



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Entwicklung des Zahlbegriffs bei Kindern

verfasst von / submitted by

Barbara Koza

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 347 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium Unterrichtsfach
Mathematik und Unterrichtsfach
Französisch

Betreut von / Supervisor:

Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger

Mitbetreut von / Co-Supervisor:

Mag. Mag. Dr. Andreas Ulovec

DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich jenen Personen meinen ausdrücklichen Dank aussprechen, die mich während der Verfassung meiner Diplomarbeit unterstützt haben:

An meine Betreuer Christoph und Andreas:

Ich möchte mich bei euch sowohl für die fachliche als auch für die persönliche Unterstützung zum Gelingen dieser Diplomarbeit herzlichst bedanken. Eure hervorragende Betreuung sowie eure guten Ratschläge haben mir bei der Verfassung dieser Arbeit stets weitergeholfen. Auch unsere gemeinsamen Gespräche haben mir immer wieder aufs Neue Motivation zum Schreiben dieser Diplomarbeit gegeben. Vielen Dank für eure Zeit und eure professionelle Betreuung!

An meine Familie:

Liebe Mama, lieber Papa, liebe Marina & alle anderen Familienmitglieder! Ich danke euch für eure Geduld, eure Unterstützung und euer offenes Ohr. Ein ganz besonderes Dankeschön gilt meiner Mutter, die mir immer Anregungen zur Verbesserung meiner Diplomarbeit gegeben hat. Es ist nicht selbst verständlich, so viel Unterstützung wie ihr sie mir gebt, zu bekommen. Danke für unser gutes Verhältnis und dass ihr meine Familie seid!

An meine StudienkollegInnen:

Danke für alles! Ich möchte mir ein Studium ohne euch gar nicht vorstellen. Ihr habt mich immer unterstützt, aufgemuntert und motiviert. Die wunderschöne Zeit, die ich mit euch erlebt habe, wird mir immer in bester Erinnerung bleiben.

An meine Freunde:

Auch euch möchte ich von ganzem Herzen für euer Vertrauen, eure Wertschätzung, eure Unterstützung und euer Verständnis, wenn ich oft zu wenig Zeit hatte, danken. Ich möchte die schönen Momente, die ich mit euch erleben darf, niemals missen.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Vorwort.....	7
2	Grundlagen des Zahlbegriffserwerbs	8
2.1	Historische Hintergründe	8
2.1.1	Zahlen in der Antike	8
2.1.2	Die Zahl ab dem 19. Jahrhundert.....	9
2.2	Zahlbegriff, Zahlerfassung und Zählkompetenz – angeboren oder gelernt?.....	10
2.2.1	Die Zahl- und Mengenerfassung.....	11
2.2.2	Die Zählkompetenz	12
2.3	Konzepte und Inhaltsbereiche der Zahlbegriffsentwicklung.....	14
3	Zahlbegriffserwerb nach Jean Piaget	18
3.1	Vorkenntnisse	18
3.2	Piagets Verständnis von Entwicklung & Lernen	19
3.3	Stufen der kognitiven Entwicklung.....	20
3.3.1	Die sensomotorische Stufe.....	22
3.3.2	Die prä-operationale Stufe	22
3.3.3	Die konkret- operationale Stufe	23
3.3.4	Die Stufe der formalen Operation.....	24
3.4	Entwicklung von Klassifikation und Ordnungsrelationen anhand von Aufgaben	25
3.4.1	Klassifikation	25
3.4.2	Ordnungsrelation.....	27
3.5	Piagets Verständnis von Zahlen & Erwerb des Zahlbegriffs	29
3.5.1	Erhaltung der Quantitäten	30
3.5.2	Verbindung von Klassifikation und Ordnungsrelation	32
3.5.3	Additive und multiplikative Kompositionen	34

4	Zahlbegriffserwerb nach Gelman & Gallistel.....	36
4.1	Zählprinzipien – Das Konzept „Prinzipien zuerst“	36
4.1.1	Eindeutigkeitsprinzip (The one-one Principle).....	37
4.1.2	Prinzip der stabilen Ordnung (The stable-order Principle).....	38
4.1.3	Kardinalprinzip (The cardinal principle)	38
4.1.4	Abstraktionsprinzip (The abstraction principle)	39
4.1.5	Irrelevanz der Anordnung (The order irrelevance principle).....	40
4.1.6	Weitere Zählprinzipien	41
4.2	Nachweis der „ <i>How to count principles</i> “ anhand eines „magischen“ Experiments	41
4.2.1	Ablauf & Methodik des Experiments	41
4.2.2	Protokolle – tatsächliches Experiment.....	43
4.2.3	Ergebnisse des Experiments	44
4.3	Untersuchungen über das Abstraktionsprinzip und das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung	49
4.4	Kritik an den Untersuchungen von Gelman und Gallistel	52
4.4.1	Kritik am Eindeutigkeitsprinzip.....	53
4.4.2	Kritik am Prinzip der stabilen Ordnung.....	54
4.4.3	Kritik am Kardinalprinzip.....	54
4.4.4	Kritik am Prinzip der Irrelevanz der Anordnung.....	54
5	Zahlbegriffserwerb nach Fuson	56
5.1	Verschiedene Anwendungen von Zahlwörtern	56
5.2	Zahlaspekte.....	56
5.2.1	Kardinalzahlaspekt.....	57
5.2.2	Ordinalzahlaspekt	57
5.2.3	Maßzahlaspekt	58
5.2.4	Übersicht der Zahlaspekte.....	58
5.3	Erwerb der Zahlwortreihe	59
5.3.1	Verschiedene Niveaus der Zahlwortfolge.....	59
5.3.2	Der Wechsel von Niveau zu Niveau	62
5.4	Typische Fehler beim Zählen	63
5.4.1	Untersuchung zu typischen Fehlerquellen bei Zahlwort– Zeigeakt – Objekt.....	66
5.4.2	Typische Fehler beim Zählen in Bezug auf die Anordnung der Objekte	68
5.4.3	Typische Fehler beim Zählen in Bezug auf die Eigenschaften der Objekte.....	71
5.5	Der Zusammenhang zwischen Zählen und Kardinalität	74
5.5.1	Zugänge.....	74
5.5.2	Untersuchungen über den Zusammenhang von Zählen und Kardinalität.....	75

5.6	Zahlaspekte und deren Verständnis.....	79
6	Zahlbegriffserwerb nach Steffe	82
6.1	Zählen als komplexe Aktivität - Komponente des Zählens	82
6.2	Die Zahlwortfolge	83
6.3	Koordination (Eins - zu - Eins Zuordnung).....	83
6.4	Entwicklung von Einheiten als Grundvoraussetzung – ein philosophischer Ansatz	84
6.5	Arten von Einheiten.....	85
6.5.1	Perzeptuelle Einheiten	85
6.5.2	Visuelle Einheiten	86
6.5.3	Motorische Einheiten	86
6.5.4	Verbale Einheiten.....	86
6.5.5	Abstrakte Einheiten.....	86
6.5.6	Übersicht der Einheiten & deren Vorraussetzungen	87
6.6	Beschreibung und Untersuchungen von Einheiten	87
6.6.1	Perzeptuelle Einheiten	87
6.6.2	Visuelle Einheiten	88
6.6.3	Motorische Einheiten	89
6.6.4	Verbale Einheiten.....	90
6.6.5	Abstrakte Einheiten.....	91
6.7	Perspektiven und Aussichten in Bezug auf die Konstruktion der Zahl.....	91
7	Zahlbegriffserwerb nach Krajewski	93
7.1	Das Entwicklungsmodell des Zahlbegriffs.....	93
7.1.1	Ebene 1 – Basisfertigkeiten	94
7.1.2	Ebene 2 – einfaches Zahlverständnis	94
7.1.3	Ebene 3 - tiefes Zahlverständnis	95
7.2	Beziehung der einzelnen Ebenen	95
7.3	Modell der Zahl – Größen - Verknüpfung	96
8	Der Zahlbegriff in den ersten Unterrichtsjahren	97
9	Conclusio.....	99

10	Quellenverzeichnis	100
10.1	Bücher	100
10.2	Internetseiten	102
11	Abbildungsverzeichnis.....	103
12	Abstract.....	105
12.1	German Version	105
12.2	English Version	106

1 Vorwort

Der Behauptung, dass der Spracherwerb bei Kindern ein Prozess ist, der von Geburt an stattfindet, würde niemand widersprechen. Der Erwerb von mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten hingegen beginnt laut vielen Meinungen erst mit dem Eintritt in die Schule. Dabei ist die Welt der Mathematik bereits seit der Geburt im Alltag der Kinder fest verankert und wird daher auch von Anfang an erlebt.

Schon Kleinkinder oder sogar Babys erkennen die Vorstellung „da oder nicht da“ oder „mehr oder weniger“ und sammeln daher schon sehr früh Erfahrung mit dem Umgang mit Mengen und Zahlen. Doch wie verläuft der Prozess der Zahlbegriffs- und der Zählentwicklung? Wie erwerben Kinder in weiterer Folge eine systematische Mengenvorstellung? Gibt es Entwicklungsschritte?

Schon seit vielen Jahren beschäftigen sich WissenschaftlerInnen und PädagogInnen mit der Entwicklung des Zahlbegriffs und des Zählvorgangs. Die Frage, wie Kinder Zahlbegriffe beziehungsweise Zählprozesse ausprägen, führt zu unterschiedlichen Theorien der Forschungsgemeinde. Mit eben jenen Theorien möchte ich mich im Zuge meiner Diplomarbeit näher auseinandersetzen.

Im ersten Kapitel meiner Arbeit widme ich mich den historischen Grundlagen des Zahlbegriffs und seiner Entwicklung über die vergangenen Jahre. Anschließend versuche ich ebenfalls herauszufinden, ob mathematische Fähigkeiten erst im Laufe der kindlichen Entwicklung erlernt werden müssen oder teilweise schon angeboren sind.

Die Frage, wie Kinder Zahlvorstellungen beziehungsweise Zahlbegriffe entwickeln, führt zu den Arbeiten von Jean Piaget, Gelman und Gallistel, Fuson, Steffe sowie Krajewskis. Diese jeweiligen Untersuchungen stellen den Hauptteil meiner Diplomarbeit dar. Ich präsentiere hierzu jeweils die empirischen Forschungen und die damit verbundenen Untersuchungsergebnisse.

Der Schlussteil meiner Diplomarbeit gibt einen kurzen Einblick in die Einführung des Zahlbegriffs in den ersten Unterrichtsjahren.

2 Grundlagen des Zahlbegriffserwerbs

2.1 Historische Hintergründe

Rechnen stellt für uns Menschen eine Tätigkeit dar, die in unserem Leben fest verwurzelt ist und unbedingt beherrscht werden sollte.¹ Die Vorstellung, was eine Zahl genau ist und wie sie dargestellt wird, untersucht die Menschheit bereits seit Jahrtausenden. Demzufolge sind vielfältige Theorien und Modelle von der Antike bis heute entstanden, die sich mit der Entstehung der Zahl auseinandersetzen. Die Frage, ob die Zahl erfunden oder entdeckt wurde, hat die Weltbevölkerung seither immer wieder beschäftigt. Zwischen der Antike und dem Ende des 19. Jahrhunderts setzte sich die These durch, dass es die Zahlen schon immer gab und dass sie von der Menschheit erst im Laufe der Zeit entdeckt und für den Alltag genutzt wurden. Erst im späteren 19. Jahrhundert dominierte die Vorstellung des Erfindens der Zahl und sie diente dementsprechend mit ihrer Funktion den Menschen.²

2.1.1 Zahlen in der Antike

Bereits in der Antike sind unterschiedliche Auffassungen von Zahlen erkennbar. Für die Ägypter und Babylonier stand der konkrete Umgang mit Zahlen im Fokus. Sie nutzten Zahlen und Zahlensymbole im Alltag zum Beispiel zum Zählen von Sklaven, Schätzen oder Handeln. Währenddessen beschäftigten sich die Griechen mit der philosophischen Frage, was eine Zahl denn überhaupt sei.³

„Pythagoras arrived at a startling answer to the question, what are numbers? Numbers, he decided, are quite literally all that there is. Number is only the true reality and numbers are the language of the universe.“⁴

Die Griechen verwendeten die Zahlen nicht nur zum Rechnen, sondern betrachteten sie auch als Gegenstände, über die man Aussagen machen kann. Des Weiteren untersuchten sie ihre Eigenschaften. Im Zusammenhang mit der Logik und Dialektik bestand der Wunsch, die untersuchten Gegenstände durch Definitionen genauer festzulegen. Im Vordergrund stand dabei vor allem die Überlegung, wie eine Definition genau

¹ vgl. Berman 1953 : S. 7.

² vgl. Moser Opitz 2008: S. 15.

³ vgl. Moser Opitz 2008: S. 15.

⁴ Brainerd 1979: S. 9. in Moser Opitz 2008: S. 15.

auszusehen hat, damit sie für die darauffolgende und aufbauende Theorie nützlich ist. Somit entwickelten sich bei den Griechen zwei grundlegende Definitionen für die Zahl, die nur die natürlichen Zahlen erfassen: ⁵

„eine, die (systematisch) die übergeordnete Gattung und die kennzeichnende Differenz angibt, als „begrenzte Vielheit“, und eine, die (genetisch) die Erzeugung der Zahlen angibt, als „Zusammenstellung von Einheiten“.“⁶

Die systematische Definition – Die Zahl als begrenzte Vielheit

Aristoteles hat in seiner Kategorienlehre ein Begriffssystem gebildet, in das sich alle Aussagen über das Seiende einordnen lassen. ⁷

„Jedes ohne Verbindung gesprochene Wort bezeichnet entweder eine Substanz oder eine Quantität oder eine Qualität oder eine Relation oder ein Wo oder ein Wann oder eine Lage oder ein Haben oder ein Wirken oder ein Leiden.“⁸

Die Aufgabe der Mathematik ist es, das Seiende in Bezug auf seine Quantitäten zu erforschen. ⁹

Die genetische Definition – Die Zahl als Zusammenstellung von Einheiten

Diese Definition wird Euklid zugeschrieben und lautet:

„Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge. Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.“¹⁰

Diese Definition erinnert an Platons Forderung. Dieser erklärt „Schönheit“ als das, wonach alle schönen Dinge schön genannt werden. ¹¹

2.1.2 Die Zahl ab dem 19. Jahrhundert

Jahrhunderte lang stand die praktische Anwendung der Mathematik und der Beweis mathematischer Gesetze im Zentrum des Interesses. ¹²

⁵ vgl. Gericke 1970: S. 9.

⁶ Gericke 1970: S. 9.

⁷ vgl. Gericke 1970: S. 24.

⁸ Gericke 1970: S. 24.

⁹ vgl. Gericke 1970: S. 24.

¹⁰ Gericke 1970: S. 27.

¹¹ vgl. Gericke 1970: S. 27.

Erst Ende des 19. Jahrhunderts setzten sich Mathematiker mit der philosophischen und logischen Beantwortung der Frage auseinander, was denn nun eine Zahl sei. Dabei entstanden logische Begründungen der Zahl, und es entwickelten sich unterschiedliche Zahlentheorien.¹³

Die Frage, wie sich vor allem beim Kind der Zahlbegriff entwickelt, stand in dieser Zeit noch nicht im Mittelpunkt. Die Antwort darauf wurde erst durch einen vermehrten psychologischen Zugang zum Zahlbegriff gegeben und basiert grundlegend auf der experimentellen Forschung und der Psychologie als Wissenschaft. Dabei stand die Beobachtung im Vordergrund, wie der Zahlbegriff genau erworben wird und wozu die Zahl beim menschlichen Denken und Problemlösen dient.¹⁴

2.2 Zahlbegriff, Zahlerfassung und Zählkompetenz bei Kindern – angeboren oder gelernt?

Die Forschungsfrage, ob die Zählkompetenz bei Kindern angeboren oder erlernt ist, stellt den Fokus bei der Auseinandersetzung zur Zählentwicklung dar. Wie genau sich das Zählen entwickelt und wann numerische Kenntnisse von Kindern erworben werden, sind umstrittene Fragen, zu denen es zahlreiche Untersuchungen und verschiedene Meinungen gibt.¹⁵

Die Erklärung des Erwerbs der Zählkompetenz gilt als äußerst komplex und basiert auf verschiedenen Entwicklungsebenen, die in unterschiedlichen Varianten voneinander beeinflusst werden. Ob diese Fähigkeit nun teilweise angeboren ist oder erst erlernt werden muss, wurde besonders intensiv zwischen den 1970er und den 1990er Jahren erforscht.¹⁶

Der Erwerb der Zählkompetenz sowie des Zahlbegriffs beim Kind ist ein Entwicklungsprozess, der sich durch interne Veränderungen eines jeden Individuums, sowie durch externe Einflüsse bildet. Die interne Veränderung wird in der Forschung auch Reifung des Kindes genannt. Sie findet meist ohne den Einfluss von den externen Faktoren statt. Wenn das Kind nun aber direkt zum Lernen aufgefordert wird, findet

¹² vgl. Moser Opitz: S. 15f.

¹³ vgl. Moser Opitz: S. 15f.

¹⁴ vgl. Moser Opitz 2008: S. 16.

¹⁵ vgl. Moser Opitz 2008: S. 63f.

¹⁶ vgl. Moser Opitz 2008: S. 63f.

eine Interaktion zwischen dem Individuum und dessen Umgebung statt, die eine Verhaltensänderungen des Kindes mit sich bringt. Daraus resultiert, dass Lernen und interne Veränderung einander bedürfen, damit eine kognitive Entwicklung beim Kind stattfinden kann.¹⁷

Jean Piaget, einer der bekanntesten Entwicklungspsychologen, setzte sich mit den internen und externen Einflussfaktoren genauer auseinander und stellte fest, dass die kognitive Entwicklung des Kindes stufenweise erfolgt, wobei die höhere Stufe jeweils die niedrigere ersetzt.¹⁸

In Anbetracht des Zahlbegriffs, den das Kind entwickeln soll, ist Piaget der Ansicht, dass es eine große Anzahl an kognitiven Fähigkeiten gibt, die unabdingbare Voraussetzungen für die Entstehung des Zahlbegriffs sind. Dabei geht es vor allem um das Verstehen der Invarianz von Mengen, den Umgang mit Eins-zu-eins- Zuordnungen, der Klassifikation sowie der Bildung von Reihenfolgen. Darauf werde ich im dritten Kapitel näher eingehen.¹⁹

Doch wie erfassen Kinder nun die Zahl und wie erlernen sie das Zählen? Sind dies angeborene Fähigkeiten oder müssen diese erworben werden?

2.2.1 Die Zahl- und Mengenerfassung

Untersuchungen zufolge entwickeln Säuglinge bereits im Alter zwischen sechs und zwölf Monaten die Fähigkeit, Gegenstände und andere Lebewesen in direkter Umgebung wahrzunehmen und einzuschätzen. Das Kind speichert die erworbenen Erfahrungen ab und sortiert diese nach Gemeinsamkeiten.²⁰ Ebenfalls wurde nachgewiesen, dass Anzahlveränderungen bei kleinen Mengen bereits im Kleinkindesalter wahrgenommen werden.²¹ Das Kind kann zwar die Zahl noch nicht abstrakt erfassen, aber fühlt sie dennoch und kann sie direkt wahrnehmen.²²

Kinder können Anzahlerfassungen durch zwei unterschiedliche Arten erwerben: durch Zählen oder durch direkte Zahlerfassung von wenigen Objekten, genauer gesagt durch

¹⁷ vgl. Hasemann 2003: S. 9.

¹⁸ vgl. Hasemann 2003: S. 9.

¹⁹ vgl. Hasemann 2003: S. 9.

²⁰ vgl. Ifrah 1992: S. 20f.

²¹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 64.

²² vgl. Ifrah 1992: S. 20f.

einfaches „Hinsehen“. Die Fähigkeit der Zahlerfassung wird in der Forschung auch „Mengenschätzung“ oder mit „subitizing“ bezeichnet.²³

*„... very young children are said to respond to numerical display by „subitizing“, by reciting a number word they have learned to associate with a given visual pattern, much as they learn to associate common nouns with common objects.“*²⁴

In der Forschung stellt man sich dennoch die Frage, ob „subitizing“ ein angeborener Wahrnehmungsakt ist oder ob diese Fähigkeit „blitzartiges“ Auszählen von Anzahlen ist. Mit dieser Frage setzte sich besonders Karen Wynn auseinander, die feststellte, dass Kleinkinder bereits kleine, unterschiedliche Mengen getrennt voneinander wahrnehmen können.²⁵

Laut Wynn sind das Zählen und die Zahlerfassung deutlich verschiedene Fähigkeiten, zu denen kleinere Kinder schon fähig sind. Aufgrund einer Vielzahl von Untersuchungen ist sie überzeugt davon, dass die Zahlerfassung beim Kind, im Gegensatz zum Zählen, eine angeborene Fähigkeit ist.²⁶

Diese Feststellung untersuchte Wynn anhand von Puppen, die sie den Kindern vorlegte, wobei sie immer wieder eine dazu gab und eine andere wegnahm. Außerdem ließ sie die Puppen Sprünge machen. In der ersten Sprungrunde machten beide Puppen dieselbe Anzahl an Sprüngen. Erst im zweiten Durchgang machte eine Puppe deutlich mehr Sprünge als zuvor, die andere machte dieselbe Sprunganzahl wie zuvor. Dabei war zu erkennen, dass die Kinder deutlich länger auf die Puppe schauten, bei der es eine Sprunganzahlveränderung gab. Die Kleinkinder reagierten somit auf die Anzahlveränderungen und es wurde bewiesen, dass die Kinder bereits eine Vorstellung von Mengen haben.²⁷

2.2.2 Die Zählkompetenz

Die Zählkompetenz entwickelt sich erst mit dem Erkennen der Zahlwörter. Dies erfolgt meist im Alter von zwei Jahren, doch ist es möglich, dass die Kinder während des Zählaktes Zahlen überspringen, doppelt zählen oder sogar ganz auslassen (asynchrones

²³ vgl. Hasemann 2003: S. 3.

²⁴ Gelman; Meck 1992: S. 173. in Moser Opitz 2008: S. 15.

²⁵ vgl. Moser Opitz 2008: S. 65.

²⁶ vgl. Hasemann 2003: S. 3.

²⁷ vgl. Moser Opitz 2008: S. 65.

Zählen).²⁸ Mit etwa zwei Jahren prägt sich die Zahlwortreihe „eins, zwei“ aus und Kinder erkennen rasch, dass mit Zahlenwörtern Anzahlen beschrieben werden: „zwei Bonbons“, „drei Blumen“, etc. Kinder unterscheiden am Anfang der Zählentwicklung meist nur zwischen „eins“, „zwei“ und „viele“. Erst im Laufe der Entwicklung wird die Zahlwortreihe länger und es kommen neue Zahlbegriffe hinzu.²⁹

Gelman und Gallistel (1978) formulierten zur Entwicklung der Zählkompetenz fünf Prinzipien, die durchlaufen werden müssen, um die Zahlwortreihe fehlerfrei zu beherrschen (mehr dazu in Kapitel 4). Diese beiden Forscher versuchten zu beweisen, dass diese Zählprinzipien im Wesentlichen angeboren sind und nicht erst erlernt werden müssen. Dennoch geht man heutzutage davon aus, dass diese Zählprinzipien nicht angeboren sind, sondern erst durch das Lernen und den Entwicklungsprozess des Kindes erworben werden müssen.³⁰

Die Zählentwicklung und ihr Lernprozess wird mit drei zentralen Begriffen gekennzeichnet: Sequenz, Zählen und kardinale Bedeutung.

- *Sequenz*: Darunter versteht man das Erfassen der Zahlwortreihe durch Nachahmung von älteren Personen oder durch Auswendiglernen. Zunächst wird die Zahlwortreihe noch unregelmäßig beherrscht („einszweivierdrei...“) und kann daher noch nicht zum Zählen verwendet werden. Anschließend erfolgt die Unterscheidung der einzelnen Zahlwörter.
- *Zählen*: Darunter versteht man das Erfassen der Zahlwortreihe und die fehlerfreie Eins- zu- Eins- Zuordnung. Zuerst erfolgt dies nur in einem begrenzten Bereich, der durch die spontane Zahlerfassung überblickt werden kann. Erst später vergrößert sich der Zählbereich. Um das Zählen zu erleichtern, verwenden Kinder oft materielle Unterstützung wie zum Beispiel ihre Finger oder andere Gegenstände.
- *Kardinale Bedeutung*: Darunter versteht man das korrekte Ab- und Auszählen von Objekten. Diese Fähigkeit schließt die fünf Zählprinzipien von Gelman und Gallistel mit ein.³¹

²⁸ vgl. Hasemann 2003: S. 1.

²⁹ vgl. Hasemann 2003: S. 3f.

³⁰ vgl. Hasemann 2003: S. 7f.

³¹ vgl. Hasemann 2003: S. 7f.

Die Entwicklung der Zählkompetenz beim Prozess des Ab- und Auszählens erfolgt ebenfalls phasenweise und kann durch folgende Schritte beschrieben werden:

- Phase 1 (verbales Zählen): Die Zahlwortreihe hat in sich selbst noch keine Struktur und kann daher nicht zum direkten Zählen eingesetzt werden. Einzelne Zahlwörter werden noch nicht voneinander unterschieden und die kardinale Bedeutung wird noch nicht beherrscht.
- Phase 2 (asynchrones Zählen): In dieser Phase verwenden Kinder die Zahlwortreihe zum Zählen von Objekten, allerdings werden oft Zahlwörter ausgelassen und übersehen. Auch doppeltes Zählen fällt unter das asynchrone Zählen.
- Phase 3 (Ordnen der Objekte werden dem Zählvorgang): Hier versuchen Kinder die zu zählenden Objekte zu ordnen beziehungsweise schieben sie zum Beispiel die bereits gezählten Objekte zur Seite und wissen, dass diese bereits mitgezählt worden sind.
- Phase 4 (resultatives Zählen): In dieser Phase sind sich Kinder darüber bewusst, dass sie beim Zählen mit der Eins beginnen müssen. Jedes Objekt wird nur einmal gezählt und das zuletzt genannte Objekt stellt die Anzahl der Objekte dar.
- Phase 5 (abkürzendes Zählen): Kinder bilden Strukturen und können von einer vorgegebenen Zahl weiterzählen. Ebenfalls erkennen sie zum Beispiel das Zahlenbild der Fünf auf einem Würfel.³²

2.3 Konzepte und Inhaltsbereiche der Zahlbegriffsentwicklung

In der Literatur sind zahlreiche Theorien und Konzepte zur Zahlbegriffsentwicklung zu finden. Diese Entwicklung umfasst eine Vielzahl von Tätigkeiten, die während der kindlichen Reifung ausgeprägt werden sollten.

Die untenstehenden Tätigkeiten hängen auf zwei unterschiedliche Weisen zusammen. Zum einen ist jeder Bereich einzeln zu betrachten. Das bedeutet, dass die Tätigkeiten als nebeneinanderstehende Bausteine angesehen werden sollen. Zum anderen sind alle Bereiche aufeinander aufbauend.³³

³² vgl. Hasemann 2003: S. 7f.

³³ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 38f.

Folgende Bereiche zählen zu den Inhaltsbereichen der Zahlbegriffsentwicklung über die weitgehend Konsens besteht:³⁴

- Zählen, Auszählen, Abzählen:

Threfall unterscheidet in seinen Untersuchungen im Jahre 2008 verschiedene Arten des Zählens: Das Aufzählen der Zahlwortreihe (*oral counting*), das Auszählen von Personen oder Objekten (*enumeration*) und das Abzählen von Mengen (*counting for cardinality*). Das Aufzählen wird dabei als eine rein sprachliche Aktivität gesehen. Das reine Zählen steht in der ersten Klasse im Vordergrund mit besonderer Bezugnahme auf das Vorwärts- und Rückwärtszählen. Unter dem Auszählen von Personen oder Objekten wird eine Eins-zu- Eins- Zuordnung zwischen dem Zahlwort und dem Objekt verstanden. Dabei wird jedoch nicht versucht, die Anzahl der Gesamtmenge zu ermitteln. Dies geschieht erst beim Abzählen von Objekten und somit steht hier die Bestimmung der Anzahl im Vordergrund.³⁵

- Anzahlen „quasi“ simultan erfassen:

Anzahlen beziehungsweise Objekte können von Kindern und Erwachsenen im kleinen Mengenbereich (ca. drei bis vier Objekte) simultan erfasst werden. Bei höheren Anzahlen müssen die Objekte einzeln gezählt oder in kleinere Mengen geteilt werden, um aus den Teilmengen die Gesamtmenge zu bestimmen. Bei der „quasi simultan Erfassung“ spielen mehrere Zugänge eine Rolle: Zum einen nimmt das Gruppieren, Umgruppieren und Bündeln der zu zählenden Objekte eine zentrale Position ein. Zum anderen steht die Entfaltung von Zahlenbildern wie Finger- und Punktebilder im Fokus.³⁶

- Anzahlen und Mengen darstellen

Anzahlen und Mengen können durch verschiedene Formen dargestellt werden. Folgende Darstellungsformen existieren neben vielen anderen: konkrete Objekte, bildhafte Darstellungen, Zahlzeichen, Zahlwörter etc.³⁷

- Mengen vergleichen

³⁴ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 36.

³⁵ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 37.

³⁶ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 38.

³⁷ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 38.

Anzahlvergleiche nehmen sowohl in der frühen mathematischen Bildung als auch zu Beginn des Mathematikunterrichts eine zentrale Rolle ein. In der ersten Klasse steht dabei der Zahlraum bis zwanzig im Mittelpunkt, der später immer weiter ausgeprägt wird. Das Augenmerk beim Anzahlvergleichen liegt auf der Beziehung zwischen den Anzahlen zweier oder mehrerer Mengen. Dabei ist es wesentlich, Größer- oder Kleinerunterscheidungen oder Halb- und Doppelzusammenhänge zu erfassen und bestimmen zu können.³⁸

- Zahlen ordnen

Bei der Fähigkeit des Zahlen ordnens, steht der Platz der Zahl innerhalb der Zahlwortreihe im Mittelpunkt. Folgende Aspekte sind hierbei wichtig:

- die Beziehung zwischen aufeinanderfolgenden Zahlen herstellen zu können (Vor- und Nachfolgerrelation).
- die Orientierung innerhalb geordneter Zahlwortreihen zu bekommen.³⁹

- Zahlen verorten

Bei der Zahlverortung am leeren Zahlenstrahl kommt neben dem Zahlen ordnen auch das „Konzept der Proportionalität“ hinzu. Dazu müssen „Längenrelationen“ zwischen den Zahlen hergestellt werden.⁴⁰

„Grundlage hierfür ist die Vorstellung, dass eine bestimmte Zahl von Schritten gleicher Länge die Gesamtstrecke von Null bis zur gesuchten Zahl ergibt und dass umgekehrt die Schrittlänge sich aus der Anzahl der Schritte und der Gesamtstrecke ergibt.“⁴¹

- Teil – Ganzes – Konzept entwickeln

Dieses Konzept beschäftigt sich mit der Beziehung zwischen dem Ganzen und seinen Teilen. Das Kind soll die Fähigkeit erwerben, die Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen zu erkennen. Wichtig bei diesem Bereich ist nachvollziehen zu können, dass ein Ganzes, das in Teile zerlegt wurde, nicht mehr oder weniger geworden ist. Das Teil- Ganzes- Konzept gilt

³⁸ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 38.

³⁹ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 39.

⁴⁰ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 39.

⁴¹ Rechtsteiner – Merz 2013: S. 39.

als wichtige Voraussetzung für das Ablösen vom zählenden Rechnen und nimmt daher auch eine wesentliche Rolle im Mathematikunterricht ein.⁴²

- Stellenwertkonzept entwickeln

Um eine Vorstellung zum Stellenwertkonzept zu entwickeln, gibt es zwei Bereiche, die das Kind erfahren muss: das Bündeln und die Gliederung des Zahlenraums.⁴³

- Beherrschen und Kennenlernen der verschiedenen Zahlaspekte und ihre Bedeutung⁴⁴

⁴² vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 39.

⁴³ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 40.

⁴⁴ vgl. Rechtsteiner – Merz 2013: S. 38f.

3 Zahlbegriffserwerb nach Jean Piaget

3.1 Vorkenntnisse

Das handelnde Subjekt stellt für Piaget das Zentrum der genetischen Epistemologie dar. Jede Interaktivität zwischen dem Subjekt und der Umwelt wird durch dessen eigenständige Aktivität bestimmt. Das Individuum gewinnt also Erkenntnis, in dem es handelt und zum Denken aufgefordert wird. Dabei werden die kognitiven Strukturen des Individuums schrittweise erweitert und nach und nach voneinander differenziert. Am Anfang dieses Erkenntnisprozesses stehen laut Piaget vererbte veränderliche Strukturen und unveränderliche Funktionen. Die Reflexe, wie zum Beispiel der Saug- oder Greifreflex bei Neugeborenen, sieht Piaget als angeboren und veränderlich. Sie entfalten sich im Zuge der Entwicklung des Kindes in psychologische Strukturen.⁴⁵

Das Lernen beruht jedoch wie oben erwähnt auf einer Wechselwirkung zwischen dem Individuum und der Umwelt. Drei Grundbegriffe beschreiben diese Wechselwirkung:⁴⁶

- Assimilation
- Akkomodation
- Äquilibration

Das Kind versucht, neu erworbene Erfahrungen in sein bereits gesammeltes Wissen einzupassen, um mit der Umwelt in einem (relativ ausgewogenen) Gleichgewicht „Äquilibration“ zu sein. Um jenes zu erreichen, kann das Kind entweder den Weg der Assimilation oder den Weg der Akkomodation einschlagen.⁴⁷

Assimilation bedeutet, die neuen Erfahrungen in ein vorhandenes kognitives Schema einzufügen. Akkomodation beschreibt den Prozess, wenn Assimilation nicht möglich ist, ein gegebenes Schema anzupassen beziehungsweise ein neues zu erbauen.⁴⁸

Ein weiterer Entwicklungsprozess ist die Organisation.⁴⁹

⁴⁵ vgl. Moser Opitz 2008: S. 20.

⁴⁶ vgl. Reiss, Hammer 2013: S. 28.

⁴⁷ vgl. Reiss, Hammer 2013: S. 28.

⁴⁸ vgl. Reiss, Hammer 2013: S. 28.

⁴⁹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 20.

„Organisation bezeichnet die Tendenz bei allen Spezies, ihre Prozesse in geschlossenen Systemen zu systematisieren und zu organisieren, die entweder physische oder psychologische sind.“⁵⁰

Diese Fähigkeit beschreibt laut Piaget das Streben des Menschen, seine psychologischen Strukturen zu ordnen und diese in zusammengehörige Systeme zu gliedern.⁵¹

3.2 Piagets Verständnis von Entwicklung & Lernen

Für Piaget steht im Mittelpunkt des Verständnisses von Entwicklung das aktiv handelnde Individuum, das sich mit der Umwelt befasst. Infolgedessen sieht Piaget das Lernen nicht als Prozess, sondern als Folge der Entwicklung. Indem sich das Individuum aktiv mit der Umwelt auseinandersetzt, passt es seine Strukturen an und lernt beziehungsweise entwickelt sich. Dieser Entwicklungsschritt beinhaltet nach Piaget vier grundlegende Faktoren:⁵²

„Reifung, Erfahrung mit Gegenständen, soziale Vermittlung und die Äquilibrationstendenz“⁵³

Laut Piaget wird die Reifung von angeborenen, artspezifischen physiologischen Formen beeinflusst. Sie bildet sich im Laufe der Alterung durch die aktive Beschäftigung mit der Umwelt. Laut Piaget wird das Kind durch die Reifung befähigt zu denken und die Sprache zu erlernen. Der Beginn des zusammenhängenden Denkens erfolgt durch den Umgang und das Hantieren mit Gegenständen. Das Kind erwirbt physikalische Erfahrungen, welche im Anschluss durch die geistige Aktivität in ein logisches Schema gebracht werden. Auch durch die soziale Erfahrung, die das Kind erlebt, werden Denkprozesse ausgelöst. Dies erfolgt größtenteils von Eltern oder Lehrpersonen, in dem sie dem Kind bestimmte Gegenstände näher bringen und erklären. Dabei ist zu beachten, dass das Kind nur die Informationen aufnehmen kann, die seiner kognitiven Entwicklung entsprechen.⁵⁴

⁵⁰ Ginsburg; Oppen 1998: S. 33.

⁵¹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 20.

⁵² vgl. Moser Opitz 2008: S. 21f.

⁵³ Ginsburg; Oppen 1998: S. 272ff.

⁵⁴ vgl. Moser Opitz 2008: S. 22.

„As for teaching children concepts that they have not attained in their spontaneous development, it is completely useless“⁵⁵

Die Basis des geistigen Wachstums stellt die Äquilibration dar, die alle anderen Faktoren (Reifung, Erfahrung mit Gegenständen und soziale Vermittlung) enthält. Bei diesem Entwicklungsschritt handelt es sich um die selbstregulierten Prozesse des Kindes, die je nach Entwicklungsstadium besser ausgeprägt sind.⁵⁶

Somit ist die geistige Aktivität des Kindes für das Lernen und die Entwicklung von kognitiven Strukturen unabdingbar. Dabei wird das Individuum zur geistigen Auseinandersetzung mit verschiedenen Gegenständen aufgefordert. Außenstehende Personen fördern und begünstigen zwar dabei den Lernprozess eines jeden Individuums, können jedoch nicht für das Erlernen garantieren.⁵⁷

3.3 Stufen der kognitiven Entwicklung

Jean Piaget teilt die Entwicklung des Menschen in vier Entwicklungsstufen ein. Für den Erwerb des Zahlbegriffs beim Kinde sind vor allem die prä-operationale sowie die konkret-operationale Stufe besonders wichtig. Jede Stufe zeichnet sich durch eine bestimmte und eigene psychologische Struktur aus und muss folgende vier Kriterien erfüllen:

- „1) Qualitative Besonderheit der kognitiven Operationen, die zu einer Stufe gehören,*
- 2) invariante Entwicklungssequenz der einzelnen Stufe, die universale, d.h. kulturunabhängige Gültigkeit hat,*
- 3) Prinzip der Hierarchisierung, d.h höhere Stufen differenzieren und integrieren die Strukturen niedriger Stufen,*
- 4) Prinzip der Gesamtintegration, d.h die kognitiven Operationen einer Stufe sind zu einem flexiblen und adaptiven Gesamtsystem koordiniert.“⁵⁸*

⁵⁵ Brainerd 1978, S. 94.

⁵⁶ vgl. Moser Opitz 2008: S. 22.

⁵⁷ vgl. Moser Opitz 2008: S. 22.

⁵⁸ Wember 1986: S. 39.

Um nicht nur auf die prä-operationale sowie die konkret-operationale Stufe, die für den Zahlbegriff von Bedeutung ist, einzugehen, werde ich im Folgenden einen Einblick in alle Stufen geben, damit der Entwicklungsprozess des Kindes besser nachvollziehbar ist.

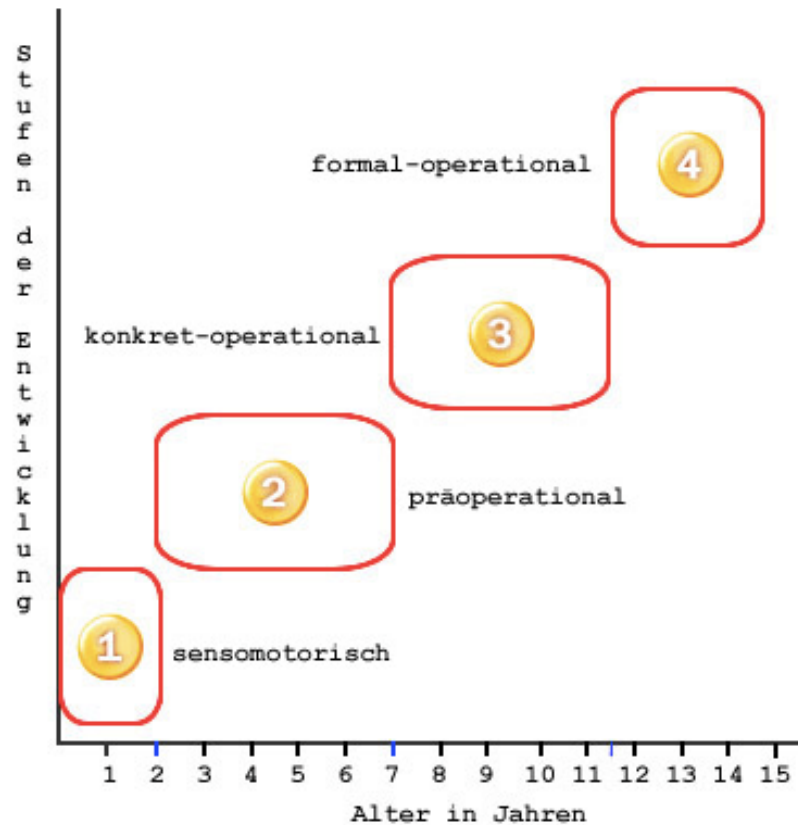


Abbildung 1: Stufen der kognitiven Entwicklung⁵⁹

⁵⁹ <http://www.lern-psychologie.de/kognitiv/piaget.htm> letzter Zugriff am 10. April 2018

3.3.1 Die sensomotorische Stufe

Die sensomotorische Phase erstreckt sich über die ersten beiden Lebensjahre des Kindes und gliedert sich in sechs verschiedene Unterstufen. Piaget bezeichnet diese Phase als „sensomotorisch“, da das Kind noch kein aktives Denken und Affektivität, die mit einer Vorstellung verbunden ist, zeigt. Das Kleinkind besitzt daher noch nicht die Fähigkeit, Personen oder Gegenstände in deren Abwesenheit zu bezeichnen. In dieser Phase liegt der Fokus auf der Wahrnehmung (Sensorik) und der Bewegung (Motorik). Nach und nach bilden sich einfache Reiz- und Reaktionsschemata, die das Kind von vorherigen Tätigkeiten langsam abspeichert.⁶⁰ Zu Beginn der sensomotorischen Phase stehen dem Kleinkind nur die angeborenen Reflexe zur Verfügung. Erst nach etwa drei bis sechs Monaten beobachtete Piaget, wie sich die Reize und Reflexe zunehmend weiterbildeten und in Zusammenhang mit gemachten Erfahrungen gesetzt werden. Das Kind koordiniert diese Erfahrungen durch Akkommodation und Assimilation und daraus bilden sich Handlungssequenzen, die immer wiederholt werden.⁶¹

Das Kleinkind erlebt die Welt um sich global und unterscheidet noch nicht zwischen seinem eigenen Körper und dem umgebenen Raum. Ebenso besitzt es noch nicht die Fähigkeit, die eigenen Handlungen an Gegenständen von den Gegenständen selbst zu trennen.⁶²

3.3.2 Die prä-operationale Stufe

Im Alter zwischen zwei und acht Jahren erleben Kinder die prä-operationale Phase. Sie lässt sich in zwei Unterstufen teilen: das vorbegrifflich-symbolische Denken (1,5 – 4 Jahre) und das anschaulich- intuitive Denken (4-7 bzw. 8 Jahre).

Das vorbegrifflich- symbolische Denken löst die sechste Stufe der sensomotorischen Phase ab, in der das Kind beginnt, sich Handlungen innerlich vorzustellen. Das Kleinkind hat gelernt zu erkennen, dass es Gegenstände gibt, auch wenn es diese nicht unmittelbar wahrnehmen kann. Piaget erklärt diese Fähigkeit anhand der Nachahmung: die geistige Aktivität ersetzt nach und nach die physische.⁶³

⁶⁰ vgl. Moser Opitz 2008: S. 24.

⁶¹ vgl. Wember 1986: S. 50.

⁶² vgl. Wember 1986: S. 50.

⁶³ vgl. Moser Opitz 2008: S. 24.

*„Wir sehen also, dass das sensomotorische Kind sich die Dinge dadurch vorstellt, dass es ihre Bewegungen ausführt. Das ältere Kind verinnerlicht diese Nachahmung. Diese abgekürzten Körperbewegungen konstituieren die symbolische Vorstellung. Schließlich beherrscht es die innere Nachahmung so gut, dass es die Bewegungen bis zur Unmerklichkeit abzukürzen vermag.“*⁶⁴

Typisches Merkmal der vorbegrifflich-symbolischen Phase ist das Entstehen von Sprache und des Symbols. Die Symbolfunktion ermöglicht dem Kind innere Bilder von Dingen wahrzunehmen und diese zu benennen.⁶⁵

In der zweiten Phase der prä-operationalen Stufe geht es um das anschaulich-intuitive Denken des Kindes. Im Fokus der prä-operationalen Stufe steht das egozentrische Denken. Das Kind orientiert sich an den Wahrnehmungen, die es sieht, hört, spürt oder riecht und stellt diese ins Zentrum des Handelns. In dieser Phase ist es dem Kind aufgrund des Egozentrismus noch nicht möglich, mehrere Situationen auf einmal wahrzunehmen.⁶⁶

3.3.3 Die konkret- operationale Stufe

Die konkret – operationale Phase ist wesentlich für den Erwerb des Zahlbegriffs. Diese Phase erstreckt sich über das siebte bzw. achte bis zum elften bzw. zwölften Lebensjahr. Um die Entwicklungsstufe genau zu verstehen, gilt es die Begriffe „konkret“ und „operational“ zu erläutern.⁶⁷

„Konkret“ bedeutet, dass die Kinder bei der Entfaltung ihrer geistigen Operationen noch auf konkrete Informationen jedes Gegenstandes angewiesen sind. Des Weiteren können sie ihre Denkvorgänge noch nicht verbal durch Hypothesen ausdrücken.⁶⁸

„Operational“ bedeutet, dass das Kind Handlungen auf beliebige Objekte anwenden kann. Beispiele hierfür sind: Ordnen, Klassifizieren, Vereinigen, Teilen, Zählen etc.⁶⁹

⁶⁴ Ginsburg; Opper 1998: S. 100.

⁶⁵ vgl. Moser Opitz 2008: S. 24.

⁶⁶ vgl. Bundschuh 1995: S. 120.

⁶⁷ vgl. Moser Opitz 2008: S. 25.

⁶⁸ Piaget 1981, S. 76.

⁶⁹ vgl. Wember 1986: S. 54f.

Schröder formulierte 1989 vier Merkmale, die uns ermöglichen, den Unterschied zwischen der konkret- operationalen Stufe und der prä-operationalen Stufe deutlicher zu erkennen:

1. Zentrierung versus Dezentrierung: Das Kind lernt mehrere Ansichten und Teile einer Situation oder Handlung wahrzunehmen. Es ist fähig, gewisse Aspekte eines Handlungsaktes im Blick zu behalten und diese zu verfolgen.
2. Wahrgenommene Erscheinung versus erschlossene Wirklichkeit: Das Kind kann auf Zusammenhänge schließen und lässt sich nicht mehr durch seine Wahrnehmung täuschen.
3. Zustände versus Transformationen: Momentaufnahmen werden immer seltener. Handlungsabläufe werden in Beziehung gesetzt.
4. Irreversibilität versus Reversibilität: Das Kind besitzt die Fähigkeit, reversibel zu denken: von einem Endzustand eines Handlungsaktes kann auf den Anfangszustand geschlossen werden.⁷⁰

3.3.4 Die Stufe der formalen Operation

Die formale Stufe beginnt ab dem elften Lebensjahr. Die Kinder beginnen eigenständig zu urteilen und lassen sich von vorgefundenen beziehungsweise vorgegebenen Informationen beeinflussen. Sie sind in der Lage, Hypothesen zu bilden.⁷¹

„Es ist die Phase, in der sich der junge Mensch vom Konkreten löst und das Wirkliche in ein System von möglichen Transformationen einordnet. Diese grundlegende letzte Dezentrierung vollzieht sich am Ende der Kindheit und bereitet die Adoleszenz vor, deren wichtigstes Kennzeichen zweifellos eine solche Lösung vom Konkreten zu solchen Interessen ist, die sich auf das Unaktuelle und die Zukunft richten: das Alter der großen Ideale und der einsetzenden Theorie über die vorhandenen einfachen Anpassungen an das Wirkliche heraus.“⁷²

⁷⁰ vgl. Moser Opitz 2008: S. 26.

⁷¹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 26f.

⁷² Piaget, Inhelder 1981: S. 97.

3.4 Piagets Entwicklung von Klassifikation und Ordnungsrelationen anhand von Aufgaben

Um die Entwicklung des operationalen Denkens besser nachvollziehen zu können, stellte Piaget verschiedene Aufgaben an Kinder. Thema der Aufgaben waren vor allem Klassifikations- und Ordnungsrelationsübungen, welche bis heute in Schulbüchern für den Anfangsunterricht erhalten blieben. Ziel dieser Aufgaben ist es, den Entwicklungsschritt des Kindes zwischen dem kindlichen und des operationalen Denken genauer zu verstehen. Piaget nennt zwischen der Entstehung von Klassifikation und Ordnungsrelation jeweils drei Phasen, die Kinder während des Lösen der Aufgabe durchlaufen. In der ersten Phase steht das prä-operationale Denken im Vordergrund, die zweite stellt das Übergangsstadium zum konkret-operationalen Denken dar und auf der dritten Stufe ist das konkret-operationale Denken bereits vorhanden.⁷³

Im Folgenden werden die drei Stadien anhand der angeführten Aufgabenstellungen beschrieben.

3.4.1 Klassifikation

Nach Piaget und Inhelder 1973:

„Wir halten also fest, dass man von Klassen von dem Moment an sprechen kann, in dem das Subjekt fähig ist, (1) sie in ihrer Komprehension durch die Gattung und den spezifischen Unterschied zu definieren und (2) sie in ihrer Extension gemäß den Beziehungen der Inklusion oder der einschließenden Zugehörigkeit zu handhaben, was eine Beherrschung der intensiven Quantifikationstheorien „alle“, „einige“, „einer“, und „keiner“ voraussetzt.“⁷⁴

Besonders wichtig für Piaget und Inhelder ist, dass eine Klasse durch Wahrnehmung und Denkvorgänge, die das Kind erst in der konkret-operationalen Phase erzielt, konstruiert werden kann. Dennoch liegt der Ausgangspunkt für die Bildung von Klassifikation bereits in der Sensomotorik. Sobald das Kind durch Wahrnehmung und

⁷³ vgl. Moser Opitz 2008: S. 28.

⁷⁴ Piaget, Inhelder 1973a: S. 28.

Operieren die Eigenschaften von Objekten erfährt und selbstständig erkundet, wird der Grundstein für das operationale Denken gebildet.⁷⁵

Klassifikation	Klasseninklusion
Ordnen von Gegenständen nach einem Merkmal, z.B nach Form, Farbe, Größe	Beziehungen zwischen Ganzem und Teilen, zwischen Oberklasse und Unterklasse erkennen: Hier hat es rote Perlen und blaue Perlen. Hat es mehr blaue Perlen oder mehr Perlen?

Abbildung 2: einfache oder additive Klassifikation⁷⁶

Matrizen									
Gegenstände werden nach verschiedenen Mermalen geordnet, und die Darstellung erfolgt in einer räumlichen Anordnung									
	○	△	◆						
rot									
blau									
gelb									

Andere Begriffe für eine mehrfache Klassifikation ohne räumliche Anordnung: doppelte oder dreifache Klassifikation, multiple Klassifikation

Abbildung 3: mehrfache oder multiplikative Klassifikation⁷⁷

- Stadium 1: Das erste Stadium verläuft zwischen dem zweiten und fünften Lebensjahr. Das Kind ist noch nicht fähig, Gegenstände nach bestimmten Kriterien zu ordnen, aber kann Muster, Figuren und Formen legen (= figurative Kollektion).
- Stadium 2: Das zweite Stadium verläuft zwischen dem fünften und siebten Lebensjahr. Das Kind ist in der Lage, Gegenstände in Klassen nach einem bestimmten Kriterium zu bilden.

⁷⁵ vgl. Moser Opitz 2008: S. 28.

⁷⁶ Moser Opitz 2008: S. 28.

⁷⁷ Moser Opitz 2008: S. 29.

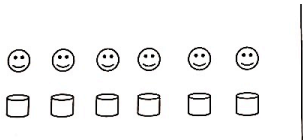
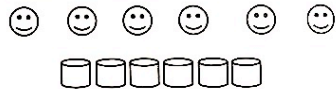
- Stadium 3: Das dritte Stadium erstreckt sich vom siebten bis zum elften Lebensjahr. Das Kind kann Aufgaben zur Klassifikation lösen und kann Inklusionsbeziehungen nachvollziehen.⁷⁸

3.4.2 Ordnungsrelation

Piaget spricht in Bezug auf Ordnungsrelation von einer „Aneinanderreihung“ oder von „Beziehungen resp. Seriationsoperationen“.⁷⁹

Einfache Reihenbildung	Komplexere Reihenbildung
Verschieden lange Stäbe werden der Größe nach geordnet.  Andere Begriffe: Seriation	Verschieden lange Stäbe werden in eine schon bestehende Reihe eingefügt. 

Abbildung 4: Reihenbildung⁸⁰

Stück-für- Stück- Korrespondenz	Stück-für-Stück- Korrespondenz und Äquivalenz
Zwei Mengen werden einander so zugeordnet, dass jedem Element von A genau ein Element von B gegenüberliegt.  Andere Begriffe: Eins-zu-Eins-Zuordnung oder Eins-zu-Eins-Korrespondenz	Herstellen von Stück-für-Stück-Korrespondenz. Die Elemente der einen Reihe werden anschließend auseinander geschoben oder zusammengefügt und es wird überprüft, ob das Kind Äquivalenz der Elemente trotz der Transformation erhalten kann. 

⁷⁸ vgl. Moser Opitz 2008: S. 28f.

⁷⁹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 29.

⁸⁰ Moser Opitz 2008: S. 30.

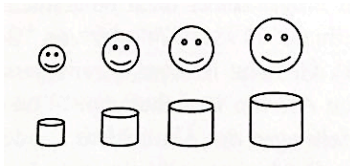
	Andere Begriffe: Invarianz, Zahlerhaltung, Mengenkonstanz
Reihen-Korrespondenz	Kardinale Korrespondenz
Es wird Stück-für-Stück-Korrespondenz hergestellt mit zwei Mengen, deren Elemente sich in der Größe voneinander unterscheiden.  Andere Begriffe: Ordinale Korrespondenz, Ordinale Zuordnung	Zwei Mengen mit gleichviel Elementen unterschiedlicher Größe, ungeordnet. Es wird überprüft, ob das Kind zu einem ausgewählten Element von a unmittelbar das dazugehörige Element der Menge b zeigen kann. Beispiel: Auf dem Tisch sind verschieden große Puppen und Schlafanzüge durcheinandergemischt. Dem Kind wird z.B. gesagt, dass alle Puppen, die kleiner sind als die Puppe 6, nun zu Bett gehen. Das Kind wird aufgefordert, die dazugehörigen Schlafanzüge zu zeigen.

Abbildung 5: Reihenbildung und Äquivalenz⁸¹

- Stadium 1: Die Kinder können die Stäbe noch nicht der Größe nach ordnen. Sie legen sie nach keinem bestimmten Muster auf, sondern wie sie möchten. Die Stück-für- Stück-Korrespondenz ist nicht vorhanden und das Kind erkennt die Äquivalenz der Mengen nach der Veränderung nicht.
- Stadium 2: Das Kind ist fähig, die Stäbe der Größe nach zu ordnen. Das Lösen der Aufgabe ist für die Kinder noch nicht einfach und erfolgt nicht nach einem gewissen Handlungsprinzip. Durch unsystematische Versuche gelangt das Kind zur Lösung. Die Stück-für- Stück- Korrespondenz ist vorhanden, jedoch lässt sich das Kind oft noch durch seine Wahrnehmung täuschen. Zum Beispiel geht das Kind davon aus, dass dort, wo es nach mehr aussieht, auch mehr Elemente gibt. Auch die Reihen-Korrespondenz und kardinale Korrespondenz ist vorhanden, jedoch nur aufgrund von Versuch und Irrtum.

⁸¹ Moser Opitz 2008: S. 29.

- Stadium 3: Das Kind ist in der Lage, alle Aufgaben nach einem gewissen Plan und Schema zu lösen. Durch die Zuordnung von Reihen entwickelt das Kind eine ordinale Korrespondenz, die operatorisch ist. Das Kind ist jedoch auf die Anschauung angewiesen und ist noch nicht in der Lage, die Aufgabe rein verbal und hypothetisch zu lösen.⁸²

3.5 Piagets Verständnis von Zahlen & Erwerb des Zahlbegriffs

Piaget beantwortet die Frage, ob die natürliche Zahl entdeckt oder erfunden wurde, damit, dass *„die Zahl eine Konstruktion ist, die sich im Verlauf der kindlichen Entwicklung allmählich aus logisch-mathematischen Gesetzmäßigkeiten, wie sie in den konkreten Operationen enthalten sind, herausbildet.“*⁸³

Piaget versteht unter den natürlichen Zahlen (Folge 1,2,3...) eine Zahl, die gleichzeitig als ordinal und kardinal definiert ist. Die Kardinalität (Anzahl) entnimmt er der Klassifikation, den ordinalen Aspekt (Zahlreihenfolge) der Ordnungsrelation. Diese zwei Aspekte entwickeln sich seiner Meinung nach synchron und bestimmen einander. Im Zuge der kindlichen Entwicklung vom prä-operationalen zum konkret-operationalen Stadium bildet sich der Zahlbegriff beim Kind immer weiter aus, in dem die Klassifikation immer mehr mit der Ordnungsrelation verschmilzt. Sobald das Kind das dritte Stadium erreicht hat, kann davon gesprochen werden, dass es den Zahlbegriff als Operation beherrscht.⁸⁴

Der Prozess der Zahlbegriffsentwicklung setzt sich laut Piaget aus drei wichtigen Operationen zusammen:

1. Erhaltung der Quantitäten und der Invarianz von Mengen
2. Kardinale und ordinale Stück-für- Stück- Korrespondenz
3. Additive und multiplikative Komposition⁸⁵

Im Folgenden werde ich diese Operationen näher erläutern.

⁸² vgl. Moser Opitz 2008: S. 31.

⁸³ Moser Opitz 2008: S. 32.

⁸⁴ vgl. Moser Opitz 2008: S. 33f.

⁸⁵ vgl. Hasemann 2003: S. 11ff.

3.5.1 Erhaltung der Quantitäten

Bei der Erhaltung der Quantitäten geht es darum, dass das Kind eine bestehende Menge überhaupt als eine Menge beziehungsweise Quantität erkennt. Piaget erklärt diese Entwicklung mit dem Invarianzbegriff sowie durch unterschiedliche Aufgaben zur Erhaltung der Quantitäten.

3.5.1.1 Invarianzbegriff

Die Invarianz handelt davon, dass das Kind die Quantität einer Menge trotz verschiedener Transformationen wie zum Beispiel Umschütten oder andere Anordnungen der Elemente der Menge, erfasst.⁸⁶

„Eine Menge oder eine Gruppe von Gegenständen ist nur vorstellbar, wenn ihr Gesamtwert unverändert bleibt, gleich welche Veränderungen in den Verhältnissen der Elemente eintreten mögen. Die Operationen, die man innerhalb einer Menge als „Permutationsgruppe“ bezeichnet hat, zeigen mit Genauigkeit, dass man alle möglichen Permutationen mit den Elementen ausführen kann, ohne dabei die Gesamtpotenz der Menge zu verändern.“⁸⁷

Im Mittelpunkt steht für Piaget die geistige Aktivität, mit der das Kind unabhängig von seiner Wahrnehmung die Invarianz erkennt beziehungsweise feststellen kann. Bereits einige Monate nach der Geburt sammelt das Kind Erfahrungen mit der Invarianz von Mengen. Piaget bringt hierzu die berühmten Beispiele mit den Umschüttversuchen, Mengen von Perlen.⁸⁸

- Erhaltung kontinuierlicher Mengen

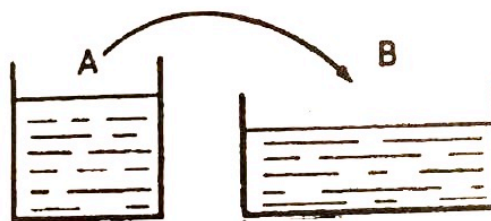


Abbildung 6: Umschüttversuch⁸⁹

⁸⁶ vgl. Piaget; Szeminska 1972: S. 15.

⁸⁷ Piaget; Szeminska 1972: S. 15.

⁸⁸ vgl. Hasemann 2003: S. 11.

⁸⁹ Hasemann 2003: S. 11.

Das Kind betrachtet zwei gleiche Gefäße, die sich nur durch ihre Form unterscheiden. Ein Gefäß davon ist bereits mit Flüssigkeit gefüllt. Die Aufgabe besteht darin, die Flüssigkeit in das andere Gefäß umzuleeren und zu erkennen, dass sich die Menge der Flüssigkeit während des Umschüttens nicht verändert.⁹⁰

Ergebnis der Umschüttversuche war die Erkenntnis, dass Kinder erst zwischen sechs und sieben Jahren wirklich sicher sind, dass sich die Menge der Flüssigkeit beim Umfüllen nicht verändert.⁹¹ Kinder, die sich im ersten Stadium befinden, sind davon überzeugt, dass in dem Gefäß, wo der Flüssigkeitsspiegel höher ist, die Flüssigkeitsmenge auch größer ist.⁹²

„Kurz, in Ermangelung einer Verknüpfung der Unterschiedsverhältnisse zwischen Niveau und Breite ist das Kind in diesem Stadium nicht in der Lage, zum Begriff einer totalen oder multidimensionalen Quantität zu gelangen. ... Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass die Versuchspersonen dieses ersten Niveaus die Invarianz der Quantität deshalb nicht begreifen, weil sie noch nicht soweit gekommen sind, den Begriff der Quantität selbst als totale Quantität zu erarbeiten. Und wenn sie das nicht fertigbringen, so deshalb, weil sie nicht imstande sind, die betreffenden Relationen oder Teile zu verknüpfen, weil ihr Geist das Niveau der Qualitäten oder der „rohen Quantitäten“ nicht übersteigt.“⁹³

- Erhaltung diskontinuierlicher Mengen

Piaget führte das vorherige Beispiel mit den Umschüttversuchen auch mit Perlen durch. Sobald eine Perle in das eine Gefäß gegeben wird, muss auch eine in das andere Gefäß gelegt werden. Piaget ist der Ansicht, dass diese Aufgabe den Kindern leichter fällt, da eine Stück-für-Stück-Korrespondenz stattfindet und hergestellt werden kann. Dennoch wurde festgestellt, dass weder das Abzählen noch die Stück-für-Stück-Korrespondenz dem Kind, das sich im ersten Entwicklungsstadium befindet, hilft. Auch im zweiten Stadium zeigen die Kinder noch immer Verunsicherung. Vollständige Richtigkeit ist erst im dritten Stadium zu erkennen, in dem die Kinder bereits in der Lage sind, Höhe und Breite in Beziehung zu setzen und die Mengen zu vergleichen.⁹⁴

⁹⁰ vgl. Moser Opitz 2008: S. 35.

⁹¹ vgl. Hasemann 2003: S. 11.

⁹² vgl. Moser Opitz 2008: S. 35.

⁹³ Piaget; Szeminska 1972: S. 15.

⁹⁴ vgl. Moser Opitz 2008: S. 35f.

Piaget führte ebenfalls Versuche zur Eins-zu- Eins- Zuordnung durch. Dabei zeigt er den Kindern eine Reihe von Vasen und eine bestimmte Anzahl an Blumen. Es gibt jedoch mehr Blumen als Vasen. Die Aufgabe besteht darin, für jede Vase eine Blume vorzubereiten und vor die Vase zu legen. Im Anschluss wird die Reihe der Blumen zusammen- oder auseinandergeschoben, sodass die Blumen nicht mehr genau vor den Vasen liegen. Die Kinder sollen nun die Frage beantworten, ob noch immer genauso viele Blumen wie Vasen da sind.⁹⁵

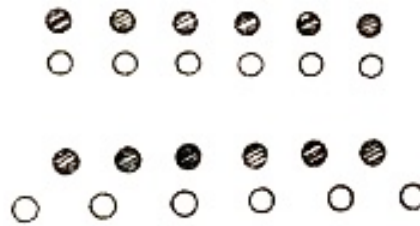


Abbildung 7: Eins - zu - Eins – Zuordnung⁹⁶

3.5.2 Verbindung von Klassifikation und Ordnungsrelation

Die Zahl wird nach Piaget als Zahl konstruiert, in dem sich die Kardinalzahl mit der Ordinalzahl verbindet. Dazu ist eine Definition des Kardinal- sowie des Ordinalaspekts notwendig.⁹⁷

*„Der Kardinalaspekt der Zahl bezeichnet die Anzahl Einheiten, die eine Zahl enthält, und wird von der Klasse, d.h. von den Klassifikationen hergeleitet. Eine Menge wird definiert als eine Anzahl Elemente, die sich einerseits dadurch voneinander unterscheiden, dass sie einzelne Elemente sind, deren Zusammengehörigkeit andererseits durch ein oder mehrere übereinstimmende Merkmale bestimmt wird (z.B die Menge der kleinen, blauen Bälle)“*⁹⁸

„Der Ordinalaspekt der Zahl bezeichnet den Rang der Zahl in der Reihe und wird von der Ordnungsrelation hergeleitet. Die einfache Seriation ermöglicht, die Elemente, die

⁹⁵ vgl. Hasemann 2003: S. 12.

⁹⁶ Hasemann 2003: S. 12.

⁹⁷ vgl. Piaget; Szeminska 1972: S. 133.

⁹⁸ Moser Opitz 2008: S. 36.

sich in der Größe voneinander unterscheiden, zu ordnen und in eine Reihe zu bringen. Somit kann die Relation $><$ Relation festgestellt werden.“⁹⁹

Die Konstruktion der Zahl besteht nun darin, diese Unterschiede gleichzusetzen. Das bedeutet, dass die „Vereinigung der Klasse“ sowie die „asymmetrische Relation“ zu einem Ganzen zusammengefügt wird. Die Glieder, die aufgezählt werden, sind zueinander sowohl äquivalent als auch voneinander verschieden aufgrund der Reihenfolge der Aufzählung.¹⁰⁰

Die Prozesse der Zusammenführung nennt Piaget „Ordination“ und „Kardination“. Sie bedingen einander und somit kann keiner ohne den anderen gebildet werden. Die Herstellung von Stück-für-Stück-Korrespondenz und Äquivalenz ist die erste Voraussetzung für die Ordination und Kardination. Durch die Stück-für-Stück-Korrespondenz werden zwei Mengen in Beziehung zueinander gebracht und auf ihre Äquivalenz überprüft. Unbedingt notwendig ist dabei, das Feststellen von Invarianz (siehe 3.5.1.). Der nächste Schritt ist, dass die Mengen, die sich durch Größenrelationen voneinander unterscheiden, in Beziehung gesetzt werden. Dabei werden die Elemente der Menge als Glieder von Klassen und Relationen aufgefasst. Abbildung 8 schildert ein Treppenmodell von Piaget, welches das Herstellen von ordinaler und kardinaler Korrespondenz zeigt.¹⁰¹

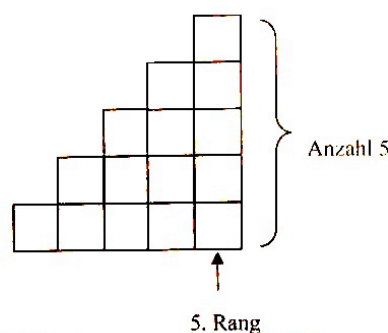


Abbildung 8: „Jede Stufe hat ihren bestimmten Platz in der Reihe, der eineindeutig festgelegt ist. Dieser Rang wird definiert durch die Anzahl Einheiten, die er enthält. Die Stufe mit Rang fünf enthält genau fünf Einheiten. Die Zahl fünf besteht somit aus dem fünften Rang und der Anzahl fünf.“¹⁰²

⁹⁹ Moser Opitz 2008: S. 36.

¹⁰⁰ vgl. Piaget; Szeminska 1972: S. 133.

¹⁰¹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 37.

¹⁰² Moser Opitz 2008: S. 37f.

Es wird vom Zahlbegriffserwerb bei Kindern gesprochen, wenn die Verbindung der Kardination und Ordination hergestellt ist.¹⁰³

3.5.3 Additive und multiplikative Kompositionen

Für Piaget und Szeminska (1972) spielt nicht nur die Erhaltung von Quantitäten und das Verschmelzen von Klassifikation und Ordnungsrelation eine wesentliche Rolle für den Zahlbegriffserwerb, sondern auch die „additive und multiplikative Komposition“. Dabei handelt es sich darum, das Verhältnis von Klasse und Zahl beziehungsweise der Teile und dem Ganzen und den Beziehungen zwischen den Mengen zu erfassen. Piaget behauptet, dass die Additions- und Multiplikationsoperation bereits in der Zahl enthalten ist:¹⁰⁴

*„In Wirklichkeit sind die Additions- und Multiplikationsaufgaben bereits in der Zahl als solcher enthalten, da eine Zahl eine additive Vereinigung von Einheiten ist und da die Stück-für-Stück-Korrespondenz zweier Gruppen eine Multiplikation einschließt.“*¹⁰⁵

- **Beziehung zwischen Klasse und Zahl: Klasseninklusion**

Die Klasseninklusion ist nach Piaget eine wichtige Voraussetzung für den Zahlbegriffserwerb. Dabei handelt es sich darum, dass das Kind erkennt, dass eine untergeordnete Klasse ein Teil einer übergeordneten Klasse ist. Zum Beispiel, dass drei in sieben enthalten ist. Piaget untersuchte die Klasseninklusion an den Aufgaben aus 3.4. und stellte daraus fest (z.B. Verhältnis zwischen Perlen und blauen Perlen), dass ein Kind im dritten Stadium fähig ist, diese Aufgaben vollkommen richtig zu lösen. Erst wenn das Kind die Relationen von Teilen und Ganzen erkennt, wird das Zahlverständnis operatorisch und es kann von einer „additiven Komposition der Klasse“ gesprochen werden. In diesem Kontext meint additiv, dass verschiedene Teile ein Ganzes ergeben.¹⁰⁶

- **Arithmetische Beziehungen zwischen Klassen**

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist, dass Kinder erkennen sollen, dass ein Teil des Ganzen auch als ein Teil betrachtet werden kann, wenn sich seine Anordnung verändert.

¹⁰³ vgl. Piaget; Szeminska 1972: S. 133.

¹⁰⁴ vgl. Piaget; Szeminska 1972: S. 211.

¹⁰⁵ vgl. Piaget; Szeminska 1972: S. 211.

¹⁰⁶ vgl. Piaget; Szeminska 1972: S. 211ff.

Um diesen Aspekt näher zu beschreiben, verwendet Piaget mehrere Invarianz Aufgaben:

„Kann ein Kind z.B die Beziehungen zwischen den Klassen auch erkennen, wenn ein Teil einer Menge verändert wird? Ist ein Kind in der folgenden Aufgabe von Invarianz überzeugt: Ein Kind isst 4 Bonbons am Vormittag, ein anderes 3 am Vormittag und 1 am Nachmittag. Haben die zwei Kinder gleichviel Bonbons gegessen, hat ein Kind mehr/weniger gegessen?“¹⁰⁷

Das Feststellen von Invarianz beinhaltet für Piaget eine abstrakte Multiplikation und spricht deswegen von „multiplikativer Komposition“. Jede Untermenge wird in Beziehung zu einer anderen gesetzt und alle beide in Beziehung zu ihrer Menge. Das Ganze besteht nun aus einer additiven Komposition der Teile.

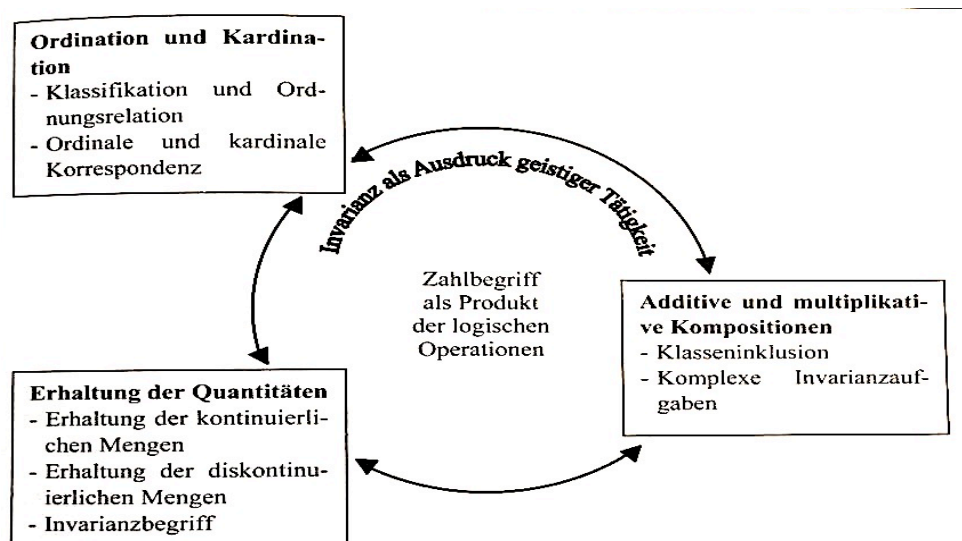


Abbildung 9: Zahlbegriff als Produkt von logischen Operationen¹⁰⁸

¹⁰⁷ vgl. Piaget; Szeminska 1972: S. 246.

¹⁰⁸ Moser Opitz 2008: S. 41.

4 Zahlbegriffserwerb nach Gelman & Gallistel

Gelman und Gallistel gelten als Vertreter des *skills integration models*, das als Gegenstück zu Piagets Zahlbegriffstheorie fungiert. Das Modell enthält neuere Ansätze und Erkenntnisse der Zahlbegriffsentwicklung. Vertreter des *skills integration models* gehen davon aus, dass der Zahlbegriff auf der Integration von *number skills* aufbaut. Während nicht nur die Simultanerfassung (subitizing) für den Erwerb des Zahlbegriffs eine wichtige Rolle spielt, steht vor allem die Bedeutung des Zählens im Mittelpunkt des Entwicklungsverlaufs. Piaget schenkt in seiner Theorie dem Zählprozess keinerlei Beachtung. Er geht davon aus, dass das Zählen ein rein verbales Aufsagen ist ohne jegliche operatorische Handlung, solange das Kind den Zahlbegriff nicht vollständig ausgeprägt hat.¹⁰⁹

4.1 Zählprinzipien – Das Konzept „Prinzipien zuerst“

Gelman und Gallistel formulierten in ihrer Zahlbegriffstheorie fünf grundlegende Zählprinzipien, die jedes Kind beherrschen sollte.¹¹⁰ Sie gelten als handlungsleitende Ideen für die Entwicklung des Zählprozesses.¹¹¹ Gelman und Gallistel versuchten zu beweisen, dass diese zum Großteil angeboren sind und nicht erst erlernt werden müssen.¹¹² Kinder besitzen laut ihnen von Geburt an ein implizites Wissen über diese Prinzipien.¹¹³ Was von dem Kind wirklich erlernt werden muss, so behaupten sie, sind die Zahlwörter, deren Konstruktion und Ordnung.¹¹⁴

Die ersten drei Prinzipien gelten als Grundlage für den Zählakt und beschäftigen sich damit, wie genau gezählt wird (*how-to-count principles*).¹¹⁵ Sie werden im Sinne von Piaget definiert und das Kind kann mit deren Hilfe Mengen zählen und diese auf (Nicht)-Äquivalenz prüfen.¹¹⁶ Die letzten zwei Prinzipien sind den anderen untergeordnet und beziehen sich darauf, was genau gezählt werden kann.¹¹⁷

¹⁰⁹ vgl. Hildenbrand 2016: S. 28.

¹¹⁰ vgl. Hasemann 2003: S. 5.

¹¹¹ vgl. Gelman, Meck 1992: S. 171.

¹¹² vgl. Hasemann 2003: S. 7.

¹¹³ vgl. Hildenbrand 2016: S. 29.

¹¹⁴ vgl. Hasemann 2003: S. 7.

¹¹⁵ vgl. Hasemann 2003: S. 5.

¹¹⁶ vgl. Moser Opitz 2008: S. 68.

¹¹⁷ vgl. Hasemann 2003: S. 5.

4.1.1 Eindeutigkeitsprinzip (The one-one Principle)

„Das Eindeutigkeitsprinzip: Jedem der zu zählenden Objekte wird genau ein Zahlwort zugeordnet.“¹¹⁸

Laut Gelman und Gallistel steht bei diesem Prinzip das Abzählen und Benennen von zu zählenden Objekten im Mittelpunkt. Während diesem Prozess muss das Kind lernen zwischen den folgenden Komponenten zu unterscheiden:

- Aufteilung (partitioning)
- Kennzeichnung, Identifizierung (tagging).

Beim Prozess der Aufteilung (*partitioning*) geht es darum, dass das Kind zwischen bereits gezählten und noch ungezählten Objekten unterscheiden soll. Objekte müssen bei diesem Schritt automatisch vom Kind von der noch- nicht- gezählten Kategorie in die bereits-gezählte Kategorie transferiert werden. Zu diesem Prozess fügt sich ein weiterer hinzu (*tagging*), in dem das Kind die Objekte durch Zahlwörter kennzeichnen und benennen soll. Oft sind in dieser Phase die Zahlwörter beim Kind noch nicht vollständig entwickelt und es hilft sich daher mit anderen Bezeichnungen um die Objekte zu benennen (zum Beispiel Namensgebung etc.). Ziel des Eindeutigkeitsprinzips ist die gleichzeitige Abwicklung beider Prozesse – *partitioning und tagging*. Sobald das Kind ein Objekt von der noch nicht gezählten Kategorie in die bereits gezählte Kategorie transferiert, muss dieses korrekt mit einem Zahlwort bezeichnet werden können. Besonders wichtig ist, dass jedes Zahlwort dabei nur einmal vorkommt und nicht wiederholt vom Kind verwendet wird (*withdrawn*).¹¹⁹

„The one-one principle in counting requires the rhythmic coordination of the partitioning and tagging processes. The two processes must start together, stop together, and stay in phase throughout their use.“¹²⁰

Bei dem Eindeutigkeitsprinzip gibt es drei Fehlerquellen, die immer wieder während des Abzählens der Objekte auftauchen:

1. Partitioning-Prozess: Doppeltes Zählen von bereits gezählten Objekten oder Auslassen von Objekten, die mitgezählt werden sollten

¹¹⁸ Hasemann 2003: S. 5.

¹¹⁹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 77f.

¹²⁰ Gelman, Gallistel 1978: S. 78.

2. Tagging – Prozess: Doppelte Verwendung eines Zahlwortes
3. Schwierigkeiten beim Koordinieren beider Prozesse ¹²¹

4.1.2 Prinzip der stabilen Ordnung (The stable-order Principle)

„Das Prinzip der stabilen Ordnung: Die Reihe der Zahlwörter hat eine feste Ordnung.“ ¹²²

Zählen beinhaltet deutlich mehr als nur die Fähigkeit, Objekten ein Zahlwort zuzuschreiben. Auch wenn ein Kind mit der Hilfe von Zahlwörtern Objekte abzählt, ist daraus nicht zu schließen, dass es den Zählprozess tatsächlich beherrscht. Erst wenn das Kind das Prinzip der stabilen Ordnung versteht und umsetzt, ist davon auszugehen, dass das Kind den Zählprozess bereits teilweise nachvollziehen kann. Wichtig bei diesem Prozess ist, die gezählten Objekte, denen bereits ein Zahlwort zugeschrieben wurde, in eine stabile Ordnung zu bringen. ¹²³

4.1.3 Kardinalprinzip (The cardinal principle)

„Das Kardinalprinzip: Das zuletzt genannte Zahlwort gibt die Anzahl der Objekte in einer Menge an.“ ¹²⁴

Das Kardinalprinzip besagt, dass das zuletzt genannte Zahlwort eine besondere Bedeutung hat: es bezeichnet die Anzahl der Objekte der gezählten Menge. Die formale Bezeichnung dafür ist „Kardinalität“ beziehungsweise *„cardinal number of the set“*. ¹²⁵

„So besides being able to assign numerons and do so in a fixed order, the child must be able to pull out the last numeron assigned and indicate that it represents the numerosity of the array.“ ¹²⁶

Laut Gelman und Gallistel basiert dieses Prinzip auf vier Aspekten:

- Hervorhebung des zuletzt genannten Zahlworts
- Wiederholung des zuletzt genannten Zahlworts
- Feststellen der Anzahl der Objekte einer Menge ohne neu zu zählen

¹²¹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 78.

¹²² Hasemann 2003: S. 5.

¹²³ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 79.

¹²⁴ Hasemann 2003: S. 35.

¹²⁵ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 79f.

¹²⁶ Gelman, Gallistel 1978: 80.

- Wiederholung des zuletzt genannten Zahlworts auf Nachfrage¹²⁷

Des Weiteren sind sie der Meinung, dass das Eindeutigkeitsprinzip, das Prinzip der stabilen Ordnung und das Kardinalprinzip eng miteinander verbunden sind. Das Kardinalprinzip, welches das Eindeutigkeitsprinzip sowie das Prinzip der stabilen Ordnung als Voraussetzung hat, entwickelt sich jedoch erst später beim Kind.¹²⁸

4.1.4 Abstraktionsprinzip (The abstraction principle)

Die drei, bis jetzt erwähnten Prinzipien beschäftigen sich mit dem Entstehen des Zählprozesses (*How-to-count-principles*). Das Abstraktionsprinzip hingegen beinhaltet die Anwendbarkeit der oben genannten Zählprinzipien auf verschiedene Bereiche.¹²⁹

„Das Abstraktionsprinzip: Es kann jede beliebige Menge ausgezählt werden, d.h. es kommt nicht darauf an, welcher Art die Objekte sind, die gezählt werden.“¹³⁰

Das Abstraktionsprinzip besagt, dass die bereits vorher genannten Prinzipien auf alle Bereiche, Mengen und Ansammlungen von Objekten angewandt werden können. In dieser Phase soll das Kind zusätzlich verstehen lernen, dass Objekte auch im Kopf oder nur in Gedanken gezählt werden können und dass dafür keine, unmittelbar wahrnehmbaren Gegenstände notwendig sind.¹³¹

Heinz Gast geht in seiner Studie über den Umgang mit Zahlen und Zahlgebilden 1957 davon aus, dass das Abstraktionsprinzip erst ab dem 8. Lebensjahr ausgeprägt wird.¹³² Er stellt in seinen Beobachtungen fest, dass kleine Kinder ausschließlich fähig sind, homogene Objekte zählen können. Klahr und Wallace (1973) unterstützen diese Behauptung und sind der Ansicht, dass Kinder am Anfang ihres Zählernprozesses nur Objekte, die gemeinsame Eigenschaften haben, zählen können, wie zum Beispiel Objekte selber Größe, Farbe etc. Laut ihnen, stellt das Kind erst relativ spät fest, dass auch Objekte, mit selber Identität, jedoch von unterschiedlicher Größe und Farbe, gezählt werden können. Erst nach der Entwicklung dieses Verständnisses entwickelt sich die Vorstellung, dass auch heterogene Sets gezählt werden können. Gast erwähnt in seiner Studie im Gegensatz zu Gelman und Gallistel jedoch nicht die Fähigkeit der

¹²⁷ vgl. Moser Opitz 2008: S. 71.

¹²⁸ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 80.

¹²⁹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 80f.

¹³⁰ Hasemann 2003: S. 5.

¹³¹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 80.

¹³² vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 80. zitiert aus Gast, 1957

Kinder, imaginäre oder sogar Objekte, die nicht direkt erfassbar sind, zählen zu können.¹³³

4.1.5 Irrelevanz der Anordnung (The order irrelevance principle)

„Das Prinzip von der Irrelevanz der Anordnung: Die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte ist für das Zählergebnis nicht von Bedeutung.“¹³⁴

Gelman und Gallistel würden Folgendes über dieses Prinzip sagen *„it doesn't matter how you count“¹³⁵*

Erwachsene wissen, dass jedes Zahlwort auf ein beliebiges Objekt einer Reihe angewandt werden kann, solange kein Zahlwort öfter als einmal verwendet wird. Grund dafür ist, dass Erwachsene verstehen, dass die Reihenfolge, in welcher die Gegenstände geteilt oder markiert sind, irrelevant für das Zählen ist. Wenn zum Beispiel eine Reihe mit einem Hasen, einem Lastwagen, einem Hund und einer Katze betrachtet wird, die von links nach rechts angeordnet ist, so könnte der Hase in einem Zählprozess mit der Nummer eins versehen werden oder die Katze in einem anderen.¹³⁶

Ginsburg formulierte 1975 drei Aspekte, denen sich ein Kind, sobald es das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung versteht, bewusst ist:

1. das zu zählende Objekt wird eher als ein *Ding* betrachtet und nicht als eine Eins oder eine Zwei (Abstraktionsprinzip)
2. die verbalen Bezeichnungen sind den Objekten nur temporär zugeordnet und haften ihnen nicht an, sobald die Zählung vorüber ist
3. ungeachtet der Reihenfolge resultiert dieselbe Kardinalnummer¹³⁷

„it doesn't matter how you count them as long as you do count them all and count each only once.“¹³⁸

¹³³ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 137.

¹³⁴ Hasemann 2003: S. 5.

¹³⁵ Gelman, Gallistel 1978: S. 82.

¹³⁶ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 82.

¹³⁷ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 82.

¹³⁸ Gelman, Gallistel 1978: S. 142.

4.1.6 Weitere Zählprinzipien

Die Zählprinzipien von Gelman und Gallistel gelten als Grundlage für die Zählentwicklung. Dennoch haben ForscherInnen die Prinzipien von Gelman und Gallistel erweitert und weitergehende Grundsätze der Zählentwicklung niedergeschrieben:¹³⁹

Baroody ergänzt das Prinzip der Einmaligkeit. Es besagt, dass jedes genannte Zahlwort genau ein Element bezeichnet. Weiters wird auch jedes zu zählende Element mit genau einem Zahlwort festgelegt. Beispielsweise würde 1,2,3,3,4 nicht funktionieren, denn zwei unterschiedliche Elemente oder Anzahlen würden sonst mit demselben Zahlwort benannt werden.

Dehane fügt den Zählprinzipien noch das Prinzip der beliebigen Reihenfolge hinzu. Es hält fest, dass die Reihenfolge, in der Objekte gezählt werden, keine Auswirkung auf das Zählen oder das Zählergebnis hat. Vergleichbar ist dieses Prinzip mit der Irrelevanz der Anordnung.

4.2 Der Nachweis der „*How to count principles*“ anhand eines „magischen“ Experiments

Gelman und Gallistel untersuchten die *how-to-count-principles* anhand eines „magischen“ Experiments. Dieser Zugang lieferte interessante Beobachtungen über die Zählentwicklung bei Kindern, auf die im Folgenden nun genauer eingegangen wird.¹⁴⁰

4.2.1 Ablauf & Methodik des Experiments

Dieses Experiment wurde an Vorschulkindern getestet und beschäftigt sich damit, ob sich Kinder darüber bewusst sind, dass es sich bei einer Addition oder Subtraktion („number relevant“), ganz im Gegensatz zu einer räumlichen Versetzung oder Substitution („number – irrelevant“), um eine tatsächliche Veränderung handelt. Ziel von Gelman und Gallistel war, anhand dieses Experiments, die drei „*how – to – count – principles*“ nachzuweisen. Sie nutzten die erworbenen Beobachtungen über das

¹³⁹ vgl. Ganser, Feder- Scherbaum 2013: S. 32.

¹⁴⁰ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 83.

spontane Zählen und das Sprechen über Zahlen beim Kind und schlossen damit auf die Entwicklung des Zählprozesses beim Kind.¹⁴¹

Gelman entwickelte für das Experiment ein zweistufiges Verfahren:¹⁴²

1. Stufe: beschäftigt sich mit der Erwartungshaltung des Kindes gegenüber der Zahl
2. Stufe: dokumentiert die Reaktion des Kindes, wenn heimliche („magic“) Transformationen auf die vorgegebene Reihe angewendet werden.

Vorübung: Ablauf der ersten Stufe:

In der ersten Phase wurden den Kindern zwei Platten gezeigt, auf welchen sich jeweils eine unterschiedliche Anzahl an Plastikspielzeug befand. Auf der ersten Platte waren zwei Mäuse und auf der anderen drei Mäuse zu sehen. Der Versuchsleiter ernannte eine Platte als „Siegerplatte“ („the winner“), unabhängig von der Anzahl der Mäuse, die sich darauf befand. Die andere Platte wurde als „Verlierer“ bezeichnet („the loser“).¹⁴³

Die erste Phase wurde zu einem Identifikationsspiel erklärt. Beide Platten wurden mit Eimern verdeckt und anschließend gemischt, bis der Eindruck erweckt wurde, dass das Kind nicht mehr wusste, welche Platte nun der „Sieger“ beziehungsweise der „Verlierer“ war. Danach wurde der Mischvorgang gestoppt. Das Kind musste nun die „Siegesplatte“ bestimmen und anschließend den Eimer hochheben, um sich zu vergewissern, dass es mit seiner Wahl richtig lag.¹⁴⁴

Wenn ein Kind irrtümlich die Verliererplatte als Gewinnerplatte bezeichnete, sagte der Versuchsleiter: „Nein, das ist der Verlierer“. Anschließend wurden die Platten erneut verdeckt und durchmischt. Wenn das Kind jedoch richtig riet, bestätigte der Versuchsleiter die Wahl und gab dem Kind einen Preis bevor er die Platten noch einmal zudeckte und wieder miteinander vermischte.¹⁴⁵

¹⁴¹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 83.

¹⁴² vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 84.

¹⁴³ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 84.

¹⁴⁴ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 84.

¹⁴⁵ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 84.

Jede vom Kind aufgedeckte Platte wurde bei dem Experiment als Versuch gezählt. Es waren zum Beispiel zwei Versuche, wenn das Kind zuerst die Verliererplatte aufdeckte und anschließend die Gewinnerplatte.¹⁴⁶

Vorübung: Ablauf der zweiten Stufe:

In dieser Phase veränderte der Versuchsleiter die räumliche Anordnung der jeweiligen Sets, in dem er es beispielsweise länger und weniger dicht oder kürzer und dichter machte. In anderen ähnlichen Experimenten wurden teilweise auch die Farben der Sets geändert oder Elemente hinzugefügt beziehungsweise weggenommen.¹⁴⁷

Nach dem Vermischen der Platten wurde das Kind erneut befragt, Gewinner und Verlierer zu bestimmen. Wenn das Kind die Gewinnerplatte korrekt aufdeckte, so fragte der Versuchsleiter: „Hat sich irgendetwas verändert? Wenn ja, was? Wie viele Objekte sind nun auf den Platten? Wie viele Objekte waren ursprünglich auf jeder Platte zu sehen? Kann das Spiel weitergehen? Muss etwas am Spiel verändert werden? Wenn ja, was?“¹⁴⁸

Wenn das Kind meinte, dass sich etwas an der Anzahl der Objekte verändert hat und dass nun mehr oder weniger Objekte vorhanden sind, so wurde darum gebeten, die vorherige Ordnung wiederherzustellen.¹⁴⁹

4.2.2 Protokolle – tatsächliches Experiment

TeilnehmerInnen des Experiments waren Kinder im Alter von zwei bis vier Jahren. Alle Kinder bekamen in der ersten Phase des Experiments ein Set mit zwei und ein anderes mit drei Objekten vorgelegt. Anschließend wurden die Kinder in der zweiten Phase mit dem Wegnehmen oder umstrukturieren (Verlängern oder Verkürzen) eines Objekts aus dem dreier Set konfrontiert.

Im Folgenden zeigten die Versuchsleiter ein aus drei- und ein aus fünf bestehendes Set. Die zweite Phase wiederholt den Ablauf von der ersten Phase, nur das jetzt zwei Objekte vom fünfer Set verändert wurden.

Somit liegt der Fokus des Experiments auf zwei Sets:

¹⁴⁶ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 84.

¹⁴⁷ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 84f.

¹⁴⁸ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 85.

¹⁴⁹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 85.

- das zweier und dreier Set: untersucht das Wegnehmen und Verändern eines der enthaltenen Objekte – [(2 vs. 3) – 1]
- das dreier und fünfer Set: untersucht das Wegnehmen und Verändern zweier enthaltener Objekte - [(3 vs. 5) – 2]

4.2.3 Ergebnisse des Experiments

Erstaunlicherweise sprachen die Kinder nicht erst in der zweiten Phase über Zahlen, sondern während des gesamten Experiments. Auch wenn nicht direkt nach der exakten Anzahl an Objekten gefragt wurde, zählten die Kinder stets die vorhandenen Objekte. Des Weiteren zählten sie auch die Anzahl an Preisen, die sie durch richtiges Raten erhielten.¹⁵⁰

Nachweis des Eindeutigkeitsprinzips

„The one-one analysis simply addressed the question of whether children used as many different tag words as there were items in an array.“¹⁵¹

Eine Zählsequenz wurde als Nachweis des Eindeutigkeitsprinzips gesehen, wenn das Kind die gleiche Anzahl an verschiedenen Zahlwörtern benutze wie sich Objekte auf der Platte befinden.¹⁵²

Abbildung 10 zeigt die Ergebnisse des Experiments in Bezug auf das Eindeutigkeitsprinzip.

Age group and experiment	N	Number of counters	Number of count sequences	Number of sequences with one-one errors	Errors by type			
					Partitioning	Tagging	Coordination	Other
2 year olds [(2 vs. 3)-1]	16	14	56	11	0	6	4	1
3 year olds [(2 vs. 3)-1]	32	25	69	9	0	0	8	1
[(3 vs. 5) - 2]	24	20	159	19	9	0	10	0
4 year olds [(2 vs. 3)-1]	32	16	25	0	0	0	0	0
[(3 vs. 5) - 2]	24	19	150	23	3	1	19	0

Abbildung 10: Beherrschung des Eindeutigkeitsprinzips¹⁵³

¹⁵⁰ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 85.

¹⁵¹ Gelman, Gallistel 1978: S. 87.

¹⁵² vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 87.

¹⁵³ Gelman, Gallistel 1978: S. 88.

Gelman und Gallistel stellten fest, dass das Kind, je jünger es war, eine größere Tendenz zum Zählen besaß. Sogar die zweijährigen Kinder haben laut Tabelle zu 80% fehlerfrei gezählt. Das bedeutet jedoch nicht, dass sie wie Erwachsene richtig gezählt haben, sondern nur, dass sie ihre eigenen unterschiedlichen Bezeichnungen für die Objekte verwendet haben, wie zum Beispiel 1, 13, 19, 2, 6, 4, A, B etc.¹⁵⁴

*„Whatever tags they use, 2-year-olds show a remarkable tendency to say one number word for each item in an array.“*¹⁵⁵

Die Ergebnisse der Dreijährigen und Vierjährigen ergeben ebenfalls, dass das Eindeutigkeitsprinzip großteils korrekt angewendet werden konnte.¹⁵⁶

Natürlich gab es auch Fehlerquellen, die sich in die untenstehenden Kategorien unterteilen lassen:¹⁵⁷

- „Partitioning errors“:
Fehler, wenn ein Objekt ausgelassen oder öfters als einmal gezählt wurde. Dieser Fehler tauchte besonders oft bei dreijährigen Kindern auf. Je mehr Objekte vorhanden waren, desto öfter kam dieser Fehler vor.
- „Tagging errors“:
Fehler, wenn ein Zahlwort für mehrere Objekte verwendet wurde zum Beispiel 1, 4, 4. Besonders bei Drei- bis Vierjährigen war diese Fehlerquelle kaum vorhanden. Gelman und Gallistel begründeten dies damit, dass Kinder in diesem Alter bereits mehrere Zahlwörter kennen und verwenden.
- „Coordination error“: Fehler, bei dem Kinder daran scheiterten, das letzte Objekt zu zählen beziehungsweise nicht feststellen können, ob es sich um das letzte Objekt handelt. Dieser Fehler tauchte bei dem Experiment am häufigsten auf. ForscherInnen behaupten, dass es sich hierbei auch um einen „partitioning error“ handelt.
- „other errors“.

¹⁵⁴ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 87.

¹⁵⁵ Gelman, Gallistel 1978: S. 87.

¹⁵⁶ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 89.

¹⁵⁷ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 89.

Zusammengefasst schlossen Gelman und Gallistel nach den Untersuchungen auf folgende Tatsache:

*„For the child as young as 2,5 years, enumeration already involves assigning one and only one numerlog to each item in the array. In other words, the child knows, although perhaps not consciously, that numerlogs are to be used as numerons.“*¹⁵⁸

Nachweis des Prinzips der stabilen Ordnung

Zählen beinhaltet weitaus mehr, als nur ein Zahlwort einem Objekt zuzuordnen. Wenn ein Kind mehreren Objekten ein Zahlwort zuteilt, ist daraus nicht zu schließen, dass das Kind einen Zählprozess beherrscht. Laut Gelman und Gallistel müssen beim Kind noch zwei weitere Zählprinzipien vorhanden sein, um von einem korrekten Zählprozess sprechen zu können. Zunächst beschäftigten sie sich mit dem Prinzip der stabilen Ordnung: das bedeutet, dass das Kind fähig ist, Zahlwörter in einer gewissen, wiederholten Reihenfolge zu sagen.

Ein Kind beherrscht laut Gelman und Gallistel das Prinzip der stabilen Ordnung, wenn es beim Abzählen der Objekte im Experiment

- eine übliche Reihenfolge an Zahlwörtern benutzt.
- eine andere übliche Reihenfolge an Begriffen benutzt (zum Beispiel das Alphabet).
- konsistent eine unübliche Reihenfolge benutzt.¹⁵⁹

Abbildung 11 gibt einen Überblick über die Ergebnisse des Experiments in Bezug auf das Prinzip der stabilen Ordnung.

¹⁵⁸ Gelman, Gallistel 1978: S. 90.

¹⁵⁹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 91.

Age group and experiment	N	Counters	Category of stable-order score (Number of subjects)		
			Always use stable order	Are shaky on order	show no stable order
2 year olds [(2 vs. 3)-1]	16	14	9	2	3
3 year olds [(2 vs. 3)-1]	32	25	23	1	1
[(3 vs. 5) - 2]	24	20	17	3	0
4 year olds [(2 vs. 3)-1]	32	16	16	0	0
[(3 vs. 5) - 2]	24	19	19	0	0

Abbildung 11: Prinzip der stabilen Ordnung¹⁶⁰

Der Tabelle kann die Anzahl der zu zählenden Objekte und die Anzahl der Personen, die das Prinzip korrekt angewandt haben, entnommen werden. Des Weiteren sind in der Spalte „shaky order“ all jene zu finden, die das Prinzip der stabilen Ordnung nicht durchgehend verwendet haben. Die letzte Spalte zeigt die Anzahl der Kinder, die das Prinzip überhaupt nicht umgesetzt haben.¹⁶¹

Sehr wenige der experimentteilnehmenden Kinder waren nicht in der Lage, das Prinzip der stabilen Ordnung umzusetzen. Sogar 14 der Zweijährigen zeigten zumindest ein gewisses Gefühl für das Prinzip. Gelman und Gallistel stellten ebenfalls fest, dass das Prinzip der stabilen Ordnung besonders gut für kleine Sets angewandt werden kann. Sobald sich aber mehrere Objekte auf einer Platte befanden, kam es zu größeren Schwierigkeiten. Eine weitere interessante Beobachtung war, dass ein zweijähriges Kind, anstatt mit Zahlen, mit Buchstaben des Alphabets gezählt hat.¹⁶²

Zusammengefasst meinen Gelman und Gallistel über das Prinzip der stabilen Ordnung folgendes:

„For the child as young as 2,5 years, enumeration already involves assigning numerals in the same order in any one count sequence as in any other count sequence, at least for sets of two to five items.“¹⁶³

¹⁶⁰ Gelman, Gallistel 1978: S. 91.

¹⁶¹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 92.

¹⁶² vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 92.

¹⁶³ Gelman, Gallistel 1978: S. 94.

Nachweis des Kardinalprinzips

Dieses Prinzip erlaubt dem Kind zu erkennen, wie viele Objekte sich in einem Set befinden. Es soll erkennen, dass die zuletzt genannte Zahl (kardinale Zahl) angibt, wie viele Objekte gezählt wurden. Es war das letzte Prinzip, das anhand des Experiments untersucht wurde.¹⁶⁴

Gelman und Gallistel gingen davon aus, dass das Kardinalprinzip vom Kind beherrscht wurde, wenn es die letzte Zahl korrekt auswählt und benannt hat. Dennoch sind sie sich bewusst, dass das Zählen nicht der einzige Weg ist, um die Anzahl eines Sets zu bestimmen. Um nun festzustellen, ob das Kind das Kardinalprinzip tatsächlich beherrschte, formulierten sie folgende Kriterien:¹⁶⁵

- Direktes Kriterium: korrekter oder inkorrekt Zählvorgang: Das Kind zählt entweder korrekt oder inkorrekt und wiederholt die zuletzt genannte Zahl: „eins, zwei, drei, drei!“ oder „zwei, sechzehn, sechzehn!“ Diese stellt die Kardinalität dar.
- Indirektes Kriterium: Das Kind bestimmt die Kardinalität ohne direktes Zählen
- Direktes und Indirektes Kriterium
- Kein Kriterium

Um von der Beherrschung des Kardinalprinzips sprechen zu können, muss das Kind mindestens eines der obengenannten Kriterien erfüllen. Abbildung 12 ist zu entnehmen, dass das Kardinalprinzip von 2,5-jährigen Kindern angewendet wurde.¹⁶⁶

Age group and experiment	N	Number who stated a cardinal numerosity for set	Cardinal criteria (number of subjects)			
			Direct	Indirect	Both	Neither
2 year olds [(2 vs. 3) - 1]	16	16	5	5	4	2
3 year olds [(2 vs. 3) - 1]	32	31	5	10	16	0
[(3 vs. 5) - 2]	24	21	4	5	15	0
4 year olds [(2 vs. 3) - 1]	32	29	0	21	5	3
[(3 vs. 5) - 2]	24	22	2	5	15	0

Abbildung 12: Beherrschung des Kardinalprinzips¹⁶⁷

¹⁶⁴ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 94.

¹⁶⁵ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 95f.

¹⁶⁶ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 96.

¹⁶⁷ Gelman, Gallistel 1978: S. 97.

Eine weitere interessante Beobachtung ist, dass das indirekte Kriterium im zunehmenden Alter steigt (64% der Zweijährigen, 83% der Dreijährigen, 100% der Vierjährigen).¹⁶⁸

Gelman und Gallistel schließen aus den Beobachtungen, dass das Kardinalprinzip bereits bei den jüngsten Kindern, die an dem Experiment teilgenommen haben, vorhanden war. Folgende Beobachtung schlossen sie aus dem Prinzip der Kardinalität:¹⁶⁹

*„For the child as young as 2,5 years, enumeration already involves the realization that the last numerlog in a set- at least in a small set – represents the cardinal number of the set.“*¹⁷⁰

4.3 Untersuchungen über das Abstraktionsprinzip und das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung

Es wurde bereits gezeigt, dass das Erlernen des Zählens von Vorschulkindern nach den Zählprinzipien verläuft. Im Laufe der Zeit werden die Kinder älter und wenden die *how – to – count – principles* nach und nach an größeren Sets an. Die Frage, die im folgenden Kapitel beantwortet werden soll, ist, ob und ab wann Vorschulkinder ebenfalls das Abstraktionsprinzip (*„what to count“*) sowie das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung (*„doesn’t matter“*) beherrschen.¹⁷¹

Untersuchungen über das Abstraktionsprinzip

Die *how – to – count -principles* verlaufen prozedural und bestimmen die Art, wie ein Zählvorgang ausgeführt werden soll. Das Abstraktionsprinzip hat damit eher weniger zu tun, denn es beschäftigt sich mit der Definition von dem, was alles gezählt werden kann. Da sich Erwachsene darüber bewusst sind, dass alle möglichen Gegenstände gezählt werden können, ist es für sie oft unverständlich, weshalb dieses Prinzip separat angeführt werden muss.¹⁷²

¹⁶⁸ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 96.

¹⁶⁹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 96ff.

¹⁷⁰ Gelman, Gallistel 1978: S. 98.

¹⁷¹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 136.

¹⁷² vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 136.

In einem weiteren Zählexperiment wurden Kindern im Alter von drei bis fünf Jahren, dreidimensionale Objekte, unterschiedlicher Farbe und Größe vorgelegt (Pfeifen, Sessel, Ringe, Tiere etc.). Als die Kinder beauftragt wurden, diese Objekte zu zählen, verwendeten alle überraschenderweise Zahlwörter. Danach wurde das Experiment an 16 Zweijährigen durchgeführt. Erstaunlicherweise verwendeten auch sie Zahlwörter. Nur eines von ihnen ließ sich von den Farben der Objekte irritieren: „*One, two, three, a blue.*“. Gelman und Gallistel hätten bei diesem Experiment vermutet, dass einige Kinder nur die Objekte gleicher Eigenschaften, zum Beispiel mit derselben Farbe herauspicken und anschließend zählen.¹⁷³

Letztendlich gingen Gelman und Gallistel davon aus, dass Kinder das Abstraktionsprinzip grundlegend beherrschen und folgen der Ansicht von Macnamara (1974):

*„To count heterogeneous materials, a child simply needs to treat them as things. ... The main question that remains to be investigated is how wide a range of things (real or imagined) the young child will count.“*¹⁷⁴

Untersuchungen über Prinzip der Irrelevanz der Anordnung

In Anbetracht des Zählprozesses ist das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung von geringerer Bedeutung. Es umfasst die Interaktion der vier vorangestellten Prinzipien und trägt zur Vollständigkeit des Zählprozesses bei.¹⁷⁵

Unabhängig von der Reihenfolge des Zählens gelangt das Kind zur kardinalen Zahl, denn

1. ein Zahlwort wird in jedem Zählvorgang nur einmal genannt
2. die Zahlwörter werden immer aus einer gewonnenen Liste gewählt
3. ein Objekt erhält immer das finale Zahlwort und repräsentiert somit die Gesamtanzahl der Objekte¹⁷⁶

Dieses Prinzip wurde anhand von folgendem Experiment untersucht: Eine Reihe mit Objekten in Spielzeuggröße (Sessel, Hund, Baby, Blume und Auto) wurde einem Erwachsenen vorgelegt. Er wurde anschließend beauftragt die Objekte zu zählen. Im

¹⁷³ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 138.

¹⁷⁴ Gelman, Gallistel 1978: S. 141.

¹⁷⁵ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 141.

¹⁷⁶ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 141.

Unterschied zu einem Kind ist sich der Erwachsene bei diesem Experiment bewusst, dass es keine Rolle spielt, mit welchem Objekt zu zählen begonnen wird:

*„Which item receives a given tag is irrelevant. The tags do not attach themselves to a particular object.“*¹⁷⁷

Um zu testen, wie Kinder mit dem Prinzip der Irrelevanz der Anordnung umgingen, wurden ihnen ebenfalls Objekte in Spielzeuggröße vorgelegt, mit der Bitte, diese in mehreren Durchgängen zu zählen. Teilnehmer dieses vierteiligen Experiments waren 48 Kinder im Alter von drei bis fünf Jahren. Im ersten Teil des Experiments wurden sie beauftragt, ein fünfteiliges Set auf verschiedene Arten zu zählen. Danach wurden sie nach der Anzahl der Objekte gefragt. Wenn das Kind richtig antwortete, konnte es mit der zweiten Phase des Experiments beginnen. Wenn es sich jedoch irrte, wurde ein Objekt entfernt und ein erneuter Versuch gestartet. Im zweiten Teil des Experiments wurde anschließend untersucht, wie das Kind reagiert, wenn einem Objekt unterschiedliche Zahlwörter oder umgekehrt mehreren Objekten das selbe Zahlwort zugeordnet wurde. In der dritten und vierten Phase sollten Kinder versuchen, das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung zu begründen.¹⁷⁸

Nach dem Experiment wurden die Kinder mit den Noten A bis E beurteilt. Wenn ein Kind alle drei *how-to-count principles* richtig verwendete und sich bei den unterschiedlichen Durchgängen des Zählens nicht irrte, so bekam es die Note A. Machte das Kind jedoch Fehler beim Zählen, bekam es die Note B. Kinder, die bei einem Set von fünf Objekten das Eindeutigkeitsprinzip sowie das Prinzip der stabilen Ordnung richtig verwendeten, aber nur in der Lage waren, das Kardinalprinzip bei kleineren Mengen anzuwenden, bekamen die Note C. Wenn das Kardinalprinzip überhaupt nicht vorhanden war, wurde das Kind mit der Note D beurteilt. Die Note E gab es für Kinder, die keines der Prinzipien umsetzten.¹⁷⁹

Abbildung 13 zeigt die Ergebnisse des Experiments über das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung.

¹⁷⁷ Gelman, Gallistel 1978: S. 142.

¹⁷⁸ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 150ff.

¹⁷⁹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 152.

Grade	Age Group		
	3 - year - olds	4 - year - olds	5 - year - olds
A	6	62	81
B	37	19	12
C	12	6	6
D	31	12	0
E	12	0	0

Abbildung 13: Ergebnisse über das Experiment der Irrelevanz der Anordnung¹⁸⁰

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass die älteren Kinder beim Zählen deutlich besser abschnitten, als die jüngeren. Alle Fünfjährigen, 87% der Vierjährigen und 56% der Dreijährigen zählten zu denen, die das Zählen bereits relativ gut beherrschten (Noten A, B, C). Die Ergebnisse dieser Tabelle sind vergleichbar mit jenen der oben genannten Experimente zu den *how-to-count principles*.¹⁸¹

4.4 Kritik an den Untersuchungen von Gelman und Gallistel

„So, the empirical as well as theoretical evidence suggest that finding the numerosity of a set represents a different kind of knowledge than retrieving the ordered list of numeral, or, than keeping the already counted items separate from to-be- counted ones. ... What Gelman and colleagues are basically trying to show, through their models and most of the empirical data presented, is that children know more about counting than is apparent from their behavior. This is probably true but it does not prove anything about children's conceptual knowledge.“¹⁸²

Gelman und Gallistel verwarfen die These des „subitizing“- Effekts, denn sie sind der Ansicht, dass auch kleine Kinder bei der Durchführung der Experimente in der Lage sind, die Anzahl einer kleinen Menge zu bestimmen. Aufgrund von heftiger Kritik haben Gelman und Gallistel ihre Sichtweise korrigiert und sehen nun die „subitizing“- Vorgänge als Ursprung der Zählprinzipien:¹⁸³

„The preverbal process provides a framework that makes the verbal counting process intelligible, hence lernable. Children assimilate verbal counting because it maps onto

¹⁸⁰ Gelman, Gallistel 1978: S. 152.

¹⁸¹ vgl. Gelman, Gallistel 1978: S. 152.

¹⁸² Frydman 1995a: S. 671.

¹⁸³ vgl. Moser Opitz 2008: S. 69.

the unconscious preverbal counting process. The count words map to the preverbal magnitudes.... The principles that govern verbal counting are the principles implicit in the structure of the preverbal counting mechanism. ”¹⁸⁴

Das Konzept “Prinzip zuerst” hat sehr viele KritikerInnen gefunden (Fuson 1988, Baroody 1991, Wynn 1990 etc.). Sie verneinen die frühe konzeptuelle Kompetenz der Kinder. Wynn spricht im Namen aller KritikerInnen:¹⁸⁵

*„Children’s acquisition of skills in counting is not guided by the counting principles. Rather, children learn how to count.”*¹⁸⁶

Wynn vertritt die These, dass das erste Wissen über Zahlen nicht aus angeborenen Konzepten entsteht, sondern angelernt sei. Diesen Prozess vergleicht sie mit dem Akkumulator Modell und sie erschließt aus ihren Forschungen, dass das Kardinalprinzip bei Kindern im Alter von dreieinhalb Jahren lediglich als *subitizing* zu betrachten sei. Sophian (1988a) führt ebenfalls mit Kindern Experimente durch, bei dem es um die Anzahlbestimmung und das Vergleichen von Mengen ging. Sophian beobachtet, dass die Aufgabe zur Anzahlbestimmung durch konkretes Zählen und die Vergleichsaufgabe durch Raten gelöst wurde. Sie folgert daraus, dass die Zählentwicklung erst limitiert ausgeprägt ist und nicht von den Prinzipien geleitet ist.¹⁸⁷

4.4.1 Kritik am Eindeutigkeitsprinzip

Baroody (1991: S. 46) kritisiert am Eindeutigkeitsprinzip, dass die Beobachtung, ob ein Kind jedes Objekt nur einmal zählt, keinen Beweis über das konzeptuelle Wissen darstellt. Er vertritt die Behauptung, dass sich diese Kompetenz auch im Laufe der Zeit selbstständig entwickelt, wie zum Beispiel durch Nachahmung oder intensives Üben. Auch Fuson weist in ihren Studien darauf hin, dass viele Faktoren das eindeutige Zählen beeinflussen: unterschiedliche Handlungen müssen vom Kind koordiniert werden, damit eine exakte Zahlwortzuordnung gelingt: Zuerst muss das Kind die Objekte angreifen und jedem davon ein Zahlwort zuschreiben. Zusätzlich muss es sich bewusst sein, welche Objekte bereits gezählt wurden und welche noch nicht. Ihren Experimenten zum Zahlbegriff entnimmt sie, dass die Zählentwicklung auf dem

¹⁸⁴ Moser Opitz 2008: S. 69.

¹⁸⁵ vgl. Moser Opitz 2008: S. 69f.

¹⁸⁶ Wynn 1990: S. 189.

¹⁸⁷ vgl. Moser Opitz 2008: S. 70.

zunehmenden Wissen und Können und nicht auf dem sprunghaft auftauchenden Bewusstsein basiert.¹⁸⁸

4.4.2 Kritik am Prinzip der stabilen Ordnung

Bei diesem Prinzip kritisieren die WissenschaftlerInnen, dass die Zahlwortfolge nicht unbedingt von Prinzipien geleitet ist. Das Kind könnte sie auch durch eine Gedächtnis- und Nachahmungsleistung erwerben, ohne dabei dem Prinzip der stabilen Ordnung nachzugehen. Fuson zeigt in ihren Studien, dass der Erwerb der Zahlwortreihe einen Lernprozess voraussetzt, der sich über längere Zeit erstreckt und durch Erfahrung, die das Kind macht, geprägt ist.¹⁸⁹

Baroody beschreibt den Erwerb der Zahlwortreihe folgendermaßen:

*„zuerst entdecken die Kinder, dass sich die Zahlwortreihe aus bestimmten Wörtern, eben Zahlwörtern zusammensetzt. Anschließend wird ihnen bewusst, dass die Wörter in eine bestimmte Reihenfolge gehören und dass jedes Wort nur einmal vorkommt.“*¹⁹⁰

4.4.3 Kritik am Kardinalprinzip

Für Wynn (1990) sind die vier Aspekte, auf denen das Kardinalprinzip beruht, ungenügend. Sie ist der Ansicht, dass das Wiederholen des zuletzt genannten Zahlworts auch das Ende des Zählakts sein könnte, ohne dass sich das Kind über die kardinale Bedeutung der Zahl bewusst ist. Außerdem macht sie die Beobachtung, dass jüngere Kinder auf die Frage „Wie viele Objekte sind es?“ nicht direkt antworten und das zuletzt genannte Zahlwort wiederholen, sondern erneut die Menge zählen.¹⁹¹

4.4.4 Kritik am Prinzip der Irrelevanz der Anordnung

Vor allem Baroody übt heftige Kritik an diesem Prinzip aus. Um diese Behauptung von Gelman und Gallistel zu begründen, untersucht er folgende Fähigkeiten:

1. Objekte in verschiedenen Reihenfolgen zählen und bemerken, dass das Ergebnis immer dasselbe ist

¹⁸⁸ vgl. Moser Opitz 2008: S. 70f.

¹⁸⁹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 71.

¹⁹⁰ Moser Opitz 2008: S. 71.

¹⁹¹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 71f.

2. auf ein Objekt zu deuten und diesem ein Zahlwort zuzuschreiben.

Er stellt fest, dass die Kinder zuerst die zweite Fähigkeit besitzen, bevor sie das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung verstehen. Er folgert daraus, dass die Kinder richtig zählen können, auch wenn sie den Vorgang noch nicht eindeutig verstehen. Aus diesem Grund lehnt er das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung strikt ab.¹⁹²

¹⁹² vgl. Moser Opitz 2008: S. 72.

5 Zahlbegriffserwerb nach Fuson

5.1 Verschiedene Anwendungen von Zahlwörtern

Fuson ist davon überzeugt, dass Zahlwörter in einer Vielzahl von unterschiedlichen mathematischen Situationen verwendet werden. Sie haben dabei immer eine Referenz zu einem externen Bezugsobjekt als auch zu einer internen Bedeutung. Kinder müssen im Zuge des Zählerwerbs lernen, Zahlwörter korrekt anzuwenden und diese auch in verschiedenen mathematischen Situationen zu deuten und zu nutzen. Die Bedeutung der verschiedenen Zahlwörter in den unterschiedlichen mathematischen Situationen stellt oft große Verständnisschwierigkeiten für Kinder dar. Erwachsene können diese Plage oft nicht nachvollziehen, da für sie die unterschiedlichen Bedeutungen völlig klar sind. Im Zuge des Erwerbs der Zahlwörter müssen Kinder also verstehen, dass Zahlwörter oft verschiedene Bedeutungen je nach Situation haben. Im Kapitel 5.2 werden die Bedeutungen von Zahlwörtern anhand der Zahlaspekte präsentiert.¹⁹³

5.2 Zahlaspekte

Die Zahlaspekte werden eher als Hintergrundwissen der Lehrperson verstanden, sollen aber dennoch im Mathematikunterricht vollständig repräsentiert werden. Das Kind soll die unterschiedlichen Bedeutungen einer Zahl erfassen, muss jedoch nicht die Zahlaspekte begrifflich thematisieren können. Das bedeutet, dass Kinder im Unterricht nicht von einem gewissen Aspekt sprechen müssen, sondern rein das Aspektreichtum der Zahlen nachvollziehen sollen, damit sich der Zahlbegriff beim Kind in seiner Ganzheit erschließt und ausprägt.¹⁹⁴

Gerade beim Zählen ist es wichtig, dass Kinder entscheiden, welches Zahlwort gewählt werden soll, um eine bestimmte Situation (Kardinal-, Ordinal-, oder Maßsituation) zu beschreiben. Sie müssen daher lernen, jede mathematische Situation aus zwei verschiedenen Sichtweisen zu betrachten:¹⁹⁵

1. banales Zählen

¹⁹³ vgl. Fuson 1988: S. 5.

¹⁹⁴ vgl. Krauthausen 2008 : S.10.

¹⁹⁵ vgl. Fuson 1988. S. 5.

2. Resultat oder Ergebnis je nach Situation interpretieren (Kardinales-, Ordinales-, oder Maßzahlwort)

Dennoch weisen psychologische Befunde daraufhin, dass es keine bestimmte Abfolge des Erwerbs der Zahlaspekte gibt:

*„Eine eindeutig festliegende Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde gibt es selbst näherungsweise nicht. Insbesondere kann kein Aspekt als grundlegend für den anderen bezeichnet werden. Die verschiedenen Aspekte entwickeln sich vielmehr parallel zueinander und beeinflussen sich während der Entwicklung gegenseitig. Je nach Kind, je nach Entwicklungsstand und je nach Aufgabe kann dieser oder jener Aspekt führend gegenüber dem anderen sein.“*¹⁹⁶

5.2.1 Kardinalzahlaspekt

*„The entities in a cardinal situation are discrete. The cardinal number word refers to the whole set of entities and tells how many entities there are, that is, describes the manyness of the set.“*¹⁹⁷

Die kardinale Zahl steht im Bezug auf die gesamt gezählte Menge und gibt deren Größe an. Sie bestimmt, wie viele Einheiten in der Menge enthalten sind.¹⁹⁸

Kinder lernen die kardinale Bedeutung durch verschiedene Faktoren kennen, beispielsweise durch die Frage „wie viele sind es?“ oder auch durch Nachahmung.¹⁹⁹

5.2.2 Ordinalzahlaspekt

*„The ordinal number word tells the relative position of one entity with respect to the other ordered entities.“*²⁰⁰

Die Elemente einer Menge befinden sich in einer linearen Ordnung. Die Ordinalzahl gibt die Position eines Elements in Bezug auf die anderen Elemente an.²⁰¹

¹⁹⁶ Müller, Wittmann 1984: S. 178.

¹⁹⁷ Fuson 1988: S. 5.

¹⁹⁸ vgl. Fuson 1988: S. 5.

¹⁹⁹ vgl. Moser Opitz 2008: S. 90.

²⁰⁰ Fuson 1988: S. 5.

²⁰¹ vgl. Fuson 1988: S. 5.

5.2.3 Maßzahlaspekt

*„In a measure situation the entity to be measured is a continuous quantity (e.g., length, area, volume, time). A unit for that kind of quantity must be selected (e.g., a centimeter, a square mile,...) and repeatedly applied to the particular continuous quantity until the quantity is used up. The measure number word tells how many units are required to cover (fill) the continuous quantity.“*²⁰²

In dieser Situation wird eine kontinuierliche Menge vermessen, wie zum Beispiel die Länge, die Fläche, das Volumen oder die Zeit. Für diese Menge muss eine Einheit ausgewählt werden (z.B. Zentimeter, Quadratmeter etc.) und wiederholt, bis zu Erfüllung der Menge, angewendet werden. Die Maßzahl gibt an, wie viele Einheiten notwendig sind, um die Menge zu bedecken.²⁰³

5.2.4 Übersicht der Zahlaspekte

Um die Beziehungen zwischen den Zahlaspekten herzustellen, hat Fuson eine Grafik zusammengestellt, in der die wechselseitigen Beziehungen zwischen den einzelnen Aspekten sowie das ungefähre Lebensalter der Kinder aufgezeigt werden. Abbildung 13 gibt einen Einblick in die Grafik. Dieser ist zu entnehmen, dass Kinder die Beziehung zwischen Zählzahl und Kardinalzahl schon früh wahrnehmen und verstehen. Im Alter von vier bis sechs Jahren wird ihnen bewusst, dass sie durch Vor- oder Rückwärtszählen addieren und subtrahieren können. Mit etwa sechs Jahren erkennt das Kind den Zusammenhang zwischen Zählzahl und Ordnungszahl. Erst relativ spät wird der Zusammenhang zwischen Kardinal – und Ordnungszahl verstanden, da diese beiden Aspekte offenbar schwerer zu erfassen sind.²⁰⁴

Fuson ist überzeugt davon, dass das Kind erst einen umfassenden Zahlbegriff ausgeprägt hat, wenn es alle Aspekte und deren Beziehungen nachvollziehen kann. Bei vielen Kindern kann sich dieser Prozess bis zum Ende der Grundschule erstrecken.²⁰⁵

²⁰² Fuson 1988: S. 5ff.

²⁰³ vgl. Fuson 1988: S. 5ff.

²⁰⁴ vgl. Hasemann 2003: S. 68f.

²⁰⁵ vgl. Hasemann 2003: S. 69.

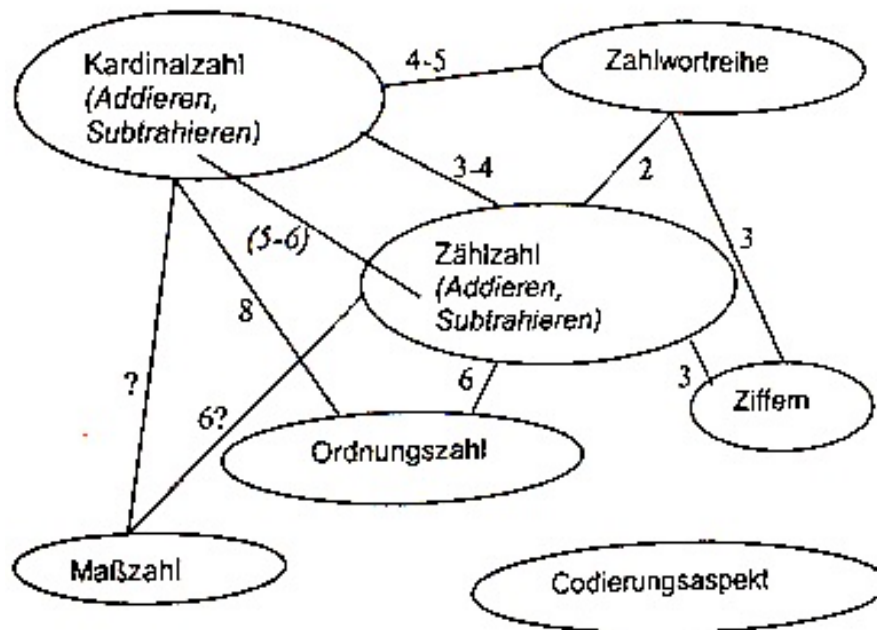


Abbildung 14: Zusammenhänge der verschiedenen Zahlaspekte²⁰⁶

5.3 Erwerb der Zahlwortreihe

Das Modell von Fuson (1988) bietet eine gute Grundlage zur Erklärung und Beschreibung des Zahlwortreihenerwerbs. Es wird von vielen ZahlbegriffstheoretikerInnen als Basis für die Zähl- und Zahlbegriffsentwicklung angesehen und anderen Modellen oft vorgezogen (zum Beispiel Steffes Zahlbegriffstheorie).²⁰⁷

Fuson präsentiert in ihrer Theorie fünf aufeinanderfolgende Niveaus, die mit dem Erwerb der Zahlwortreihe zusammenhängen. Sie sind idealtypisch herausgearbeitet und basieren auf empirischen Untersuchungen.²⁰⁸

5.3.1 Verschiedene Niveaus der Zahlwortfolge

5.3.1.1 String Level – Ganzheitsauffassung der Zahlwortreihe

Das Kind erfasst die Zahlwortreihe als unidirektionale Ganzheit und kann diese wie ein Lied oder Gedicht aufsagen beziehungsweise rezitieren. Die Zahlwörter werden in diesem Niveau noch nicht vollkommen voneinander unterschieden. Eine Zahlwortreihe

²⁰⁶ Hasemann 2003: S. 69.

²⁰⁷ vgl. Moser Opitz 2008: S. 86.

²⁰⁸ vgl. Leuders 2011: S. 159.

wie zum Beispiel eins - zwei – drei kann zwar korrekt aufgesagt werden, aber das Kind erkennt noch keine kardinale Bedeutung und kann noch nicht damit zählen.²⁰⁹

„The words are a forward- directed, connected, undifferentiated whole.“²¹⁰

Das Eindeutigkeitsprinzip wird noch nicht vollkommen beherrscht, sodass das Zählen nur eingeschränkt möglich ist.²¹¹

Vergleichbar ist dieses Niveau mit dem Erlernen des Alphabets. Kinder singen beziehungsweise sprechen Lieder des Alphabets nach. Als Beispiel wird hier die Buchstabenreihe „LMNOP“ herangezogen. Sie wird aufgesagt als wäre es ein zusammenhängendes Wort.²¹²

Das String Level ist jedoch nur eine sehr kurze Phase, die bei manchen Kindern sogar übersprungen wird.²¹³

5.3.1.2 Unbreakable List Level – Unflexible Zahlwortreihe

Zahlwörter werden als Einheiten aufgefasst. Kinder können die Zahlwortreihe aufsagen, müssen jedoch dabei immer bei der Zahl Eins beginnen. Ihnen ist es noch nicht möglich, eine andere Zahl als Anfangspunkt der Zahlwortreihe zu wählen und von ihr aus weiterzuzählen. Auch Vorgänger und Nachfolger einer Zahl können nur bestimmt werden, in dem das Kind die Zahlwortreihe nochmals aufsagt. Des Weiteren ist es in der Lage, die Eins - zu – Eins – Korrespondenz herzustellen und eine bestimmte Anzahl an Objekten zu bestimmen (zum Beispiel: „gib mir drei“).²¹⁴

„The words are separated, but the sequence exists in a forward-directed recitation form and can only be produced by starting at the beginning.“²¹⁵

Um dieses Niveau besser nachvollziehen zu können, vergleichen es ForscherInnen mit der Wortkette „do re mi fa so la ti do“. Für viele Erwachsene wäre es unmöglich diese

²⁰⁹ vgl. Fuson 1988: S. 50.

²¹⁰ Fuson 1988: S. 45.

²¹¹ vgl. Leuders 2011: S. 159.

²¹² vgl. Fuson 1988: S. 50.

²¹³ vgl. Fuson 1988: S. 50.

²¹⁴ vgl. Moser Opitz 2008: S. 86.

²¹⁵ Fuson 1988: S. 45.

Wortkette aufzusagen, ohne dabei mit dem ersten Wort zu beginnen. Genauso ergeht es Kindern in der Phase der unflexiblen Zahlwortreihe.²¹⁶

5.3.1.3 Breakable Chain Level – Teilweise flexible Zahlwortreihe

„The representation of the sequence is also in the more flexible form of separated words, each with an association to the word following it and to the word preceding it. The term chain was adopted to portray this feature, and the term breakable was chosen to indicate the new sequence skill counting up from an arbitrary word.“²¹⁷

Das Kind ist fähig, die Zahlwortreihe ab einem beliebigen Zahlwort aufzusagen. Auch Vorgänger und Nachfolger können ohne wiederholtes Zählen bestimmt werden. In dieser Phase beschäftigt sich das Kind zum ersten Mal mit dem Rückwärtszählen, welches aber nur teilweise gelingt. Bei diesem Entwicklungsschritt geht Fuson davon aus, dass das Rückwärtszählen erst zwei Jahre nach dem Vorwärtszählen korrekt beherrscht wird.²¹⁸

„Parts of the chain can be produced starting from arbitrary entry points rather than always starting at the beginning.“²¹⁹

5.3.1.4 Numberable Chain Level – Flexible Zahlwortreihe

Jedes Zahlwort wird als Einheit betrachtet. Das Kind kann von jeder beliebigen Zahl aus eine bestimmte Anzahl an Schritten weiterzählen (zum Beispiel zähle von 12 aus drei Schritte vorwärts).²²⁰

„The words are abstracted still further and become units in the numerical sense; thus sets of sequence words can themselves represent a numerical situation and can be counted or matched.“²²¹

Steffe benannte diese Einheiten 1983 und machte diese Zahlwörter von ihrer Verwendung abhängig:²²²

- verbal unit items

²¹⁶ vgl. Fuson 1988: S. 50f.

²¹⁷ Fuson 1988: S. 51.

²¹⁸ vgl. Moser Opitz 2008: S. 86.

²¹⁹ Fuson 1988: S. 45.

²²⁰ vgl. Moser Opitz 2008: S. 86.

²²¹ Fuson 1988: S. 45.

²²² vgl. Fuson 1988: S. 54.

- abstract unit itmes
- etc. (mehr dazu im Kapitel 6)

In diesem Level verwenden Kinder verbale Einheiten um die kardinale Addition und Subtraktion zu repräsentieren. Zum Beispiel, um 8 und 5 dazuzuzählen, würde das Kind zuerst die acht Zahlwörter aufzählen (eins – zwei – drei...- acht, um die Kardinalität „Acht“ zu bestimmen) und danach erst die nächsten fünf Zahlwörter (um die Kardinalität „Fünf“ zusammenaddiert mit Kardinalität „Acht“ zu bestimmen). Das zuletzt genannte Zahlwort ist 13 und repräsentiert das Ergebnis.²²³

5.3.1.5 Bidirectional Chain Level – Vollständig reversible Zahlwortreihe

Dieses Level stellt das letzte Niveau im Bezug auf den Zahlbegriffserwerb dar. In dieser Phase beherrscht das Kind die Zahlwortreihe und kann ohne Schwierigkeiten Vor- und Rückwärtszählen. Auch Vorgänger und Nachfolger einer Zahl können unverzüglich bestimmt werden.²²⁴

„Words can be produced easily and flexibly in either direction.“²²⁵

5.3.1.6 more advanced Levels

Die fünf vorhergenannten Zähl-niveaus stellen die Basis der Zählentwicklung dar. Allerdings gibt es noch weitergehende Levels, die in der Literatur oft nicht mehr erwähnt werden. Der Forschungsstatus ist hier nämlich noch nicht weit genug ausgeprägt. Bei diesen Niveaus handelt es sich zum Beispiel darum, dass nicht nur in Einserschritten, sondern auch in Zehner-, Fünferschritten, etc., gezählt werden kann. Auch bei den Rechenoperationen geht das Kind taktisch vor. Die Aufgabe $48 + 36$ würde es lösen, indem es zuerst drei Zehner zu 48 dazuzählt und dann erst die übrige Sechs.²²⁶

5.3.2 **Der Wechsel von Niveau zu Niveau**

Wie genau Kinder die jeweiligen Fähigkeiten eines jeden Levels erlernen und was ihnen ermöglicht von Level zu Level zu wechseln, ist bis heute nicht vollständig erforscht worden. Der Ansatz von Case 1985a,b scheint sehr hilfreich bei der Bearbeitung dieser

²²³ vgl. Fuson 1988: S. 55.

²²⁴ vgl. Moser Opitz 2008: S. 87.

²²⁵ Fuson 1988: S. 45.

²²⁶ vgl. Fuson 1988: S. 55.

Probleme zu sein. Case formulierte hierzu zwei Faktoren, die seiner Meinung nach den Übergang von Niveau zu Niveau ermöglichen:²²⁷

1. Reife („maturation“)
2. Übung („practice“)

Die Fähigkeiten, die sich in einer relativ kurzen Altersspanne ausbauen sollen, entwickeln sich durch die kindliche Reifung. Die Tatsache, dass sogar Erwachsene mit äußerst simplen Sequenzen Schwierigkeiten haben, deutet daraufhin, dass Übung für die Entwicklung der Fähigkeiten ebenso unabdingbar ist.²²⁸

5.4 Typische Fehler beim Zählen

Fuson unterstreicht in ihrer Theorie, dass das Erlernen der Zahlwortreihe und das Zählen ein langer Prozess ist, der sich über mehrere Jahre erstreckt. Diese Entwicklung verläuft schrittweise vom kleinerem Zahlraum bis hin zum großen Zahlraum. Dabei wird der Zählprozess von verschiedenen Faktoren erschwert. Die Anzahl, die Anordnung, die Ähnlichkeit der zu zählenden Objekte und vieles mehr spielen für den korrekten Zählprozess eine wesentliche Rolle.²²⁹ Diese Faktoren werden nun in Bezug auf die Zählrichtigkeit genauer analysiert:

Kinder beginnen ab dem Alter von 3½ Jahren die Zahlwortreihe anzuwenden, in dem sie probieren, Objekte zu zählen. Um jenes zu vollziehen, muss das Kind verschiedene Handlungen koordinieren, die mit zunehmender Übung immer leichter und schneller gelingen. Wichtig bei der Koordination ist, dass jedes Objekt nur einmal gezählt wird und auch jedem nur ein Zahlwort zugeschrieben wird. Kinder helfen sich beim Zählen oft mit Hilfe ihrer Finger. Fuson thematisiert in seinen Untersuchungen folgende Fehler, die während der Zuordnung Zahlwort – Zeigeakt – Objekt auftauchen:²³⁰

Fehlerhafte Zuordnung von Zahlwort und Zeigeakt (siehe Abbildung 14)

1. ein Zeigeakt – kein Zahlwort: Zeigen auf ein Objekt ohne dabei ein Zahlwort zu nennen.

²²⁷ vgl. Fuson 1988: S. 56.

²²⁸ vgl. Fuson 1988: S. 56.

²²⁹ vgl. Hildenbrand 2016: S. 32.

²³⁰ vgl. Fuson 1988: S. 64ff.

2. mehrere Zahlwörter – ein Zeigeakt: Zeigen auf ein Objekt und dabei zwei oder mehrere Zahlwörter nennen.
3. Wortteil – ein Zeigeakt: ein Zahlwort wird über mehrere Objekte gestreckt (z.B. sie-ben, ne-un)
4. Wort zwischen Objekten: Zahlwort wird genannt, wenn kein Finger auf ein Objekt zeigt

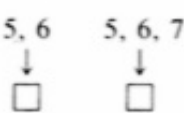
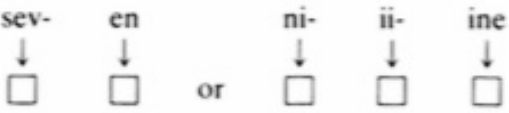
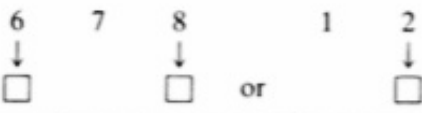
Zeigeakt – kein Zahlwort zeigen auf ein Objekt ohne dabei ein Zahlwort zu nennen	
mehrere Zahlwörter – ein Zeigeakt einmaliges zeigen auf ein Objekt, aber zwei Zahlwörter, auch drei oder vier Zahlwörter möglich, ein Zeigeakt, ein Objekt	
Teilzahlwort – ein Zeigeakt ein Zahlwort wird über zwei Objekte oder mehrere Objekte gestreckt	
Zahlwort zwischen Objekten ein Zahlwort wird gesagt wenn nicht gezeigt wird und wenn der Finger sich nicht über einem Objekt befindet.	

Abbildung 15: Fehlerhafte Zuordnung von Zahlwort und Zeigen²³¹

Fehlerhafte Zuordnung von Zeigeakt und Objekt (siehe Abbildung 15)

1. Auslassen von Objekten: ein Objekt wird übersprungen, ohne darauf zu zeigen und ohne ein Zahlwort zuzuschreiben
2. Mehrfache Zählung: auf ein Objekt wird mehrmals gezeigt und dabei jedes Mal ein neues Zahlwort zugeschrieben
3. Zahlwort und Zeigeakt – kein Objekt: Es wird ein Zahlwort gesagt, aber dabei auf kein Objekt gezeigt.

²³¹ Fuson 1988: S. 66.

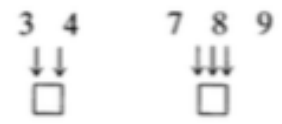
Objekte auslassen Finger bewegt sich über Objekt aber kein Zahlwort wird genannt, kein Zeigen auf das Objekt	
mehrfaches Zählen ein Zahlwort wird einem Objekt zugeordnet, danach nochmal neuer Zeigeakt und Zahlwort beim selben Objekt	
Zahlwort und Zeigeakt – kein Objekt ein Zahlwort, ein Zeigeakt, kein Objekt, ein Wort und ein Zeigeakt zwischen Objekten	

Abbildung 16: Fehlerhafte Zuordnung von Zeigen und Objekt²³²

Fehlerhafte Zuordnung bei beiden Fehlerquellen (siehe Abbildung 16)

1. mehrfache Zeigeakte – ein Zahlwort: mehrmaliges Zeigen auf Objekte, aber nur ein Zahlwort wird gesagt
2. mehrfache Zeigeakte – ein Zahlwort: mehrmaliges Zeigen auf Objekte, aber kein Zahlwort wird gesagt
3. ein Zahlwort – kein Zeigeakt: ein Zahlwort wird gesagt, aber auf kein Objekt gezeigt
4. „Skim“ – willkürliches Zählen: Finger streichen über die Objekte, Zahlwörter werden gesagt, aber kein Zusammenhang findet statt
5. „Flurry“ – willkürliches Zeigen: mehrfache Zeigeakte, mehrfache Zahlwörter, aber kein Zusammenhang

²³² Fuson 1988: S. 66.

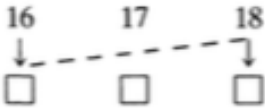
mehrere Zeigeakte – ein Zahlwort ein Zahlwort und zwei Zeigeakte werden einem Objekt zugeschrieben	
mehrfaches Zeigen . kein Zahlwort kein Wort wird gesagt, aber es wird zweimal gezeigt	
Zahlwort aber kein Zeigeakt Der Finger ist über dem Objekt aber streicht nur vorbei	
Vorbeistreifen Finger wird sinnlos über die Objekte bewegt	
Willkürliches Zählen Kein Zusammenhang zwischen Zahlwort, Objekt und Zeigeakt	

Abbildung 17: Fehlerhafte Zuordnung beider Fehlertypen ²³³

Forschungen weisen auch darauf hin, dass die Homogenität beziehungsweise die Heterogenität der Objekte den Zählakt in den verschiedenen Altersstufen deutlich beeinflussen. Das „doppelte Zählen“ und „das Zuschreiben desselben Zahlworts“ treten oft bei ähnlich aussehenden Objekten auf. Auch die Anordnung der zu zählenden Objekte beeinflusst den Zählakt. Objekte, die kreisförmig angeordnet sind, sind deutlich schwerer zu zählen als Objekte, die in Reihen liegen. Kinder helfen sich oft damit, die bereits gezählten Objekte räumlich zu verschieben, um sie besser von den noch nicht Gezählten unterscheiden zu können. Das wiederholte Zählen von Objekten fördert jedoch nach und nach das Verständnis von Kardinalität. ²³⁴

5.4.1 Untersuchung zu typischen Fehlerquellen bei Zahlwort– Zeigeakt – Objekt

Methodik

Die Untersuchung zur Fehlerhäufigkeit wurde an insgesamt 86 Kindern durchgeführt, die altersgemäß in Gruppen geteilt wurden: (3 bis 3,5 Jahre, 3,5 bis 4 Jahre,...,5,5 bis 6

²³³ Fuson 1988: S. 67.

²³⁴ vgl. Moser Opitz 2008: S. 89.

Jahre). Zwei Experimentleiter beobachteten die Vorgehensweise der Kinder im Bezug auf Zähl- und Zeigeakt. Den Kindern wurde eine Reihe von vier bis fünf Blöcken vorgelegt und sie wurden aufgefordert, die Anzahl der Blöcke zu bestimmen. Im Anschluss wurde die Blockreihe um ein oder zwei weitere Blöcke vergrößert und die Kinder wurden erneut nach der Anzahl der Blöcke gefragt. Die Untersuchung erstreckte sich ungefähr über 30 Minuten und wurde anschließend in einer Tabelle ausgewertet.²³⁵

Ergebnisse der Untersuchung

Error categories	Age					Mean
	3,5 - 4	4 - 4,5	4,5 - 5	5 - 5,5	5,5 - 6	
Word point total% Children	89%	76%	59%	38%	39%	61%
Point - no word % children	89%	71%	53%	38%	39%	58%
Point - object total % children	94%	100%	82%	75%	61%	83%
Object skipped % children	83%	82%	76%	56%	33%	66%
Multiple count % children	83%	88%	65%	69%	50%	71%

Abbildung 18: Prozentrate von Kindern, die Fehler bei Wort – Zeigeakt und Zeigeakt – Objekt je nach Altersgruppe machen²³⁶

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass deutlich mehr Kinder Fehler bei Zeigeakt – Objekt begangen haben als bei der Nennung des Zahlworts und des Zeigeakts. Eine weitere Beobachtung ergibt, dass es einen signifikanten Zusammenhang zwischen dem Alter und der Fehler gibt. Wort- Zeigeakt Fehler traten ab dem Alter von vier Jahren laut Tabelle weitaus weniger auf. Eine Verbesserung der Zeigeakt - Objekt Fehler wird erst ab 4,5 Jahren erkannt.²³⁷

Die häufigste Fehlerquelle war das mehrfache Zählen und das Auslassen von Objekten. Im Gegensatz dazu wurden Fehler wie mehrere Zahlwörter – ein Zeigeakt, Teilzahlwort – ein Zeigeakt und Zahlwort zwischen Objekten von wenigen Kindern begangen.²³⁸

²³⁵ vgl. Fuson 1988: S. 70ff.

²³⁶ Fuson 1988: S. 73.

²³⁷ vgl. Fuson 1988: S. 73f.

²³⁸ vgl. Fuson 1988: S. 74f.

Des Weiteren wurde versucht zu untersuchen, wann genau die Fehler während des Zählens gemacht wurden. Dabei beobachteten die Experimentleiter, ob ein Fehler am Anfang (bei den ersten zwei Objekten), am Ende (bei den letzten zwei Objekten) oder in der Mitte auftrat. Beobachtungen zeigten, dass die meisten Fehlertypen in der Mitte des Zählvorgangs vorkamen. Fuson erklärt sich dies anhand der Aufmerksamkeit der Kinder. Sie ist davon überzeugt, dass diese am Anfang und am Ende des Zählvorgangs größer ist als in der Mitte. Auch das Überschauen der Objekte am Anfang und am Ende ist einfacher, da diese von weniger gleich aussehenden Objekten umgeben sind, als jene in der Mitte. Tabelle 19 zeigt die Fehlerrate in Bezug auf „Anfang – Mitte – Ende“.²³⁹

Location	Age					Mean
	3,5 - 4	4 - 4,5	4,5 - 5	5 - 5,5	5,5 - 6	
Beginning	50%	18%	18%	6%	0%	19%
Middle	94%	100%	94%	81%	78%	90%
End	72%	41%	35%	13%	6%	34%

*Abbildung 19: Prozentsatz der Fehlerplatzierung*²⁴⁰

Weitere Beobachtungen wurden in Bezug auf das Geschlecht des Kindes und der Anzahl der zu zählenden Objekte gemacht. Geschlechterbezogen wurden keine signifikanten Unterschiede wahrgenommen. Fehler in Abhängigkeit der Anzahl der zu zählenden Objekte traten öfters bei Jüngeren auf. Jüngere Kinder neigen bei größeren Mengen eher dazu, Objekte auszulassen oder ohne einen Zusammenhang zu zählen.²⁴¹

5.4.2 Typische Fehler beim Zählen in Bezug auf die Anordnung der Objekte

Besonders wichtig beim Zählen ist, dass sich Kinder merken, welche Objekte bereits gezählt wurden und welche noch zu zählen sind. Bei einer linearen Anordnung fällt es den Kindern oft leichter zu zählen, da sie genau nachvollziehen können, welche Elemente bereits gezählt wurden. Bei nicht – linearen, ungeordneten Mengen schlägt

²³⁹ vgl. Fuson 1988: S. 79ff.

²⁴⁰ Fuson 1988: S. 81.

²⁴¹ vgl. Fuson 1988: S. 82ff.

Fuson zwei unterschiedliche Methoden vor, die den Zählprozess vereinfachen können.²⁴²

*„One method is to physically or mentally „mark“ each object as one counts it, thus designating it as a counted object. ... The other method is to establish a linear ordering on the objects and then point to the objects in this linear ordering.“*²⁴³

Somit handelt es sich bei der ersten Methode darum, die bereits gezählten Objekte zu markieren. Dies kann entweder physisch oder nur geistig erfolgen. Fuson ist jedoch überzeugt davon, dass das physische Markieren den Denkaufwand des Kindes weitaus verringert. Bei der zweiten Methode geht es darum, aus den zu zählenden ungeordneten Objekten eine lineare Ordnung zu schaffen. Das Kind soll vor dem Beginn des Zählens eine lineare Ordnung festlegen. Diese Methode eignet sich jedoch nicht für größere Mengen, es sei denn, sie würden in kleine Untergruppen geteilt werden.²⁴⁴

Im Folgenden werden die Untersuchungen zu dieser Fehlerquelle präsentiert.

Methodik

Bei dieser Videountersuchung wurden insgesamt 36 Kinder zwischen drei und sechs Jahren ausgewählt und wieder, wie bei der vorigen Untersuchung, im Halbjahresschritt in Gruppen geteilt. Grundsätzlich lief die Untersuchung ident ab, jedoch wurden die Kinder zusätzlich aufgefordert, die Objekte nicht zu bewegen beziehungsweise zu verschieben. Während der Untersuchung wurden sie wieder aufgefordert, die Anzahl der Objekte zu bestimmen. Die gesamte Untersuchung erstreckte sich über etwa 10 bis 30 Minuten.²⁴⁵

Ergebnisse der Untersuchung

Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass weitaus mehr Fehler beim Zählen ungeordneter Mengen gemacht wurden als bei Geordneten. Fast alle untersuchungsteilnehmenden Kinder irrten sich beim Zählen der ungeordneten Mengen, denn sie zählten Elemente oft doppelt oder sogar mehrfach.²⁴⁶

²⁴² vgl. Fuson 1988: S. 94ff.

²⁴³ Fuson 1988: S. 98.

²⁴⁴ vgl. Fuson 1988: S. 98f.

²⁴⁵ vgl. Fuson 1988: S. 100.

²⁴⁶ vgl. Fuson 1988: S. 102.

Im vorigen Kapitel wurden insgesamt die drei groben Fehlertypen thematisiert: Zahlwort-/Zeigeaktfehler, Zeigeakt-/Objektfehler und die Vermischung beider Fehler. Erwartungsgemäß wurden mehr dieser Fehler bei der ungeordneten Blockreihe gemacht. Jüngere Kinder schnitten darüberhinaus schlechter ab als die Älteren.²⁴⁷ Abbildung 20 präsentiert die Auswertung der Fehlerrate dieser Untersuchung.

Age														
	3 - 3,5		3,5 - 4		4 - 4,5		4,5 - 5		5 - 5,5		5,5 - 6		Mean	
Error type	Rows	Dis	Rows	Dis	Rows	Dis	Rows	Dis	Rows	Dis	Rows	Dis	Rows	Dis
Word point total (point - no word, part word - one point, multiple words - one point)	8,8	22,4	4,1	8,8	5,5	9,1	1,3	2,9	1,0	4,4	0,7	4,4	3,6	8,3
Point - object total (Object skipped, uncounted, multiple count)	26,8	27,5	20,2	22,1	9,2	22,3	4,6	5,1	3,9	11,1	7,1	12,0	12,0	16,7
Dual total (multiple points - one word, skim)	7,1	9,0	10,8	3,3	14,0	8,3	14,6	29,6	1,5	0,5	2,2	0,9	8,4	8,6
Recount	1,7	25,2	1,2	13,1	0,6	19,0	/	17,3	0,1	10,8	0,6	20,3	0,7	17,6
Total errors	44,4	84,1	36,3	47,3	29,3	58,7	20,5	54,9	6,5	26,8	10,6	37,6	24,7	51,2

*Abbildung 20: Fehlerrate in Bezug auf die Anordnung der Objekte*²⁴⁸

Der Fehlertyp „Zahlwort zwischen zwei Objekten“ trat vor allem bei ungeordneten Mengen und kleineren Kindern auf. Vier von den sechs jüngsten Kindern begingen diesen Fehler, in dem sie ein Zahlwort nannten, während sie auf kein bestimmtes Objekt zeigten. Der Fehler, dass ein Zahlwort auf zwei Objekte gestreckt wurde, tauchte ebenfalls öfters bei nicht linearen Mengen auf. Insgesamt 60% aller Kinder irrten sich bei ungeordneten Mengen und zogen das Zahlwort über zwei Objekte (Teilzahlwort) „siiii –point, ..., iiix-point“. ForscherInnen erklären sich diese Fehlerquelle anhand der Aufmerksamkeit des Kindes.²⁴⁹

Zusammenfassend wird durch diese Untersuchung ersichtlich, dass folgende Fehler bei ungeordneten Mengen öfters auftreten:²⁵⁰

- doppeltes oder mehrfaches Zählen von Objekten

²⁴⁷ vgl. Fuson 1988: S. 102.

²⁴⁸ Fuson 1988: S. 103.

²⁴⁹ vgl. Fuson 1988: S. 104f.

²⁵⁰ vgl. Fuson 1988: S. 110.

- Auslassen von Objekten
- Ausweitung eines Zahlworts über zwei Objekte

5.4.3 Typische Fehler beim Zählen in Bezug auf die Eigenschaften der Objekte (Farbe, Homogenität, Platzierung)

5.4.3.1 Farbe der Objekte

Untersuchungen zu diesem Themengebiet beschäftigten sich damit, ob die Farbe der Objekte den Zählprozess beeinflusst. Vermutet wird, dass durch die verschiedenen Farben die Objekte leichter zu unterscheiden sind und daher die Mehrfachzählung seltener auftritt. Objekte können durch ihr unterschiedliches Aussehen besser voneinander unterschieden werden. Es besteht jedoch die Gefahr, dass Kinder anschließend dazu neigen, Objekte mit verschiedenen Farben nicht zu einer Menge zusammenzufassen und zählen zu können. Die Farbe der Objekte könnte somit auch den Zählprozess irritieren.²⁵¹

Methodik

Bei dieser Untersuchung nahmen zwölf dreijährige und zwölf vierjährige Kindergartenkinder teil. Die dreijährigen Kinder wurden beauftragt, Reihen von 7, 9, 12 und 14 Blöcken zu zählen. Die Vierjährigen bekamen Reihen von 12, 14, 17 und 19 Blöcken. Die Kinder wurden während dieser Untersuchung von zwei StudentInnen befragt.²⁵²

Ergebnisse der Untersuchung

Jedes dreijährige und jedes vierjährige Kind irrte sich mindestens einmal während des Zählens.²⁵³ Die Untersuchung ergibt, dass die Mehrfachzählung trotz der unterschiedlichen Farben häufig auftritt. Erstaunlicherweise wurden öfter Fehler bei Zeigeakt/Objekt gemacht als bei Zahlwort/Zeigeakt.²⁵⁴ Des Weiteren ergab die Untersuchung, dass die meisten Fehler bei Objekten unterschiedlicher Farbe am Ende

²⁵¹ vgl. Fuson 1988: S. 130ff.

²⁵² vgl. Fuson 1988: S. 132.

²⁵³ vgl. Fuson 1988: S. 141f.

²⁵⁴ vgl. Fuson 1988: S. 140.

jedes Zählakts geschahen. Bei einfarbigen Objekten trat die Fehlerquelle am häufigsten in der Mitte des Zählakts auf.²⁵⁵

5.4.3.2 Homogenität der Objekte

In den bisherigen Untersuchungen wurden jeweils Blöcke zum Zählen vorgelegt. Bei dieser Studie wurden erstmals unterschiedliche Spielzeuge verwendet, um zu untersuchen, ob Kinder ähnliche Fehler wie bei den gleichartigen Spielzeugblöcken machen.²⁵⁶

Methodik

TeilnehmerInnen dieser Studie waren 48 Kinder im Alter von drei bis viereinhalb Jahren. Sie wurden wie auch in den vorigen Untersuchungen, in Halbjahresgruppen aufgeteilt. Jedes Kind musste zunächst eine Reihe mit homogenen Objekten und anschließend mit heterogenen Objekten zählen. Die homogenen Sets bestanden entweder aus Puppen oder kleinen Spielzeugsoldaten. Die heterogenen Sets beinhalteten verschiedene Tierarten, die auch unterschiedliche Größe und Farbe hatten.²⁵⁷

Ergebnisse der Untersuchung

Wie auch in den vorigen Untersuchungen wurden die verschiedenen Fehlertypen analysiert und in einer Tabelle ausgewertet. Zusammenfassend waren folgende Fehlerquellen auffällig:

Jedes dreijährige und zwei Drittel der vierjährigen Kinder irrten sich einmal im Zuge des Zählakts. Erstaunlicherweise wurde bei dem Fehler Mehrfachzählung festgestellt, dass dieser öfters bei homogenen Mengen mit wenigen Elementen (maximal sechs Objekte) auftrat als bei heterogenen Mengen. Auch bei dieser Untersuchung geschah der Zählfehler meist in der Mitte oder am Ende des Zählakts und es wurde wieder belegt, dass den Kindern der Zählfehler am wenigsten direkt am Anfang des Zählakts passiert. Das wahllose Zählen trat häufiger bei homogenen Objekten auf. Vermutet wird, dass sich das Kind von den gleich aussehenden Objekten verwirren lässt und damit das wahllose Zählen eintritt.²⁵⁸

²⁵⁵ vgl. Fuson 1988: S. 142.

²⁵⁶ vgl. Fuson 1988: S. 145.

²⁵⁷ vgl. Fuson 1988: S. 145f.

²⁵⁸ vgl. Fuson 1988: S. 157.

5.4.3.3 Entfernung der Objekte

Diese Untersuchung beschäftigt sich damit, wie die Entfernung der Objekte untereinander den Zählakt beeinflusst. ForscherInnen wollten feststellen, ob eine größere Distanz zwischen den Objekten einen positiven oder negativen Einfluss auf die Richtigkeit des Zählens hat. Unter dem großen Abstand ist eine Distanz von ca. 1,5mal der Objektbreite zu verstehen. Wichtig bei dem größeren Abstand war, dass die Kinder trotzdem alle Objekte auf einmal überblicken konnten und sich für das Zählen nicht extra bewegen müssen. Unter dem kleineren Abstand sind ungefähr 0,5cm gemeint.²⁵⁹

Methodik

Bei dieser Untersuchung nahmen 36 Kinder teil. Jeweils zwölf Kinder einer Halbjahresgruppe wurden befragt (zwölf 3 bis 3,5 jährige, zwölf 3,5 bis 4 jährige und zwölf 4 bis 4,5 jährige). Die Kinder wurden wieder aufgefordert Objekte zu zählen. Aufgebaut wurden sowohl kleinere (4,5,6 Bausteine, Spielzeugautos oder Spielchips) und größere (9,12,14 Bausteine, Spielzeugautos oder Spielchips) Reihen, die jeweils in einem unterschiedlichen Abstand aufgestellt wurden. Im Zuge der Untersuchung wurden die Kinder von zwei Personen beobachtet und befragt.²⁶⁰

Ergebnisse der Untersuchung

Erwartungsgemäß traten die häufigsten Fehler bei der jüngsten Halbjahresgruppe auf. Grundsätzlich irrten sich alle Kinder öfter beim Zählen, wenn der Abstand der Objekte kleiner war. Sobald die Elemente näher zusammenstanden, kam es häufiger zu Fehlern bei Zeigeakt – Objekt und zu wahllosem Zählen „skim errors“. Die Autorin erklärt sich diese Fehlerquellen damit, dass es für Kinder bei geringerem Abstand schwieriger wird, jedes Objekt als eine Einheit wahrzunehmen und zu zählen. Eine weitere interessante Beobachtung wurde im Bezug auf das Auftreten der Fehler gemacht. Wie auch bei den vorigen Untersuchungen, bei denen die Objekte eher näher aneinanderlagen, traten die Fehler eher in der Mitte des Zählakts auf. Bei allen Objekten, die eine größere Distanz voneinander hatten, geschah der Fehler meist in der Mitte oder am Ende der Objektreihe. Fuson suchte für das verschiedene Auftreten der Fehlerposition eine logische Begründung. Sie konnte jedoch keine Erklärung finden.²⁶¹

²⁵⁹ vgl. Fuson 1988: S. 158f.

²⁶⁰ vgl. Fuson 1988: S. 159.

²⁶¹ vgl. Fuson 1988: S. 169f.

5.5 Der Zusammenhang zwischen Zählen und Kardinalität

5.5.1 Zugänge

Immer wieder wird der Zusammenhang zwischen dem Zählen und der kardinalen Bedeutung in der Forschung thematisiert. Frydman ist beispielsweise überzeugt davon, dass das Bestimmen einer Menge als Anzahl und das Zählen, verschiedene Wissensbereiche sind, die jeweils unterschiedliche konzeptuelle Kompetenzen erfordern:²⁶²

*„The distinction between concept of number and concept of counting is an essential feature in the present account. My claim indeed is not that children lack any notion of cardinality before they reach the intermediate level, but rather the notion of cardinality... is unrelated to counting and develops independently of knowledge of counting. Counting consolidates children's notion of cardinality but is not necessary to elicit number- bated judgements.“*²⁶³

Frydmans Ansicht wird von vielen ForscherInnen abgelehnt, die meinen, dass Zählen für das Verstehen von Kardinalität, eine nicht auszuschließende Bedingung ist. Fuson meint hierzu, dass das Beherrschen der Zahlwortreihe bereits numerisches Wissen enthält und demzufolge auch ein bestimmtes kardinales Wissen voraussetzt. Beim Zählen handelt es sich ihr zufolge um eine konstruierte Reihe von Zahlwörtern, die bestimmte Merkmale besitzt: sie ist in einer standardisierten Reihenfolge aufgebaut, jedes Zahlwort kommt nur einmal vor und die Zahlwortreihe enthält eine dekadische Struktur.²⁶⁴

Um die Beziehung zwischen dem Zählen und der kardinalen Bedeutung besser nachvollziehen zu können, nennt Fuson drei wesentliche Aspekte, deren Integration das Begreifen von Kardinalität ausmacht:²⁶⁵

1. Die Frage „Wie viele sind es?“ (how-many-question rule)
2. Verwendung des Kardinalwort- Prinzips (count-to-kardinal transition)
3. das Nachvollziehen, dass durch Zählen einer Menge die Anzahl der enthaltenen Elemente bestimmt werden kann (count-to-kardinal transition)

²⁶² vgl. Moser Opitz 2008: S. 84.

²⁶³ Frydman 1995: S. 674.

²⁶⁴ vgl. Moser Opitz 2008: S. 84.

²⁶⁵ vgl. Moser Opitz 2008: S. 84.

Die Zusammenhänge dieser drei Aspekte werden verstanden, wenn das Kind Folgendes begreift: die Frage „wie viele sind es?“ wird beantwortet, wenn das zuletzt genannte Zahlwort wiederholt wird und auf die Frage „Gib mir n“ genau n Elemente gezählt werden (siehe Abbildung 21).

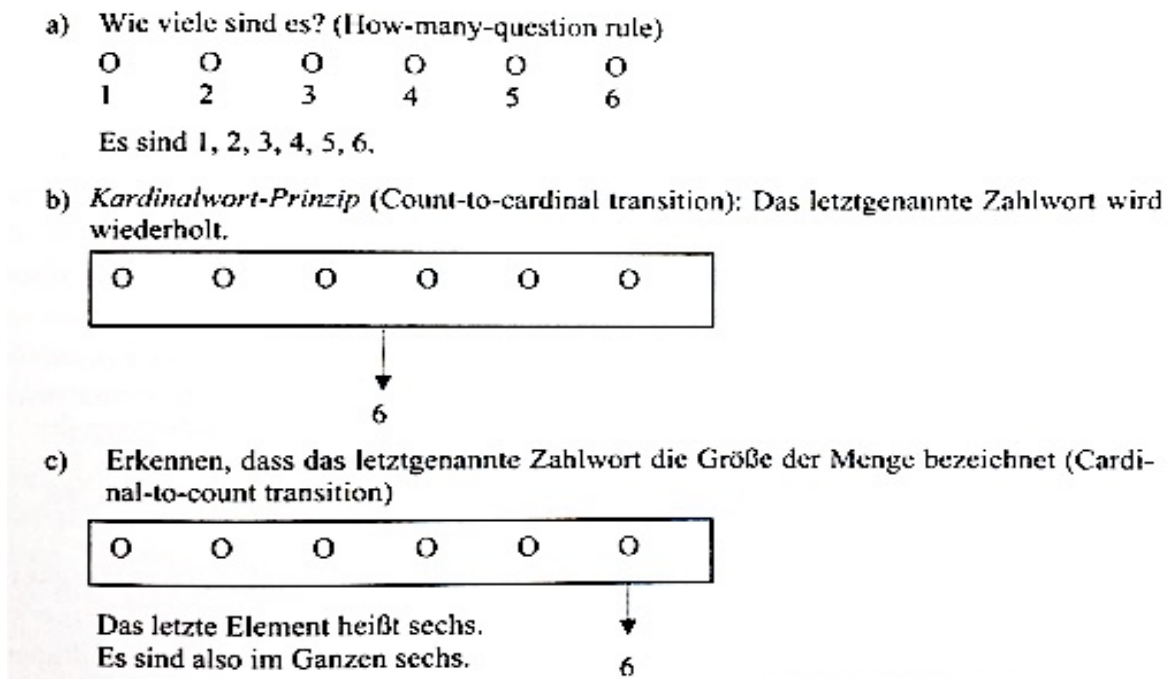


Abbildung 21: Zusammenhang zwischen Zählen und kardinaler Bedeutung²⁶⁶

5.5.2 Untersuchungen über den Zusammenhang von Zählen und Kardinalität

Eine kardinale Situation und eine Zähl-situation sind im Anfangsstadium des Zählerwerbs für Kinder unabhängige Prozesse. Eine gegebene Situation stellt entweder eine Kardinalsituation (ein einziges Zahlwort beschreibt die Situation) oder eine Zähl-situation dar (zählen wird gefordert, aber es wird keine Endzahl bestimmt). Ein besonders wichtiger Entwicklungsschritt ist, wenn Kinder das erste Mal das Zählen und die Kardinalität miteinander verbinden. Dabei wird erkannt, dass das Zählen nicht eine bloße Handlung darstellt, sondern auch zu einem Ergebnis führt. Im Folgenden wird dieser Zusammenhang anhand einer Untersuchung genauer erforscht.²⁶⁷

²⁶⁶ Moser Opitz 2008: S. 91.

²⁶⁷ vgl. Fuson 1988: S. 206.

Methodik

An dieser Untersuchung nahmen 42 Kinder (23 Buben und 19 Mädchen) im Alter von 2,5 bis 4 Jahren teil. Die Studie bestand aus zwei Teilen und sie wurde ebenfalls von zwei ForscherInnen festgehalten. Um besonders die kleinen Kinder für diese Studie zu motivieren, durften sie sich die zu zählenden Objekte selbst aussuchen (Blöcke, Tiere, Puppem, Autos etc.).²⁶⁸

Im ersten Teil der Untersuchung ging es darum, dass die Kinder die vorgelegten Objekte zählen und anschließend auf die Frage „Wie viele Objekte sind das?“ antworten. Konnte das Kind korrekt antworten, so war der erste Teil des Experiments abgeschlossen. Antwortete das Kind jedoch falsch, so wurde es nochmals gebeten die Objekte zu zählen. Anschließend wurde erneut nach der Anzahl der Objekte gefragt, jedoch wurden dem Kind drei Antwortmöglichkeiten gegeben „a, b oder c“. „b“ war dabei immer die korrekte Antwort, „a“ und „c“ waren jeweils um eins kleiner oder größer als „b“. Drei der insgesamt sechs Mengen galten als überschaubare Mengen, das heißt, es war möglich auf einen Blick festzustellen, wie viele Objekte vorlagen (zwei, drei, vier Objekte). Die anderen drei erforderten aktives Zählen (fünf, sechs, sieben Objekte).²⁶⁹

Der zweite Teil der Untersuchung begann vorerst genauso wie der erste Teil. Anschließend wurden Spielchips aufgelegt und die Kinder mussten diese zählen. Im Anschluss wurden sie gefragt: Ist das der Spielchip, bei dem du n gesagt hast?“. „n“ drückte die zuletzt genannte Zahl während des Zählvorgangs aus. Die ForschungsleiterInnen zeigten dabei abwechselnd auf das letzte Element, das vorletzte und auf alle Elemente der Reihe. Anschließend wurde gefragt „Sind das hier n Spielchips?“. Dabei deuteten die ForschungsleiterInnen einmal auf das letzte Objekt und einmal auf alle Elemente der Reihe.²⁷⁰

Ergebnisse der Untersuchung

Im ersten Teil der Studie antworteten insgesamt 20 der 42 Kinder mit der letzten Zahl des Zählakts. Zwölf dieser 20 Kinder bestimmten vom ersten Augenblick an die letzte Zahl. Die anderen acht entdeckten erst die Bedeutung des zuletzt genannten Zahlworts

²⁶⁸ vgl. Fuson 1988: S. 212.

²⁶⁹ vgl. Fuson 1988: S. 212.

²⁷⁰ vgl. Fuson 1988: S. 213.

im Laufe der Untersuchung. Sie waren jedoch trotzdem in der Lage, das zuletzt genannte Zahlwort zu nennen.

Jene 22 Kinder, die nicht sofort mit dem letzten Zahlwort geantwortet haben, konnten maximal Mengen von zwei bis maximal vier Objekten bestimmen. Vermutet wird, dass diese Kinder bei der Beantwortung der Frage „Wie viele Objekte sind das?“ mit einer Mustererkennungsstrategie arbeiteten. Es ist somit nicht eindeutig klar, ob die Kinder tatsächlich zählten, oder die kleinen, überschaubaren Mengen (zwei, drei und vier) durch „subitizing“ bestimmten. Bei drei dieser 22 Kinder war die Mustererkennungsstrategie eindeutig sichtbar. Jene konnten nämlich bei den kleineren überschaubaren Mengen die Anzahl bestimmen, jedoch nicht bei größeren Mengen. Bei den restlichen 19 Kindern konnte nicht exakt festgestellt werden, ob diese tatsächlich die Anzahl der Objekte durch Zählen oder durch „subitizing“ bestimmten.²⁷¹

Alle Kinder, die keine richtige Antwort auf die Frage „Wie viele Objekte sind das?“ geben konnten, gingen meist wie folgt vor:²⁷²

- Objekte wurden nochmal gezählt, aber es konnte wieder keine Antwort gegeben werden
- Es wurde eine Zahl genannt, die nicht dem zuletzt genannten Zahlwort entsprach
- Es wurde eine Zahlwortreihe aufgesagt, die nicht dem zuletzt genannten Zahlwort entsprach
- Kinder gaben keine Antwort oder sagten „Ich weiß es nicht.“
- Kinder machten etwas ganz anderes (Finger herzeigen, „Ich habe es schon gesagt“)

²⁷¹ vgl. Fuson 1988: S. 218.

²⁷² vgl. Fuson 1988: S. 237f.

	Recounted	said one number	Said a sequence of numbers	No answer or "i don't know"	other
Origins sample					
2 year olds	23%	40%	18%	14%	4%
3 year olds	67%	16%	10%	3%	5%
Experiment 1 Sample					
3 year olds	73%	11%	8%	1%	6%
4 year olds	45%	43%	5%	0%	8%

*Abbildung 22: inkorrekte Antworten je nach Alter*²⁷³

Der obenstehenden Tabelle ist zu entnehmen, dass zweijährige Kinder die Frage „wie viele Elemente sind das?“ noch anders interpretieren als Drei- oder Vierjährige. Für die jüngeren Kinder gilt diese Frage eher als Direktive, auf die sie mit einer beliebigen Zahl antworten sollen. Erst im fortgeschrittenen Alter verbinden Kinder den Zählprozess mit der Kardinalitätsfrage.²⁷⁴

Auch die Frage, ob jene Kinder, die sofort mit dem zuletzt genannten Zahlwort antworteten, keine Vorstellung über den Kardinalitätsbegriff haben könnten, wurde im Zuge der Ergebnisse beantwortet. Durch die aufgenommenen Daten wurde darauf geschlossen, dass es tatsächlich auch Kinder gibt, die trotz des korrekt genannten Zahlworts, keine Vorstellung über Kardinalität haben.²⁷⁵

Auch die Zähl- und Kardinalitätsvorstellung wurde in Bezug auf das Alter der 20 Kinder, die korrekt im zweiten Teil der Studie antworteten, untersucht. Dabei erwies sich, dass 27% der Zweijährigen und sogar 76% aller Dreijährigen richtig auf die Frage bezüglich des Zählens („Ist das hier das n-te Element?“ – ForschungsleiterInnen zeigen auf das letzte, das vorletzte und auf alle Elemente) antworteten. Demnach ist davon auszugehen, dass die dreijährigen Kinder bereits besser über ihr Vorgehen während des Zählprozesses nachdenken und reflektieren können. Im Gegensatz dazu gaben nur 20%

²⁷³ Fuson 1988: S. 238.

²⁷⁴ vgl. Fuson 1988: S. 237f.

²⁷⁵ vgl. Fuson 1988: S. 228.

der Zweijährigen und nur 53% der Dreijährigen auf die Frage „Sind das hier n-Elemente?“ eine korrekte Antwort.²⁷⁶

Für die 22 Kinder, die nicht fähig waren, sofort mit dem zuletzt genannten Zahlwort zu antworten, wurde eine kurze Schulung abgehalten, in dem nochmals erklärt wurde, wie das mit dem letzten Zahlwort genau funktioniert. Nach diesem Kurs waren 16 dieser Kinder in der Lage, die Aufgaben richtig zu lösen (ausgenommen der Fehler, die vorhin aufgelistet wurden).²⁷⁷

5.6 Zahlaspekte und deren Verständnis

Die vorherigen Kapitel beschäftigen sich vor allem mit dem Produzieren einer Zählsequenz, der Verbindung zwischen Zahlen und Zählakt sowie dem Kardinalitätsbegriff. Dieses Kapitel schildert nun die Zusammenwirkung der verschiedenen Zahlaspekte.

Es bezieht sich dabei auf die Zählasperte von Gelman und Gallistel (1978), welche bereits genauer erläutert wurden. Sie sind der Meinung, dass das Zählen folgende drei Aspekte beinhaltet, die das Kind nachvollziehen muss:²⁷⁸

1. Prinzip der stabilen Ordnung
2. Prinzip der Eins-zu-Eins Zuordnung
3. Prinzip der Kardinalität

Gelman und Gallistel sehen den Zusammenhang dieser Aspekte wie folgt:

*„(1) At small set sizes (2-3) children adhere to all three principles; (2) as set size increases they begin to have trouble with the one-one principle, and they stop using the cardinal principle; and (3) in enumerating the largest sets they try to adhere to the one-one principle but fail, while continuing to adhere with fair success to the stable-order principle. This pattern is true regardless of age, although, not surprisingly, the younger the child the smaller the set sizes at which he begins to falter.“*²⁷⁹

²⁷⁶ vgl. Fuson 1988: S. 230f.

²⁷⁷ vgl. Fuson 1988: S. 241.

²⁷⁸ vgl. Fuson 1988: S. 372f.

²⁷⁹ Fuson 1988: S. 373.

Fuson beschäftigte sich ebenfalls mit der Beziehung dieser drei Aspekte und führte dafür insgesamt vier Untersuchungen durch. Der Fokus lag dabei auf dem Einfluss des Alters und der Größe der zu zählenden Menge. Somit unterscheiden sich die vier Untersuchungen großteils durch das Alter der Teilnehmer und der Anzahl der Objekte. Die Antworten der Kinder wurden auf folgende Kriterien untersucht: Zahlwortfolge, Zuordnung (Korrespondenz), Kardinalität und das Zählen an sich. Bei der Zahlwortfolge wurde nur darauf geachtet, ob die Zahlwörter in der richtigen Reihenfolge gesagt werden. Bei der Korrespondenz wurde das Augenmerk auf die Zuordnung zwischen Zahlwort und Zeigeakt sowie Zeigeakt und Objekt gelegt. Bei der Kardinalität stand die Antwort der Kinder auf die Frage nach der Größe der Menge im Fokus. Das Zählen an sich wurde als richtig gewertet, wenn sowohl die Zahlwortfolge als auch der Zuordnungsprozess korrekt durchgeführt wurden.²⁸⁰

Die Antworten der Kinder wurden wieder in einer Tabelle ausgewertet und in Prozentsätzen angegeben. Sie wurde nach Alter der Teilnehmer sowie nach der Größe der zu zählenden Elemente gegliedert. Folgende Ergebnisse ergab die Untersuchung:²⁸¹

Das Einhalten der drei „how-to-count principles“ von Gelman und Gallistel hängt stark von der Größe des Sets ab. Bei sehr kleinen Sets (2, 3 und 4 Objekte) beruht der Zählprozess meist nur auf den ersten zwei Zahlaspekten. Der Kardinalitätsaspekt wird erst etwas später in Betracht genommen.

Bei etwas größeren Sets (4, 5, 6 und 7 Objekte) wurde ebenfalls wie bei kleineren Mengen gehandelt. Dennoch trat bei genauso vielen Kindern ein anderes Handeln auf: Der Zählprozess wurde richtig in Bezug auf das Prinzip der stabilen Ordnung und dem Kardinalitätsprinzip, jedoch falsch in Bezug auf das Prinzip der Eins- Eins Zuordnung durchgeführt. Es wird davon ausgegangen, dass Kardinalität und Zuordnung bei dieser Mengengröße unabhängige Kategorien sind.

Bei Sets mit sieben bis sechzehn Objekten schien es so, als wären die Kategorien nach Schwierigkeiten geordnet: Zahlwortfolge, Kardinalität und Zuordnung. Einige Kinder zeigten nur eine korrekte Vorgehensweise bei der Zahlwortfolge und nicht bei den anderen zwei Prinzipien. Andere wiederum beherrschten die Zahlwortfolge und Kardinalität, jedoch nicht die Zuordnung.

²⁸⁰ vgl. Fuson 1988: S. 375ff.

²⁸¹ vgl. Fuson 1988: S. 384f.

Bei noch größeren Sets ist eine andere Reihenfolge der Kategorien erkennbar: Kardinalität, danach Zahlwortfolge und an finaler Stelle die Zuordnung.

6 Zahlbegriffserwerb nach Steffe

Laut Steffes Untersuchungen wird der Zählprozess durch die soziale Interaktion mit Erwachsenen erworben. „Was“ Kinder aber genau zählen können, ist vom Entwicklungsstadium der „Einheiten“ abhängig.²⁸²

Im Folgenden wird Steffes Theorie über den Zahlbegriffserwerb präsentiert.

6.1 Zählen als komplexe Aktivität - Komponente des Zählens

Zählen beschreibt einen Komplex, der aus drei Komponenten besteht. Das Kind muss diese Aktivitäten ausprägen, damit lernen umzugehen und übergreifend anwenden können.²⁸³

1. Komponente des Zählens: beschreibt die Fähigkeit, die Zahlwortfolge verbal in der standardisierten Reihenfolge zu produzieren.

„First component of counting: The ability vocally (and later subvocally) to produce a sequence of conventional number words in the standard order.“²⁸⁴

Die Wörter „conventional“ und „standard“ sind dabei kulturspezifisch zu verstehen.²⁸⁵

2. Komponente des Zählens: beschreibt die Fähigkeit, Einheiten zu bilden.

„Second component of counting: The ability to produce (perceptually or otherwise) a plurality of units that can be counted.“²⁸⁶

„unit“, „plurality“ und „collection“ benötigen als Grundvoraussetzung Aufmerksamkeit erregende Impulse beziehungsweise Momente.²⁸⁷

3. Komponente des Zählens: beschreibt die Fähigkeit, die oben genannten Komponenten miteinander zu verbinden beziehungsweise zu kombinieren.²⁸⁸

²⁸² vgl. Steffe 1983: S. 1.

²⁸³ vgl. Steffe 1983: S. 24.

²⁸⁴ Steffe 1983: S. 24.

²⁸⁵ vgl. Steffe 1983: S. 24.

²⁸⁶ Steffe 1983: S. 24.

²⁸⁷ vgl. Steffe 1983: S. 24.

²⁸⁸ vgl. Steffe 1983: S. 24f.

„Third component of counting: The ability to coordinate the two productive activities so that they „accompany“ each other in such a way that each element of the first (number word) experientially corresponds to an element of the second (unit).“ ²⁸⁹

6.2 Die Zahlwortfolge

Steffe beschäftigt sich in seinen Untersuchungen mit der Zahlwortfolge in ihrer standardisierten Ordnung. Dafür wählte er die Zahlen zwischen Eins und Zwanzig und untersuchte anhand derer, wie sich der Zählprozess bei Kindern entwickelt. Er spricht von *„to produce a number word sequence“*, sobald das Kind fähig ist, verbal ein Segment der Zahlwortfolge zu äußern wie zum Beispiel *„drei, vier, fünf“*. ²⁹⁰

6.3 Koordination (Eins - zu - Eins Zuordnung)

Zählen umfasst das Zusammenspiel zweier Aktivitäten: die verbale oder subverbale Produktion einer Zahlwortfolge und die konzeptuelle Produktion von Einheiten. ²⁹¹

Unter der Konstruktion der Zahlwortfolge wird die Bewegung von Objekt zu Objekt verstanden. Die Verbindung, die hergestellt wird, charakterisiert das Objekt in Bezug zur Richtung, in die gezählt wird. Unter der Konstruktion von Koordination (Eins-zu-Eins-Zuordnung) wird ebenfalls die Bewegung von Objekt zu Objekt verstanden. Die Verbindung charakterisiert ebenfalls die Objekte, aber die Reihenfolge in der gezählt wird, ist irrelevant. ²⁹²

Die Koordination (Eins-zu-Eins-Zuordnung) von sensomotorischen Einheiten wird bereits in Sinclairs Untersuchungen von zehn Monate alten Kindern beherrscht. Er stellt fest, dass Kinder in diesem Alter bereits Löffel in Boxen zuordnen und somit einen Koordinationsakt vollziehen können. ²⁹³

²⁸⁹ Steffe 1983: S. 25.

²⁹⁰ vgl. Steffe 1983: S. 25.

²⁹¹ vgl. Steffe 1983: S. 28.

²⁹² vgl. Steffe 1983: S. 28.

²⁹³ vgl. Steffe 1983: S. 28.

6.4 Entwicklung von Einheiten als Grundvoraussetzung für die Zahl – ein philosophischer Ansatz

Steffe bezieht sich in seinen Untersuchungen auf Euklid und Piaget.

„A UNIT is that by virtue of which each of the things that exist is called one. A NUMBER is a multitude composed of units.“²⁹⁴

Die Zahl ist nach Euklid eine konzeptuelle Kreation. Sie wird nach seiner Theorie durch einen zweiteiligen Abstraktionsakt gebildet:

„A number is a unit (multitude) that itself is composed of units.“²⁹⁵

Der erste Akt der Abstraktion einer Zahl basiert auf sensomotorischen Einheiten, welcher hauptsächlich auf dem empirischen Forschen des Kindes aufbaut. Der zweite Abstraktionsakt beschäftigt sich vielmehr damit, Einheiten zu produzieren. Piaget und Euklid vergleichen diese Phase mit der Reflexion des Kindes gegenüber der Zahl.²⁹⁶

Steffe behauptet, dass der Zahlbegriffserwerb nichts anderes darstellt als das Erlernen zu Gehen, zu Sprechen etc. Das Kind soll lernen das Zählen wie das Gehen zu beherrschen, ohne dabei nachdenken zu müssen, welcher Schritt als nächstes kommt. Untersuchungen zufolge ist klar, dass Kinder diese Erwerbsfähigkeit besitzen und ausprägen können. Dennoch ist der Ursprung dieser Eignung unbekannt. In den vorigen Untersuchungen wurde ebenfalls erwiesen, dass Kinder nicht unbedingt die Bedeutung einer Zahlwortsequenz wissen müssen, um diese aufzusagen. Tatsache ist aber, dass Kinder, sobald sie die Zahlwortfolge erfasst haben, diese auf Objekte anwenden um zu zählen:²⁹⁷

„Counting is not the simple recitation of a number word sequence – Two other things, to be precise. First, there must be items to count; and second, there must be a procedure to make each utterance of a number word coincide with one of the items that are to be counted.“²⁹⁸

²⁹⁴ Euclid 1926: Book VII zitiert in Steffe 1983: S. 1.

²⁹⁵ Steffe 1983: S. 1.

²⁹⁶ vgl. Steffe 1983: S. 1.

²⁹⁷ vgl. Steffe 1983: S. 2.

²⁹⁸ Steffe 1983: S. 2.

Berkeley beschäftigt sich 1709 in seinem Werk damit, dass es für Kinder oft schwer nachvollziehbar ist, welche Objekte gezählt werden können und welche nicht. Er erklärt sich die Schwierigkeit folgenderweise:

„It is entirely the creature of the mind, considering, either an idea itself, or any combination of ideas to which it gives one name, and so makes it pass for a unit. According as the mind variously combines its ideas, the unit varies; and as the unit, so the number, which is only a collection of units, doth also vary. We call a window one, a chimney one, and yet a house in which there are many windows, and many chimneys, hath an equal right to be called one, and many houses go to the making of one city.“²⁹⁹

Sobald es demzufolge also zu komplexeren Zählakten kommt, muss das Kind weitaus professioneller Handeln als nur die Zahlwortfolge mit den zu zählenden Objekten zu kombinieren.³⁰⁰

6.5 Arten von Einheiten

„Counting is the production of a sequence of number words such that each number word is accompanied by the production of a unit item.“³⁰¹

6.5.1 Perzeptuelle Einheiten

Das Kind ist in der Lage, direkt wahrnehmbare Objekte zu zählen. All jene Dinge, die das Kind anfasst, sieht oder hört, können gezählt werden. Dazu zählen beispielsweise auch Glockenschläge einer Kirche. Wichtig dabei ist, dass das Kind die Ursprungsquelle wahrnehmen kann. Kinder, die sich in dieser Phase befinden, können das Zählen bereits zum Lösen einer Addition einsetzen. Zum Beispiel können sie auf die Frage „Wie viel ergeben drei und sechs Perlen?“ antworten, solange sie die Perlen direkt wahrnehmen und damit gearbeitet werden können. Sobald keine Objekte direkt sichtbar oder hörbar sind, ist es dem Kind nicht möglich, zu zählen.³⁰²

²⁹⁹ Steffe 1983: S. 3. zitiert nach Berkeley 1709: S. 109.

³⁰⁰ vgl. Steffe 1983: S. 2f.

³⁰¹ Steffe 1983: S. 116.

³⁰² vgl. Steffe 1983: S. 46f.

6.5.2 Visuelle Einheiten

Das Kind benutzt, wenn das zu zählende Objekt nicht direkt wahrnehmbar ist, Repräsentanten als Substitute. Kinder sind ebenfalls in der Lage, nicht direkt sichtbare Objekte zu zählen. Sie helfen sich in dieser Phase zum Beispiel mit ihren Fingern und ersetzen damit die nicht direkt wahrnehmbaren Objekte.³⁰³

6.5.3 Motorische Einheiten

Das Kind verwendet motorische Bewegungen als Repräsentanz für perzeptuelle und visuelle Einheiten. Zu diesen Bewegungen zählt etwa das direkte Zeigen auf die Objekte.³⁰⁴

6.5.4 Verbale Einheiten

Sobald die motorischen Einheiten für das Kind zu spontanen Handlungen gehören, ist es auf dem richtigen Weg als nächsten Schritt Zahlwörter als Substitute zu verwenden. Theoretisch zählt das Bestimmen und Aussprechen von Zahlwörtern zu den motorischen Fähigkeiten. Es wurde jedoch beschlossen, diesen Schritt separat als verbale Einheit festzuhalten, da dieser ein weitaus komplexer Prozess ist. Des Weiteren ist eigentlich kein motorischer Akt der Kinder mehr erforderlich.³⁰⁵

Das Zählen verbaler Einheiten wird zusätzlich stark von dem banalen Aussagen von Zahlwörtern unterschieden. Während das simple Rezitieren von Zahlwörtern eher mit dem „akustischen“ Zählen vergleichbar ist, fordert das direkte Zählen eine weitaus größere Überlegungsstrategie.³⁰⁶

6.5.5 Abstrakte Einheiten

Das Kind kann ein imaginäres Substitut verwenden.³⁰⁷

³⁰³ vgl. Steffe 1983: S. 50ff.

³⁰⁴ vgl. Steffe 1983: S. 50ff.

³⁰⁵ vgl. Steffe 1983: S. 50ff.

³⁰⁶ vgl. Steffe 1983: S. 50ff.

³⁰⁷ vgl. Steffe 1983: S. 66f.

6.5.6 Übersicht der Einheiten & deren Vorraussetzungen

Die untenstehende Tabelle zeigt die Entwicklung des Zählens in Bezug auf:

- das wachsende Bewusstsein über „was“ genau gezählt wird
- die zunehmende Flexibilität und Geschicklichkeit des Kindes ³⁰⁸

Zähler von...	perzeptuellen Einheiten	visuellen Einheiten	motorischen Einheiten	verbalen Einheiten	abstrakten Einheiten
abstrakte Unit Items	✓	✓	✓	✓	✓
verbale Unit Items	✓	✓	✓	✓	
motorische Unit Items	✓	✓	✓	x	
visuelle Unit Items	✓	✓	x	x	
perzeptuelle Unit Items	✓	x	x	x	

Abbildung 23: Die Entwicklung des Zählens nach Steffe ³⁰⁹

6.6 Beschreibung und Untersuchungen von Einheiten

6.6.1 Perzeptuelle Einheiten

Wie bereits in Kapitel 6.5.1. festgehalten, kann das Kind Dinge zählen, die unmittelbar wahrnehmbar sind. Dazu zählen das Hören, das Sehen sowie das Tasten. Im Zuge der Untersuchung über perzeptuelle Einheiten wurde das Mädchen Dolores befragt und

³⁰⁸ vgl. Steffe 1983: S. 117.

³⁰⁹ Steffe 1983: S. 117.

dabei beobachtet. Folgendes Interview wurde verwendet, um die Schwierigkeiten bei nicht direkt wahrnehmbaren Einheiten aufzuweisen:³¹⁰

Ausgangssituation: Im Blickfeld von Dolores liegen insgesamt zwölf Murmeln. Fünf Murmeln sind sichtbar, die restlichen sieben wurden vom Interviewleiter verdeckt. Der Interviewer (I) fragt anschließend, wie viele Murmeln insgesamt (verdeckt und sichtbar) auf dem Tisch liegen. Dolores (D) antwortet folgendermaßen:³¹¹

D: Eins! *zeigt mit dem Finger auf die Hand, danach Sprechpause*

I: Unter meiner Hand sind sieben Murmeln.

D: *zeigt mit dem Finger nochmals auf die Hand, zählt aber scheinbar die sichtbaren Objekte „eins, zwei, drei, vier, fünf“ hört bei fünf auf zu zählen, zeigt anschließend auf die sichtbaren Murmeln und zählt weiter „sechs, sieben, acht, neun, zehn“*

In einer ähnlichen Aufgabe wurden Dolores insgesamt sieben Kugeln vorgelegt. Drei davon wurden verdeckt und vier waren sichtbar. Auch hier ging Dolores wie bei der obigen Aufzeichnung des Interviews vor. Sie deutete zuerst auf die Hand und zählte bis vier. Das heißt sie ließ sich erneut durch die sichtbaren Kugeln irritieren. Anschließend deutete sie auf die Kugeln und zählte weiter.³¹²

Den Untersuchungen zufolge ist also davon auszugehen, dass Dolores noch nicht in der Lage ist, nicht direkt wahrnehmbare Objekte zu zählen.

6.6.2 Visuelle Einheiten

Kapitel 6.5.2. hält fest, dass Kinder in diesem Stadium Objekte zählen können, die nicht direkt wahrnehmbar sind. Allerdings müssen diese durch symbolische Einheiten, wie zum Beispiel Finger, ersetzt werden. Folgendes Interview wurde verwendet, um die visuellen Einheiten besser nachvollziehen zu können:³¹³

Greg und Susan können beide visuelle Einheiten zählen. Sobald der Interviewleiter zwölf Murmeln in eine Box warf, zählten sie synchron die Aufschläge, die die Murmeln machten „1, 2,..., 12“. Die beiden Kinder sahen dabei die Murmeln nicht direkt. Sie

³¹⁰ vgl. Steffe 1983: S. 48.

³¹¹ vgl. Steffe 1983: S. 48.

³¹² vgl. Steffe 1983: S. 49.

³¹³ vgl. Steffe 1983: S. 52.

zählten nur die Geräusche (vergleichbar mit den perzeptuellen Einheiten und den Glockenschlägen einer Kirche). Dazu passend wurde folgendes Interview durchgeführt:

314

Ausgangssituation: Sieben Münzen befinden sich auf dem Tisch. Vier davon sind sichtbar, die anderen drei sind verdeckt. Der Interviewer (I) fragte anschließend Greg (G), wie viele Münzen insgesamt auf dem Tisch liegen, wenn drei verdeckt sind. Dabei ergab sich folgender Dialog: ³¹⁵

I: Vier Münzen sind sichtbar. Drei sind verdeckt. Wie viele Münzen liegen insgesamt auf dem Tisch?

G: *zeigt auf die Hand, die die drei Münzen verdeckt* „Eins, zwei“ *danach deutet er auf die vier sichtbaren Münzen und zählt weiter* „drei, vier, fünf, sechs.“

Obiges zeigt, dass Greg nicht in der Lage war, jede Münze durch eine visuelle Einheit zu substituieren. Susan ging folgendermaßen vor:

S: *zeigt mit drei ausgestreckten Fingern auf die Hand und substituiert somit die drei verdeckten Münzen. Zählt sie jedoch nicht direkt, sondern zählt sofort die sichtbaren Münzen.* „vier, fünf, sechs, sieben.“

Somit substituierte Susan die verdeckten Münzen korrekt mit Hilfe ihrer Finger und zählte ebenfalls richtig weiter.

6.6.3 Motorische Einheiten

Bekannt ist, dass bei motorischen Einheiten Bewegungen als Substitute für perzeptuelle Einheiten verwendet werden, wie zum Beispiel der Zeigeakt. ³¹⁶

Folgendes Interview zeigt, wie motorische Einheiten gezählt werden:

Ausgangssituation: Zwölf Münzen liegen auf dem Tisch. Sieben davon sind versteckt unter der Hand des Interviewleiters. Der Interviewer (I) fragte anschließend Brenda (B),

³¹⁴ vgl. Steffe 1983: S. 51.

³¹⁵ vgl. Steffe 1983: S. 52.

³¹⁶ vgl. Steffe 1983: S. 55.

wie viele Münzen insgesamt auf dem Tisch liegen. Dabei ergab sich folgender Dialog:

317

B: *zeigt mit dem Stift in ihrer Hand auf alle fünf sichtbaren Münzen und zählt diese „Eins, zwei, drei vier, fünf“ zeigt anschließend mit dem Stift auf die Hand „Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben.“ Danach zeigt sie wieder auf die sichtbaren Objekte „Acht, neun, zehn, elf, zwölf.“ sagt laut „Zwölf“*

6.6.4 Verbale Einheiten

Bei verbalen Einheiten geht es darum, dass kein motorischer Akt, wie zum Beispiel mit dem Finger zeigen, notwendig für das Zählen ist. Es wird nur mehr laut gezählt, das heißt es werden direkt Zahlwörter verwendet.³¹⁸

Folgendes Interview zeigt, wie verbale Einheiten gezählt werden:³¹⁹

Ausgangssituation: Sieben von zwölf Münzen befinden sich verdeckt auf dem Tisch. Charles (C) wird vom Interviewer (I) gebeten, die Münzen zu zählen.

I: Ich habe insgesamt sieben Münzen unter meiner Hand verdeckt. Wie viele sind es insgesamt?

C: *beginnt zuerst zwei Objekte mit dem Finger zu zählen. Hört aber danach auf und beginnt nochmals ohne Finger, die sichtbaren Münzen zu zählen. Er sieht dabei auf die Zimmerdecke „acht, neun, zehn, elf, zwölf.“*

Auch Lexi wurde gebeten folgende Aufgabe zu lösen:

Ausgangssituation: Vier von insgesamt sieben CDs sind verdeckt auf dem Tisch.

I: Ich habe insgesamt sieben CD's. Könntest du rückwärts zählen, um zu bestimmen, wie viele CD's verdeckt sind?

L: *blickt auf die sichtbaren CDs, berührt sie aber nicht und verwendet keine Finger „sieben, sechs, fünf.“ sieht auf die verdeckten CDs und zählt weiter „vier, drei, zwei, eins.“*

I: Wie viele sind verdeckt?

³¹⁷ vgl. Steffe 1983: S. 56.

³¹⁸ vgl. Steffe 1983: S. 62.

³¹⁹ vgl. Steffe 1983: S. 62.

L: wiederholt nochmal das zuvor Gesagte „Vier“

6.6.5 Abstrakte Einheiten

Folgendes Beispiel zeigt das Zählen von abstrakten Einheiten:

„Es befinden sich sieben Murmeln in diesem Becher. Vier Murmeln liegen auf dem Tisch. Wie viele Murmeln sind es insgesamt?“

Wenn das Kind sagt „Es sind sieben Murmeln im Becher – 1,2,3,4,5,6,7“ und dann noch die weiteren zählt um auf das Ergebnis 11 zu kommen, so würde das Kind noch zum „Zähler von verbalen Einheiten“ gehören, weil es immer noch die Wiederholung der Zahlwörter braucht, um das Resultat zu bestimmen. Wenn das Kind aber sofort sagt, dass sich sieben Murmeln im Becher befinden und anschließend die sichtbaren vier dazugibt, ohne nochmals zählen zu müssen, wird vom „Zählen von abstrakten Einheiten“ gesprochen. Das Kind erkennt also, dass bei diesem Beispiel das Zahlwort „sieben“ für sieben unterschiedliche Murmeln steht. Es muss also die Murmeln nicht nochmals zählen, berühren oder mit dem Finger deuten. Diese Fähigkeit impliziert Abstraktion.³²⁰

6.7 Perspektiven und Aussichten in Bezug auf die Konstruktion der Zahl

Konstruktivismus ist ein Teil der Erkenntnistheorie und geht im Bezug auf die Konstruktion der Zahl und der Bildung des Zahlbegriffs davon aus, dass ein Gegenstand vom Betrachter oder von der Betrachterin selbst durch den Vorgang des Erkennens gebildet wird. Somit beruht der Erwerb des Zahlbegriffs auf der kreativen Aktivität des Subjekts.³²¹

Zu Beginn des Erwerbs von mathematischen Fähigkeiten haben viele Kinder besonders bei der Entwicklung von elementaren arithmetischen Operationen Schwierigkeiten. Der Grund dafür hängt oft mit dem Schwierigkeitsgrad der arithmetischen Operationen zusammen. Trotz allem muss jedes Kind bis zum Alter von sechs bis acht Jahren die Konstruktion der Zahl und deren Bedeutung und Anwendung verstehen lernen. Die

³²⁰ vgl. Steffe 1983: S. 42.

³²¹ vgl. Steffe 1983: S. 112.

meisten Studien von Steffe über diesen Prozess beziehen sich auf Piaget und dessen Theorie. Er erklärt sich die Entwicklung der Zahl und die Bildung von Einheiten anhand der Objektpermanenz.³²²

*„Object permanence is a construction that takes place during the child's first two years of life and then manifests itself when the child conducts what Smock (1976, p.45) called a „true search“. Counting is the production of a sequence of number words such that each number word is accompanied by the production of a unit item.“*³²³

³²² vgl. Steffe 1983: S. 117.

³²³ Steffe 1983: S. 116f. zitiert nach Piaget 1937

7 Zahlbegriffserwerb nach Krajewski

Kristin Krajewski hat in ihrem Werk 2008 ein Entwicklungsmodell von frühen mathematischen Kompetenzen entwickelt. In neueren Veröffentlichungen mit Schneider und Küspert 2013 wird dieses Modell „Entwicklungsmodell der Zahl – Größen Verknüpfung (ZGV)“ genannt. Der Begriff „Menge“ wurde hier auf „Größe“ geändert und somit generalisiert.³²⁴

Die Entwicklung von mathematischen Vorläuferfähigkeiten erstreckt sich nach Krajewski über einen Zeitraum, der bereits bei der Geburt beginnt und mindestens bis zum Kindergartenalter andauert.³²⁵

Das Entwicklungsmodell von Krajewski hält fest, dass Kinder drei Entwicklungsebenen durchlaufen, um ein Zahlverständnis zu erwerben. Dabei werden Zahlwörter mit Mengen (Größen) und Mengenrelationen (Größenrelationen) zunehmend miteinander verknüpft bis sich schließlich das Zahlverständnis ausprägt.³²⁶ Außerdem beinhaltet dieses Entwicklungsmodell eine Einsicht in das kardinale Zahlverständnis. Krajewski sieht dies als einen fortschreitenden Prozess, der zuerst in einem kleineren Zahlraum stattfindet und anschließend auf höhere Zahlenräume umgelegt wird.³²⁷

7.1 Das Entwicklungsmodell des Zahlbegriffs

Wie bereits oben erwähnt, beinhaltet dieses Modell drei Ebenen. Auf jeder davon sind Teilkompetenzen verankert, die zuerst isoliert vorliegen und danach Schritt für Schritt auf einer höheren Ebene miteinander verknüpft werden. Die Ebenen unterteilen sich in folgende Stufen:³²⁸

1. Basisfertigkeiten
2. einfaches Zahlverständnis
3. tiefes Zahlverständnis

³²⁴ vgl. Garrote, Moser Opitz, Ratz 2015: S. 25.

³²⁵ vgl. Borchert, Bodo Hartke, Jogschies 2008: 122.

³²⁶ vgl. von Waaden 2017: S. 15.

³²⁷ vgl. Garrote, Moser Opitz, Ratz 2015: S. 25.

³²⁸ vgl. Garrote, Moser Opitz, Ratz 2015: S. 25f.

7.1.1 Ebene 1 – Basisfertigkeiten

Zum einem liegt auf dieser Ebene die angeborene Fähigkeit, verschiedene Mengen aufgrund ihrer unterschiedlichen Ausdehnung, Fläche, Volumen und Darstellung grob voneinander unterscheiden zu können. Zum anderen befindet sich auf dieser Ebene die Befähigung Zahlwörter zu lernen. Außerdem findet auf diesem Niveau auch der Erwerb der Zahlwortreihe mit dessen Zählprinzipien statt.³²⁹ Dennoch ist hier noch kein kardinales Verständnis vorhanden und das Kind besitzt eher einen relativ undifferenzierten Mengenbegriff. Im Fokus dieser Ebene steht die Ordinalität.³³⁰

Sobald diese Fähigkeiten ausgeprägt sind, entsteht das einfache Zahlverständnis auf Ebene 2.³³¹

7.1.2 Ebene 2 – einfaches Zahlverständnis

Diese Ebene beginnt mit ungefähr drei Jahren. Auf ihr findet die Verknüpfung von Zahlwörtern und Ziffern mit Mengen (Größen) statt. Während auf der ersten Ebene der Basisfertigkeiten Zahlwörter ohne exakte Mengenvorstellung aufgesagt werden, kommt es in der zweiten Phase zu einem weitaus überdachteren Prozess.³³² Ordinalität ist weiterhin vorhanden. Das Kind setzt große Zahlen mit „viel“ gleich und kleine mit „wenig“. Das äußert sich auch beim Zählen, denn „viel“ oder „wenig“ bedeutet „viel oder wenig zählen müssen“. Im Weiteren Verlauf entwickelt das Kind jedoch den Kardinalitätsbegriff.³³³ Ihr wird bewusst, dass das zuletzt genannte Zahlwort beim Zählprozess die Elemente der Menge genau angibt (präzises Anzahlkonzept und Größenrepräsentation). Des Weiteren sind die Kinder fähig, Zahlen miteinander zu vergleichen und entwickeln ein Verständnis für Mengenrelationen ohne Zahlbezug, für Zerlegen und Wiederausammenbauen von Mengen (Teil-Ganzes-Schema). Außerdem sind sie sich darüber bewusst, dass sich Mengen nur verändern, wenn etwas hinzugefügt oder weggenommen wird.³³⁴

³²⁹ vgl. Garrote, Moser Opitz, Ratz 2015: S. 25f.

³³⁰ vgl. Thiel 2014: S. 36ff.

³³¹ vgl. Garrote, Moser Opitz, Ratz 2015: S. 26.

³³² vgl. Krajweski, Schneider, Küspert 2013: S. 27f.

³³³ vgl. Thiel 2014: S. 37.

³³⁴ vgl. Krajweski, Schneider, Küspert 2013: S. 27f.

7.1.3 Ebene 3 – tiefes Zahlverständnis

Kinder erreichen dieses Niveau mit etwa vier bis sechs Jahren.³³⁵ Auf dieser Ebene wird das relationale Zahlverständnis erworben. Das bedeutet, dass Kinder eine Einsicht in die Zahlbeziehungen bekommen. Dazu zählt etwa die Kenntnis, dass eine Zahl aus mehreren kleineren Zahlen besteht, wie zum Beispiel „5 setzt sich aus 3 und 2 zusammen“. Ebenfalls sind die Kinder sich über die Differenz bewusst: „von 3 auf 5 fehlen 2“. Diese Ebene gilt auch als Basis für den Erwerb von arithmetischen Operationen, wie die Addition und die Subtraktion.³³⁶

7.2 Beziehung der einzelnen Ebenen

Die erste und zweite Ebene beinhalten die mathematischen Vorläuferfähigkeiten und gelten als Grundlage für einen erfolgreichen Einstieg in die Schulmathematik.³³⁷ Die zweite Ebene gilt als die Wesentlichste. Sie ist eine unabdingbare Voraussetzung für den Erwerb von mathematischen Grundoperationen.³³⁸

Das Entwicklungsmodell ist zwar hierarchisch aufgebaut, soll jedoch nicht als starre Entwicklungslogik betrachtet werden. Krajewski behauptet, dass die Repräsentationsform der Aufgabenstellung in der Mathematik dabei eine wesentliche Rolle spielt. Demnach kann eine Kompetenz beispielsweise handelnd schon erworben sein, aber noch nicht in abstrakter Form gekonnt werden.³³⁹

Das obige Entwicklungsmodell eignet sich als diagnostischer Raster, um die Entwicklung der mathematischen Fähigkeiten eines Kindes im Vorschulalter einzustufen zu können. Auch in der Grundschule oder in der Sekundarstufe wird dieses Modell zur Bestimmung von Entwicklungsschritten herangezogen.³⁴⁰

Ein weiterer wichtiger Aspekt, der vorkommen kann ist jener, dass sich Kinder für verschiedene Teile der Zahlwortreihe gleichzeitig auf unterschiedlichen Ebenen befinden können.³⁴¹

³³⁵ vgl. von Waaden 2017: S. 17.

³³⁶ vgl. Garrote, Moser Opitz, Ratz 2015: S. 27.

³³⁷ vgl. Krajewski, Schneider, Küspert 2013: S. 66.

³³⁸ vgl. Garrote, Moser Opitz, Ratz 2015: S. 27.

³³⁹ vgl. Garrote, Moser Opitz, Ratz 2015: S. 27.

³⁴⁰ vgl. von Waaden 2017: S. 17.

³⁴¹ vgl. von Waaden 2017: S. 17.

7.3 Modell der Zahl – Größen - Verknüpfung

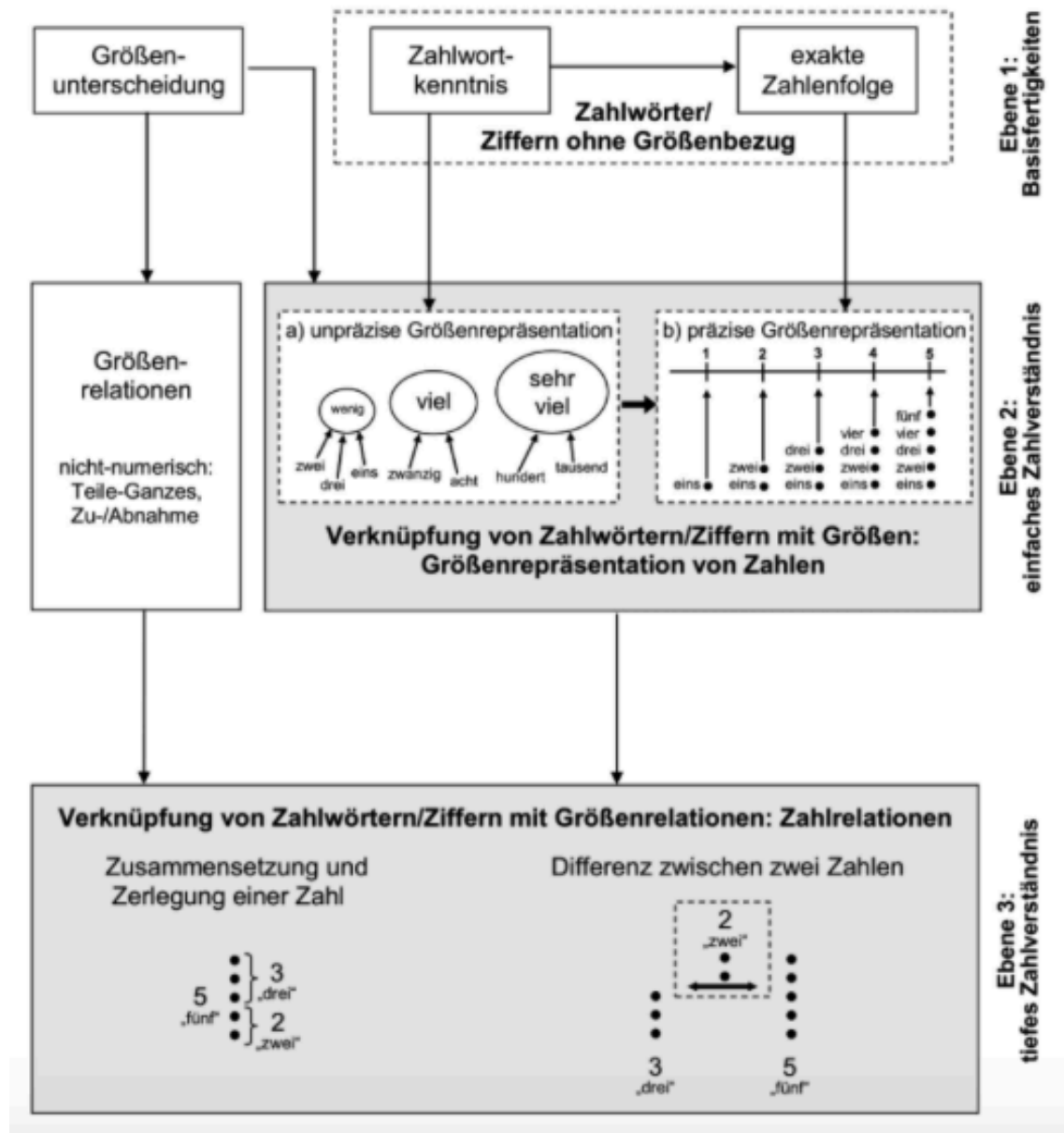


Abbildung 24: Zahl – Größen – Verknüpfung³⁴²

³⁴² Krajewski, Ennemoser 2013: S. 43.

8 Der Zahlbegriff in den ersten Unterrichtsjahren

Die obigen Untersuchungen von Piaget, Gelman und Gallistel, Fuson, Steffe und Krajewski haben ausführlich gezeigt, dass das Mathematiklernen nicht erst mit dem Eintritt in die Schule beginnt.³⁴³ Am Ende des Kindergartens oder der Vorschule haben Kinder bereits ein breites Wissen an mathematischen Vorkenntnissen aufgebaut. Sie haben bereits Erfahrung gesammelt und Methoden entwickelt, um gewisse Phänomene oder Situationen in der Umwelt erklären beziehungsweise schildern zu können. Genau auf diesem Grundwissen sollte die Schule aufbauen. Dennoch gibt es immer große Leistungsunterschiede. Nicht alle Kinder haben während des Kindergartens beziehungsweise der Vorschule, die selben mathematischen Entwicklungsschritte ausgeprägt und somit ist es oft bereits am Anfang des Unterrichts von der Lehrperson unbedingt notwendig auf die Unterschiede zu reagieren. Folgende mathematische Aktivitäten, die das Kind im Kindergarten bereits erwerben sollte, können von der Lehrperson vorausgesetzt werden:

- Nachvollziehen der Invarianz von Mengen
- Eins – zu – Eins – Zuordnung
- Klassifikation und Seriation
- Bedeutung von „mehr“ oder „weniger“³⁴⁴

Schipper geht in ihrem Werk 1996 auf die Unterschiede ein und macht auf die Heterogenität der SchülerInnen aufmerksam. Während manche Kinder ohne Probleme im Zahlraum 100 rechnen können, haben andere Schwierigkeiten bis 10 zu zählen. Diese unterschiedlich ausgeprägten Fertigkeiten machen sich vor allem in der Volksschule und in der 1. Klasse der Sekundarstufe 1 erkenntlich. Der Lehrperson und dem mathematischen Anfangsunterricht wird zugeschrieben, die verschieden ausgeprägten Vorkenntnisse der Kinder aufzunehmen und mit diesen zu arbeiten, um den Zahlbegriff in seiner Ganzheit und Komplexität zu entfalten.³⁴⁵

Ziel des mathematischen Anfangsunterrichts ist, dass Kinder am Ende des 1. Schuljahres folgende Kompetenzen beherrschen:

- die Zahlwortreihe bis mindestens 20 automatisiert aufsagen können

³⁴³ vgl. von Waaden 2017: S. 26.

³⁴⁴ vgl. Hasemann 2003: S. 17f.

³⁴⁵ vgl. von Waaden 2017: S. 26f.

- simultane Erfassung der Zahlen bis 5
- fehlerfreies Abzählen von mindestens 20 beliebig angeordneten Objekten
- Zahlzerlegungen bis 20
- Lösen von Aufgaben über Halbieren und Verdoppeln bis 20³⁴⁶

³⁴⁶ vgl. von Waaden 2017: S. 27.

9 Conclusio

Die in der Diplomarbeit angeführten Untersuchungen weisen deutlich darauf hin, dass es eine Vielzahl an unterschiedlichen Theorien über den Zahlbegriff und dessen Entwicklung beim Kind in der Forschungsgemeinde gibt. Die verschiedenen Ansätze zur Zahlbegriffs- und Zählentwicklung helfen dabei, die Entstehung der mathematischen Fähigkeiten bei Babys und Kleinkindern besser nachvollziehen zu können.

Dennoch gibt es keine Untersuchung über den Zahlbegriff, die als vollkommen „richtig“ oder „falsch“ gewertet wird. Obwohl jede/r ForscherIn seinen/ihren eigenen Standpunkt zu der Entwicklung des Zahlbegriffs vertritt, ist trotz allem immer ein Bezug auf Untersuchungen anderer TheoretikerInnen ersichtlich. Daraus ist zu folgern, dass jede Studie einen Beitrag zur Erklärung der Entstehung des Zahlbegriffs leistet.

In meiner Diplomarbeit habe ich zunächst die etwas älteren Forschungsansätze von Piaget, Gelman und Gallistel und Fuson präsentiert. Grundsätzlich gelten diese Untersuchungen in der Literatur und für spätere ZahlbegriffsforscherInnen als Basis für die darauffolgenden Erforschungen. Besonders Leslie Steffe bezieht sich in seinen Forschungen auf Karen Fuson und erweitert dessen Theorie. Krajewski präsentiert hingegen einen zeitgemäßen Forschungsansatz, der dem derzeitigen Bildungssystem am ehesten gerecht wird.

Letztendlich wird durch die obigen Untersuchungen ersichtlich, dass sich der Zahlbegriff und die Zählentwicklung schrittweise beim Kind entfalten. Grundlegend für diesen Erwerb ist das aktive Handeln des Kindes. Begünstigt wird dieser Entwicklungsprozess durch Nachahmung und die Umwelt, in der sich das Kind befindet. Nach und nach lernt das Kind mathematische Handlungen zu verstehen bis sich der Zahlbegriff letztendlich in seiner Ganzheit erschließt und das Zählen beherrscht wird.

10 Quellenverzeichnis

10.1 Bücher

Berman, G. N. (1953): Wie die Menschen zählen lernen. Berlin: Aufbau Verlag.

Borchert, J.; Hartke, Bodo; Jogschies, Peter (2008): Frühe Förderung entwicklungsauffälliger Kinder und Jugendlicher. Stuttgart: Verlag W. Kohlhammer.

Bundschuh, K. (1995). Pädagogische Psychologie. München. Basel: UTB Reinhardt.

Brainerd, C. J. (1978): Learning research and Piagetian theory: In: Siegel, L.S.; Brainerd, Ch.J.: Alternatives to Piaget. Critical essays on the theory. New York. San Francisco. London.

Euclid (1926): The Thirteen Books of Euclid's Elements. Cambridge: The University Press.

Frydman, O. (1995a): The concept of number and the acquisition of counting concepts: The "when", the "how", and the "what" of it. In: Cahiers de Psychologie Cognitive 14.

Fuson, K. C. (1988): Children's counting and Concepts of Number. New York: Springer – Verlag.

Ganser, B. (2013): Sicher zur Schulfähigkeit. Alle Vorläuferfähigkeiten in einem testen und gezielt fördern. 1. Klasse/ Vorschule. Donauwörth: Auer Verlag.

Garrote, A.; Moser Opitz, E.; Ratz, C. (2015): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderungsschwerpunkt geistige Entwicklung: eine Querschnittstudie. Zürich: University of Zürich.

Gelman, R.; Gallistel C.R. (1978): The Child's Understanding of Number. Cambridge. Massachusetts. London: Harvard University Press.

Gelman, R.; Meck, B. (1992): Early principles aid initial but not later conceptions of number. In: Bideaud, J.: Pathway to number. Hillsdale. New Jersey. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Gericke, H. (1970): Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim: Bibliographisches Institut AG.

Ginsburg, H.; Oppen, S. (1998). Piagets Theorie der geistigen Entwicklung. Stuttgart: Klett-Cotta.

Hasemann, K. (2003). Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg. Berlin: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.

Hildenbrand, C. (2016): Förderung früher mathematischer Kompetenzen. Eine Interventionsstudie zu den Effekten unterschiedlicher Förderkonzepte. Göttingen: Waxmann Verlag GmbH.

Ifrah, G. (1992). Die Zahlen. Die Geschichte einer großen Erfindung. Frankfurt. New York: Campus Verlag.

Krajewski, K.; Ennemoser M. (2013): Entwicklung und Diagnostik der Zahl- Größen – Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In Hasselhorn, M; Heinze, A, Schneider, W; Trautwein, U: Diagnostik mathematischer Kompetenzen. Tests & trends. Göttingen: Hogrefe Verlag.

Krauthausen, G.; Scherer, P. (2008): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Leuders, J. (2011): Förderung der Zahlbegriffsentwicklung bei sehenden und blinden Kindern. Empirische Grundlagen und didaktische Konzepte. Wiesbaden: Springer Verlag.

Moser Opitz, E. (2008). Zählen- Zahlbegriff - Rechnen: Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. Stuttgart. Bern. Wien: Haupt Verlag.

Müller, G.; Wittmann, E. Ch. (1984): Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele. Inhalte. Prinzipien. Beispiele. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Piaget, J.; Inhelder, B. (1981). Die Psychologie des Kindes. Frankfurt: DTV.

Piaget, J.; Inhelder, B. (1973a). Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen. Teil 1. Düsseldorf: Schwann.

Piaget, J.; Inhelder, B. (1973b). Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen. Teil 2. Düsseldorf: Schwann.

Piaget, J.; Szeminska, A. (1975): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Rechtsteiner – Merz, C. (2013): Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechenlernen zeigen. Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Reiss, K.; Hammer, C. (2013): Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe. Berlin: Birkhäuser.

Schneider, W.; Küspert, P.; Krajewski, K. (2013): Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen. Paderborn: Ferdinand Schöningh.

Steffe, L.; von Glasersfeld, E.; Richards, J.; Cobb, P. (1983): Children's counting Types. Philosophy, theory and application. New York: Praeger.

Thiel, A. (2014): Zahlbegriffsentwicklung und Zehnerübergang. Voraussetzungen und Probleme im mathematischen Anfangsunterricht. Hamburg: Diplomica Verlag.

Von Waaden, S. (2017): Mathematiklernen von Risikokindern in der Jahrgangsmischung. Auswirkung von Handlungs- und Lageorientierung auf die Leistungsentwicklung. Wiesbaden: Springer - Verlag.

Wember, F. B. (1986). Piagets Bedeutung für Lernbehindertenpädagogik. Heidelberg: Edition Schindele.

Wynn, K. (1990): Children's understanding of counting. IN: Cognition 36.

10.2 Internetseiten

<http://www.lern-psychologie.de/kognitiv/piaget.htm> letzter Zugriff am 20. April 2018

11 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Stufen der kognitiven Entwicklung	21
Abbildung 2: einfache oder additive Klassifikation	26
Abbildung 3: mehrfache oder multiplikative Klassifikation	26
Abbildung 4: Reihenbildung	27
Abbildung 5: Reihenbildung und Äquivalenz	28
Abbildung 6: Umschüttversuch	30
Abbildung 7: Eins - zu - Eins – Zuordnung	32
Abbildung 8: Rangstufen	33
Abbildung 9: Zahlbegriff als Produkt von logischen Operationen	35
Abbildung 10: Beherrschung des Eindeutigkeitsprinzips	44
Abbildung 11: Prinzip der stabilen Ordnung	47
Abbildung 12: Beherrschung des Kardinalprinzips	48
Abbildung 13: Ergebnisse über das Experiment der Irrelevanz der Anordnung	52
Abbildung 14: Zusammenhänge der verschiedenen Zahlaspekte	59
Abbildung 15: Fehlerhafte Zuordnung von Zahlwort und Zeigen	64
Abbildung 16: Fehlerhafte Zuordnung von Zeigen und Objekt	65
Abbildung 17: Fehlerhafte Zuordnung beider Fehlertypen	66
Abbildung 18: Prozenträte von Kindern, die Fehler bei Wort – Zeigeakt und Zeigeakt – Objekt je nach Altersgruppe machen	67
Abbildung 19: Prozentsatz der Fehlerplatzierung	68
Abbildung 20: Fehlerrate in Bezug auf die Anordnung der Objekte	70
Abbildung 21: Zusammenhang zwischen Zählen und kardinaler Bedeutung	75

Abbildung 22: inkorrekte Antworten je nach Alter	78
Abbildung 23: Die Entwicklung des Zählens nach Steffe	87
Abbildung 24: Zahl – Größen – Verknüpfung	96

12 Abstract

12.1 German Version

Die Diplomarbeit gibt einen Einblick in die Zahlbegriffs- und Zählentwicklung bei Kindern. Das erste Kapitel widmet sich den historischen Grundlagen. Es schildert die verschiedenen Zahlanschauungen der alten Ägypter, Babylonier und Griechen in der Vergangenheit. Weiters präsentiere ich in diesem Teil meiner Arbeit die Grundlagen der Zahlbegriffsentwicklung und beschäftige mich damit, ob der Zahlbegriff und die Zählentwicklung bei Kindern bereits angeboren ist oder erst erlernt werden muss. Darüberhinaus gebe ich Themen- und Inhaltsbereiche an, die während der Entwicklung des Zahlbegriffs bei Kindern ausgeprägt werden sollen.

Um nun genauer auf die Bildung der Zählkompetenz und des Zahlbegriffs einzugehen, habe ich mir fünf Forschungen ausgesucht, die sich mit diesem Thema beschäftigen. Ich präsentiere zunächst die wohl bekannteste Theorie über den Zahlbegriff, welche Jean Piaget zu Grunde liegt. Gefolgt von den Forschungsergebnissen von Gelman und Gallistel, Fuson, Steffe und Krajewski erschließt sich im Zuge meiner Arbeit die Entstehung des Zahlbegriffs und der Zählentwicklung bei Kindern. Ich gebe einen Einblick in die jeweiligen Untersuchungen und präsentiere die daraus resultierenden Theorien.

Am Ende meiner Diplomarbeit befasse ich mich mit der Einführung des Zahlbegriffs in der Schule. Ziel dieses Kapitels ist, die mathematischen Vorraussetzungen, die von Kindern beim Schuleintritt verlangt werden, zu ermitteln. Außerdem weise ich darauf hin, welche Ziele der mathematische Anfangsunterricht hat.

12.2 English Version

This thesis gives insights on the concepts of numbers and the evolution of counting in children. The first chapter is dedicated to the historic foundation. It depicts the different views on numbers of the ancient Egyptians, Babylonians and Greek in the past. What is more, in this part of my work I will present the basis of the understanding of numeracy and analyze whether this process is embedded in the child's subconscious or the necessary skills have to be acquired. Additionally, I will state subject areas that ought to mature during the aforementioned development in children.

In order to immerse myself deeper into the competence of counting, I have elected five studies that engage in that topic. In the first place, I will set forth probably the most renowned theory about the concept of numbers, conceived by Jean Piaget. Subsequent to the findings of Gelman and Gallistel, Fuson, Steffe and Krajewski, the origin of the understanding of numeracy in children emerges in my thesis. I will grant insight into the examinations respectively and explicate the resulting theories.

In conclusion of my work, I will attend to the introduction of the concepts mentioned above in the education system. The objective of this chapter is to determine the mathematical prerequisites required at the start of school. Furthermore, I will indicate the aims of initial mathematic education.

