



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT/ DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit/ Title of the Diploma Thesis

„Extreme Bedingungen in der Wirtschaft – ein  
Unterrichtsvorschlag für mehrdimensionale  
Extremwertberechnung mit Anwendungsaufgaben aus der  
Wirtschaft“

verfasst von/ submitted by

Tina Wallnberger

angestrebter akademischer Grad/ in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

A 190 344 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Englisch, UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Mitbetreut von / Co-Supervisor:



## **Danksagung**

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Personen herzlichst bedanken, die mich im Laufe meines Studiums unterstützt und motiviert haben. Diese Menschen tragen immens dazu bei, dass ich mein Studium als besondere und schöne Zeit in Erinnerung behalten werde.

Zuerst möchte ich meinen Dank an meinem Betreuer ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith aussprechen. Er hat nicht nur bei der Betreuung dieser Diplomarbeit großartige Arbeit geleistet, sondern auch bei der Leitung diverser Lehrveranstaltungen meines Studiums. Er nahm sich stets Zeit für meine Anliegen und unterstützte mich mit vielen hilfreichen Ratschlägen und konstruktiven Ideen.

Mein nächster Dank geht an meine Eltern, die für mich wichtige Wegbegleiter während meines Studiums waren. Sie ermöglichten mir erst diese kostspielige Ausbildung und stellten eine große seelische Unterstützung für mich dar.

Dank gebührt auch meinen Freunden und meinem Freund, die mir einiges an Zeit und Geduld entgegenbrachten, um mir in schwierigeren Phasen zur Seite zu stehen. Sie hatten immer ein offenes Ohr für mich und fanden die richtigen motivierenden Worte, die ich brauchte.

Zum Schluss möchte ich mich bei jenen Studienkollegen und Studienkolleginnen bedanken, die mir mit einer außerordentlichen Kollegialität und Freundlichkeit begegnet sind. Diese Menschen tragen ebenfalls dazu bei, dass ich mit meiner Studienzeit viele schöne Momente verbinde.



## **Eidesstattliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, am 19. April 2018

Tina Wallnberger



# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Einleitung .....                                                                                                                    | 9  |
| 2. Lehrplanbezug.....                                                                                                                  | 10 |
| 2.1. Lehrplanbezug HTL-Übersicht Cluster 2-5 .....                                                                                     | 10 |
| 3. Schulbuchanalyse .....                                                                                                              | 12 |
| 3.1. Einstieg in das Thema .....                                                                                                       | 13 |
| 3.2. Die geometrische Veranschaulichung und Interpretation von Funktionen in<br>zwei Variablen als Fläche im Raum.....                 | 15 |
| 3.3. Die Berechnung von partiellen Ableitungen.....                                                                                    | 16 |
| 3.4. Das totale Differential und die Fehlerabschätzung mittels des Differentials ..                                                    | 20 |
| 3.5. Die Lineare Fehlerfortpflanzung und der maximale Fehler .....                                                                     | 23 |
| 4. Extremwertberechnung in der Fachmathematik.....                                                                                     | 26 |
| 4.1. Ableitung im Mehrdimensionalen.....                                                                                               | 26 |
| 4.1.1. Spezialfall im Zweidimensionalen .....                                                                                          | 27 |
| 4.1.2. Der allgemeine Fall im Mehrdimensionalen .....                                                                                  | 28 |
| 4.2. Extremwertbestimmung bei Funktionen in mehreren Variablen ohne<br>Nebenbedingung .....                                            | 29 |
| 4.2.1. Hesse Matrix.....                                                                                                               | 30 |
| 4.2.2. Das Sylvester-Kriterium.....                                                                                                    | 31 |
| 4.2.3. Bestimmung von Eigenwerten .....                                                                                                | 31 |
| 4.2.4. Zusammenhang Definitheit der Hesse Matrix in einem kritischen Punkt und<br>das Extremwertverhalten des kritischen Punktes ..... | 33 |
| 4.2.5. Globale Extrema.....                                                                                                            | 34 |
| 4.3. Extremwertbestimmung bei Funktionen mit mehreren Variablen mit einer<br>Nebenbedingung .....                                      | 34 |
| 4.4. Optimierung bei Funktionen in mehreren Variablen mit Nebenbedingung ...                                                           | 36 |
| 5. Mehrdimensionale Extremwertberechnung bei wirtschaftlichen Anwendungen ..                                                           | 37 |
| 5.1.1. Bedeutung der ersten partiellen Ableitungen in der Wirtschaft.....                                                              | 37 |
| 5.1.2. Optimale Produktionsmengen .....                                                                                                | 39 |
| 5.1.2.1. Ohne Nebenbedingung.....                                                                                                      | 39 |
| 5.1.2.2. Mit Nebenbedingung .....                                                                                                      | 43 |
| 5.1.3. Standortbestimmung .....                                                                                                        | 45 |
| 6. Unterrichtsvorschlag für die Extremwertbestimmung bei Funktionen in mehreren<br>Variablen .....                                     | 47 |
| 6.1. Einleitung .....                                                                                                                  | 47 |
| 6.2. Ziele .....                                                                                                                       | 48 |

|                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------|----|
| 6.3. Voraussetzungen .....                                      | 48 |
| 6.4. Übersicht der Einheiten .....                              | 50 |
| 6.4.1. Erste Einheit .....                                      | 50 |
| 6.4.2. Zweite Einheit.....                                      | 52 |
| 6.4.3. Dritte Einheit .....                                     | 53 |
| 6.4.4. Vierte Einheit.....                                      | 54 |
| 6.4.5. Fünfte Einheit und sechste Einheit.....                  | 54 |
| 6.5. Weiterführende Überlegungen zum Unterrichtsvorschlag ..... | 56 |
| Quellenverzeichnis.....                                         | 59 |
| Literatur .....                                                 | 59 |
| Online-Quellen .....                                            | 59 |
| Tabellenverzeichnis .....                                       | 61 |
| Abbildungsverzeichnis .....                                     | 63 |
| Anhang.....                                                     | 65 |
| Stundenbilder.....                                              | 66 |
| Einheit 1: Stundenbild.....                                     | 66 |
| Einheit 2: Stundenbild.....                                     | 68 |
| Einheit 3: Stundenbild.....                                     | 70 |
| Einheit 4: Stundenbild.....                                     | 71 |
| Einheit 5 und Einheit 6: Stundenbild.....                       | 73 |
| Arbeitsblätter.....                                             | 74 |
| Einheit 1-Arbeitsblatt .....                                    | 74 |
| Einheit 2-Arbeitsblatt .....                                    | 77 |
| Einheit 3-Arbeitsblatt .....                                    | 79 |
| Einheit 4-Arbeitsblatt .....                                    | 81 |
| Einheit 5 und Einheit 6-Arbeitsblatt.....                       | 84 |
| Lösungen .....                                                  | 90 |
| Abstract-deutsche Fassung .....                                 | 93 |
| Abstract-englische Fassung .....                                | 95 |

# 1. Einleitung

Das Konzept von funktionalen Zusammenhängen ist eines der fundamentalsten Ideen, die im Laufe der langjährigen Geschichte der Mathematik entwickelt und immer wieder erweitert wurden. Eine wichtige Erweiterung stellt die Betrachtung von Funktionen in mehreren Variablen dar. Die Differential- und Integralrechnung von Funktionen in mehreren Variablen findet nicht nur Anwendung in der Fachmathematik, sondern auch in unzähligen naturwissenschaftlichen und wirtschaftlichen Bereichen. Insbesondere ist die Extremwertberechnung von Funktionen in mehreren Variablen ein Thema der Differentialrechnung, welches in vielen innermathematischen und außermathematischen Kontexten relevant ist.

Vom derzeitigen Standpunkt aus spielen Funktionen in mehreren Variablen in den Lehrplänen der allgemeinbildenden höheren Schulen in Österreich keine und in den berufsbildenden höheren Schulen kaum eine Rolle. Man beschränkt sich hier zumeist auf Funktionen mit einer Veränderlichen. Die Auseinandersetzung mit der Extremwertberechnung von Funktionen im Mehrdimensionalen bietet eine herausragende Möglichkeit den Horizont der Schüler und Schülerinnen in funktionalen Zusammenhängen zu erweitern.

Diese Diplomarbeit befasst sich mit der Frage, wie eine Einführung der Extremwertberechnung von Funktionen in mehreren Variablen in der Oberstufe erfolgen kann. Ein besonderer Fokus wird auf ökonomisch motivierte Extremwertfragestellungen gelegt, um den Schülern und Schülerinnen außermathematische Anwendungen in der Praxis näher zu bringen. Es werden die Lehrpläne der verschiedenen Schultypen der zweiten Sekundarstufe und Schulbücher auf fachmathematische Inhalte bezüglich Funktionen in mehreren Variablen im Allgemeinen untersucht. Die Arbeit beinhaltet eine Übersicht über die fachmathematische Theorie hinsichtlich der Extremwertberechnung in mehreren Variablen und präsentiert einige wirtschaftliche Anwendungen dieses mathematischen Themengebiets. Das Kernstück dieser Arbeit umfasst einen Unterrichtsvorschlag mit ausgearbeiteten Stundenbildern und dazugehörigen Materialien.

## 2. Lehrplanbezug

Ein Blick in die Lehrpläne der verschiedenen österreichischen Schultypen der zweiten Sekundarstufe offenbart, dass multivariable Funktionen allgemein im österreichischen Schulsystem kaum behandelt werden. Im Oberstufenlehrplan der AHS im Unterrichtsgegenstand Mathematik stößt man auf den funktionalen Begriff ausschließlich in einer Variablen. Bei den berufsbildenden höheren Schulen, welche grundsätzlich bezüglich des Unterrichtsgegenstandes Angewandte Mathematik in neun Clustern unterteilt sind, findet man in den Lehrplänen des Gegenstands Angewandte Mathematik der Cluster sechs bis neun zu denen unter anderem die Schultypen HLW, BAFEP und HAK gehören, den funktionalen Begriff ausschließlich in einer Variablen. Lediglich die Lehrpläne der Cluster zwei bis fünf, denen einige spezielle Zweige der HTL zugeteilt sind, enthalten manche Aspekte von Funktionen mit mehreren Veränderlichen. Die mehrdimensionale Extremwertberechnung befindet sich jedoch nicht unter diesen Aspekten.

### 2.1. Lehrplanbezug HTL-Übersicht Cluster 2-5

Bei den folgenden Spezialisierungen der HTL's, welche den Clustern zwei, drei, vier und fünf angehören, sind Teilaspekte in den Lehrplänen zum Differenzieren von multivariablen Funktionen vorhanden (BIFIE 2010: 21):

*Tabelle 1-Übersicht der Cluster zwei bis fünf und den dazugehörigen HTL Zweigen*

| Cluster | HTL Zweige                                                                             |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 2       | Elektrotechnik und Elektronik                                                          |
| 3       | Maschineningenieurwesen, Mechatronik, Werkstoffingenieurwesen und Wirtschaftsingenieur |
| 4       | Informationstechnologie, Elektronische Datenverarbeitung und Organisation              |
| 5       | Chemie, Chemieingenieurwesen und Lebensmitteltechnologie                               |

Stellvertretend für jeden Cluster werden Lehrplan-Auszüge von jeweils einer HTL Spezialisierung angegeben.

Cluster 2 - Lehrplan der höheren Lehranstalt für Elektrotechnik

IV. Jahrgang:

7. Semester – Kompetenzmodul 7:

Bildungs- und Lehraufgabe:

[...]

Bereich Funktionale Zusammenhänge

- Funktionen in zwei Variablen geometrisch als Flächen im Raum interpretieren und anhand von Beispielen veranschaulichen.

Bereich Analysis

[...]

- partielle Ableitungen berechnen und mit Hilfe des Differentials Fehler abschätzen.

Lehrstoff:

Bereich Funktionale Zusammenhänge

Funktionen mehrerer Variablen (Darstellung von Funktionen von zwei Variablen).

Bereich Analysis

[...]

Funktionen mehrerer Variablen:

Partielle Ableitungen; totales Differential, lineare Fehlerfortpflanzung und maximaler Fehler.

(BMB 2015: 8)

### Cluster 3 - Lehrplan der höheren Lehranstalt für Mechatronik

IV. Jahrgang:

7. Semester – Kompetenzmodul 7:

Bildungs- und Lehraufgabe:

[...]

Bereich Fehlerrechnung

- Funktionen in zwei Variablen geometrisch als Flächen im Raum interpretieren und anhand von Beispielen veranschaulichen;

- partielle Ableitungen berechnen und mit Hilfe des Differentials Fehler abschätzen.

[...]

Lehrstoff:

Bereich Fehlerrechnung

Funktionen mehrerer Variablen:

Darstellung von Funktionen von zwei Variablen; partielle Ableitungen; totales Differential, lineare Fehlerfortpflanzung und maximaler Fehler.

(BMB 2015: 7)

### Cluster 4 - Lehrplan der höheren Lehranstalt für Informationstechnologie

IV. Jahrgang:

7. Semester – Kompetenzmodul 7:

Bildungs- und Lehraufgabe:

[...]

Bereich Integralrechnung

[...]

- Funktionen in zwei Variablen geometrisch als Flächen im Raum interpretieren und anhand von Beispielen veranschaulichen;

- partielle Ableitungen berechnen und mit Hilfe des Differentials Fehler abschätzen;

[...]

Lehrstoff:

[...]

Funktionen mehrerer Variablen:

Darstellung von Funktionen von zwei Variablen; partielle Ableitungen; totales Differential, lineare Fehlerfortpflanzung und maximaler Fehler.

(BMB 2015: 11)

#### Cluster 5 - Lehrplan der höheren Lehranstalt für Chemieingenieure

IV. Jahrgang:

7. Semester – Kompetenzmodul 7:

Bildungs- und Lehraufgabe:

[...]

Bereich Fehlerrechnung

- Funktionen in zwei Variablen geometrisch als Fläche im Raum interpretieren;
- partielle Ableitungen berechnen und mit Hilfe des Differentials Fehler abschätzen.

[...]

Lehrstoff:

Bereich Fehlerrechnung

Funktionen mehrerer Variablen:

Darstellung von Funktionen von zwei Variablen; partielle Ableitungen; totales Differential, lineare Fehlerfortpflanzung und maximaler Fehler.

(BMB 2015: 14-15)

Zusammenfassend behandeln alle exemplarisch ausgewählten Lehrpläne die folgenden Punkte:

1. Die geometrische Veranschaulichung und Interpretation von Funktionen in zwei Variablen als Fläche im Raum
2. Die Berechnung von partiellen Ableitungen
3. Das totale Differential und die Fehlerabschätzung mittels des Differentials
4. Die Lineare Fehlerfortpflanzung und den maximalen Fehler

Dieser Lehrstoff ist in allen Lehrplänen für das siebte Semester, also für den Beginn der vierten Jahrgangsstufe der HTL's vorgesehen. Die Lehrpläne unterscheiden sich lediglich in den Bereichen denen die oben genannten vier Inhaltspunkte zugeordnet werden.

### 3. Schulbuchanalyse

Die Schulbücher sind bekanntlich die Realisierung der gesetzlich vorgeschriebenen Lehrpläne. Daher ist eine genaue Analyse dieser essentiellen Unterrichtsmaterialien von besonderer Bedeutung für diese Arbeit. Um einen guten Überblick auf die dargebotenen Inhalte der Schulbücher zu schaffen, werden zwei der am häufigsten verwendeten Bücher in HTL's systematisch nach den bereits fünf herausgearbeiteten Punkten in den

Lehrplänen analysiert. Darüber hinaus wird der erste Einstieg zu Funktionen in mehreren Variablen betrachtet.

### 3.1. Einstieg in das Thema

Zur ersten Einführung von Funktionen in zwei Variablen werden folgende drei Beispiele für diese Art von funktionaler Abhängigkeit im Schulbuch *Mathematik HTL 4/5* aufgeführt:

Reellwertige Funktionen, deren Definitionsbereich eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  ist, treten häufig auf.

- Die Multiplikation von reellen Zahlen ordnet jedem Zahlenpaar  $(a, b)$  die Zahl  $a * b$  zu. Wir können sie daher als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  betrachten: Mult:  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit Mult  $(a, b) = a * b$
- Ein Obstbauer bietet Äpfel und Birnen an, 1 kg Äpfel um 2€ und 1 kg Birnen um 3€. Wenn es keinen Rabatt und keine Sonderaktion gibt, kosten  $a$  kg Äpfel und  $b$  kg Birnen insgesamt  $2a + 3b$  Euro. Der Preis für einen Einkauf bei diesem Obstbauern wird durch die Funktion  $p: (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $p(a, b) = 2a + 3b$  beschrieben.
- Sind zwei Widerstände mit  $R_1$  und  $R_2$  Ohm parallel geschaltet, dann ist der Gesamtwiderstand  $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  Ohm. Dieser Zusammenhang wird durch die Funktion  $w: (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $w(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  beschrieben.  
(*Mathematik HTL 4/5* 2014: 244)

Das dritte von den drei aufgelisteten Beispielen stammt aus dem naturwissenschaftlichen Bereich der Physik und der Elektrotechnik, mit dem die Schüler und Schülerinnen aus vielen Zweigen von der HTL vertraut sind. Aus dem Alltag herausgenommen ist das zweite Beispiel, welches für Schüler und Schülerinnen aller Schultypen geeignet ist zum Kennenlernen von Funktionen in zwei Variablen. Das erste Beispiel der Multiplikation von zwei Zahlen ist ebenfalls für alle Schüler und Schülerinnen unabhängig des Schultyps geeignet.

Als Einführungsbeispiel wird im Schulbuch *Angewandte Mathematik IV/V* die gefühlte Temperatur benutzt:

Sie haben Folgendes im Winter sicher schon erlebt: Man zittert am ganzen Körper, obwohl das Thermometer eher gemäßigte Temperaturen anzeigt: Sie sind ein Opfer des Windchills geworden - bei starkem Wind fühlt sich die Luft kälter an. Bei der Wettervorhersage gibt man daher oft auch die gefühlte Temperatur an. Sie hängt im Wesentlichen von zwei Faktoren ab: von der Lufttemperatur und von der Windgeschwindigkeit. In der Mathematik nennt man so etwas eine Funktion mit zwei Variablen.

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 69)

Dieses beschriebene Phänomen stellt ein Beispiel aus dem Alltag dar, unter dem sich die Schüler und Schülerinnen leicht etwas vorstellen können.

Definiert werden reelle Funktionen in zwei Variablen als Zuordnung im Schulbuch *Angewandte Mathematik IV/V*:

Unter einer reellen Funktion mit zwei unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$  versteht man eine Vorschrift, die jedem Zahlenpaar  $(x, y)$  genau eine reelle Zahl  $z$  zuordnet.

Dabei gilt, dass  $x$  und  $y$  die unabhängigen Variablen und  $z$  die abhängige Variable ist. Oft wird die Schreibweise  $z = f(x, y)$  verwendet.  
(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 69)

Als weitere Beispiele für derartige Funktionen nennt *Angewandte Mathematik HTL IV/V* (2015: 69) aus der Physik die Wegfunktion  $s(v, t)$  und die Flächenfunktion eines Rechtecks  $A(a, b)$ .

Nach drei Einführungsbeispielen werden im Schulbuch *Mathematik HTL 4/5* reellwertige Funktionen in zwei Variablen folgendermaßen definiert: „Eine Funktion von einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  heißt reellwertige Funktion in zwei Variablen“ (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 244).

Weiters werden drei verschiedene Typen von Funktionen mit zwei Veränderlichen und den Graphen solcher Funktionen in *Mathematik HTL 4/5* definiert:

Zu je drei reellen Zahlen  $a, b, c$  erhalten wir die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = ax + by + c$ . Eine solche Funktion nennen wir eine lineare Funktion in zwei Variablen

Zu je zwei natürlichen Zahlen  $m$  und  $n$  erhalten wir die Funktion  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x, y) = x^m + y^n$ . Wir nennen sie Potenzfunktion in zwei Variablen mit Exponenten  $m$  und  $n$ .

Summen von Vielfachen von Potenzfunktionen, wie zum Beispiel die Funktion  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x, y) = 2 + 3x - y + 4y^2 + 3x^3y^2$ , nennen wir Polynomfunktionen (oder einfach Polynome) in zwei Variablen.

Der Graph einer Funktion  $f$  in zwei Variablen ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$ , und zwar  $\{(x, y, f(x, y)) | x, y \in \mathbb{R}\}$ .  
(*Mathematik HTL 4/5* 2014: 244)

Der Graph von Funktionen in zwei Variablen wird im Buch *Mathematik HTL 4/5* aufgefasst als Lösungsmenge der Funktionsgleichung:

Wegen  $\{(x, y, f(x, y)) | x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) | x, y \in \mathbb{R}, z = f(x, y)\}$  ist der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösungsmenge der Gleichung  $z = f(x, y)$ , also der Aufgabe „Finde alle Zahlentripel  $(x, y, z)$  mit  $z = f(x, y)$ “. Diese Gleichung nennen wir die Gleichung des Graphen der Funktion  $f$  oder kurz die Gleichung der Funktion  $f$ .  
(*Mathematik HTL 4/5 2014: 245*)

Zusätzlich wird noch darauf hingewiesen, dass statt  $x, y$  und  $z$  noch andere Variablen verwendet werden können (*Mathematik HTL 4/5 2014: 245*). Diesen Hinweis findet man nicht im Schulbuch *Angewandte Mathematik IV/V*.

### 3.2. Die geometrische Veranschaulichung und Interpretation von Funktionen in zwei Variablen als Fläche im Raum

Zur Darstellung von Funktionen in zwei Variablen findet man bei *Mathematik HTL 4/5* einerseits, den Graphen solcher Funktionen, welcher mittels CAS Programmen erhalten werden kann (*Mathematik HTL 4/5 2014: 244-248*) und andererseits, die Darstellung durch Niveaumengen (*Mathematik HTL 4/5 2014: 244-248*).

Niveaumengen werden folgendermaßen in *Mathematik HTL 4/5* definiert:

Mit jeder Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sind viele Gleichungen mit zwei Unbekannten verbunden. Für jede reelle Zahl  $c$  ist die Aufgabe „Finde alle Zahlenpaare  $(x, y)$  mit  $f(x, y) = c$ “ eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Ihre Lösungsmenge heißt Niveaumenge von  $f$  zum Niveau  $c$ . Anstatt durch ihren Graphen (in  $\mathbb{R}^3$ ) kann man die Funktion auch durch einige Niveaumengen (in  $\mathbb{R}^2$ ) veranschaulichen.  
(*Mathematik HTL 4/5 2014: 245*)

Hier werden die Niveaumengen ausschließlich für Funktionen mit zwei Variablen definiert.

Als erste Anwendung von Niveaumengen dienen in *Mathematik HTL 4/5* (2014: 245-246) Karten für Wandertouren, welche die Niveaumengen einer Landschaft, sogenannte Höhenlinien, darstellen. Ganz anders im Schulbuch *Angewandte Mathematik HTL IV/V*. Hier verweist man auf die Möglichkeit, eine Funktion mit zwei Variablen im zweidimensionalen Koordinatensystem durch Höhenlinien darzustellen und gibt eine kurze Anleitung zur Erstellung von Höhenlinien, jedoch favorisiert man hier die Darstellung der Höhenlinien mit der heute zur Verfügung stehenden Technologie:

Die Darstellung von Funktionen im dreidimensionalen Raum ist ohne Technologie oft sehr aufwendig und unübersichtlich. Daher kann eine Funktion  $z = f(x, y)$  auch im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem durch

Höhen- oder Schichtlinien dargestellt werden, wie Sie es vielleicht von Landkarten kennen.

Um die Funktion  $z = f(x, y)$  im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem darzustellen wählt man jeweils für  $z$  einen konstanten Wert und zeichnet die entsprechende Höhenlinie. Danach wählt man für  $z$  einen anderen Wert und zeichnet wieder eine Höhenlinie. Durch Technologie ist diese sehr aufwendige Darstellung jedoch aus der Mode gekommen.  
(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 72)

Es folgen im Schulbuch *Angewandte Mathematik IV/V* keine weiteren Beispiele oder Arbeitsaufträge zu den Niveaumengen bzw. den Höhenlinien. Dahingegen wird in *Mathematik HTL 4/5* ein stärkerer Fokus auf diese Darstellungsart gelegt. *Mathematik HTL 4/5* (2014: 245-248) enthält viele Aufgaben, bei denen eine Funktion in zwei Variablen gegeben ist und von diesen Funktionen konkrete Niveaumengen angegeben bzw. graphisch dargestellt werden sollen. Außerdem findet man auch Zuordnungsaufgaben bei denen Niveaumengen- Diagrammen zu Graphen von Funktionen in zwei Variablen oder zu den Funktionen  $f(x, y)$  zugeordnet werden sollen.

### 3.3. Die Berechnung von partiellen Ableitungen

Zunächst führt *Mathematik HTL 4/5* (2014: 249) die partiellen Ableitungen bei den Polynomfunktionen ein. Anschließend werden die partiellen Ableitungen im allgemeinen Fall betrachtet (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 254).

In *Mathematik HTL 4/5* (2014: 252) wird das partielle Ableiten als gewöhnliche Ableitung interpretiert:

Man kann die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$  an der Stelle  $(a, b)$  berechnen, indem man die („gewöhnliche“ Ableitung von  $f_{(-,b)}$  an der Stelle  $a$  berechnet. Analog ist die partielle Ableitung von  $f$  nach  $y$  an der Stelle  $(a, b)$  die Ableitung von  $f_{(a,-)}$  an der Stelle  $b$ .

Etwas schlampig, aber kürzer formuliert: „Nach der einen Variablen partiell differenzieren“ bedeutet, die „andere Variable als Konstante betrachten und dann gewöhnlich differenzieren.“  
(*Mathematik HTL 4/5* 2014: 252)

*Angewandte Mathematik IV/V* (2015: 72) führt die partiellen Ableitungen bei Funktionen mit zwei oder mehreren Veränderlichen analog ein, also wie bei der bereits bekannten Ableitung von Funktionen in einer Variablen im Sinne der Tangentensteigung. Es wird hier weiter erklärt, dass im Falle von Funktionen mit zwei oder mehreren Variablen für einen bestimmten Punkt auf der Fläche unendlich viele Tangenten an diesem Punkt

existieren und man deswegen entscheiden muss von welchen Tangenten man die Steigung berechnen möchte. Im Falle einer Funktion in zwei Variablen, wählt man bei dieser Entscheidung einen beliebigen Punkt auf der Fläche  $z = f(x, y)$  (*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 72). Die partiellen Ableitungen an diesem Punkt werden nun durch die zwei Raumkurven, die durch diesen bestimmten Punkt verlaufen, erklärt:

Die Kurve  $k_1: z = f(x, y_0)$  ist jene Kurve auf der Fläche, die eine feste  $y$ -Koordinate hat, d.h. die  $y$ -Koordinate wird konstant gehalten. Die Steigung der Tangente  $t_1$  der Kurve  $k_1$  im Punkt wird partielle Ableitung nach  $x$  genannt.

Die Kurve  $k_2: z = f(x_0, y)$  ist jene Kurve auf der Fläche, die eine feste  $x$ -Koordinate hat, d.h. die  $x$ -Koordinate wird konstant gehalten. Die Steigung der Tangente  $t_2$  der Kurve 2 im Punkt wird partielle Ableitung nach  $y$  genannt.

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 72)

Nach der Definition der partiellen Ableitung wird, ähnlich wie im Schulbuch *Mathematik HTL 4/5*, die Vorgehensweise des Ableitens so erklärt, dass man nur nach einer Variablen ableitet und die andere “festhält” (*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 72).

Nach der Grundregel des partiellen Ableitens wird im Buch *Angewandte Mathematik IV/V* die Schreibweise erläutert:

Für die partiellen Ableitungen nach  $x$  werden folgende Schreibweisen verwendet:  $f_x(x, y) = z_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$

Für die partiellen Ableitungen nach  $y$  werden folgende Schreibweisen verwendet:  $f_y(x, y) = z_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 73)

Zusätzlich wird bei den partiellen Ableitungen im Schulbuch *Angewandte Mathematik IV/V* der Begriff der Tangentialebene eingeführt: „Die beiden berechneten partiellen Ableitungen geben den Anstieg der Fläche in Richtung der  $x$ -Achse und  $y$ -Achse an. Alle in einem Punkt  $P$  an die Fläche angelegten Tangenten spannen die sogenannte Tangentialebene auf“ (*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 72). Etwas später wird die Tangentialebene erstmalig im Buch *Mathematik HTL 4/5* bei dem Differential erwähnt und formell definiert.

Berechnungen von partiellen Ableitungen bei Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, Winkelfunktionen und Wurzelfunktionen mit Zuhilfenahme der Produkt-Regel, Ketten-Regel und Quotienten-Regel befinden sich unter den Aufgabenstellungen von *Mathematik HTL 4/5* (2014: 252-255) und von *Angewandte Mathematik IV/V* (2015: 73-79). Diese Funktionen besitzen ausschließlich zwei

Veränderliche; Funktionen mit drei oder mehr Variablen sind weder im Buch *Mathematik HTL 4/5*, noch im Buch *Angewandte Mathematik IV/V* anzutreffen.

Mit höhere partielle Ableitungen von Funktionen setzt man sich nicht im Buch *Mathematik HTL 4/5* auseinander, jedoch im Buch *Angewandte Mathematik IV/V*. Hier werden die wesentlichen partiellen Ableitungen der zweiten Ordnung erläutert:

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \dots \text{die Funktion wird zweimal nach } x \text{ abgeleitet}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \dots \text{die Funktion wird zweimal nach } y \text{ abgeleitet}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \dots \text{die Funktion wird zuerst nach } x \text{ und anschließend nach } y \text{ abgeleitet}$$

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \dots \text{die Funktion wird zuerst nach } y \text{ und anschließend nach } x \text{ abgeleitet}$$

Die letzten beiden Ableitungen werden als gemischt partielle Ableitungen bezeichnet.

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 73)

Der Begriff der gemischt partiellen Ableitungen wird dann später gebraucht bei der Formulierung des Satzes von Schwarz für Funktionen mit zwei Variablen im Buch *Angewandte Mathematik IV/V*: „Der Satz von Schwarz besagt, dass die gemischt partiellen Ableitungen für stetige Funktionen gleich sind, d.h.:  $z_{xy} = z_{yx}$ “ (2015: 74).

Diese Formulierung des Satzes ist sehr problematisch, da streng genommen die partiellen Ableitungen stetig sein müssen. Nicht in allen Fällen sind bei einer stetigen Funktion  $z(x, y)$  die partiellen Ableitungen ebenfalls stetig. Ein Beispiel für solch einen Fall wäre

die Funktion  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$  für  $(x, y) \neq (0,0)$ . Diese Funktion ist stetig, aber ihre partielle Ableitung nach  $x$   $f_x(x, y) = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$  ist nicht stetig.

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Schwarz wird für Funktionen mit mehreren Variablen in den beiden Schulbüchern nicht angeführt. In den Aufgaben von *Angewandte Mathematik IV/V* wird bei Funktionen mit zwei Variablen die Gültigkeit des Satzes von Schwarz überprüft, indem man die gemischt partiellen Ableitungen vergleicht, um Rückschlüsse auf die Stetigkeit der Funktionen ziehen zu können (2015: 73).

Partielle Differenzierbarkeit wird ausschließlich im Buch *Mathematik HTL 4/5* behandelt. Hier findet man folgende Definition der Differenzierbarkeit nach  $x$  von Funktionen mit den Variablen  $x$  und  $y$ , wobei hier die Menge  $M$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  und  $(a, b) \in M$  ist:

Eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt an der Stelle  $(a, b)$  partiell differenzierbar nach  $x$ , wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \right)$  existiert, also die Funktion  $f_{(-, b)}$  mit  $f_{(-, b)}x = f(x, b)$  an der Stelle  $a$  differenzierbar ist.

Wir nennen dann diesen Grenzwert die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$  an der Stelle  $(a, b)$  und schreiben dafür  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  (sprich: de-f nach de-x von (a,b)).

[...]

Eine Funktion heißt partiell nach  $x$  differenzierbar, wenn sie jedem Element ihres Definitionsbereichs partiell nach  $x$  differenzierbar ist. Dann heißt die Funktion, die jedem Element  $(a, b)$  von  $M$  die partielle Ableitung nach  $x$  von  $f$  in  $(a, b)$  zuordnet, partielle Ableitung von  $f$  nach  $x$  und wird mit  $\frac{\partial f}{\partial x}$  bezeichnet.

(*Mathematik HTL 4/5* 2014: 254)

Analoge Formulierungen findet man für die partielle Ableitung bzw. für die partielle Differenzierbarkeit nach der Variable  $y$  in *Mathematik HTL 4/5* (2014: 254). Gleich im Anschluss wird darauf hingewiesen, dass Polynomfunktionen in zwei Variablen an allen Stellen differenzierbar sind, aber es auch viele andere Funktionen gibt, welche nicht an allen Stellen differenzierbar sind (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 254). Als Beispiel für eine solche Funktion nennt *Mathematik HTL 4/5* (2014: 254) die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = |x - y|$ , die nicht an der Stelle  $(0, 0)$  differenzierbar ist. Die Schulbücher *Mathematik HTL 4/5* und *Angewandte Mathematik IV/V* beinhalten jedoch ausschließlich Aufgaben, bei denen man mit Funktionen arbeitet, die auf allen Stellen differenzierbar sind.

Ein Thema, das lediglich im Buch *Angewandte Mathematik IV/V* behandelt wird, ist die Extremwertberechnung bei differenzierbaren Funktionen in zwei Variablen. Hier präsentiert das Schulbuch zwei Bedingungen für Extremwerte, eine notwendige und eine hinreichende. Zuerst wird die Definition der notwendigen Bedingung vorgestellt:

Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum

Besitzt eine Funktion  $z = f(x, y)$  ein relatives Extremum, so sind an dieser Stelle die beiden partiellen Ableitungen gleich 0, d.h. es muss  $f_x = 0$  und  $f_y = 0$  gelten.

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 75)

Danach findet man eine ausführliche, anschauliche Erklärung, warum eine weitere Bedingung, nämlich die hinreichende essentiell ist, um Extremwerte eindeutig zu bestimmen:

Stellen Sie sich vor, Sie wandern im Gebirge. Wenn Sie sich an einem Punkt befinden, an dem eine „unendlich kleine Umgebung“ horizontal ist (das heißt, die beiden partiellen Ableitungen sind null, gibt es verschiedene Möglichkeiten: Sie stehen auf einem Gipfel (Hochpunkt).

Sie stehen am tiefsten Punkt einer Senke (Tiefpunkt).

Es kann aber auch sein, dass sie auf einem Gebirgssattel stehen, das heißt, in zwei Richtungen geht es bergauf und in zwei anderen Richtungen bergab.

Diese notwendige Bedingung reicht also nicht aus, um ein relatives Extremum zu finden. Es gibt aber auch die Möglichkeit, dass kein Extremum vorhanden ist, obwohl die partiellen Ableitungen gleich null sind. Das ist genau dann der Fall, wenn ein Sattelpunkt vorliegt. Ein Sattelpunkt  $S$  ist Tiefpunkt einer Kurve und Hochpunkt einer anderen Kurve, welche aufgestellt wurden, um die Ebene aufzuspannen.

Daher ist noch eine weitere Bedingung notwendig, um ein relatives Extremum eindeutig zu erkennen.

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 75)

Diese Veranschaulichung der Extremwerte durch die verschiedenen Ausprägungen eines Berges ermöglicht eine zunächst verbale und visuelle Vorstellung der zugrundeliegenden Problematik. Im nächsten Schritt folgt die formelle Formulierung der zweiten hinreichenden Bedingung:

Hinreichende Bedingung für ein relatives Extremum

$f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$  und  $f_{xx} < 0$  Bedingung für ein Maximum (einen Hochpunkt)

$f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$  und  $f_{xx} > 0$  Bedingung für ein Minimum (einen Tiefpunkt)

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 75)

Zu dieser Formulierung der hinreichenden Bedingung werden im Buch keine weiteren Erklärungen für das Zustandekommen dieser Bedingung geboten. Diese Bedingung wird jedoch bei den Aufgaben kalkülmäßig angewendet zur Ermittlung von Extremstellen diverser Funktionen mit zwei Variablen.

In *Angewandte Mathematik IV/V* (2015: 75) befindet sich noch zum Abschluss des Buchkapitels „2 Partielle Ableitungen“ ein kurzer Hinweis, dass die partiellen Ableitungen bei Funktionen mit zwei Variablen in der Ausgleichsrechnung oft gebraucht werden, um die häufig angewendete Methode der kleinsten Quadrate zu benutzen.

### **3.4. Das totale Differential und die Fehlerabschätzung mittels des Differentials**

Das totale Differential wird bei den Schulbüchern *Angewandte Mathematik IV/V* und *Mathematik HTL 4/5* auf verschiedene Weise eingeführt. In *Angewandte Mathematik IV/V* erklärt man im allgemeinen Fall von Funktionen mit zwei Variablen das Differential

im engen Zusammenhang mit der Tangentialebene, während *Mathematik HTL 4/5* am Beginn das Differential bei Polynomfunktionen mit zwei Veränderlichen vorstellt. Erst im nächsten Schritt betrachtet man in *Mathematik HTL 4/5* allgemein das Differential bei Funktionen in zwei Variablen, bei dem der Zusammenhang zwischen dem Differential und der Tangentialebene ebenfalls deutlich wird.

Im Falle der Polynomfunktionen stellt *Mathematik HTL 4/5* am Beginn die Tangentialebene als lineare Näherung einer Polynomfunktion in zwei Variablen zunächst anhand eines konkreten Beispiels vor. Die lineare Funktion  $h(x, y) = 2 + 3x - y$  wird als gute Näherung im Punkt  $(0,0)$  der Polynomfunktion  $f$  mit  $f(x, y) = 2 + 3x - y - y^2 - x^2y$  angesehen, da die Funktionswerte in dem Punkt  $(0,0)$  sehr nahe beieinanderliegen (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 249). Um die Tangentialebene, welche die lineare Näherung einer Polynomfunktion in zwei Variablen in einem beliebigen Punkt darstellt, zu erhalten, findet man folgende Vorgehensweise im Buch:

Für jedes Paar von reellen Zahlen  $(a, b)$  können wir jede Polynomfunktion  $f$  in zwei Variablen durch  $f(x, y) = f(a, b) + c_1(x - a) + c_2(y - b) + u(x, y) * (x - a)^2 + v(x, y) * (y - b)^2 + w(x, y) * (x - a) * (y - b)$  beschreiben, dabei sind  $c_1$  und  $c_2$  reelle Zahlen und  $u, v, w$  Polynomfunktionen in zwei Variablen. Für Zahlenpaare, die genügend nahe bei  $(a, b)$  liegen, sind die Funktionswerte von  $f$  und von der linearen Funktion  $h$  mit  $h(x, y) = f(a, b) + c_1 * (x - a) + c_2 * (y - b)$  „fast“ gleich.

Der Graph dieser linearen Funktion ist eine Ebene, daher sieht der Graph von  $f$  in einer kleinen Umgebung von  $(a, b, f(a, b))$  „fast“ wie eine Ebene aus. Diese Ebene heißt Tangentialebene des Graphen von  $f$  im Punkt  $(a, b, f(a, b))$  oder kürzer Tangentialebene von  $f$  an der Stelle  $(a, b)$ .  
(*Mathematik HTL 4/5* 2014: 249)

Für die Umformung mit den Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  der Polynomfunktion in zwei Variablen schlägt das Schulbuch vor  $f((x - a) + a, (y - b) + b)$  auszurechnen und dann geeignet zusammenzufassen (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 249)

Nach der Einführung der Tangentialebene bei den Polynomfunktionen wird anschließend die Definition des Differentials solcher Funktionen vorgegeben: „Die lineare Funktion  $D_{f,(a,b)}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) * x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) * y$  nennen wir das Differential von  $f$  an der Stelle  $(a, b)$ . Der Graph des Differentials ist zur Tangentialebene parallel und enthält den Ursprung  $(0,0,0)$ “ (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 250).

Im nächsten Kapitel des Buches *Mathematik HTL 4/5* werden das Differential und die Tangentialebene im allgemeinen Fall von Funktionen mit zwei Variablen behandelt. Das

Differential einer allgemeinen Funktion in zwei Variablen wird in *Mathematik HTL 4/5* (2014: 254) identisch wie bei den Polynomfunktionen definiert. In den Aufgaben in *Mathematik HTL 4/5* (2014: 255) wird das Differential von Funktionen mit zwei Veränderlichen hauptsächlich allgemein für die Stelle  $(a, b)$  berechnet bzw. werden damit Funktionswerte der Funktion näherungsweise ermittelt.

Bei der Definition der Tangentialebene im allgemeinen Fall wird der Zusammenhang zwischen jener und dem Differential deutlich. Die Tangentialebene wird in diesem Schulbuch mit folgenden Worten definiert: „Der Graph der Funktion  $h$  mit

$$h(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) * (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) * (y - b) = f(a, b) + D_{f,(a,b)}(x - a, y - b)$$

heißt Tangentialebene von  $f$  an der Stelle  $(a, b)$ “ (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 254).

In der Aufgabensammlung des Schulbuchs *Mathematik HTL 4/5* befinden sich Beispiele, bei denen die Tangentialebene einer Funktion in zwei Variablen für eine gegebene Stelle berechnet wird. Außerdem findet man bei einigen Beispielen die Aufgabenstellung, dass die Tangentialebene mit Hilfe eines geeigneten CAS Programms dargestellt werden soll. Ein CAS Programm soll hier einerseits zur graphischen Veranschaulichung, andererseits zur Überprüfung der „händisch“ gerechneten Tangentialebene dienen.

Die Einführung zu der Tangentialebene und dem Differential wird im Schulbuch *Angewandte Mathematik IV/V* direkt im allgemeinen Fall von Funktionen mit zwei Veränderlichen gestaltet. Die Erklärungen dienen zunächst der graphischen Veranschaulichung:

Hier kann die Funktion  $z = f(x, y)$  in einem beliebigen Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  durch ihre Tangentialebene genähert werden. Dann verändert man jeweils die unabhängige Variable  $x_0$  bzw.  $y_0$  um  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$  und untersucht die Änderung dieser Veränderungen auf die Höhenänderung  $\Delta z$ .

Diese Änderungen werden mit der näherungsweisen Änderung  $dz$  auf der Tangentialebene verglichen, da bei einer Änderung von  $x_0$  um  $\Delta x$  die Änderung auf der Tangentialebene  $z_x * dx$  beträgt und bei einer Änderung von  $y_0$  um  $\Delta y$  die Änderung auf der Tangentialebene  $z_y * dy$ . Für geringfügige Änderungen sind die exakten und näherungsweisen Änderungen annähernd gleich und können somit zur näherungsweisen Berechnung verwendet werden.

Somit erhält man  $dz = z_x(x_0, y_0) * dx + z_y(x_0, y_0) * dy$ . Man nennt diese Änderung  $dz$  vollständiges oder totales Differential.

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 76)

Die formelle Definition des totalen Differentials wurde gleich im Anschluss hinzugefügt:

#### Totales oder vollständiges Differential

Unter einem totalen oder vollständigen Differential einer Funktion  $z = f(x, y)$  versteht man die Änderung  $dz = z_x(x_0, y_0) * dx + z_y(x_0, y_0) * dy$ . Das totale Differential gibt daher näherungsweise an, wie sich der Funktionswert  $z$  bei kleinen Änderungen der unabhängigen Variablen  $x_0$  und  $y_0$  um  $\Delta x \approx dx$  bzw.  $\Delta y \approx dy$  ändert, d.h.:  $\Delta z = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) \approx dz$   
(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 76)

Wichtig ist noch anzumerken, dass die erwähnten Definitionen des Differentials sich ausschließlich für Funktionen in zwei Variablen eignen. Die Erweiterung auf den allgemeinen Fall von Funktionen mit mehreren Variablen erfordert noch einiges an Arbeit, um mit mehrdimensionalen Ableitungen umgehen zu können. Diese den allgemeinen Fall betrachtende Definitionen sind ähnlich denen für Funktionen in zwei Variablen, jedoch sollten sie explizit erwähnt werden.

### 3.5. Die Lineare Fehlerfortpflanzung und der maximale Fehler

In *Mathematik HTL 4/5* (2014: 258) dient als Einstieg zur Fehlerrechnung die Vorstellung des Rundens einer Zahl bzw. die Ermittlung einer Zahl durch eine Messung und die damit verbundenen Messfehler. An dieser Stelle werden die Begriffe „absoluter“ und „relativer“ Fehler bei einer Näherung von einer reellen Zahl eingeführt:

Wenn  $a_N$  eine Näherung einer reellen Zahl  $a \neq 0$  ist, dann heißen die Zahlen  $|a_N - a|$  und  $\frac{|a_N - a|}{|a|}$  absoluter und relativer Fehler dieser Näherung. Wenn bekannt ist, wie groß der absolute Fehler maximal sein kann, dann schreiben wir dafür  $\Delta a$  (sprich: „delta a“) und  $|a_N - a| \leq \Delta a$ . Der relative Fehler ist dann  $\leq \frac{\Delta a}{|a|}$ .  
(*Mathematik HTL 4/5* 2014: 258)

Der „Fehlerbegriff“ wird dann auf Funktionen erweitert, deren Argument aus Zahlen besteht, welche Näherungsfehler bzw. Messfehler aufweisen (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 258). Nun wird die Frage gestellt, ob der absolute Fehler für die Funktionswerte solcher Funktionen berechnet werden kann und wie sich der Messfehler bzw. Rundungsfehler beim Argument fortpflanzt. Anhand des Beispiels einer linearen Funktion in einer Variable stellt man fest, dass der Fehler beim Argument mit der Änderungsrate von der Funktion multipliziert wird (*Mathematik HTL 4/5* 2014: 258). Im nächsten Schritt findet man die Idee, dass auch bei nicht linearen Funktionen dieser Fehler abgeschätzt werden kann, indem man sie durch eine lineare Funktion an der Stelle des Arguments approximiert und von dieser linearen Funktion den Fehler abschätzt (*Mathematik HTL*

4/5 2014: 258). Anschließend wird das Konzept der Fehlerfortpflanzung zunächst für Funktionen in einer Variablen beschrieben:

Ist  $f$  eine differenzierbare Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , dann ist für „kleine“ Fehler  $\Delta a$   
 $f(a \pm \Delta a) \approx f(a) + f'(a)((a \pm \Delta a) - a) = f(a) \pm f'(a) * \Delta a$  und  
 $|f(a \pm \Delta a) - f(a)| \approx |f'(a)| * \Delta a$ . Der Fehler pflanzt sich umso stärker fort, je größer der Betrag der Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$  ist.  
 (Mathematik HTL 4/5 2014: 258)

Nachdem die Fehlerfortpflanzung für Funktionen in einer Variablen betrachtet wurde, wird nun die Fehlerfortpflanzung für Funktionen mit zwei Veränderlichen durch ähnliche Überlegungen erschlossen in *Mathematik HTL 4/5* (2014: 258). Für die Approximation findet man als Pendant zur linearen Funktion nun die Tangentialebene:

Ist  $f$  eine differenzierbare Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$ , die durch die Funktion  $h$  mit  $h(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) * (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) * (y - b)$  in der Nähe der Stelle  $(a, b)$  gut angenähert wird (das ist zum Beispiel der Fall, wenn  $f$  eine Polynomfunktion ist), dann ist  
 $f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b) \approx f(a, b) \pm \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) * \Delta a + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) * \Delta b$  und  
 $|f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b) - f(a, b)| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) * \Delta a + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) * \Delta b \right| = |D_{f,(a,b)}(\Delta a, \Delta b)|$ .  
 Der Fehler pflanzt sich umso stärker fort, je größer  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) * \Delta a + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) * \Delta b \right|$  ist.  
 (Mathematik HTL 4/5 2014: 258)

Im Vergleich zu *Mathematik HTL 4/5*, wird das Thema Fehlerrechnung im Buch *Angewandte Mathematik IV/V* kurz und bündig behandelt. In der Einführung macht man hier auf die Wichtigkeit des im vorherigen Kapitel gelernten Differentials im Bereich der Fehlerrechnung aufmerksam und schafft so eine Überleitung zum maximalen Fehler bzw. zum Fehlerfortpflanzungsgesetz:

Das totale Differential findet eine wichtige Anwendung in der Fehlerrechnung, bei der  $dx$  und  $dy$  die Messgenauigkeiten bzw. Messfehler angeben. Somit lässt sich mithilfe des totalen Differenzials das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz formulieren:

Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz:

Für den Maximalfehler  $\Delta z_{max}$  gilt:

$\Delta z_{max} = |z_x(x_0, y_0) * \Delta x| + |z_y(x_0, y_0) * \Delta y|$ , wenn  $|\Delta x|$  und  $|\Delta y|$  die Messunsicherheiten der Werte  $x_0$  und  $y_0$  sind.  
 (Angewandte Mathematik IV/V 2015: 77)

Es fällt auf, dass in dem Buch *Angewandte Mathematik IV/V* nicht wie in *Mathematik HTL 4/5* von einer Näherung durch eine lineare Funktion, welche wiederum auf den

maximalen Fehler einführt, gesprochen wird. Man berechnet hier „direkt“ den maximalen Fehler. Außerdem beschäftigt man sich in *Angewandte Mathematik IV/V* ausschließlich mit dem maximalen Fehler im Sinne des maximalen Fehlers. Das Konzept des relativen Fehlers wie im Schulbuch *Mathematik HTL 4/5* findet man hier nicht, stattdessen wird der Standardfehler im Zuge des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes erklärt:

Etwas genauer kann man den Fehler abschätzen, wenn man den Standardfehler kennt, also die Standardabweichung der einzelnen Messwerte. Weil es ziemlich unwahrscheinlich ist, dass man sich jedes Mal in der gleichen Richtung vermisst, werden Standardfehler nicht einfach addiert sondern verhalten sich nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Auch dabei spielen die partiellen Ableitungen eine Rolle:

Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Wenn eine Größe  $z$  von zwei unabhängigen fehlerbehafteten Größen  $x$  und  $y$  abhängt, beträgt ihr Standardfehler:

$$s_z = \sqrt{(z_x * s_x)^2 + (z_y * s_y)^2}$$

(*Angewandte Mathematik IV/V* 2015: 78)

Unter den Aufgaben zur Fehlerrechnung im Buch *Angewandte Mathematik IV/V* sollen der maximaler Fehler und der Standardfehler bei Funktionen in zwei Variablen, die Flächen oder Längen hauptsächlich beschreiben, berechnet werden (2015: 80). Darüber hinaus werden diese Fehler in den Aufgaben von *Angewandte Mathematik IV/V* bei der Massenberechnung diverser Körper errechnet (2015: 80). Um diese Fehlerrechnungen durchzuführen, müssen die zugehörigen Funktionen in zwei Variablen aufgestellt werden.

Bei den Aufgaben von *Mathematik HTL 4/5* (2014: 258-260) werden hauptsächlich die absoluten und relativen Fehler von diversen Längen, Flächen und Volumen berechnet. Hierbei ist nicht notwendigerweise eine Funktion in einer oder in zwei Variablen aufzustellen, in den meisten Fällen können die absoluten und relativen Fehler „direkt“ berechnet werden.

Zur Fehlerrechnung aus dem Themenbereich der Physik findet man in *Mathematik HTL 4/5* eine kleine Anzahl an Aufgaben. Hierbei handelt es sich unter anderem um die Brennweite einer Linse, welche abhängig ist von der Bildweite und der Gegenstandsweite. Außerdem findet man eine Aufgabe bezüglich der Fahrtzeit, Fahrtstrecke und Fahrtgeschwindigkeit eines PKWs. Darüber hinaus, implementiert das Schulbuch folgende „experimentelle“ Aufgabenstellung:

Für diese Aufgabe benötigt ihr einen kleinen Ball, ein Maßband und eine Stoppuhr. Ein Körper, der (im) Vakuum zu Boden fällt, legt in der Zeit  $t$  (in Sekunden) den Weg  $s = g \cdot \frac{t^2}{2}$  (in Meter) zurück. Kennt man  $s$  und  $t$ , kann man daraus die Fallbeschleunigung  $g$  berechnen.

a. Gebt eine Funktion  $f$  an, die der Fallhöhe  $h$  in Metern ( $m$ ) und der Fallzeit  $t$  in Sekunden ( $s$ ) die Fallbeschleunigung  $g$  in  $m/s^2$  zuordnet.

b. Lasst jetzt euren Ball aus einer Höhe von  $2m$  zu Boden fallen und stoppt mit, wie lange der Ball bis zum Aufprall benötigt. Berechnet aus dieser Fallzeit mithilfe der in Aufgabe a. gefundenen Funktion die Fallbeschleunigung  $g$ . Wiederholt dieses Experiment mindestens 10-mal und berechnet anschließend den Mittelwert  $g$  und die Standardabweichung eurer Resultate.

c. Entwickelt mithilfe der partiellen Ableitungen eine Formel für die Abschätzung des absoluten und relativen Fehlers, wenn die Messwerte für  $h$  und  $t$  mit den Fehlern  $\Delta h$  und  $\Delta t$  behaftet sind. Nehmt für  $\Delta h$  und  $\Delta t$  jeweils die in Aufgabe b. berechnete Standardabweichung.

d. Schätzt ab, wie genau ihr eurer Meinung nach  $h$  und  $t$  gemessen hat, und berechnet damit den absoluten und relativen Fehler der von euch ermittelten Fallbeschleunigung  $g$ .

e. Wie groß ist näherungsweise der maximale Fehler, wenn  $\Delta h = 0,01m$  und  $\Delta t = 0,01s$  ist?

(Mathematik HTL 4/5 2014: 260)

Diese Aufgabenstellung beinhaltet nicht nur die Fehlerrechnung an sich, sondern auch den praktischen Aspekt der Schwierigkeit des Messens, welcher für die Schüler und Schülerinnen anhand eines einfachen Fallexperiments gut sichtbar wird.

Eine derartige Aufgabe mit „experimentellem Charakter“ befindet sich nicht unter den Aufgaben des Schulbuchs *Angewandte Mathematik IV/V*. Jedoch bietet dieses Buch auch zwei Aufgaben in der Fehlerrechnung aus dem Themenbereich der Physik. Die eine Aufgabe behandelt wie in *Mathematik HTL 4/5* auch die Brennweite einer Linse, die andere den Widerstand  $R$  in einem Gleichstromkreis (2015: 80).

## 4. Extremwertberechnung in der Fachmathematik

### 4.1. Ableitung im Mehrdimensionalen

Grundsätzlich lässt sich die mehrdimensionale Ableitung allgemein folgendermaßen definieren: Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in G$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Funktion. Dann heißt  $f$  differenzierbar an der Stelle  $x_0$ , wenn es eine  $k \times n$  Matrix  $df_{x_0}$  gibt, so dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - df_{x_0}(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0 \text{ gilt.}$$

Diese mehrdimensionale Ableitung weist mehrere interessante Eigenschaften in Bezug auf die partiellen Ableitungen auf: Falls nun die Funktion an der Stelle  $x_0$  differenzierbar

ist, dann existieren alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)$  und diese bilden dann die Spaltenvektoren  $df_{x_o}$ . Es gilt außerdem, dass wenn die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  auf  $G$  stetig sind, die Funktion  $f$  in  $x_o$  differenzierbar ist. Weiters gilt, dass falls  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist in  $x_o$ , dann ist  $\text{grad } f(x_o) = (df_{x_o})^T$ .

Die Ableitung einer Funktion in einer Variablen beschreibt die Änderung der Funktion für einzelne Stellen der Funktion. Im Mehrdimensionalen existieren mehrere Änderungen, die partiellen Änderungen mit jeweils einer Veränderlichen, welche summiert die Gesamtänderung der Funktion an einer gewissen Stelle der Funktion ergeben. Diese Summe ergibt wiederum das totale Differential.

Schreibweisen für die partiellen Änderungen gab es im Laufe der Geschichte viele unterschiedliche. Im Jahr 1755 bezeichnete Euler in seinem Werk *Differentialrechnung* mit einem „d“ die partielle Ableitung einer Funktion  $f$  nach der Variable  $y$  ( $\frac{df}{dy}$ ) (Walter 2002: 68). Dieses „d“ kennt man heute aus der Differentialrechnung in einer Variablen. Etwas später, 1823, beschreibt Cauchy die partielle Ableitung ohne Klammern mit  $\frac{df}{dy}$  (Walter 2002: 68). Durchgesetzt haben sich als Konvention die Schreibweisen mit einem runden „d“  $\frac{\partial f}{\partial y}$  bzw. die vereinfachte Version  $f_y$ . Gelegentlich findet man auch die Schreibweise  $D_y f$ .

#### 4.1.1. Spezialfall im Zweidimensionalen

Funktionen in zwei Variablen dienen aufgrund ihrer Darstellungsmöglichkeit ihres Graphen im dreidimensionalen Koordinatensystem als guter anschaulicher Einstieg für die Betrachtung von partiellen Ableitungen im Mehrdimensionalen.

In Walters Übersichtswerk *Analysis 2* (2002: 71) wird die partielle Ableitung  $f_x$  einer Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G \subset \mathbb{R}^2$  folgendermaßen definiert:  $f_x(\xi, \eta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h, \eta) - f(\xi, \eta)}{h}$  ( $h$  reell). Analoges gilt für die partielle Ableitung  $f_y$ . Voraussetzung dafür ist die Existenz dieses Grenzwerts. Wenn  $(\xi, \eta)$  ein innerer Punkt von der Definitionsmenge  $G$  ist, dann kann der Grenzwert gebildet und damit auch untersucht werden (Walter 2002: 71).

Funktionen mit zwei Variablen lassen sich als Fläche  $z = f(x, y)$  durch ein Computeralgebraprogramm wie *Mathematica* oder *Geogebra* schnell und übersichtlich

darstellen. Die partiellen Ableitungen können mit Hilfe dieser Darstellung ebenfalls geometrisch interpretiert werden. Ähnlich wie im eindimensionalen Fall beschreiben die partiellen Ableitungen im weidimensionalen „das Steigungsverhalten der Funktion  $f$  längs einer Geraden  $y = \text{const.}$  bzw.  $x = \text{const.}$ “ (Walter 2002: 72). Die partielle Ableitung nach  $x$  für die Funktion  $f(x, y)$  kann nun formell definiert werden als „[d]ie Zahl  $f_x(x_0, y_0)$  gibt die Steigung der Tangente an die Kurve  $z = f(x, y_0)$  (in der  $xz$ -Ebene) im Punkt  $x_0$  [...] an“ (Walter 2002: 72). Analog wird die partielle Ableitung nach  $y$  definiert.

Ein weiterer wichtiger Begriff bei den partiellen Ableitungen ist der Gradient. Dieser Spaltenvektor wird aus den partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  gebildet und wird *Gradient*  $\text{grad } f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))^T$  genannt.

Der Zusammenhang zwischen der Stetigkeit der Funktion und ihren partiellen Ableitungen ist ebenfalls relevant, da der mehrdimensionale Fall sich nicht analog zum eindimensionalen Fall verhält. Existiert die Ableitung in einem Punkt im Eindimensionalen, ist die Funktion an dieser Stelle stetig. Im Mehrdimensionalen verhält es sich anders. „Aus der Existenz der Ableitungen  $f_x, f_y$  in einer vollen Umgebung eines Punktes folgt i.a. nicht die Stetigkeit von  $f$  in diesem Punkt“ (Walter 2002: 71). Als zusätzliche Eigenschaft müssen die partiellen Ableitungen in der Umgebung eines Punktes im mehrdimensionalen Fall noch stetig sein, damit man auf die Stetigkeit der Funktion schließen kann (Walter 2002: 72).

#### 4.1.2. Der allgemeine Fall im Mehrdimensionalen

Walter definiert in *Analysis 2* die partielle Ableitung allgemein wie folgt:

Im folgenden sei  $\xi \in G \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  heißt im Punkt  $\xi$  partiell differenzierbar nach  $x_j$ , wenn die durch Festhalten der übrigen Variablen entstehende Funktion  $x_j \mapsto g(x_j) = f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, x_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$  im eindimensionalen Sinn differenzierbar an der Stelle  $\xi_j$  ist ( $j = 1, \dots, n$ ). Die entsprechende Ableitung  $g'$  wird partielle Ableitung der Funktion  $f$  nach der Veränderlichen  $x_j$  (im Punkt  $\xi$ ) genannt und mit einem der Symbole  $\frac{\partial f(\xi)}{\partial x_j} \equiv f_{x_j}(\xi) \equiv D_j f(\xi) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h e_j) - f(\xi)}{h}$  ( $h$  reell) bezeichnet ( $e_j$  ist der  $j$ -te Einheitsvektor).  
(Walter 2002: 76-78)

Voraussetzung ist, dass man den Grenzwert bilden kann, also „g soll auf einem die Stelle  $\xi_j$  enthaltenden Intervall der  $x_j$ -Achse definiert sein“ (Walter 2002: 78). Dies trifft zu, wenn „G eine Umgebung des Punktes  $\xi$  ist“ (Walter 2002: 78).

Gleich anschließend stellt Walter die Definition des Gradienten im Mehrdimensionalen vor: „Ist die Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  in diesem Sinne [wie oben beschrieben] nach allen Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  in  $\xi$  partiell differenzierbar, so heißt der Vektor  $\nabla f(\xi) \equiv \text{grad } f(\xi) := (f_{x_1}(\xi), \dots, f_{x_n}(\xi))$  der *Gradient von f im Punkt  $\xi$* “ (Walter 2002: 78).

Forster unterscheidet in seinem Übersichtswerk *Analysis 2* bei seiner kurz und bündig formulierte Definition von partiellen Ableitungen zwischen partiell differenzierbar und stetig partiell differenzierbar: „Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *partiell differenzierbar*, falls  $D_i f(x)$  für alle  $x \in U$  und  $i = 1, \dots, n$  existiert.  $f$  heißt *stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen  $D_i f: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind“ (2013: 53). Die Formulierung von höheren partiellen Ableitungen ist sehr ähnlich:

Die Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $(k + 1)$ -mal differenzierbar, wenn sie  $k$ -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung  $D_{i_k} \dots D_{i_2} D_{i_1} f: U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar sind.

Die Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $k$ -mal stetig partiell differenzierbar, wenn sie  $k$ -mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $\leq k$  stetig sind.

(Forster 2013: 53)

Ein wichtiger Satz, der im Zusammenhang von partiellen Ableitungen erwähnt werden sollte, ist der Satz von Schwarz: „Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle  $a \in U$  und alle  $i, j = 1, 2, \dots, n$   $D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a)$ “ (Forster 2013: 59).

## 4.2. Extremwertbestimmung bei Funktionen in mehreren Variablen ohne Nebenbedingung

Um die Extremwerte einer Funktion im Mehrdimensionalen zu bestimmen, müssen zuerst die „potentiellen Kandidaten“ für jene gefunden werden. Diese „potentiellen Kandidaten“ sind die sogenannten kritischen Punkte der Funktion. Diese sind im Werk *Ingenieur Analysis 2* von Blatter folgendermaßen formuliert:

Es sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion von  $n$  Variablen. Ein Punkt  $p \in \Omega$  heißt kritischer oder stationärer Punkt von  $f$ , wenn  $\nabla f(p) = 0$  ist, das heißt: wenn an der Stelle

$p$  alle partiellen Ableitungen erster Ordnung verschwinden. Die kritischen Punkte sind also die Lösungen des Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} f_{.1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{.n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

von  $n$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten; sie liegen im [A]llgemeinen isoliert. Ist  $\nabla f(p) \neq 0$ , so heißt  $p$  ein regulärer Punkt von  $f$ .  
(Blatter 1996: 157)

Demnach erhält man beim Nullsetzen der partiellen Ableitungen erster Ordnung bei einer Funktion in zwei Variablen ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, bei einer Funktion in drei Variablen ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten, usw.. Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind nun die kritischen Punkte, die mit Hilfe der Hesse Matrix genauer untersucht werden müssen, um Aufschluss über die Extremwerte der Funktion zu geben.

#### 4.2.1. Hesse Matrix

Zur Extremwertbestimmung bei Funktionen in mehreren Variablen dient die *Hesse-Matrix* als nützliches Tool. Diese Matrix ist nach dem deutschen Mathematiker Ludwig Hesse benannt. Sie beinhaltet alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $f$  und besitzt die Form  $n \times n$ :

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \dots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \dots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Es liegt also eine quadratische Matrix vor. Im nächsten Schritt muss nun die Definitheit der Matrix in den kritischen Punkten untersucht werden.

Für die Beurteilung der Definitheit der Matrix an einem kritischen Punkt gibt es zwei mögliche Methoden, die Benutzung des *Sylvester-Kriteriums* oder die Bestimmung der Eigenwerte. Die erste Methode kann besonders bei kleinen Matrizen sehr schnell Aufschluss über die vorliegenden Extremwerte geben, jedoch muss diese nicht in allen Fällen zu eindeutigen Ergebnissen führen. Außerdem ist bei großen Matrizen der Rechenaufwand sehr hoch. Die zweite Methode liefert ein eindeutiges Ergebnis über die Extremwerte der Funktion, jedoch kann diese mit hohem Arbeitsaufwand verbunden sein, wenn nicht gerade eine Diagonalmatrix vorliegt, bei der die Eigenwerte „direkt“ ablesbar sind.

### 4.2.2. Das Sylvester-Kriterium

Bei der ersten Methode, dem Sylvester Kriterium, bestimmt man zunächst die führenden Hauptminoren der Hesse Matrix in einem kritischen Punkt. Eine  $n \times n$ -Matrix  $H$  hat  $n$  führende Hauptminoren, die wie folgt definiert sind.

$$|H_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Also } |H_1| = a_{11}, |H_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ usw. bis zu } |H_n| = \det H.$$

Sind diese führenden Hauptminoren gefunden, muss nun auf das Vorzeichen dieser geachtet werden, um mehr Informationen über die Definitheit der Matrix in dem kritischen Punkt zu erhalten. In zwei Fällen erhält man eine eindeutige Aussage über die Definitheit der Matrix:

1. Sind alle führenden Hauptminoren von  $H$  positiv, also  $|H_i| > 0, \forall i = 1, \dots, n$ , dann  $H$  positiv definit.
2. Sind alle geraden führenden Hauptminoren von  $H$  positiv und alle ungeraden führenden Hauptminoren von  $H$  negativ, also  $|H_i| > 0, \forall$  geraden  $i$  und  $|H_i| < 0, \forall$  ungeraden  $i$ , dann ist  $H$  negativ definit.

Nicht immer tritt einer dieser beiden Fälle ein und dann muss man mit der zweiten Methode, der Bestimmung der Eigenwerte, fortfahren.

### 4.2.3. Bestimmung von Eigenwerten

Um die Eigenwerte einer Matrix zu berechnen, eignet sich das charakteristische Polynom gut, denn dieses Verfahren kann bei allen Matrizen angewendet werden. Aus praktikabler Hinsicht ist dieses Verfahren der Bestimmung der Eigenwerte durch das charakteristische Polynom eher bei kleinen Matrizen zu empfehlen, wenn händisch das charakteristische Polynom bestimmt wird.

Im Allgemeinen erhält man das charakteristische Polynom  $p_H(\lambda)$  einer Matrix  $H$  folgendermaßen:  $p_H(\lambda) = \det(\lambda E - H)$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind dann die gesuchten Eigenwerte. Im Falle einer  $2 \times 2$  Matrix erhält man ein charakteristisches Polynom zweiten Grades, bei einer  $3 \times 3$  Matrix ein charakteristisches Polynom dritten Grades, usw.. Um die Nullstellen dieses

Polynoms zu erhalten, kann es durchaus praktikabel sein, ein CAS Programm zu Hilfe zu nehmen, insbesondere wenn der Grad des Polynoms vier oder noch höher beträgt.

Als Alternative zur Methode des charakteristischen Polynoms für das Bestimmen der Eigenwerte kann man auch die vorliegende Matrix mittels Gauß-Verfahren auf die Form einer oberen Dreiecksmatrix bringen. Eine obere Dreiecksmatrix liegt vor, wenn die Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen aus Nullen bestehen. Diese Methode kann besonders bei sehr großen Matrizen den Rechenaufwand deutlich reduzieren. Wenn eine obere Diagonalmatrix gefunden ist, können die Eigenwerte von dieser Matrix abgelesen werden, denn die Eigenwerte entsprechen den Einträgen auf der Hauptdiagonalen.

Beim Gauß-Verfahren muss darauf geachtet werden, dass es hier nicht erlaubt ist, die Zeilen und Spalten zu vertauschen. Es dürfen lediglich Vielfache von einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert oder subtrahiert werden. Um eine obere Dreiecksmatrix zu erhalten, ist es am besten sich von oben nach unten vorzuarbeiten. Man wählt eine geeignete Zeile aus und addiert ein passendes Vielfaches dieser Zeile zu oder subtrahiert ein passendes Vielfaches dieser Zeile von den darunterliegenden Zeilen und erzeugt so an den Stellen unterhalb der Hauptdiagonalen Nullen. Nun können die Eigenwerte abgelesen werden.

In manchen Fällen liegt die Hesse-Matrix in der Form einer Diagonalmatrix vor. Eine Diagonalmatrix ist eine Matrix, die, abgesehen von ihrer Diagonale, aus lauter Nullen besteht. Hier können die Eigenwerte auch direkt abgelesen werden, denn die Einträge auf der Diagonalen entsprechen den Eigenwerten der Matrix.

Die nachstehende Tabelle zeigt den Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der Eigenwerte einer Matrix und ihrer Definitheit:

*Tabelle 2-Zusammenhang Vorzeichen der Eigenwerte und Definitheit der Matrix*

|   | Vorzeichen der Eigenwerte                            | Definitheit der Matrix |
|---|------------------------------------------------------|------------------------|
| 1 | alle Eigenwerte sind positiv, d.h.<br>$> 0$          | positiv definit        |
| 2 | alle Eigenwerte sind negativ, d.h.<br>$< 0$          | negativ definit        |
| 3 | die Eigenwerte sind sowohl negativ, als auch positiv | indefinit              |
| 4 | alle Eigenwerte sind nicht negativ, d.h. $\geq 0$    | positiv semidefinit    |

|   |                                                           |                                 |
|---|-----------------------------------------------------------|---------------------------------|
| 5 | alle Eigenwerte sind nicht negativ,<br>d.h. $\leq 0$      | negativ semidefinit             |
| 6 | Alle Eigenwerte weder positiv<br>noch negativ, d.h. $= 0$ | positiv und negativ semidefinit |

#### 4.2.4. Zusammenhang Definitheit der Hesse Matrix in einem kritischen Punkt und das Extremwertverhalten des kritischen Punktes

Die untere Tabelle zeigt die verschiedenen Arten von Definitheit der Matrix an einem kritischen Punkt und ihre Entsprechungen bezüglich des Extremwertverhaltens des kritischen Punkts:

*Tabelle 3-Zusammenhang Definitheit der Matrix und Extremwertverhalten in einem kritischen Punkt*

|   | Definitheit der Matrix $H_f(p)$ im<br>kritischen Punkt p | Extremwertverhalten des kritischen<br>Punkts p |
|---|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1 | positiv definit                                          | lokales Minimum                                |
| 2 | negativ definit                                          | lokales Maximum                                |
| 3 | indefinit                                                | Sattelpunkt                                    |
| 4 | positiv semidefinit                                      | lokales Minimum oder Sattelpunkt               |
| 5 | negativ semidefinit                                      | lokales Maximum oder Sattelpunkt               |
| 6 | positiv und negativ semidefinit                          | -                                              |

Im sechsten Fall liegt eine sogenannte Nullmatrix vor, das heißt die Funktion in mehreren Variablen ist linear affin. Geometrisch gesehen stellen diese Funktionen zum Beispiel im Zweidimensionalen eine Ebene oder im Dreidimensionalen eine Hyperebene dar. Die Fälle vier und fünf bedürfen einer genaueren Betrachtung, um eindeutig das Extremverhalten des kritischen Punktes zu ermitteln.

Bei einer Funktion mit zwei Variablen kann man sich leicht Abhilfe schaffen, indem man die Funktion plottet und die Umgebung an diesem kritischen Punkt betrachtet. Hier kann man schon mit etwas Geschick erkennen, ob ein lokales Maximum/Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Betrachtet man die kritischen Stellen von einer Funktion mit drei oder mehr Variablen, gestaltet sich die graphische Darstellung als schwierig, um die Art des Extrempunktes zu bestimmen. Hier muss man mit der allgemeinen Definition von Extremwerten arbeiten.

Eine Definition von lokalen Extrempunkten findet man bei Walter:

Die Funktion  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  hat an der Stelle  $\xi \in D$  ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Maximum bzw. Minimum, wenn eine Umgebung  $U$  von  $\xi$  mit  $f(\xi) \geq f(U \cap D)$  bzw.  $f(\xi) \leq f(U \cap D)$  existiert.  
(Walter 2002: 124)

Um rechnerisch zu zeigen, dass solch eine Ungleichung in den zwei semidefiniten Fällen gilt, kann eine Vorzeichenbetrachtung der einzelnen Terme der Funktion in Erwägung gezogen werden.

#### **4.2.5. Globale Extrema**

Bisher sind zwei Methoden zur Ermittlung von lokalen Extremstellen besprochen worden, jedoch weiß man hier noch nicht, ob diese gefundenen Extremstellen auch im globalen Sinn Extrema sind.

Um die globalen Extrema einer Funktion zu finden, betrachtet man nun die Hesse-Matrix vor dem Einsetzen der kritischen Punkte. Beinhaltet die Hesse-Matrix ausschließlich Einträge mit Konstanten, so liegt ein globales Maximum vor, wenn nun die Hesse-Matrix negativ definit ist bzw. ein globales Minimum, wenn sie positiv definit ist.

Hängt die Hesse-Matrix von Variablen ab, müssen die Randpunkte der Funktion betrachtet werden. Die Funktionswerte der Randpunkte und der lokalen Extrema müssen dann untereinander verglichen werden. Ähnlich wie bei Funktionen in einer Variablen, stellt dann der Punkt mit dem höchsten Funktionswert das globale Maximum dar und der Punkt mit dem niedrigsten Funktionswert das globale Minimum.

#### **4.3. Extremwertbestimmung bei Funktionen mit mehreren Variablen mit einer Nebenbedingung**

Eine Methode, die bereits in der Schule im Zuge der Differentialrechnung bei den sogenannten Extremwertaufgaben angewendet wird, um bei Funktionen in zwei Variablen mit einer Nebenbedingung Extremwerte zu berechnen, ist die Substitutionsmethode. Hier kann man die Nebenbedingung nach einer Variablen auflösen und in die Zielfunktion einsetzen, sodass das Extremwertproblem nun auf eine Funktion

in einer Variablen ohne Nebenbedingung zurückgeführt wird. Die Substitutionsmethode funktioniert jedoch nicht in allen Fällen, da sich die gegebenen Nebenbedingungen nicht immer auf eine Variable umformen lassen.

Zur Extremwertbestimmung bei Funktionen in mehreren Variablen unter einer Nebenbedingung eignet sich die Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Allgemein lässt sich eine Problemstellung in der Art so beschreiben: Die Extrema einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  sind gesucht unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= c_1 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) &= c_k \end{aligned}, \text{ wobei } k < n.$$

Die Lagrange-Funktion sieht dann folgendermaßen aus:

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (c_i - g_i(x_1, \dots, x_n))$$

Die Variable  $\lambda$  nennt man den Lagrange-Multiplikator, welcher als Hilfsvariable fungiert.

Um die lokalen Extrema einer Funktion herauszufinden, befolgt man die Vorgehensweise wie sie in Leydolds Skript beschrieben ist:

1. Stelle die Lagrange-Funktion  $L$  auf [...].
  2. Berechne die ersten partiellen Ableitungen von  $L$ .
  3. Setze alle ersten partiellen Ableitungen gleich Null und löse das so entstandene Gleichungssystem mit  $n + k$  Unbekannten in  $n + k$  Gleichungen.
  4. Die ersten  $n$  Komponenten  $(x_1, \dots, x_n)$  sind die Koordinaten der gesuchten kritischen Punkte.
- (Leydold 2017: 2)

Damit tatsächlich alle kritischen Stellen gefunden werden, muss noch zusätzlich überprüft werden, ob durch das Einsetzen von Punkten die Gradienten der Nebenbedingungen linear abhängig werden. Diese Punkte stellen dann ebenfalls weitere kritische Punkte dar, die auch untersucht werden müssen.

Für die Entscheidung ob eines der gefundenen kritischen Punkte ein globales Extremum darstellt, muss man die Ränder betrachten und deren Werte mit den der kritischen Punkte vergleichen. Die Randbetrachtung stellt die beste Methode dar, um die globalen Extrema zu finden.

Manchmal kann es auch schon genügen zu zeigen, dass die Lagrange Funktion  $L$  konkav bzw. konvex ist:

Sei  $(x^*, \lambda^*)$  ein kritischer Punkt der Lagrange-Funktion  $L$  des Optimierungsproblems  $\min/\max f(x)$  gegeben  $g(x) = c$   
Falls  $L(x, \lambda^*)$  konkav (konvex) in  $x$  ist, dann ist  $x^*$  ein globales Maximum (globales Minimum) von  $f(x)$  gegeben  $g(x) = c$ .  
(Leydold 2017: 3)

Konkave bzw. konvexe Lagrange Funktion begegnet man aber eher selten. Daher sollte man diesen Überprüfungsweg nur in Erwägung ziehen, wenn ein starker Verdacht auf Konkavität bzw. Konvexität der Lagrange Funktion herrscht. Um festzustellen ob  $L(x, \lambda^*)$  konkav (konvex) in  $x$  ist, bildet man die Hesse-Matrix dieser Lagrange-Funktion und betrachtet die Hauptminoren. Sind alle Hauptminoren  $> 0$  ( $< 0$ ), ist  $L(x, \lambda^*)$  konkav (konvex), dann liegt ein globales Minimum (Maximum) vor.

Im zweidimensionalen Fall könnte man noch die Möglichkeit in Betracht ziehen, die Funktion mittels eines CAS Programms zu plotten. Durch die graphische Darstellung könnte man bei gewissen Funktionen schnell erkennen, ob das lokale Extremum auch im globalen Sinne ein Extremum darstellt.

#### **4.4. Optimierung bei Funktionen in mehreren Variablen mit Nebenbedingung**

In der Praxis sind oft ausschließlich die Maxima oder die Minima einer Funktion mit einer Nebenbedingung gesucht, d.h. man sucht ein gewisses Optimum. Für derartige Problemstellungen kann man ebenfalls die Lagrange-Funktion benutzen.

Eine typische Optimierungsaufgabe besitzt folgende Form: Die Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  soll maximiert werden unter der Nebenbedingung  $g(x_1, \dots, x_n) \leq b$ , wobei  $b$  ein reeller Parameter ist. Um das globale Maximum zu bestimmen, ermittelt man zunächst die kritischen Punkte der Funktion  $f$  und beachtet dabei zunächst die Nebenbedingung nicht. Hat man die kritischen Stellen der Funktion  $f$  gefunden, überprüft man welche der ermittelten kritischen Stellen die Bedingung  $g(x_1, \dots, x_n) < b$  erfüllen. Jetzt muss man den Rand der Nebenbedingung betrachten. Man ermittelt nun weitere kritischen Punkte für die  $g(x_1, \dots, x_n) = b$  gilt. Zusätzlich muss auch noch der Rand des Rands untersucht werden. Hierfür berechnet man die kritischen Stellen der Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  unter der Nebenbedingung  $g(x_1, \dots, x_n) = b$ . An dieser Stelle wird die Lagrange Funktion  $L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda * (g(x_1, \dots, x_n) - b)$  benötigt. Das durch die

Lagrange Funktion entstandene Gleichungssystem wird nun gelöst und man erhält weitere kritische Punkte. Man muss nun die Funktionswerte der gesamten berechneten kritischen Punkte untereinander vergleichen und der kritische Punkt mit dem größten Funktionswert stellt dann das gesuchte Maximum dar.

Analog löst man eine Minimierungsaufgabe, bei der die Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  unter der Nebenbedingung  $g(x_1, \dots, x_n) \geq b$  gegeben ist. Hier muss man nur, statt die kritischen Punkte für die  $g(x_1, \dots, x_n) < b$  gilt zu ermitteln, diejenigen Punkte finden für die  $g(x_1, \dots, x_n) > b$  gültig ist.

## 5. Mehrdimensionale Extremwertberechnung bei wirtschaftlichen Anwendungen

Mehrdimensionale Extremwertberechnung wird in vielen Bereichen der Praxis benötigt. Diese findet Anwendungen in den Naturwissenschaften, aber auch im wirtschaftlichen Bereich. In diesem Kapitel werden ausschließlich Problemstellungen aus der Ökonomie behandelt, die bereits mit der vorgestellten fachmathematischen Theorie gelöst werden. Adaptiert und entsprechend didaktisch und fachlich aufbereitet, können diese Praxisaufgaben auch in der Schule verwendet werden.

Es finden sich viele mathematische Modellierungen von realen Sachverhalten in der Wirtschaft, insbesondere in der Mikroökonomie, Makroökonomie, Betriebswirtschaft und Volkswirtschaft. Diese Modelle enthalten oft Funktionen in mehreren Variablen, über die Informationen bezüglich ihren partiellen Ableitungen, Minima oder Maxima in der Praxis essentiell sind.

### 5.1.1. Bedeutung der ersten partiellen Ableitungen in der Wirtschaft

Im wirtschaftlichen Kontext schreibt man den ersten partiellen Ableitungen eine besondere Bedeutung abhängig von der zugrundeliegenden Funktion zu. Eine kurze Übersicht über die gebräuchlichsten Begriffe der ersten partiellen Ableitungen einiger wichtiger Funktionen im ökonomischen Bereich wird im Werk *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* geboten:

|                           |                                                                    |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $f$ : Produktionsfunktion | $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ : partielle Grenzproduktivitäten |
| $f$ : Gewinnfunktion      | $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ : partielle Grenzgewinne         |
| $f$ : Kostenfunktion      | $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ : partielle Grenzkosten          |

$f$  : Ertragsfunktion  
 Nollau (1995: 168)

$\frac{\partial f}{\partial x_k}$  : partielle Grenzerträge

Nähere Erläuterungen für die erste angeführte Bedeutung der ersten partiellen Ableitungen bei Nollau, die partielle Grenzproduktivität, entdeckt man bei Wendler und Tippe. Diese beschreiben die Grenzproduktivität in Worten folgendermaßen: „Die Grenzproduktivität gibt an, um wie viel sich die Ausbringungsmenge eines Unternehmens ändert, wenn ein Produktionsfaktor  $r_i$  um einen (infinitesimal) kleinen Betrag geändert wird. Dabei werden alle anderen Faktoren konstant gehalten“ (Wendler & Tippe 2013: 120). Das Verhältnis zwischen den Produktionsfaktoren und der Ausbringungsmenge oder auch Outputmenge genannt, wird durch die Produktionsfunktion beschrieben (Wendler & Tippe 2013: 120). „Sie gibt die höchste Produktionsmenge an, die ein Unternehmen mit Hilfe der jeweils gerade betrachteten Kombination der Produktionsfaktoren produzieren kann“ (Wendler & Tippe 2013: 120).

Die weiteren Begriffe wie Grenzgewinn, Grenzkosten und Grenzerträge können ähnlich in Worte beschrieben werden. Die Grenzerträge geben an, um wie viel sich der Umsatz der Firma ändert, wenn die Absatzmenge eines Produktes im Verkauf um einen infinitesimal kleinen Betrag variiert. Betrachtet man die ersten partiellen Ableitungen einer Kostenfunktion, die Grenzkosten, geben diese die Änderung der Kosten für eine Firma an, wenn eines der Produktionsgüter bzw. Produktionsfaktoren um einen infinitesimal kleinen Betrag geändert wird. Um den Begriff des Grenzgewinns näher zu beschreiben, ist zunächst die Gewinnfunktion an sich zu erklären. Im Allgemeinen erhält man die Gewinnfunktion eines Unternehmens, wenn man die Erlösfunktion von der Kostenfunktion subtrahiert. Die Grenzgewinne geben an, um wie viel der Gewinn der Firma variiert, wenn die Menge eines Produktes im Verkauf bzw. in der Produktion sich um einen infinitesimal geringen Wert ändert.

Zwei konkrete Beispiele für eine solche Produktionsfunktion, von der die Grenzproduktivitäten gesucht sind, werden bei Wendler und Tippe angeführt: „Gegeben seien die folgenden Produktionsfunktionen, die von mehreren Inputfaktoren  $r_i$  abhängen. Bestimmen Sie die partiellen Grenzproduktivitäten. a)  $f(r_1, r_2) = 2r_1^2 + 3r_2^2 - 10r_1r_2$  b)  $f(r_1, r_2) = 3r_1^2r_2 + r_1r_2 - 10r_1^2r_3^2$ “ (Wendler & Tippe 2013: 120).

### 5.1.2. Optimale Produktionsmengen

Die Optimierung stellt ein sehr weites und vielschichtiges Gebiet in den Wirtschaftswissenschaften dar. Bei Optimierungsaufgaben sind häufig die optimalen Mengen von bestimmten Gütern bzw. Produktionsfaktoren gefragt, bei denen der Gewinn, die Kosten oder der Nutzen maximal wird.

#### 5.1.2.1. Ohne Nebenbedingung

Eine Aufgabe bei der die optimale Menge von Produkten für einen maximalen Gewinn gesucht ist, findet man bei Wendler und Tippe:

Ein Unternehmen produziert zwei Produkte  $x_1$  und  $x_2$ . Die Gewinnfunktion sei in Abhängigkeit der Verkaufszahlen wie folgt gegeben:  $G(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 + 512x_2 - 1500$

Ermitteln Sie die gewinnoptimale Kombination der beiden Produkte und prüfen Sie, ob Sie tatsächlich ein Maximum der Gewinnfunktion finden konnten. Wie hoch ist der Gewinn?

(Wendler & Tippe 2013: 121)

Bei diesem Beispiel können zunächst die kritischen Stellen mit Hilfe der ersten partiellen Ableitungen der Gewinnfunktion ermittelt werden. Es ergibt sich  $x_1 = 256 = x_2$ . Die gefundene kritische Stelle ist nun  $(256, 256, 64036)$ .

Um sicher zu stellen, dass diese kritische Stelle tatsächlich das globale Maximum der Gewinnfunktion darstellt, muss nun der Rand der Gewinnfunktion betrachtet werden. Dazu überlegt man sich zunächst den möglichen Definitionsbereich. Da die Menge der Verkaufszahlen der zwei Produkte  $x_1$  und  $x_2$  nicht negativ sein kann, müssen  $x_1$  und  $x_2$  aus  $\mathbb{R}^+$  sein.

Man betrachtet nun die unteren Ränder  $G(0, x_2)$  bzw.  $G(x_1, 0)$  und bestimmt deren Maximum. Im ersten Fall erhält man das Maximum  $(0, 64, 14884)$  und im zweiten Fall das Maximum  $(0, 0, -1500)$ . Das bedeutet, dass das globale Maximum der Gewinnfunktion nicht auf diesen unteren Rändern sein kann.

Für die oberen Ränder betrachtet man den zweidimensionalen Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)$ . Um diesen Grenzwert zu bestimmen, bietet sich hier an Folgen zu betrachten. Dazu wird die Gewinnfunktion  $G(x) = -3x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 + 512x_2 - 1500$  geschickt durch quadratisch ergänzen umgeformt. Durch zweimaliges quadratisches Ergänzen ergibt sich die Gewinnfunktion  $G(x) = -3(x_1 - x_2)^2 - (x_2 - 256)^2 + 64036$ . Bei der

Grenzwertberechnung vom  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)$  entstehen nun zwei Fälle zum Untersuchen. Im ersten Fall ist  $x_1$  beschränkt und  $x_2$  geht gegen unendlich. Nun ist  $-3(x_1 - x_2)^2 \leq 0$  und  $-(x_2 - 256)^2$  geht gegen  $-\infty$ , also geht der Grenzwert insgesamt gegen  $-\infty$ . Im zweiten Fall geht  $x_1$  gegen unendlich und  $x_2$  ist beschränkt. Hier geht  $-3(x_1 - x_2)^2$  gegen  $-\infty$  und  $-(x_2 - 256)^2$  ist beschränkt, d.h. der Grenzwert geht hier auch gegen  $-\infty$ .

Vergleicht man die Funktionswerte bzw. die Grenzwerte der Ränder mit dem kritischen Punkt, stellt man fest, dass der kritische Punkt den größten Wert besitzt. Also muss das gesuchte globale Maximum der kritische Punkt (256|256|64036) sein.

Bei Wendler und Tippe stößt man auf eine weitere Aufgabe bei der ebenfalls eine Gewinnfunktion durch optimale Produktionsmengen maximiert werden soll:

In einem weiteren Unternehmen werden zwei unterschiedliche Flüssigkeiten hergestellt. Die Preis-Absatz-Funktionen sind  $p_1(x_1) = 60 - 3x_1$   $p_2(x_2) = 45 - 5x_2$

Die Mengen  $x_1$  und  $x_2$  werden in Hektoliter angegeben. Zudem ist die Kostenfunktion gegeben durch  $K(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$

Ermitteln Sie die optimale Kombination der beiden Produkte und prüfen Sie, ob Sie tatsächlich ein Maximum der Gewinnfunktion finden konnten.  
(Wendler & Tippe 2013: 121)

Hier muss die Gewinnfunktion zuerst ermittelt werden. Diese erhält man, wenn man von der Erlösfunktion die Kostenfunktion subtrahiert. Die Erlösfunktion setzt sich zusammen aus der Summe der zwei Preis-Absatz Funktionen, welche jeweils mit ihren Mengen multipliziert werden, d.h.  $E(x_1, x_2) = (60 - 3x_1) * x_1 + (45 - 5x_2) * x_2$ . Die Gewinnfunktion ist dann  $G(x_1, x_2) = (60 - 3x_1) * x_1 + (45 - 5x_2) * x_2 - 3x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$ . Setzt man die ersten partiellen Ableitungen gleich Null und löst dieses Gleichungssystem erhält man für  $x_1 = \frac{165}{38}$  und für  $x_2 = \frac{75}{38}$ . Also ist der gefundene kritische Punkt  $(\frac{165}{38} | \frac{75}{38} | \frac{13275}{76})$ . Jetzt muss noch der Rand der Funktion G betrachtet werden. Die Gewinnfunktion wird durch quadratisches Ergänzen geschickt umgeformt, um den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)$  zu berechnen. Die Gewinnfunktion kann durch dreimaliges quadratisches Ergänzen auf die Funktion  $G(x) = -7 \left(x_1 - \frac{30}{7}\right)^2 - 11 \left(x_2 - \frac{45}{22}\right)^2 + (x_1 - 2x_2)^2 + \frac{53775}{308}$ . Man erhält bei der Grenzwertermittlung zwei Fälle. Im ersten Fall

geht  $x_1 \rightarrow \infty$  und  $x_2$  ist beschränkt. Hier geht  $-7\left(x_1 - \frac{30}{7}\right)^2$  gegen  $-\infty$ ,  $-11\left(x_2 - \frac{45}{22}\right)^2$  ist beschränkt und  $(x_1 - 2x_2)^2$  ist  $\geq 0$ , insgesamt erhält man als Grenzwert  $-\infty$ .  
 Untersucht man nun den zweiten Fall ist  $-7\left(x_1 - \frac{30}{7}\right)^2$  beschränkt,  $-11\left(x_2 - \frac{45}{22}\right)^2$  geht gegen  $-\infty$  und  $(x_1 - 2x_2)^2$  ist  $\geq 0$ . Beim zweiten Fall erhält man wieder  $-\infty$  als Grenzwert. Daher ist das gesuchte globale Maximum im Punkt  $\left(\frac{165}{38} \mid \frac{75}{38} \mid \frac{13275}{76}\right)$ .

Ein weiteres Szenario für ein Maximierungsproblem einer Gewinnfunktion wird im Buch *Mathematics for Economists* von Simon und Blume beschrieben. Hier besitzt ein Unternehmen, welches eine Monopolstellung einnimmt, zwei verschiedene Absatzmärkte für ein Produkt (Simon & Blume 1994: 405) Die Zahlungsbereitschaft der Kunden ist bei den zwei Märkten unterschiedlich (Simon & Blume 1994: 406). Das Unternehmen steht nun vor der Frage, wie viel sie für jeden Markt jeweils produzieren sollen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen (Simon & Blume 1994: 406).

Zwei konkrete Beispiele eines solchen Maximierungsproblems werden bei Simon und Blume auch angeführt. Im ersten Beispiel gibt es zwei verschiedene Zielgruppen eines Produktes:

A monopolist producing a single output has two types of customers. If it produces  $Q_1$  units for customers of type 1, then these customers are willing to pay a price of  $50 - 5Q_1$  dollars per unit. If it produces  $Q_2$  units for customers of type 2, then these customers are willing to pay a price of  $100 - 10Q_2$  dollars per unit. The monopolist's cost of manufacturing  $Q$  units of output is  $90 + 20Q$  dollars. In order to maximize profits, how much should the monopolist produce for each market?

(Simon & Blume 1994: 406)

Um diese Aufgabe zu lösen, muss die zu maximierende Gewinnfunktion zuerst ermittelt werden. Die Gewinnfunktion setzt sich aus den Erlösen minus den Kosten zusammen:

$$G(Q_1, Q_2) = Q_1(50 - 5Q_1) + Q_2(100 - 10Q_2) - (90 + 20 * (Q_1 + Q_2)) .$$

Löst man das durch die partiellen Ableitungen entstandene Gleichungssystem, bekommt man für die Variablen die Werte  $Q_1 = 15$  und  $Q_2 = 40$  heraus. Der kritische Punkt ist also  $(15|40|1735)$ .

Nun muss der Rand betrachtet werden, indem man den  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(Q)$ . Durch quadratisches Ergänzen erhält man die Funktion  $G(Q) = -5(Q_1 - 3)^2 - 10(Q_2 - 4)^2 + 205$ . Bei der zweidimensionalen Grenzwertberechnung unterscheidet man wieder zwischen zwei Fällen. Im ersten Fall geht  $Q_1$  gegen unendlich und  $Q_2$  ist beschränkt und im zweiten Fall

ist  $Q_1$  beschränkt und  $Q_2$  geht gegen unendlich. Beim ersten Fall geht  $-5(Q_1 - 3)^2$  gegen  $-\infty$  und  $-10(Q_2 - 4)^2$  ist beschränkt, d.h. der Grenzwert geht insgesamt gegen  $-\infty$ . Im zweiten Fall ist  $-5(Q_1 - 3)^2$  beschränkt und  $-10(Q_2 - 4)^2$  nähert sich  $-\infty$ , also geht der Grenzwert insgesamt auch im zweiten Fall gegen  $-\infty$ . Vergleicht man nun den Funktionswert des ermittelten kritischen Punkts mit den zwei Grenzwerten, stellt man fest, dass das gesuchte Maximum der kritische Punkt (15|40|1735) ist.

Bei der zweiten Aufgabe, die ein ähnliches Maximierungsproblem beschreibt, gibt es zwei verschiedene Kundentypen, die dieselbe Dienstleistung in Anspruch nehmen:

Dingbat Airlines has regular flights between Ypsilanti and Kalamazoo. It can treat business and pleasure travelers as separate markets by demanding advance purchase and Saturday night-stay over for pleasure travelers. Suppose that it notes a demand function of  $Q = 16 - p$  for business travelers and a demand function  $Q = 10 - p$  for pleasure travelers and that it has a cost function for all travelers of  $C(Q) = 10 + Q^2$ . How much should it charge in each market to maximize its profit?

(Simon & Blume 1994: 410)

Gesucht sind nun die optimalen Preise für den Flug der zwei Kundengruppen, die Geschäftsreisenden und die Reisenden, die zum Vergnügen das Transportmittel nutzen. Für die erste Kundengruppe sei  $p_G$  der Preis für den Flug und für die zweite Gruppe  $p_V$ . Die Gewinnfunktion setzt sich zusammen aus der Erlösfunktion minus der Kostenfunktion. Die Nachfragefunktionen beschreiben jeweils für eine Zielgruppe, wie viele Personen bereit sind bei einem gewissen Preis  $p$  mit der Airline zu fliegen. Für die Geschäftsreisenden erhält man dann bei einem Preis von  $p_G$  als Erlös  $p_G(16 - p_G)$  und bei den zum Vergnügen Reisenden bei einem Preis von  $p_V$  als Erlös  $p_V(10 - p_V)$ . Die Erlöse werden nun addiert und man erhält die Erlösfunktion  $E(p_G, p_V) = p_G(16 - p_G) + p_V(10 - p_V)$ . Die gegebene Kostenfunktion  $C$  beschreibt den Zusammenhang zwischen den Kosten für die Airline und  $Q$ , der Anzahl der Passagiere. Die Anzahl der Passagiere wird durch die Nachfragefunktionen der zwei Zielgruppen beschrieben und beträgt insgesamt  $(16 - p_G + 10 - p_V)$ . Es ergibt sich die Kostenfunktion  $K(p_G, p_V) = 10 + (26 - p_G - p_V)^2$ . Die zu maximierende Gewinnfunktion ist dann  $G(p_G, p_V) = p_G(16 - p_G) + p_V(10 - p_V) - 10 - (26 - p_G - p_V)^2$ .

Ein Beispiel für eine Ertragsfunktion eines Unternehmens, die maximiert werden soll, wird bei Nollau im Werk *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* angeführt:

Der funktionale Zusammenhang zwischen den Absatzquantitäten  $y_1, y_2$  zweier Produkte  $P_1$  und  $P_2$  und ihren Preisen  $x_1, x_2 (> 0)$  sei durch Absatzfunktionen  $f_1: y_1 = f_1(x_1, x_2) = 100 - 4x_1 - 2x_2$   $f_2: y_2 = f_2(x_1, x_2) = 180 - 3x_1 - 9x_2$  mit den (ökonomischen) Definitionsbereichen  $D_{f_1} = \{(x_1, x_2): y_1 > 0\}$  bzw.

$D_{f_2} = \{(x_1, x_2): y_2 > 0\}$  gegeben.

(Nollau 1995: 174)

Gesucht ist das globale Maximum der Ertragsfunktion, welche sich aus den zwei Absatzfunktionen und den zwei Absatzquantitäten folgendermaßen zusammensetzt:  $E(x_1, x_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$  (Nollau 1995: 174). Mithilfe der ersten partiellen Ableitungen und der Betrachtungen der Ränder lässt sich das globale Maximum der Ertragsfunktion bestimmen.

### 5.1.2.2. Mit Nebenbedingung

Oft ist neben der zu maximierenden oder minimierenden Funktion auch eine Nebenbedingung gegeben, welche die möglichen Lösungen der Extremwertaufgabe einschränkt. Hier benötigt man zur Ermittlung des Extremwertes die Lagrange-Funktion.

Nollau beschreibt eine Aufgabenstellung allgemein für eine zu minimierende Kostenfunktion mit einer Produktionsfunktion als Nebenbedingung:

Minimalkostenkombination

Ein Unternehmen produziere einen Output  $z$  gemäß einer Produktionsfunktion  $g: z = g(x_1, \dots, x_n)$  von  $n$  Inputfaktoren  $x_1, \dots, x_n$ . Die Aufgabe, für die Faktorpreise  $p_1, \dots, p_n$  bei vorgegebenem Output  $Z (= \text{const})$  die gegebenen Gesamtkosten des Inputs zu minimieren, führt zu folgender Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung (NB):  $y = f(x_1, \dots, x_n) := x_1 p_1 + \dots + x_n p_n \rightarrow$

$\min g(x_1, \dots, x_n) = Z$  (NB).

(Nollau 1995: 183)

Zur Ermittlung des Minimums muss zunächst die Lagrange Funktion  $L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i p_i + \lambda (Z - g(x_1, \dots, x_n))$  gebildet werden (Nollau 1995: 183). Die ersten partiellen Ableitungen führen auf die Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$

⋮

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = p_n - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Z - g(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (\text{Nollau 1995: 184}).$$

Bei näherer Betrachtung der Gleichungen, erkennt man, dass für zwei beliebige Inputfaktoren  $x_i$  und  $x_k$ , wobei  $i \neq k$  und  $k = 1, \dots, n$  der folgende Zusammenhang

existiert:  $\frac{p_i}{p_k} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_k}}$  (Nollau 1995: 184). Hier taucht der Begriff der Grenzproduktivitäten

bei der rechten Seite der Gleichung auf. Für das Minimum der Extremwertaufgabe gilt dann, dass die Kosten für das Unternehmen minimiert werden, wenn „das Verhältnis je zweier partieller Grenzproduktivitäten gleich dem Verhältnis der entsprechenden Inputfaktorenpreise ist“ (Nollau 1995: 184).

Eine Interpretation dieses Lagrange Parameters findet man bei Unterlagen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der VWL“ von Till Stowasser: „Der Lagrange-Parameter gibt an, um welchen Betrag sich der Wert der Zielfunktion im Optimum ändert, wenn die Nebenbedingung um eine marginale Einheit gelockert wird“ (Stowasser 2014). Stowasser nennt auch illustrative Beispiele für die Interpretation des Lagrange Parameters in der Praxis:

Landwirt maximiert seinen Gewinn unter einer Bodenbeschränkung.  $\lambda$  gibt an, um wieviel der Gewinn des Landwirts steigen würde, wenn er eine zusätzliche Einheit Boden zur Verfügung hätte.

Konsument maximiert seinen Nutzen unter einer Budgetbeschränkung.  $\lambda$  gibt an, um wieviel der Nutzen des Konsumenten steigt, wenn er eine zusätzliche Geldeinheit Budget zur Verfügung hat.

Unternehmen minimiert seine Kosten unter der Nebenbedingung, dass es eine bestimmte Menge Output produzieren muss.  $\lambda$  gibt an, um wieviel die Kosten sinken, wenn eine Outputeinheit weniger produziert werden muss. (Stowasser 2014)

Ein Anwendungsbeispiel, bei dem die erste der Interpretationen des Lagrange Parameters zu tragen kommt, findet man bei Stowasser:

Das Bodenallokationsproblem des Bauern

Modell-Setup

Ein Landwirt hat 12 Hektar Land, auf dem er Getreide oder Gemüse anbauen kann. Sei

$x_1$  Hektar Land für Getreideproduktion

$x_2$  Hektar Land für Gemüseproduktion

$G_1(x_1)$  Gewinn aus Getreideproduktion,  $G_1(x_1) = 8x_1$

$G_2(x_2)$  Gewinn aus Gemüseproduktion,  $G_2(x_2) = 32\sqrt{x_2}$

Optimierungsproblem

Sein Gewinnmaximierungsproblem lautet folglich:

$\max_{x_1, x_2} 8x_1 + 32\sqrt{x_2}$  unter der Nebenbedingung  $x_1 + x_2 \leq 12$ .

Da der Grenzgewinn aus dem Gemüse- und dem Getreideanbau immer positiv ist, kann es nicht optimal sein, Land brach liegen zu lassen. Also muss im Optimum die Nebenbedingung mit Gleichheit erfüllt sein.  
(Stowasser 2014)

Nachdem man hier das Lagrange-Verfahren mit der Nebenbedingung  $x_1 + x_2 = 12$  angewendet hat, erhält man hier als kritischen Punkt  $(8|4|128)$ . Berechnet man die Funktionswerte der Ränder, stellt man fest, dass diese kleiner sind als die Funktionswerte des kritischen Punktes  $(8|4|128)$ . Also ist  $(8|4|128)$  das gesuchte globale Maximum.

Die zweite Interpretation des Lagrange Parameters trifft bei einem Beispiel aus dem Werk *Mathematik für Volks- und Betriebswirte* zu:

Einem Haushalt steht eine bestimmte Geldmenge  $C$  für Konsumzwecke zur Verfügung, die er auf drei verschiedene Konsumgüter  $x, y$ , und  $z$  verteilen kann. Die zugehörigen Preise  $p_x, p_y$  und  $p_z$  seien unabhängig von der Höhe der Nachfrage nach den Gütern. Weiterhin kann man jedem Gut einen bestimmten Nutzen  $U$  zuordnen, der abhängig von der jeweiligen Menge ist:

$$U_x = 2\sqrt{x} \quad U_y = 16\sqrt{y} \quad U_z = 24\sqrt{z}$$

Außerdem sei  $C = 537$   $p_x = 1$ ,  $p_y = 6$  und  $p_z = 3$

Geben Sie die Mengenkombination an, für die der Gesamtnutzen des Haushaltes maximiert wird (Lagrangemethode!). Der Einfachheit halber unterstellen wir eine Gesamtnutzenfunktion, die sich additiv aus den Einzelnutzen zusammensetzt.

(Kallischnigg et al. 2003: 119)

Im ersten Schritt muss man hier die Zielfunktion und die Nebenbedingung aufgestellt gefunden werden. Die Zielfunktion ist hier  $U(x, y, z) = 2\sqrt{x} + 16\sqrt{y} + 24\sqrt{z}$  und die Nebenbedingung  $x + 6y + 3z = 537$ . Nun kann das Lagrange-Verfahren angewendet werden. Die gefundene kritische Stelle ist nun zu überprüfen, ob diese auch tatsächlich das globale Maximum darstellt. Hierzu betrachtet man wieder den Rand der Funktion und vergleicht die Funktionswerte am Rand mit dem der gefundenen kritischen Stelle.

### 5.1.3. Standortbestimmung

Die geographische Lage eines Firmengebäudes spielt oft eine große Rolle hinsichtlich der Logistik für ein Unternehmen. Eine Produktionsfirma wird versuchen einen Standort für ihre Gebäude zu finden, sodass kurze Transportwege zwischen den Gebäuden und damit auch geringe Transportkosten anfallen.

Im Werk *Wirtschaftsmathematik für Studium und Praxis 3* von Rödter und Zörnig wird eine Minimierungsaufgabe für eine Standortbestimmung vorgestellt:

Ein ausländischer Automobilkonzern hat im Laufe der letzten Jahre 5 Filialen  $F_1, \dots, F_5$  in den neuen Bundesländern errichtet. Zur Belieferung der hauseigenen Reparaturwerkstätten ist der Bau eines Ersatzteillagers  $L$  geplant. Der Standort des Lagers soll so gewählt werden, da[ss] die Kosten der anfallenden Transporte vom Lager zu den Filialen minimiert werden.

Da zunächst nur der Makrostandort (z.B. der Kreis oder Bezirk) bestimmt werden soll, geht man von der stark vereinfachten Annahme aus, da[ss] jeder Punkt des gesamten Territoriums gleichermaßen als Standort geeignet ist (Homogenität des Territoriums). Für die geographischen Koordinaten  $x_i$  und  $y_i$  der Filiale  $F_i$  sind die Werte  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = x_4 = 4$ ,  $x_5 = 7$  und  $y_1 = -4$ ,  $y_2 = y_3 = 1$ ,  $y_4 = 5$ ,  $y_5 = -5$  ermittelt worden. Die zu erwartenden Transportmengen, die das Lager  $L$  in einer Planungsperiode an  $F_i$  ausliefern mu[ss], sind  $a_1 = a_2 = 3$ ,  $a_3 = 6$ ,  $a_4 = 5$ ,  $a_5 = 3$ . Mit  $x$  und  $y$  werden die zu bestimmenden Koordinaten des Lagers  $L$  bezeichnet.

[...]

Aufgrund der bisherigen Erfahrungen wird davon ausgegangen, da[ss] die Kosten des Transports von  $L$  zu  $F_i$  linear mit der Transportmenge  $a_i$  und quadratisch mit der Entfernung  $r_i := \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$  zwischen  $L$  und  $F_i$  zunehmen. Letzteres ist u.a. durch Überstunden der Fahrer bedingt, die bei weiten Strecken anfallen.

Die gesamten Fahrkosten sind somit (abgesehen von einem Proportionalitätsfaktor) durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_1 r_1^2 + \dots + a_5 r_5^2 \\ &= a_1 ((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2) + \dots + a_5 ((x - x_5)^2 + (y - y_5)^2) \end{aligned}$$

gegeben.

(Rödder & Zörnig 1996: 68-69)

Bei dieser Aufgabe ist ein Minimierungsproblem einer Funktion in zwei Variablen mit den Konstanten  $x_i$ ,  $y_i$  und  $a_i$  ohne Nebenbedingung gegeben. Mithilfe der ersten partiellen Ableitungen lässt sich ein kritischer Punkt dieser Funktion ermitteln. Durch Überprüfung der Definitheit der Hesse-Matrix in diesem Punkt stellt sich heraus, dass der gefundene kritischer Punkt das lokale Minimum darstellt. Durch Überprüfung der Funktionswerte am Rand erkennt man, dass das vorhin gefundene lokale Minimum auch das globale Minimum darstellt. Um die geographischen Koordinaten des optimalen Standorts zu erhalten, setzt man die in der Aufgabenstellung enthaltenden Werte für  $x_i$ ,  $y_i$  und  $a_i$  im globalen Minimum ein.

Zu dieser Aufgabenstellung wird noch von Rödder und Zörnig angemerkt, dass bei dieser Aufgabe in der Praxis die zu minimierende Funktion  $f(x, y) = a_1 r_1 + \dots + a_5 r_5 = a_1 \sqrt{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)} + \dots + a_5 \sqrt{((x - x_5)^2 + (y - y_5)^2)}$  vermutlich

realistischer wäre (1996: 69). Hier würden die Transportkosten statt quadratisch linear mit den Entfernungen  $r_i$  zunehmen. Diese Funktion lässt sich jedoch nicht mit den vorgestellten Methoden dieser Arbeit lösen. Für diese Minimierungsaufgabe benötigt man ein iteratives Verfahren (Rödter & Zörnig 1996: 70).

Ein sehr ähnliches Standortproblem wie bei Rödter und Zörnig findet man im Werk *Mathematische Optimierung* von Pieper. In diesem Fall soll der optimale Lagerstandort für drei Läden einer Supermarktkette berechnet werden:

Als konkretes Beispiel gehen wir von drei Supermärkten aus, die sich an den folgenden Standorten befinden [...]:

$$P_1 = (0,0), P_2 = (4,-2) \text{ und } P_3 = (3,4)$$

Im Optimierungsproblem suchen wir nun nach einem Standort  $P = (x,y)$  zwischen den Supermärkten, sodass der Abstand zu allen drei Punkten  $P_i$  möglichst klein wird. Um dieses Problem mathematisch zu modellieren, berechnen wir zunächst den euklidischen Abstand der drei Supermärkte zum gesuchten Punkt  $P = (x,y)$ . Diese erhalten wir nach dem Satz von Pythagoras:

$$d_i := \sqrt{(x - p_x^i)^2 + (y - p_y^i)^2} \text{ wobei wir mit } p_x^i \text{ und } p_y^i \text{ die Koordinaten der Punkte } P_i \text{ bezeichnet haben, an denen die Supermärkte liegen.}$$

Wir wollen alle Abstände gleichzeitig minimieren, daher addieren wir sie. Setzen wir unsere Punkte ein, erhalten wir das Optimierungsproblem:

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}.$$

(Pieper 2017: 6-7)

Bei diesem Minimierungsproblem spielt im Vergleich zu der Problemstellung bei Rödter und Zörnig lediglich die Entfernung eine Rolle für den optimalen Standort. Die partiellen Ableitungen führen jedoch auf nicht-lineare Gleichungen, welche nicht ganz so einfach gelöst werden können. Ein iteratives Verfahren könnte hier angewendet werden. Eine weitere Möglichkeit wäre, ein CAS-Programm zur Hilfe zu nehmen und die nicht-linearen Gleichungen zu lösen, um das Minimum zu bestimmen. Das Plotten und Betrachten der Zielfunktion verschafft dann die Sicherheit, dass das gefundene Minimum tatsächlich auch das globale Minimum darstellt.

## 6. Unterrichtsvorschlag für die Extremwertbestimmung bei Funktionen in mehreren Variablen

### 6.1. Einleitung

Dieser Unterrichtsvorschlag umfasst eine konkrete Stundenplanung inklusive aller nötigen Materialien für den Unterricht der mehrdimensionalen Extremwertberechnung.

Ein besonderer Fokus liegt auf ausgewählte wirtschaftliche Anwendungen, die zusätzlich zu innermathematischen Kontexten betrachtet werden.

Der Unterrichtsvorschlag ist so konzipiert, dass die meiste Zeit für Übungsphasen und Vertiefungsphasen aufgewendet wird. In diesen Phasen beschäftigen sich die Schüler und Schülerinnen selbstständig mit dem Stoff. Nicht enthalten sind in dieser Unterrichtsplanung schriftliche Abgaben, die von den Schülern und Schülerinnen Zuhause gemacht werden sollen. Zusätzliches Material für Hausübungen wäre noch optimal zur weiteren Vertiefung und würde diesen Unterrichtsvorschlag gut ergänzen. Dieses Material sollte nach den Bedürfnissen und nach dem Zeitkontingent der Schüler und Schülerinnen angepasst sein. Daher enthält dieser Unterrichtsvorschlag in dieser Richtung kein Material.

Das vorhandene Material besteht aus Arbeitsblättern, die als Ausdruck für die Schüler und Schülerinnen gedacht sind. Man stützt sich bei der Stundenplanung wenig auf technologische Unterstützung. Der Fokus liegt hier vorrangig auf dem Verstehen und händischen Operieren. Man könnte diesen Unterrichtsvorschlag jedoch als Basis verwenden, um den Schülern und Schülerinnen die einzelnen Berechnungen durch CAS Programme zu lehren.

## **6.2. Ziele**

Der Unterrichtsvorschlag beschränkt sich auf das Wesentliche der Extremwertberechnung in mehreren Variablen und stellt einen Praxisbezug durch ausgewählte außermathematische wirtschaftliche Anwendungen her. Er ist als Einstieg in die Thematik für den schulischen Bereich geeignet. Konkret lernen die Schüler und Schülerinnen die Extremwertberechnung von Funktionen in zwei und in drei Variablen ohne Nebenbedingung und von Funktionen in zwei Variablen mit einer Nebenbedingung. In der Unterrichtsplanung arbeitet man hier ausschließlich mit Polynomfunktionen und Potenzfunktionen, da diese für Schüler und Schülerinnen leicht zu handhaben sind.

## **6.3. Voraussetzungen**

Der folgende Unterrichtsvorschlag knüpft an das bereits im Regelunterricht erlangte Vorwissen der Schüler und Schülerinnen des dritten Jahrgangs der AHS-Oberstufe bzw. des vierten Jahrgangs der berufsbildenden höheren Schulen an.

Zusätzlich zu jenen Fertigkeiten, die in allen Lehrplänen jener Jahrgänge der zweiten Sekundarstufe enthalten sind, wird in diesem Unterrichtsvorschlag noch vorausgesetzt, dass die Schüler und Schülerinnen bereits mit der Grundidee von Funktionen in mehreren Variablen vertraut sind und partielle Ableitungen deuten und auch berechnen können. Konkret stellen nachfolgende Punkte die Voraussetzung dar, um mit dem Unterrichtsvorschlag arbeiten zu können:

#### Bereich Funktionen in einer Variablen

- Wissen, dass Funktionen in einer Variablen als Zuordnungsvorschrift verstanden werden können
- Wissen, dass Funktionen in einer Variablen Zusammenhänge zwischen zwei Größen darstellen.
- Zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen bei Funktionen in einer Variablen unterscheiden können
- Ableitungen berechnen können mittels elementarer Differentiationsregeln bei Polynom-Funktionen in einer Variablen
- Ableitungen deuten können in innermathematischen, aber auch außermathematischen Kontexten bei Funktionen in einer Variablen
- Lokale und globale Extrema ermitteln können bei Funktionen in einer Variablen

#### Bereich Gleichungssysteme:

- Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variablen
- Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen
- Lösen von linearen Gleichungssystemen mit drei Gleichungen in drei Variablen

#### Bereich Funktionen in mehreren Variablen

- Wissen, dass Funktionen in mehreren Variablen als Zuordnungsvorschrift verstanden werden können
- Wissen, dass Funktionen in mehreren Variablen Zusammenhänge zwischen gewissen Größen darstellen.
- Zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen bei Funktionen in mehreren Variablen unterscheiden können

- Funktionen in zwei Variablen in Geogebra plotten können
- Lösen von Extremwertaufgaben in zwei Variablen durch das Substitutionsverfahren
- Partielle Ableitungen bei Polynomfunktionen in mehreren Variablen berechnen können
- Partielle Ableitungen bei Funktionen in zwei Variablen geometrisch deuten können

## 6.4. Übersicht der Einheiten

Insgesamt beinhaltet dieser Unterrichtsvorschlag sechs Unterrichtseinheiten. Die ersten vier Einheiten beschäftigen sich mit der mehrdimensionalen Extremwertberechnung ausschließlich im innermathematischen Sinn. Wirtschaftliche Kontexte bei denen die mehrdimensionale Extremwertberechnung ihre Anwendung findet, werden in den letzten zwei Einheiten behandelt.

Es ist noch anzumerken, dass in der Stundenplanung eine Dauer von 45 Minuten für eine Unterrichtseinheit angenommen wird. In der Realität variiert die Dauer einer Einheit bei den Schulen, meistens liegt sie zwischen 45 und 55 Minuten. Da oft auch noch Organisatorisches wie Überprüfung der Anwesenheit oder das Einsammeln diverser schriftlicher Abgaben im Unterricht anfällt, scheinen 45 Minuten reine Lehrzeit für die Übermittlung des Stoffs als gutes realistisches Mittelmaß.

Darüber hinaus ist noch zu berücksichtigen, dass in den Stundenplänen die angegebenen Zeitangaben für die jeweiligen Stundenabschnitte als Richtwerte betrachtet werden sollen. Die Echtzeit hängt individuell von der zu unterrichtenden Schüler- und Schülerinnengruppe ab.

### 6.4.1. Erste Einheit

In der ersten Einheit lernen die Schüler und Schülerinnen Extrema und Sattelpunkte im Mehrdimensionalen kennen und es werden erste Schritte zur Bestimmung von lokalen Extrema gelernt. Die Einheit ist grob unterteilt in zwei Teile, einen theoretischen Teil und einen Übungsteil, bei dem die Theorie vertieft wird. Der theoretische Teil ist kurz und bündig gehalten, sodass noch etwas mehr als die Hälfte der Einheit der Anwendung der Theorie gewidmet ist.

Am Beginn der Einheit werden zunächst die verschiedenen Arten von kritischen Punkten im Mehrdimensionalen vorgestellt. Hier kann auf das Vorwissen der Schüler und Schülerinnen bezüglich der Extrema bei Funktionen in einer Variablen aufgebaut werden. Da im Alltag die Umwelt dreidimensional wahrgenommen wird und es mittels CAS-Programmen leicht möglich dreidimensional darzustellen, macht es hier Sinn die verschiedenen kritischen Punkte von Funktionen in zwei Variablen geometrisch den Schülern und Schülerinnen vorzustellen. Eine Verknüpfung der mathematischen Begriffe der Extrema mit Alltagsvorstellungen erleichtert den Lernprozess.

Anschließend wird die Theorie bezüglich der Bestimmung der kritischen Stellen, der Hesse-Matrix und der Eigenwerte von Dreiecksmatrizen und Diagonalmatrizen behandelt. Hier wird darauf geachtet, dass die Theorie sehr allgemein und auch verbal statt nur formal präsentiert wird, um auch den Schülern und Schülerinnen die Möglichkeit zu bieten, den Inhalt in Worte zu erfassen. An dieser Stelle wurde die Entscheidung getroffen, dass die Schüler und Schülerinnen die lokalen Extrema und Sattelpunkte, ausschließlich mit Hilfe der Eigenwerte lernen zu ermitteln. Im fachmathematischen Teil dieser Arbeit wurde auch das Sylvester-Kriterium als Mittel zur Bestimmung der Art der lokalen Extrema vorgestellt. Weil dieses Kriterium jedoch nicht in allen Fällen eindeutige Ergebnisse liefert und nicht unbedingt weniger komplex wie die Methode der Eigenwertbestimmung ist, wird in diesem Unterrichtsvorschlag nur die Eigenwertbestimmung für die Untersuchung der lokalen Extrema präsentiert.

Im Übungsteil der Stunde werden die ersten notwendigen Schritte für die Untersuchung der lokalen Extrema und Sattelpunkte isoliert betrachtet. Dies soll den Schüler und Schülerinnen es erleichtern, die Theorie zu vertiefen, denn der gesamte Prozess zur lokalen Extremwertbestimmung steht hier noch nicht im Vordergrund. Dieser Prozess wird in der darauffolgenden Stunde genauer behandelt. Bei den anspruchsvolleren Aufgaben 1 und 2 des Arbeitsblatts werden die Schüler und Schülerinnen zunächst beim Unterpunkt a) noch angeleitet von der Lehrkraft, um sie beim ersten Anwenden der Theorie zu unterstützen. Den zweiten Unterpunkt b) der Aufgaben 1 und 2 sowie die Aufgabe 3 lösen die Schüler und Schülerinnen in zweier Teams. Der Grundgedanke wäre hier, dass sich die Schüler und Schülerinnen so langsam auf das selbstständige Lösen der Aufgaben vorbereiten und sich dennoch gegenseitig über die Theorie im Diskurs austauschen können.

### 6.4.2. Zweite Einheit

Die zweite Einheit schließt inhaltlich direkt an die erste Einheit an. Nun werden den Schülern und Schülerinnen die restlichen erforderlichen Schritte zur lokalen Extremwertbestimmung nähergebracht. Ähnlich wie die erste Stunde, ist diese zweite Einheit auch geprägt von einer theoretischen Inputphase und einem anschließenden praktischen Übungsteil. Die theoretische Inputphase fällt im Vergleich zum Übungsteil nun sehr kurz aus.

Im theoretischen Teil der Einheit lernen die Schülerinnen und Schüler, wie man die Eigenwerte einer Matrix bestimmt, deren Form keiner Dreiecksmatrix oder Diagonalmatrix entspricht. Hierzu wird den Schüler und Schülerinnen das Gauß-Verfahren vorgestellt. Die Schüler und Schülerinnen lernen wie man eine gegebene  $2 \times 2$  oder  $3 \times 3$  Matrix in eine obere oder untere Dreiecksmatrix umformt. Das Verfahren des charakteristischen Polynoms wird in diesem Unterrichtsvorschlag nicht vorgestellt, da dieses Verfahren besonders bei  $3 \times 3$  Matrizen aufwändiger ist als das Gauß-Verfahren. Außerdem müsste man in diesem Zusammenhang die Determinantenberechnung und das Lösen von Gleichungen dritten Grades den Schülern und Schülerinnen lehren. Die Grundidee des Gauß-Verfahrens sollte für die Schüler und Schülerinnen leichter sein zu verstehen, denn bereits beim Eliminationsverfahren eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen werden oft auch passende Vielfache einer Gleichung gesucht, um eine Variable schlussendlich zu eliminieren.

Da nun die möglichen Vorgehensweisen für die Eigenwertbestimmung den Schülern und Schülerinnen bekannt sind, wird der Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der Eigenwerte einer Hesse-Matrix in einem kritischen Punkt und dem Extremwertverhalten des kritischen Punkts vorgestellt. Hier werden nicht alle möglichen Fälle behandelt, der Fall, dass die Eigenwerte  $\geq 0$  sind und der Fall, dass die Eigenwerte  $\leq 0$  sind, werden hier ausgelassen. Diese zwei Fälle sind zwar interessant zu betrachten, jedoch sind diese für den Unterrichtsvorschlag, der eine übersichtliche Einführung in die Extremwertberechnung bei Funktionen in mehreren Variablen darstellt, nicht unbedingt essentiell. Man könnte mündlich kurz erwähnen, dass es diese Fälle gibt und wie man hier vorgehen würde, um ein eindeutiges Ergebnis bezüglich des lokalen Extremwertverhaltens eines kritischen Punkts zu erhalten.

Im Übungsteil haben die Schüler und Schülerinnen die Gelegenheit, die gelernte Theorie anzuwenden. Es wird zuerst das Umformen einer Matrix zu einer Dreiecksmatrix geübt und anschließend wird die gesamte Theorie der ersten und zweiten Einheit für die Bestimmung der lokalen Extrema bei Funktionen in zwei Variablen benötigt. Funktionen in drei Variablen werden hier noch nicht betrachtet, damit die Schüler und Schülerinnen den Prozess des Findens von lokalen Extremwert an sich üben können. Die Schwierigkeit der einzelnen Schritte wird dann erst in der nächsten Einheit erhöht, indem man dann auch die lokalen Extremwerte und Sattelpunkte von Funktionen in drei Variablen berechnet.

#### **6.4.3. Dritte Einheit**

Die dritte Einheit behandelt die globale Extremwertbestimmung bei Funktion in mehreren Variablen. Zusätzlich werden die Kenntnisse zur lokalen Extremwertbestimmung bei Funktionen in drei Variablen vertieft und angewendet. Die Einheit besteht erneut aus einem kurzen theoretischen Block und einer längeren Übungsphase.

Der theoretische Teil stellt den Beginn der Unterrichtsstunde dar. Im ersten Schritt wird allgemein auf die Randuntersuchung bei Funktionen in mehreren Variablen eingegangen. Für die Randuntersuchung werden hier im Unterrichtsvorschlag beschränkte abgeschlossene Intervalle für die unabhängigen Variablen betrachtet. Mit diesen Intervallen können die Schüler und Schülerinnen leichter umgehen wie mit z.B. beschränkten offenen Intervallen, bei denen das Verstehen von einem zweidimensionalen Grenzwert notwendig wäre. Die globale Extremwertberechnung wird anhand eines konkreten Beispiels, nämlich einer Funktion in zwei Variablen mit beschränktem offenem Rand, anschaulich Schritt für Schritt erklärt.

Im praktischen Übungsteil bekommen die Schüler und Schülerinnen zuerst Zeit, selbstständig ihr erlangtes Wissen zur lokalen Extremwertbestimmung bei einer Funktion in drei Variablen anzuwenden. Danach berechnen die Schüler und Schülerinnen von der Lehrkraft angeleitet die globalen Extrema einer gegebenen Funktion in zwei Variablen mit beschränkten abgeschlossenen Rändern.

#### **6.4.4. Vierte Einheit**

In der vierten Einheit geht es um die globale Extremwertbestimmung bei Funktionen in zwei Variablen mit Nebenbedingung. In diesem Zusammenhang lernen die Schüler und Schülerinnen das Lagrange-Verfahren kennen.

Zunächst erfolgt eine kurze allgemeine Übersicht zum Lagrange-Verfahren und zur Randuntersuchung. Danach wird die globale Extremwertberechnung bei einer Funktion in zwei Variablen mit Nebenbedingung anhand eines konkreten Beispiels mit den Schülern und Schülerinnen besprochen.

Anschließend berechnen die Schüler und Schülerinnen selbstständig mit einem Partner die globalen Extrema bei zwei gegebenen Funktionen in zwei Variablen. Bei der ersten Funktion ist es vorgesehen, dass die Schüler und Schülerinnen das durch die partiellen Ableitungen entstehende lineare Gleichungssystem ohne Technologieeinsatz per Hand lösen. Bei der zweiten Funktion ergibt sich ein nicht lineares Gleichungssystem bei den partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion. Hier macht es durchaus Sinn, dieses nicht-lineare Gleichungssystem mit Hilfe von *Geogebra* zu lösen, da die Schüler und Schülerinnen im Regelfall keine Verfahren kennen, um nicht-lineare Gleichungssysteme lösen zu können.

Nach dieser Einheit haben die Schüler und Schülerinnen nun allgemein die wichtigsten fachmathematischen Grundlagen für die lokale und globale Extremabestimmung bei Funktionen in zwei oder drei Variablen erlernt. Außerdem können sie auch globale Extrema bei Funktionen in zwei Variablen mit einer Nebenbedingung ermitteln. Die nachfolgenden Einheiten bauen nun auf das erworbene fachmathematische Wissen der ersten vier Einheiten auf.

#### **6.4.5. Fünfte Einheit und sechste Einheit**

Die fünfte Einheit und sechste Einheit kann als Ganzes betrachtet werden, da hier ein Stationenbetrieb im Zeitraum von zwei Stunden geplant ist und man die Unterrichtsaktivitäten daher nicht einzelnen Stunden zuordnen kann. In diesen zwei Unterrichtseinheiten lernen die Schüler und Schülerinnen einige Anwendungen der Extremwertberechnung in mehreren Variablen in einem wirtschaftlichen Kontext kennen.

Die erste Station behandelt die Maximierung des Gewinns von Unternehmen, wobei in diesem Zusammenhang auch Erlöse und Kosten betrachtet werden. In einem konkreten

Beispiel eines Smartphone-Herstellers berechnen die Schüler und Schülerinnen die optimalen zu produzierenden Produktmengen für einen maximalen Gewinn. Für die Gewinnfunktion stellen die Schüler und Schülerinnen die Erlösfunktion und die Kostenfunktion durch gegebene Informationen auf. Für das Finden dieser beiden Funktionen werden die Schüler und Schülerinnen mit einigen Erklärungen unterstützt. Dies soll selbst Schülern und Schülerinnen mit wenig Hintergrundwissen im ökonomischen Bereich ermöglichen, die entsprechenden Funktionen zu modellieren. Bei der Maximierung der Gewinnfunktion handelt es sich um eine Extremwertberechnung in zwei Variablen ohne Nebenbedingung.

Ein Standortproblem, dessen in dieser Arbeit bereits vorgestellte Grundidee von Rödder und Zörnig (1996) stammt, stellt die zweite Station im Stationenbetrieb dar. Bei der Aufgabenstellung wird der optimale Standort für ein Lager gesucht, sodass die Kosten für den Transport zu den drei lokal gebundenen Transporteinrichtungen minimal werden. Hier wird angenommen, dass die Wege zu den drei Transporteinrichtungen immer geradlinig verlaufen bzw. misst man hier die Luftlinie. Natürlich ist es in der Realität nicht möglich, entlang der Luftlinie ohne Flugzeuge oder Drohnen Güter zu transportieren. Dennoch kann die Länge der Luftlinie durchaus relevant sein als Indikator für den tatsächlichen Weg im Straßennetz und damit auch für die anfallenden Transportkosten.

Um die Problematik möglichst anschaulich zu gestalten, werden die drei Fixpunkte in einem Koordinatensystem dargestellt. Die Koordinaten der relevanten Punkte müssen von den Schülern und Schülerinnen abgelesen werden. Danach werden die Schüler und Schülerinnen angeleitet, die Wege vom Lager zu den einzelnen drei fixen Punkten über die Vektorrechnung zu beschreiben. Die Kosten für den Transport zum Lager variiert bei den drei Standorten. Die Schüler und Schülerinnen stellen die Transportkostenfunktion in Abhängigkeit der  $x$  und  $y$  Koordinate des Lagers auf und berechnen dieses Minimierungsproblem ohne Nebenbedingung.

Wie bei Rödder und Zörnig (1996) wird für die Transportkosten ebenfalls angenommen, dass sich die Transportkosten ergeben, indem man die Quadrate der Weglängen multipliziert mit einer Konstante. Das Quadrieren der Weglängen hat den immensen Vorteil, dass die Schüler und Schülerinnen bei der Minimierung der Transportkostenfunktion mit einem linearen Gleichungssystem der partiellen

Ableitungen arbeiten. Ein lineares Gleichungssystem können die Schüler und Schülerinnen mit den ihnen bereits bekannten Lösungsmethoden lösen.

Die dritte Station behandelt eine Maximierungsaufgabe von einer Outputfunktion mit einer Nebenbedingung, welche die Beschränkung des zur Verfügung stehenden Budgets beschreibt. Das konkrete Beispiel beschäftigt sich hier mit dem Output von Eismaschinen und einem gewissen Budget, welches für den Erwerb von neuen Eismaschinen zur Verfügung steht. In dieser Aufgabe wird die Nebenbedingung so modelliert, sodass die Schüler und Schülerinnen mit einem Extremwertproblem konfrontiert sind, welches nicht mehr mit der bereits bekannten Substitutionsmethode gelöst werden kann. An dieser Stelle ist es notwendig mit der Lagrange-Methode zu arbeiten. Die Lösung der Aufgabe stellt auch einen eher ungewöhnlicheren Fall dar, nämlich dass zwei globale Maxima existieren bei einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung. Es macht Sinn, dass die Schüler und Schülerinnen mit unterschiedlichen Lösungsfällen konfrontiert werden, um das allgemeine Verständnis zu diesem Thema zu fördern und Fehlvorstellungen zu vermeiden.

## **6.5. Weiterführende Überlegungen zum Unterrichtsvorschlag**

Dieser Unterrichtsvorschlag ist als Einführung in die Extremwertberechnung von Funktionen in mehreren Variablen vorgesehen. Er umfasst sechs Unterrichtseinheiten auf die man nach Bedarf und Interesse der Schüler und Schülerinnen aufbauen bzw. ergänzen kann.

Es bietet sich gut an weitere Anwendungsaufgaben aus der Wirtschaft mit den Schülern und Schülerinnen zu bearbeiten. Hier wäre es durchaus sinnvoll den Schülern und Schülerinnen die mehrdimensionale Grenzwertberechnung zu lehren, um ein breiteres Spektrum an verschiedenen Anwendungen der Wirtschaft abzudecken zu können.

Eine weitere größere Erweiterung kann durch die Betrachtung der Extremwertberechnung mit mehreren Nebenbedingungen erfolgen. In dem Unterrichtsvorschlag beschränkt man sich auf die Extremwertberechnung mit einer Nebenbedingung. Im Zuge dieser Erweiterung wäre es passend einen graphischen Lösungsansatz von Extremwertproblemen in Betracht zu ziehen. An dieser Stelle würden sich hier viele Möglichkeiten ergeben Anwendungsaufgaben aus anderen

außermathematischen Bereichen wie der Chemie oder der Physik im Unterricht einzubringen.



# Quellenverzeichnis

## Literatur

- Blatter, Christian. 1996. *Ingenieur Analysis* 2. 2. Auflage. Berlin: Springer Verlag.
- Forster, Otto. 2013. *Analysis* 2. 10. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Kallischnigg, Gerd; Kockelkorn, Ullrich; Dinge, Achim. 2003. *Mathematik für Volks- und Betriebswirte*. 4. Auflage. München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH.
- Nollau, Volker. 1995. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. 2. Auflage. Stuttgart: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft.
- Pauer, Franz; Scheirer-Weindorfer, Martina; Simon, Andreas; Stadler, Heinz. 2014. *Mathematik HTL 4/5*. 1. Auflage. Wien: ÖBV Verlag.
- Pieper, Martin. 2017. *Mathematische Optimierung-Eine Einführung in die kontinuierliche Optimierung mit Beispielen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.
- Rödter, Wilhelm; Zörnig, Peter. 1996. *Wirtschaftsmathematik für Studium und Praxis* 3. Berlin: Springer Verlag.
- Schodl, Martin; Turner, Marianne; Gut, Jutta; Karajan, Sabine. 2015. *Angewandte Mathematik HTL IV/V*. 1. Auflage. Wien: MANZ Verlag.
- Simon, Carl; Blume, Lawrence. 1994. *Mathematics for Economists*. 1. Auflage. New York: W.W. Norton & Company.
- Walter, Wolfgang. 2002. *Analysis* 2. 5. Auflage. Berlin: Springer Verlag.
- Wendler, Tilo; Tippe, Ulrike. 2013. *Übungsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. Berlin: Springer Verlag.

## Online-Quellen

- BIFIE: Standardisierte Reife- und Diplomprüfung an BHS in Österreich, 2010, URL: [https://www.cebs.at/fileadmin/user\\_upload/service/Bildungsstandards/Folder-10-10.pdf](https://www.cebs.at/fileadmin/user_upload/service/Bildungsstandards/Folder-10-10.pdf) [30.10.2017].
- BMB: Lehrplan HTL für Chemieingenieure, 2015, URL: [http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL\\_VO\\_262\\_2015/BGBI\\_II\\_Nr\\_262\\_2015\\_Anlage\\_1.4.pdf](http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBI_II_Nr_262_2015_Anlage_1.4.pdf) [30.10.2017].
- BMB: Lehrplan HTL für Elektrotechnik, 2015, URL: [http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL\\_VO\\_262\\_2015/BGBI\\_II\\_Nr\\_262\\_2015\\_Anlage\\_1.6.pdf](http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBI_II_Nr_262_2015_Anlage_1.6.pdf) [30.10.2017].
- BMB: Lehrplan HTL für Informationstechnologie, 2015, URL: [http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL\\_VO\\_262\\_2015/BGBI\\_II\\_Nr\\_262\\_2015\\_Anlage\\_1.11.pdf](http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBI_II_Nr_262_2015_Anlage_1.11.pdf) [30.10.2017].

- BMB: Lehrplan HTL für Mechatronik, 2015, URL:  
[http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL\\_VO\\_262\\_2015/BGBI\\_II\\_Nr\\_262\\_2015\\_Anlage\\_1.17.pdf](http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBI_II_Nr_262_2015_Anlage_1.17.pdf) [30.10.2017].
- BMB: Lehrplan AHS Oberstufe, 2016, URL:  
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&FassungVom=2017-09-01> [30.10.2017].
- Leydold, Josef: Mathematik für Volkswirte - Mathematical Methods for Economists- Kapitel 12 Lagrange Funktion, 2017, URL:  
[http://statmath.wu.ac.at/courses/mvw\\_math/download/handouts/MVW-handouts-12-Lagrange-Funktion-2x4.pdf](http://statmath.wu.ac.at/courses/mvw_math/download/handouts/MVW-handouts-12-Lagrange-Funktion-2x4.pdf) [18.01.2018].
- Stowasser, Till: Mathematische Methoden der VWL- Kapitel 2: Maximierung mit Nebenbedingungen, 2014, URL: [http://www.orgecon.econ.uni-muenchen.de/studium\\_lehre/veranstaltungsarchiv/wise14\\_15/mmethode\\_nwise201415/vorlesungsfolien/vl\\_kapitel2.pdf](http://www.orgecon.econ.uni-muenchen.de/studium_lehre/veranstaltungsarchiv/wise14_15/mmethode_nwise201415/vorlesungsfolien/vl_kapitel2.pdf) [06.02.2018].
- Ullrich, Reinhard: Kochrezept zum Bestimmen der Definitheit bei Matrizen, 2010, URL: [https://homepage.univie.ac.at/reinhard.ullrich/WS2010/Kochrezept\\_Definitheit.pdf](https://homepage.univie.ac.at/reinhard.ullrich/WS2010/Kochrezept_Definitheit.pdf) [16.01.2018].

## Tabellenverzeichnis

|                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabelle 1-Übersicht der Cluster zwei bis fünf und den dazugehörigen HTL Zweigen .                    | 10 |
| Tabelle 2-Zusammenhang Vorzeichen der Eigenwerte und Definitheit der Matrix .....                    | 32 |
| Tabelle 3-Zusammenhang Definitheit der Matrix und Extremwertverhalten in einem kritischen Punkt..... | 33 |
| Tabelle 4-Stundenbild Einheit 1 .....                                                                | 66 |
| Tabelle 5--Stundenbild Einheit 2 .....                                                               | 68 |
| Tabelle 6-Stundenbild Einheit 3 .....                                                                | 70 |
| Tabelle 7-Stundenbild Einheit 4 .....                                                                | 71 |
| Tabelle 8-Zusammenhang Eigenwerte und lokalem Extremwertverhalten .....                              | 78 |
| Tabelle 9-Eckdaten des Smartphone-Herstellers .....                                                  | 84 |



## Abbildungsverzeichnis

|                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Abbildung 1-Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ .....                                     | 65 |
| Abbildung 3-Graph der Funktion $f(x, y) = xy$ .....                                            | 74 |
| Abbildung 2-Graph der Funktion $f(x, y) = -x^2 - y^2$ .....                                    | 74 |
| Abbildung 4-Koordinatensystem mit den drei relevanten Standorten des<br>Standortproblems ..... | 86 |



## Anhang

## Stundenbilder

### Einheit 1: Stundenbild

#### Lernziele der Schüler und Schülerinnen:

- Wissen, dass es drei Arten von kritischen Punkten gibt bei Funktionen in mehreren Variablen und wie man sich diese geometrisch im Dreidimensionalen vorstellen kann
- Ermittlung der kritischen Punkte bei Funktionen in zwei oder drei Variablen durch das Nullsetzen der partiellen Ableitungen
- Berechnung der Hesse-Matrix bei Funktionen in zwei oder drei Variablen
- Die Eigenwerte einer  $2 \times 2$  oberen Dreiecksmatrix, unteren Dreiecksmatrix oder Diagonalmatrix ablesen können
- Die Eigenwerte einer  $3 \times 3$  oberen Dreiecksmatrix, unteren Dreiecksmatrix oder Diagonalmatrix ablesen können

*Tabelle 4-Stundenbild Einheit 1*

| Zeit  | Ablauf/Thema                                    | Sozialform          | Methode                                  | Material                     | Aktivitäten der Schüler und Schülerinnen                  | Aktivitäten der Lehrkraft                                                                                                                           |
|-------|-------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5 min | Vorstellung der verschiedenen kritischen Punkte | Frontalunterricht   | Lehrkraftvortrag                         | Arbeitsblatt Seite 1, Beamer | zuhören, Fragen stellen                                   | vortragen, die drei Extrema anhand der konkreten Beispiele am Arbeitsblatt in Geogebra vorzeigen                                                    |
| 5 min | Ermittlung der kritischen Stellen               | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 1-2       | zuhören, Fragen der Lehrkraft beantworten, Fragen stellen | vortragen, Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam den kritischen Punkt erarbeiten |
| 5 min | Hesse-Matrix                                    | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 2         | zuhören, Fragen der Lehrkraft beantworten, Fragen stellen | vortragen, Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, Verständnisfragen stellen                                                   |

|       |                                                                        |                     |                                          |                                        |                                                                                                         |                                                                                                                                                     |
|-------|------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5 min | Diagonalmatrix, obere und untere Dreiecksmatrix                        | Frontalunterricht   | Lehrkraftvortrag                         | Arbeitsblatt Seite 2-3                 | zuhören, Fragen stellen                                                                                 | vortragen                                                                                                                                           |
| 5 min | kritische Stellen einer gegebenen Funktion in zwei Variablen berechnen | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 3 Aufgabe 1a) Tafel | zuhören, Fragen der Lehrkraft beantworten, Fragen stellen                                               | vortragen, Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam die kritischen Punkte berechnen |
| 5 min | kritische Stellen einer gegebenen Funktion in drei Variablen berechnen | Partnerarbeit       | offen                                    | Arbeitsblatt Seite 3 Aufgabe 1b)       | mit dem Tischnachbarn gemeinsam das Beispiel lösen, Fragen an die Lehrkraft stellen bei Schwierigkeiten | Fragen der Schüler und Schülerinnen beantworten, Lösung am Ende präsentieren                                                                        |
| 5 min | Hesse-Matrix einer gegebenen Funktion in zwei Variablen berechnen      | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 3 Aufgabe 2a) Tafel | zuhören, Fragen der Lehrkraft beantworten, Fragen stellen                                               | vortragen, Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam die Hesse-Matrix berechnen      |
| 5 min | Hesse-Matrix einer gegebenen Funktion in drei Variablen berechnen      | Partnerarbeit       | offen                                    | Arbeitsblatt Seite 3 Aufgabe 2b)       | mit dem Tischnachbarn gemeinsam das Beispiel lösen, Fragen an die Lehrkraft stellen bei Schwierigkeiten | Fragen der Schüler und Schülerinnen beantworten, Lösung am Ende präsentieren                                                                        |
| 5 min | Form einer gegebenen Matrix erkennen und die Eigenwerte ablesen        | Partnerarbeit       | offen                                    | Arbeitsblatt Seite 3 Aufgabe 3         | mit dem Tischnachbarn gemeinsam das Beispiel lösen, Fragen an die Lehrkraft stellen bei Schwierigkeiten | Fragen der Schüler und Schülerinnen beantworten, Lösung am Ende präsentieren                                                                        |

## Einheit 2: Stundenbild

### Lernziele der Schüler und Schülerinnen:

- Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens  $2 \times 2$  und  $3 \times 3$  Matrizen in Dreiecksmatrizen umformen
- Kennen den Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der Eigenwerte einer Hesse-Matrix in einem kritischen Punkt und dem lokalen Extremwertverhalten des kritischen Punkts
- Kennen nun die Vorgehensweise der Berechnung von lokalen Extremwerten bei Funktionen in mehreren Variablen und können diese bei gegebenen Funktionen in zwei Variablen anwenden

Tabelle 5--Stundenbild Einheit 2

| Zeit   | Ablauf/Thema                                                                                                                                         | Sozialform          | Methode                                  | Material                                | Aktivitäten der Schüler und Schülerinnen                  | Aktivitäten der Lehrkraft                                                                                                                      |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10 min | Gauß-Verfahren                                                                                                                                       | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 1-2                  | zuhören, Fragen stellen, Fragen der Lehrkraft beantworten | Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam den kritischen Punkt erarbeiten       |
| 5 min  | Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der Eigenwerte einer Hesse-Matrix in einem kritischen Punkt und dem Extremwertverhalten eines kritischen Punkts | Frontalunterricht   | Lehrervortrag                            | Arbeitsblatt Seite 2                    | zuhören, Fragen stellen                                   | vortragen                                                                                                                                      |
| 5 min  | anwenden des Gaußverfahrens auf eine $2 \times 2$ Matrix um diese auf eine Dreiecksmatrix umzuformen                                                 | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 2 Aufgabe 1a), Tafel | zuhören, Fragen der Lehrkraft beantworten, Fragen stellen | vortragen, Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam die Hesse-Matrix berechnen |

|        |                                                                                                      |                     |                                          |                                         |                                                                                       |                                                                                                                                                |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5 min  | anwenden des Gaußverfahrens auf eine $3 \times 3$ Matrix um diese auf eine Dreiecksmatrix umzuformen | Einzelarbeit        | offen                                    | Arbeitsblatt Seite 2 Aufgabe 1b)        | selbstständig das Beispiel lösen, Fragen an die Lehrkraft stellen bei Schwierigkeiten | Fragen der Schüler und Schülerinnen beantworten, Lösung am Ende präsentieren                                                                   |
| 10 min | Bestimmung der lokalen Extremwerte einer Funktion in zwei Variablen                                  | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 2 Aufgabe 2a), Tafel | zuhören, Fragen der Lehrkraft beantworten, Fragen stellen                             | vortragen, Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam die Hesse-Matrix berechnen |
| 10 min | Bestimmung der lokalen Extremwerte einer Funktion in zwei Variablen                                  | Einzelarbeit        | offen                                    | Arbeitsblatt Seite 2 Aufgabe 2b)        | selbstständig das Beispiel lösen, Fragen an die Lehrkraft stellen bei Schwierigkeiten | Fragen der Schüler und Schülerinnen beantworten, Lösung am Ende präsentieren                                                                   |

### Einheit 3: Stundenbild

#### Lernziele der Schüler und Schülerinnen:

- Kennen nun die Vorgehensweise der Berechnung von lokalen Extremwerten bei Funktionen in mehreren Variablen und können diese bei gegebenen Funktionen in drei Variablen anwenden
- Können beschränkte abgeschlossene Ränder von Funktionen in zwei Variablen untersuchen
- Können globale Extrema von Funktionen in zwei Variablen ermitteln

*Tabelle 6-Stundenbild Einheit 3*

| Zeit   | Ablauf/Thema                                                                                                                                | Sozialform          | Methode                                  | Material                              | Aktivitäten der Schüler und Schülerinnen                                                                | Aktivitäten der Lehrkraft                                                                                                                                                                                          |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 15 min | globale Extrema einer Funktion in mehreren Variablen: Bestimmung bei Funktionen mit zwei Variablen mit beschränkten abgeschlossenen Rändern | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 1-2                | zuhören, Fragen stellen, Fragen der Lehrkraft beantworten                                               | Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam die globalen Extrema einer Funktion mit zwei Variablen mit beschränkten abgeschlossenen Ränder erarbeiten |
| 10 min | lokale Extremwertbestimmung bei einer gegebenen Funktion in drei Variablen                                                                  | Partnerarbeit       | offen                                    | Arbeitsblatt Seite 2 Aufgabe 1        | mit dem Tischnachbarn gemeinsam das Beispiel lösen, Fragen an die Lehrkraft stellen bei Schwierigkeiten | Fragen der Schüler und Schülerinnen beantworten, Lösung am Ende präsentieren                                                                                                                                       |
| 20 min | globales Maximum und globales Minimum bei einer gegebenen Funktion in zwei Variablen mit beschränkten abgeschlossenen Rändern bestimmen     | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 2 Aufgabe 2, Tafel | zuhören, Fragen der Lehrkraft beantworten, Fragen stellen                                               | vortragen, Fragen an die Schüler und Schülerinnen stellen um diese aktiv am Lösungsprozess teilhaben zu lassen                                                                                                     |

#### Einheit 4: Stundenbild

##### Lernziele der Schüler und Schülerinnen:

- Lagrange-Funktion bei einer Funktion in zwei Variablen mit Nebenbedingung aufstellen können
- Die kritischen Punkte einer Lagrange-Funktion berechnen können
- Die Randuntersuchung bei einer Funktion in zwei mit Nebenbedingung durchführen können
- Die globalen Extrema bei einer Funktion in zwei Variablen mit Nebenbedingung bestimmen können durch den Vergleich der Funktionswerte zwischen den kritischen Punkten und den Randpunkten

Tabelle 7-Stundenbild Einheit 4

| Zeit   | Ablauf/Thema                                                                                               | Sozialform          | Methode                                  | Material                        | Aktivitäten der Schüler und Schülerinnen                                                                | Aktivitäten der Lehrkraft                                                                                                                                                                     |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10 min | globale Extrema bei einer Funktion mit zwei Variablen Nebenbedingung, Lagrange-Methode mit Randbetrachtung | Frontalvortrag      | Lehrkraftvortrag                         | Arbeitsblatt Seite 1-2          | zuhören, Fragen stellen, Fragen der Lehrkraft beantworten                                               | vortragen, Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen                                                                                                                        |
| 10min  | konkretes Beispiel, bei der die Lagrange-Methode angewendet mit Randbetrachtung                            | Unterrichtsgespräch | Fragen-entwickelndes Unterrichtsgespräch | Arbeitsblatt Seite 2-3          | zuhören, Fragen stellen, Fragen der Lehrkraft beantworten                                               | Vorwissen der Schüler und Schülerinnen abrufen durch Fragen, mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam die globalen Extrema einer Funktion mit zwei Variablen mit Nebenbedingung erarbeiten |
| 15 min | globale Extremwertbestimmung bei einer gegebenen Funktion in zwei Variablen mit Nebenbedingung             | Partnerarbeit       | offen                                    | Arbeitsblatt Seite 3 Aufgabe 1, | mit dem Tischnachbarn gemeinsam das Beispiel lösen, Fragen an die Lehrkraft stellen bei Schwierigkeiten | Fragen der Schüler und Schülerinnen beantworten, Lösung am Ende präsentieren                                                                                                                  |

|        |                                                                                                            |               |       |                                                                                                         |                                                                                                                  |                                                                                    |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 10 min | globale<br>Extremwertbestimmung bei<br>einer gegebenen Funktion in<br>zwei Variablen mit<br>Nebenbedingung | Partnerarbeit | offen | Arbeitsblatt<br>Seite 3<br>Aufgabe 2,<br>Tablet/PC<br>mit<br><i>Geogebra</i><br>für jedes 2-er<br>Team. | mit dem Tischnachbarn<br>gemeinsam das Beispiel lösen,<br>Fragen an die Lehrkraft stellen bei<br>Schwierigkeiten | Fragen der Schüler und<br>Schülerinnen beantworten,<br>Lösung am Ende präsentieren |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|

## **Einheit 5 und Einheit 6: Stundenbild**

### Lernziele der Schüler und Schülerinnen:

- Anwendung der Extremwertberechnung in ausgewählten Beispielen aus der Wirtschaft
- Interpretation der Extremwerte in ausgewählten Beispielen aus der Wirtschaft

Methode: offener Stationenbetrieb, d.h. es gibt keine fixe Vorgabe wann die Stationen gewechselt werden müssen

Sozialform: Partnerarbeit

Zeit: 90 Minuten (pro Station ca. 30 min)

Material: Arbeitsblatt zu Station 1-3, Tablet/PC mit *Geogebra* für jedes 2-er Team.

Aktivitäten der Schüler und Schülerinnen:

mit einem Partner versuchen die Schüler und Schülerinnen drei Stationen im Stationenbetrieb innerhalb von zwei Einheiten selbstständig korrekt zu lösen, bei Fragen wenden sie sich an die Lehrkraft, die gerechneten Lösungen werden der Lehrkraft nach jeder einzelnen Station vorgezeigt

Aktivitäten der Lehrkraft:

beobachtet das Geschehen der einzelnen Stationen, gibt wenn nötig Hilfestellungen, kontrolliert die Lösungen der Teams und gibt Feedback bei nicht korrekt gelösten Beispielen

## Arbeitsblätter

### Einheit 1-Arbeitsblatt

### Extremwertbestimmung bei Funktionen in zwei oder drei Variablen

#### Arten der Extrema

Ähnlich wie bei Funktionen in einer Variablen gibt es auch bei Funktionen in mehreren Variablen drei mögliche interessante Punkte:

- Maximum
- Minimum
- Sattelpunkt

Diese Punkte weisen horizontale Tangenten auf, d.h. die partiellen Ableitungen sind an diesen Stellen gleich Null.

Im Falle von Funktionen in zwei Variablen kann man sich unter diesen drei Punkten leicht etwas vorstellen:

Ein Maximum entspricht den höchsten Punkt eines Berges oder Hügels.

Ein Minimum entspricht den tiefsten Punkt einer Grube oder Senke.

Ein Sattelpunkt entspricht einem Gebirgssattel. An diesem Punkt kann man in zwei Richtungen bergauf gehen und in den zwei anderen Richtungen bergrunter gehen.

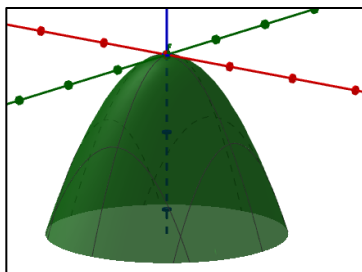


Abbildung 3-Graph der Funktion  
 $f(x, y) = -x^2 - y^2$

Maximum (0|0|0)

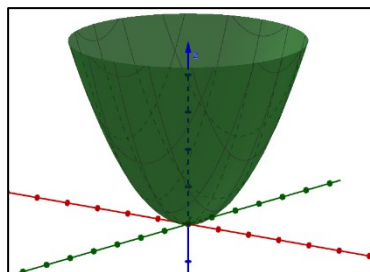


Abbildung 1-Graph der Funktion  
 $f(x, y) = x^2 + y^2$

Minimum (0|0|0)

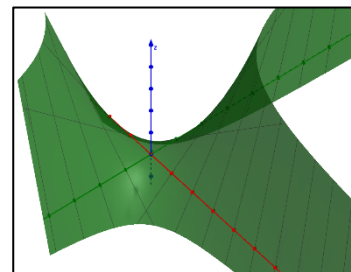


Abbildung 2-Graph der Funktion  
 $f(x, y) = xy$

Sattelpunkt (0|0|0)

#### Lokale Extrema

Um die lokalen Extrema und Sattelpunkte bestimmen zu können, müssen zunächst die potentiellen Kandidaten gefunden werden. Diese werden kritische Punkte genannt.

#### Bestimmung der kritischen Punkte

Es kommen nur diejenigen Punkte für ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt in Frage, deren partielle Ableitungen Null sind. Folglich findet man die kritischen Punkte, indem man alle partiellen Ableitungen Null setzt und das Gleichungssystem aus diesen Gleichungen löst. Die Lösungen des Gleichungssystems sind die gesuchten kritischen Punkte.

Beispiel:

$$f(x, y) = 2x^2 + 2x + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Wir setzen die partiellen Ableitungen Null und lösen das Gleichungssystem:

$$\text{I. } 4x + 2 = 0$$

$$\text{II. } 2y = 0$$

Lösung:  $x = -\frac{1}{2}$  und  $y = 0$

Also haben wir hier nur einen kritischen Punkt. Wenn wir diesen  $x$ -Wert und  $y$ -Wert in die Funktionsgleichung  $f(x, y) = 2x^2 + 2x + y^2$  einsetzen, erhält man den Funktionswert von  $-\frac{1}{2}$  des kritischen Punkts. Der kritische Punkt ist  $(-\frac{1}{2} | 0 | -\frac{1}{2})$ .

### Untersuchung der kritischen Punkte

Für die weitere Analyse der gefundenen kritischen Punkte brauchen wir die Hesse-Matrix, welche die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung systematisch beinhaltet

#### Hesse-Matrix

Im Falle einer Funktion in zwei Variablen  $f(x, y)$ : 
$$H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial xx} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial yy} \end{pmatrix}$$

Im Falle einer Funktion in drei Variablen  $f(x, y, z)$ : 
$$H_{f(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial xx} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} & \frac{\partial^2 f}{\partial xz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial yy} & \frac{\partial^2 f}{\partial yz} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial zx} & \frac{\partial^2 f}{\partial zy} & \frac{\partial^2 f}{\partial zz} \end{pmatrix}$$

Jetzt muss in die Hesse-Matrix die gefundenen kritischen Punkte eingesetzt werden. Man erhält jeweils eine Matrix deren Einträge ausschließlich aus Konstanten bestehen. Nun müssen die Eigenwerte bestimmt werden. Man achtet zunächst auf die Einträge der Hesse-Matrix im kritischen Punkt. Vier Erscheinungsformen sind möglich:

- 1. Diagonalmatrix:** Eine Matrix, deren Einträge ober und unterhalb der Hauptdiagonalen aus lauter Nullen bestehen. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen sind reelle Zahlen. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen stellen die Eigenwerte dar.

Im Falle einer  $2 \times 2$  Matrix:  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$   $a$  und  $d$  sind die Eigenwerte

Im Falle einer  $3 \times 3$  Matrix:  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$   $a, e$  und  $i$  sind die Eigenwerte

- 2. Obere Dreiecksmatrix:** Eine Matrix, deren Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen aus lauter Nullen besteht. Die restlichen Einträge sind reelle Zahlen. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen stellen die Eigenwerte dar.

Im Falle einer  $2 \times 2$  Matrix:  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$   $a$  und  $d$  sind die Eigenwerte

Im Falle einer  $3 \times 3$  Matrix:  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$   $a, e$  und  $i$  sind die Eigenwerte

- 3. Untere Dreiecksmatrix:** Eine Matrix, deren Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen aus lauter Nullen besteht. Die restlichen Einträge sind reelle Zahlen. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen stellen die Eigenwerte dar.

Im Falle einer  $2 \times 2$  Matrix:  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$   $a$  und  $d$  sind die Eigenwerte

Im Falle einer  $3 \times 3$  Matrix:  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$   $a, e$  und  $i$  sind die Eigenwerte

### Aufgaben

- Berechne die kritischen Stellen der folgenden Funktionen:
  - $f(x, y) = x^3 + y^2 + 4xy - 10$
  - $f(x, y, z) = 4x^2 - 3y + 2z^2 + 2xy + 2yz + 5$
- Ermittle die Hesse-Matrix der folgenden Funktionen:
  - $f(x, y) = 2x + 5y^3 - 3y + 7xy$
  - $f(x, y, z) = x^3 + 4x - 6y^3 + 8z^2 + 6z - 8xyz$
- Bestimme die Form der gegebenen Matrix und lies die Eigenwerte der gegebenen Matrizen ab:
  - $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

## Einheit 2-Arbeitsblatt

**4. die ersten drei Fälle treten nicht ein:** Die Matrix weist nicht ober und/oder unterhalb der Hauptdiagonale Nullen auf. Um die Eigenwerte nun zu berechnen formen wir die Matrix auf eine obere oder untere Dreiecksmatrix um. Dieses Verfahren nennt man das Gauß-Verfahren.

Folgende Schritte sind dabei erlaubt:

- Man darf eine Zeile zu einer anderen Zeile addieren oder von einer anderen Zeile subtrahieren
- Man darf eine Zeile mal einem Faktor  $r \neq 0$  multiplizieren oder dividieren und zu einer anderen Zeile addieren oder von einer anderen Zeile subtrahieren

Nicht erlaubt sind:

- Zeilen vertauschen
- Spalten vertauschen

Beispiel:

Die Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  soll in eine obere Dreiecksmatrix umgeformt werden, d.h. statt der Vier in der zweiten Zeile brauchen wir eine Null. Ziehen wir nun das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten Zeile ab, erzeugen wir eine Null statt der Vier in der zweiten Zeile. Die erste Zeile bleibt unverändert.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} | - 2 * 1. \text{ Zeile} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 - 2 * 2 & 3 - 2 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun haben wir eine obere Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten 1 und 2.

Beispiel:

Die Matrix  $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  soll in eine obere Dreiecksmatrix umgeformt werden, d.h. statt der Zwei in der zweiten Zeile und der Sechs und der Eins in der dritten Zeile brauchen wir eine Null. Nun sind mehrere Schritte notwendig um Umzuformen.

Addieren wir das Dreifache der ersten Zeile zur dritten Zeile, bekommen wir statt der Sechs in der dritten Zeile eine Null.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} | + 3 * 1. \text{ Zeile} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 + 3 * (-2) & 1 + 3 * (-3) & -1 + 3 * 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Addieren wir die erste Zeile zur zweiten Zeile, erhalten wir statt der Zwei in der zweiten Zeile eine Null.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} | + 1. \text{ Zeile} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 + (-2) & 5 + (-3) & 1 + 2 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Addieren wir das Vierfache der zweiten Zeile zur dritten Zeile, bekommen wir statt der minus Acht eine Null.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} | + 4 * 2. \text{ Zeile} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 + 4 * 2 & 5 + 4 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

Nun haben wir eine obere Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten -2, 2 und 17.

### Zusammenhang Eigenwerte und lokales Extremwertverhalten

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix in einem bestimmten kritischen Punkt verraten, ob und welche Art von Extremum der kritische Punkt darstellt. Man betrachtet nun das Vorzeichen der Eigenwerte.

Tabelle 8-Zusammenhang Eigenwerte und lokalem Extremwertverhalten

| Eigenwerte                                   | Extremwertverhalten des kritischen Punkts |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------|
| positiv (d.h. $> 0$ )                        | lokales Minimum                           |
| negativ (d.h. $< 0$ )                        | lokales Maximum                           |
| positiv und negativ (d.h. $> 0$ oder $< 0$ ) | Sattelpunkt                               |
| $= 0$                                        | kein Extremum                             |

### Aufgaben:

- Forme die gegebene Hesse-Matrix in einem kritischen Punkt auf eine obere oder untere Dreiecksmatrix um und bestimme die Eigenwerte. Welches Extremwertverhalten hat der kritische Punkt?
  - $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$
- Ermittle die lokalen Extrema der gegebenen Funktion. Bestimme auch die Art der lokalen Extrema.
  - $f(x, y) = -2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2xy$
  - $f(x, y) = x^3 + y^2 + 4xy$

### Einheit 3-Arbeitsblatt

#### Globale Extrema

Ähnlich wie bei einer Funktion in einer Variablen können bei Funktionen in mehreren Variablen entweder die lokalen Extrema auch im globalen Sinn Extrema sein oder die globalen Extrema liegen am Rand der Funktion.

Um die globalen Extrema einer Funktion in mehreren Variablen zu finden, berechnet man zunächst die lokalen Extrema und untersucht dann den Rand der Funktion und berechnet dann die lokalen Extrema der einzelnen Ränder. Die Funktionswerte von den Extrema der Ränder werden anschließend mit den Funktionswerten der bereits berechneten lokalen Extrema der Funktion verglichen. Das Extremum mit dem höchsten Funktionswert ist dann das globale Maximum und das Extremum mit dem kleinsten Funktionswert das globale Minimum.

Beispiel:

Gesucht ist das globale Maximum und Minimum der Funktion  $f(x, y) = x^2 - 3y^2$  für  $x \in [-10; 5]$  und  $y \in [-8; 4]$ .

Man berechnet zunächst die partiellen Ableitungen und setzt diese gleich Null.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = -6y .$$

- I.  $2x = 0$
- II.  $-6y = 0$

Man erkennt schnell, dass für den kritischen Punkt  $x = 0$  und  $y = 0$  gilt. Der kritische Punkt ist also  $(0|0|0)$ .

Nun muss die Hesse-Matrix  $H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial xx} & \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial yx} & \frac{\partial^2 f}{\partial yy} \end{pmatrix}$  berechnet werden. Diese ist hier

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ . Für den kritischen Punkt gilt also die Hesse-Matrix  $H_{f(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ . Da die Hesse-Matrix in Form einer Diagonalmatrix vorliegt, können die Eigenwerte bei der Hauptdiagonalen abgelesen werden. Da  $2 > 0$  und  $-6 < 0$  ist, liegt ein Sattelpunkt vor.

Das globale Maximum bzw. Minimum muss also am Rand der Funktion sein. Bei einer Funktion in zwei Variablen existieren vier Ränder, bei einer Funktion in drei Variablen neun Ränder.

In unserem Fall sind dies  $f(-10, y)$ ,  $f(5, y)$ ,  $f(x, -8)$  und  $f(x, 4)$ . Man nimmt jeweils den höchstmöglichen oder kleinstmöglichen Wert einer Variablen und setzt diesen in die Funktion ein. Man erhält eine Funktion in einer Variablen, die den Rand der ursprünglichen Funktion beschreibt. So reduziert man die Funktion von zwei Variablen auf eine Variable. Man bestimmt nun das lokale Maximum bzw. Minimum dieser vier Ränder.

$f(-10, y) = 100 - 3y^2$ . Der zu untersuchende Rand ist also  $f(y) = 100 - 3y^2$ .

$f'(y) = -6y$  und  $f''(y) = -6$ . Als lokale Extremstellen erhalten wir also für den ersten Rand das Maximum  $(-10|0|100)$ .

$f(5, y) = 25 - 3y^2$   $f(y) = 25 - 3y^2$

und  $f''(y) = -6$ . Als lokale Extremstellen erhalten wir also das für den zweiten Rand das Maximum  $(5|0|25)$ .

$f(x, -8) = x^2 - 192$ . Der zu untersuchende Rand ist also  $f(x) = x^2 - 192$ .

$f'(x) = 2x$  und  $f''(x) = 2$ . Als lokale Extremstellen erhalten wir also für den dritten Rand das Minimum  $(0|-8|-192)$ .

$f(x, 4) = x^2 - 48$ . Der zu untersuchende Rand ist also  $f(x) = x^2 - 48$ .

$f'(x) = 2x$  und  $f''(x) = 2$ . Als lokale Extremstellen erhalten wir also für den vierten Rand das Minimum  $(0|4|-48)$ .

Das globale Maximum der ursprünglichen Funktion  $f(x, y) = x^2 - 3y^2$  ist  $(-10|0|100)$  und das globale Minimum  $(0|-8|-192)$ .

### **Aufgaben:**

1. Bestimme die lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x, y, z) = -3(2x^2 + 2y^2 + z^2) + 6xy + 4x + 6y + 4z - 22.$$

2. Ermittle das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion  $f(x, y) = x^2 + x + y - y^3$ .

## Einheit 4-Arbeitsblatt

### Extremwertbestimmung bei Funktionen in zwei Variablen mit einer Nebenbedingung

Bei der Extremwertberechnung kann zusätzlich zur Funktion in mehreren Variablen auch noch eine Nebenbedingung angegeben sein. Die Aufgabenstellung hat dann den folgenden Charakter: Die Extrema einer Funktion  $f(x,y)$  sind gesucht unter der Nebenbedingung  $g(x,y) = c$ .

#### Globale Extrema

Eine derartige Aufgabe kennen wir bereits bei Funktionen in zwei Variablen, bei denen wir durch Substitution einer Variablen der Nebenbedingung die Zielfunktion auf eine Variable reduzieren konnten. Man erhält dann die lokalen Extrema der Zielfunktion. Für die globalen Extrema muss hier dann noch der Rand betrachtet werden.

Nicht bei allen Aufgaben lässt sich die Substitutionsmethode anwenden, um eine Zielfunktion mit einer Variablen zu erhalten. Sobald die Zielfunktion bzw. die Nebenbedingung drei oder mehr unabhängige Variablen besitzen, funktioniert die Substitutionsmethode nicht mehr. Manchmal kann auch eine Nebenbedingung in zwei Variablen gegeben sein, wo man nicht auf eine Variable umformen kann. Hier hilft einem die Substitutionsmethode auch nicht weiter. Ein allgemeiner Lösungsansatz stellt die sogenannte Lagrange-Funktion dar.

#### Lagrange-Funktion:

Bei einer Funktion  $f$  und  $g$  in zwei Variablen:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(c - g(x, y))$$

Hier fungiert in beiden Fällen die Variable  $\lambda$  als Hilfsvariable. Diese Variable wird Lagrange-Multiplikator genannt.

#### Bestimmung der kritischen Punkte

Man bestimmt nun die kritischen Punkte der Lagrange-Funktion, indem man die partiellen Ableitungen Null setzt. Hier ist zu beachten, dass  $\lambda$  auch als Variable zählt, daher muss man nach dieser auch partiell ableiten. Bei einer Funktion  $f$  und Nebenbedingung  $g$  in zwei Variablen bekommt man drei Gleichungen mit drei Variablen. Bei einer Funktion  $f$  und Nebenbedingung  $g$  in drei Variablen bekommt man vier

Gleichungen mit vier Variablen. Die Lösungen dieses Gleichungssystems ergeben die kritischen Punkte der Lagrange-Funktion.

### Wertevergleich mit den Rändern

Nun müssen die Funktionswerte der kritischen Stellen berechnet werden und mit den Funktionswerten der lokalen Maxima und Minima der Ränder verglichen werden. Der Punkt mit dem höchsten Funktionswert ist dann das globale Maximum und der Punkt mit dem niedrigsten Funktionswert das globale Minimum.

Beispiel:

Das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion  $f(x, y) = x - 2y^2 + 3y$  unter der Nebenbedingung  $g(x) = x + y = 100$  sind gesucht. Es gilt  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$ .

Zuerst stellt man die Lagrange-Funktion auf:

$$L(x, y, \lambda) = x - 2y^2 + 3y + \lambda(100 - x - y)$$

Man berechnet nun die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -4y + 3 - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - x - y$$

Es ergibt sich nun ein  $3 \times 3$  Gleichungssystem durch Null setzen der partiellen Ableitungen:

- I.  $1 - \lambda = 0$
- II.  $-4y + 3 - \lambda = 0$
- III.  $100 - x - y = 0$

In diesem Fall erhält man ausschließlich lineare Gleichungen, die mit Hilfe des Eliminationsverfahrens oder des Einsetzungsverfahrens händisch noch gut lösbar sind. Ist das Gleichungssystem nicht linear, bietet es sich an *Geogebra* zu Hilfe zu nehmen, um das Gleichungssystem zu lösen.

In diesem Fall ist es günstig, das Einsetzungsverfahren anzuwenden. Aus der ersten Gleichung entnehmen wir, dass  $\lambda = 1$  ist. Setzt man diesen Wert für  $\lambda$  in die zweite Gleichung ein, bekommt man für  $y$  den Wert  $\frac{1}{2}$ . Diesen Wert für  $y$  eingesetzt in die dritte Gleichung, ergibt sich  $x = \frac{199}{2}$ . Unser kritischer Punkt lautet also  $(\frac{199}{2} \mid \frac{1}{2} \mid \frac{201}{2})$ .

Jetzt muss der Rand untersucht werden. Hier muss man sich überlegen, welchen kleinsten und größten Wert eine Variable annehmen kann unter der Nebenbedingung  $g$  und wie der Wert der zweiten Variable sein muss damit die Nebenbedingung erfüllt ist. Man setzt diese Werte in die Funktion  $f$  ein und vergleicht die Funktionswerte. Es ergeben sich hier zwei Fälle:

Der kleinste Wert, den die Variable  $x$  annehmen kann, ist 0, damit die Nebenbedingung  $g$  noch erfüllt ist, muss  $y = 100$  sein. Man erhält den Punkt  $(0 \mid 100 \mid -1700)$ .

Der größte Wert, den die Variable  $x$  annehmen kann, ist 100, damit die Nebenbedingung  $g$  noch erfüllt ist, muss  $y = 0$  sein. Man erhält den Punkt  $(100 \mid 0 \mid 100)$ .

Insgesamt stehen also die Punkte  $(\frac{199}{2} \mid \frac{1}{2} \mid \frac{201}{2})$ ,  $(0 \mid 100 \mid -1700)$  und  $(100 \mid 0 \mid 100)$  als potentielle Kandidaten für globale Extrema zur Verfügung. Vergleicht man nun die Funktionswerte, erkennt man, dass der Punkt  $(0 \mid 100 \mid -1700)$  das globale Minimum darstellt und der Punkt  $(\frac{199}{2} \mid \frac{1}{2} \mid \frac{201}{2})$  das globale Maximum.

### **Aufgaben:**

1. Bestimme das globale Maximum und Minimum der Funktion  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = x + y = 3$  mit Hilfe der Lagrange-Funktion. Es gilt  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$ .
2. Bestimme das globale Maximum und Minimum der Funktion  $f(x, y) = x^{0,4}y^{0,6}$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 100x + 200y = 2000$  mit Hilfe der Lagrange-Funktion. Es gilt  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$ . Verwende *Geogebra* zum Lösen des Gleichungssystems der partiellen Ableitungen.

## Einheit 5 und Einheit 6-Arbeitsblatt

### Station 1: Gewinnfunktion

In der Praxis sind Firmen, die gewisse Produkte zum Verkauf am freien Markt produzieren, interessiert ihren Gewinn zu maximieren.

Der Gewinn ist abhängig vom Umsatz bzw. Erlös, den eine Firma durch den Verkauf der Produkte einnimmt. Für die Produktion der Produkte fallen jedoch auch gewisse Kosten an für die Firma an. Das heißt für den Gewinn gilt:  $\text{Gewinn} = \text{Erlös} - \text{Produktionskosten}$ .

#### **Aufgabe:**

Eine Firma stellt zwei verschiedene Smartphones A und B her und möchte ihren Gewinn maximieren, indem sie eine optimale Anzahl der zwei Produkte für den Verkauf produziert. Gesucht ist nun eine optimale Kombination der zwei Produkte, bei welcher der Gewinn maximal ist.

Der Erlös, den die Firma direkt bezieht durch den Verkauf an einen Großhändler, wird beeinflusst von dem Stückpreis, den der Großhändler bei einer gewissen Anzahl von verfügbaren Produkten bereit ist zu zahlen. Der Großhändler erwartet sich, dass der Stückpreis sinkt, wenn er eine dementsprechend große Menge kauft.

Die Produktionskosten setzen sich zusammen aus den Produktionskosten pro Stück und gewissen Fixkosten, die unabhängig von der Anzahl der produzierten Smartphones für die Herstellerfirma entstehen.

Außerdem muss man noch bedenken, dass die Firma nicht unendlich große Produktionskapazitäten für jedes Produkt besitzt. Das bedeutet, dass von jedem Produkt nur eine begrenzte Anzahl produziert werden kann.

Die nachstehende Tabelle enthält die wichtigsten Eckdaten für die Ermittlung der optimalen Stückzahl, die produziert werden soll.  $a$  entspricht der Stückzahl für das Modell A und  $b$  der Stückzahl für das Modell B.

*Tabelle 9-Eckdaten des Smartphone-Herstellers*

|                                                                             | Modell A               | Modell B               |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------|
| produzierte Stückzahl für den Verkauf                                       | $a$                    | $b$                    |
| maximale Anzahl die produziert werden kann                                  | 3 00 000               | 4 00 000               |
| Verkaufspreis pro Stück (in Euro), den der Großhändler bereit ist zu zahlen | $300 - \frac{a}{1000}$ | $400 - \frac{b}{1500}$ |
| Produktionskosten pro erzeugtem Stück (in Euro)                             | 100                    | 200                    |
| fixe Produktionskosten unabhängig von der produzierten Stückzahl (in Euro)  | 200 000                | 180 000                |

Man überlegt sich nun einen sinnvollen Definitionsbereich. Negative Stückzahlen machen keinen Sinn und daher ist der Definitionsbereich in unserem Beispiel:

für die Variable  $a$  das Intervall \_\_\_\_\_

für die Variable  $b$  das Intervall \_\_\_\_\_

Man muss sich nun die Erlösfunktion und die Kostenfunktion überlegen. Beide Funktionen sollen von  $a$  und  $b$  abhängig sein.

Die Erlösfunktion ergibt sich aus dem Umsatz von Smartphone A und dem Umsatz, der aus dem Smartphone B resultiert. Man addiert beide Teilumsätze, um den Gesamtumsatz zu erhalten.

$$E(a, b) = \text{_____} + \text{_____}$$

Die Kostenfunktion erhält man, wenn man die Produktionskosten für Smartphone A und die Produktionskosten für Smartphone B addiert.

$$K(a, b) = \text{_____} + \text{_____}$$

Als Gewinnfunktion erhält man also, wenn man die Kostenfunktion von der Erlösfunktion subtrahiert:

$$G(a, b) = \text{_____} - \text{_____}$$

Von dieser Gewinnfunktion muss nun das globale Maximum ermittelt werden. Berechne zunächst die lokalen Extrema und überprüfe dann die Ränder.

Lösung:

Für einen maximalen Gewinn sollte die Firma \_\_\_\_\_ Stück von dem Smartphone A und \_\_\_\_\_ Stück von dem Smartphone B produzieren.

Der Gewinn beträgt dabei \_\_\_\_\_ .

## Station 2: Standortbestimmung

Für Unternehmen ist es sehr wichtig, kurze Transportwege zwischen ihren Standorten zu haben, um die Kosten für den Transport ihrer Waren so gering wie möglich zu halten.

### **Aufgabe:**

Ein Online-Versand-Unternehmen überlegt ein Zentrallager zu errichten, von dem ausgehend die Waren an die Kunden geliefert werden soll. Das Unternehmen bezieht seine Waren aus verschiedenen Ländern. Die importierte Ware trifft an drei unterschiedlichen Standorten ein:

- an einem Flughafen
- an einem Hafen
- an einem großen Bahnhof

Die drei Standorte sind in einem Koordinatensystem eingetragen. Entnimm der Zeichnung die Koordinaten der Standorte.

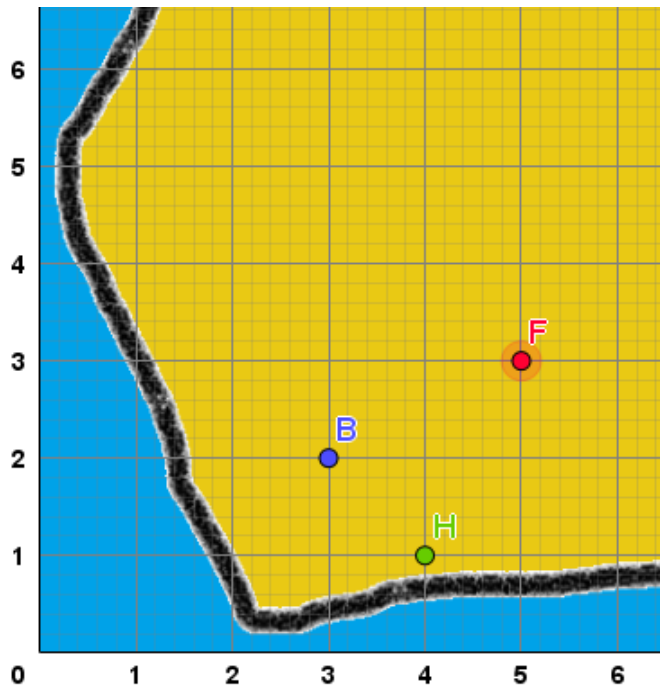


Abbildung 4-Koordinatensystem mit den drei relevanten Standorten des Standortproblems

Flughafen:  $F = ( \quad | \quad )$

Hafen im Süden:  $H = ( \quad | \quad )$

Bahnhof:  $B = ( \quad | \quad )$

Es stellt sich nun die Frage, wo das Zentrallager idealerweise gebaut werden sollte, um die Transportkosten für den Transport der Waren zwischen dem Zentrallager und den drei Standorten so gering wie möglich zu gestalten.

Es sei  $L = (x|y)$  der ideale Punkt für das Zentrallager mit den gesuchten Koordinaten  $x$  und  $y$ .

Die Transportkosten berechnen sich wie folgt:

Transportkosten Flughafen-Lager abhängig von der Weglänge  $A$  betragen  $2A^2$

Transportkosten Hafen-Lager abhängig von der Weglänge  $B$  betragen  $3B^2$

Transportkosten Bahnhof-Lager abhängig von der Weglänge  $C$  betragen  $C^2$

Die Transportkosten zu diesen Standorten sollen so minimal wie möglich sein, also können wir diese addieren und erhalten für die Gesamtkosten:

$$K = 2A^2 + 3B^2 + C^2$$

Jetzt muss man sich überlegen, wie man die einzelnen Wege  $A, B, C$  vom Lager zu den drei Standorten berechnen könnte. Man erinnert sich an die euklidische Abstandsformel im Zweidimensionalen. Der Abstand zweier Punkte  $A, B$  erhält man indem man die Länge des Vektors  $\overrightarrow{AB}$  berechnet. Die Länge eines Vektors ist die Wurzel aus der Summe des Quadrats der ersten Koordinate und des Quadrats der zweiten Koordinate.

Jetzt können wir die einzelnen Wege zu den drei Standorten anschreiben, wenn wir annehmen, dass  $x$  die erste Koordinate und  $y$  die zweite Koordinate des Lagers ist.

Weg Flughafen-Lager:  $A =$  \_\_\_\_\_

Weg Hafen-Lager:  $B =$  \_\_\_\_\_

Weg Bahnhof-Lager:  $C =$  \_\_\_\_\_

Setzen wir nun diese drei Ausdrücke oben in die Kostengleichung ein und erhalten die Funktion:

$K(x, y) =$  \_\_\_\_\_

Gesucht ist nun das lokale Minimum dieser Funktion, die den Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Lagers und den gesamten Transportkosten beschreibt. Berechne also die kritischen Punkte und stelle mit der Hesse-Matrix fest, ob tatsächlich ein lokales Minimum unter den kritischen Punkten vorliegt.

Lösung:

Der ideale Standort für das Zentrallager ist (     |     ) mit den Kosten \_\_\_\_\_ .

### Station 3: Outputfunktion mit Nebenbedingung

Für Unternehmen ist es wichtig ihren Output (= die Menge der produzierten Waren) zu maximieren, denn je mehr Waren sie verkaufen können, desto mehr Umsatz wird gemacht.

#### **Aufgabe:**

Ein großer berühmter italienischer Eissalon benötigt neue Eismaschinen und recherchiert, welche Maschinen in Frage kommen würden. In erster Linie geht es dem Eissalon darum, dass er eine möglichst große Menge an Eis produzieren kann. Der Eissalon hat ein Budget von 35 000€ zur Verfügung und möchte diesen gesamten Geldbetrag in neue Maschinen investieren.

Es stehen zwei Maschinen für die Produktion von qualitativ hochwertigem italienischem Eis zur Auswahl.

- Maschinentyp A kann 50 Liter Eis pro Tag produzieren
- Maschinentyp B kann 70 Liter Eis pro Tag produzieren

Sei  $a$  die Anzahl des Maschinentyps A und  $b$  die Anzahl des Maschinentyps B.

Die Maschinen kosten insgesamt abhängig von der gekauften Stückzahl:

$$5000a + 7000b - 100ab$$

Es stellt sich die Frage, wie viele Maschinen vom Typ A und vom Typ B gekauft werden sollen, um die Outputmenge an Eis zu maximieren.

Man stellt nun die Outputmengenfunktion  $f$  auf, welche die gesamte produzierbare Eismasse beschreibt abhängig von der Anzahl der zwei Maschinentypen:

$$f(a, b) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Die Nebenbedingung  $g$  ergibt sich durch die Budgetbeschränkung:

$$g(a, b) = \underline{\hspace{10cm}} = 35\,000$$

Für die Ränder muss man bedenken, dass  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  sein muss, denn es gibt keine negative Anzahl von Maschinen in diesem Zusammenhang.

Die Lagrange-Funktion für die Extremwertberechnung lautet:

$$L(a, b, \lambda) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Gesucht ist nun das globale Maximum dieser Funktion. Berechne zunächst die kritischen Stellen und überprüfe danach die Ränder. Verwende *Geogebra* zum Lösen des Gleichungssystems der partiellen Ableitungen.

Lösung:

Für einen maximalen Output der Eisproduktion sollte der Eissalon

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ kaufen.

Der Output beträgt dabei \_\_\_\_\_ .

## Lösungen

### Einheit 1: Arbeitsblatt:

#### Aufgabe 1:

a) kritische Punkte:  $(0|0| - 10), (\frac{8}{3} | -\frac{16}{3} | -\frac{526}{27})$

b) kritischer Punkt:  $(\frac{3}{4} | -3 | \frac{3}{2} | \frac{29}{4})$

#### Aufgabe 2:

a)  $H_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 30y \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 6x & -8z & -8y \\ -8z & -36y & -8x \\ -8y & -8x & 16 \end{pmatrix}$

#### Aufgabe 3:

a) Diagonalmatrix; Eigenwerte:  $-2; 3$

b) obere Dreiecksmatrix; Eigenwerte:  $1; 4$

c) Diagonalmatrix; Eigenwerte:  $1; 2; 3$

d) untere Dreiecksmatrix; Eigenwerte:  $-5; 3; 6$

### Einheit 2: Arbeitsblatt:

#### Aufgabe 1:

a) lokales Maximum

b) lokales Minimum

#### Aufgabe 2:

a) Sattelpunkt  $(1|0|2)$

b) Sattelpunkt  $(0|0|0)$ , lokales Minimum  $(\frac{8}{3} | -\frac{16}{3} | -\frac{256}{27})$

### Einheit 3: Arbeitsblatt:

#### Aufgabe 1:

lokales Maximum  $(\frac{7}{9} | \frac{8}{9} | \frac{2}{3} | -\frac{148}{9})$

#### Aufgabe 2:

globales Maximum  $(-2 | \sqrt{\frac{1}{3}} | 6,39)$ , globales Minimum  $(-\frac{1}{2} | 2 | -\frac{25}{4})$

#### Einheit 4: Arbeitsblatt:

##### Aufgabe 1:

globales Maximum (0|3|18) , globales Minimum (2|1|6)

##### Aufgabe 2:

globales Maximum (8|6|6,73) , globales Minimum (20|0|3,31)

#### Einheiten 5 und 6:

##### Station 1: Gewinnmaximierung

Definitionsbereich: für die Variable  $a$  das Intervall  $[0; 300\,000]$ ,

für die Variable  $b$  das Intervall  $[0; 400\,000]$

$$E(a, b) = a \left( 300 - \frac{a}{1000} \right) + b \left( 400 - \frac{b}{1500} \right)$$

$$K(a, b) = 100a + 200\,000 + 200b + 180\,000$$

$$G(a, b) = a \left( 300 - \frac{a}{1000} \right) + b \left( 400 - \frac{b}{1500} \right) - (100a + 200\,000 + 200b + 180\,000)$$

Für einen maximalen Gewinn sollte die Firma 100 000 Stück von dem Smartphone A und 150 000 Stück von dem Smartphone B produzieren.

Der Gewinn beträgt dabei 24 620 000.

##### Station 2: Standortbestimmung

Flughafen:  $F = (5 | 3)$  , Hafen im Norden:  $H = (4 | 1)$  , Bahnhof:  $B = (3 | 2)$

$$\text{Weg Flughafen-Lager: } A = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 3)^2}$$

$$\text{Weg Hafen-Lager: } B = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2}$$

$$\text{Weg Bahnhof-Lager: } C = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$$

$$K(x, y) = 2((x - 5)^2 + (y - 3)^2) + 3((x - 4)^2 + (y - 1)^2) + (x - 3)^2 + (y - 2)^2$$

Der ideale Standort für das Zentrallager ist (4 | 2) mit den Kosten 12.

### **Station 3: Outputfunktion mit Nebenbedingung**

$$f(a, b) = 50a + 70b$$

$$g(a, b) = 5000a + 7000b - 50ab = 35\,000$$

$$L(a, b, \lambda) = 50a + 70b + \lambda(35\,000 - 5000a - 7000b + 50ab)$$

Für einen maximalen Output der Eisproduktion sollte der Eissalon entweder 7 Stück von dem Maschinentyp A und 0 Stück von dem Maschinentyp B oder 0 Stück von dem Maschinentyp B und 5 Stück von dem Maschinentyp B kaufen.

Der Output beträgt dabei in beiden Fällen 350 Liter Eis.

## **Abstract-deutsche Fassung**

Die Extremwertberechnung von Funktionen stellt nicht nur im mathematischen Bereich ein wichtiges Thema dar, sondern wegen ihrer unzähligen Anwendungen in der Praxis auch in anderen Disziplinen wie in der Wirtschaft. Derzeit ist die mehrdimensionale Extremwertanalyse nicht Teil der österreichischen Lehrpläne der zweiten Sekundarstufe. Diese Diplomarbeit befasst sich mit der Frage, wie die Extremwertberechnung bei Funktionen in mehreren Variablen im Rahmen der zweiten Sekundarstufe gelehrt werden kann. In der Arbeit wird ein praxisorientierter Unterrichtsvorschlag mit einem speziellen Fokus auf wirtschaftliche Anwendungen präsentiert. Die Diplomarbeit umfasst eine Analyse der österreichischen Lehrpläne bezüglich Funktionen in mehreren Variablen, eine Analyse ausgewählter Schulbücher, einen Überblick über die mathematischen theoretischen Grundlagen der Extremwertberechnung von multivariaten Funktionen mit einer oder keiner Nebenbedingung, eine Vorstellung von verschiedenen ökonomischen Anwendungen sowie einem Unterrichtsvorschlag mit ausgearbeiteten Stundenplänen und zugehörigem Material.



## **Abstract-englische Fassung**

The calculation of extreme values of functions is not only considered as an important topic in the field of Mathematics, but also in other disciplines such as the Economics due to its numerous practical applications. Currently, the multidimensional analysis of extreme values is not part of Austrian upper secondary school curricula. This diploma thesis seeks to examine, how the calculation of extreme values of multivariate functions can be taught in the context of upper secondary schools. The paper provides a practice-oriented lesson proposal with a specific focus on economic applications. The diploma thesis comprises an analysis of Austrian curricula in regard to multivariate functions, an analysis of selected school books, an overview of the mathematical theoretical background concerning extreme values of multivariate functions with one or no constraint, a discussion of various applications in the Economics and a lesson suggestion with devised lesson plans and accompanying material.

