimalsystem der Babylonier war eine Mischung aus dem Dezimal- und Sexagesimalsystem, wie bei den Sumerern. Es handelte sich um eine Mischung, da nicht 59 verschiedene Ziffern für die Zahlen 1 bis 59 verwendet wurden, sondern nur zwei Zahlzeichen. Als Grundziffern für die Zahlen von 1-59 wurde ein „senkrechter Nagel“ ∇ für die „Eins“ und ein „Winkel“ ∠ für die Zahl „Zehn“ verwendet. Durch Aneinanderreihen von Nägeln und Winkeln wurden die Zahlen nach dem additiven Prinzip angeschrieben:¹⁰

Bsp.: ∠∠∠ ∇∇ = 32 (= 10 + 10 + 10 + 1 + 1)

Die Zahl sechzig wurde wieder mit einem senkrechten Nagel ∇ dargestellt, wobei dieser größer war als der Nagel für die Eins.¹¹

Bsp.: ∇∇∇ ∠∠∠ ∇∇∇ = 3 · 60 + 3 · 10 + 6 = 216

Diese Darstellung von sechzig führte natürlich auch zu Missverständnissen beim schlampigen Anschreiben von Nägeln, da die Nägel für Einser groß und die für Sechziger klein geschrieben wurden. Man will es vielleicht nicht glauben, aber dieses Problem lenkte die Entwicklung des Zahlensystems in eine positive Richtung. Denn irgendwie musste diese Unklarheit überwunden werden. Als Lösung dafür wurde das Positionssystem ausgebaut, welches bei Zahlen über 59 eingesetzt wurde. So kamen sie von der Unterscheidung zwischen großen und kleinen Keilen weg. Nicht die Größe des Keils sollte nun seinen Wert bestimmen, sondern seine Stelle.¹²

Ähnlich wie das Positionssystem der Babylonier haben die Ziffern der Zahl 333 in unserem Dezimalsystem an allen drei Stellen unterschiedliche Werte. Die erste Drei von rechts hat den Wert 3 (= 3 · 10⁰), die Drei in der Mitte den Wert 30 (= 3 · 10¹) und die Drei links den Wert 300 (= 3 · 10²). Durch die Addition der Zahlen 3 + 30 + 300 erhält man 333. So ähnlich funktionierte es auch bei den Babyloniern, jedoch stand jede Stelle bei ihnen für eine Potenz zur Basis 60 und nicht zur Basis 10. Ein senkrechter Nagel konnte somit für 1, 60 (= 60¹), 3600

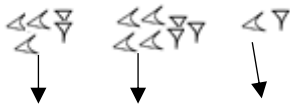
⁹ vgl. Ifrah (1986), S. 411

¹⁰ vgl. ebd., S. 412f

¹¹ vgl. Kaplan (2006), S. 18

¹² vgl. ebd., S.19f

($=60^2$) oder für eine andere Potenz zur Basis 60 stehen. Um die einzelnen Stellen der Ziffern einer Zahl zu verdeutlichen, bauten sie Leerstellen zwischen den Winkeln beziehungsweise den Nägeln ein.¹³

Bsp.: 

$$32 \cdot 60^2 + 43 \cdot 60^1 + 11 = 117.791$$

Dem Sexagesimalsystem der Babylonier begegnen wir heute noch in unserem Alltag. Die Maße für Winkeln, Zeit und Gewicht sind bis heute erhalten. Betrachtet man das obige Beispiel als Zeit, folgt für die Zahl $32 \cdot 60^2 + 43 \cdot 60^1 + 11$, dass es 11 Sekunden, 43 Minuten und 32 Stunden sind. 117.791 hingegen ist die umgewandelte Zeitangabe in Sekunden. Daher kann $32 \cdot 60^2 + 43 \cdot 60^1 + 11$ auch als $32'43'11''$ geschrieben werden, wie die Zeit sonst angegeben wird.¹⁴

Mithilfe dieses Positionssystems konnten nun die Babylonier große Zahlen mit viel weniger Aufwand anschreiben und Rechnungen durchführen, doch nicht alle Mängel waren beseitigt. Später stellten sich die Leerstellen als ein Defizit des Systems heraus. Es kam zu Fehlbestimmungen der Zahlen, da die Leerstellen zwischen den Sechziger-Einheiten nicht groß genug waren. Obwohl einiges aus dem Kontext erschlossen werden konnte, war es nach vielen Jahren nicht mehr möglich die Zahlen aus dem Kontext zu erfassen. So kam es zwischen dem 6. und 3. Jahrhundert v. Chr. zur Einführung von Trennzeichen. Ein Zeichen, das ursprünglich dazu benutzt wurde, um ein Wort von seiner Definition zu trennen oder zweisprachige Texte zu trennen, wurde eingesetzt, um Sechziger-Einheiten voneinander zu trennen. Unten sind einige Beispiele zu sehen, die als Zeichen für Leerstellen eingesetzt wurden.

Ein einheitliches Symbol gab es nicht, jeder Schreiber hat es anders gehandhabt. Meistens wurden aber zwei Winkel oder zwei Nägel übereinander oder neben einander gesetzt.¹⁵

¹³ vgl. Kaplan (2006), S. 20

¹⁴ vgl. Ifrah (1986), S. 413f

¹⁵ vgl. Kaplan (2006), S. 22



Abbildung 2: Einige Beispiele für Zeichen, die als Leerstellen im babylonischen Positionssystem dienten. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 417.

Die Geburt der ersten Null

Die, nicht aus einer besonders geistigen, sondern aus Notwendigkeit entstandenen Leerzeichen in der babylonischen Keilschrift entwickelten sich zu Vorläufern der Zahl Null.

Die Mathematiker und Astronomen des 2. Jahrtausends v.Chr. kannten die Zahl Null als Zeichen für eine fehlende Stelle oder eine Einheit noch nicht. Das Fehlen einer Potenz von sechzig wurde aus dem Kontext erschlossen. Die Babylonier machten eine Leerstelle, um die nicht vorhandene Potenz von sechzig zu verdeutlichen. Diese Leerstellen konnten erstens nur zwischen zwei Einheiten gesetzt werden und zweitens war es auf diese Art nicht möglich zwei aufeinander folgende Einheiten durch Leerstellen darzustellen. Trotz dieser Unklarheiten weist die babylonische Mathematik und Astronomie große Fortschritte auf.¹⁶



Abbildung 3: Mathematische Tafel aus Uruk: ältester Beleg für die Verwendung der babylonischen Null. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 423.

Vor der Seleukidenherrschaft (311 – 1. Jahrhundert v.Chr.) benutzten die Astronomen die Trennzeichen, die eingesetzt worden waren, um die Einheiten voneinander zu trennen, auch als Zeichen für die fehlende Potenz von 60. Als Symbol für das Fehlen einer Zehnerpotenz wird heute eine Null geschrieben, daher können diese Zeichen mit der heutigen Null verglichen werden. In allen mathematischen Texten aus Babylon, die überliefert sind, steht die Null zwischen den Einheiten und nicht am Anfang oder am Ende.¹⁷ Die mathematische Tafel aus

¹⁶ vgl. Ifrah (1986), S. 418f

¹⁷ vgl. ebd., S. 420

Uruk, die bei Schwarzgrabungen entdeckt wurde, ist der älteste Beleg für den Gebrauch der babylonischen Null.¹⁸

Die Wissenschaftler sind davon überzeugt, dass die babylonische Null nicht mit der gegenwärtigen Null ident ist. Da in den überlieferten mathematischen Texten die Null tatsächlich zwischen den Einheiten vorkommt und nicht am Anfang oder am Ende steht.

„In Wirklichkeit aber haben die babylonischen Astronomen, wie Neugebauer (1935) nachgewiesen hat, die Null auch in der End- und Anfangsposition verwendet. [...] Eine [...] astronomische Tafel, die aus der gleichen Zeit [Seleukidenzeit] und ebenfalls aus Babylon stammt, enthält die Zahl:

$$2; 11; 46; 0 (= 2 \times 60^3 + 11 \times 60^2 + 46 \times 60 + 0)^{19}$$

Hier steht die Null in der Einerstelle, also am Ende. Das Zeichen für eine fehlende Potenz wurde auch dazu benutzt, sexagesimale Brüche ohne Doppeldeutigkeiten darzustellen. So wurden Brüche mit Sechziger Potenzen als Nenner dargestellt.

Die Babylonier waren die Ersten, die ein wirkliches und gut funktionierendes Positionssystem zusammengestellt haben. Sie waren auch die Ersten, die die Null entdeckt haben, auch wenn sie bei den Mathematikern nicht die idente Funktion, wie die Null heute hatte. Das Positionssystem der Babylonier war allen anderen Systemen des Altertums weit überlegen.²⁰

1.3 Vigesimalssystem - Maya- Ziffern

Das Vigesimalssystem ist ein Zahlensystem, das auf Basis 20 beruht. Zur Basis 20 kam man wahrscheinlich durch die Addition im Zehnersystem. Als Hilfsmittel zum Zählen wurden zu den Fingern die Zehen dazu genommen.²¹

Das indigene Volk der Mayas aus Mittelamerika verwendete ein Stellenwertsystem zur Basis 20, das heißt ein vigesimales System. Beweggrund für die Entwicklung eines Zahlensystems bei den Mayas war nicht der Handel oder das Handwerk, sondern deren Kalender.²² Die Mayas hatten, wie viele Hochkulturen, einen eigenen Kalender. Sie besaßen sogar zwei verschiedene

¹⁸ vgl. Ifrah (1986), S. 423

¹⁹ Ifrah (1986), S. 421

²⁰ vgl. ebd., S. 422f

²¹ vgl. Struik, (1963), S. 3

²² vgl. Ifrah (1986), S. 451

Kalender. Tzolkin war ein religiöser Kalender, der eine Art Geheimschrift der Priester war. Der zweite Kalender war im Prinzip ein Sonnenkalender. Ihr religiöser Kalender hatte 260 Tage mit einer Abfolge von dreizehn Tagen, denen ein Name zugeordnet wurde und entweder mit einem Gott oder einem religiösen Ritual verbunden wurde.

Haab, der Sonnenkalender, hatte insgesamt 365 Tage mit einer Einteilung von 18 Monaten zu je 20 Tagen, wobei diese zwanzig Tage noch einmal in sich in dreizehn Tage-Zyklen aufgeteilt waren. Die Einteilung in 20 Tage-Zyklen ist ein Hinweis darauf, dass Mayas ein Vigesimalssystem hatten. Die bei dieser Bündelung überbleibenden fünf Tage wurden von den Mayas als Tage des „Unheils“ eingestuft und „Uayeb“ genannt. Man war der Überzeugung, dass Babys, die an diesen Tagen geboren sind, ihr ganzes Leben von Unglück und Trauer verfolgt werden und für nichts tauglich sind.²³ Nach 52 Sonnenjahren beziehungsweise 73 religiösen Jahren kam es zu einem gemeinsamen Jahresbeginn der beiden Kalender, der groß gefeiert wurde.²⁴ Im Gegensatz zu den Babyloniern schrieben die Mayas ihre Zahlen auf zwei verschiedene Arten. Die einfache Variante setzte sich aus Punkten und Strichen zusammen.²⁵ Für die Einer verwendeten sie einen Kreis oder einen Punkt, die an die Kakaobohnen erinnern sollten, da diese als Wechselgeld bei den Völkern Mittelamerikas verwendet wurden. Um die Fünf darzustellen, verwendeten sie einen waagrechten Strich. Für jede 20-er Potenz hatten sie ein anderes Symbol, das so oft hintereinander gereiht wurde, wie notwendig. Die Zahl „acht“ wurde beispielsweise mithilfe von einem waagrechten Strich und drei Punkten dargestellt.²⁶ Die andere und kompliziertere Form der Zahlendarstellung der Mayas erfolgte mit den Glyphen. Glyphen sind bildhafte Symbole von seltsamen Gesichtern.

Da viele Dokumente aus der präkolumbischen Zeit zerstört wurden, lässt sich das Zahlensystem nur noch aus dem Mayakalender ableiten. Den zwanzig Tagen im Sonnenkalender wurde ein Schriftzeichen (für den Namen) und eine Zahl aus den 13-Tages Zyklen zugeordnet, sodass der Tag im religiösen Kalender eindeutig festgelegt werden konnte.²⁷

²³ vgl. Ifrah (1986), S. 452ff

²⁴ vgl. ebd., S. 459

²⁵ vgl. Seife (2000), S. 23

²⁶ vgl. Ifrah (1986), S. 451

²⁷ vgl. ebd., S. 454

Markant für die Verschriftlichung der 20 Tage ist der erste Tag des Monats. Der Monat begann bei den Mayas mit der Zahl „Null“ und nicht mit der „Eins“. Dementsprechend trug der zweite Tag die Nummer „Eins“, der dritte Tag die Nummer „Zwei“ und so weiter. Der Grund für diese Langzählung war die religiöse Vorstellung, dass der Tränergott an diesem Tag die „Zeitlast“ dem Schutzgott des folgenden Monats weitergibt.²⁸ „Der erste Tag jedes „Monats“ wurde [...] durch das ihm zugeordnete Schriftzeichen und folgende Ziffer dargestellt.“²⁹



Abbildung 4: Zeichen für den ersten Tag des Monats, die gleichzeitig die Ziffer Null darstellen. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 456.

Somit stellt das unten abgebildete Bild mit den vier Kreisen und dem Monatszeichen nicht den vierten Tag des Monats („Xul“) dar, sondern den fünften Tag.



Abbildung 5: 5.Tag des Monats im Haab-Kalender. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 457.

Der Haab-Kalender beinhaltet das erste System, bei dem die Zählung mit der Null begann. In vielen anderen Zählungen bzw. Systemen wird die Null in die Zählung nicht einbezogen.

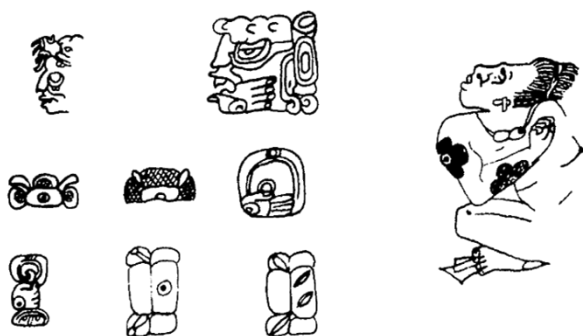


Abbildung 6: Maya Hieroglyphen der Zahl Null auf Stellen und Skulpturen. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 469.

Das Schwierige an der Entzifferung des Maya-Systems war, dass zum einen manche Zeichen mehrere Funktionen hatten und es zum anderen mehrere Symbole für ein und denselben Begriff gab. Hier soll nicht unerwähnt bleiben, dass die Mayas mehrere Glyphen für den Begriff „Null“ hatten, von denen einige in der neben stehenden Abbildung 6 dargestellt sind.³⁰

²⁸ vgl. Ifrah (1986), S. 457

²⁹ Ifrah (1986), S. 456

³⁰ vgl. Haarmann (2008), S.65

Ein Vorteil der Nummerierung mit Null des ersten Monatstags der Mayas ist, dass sie keinerlei Diskussionen darüber geführt hätten, wann ein Jahrtausend beginnt. Denn bis heute ist es umstritten, ob das zweite Jahrtausend im Jahr 1000 oder 1001 beginnt.³¹

1.4 Ägyptisches, chinesisches und indisches Dezimalsystem

Das Dezimalsystem ist ein Zahlensystem zur Basis zehn. Es gab drei Kulturen, die ein Dezimalsystem verwendeten, und zwar die ägyptische, die chinesische und die indische Kultur. Obwohl alle drei ein Dezimalsystem verwendeten, hatten sie wenig gemeinsam. Sie sind alle aus differierenden kulturellen Kontexten entstanden. Dennoch sind sie der orientalischen Mathematik anzurechnen, die als vorgriechische Mathematikgeschichte gilt. Die oben geschilderte mesopotamische oder babylonische Mathematik ist die einzige aus dieser Periode, die nicht das Dezimalsystem gebrauchte, aber trotzdem sehr fruchtbar war.³²

Die Mathematik der Inder, Chinesen, Mesopotamier und Ägypter lassen sich trotz arithmetisch-algebraischer Gestalt voneinander trennen, da sie in abgeschlossenen Gebieten isoliert entstanden sind. Die orientalische Mathematik befasste sich vorrangig mit Kalenderberechnungen, mit der Verwaltung der Ernte, Einkassierung der Steuern und praktischen Wissenschaften. Aus der praktischen Mathematik und der Messkunde entwickelte sich über eine lange Zeit die Algebra. Dieser Prozess führte zu einer theoretischen Geometrie in den Schreiberschulen.³³

Nun sollen die Dezimalsysteme der oben erwähnten drei Kulturen näher betrachtet werden, den Anfang der Betrachtung soll das Dezimalsystem der Ägypter machen.

1.4.1 Ägyptisches Dezimalsystem

Aus dem Alten Ägypten sind uns eine große Menge an Texten der gesprochenen Sprache überliefert, die auf Bauwerken, wie Tempeln, Grabstelen eingemeißelt sind, oder auf Papyrus und Topfscherben zu finden sind. Die Ägypter verschriftlichten ihre Sprache mit den so genannten Hieroglyphen. Hieroglyphen können entweder Bildzeichen sein, die ähnlich wie

³¹ vgl. Seife (2000), S. 25

³² vgl. Thuswald (1999), S. 41

³³ vgl. Struik (1963), S. 12f

Piktogramme zu verstehen sind und das zeigen, was sie veranschaulichen wollen. Oder sie können als Ideogramme verstanden werden, die eine gewisse Interpretation der dargestellten Bilder erfordern. Abstrakte Begriffe wie Liebe wurden durch die Zusammensetzung der Laute aus verschiedenen Begriffen dargestellt. Die Piktogramme wurden von links nach rechts, von rechts nach links, von unten nach oben oder von oben nach unten gelesen. Je nachdem, in welche Richtung die Piktogramme blickten, wurden sie in dieser Richtung gelesen. Schauten sie nach rechts, so wurden die Piktogramme von rechts nach links gelesen.³⁴

Es steht fest, dass die Hieroglyphenschrift der Ägypter, trotz des Kontakts mit Mesopotamien und den Sumerern, deren eigene Leistung ist. Sie ist eines der ältesten Schriftsysteme und wurde bereits zur Beginn der Jungsteinzeit gebraucht.³⁵

Die ägyptische Mathematik beschäftigte sich, wie die Mathematik der Mesopotamier, mit den Fragestellungen der Praxis. Beispielsweise sind einige Beispiele und Beschreibungen zur Volumenberechnung erhalten. Diese Berechnungen brauchten die Beamten, um das Fassungsvermögen der Gefäße oder Speicher für das Getreide herauszufinden.³⁶

Aus dem Alten Ägypten sind mehr als zehn Papyri mit mathematischem Inhalt überliefert. Für die Mathematik sind die wichtigsten Papyri der Papyrus Rhind und der Moskauer Papyrus. Beide Papyri wurden in den Beamenschulen als Schulbuch von Schreibern beziehungsweise Lehrern für Schüler verfasst. Der Papyrus Rhind stammt etwa aus dem Jahr 1650 v. Chr., soll aber eine Abschrift eines viel älteren Textes sein. Diese Papyrusrolle ist etwa 5 m lang, 33 cm breit und befindet sich im British Museum of London. Er beinhaltet etwa 85 Aufgaben mit Lösungen und teilweise Aufgaben mit Skizzen, die nach unterschiedlichen Bereichen sortiert sind. Im Vergleich dazu ist der Moskauer Papyrus etwa 5,44 m lang und nur 8 cm breit. Dieser enthält 25 Aufgaben mit Lösungen und befindet sich im Museum der schönen Künste in Moskau. Beide Papyri sind in hierarchischer Schrift verfasst, wobei der Moskauer Papyrus etwas älter geschätzt wird.³⁷

Auffallend ist, dass die Papyri lediglich konkrete Beispiele zum Teil mit Lösungen und Proben enthalten, aber keine Beweise oder theoretische Überlegungen. Diese rezeptartigen Aufgaben

³⁴ vgl. Ifrah (1986), S. 222ff

³⁵ vgl. ebd., S. 229f

³⁶ vgl. Scriba; Schreiber (2001), S. 14

³⁷ vgl. ebd., S. 12

wurden den Schülern der Beamenschulen gelehrt, ohne abstrakte Begriffe oder formale Sprache der Mathematik anzuwenden. Die Ägypter kannten Formeln, mit deren Hilfe sie den Flächeninhalt von Kreisen, Rechtecken, Dreiecken und Trapezen mit einer guten Näherung berechnen konnten. Im Moskauer Papyrus befindet sich eine richtige Anweisung zur Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche in Aufgabe 14. Doch auch für Flächen- und Volumenberechnungen sind keine Begründungen angebracht.³⁸

Die Ägypter konnten mit ihren Ziffern, die einen Teil ihrer hieratischen Schrift bildeten, Zahlen darstellen, die sogar größer waren als eine Million. Sie nutzten ein Dezimalsystem, das jedoch kein Positionswertsystem war und im Grunde dem Additionsprinzip folgte. Für jede Zehnerpotenz hatten sie ein eigenes Zeichen, wobei sie je nach Leserichtung Variationen aufweisen.

In der nebenstehenden Abbildung 7 sind die Zeichen für die Zehnerpotenzen mit ihren Variationen zu finden. Um ein Beispiel zu nennen, stellt ein Strich die Zahl Eins dar, ein Hufeisen oder ein verkehrtes U stellt die Zahl Zehn dar.³⁹

	Von rechts nach links zu lesen			Von links nach rechts zu lesen		
1	I			I		
10	n			n		
100						
1 000						
10 000						
100 000						
1 000 000						

Abbildung 7: ägyptische Hieroglyphen Zahlenschrift mit den verschiedenen Varianten und der Verdeutlichung der Leserichtung. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 231.

Eine Zahl wurde in hierarchischer Zahlenschrift durch Aneinanderreihen von entsprechenden Zeichen dargestellt. Die Zahl 1 284 wurde auf einem Stein geschlagen, indem eine Lotosblüte mit Stiel (= 1 000), zwei eingerollte Spiralen (= 200), acht Hufeisen (= 800) und vier senkrechte Striche (=4) neben einander ausgeführt wurden. Werden die Zahlen für die die Zeichen stehen, addiert, so erhält man die Zahl. Um eine bessere Übersicht bei der Darstellung der Zahlen mit Hieroglyphen-Zahlschrift zu erreichen, fassten die Ägypter die Einheiten zu Gruppen zusammen und ritzten sie untereinander. So etwa schlugen die Ägypter die Menge von Ziegen

³⁸ vgl. Scriba; Schreiber (2001), S. 12ff

³⁹ vgl. Ifrah (1986), S. 230f

auf einem Stein, indem sie zuerst die Hieroglyphe für die Ziege schlugen, dann die Zehnerpotenzen unter einander in Gruppen, wobei mit der größten vorkommenden Zehnerpotenz begonnen wurde.⁴⁰

Obwohl ein Bestreben zum Vermeiden von Missverständnissen oder Fehlern vorhanden war, genügte es nicht, um dem Entstehen von Irrtümern entgegenzuwirken. Diese Konsequenz sollte nicht verwundern, denn nicht allzu große Zahlen wurden mit einer viel zu großen Anzahl an Zeichen abgebildet. Um die Zahl 888 888 darzustellen, brauchten sie insgesamt 48 Zeichen. Natürlich kommt es bei dieser Zahl an Zeichen zu Schlampigkeitsfehlern von Schreibern und Steinschneidern.⁴¹

Eine weitere Leistung und gleichzeitig der Grund für den Untergang der ägyptischen Mathematik war die Bruchrechnung. Sie waren die Ersten, die die Bruchzahlen eingeführt hatten. Ein Beleg für ihre Kenntnisse über das Rechnen mit Brüchen stellt der Keulenkopf des Königs Narmer aus dem 4. Jahrtausend v.Chr. dar.⁴² Außergewöhnlich bei ihrer Rechengewohnheit war, dass sie dazu neigten, Brüche als Summe von Stammbrüchen darzustellen. Um eine Bruchzahl, besser gesagt einen Stammbruch darzustellen, wurde die Hieroglyphe „Mund“ über die Zeichen, deren Summe den Nenner ergeben, gestellt. Besondere Brüche hatten Sonderzeichen. Wie bereits erwähnt, kannten die Ägypter nur Stammbrüche, das heißt Brüche, deren Zähler gleich eins ist. Brüche, die keine Stammbrüche waren, wurden als Summe von Stammbrüchen dargestellt, wobei kein Stammbruch doppelt geschrieben wurde. Um ein Beispiel zu nennen, zerlegten sie den Bruch $\frac{2}{5}$ nicht in die Summe der Brüche $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, sondern folgendermaßen $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.⁴³

Neben Bruchrechnungen und Näherungen zur Volumenberechnungen erzielten die Ägypter bewundernswürdige Leistungen in Astronomie und Zeitmessung. Sie waren im Stande Jahreszeiten und astronomische Abfolgen korrekt vorherzusagen. Im Vergleich zu vielen anderen Kulturen ihrer Zeit leiteten die Ägypter die Länge des Jahres nicht von der Mondphase, sondern von dem Lauf der Sonne ab. Das System des Sonnenjahres wurde von den Römern übernommen und von Julius Cäsar mit dem Schaltjahr ergänzt. Das Sonnenjahr und die

⁴⁰ vgl. Ifrah (1986), S. 231f

⁴¹ vgl. ebd., S. 234

⁴² vgl. Sommer; Müller-Wille; Reinhardt (2017), S. 113

⁴³ vgl. Ifrah (1986), S. 235

Geometrie, vor allem in der Landvermessung, sind die wichtigsten Beiträge der Ägypter in der Mathematik. Im Übrigen erbrachten die Ägypter diese Großtaten ohne die Kenntnis über die Zahl Null. Die Zahl Null brauchten sie aber nicht unbedingt, da ihr Zahlensystem kein Positionssystem war.⁴⁴

1.4.2 Chinesisches Dezimalsystem

Das Dezimalsystem der Chinesen war ein Stellenwertsystem. Dieses entstand aufgrund der geographischen Lage von China isoliert von Einflüssen. Der Wert einer Ziffer wird also durch ihre Stelle bestimmt. Ihre Zahlenschrift enthält im Gegensatz zu unserem Zahlensystem nicht eine Reihe mit neun Zeichen, sondern zwei Reihen mit je neun Zahlzeichen. Die Ziffern bestehen, wie in vielen anderen Kulturen, aus waagrechten und senkrechten Strichen.

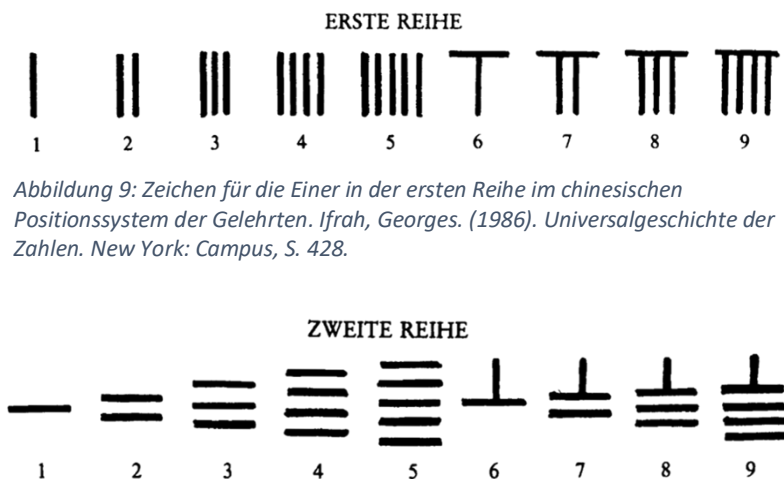


Abbildung 9: Zeichen für die Einer in der ersten Reihe im chinesischen Positionssystem der Gelehrten. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 428.

Abbildung 8: Zeichen für die zweite Reihe im chinesischen Positionssystem. Ziffern der ersten und zweiten Reihe wurden bei der Darstellung einer Zahl beliebig verwendet. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 429.

Dieses System enthält nichtdestotrotz einige Doppeldeutigkeiten. Ein Missverständnis ergab sich, wenn mehrere senkrechte Einheiten nebeneinander geschrieben wurden. Um diesen Verwechslungen entgegen zu wirken, wurden ab der Han-Dynastie (206 v. Chr. – 220 n. Chr.) die Einer durch senkrechte, die Zehner durch waagrechte, die Hunderter durch senkrechte Striche etc., dargestellt.⁴⁵

⁴⁴ vgl. Seife (2000), S. 16ff

⁴⁵ vgl. Ifrah (1986), S. 431

Das Besondere an der Entwicklung des Zahlensystems bei den Chinesen ist der dreistufige Ablauf. Anfänglich wurden Zahlen mithilfe von Rechenstäbchen konzipiert. Dem folgte eine Darstellung auf einem Schachbrett. Schließlich wurden auch die Schachbretter weglassen und man ging auf die Stellenwert-Zahlschrift über. Wobei die Null dabei unberücksichtigt blieb und später den Fortschritt hemmte. Auf den Rechenbrettern wurde das Fehlen einer Stelle durch das Freilassen eines Kästchens gekennzeichnet, doch in der Verschriftlichung reichte der freie Platz zum Ausschließen von Verwechslungen nicht aus. Denn wie sollte man 864, 8604 und 86004 voneinander unterscheiden? Im 8. Jahrhundert n. Chr. wurde ein kleiner Kreis durch den Einfluss der indischen Mathematik für die fehlenden Stellen eingeführt. Diese Einführung beschleunigte den Fortschritt der Chinesen in der Mathematik. Somit konnten sie ihr Wissen beim Bruchrechnen, bei den irrationalen Zahlen und in Algebra vorantreiben. Unter anderem wurde das Pascalsche Dreieck 1303 erstmals vom chinesischen Mathematiker Chu Shih-Chieh in seinem Werk Ssu Yuan Yu Chien veröffentlicht, also vor dem europäischen Mathematiker Blaise Pascal.⁴⁶

1.4.3 Indisches Dezimalsystem

Die indische Mathematik hat bereits in der Periode der orientalischen Mathematik ihre Wurzeln und entwickelte sich dann in der Phase der griechischen Mathematik weiter. Sie spielte nach der griechischen Periode sogar eine wichtigere Rolle, als es den Menschen bekannt ist. Die Zahlschrift zur Basis 10, die vor 1500 Jahren in Nordindien entwickelt wurde, ist tatsächlich der Vorläufer unseres Zahlensystems. Einige europäische und arabische Autoren weisen ebenfalls auf diese Gegebenheit hin.⁴⁷

Die indische Mathematik ging aufgrund ihrer politischen und geographischen Lage aus anderen Erfordernissen hervor, als beispielsweise die chinesische Mathematik. Die chinesische Mathematik entstand von anderen Kulturen isoliert, doch die indische Mathematik entwickelte sich durch Einflüsse von der griechischen, babylonischen und der chinesischen Mathematik. Deswegen ist keine Kontinuität in der Entwicklung und in der Dokumentation der indischen Mathematik festzustellen.⁴⁸

⁴⁶ vgl. Ifrah (1986), S. 433ff

⁴⁷ vgl. ebd., S. 486

⁴⁸ vgl. Struik (1963), S. 24

In Indien wurden zwei Buchstabenschriften verwendet, und zwar die Kharosthi-Schrift, welche in Nordwestindien zwischen dem 5. und 3. Jahrhundert v.Chr. verwendet wurde und die Brahmi-Schrift, die als Vorfahrin der meisten indischen Schriften, unter anderem der heute am meisten gebrauchten Nagari-Schrift gilt. Die Kharosthi-Schrift ist linksläufig und hat ihren Ursprung in der persischen und aramäischen Kultur. Sie weist eine 4-, dann 10- und 20-Bündelung auf und hat drei ähnliche Zeichen für zwanzig mit zwei 10-Zeichen. Dabei werden die Hunderter gezählt, was einen Beleg für die alte Zählgrenze 100 bildet.⁴⁹

Die Abstammung der Brahmi-Schrift ist bis heute unbekannt, wobei die indischen Forscher davon ausgehen, dass sie eine Eigenleistung der indischen Kultur sei. Sie könnte genauso gut auch aus dem nordsemitischen Kreis stammen, da die meisten Erlässe von Asoka in Brahmi-Schrift verfasst sind.⁵⁰

Die Brahmi-Zahlschrift und der Aufbau der Zahlen sind über 1000 Jahre hinweg gleichgeblieben. Diese Information ist uns über die Kupferplatten, die an den Wänden von Tempeln und Felsen hingen, überliefert worden. In dieser Zahlenschrift hatte jeder Einer und ab der Frühzeit jeder Zehner ein eigenes Zeichen. Ab den Hundertern und Tausendern geht die Brahmi-Schrift in ein Stellenwertsystem über.⁵¹ Doch um 600 n. Chr. finden wir die Brahmi-Zahlschrift, die nur für die neun Einer ein eigenes Zeichen verwendet. Auf einer alten Inschrift aus Gwalior ist die Jahreszahl 270 (aus 870 n.Chr.) in Stellschrift niedergeschrieben. So entstand die reine Brahmi-Stellschrift mit neun verschiedenen Ziffern, die die Vorfahren unseres Zahlensystems sind. Die Abbildung der Brahmi-Zahlen sind ebenfalls die Urformen unserer Zahlen. So etwa hat die Zahl vier ihre Gestalt von der Brahmi-Zahlenschrift, wobei sie sich in den Händen von Schreibern der abendländischen, ägyptischen und arabischen Kulturen transformierte.⁵²

Durch die Erfindung der Zahl Null, die „nicht für eine fehlende Mittel-, sondern auch für eine fehlende Endstelle gesetzt wurde“⁵³, [...] „ist in Indien die reine Stellschrift erfunden, die

⁴⁹ vgl. Menninger (1958), S. 208

⁵⁰ vgl. ebd., S. 208

⁵¹ vgl. ebd., S. 209

⁵² vgl. ebd., S. 211

⁵³ Menninger (1958), S. 212

nun als vollkommenste Zahlschrift ihren Siegeszug durch die Welt beginnt.“⁵⁴ Näheres dazu folgt in den nächsten Kapiteln.

1.4.4 Griechisches Dezimalsystem

1.4.4.1 Die Perioden der griechischen Mathematik

Die griechischen Mathematiker gelten als die angesehensten Mathematiker der Geschichte, obwohl die Inder mehr für das Vorantreiben der Mathematik geleistet haben, ist wenigen ein indischer Mathematiker bekannt. Demgegenüber sind viele griechische Mathematiker namentlich bekannt und sogar gemeinsam mit ihren Biographien. Doch eines darf nicht unerwähnt bleiben, nicht alles, das unter ihren Namen veröffentlicht wurde, sind tatsächlich deren Leistungen.⁵⁵

Die griechische Mathematik der Antike unterscheidet sich wesentlich von jener der Babylonier und der Ägypter. Es steht nicht mehr so sehr die Frage nach dem „Wie?“ im Vordergrund, sondern nach dem „Warum?“. Man begnügte sich nicht damit, einen Weg zur genauen Berechnung zu kennen, sondern bemühte sich um Beweise für Behauptungen. Mathematische Fragen wurden um ihrer selbst willen studiert. Die Erläuterung der mathematischen Beziehungen ist das Charakteristische an der Mathematik der Griechen. Sie gelten daher als Erfinder der mathematischen Beweise, sowie der Logik. So legten sie die Grundsteine der Wissenschaft. Die Beschäftigung mit Frage nach dem „Warum?“ war der Triebfeder in der griechischen Mathematik. In einer vergleichsweise engen Zeit sind größere Fortschritte der griechischen Mathematik zu erkennen, als die der Ägypter und Mesopotamier. Dies ist gleichzeitig ein Beleg für die intensive Beschäftigung mit der Mathematik der Griechen. Der Suche nach Begründungen folgten neue Entdeckungen. Angewandte Mathematik dagegen findet sich viel seltener, da sie mit körperlicher Arbeit assoziiert wurde, die wenig Ansehen genoss.⁵⁶

Allerdings sind praktisch keine Originalwerke erhalten. Erhalten sind später entstandene Abschriften und Übersetzungen, die oft ins Arabische übersetzt wurden. Über den Inhalt der verloren gegangenen Werke weiß man einiges aus späteren Kommentaren oder weil spätere

⁵⁴ ebd., S. 213

⁵⁵ vgl. Struik (1963), S. 24

⁵⁶ vgl. Gerwig (2015), S. 14

Autoren sie zitiert haben. Für die Forschung wurde die deduktive Methode entwickelt, die man im Wesentlichen heute noch benutzt. Die Regeln und Vorschriften der Ägypter und Babylonier wurden systematisiert und zu Theoriegebilden zusammengefasst, die weiter ausgebaut wurden.⁵⁷

Im Gegensatz zum Orient hatte Griechenland eine bessere wirtschaftliche Lage, da es vom Wandel von der Bronzezeit in die Eisenzeit profitierte, welche von Griechenland und einigen anderen Kulturen bestimmt war.⁵⁸ Durch diese Umgestaltung erlebten die Griechen sowohl in der Wirtschaft als auch geistig eine Revolution. Es entstand das unabhängige, selbstbewusste Menschenmodell, das den Diktator, sowie die religiösen und philosophischen Denkweisen nicht als gegeben annahm.⁵⁹

In der griechisch-hellenistischen Mathematik wurden meist die folgenden drei Perioden unterschieden, die sich nach Methoden, Inhalt und Umfang unterscheiden.

1. Ionische Periode (ca. 600 – 450 v. Chr.)

„Nach dem Vordringen der Dorer nach Griechenland (Dorische Wanderung) zog sich die Urbevölkerung in der ionischen Wanderung zurück und besiedelte die griechischen Inseln und das kleinasiatische Küstenland, wo sich Stadtstaaten bildeten.“⁶⁰ Das berühmteste und reichste dieser Siedlungsgebiete war Milet. Die Mathematik galt als wichtigster Teil der Naturphilosophie der Ionen, denn sie versuchten die Welt vernünftig ohne die Götter und der Mythologie zu erklären. Dabei gingen sie von einfachen geometrischen Gegebenheiten und Relationen zwischen den Zahlen aus. Aus dieser Periode sind keine Texte erhalten, man kann aber aus den Werken späterer Autoren Informationen entnehmen.⁶¹

Unter anderem sind Thales von Milet, Pythagoras und Hippokrates von Chios die bekanntesten Mathematiker der ionischen Periode. Diese waren gleichzeitig Vertreter der materialistischen Naturphilosophie. Thales beispielsweise, welcher zu den sieben Weisen der Antike gehört, sah im Wasser den Urgrund aller Dinge. Er war gleichzeitig derjenige, der die griechische Mathematik von der babylonischen und ägyptischen Mathematik spaltete. Die ersten Beweise

⁵⁷ vgl. Gerwig (2015), S. 13f

⁵⁸ vgl. Struik (1963), S. 31

⁵⁹ vgl. ebd., S. 33

⁶⁰ Baxa, Christoph (2017): Griechisch-hellenistische Mathematik [online] S. 2
http://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1718_Geschichte_Slides_04.pdf [02.02.2018].

⁶¹ vgl. Gerwig (2015), S. 14f

stammen von Thales, wenn auch diese nicht streng der euklidischen Axiomatik folgen. Durch Thales erfolgte erstmals eine logische Ordnung des mathematischen Materials.⁶²

Pythagoras gründete die Schule der Pythagoräer, in deren Weltbild Mathematik eine zentrale Rolle innehatte. Die Pythagoräer waren der Ansicht, dass sich jede Zahl als ein Bruch darstellen lässt. Die Rationalität der Zahlen, die sich in der Musiktheorie bestätigen ließ und unter der Bezeichnung „arithmetica universalis“ bekannt ist, wurde zur Weltansicht der Pythagoräer. Doch das Ende dieser Vorstellung brachte der Pythagoräer Hippasos von Metapont. Ihm wird die Entdeckung der irrationalen Zahlen zugeschrieben. Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos hatte in der athenischen Periode einige Konsequenzen in der Mathematik.⁶³

Etwa zur selben Zeit wurden in der Schule der Eleaten die Anfänge der Logik entwickelt.⁶⁴ Zenon von Elea hat sich mit seinem berühmtesten Paradoxon, „Der Wettlauf zwischen Achilles und einer Schildkröte“ großen Ruhm bis heute erlangt.

2. Athenische oder attische Periode (450 – 300 v.Chr.)

Dem Stadtstaat Athen gelang es in der attischen Periode die vorherrschende Rolle unter den griechischen Stadtstaaten zu übernehmen und zum Zentrum der Wissenschaften zu werden. Sie erlebte somit durch den Seehandel und durch die militärische Vormachtstellung ihre Hochblüte. Athen wurde zum Ort des Handels, der Wissenschaften und der Mathematik.⁶⁵

Die Mathematik selbst machte eine Neuorientierung durch. Die Einflüsse kamen hierbei von der Philosophenschule Platons, der Akademie. Als methodischen Ansatz in der Mathematik entwickelte Platon das axiomatisch-deduktive System, das die Grundlagen von Euklids Axiomatik bildete. Die Idee der rein deduktiv herleitbaren Wissenschaft von Platon wird heute noch in der Entwicklung der Mathematik eingesetzt.⁶⁶

Wie bereits erwähnt, war das zentrale mathematische Problem der athenischen Phase der Umgang mit den vom Pythagoräer Hippasos von Metapont, entdeckten irrationalen Zahlen. Dieser hatte nämlich herausgefunden, dass die Diagonale im Einheitsquadrat nicht als

⁶² vgl. ebd., S. 15

⁶³ vgl. Wußing (2008), S. 177

⁶⁴ vgl. Struik (1963), S. 33

⁶⁵ vgl. Gerwig (2015), S. 17

⁶⁶ vgl. ebd., S. 17

ganzzahliges Verhältnis der beiden Strecken angegeben werden kann. Da es den Griechen an jeglicher Begrifflichkeit in diesem Zusammenhang fehlte, gingen sie diesem Problem aus dem Weg, stattdessen wendeten sie sich der „geometrischen Algebra“ zu.⁶⁷

Neben Platon ist Eudoxon ein weiterer bedeutender Mathematiker dieser Zeit. Er erschuf die Proportionenlehre, welche sowohl rationale als auch irrationale Größenverhältnisse einschloss. Eudoxon ist aber nicht auf den Begriff der irrationalen Zahlen gestoßen. Dennoch führte er das Exhaustionsverfahren ein, bei dem eine krummlinig begrenzte Fläche durch Polygone beliebig genau approximiert werden kann, um den Flächeninhalt so genau wie möglich zu bestimmen.⁶⁸

Die attische Periode endete mit dem Peloponnesischen Krieg (431- 404 v.Chr.), bei dem Athen eine Niederlage gegen Sparte erlitt. In Folge dessen wurde Athen von Alexander dem Großen erobert und es begann die hellenistische Periode in Griechenland.

3. Hellenistische oder alexandrinische Periode (ca. 300 v. Chr. – 500 n.Chr.)

Alexander der Große konnte in kurzer Zeit neben Griechenland, Ägypten und Mesopotamien zu einem riesigen Reich zusammenfügen. Da Alexander wegen seines Lehrers Aristoteles eine Vorliebe für die griechische Kultur innehatte, wurde diese zu einem Trend in seinem Reich. So entstand die hellenistische Kultur und Wissenschaft durch das Verschmelzen der griechischen Kultur mit den östlichen Kulturen. Das Zentrum der Wissenschaft und Kultur dieser Periode war Alexandria, welches 332./331 v. Chr. in Ägypten gegründet wurde. Alexandria war eine nach dem „hippodamischen Stadtplan“ errichtete Stadt, die in kurzer Zeit zu einer Metropole mit rund 500.000 Einwohnern wurde.⁶⁹

Nach dem Zerfall des Alexanderreiches gründeten die Ptolemäer das Museion (Haus der Musen), das erste „Forschungsinstitut“. Ein wesentlicher Teil davon war die Bibliothek mit ca. 400.000 Papyrusrollen, die systematisch archiviert und kopiert wurden. Das Museion und die Papyrusrollen wurden während den Kriegen gegen Cäsar zerstört. Das „erste Forschungsinstitut“ hatte einen großen Einfluss auf die griechische Mathematik, sodass sie den Höhepunkt ihrer Entwicklung erzielte. Leider sind uns aus dieser Zeit nur Werke enthalten, die großteils Abschriften oder Übersetzungen sind. Nachdem das Christentum die Staatsreligion

⁶⁷ vgl. Gerwig (2015), S. 17

⁶⁸ vgl. Kurt von Fritz (1971), S.57

⁶⁹ vgl. Gerwig (2015), S. 17

des Römischen Reichs wurde, wurden die übergebliebenen Werke, die nicht mit den Lehren des Christentums vereinbar waren, zerstört und die Lehrstätten geschlossen, deren Lehrende auch verfolgt wurden.⁷⁰

Die bekanntesten Mathematiker dieser Periode sind Archimedes und Euklid, nach dem der euklidische Algorithmus benannt ist und von dem die „Elemente“ erhalten sind. Weiters sind Eratosthenes, der durch das Sieb des Eratosthenes bekannt geworden ist, Appolonius von Perge, der sich mit den Kegelschnitten beschäftigte und erstmals die Begriffe Ellipse, Parabel und Hyperbel verwendete, bekannt. Zusätzlich haben Heron von Alexandria, von dem die Formel zur Flächeninhaltsberechnung $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit den Seitenlängen a, b, c und $s := \frac{1}{2}(a+b+c)$ stammt und Diophant von Alexandria, mit seinen Gleichungen, eine Berühmtheit bis heute erlangt. Die erste Mathematikerin der Geschichte, Hypatia, die, wie viele Gelehrte dieser Zeit, hingerichtet wurde, darf hier nicht unerwähnt bleiben.⁷¹

1.4.4.2 Griechische Zahlenschrift

Die Griechen verwendeten hauptsächlich zwei verschiedene Zahlenschriften. Zum einen notierten sie die Zahlen mithilfe vom herodianischen oder attischen Zahlensystem, welches als das ältere System gilt. Zum anderen verwendeten sie das jüngere milesische System, welches im byzantinischen Reich erst im 14. Jahrhundert durch das arabisch-indische Zahlensystem verdrängt wurde. Diese Systeme fanden in unterschiedlichen Bereichen eine Anwendung. Das attische System wurde im Handel eingesetzt. Beispielsweise wurden Geldbeträge und Warenangaben, sowie die Spalten des Abakus durch das attische Zahlensystem wiedergegeben.⁷² Das attische Zahlensystem wurde auch für Geldangaben auf den Münzen gebraucht.⁷³ Zum Rechnen eignete sich dieses Zahlensystem kaum, gerechnet wurde nämlich auf dem Rechenbrett.⁷⁴

Das attische Zahlensystem war, wie das milesische, ein Dezimalsystem. Für jede Zehnerpotenz verwendeten die Griechen den Anfangsbuchstaben des jeweiligen Zahlworts der Zehnerpotenz, wobei bei Fünf eine Zwischenstufe eingelegt wurde, die durch Multiplizieren mit der jeweiligen

⁷⁰ vgl. Gerwig (2015), S. 17f

⁷¹ vgl. ebd., S. 18

⁷² vgl. Wußing (2008), S. 151

⁷³ vgl. Menninger (1958), S. 74

⁷⁴ vgl. ebd., S. 76

Zehnerpotenz gebildet wurde. Die Eins war ein senkrechter Strich, der Zahl Zehn entsprach Δ (=Deka), der Zahl 100 H (=Hekaton) und so weiter. Das Symbol Γ wurde mit anderen Symbolen verbunden, um ihr Fünffaches darzustellen.⁷⁵

Aus dem 3. Jahrhundert v.Chr. ist eine griechische Papyrusrolle enthalten, die das milesische Zahlensystem wiedergibt, welches sich im Wesentlichen nicht vom hebräischen Zahlbuchstabensystem unterscheidet. Es wird vermutet, dass diese in den Schulen als Handbuch eingesetzt wurde, um den Kindern das Lesen und das Rechnen beizubringen. Diese soll, sowohl das Lesen als auch das Zählen gleichzeitig beibringen, da den griechischen Buchstaben Zahlenwerte zugeordnet wurden.⁷⁶

EINER				ZEHNER				HUNDERTER			
A	α	Alpha	1	Ι	ι	Iota	10	Ρ	ρ	Rho	100
B	β	Beta	2	Κ	κ	Kappa	20	Σ	σ	Sigma	200
Γ	γ	Gamma	3	Λ	λ	Lambda	30	Τ	τ	Tau	300
Δ	δ	Delta	4	Μ	μ	My	40	Υ	υ	Ypsilon	400
Ε	ε	Epsilon	5	Ν	ν	Ny	50	Φ	φ	Phi	500
Ϛ	Ϛ	Digamma	6	Ξ	ξ	Xi	60	Χ	χ	Chi	600
Ζ	ζ	Zeta	7	Ο	ο	Omikron	70	Ψ	ψ	Psi	700
Η	η	Eta	8	Π	π	Pi	80	Ω	ω	Omega	800
Θ	θ	Theta	9	Ϟ	ϙ	Koppa	90	Ϸ	ϸ	San	900

Abbildung 10: „Das alphabetische Ziffersystem der Griechen, das den hebräischen Zahlbuchstaben vollkommen entspricht.“⁷⁷ Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 289.

Statt ein Stellenwertsystem mit unterschiedlichen Zeichen zu verwenden, benutzten die Griechen für die Zahlen Eins bis Neun eine Reihe von Buchstaben, für die Zehner 10 - 90 eine andere Reihe an Buchstaben und für die Hunderter 100 - 900 weitere andere Buchstaben. Das macht in Summe 27 Buchstaben aus. Da das griechische Alphabet aber nur 24 Buchstaben hatte, wurde es durch die Buchstaben Digamma (semitisch Waw), Koppa (Kof) und San (Zade) ergänzt. Digamma hatte den Wert sechs, Koppa 90 und Sampi 900.⁷⁸

Um Zahlen, die zwischen zwei Einheiten beziehungsweise zwei Buchstaben liegen, anzuschreiben, wurde addiert. Wollte man zum Beispiel 13 darstellen, so wurde das Zeichen für 10 und 3 (wie sie aus der Tabelle zu entnehmen sind) nebeneinander geschrieben und ein Strich darüber gezeichnet, um die Zahl von dem Text zu unterscheiden, d.h. $\overline{\text{ιγ}}$. Um die Gefahr

⁷⁵ vgl. Walz (2017), S. 338

⁷⁶ vgl. Ifrah (1986), S. 288f

⁷⁷ Ifrah (1986), S. 289

⁷⁸ vgl. ebd. (1986), S. 289

der Verwechslung zu umgehen, wurde entweder die Zahl überstrichen oder sie wurde mit einem Strich am Ende der Zahl gekennzeichnet.⁷⁹

Die Zahlen zwischen 1000 und 9000 wurden mit den Buchstaben für die Einer dargestellt, wobei zum Unterscheiden links oben ein Apostroph ähnlicher Akzent gesetzt wurde. Für Zehntausender schrieb man einfach die Anzahl über M-Myriade.⁸⁰ Eine weitere Variante dafür war einen Punkt statt dem Buchstaben M für Myriaden zu setzen. Die dritte Option war zwei Punkte über den Myriaden zu machen.⁸¹ Mathematiker wie Aristarchos von Samos, Pappus von Alexandria, Archimedes etc. entwickelten ihre individuellen Systeme für weitere größere Zahlen.⁸²

$\overset{\alpha}{M}$	$\overset{\beta}{M}$	$\overset{\gamma}{M}$	$\overset{\delta}{M}$	$\overset{\epsilon}{M}$	...	$\overset{1\alpha}{M}$	$\overset{1\beta}{M}$	...	$\overset{\lambda\zeta\theta}{M}$	...
10000	20000	30000	40000	50000		110000	120600		6 690000	

Abbildung 11: Vielfache von Myriade – Zehntausend. Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus, S. 291.

Zum Rechnen war das milesische System sicherlich besser geeignet, doch in der Astronomie bevorzugten die Griechen das babylonische Sexagesimalsystem für ihre Berechnungen.⁸³

1.4.4.3 Die besondere Bedeutung der Zahlen für die Griechen - Eine Erklärung für die Ablehnung der Zahl Null

Der berühmteste Redner, Philosoph und Mathematiker der Antike ist wohl Pythagoras von Samos. Er ist gleichzeitig auch der Begründer der Bruderschaft Pythagoreer. Nach Pythagoras Lehre und den Lehren anderer Philosophen der Antike gibt es keine Leere. Hinsichtlich Pythagoras' Theorie gibt es eine mystische Verbindung zwischen den Zahlen und dem Kosmos.⁸⁴ Es kann leicht folgender charakteristischer Grundsatz für die Philosophie der Pythagoreer festgestellt werden: „Alles ist Zahl.“⁸⁵

Man unterschied bei den Pythagoreern zwischen den „acusmatici“ (=Akusmatiker) und den „mathematici“ (=Wissenschaften). Akusmatiker waren jene, die sich nicht aktiv mit der

⁷⁹ vgl. Ifrah (1986), S. 290

⁸⁰ vgl. ebd., S. 289

⁸¹ vgl. Menninger (1958), S. 77

⁸² vgl. Ifrah (1986), S. 292f

⁸³ vgl. Seife (2000), S. 16ff

⁸⁴ vgl. ebd., S. 33- 36

⁸⁵ Seife (2000), S. 35

Wissenschaft beschäftigten, sondern nur die Ergebnisse der Wissenschaften durch das Hören mitbekamen. Unter „mathematici“ verstand man anfangs jene Personen, die sich allgemein mit Wissenschaften beschäftigten, später aber jene, die sich mit Wissenschaften beschäftigten, die im Zusammenhang mit der Mathematik stehen, wie Astronomie, Mechanik, Optik und Musiktheorie.⁸⁶

Die Pythagoreer waren zutiefst davon überzeugt, dass der Kosmos aus einer Harmonie von Zahlenverhältnissen hervorgeht. Pythagoras entdeckte, dass sich die Höhe von Tönen auf den Saiten eines Instruments durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen bestimmen lässt. Je nach Zahlenverhältnis liegt also eine Oktave, Quinte, Quarte, etc. vor. So stellte Pythagoras fest, dass auch die Musik der Harmonie der Zahlenverhältnisse unterworfen ist.⁸⁷

Gleichwohl soll das Orakel von Delphi den Pythagoreern verkündet haben, dass das Weiseste die Zahl ist. Daher sind die Zahlen für Pythagoreer nicht nur ein Mittel der Geometrie, sondern viel mehr, sie sind eine Weltbestimmung, eine Wissenschaft und eine Philosophie zugleich.⁸⁸

Die Proportionentheorie bildete für Pythagoras und seine Anhänger die Schönheit in der Musik, in der Natur und natürlich auch in der Mathematik. Daher wurde die Idee der Proportion auf das Verständnis der Natur übertragen. Alles in der Natur habe eine Proportion. Platon prägte ein geozentrisches Weltbild, bei dem die Sonne, der Mond, die Planeten und alle Sterne auf ihren eigenen Sphären die Erde umkreisen. Die Sphären stehen nach Pythagoras in einer gewissen Proportion zueinander und erzeugen durch ihre Bewegungen harmonische Klänge, die er als „Harmonie der Sphären“ bezeichnet.⁸⁹ Die Ansicht der Pythagoreer, dass die Zahlen den Kosmos regieren und so harmonische Töne erzeugen, war in Europa bis zu Beginn der Neuzeit eine der zentralsten Vorstellungen.⁹⁰

An der Spitze der Verhältnisse, die die Pythagoreer in zehn Kategorien einteilten, stand der Goldene Schnitt oder die stetige Teilung. Eine Strecke s wird in zwei Teilstrecken a und b geteilt, wobei a die längere dieser Teilstrecken ist. Wenn die längere Strecke a zur Strecke b im gleichen Verhältnis steht, wie die Gesamtstrecke s ($= a + b$) zur längeren Teilstrecke a , so wird dieses Verhältnis als „Goldener Schnitt“ bezeichnet. Das Pentagramm, das als Wahrzeichen der

⁸⁶ vgl. Masek (2012), S. 49

⁸⁷ vgl. Liesegang (1922), S. 60 und vgl. Masek (2012), S. 50

⁸⁸ vgl. Masek (2012), S. 50f

⁸⁹ vgl. Seife (2000), S. 38ff

⁹⁰ vgl. ebd., S. 42

Brüderschaft galt, enthält mehrere Geraden, die nach dem Goldenen Schnitt unterteilt sind. In der Natur kann man öfters auf den Goldenen Schnitt stoßen. Beispielsweise begegnet man ihm bei zwei aufeinander folgenden Kammern eines Nautilus oder bei der Anatomie des Menschen. Da dieses goldene Verhältnis ästhetisch wirkt, wird es in der Architektur immer noch eingesetzt. Der Tempel Parthenon soll ebenfalls nach diesem Verhältnis errichtet worden sein.⁹¹

Abgesehen von der Vorstellung der „Harmonie der Sphären“ waren die Zahlen selbst heilig und fanden ihre harmonische Stellung im Kosmos. Die Zahlen Eins bis Vier standen der Reihe nach für räumliche Einteilungen Punkt, Linie, Fläche und Körper. Die Zahl Fünf stand für Qualität, die Sechs für Beseelung, Sieben für die Vernunft und die Acht stand für die Liebe. Die Zahl Zehn galt als die vollkommenste Zahl, weil sie die Summe der ersten vier Zahlen bildet, d.h. $1+2+3+4=10$.⁹²

Die Zahl Null gab es als Ziffer im griechischen Zahlensystem nicht. Doch über die Astronomie, die die Ägypter teilweise von Babyloniern übernahmen und weiterentwickelten, gelangte auch die Zahl Null nach Griechenland. Für Astronomie bedienten sich die Griechen mit dem Sexagesimalsystem der Babylonier. Im babylonischen System, wie später auch in der griechischen Astronomie, wurde die Null fast ausschließlich als Platzhalter eingesetzt. Als Symbol für die Null benutzten sie das „o“ für omikron. Dieses ähnelt wahrscheinlich nur zufällig unserer Null. Das „o“ könnte genauso gut auch für „ouden“ stehen, da es etwa „nichts“ bedeutet. In astronomischen Tabellen aus der Antike begegnen wir dem Zeichen für die Null einige Male. Die Griechen neigten dazu, die astronomischen Ergebnisse in ihrem Zahlensystem zu verwandeln, so konnten sie nämlich von der Null abweichen.⁹³

Der Grund für die Ablehnung der Null durch die Griechen lag nicht nur an ihrem Mangel an Wissen, sondern an der Philosophie, die sie so stark mit der Mathematik verbunden hatten. Die Akzeptanz der Null würde ihre Weltanschauung endgültig ruinieren, da sie damit die Leere und die Unendlichkeit annehmen mussten.⁹⁴

Das Paradoxon von Zenon von Elea konnte nicht gelöst werden, weil sie das Unendliche nicht akzeptierten. Diesem Paradoxon entsprechend könne Achilles, der berühmteste Läufer von

⁹¹ vgl. Seife (2000), S. 40

⁹² vgl. Liesegang (1922), S. 62

⁹³ vgl. Seife (2000), S. 47f

⁹⁴ vgl. ebd., S. 48

Griechenland, eine Schildkröte nie einholen, die mit wenig Vorsprung das Rennen beginnt, da er um diese zu überholen, erst die Stelle erreichen muss, an der sie steht. In dem Moment, in dem er die Stelle der Schildkröte erreicht, befindet sie sich schon an einer anderen Stelle, sodass Achill sie nie überholen kann.⁹⁵ Obwohl alle, die sich mit diesem Paradoxon beschäftigten, wussten, dass das nicht stimmen kann, konnten sie keinen Fehler in der Beweisführung von Zenon finden. Auch Zenon selbst konnte keine konkrete Lösung dafür bringen, doch das war ihm nicht wichtig, da es mit der Philosophie der Eleaten, deren Mitglied er war, im Einklang stand. Diese glaubten nämlich an einen unveränderlichen und unbeweglichen Kosmos und Zenon ging bei der Beschreibung dieses Paradoxon von dieser Grundvorstellung aus.⁹⁶

Die Auflösung des Paradoxons lautet:

„Die dem „Achilleus“ zugrunde liegende Paradoxie besteht darin, dass es nicht möglich sei, *in begrenzter Zeit das Unendliche bis zum Ziel zu durchlaufen oder jedes Einzelne des unendlichen Vielen zu berühren*. Der Läufer kommt demnach nie ans Ziel, da es für ihn unmöglich ist, in endlicher Zeit unendlich viele Teilstrecken zu durchlaufen.“⁹⁷

Um also dieses Paradoxon zu entschlüsseln, mussten die Griechen die Unendlichkeit zulassen. Der Unendlichkeit konnten sie sich nur mit der Null annähern. Am Beispiel des Achilles wird der Abstand zwischen der Schildkröte und dem Läufer immer kleiner als der vorhergehende, das heißt der Abstand nähert sich immer mehr der Null an. Würde die Schildkröte mit einem Vorsprung von 1 (m) beginnen, dann könnte man den Abstand der beiden folgendermaßen anschreiben: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots \frac{1}{2^n}; \dots$ ⁹⁸

Heute, nach mehr als 2000 Jahren, wissen wir, dass sich diese Folge gegen den Grenzwert 2 nähert und somit Achilles die Schildkröte nach 2 (m) eingeholt hätte. Aus einer unendlichen Anzahl von Summanden können wir somit eine endliche Summe angeben. Diese Überlegung konnten die Griechen nicht anstellen, da sie die Zahl Null nicht akzeptierten.⁹⁹

Für die Griechen gab es keine Zahlen, die unendlich größer oder kleiner wurden und dies verhinderte wahrscheinlich die Entdeckung der Analysis mit den Grenzwertberechnungen.¹⁰⁰ Aristoteles, der bis zum Mittelalter wirkte, umging das Paradoxon, indem er der unendlichen

⁹⁵ vgl. Struik (1963), S. 40

⁹⁶ vgl. Seife (2000), S. 54

⁹⁷ vgl. Masek (2012), S. 66

⁹⁸ vgl. Seife (2000), S. 52f

⁹⁹ vgl. ebd., S. 53

¹⁰⁰ vgl. ebd., S. 54

Teilung zwei Bedeutungen zukommen ließ, und zwar die physikalische und die potenzielle. Eine Strecke lässt sich demnach zwar potenziell aber nicht physikalisch, also nicht in der Wirklichkeit, in unendlich viele Teilstrecken teilen. Somit stellt das Paradoxon für Aristoteles eine potenzielle Teilung dar, sodass Aristoteles die Unendlichkeit, die Lehre, sowie die Null ablehnte. Da er die Leere und die Unendlichkeit nicht akzeptierte, konnte er das, was vor der Schöpfung war, mit der Existenz des Gottes, des Ersten Bewegers, begründen.

Aufgrund der aristotelischen Wirkung auf die Philosophie des Westens und somit auf das Christentum, wurden diejenigen, die die aristotelischen Theorien ablehnten, als Atheisten eingestuft und verfolgt. Aristoteles' Theorien stellten lange Zeit eine Barriere für die Entstehung der Null und somit auch der Unendlichkeit und der Infinitesimalrechnung dar.¹⁰¹

Es mag für uns heutzutage unvorstellbar sein, dass eine Philosophie die Entwicklung der Mathematik so sehr hemmen kann, doch sie tat es in der griechischen Antike. Nicht die Intelligenz oder Unwissenheit der Menschen, sondern deren Weltanschauung, verhinderte die Einführung der Null im Zahlensystem, ein unerwarteter Grund für die Menschen im 21. Jahrhundert.

1.4.5 Römisches Zahlensystem

Die römischen Zahlen scheinen jedermann bekannt zu sein, doch ihr Ursprung ist den wenigsten geläufig. Die folgende Form der römischen Zahlen tritt erst im 1. Jahrhundert v. Chr. auf:

„I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000 “ ¹⁰²

Bereits im 19. Jahrhundert erkannten Mommsen und Hübner, dass 50, 100, 500 und 1000 ursprünglich nicht mit den Buchstaben L, C, D und M dargestellt wurden. Für 1000 verwendeten die Römer in der Kaiserzeit verschiedene Schreibweisen des Buchstaben Φ . Gleichfalls wurden drei unterschiedliche Symbole für D verwendet, die eine Halbierung von 1000 darstellen sollten. Um die Zahl 50 darzustellen, verwendeten die Römer die Zeichen „ $\downarrow$

¹⁰¹ vgl. Seife (2000), S. 56f

¹⁰² Ifrah (1986), S. 163

oder Ψ “, wobei diese Zeichen in den Texten zur Zeit des Augustus (27 v. Chr. – 14. n. Chr.) noch vorkommen.¹⁰³

Sicher ist, dass die ältesten römischen Ziffern I, V, und X sind. In der Forschung wird von zwei Theorien für den Ursprung der römischen Zahlen ausgegangen. Zum einen wird vermutet, dass die römischen Zahlen von etruskischen Zahlen stammen, welche selbst von hellenistischen Zahlen abstammen.¹⁰⁴ Zum anderen wird angenommen, dass die Hirten diese Zahlschrift durch Einritzen der Anzahl an Tieren in Kerbholz verbreitet haben.¹⁰⁵

Die römischen Zahlen werden von links nach rechts gelesen und durch Addieren beziehungsweise Subtrahieren der Ziffern gebildet. Hierbei sind aber einige Regeln zu beachten:

- „1. Stehen gleiche Zahlenzeichen nebeneinander, so werden sie addiert. [...]
2. Stehen kleinere Zahlenzeichen rechts neben einem größeren Zahlenzeichen, so werden sie addiert. [...]
3. Stehen kleinere Zahlenzeichen links neben einem größeren Zahlenzeichen, so werden sie subtrahiert.“¹⁰⁶

¹⁰³ vgl. Ifrah (1986), S. 163f

¹⁰⁴ vgl. Ifrah (1986), S. 166

¹⁰⁵ vgl. ebd., S. 176f

¹⁰⁶ Brückner (2003), S. 28

2 Unser dezimales Stellenwertsystem mit der Null

Die Zahl Null kam bis zu den Griechen fast ausschließlich als Platzhalter vor. Durch die Expansion des Reiches von Alexander dem Großen gelangte das babylonische Sexagesimalsystem und somit auch die Null als Platzhalter in der Astronomie nach Indien. Die aristotelische Philosophie, die die Leere und die Unendlichkeit ausschloss, konnte in Indien nicht Fuß fassen. So stand nichts mehr im Weg, um die Null als eine Zahl zu akzeptieren. Die Geschichte der Null als eine Zahl beginnt in Indien und nimmt von dort aus den Weg in alle Himmelsrichtungen.

2.1 Die Geburt der Null in Indien

Stellenwertsystemen begegneten wir in vielen Hochkulturen, auch Dezimalsysteme sind uns bereits öfters über den Weg gekommen. Doch zum ersten Mal begegnet man einem Stellenwertsystem zur Basis 10 in Indien im Jahre 595 n. Chr. auf einer Tafel, auf der die Jahreszahl 346 im dezimalen Stellenwertsystem angegeben ist.¹⁰⁷

Das Positionssystem „ist im Verlauf der Geschichte nur viermal entwickelt worden. Zum ersten Mal tauchte es bei den babylonischen Wissenschaftlern etwa gegen Beginn des zweiten Jahrtausends v. Chr. auf. Kurz vor Beginn unserer Zeitrechnung erschien es bei den Chinesen und danach – unabhängig von jedem äußeren Einfluss – bei den Astronomen der Maya in der klassischen Epoche (3. – 9. Jh. n. Chr.). Aber diese drei Positionssysteme waren, verglichen mit dem indischen, dem Vorläufer unseres Ziffernsystems, noch ziemlich unvollkommen“.¹⁰⁸

Das indische Zahlensystem war den anderen Systemen überlegen, da seine Ziffern „von unmittelbarer sinnlicher Wahrnehmung abgelöst waren“.¹⁰⁹ Das Besondere an dem indischen Stellenwertsystem zur Basis 10 ist unbestreitbar die Entdeckung der Null. Denn sie erlöste die Menschen vom Rechnen mit dem Rechenbrett und öffnete die Wege zur Entwicklung der Wissenschaft, Mathematik und Technik.¹¹⁰

„Die Bedeutsamkeit dieser Entdeckung zeigt sich auch darin, daß sie im Grunde in der Geschichte nur dreimal gelang: einmal bei den babylonischen Gelehrten, ein weiteres Mal

¹⁰⁷ vgl. Struik (1976), S. 12f

¹⁰⁸ Ifrah (1986), S. 480f

¹⁰⁹ ebd., S. 481

¹¹⁰ vgl. ebd., S. 481

bei den Priestern und Astronomen der Maya und zuletzt bei den indischen Mathematikern und Astronomen.“¹¹¹

Obwohl die Null bei den Mayas sowohl am Ende als auch in der Mitte einer Zahl zum Darstellen einer Zeiteinheit verwendet wurde, diente sie nicht zum Rechnen, weil deren System sehr unregelmäßig war.¹¹²

Die Mesopotamier hingegen hatten keine Ahnung von der Null, aber versuchten die Abwesenheit der Null in ihrem System durch Einführen von Leerstellen für fehlende Einheiten zu überwinden. Diese führten wiederum zu Verwirrungen oder wurden gar vergessen, da zwei aufeinander folgende Leerstellen schwer darstellbar waren. Die Babylonier waren am nächsten der Null, doch deren Null stand nicht für das „Nichts“ oder die „Nullmenge“, sie zeigte lediglich das Fehlen einer Stelle.¹¹³

Die Leistung der Inder besteht nun darin, die Null tatsächlich für das „Nichts“ zu verwenden. Zu dieser genialen Erfindung gelangten sie aus Notwendigkeit. Sie hatten nämlich das Bedürfnis große Zahlen darzustellen und das dezimale Positionssystem mit der Null ist die Variante, die sich am besten dazu eignet. Der Westen übernahm das Zahlensystem der Inder ebenfalls aufgrund des Bedürfnisses große Zahlen darzustellen.¹¹⁴

Die älteste geschriebene Null in Zifferndarstellung und in Worten befindet sich auf der Wand eines Tempels in der Nähe von Gwalior und stammt aus dem 9. Jahrhundert n. Chr. Auf dieser Inschrift befindet sich die Jahreszahl 933, wobei diese in unserer Zeitrechnung dem Jahr 870 entspricht, und eine Liste von Schenkungen. Darunter kommt die Zahl „270“ vor, in der die Null als ein kleiner Kreis dargestellt ist.¹¹⁵

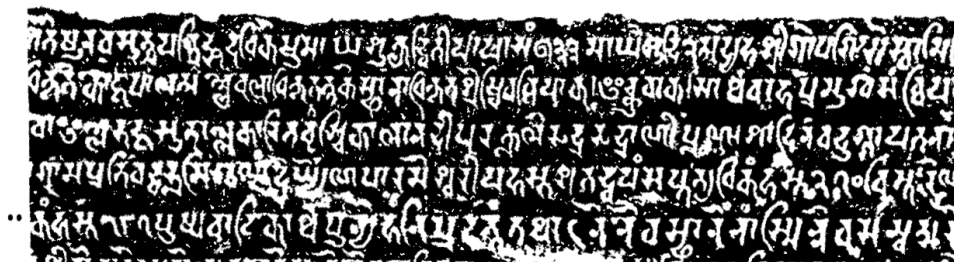


Abbildung 12: Inschrift von Gwalior mit der ältesten geschriebenen Null in der Zahl 270 aus dem Jahr 870 n. Chr. Menninger, Karl (1958). *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl* (Bd. 2). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, S. 214.

¹¹¹ Ifrah (1986), S. 481

¹¹² vgl. ebd., S. 481f

¹¹³ vgl. ebd., S. 482

¹¹⁴ vgl. ebd., S. 482

¹¹⁵ vgl. Menninger (1958), S. 214

2.2 Von der Brahmi-Schrift zur Stellenschrift mit der Null

Wie in den vorhergehenden Kapiteln beschrieben, gab es in Indien zwei Zahlenschriften, die Kharosthi-Schrift und die Brahmi-Schrift. Da sich unser dezimales Stellenwertsystem aus der Brahmi-Schrift entwickelt hat, bedarf es einer ausführlicheren Beschreibung.¹¹⁶

Die Brahmi-Schrift ist der Urahn von etwa 200 verschiedenen indischen Schriften und unter anderem auch von Deva-Nagari, in welcher das Sanskrit verfasst ist. Die Informationen über diese linksläufige Schrift haben wir von den erhaltenen Kupferplatten, die an den Wänden von Tempeln hingen. Aus den Ziffern der Brahmi-Schrift ist im Laufe der Zeit das dezimale Positionssystem mit der Null entstanden. Daher kann in der indischen Zahlenschrift zwischen Kharosthi-, Brahmi- und Stellenwertschrift mit der Null unterschieden werden.¹¹⁷

Die ältesten Zeugnisse der Brahmi-Zahlenschrift stammen aus dem 6. bis 10. Jahrhundert n. Chr. Es handelt sich dabei um Kupferplatten, auf denen Texte in Sanskrit mit altindischen Buchstaben eingeschlagen sind. Inhaltlich handelt es sich bei diesen Texten um Listen von Schenkungen, die die reichen Brahmanen bei religiösen Feiern gemacht haben. Da diese unter anderen Zeitangaben und Zahlen der verschenkten Waren enthalten, können aus ihnen Rückschlüsse auf die Zahlenschrift geschlossen werden. Als das älteste Dokument der Stellenwertschrift gilt die Schenkungsurkunde von Dadda III. aus dem Jahr 595 n. Chr. Diese Kupferplatte befindet sich in Sankheda (Nordwestindien).¹¹⁸

Die Brahmi-Zahlenschrift folgte nicht dem Gesetz des Bündelns und der Reihung. Die Einer erhielten alle ein eigenes Zeichen, wie sie etwa auch in der Sprache unterschieden werden. Das war ein großer Fortschritt, doch durch die Einführung der Eigenzeichen für die Zehner, wurde dieser Fortschritt in der Frühzeit etwas gehemmt. Für die Hunderter und Tausender wurde jedoch die Stellenschrift eingeführt, wodurch die Grenze von 1000 mit 70 000 deutlich überstiegen wurde. Die Verzifferung von mehreren Stellen hatte eine Unübersichtlichkeit zur Folge und erschwerte gleichzeitig das Rechnen. Eine umständliche Verzifferung ist auch bei der ägyptischen Zahlenschrift zu finden.¹¹⁹

¹¹⁶ vgl. Menninger (1958), S. 208

¹¹⁷ vgl. ebd., S. 208f

¹¹⁸ vgl. Ifrah (1986), S. 482

¹¹⁹ vgl. Menninger (1958), S. 208f

Einer	Ziffern	— 1	= 2	≡ 3	𑀓 4	𑀔 5	𑀕 6	𑀖 7	𑀗 8	𑀘 9
Zehner	Verzifferung	𑀭 10	𑀮 20	𑀯 30	𑀰 40	𑀱 50	𑀲 60	𑀳 70	𑀴 80	𑀵 90
Hunderter und Tausender	Stellenschrift	𑀭𑀭 100	𑀭𑀮 2H	𑀭𑀯 3H	𑀭𑀰 4H	𑀭𑀱 5H	𑀭𑀲 1000	𑀭𑀳 4T	𑀭𑀴 70T	

Abbildung 13: Brahmi-Zahlschrift. Menninger, Karl (1958). *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl* (Bd. 2). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, S. 209.

Die Stellenschrift, die sich aus der Brahmi-Zahlschrift herausbildete, ging nicht aus der Reihung oder Bündelung der Einheiten in nächst größere Einheiten hervor, sondern aus der Verzifferung der Einer-Zeichen um etwa 600 n. Chr. Die erste schriftliche Überlieferung einer Zahl in Stellenschreibweise ist die Zahl 933, die sich auf einer alten Inschrift aus Gwalior befindet.¹²⁰ „Damit ist der erste Schritt sofort zur reinen Stellenschrift gemacht, so daß wir in den 9 ersten Brahmizeichen die Urahnen unserer heutigen Ziffern vor uns haben“.¹²¹ Nicht nur der Funktion nach, sondern auch der Gestalt nach sind diese neun Ziffern die Vorfahren unserer neun Ziffern für die Einer. Aufgrund der Verbreitung in anderen Kulturen änderte sich die Form dieser Zeichen.¹²² Wie es tatsächlich zu dieser Stellenschrift kam, ist bis heute ungewiss. Die indischen Forscher gehen davon aus, dass sie sich ohne fremdes Einwirken etwa 200 v. Chr. in Indien entwickelt hat. Die indischen Zahlentürme, die eine Gliederung von Zahlen nach „Stockwerken“ aufweisen und die bereits im 5. Jahrhundert v.Chr. gebraucht wurden, unterstützen diese These. Zusätzlich arbeiteten sie auf dem Rechenbrett, das eine sprachliche Anordnung der Spalten vorsah, sodass es ebenfalls als eine Vorstufe des Stellenwertsystems betrachtet werden kann.¹²³

Von dem Bericht des syrischen Bischofs Severus Sebokt aus dem Jahr 622 n. Chr. erfahren wir, dass die Inder mit neun Ziffern ihre Rechnungen durchführten.¹²⁴ Aus dieser Aussage kann geschlossen werden, dass die Null zu dieser Zeit noch nicht bekannt war, wobei angemerkt werden muss, dass es Anzeichen für den Gebrauch der Null im 6. Jahrhundert n.Chr. gibt. Die

¹²⁰ vgl. ebd., S. 210f

¹²¹ Menninger (1958), S. 211

¹²² vgl. ebd., S. 211

¹²³ vgl. ebd., S. 211

¹²⁴ vgl. Ifrah (1986), S. 490

Zahlenschrift der Inder erreichte ihre Vollkommenheit erst mit der Erfindung eines Symbols für die Null, die wahrscheinlich schon vor dem 9. Jahrhundert n. Chr. gebraucht wurde.¹²⁵

Obwohl die Inder erstmals durch den Einfluss der griechischen Astronomie mit der Null in Berührung kamen, standen sie der Null nicht abwertend gegenüber, wie die Griechen. Die Expansion des Reiches vom Alexander dem Großen bis nach Indien bewirkte eine Ausbreitung der griechischen Kultur, sowie der Philosophie von Aristoteles, der die Leere und das Unendliche ablehnte. Doch die aristotelische Philosophie konnte in Indien nicht Fuß fassen. Damit war der Weg für Null als das „Nichts“ beziehungsweise die „Leere“ frei.¹²⁶

Im Unterschied zu den Griechen waren die Inder nicht an Geometrie interessiert. Für sie stand nicht die Geometrie, wodurch die Griechen eine Zahl oder besser eine Rechenoperation beschrieben, im Mittelpunkt, sondern der praktische Umgang mit den Zahlen selbst. Während die griechischen Mathematiker in Quadratzahlen Quadrate sahen und in Multiplikation von zwei unterschiedlichen Zahlen Rechtecke sahen, waren die Quadratzahlen oder Ergebnisse von Multiplikationen für die indischen Mathematiker einfach nur Zahlen, „die [aus] ihrer rein geometrischen Bedeutung entkleidet waren.“¹²⁷ Aufgrund dieser Vorstellung konnten sich die Inder vom Rechenbrett ablösen und Rechenfertigkeiten in den vier Grundrechnungsarten gewinnen. Da sich die Mathematiker nicht mehr über die geometrische Bedeutung von dem Ergebnis den Kopf zerbrechen mussten, konnten sie negative Zahlen, negative Lösungen von Gleichungen und vor allem die Null akzeptieren. Eine Strecke der Länge Null oder einer negativen Länge macht weniger Sinn und ist nicht plausibel, daher nicht akzeptabel für die griechische Denkweise. Infolge dieses Perspektivenwechsel gelang es dem indischen Mathematiker Brahmagupta im 7. Jahrhundert n. Chr. die Regeln für die Vorzeichen beim Dividieren von ganzen Zahlen aufzustellen. Dennoch wurde die Null zu einer Zahl und löste sich von der Vorstellung als reiner Platzhalter. Sie wurde nun wie $4 - 5 (= -1)$, als eine Zahl anerkannt.¹²⁸

„Weil die Null gleich $2 - 2$ war, mußte sie zwischen plus eins (gleich $2 - 1$) und minus eins (gleich $2 - 3$) gesetzt werden. Die Null durfte auch nicht mehr rechts von der Neun platziert werden [...], sondern hatte von jetzt an ihren angestammten Platz in der Reihenfolge der

¹²⁵ vgl. Seife (2002), S. 79f

¹²⁶ vgl. ebd., S. 75-78

¹²⁷ Seife (2002), S. 80

¹²⁸ vgl. ebd., S. 80ff

Zahlen. Eine Zahlengerade ohne Null konnte nun ebenso wenig existieren, wie ein Zahlensystem ohne die Zwei. Die Null war endlich am Ziel.“¹²⁹

Die indische Zahlenschrift (Gwalior) wurde bald von den Arabern übernommen, wobei sie aus den indischen Zeichen eine westarabische (Gobar) Zahlenschrift und eine ostarabische Zahlenschrift erschufen. Aus den westarabischen Ziffern wurde durch den Einfluss der Apices unsere Zahlenschrift.¹³⁰

Die Stammtafel unserer Zahlzeichen

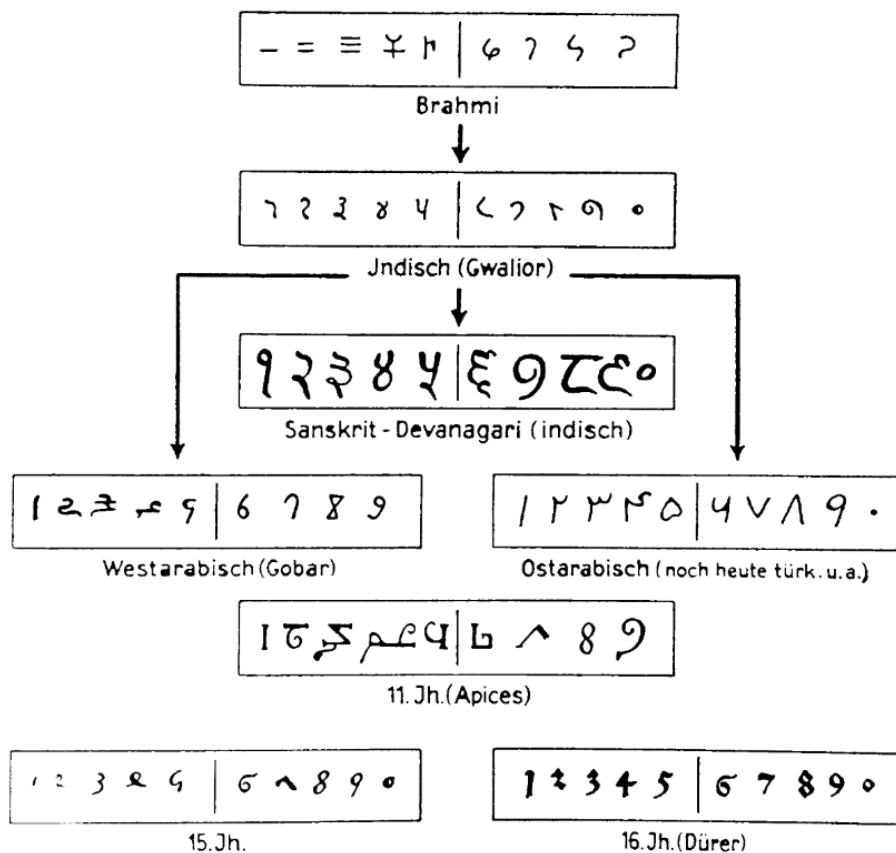


Abbildung 14: Entwicklung der Zahlenschrift von indischer Brahmi-Zahlenschrift bis zur aktuellen Zahlenschrift (aus dem 16. Jahrhundert) Menninger, Karl (1958). Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl (Bd. 2). Göttingen: Wandenhoeck & Ruprecht Verlag, S. 233.

¹²⁹ Seife (2002), S. 82

¹³⁰ vgl. Menninger (1958), S. 233f

2.3 Indische Zahlenschrift im arabischen Orient

Anfang des 6. Jahrhunderts blüht ein neues Reich im Orient, das den Glauben und die Politik zu vereinen versucht. Nach den ersten Siegeszügen gegen Mekka konnten die Muslime ihr Reich vergrößern. Etwa 100 Jahre nach Muhammeds Tod (732 n. Chr.) herrschten die Muslime über ein Reich von Turkestan bis Spanien.¹³¹ Die Hauptstadt Damaskus unter der Omajjaden Dynastie wurde nach dem Sieg der Abbasiden nach Bagdad verlegt. Auf diese Weise wurde Bagdad zum Ort des Austausches zwischen den monotheistischen Religionen, Syriern, Ägyptern, Indern, etc. Den Arabern gelang es, ihre Sprache und ihre Schrift in den eroberten Gebieten durchzusetzen. Sie übernahmen gleichzeitig das Kulturgut der überlegenen Völker und eigneten sich in kurzer Zeit deren Wissen, größtenteils durch Übersetzen von ihren Werken an. Viele Werke aus der Antike, darunter Werke von Aristoteles, Euklid, Ptolemäus, etc., sind uns nur als Übersetzungen ins Arabische überliefert. Bagdad wurde folglich nicht nur zur wichtigsten Handelsstadt, sondern auch zu einer Brücke des Wissensaustausches zwischen den Völkern.¹³²

Die Araber stießen über die Astronomie auf das dezimale Stellenwertsystem der Inder. Im 8. Jahrhundert übernahmen sie neben dem indischen Stellenwertsystem zur Basis 10, die Null und die praktischen Rechenverfahren. Ifrah zitiert die Begeisterung der Araber über die Leistung der Inder von Woepcke's Übersetzung:

„Wir haben von den Wissenschaften (der Inder) (auch eine Abhandlung über) das Rechnen mit Zahlen übernommen, die von Abu Djafar Mohammed Ibn Musa al-Charismi weiterentwickelt wurde. Es handelt sich dabei um die umfassendste und praktischste, am leichtesten zu begreifende und am mühelosesten zu erlernende Methode; sie überzeugt den durchdringenden Geist der Inder, ihr Schöpfungstalent, ihr überlegenes Unterscheidungsvermögen und ihren Erfindungsgeist.“¹³³

Abu Djafar Mohammed Ibn Musa al-Charismi war einer der einflussreichsten Mathematiker des Orients. Er hat neben anderen eine Abhandlung mit dem arabischen Titel „al-jabr Wa'l mukabala“ geschrieben, die heute unter den Namen Algebra bekannt ist und zur Bezeichnung eines Teilgebiets der Mathematik geworden ist. Sie ist das erste arabische Werk, das das indische Zahlensystem und die damit verbundenen Verfahren zum ersten Mal beschreibt.¹³⁴

¹³¹ vgl. Menninger (1958), S. 221ff

¹³² vgl. Ifrah (1986), S. 515

¹³³ Ifrah (1986), S. 516

¹³⁴ vgl. ebd., S. 517f

Auf den Namen al-Charismi geht die Bezeichnung Algorithmus zurück, die ein Sammelbegriff für Rechenverfahren ist.¹³⁵

Die Leistung der Araber in Mathematik beschränkte sich nicht nur auf die Übermittlung des Wissens. Sie drehten die Zahlenschrift der Inder um 90° nach rechts und schrieben die Zahlen nicht, wie die Inder von oben nach unten, sondern passten sie ihrer Schrift an und schrieben sie von rechts nach links.¹³⁶

Mohammed al-Charismi berichtet in seinem Werk, welches nur in lateinischer Übersetzung erhalten ist, von den west- und ost-arabischen Ziffern, sowie von der Funktion der Null.¹³⁷ Karl Menninger übersetzt diese Stelle:

„Wenn nichts übrig bleibt (beim Abzählen), so setze das Kreislein, damit die Stelle (differentia) nicht leer ist, sondern das Kreislein muß sie einnehmen, damit nicht, wenn sie leer bleibt, die Stellen vermindert werden und etwa die zweite für die erste gehalten wird.“¹³⁸

Die ostarabischen Ziffern werden gegenwärtig von „arabisch-schreibenden Völkern“ des Ostens gebraucht. Die westarabischen (Gobar oder Staub-) Ziffern sind hingegen die Stammväter der abendländischen Ziffern. Die Null der indischen Zahlenschrift ist ein hohler Kreis, doch in der ostarabischen Zahlenschrift wird sie mit einem Punkt dargestellt, wahrscheinlich deshalb, weil die Ziffer 5 einem Kreis ähnelt¹³⁹ (siehe dafür Abb. 15: Stammtafel unserer Zahlschrift).

¹³⁵ vgl. Menninger (1958), S. 227

¹³⁶ vgl. Ifrah (1986), S. 519

¹³⁷ vgl. Menninger (1958), S. 227f

¹³⁸ Menninger (1958), S. 228

¹³⁹ vgl. ebd., S. 228

	MAYA	BABYLONIEN	INDIEN	GEGENWART								
SYSTEME	Basis Zwanzig (ab der 3. Ordnung unregelmäßig)	Basis Sechzig	Basis Zehn	Basis Zehn								
	Zahlenwerte nach dem Positionssystem											
	Ziffern der Basis werden nach dem additiven Prinzip mit folgenden Zeichen gebildet:		Ziffern der Basis sind von jeder unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmung losgelöst:									
	 1  5	 1  10	 1  2  3  4  5  6  7  8  9	1 2 3 4 5 6 7 8 9								
NULLZEICHEN		 oder  oder 		0								
Dieses Zeichen steht in erster Linie für »leer« und dient zur Wiedergabe der Abwesenheit von Einheiten einer bestimmten Ordnung in der Darstellung von Zahlen durch Ziffern.												
<table border="0"> <tr> <td> Bezeugt: - In mittlerer Position  9  0  0  7 $9 \cdot 7200 + 0 \cdot 360 + 0 \cdot 20 + 7$ </td> <td> Bezeugt: - In mittlerer Position     9 0 0 7 $9 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 0 \times 60 + 7$ </td> <td> Bezeugt: - In mittlerer Position     9 0 0 7 $9 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10 + 7$ </td> <td> Verwandt: - In mittlerer Position 9 0 0 7 </td> </tr> <tr> <td> - Am Ende  6  4  9  0 $6 \times 7200 + 4 \cdot 360 + 9 \cdot 20 + 0$ </td> <td> - Am Ende (offensichtlich nur bei den Astronomen)     6 4 9 0 $6 \times 60^3 + 4 \times 60^2 + 9 \times 60 + 0$ </td> <td> - Am Ende     6 4 9 0 $6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10 + 0$ </td> <td> - Am Ende 6 4 9 0 </td> </tr> </table>					Bezeugt: - In mittlerer Position  9  0  0  7 $9 \cdot 7200 + 0 \cdot 360 + 0 \cdot 20 + 7$	Bezeugt: - In mittlerer Position     9 0 0 7 $9 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 0 \times 60 + 7$	Bezeugt: - In mittlerer Position     9 0 0 7 $9 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10 + 7$	Verwandt: - In mittlerer Position 9 0 0 7	- Am Ende  6  4  9  0 $6 \times 7200 + 4 \cdot 360 + 9 \cdot 20 + 0$	- Am Ende (offensichtlich nur bei den Astronomen)     6 4 9 0 $6 \times 60^3 + 4 \times 60^2 + 9 \times 60 + 0$	- Am Ende     6 4 9 0 $6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10 + 0$	- Am Ende 6 4 9 0
Bezeugt: - In mittlerer Position  9  0  0  7 $9 \cdot 7200 + 0 \cdot 360 + 0 \cdot 20 + 7$	Bezeugt: - In mittlerer Position     9 0 0 7 $9 \times 60^3 + 0 \times 60^2 + 0 \times 60 + 7$	Bezeugt: - In mittlerer Position     9 0 0 7 $9 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10 + 7$	Verwandt: - In mittlerer Position 9 0 0 7									
- Am Ende  6  4  9  0 $6 \times 7200 + 4 \cdot 360 + 9 \cdot 20 + 0$	- Am Ende (offensichtlich nur bei den Astronomen)     6 4 9 0 $6 \times 60^3 + 4 \times 60^2 + 9 \times 60 + 0$	- Am Ende     6 4 9 0 $6 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10 + 0$	- Am Ende 6 4 9 0									
Die Null ist eine Recheneinheit: Wird sie am Ende einer Zahlendarstellung hinzugefügt, wird deren Wert mit der Basis multipliziert. Beispiel: $ \begin{array}{ccc} \text{6 4 0} & = & \text{6 4} \times \text{10} \\ \text{-----} & & \text{---} \end{array} $												
Ab einem bestimmten Zeitpunkt wurde dieses Zeichen als Zahl betrachtet, als Zahl »Null«. Es stand damit für »nichts«.			Zeichen für den Wert »Null« oder die Zahl »Null«.									
			Diese Null ist die Grundlage der Algebra und der modernen Mathematik.									

Abbildung 15: Die Stammtafel unserer Zahlzeichen. Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus, S. 483.

2.4 Indisch-arabische Zahlenschrift im Abendland

Im Jahr 1000 n.Chr. kommen die indisch-arabischen Ziffern als Apices ohne die Null bei dem Franzosen Gerbert de Aurillac vor. Mit dem Anfang des 11. Jahrhunderts sind sie in vielen Teilen Europas zu finden, jedoch ohne Null.¹⁴⁰ Erst mit Leonardo von Pisas (Fibonacci) Rechenbuch „Liber abaci“ von 1202, verbreiten sich das indisch-arabische Zahlensystem, sowie die praktischen Rechenverfahren in Europa. In seinem Buch schildert Fibonacci die neuen Ziffern, die vier Grundrechnungsarten, die Fingerzahlen, Bruchrechnungen und stellt die „Practica“, d.h. Drei- und Kettensatzaufgaben vor, die als praktische Anwendung für das Kaufmännische gehalten werden. Fibonacci kannte die Mathematik der Ägypter, Syrier und Griechen, stellte aber das Verfahren der Inder über deren Mathematik-Kenntnisse.¹⁴¹ Leonardo von Pisa beschrieb die zehn Ziffern wie folgt: „die neun Ziffern der Inder sind diese 9, ... [8,7,6,5,4,3,2] 1. Mit ihnen und mit diesem Zeichen 0, das arabisch cephirum heißt, kann jede beliebige Zahl geschrieben werden.“¹⁴² Die Einführung der Null machte das Rechnen auf dem Rechenbrett überflüssig und löste es in kurzer Zeit von ihm ab. Durch den Handel kam das indisch-arabische System über die Alpen, das schließlich auch dort seinen Triumph feiern konnte.¹⁴³ Das dezimale Positionssystem mit der Null wurde zwar von dem Italiener Fibonacci im Liber abaci mehrfach gewürdigt, doch in der christlichen Community wurde es aufgrund der Null bis ins 14. Jahrhundert als Teufelszeug verachtet. Im 14. Jahrhundert begann seine Durchsetzung vor allem durch die elaborierte Schicht. Nach drei Jahrhunderten wurde es schlussendlich in ganz Europa anerkannt.¹⁴⁴

2.5 Zeichen und Wörter für Null

Die Null musste Jahrhunderte lang warten, bis sie tatsächlich als eine Zahl anerkannt wurde und ein Zeichen erhielt. Bei dem berühmten indischen Astronomen *Āryabhata* aus dem Jahr 500 n. Chr. begegnen wir noch keinem Zeichen für die Null, doch er berichtet von den neun Stellen und bezeichnet hier die Stelle als „kha“. Das Wort „kha“ wurde in den folgenden Jahrhunderten öfters für die Null gebraucht. Bereits ein halbes Jahrhundert später begegnet man

¹⁴⁰ vgl. Menninger (1958), S. 239

¹⁴¹ vgl. ebd., S. 242f

¹⁴² Menninger (1958), S. 243

¹⁴³ vgl. ebd., S. 265

¹⁴⁴ vgl. Gienow (2012). S. 9

„kha“ bei dem Astronomen *Varāhamihira*, der ebenfalls kein Zeichen für die Null besaß, aber dafür einige Wörter. Neben „kha“ benutzt *Varāhamihira* zur Bezeichnung der „Leerstelle“ die Begriffe „ambara“ (=Himmel), „*ākāṣa*“ (= Atmosphäre) und „*śūnya*“ (=leer). *Śūnya*“ wurde im Laufe der Zeit zum bewährtesten Begriff für die Null. Etwa 100 Jahre nach *Varāhamihira* taucht der berühmte Mathematiker Brahmagupta ohne ein Zeichen für die Null nochmals mit denselben Bezeichnungen „*ākāṣa*“, „kha“ und „*śūnya*“ auf. In der ersten Hälfte des 9.Jahrhunderts erläutert der Mathematiker *Mahāvīra* die Null in seinem Werk *Gaṇitasārasaṅgraha* umfassend ohne ein Symbol dafür zu nutzen. Doch *Mahāvīra* gebraucht statt dem Begriff „*śūnya*“ die frühere Bezeichnung „kha“. ¹⁴⁵

Der Gebrauch vieler Synonyme für die Null kann mit der Versuchung einer Abdeckung aller Kontexte, in denen die Null auftauchen kann, erklärt werden. Dieser Versuch war in der Geschichte keine Neuheit, denn die Griechen lehnten die Null ab, weil sie sie nicht in ihre Philosophie und ihrer Vorstellung von Zahlen einbetten konnten. ¹⁴⁶

Das Wort „*śūnya*“ steht im Indischen für „leer“ und meint damit die leere Zeile auf einem Rechenbrett. Üblicherweise wurden für die leeren Zeilen auf dem Rechenbrett Punkte („*śūnya bindu*“) gemacht. Das arabische Wort „as -sifr“ oder kürzer „sifr“ ist eine Übersetzung von „*śūnya*“ aus dem Indischen, das bereits im 9.Jahrhundert gebraucht wurde. Bei der Übernahme des Stellenwertsystems mit der Null durch den Westen von den Arabern wurde das Wort „sifr“ nicht mehr übersetzt, sondern einfach übernommen. Die lateinische Form dafür lautet „cifra“ und „cephirum“, wobei „cephirum“ einen Wandel in Italienisch erlebte und sich von „zefir, zefro, zevero“ ¹⁴⁷ zu „zero“ entwickelte. Die Franzosen bezeichneten die Null mit „le chiffre“ und später auch mit dem italienischen Begriff „zero“. ¹⁴⁸ Der Gebrauch von zwei verschiedenen Bezeichnungen für ein und dasselbe ist ein Warnsignal der Unsicherheit in der Praxis im Umgang mit der Null. „In einem französischen Lehrbuch für Kaufleute von 1485 heißt es: [...] „An *chiffres* gibt es nur zehn Zahlzeichen, von denen neun Wert haben und die zehnte (selbst) nichts gilt, aber den anderen Zahlzeichen (höheren) Wert verleiht, und sie heißt *zero* oder *chiffre*.“ ¹⁴⁹

¹⁴⁵ vgl. Kaplan (2006), S. 53ff

¹⁴⁶ vgl. ebd., S. 55

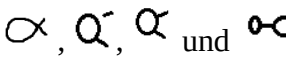
¹⁴⁷ Menninger (1958), S. 215

¹⁴⁸ vgl. ebd., S. 215

¹⁴⁹ Menninger (1958), S. 215

Seit dem Ende des 15. Jahrhunderts steht „le chiffre“ nicht mehr für die Null, sondern nur noch für eine Ziffer, also es bezeichnet das Zeichen für eine Zahl. Das deutsche Wort „Null“ hingegen geht auf das lateinische Wort „nulla“ (= „keiner“) zurück.¹⁵⁰

Der Grund für die Ablehnung des arabischen Begriffs „sifr“ für die Null, liegt womöglich an der Einstellung des Abendlandes gegenüber den Arabern. Das Wissen von den Arabern, wie das Stellenwertsystem mit der Null, sowie die einfachen Rechenverfahren mit diesem System, galt als mysteriös und wurde verboten. Doch das Zahlensystem wurde geheim genutzt und bewährte sich. Der deutsche Begriff „Ziffer“ stammt vom „sifr“ ab und steht „für die Gesamtheit der Elemente des [dezimalen Stellenwert-] Systems“^{151, 152}.

Es dauerte lange, bis die Null erfunden wurde und einen Namen erhielt. So etwa dauerte es, bis sie eine sinnliche Gestalt bekam. In Indien waren Darstellungen als Punkt, Kreis oder Kreuz möglich.¹⁵³ Einige Forscher behaupten, dass das Symbol „hohler Kreis“ für die Null von der altindischen Zahl 10 abgeleitet wurde. Die Inschriften in den Höhlen vom Nanaghat-Berg aus dem 2. Jhdt. v.Chr. bis 2. Jhdt. n.Chr. enthalten die Zeichen  für die Zahl 10. Die Null soll durch Weglassen der Sporen von  entstanden sein. Das ist jedoch kein sicherer Hinweis, da nach dieser Behauptung die Eins im Altindischen die Gestalt ,  oder  haben sollte, doch sie wurde entweder mit „|“ oder mit „-“ dargestellt. Die zweite und akkreditierte These ist, dass sich der Kreis für die Null aus dem Punkt für die Leerstelle entwickelt hat. Denn bei Brahmagupta wurde ein Punkt für eine Leerstelle gesetzt, die bei der Subtraktion entstand. Demgegenüber verwendete Bhaskara 1150 n.Chr. dafür einen kleinen Kreis.¹⁵⁴ Andererseits könnte der Kreis von der Brahi-Verzifferung für die 10 stammen (siehe Abbildung 13: Brahimi-Zahlschrift) oder seinen Ursprung in dem griechischen Wort für „nichts“ („oudén“) haben.¹⁵⁵

¹⁵⁰ vgl. Ifrah (1986), S. 538

¹⁵¹ Ifrah (1986), S. 539

¹⁵² vgl. ebd., S. 538f

¹⁵³ vgl. Menninger (1958), S. 21

¹⁵⁴ vgl. Kaplan (2006), S. 65f

¹⁵⁵ vgl. Menninger (1958), S. 217

II. Anwendungen der Zahl „Null“

1 Die Eigenschaften der Zahl Null

1.1 Ist Null eine Zahl?

Bis zum 17. Jahrhundert wurde die Null in Europa nicht als eine eigenständige Zahl akzeptiert. Eine Erklärung liefert hierfür das Synonym „nichts“ für die Null. Man stelle sich die folgende Situation vor: Herr Bauer fragt, wie viele Tiere sein Nachbar Herr Müller besitzt. Herr Müller zählt die Tiere 1,2,3, 4, ... ab und gibt seinem Nachbar die konkrete Zahl bekannt. Würde Herr Müller keine Tiere besitzen, so könnte er nicht auf ein Tier deuten und dieses zählen. Er müsste mit „null“ antworten. Aus dieser Situation könnte geschlossen werden, dass die Null keine Zahl ist, weil sie nichts zählt. Mit dem Gebrauch der Zahlen außerhalb des Zählens im 9. Jahrhundert, wurde die Null ebenfalls als eine Zahl durch die indischen Mathematiker eingestuft. Somit wurde sie nicht nur dazu genutzt, um Inkonsistenzen beim Anschreiben der Zahlen zu vermeiden, wie etwa im Falle 25, 250, 205, sondern um Berechnungen durchzuführen. Die Null ist seit ihrer Wiederentdeckung in Indien eine Zahl mit besonderen arithmetischen und analytischen Eigenschaften.¹⁵⁶

1.2 Die Null schöpft Zahlen

Die Idee des „Nichts“ für die Null ist in der Mengenlehre am besten zu realisieren. „Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung [...] von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens [...] zu einem Ganzen.“¹⁵⁷ Eine Menge lässt sich als ein Sack denken und die Objekte in dem Sack als Elemente der Menge. Zum Beispiel enthält die Menge der geraden Zahlen M die Zahlen 0,2,4,6,..., die mithilfe von Mengenklammern, so $\{0,2,4,6,\dots\}$ angeschrieben werden kann.¹⁵⁸

Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigte sich der Mathematiker Georg Cantor tiefergehend mit den unendlichen Mengen und kam zu dem Schluss, dass es unterschiedlich große

¹⁵⁶ vgl. Stewart (2016), S. 167f

¹⁵⁷ Schichl; Steinbauer (2012), S. 119

¹⁵⁸ vgl. ebd.

Unendlichkeiten gibt.¹⁵⁹ Hierzu beschrieb er die Aleph-null $\aleph_0$, die eine unendliche Zahl darstellt, die größer als jede ganze Zahl ist und gleichzeitig die kleinste Unendlichkeit ist.¹⁶⁰ Der Mathematiker Gottlob Frege knüpfte an Cantors Ideen an, widmete sich jedoch den endlichen Mengen und versuchte Korrespondenzen zwischen Mengen zu erkennen. Ian Stewart bringt in dem Zusammenhang als Beispiel die Menge der sieben Wochentage, die Menge der Zahlen von 1 bis 7 und die Menge der sieben Zwerge und fragt nach der richtigen Menge, um die Zahl „Sieben“ darzustellen. Nach Frege sind alle diese Mengen möglich, doch deren Notation ist nicht zielführend. So geschah es, dass er einen Brief von dem Mathematiker Bertrand Russell bekam. Darin schrieb Russell, dass eine Menge nie sich selbst als ein Element enthalten kann und machte ihn auf das Dorfbarbier Paradoxon aufmerksam, das besser unter den Namen Russel Paradox bekannt ist.¹⁶¹

Bei diesem Paradoxon geht es darum, dass ein Dorfbarbier alle Bewohner rasiert, die sich nicht selbst rasieren. „Wer rasiert jetzt den Barbier? Unter der Bedingung, dass jeder im Ort von jemand rasiert wird, kann es einen solchen Barbier nicht geben.“¹⁶² Daher ist eine solche Menge in sich gegensätzlich und enthält die Gefahr, dass es „ausufernd große Mengen gibt“.¹⁶³ Als Konsequenz ist statt alle Mengen, die oben erwähnt wurden, zur Beschreibung der Zahl Sieben heranzuziehen, eine Menge zu wählen, die eine „Standardmenge“ enthält. Die Standardmengen „mussten eindeutig definiert sein, und ihr Aufbau sollte mit dem Zählervorgang korrespondieren.“¹⁶⁴ Die leere Menge ist die einzige Menge, die die Eigenschaften einer Standardmenge erfüllt, mit derer Hilfe die Zahlen als Mengen dargestellt werden können.¹⁶⁵ „Die leere Menge $\emptyset$ ist definiert als die Menge, die kein Element enthält.“¹⁶⁶ Alternativ zum Symbol „ $\emptyset$ “ ist auch die Notation „ $\{ \}$ “ für die leere Menge gängig. Die Null entspricht in der Mengenlehre den leeren Mengen, da beide bekanntlich das „Nichts bzw. das Nicht-enthalten“ darstellen. Eine solche Menge lässt sich einfach vorstellen. Beispielsweise die Menge der ungeraden Zahlen, die durch 2 teilbar sind, die Menge der Quadrate mit unterschiedlich langen Seiten, die Menge der Tauben, die nicht fliegen können, etc. Die exemplarischen Mengen

¹⁵⁹ vgl. Stewart (2016), S. 171

¹⁶⁰ vgl. Stewart (2016), S. 421

¹⁶¹ vgl. ebd., S. 171f

¹⁶² Stewart (2016), S. 426

¹⁶³ Stewart (2016), S. 172

¹⁶⁴ Stewart (2016), S. 172

¹⁶⁵ vgl. ebd., S. 173

¹⁶⁶ Schichl; Steinbauer (2012), S. 128

beschreiben zwar Unterschiedliches, stellen jedoch die gleiche Menge dar, die leere Menge. Die leere Menge aus der Mengenlehre entspricht der Zahl „0“ aus der Arithmetik.¹⁶⁷

Wenn „0“ als „ $\emptyset$ “ definiert wird, wie lässt sich die Zahl „1“ vorstellen? Die Eins ist eine Menge, die ein eindeutiges Element enthält. Da die leere Menge eindeutig ist, ist die Zahl Eins, die Menge, die die leere Menge enthält, d.h. $1 = \{\emptyset\}$. Im Gegensatz zu $\{\emptyset\}$, die eine Menge beinhaltet (und zwar die $\emptyset$), besitzt die leere Menge keine Elemente. Stewart beschreibt bildhaft die leere Menge als ein leeres Sackerl, die Zahl 1 als ein Sackerl, das ein leeres Sackerl enthält. Diese intuitive Vorstellung lässt sich auf die weiteren Zahlen übertragen. Die Zahl „2“ kann nach diesem Schema als eine eindeutige Menge mit den Elementen $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$ festgelegt werden. Entsprechend des Sackerl-Modells ist die „2“ ein Sackerl, das ein leeres Sackerl und ein Sackerl mit einem leeren Sackerl enthält (siehe Abb.16).

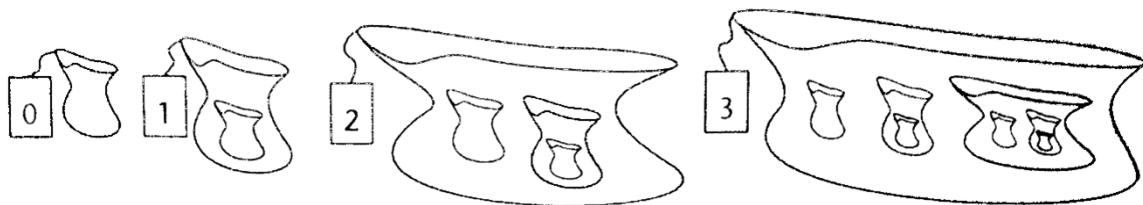


Abbildung 16: Sackerl-Modell von Stewart. Stewart, Ian. (2016). *Unglaubliche Zahlen*. (M.N. Schuh, Übers.) Reinbeck bei Hamburg Rowohlt Taschenbuch Verlag, S. 174.

Wird das Motiv auf die natürlichen Zahlen übertragen, so ist jede Zahl eine Menge, die die vorhergehenden Zahlen als Elemente enthält (siehe Tabelle). Die Zahlen als Mengen sind nicht selbst Elemente ihrer Mengen, können jedoch Elemente anderer Mengen sein.

„Jeder natürlichen Zahl n wird genau eine natürliche Zahl $S(n)$ zugeordnet, die ihr *Nachfolger* genannt wird, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : (S(n) \in \mathbb{N})$.“¹⁶⁸

$0 := \emptyset$	$0 = 0$
$1 := \{\emptyset\}$	$1 = \{0\}$
$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	$2 = \{0, 1\}$
$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	$3 = \{0, 1, 2\}$
$4 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$	$4 = \{0, 1, 2, 3\}$
„ $n := \begin{cases} \emptyset & n = 0 \\ S(n-1) = (n-1) \cup \{(n-1)\} & n \neq 0 \end{cases}$ “	$n = \{0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)\}$

¹⁶⁷ vgl. Stewart (2016), S. 173

¹⁶⁸ Schichl; Steinbauer (2012), S. 284

In vielen Sprachen werden Zahlen zwei Bedeutungen zugeschrieben. Zum einen können sie die Anzahl einer Menge darstellen, dann spricht man vom „Kardinal Aspekt“. In dem Beispiel „es sind 20 Student_innen im Hörsaal“ ist die Zahl „20“ eine Kardinalzahl. Zum anderen ist „20“ in dem Beispiel „die 20. Person, die den Hörsaal betritt, sitzt in der zweiten Reihe“ eine Ordinalzahl, da sie für eine Reihung gebraucht wird.¹⁶⁹ Für die Mengenlehre ist der Kardinal Aspekt von Bedeutung, denn die Kardinalität oder Mächtigkeit einer Menge gibt an, wie viele Elemente die Menge besitzt.¹⁷⁰ Die leere Menge besitzt keine Elemente, somit hat sie die Kardinalität 0. Die Menge aus der obigen Tabelle $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ enthält drei Elemente und hat somit die Mächtigkeit 3. Mit Hilfe der Kardinalität und der leeren Menge hat Cantor am Ende des 19. Jahrhunderts die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ konstruiert. Obwohl einige Mathematiker die Null nicht zu den natürlichen Zahlen zählen, macht es der beschriebenen Konstruktion nach Sinn die Null dazu zu zählen. Gleichfalls wird in der DIN-Norm 5473 die Null zur Menge der natürlichen Zahlen zugeordnet. „Diese [...] Version der Konstruktion der natürlichen Zahlen ist viel mächtiger als die Definition durch die Peano Axiome“¹⁷¹, weil das Induktionsprinzip bewiesen werden kann und nicht als Axiom gefordert werden muss.¹⁷²

Zur Beschreibung der Unendlichkeit von Mengen setzte Cantor diese miteinander in Beziehung. Nach Cantor ist eine Menge abzählbar, wenn die Elemente der Menge in eine eindeutige Beziehung zu den ganzen Zahlen gesetzt werden kann. Die natürlichen Zahlen sind abzählbar, da man jedem Element aus der Menge der natürlichen Zahlen eine ganze Zahl, in dem Fall dieselbe Zahl, zuordnen kann.¹⁷³ Charles Seife veranschaulicht diese Methode an Hand von dem Beispiel Zuschauer und Sitzplätze im Stadion. Bekommt jeder Zuschauer im Stadion einen Sitzplatz und bleibt keiner stehen, so gibt es gleich viele Zuschauer wie Sitzplätze, d.h. die Menge der Zuschauer und die Menge der Sitzplätze sind gleich groß oder gleich „mächtig“. Bleiben jedoch einige Zuschauer stehen, so gibt es mehr Zuschauer als Sitzplätze, daher wäre die Menge der Zuschauer größer als die Menge der Sitzplätze. Diese Methode der Zuordnung überträgt Cantor auf die Menge der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen und stellte fest, dass diese Mengen gleich mächtig sind.¹⁷⁴ Cantor bezeichnete die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen mit dem hebräischen Buchstaben Aleph und dem Index

¹⁶⁹ vgl. Schichl; Steinbauer (2012), S. 283

¹⁷⁰ vgl. ebd., S. 176

¹⁷¹ Schichl; Steinbauer (2012), S. 89

¹⁷² vgl. ebd., S. 283ff

¹⁷³ vgl. Stewart (2016), S. 428

¹⁷⁴ vgl. Seife (2002), S. 166ff

Null, also $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$. Weiters nennt man jede Menge, die die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, „abzählbar“.¹⁷⁵

Im Vergleich zu den eben aufgezählten Mengen konnte Cantor beweisen, dass die Menge der reellen Zahlen „überabzählbar“, d.h. nicht abzählbar ist. Um es zu beweisen, betrachtete er nur das Intervall $]0,1[$. Für den Beweis nutzte Cantor die Tatsache, dass sich jede reelle Zahl als eine Dezimalzahl anschreiben lässt. Indirekt nahm er an, dass jeder reellen Zahl im Intervall $]0,1[$ eine natürliche Zahl zugeordnet werden kann. Werden die Dezimalzahlen im Intervall $]0,1[$ unter einander mit ihren Dezimalzahlentwicklungen als eine Liste aufgeschrieben, so müsste jede Zahl aus dem Intervall $]0,1[$ in dieser Aufzählung (siehe unten) auftauchen. In der Abbildung steht a_{ij} für die entsprechende Dezimalziffer.¹⁷⁶

Natürliche Zahl	Dezimalzahl $]0,1[$	
0:	0, a_{01} a_{02} a_{03} a_{04} a_{05} a_{06}	...
1:	0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16}	...
2:	0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} a_{26}	...
3:	0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} a_{36}	...
4:	0, a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} a_{46}	...
5:	0, a_{51} a_{52} a_{53} a_{54} a_{55} a_{56}	...
:	:	...

¹⁷⁷

Der Knackpunkt im Cantors Beweis liegt darin, dass sich durch das Ersetzen der Dezimalziffern neue reelle Zahlen konstruieren lassen. Um eine neue Ziffer zu erhalten, werden die in der Tabelle fettgedruckten Ziffern herangezogen. Die Dezimalzahl wird durch das Aneinanderreihen der Ziffern entlang der Diagonale gebildet, wobei jede Ziffer auf der Diagonale durch eine andere Ziffer ersetzt wird. So unterscheidet sich die neue Zahl von der ersten Zahl aus der Tabelle durch die Zehntelstelle. Von der zweiten Zahl unterscheidet sie sich in der Hundertstelstelle, von der dritten Zahl durch die Tausendstelstelle, etc. Auf diese Weise können andere Zahlen mit den Ziffern der anderen Diagonalen gebildet werden. An dieser Stelle sind wir zu einem Widerspruch gelangt, denn Cantor nahm an, dass jede reelle Zahl in der obigen Aufzählung enthalten ist. Da sich andere Zahlen konstruieren lassen, die nicht in der

¹⁷⁵ vgl. Schichl; Steinbauer (2012), S. 179

¹⁷⁶ vgl. ebd., S. 180ff

¹⁷⁷ vgl. ebd., S. 181

Liste auftreten, ist die Menge der reellen Zahlen überabzählbar unendlich und besitzt somit eine größere Kardinalität als $\aleph_0$.¹⁷⁸

Wer hätte sich gedacht, dass aus dem Nichts eine Unendlichkeit wird. Zur Zeit von Cantor standen viele Mathematiker, unter anderem Cantors Professor an der Universität Berlin, Leopold Kronecker, gegen Cantors Einsicht „Gott, die Unendlichkeit, die sich jeglichem Verständnis entzieht.“¹⁷⁹ Zum einen war die Vorstellung, den Gott mit den irrationalen Zahlen in Verbindung zu setzen, die minderwertig sind und eher dem Menschengeschlecht zugeordnet werden sollten, an der Ablehnung Schuld. Andererseits wollte Kronecker nicht akzeptieren, dass sich die eigenartige Beschaffenheit der Unendlichkeit selbst mit Nullen rechtfertigen lässt. Kronecker bestritt die Theorien von Cantor, die heute das Fundament der Mengenlehre bilden, in allen Angelegenheiten. Er war wahrscheinlich auch daran schuld, dass Cantor keine Anstellung an der Universität Berlin bekam. Cantors Publikation, in der er sich gegen Kroneckers Kritik wandte, blieb erfolglos. Im Folge dessen erlitt Cantor einen Nervenzusammenbruch und nach einem weiteren Nervenzusammenbruch musste er stationär betreut werden und starb 1918 in Halle. Heutzutage genießen seine Erkenntnisse den Ruhm, den sie verdienen.¹⁸⁰ „Cantors Theorie zeigte, daß Kroneckers kostbare ganze Zahlen- und sogar natürliche Zahlen- im Grunde überhaupt nichts waren. Sie waren eine unendliche Null.“¹⁸¹

¹⁷⁸ vgl. Seife (2002), S. 168ff

¹⁷⁹ Seife (2002), S. 170

¹⁸⁰ vgl. ebd., S. 170f

¹⁸¹ Seife (2002), S. 170

1.3 Algebraische Eigenschaften der Null

1.3.1 Addition, Subtraktion, Multiplikation, Vorzeichen, Potenzen

- Die Zahl Null ist das neutrale Element der Addition. Das heißt, wird eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit 0 addiert, so ändert sich der Wert der Zahl a nicht. Die Addition mit einem neutralen Element ist kommutativ.¹⁸²

$$a + 0 = 0 + a = a$$

- Das Ergebnis der Addition von Null und Null ist wieder Null ($0 + 0 = 0$). Daraus erhalten wir die Beziehung $-0 = 0$. Die Null ist das inverse Element der Addition von sich selbst. Das ist eine charakteristische Eigenschaft der Null. Es gibt keine zweite Zahl, die ihre eigene Negation ist. Dieses Merkmal lässt sich am besten auf der Zahlengerade beobachten. Die Null liegt nämlich genau in der Mitte zwischen den positiven und negativen Zahlen.¹⁸³
- Die Null resultiert als Differenz einer Subtraktion mit gleichen Minuenden und Subtrahenden. Zusätzlich ist die Summe von einer Zahl mit ihrem Inversen, bezüglich der Addition, gleich dem neutralen Element der Addition, also gleich Null.¹⁸⁴

$$a - a = 0 \text{ bzw. } a + (-a) = 0 \text{ bzw. } 0 - a = (-a)$$

- Wird eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit der Null multipliziert, so ist das Produkt 0. Null wird daher als „absorbierendes“ Element der Multiplikation bezeichnet.¹⁸⁵

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

- Die Null ist eine weder positive noch negative Zahl, daher schreibt man $-0 = +0$.

Beweis:

- i) Wir wissen, dass zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl $-a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a + (-a) = 0.$$

- ii) Weiteres gilt für $a \in \mathbb{R}$: $a + 0 = a$

¹⁸² vgl. Meschkowski Herbert (Hg.) (1970), S. 42

¹⁸³ vgl. Stewart (2016), S. 169

¹⁸⁴ vgl. Academic dictionaries and encyclopedias, [online]

http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/1033119#Arithmetische_Eigenschaften [25.02.2018].

¹⁸⁵ vgl. Van Dogen (2015), S. 4

Aus (i) folgt $0 + (-0) = 0$ und nach ii) gilt $0 + 0 = 0$. Weil das Negative einer Zahl eindeutig bestimmt ist, folgt $-0 = 0$.¹⁸⁶

- Wird die Null mit einer Zahl potenziert, die ungleich Null ist, so ist das Ergebnis 0. Zum Beispiel: $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Wenn Null der Exponent ist, d.h. a^0 mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt nach der Definition $a^0 = 1$.

Wie steht es mit $a = 0$? In der Fachliteratur findet man für 0^0 zwei Ergebnisse. Diejenigen, die sich auf die Definition $a^0 = 1$ beziehen, behaupten, dass $0^0 = 1$ ist. Andere wiederum sind der Meinung, dass 0^0 unbestimmt ist. Im Allgemeinen wird $0^0 = 1$ herangezogen.¹⁸⁷

Der indische Mathematiker Brahmagupta formulierte die Regeln für die Addition und Subtraktion mit der Null bereits im 7. Jahrhundert n.Chr. Mahāvīra stellte 830 n.Chr. neben den Regeln für Addition und Subtraktion auch die Regel für die Multiplikation auf. Die Regeln der beiden Mathematiker fanden im 11. Jahrhundert durch den Mathematiker Bhāskara Unterstützung. Bhāskara beschäftigte sich neben den vier Grundrechnungsarten auch mit Potenzen und Wurzel der Null. Dabei stellte er korrekt fest, dass $0^2 = 0$ und $\sqrt{0} = 0$ ist.¹⁸⁸

1.3.2 Division

1.3.2.1 Null durch eine Zahl

Brahmagupta stellte für die Division mit der Null ebenfalls Überlegungen an. Er meinte „Null geteilt durch eine negative oder positive Zahl ist entweder Zero oder wird als Bruch mit Zero als Zähler und der endlichen Menge als Nenner ausgedrückt“.¹⁸⁹ Der erste Teil des Satzes lehrt seine Leser, dass $a \div 0$ gleich 0 ist, wenn a eine negative oder eine positive Zahl ist, also eine Zahl ungleich Null ist. Der zweite Teil ist lediglich eine Umschreibung des ersten Teils mit

¹⁸⁶ vgl. Forster (2016), S. 17f

¹⁸⁷ vgl. Academic dictionaries and encyclopedias, [online]

http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/1033119#Arithmetische_Eigenschaften [25.02.2018].

¹⁸⁸ vgl. Kaplan (2006), S. 83ff (83-86)

¹⁸⁹ Kaplan (2006), S. 84f

Hilfe der Bruchschreibweise, d.h. $\frac{0}{a} = 0$. Intuitiv ist Null geteilt durch eine Hälfte oder ein Viertel wieder Null. Anders kann diese Aussage durch folgende Umformung gezeigt werden:

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ so folgt aus den im Punkt 1.3.1 beschriebenen Eigenschaften der Null:

$$\begin{aligned}\frac{0}{a} &= 0 \quad | \cdot a \\ \frac{0}{a} \cdot a &= 0 \cdot a \\ 0 &= 0 \quad \square\end{aligned}$$

1.3.2.2 Division durch Null

1.3.2.2.1 Eine Zahl dividiert durch Null

Der indische Mathematiker des 12. Jahrhunderts - Bhāskara - meinte, dass ein Bruch dessen Nenner und Zähler eine Null ist, unendlich ist. „Es ergibt sich keine Änderung, wieviel man auch hinzufügt oder abzieht – so wie sich auch beim unendlichen und unwandelbaren Gott nichts ändert.“¹⁹⁰

Über diese Behauptung von Bhāskara haben sich viele Mathematiker der folgenden Jahrhunderte den Kopf zerbrochen und manche haben ihn auch bestätigt. Was ist nun unter der Division $\frac{a}{0}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu verstehen?

Wenn 28 dividiert durch 7 gerechnet werden muss, dann wird 7 so oft von 28 abgezogen, bis das Ergebnis 0 ist.

$$\begin{aligned}28 - 7 &= 21 \\ 21 - 7 &= 14 \\ 14 - 7 &= 7 \\ 7 - 7 &= 0\end{aligned}$$

Die Zahl 7 wird 4-mal subtrahiert, also ist $\frac{28}{7} = 4$. Die Überprüfung des Ergebnisses ist durch die Multiplikation von 4 und 7 möglich, d.h. $7 \cdot 4 = 28$.¹⁹¹

¹⁹⁰ Seife (2002), S. 83

¹⁹¹ vgl. Beutelspacher (2010), S. 40

Nach diesem Schema kann man sich nun dem Ergebnis der Division $\frac{a}{0}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ annähern. Sei nun $a = 0$. Was ist dann „1 geteilt durch 0“? Das Ergebnis ist nicht 20, da

$0 \cdot 20 \neq 1$ ist. Es ist auch nicht 1, denn auch $0 \cdot 1$ ist nicht 1. Das Resultat ist auch nicht 0, da auch $0 \cdot 0 \neq 1$ ist. Demzufolge hat die Division $\frac{a}{0}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ keine Zahl als Ergebnis. Um diese Aussage formal zu zeigen, definiert man $m \div n$ als die Zahl x , für die gilt $x \cdot n = m$. Aus dem geht für $1 \div 0$ die Zahl q hervor, welche die Beziehung $q \cdot 0 = 1$ erfüllt. Jedoch gibt es keine Zahl dieser Form, denn unabhängig davon, welche Zahl für q gewählt wird, ist die Multiplikation mit der Null immer Null, wie es im Abschnitt 1.3.1 festgelegt wurde.¹⁹²

1.3.2.2.2 Null dividiert durch Null

Für Brahmagupta ist $\frac{0}{0} = 0$ und nach Bhāskara ist es wiederum unendlich. Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass $\frac{a}{0}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unbestimmt ist. Nach dem heutigen Wissensstand wird die Unbestimmtheit der Division durch Null akzeptiert. Um diese Behauptung zu zeigen, setzen wir $0 \div 0 = x$. Durch das Umformen von diesem Ausdruck erhält man $0 = 0 \cdot x$. Die Gleichung $0 = 0 \cdot x$ ist für jedes x erfüllt, das heißt x kann jede beliebige Zahl sein und ist somit unbestimmt.¹⁹³

¹⁹² vgl. Stewart (2016), S. 169f

¹⁹³ vgl. Academic dictionaries and encyclopedias, [online]
http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/1033119#Arithmetische_Eigenschaften [25.02.2018].

2 Gleichungen und Null

Die Gleichungen sind zu unumgänglichen Mitteln der Mathematik, Physik, Chemie und anderen Naturwissenschaften geworden. Sie ermöglichen „eine Mathematisierung der Natur und unserer Erfindungen“.¹⁹⁴ Geschwindigkeiten, Oxidations-Reduktionsvorgänge, Bewegungsvorgänge, Laufbahn der Planeten, etc. können mit Hilfe von Gleichungen beschrieben werden, die viele Informationen beinhalten und einiges voraussagen können. Neben dem Aufstellen von Gleichungen ist das Lösen von Gleichungen eine Kunst. Um diese Kunst einfacher zu belegen, kommt auch hier die Null ins Spiel. Quadratische Gleichungen wurden von den arabischen Mathematikern mit der Methode der „Quadratischen Ergänzung“ gelöst. Wie bereits an einigen Stellen erwähnt, entstammt das deutsche Wort „Algebra“ vom Arabischen und ist aus dem Titel des Buches „Al-ğabr wa`l muābalaḥ“ vom Mathematiker al – Ḥwārizmī übernommen worden. Die Vorgehensweisen in *al-ğabr* wurden in der Geschichte über 12 Jahrhunderte mehrmals mit der Gleichung $x^2 - 39 + 8x = -2x$ beleuchtet.¹⁹⁵

- Zu Beginn werden alle negativen Terme auf die andere Seite gebracht und so positiv gemacht, d.h. sie werden „wiederhergestellt“ (*al-ğabr*).

$$x^2 + 8x + 2x = 39$$

- Dann wird die Gleichung reduziert, das bedeutet, dass die möglichen Terme zusammengefasst werden.

$$x^2 + 10x = 39$$

- Im letzten Schritt wurden einige Strategien eingesetzt oder es wurde herumprobiert, um auf die Lösung zu kommen. Die Lösung lautet korrekterweise 3 und -13.¹⁹⁶

Der aufgeführte Weg zur Lösung hängt für verschiedene Aufgabenstellungen von verschiedenen Methoden ab und ist daher nicht die ideale Vorgehensweise. Omar-e Khayyam hat beispielsweise drei unterschiedliche Methoden für drei Formen einer quadratischen Gleichung entwickelt, die wir heute mit einer einzigen Methode beziehungsweise Formel berechnen. Er hatte eine Methode für Gleichungen der Form $x^2 + px = q$, eine für

¹⁹⁴ Kaplan (2006), S. 140

¹⁹⁵ vgl. ebd., S. 141

¹⁹⁶ vgl. ebd., S. 141f

$x^2 + q = p$ und eine dritte Methode für Gleichungen der Form $px + q = x^2$ parat.¹⁹⁷

John Napier, der Baron von Merchiston, erkannte im 15. Jahrhundert, dass man die Gleichungen von Omar-e Khayyam und „ganze Familien ähnlicher Gleichungen“¹⁹⁸ mit Hilfe einer allgemeinen Methode berechnen kann. Diese seltsame Persönlichkeit, die nur Schwarz trug, immer einen schwarzen Hahn mit sich trug und den Tag des Jüngsten Gerichtes zwischen 1688 und 1700 ansetzte, ist der Erfinder des natürlichen Logarithmus sowie des Napierschen Logarithmus. Napiers Erkenntnis beim Lösen von Gleichungen lag darin, alle Terme einer Gleichung auf die linke Seite zu bringen und diese gleich Null zu setzen. Gleichungen, die auf der rechten Seite nur eine Null hatten, nannte er „Gleichungen mit nichts“.¹⁹⁹

Was bringt nun diese Umformung? Der Produkt-Null-Satz, wie es in vielen Fachbüchern heute heißt, besagt, dass ein Produkt von zwei oder mehreren Faktoren genau dann null ist, wenn mindestens einer oder alle dieser Faktoren null ist.²⁰⁰ Dieser mag zu Beginn keine Verbindung zu den Gleichungen haben, doch Napier erkannte den Zusammenhang. Versuchen wir nun seine Gedanken zu verfolgen:

- An erster Stelle würde Napier in al – Ḥwārizmī's Gleichung $x^2 + 8x + 2x = 39$ alle Terme auf die linke Seite bringen, wenn möglich die Terme zusammenfassen und diese gleich null setzen, d.h. $x^2 + 10x - 39 = 0$
- Jetzt kommt der springende Punkt. Die linke Seite kann zu einem Produkt umgeformt werden und zwar zu $(x - 3) \cdot (x + 13) = 0$. Die linke Seite der Gleichung ist genau dann null, wenn entweder $x - 3 = 0$ oder $x + 13 = 0$ oder beide gleich null sind. Die Gleichung $x - 3$ ist null, wenn $x = 3$ ist, da $3 - 3 = 0$. Aus der Gleichung $x + 13 = 0$ folgt, dass $x = -13$ ist, da $-13 + 13 = 0$.²⁰¹

„Diese Methode funktioniert immer, wenn das x , das wir suchen, eine rationale Zahl ist. In dem Fall setzt man, sobald man die Faktoren gefunden hat, deren Multiplikation die ursprüngliche „Gleichung mit nichts“ ergibt, jeden wiederum mit null gleich und liest den resultierenden Wert von x ab, der die Gleichung erfüllt.“²⁰²

¹⁹⁷ vgl. Kaplan (2006), S. 142

¹⁹⁸ Kaplan (2006), S. 142

¹⁹⁹ vgl. ebd., S. 143

²⁰⁰ vgl. Friedrich Adolf (2013), S. 2

²⁰¹ vgl. Kaplan (2006), S. 144

²⁰² Kaplan (2006), S. 144

Durch Tricks und Regeln kommt man zu den Faktoren und nähert sich gleichzeitig dem Mysterium Null an.

Ein Verfahren, das zum Ergebnis leitet, ist das Verfahren des Klammersetzens. Möchte man die Linearfaktorzerlegung, wie es heute heißt, von der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ ermitteln, so setzt man Klammern um die Variablen, bildet das Produkt und setzt sie gleich null, sprich

$(x) \cdot (x) = 0$. Um auf die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ zu kommen, wird zuerst $+1$ an jedem x in den Klammern angehängt, funktioniert es nicht damit, dann versucht man das Ganze mit -1 . Für $(x + 1) \cdot (x + 1) = 0$ erhält man $x^2 + 2x + 1 = 0$ und kann feststellen, dass

$x^2 - 1 \neq x^2 + 2x + 1$ ist. Wird das Prozedere für -1 wiederholt, so ergibt sich

$x^2 - 1 \neq x^2 - 2x + 1$. Ersichtlicher Weise funktionieren beide Zahlen nicht, doch die einzige Zahl, die in Frage kommt, ist die Zwei. Damit der Term $2x$ nicht vorkommt, muss sich das x beim Multiplizieren mit der Zahl 1 aufheben. Dies ist wiederum nur dann möglich, wenn eine Klammer mit $+1$ und die andere mit -1 ergänzt wird, d.h.

$(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$. Die Terme $+x - x$ heben sich auf, sie ergeben also zusammen Null. Die Differenz zweier Quadratzahlen lässt sich allgemein als

$(a^2 - b^2) = 0$ anschreiben und wird in $(a - b) \cdot (a + b) = 0$ zerlegt. Werden die beiden Quadratzahlen festgestellt, so ist die große Hürde bewältigt. Alle Gleichungen, die in die Form $(a^2 - b^2) = 0$ gebracht werden können, lassen sich nach diesem Schema lösen.²⁰³

Einige Jahrhunderte vor Napier konnten indische Mathematiker schon anspruchsvolle Gleichungen lösen. Auffallend in dieser Ebene ist *Mahāvīra*, der komplexe Gleichungen wie $\frac{x}{4} + 2\sqrt{x} + 15 = x$ trotz der Unkenntnis des Gleich-Null-Setzens lösen konnte. Das Verfahren von Napier und weiteren Mathematikern, die dazu beigetragen haben, Gleichungen unkompliziert zu lösen, brachten zwar eine Erleichterung in die Algebra und Arithmetik, doch der Bezug zum Alltag wurde tief in der Sprache der Mathematik begraben. Mit Hilfe von Gleichungen wurden Flächen, Längen und Konstanten in einem einzigen mathematischen Ausdruck verpackt. Folglich sind Gleichungen mit Variablen von größeren Potenzen als drei möglich, also Dimensionen, die die menschliche Vorstellungskraft übertreffen.²⁰⁴ Aus der Seele der Nicht-Mathematikgenies schreibt Robert Kaplan: „Die Zahlen wurden wie die Null

²⁰³ vgl. Kaplan (2006), S. 145ff (145-148)

²⁰⁴ vgl. ebd., S. 87f

unsichtbar: Sie beschrieben nicht länger Objekte, sondern wurden selbst zu Objekten - zu verfeinerten Objekten.“²⁰⁵

²⁰⁵ Kaplan (2006), S. 88

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Dem Mitspieler Null begegnet man auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Stochastik entwickelte sich erst nach der Akzeptanz der Null und ihrem Zwilling - der Unendlichkeit. In dem Abschnitt „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ werden einige von vielen Anwendungen der Zahl Null in Stochastik vorgeführt. Da immer versucht wurde einen historischen Zusammenhang zu erstellen, wird zunächst einer der bedeutendsten Entdecker der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Wette vorgestellt. Danach werden die Null-Eins-Gesetze vorgestellt und bewiesen, die heutzutage öfters angewendet werden.

3.1 Blaise Pascal, Erfinder der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der französische Mathematiker und Naturwissenschaftler Blaise Pascal ist im Jahr 1623 als Sohn von Etienne und Antoinette Pascal geboren und gehörte dem vom Richterstand abstammenden Adel Auvergne an.²⁰⁶ Pascal ging nie in die Schule, stattdessen wurde er von seinem Vater nach den Methoden von Michel de Montaignes unterrichtet. Dieser war der Überzeugung, dass Kinder nie überfordert werden sollten und ihrer psychologischen Entwicklung nach unterrichtet werden sollten. Etienne lehrte seinem Sohn anfangs Inhalte die dem Alltag betreffen und beschloss im weiteren, ihm die Sprachen Latein, Altgriechisch und Italienisch beizubringen. In der Zeit, in der sich Pascal den Sprachen widmen sollte, war es ihm nicht zugelassen, sich mit der Mathematik zu beschäftigen. Doch Pascal konnte seine Liebe zur Mathematik nicht unterdrücken und brachte sich selbst die Grundlagen der Mathematik, unter anderem den 32. Lehrsatz von Euklid bei.²⁰⁷

Durch die Unterstützung seines Vaters veröffentlichte Pascal bereits mit 16 Jahren seine erste Abhandlung im Bereich Mathematik. Die Veröffentlichung zeigt, dass der Mathematiker Desargues einen großen Einfluss auf Pascal geübt hat. In den folgenden Jahren entwickelte Pascal eine Rechenmaschine, die als Hilfsmittel in der Steuerberechnung diente. Nach dem Modell des Pascalschen Rechners wurden andere Rechner entworfen.²⁰⁸

²⁰⁶ vgl. Attali (2007), S. 21f

²⁰⁷ vgl. Schmidt-Biggemann (1999), S. 9ff

²⁰⁸ vgl. Struik (1976), S.116f

Auf physikalischem Gebiet beschäftigte sich Pascal vor allem mit dem Vakuum, also mit der Leere. Ihm gelang mithilfe seines Vaters und Pierre Petit den Atmosphärendruck nachzuweisen und er entwarf das Barometer zur Luftdruckmessung. So geschah es, dass er im Alter von 25 Jahren die Existenz von Vakuum nachwies. Ihm gelang als Erster, die seit Aristoteles bestehende Theorie, der Nicht-Existenz von Vakuum, zu widerlegen.²⁰⁹

Im selben Alter beschloss er, dem Port Royal beizutreten und ein jansenistisches Leben zu führen. Während dieser Zeit beschäftigte er sich nicht mehr intensiv mit der Wissenschaft, sondern wandte sich der Theologie zu. Er gilt neben Fermat, mit der er in ständigem Briefwechsel stand, als Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Jahre 1664, einige Jahre nach seinem Tod, wurde seine Abhandlung über das „arithmetische Dreieck“, das unter Anwendung des Binomialkoeffizienten konstruiert wird, veröffentlicht. Neben diesen bedeutenden Leistungen konnte Pascal die Methode der vollständigen Induktion ausformen.²¹⁰ Das Genie schloss nach langjähriger Erkrankung im August 1662 im Alter von 39 Jahren im Kloster Port Royal endgültig seine Augen. Seinen Namen hören wir immer noch in Mathematik, Physik und in der Religionsphilosophie.

3.2 Wetten, Gott existiert?

Der Genie Pascal fand in der Null und der Unendlichkeit den Gott. Infolge einer Inspiration im November 1654 wandte sich Pascal von den Naturwissenschaften ab und widmete sich der Theologie und der Religionsphilosophie. Doch diese Entscheidung hielt ihn nicht davon ab, auf die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu setzen.²¹¹ Zu seinen Theorien über die Wahrscheinlichkeitsrechnung gelangte Pascal mit der Frage von Chevalier de Mé^{re}. Chevalier spielte öfters Glücksspiele und wollte wissen, wie der Einsatz beim Münzwurf aufzuteilen ist, wenn das von zwei Personen gespielte Münzwurfspiel unterbrochen wird und das Spiel 1:0 steht. Diese Frage beantwortete Pascal im Briefwechsel mit Pierre de Fermat und setzte somit die Bausteine der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Besondere an deren Erkenntnis war, dass Vorhersagen über zukünftige Ereignisse gemacht werden können.²¹²

²⁰⁹ vgl. Attali (2007), S. VII

²¹⁰ vgl. Struik (1976), S.114ff (114-117)

²¹¹ vgl. Seife (2002), S. 114f

²¹² vgl. Beutelspacher (2010), S. 102ff

In Stochastik hat sich Pascal Blaise jedoch mit seiner Wette einen Namen gemacht. Die Wette wird in den Pensées, die eine Zusammenfassung von Pascals Notizen sind, dargestellt. Dieses Werk gehört zu den Klassikern der Philosophie und besonders der Religionsphilosophie. In der Wette schildert Pascal, dass es den Menschen nicht zugänglich ist zu wissen, ob Gott tatsächlich existiert. Jedoch muss sich der Mensch entscheiden, ob er daran glaubt oder nicht, eine Nicht-Entscheidung gibt es nicht. Glaubte der Mensch an den Gott - für Pascal kam nur der christliche Gott in Frage - und existiert er wahrhaft, so gibt es für ihn unbegrenzte Belohnungen im Jenseits. Wenn er glaubt und Gott nicht existiert, hat der Mensch nichts verloren, da er nach dem Tod im Nichts landet. Lehnt er hingegen die Existenz Gottes ab, aber existiert Gott, so kommt er aus der ewigen Hölle nicht heraus. Hält der Mensch die Existenz von Gott für unmöglich und stimmt seine Überzeugung, so passiert ihm nichts, da er im Nichts endet. Daher gewinne nach Pascal jener, der auf die Existenz Gottes wettet. So befindet sich der Mensch nämlich auf der sicheren Seite.²¹³

3.2.1 Entscheidungssituation vom Typ „Pascalscher Wette“

Bevor die Entscheidungssituationen diskutiert werden, muss geklärt werden, was die Wahrscheinlichkeit 0 und 1 bedeuten. Die Wahrscheinlichkeit ist eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Wahrscheinlichkeit 0 bedeutet, dass das Zutreffen eines Ereignisses fast sicher ist. Die Wahrscheinlichkeit 1 bedeutet, dass das Ereignis fast sicher eintritt.

In den folgenden Ausführungen wird versucht Pascals Wette, die von Esther Ramharter in die heutige Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung übertragen wurde, nachzugehen. Dabei setzt sie G als „Gott existiert“ und $\bar{G}$ als „Gott existiert nicht“. Nachdem es sich um eine Wette handelt, stellen W_G „auf Gottes Existenz setzen“ und $W_{\bar{G}}$ „auf Gottes Nicht-Existenz setzen“ die Strategien dar, die der Mensch zu wählen hat. Eine weitere Alternative für W_G und $W_{\bar{G}}$ kennt Pascal nicht. Je nachdem, für welche Strategie man sich entscheidet und welche Umweltzustände anwachsen, entspringt aus der Entscheidung der Gewinn. Die Rahmen dieses Problems werden von der mathematischen Entscheidungstheorie formuliert.²¹⁴

„Gegeben sei ein Entscheidungsproblem in strategischer Form bei Risiko, d.h. ein Tupel $\Delta = (S, Z, p, \Pi)$ mit Strategiemenge $S = \{ W_G, W_{\bar{G}} \}$, Zustandsmenge [Ausgänge]

²¹³ vgl. Ramharter, Esther (2013): Alles oder dreimal alles? Pascals Wette in historisch-wissenschaftstheoretischem Kontext [online] S. 1f,

<http://homepage.univie.ac.at/esther.ramharter/pascalswette.pdf> [02.03.2018].

²¹⁴ vgl. ebd., S. 2,

$Z = \{G, \bar{G}\} [\dots]$ und Auszahlungsmenge $\Pi = \{v_{G,W_G}, v_{\bar{G},W_G}, v_{G,W_{\bar{G}}}, v_{\bar{G},W_{\bar{G}}}\}$ (alle Elemente aus $\mathbb{R}$). Die Funktion $\pi(s, z)$ mit $s \in S, z \in Z$ und Werten aus Π sei durch folgende Tabelle festgelegt:

$\pi(s, z)$	Gott existiert $z = G$	Gott existiert nicht $z = \bar{G}$
Wette, dass G $s = W_G$	v_{G,W_G}	$v_{\bar{G},W_G}$
Wette, dass nicht G $s = W_{\bar{G}}$	$v_{G,W_{\bar{G}}}$	$v_{\bar{G},W_{\bar{G}}}$

p sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Z , d.h. insbesondere $p(\bar{G}) + p(G) = 1$. Die Erwartungswerte für die beiden Strategien ergeben sich entsprechend:

$$E(W_G) = p(G) \cdot v_{G,W_G} + p(\bar{G}) \cdot v_{\bar{G},W_G} = p(G) \cdot v_{G,W_G} + (1 - p(G)) \cdot v_{\bar{G},W_G}$$

$$E(W_{\bar{G}}) = p(G) \cdot v_{G,W_{\bar{G}}} + p(\bar{G}) \cdot v_{\bar{G},W_{\bar{G}}} = p(G) \cdot v_{G,W_{\bar{G}}} + (1 - p(G)) \cdot v_{\bar{G},W_{\bar{G}}} \quad {}^{215}$$

Hierbei gibt $E(W_G)$ den Gewinn an, wenn auf Gottesexistenz gesetzt wird und $E(W_{\bar{G}})$, wenn auf Nicht-Existenz Gottes gesetzt wird. Die Entscheidung unter Risiko meint, dass die Entscheidungswahrscheinlichkeit bekannt ist.²¹⁶ Wie bereits erwähnt, geht aus Pascals Argumentationen in den Pensées hervor, dass W_G , die Strategie sein soll, die sich bewährt. Er zieht also die Strategie W_G der Strategie $W_{\bar{G}}$ vor. In der folgenden Aufzählung werden die Kriterien aus der Entscheidungstheorie aufgezählt, die auf die Pascalsche Wette wirken.

1. Absolute Dominanz [A]: Die Strategie W_G dominiert die Strategie $W_{\bar{G}}$ absolut, wenn sogar das ungünstigste Ergebnis der Strategie W_G nicht schlechter ist, als das günstigste Ergebnis der Strategie $W_{\bar{G}}$.²¹⁷ Nach Ramharter folgt für absolute Dominanz:

$$\min\{v_{G,W_G}, v_{\bar{G},W_G}\} \geq \max\{v_{G,W_{\bar{G}}}, v_{\bar{G},W_{\bar{G}}}\}$$
2. Zustandsdominanz [Z]: Die Strategie W_G dominiert die Strategie $W_{\bar{G}}$, wenn alle Ausgänge von W_G mindestens gleich gut sind, wie die Ausgänge der Strategie $W_{\bar{G}}$.²¹⁸
 Es liegt also eine Zustandsdominanz vor, wenn $v_{G,W_G} \geq v_{G,W_{\bar{G}}}$ und $v_{\bar{G},W_G} \geq v_{\bar{G},W_{\bar{G}}}$ ist.

²¹⁵ Ramharter, Esther (2013): Alles oder dreimal alles? Pascals Wette in historisch-wissenschaftstheoretischem Kontext [online] S. 2f, <http://homepage.univie.ac.at/esther.ramharter/pascalswette.pdf> [02.03.2018].

²¹⁶ vgl. Novak, Andreas: [online] S.1 <http://homepage.univie.ac.at/andreas.novak/qm1.pdf> [02.03.2018].

²¹⁷ vgl. ebd., S.1,

²¹⁸ vgl. ebd., S.2,

3. Strenge Zustandsdominanz [SZ]: Sie sieht vor, dass alle Ausgänge der Strategie W_G nicht ungünstiger sind als die der Strategie $W_{\bar{G}}$ und dass mindestens ein Ausgang der Strategie W_G besser ist.²¹⁹
4. Stochastische Dominanz/ Wahrscheinlichkeitsdominanz [S]: Die Wahrscheinlichkeitsdominanz tritt ausschließlich bei Entscheidungsproblemen unter Risiko auf. Das Ergebnis jeder Strategie W_G kann als Zufallsvariable betrachtet werden.²²⁰

$$p(\pi(W_G, z) > \pi) > p(\pi(W_{\bar{G}}, z) > \pi) \quad \forall \pi \in \Pi \quad \text{und} \quad p(\pi(W_G, z) > \pi) > p(\pi(W_{\bar{G}}, z) > \pi) \text{ für mindestens ein } \pi \in \Pi$$
²²¹
5. Als letztes wird die „Maximierung des Erwartungswertes“ [E] von Esther Ramharter erwähnt. Aus dieser geht hervor, dass der Erwartungswert von der Strategie W_G größer als die der Strategie $W_{\bar{G}}$ sein soll, d.h. $E(W_G) > E(W_{\bar{G}})$. Die stochastische Dominanz impliziert die Maximierung des Erwartungswerts, wobei die Umkehrung nicht zugelassen ist.²²²

Eine Entscheidungssituation von Typ „Pascalsche Wette“ ist eine Entscheidung, die alle Ausgänge dominiert. Damit die Strategie W_G den anderen Strategien vorgezogen werden kann, muss $v_{G,W_G} = N$ das Maximum aller Ausgänge sein und „hinreichend groß“ sein. Pascal geht sogar von einem „unendlichen“ Gewinn aus. Im Falle $v_{G,W_G} = v_{G,W_{\bar{G}}} = N$ liegt keine Pascalsche Wette vor.²²³

Setzt man nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Gewinn, den ein Leben ohne ein Glauben an Gottesexistenz bringt, wenn es Gott gibt, gleich 1, so ist $N \gg \max\{v_{G,W_G}, v_{G,W_{\bar{G}}}, 1\}$. Aus den oben erwähnten Kriterien der Entscheidungsprobleme für die Dominanz der Strategie W_G über die Strategie $W_{\bar{G}}$ folgt:²²⁴

²¹⁹ vgl. Ramharter, Esther (2013): Alles oder dreimal alles? Pascals Wette in historisch-wissenschaftstheoretischem Kontext [online] S. 3,

<http://homepage.univie.ac.at/esther.ramharter/pascalswette.pdf> [02.03.2018].

²²⁰ vgl. Novak, Andreas: [online] S.2 <http://homepage.univie.ac.at/andreas.novak/qm1.pdf> [02.03.2018].

²²¹ Novak, Andreas: [online] S.3 <http://homepage.univie.ac.at/andreas.novak/qm1.pdf> [02.03.2018].

²²² vgl. ebd., S.3,

²²³ vgl. ebd., S.4,

²²⁴ vgl. ebd., S.4f

1. Unabhängig davon, ob Gott existiert oder nicht, hat eine Person, die an Gott glaubt, kein schlechteres Leben als eine, der nicht glaubt. Der Glaubende hat sogar ein besseres Leben. Aus den Beziehungen

$$v_{G, W_G} = N$$

$$v_{\bar{G}, W_{\bar{G}}}$$

und aus $v_{\bar{G}, W_G} \geq (>) v_{\bar{G}, W_{\bar{G}}}$ folgt die Zustandsdominanz [Z] und die strenge Zusatzdominanz [SZ].

$$v_{G, W_{\bar{G}}} = 1$$

$$v_{\bar{G}, W_{\bar{G}}}$$

2. Ein Leben mit dem Glauben an Gott ist besser, als ein Leben ohne dem Glauben an Gott. Daraus resultiert die absolute Dominanz [A] mit $\min\{N, v_{\bar{G}, W_G}\} = v_{\bar{G}, W_G} \geq \max\{1, v_{G, W_{\bar{G}}}\}$ mit der Bedingung $v_{\bar{G}, W_G} \geq 1$ neben der Zustandsdominanz [Z]. Das stellt die Situation dar, bei der ein irrtümlicherweise Glaubender und auf Verbote Verzichtender, weiterhin besser dasteht, als einer der irrtümlich nicht glaubt, denn dieser wird für seinen Unglauben bestraft.

3. Ein Gläubiger gibt unter gewissen Bedingungen etwas ab.

Maximierung des Erwartungswert [E] liegt vor, wenn der Erwartungswert der Strategie W_G größer ist, als der Erwartungswert der Strategie $W_{\bar{G}}$, d.h. wenn $E(W_G) > E(W_{\bar{G}})$ gilt. Aus $E(W_G) > E(W_{\bar{G}})$ folgt, $p(G) \cdot N + (1 - p(G)) \cdot v_{\bar{G}, W_G} > p(G) \cdot 1 + (1 - p(G)) \cdot v_{\bar{G}, W_{\bar{G}}}$ (*). Ist N dominierend, so folgt aus (*)

$$N > (v_{\bar{G}, W_{\bar{G}}} - v_{\bar{G}, W_G}) \cdot \frac{1-p(G)}{p(G)} + 1.$$

4. Liegt stochastische Dominanz und strenge Zustandsdominanz vor, so liegt auch eine stochastische Dominanz vor.

Implikationen aus den Entscheidungssituationen:

Die Zustände G und $\bar{G}$ sind nicht exhaustiv (=erschöpfend), da andere Lebensweisen denkbar sind. Die Strategien sind ebenfalls nicht exhaustiv, da die Möglichkeit des Nicht-Wettens besteht. Weiters sind die Ereignisse Wette und Gottesexistenz abhängig, weil sich

Gottesexistenz und die Wettentscheidung gegenseitig beeinflussen. Weiters ist die Unendlichkeit nötig, die eine größere Menge bildet als zweier unendlicher Kardinalzahlen.²²⁵

3.2.2 Interpretation²²⁶

Das Maximum alle Ausgänge, das oben mit N bezeichnet wurde, wird nun, wie bei Pascal mit ∞ ausgedrückt. Wie Pascal richtig angenommen hat, kann ∞ auch eine unendliche Zahl darstellen. In seiner Wette lässt Pascal keine andere Strategie außer W_G und $W_{\bar{G}}$ zu, von denen eines gewählt werden muss. Dabei beschreibt er, was W_G ist und wendet sich der Alternativstrategie nicht zu.

„Wägen wir Gewinn oder Verlust für den Fall, daß wir auf Kreuz setzen, daß Gott ist [d.h. W_G]. Schätzen wir diese beiden Möglichkeiten ab: Wenn Sie gewinnen, gewinnen sie alles, wenn Sie verlieren, verlieren Sie nichts. Setzen Sie also ohne zu zögern darauf, daß er ist.“²²⁷

Diese Zeilen führen zu zwei Gedanken. Zum einen könnte Pascal eine Symmetrieüberlegung angestellt haben, sodass v_{G,W_G} und $v_{G,W_{\bar{G}}}$ dasselbe hervorrufen, wobei sich $W_{\bar{G}}$ durch ein negatives Vorzeichen unterscheidet. Dementsprechend wäre $v_{G,W_G} = \infty$ die unendliche Glückseligkeit (= Himmel) und $v_{G,W_{\bar{G}}} = -\infty$ unendliches Verdamnis (=Hölle). Da aber nicht begründet werden kann, warum $v_{G,W_G} = -v_{G,W_{\bar{G}}}$ gelten soll, ist die Annahme inkorrekt. Wird zum anderen „alles“ und „nichts“ aus dem Zitat als „ ∞ “ und „0“ begriffen, so ist die Differenz aus v_{G,W_G} und $v_{G,W_{\bar{G}}}$ gleich ∞ und die Differenz aus $v_{\bar{G},W_G}$ und $v_{\bar{G},W_{\bar{G}}}$ gleich 0.

Die Begründung mithilfe der strengen Zustandsdominanz macht den Gebrauch des Unendlichen hinfällig. Denn glaubt man an Gottesexistenz und er existiert nicht, so verliert man „nichts“ und existiert Gott und man glaubt daran, so gewinnt man etwas, weil die Wahrscheinlichkeit, dass Gott existiert ungleich Null ist ($p(G) \neq 0$). Insofern ist aus Pascals Argumentation zu entnehmen, dass er unter „nichts“ „im Vergleich zum Gewinn nichts“ meint. Folglich ist eine Argumentation mit Maximierung des Erwartungswertes anstatt mit strenger Zustandsdominanz durchzuführen. In diesem Zusammenhang sei nochmals angemerkt, dass Pascal der Überzeugung war, dass die Existenz Gottes sich nicht durch Deduktion beweisen

²²⁵ vgl. Novak, Andreas: [online] S.6 <http://homepage.univie.ac.at/andreas.novak/qm1.pdf> [02.03.2018].

²²⁶ vgl. ebd., S.7,

²²⁷ Raffelt, Albert (2002): II.“Infini rien“ (Das Fragment der „Wette“), [online] S. 2, https://www.ub.uni-freiburg.de/fileadmin/ub/referate/04/pascal/II_wette.pdf [28.03.2018]

lässt. „Gott ist, oder er ist nicht. Aber welcher Seite werden wir uns zuneigen? Die Vernunft kann hier nichts bestimmen.“²²⁸ Folglich ist $p(G) \neq 0$ und $p(\bar{G}) \neq 1$.

3.2.3 Anmerkungen zum Erwartungswert²²⁹

Unter der Annahme, dass Gottesexistenz und Nicht-Existenz 50:50 stehen, ist $p(G) = \frac{1}{2}$ und $p(\bar{G}) = \frac{1}{2}$. Der Erwartungswert ein Gläubiger zu sein beträgt ∞ . Denn als Gläubiger ist die Chance $\frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$ in den Himmel zu kommen, wenn Gott existiert und als Ungläubiger verliert man durch die Nicht-Existenz nichts, daher ist die Chance im Nichts zu landen $\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$. Aus diesen Teilprodukten resultiert der Erwartungswert $E = \frac{1}{2} \cdot \infty + \frac{1}{2} \cdot 0 = \infty + 0 = \infty$.

Der Erwartungswert für einen Nicht-Glaubenden ist $-\infty$. Wenn jemand nicht glaubt und es existiert Gott, so beträgt die Chance für ihn $\frac{1}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$ in den Himmel zu kommen (d.h. er kommt in die Hölle, daher $-\infty$). Gibt es jedoch keinen Gott und glaubt jemand auch nicht an seine Existenz, so beträgt die Chance $\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ in den Himmel zu gelangen, weil es ohne einen Gott auch keinen Himmel gibt. So folgt der Erwartungswert

$$E = \frac{1}{2} \cdot (-\infty) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\infty + 0 = -\infty.$$

Aus diesen Überlegungen zieht Pascal Blaise den Schluss, dass es sich auf jeden Fall lohnt an Gott zu glauben. Würde man annehmen, dass das Verhältnis Gottes Existenz und Nicht-Existenz 1:1 000 oder 1:1 000 000 steht, so wäre der Erwartungswert für einen Gläubigen immer noch ∞ . Allerdings funktioniert es nur mit der Wahrscheinlichkeit 0 für Gottesexistenz nicht. Denn der Erwartungswert an Gott zu glauben, wäre dann $0 \cdot \infty$ und das ist ein nicht bestimmter Ausdruck. Im 17. Jahrhundert wurden allerdings solche Überlegungen nicht angestellt und Pascal konnte mithilfe der Null und der Unendlichkeit einige überzeugen.

²²⁸ Raffelt, Albert (2002): II. „Infini rien“ (Das Fragment der „Wette“), [online] S.2, https://www.ub.uni-freiburg.de/fileadmin/ub/referate/04/pascal/II_wette.pdf [28.03.2018]

²²⁹ vgl. Seife (2002), S. 116f

3.3 Null-Eins-Gesetze

3.3.1 Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung

In diesem Abschnitt werden die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung geklärt, die in den folgenden Kapiteln immer wieder gebraucht werden.

Einer der wichtigsten Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Ergebnismenge oder der Grundraum, der gewöhnlich mit dem griechischen Großbuchstaben Ω dargelegt wird. Die Ergebnismenge beinhaltet alle möglichen Ausgänge beziehungsweise Ergebnisse eines stochastischen Ereignisses. Sie enthält alle Elementarergebnisse ω eines Zufallsexperiments. Elementarereignisse sind einelementige Teilmengen von Ω . Die leere Menge $\emptyset$ sowie die Ergebnismenge Ω selbst sind Teilmengen von Ω . Dabei steht die leere Menge $\emptyset$ für das unmögliche Eintreten eines Ereignisses. Jedes Ereignis eines Zufallsexperiments kann als Teilmenge von Ω identifiziert werden und jede Teilmenge von Ω kann als Ergebnis eines stochastischen Experiments aufgefasst werden. Das heißt ein Ereignis A ist eine Teilmenge der Ergebnismenge $A \subseteq \Omega$. Gilt $A = \Omega$, so spricht man vom sicheren Ereignis, das bedeutet, dass das Ereignis auf jeden Fall eintreten wird.²³⁰

Definition σ - Algebra:

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω ($A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \subseteq \Omega$) heißt σ - Algebra, falls:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (2) Falls $A \in \mathcal{A}$, dann ist $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$. (D.h. wenn A eine Teilmenge von $\mathcal{A}$ ist, dann ist auch ihr Komplement eine Teilmenge von $\mathcal{A}$.)
- (3) Falls $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, dann ist $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Definition Wahrscheinlichkeitsraum:

Ist $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ - Algebra auf Ω und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$, so bezeichnet man $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ als Wahrscheinlichkeitsraum.

²³⁰ vgl. Henze (2017), S. 2, S.5

Definition Wahrscheinlichkeitsmaß:

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf Ω . Eine Funktion $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß falls:

- (1) $\forall A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0$
- (2) $P(\Omega) = 1$
- (3) Falls $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ und paarweise disjunkt, dann gilt $P(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} P(A_j)$.²³¹

Definition einer Zufallsvariable:

Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum. Jede Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von Ω in die Menge der reellen Zahlen heißt Zufallsvariable auf Ω .²³²

3.3.2 Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov

Der bedeutende Mathematiker des 20. Jahrhunderts, Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov, formulierte eines der Null-Eins-Gesetze, aus dem andere abgeleitet wurden. Die Null-Eins-Gesetze sind besondere Typen von Wahrscheinlichkeiten. Sie drücken aus, dass das Eintreten eines Ereignisses entweder „fast sicher“ oder „fast unmöglich“ ist.

„**Satz** (Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine *unabhängige Folge* von σ -Algebren $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$. Dann gilt für jedes terminale Ereignis A der Folge entweder $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$.“²³³

Terminal Ereignisse sind Ereignisse, deren Eintreten oder Nicht-Eintreten man auch dann entscheiden kann, wenn man den Wert von endlich vielen Zufallsvariablen nicht kennt. Bei Terminal Ereignissen ändert sich das Resultat nicht, ob ein Ereignis eintritt oder nicht, wenn die endlichen Folgenglieder abgeändert werden.

Definition (Terminal Ereignisse):

„Sei $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von σ -Algebren von Ereignissen aus $\mathcal{A}$ und

$$\mathcal{T}_n := \sigma\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \mathcal{A}_m\right)$$

²³¹ vgl. Henze (2017), S. 287

²³² vgl. ebd., S. 10

²³³ Bauer (2002), S. 46

die von allen $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}, \dots$ erzeugte σ -Algebra. Dann heißt

$$\mathcal{T}_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$$

die σ -Algebra der terminalen Ereignisse der Folge $(\mathcal{A}_n)$. Dabei ist es offensichtlich, daß $\mathcal{T}_\infty$ eine σ -Algebra ist.²³⁴

Beweis (Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov)²³⁵

Zunächst definieren wir eine σ -Algebra der terminalen Ereignisse $\mathcal{T}_\infty$ der Folge $(\mathcal{A}_n)$. Dabei sei ein beliebiges Element A von $\mathcal{T}_\infty$ und das entsprechende System $\mathcal{D}$ aller von A unabhängigen Ereignisse gegeben. So ist $D \in \mathcal{A}$ mit

$$P(A \cap D) = P(A)P(D).$$

Dafür reicht der Nachweis, dass $A \in \mathcal{D}$ enthalten ist, denn so kann man $D = A$ setzen. Aus $P(A \cap D) = P(A)P(D)$ wird durch einsetzen von A

$$P(A) = P(A)^2.$$

$\mathcal{D}$ ist ein Dynkin System, da jede von einer unabhängigen Familie von Ereignissen erzeugte Familie ein Dynkin System ist. Die oben definierte σ -Algebra $\mathcal{T}_{n+1}$ ist unabhängig von der σ -Algebra. Denn eine Familie, die durch Zerlegung in paarweise fremde Mengen von einer unabhängigen Familie durchschnittstabiler Mengen entstanden ist, ist unabhängig.

$$\tilde{\mathcal{A}}_n := \sigma(\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n).$$

Da A ein Element aus $\mathcal{T}_{n+1}$ ist, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{\mathcal{A}}_n \subset \mathcal{D}$. Insbesondere ist

$$\tilde{\mathcal{A}} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_n \subset \mathcal{D}$$

und somit ist $A \in \mathcal{D}$. $\square$

²³⁴ Bauer (2002), S. 46

²³⁵ vgl. ebd., S. 46f

3.3.3 Null-Eins-Gesetz von É. Borel²³⁶

Das Null-Eins-Gesetz von Émil Borel ist eine direkte Ableitung von Kolmogorovs Null-Eins-Gesetz. Dieses Gesetz besagt, dass der Limes superior einer Folge von unabhängigen Ereignissen entweder null oder eins ist.²³⁷

„**Korollar** (Null-Eins-Gesetz von É. Borel). Für jede unabhängige Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Ereignissen aus $\mathcal{A}$ gilt

$$P\{A_n \text{ für unendlich viele } n\} = 0 \text{ oder } = 1.$$

$$\text{d. h. } P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0 \text{ oder } 1.^{238}$$

Beweis: Sei $\mathcal{A}_n := \sigma(\{A_n\})$ eine σ -Algebra, die von A_n erzeugt wurde. Sie enthält die leere Menge $\emptyset$, sich selbst A_n , ihr Komplementärmenge $C A_n$ sowie die Ereignismenge Ω . Die Folge $\mathcal{A}_n$ ist unabhängig, da A_n eine unabhängige Familie von durchschnittsstabilen Ereignissen ist.

Für $Q_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ gilt $Q_n \in \mathcal{T}_n$, wobei $\mathcal{T}_n$ eine von allen $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}, \dots$ erzeugte σ -Algebra ist. Da die Elemente der Menge kleiner werden oder gleichbleiben, gilt $Q_m \in \mathcal{T}_n$ für jedes $m \geq n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Gleichzeitig folgt aus der Antitonia der Folge (Q_n)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = \bigcap_{k=j}^{\infty} Q_k \in \mathcal{T}_j$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Da der Limes Supremum von der Folge A_n eine Teilfolge von $\mathcal{T}_{\infty}$ ist, folgt das Null-Eins-Gesetz von É. Borel aus dem Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov.

Wenn die oben definierte σ -Algebra von Zufallsvariablen erzeugt wird, so lautet das 0-1-Gesetz von Kolmogorov folgendermaßen:

„**Satz** (Kolmogorovsches 0-1-Gesetz). Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen (mit Werten in beliebigen Meßräumen). Dann gilt für jedes terminale Ereignis, d.h. für jedes Ereignis

$$A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_m; m \geq n)$$

entweder $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$.²³⁹

²³⁶ vgl. Bauer (2002), S. 47

²³⁷ vgl. Academic dictionaries and encyclopedias, [online]

[http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/1033119#Arithmetische Eigenschaften](http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/1033119#Arithmetische_Eigenschaften) [10.03.2018].

²³⁸ Bauer (2002), S. 47

²³⁹ Bauer (2002), S. 77

3.3.3.1 Bedingungen für das 0-1-Gesetz von É. Borel ²⁴⁰

Das Null-Eins-Gesetz von É. Borel besagt, wie eben gezeigt, dass für jede stochastisch unabhängige Folge (A_n) von Ereignissen A_n eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der unendlich vielen Ereignisse A_n entweder 0 oder 1 ist, d.h. $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$ oder 1.

Entscheidend ist nun die Frage unter welchen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit von $P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$ gleich 0 oder 1 ist. Hierzu spielt das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ eine entscheidende Rolle. Für eine beliebige Folge von Ereignissen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ resultiert die Implikation

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0.$$

Definiert man nämlich den $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ als A , so ergibt sich der Zusammenhang $A \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$, woraus

$$P(A) \leq \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Die Behauptung gilt auch für $n \rightarrow \infty$.

Man kann aus der Divergenz der Reihe $\sum P(A_n)$ nicht $P(A) = 1$ folgern. Aber es reicht ein Ereignis A_0 mit $0 < P(A_0) < 1$ zu betrachten und für die Folge (A_n) , die konstante Folge mit den Elementen $A_0, A_0, A_0, \dots$ zu wählen. Die Reihe $\sum P(A_n)$ divergiert dann zwar, aber für $A := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ ist $P(A) = P(A_0) < 1$. Doch für unabhängige Folgen (A_n) kann man aus der Divergenz $P(A) = 1$ schließen, d.h. es kann auf die Umkehrung der Implikation geschlossen werden. Diese Folgerung bildet die Kernaussage des Lemmas von É. Borel und F.P. Cantelli.

²⁴⁰ vgl. Bauer (2002), S. 73f

3.3.4 Null-Eins-Gesetz von Hewitt-Savage²⁴¹

Ein weiteres Null-Eins-Gesetz beruht auf den Mathematikern Edwin Hewitt und Leonard J. Savage. Anders als das Gesetz von Kolmogorov macht dieses Gesetz Gebrauch von Symmetrieeigenschaften der Ereignisse.²⁴²

„**Satz** (Null-Eins-Gesetz von Hewitt-Savage). Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge identisch verteilter reeller Zufallsvariablen. Dann gilt für jede bezüglich

$$X = \bigotimes_{n=1}^{\infty} X_n \text{ permutierbare Menge } A \in \mathfrak{B}$$

$$P\{X \in A\} = P_X(A) = 0 \text{ oder } = 1.“^{243}$$

An dieser Stelle ist eine Anmerkung zu den oben erwähnten Begriffen vonnöten. Es handelt sich um eine endliche Permutation, wenn $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion mit $\tau(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. So kann man τ als eine Permutation eines Abschnittes $\{1, \dots, n_0\}$ von den natürlichen Zahlen deuten, die durch die identische Abbildung auf $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n_0\}$ fortgeführt werden kann. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Diese legt die Zufallsvariable $X = \bigotimes_{n=1}^{\infty} X_n$ mit Werten aus dem Meßraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathfrak{B})$, der Produkt- σ -Algebra $\mathfrak{B} := (\mathfrak{B}^1)^{\mathbb{N}}$ und deren Verteilung P_X dar. Im Fall, dass τ eine endliche Permutation von $\mathbb{N}$ ist, ist die Zufallsvariable $\tau X := \bigotimes_{n=1}^{\infty} X_{\tau(n)}$. Denn lässt man mit τ einen endlichen Abschnitt $X_1, \dots, X_{n_0-1}$ einer Folge (X_n) permutieren, so bleiben die restlichen Folgenglieder unverändert ($\tau(n) = n$ für alle $n \geq n_0$).²⁴⁴

Beweis (0-1-Gesetz von Hewitt-Savage)²⁴⁵

Sei $\pi_n: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ die n -te kanonische Projektion mit n aus den natürlichen Zahlen. Ist $\mathcal{F}_n := \sigma(\pi_1, \dots, \pi_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$, so wird die σ -Algebra $\mathfrak{B} = \sigma(\pi_1, \dots, \pi_n)$ von

$$\mathcal{A}_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ erzeugt. Durch das Anwenden der Approximationseigenschaft kann jede Menge $A \in \mathfrak{B}$ durch Mengen $C \in \mathcal{A}_0$ approximiert werden. Die Approximation kann so erfolgen, dass die Wahrscheinlichkeit der symmetrischen Differenz von A und C ($A \Delta C$) beliebig klein ist.

²⁴¹ vgl. Bauer (2002), S. 80ff

²⁴² vgl. ebd., S. 79

²⁴³ Bauer (2002), S. 80

²⁴⁴ vgl. Bauer (2002), S. 79

²⁴⁵ vgl. ebd., S. 81f

Aufgrund der Beziehung $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \dots$ hat jedes $A \in \mathfrak{B}$ eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und Ereignisse $C_k \in \mathcal{F}_{n_k}$, sodass $\lim_{k \rightarrow \infty} P_X(A \Delta C_k) = 0$ gilt. Weiters sei τ_k eine Permutation mit $k \in \mathbb{N}$ von den natürlichen Zahlen, bei dem jedes $n > 2n_k$ nicht permutiert und auf der ersten Menge der $2n_k$, wie folgt wirkt:

$$\begin{pmatrix} 1, \dots, n_k & n_{k+1}, \dots, 2n_k \\ n_k + 1, \dots, 2n_k, & 1, \dots, n_k \end{pmatrix}$$

Wegen der Permutierbarkeit der Menge $A \in \mathfrak{B}$ ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_k X \in A\} = \{X \in A\}.$$

Aufgrund der Ereignisse $C_k \in \mathcal{F}_{n_k}$ gibt es eine Borelsche Menge $B_k \in \mathfrak{B}^{n_k}$ aus $\mathbb{R}^{n_k}$ mit

$$C_k = \{(\pi_1, \dots, \pi_{n_k}) \in B_k\}.$$

So kann man

$$M_k := \{(\pi_{\tau_k(1)}, \dots, \pi_{\tau_k(n_k)}) \in B_k\} = \{(\pi_{n_k+1}, \dots, \pi_{2n_k}) \in B_k\} (*)$$

setzen. Somit ist M_k in $\sigma(\pi_n; n \geq n_k + 1)$. Da die Folge (π_n) unabhängig von P_X ist und die Ereignisse C_k in $\mathcal{F}_{n_k}$ sind, sind C_k und M_k unabhängig voneinander. Dementsprechend folgt

$$P_X(C_k \cap M_k) = P_X(C_k) \cdot P_X(M_k). (**)$$

Insofern ist die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht abhängig und ist mit den Zufallsvariablen X_n identisch verteilt. Aus diesem Grund besitzen X und $\tau_k X$ die Verteilung

$$P_X = (P_{X_1})^{\mathbb{N}} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$$

und jedes μ_n ist gleich P_{X_1} . Aus (*) und (**) folgen die Gleichungen

$\{X \in C_k\} = \{(X_1, \dots, X_{n_k}) \in B_k\}$ und $\{X \in M_k\} = \{(X_{\tau_k(1)}, \dots, X_{\tau_k(n_k)}) \in B_k\}$, woraus sich die Gleichheit $\{\tau_k X \in C_k\} = \{X \in M_k\}$ ergibt.

Nimmt man die Gleichung $\{\tau_k X \in A\} = \{X \in A\}$ nochmals vor Augen, so gilt

$$\{\tau_k X \in A \Delta C_k\} = \{X \in A \Delta M_k\}$$

und aus der Gleichheit der Verteilungen von X und $\tau_k X$ folgt auch für $k \in \mathbb{N}$

$$P_X(A \Delta C_k) = P_X(A \Delta M_k). (***)$$

So stellt man fest, dass $A \Delta (C_k \cap M_k) \subset (A \Delta C_k) \cup (A \Delta M_k)$ ist und

$$P_X(A \Delta (C_k \cap M_k)) \leq P_X(A \Delta C_k) + P_X(A \Delta M_k) = 2P_X(A \Delta C_k).$$

Aus der approximierten Folge C_k ergibt sich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_X(A \Delta (C_k \cap M_k)) = 0$$

und insbesondere auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_X(C_k \cap M_k) = P_X(A).$$

Gleichzeitig ist wegen (***)

$$P_X(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_X(C_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_X(M_k)$$

und $P_X(A) = P_X(A)^2$ folgt aus (**). Letztendlich erhält man die Behauptung aus $P_X(A) = P_X(A)^2$. $\square$

4 Infinitesimalrechnung

4.1 Kartesisches Koordinatensystem

Das Koordinatensystem ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der Mathematik. Seine Erfindung durch den Philosophen und Mathematiker René Descartes wird bestritten. Descartes wurde in Frankreich geboren und in einem Jesuitenkolleg ausgebildet. Als gläubiger Christ, der die aristotelischen Lehren vertritt, lehnte er die Leere (Null) und das Unbegrenzte (Unendlichkeit) ab. Die Null steht im Zentrum der nach ihm ernannten Erfindung. Sie taucht erstmals auf der Zahlengerade im Zentrum auf und darauf folgend in den kartesischen Koordinaten.²⁴⁶ Die Bezeichnung „kartesisches Koordinatensystem“ geht auf Descartes' lateinischen Namen „Cartesius“ zurück. Obwohl das Koordinatensystem seinen Namen von Descartes hat, sind einige Charakteristika des kartesischen Koordinatensystems bei Descartes nicht vertreten, sodass seine Erfindung durch Descartes bestritten wird.²⁴⁷

Das ursprüngliche Koordinatensystem von Descartes besitzt in seinem Hauptwerk „La Geometrie“ nicht zwei Achsen, sondern nur eine Achse. Descartes verwendete auch ein rechtwinkliges Koordinatensystem, doch bevorzugte dieses nicht. Die Tatsache, dass alle Punkte der Ebene durch Punkte im Koordinatensystem erfasst werden können, stammt ebenfalls nicht von Descartes, sondern geht auf Nicolas Oresme zurück. Descartes war auch nicht der Erste, der die Kurven durch Koordinaten beschrieb. Dieses ist mehr dem Mathematiker Pierre de Fermat zuzuordnen. Sein wichtigster Beitrag zum Koordinatensystem war die Einteilung der Kurven nach deren Grad, die als Grundlage das Koordinatensystem verwendeten.²⁴⁸

Descartes' Koordinatensystem ist also nur in Ansätzen dem gegenwärtigen Koordinatensystem ähnlich. Ein weiterer bedeutender Unterschied ist, dass Descartes keine negativen Achsen kannte. Die gegenwärtige Form des kartesischen Koordinatensystems stammt vom

²⁴⁶ vgl. Seife (2002), S. 106f

²⁴⁷ vgl. Ramharter, Esther (2005): Ist das kartesische Koordinatensystem kartesisch? [online] S. 27f, <http://homepage.univie.ac.at/esther.ramharter/cartkord.pdf> [02.03.2018].

²⁴⁸ vgl. ebd., S. 27ff,

Mathematiker Newton. Er erweiterte das Koordinatensystem um die negativen Zahlen und baute es weiter auf.²⁴⁹

Descartes setzte das Fundament, um geometrische Objekte, wie Quadrate, Rechtecke, Kreise, Wellen, etc., mit Hilfe von Gleichungen zu beschreiben und sie im Koordinatensystem darzustellen. Damit wurde die Brücke zwischen der Geometrie Europas und der Algebra des Orients geschaffen, die heute eine Einheit bilden. Seitdem können geometrische Objekte mit der Gleichung $f(x, y) = 0$ ausgedrückt werden. Die Null wird somit ein Teil jeder Figur.²⁵⁰

Die Darstellung der Punkte im Koordinatensystem ermöglicht die Abbildung der Bewegungsabläufe von dynamischen Körpern, die sich auf gekrümmten Bahnen bewegen. Seit der Antike arbeitet man mit geraden Kurven, doch der Umgang mit krummen Linien rückte ab dem 17. Jahrhundert in den Vordergrund. Man begann sich mit der Frage nach der Steigung einer krummen Linie zu beschäftigen. In diesem Zusammenhang begegnet man der Null an vielen Stellen, die in den folgenden Abschnitten diskutiert werden sollen.

4.2 Steigung von Kurven

4.2.1 Steigung einer Gerade

Die Steigung einer Gerade lässt sich einfach und schnell berechnen. Nimmt man an, dass ein Auto einen Hügel hinauffährt, d.h. von Punkt A zum Punkt P fährt, so ist die vertikale Entfernung dieser Punkte die Steigung, die in der Abbildung mit dem Buchstaben y gekennzeichnet ist. Dabei bezeichnet x die horizontale Entfernung von Punkt A und P. Die Steigung hat den Wert $\frac{y}{x}$.

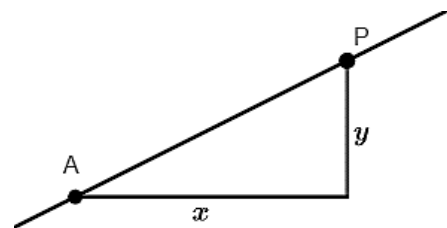


Abbildung 17: Steigung einer Gerade

Bezeichnen A und P hingegen zwei Punkte auf einer Gerade im Koordinatensystem, so lässt sich die Steigung aus der Differenz der beiden Punkte berechnen. Sei $A = (x_1 | y_1)$ $P = (x_2 | y_2)$.

So ist die Steigung definiert als $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

²⁴⁹ vgl. Seife (2002), S. 106

²⁵⁰ vgl. ebd., S. 108

4.2.2 Steigung einer krummen Linie²⁵¹

Die oben beschriebene Formel zur Berechnung der Steigung einer Gerade kann bei Kurven nicht angewendet werden, da die Steigung einer Kurve nicht in jedem Punkt gleich ist. Diese Tatsache ist unter dem Namen Tangentenproblem bekannt. Die Steigung in der abgebildeten Funktion f kann nicht berechnet werden, aber die Steigung in einem beliebigen Punkt auf der Funktion kann seit dem 17. Jahrhundert berechnet werden. In Folgendem wird die moderne Form zur Berechnung der Steigung im Punkt P vorgeführt.

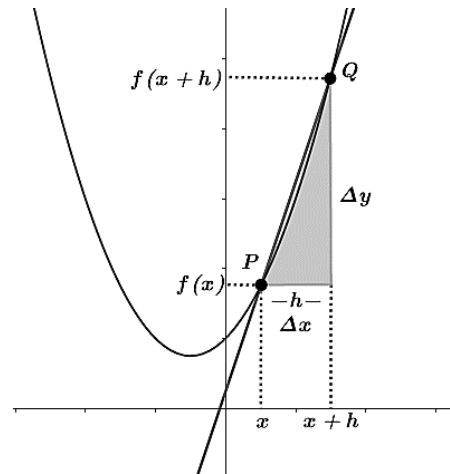


Abbildung 18: Steigung einer Kurve

Die Steigung der Gerade, die durch die Punkte Q und P verläuft, lässt sich mit der obigen Formel berechnen:

Sei $P = (x|f(x))$ und $Q = (x+h|f(x+h))$, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, die

Steigung der Gerade durch P und Q . Das ist aber die Sekantensteigung und nicht die Steigung in dem Punkt P . Um die Steigung im Punkt P zu bestimmen, lässt man den Punkt Q zum Punkt P auf der Funktion zulaufen. So wird h immer kleiner und letztendlich null. Aus einer Sekante durch die Punkte Q und P wird eine Tangente, die die Funktion nur in dem Punkt P berührt. Da h gegen Null läuft, folgt zur Bestimmung der Steigung in einem beliebigen Punkt $P = (x_0|f(x_0))$ die Formel:

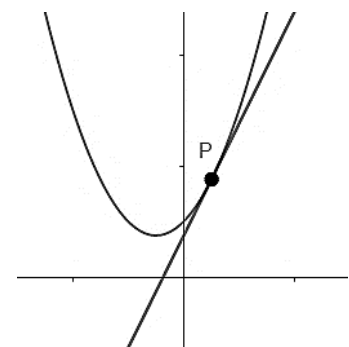


Abbildung 19: Tangente im Punkt P

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Wird an der Stelle von h die Bezeichnung Δx verwendet, so geht die Formel

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\Delta x}$$

hervor. Existiert in einem Punkt P , der auf der Funktion liegt, die Steigung so sagt man, dass die Funktion in diesem Punkt differenzierbar ist.

²⁵¹ vgl. Pforr; Schirotzek (1973), S. 10f, S. 39ff

„Definition [...]: Die in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert $\left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right]$ existiert. Dieser Grenzwert heißt 1. Ableitung oder Ableitung 1. Ordnung der Funktion f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet, also

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \text{ }^{252}$$

Die Steigung in einem Punkt P wird auch als Differentialquotient bezeichnet.

Beispiel: Gegeben sei die Gleichung $f(x) = x^2 + x + 1$ einer Funktion 2. Grades. Gesucht ist die Tangentenfunktion an der Stelle $x = 5$. Die Gleichung $f(x)$ beschreibt die Funktion des oberen Graphen.

Der Formel für Differentialquotienten zur Folge gilt:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) + 1 - (x^2 + x + 1)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x + 1 = 2x + 1 \end{aligned}$$

Die Tangentenfunktion ist $f'(x) = 2x + 1$. Die Steigung an der Stelle $x = 5$ wird durch Einsetzen von $x = 5$ in die Tangentenfunktion ermittelt: $f'(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$. Die Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 5$ beträgt somit 11.

In der gegenwärtigen Mathematik ist der Differentialquotient nichts Neues. In der Schule wird bereits gelehrt und gelernt, dass die Tangentenfunktion nichts anderes ist als die Ableitung einer Funktion. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + x + 1$ ist $f'(x) = 2x + 1$.

Die Null spielt hier wieder einmal eine besondere Rolle. Die Idee hinter dem Differentialquotienten ist die Sekantensteigung an einer Funktion durch eine Tangente zu approximieren, indem der Abstand der Punkte, die auf der Funktion und auf der Sekante liegen, zu minimieren. Der Abstand zwischen den beiden Punkten strebt also gegen Null, d.h. Δx wird beliebig klein.

²⁵² Pforr; Schirotzek (1973), S. 10-11, S. 41

4.2.3 Newtons Fluxionen

Isaac Newton und seinen Zeitgenossen war die Methode von Differentialquotienten in der Form, in der sie vorgeführt wurde, nicht bekannt. Bereits vor Newton beschäftigten sich Mathematiker wie Descartes, Fermat, Torricelli, John Wallis, Pascal, Huygens, Isaac Barrow (Lehrer von Newton) mit der Tangentenbestimmung. Etwa zeitgleich fanden Newton und Leibniz eine Lösung für das Tangentenproblem, wobei diese sich vom Aufbau und Methodik her unterschieden. Newton hat vor Leibniz die Integral- und Differentialrechnung gekannt, doch seine Arbeiten erst nach Leibniz veröffentlicht. Beide gelten heute als die Erfinder der Integral- und Differentialrechnung.²⁵³

Newton nannte seine Theorie zur Integral- und Differentialrechnung „Theorie der Fluxionen“ und kam über die endlichen Reihen von Wallis zu seiner Theorie. Vor der Entdeckung der „Fluxionen“ konnte Newton den binomischen Satz auf rationale und negative Exponenten erweitern und entdeckte die binomische Reihe. Diese Verallgemeinerung des binomischen Satzes konnte er anschließend zur Verallgemeinerung seiner Fluxionen auf alle Funktionen nutzen. Newton beschreibt seine Theorie im Zusammenhang mit den Bewegungsgesetzen.²⁵⁴

Die Methode von Newton wird anhand der Funktion $y = x^2 + x + 1$ vorgestellt.²⁵⁵ Newton nannte die Variablen x und y aus der Gleichung „Fluents“, das mit dem Begriff des „Veränderlichen“ vergleichbar ist. Er nahm nämlich an, dass sich die Fluents in Abhängigkeit von der Zeit ändern. Die Änderungsgeschwindigkeit der Fluents nannte Newton „Fluxionen“ und kennzeichnete diese mit einem übergesetzten Punkt, d.h. mit $\dot{y}$ und $\dot{x}$. Die Fluxionen sind keine Veränderliche, sie haben einen endlichen Wert. Newtons Grundgedanke bestand in der Veränderung der Fluxionen um sehr kleine Teile. So wird aus y in diesem kurzen Moment $(y + o\dot{y})$ und aus x wird $(x + o\dot{x})$. Dabei steht der Buchstabe „ o “ für Zeit, die die Veränderung in Anspruch nahm. Er steht für „eine unendlich kleine Größe“²⁵⁶, die fast null, aber nicht gleich null ist. Dazu folgt eine genauere Erklärung im Anschluss der Rechnung.

Die Gleichung $y = x^2 + x + 1$ wird durch Einsetzen von $(y + o\dot{y})$ und für $(x + o\dot{x})$ für y und x zu

²⁵³ vgl. Struik (1976), S. 117

²⁵⁴ vgl. ebd., S. 118

²⁵⁵ vgl. Seife (2002), S. 130f

²⁵⁶ Struik (1976), S. 118

$$(y + o\dot{y}) = (x + o\dot{x})^2 + (x + o\dot{x}) + 1.$$

Durch Ausmultiplizieren des Binoms $(x + o\dot{x})^2$ erhält man

$$(y + o\dot{y}) = x^2 + 2x(o\dot{x}) + (o\dot{x})^2 + x + o\dot{x} + 1.$$

Werden die Variablen geordnet, so folgt

$$(y + o\dot{y}) = (x^2 + x + 1) + 2x(o\dot{x}) + o\dot{x} + (o\dot{x})^2. (\#)$$

Durch genaues Hinschauen auf die letzte Gleichung erkennt man, dass der Ausdruck in Klammer mit der Ausgangsgleichung ident ist, daher kann von der linken Seite y und von der rechten Seite $x^2 + x + 1$ abgezogen werden, sodass die Gleichung $(\#)$ unverändert bleibt. Aus der Subtraktion ergibt sich die Gleichung

$$o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + o\dot{x} + (o\dot{x})^2.$$

Newton setzt voraus, dass „ o “ unendlich klein ist, so ist das Produkt einer Zahl mit „ o “ viel kleiner. Daher könne man nach Newton $(o\dot{x})^2$ vernachlässigen oder gleich null setzen. Somit resultiert

$$o\dot{y} = 2x(o\dot{x}) + o\dot{x}.$$

Newton setzt bei der Umformung der Gleichung mit der Division durch $o\dot{x}$ fort und erhält für die Steigung der Tangente in einem Punkt auf der Funktion die Gleichung $\frac{o\dot{y}}{o\dot{x}} = 2x + 1$. Letztendlich wird der Bruch links mit „ o “ gekürzt und es entsteht die Gleichung $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x + 1$. Aus Newtons Folgerungen folgt, dass die Größe von „ o “ zur Berechnung der Steigung nicht gekannt werden muss, da es am Ende wegfällt. Mit dieser Methode kam Newton zu richtigen Ergebnissen. Vergleicht man das Beispiel in 5.2.2, so stellt man fest, dass es tatsächlich korrekt ist.

Einige Rechenvorgänge von Newton können trotz der Richtigkeit des Ergebnisses nicht erklärt werden. Zum einen lässt er einfach einen Summanden $(o\dot{x})^2$ weg und zum anderen verschwindet einfach die „ o “. Weiters behauptet er, dass jede Potenz von $(o\dot{x})$ gleich null gesetzt werden kann, wodurch $(o\dot{x})$ ebenfalls gleich null gesetzt werden sollte. Die Division durch null ist strengstens verboten, aber Newton dividiert durch die Größe $(o\dot{x})$, die gleich null

gesetzt werden kann. Ein weiterer Verstoß der Rechenregeln beim Newton ist, dass „0“ aus $\frac{oy}{ox}$ herausgekürzt wird.²⁵⁷

In seinem Werk „Principia“ versuchte Newton mit der Einführung des Grenzwertbegriffes seine Vorstellungen „durch die Theorie der „ersten und letzten Verhältnisse“ zu erklären“²⁵⁸, doch diese war sehr kompliziert und unverständlich.

„Jene letzten Verhältnisse, die sich aus verschwindenden Größen ergeben, sind in Wahrheit nicht die Verhältnisse von letzten Größen, sondern Grenzwerte, gegen welche die Verhältnisse von unbegrenzt abnehmenden Größen stets konvergieren und denen sie sich mehr nähern als bis auf eine beliebig vorgegebene Differenz, die sich aber nie überschreiten noch wirklich erreichen, bis die „Größen unendlich klein geworden sind“ (Principia I, Sect. I, letzte Anmerkung). Größen und das Verhältnis von Größen, die in beliebiger endlicher Zeit unaufhörlich der Gleichheit zustreben und sich vor Ablauf dieser Zeit näherkommen als bis auf eine beliebige vorgegebene Differenz, werden zuletzt gleich“ (Principia I, Sect. I, Lemma I)²⁵⁹

Trotz des falschen Umgangs mit der Null leistete Newton große Fortschritte in der Integral- und Differentialrechnung. Neben ihm gelang es Gottfried Wilhelm Leibniz bedeutende Schritte in der Infinitesimalrechnung zu machen. In dem nächsten Abschnitt werden in wenigen Sätzen seine Leistungen in diesem Bereich dargelegt.

4.2.4 G.W. Leibniz' Infinitesimalrechnung

Gottfried Wilhelm Leibniz war einer der bedeutendsten Mathematiker des 17. Jahrhunderts. Er wurde in Leipzig geboren und verbrachte den größten Abschnitt seines Lebens am Hofe von Hannover, wo er Herzöge bediente. Leibniz war ein Mensch mit vielfältigen Interessen und Kompetenzen. Er befasste sich mit Mathematik, Philosophie und mit vielen anderen Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften. Wahrscheinlich war die Vielfalt seiner Interessen, der Grund für seine Bemühungen universelle Methoden zu entwickeln. Die universellen Methoden sollten als Instrument zum Erlangen und Erfinden von Wissen dienen und den Einheit des Universums verständlich machen. Die Ergebnisse seines Strebens nach einer „characteristica generalis“ und „lingua generalis“ waren Permutationen, Kombinationen, eine symbolische Logik und eine Erneuerung der mathematischen Beziehungen. Die Bedeutung einer einheitlichen Symbolik, wie es bei Leibniz der Fall war, erkennt man heute in den

²⁵⁷ vgl. Seife (2002), S. 131

²⁵⁸ Struik (1976), S. 119

²⁵⁹ Struik (1976), S. 119

Wissenschaften. Es ist nicht unerwartet, dass Leibniz als Erfinder von vielen mathematischen Zeichen gilt.²⁶⁰

Zwischen den Jahren 1673 und 1676 baute Leibniz seine Ideen zur Infinitesimalrechnung durch den Einfluss von Huygens und Werken von Descartes und Pascal auf. Im Vergleich zu Newton ging er nicht dem kinematischen Weg zur Beschreibung seines Kalküls nach, sondern wendete sich den geometrischen Erklärungen zu. Die aktuelle Schreibweise mit dx, dy, ds für das charakteristische Dreieck, sowie das Zeichen für das Integral $\int$ gehen auf Leibniz zurück. Die Begriffe „calculus differentialis“, „calculus integralis“, „Funktion“, „Koordinate“ und „Oskulieren“ sind auf Leibniz zurückzuführen. Die einfachen Symbole, wie das Gleichheitszeichen und der Malpunkt stammen ebenfalls von ihm.²⁶¹

Leibniz veröffentlichte erstmals einen Artikel über die Infinitesimalrechnung in einer Zeitschrift im Jahr 1684. Dieser Artikel war kurzgefasst und enthielt keine präzise Formulierung. Dennoch verwendete Leibniz die formale Schreibweise mit dx und dy . Weiters enthielt der Artikel die Regel $d(uv) = u dv + v du$ und die Ableitung von Quotienten. Leibniz berichtet in seinem sechsseitigen Artikel auch von der Bedingung für Extremstellen $dy = 0$ und der Bedingung für Wendestellen $d^2y = 0$. Gemeinsam mit den Brüdern Bernoulli, de l'Hospital und James Gregory schuf er den großen Teil des Wissens über die Differential- und Integralrechnung.²⁶²

Leibniz scheiterte an den gleichen Problemen, wie Newton und erhielt dieselbe Kritik. Er konnte ebenfalls nicht genau bestimmen, was das dx und das dy ist. Das dx bzw. dy war an manchen Stellen eine endliche Größe, an anderen Stellen jedoch eine kleine Zahl ungleich null, die kleiner ist als alle anderen bestimmbaren Zahlen.²⁶³

Heute ist es bekannt, dass die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist und umgekehrt. Nachdem die Differentialrechnung im Zusammenhang des Tangentenproblems diskutiert wurde, dauerte es nicht lange die Bedeutung der Integralrechnung für die Flächenberechnung zu erkennen. In diesem Kontext begegnet man der Null wieder als einem der wichtigsten Mitspieler. Folgend wird die Flächenberechnung unter einer Kurve unter dem

²⁶⁰ vgl. Struik (1976), S. 120

²⁶¹ vgl. ebd., S. 120f

²⁶² vgl. ebd., S. 121

²⁶³ vgl. ebd., S. 122

Gesichtspunkt der Null näher betrachtet, wobei diesem die Definition und Erklärung des Grenzwertes vorangehen wird.

4.3 Flächeninhaltsproblem

Die Differentialrechnung ist ein aus dem Tangentenproblem resultierendes Werkzeug, das vor allem in den Natur- und Ingenieurwissenschaften angewendet wird. Dieses unumgängliche Hilfsmittel steht sehr eng mit einem anderen Werkzeug, der Integralrechnung, in Verbindung. Die Integralrechnung kristallisierte sich aus dem Flächeninhaltsproblem von ebenen geometrischen Objekten heraus. Sowohl Integralrechnung als auch Differentialrechnung führen zu einem Grenzwertprozess.²⁶⁴

4.3.1 Grenzwert

Der Grenzwert ist ein Begriff und ein Kalkül, das erst nach der Erfindung der Infinitesimalrechnung entstanden ist. Die Probleme und Schwierigkeiten der Infinitesimalrechnung von Newton, Leibniz und deren Zeitgenossen sind auf diese Tatsache zurückzuführen. D'Alembert führte den Grenzwert ein und löste die Probleme der Infinitesimalrechnung, die mit der Null zusammenhingen, doch Cauchy war der Erste, der den Grenzwert umfassend einsetzte und das Fundament dafür lieferte.²⁶⁵

Um den Grenzwert zu definieren und verschiedene Grenzwerte zu betrachten, ist es wichtig einige Begriffe zu klären, die damit in Verbindung stehen. Hierbei werden die Begriffe Folge, Umgebung, Nullfolge und anschließend einige weitere Begriffe erläutert.

„Definition [...] Eine *Folge* in einer Menge ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen in diese Menge.“²⁶⁶

Eine Folge ist eine Abbildung, die den Elementen der Definitionsmenge, welche eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist, Elemente der Zielmenge zuordnet, d.h. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$. Dabei wird die Folge gewöhnlich mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet und es gilt $x_n = f(n)$.

²⁶⁴ vgl. Pforr; Schirotzek (1973), S. 151

²⁶⁵ vgl. ebd., S. 9

²⁶⁶ Krön, Bernhard (2014): Skriptum zur Vorlesung Einführung in die Analysis, [online] S. 12, <http://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen/Analysis.html> [28.03.2018].

Der Ausdruck $x_n = f(n)$ steht für das n -te Glied der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Liegt keine Verwechslungsgefahr vor und ist es eindeutig, dass die Folge den Index n besitzt und die Menge der natürlichen Zahlen durchläuft, kann statt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kürzer auch (x_n) geschrieben werden.²⁶⁷

Beispiel für eine Folge: Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f: n \mapsto 3n - 4$ eine Folge in $\mathbb{Z}$. Der oben beschriebenen Schreibweise zur Folge kann die Folge auch mit $(3n - 4)_{n \in \mathbb{N}}$ angegeben werden. Damit die Folgenglieder bestimmt werden, werden die natürlichen Zahlen für n in der Folge $(3n - 4)_{n \in \mathbb{N}}$ eingesetzt. Das ergibt für die ersten Folgenglieder: $-4, -1, 2, 5, 8, \dots$.

Definition einer Umgebung: Ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ in einem offenen Intervall (a, b) enthalten, so wird dieses Intervall als Umgebung des Punktes x bezeichnet.

Insbesondere hat für $\varepsilon > 0$ das offene Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, welches auch

ε – *Umgebung von x* ($U_\varepsilon(x)$) genannt wird, die Länge 2ε . Weiters bildet der Punkt $x \in \mathbb{R}$ das Zentrum des Intervalls $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, daher hat jeder Punkt, der in diesem Intervall enthalten ist, einen kleineren Abstand zum Punkt x als ε .²⁶⁸

Die Formulierung der Definition des Grenzwertes war nicht einfach. Am Ende des 16. Jahrhunderts konnte man Summen von unendlichen Reihen geometrisch darstellen, aber eine formale Angabe war noch nicht möglich. Beispielsweise wurde mit Hilfe der Abbildung gezeigt, dass die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

die Zahl 2 nicht überschreiten kann, wobei die Summenschreibweise mit Σ nicht gängig war.

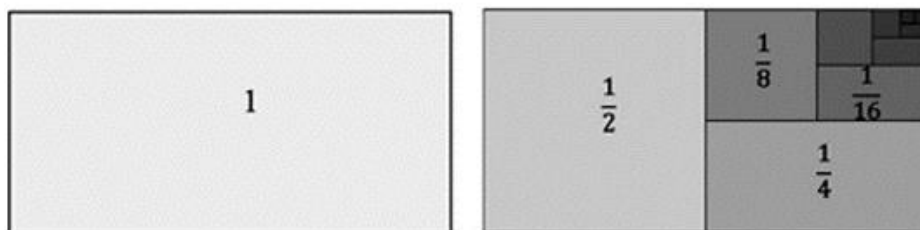


Abbildung 20: Geometrische Darstellung einer Reihe. Greefarth, Gilbert, Oldenburg et al. (2016). Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. (F. Padberg, & A. Büchter, Hrsg.) Berlin: Springer Spektrum Verlag, S. 76

²⁶⁷ vgl. Krön, Bernhard (2014): Skriptum zur Vorlesung Einführung in die Analysis, [online] S. 12, <http://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen/Analysis.html> [28.03.2018].

²⁶⁸ vgl. A. Zorich (2006), S. 60

Newton und d'Alembert verbanden mit dem heutigen Begriff des Grenzwertes dynamische und kinematische Bewegungsvorgänge. Bei Euler und Leibniz wird mit dem Grenzwert ein eher bewegungsloser Prozess verbunden, da dieser bei ihnen im Zusammenhang mit dem Differenzialquotienten in Verbindung mit „unendlich kleinen Größen“ vorkommt. Eine verbale Beschreibung des Grenzwertes, welcher als Grenze bezeichnet wird, findet man zum ersten Mal in Augustin-Louis Cauchys Lehrbuch „Cours d'Analyse“ aus dem Jahr 1821.²⁶⁹

„Wenn die einer variablen Zahlengröße successive beigelegten Werthe sich einem bestimmten Werthe beständig nähern, so daß sie endlich von diesem Werthe so wenig verschieden sind, als man irgend will, so heißt die *Grenze* aller übrigen.“²⁷⁰

Schließlich kommt es gegen Ende des 19. Jahrhunderts unter einer Formalisierung der bisher intuitiv definierten Begriffe und Prozesse der Analysis zu einer Definition von Grenzwert. Der Einfluss von Karl Weierstraß und seine Angabe der Summe einer geometrischen Reihe, war die leitende Idee einer formalen Definition des Grenzwertes.²⁷¹

Definition (Grenzwert einer Folge): Für eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt $x \in \mathbb{R}$ Grenzwert dieser Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N: |x_n - x| < \varepsilon.$$

Anders formuliert $x \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es für jedes noch so kleine Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ein x_N gibt, sodass jedes Folgenglied ab dem Folgenglied x_N in dem Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ liegt. Besitzt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$, so wird die Folge konvergent und man sagt die Folge strebt gegen den Grenzwert x . Die formale Schreibweise dafür ist $(x_n) \rightarrow x$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt divergent.²⁷²

Alle Glieder der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ liegen ab einem ausreichend großen Index n , für jedes $\varepsilon > 0$ in der ε – *Umgebung von dem Grenzwert* x , d.h in $U_\varepsilon(x)$. Aus dieser Aussage folgt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index N gibt, sodass jedes Folgenglied mit einem Index $n \geq N$ von x einen kleineren Abstand hat als ε von x . Daher liegen nur endlich viele Folgenglieder außerhalb von $U_\varepsilon(x)$ und unendlich viele - man sagt fast alle, also alle bis auf

²⁶⁹ vgl. Greefrath et al. (2016), S. 76f

²⁷⁰ Cauchy (1828), S. 3

²⁷¹ vgl. Greefrath et al. (2016), S. 77

²⁷² vgl. Krön, Bernhard (2014): Skriptum zur Vorlesung Einführung in die Analysis, [online] S. 15, <http://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen/Analysis.html> [28.03.2018].

endlich viele - liegen in $U_\varepsilon(x)$. Unabhängig davon, wie das $\varepsilon > 0$ gewählt wird, liegen nur endlich viele Glieder der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in dem Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.²⁷³

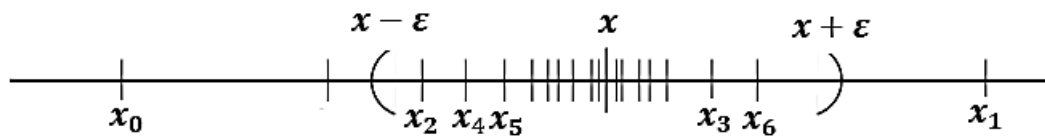


Abbildung 21: Epsilon-Umgebung von x

Die Zahl Null spielt für den Grenzwert eine wichtige Rolle. Die Definition des Grenzwertes besagt, dass der Abstand der Folgenglieder zu dem Grenzwert immer kleiner werden, sie werden aber nie Null. Newtons Vorgehensweise bei seinen Fluxionen lag darin, dass er versucht hat, den Abstand von dem Grenzwert zu den anderen Folgengliedern an manchen Stellen gleich Null zu setzen. Denselben Fehler hat auch Leibniz begangen, obwohl sie beide nicht mit Folgen gerechnet haben. Sie waren sich unsicher, wie sie mit den unendlich kleiner werdenden Größen umgehen sollten. Beide haben richtig festgestellt, dass die Größen unendlich klein werden, aber ihr Fehler lag daran, dass sie diese gleich Null gesetzt haben. Diese unendlich klein werdende Größe ist beim Grenzwert der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert. Dieser wird tatsächlich unendlich klein, aber, wie es heute feststeht, nicht null.

Satz: Eine Folge hat maximal einen Grenzwert.

Beweis:²⁷⁴ Indirekt angenommen seien a und b die Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Weiters sei a der größere Grenzwert. So bezeichnen

$$\left(b - \frac{a - b}{2}, b + \frac{a - b}{2}\right) \text{ und } \left(a - \frac{a - b}{2}, a + \frac{a - b}{2}\right)$$

die disjunkten Umgebungen der Grenzwerte. Da aber eine Folge nicht ab einem Index in einer Menge und zugleich in einer dazu disjunkten Menge enthalten sein kann, kann eine Folge auch nicht mehr als einen Grenzwert haben. Somit hat eine Folge, wenn sie einen Grenzwert hat, einen eindeutigen Grenzwert. $\square$

²⁷³ vgl. Krön, Bernhard (2014): Skriptum zur Vorlesung Einführung in die Analysis, [online] S. 15, <http://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen/Analysis.html> [28.03.2018].

²⁷⁴ vgl. ebd., S. 15,

Im 20. Jahrhundert wurde in der Infinitesimalrechnung eine topologische Definition für den Grenzwertbegriff entwickelt.

Topologische Definition von Grenzwert: „Für eine Funktion $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $A \in \mathbb{R}$ Grenzwert von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{D}: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon."^{275}$$

Aufgrund dieser Definition verloren die Folgen an Wichtigkeit und werden deshalb in der Analysis nur noch als Spezialfälle von Funktionen betrachtet.

4.3.2 Nullfolgen

Definition: „Eine Folge (a_n) heißt **Nullfolge** (in Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oder $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$), wenn es zu jeder (noch so kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß [dass] $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$.“²⁷⁶

4.3.2.1 Vergleichskriterium für Nullfolgen:²⁷⁷

Ist ab einem bestimmten Index (etwa für $n > N$) die Abschätzung $|a_n| \leq |b_n|$ von ab , und ist (b_n) offensichtlich eine Nullfolge, so ist auch die Folge (a_n) eine Nullfolge. Werden in einer Nullfolge endlich viele Glieder geändert, so ergibt es wieder eine Nullfolge.

Beweis: Nach der Voraussetzung einer Nullfolge gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, sodass $|b_n| < \varepsilon$ für $n > n_\varepsilon$, denn so ist (b_n) eine Nullfolge. Setzt man $N_\varepsilon = \max\{N, n_\varepsilon\}$, so ist für $n > N_\varepsilon$ zum einen $n > N$ und daher $|a_n| \leq |b_n|$ und $b_n \geq 0$ und zum anderen $n > n_\varepsilon$, deshalb ist sodass $|b_n| < \varepsilon$. Somit ist

$$|a_n| \leq b_n = |b_n| < \varepsilon \text{ für } n > N. \square$$

4.3.2.2 Sätze über Nullfolgen:²⁷⁸

1. „Jede Nullfolge ist beschränkt.“²⁷⁹

²⁷⁵ Greefrath et al. (2016), S. 78

²⁷⁶ Fischer, Kaul (1997), S. 34

²⁷⁷ vgl. ebd., S. 36

²⁷⁸ vgl. ebd., S. 37f

²⁷⁹ Fischer, Kaul (1997), S. 37

Beweis. Nach der Definition gibt es in einer Nullfolge (a_n) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε , sodass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$ gilt. Sei $\varepsilon = 1$, dann wird aus $n_\varepsilon = n_1$. Setzt man

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_1}|, 1\},$$

so ist $|a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

2. Nullfolgeneigenschaften

- (a) Ist (a_n) eine Nullfolge, so ist auch das Produkt $(c \cdot a_n)$ eine Nullfolge.
- (b) Seien (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann sind $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ und $(c \cdot a_n + d \cdot b_n)$ ebenfalls Nullfolgen.
- (c) Ist (a_n) eine Nullfolge und die Folge (b_n) eine beschränkte Folge, so ist auch das Produkt $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.
- (d) Ist die Folge (a_n) eine Nullfolge, so ist auch die Folge $(\sqrt{|a_n|})$ eine Nullfolge.

Beweis:

Bemerkung: Um diese Nullfolgeneigenschaften zu zeigen, reicht es ein $c > 0$ anzugeben für das Folgendes gilt: Zu jedem positiven ε gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ mit $|a_n| < c \cdot \varepsilon \forall n > N_\varepsilon$. Kann man so eine Konstante c bestimmen, so ist $|a_n| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$ mit $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{c}$.

Der Beweis für (a) folgt aus der obigen Bemerkung.

(c) Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge mit $|b_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist M das Maximum dieser Folge. Insbesondere ist daher auch $|a_n \cdot b_n| < M \cdot |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da (a_n) eine Nullfolge ist, ist nach (a) auch die Folge $(M \cdot |a_n|)$ eine Nullfolge und nach dem Vergleichskriterium ist $(a_n \cdot b_n)$ ebenfalls eine Nullfolge.

(b) Für die Nullfolgen (a_n) und (b_n) ist $\varepsilon > 0$ mit n_ε und m_ε , sodass $|a_n| < \varepsilon$ für $n > n_\varepsilon$ und $|b_n| < \varepsilon$ für $n > m_\varepsilon$ ist. Für $n > N_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ ist
 $|c \cdot a_n + d \cdot b_n| \leq |c| \cdot |a_n| + |d| \cdot |b_n| < (|c| + |d|)\varepsilon$. Somit ist nach dem Vergleichskriterium für Nullfolgen auch $(c \cdot a_n + d \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

Sind die Folgen (a_n) und (b_n) Nullfolgen, so ist die Folge (b_n) nach 1. beschränkt und daher ist nach (c) die Folge $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.

(d) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wähle $N_\varepsilon = n_{\varepsilon^2}$ so, dass $|a_n| < \varepsilon^2$ für $n > n_{\varepsilon^2}$. Somit ist $\sqrt{|a_n|} < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$ und $(\sqrt{|a_n|})$ eine Nullfolge. $\square$

3. „Jede Teilfolge einer Nullfolge ist eine Nullfolge“²⁸⁰

Eine Teilfolge wird gebildet, indem Glieder einer Folge weggelassen werden. Nach dieser Bemerkung gilt für die Teilfolge (a_{n_k}) der Folge (a_n) $n_k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist weiters $|a_k| < \varepsilon$ für $k > n_\varepsilon$, dann ist $|a_{n_k}| < \varepsilon$ für $k > n_\varepsilon$ und daher ist die Folge (a_{n_k}) eine Nullfolge. $\square$

4.3.2.3 Beispiele für Nullfolgen

Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null und heißt, harmonische Folge. Für wachsendes n werden die Brüche immer kleiner und nähern sich der Zahl Null an. Obwohl die Werte unendlich klein werden, werden sie nie Null.

Eine weitere Nullfolge ist die geometrische Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $|q| < 1$.

Beweis:²⁸¹

Zu zeigen sei $(q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ strebt gegen Null für $|q| < 1$.

Die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ liegt ab einer Stelle, d.h. ab einem Index n , in dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Für $q \neq 0$ sei $x = \frac{1}{|q|} - 1$, formt man diese Gleichung um, so erhält man $|q| = \frac{1}{1+x}$. Da $|q| < 1$ vorausgesetzt wird, ist $x > 0$. Nach der Ungleichung von Bernoulli folgt

$$|q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei weiters $(-\varepsilon, \varepsilon)$ eine beliebig kleine Umgebung von 0, so ist die Ungleichung

$$\frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

äquivalent zu der Ungleichung

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} < n.$$

Für alle Ungleichungen $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}$ ist

²⁸⁰ Fischer, Kaul (1997), S. 38

²⁸¹ vgl. Krön, Bernhard (2014): Skriptum zur Vorlesung Einführung in die Analysis, [online] S. 16, <http://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen/Analysis.html> [28.03.2018].

$$|q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass die Folge $(|q|^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ab einer Stelle in dem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ liegt. $\square$

4.3.3 Regel von de l'Hospital

Guillaume de l'Hospital war ein französischer Mathematiker des 17. Jahrhunderts, der im Militär eine Karriere bis zum Kavalleriehauptmann gemacht hat. Gleichzeitig war er der Schüler des Schweizer Mathematikers Johann Bernoulli, der sich bereits zu seiner Zeit einen Namen gemacht hat. Bernoulli kannte sich mit der Infinitesimalrechnung von Leibniz sehr gut aus und teilte l'Hospital gegen Bezahlung die Neuheiten in der Mathematik mit.

Im Jahr 1696 veröffentlichte de l'Hospital sein berühmtestes Werk zur Infinitesimalrechnung unter dem Titel „Analyse des infiniment petits“ (Untersuchung der unendlich kleinen Größen). In diesem Buch wurden die Grundlagen der Infinitesimalrechnung beschrieben und einige neue Erkenntnisse, unter anderem die „Regel von de l'Hospital“ publiziert. Die Regel von de l'Hospital trägt den Namen von l'Hospital, doch sie soll von Bernoulli stammen. Denn dieser hat bereits nach dem Tod von de l'Hospital diesen beschuldigt, seine Arbeiten abgeschrieben zu haben. Die Regel von de l'Hospital spielt in der Infinitesimalrechnung eine bedeutende Rolle, da sie zum ersten Mal ermöglicht hat, mit der Null und der Unendlichkeit, die unumgänglich sind, umzugehen.²⁸²

„Satz

Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall I differenzierbar, und für ein $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gelte entweder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}.$$

Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von x_0 und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$$

mit $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann gilt

²⁸² vgl. Seife (2002), S. 138ff

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \text{ }^{283}$$

Bevor die Regel von de l'Hospital bewiesen wird, muss noch die Definition der Differenzierbarkeit gebracht werden.

„Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x \in D$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Wir nennen diesen Grenzwert die Ableitung von f an der Stelle x . [...] Ist f an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar, so heißt f differenzierbar.“²⁸⁴

Beweis (Regel von de l'Hospital):²⁸⁵

Die Funktionen f und g werden in der Nähe von x_0 durch zwei Tangenten mit den Steigungen $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$ einander angenähert. Je näher diese Tangenten an dem Punkt x_0 kommen, desto weniger Unterschied gibt es zwischen den Funktionen und der Approximation. Daher wird der Quotient der Funktionen im Grenzwert und der Quotient der Tangenten in dem Punkt x_0 gleich und es folgen die beiden Tangentengleichungen der Funktionen im Punkt x_0 wie folgt, da die Ableitung die Steigung einer Funktion an einer Stelle x_0 angibt:

$$t_f(x) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ und } t_g(x) = g'(x_0)(x - x_0).$$

Die Funktionen f und g haben nach der Voraussetzung an der Stelle x_0 eine Nullstelle. Als Verhältnis der Tangenten ergibt sich:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{t_f(x)}{t_g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)}.$$

Durch Vereinfachen und Kürzen des letzten Ausdruckes mit $(x - x_0)$ erhält man

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{t_f(x)}{t_g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \quad \square$$

²⁸³ Plauke, Scherfner (2009), S. 212

²⁸⁴ Plauke, Scherfner (2009), S. 201

²⁸⁵ vgl. ebd., S. 212

Bispiele zur Grenzwertbestimmung unter Anwendung der Regel von de l'Hospital:²⁸⁶

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$

Sei $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x$. Für $x \rightarrow 0$ konvergieren die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegen 0. Insbesondere ist $g'(x) = 1 \neq 0$. Daher kann man die Regel von de l'Hospital anwenden und es folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} =$

Sei $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = x$. Für $x \rightarrow \infty$ streben beide Funktionen gegen ∞ und weiteres ist $g'(x) = 1 \neq 0$. So folgt nach de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

²⁸⁶ vgl. Fischer, Kaul (1997), S. 194

4.3.4 Flächeninhalt als Grenzwert²⁸⁷

Der Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion hat neben einer theoretischen Bedeutung auch eine wichtige Bedeutung in der Praxis. Neben physikalischen Aspekten können viele Vorgänge in der Natur dadurch erklärt beziehungsweise beschrieben werden. Die Fläche unter dem Graphen einer beispielsweise Zeit-Geschwindigkeit-Funktion gibt die zurückgelegte Strecke an.

Das Flächeninhaltsproblem bezieht sich, wie bereits erwähnt, ebenfalls auf den Grenzwert. Im 19. Jahrhundert lieferte Bernhard Riemann eine Erklärung für das bestimmte Integral einer Funktion mithilfe der Grenzwerte von Untersummen und Obersummen. In diesem Abschnitt wird die Approximation des bestimmten Integrals mit Obersumme und Untersumme vorgestellt.

Der Flächeninhalt einer linearen Funktion in einem bestimmten Intervall lässt sich numerisch berechnen, indem man die Fläche unter dem Graphen in Rechtecke und Dreiecke zerlegt. Dadurch erhält man einen genauen Flächeninhalt unter dem Graphen in dem angegebenen Intervall.

Beispiel: Die Fläche unter der Funktion f in der nebenstehenden Abbildung 22 im Intervall $[0,6]$ kann in ein Rechteck und in ein rechtwinkliges Dreieck geteilt werden. Die Fläche unter f im Intervall $[0,6]$ ist somit die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Vielecke.

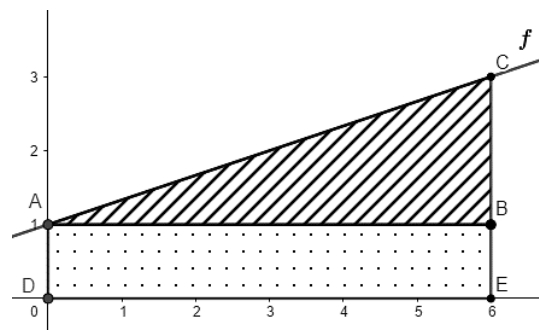


Abbildung 22: Fläche unter einer linearen Funktion

$$A_{\text{Rechteck}} = 6 \cdot 1 = 6$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$$

$$A_f = A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Dreieck}} = 12$$

Das Bestimmen der Fläche unter einer krummen Funktion ist nicht so einfach, wie das obige Beispiel, doch die Idee kann auf krumme Linien übertragen werden. Dazu wird die Fläche unter der Kurve in Rechtecke unterteilt, die alle die gleiche Breite haben. Um das Konzept mit der

²⁸⁷ vgl. Plauke, Scherfner (2009), S. 255ff (255-260)

Unterteilung der Fläche verständlich zu machen, wird versucht dieses anhand von einem Beispiel zu zeigen.

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$, deren Flächeninhalt im Intervall $[a, b]$ berechnet werden soll (siehe Abbildung 23).

Hierbei ist die Fläche zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen gemeint. Die Fläche wird in Rechtecke unterteilt, sodass auf der x-Achse die Grundseite (Breite) der Rechtecke liegen. Die Rechtecke besitzen alle dieselbe Breite, unterscheiden sich jedoch in der Höhe. Je nachdem, wie die Höhe der Rechtecke bestimmt wird, unterscheidet man zwischen Unter- und Obersumme.

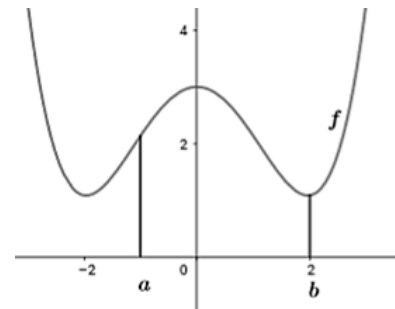


Abbildung 23: Fläche unter der Kurve im Intervall $[a, b]$

Definition (Zerlegung):

„Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Unterteilung von $[a, b]$ in n gleich große Teilintervalle mit Randpunkten $[a$ und $b]$

$$x_k = a + k\Delta x$$

($k \in \{0, \dots, n\}$) heißt Zerlegung von $[a, b]$, wobei

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

ist.“²⁸⁸

In dieser Definition gibt $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ die Breite der Rechtecke und n die Anzahl der Rechtecke an.

Die Höhe eines Rechtecks in der Untersumme entspricht dem kleinsten Funktionswert $f(x_{\min})$ in dem jeweiligen Teilintervall. Die Höhe eines Rechtecks in einer Obersumme entspricht im Gegensatz dazu dem größten Funktionswert $f(x_{\max})$ im jeweiligen Intervall.

²⁸⁸ Plauke, Scherfner (2009), S. 256

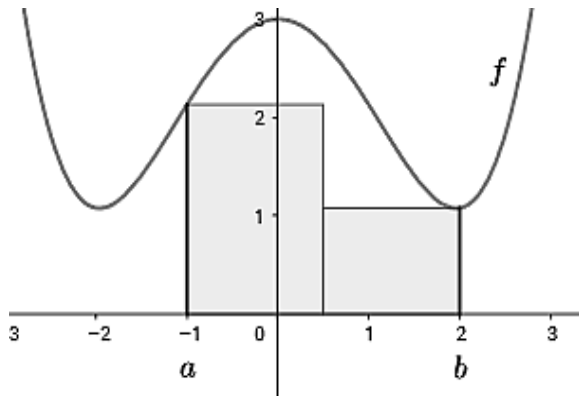


Abbildung 24: Untersumme mit der Zerlegung $n=2$

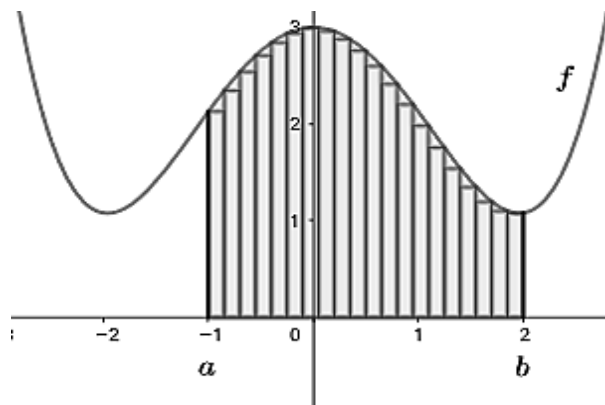


Abbildung 25: Untersumme mit der Zerlegung $n=20$

Die beiden Abbildungen 24 und 25 veranschaulichen die Untersumme der Funktion f im Intervall $[a, b]$. In der ersten Abbildung wurde die Fläche in zwei Rechtecke unterteilt und in der zweiten Abbildung in 20 Rechtecke. Die Unterteilung in 20 Rechtecke liefert eine viel genauere Approximation als die Unterteilung mit zwei Rechtecken, da wie ersichtlich die weißen Flächen in der zweiten Abbildung viel kleiner sind.

Die Untersumme lässt sich für eine Zerlegung in n Rechtecke durch die folgende Formel berechnen:

$$\begin{aligned} U_f(n) &= \Delta x \cdot f(x_{1,min}) + \Delta x \cdot f(x_{2,min}) + \dots + \Delta x \cdot f(x_{n,min}) = \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(x_{k,min}) = \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=1}^n f(x_{k,min}) = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \end{aligned}$$

Berechnet man den Flächeninhalt unter der Kurve von $f(x) = 0,13 \cdot x^4 - x^2 + 3$ mit dieser Formel, so erhält man für die obigen Zerlegungen: $U_f(2) = 4,81$ und $U_f(20) = 6,25$.

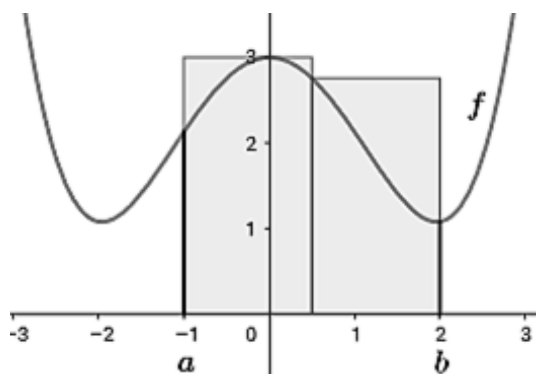


Abbildung 27: Obersumme mit der Zerlegung $n=2$

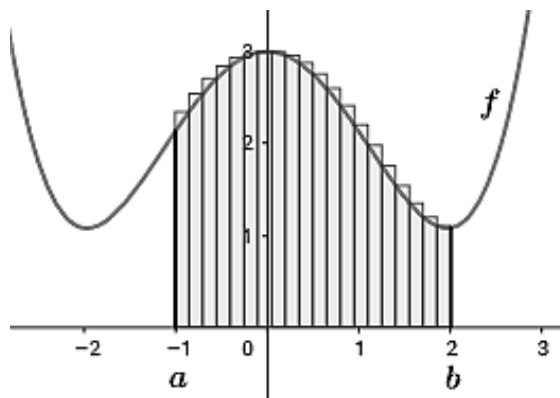


Abbildung 26: Obersumme mit der Zerlegung $n=20$

Die Abbildungen 26 und 27 zeigen die Obersumme der Funktion $f(x) = 0,13 \cdot x^4 - x^2 + 3$ im Intervall $[-1, 2]$. Bei der Obersumme ragen die Rechtecke über den Funktionsgraphen. Je kleiner die Breite der Rechtecke gewählt werden, das heißt je mehr die Fläche unter der Kurve zerlegt wird, desto weniger ragen die Rechtecke über den Graphen und dadurch wird die Approximation umso genauer.

Für die Obersumme mit n Unterteilungen und einer Rechteckbreite von Δx lässt sich durch die folgende Formel berechnen:

$$\begin{aligned} O_f(n) &= \Delta x \cdot f(x_{1,max}) + \Delta x \cdot f(x_{2,max}) + \dots + \Delta x \cdot f(x_{n,max}) = \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(x_{k,max}) = \\ &= \Delta x \cdot \sum_{k=1}^n f(x_{k,max}) = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x). \end{aligned}$$

Die Obersumme der Funktion $f(x) = 0,13 \cdot x^4 - x^2 + 3$ im Intervall $[-1, 2]$ lautet

$O_f(2) = 8,64$ für $n = 2$ und $O_f(20) = 7,06$.

Vergleicht man die Ergebnisse der Ober- und Untersummen, so fällt auf, dass die Untersumme kleiner ist als die Obersumme. Die tatsächliche Fläche unter der Kurve liegt aber zwischen der Ober- und Untersumme. Es gilt die Beziehung

$$U_f(n) \leq \text{tatsächliche Fläche unter der Kurve} \leq O_f(n)$$

Je größer man n wählt, desto kleiner wird die Obersumme und desto größer wird die Untersumme. Dabei strebt die Breite der Rechtecke gegen Null. Die Unter- und Obersumme

streben somit gegen denselben Grenzwert. Dieser Grenzwert ist das bestimmte Integral der Funktion f im Intervall $[a, b]$. Aus diesem Zusammenhang folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_f(n) = \int_a^b f(x) dx.$$

Um die Fläche unter einer Kurve zu berechnen, benötigt man heutzutage keine langen und komplizierten Rechnungen mit Ober- und Untersumme durchzuführen. Es reicht lediglich das bestimmte Integral in dem vorgegebenen Intervall zu berechnen.

Literaturverzeichnis

- A. Zorich, Vladimir. (2006). *Analysis I*. (J. Schüle, Übers.) Berlin: Springer-Verlag.
- Attali, Jacques. (2007). *Blaise Pascal. Biographie eines Genies*. (H. P. Schmidt, Übers.) Stuttgart: Klett-Cotta Verlag.
- Bauer, Heinz. (2002). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin: Walter de Gruyter Verlag.
- Beutelspacher, Albrecht. (2010). *Kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik*. München: C.H.Beck Verlag.
- Brückner, Günther. (2003). *Logisches Denken durch Mathematik I*. Hamburg: Books on Demand.
- Cauchy, Augustin-Louis. (1828). *CauchyLehrbuch der algebraischen Analysis*. (C. Susler, Übers.) Königsberg: Bornträger Verlag.
- Fischer, Helmut; Kaul, Helmut. (1997). *Mathematik für Physiker* (Bd. 1 Grundkurs). Stuttgart: B.G.Teubner.
- Forster, Otto. (2016). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Wiesbaden: Springer Spektrum Verlag.
- Gerwig, Mario. (2015). *Beweise verstehen im Mathematikunterricht. Axiomatik, Pythagoras und Primzahlen als Exempel der Lehrkundsdidaktik*. Wiesbaden: Springer Spektrum Verlag.
- Greefrath, Gilbert; Oldenburg et al. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. (F. Padberg, & A. Büchter, Hrsg.) Berlin: Springer Spektrum.
- Haarmann, Harald. (2008). *Weltgeschichte der Zahlen*. München: C.H.Beck Verlag.
- Henze, Norbert. (2017). *Stochastik für Einsteiger. Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Wiesbaden: Springer Spektrum Verlag.
- Ifrah, Georges. (1986). *Universalgeschichte der Zahlen*. New York: Campus.
- Kaplan, Robert. (2006). *Die Geschichte der Null*. München: Piper Verlag.
- Kurt von Fritz. (1971). *Grundproblem der Geschichte der antiken Wissenschaft*. Berlin: Walter de Gruyter Verlag.
- Liesegang, Hans. (1922). *Griechische Philosophie von Thales bis Platon*. Breslau: Ferdinand Hirt.

- Masek, Michaela. (2012). *Geschichte der antiken Philosophie*. Wien: Facultas Verlag.
- Menninger, Karl. (1958). *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl* (Bd. 2). Göttingen: Wandenhoeck & Ruprecht Verlag.
- Meschkowski, Herbert. (1970). *Zahlen*. Mannheim: Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich Hochschulbücher Verlag.
- Pfarr, Ernst Adam; Schirotzek, Winfried. (1973). *Differential- und Integralrechnung für Funktion mit einer Variablen* (Bde. 2 „Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte“). Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft.
- Plauke, Matthias; Scherfner Mik. (2009). *Mathematik für das Bachelorstudium I. Grundlagen, lineare Algebra und Analysis*. Heidelberg: Springer Akademischer Verlag.
- Schichl, Hermann; Steinbauer, Roland. (2012). *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Berlin: Springer Spektrum Verlag.
- Schmidt-Biggemann, Wilhelm. (1998). *Blaise Pascal. Beck'sche Reihe 553: Denker*. München: C.H. Beck Verlag.
- Scriba, Christoph J.; Schreiber, Peter. (2001). *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen*. Berlin: Springer Verlag.
- Seife, Charles. (2000). *Zwilling der Unendlichkeit. Eine Biographie der Zahl Null*. (M. Zillgitt, Übers.) Berlin: Berlin Verlag.
- Seife, Charles. (2002). *Zwiling der Unendlichkeit. Eine Biographie der Zahl Null*. (M. Zillgitt, Übers.) München: Wilhelm Goldmann Verlag.
- Sommer, Marianne; Müller-Wille, Staffan; Carsten, Reinhardt. (2017). *Handbuch Wissenschaftsgeschichte*. Stuttgart: J.B.Metzler Verlag.
- Stewart, Ian. (2016). *Unglaubliche Zahlen*. (M. N. Schuh, Übers.) Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.
- Struik, Dirk Jan. (1963). *Abriss der Geschichte der Mathematik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Struik, Dirk Jan. (1976). *Abriss der Geschichte der Mathematik*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Thuswald, Gudrun. (1999). *Die Stunde (der) Null. Eine vollständige Ausgabe Melker Rechenbüchls von 1454- unter besonderer Berücksichtigung seiner Funktion für die Einführung der indisch- arabischen Zahlen im deutschsprachigen Raum, unv. Diss., Universität Wien*.

- Van Dogen, Peter. (2015). *Einführungskurs Mathematik und Rechenmethoden. Für Studierende der Physik und weiterer mathematisch- naturwissenschaftlicher Fächer*. Wiesbaden: Springer Spektrum Verlag.
- Walz, Guido. (2017). *Lexikon der Mathematik* (Bd. 2 Eig bis Inn). Mannheim: Springer Spektrum Verlag.
- Willers, Friedrich Adolf. (2013). *Elementar-Mathematik. Ein Vorkurs z. höheren Mathematik*. Berlin: Springer Verlag.
- Wußing, Hans. (2008). *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise- 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Berlin: Springer Verlag.

Internetquellen

Academic dictionaries and encyclopedias, [online]
[http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/1033119#Arithmetische Eigenschaften](http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/1033119#Arithmetische_Eigenschaften) [25.02.2018].

Baxa, Christoph (2017): Griechisch-hellenistische Mathematik [online]
[http://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1718 Geschichte Slides 04.pdf](http://www.mat.univie.ac.at/~baxa/WS1718_Geschichte_Slides_04.pdf) [02.02.2018].

Krön, Bernhard (2014): Skriptum zur Vorlesung Einführung in die Analysis, [online]
<http://homepage.univie.ac.at/bernhard.kroen/Analysis.html> [28.03.2018].

Novak, Andreas [online] <http://homepage.univie.ac.at/andreas.novak/qm1.pdf> [02.03.2018].

Raffelt, Albert (2002): II. "Infini rien" (Das Fragment der „Wette“), [online]
https://www.ub.uni-freiburg.de/fileadmin/ub/referate/04/pascal/II_wette.pdf [28.03.2018]

Ramharter, Esther (2005): Ist das kartesische Koordinatensystem kartesisch? [online]
<http://homepage.univie.ac.at/esther.ramharter/cartkord.pdf> [02.03.2018].

Ramharter, Esther (2013): Alles oder dreimal alles? Pascals Wette in historisch-wissenschaftstheoretischem Kontext [online]
<http://homepage.univie.ac.at/esther.ramharter/pascalswette.pdf> [02.03.2018].

Abbildungsverzeichnis

Anmerkung:

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Sämtliche Abbildungen wurden unter Verwendung von GeoGebra, Word und Paint selbst erstellt, daher sind keine Quellenangaben zu diesen Abbildungen im Abbildungsverzeichnis angeführt.

- Abbildung 1: Kerbzeichen auf dem Ishango-Knochen, Haarmann, Harald. (2008).
Weltgeschichte der Zahlen. München: C.H.Beck Verlag, S. 125
- Abbildung 2: Einige Beispiele für Zeichen, die als Leerstellen im babylonischen
Positionssystem dienten. Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New
York: Campus, S. 417.....8
- Abbildung 3: Mathematische Tafel aus Uruk: ältester Beleg für die Verwendung der
babylonischen Null. Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York:
Campus, S. 423.....8
- Abbildung 4: Zeichen für den ersten Tag des Monats, die gleichzeitig die Ziffer Null
darstellen. Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus,
S. 456.11
- Abbildung 5: 5.Tag des Monats im Haab-Kalender. Ifrah, Georges. (1986).
Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus, S. 457.11
- Abbildung 6: Maya Hieroglyphen der Zahl Null auf Stellen und Skulpturen. Ifrah, Georges.
(1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus, S. 469.....11
- Abbildung 7:ägyptische Hieroglyphen Zahlenschrift mit den verschiedenen Varianten und der
Verdeutlichung der Leserichtung. Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der
Zahlen. New York: Campus, S. 231.14
- Abbildung 8: Zeichen für die zweite Reihe im chinesischen Positionssystem. Ziffern der
ersten und zweiten Reihe wurden bei der Darstellung einer Zahl beliebig verwendet.
Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus, S. 429....16

Abbildung 9: Zeichen für die Einer in der ersten Reihe im chinesischen Positionssystem der Gelehrten. Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus, S. 428.	16
Abbildung 10: „Das alphabetische Ziffernsystem der Griechen, das den hebräischen Zahlbuchstaben vollkommen entspricht.“ Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus, S. 289.	24
Abbildung 11: Vielfache von Myriade – Zehntausend. Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus, S. 291.	25
Abbildung 12: Inschrift von Gwalior mit der ältesten geschriebenen Null in der Zahl 270 aus dem Jahr 870 n. Chr. Menninger, Karl (1958). Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl (Bd. 2). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, S. 214.	32
Abbildung 13: Brahimi-Zahlschrift. Menninger, Karl (1958). Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl (Bd. 2). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht Verlag, S. 209.	34
Abbildung 14: Entwicklung der Zahlschrift von indischer Brahimi-Zahlschrift bis zur aktuellen Zahlschrift (aus dem 16. Jahrhundert) Menninger, Karl (1958). Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl (Bd. 2). Göttingen: Wandenhoeck & Ruprecht Verlag, S. 233.	36
Abbildung 15: Die Stammtafel unserer Zahlzeichen. Ifrah, Georges. (1986). Universalgeschichte der Zahlen. New York: Campus, S. 483.	39
Abbildung 16: Sackerl-Modell von Stewart. Stewart, Ian. (2016). Unglaubliche Zahlen. (M.N. Schuh, Übers.) Reinbeck bei Hamburg Rowohlt Taschenbuch Verlag, S. 174.	45
Abbildung 17: Steigung einer Gerade	74
Abbildung 18: Steigung einer Kurve.....	75
Abbildung 19: Tangente im Punkt P	75
Abbildung 20: Geometrische Darstellung einer Reihe. Greefarth, Gilbert, Oldenburg et al. (2016). Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. (F. Padberg, & A. Büchter, Hrsg.) Berlin: Springer Spektrum Verlag, S. 76	82
Abbildung 21: Epsilon-Umgebung von x	84

Abbildung 22: Fläche unter einer linearen Funktion.....	91
Abbildung 23: Fläche unter der Kurve im Intervall $[a,b]$	92
Abbildung 24: Untersumme mit der Zerlegung $n=2$	93
Abbildung 25: Untersumme mit der Zerlegung $n=20$	93
Abbildung 27: Obersumme mit der Zerlegung $n=20$	94
Abbildung 26: Obersumme mit der Zerlegung $n=2$	94