

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Fraktale Welten - Mathematische Behandlung von Fraktalen Strukturen

verfasst von / submitted by

Farah Wölfl

angestrebter akademischer Grad /

in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2018 / Vienna, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /

degree programme code as it appears

on the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /

degree programme as it appears

Lehramtsstudium UF Mathematik

on the student record sheet:

UF Physik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Dankesworte	1
2	Das Konzept der Fraktale	2
2.1	Die geometrische Reihe	2
2.2	Cantor-Menge	3
2.3	Die Koch-Kurve	7
2.4	Kochkurve per Zufall	11
2.5	Koch-Schneeflocke	13
2.6	Variation der Koch-Schneeflocke	16
2.7	Die höher dimensionale Koch-Schneeflocke	18
2.8	Sierpiński-Dreieck	19
3	Fraktale Bäume und deren Darstellung in Python	25
3.1	Konstruktion eines Fraktalen Baumes	26
3.2	Höhe des n-ten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks	28
3.3	Darstellung Fraktaler Bäume mit Python	30
3.3.1	Das Programm	31
3.3.2	Darstellung verschiedener Bäume in Python	33
4	Die Fraktale Dimension	35
4.1	Der intuitive Dimensionsbegriff	35
4.2	Felix Hausdorff	36
4.3	Konzepte der Fraktalen Dimension	37
4.3.1	Selbstähnlichkeits-Dimension und Fraktale	37
4.3.2	Boxdimension	39
4.3.3	Die Hausdorff-Dimension	42
4.3.4	Die topologische Dimension	45
5	Fraktale in der Archtitektur	45
5.1	Lloyd Wrights Fraktales Gebäude	46
5.2	Visuelle Wahrnehmung und Fraktale Bereiche am Beispiel des Robie-Haus	47
5.3	Anwendung der Boxdimension	50

6	Iterationen	57
6.1	Iterationen an reellen Geraden und euklidischen Ebenen	58
6.1.1	Arten der Konvergenz von Orbits	63
6.1.2	Das Chaos-Spiel	65
6.1.3	Chaotische Mengen in der Ebene	70
6.1.4	Der Lebkuchenmann	72
6.1.5	Das Collage-Theorem	75
6.2	Die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$	76
6.3	Iterationen auf $\mathbb{C}$	78
6.4	Das Newton-Verfahren	83
6.4.1	Newton-Verfahren für $z^2 - 1$	85
6.4.2	Newton-Verfahren für $z^3 - 1$	89
6.5	Die Mandelbrotmenge	93
7	Schlussworte	98
7.1	Zusammenfassung	98
7.2	Abstract	99

1 Einleitung

Meine erste Begegnung mit Fraktalen hatte ich mit einem Computerprogramm zur Visualisierung von Mandelbrotmengen. Seitdem haben sie mich nicht mehr losgelassen. Auch im Laufe meines Studiums konnte ich in meinen Vorlesungen detailliertes Wissen über Fraktale sammeln und mein Interesse und meine Begeisterung an ihnen wuchs. Diese Arbeit leitet den Leser ¹nach und nach in die Welt der Fraktale ein. Zu Beginn der Arbeit habe ich mich mit klassischen Beispielen von Fraktalen und dann insbesondere mit der Erstellung Fraktaler Bäume in einem Computerprogramm auseinandergesetzt. Dabei war es notwendig die reichlich angeführten Begriffsbestimmungen und Definitionen in meine Arbeit einzubinden. Des Weiteren wird in den nächsten Kapiteln auf die Fraktale Dimension und Fraktale Architektur eingegangen. Das größte Kapitel nehmen Iterationen ein, diese werden von der eindimensionalen Betrachtungsweise bis hin in die komplexe Zahlenebene der Mandelbrotmenge dargestellt, die sich computergestützt grafisch darstellen lässt.

1.1 Dankesworte

Ich möchte mich bei Herrn ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith recht herzlich bedanken. Dieser hat mich nicht nur bei der Erstellung meiner Diplomarbeit, sondern auch während meines ganzen Studiums bestens unterstützt.

¹Aus Gründen besserer Lesbarkeit wird ausschließlich die männliche Form verwendet. Personen weiblichen wie männlichen Geschlechts sind darin gleichermaßen eingeschlossen.

2 Das Konzept der Fraktale

2.1 Die geometrische Reihe

Der Vorläufer der Fraktale ist die geometrische Reihe. Diese Reihe beinhaltet das Konzept einer unendlichen Summe und in Folge dessen auch das Konzept des Grenzwertes.

Die Fläche eines Rechtecks ist durch die unendliche Summer kleinerer Rechtecke gegeben. Wie in Abbildung (1) ersichtlich besitzen die kleineren Rechtecke jeweils die Hälfte der Fläche ihrer Vorgänger.

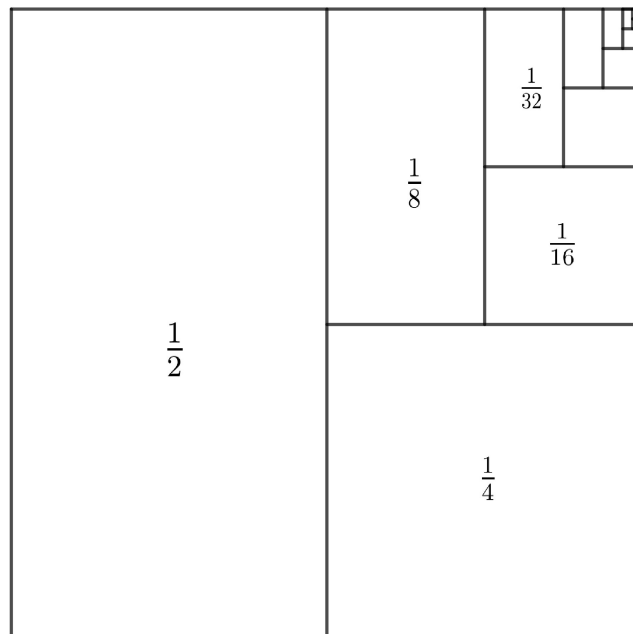


Abbildung 1: Die Summe aller entstehenden Flächen ist die selbe wie jenes Rechteck der Länge Eins.²

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

Wird $\frac{1}{2} = q$ gesetzt, so kann die Summe beschrieben werden als

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + q^4 \dots + q^n + \dots = 1$$

²vgl. Rubiano 2009, S.4

Es handelt sich somit um eine geometrische Reihe, die sich aus der Summe der Potenzen von q ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1.$$

Um eine unendliche Summe zu erhalten wird das Quadrat mit Seitenlänge Eins als Hinzufügen immer kleinerer Quadrate betrachtet. Hier entsteht wieder das Konzept der Grenze, indem die Seitenlänge Eins angenähert wird. Die geometrische Reihe ist schon seit der Antike bekannt und lässt sich mit $|q| < 1$ wie folgt beschreiben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q} \quad ^3$$

2.2 Cantor-Menge

„Ich sehe es, aber ich kann es nicht glauben!“⁴

Ende des letzten Jahrhunderts hat sich Georg Cantor, der als einer der Begründer der Mengenlehre gilt, mit dem Begriff des Unendlichen auseinandergesetzt. Besonders die Frage der Mächtigkeit von Mengen beschäftigte ihn. Dabei faszinierte ihn besonders, dass jedes Intervall, ob klein oder groß, unendlich viele rationale und irrationale Zahlen enthält. Die rationalen Zahlen sind abzählbar, die irrationalen jedoch nicht abzählbar bzw. überabzählbar. Somit erforschte Cantor eine Menge, die genau jene Schnittstelle zwischen Überabzählbarkeit und Abzählbarkeit behandelte, die heute Cantor-Menge genannt wird. Sie ist beides zugleich, nämlich eine Schnittstelle zwischen der Ansammlung diskreter Punkte und einer kontinuierlichen Linie.⁵ Bei der von Georg Cantor entdeckten Menge, handelt es sich um eine Punktmenge.⁶

Es sei C eine klassische Cantormenge. Diese Teilmenge des metrischen Raumes $[0,1]$ wird durch Entfernen des offenen mittleren Drittels des Intervalls generiert. Diese

³vgl. Rubiano 2009, S.3f

⁴*Georg Cantor (1845-1918)

⁵vgl. Argyris/Faust/Haase 1995, S.202

⁶vgl. Zeitler/Pagon 2000, S.4

Löschung wird unendlich oft wiederholt und es entsteht eine ineinander geschachtelte geschlossene Menge:

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset C_4 \supset C_5 \supset \dots \supset C_N \dots,$$

wobei

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1] \\ C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{28}{9}, 1\right] \\ C_3 &= \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \cup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right] \end{aligned}$$

Die Konstruktion wird in Abbildung (2) dargestellt und die geschlossene Menge wird definiert als

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

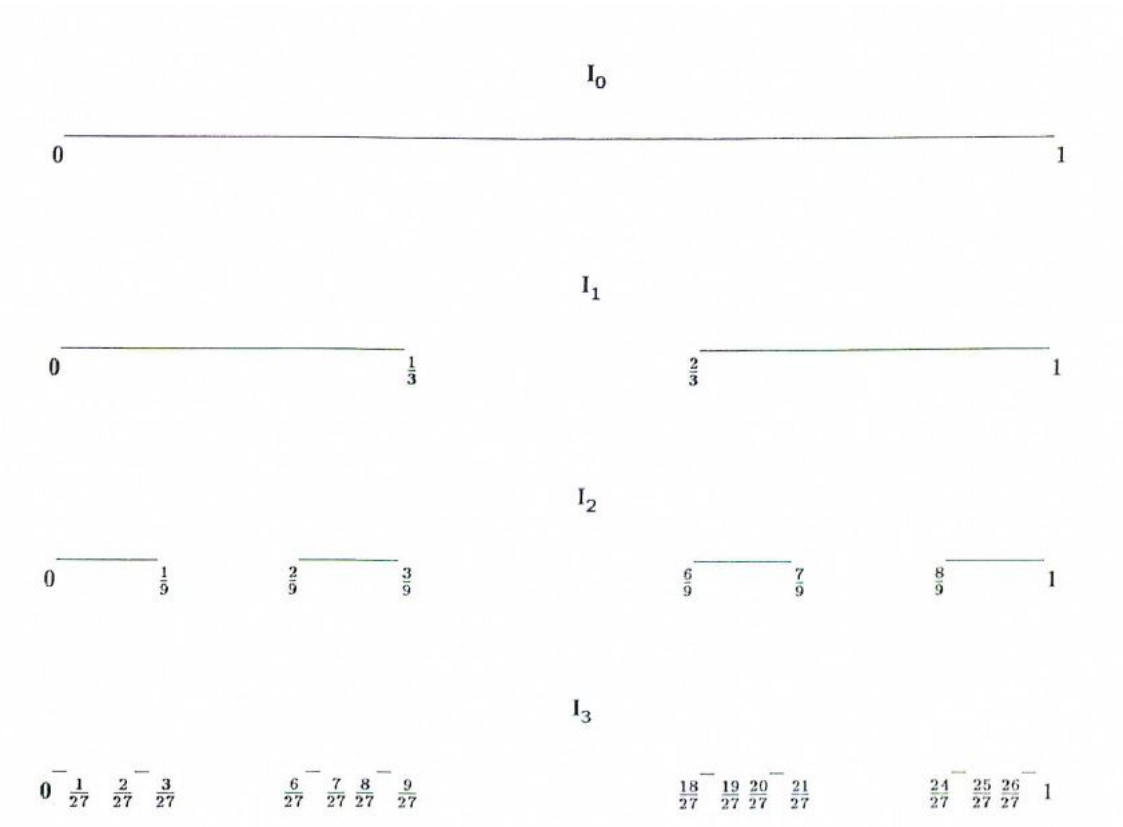


Abbildung 2: Konstruktion der Cantormenge C .⁷

Es stellt sich heraus, dass C eine perfekte Menge ist, die überabzählbar viele Punkte enthält. C ist ein Fraktal. Somit wird es auch möglich, im metrischen Raum zu arbeiten und eine Transformation bzw. Funktion zu definieren. Eine genauere Erläuterung zum metrischen Raum folgt im Kapitel 39. Sei $f : C \rightarrow C$, so wird die Transformation mit $f(x) = \frac{1}{3}x$ definiert.⁸

Im Jahr 1883 erschien die Cantor-Menge erstmalig und wurde als Exempel außergewöhnlicher Mengen statuiert. Sie ist eines der ersten betrachteten Fraktale und war weder optisch sehr ansprechend, noch eignete sie sich für eine sofortige logische Interpretation. Dennoch spielen Cantor-Mengen eine wichtige Rolle in vielen verschiedenen Zweigen der Mathematik, zum Beispiel zur Betrachtung von chaotisch-dynamischen Systemen und Fraktalen.⁹ Die nächsten Absätze beschäftigen sich mit dem Beweisen der Eigenschaften der Cantor-Menge:

Die Mengen C_n sind abgeschlossen und beschränkt, also sind sie kompakt und nicht leer. Die Cantor-Menge C ist abgeschlossen und beschränkt, somit auch kompakt. Die Cantor-Menge C hat die Länge Null, in dem Sinne, dass ihre Komplementär-Menge $[0, 1] \setminus C$ die Länge Eins hat.

Dies wird gezeigt, indem über alle Intervalle summiert wird, welche vom ursprünglichen Intervall entfernt wurden. In der Konstruktion für C_1 wurde dem Ursprungsintervall eine Intervalllänge von 3^{-1} entfernt. Für die Konstruktion von C_2 , wurden weitere zwei Intervalle der Länge 3^{-2} entfernt. Für C_n wurden 2^{n-1} Intervalle von der Länge 3^{-n} entfernt.

Somit ist die gesamte Länge aller entfernten Intervalle:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot 3^{-n} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Durch die geometrische Reihe, kann die Gesamtlänge des entfernten Intervalls gefunden werden.

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - 2/3} \right) = 1$$

⁷Barnsley 1995, S.51

⁸vgl. Barnsley 1995, S.50f

⁹vgl. Peitgen/Jürgend/Dietmar 2004, S.67

Somit ist die Länge der Cantor-Menge gleich Null, da ihr Komplement die Länge Eins hat.¹⁰

Eine weitere Eigenschaft beschreibt die Überabzählbarkeit der Menge. Dies wird bewiesen, indem angenommen wird, dass jedes Element der Cantor-Menge eine Adresse mit Nullen und Einsen besitzt. Diese Adresse bestimmt die Position in der Menge. Ein Element x wird in der Cantor-Menge festgelegt. Somit befindet sich x in C_1 . Befindet sich x in der linken Hälfte von C_1 , dann ist die erste Ziffer der Adresse von x Null, in der rechten Hälfte würde die erste Ziffer Eins annehmen. Das selbe gilt für das Intervall C_2 . Somit ist x in der linken Hälfte von C_{21} von C_2 (wenn die erste Ziffer Null ist) oder in der rechten Hälfte C_{22} von C_2 (wenn die erste Ziffer der Adresse Eins ist). Welche Adresse nun auch immer gegeben ist, handelt es sich bei dieser Hälfte um zwei Intervalle die aus der Länge 3^{-2} bestehen. Wenn sich x ganz links der beiden Intervalle befindet, wird die zweite Ziffer der Adresse Null sein, sonst ist die Ziffer Eins. Wird weiter so vorangegangen, kann x einer unendliche Sequenz an Nullen und Einsen zugeordnet werden.

Umgekehrt gilt, falls $r, s, t, \dots$ eine Sequenz von Nullen und Einsen ist, dann kann ein eindeutiges Element y in der Cantor-Menge gefunden werden. Ist die erste Ziffer eine Null, so ist y in der linken Hälfte von C_1 , sonst ist y in der rechten Hälfte von C_1 . Dasselbe gilt für die zweite Ziffer für die Position in S_2 . Somit gibt es eine eindeutige Adresse für jeden Punkt und umgekehrt. Jedoch ist die Menge aller unendlichen Sequenzen mit Nullen und Einsen überabzählbar. Somit ist auch die Cantor-Menge überabzählbar.

Hier findet das Zitat von Georg Cantor seine Sinnhaftigkeit. Die Cantor-Menge ist zwar „klein“, jedoch „groß“ im Sinne ihrer überabzählbaren vielen Elemente und wird deshalb auch als Cantor-Staub bezeichnet.¹¹

¹⁰vgl. Krantz 2009, S.34

¹¹vgl. Krantz 2009, S.35

2.3 Die Koch-Kurve

Dieses Fraktal wurde im Jahre 1904 vom schwedischen Mathematiker N.F. Helge von Koch erschaffen. Cantor erzeugt eine Menge, indem er eine unendliche Folge von Additionen von Liniensegmenten eines ursprünglichen bzw. initialen Segmentes generierte. Gegensätzlich dazu, wird bei Koch eine Kurve und kein Staub von Punkten erzeugt. Die Konstruktion ist in Abbildung (3) ersichtlich.

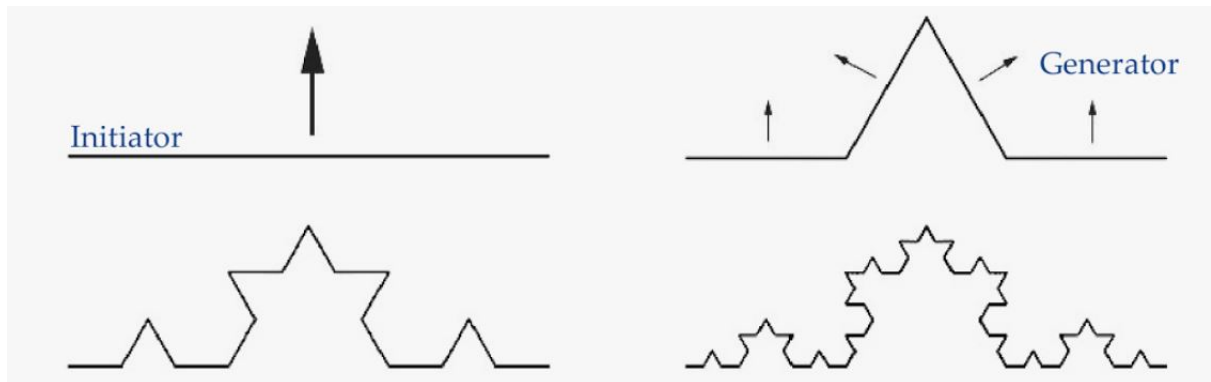


Abbildung 3: Die Konstruktion einer Koch-Kurve schreitet in Schritten voran. Nach jedem Schritt erhöht sich die Anzahl der Strecken um den Faktor vier.¹²

Für den Anfang wird ein Liniensegment der Länge Eins verwendet und dieses wird Initiator genannt. In allen Fällen ist die Länge irrelevant, jedoch vereinfacht die richtige Wahl den Rechenprozess.

Der erste Schritt besteht darin, das mittlere Drittel des Segments zu entfernen und es durch ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge von $\frac{1}{3}$ zu ersetzen, jedoch wird in diesem Schritt auch die Basis des Dreiecks gelöscht. Dieser Prozess ist der zentrale Gegenstand dieser Konstruktion und wird Generator genannt.

Durch den vorigen Schritt wurden vier gleichlange Segmente erzeugt. Jeder dieser Segmente durchläuft wieder den eben beschriebenen Prozess, somit wird der Generator immer an Liniensegmenten angewandt.

¹²Logofatu 2008, S.135

Diese Prozesse wiederholen sich bis ins Unendliche oder bis zur Auflösung des Computerbildschirms. Am Ende des Prozesses bleibt die Koch-Kurve **K** übrig.

Um herauszufinden wie lang **K** ist, muss über alle hinzugefügten Liniensegmente summiert werden. Nach dem ersten Schritt ist eine Kurve von vier Segmenten mit der Länge $\frac{1}{3}$ entstanden. Dann wurde jedem Segment eine Länge von $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ hinzugefügt, wodurch sich die vorherige Länge um $4\left(\frac{1}{3}\right)^2$ erhöht. Weitere Segmente werden hinzugefügt und die Summe kann beschrieben werden als

$$1 + \frac{1}{3} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \dots \right).$$

Es handelt sich hierbei um eine unendliche Summe, welche mit Hilfe einer geometrischen Reihe mit $q = \frac{4}{3}$ und $|q| > 1$ dargestellt werden kann.¹³

Die Kochkurve erhält erst durch die erste Iteration ihre Fläche ($A_0 = 0$). Somit wird für die Fläche der Faktor $n - 1$ verwendet. Da nach jedem weiteren Iterationsschritt ein weiteres Dreieck entsteht, verändert sich die Anzahl der Strecken x_n um den Faktor vier. Entsprechend nimmt die Anzahl der neuen Dreiecke t_n um den selben Faktor zu.

$$t_n = 4^{n-1}.$$

Das allgemeine Dreieck in Abbildung (4) dient zur Berechnung der neuen Dreiecke.

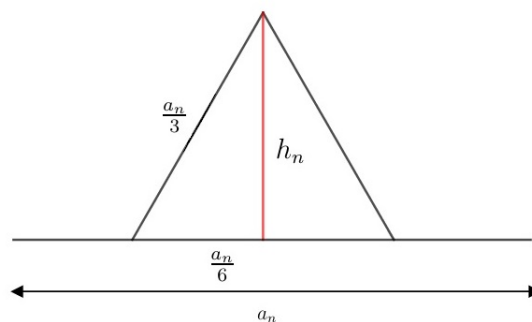


Abbildung 4: Betrachtung eines allgemeinen Dreiecks.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich:

$$A = h \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot a$$

¹³vgl. Rubiano 2009, S.7f

Durch Anwenden des Satz des Pythagoras folgt:

$$h^2 + \left(\frac{1}{6}\right)a^2 = \left(\frac{1}{3}a\right)^2$$

$$h^2 = \frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{36}a^2$$

$$h^2 = \frac{1}{12}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks und des n-ten Dreiecks können beschrieben werden als:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \frac{1}{6}a$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{6}a_{n-1} \cdot \frac{1}{6}a_{n-1}^2$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{36}a_{n-1}^2.$$

Die Streckenänderung nach jedem Iterationsschritt wird um den Faktor $\frac{1}{3}$ multipliziert. Dies wirkt sich somit quadratisch auf die Fläche aus.

$$A_n = A_1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

Gleichzeitig nimmt nach jedem Iterationsschritt auch die Anzahl der Dreiecke um den Faktor 4 zu.

$$A_n = A_1 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Die Fläche unter der Koch-Kurve berechnet sich aus der Summe aller einzelnen Dreiecke.

$$A_{ges_n} = \sum_{j=1}^n A_j$$

Da Fraktale nur durch unendlich viele Iterationsschritte entstehen können, errechnet sich die Gesamtfläche durch Anwendung des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty}$.

$$\begin{aligned}
A_{ges} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n A_j \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n A_1 \left(\frac{4}{9}\right)^{j-1} \\
&= A_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{j-1} \\
&= A_1 \cdot v_{\infty}.
\end{aligned}$$

Die Substitution von v_{∞} und Anwendung der geometrischen Reihe ergibt:

$$\begin{aligned}
v_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{j-1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n q^{j-1} \\
&= \frac{1}{1-q} \\
&= \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{9}\right)} \\
&= \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Durch Zurücksostituieren wird die tatsächliche Fläche der Kochkurve berechnet

$$\begin{aligned}
A_{ges} &= A_1 \cdot \frac{9}{5} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{36} a_0^2 \cdot \frac{9}{5} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{20} a_0^2. \quad ^{14}
\end{aligned}$$

In Abbildung (5) wird die Selbstähnlichkeit der Kurve ersichtlich. Jedes Kettenglied des Anfangsmusters der Konstruktion wird mit vier multipliziert. Diese Zahl wird im Abschnitt Fraktale Dimension wieder aufgegriffen.

Die Koch-Kurve ist ein Beispiel für eine Kurve mit unendlicher Länge, die dennoch auf interessante Art und Weise auf unsere Handfläche passt.¹⁵

¹⁴vgl. Seelemann/Grehl 2005, S. 3ff [Online]

¹⁵vgl. Rubiano 2009, S.8

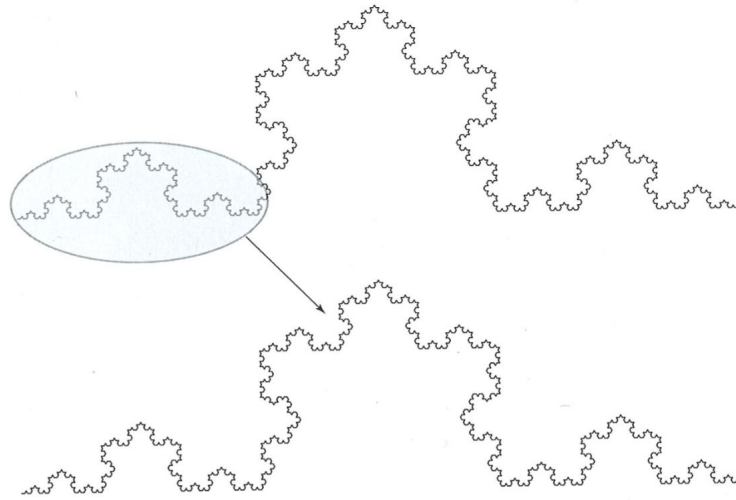


Abbildung 5: Die Selbstähnlichkeit der Koch-Kurve.¹⁶

2.4 Kochkurve per Zufall

Kochkurven sind exakt selbstähnlich, egal wie stark in die Kochkurve vergrößert wird, ergibt sich immer die selbe Struktur. Diese Kurve ähnelt einer Küstenlinie mit Einkerbungen, die wiederum Buchten besitzt und so weiter. Dennoch ist die Koch-Kurve viel zu symmetrisch und regelmäßig, um einer realistischen Küstenlinie zu ähneln. Zwar sind die Einkerbungen der Küstenlinie einander ähnlich, aber nicht identisch. Durch eine Veränderung im Entstehungsprozess der Koch-Kurve lassen sich realistischere Formen erzeugen. Dazu ist es nötig, die Iteration dem Zufall zu überlassen. In jedem Iterationsschritt werden alle mittleren Segmentdrittel durch ein Dreieck ersetzt. Wie in Abbildung (6) ersichtlich, zeigen die Hälfte der Dreiecke nach oben und die andere Hälfte nach unten. Nach mehreren Iterationen dieser Art entsteht eine zufällige Kochkurve.

¹⁶Rubiano 2009, S.9

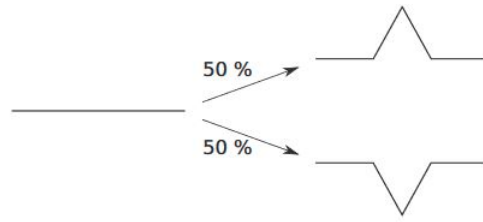


Abbildung 6: Darstellung eines elementarer Schritts zum Generieren der zufälligen Koch-Kurve.¹⁷

Bei dieser Kurve handelt es sich nicht um eine deterministische Kurve, denn bei ihrer Konstruktion herrscht der Zufall. Die zufällige Kochkurve, sieht nach jedem Entstehungsprozess anders aus (siehe Abbildung (7)).

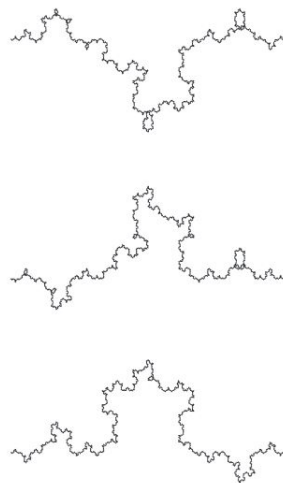


Abbildung 7: Darstellung verschiedener zufälliger Kochkurven.¹⁸

Die zufälligen Kochkurven sind nicht mehr selbstähnlich. Zwar ähnelt vielleicht eine kleine Kopie der Kurve der ursprünglichen Kurve, aber es handelt sich nicht um eine exakte Replik.

Das entstandene Fraktal ist keine exakte Kopie seiner selbst. Interessant ist jedoch, dass kleine Teile in der Kochkurve die selben statistischen Eigenschaften besitzen.

¹⁷Feldman 2012, S.174

¹⁸Feldman 2012, S.175

Deshalb wird hier auch von statischer Selbstähnlichkeit gesprochen. Die drei Kochkurven in Abbildung (7) scheinen uneben und faltig zu sein, sehen sich aber nicht ähnlich. Die geometrische Selbstähnlichkeit lässt sich aber mit der Selbstähnlichkeits-Dimension ermitteln. Dies wird im Kapitel 37 behandelt.¹⁹

Die Regeln der zufälligen Kochkurve können auch variiert werden. Zum Beispiel können die Wahrscheinlichkeiten für ein nach oben zeigendes Dreieck auf 75% erhöht werden, während das nach unten zeigende mit 50% gleich bleibt.²⁰

2.5 Koch-Schneeflocke

Bei erster Betrachtung ähnelt die Koch-Kurve einer Schneeflocke. Wie in Abbildung (8) ersichtlich, wird von einem gleichseitigen Dreieck als Initiator ausgegangen, so kann die Koch-Schneeflocke generiert werden.²¹

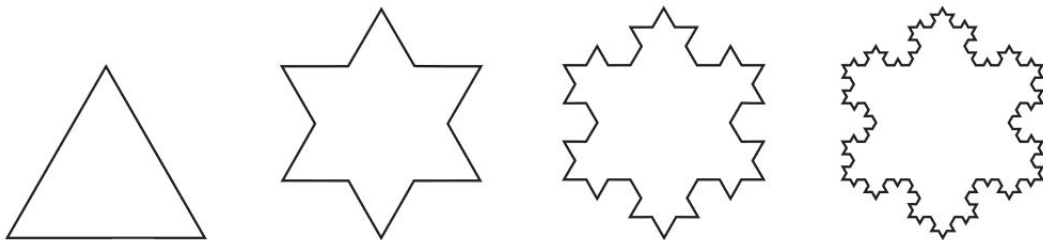


Abbildung 8: Die Konstruktion der Koch-Schneeflocke.²²

Für die Koch-Schneeflocke ergibt sich ein Umfang von $U = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \infty$. Der Umfang divergiert nach jedem Iterationsschritt mehr und mehr gegen unendlich.²³

¹⁹vgl. Feldman 2012, S.174f

²⁰vgl. Feldman 2012, S.176

²¹vgl. Gulick 2010, S.58

²²Gulick 2010, S.59

²³vgl. Gulick 2010, S.59

Jedoch ist die Fläche der Schneeflocke endlich. Eine Methode zum Auffinden der Fläche ist das Konstruieren einer geometrischen Folge, welche die Flächen aller gleichseitigen Dreiecke, die nach jedem Iterationsschritt entstanden sind aufsummiert.²⁴ Nach dem ersten Iterationsschritt beträgt die Fläche der Schneeflocke $\frac{8}{5}$ der ursprünglichen Fläche.

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{8}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right). \quad ^{25}$$

Die zweite Methode arbeitet mit der Selbstähnlichkeit der Koch-Schneeflocke. Sie ist einfacher und verlangt weniger Rechenarbeit als mit der geometrische Reihe. Zuerst wird die Fläche des gleichseitigen Dreiecks (Abbildung (9)) berechnet.

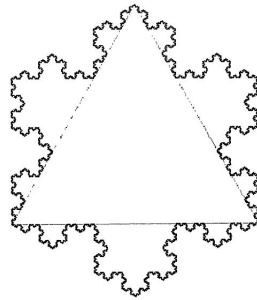


Abbildung 9: Die Konstruktion der Kochkurve mit gleichseitigem Ausgangsdreieck der Seitenlänge a .²⁶

Die Fläche des ersten gleichseitigen Dreiecks beträgt

$$A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Die zweite Fläche ist jene zwischen dem Dreieck und der Kochkurve. In Abbildung (10) wurde jener Bereich x vergrößert, der sich zwischen Dreieck und Kochkurve befindet. Somit beträgt die gesamte Fläche der Koch-Schneeflocke

$$A + 3x.$$

²⁴vgl. Sandefur, 1996, S.113

²⁵vgl. Gulick 2010, S.59

²⁶Sandefur 1996, S.112

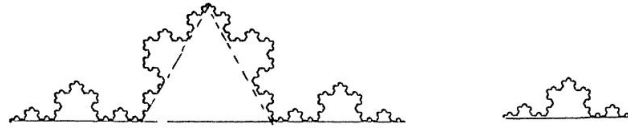


Abbildung 10: Links befindet sich die Kurve, die sich auf einer Seite des gleichseitigen Dreiecks mit Länge a befindet. Rechts wurde nochmals vergrößert, sodass $\frac{a}{3}$ die Länge der Seite ergibt.²⁷

Die Berechnung der Fläche x gestaltet sich in zwei Teilen. Im ersten Teil wird das gleichseitige Dreieck in der Mitte berechnet. Es handelt sich um ein zum initialen Dreieck ähnliches Dreieck. Diesmal hat das Dreieck ein Drittel der Seitenlänge des Originalen. Somit ist der Skalierungsfaktor $\frac{1}{3}$ und für die Fläche ergibt sich:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 A = \frac{A}{9}.$$

Der zweite Teil besteht darin, die Fläche der vier kongruenten Teile, die sich rund um das Dreieck befinden zu berechnen. Einer dieser Teile wird in Abbildung 10 rechts dargestellt. Dieser Teil wird y genannt. Für x ergibt sich:

$$x = \frac{A}{9} + 4y$$

Nun wird die Selbstähnlichkeit der Koch-Schneeflocke verwendet. In Abbildung (10) ist die linke Figur zur rechten ähnlich. Hierbei wurde die rechte Abbildung auf ein Drittel der linken Abbildung reduziert. In Folge dessen handelt es sich bei der rechten Fläche um ein Neuntel der linken Fläche.

$$y = \frac{x}{9}$$

Die Substitution von y ergibt:

$$x = \frac{A}{9} + 4y = \frac{A}{9} + \frac{4x}{9}$$

Das Auflösen nach x ergibt:

$$x = \frac{A}{5}$$

²⁷Sandefur 1996, S.113

Somit ist die Fläche der Koch-Schneeflocke:

$$A + 3x = A + \frac{3A}{5} = \frac{8A}{5} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{5}. \quad {}^{28}$$

2.6 Variation der Koch-Schneeflocke

Die Koch-Schneeflocke kann auch auf eine andere Art konstruiert werden. Jede Seite des gleichseitigen Dreiecks wird in Proportionen $p : q : p$ unterteilt. Dabei gilt, dass $p + q + p = 1$ und $2p > q$. Nun wird ein gleichseitiges Dreieck erzeugt. In der Mitte jeder Seite wird ein gleichschenkliges Dreieck eingesetzt. Die beiden Schenkel haben dieselbe Länge $p \cdot a$, wie die zwei äußeren Proportionen auf der Seite des ursprünglichen Dreiecks. Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks wird entfernt und der Prozess wird mit den vier neuentstandenen Liniensegmenten wiederholt.

Im Grenzfall entsteht eine Variation der Koch-Schneeflocke. In Abbildung (11) sind Koch-Schneeflocken mit $p = 0,26$ und mit $p = 0,4$ dargestellt.

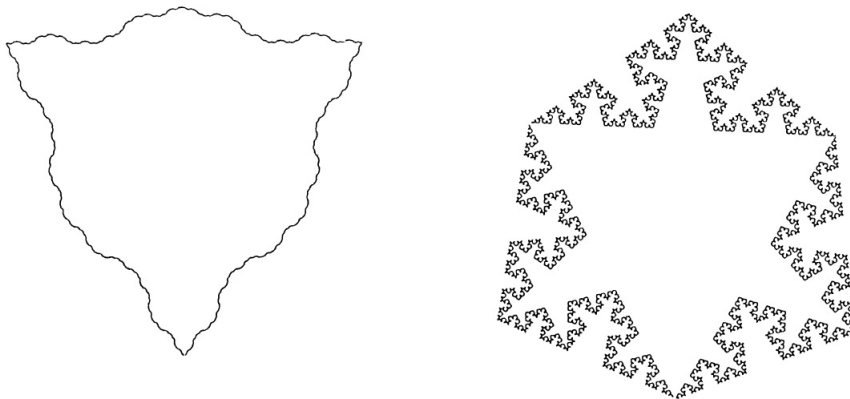


Abbildung 11: Links: Eine Koch-Schneeflocke, deren Seiten in die Proportionen $0,26 : 0,48 : 0,26$ geteilt wurde. Rechts: Eine Koch-Schneeflocke deren Seiten in die Proportionen $0,4 : 0,2 : 0,4$ geteilt wurde.²⁹

²⁸vgl.Sandefur, 1996, S.112f

²⁹Sandefur 1996, S.114

Die Berechnung der Fläche der Variation der Koch-Schneeflocke besteht wiederum aus zwei Teilen. Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ergibt sich durch $A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Sei x eine Fläche zwischen Koch-Kurve und gleichseitigem Dreieck, dann ist die gesamte Fläche der Koch-Schneeflocke $A + 3x$. Das Ausfindig machen von x besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird die Fläche der gleichschenkeligen Dreiecke berechnet und mit S bezeichnet.

$$S = \frac{qa^2\sqrt{1-2q}}{4}$$

Im zweiten Teil wird die Fläche jedes kongruenten Teils y rund um das gleichschenklige Dreieck berechnet. Wie zuvor ist $x = S + 4y$. Die Selbstähnlichkeit hilft bei der Berechnung. Jede der vier kleineren Regionen ist der von der Koch-Kurve eingeschlossenen Region und dem gleichschenkligen Dreieck ähnlich, diesmal aber mit einem Skalierungsfaktor von p . Somit ist

$$y = p^2x.$$

Durch Substitution von y ergibt sich:

$$x = S + 4y = S + 4p^2x$$

Für x ergibt sich:

$$x = \frac{S}{(1-4p^2)}$$

Da $1 - 4p^2 = (1 - 2p)(1 + 2p) = q(2 - q)$, ergibt sich für x :

$$x = \frac{S}{q(2-q)} = \frac{qa^2\sqrt{1-2q}}{4q(2-q)} = \frac{a^2\sqrt{1-2q}}{4(2-q)}$$

Für die Fläche der variierten Koch-Schneeflocke ergibt sich:

$$A + 3x = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} + \frac{3a^2\sqrt{1-2q}}{4(2-q)}.$$

³⁰vgl. Sandefur, 1996, S.114f

2.7 Die höher dimensionale Koch-Schneeflocke

In Abbildung (12) ist eine Koch-Schneeflocke höherer Dimension dargestellt. Für die initiale Figur wird von einem Tetraeder der Kantenlänge 1 ausgegangen. Jede Seitenfläche wird in vier gleichseitige Dreiecke unterteilt. Das Dreieck in der Mitte dient als Basis für einen weiteren Tetraeder mit Kantenlänge $\frac{1}{2}$. Dieser Prozess wird unendlich oft wiederholt und jedes Mal werden Tetraeder der Seitenlänge $\frac{1}{2}$ des Vorgängers erzeugt. Um dieses Fraktal zu erzeugen, wird jede Fläche des Tetraeders in vier gleichseitige Dreiecke geteilt. Ein neuer Tetraeder wird im Zentrum platziert und überdeckt dabei eines der vier gleichseitigen Dreiecke, somit werden drei neue hinzugefügt.³¹

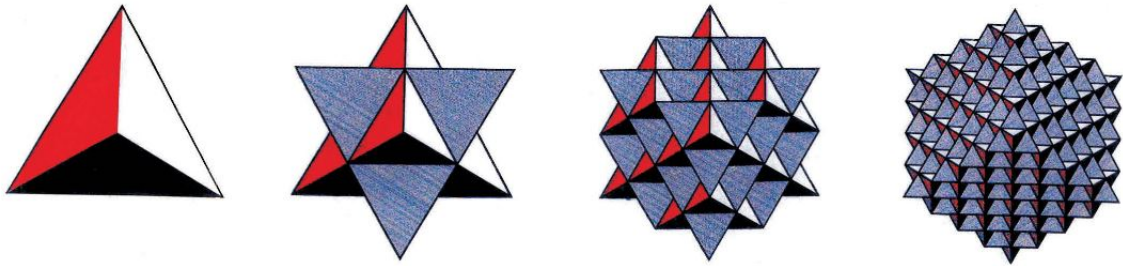


Abbildung 12: Iterationsschritt eins bis vier der höher dimensionalen Koch-Schneeflocke.³²

Jede Seitenfläche eines Tetraeders beinhaltet sechs gleichseitige Dreiecke. Für die Oberfläche der Schneeflocke ergibt sich:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} = \infty.$$

Während die Oberfläche gegen Unendlich divergiert, ist das Volumen der Schneeflocke endlich und berechnet sich durch:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Überraschenderweise handelt es sich um das Volumen des begrenzenden Würfels, dessen Kantenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ist. Die Flächendiagonalen des Würfels betragen Länge 1.

³¹vgl. Gulick 2010, S.59

³²Gulick 2010, S.59

Durch die Selbstähnlichkeit der höher dimensionalen Schneeflocke ergibt sich die Möglichkeit einer alternativen Berechnung des Volumens, das aber zum selben Ergebnis führt. Sei V das Volumen des initialen Tetraeders und x das Volumen zwischen einer Seite des ursprünglichen Tetraeders und der dreidimensionalen Koch-Kurve, dann ist das Volumen der höher dimensionalen Kochkurve gleich $V + 4x$. Das Volumen x ist die Summe des Volumen eines kleineren Tetraeders auf der Fläche und dem Volumen der vier kongruenten Teile rund um den ursprünglichen Tetraeder. Da der kleinere Tetraeder dem initialen Tetraeder selbstähnlich ist und die Länge der Kanten um die Hälfte reduziert werden, beträgt das Volumen $\frac{1}{8}$ des ursprünglichen Volumens.

Die vier kongruenten Teile nehmen jeweils $\frac{1}{8}$ des Volumens ein und da die Regionen selbstähnlich zu x (mit einem Kontraktionsfaktor von $\frac{1}{2}$) sind, folgt $x = \frac{1}{8}V + \frac{4}{8}x$. Das Auflösen nach x ergibt

$$x = 2V.$$

Somit ergibt sich für das Volumen der dreidimensionalen Koch-Schneeflocke

$$V + 4x = V + 2V = 3V = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{12} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.^{33}$$

2.8 Sierpiński-Dreieck

Der polnische Mathematiker Namens Waclaw Sierpiński (1882-1969) erzeugte verschiedenste Objekte mit Fraktalen Eigenschaften, darunter auch das Sierpiński-Dreieck. Ähnlich wie bei Cantor, handelt es sich um eine unendliche Folge, die Konstruktion wird in Abbildung (13) dargestellt.

³³vgl. Gulick 2010, S.59f

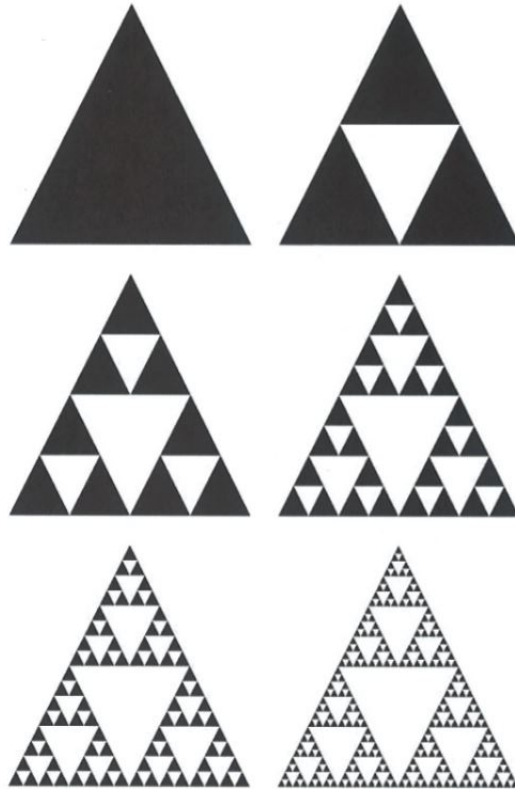


Abbildung 13: Die Konstruktion des Sierpiński-Dreiecks.³⁴

Ein gleichseitiges Dreieck dient als Ausgangsdreieck, welches am Start die Seitenlänge Eins besitzt. Die Mittelpunkte jeder Seite werden miteinander verbunden und das innere Dreieck wird entfernt. Es bleiben drei gleichseitige Dreiecke übrig, dessen Seitenlängen genau die Hälfte des Ausgangsdreiecks sind. Nun gilt es, genau wie bei der Koch-Kurve, herauszufinden, welches Objekt der Initiator oder Generator ist.

Für die drei jeweils entstandenen Dreiecke wird der zuvor beschriebene Prozess wieder angewandt, um jeweils drei neue Dreiecke zu erhalten, die einen Maßstab von $(\frac{1}{2})^2$ vom Ausgangsdreieck besitzen.

Der vorherige Prozess wird in jedem der neu erzeugten Dreiecke fortgesetzt, bis die Grenze des Prozesses erreicht ist. Die zuletzt entstandene Figur, dabei handelt es sich wieder um unendlich viele Schritte, ist bekannt als das Sierpiński-Dreieck (**S**).

³⁴Rubiano 2009, S.13

Wenn die Anfangsfläche des Dreiecks, die als Grundlage der Konstruktion von **S** genommen wurde A ist, handelt es sich bei der entfernten Fläche um $\frac{1}{4}A$. Im zweiten Schritt wird $\frac{1}{4}$ von jedem der drei Dreiecke entfernt und es ergibt sich somit eine Fläche von $3\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Im Allgemeinen entspricht die entfernte Fläche nichts anderem als das Ergebnis der unendlichen Summe:

$$A \left(\frac{1}{4} + 3 \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 3^2 \left(\frac{1}{4} \right)^3 + 3^3 \left(\frac{1}{4} \right)^4 + \dots \right) = A.$$

Die entfernte Fläche entspricht schlussendlich genau der Fläche des Anfangsdreiecks, jedoch bleiben immer noch Punkte übrig. Genau diese Punkte machen **S** aus. Sie sind nicht in irgendeinem Gebiet gehäuft, sondern verstreut. Sie lassen aber eine Art Staub entstehen, ähnlich wie bei der Menge von Cantor.

Überraschenderweise ist das gewählte Anfangsobjekt nicht ausschlaggebend, um ein Sierpiński-Muster erhalten zu können. Wichtig ist jedoch der Prozess an sich, der ein Anfangsobjekt in mehrere Teile teilt, Kopien davon macht und sie in geeigneter Anordnung nebeneinander legt. Ob es sich beim Anfangsobjekt um ein Rechteck oder um ein Dreieck handelt ist nebensächlich für den Erhalt von einem Sierpiński-Muster.³⁵

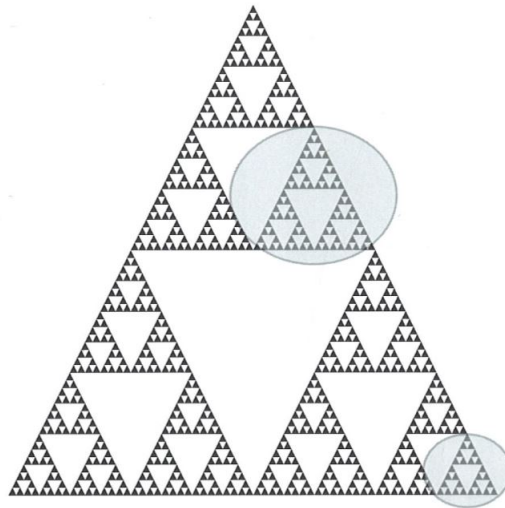


Abbildung 14: Die Selbstähnlichkeit des Sierpiński-Dreiecks.³⁶

³⁵vgl. Rubiano 2009, S.13f

³⁶Rubiano 2009, S.16

Es gibt viele Fraktale, die nach dem Muster von Sierpiński-Dreiecken gebaut werden können. Die Sierpiński-Teppiche sind ein Beispiel für Fraktale, die entstehen, wenn mit einem Quadrat als Anfangsobjekt begonnen wird. Wie in Abbildung (14) ersichtlich, handelt es sich wieder um eine selbstähnliche Figur; die sich in den grau schraffierten Kreisen befindlichen Dreiecken sind dem Anfangsdreieck ähnlich.

Wie oben beschrieben wurde im Dreieck mit einem Dreieck begonnen, jedoch wird jetzt ein Quadrat verwendet und mit diesem operiert. Das Objekt wird in Quadrate unterteilt und jenes im Zentrum wird entfernt. In jedem der acht Quadrate wird schließlich der beschriebenen Prozess durchgeführt. Nach unendlich vielen Iterationsschritten entsteht wie in Abbildung (15) der Sierpiński-Teppich.

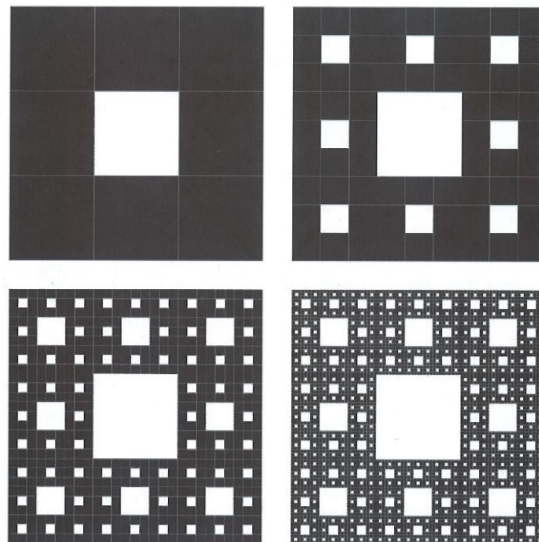


Abbildung 15: Der quadratische Sierpiński-Teppich.³⁷

Im Falle des Sierpiński-Teppichs handelt es sich bei jedem n -ten Schritt um eine Längenskalierung von $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Dabei entstehen 8^n Quadrate.

Genauso ist es möglich den Sierpiński-Teppich in drei Dimensionen zu modellieren. In Abbildung (16) wird der Menger-Schwamm dargestellt, welcher zu Ehren seines

³⁷Rubiano 2009, S.16

Erfinders Karls Menger benannt wurde. Er wird auch Sierpiński-Schwamm oder Magritte-Würfel genannt.³⁸ Um den Menger-Schwamm zu beschreiben, wird der Würfel in 27 kongruente Teilwürfel zerlegt. Von diesem werden 7 Würfel entfernt, somit bleiben 20 Würfel übrig. Schließlich wird dieser Schritt an die übrig gebliebenen Teilwürfel angewendet. Es bleibt bei fortsetzendem Entfernen der Würfel nur mehr ein Staub übrig, wobei es sich wieder um eine Punktmenge handelt. Die Seitenflächen des Menger-Schwamms sind die zuvor beschriebenen Sierpiński-Teppiche.

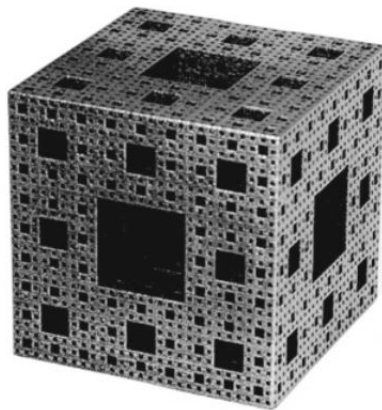


Abbildung 16: Abbildung des Menger-Schwamms.³⁹

Das Volumen des Menger-Schwamms ist in der Tabelle 1 , mit $V_0 = a^3$ dargestellt.

Volumen des Würfels	Anzahl der Würfel
V_0	1
$\frac{1}{27^2} V_0$	20^2
...	...
$\frac{1}{27^n} V_0$	20^n

Tabelle 1: Volumen des Würfels und Anzahl der Würfel des Menger-Schwamms

³⁸vgl. Rubiano 2009, S.15f

³⁹Alsina 2015, S.226

Für fortsetzendes Entfernen der Würfel, ergibt sich ein Volumen von

$$V_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0 \left(\frac{20}{27} \right)^n = 0.$$

Vor dem ersten Iterationsschritt, besitzt der Würfel eine Oberfläche von $O_0 = 6a^2$. Schließlich werden 7 Würfel entfernt. Es lässt sich jedoch nicht einfach die Anzahl der Quadrate des Inhalts $\frac{1}{9}a^2$ mit 6 multiplizieren ($20 \cdot 6$), sondern es muss beachtet werden, dass die Würfel gemeinsame Flächen besitzen. Die an den Kanten positionierten Würfel teilen sich jeweils zwei Quadrate mit ihren nächsten Nachbarn. Die Würfel an den Ecken teilen sich sogar drei Quadrate. Somit ergibt sich für die Oberfläche nach dem ersten Iterationsschritt:

$$O_1 = (20 \cdot 6 - 48) \frac{1}{9} a^2.$$

Auf der nächsten Iterationsstufe bleiben nach dem Entfernen 20^2 Würfel übrig. Hier gilt wieder dasselbe Prinzip, jedoch haben die Quadrate nun jeweils einen Inhalt von $\frac{1}{9^2}a^2$. Deshalb müssen im Inneren eines jeden Würfels, mit Kante $\frac{1}{3}a$, 48 bzw. $20 \cdot 48$ Flächen abgezogen werden. Wiederum teilen sich diese Würfel genauso Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{9}a$, davon gibt es dann $8 \cdot 48$ Stück und es ergibt sich für die Oberfläche im zweiten Iterationsschritt:

$$O_2 = (20^2 \cdot 6 - 20 \cdot 48 - 8 \cdot 48) \frac{1}{9^2} a^2.$$

Um die Oberfläche nach dem n-ten Iterationsschritt zu erhalten, wird hier mit vollständiger Induktion gearbeitet.

$$\begin{aligned} F_n &= [20^n \cdot 6 - 48 (20^{n-1} + 20^{n-2} \cdot 8 + \dots + 8^{n-1})] \frac{1}{9^n} a^2 = \\ &= 20^{n-1} \left[120 - 48 \left(1 + \frac{2}{5} + \dots + \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right) \right] \frac{1}{9^n} a^2 = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{20}{9} \right)^{n-1} a^2 \left[120 - 48 \cdot \frac{5}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \right] = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{20}{9} \right)^{n-1} a^2 \left[40 + 80 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich nach unendlich vielen Iterationsschritten eine Fläche von

$$F_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \infty.^{40}$$

⁴⁰vgl. Zeitler/Pagon 2000, S.21f

Der Menger-Schwamm, wurde aufgrund der Ehrung von Karl Menger zum Wahrzeichen der Notre-Dame-University in Chicago gemacht.⁴¹ Dort wirkte er bis 1946. Er verstarb am 5. Oktober 1985 in Chicago.⁴²

Der Menger-Schwamm findet auch in der Architektur seine Anwendung. Würde eine Stadt zum Beispiel aus einem drei-dimensionalen Würfel entstehen, so müssten Freiräume für Einkaufsflächen, öffentliche Plätze, usw. geschaffen werden. Durch Entfernen von Teilwürfeln, wie zuvor beschrieben, lässt sich im Grenzfall die räumliche Stadt als Fraktale Dimension identifizieren. Die Idee, dass der Verkehr in drei-Dimensionen fließen könnte, könnte die zwei-dimensionale, auf dem Boden bleibende Fortbewegung revolutionieren. Jedoch müsste der Lebensraum der Stadtbewohner mehr und mehr ausgedünnt werden, dies führt aber zu einem Einschnitt in der Lebensqualität.

Die Städte unserer Zeit sind ähnlich wie ein Nagelbrett aufgebaut. Die Nägel die das Brett säumen sind unterschiedlich lang (Einfamilienhäuser vs. Wolkenkratzer). Nach dem Modell des Menger-Schwamms könnten sich Städte nach oben erweitern. Als Beispiel könnten Verkehrsstraßen über die Dächer der Wohnhäuser gebaut werden, jedoch müssten die schweren Lastwagen auf der Bodenfläche bleiben. Der restliche Raum bleibt für die Menschen, Pflanzen und Tiere frei.⁴³ Fraktale Geometrie spielt in der Architektur auch eine große Rolle. Auf dies wird im Kapitel 45 näher eingegangen.

3 Fraktale Bäume und deren Darstellung in Python

Folgender Abschnitt beschäftigt sich mit der Berechnung und Darstellung Fraktaler Bäume in der Programmiersprache Python. Faszinierend dabei ist, dass sich diese Bäume lediglich aus Quadraten und Dreiecken erstellen lassen.

⁴¹vgl. DePauli-Schimanovich 2007, S. 62

⁴²vgl. Stadler 2001, S.461

⁴³vgl. DePauli-Schimanovich 2007, S. 62

3.1 Konstruktion eines Fraktalen Baumes

Zu Beginn ist ein initiales Quadrat mit Seitenlänge $x = 1$ gegeben, auf welches ein initiales Dreieck gesetzt wird. Dieses Objekt bildet den Stumpf des Baumes. Für gleichschenklige Dreiecke werden hier drei Fälle unterschieden:

- Der Basiswinkel des Dreiecks beträgt 60°
- Der Basiswinkel des Dreiecks beträgt $< 60^\circ$. Hierbei kann es sich um ein wie in Abbildung (17) dargestelltes gleichschenkliges-rechtwinkliges Dreieck handeln.
- Der Basiswinkel des Dreiecks beträgt $> 60^\circ$.

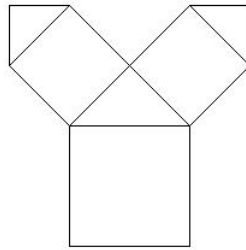


Abbildung 17: Konstruktion mit gleichseitigem-rechtwinkligem Dreieck nach der ersten Konstruktions-Etappe.

Im nächsten Schritt wird auf dem initialen Dreieck auf beiden Seiten ein Rechteck und ein Dreieck aufgesetzt. Diese beiden weiteren Objekte bilden die Äste des Baumes. Dieser Vorgang wird öfter wiederholt und läuft folgendermaßen ab:

0-te Etappe: Ein Stumpf (Quadrat und Dreieck) wird gezeichnet.

1-te Etappe: Zwei Äste werden gezeichnet.

2-te Etappe: Vier Äste werden gezeichnet.

.

.

.

j-te Etappe: 2^j Äste werden gezeichnet

In der j-ten-Etappe besteht der Baum aus $\sum_{n=1}^j s^n$ Ästen

Im ersten Fall entsteht kein Baum. Wie in Abbildung (18) bleiben die Länge des Quadrats und die des Dreiecks nach jeder Etappe gleich lang. Es entsteht ein Teppich, der aber nichts mit Fraktalen zu tun hat.

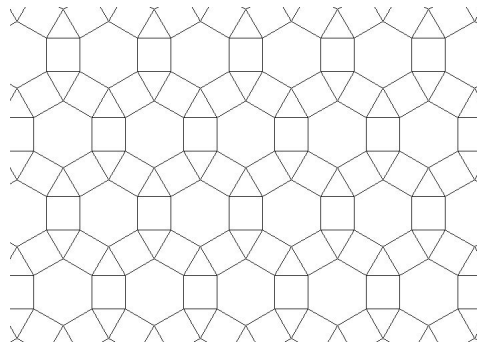


Abbildung 18: Konstruktion eines Teppichs mit einem gleichseitigen Dreieck

Für den zweiten Fall werden folgende Fragen beantwortet: Dehnt sich der Baum ins Unendliche aus oder bleibt er in einem bestimmten Bereich? Gibt es ab einer bestimmten Konstruktionsetappe Überlappungen der Äste?

Im dritten Fall handelt es sich um ein Fraktal welches sich immer mehr ausdehnt und von Innen heraus konstruiert wird. Dieser Fall wird aber nicht weiter betrachtet.

3.2 Höhe des n-ten gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks

Im folgenden Abschnitt wird der zweite Fall betrachtet und zur Berechnung wird ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck verwendet.

Sei x die Größe des initialen Quadrats. Die Höhe des ersten Dreiecks besitzt, wie in Abbildung (19) ersichtlich, genau die Hälfte der Länge von x , da es sich um ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck handelt. Da sich in der nächsten Etappe die Höhe aus zweimal der Hälfte des initialen Quadrats ergibt, wird diese um x größer. Dies ist in Abbildung (20) dargestellt.

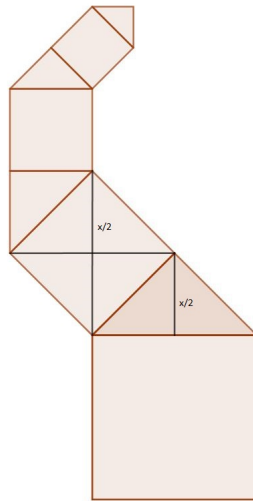


Abbildung 19: Zunahme der Höhe des Dreiecks nach Etappe 0, 1, 2 und 3

Für die Zunahme der Höhe sind nur die Seitenlängen und Diagonalen der Quadrate verantwortlich. Die Höhe wurde in Tabelle (2) für mehrere Etappe berechnet:

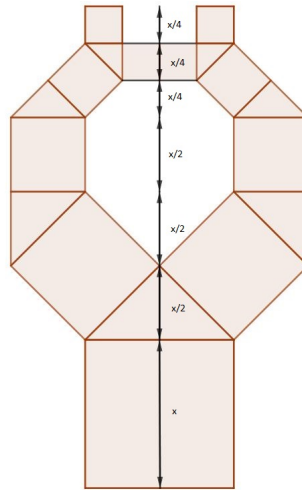


Abbildung 20: Zunahme der Höhe des Dreiecks mit Etappen von 0-5

Etappen	Hinzugefügte Höhe	Gesamte Höhe
1	x	x
2	x	$2x$
3	$\frac{x}{2}$	
4	$\frac{x}{2}$	$3x$
5	$\frac{x}{4}$	
6	$\frac{x}{4}$	$\frac{7x}{2}$
7	$\frac{x}{8}$	
8	$\frac{x}{8}$	$\frac{15x}{4}$
9	$\frac{x}{16}$	
10	$\frac{x}{16}$	$\frac{31x}{8}$
11	$\frac{x}{32}$	
12	$\frac{x}{32}$	$\frac{63x}{16}$
13	$\frac{x}{64}$	
14	$\frac{x}{64}$	$\frac{127x}{32}$
15	$\frac{x}{128}$	
16	$\frac{x}{128}$	$\frac{255x}{64}$

Tabelle 2: Berechnung der Höhen für mehrere Etappen.

Für eine große Anzahl von Etappen wird die jeweils hinzugefügte Höhe immer kleiner und nähert sich 0 an. Es stellt sich somit heraus, dass der Baum keine unendliche Fläche einnimmt, sondern in einem bestimmten Bereich bleibt. Dieser Zusammenhang kann mit einer geometrischen Reihe bewiesen werden.

Im Falle des gleichseitigen- rechtwinkligen Dreiecks ergibt sich die Höhe aus den Höhen der Quadrate c_j und der Länge der Diagonalen d_{j+1} des nächsten Quadrats. Angenommen die Länge des initialen Quadrats ist $c_0 = 1$, dann ist die Länge der darauffolgenden Quadrate $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$; ... $c_n = z^n$ mit $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die gesamte Höhe kann in einer Summe geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & (c_0 + d_1) + (c_2 + d_3) + (c_4 + d_5) + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j} + d_{2j+1} \end{aligned}$$

mit $(d_{2j+1})^2 = 2(z^{2j+1})^2$ und $c_j = z^j$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\infty} z^{2j} + \sqrt{2}z^{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} z^{2j}(1 + \sqrt{2}z) \end{aligned}$$

Dies ist eine geometrische Folge und aus ihr kann die geometrische Reihe gebildet werden.

$$= (1 + \sqrt{2}z) \frac{1}{1 - z^2}.$$

Somit ergibt sich für $c_0 = 1$ und $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eine Gesamthöhe von:

$$H = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4.$$

Somit wurde gezeigt, dass der Baum eine gewisse Höhe nicht überschreitet und in einem bestimmten Bereich bleibt.

3.3 Darstellung Fraktaler Bäume mit Python

Im folgenden Abschnitt wird ein Programm zur Erstellung von fraktalen Bäumen vorgestellt, welches in der Programmiersprache Python geschrieben wurde.

3.3.1 Das Programm

Die Erstellung des Fraktals wurde mit Hilfe der Funktion *turtle* realisiert. Diese fährt bestimmte Punkte ab und hinterlässt dabei eine Spur. So können Rechtecke und Dreiecke gezeichnet werden. In folgender Abbildung ist das Programm dargestellt; jeder Programmschritt wurde kommentiert.

```
import turtle
import math as m

def baum(boxSize, tiefe, winkel):
    #Zeichnet einen Baum aus Boxen und Dreiecke

    #Zeichnet eine Box
    for n in range(3):
        Stift.left(90)
        Stift.forward(boxSize)
        Stift.left(180)
        Stift.forward(boxSize)

    #Berechnet neue Seitenlaenge anhand des angegebenen Winkels
    boxSize = boxSize/(2*(m.sin(m.radians(90-winkel))))
    #Zeichnet eine Seite des Dreiecks
    Stift.right(90-winkel)
    Stift.forward(boxSize)

    #Speichert die Stiftposition an der Spitze des Dreiecks
    loc = Stift.position()
    degree = Stift.heading()
    #Zeichnet die zweite Seite des Dreiecks
    Stift.right(winkel*2)
    Stift.forward(boxSize)
```

```

#Verifiziert ob ein weiterer Rekursionsschritt gemacht werden soll
if tiefe > 0:
    #Die Funktion ruft sich selbst mit verringerter Tiefe
    #auf um den rechten Ast zu zeichnen
    baum(boxSize, tiefe - 1, winkel)
    #Der Stift wird an die Spitze des Dreiecks gesetzt
    Stift.penup()
    Stift.setpos(loc)
    Stift.setheading(degree)
    Stift.pendown()
    #Die Funktion ruft sich selbst mit verringerter Tiefe
    #auf um den linken Ast zu zeichnen
    baum(boxSize, tiefe - 1, winkel)
    #Die Rekursion endet sobald die Tiefe 0 erreicht

#Erstellen einer turtle namens Stift
Stift = turtle.Turtle()
#Zeichengeschwindigkeit
Stift.speed(0)
#Turtle ausblenden
Stift.hideturtle()
#Zeichenfarbe festlegen
Stift.color("#000000")
#Den Stift positionieren
Stift.penup()
Stift.goto(-50, -100)
Stift.pendown()

#Festlegen von Seitenlaenge, Rekursionstiefe und Basiswinkel
size = 100
tiefe = 8
winkel = 85

```

```

#Den Baum zeichnen
Stift.forward(size)
baum(size, tiefe, winkel)
#Beendet das Fenster erst beim Mausklick
turtle.exitonclick()

```

3.3.2 Darstellung verschiedener Bäume in Python

In Abbildung (21) ist ein Fraktaler Baum mit gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreiecken dargestellt. Die Größe des initialen Quadrats ist 100 Einheiten groß und die Dreiecke besitzen einen Basiswinkel von 45° . Ab dem achten Iterationsschritt kommt es überall im Baum zu Zweig-Überlappungen. Nun stellt sich auch die Frage wie sinnvoll Flächenberechnung eines solchen Fraktals mit Überlappungen sind und ob nicht eher nach der Dimension des Baumes gefragt werden sollte. Im Kapitel 4 wird näher auf diese Frage eingegangen.

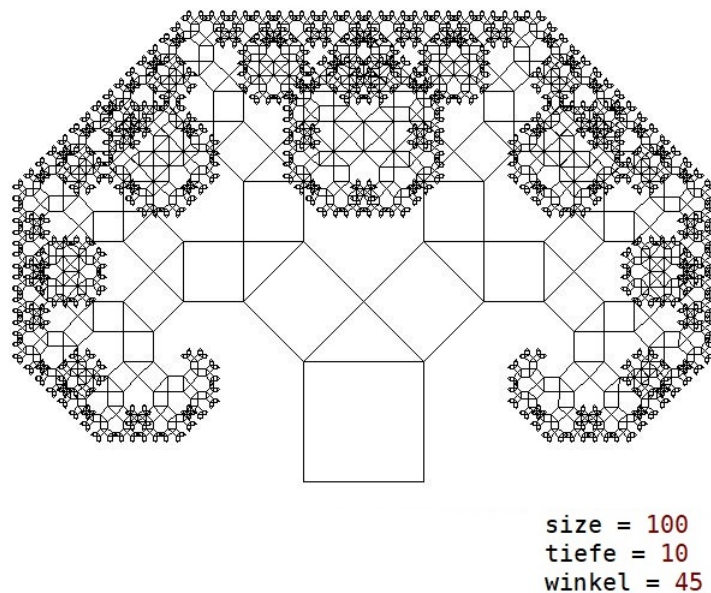


Abbildung 21: Darstellung eines Fraktalen Baumes mit gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreiecken in Python.

In Abbildung (22) sind Fraktale Bäume mit gleichschenkligen Dreiecken dargestellt. Die Größe des initialen Quadrats ist 100 Einheiten groß und die Dreiecke besitzen einen Basiswinkel von 50° . Ab dem dritten Iterationsschritt kommt es im linken Baum zu Zweig-Überlappungen und die Konstruktion wird abgebrochen. Im rechten Bild wurde die Konstruktion fortgesetzt. Der 50° -Winkel bewirkt, dass die Zweige ab dem sechsten Iterationsschritt in einen gedachten Boden hineinwachsen.

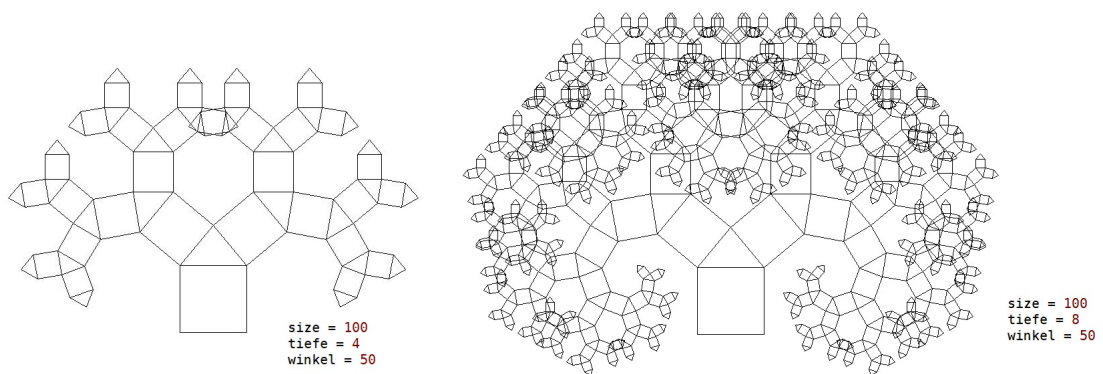


Abbildung 22: Darstellung Fraktaler Bäume mit gleichschenkeligen Dreiecken in Python.

In Abbildung (23) sind Fraktale Bäume mit gleichschenkligen Dreiecken dargestellt diesmal ist der Basiswinkel kleiner als 45° . Je spitzer der Basiswinkel, desto schmaler wird der Baum und desto kleiner werden die Seitenlängen der darauffolgenden Quadrate.

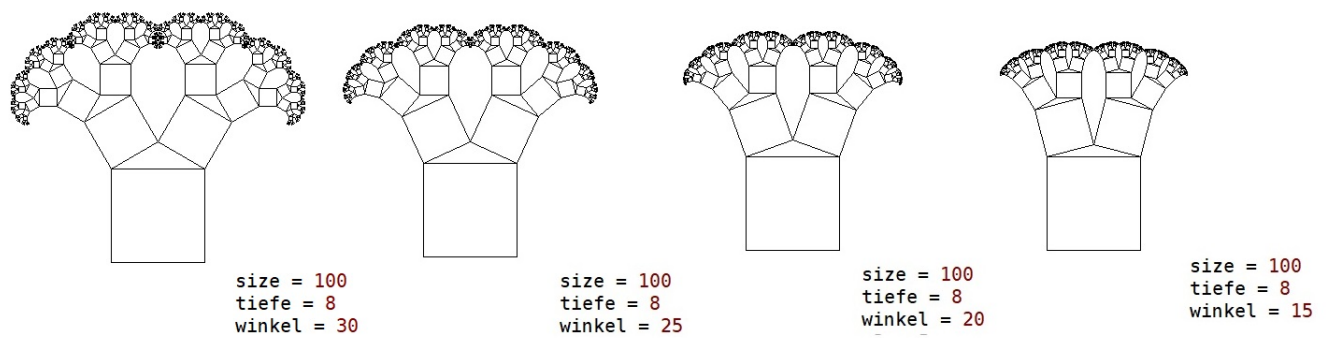


Abbildung 23: Darstellung Fraktaler Bäume mit gleichschenkeligen Dreiecken in Python mit Basiswinkel von 30°, 25°, 20°, 15°.

4 Die Fraktale Dimension

4.1 Der intuitive Dimensionsbegriff

In diesem Kapitel wird der Begriff der Selbstähnlichkeit wieder aufgegriffen, da er sich zur Klärung der Dimensionen von Fraktalen als hilfreich herausstellt. Das Sierpiński-Dreieck, die Cantor-Menge, wie auch die Sierpiński-Teppiche sind selbstähnlich, denn nach jedem Iterationsschritt wird das ursprüngliche Objekt wieder hervorgerufen. Natürlich ist eine einzelne Linie (z.B. die der Cantor-Menge) kein Fraktal. Deshalb reicht allein die Selbstähnlichkeit nicht aus, um die Eigenschaft eines Fraktals zu begründen. Es braucht somit einen neuen Begriff, der der Fraktalen Dimension. Dieser wird für den Anfang auf intuitive Art und Weise beschrieben.

In geläufigen Dimensions-Konzepten versteht sich, dass ein Segment oder eine Linie die Dimension eins besitzen, da es nur möglich ist, sich von links nach rechts und umgekehrt zu bewegen, weil es nur eine Achse gibt. Handelt es sich um einen Punkt, oder einer endlichen Menge von Punkten, wäre nur die Dimension 0 und somit keine Bewegung möglich.

Ein Quadrat hat die Dimension zwei, da es zur Beschreibung eines Punktes die Länge als auch die Breite benötigt. Unsere Welt lässt sich auf gleiche Art und Weise mit drei Dimensionen beschreiben. Dieses Dimensions-Konzept stammt aus der Zeit Euklids, die drei Achsen sind Länge, Breite und Höhe.

Stellt sich nun die Frage nach der Dimension des Sierpiński-Dreiecks. Bei der Konstruktion des Dreiecks wurden vom Anfangsdreieck Flächen entfernt, bis nur mehr eine Punktmenge übrig blieb.

Die Punkte innerhalb des Sierpiński-Dreiecks können sich nun nicht nur nach links und nach rechts bewegen, sondern haben auch die Freiheit, in mehrere Richtungen zu wandern. Die Dimension Eins ist weder geeignet für die Beschreibung eines Punktes im Dreieck, noch ist es die Dimension Zwei, es muss sich aber um etwas zwischen den beiden handeln.⁴⁴ Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit dem Begriff der Fraktalen Dimension.

4.2 Felix Hausdorff

Die Analyse zur Fraktalen Dimension begann der deutsche Mathematiker Felix Hausdorff.⁴⁵ Der Mathematiker ist durch viele mit seinem Namen verbundene mathematischen Begriffe, wie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, die Hausdorff-Maße oder die Hausdorff-Dimension bekannt. Mit seinen Werken hat er unter anderem den Dimensionsbegriff vollständig erneuert und dazu beigetragen, einen Schritt in Richtung mathematischer Moderne zu machen.⁴⁶

⁴⁴vgl. Rubiano 2009, S.17ff

⁴⁵vgl. Rubiano 2009, S.20

⁴⁶vgl. Brieskorn 1996, S.1

4.3 Konzepte der Fraktalen Dimension

4.3.1 Selbstähnlichkeits-Dimension und Fraktale

Von einer Linie, einem Quadrat und einem Würfel werden die Dimensionen 1, 2 und 3 angenommen. In Abbildung (24) wird jeder dieser drei Objekte durch vier geteilt, somit ist der Kontraktionsfaktor $r = \frac{1}{4}$. Auf der Linie erscheinen nun $N(4) = 4$ Segmente, im Quadrat $N(4) = 16$ Quadrate und im Würfel $N(4) = 64$ Würfel. Für k darf jede beliebige ganze Zahl eingesetzt werden, es verändert sich lediglich das Verhältnis von $r = \frac{1}{k}$ mit $N(k) = k^1$ Segmenten, $N(k) = k^2$ Quadraten, $N(k) = k^3$ Würfeln.



Abbildung 24: Wird jede Seite durch vier geteilt, so entstehen 4, 16, 64 Unterfiguren.⁴⁸

Aus den vorangegangenen Überlegungen und aus dem gesammelten Wissen über die klassische Dimension kann die Fraktale Dimension als Potenz, auf die der Kontraktionsfaktor erhöht werden muss, verstanden werden.

Jedoch ist dies nicht nur auf Objekte wie Linien, Quadrate und Würfel beschränkt, sondern lässt jede Figur X in $\mathbb{R}$ zu, die in Teilfiguren oder Teilmengen unterteilt werden kann. Diese sind alle zueinander kongruent und sind um den Kontraktionsfaktor $r = \frac{1}{k}$ reduzierte Kopien des ursprünglichen Objekts.

⁴⁸Rubiano 2009, S.21

Dimension	Exponent
1	$N(k) = k^1$
2	$N(k) = k^2$
3	$N(k) = k^3$

Tabelle 3: Dimensionen und zugehöriges $N(k)$

Die Selbstähnlichkeits- Dimension von X wird definiert als der einzige Wert, welcher der Gleichung $N(k) = k^d$ genügt. In Tabelle 3 ist $N(k)$ für alle Dimensionen aufgeführt. Somit ist

$$d = \frac{\log N}{\log(k)}.$$

Die Dimension d muss aber nicht wie zuvor ein ganze Zahl sein. Es handelt sich hier um eine Dimension die empfindlicher als üblich ist und bei der es möglich ist, gebrochene Dimensionen aufzuspüren. Die Selbstähnlichkeits-Dimension von Fraktalen wird auch D genannt.

Diese einfache, aber weitreichende Idee kann auf eine große Anzahl (aber nicht auf alle) an Mengen angewandt werden.

Für den speziellen Fall des Sierpiński-Dreiecks beträgt die Selbstähnlichkeits-Dimension $D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,584$.

Beim Sierpiński-Dreieck wurde der Logarithmus von drei genommen, welcher der Anzahl N an neu entstandenen Dreiecken entspricht und der Logarithmus von $2 = \frac{1}{r}$, da $r = \frac{1}{2}$ die Kontraktion ist, mit der das Anfangsobjekt reduziert wurde.

Ähnlich wird bei der Dimension der Cantormenge vorgegangen. Sie kann weder mit der Dimension Null, noch mit der Dimension Eins beschrieben werden. Es muss sich somit um eine Dimension zwischen den beiden handeln. Die unendlich vielen Punkte der Menge sind weder isoliert, noch an einer Stelle dicht beieinander, sondern formen Strukturen wie ein Pulver.

Es wird wie im Beispiel zuvor vorgegangen. Die Fraktale Dimension ist

$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309$. Mit einem Kontraktionsfaktor von $\frac{1}{3}$ und jeweils zwei neu entstehenden Segmenten beträgt die Dimension 0,6309. ⁴⁹

⁴⁹vgl. Rubiano 2009, S.20ff

Für die Dimension der Koch-Kurve ergibt sich durch den Kontraktionsfaktor $r = \frac{1}{3}$ und Anzahl $N = 4$ für 4 Kopien ihrer selbst. Somit ergibt sich für die herkömmliche Kochkurve die Dimension $D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,262$.

Für die Dimension der zufälligen Koch-Kurve ergibt sich das gleiche wie für die herkömmliche Kochkurve, nämlich $D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,262$.⁵⁰

Die Dimension der Koch-Schneeflocke ist, wie bei der Koch-Kurve, mit $N = 4$ und einen Kontraktionsfaktor von $r = \frac{1}{3}$ mit $D = 1,262$ gegeben.⁵¹

4.3.2 Boxdimension

Die Selbstähnlichkeits-Dimension beinhaltet jedoch Einschränkungen, die die Boxdimension zu umgehen versucht. Objekte lassen sich in der Mehrheit nicht in exakte Kopien zerlegen. In Folge dessen kann die Definition der Selbstähnlichkeits-Dimension oft nicht verwendet werden.

In diesen Fällen schafft die Boxdimension Abhilfe, sie kann jedoch nicht auf andere Dimensionen verallgemeinert werden. Für diesen Dimensionsbegriff wird auf dem Computer-Bildschirm (in Pixel) gearbeitet und auch die Rechenschritte werden vom Rechner übernommen.

Sei A ein Objekt oder eine Menge, dann wird A in einem Netz oder in ein regelmäßiges Gitter platziert. Die Quadrate des Gitters haben jeweils die Länge δ , welche die einzelnen Kästen erzeugt und somit den Namen Boxdimension rechtfertigt.

Der Bildschirm wird in Quadrate der Länge l unterteilt und die Anzahl dieser gibt Auskunft darüber, wie viele Quadrate nötig sind, um die Figur vollständig abzudecken.

⁵⁰vgl. Feldman 2012, S.176

⁵¹vgl. Gulick 2010, S.58

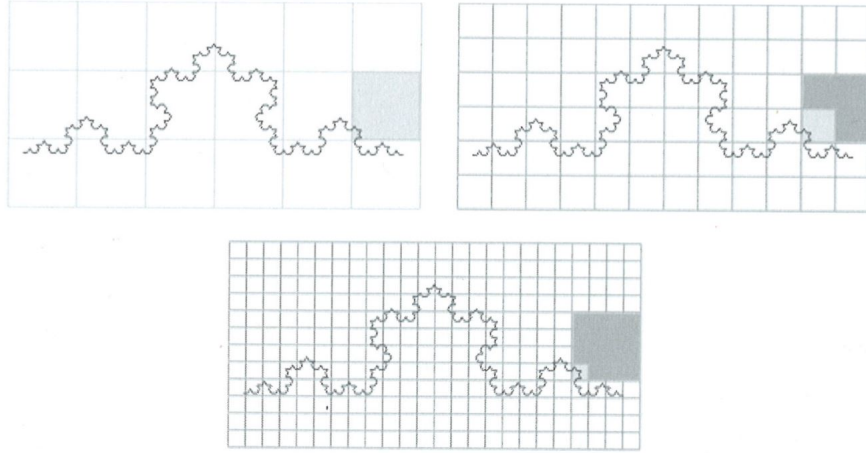


Abbildung 25: Die Größe des Gitters und die Anzahl der Boxen optimieren den Prozess.⁵²

In Abbildung (25) werden die Quadrate, welche nötig sind, um die Figur abzudecken gezählt. Diese Anzahl $N(\delta)$ ist abhängig von der Länge δ der Quadrate.

Im nächsten Schritt wird die Figur wie zuvor mit Quadraten kleinerer Fläche überdeckt. Diese werden gezählt und mit $N(l)$ beschrieben. Durch Wiederholen dieses Prozesses und durch kleiner werdender Länge l entsteht eine Datentabelle.

Für eine Berechnung am Computer erfordert dies vorteilhafter Weise keine Selbstähnlichkeit der Figur. Die Boxdimension kann durch Verwendung von Würfeln auf drei Dimensionen verallgemeinert werden und wird im Folgenden definiert.

Die Boxdimension der Figur A wird definiert als $D(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{(\ln 1/\delta)}$, wobei $N_\delta(A)$ die Anzahl der Quadrate der Länge $\delta > 0$ ist, die A abdecken.⁵³

Diese Definition der Boxdimension stößt aber an ihre Grenzen, sobald es sich bei A um keine zusammenhängende Figur mehr handelt.

Definition 1. Ein metrischer Raum $(\mathbb{X}, d)$ ist eine Menge $\mathbb{X}$, die zusammen mit der reel-wertigen Funktion $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ den Abstand zwischen zwei Punkten misst. Dazu

⁵²Rubiano 2009, S.23

⁵³vgl. Rubiano 2009, S.22f

muss d folgende Axiome erfüllen:

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$$

$$0 < d(x, y) < \infty \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$$

$$d(x, y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x \in \mathbb{X}. \text{ (Dreiecksungleichung)} \quad ^{54}$$

Definition 2. Ein metrischer Raum heißt zusammenhängend, wenn $\mathbf{M}$ und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von $\mathbf{M}$ sind, die einerseits offen, aber auch abgeschlossen sind. Eine Teilmenge $U \subset \mathbf{M}$ ist dann zusammenhängend, wenn auch der metrische Raum (U, d) zusammenhängend ist. Ansonsten ist U unzusammenhängend. U ist dann total unzusammenhängend, wenn die einzigen nichtleeren, zusammenhängenden Teilmengen von U aus einzelnen Punkten bestehen.⁵⁵

Beispiel: $\mathbb{R}$ und $[0, 2)$ sind zusammenhängend; $3 \cup (4, 5)$ sind unzusammenhängend.

Eine allgemeinere und gebräuchlichere Definition beinhaltet auch noch die Information des Volumens (im dreidimensionalen Fall) V^* :

$$D(A) = \frac{\ln(N_\delta(A)) - \ln(V^*)}{\ln(1/\delta)}.$$

wobei N die Anzahl der Boxen mit Länge δ die benötigt werden um das Objekt zu überdecken und $N = \frac{V^*}{\delta}$. Das Umformen der Gleichung ergibt

$$\ln(N\delta(A)) = D(A) \ln(1/\delta) + \ln(V^*).$$

Diese Gleichung ist günstig zur Bestimmung der Dimension von unterschiedlichsten Fraktalen Objekten. Hier kann $\ln(N)$ gegen $\ln(1/\delta)$ aufgetragen werden, um die Boxdimension zu generieren. Die Abbildung (26) zeigt drei verschiedene Arten des Zählens der Boxen, um die Dimension zu eruieren. Um eine Küstenlinie zu überdecken kann auch mit Kreisen gearbeitet werden.

⁵⁴vgl. Barnsley 1995, S.11

⁵⁵vgl. Barnsely 1995, S.29



Abbildung 26: Bestimmung der Boxdimension einer Küstenlinie.⁵⁶

Es ist möglich die Boxen eine nach der anderen zu platzieren, um eine möglichst geringe Anzahl an Boxen zur Überdecken der Küstenlinie zu benötigen. Alternativ dazu kann ein regelmäßiges Gitter mit einer Anzahl N an Boxen verwendet werden. Auch Kreise mit dem Durchmesser δ eignen sich gut zur Überdeckung.

Die Boxdimension ist in der Praxis sehr weit verbreitet. Sie schätzt die Dimension einer Vielfalt an Fraktalen Objekten. Sie kann nicht nur an zwei-dimensionalen Objekten, wie Küstenlinien angewandt werden, sondern auch bei mehrdimensionalen Gebilden.⁵⁷ Dies wird im Kapitel 5 näher behandelt.

4.3.3 Die Hausdorff-Dimension

Im Allgemeinen garantiert die eben beschriebenen Gleichung nicht, dass der Grenzwert tatsächlich existiert. Angenommen A sei eine Teilmenge dicht in $\mathbb{R}^n$, dessen Dimension n ist und sogar überabzählbar viele Elemente besitzt. A ist sehr klein und damit sollte die Dimension Null sein.⁵⁸

„Nach einleitender Betrachtung, die [...] einen Überblick über die reiche Fülle analoger Maßbegriffe gestattet, stellen wir eine Erklärung des p -dimensionalen Maßes

⁵⁶Addison 1997, S.32

⁵⁷vgl. Addison 1997, S.32f

⁵⁸vgl. Rubiano 2009, S.24

*auf, die sich unmittelbar auf nicht ganzzahlige Werte von p ausdehnen und in Mengen gebrochener Dimension als möglich erscheinen läßt, ja sogar solche, deren Dimensionen die Skala der positiven Zahlen zu einer verfeinerten, etwa logarithmischen Skala ausfüllen. [...] Nicht so ungezwungen, wie unser Dimensionsbegriff ist freilich der Nachweis, daß es Mengen gibt, die genau von vorgeschriebener Dimension sind, d.h. ein entsprechendes Maß besitzen, das weder Null noch unendlich ist; wir beschränken uns in dieser Hinsicht auf die einfachsten Beispiele, nämlich gewisse lineare nirgendsdichte perfekte Mengen (auf welche, für abnormes Verhalten aller Art typische, Mengengattung hier ein neues Licht fällt) und die hieraus durch Multiplikation entstehenden Ebenen und räumlichen Mengen.“*⁵⁹

Felix Hausdorff veröffentlichte 1919 einen 22 seitigen Artikel, welcher die Entwicklung der Maßtheorie ermöglichte und zu deren Veränderung beitragen hat. Auf diesen Seiten, stellt er eine vollständige Theorie des Maßes und der gebrochenen Dimension allgemein und klar dar.⁶⁰

Felix Hausdorff hat sich auch mit philosophischen Fragen beschäftigt. Ihn interessierte die Schwelle zwischen Mathematik und Philosophie. Ihm schien es hier auch wichtig zu reflektieren, wie mathematische Fragestellungen und Begriffe zu philosophischen oder weltlichen Thematiken werden. Der Begriff des Chaos ist ein Paradebeispiel für einen mathematischen Sachverhalt, der auch außerhalb mathematischer Kreise auf sehr großes Interesse gestoßen ist und im Zuge dessen noch immer für Missverständnisse im Diskurs sorgt.⁶¹

Angenommen das Ziel ist es die Fläche A einer Teilmenge in einer komplizierten Ebene zu vermessen. Eine Möglichkeit zur Messung wäre, A mit einer Reihe kleiner Scheiben zu beschichten. A ist dann höchstens die Summe dieser Flächen.

$$\frac{\pi}{4}(\text{diam}(D_1)^2 + \text{diam}(D_2)^2 + \text{diam}(D_3)^2 + \dots).$$

Jedoch ist die Aussage über die Fläche ziemlich begrenzt. So decken diese wahrscheinlich einen guten Teil der Fläche ab, die nicht A ist. Somit ist es am Besten, alle möglichen Varianten zu betrachten, die die Fläche von A abdecken können. Die

⁵⁹Hausdorff 1919, S.157-159

⁶⁰vgl. Rubiano 2009, S.24

⁶¹vgl. Brieskorn 1996, S.8

zweidimensionale Fläche von A ist die kleinste Summe und kann als Grenzwert verstanden werden. Im eindimensionalen Fall, bei Betrachtung eines Segments A mit Länge 1, wird mit n Scheiben eines Durchmessers von $\frac{1}{n}$ abgedeckt. Die Fläche der Scheiben beträgt folglich $\frac{1}{4} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{c}{n}$, wobei c eine Konstante ist. Wird n sehr groß, so beträgt die Fläche im zwei-dimensionalen gleich Null.

Um die Länge von A im eindimensionalen zu definieren, wird wie im zuvor Beschriebenen vorgegangen. Diesmal wird aber die Länge der Durchmesser der Scheiben summiert.

$$\text{diam}(D_1)^2 + \text{diam}(D_2)^2 + \text{diam}(D_3)^2 + \dots$$

Für das d-dimensionale Maß ergibt sich:

$$\text{diam}(D_1)^d + \text{diam}(D_2)^d + \text{diam}(D_3)^d + \dots$$

In der Praxis haben die Scheiben alle dieselbe Größen und A ist eine geschlossene Menge und erscheint auch so auf der Bildschirm des Computers als gut sichtbare Struktur.

Wenn zum Beispiel jede Scheibe ϵ sehr klein ist und wenn $N(\epsilon)$ die Anzahl der Scheiben ist um A abzudecken, dann ist das d-dimensionale Maß proportional zum Grenzwert

$$h^d(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \epsilon^d.$$

Hausdorff hat gezeigt, dass genau ein Wert d existiert, für den $h^d(A)$ nicht Null oder ∞ ist. Dieser Wert $d = D_H(A)$ ist dann erfüllt, wenn

$$h^d(A) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } d < D_H(A) \\ 0 & \text{wenn } d > D_H(A) \end{cases} \quad (1)$$

$D_H(A)$ wird als die Hausdorff-Dimension von A bezeichnet. Der Wert $d = D_H(A)$ ist die Zahl für den $N(\epsilon) \propto \frac{1}{\epsilon^d}$ ist.

Handelt es sich bei den Untersuchungen zur Dimension um selbstähnliche Objekte, so stimmen alle zuvor besprochenen Dimensionskonzepte überein, sodass mit verschiedenen Prozeduren die gleiche Fraktale Dimension generiert werden kann. ⁶²

⁶²vgl. Rubiano 2009, S.26f

4.3.4 Die topologische Dimension

Diese Definition, welche den Dimensionsbegriff beinhaltet, ist für topologische Räume im Allgemeinen gegeben. Es handelt sich hierbei um eine induktive Definition im mathematischen Gebiet der Topologie, welche Fraktale lokalisiert und untersucht. In der von Mandelbrot festgelegten Definition, geht es auch darum, einen Vergleich mit den vorherigen Definitionen herzustellen und auch um unterscheiden zu können, bei welchem Objekt es sich um ein Fraktal handelt und bei welchem nicht.

Folgende Definitionen werden behandelt, wenn die topologische Dimension Null, Eins, n , $n+1$ und etc. ist.

Definition 3.

Die Dimension der leeren Menge ist $\dim(\emptyset) = -1$.

Ein topologischer Raum ist 0-dimensional, d. h. $\dim(X) = 0$, falls es irgendein $x \in V$ mit V offen in x gibt, dann existiert eine offene Menge U , deren Grenze $\partial(U)$ leer ist und $x \in U \subseteq V$ ist.

Ein Raum X besitzt $\dim(X) \leq n$, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Menge V , die x enthält, es eine offene Menge U , so dass $x \in U \subseteq V$ und $\dim(\partial(U)) \leq n - 1$; X hat $\dim(X) = n$, wenn $\dim(X) \leq n$, aber es ist falsch, dass $\dim(X) \leq n - 1$ ist. ⁶³

5 Fraktale in der Architektetur

Als Anfang des 20. Jahrhunderts neue mathematische Strukturen entdeckt wurden, die nicht den Regeln von Euklid und Newton gehorchten, wurde dieses Konzept auch auf so manches architektonische Werk übertragen. Diese Gebäude beinhalten, wie Fraktale auch selbstähnliche Details jeglicher Größenordnung. ⁶⁴

⁶³vgl. Rubiano 2009, S.27f

⁶⁴vgl. Vyzantiadoua 2007, S.52

5.1 Lloyd Wrights Fraktales Gebäude

Lloyd Wright ⁶⁵ ist ein Architekt, welcher in seinen Werken ein gutes Beispiel für Selbstähnlichkeiten in der Architektur liefert. Der Architekt verbrachte oft die Sommer seiner Jugend auf einer Farm in Wisconsin. Diese sollte auch später einen Einfluss auf seine Werke haben. Als dieser 1887 nach Chicago zog, war das Ziel des damals jungen Architekten Gebäude zu kreieren, die ihn an die Natur erinnerten. Wright zeichnete Pläne für eine neue Art von Haus. Es sollte wie die Prärie lang und niedrig sein. Das Innenleben des Hauses sollte große und offene Räume besitzen. Auch verwendete er Materialien wie Stein und Holz für seine Bauwerke, um dadurch der Natur näher zu kommen. Seine bekanntesten Werke sind das Taliesin, Falling Water, ein Haus welches sich direkt unter einem Wasserfall befindet, eine griechisch-orthodoxe Kirche in Wisconsin, das Guggenheim Museum in New York und viele mehr.⁶⁶



Abbildung 27: Wright und Studenten in der Architektenschule ⁶⁷

⁶⁵*8. Juni 1867

⁶⁶vgl. Bennett 2013, S.3-20

⁶⁷Bennett 2013, S.20

5.2 Visuelle Wahrnehmung und Fraktale Bereiche am Beispiel des Robie-Haus

Gebäude sind nicht auf dieselbe Weise Fraktale wie das mathematische Konstrukt einer Koch-Kurve ein Fraktal ist. In der Kochkurve wird nach jeder Vergrößerung ein Abbild der ursprünglichen Kurve generiert; somit ist die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit gegeben. Ein Gebäude macht es unmöglich diese Eigenschaft bis in das kleinste Detail zu realisieren, denn die Selbstähnlichkeit ist nach schon ein paar Vergrößerungen nicht mehr gegeben. In Abbildung (28) wird eine Zeichnung von Frank Lloyds Robie-Haus abgebildet. Die Dachlinie hat selbstähnliche Züge, jedoch ist sie limitiert.

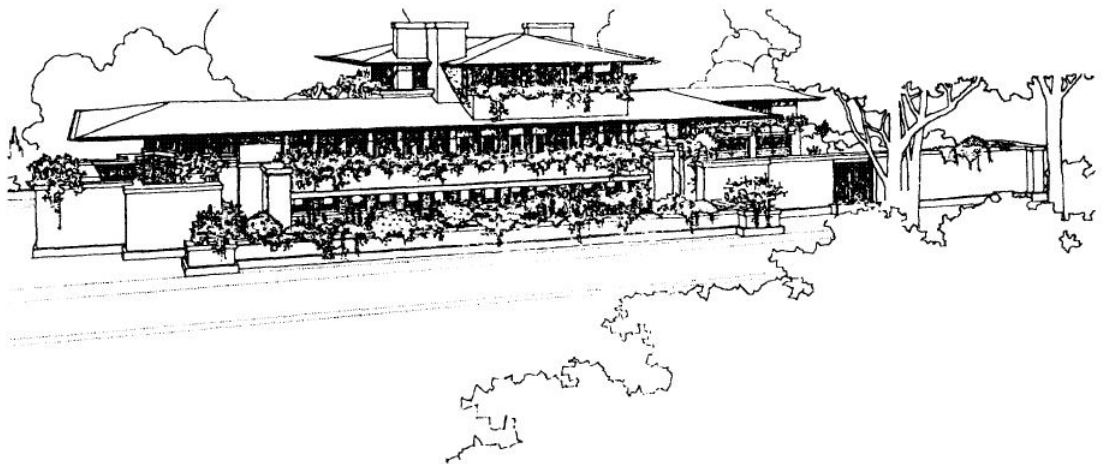


Abbildung 28: Zeichnung des von Frank Lloyds Wrights Robie-Haus. ⁶⁸

Der Betrachter erfährt die Architektur des Gebäudes, indem er das Kunstwerk von einer bestimmten Distanz aus überblickt. Er wird dabei seinen Blick nicht auf eine spezielle Dachpartie werfen und sich diese in der Vergrößerung ansehen, sondern er betrachtet das Gebäude als Ganzes. Im nächsten Schritt wird er sich dem Gebäude

⁶⁸Bovill 1996, S.117

annähern. Die Struktur der Fenster und der Hausverkleidung wecken sein Interesse, bis der Betrachter den Türknauf erreicht und ihn näher betrachtet. Der Prozess setzt sich auch im Inneren des Gebäudes fort.

Die Fraktale Charakteristik seiner architektonischen Komposition äußert sich in der Fortführung interessanter Details: Betrachtung des ganzen Gebäudes, das Betreten und das Benutzen dieses.

In Kapitel 4 wurden die Berechnung Fraktaler Dimension an verschiedenen Objekten berechnet. In der Berechnung Fraktaler Dimensionen in der Architektur spielen die Maßstabsbereiche eine wichtige Rolle. Die visuelle Wahrnehmung kann als Referenz für einen vernünftigen Maßstabsbereich verwendet werden. In Abbildung (29) wird ein Diagramm dargestellt, welches das Vorkommen von Stäbchen und Zapfen-Zellen aufzeigt.

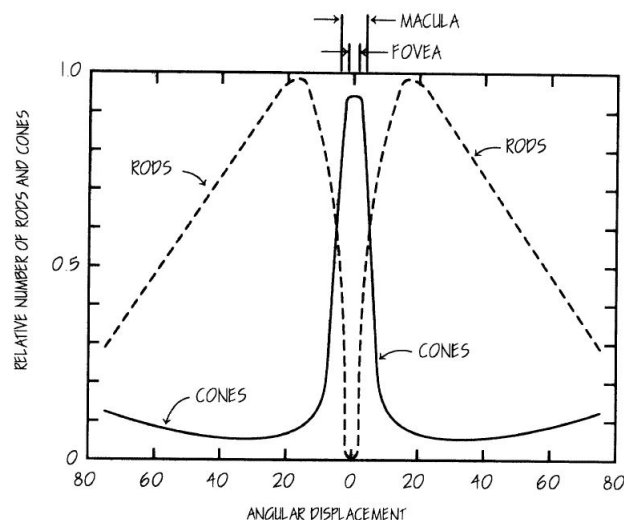


Abbildung 29: Diagramm der Häufigkeit von Stäbchen und Zapfen-Zellen im menschlichen Auge ⁶⁹

Ein feines und detailliertes Bild wird im Mittelabschnitt generiert, bei etwa 0° befindet sich die Fovea und die Macula. Wichtige Details könne auch noch im Bereich

⁶⁹Bovill 1996, S.118

von 10°, 15° und 20° visualisiert werden. Ist der Abstand zwischen Betrachter und Gebäude bekannt, so kann die Methode des Boxen-Zählens angewandt werden, dieses Verfahren wurde schon im Kapitel 4.3.2 näher beschrieben. Die Anzahl der Boxen und die Größe des Gitters kann den Winkeln zugeordnet werden. Die für einen Betrachter sinngebenden Maßeinheit lassen sich durch folgende Gleichung berechnen:

$$(\text{Abstand vom Gebäude}) \cdot [\tan(\text{Winkel})] = \text{Maßeinheit.}$$

In der Abbildung (30) ist eine Tabelle mit den Maßeinheit und Gebäudeabständen dargestellt.

<i>Angle at the Eye in degrees</i>	<i>Distance from the observers to the building</i>				
	<i>5'</i>	<i>10'</i>	<i>20'</i>	<i>40'</i>	<i>80'</i>
2	2"	4"	8"	1.4'	2.8'
5	5"	10"	1.8'	3.5'	7.0'
10	10"	1.8'	3.5'	7.0'	14.1'
15	1.3'	2.7'	5.4'	10.7'	21.4'
20	1.8'	3.6'	7.3'	14.6'	29.1'

Abbildung 30: Tabelle mit Abstand des Betrachters in Fuß, dem Augenwinkel und der sich ergebenden Maßeinheit. ⁷⁰

Es lässt sich aus der Tabelle ableiten, dass der geeignete Maßstab für einen Betrachter, welcher 40 oder 80 Fuß von einem Gebäude entfernt steht ein anderer ist, als für einen Betrachter der dem Gebäude sehr nahe ist und Details beobachten kann. Würde beispielsweise ein Betrachter 5 Fuß von einem Gemälde entfernt stehen, könnte sich dieser nicht gleichzeitig auf Details in unterschiedlichen Maßstäben konzentrieren. Während er versucht sich auf die kleinen Details zu konzentrieren, kann er die Größe der Fläche auf die er blickt nicht erahnen. Nun soll er einen größeren Bereich des Gemäldes betrachten, wodurch das kleine Detail unscharf wird.

⁷⁰Bovill 1996, S.119

5.3 Anwendung der Boxdimension

Die Gebäude von Frank Lloyd Wright liefern gute Beispiele für interessante Details in kleinen als auch großen Maßstäben. Für einen Betrachter, der sich in 80 Fuß Entfernung vor dem Gebäude befindet, ist laut Tabelle in Abbildung (30) der passende Sicht-Bereich zwischen 29,1 und 2,8 Fuß. Für einen Betrachter der sich 20 Fuß entfernt befindet, reicht sein Sichtbereich von 7,3 Fuß bis 8 Zoll. Steht der Betrachter bereits im Gebäude, könnte dieser in einer Entfernung von 5 Fuß einen Bereich von 1,8 Fuß bis 2 Zoll gut visualisieren. In Abbildung (31) wurden über das Robie-Haus ein Gitter gelegt. Die Gittermaße sind im Bereich von 24, 12, 6, 3 Fuß. Diese Maße stimmen ungefähr mit jenen Bereichen der Tabelle überein die dem Bereich eines Betrachters entsprechen, der sich 80 Fuß vom Haus entfernt befindet.

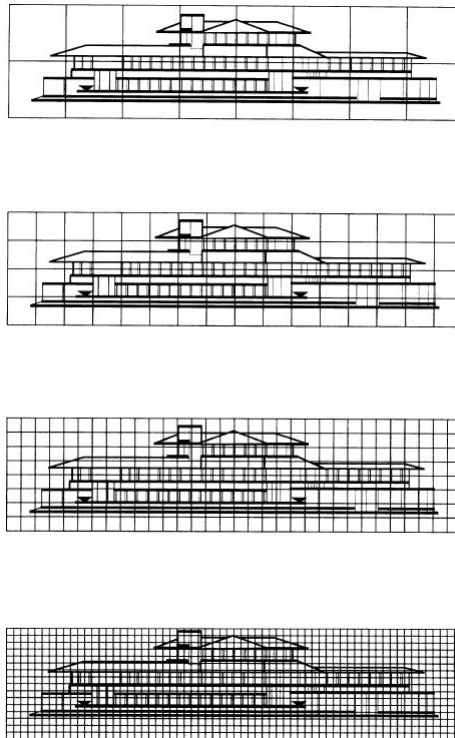


Abbildung 31: Zeichnung Robie-Haus mit verschiedenen Gitterdimensionen. ⁷¹

Die Box-Dimension errechnet sich aus der Anzahl der Boxen, welche Linien der Zeichnung beinhalten. Durch die kleiner werdende Gittergröße, entstehen mehr Boxen

⁷¹Bovill 1996, S.120

mit Inhalt. Die Tabelle 4 stellt die Verknüpfung zwischen Anzahl der Boxen mit Inhalt und der Anzahl der Boxen am unteren Gitterrand (Gittergröße) her.

Anzahl der Boxen	Größe des Gitters	Dimension des Gitters
16	8	24 Fuß
50	16	12 Fuß
140	32	6 Fuß
380	64	3 Fuß

Tabelle 4: Anzahl der Boxen mit Inhalt, Größe und Dimension des Gitters.

Nun können drei Fraktale Dimensionen berechnet werden. Die erste Fraktale Dimension beschreibt den Zuwachs von Boxen mit Inhalt vom Gitter mit 8 Boxen (24 Fuß) zum Gitter mit 16 Boxen (12 Fuß) am unteren Gitterrand.

$$\begin{aligned}
 D_{(box, 24'-12')} &= \frac{[\log(50) - \log(16)]}{[\log(16) - \log(8)]} \\
 &= \frac{(1,699 - 1,204)}{1,204 - 0,903} \\
 &= \frac{0,495}{0,301} \\
 &= 1,645
 \end{aligned}$$

Die nächste Fraktale Dimension vergleicht die Boxen mit einer Größe von 12 Fuß mit jenen der Größe von 6 Fuß.

$$\begin{aligned}
 D_{(box, 12'-6')} &= \frac{[\log(140) - \log(50)]}{[\log(32) - \log(16)]} \\
 &= \frac{(2,146 - 1,699)}{(1,505 - 1,204)} \\
 &= \frac{0,447}{0,301} \\
 &= 1,485
 \end{aligned}$$

Zuletzt werden die Boxen mit einer Größe von 6 Fuß und die Boxen mit einer Größe von 3 Fuß verglichen.

$$\begin{aligned}
D_{(box,6'-3')} &= \frac{[\log(380) - \log(140)]}{[\log(64) - \log(32)]} \\
&= \frac{(2,580 - 2,146)}{(1,806 - 1,505)} \\
&= \frac{0,434}{0,301} \\
&= 1,441
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Dimensionen stimmen besser überein als die erste Berechnung. Das Gitter mit den größten Boxen ist so groß, das jede Box eine Linie der Zeichnung beinhaltet. In Abbildung (32) wurden alle Boxen mit Inhalt schraffiert. Diese Methode erleichtert das Zählen der Boxen und schafft ein besseres Verständnis für den Prozess der Messung. Durch die Verfeinerung des Gitters kann das Profils des Gebäudes mit größerer Genauigkeit beschrieben werden. Das Zählen der Boxen repräsentiert jene Bereiche der Fassade die für den Betrachter interessant sind. Die weiß gebliebenen Boxen beschreiben die leeren und detail-losen Bereiche an der Fassade.

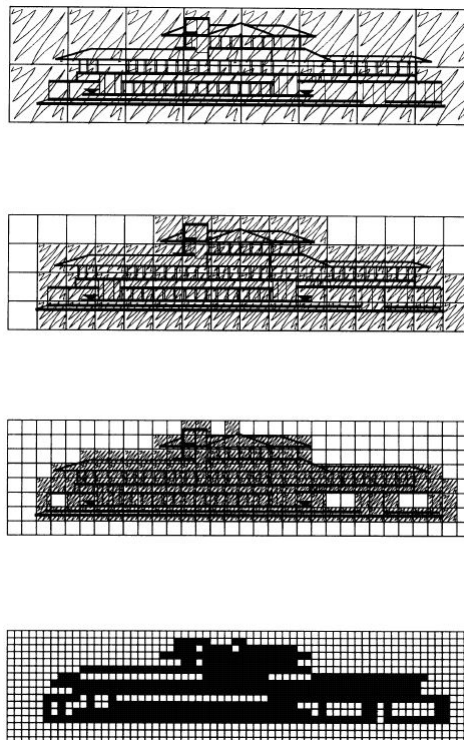


Abbildung 32: Zeichnung Robie-Haus mit verschiedenen Gittern. Die Boxen mit Inhalt wurden schraffiert. ⁷²

⁷²Bovill 1996, S.122

Die Formen, die die Abbildung (32) annimmt, hat eine entfernte Verwandtschaft mit dem Sierpiński-Dreieck vom Kapitel 2.8.

Die Konstruktion des Sierpiński-Dreiecks hat eine feste Regel. Denn nach jedem Iterationsschritt wird ein Stücke der Figur gelöscht. In Abbildung (32) handelt es sich um eine etwas kompliziertere Regel des Löschens bestimmter Bereiche im Konstruktionsprozess. Leere Bereiche der Fassade (Fenster, Stabwerk, Gesims und andere Details) im nächsten Schritt werden ausgelassen. Das Design des Robie-Hauses endet nicht mit einer Boxgröße von 3 Zoll, denn der Fensterpfosten wurde von der Box-Methode noch nicht berücksichtigt. Somit werden bei Annäherung des Betrachters an der Fassade weitere Details sichtbar. Die Box-Methode generiert bei einem großen Gitter kaum brauchbare Information, denn alle Boxen werden abgezählt. Dies suggeriert eine Wahl kleinerer Boxen der Tabelle 4.

Befindet sich der Betrachter im Robie-Haus, so wird dieser in einem Abstand von 5 Fuß ein Flügelfenster betrachten. Das ist in Abbildung (33) dargestellt.

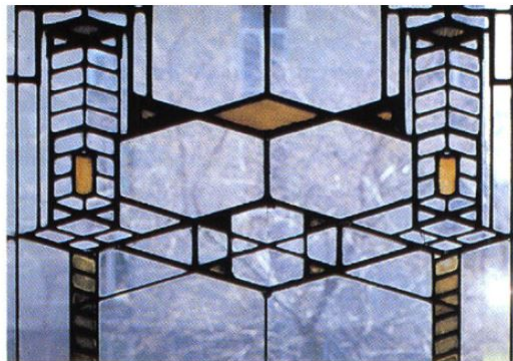


Abbildung 33: Das Muster des Flügelfensters im Robie-Haus. ⁷³

In Abbildung (34) und (35) sind Zeichnungen des Flügelfensters, welche mit einem Gitter hinterlegt wurden dargestellt.

⁷³Vyzantiadoua 2007, S.53

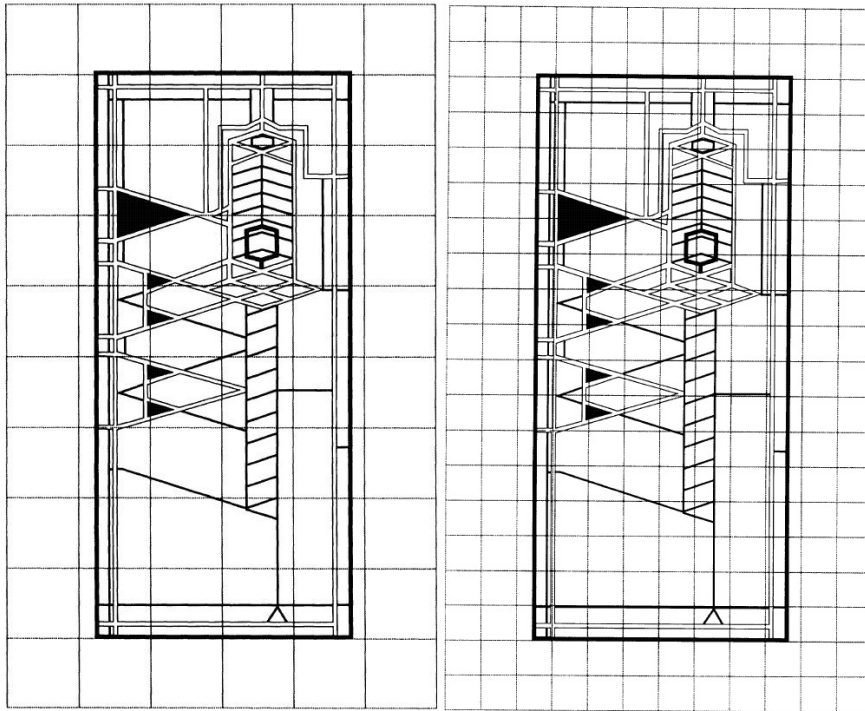


Abbildung 34: Zeichnung des Flügelfensters im Robie-Haus mit Gitter der Größe von 6 Zoll (links) und 3 Zoll (rechts). ⁷⁴

Es lässt sich wieder folgende Tabelle für den Fensterblügel im Robie-Haus aufstellen:

Anzahl der Boxen	Größe de Gitters	Dimension des Gitters
31	6	6 Zoll
103	12	3 Zoll
315	24	1,5 Zoll

Tabelle 5: Anzahl der Boxen mit Inhalt, Größe und Dimension des Gitters

⁷⁴Bovill 1996, S.123f

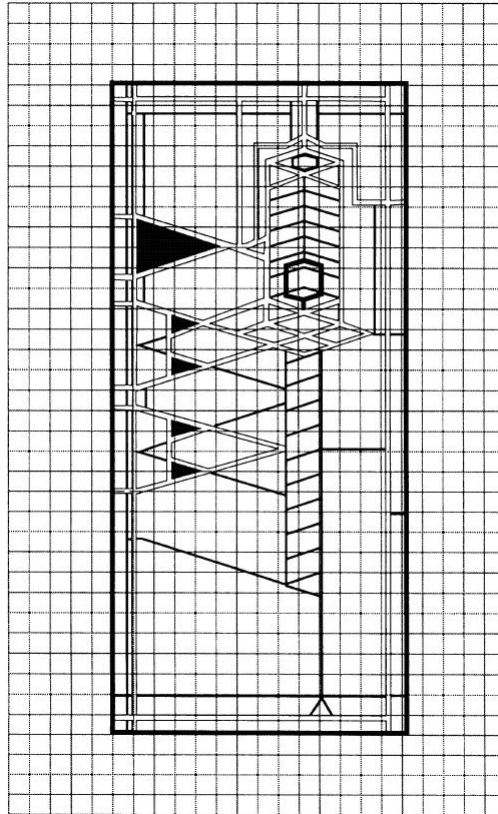


Abbildung 35: Zeichnung des Flügelfensters im Robie-Haus mit Gitter der Größe von 1,5 Zoll.⁷⁵

Auch hier lässt sich die Box-Methode mit einer Gittergröße von 6; 3 und 1,5 Zoll anwenden. Dies dient zur Untersuchung von Details, deren Strukturen sich in verschiedenen Maßstäben wiederfinden können. In Tabelle 5 sind die Anzahl der Boxen, die Anzahl der Boxen am unteren Rand und die zugehörigen Gitterdimension aufgelistet. Das 6 Zoll Gitter besitzt eine Box im Inneren der Figur, die nicht gezählt wird und ist ein Indiz dafür, dass eine passende Gittergröße gewählt wurde. Aus den verschiedenen Gittern lassen sich zwei Fraktale Dimensionen bestimmen. Die erste ist der Zuwachs an Boxen mit Inhalt vom Gitter mit einer Größe von 6 Zoll (6 Boxen) zu 3 Zoll (12 Boxen).

⁷⁵Bovill 1996, S.125

$$\begin{aligned}
D_{(box,6''-3'')} &= \frac{[\log(102) - \log(31)]}{[\log(12) - \log(6)]} \\
&= \frac{(2,009 - 1,491)}{(1,079 - 0,778)} \\
&= \frac{0,518}{0,301} \\
&= 1,721
\end{aligned}$$

Für die zweite Fraktale Dimension, die den Zuwachs zwischen einem 3 Zoll Gitter und einem 1,5 Zoll Gitter beschreibt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
D_{(box,3''-1,5'')} &= \frac{[\log(315) - \log(102)]}{[\log(24) - \log(12)]} \\
&= \frac{(2,498 - 2,009)}{(0,301)} \\
&= \frac{0,489}{0,301} \\
&= 1,626
\end{aligned}$$

Der obere Teil des Flügelfensters besitzt noch weitere Details in kleinerem Maßstab, in Folge dessen könnten die Gittergröße noch zweimal reduziert werden, bis die Box-Methode an ihre Grenzen stößt.

Die Fraktale Analyse des Gebäudes und des Flügelfensters gab Auskunft über den Detailreichtum von Lloyd Wrights Architektur. Diese Reichweite erstreckt sich von 12 Fuß bis zu 1 Zoll und repräsentiert die Beobachtung von Strukturen vom Straßenrand bis in das Innere des Hauses. Die Fraktale Analyse ermöglicht es, quantifizierbare Messergebnisse für das Detail in allen Maßstäben zu liefern.

Das Foto in Abbildung (36) wurde von Wright 1909 selbst aufgenommen. Es zeigt das Robie-Haus, welches nicht weit vom Campus der Universität von Chicago steht.



Abbildung 36: Ein im Jahre 1909 aufgenommenes Foto vom Robie-Haus.⁷⁶

Frank Lloyd Wright bezeichnet seine Werke als organische Architektur. Im engeren Sinne bedeutet dies, dass Formen aus der Natur dem Architekten als Anregung dienen. Die Verbindung zwischen dem Konzept Fraktaler Geometrie und Formen aus der Natur war dem Architekten Wright aber nicht bewusst. Mit der Natur als Inspirationsquelle sehen seine Gebäude aber nicht wie Bäume oder Büsche aus. Er lässt dabei das Offensichtliche der Natur außen vor und beschäftigt sich eher mit der zugrundeliegenden Organisation der Struktur (z.B Selbstähnlichkeit, Iterationen), die jenes Konzept der Fraktale ist. Das Robie-Haus ist ein Versuch Details in allen Maßstäben, wie sie in der Natur vorkommen zu repräsentieren.⁷⁷

6 Iterationen

Bei Fraktalen handelt es sich um begrenzte Teilmengen und es ist daher möglich, diese am Computerbildschirm zu visualisieren. Ein beliebiges Anfangsobjekt ist gegeben und nach dem ersten Iterationsschritt entsteht durch einen bestimmten Algorithmus eine neue Figur. Der Prozess endet mit der maximalen Auflösung des Computerbildschirms. Theoretisch betrachtet wird dieser Prozess aber bis ins Unendliche weitergeführt.

⁷⁶Wright, 1909

⁷⁷vgl. Bovill 1996, S.117-128

Iteration heißt wiederholtes Anwenden eines Prozesses an einem initialen Objekt.

Durch diese Prozesse entsteht eine Dynamik, die auch dynamische Systeme genannt werden. In der Mathematik werden zur Beschreibung dieser, Funktionen verwendet, die für Geraden auf $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und für Ebenen auf $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert sind.

6.1 Iterationen an reellen Geraden und euklidischen Ebenen

Definition 4. Es sei $(\mathbf{M}, d)$ ein metrischer Raum. Eine Transformation auf dem Raum $\mathbf{M}$ ist eine Funktion $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, welche jedem Punkt $m \in \mathbf{M}$ genau einen Punkt $f(m) \in \mathbf{M}$ zuordnet. $f(U) = \{f(m) : m \in U\}$, falls $U \subset \mathbf{M}$ ist. f heißt injektiv, wenn für $s, m \in \mathbf{M}$ mit $f(m) = f(s)$ folgt, dass $s = m$ ist. Die Funktion f heißt surjektiv, falls $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$ ist. Die Funktion f ist dann invertierbar, wenn sie injektiv als auch surjektiv ist. Falls dies gilt, ist es möglich eine Transformation $f^{-1} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, durch $f^{-1}(s) = m$ zu definieren, wobei $m \in \mathbf{M}$ der einzige Punkt mit $s = f(m)$ ist.

Definition 5. Es sei $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ eine Transformation auf einem metrischen Raum. Die Iterierten von f sind Transformationen $f^{\circ n} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, die durch $f^{\circ 0}(m) = m$, $f^{\circ 1}(m) = f(m)$, $f^{\circ(n+1)}(m) = f \circ f^{\circ n}(m) = f(f^{\circ n}(m))$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ definiert werden. Falls f invertierbar ist, sind die Transformationen $f^{\circ(-t)}(m) : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ die iterierten Inversen von f , die durch $f^{\circ(-1)}(m) = f^{-1}(m)$, $f^{\circ(-t)}(m) = (f^{\circ t})^{-1}(m)$ für $t = 1, 2, 3, \dots$ definiert werden. Es gilt hier zu beachten, dass es sich bei $f^2(x)$ nicht um $(f(x))^2 = f(x) \cdot f(x)$ handelt. $f^2(x)$ meint den zweiten Iterationsschritt von $f(x)$.

Transformationen bilden die Grundlage von Fraktalen. Dabei wirken diese auf Mengen statt auf Punkte. So können zum Beispiel affine Transformationen im $\mathbb{R}^2$ Geraden, Kreise und Dreiecke verändern.⁷⁸

Definition 6. Eine Transformation $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Form $\omega(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f)$, wobei a, b, c, d und e, f reelle Zahlen sind, heißt (zweidimensionale) affine Transformation.⁷⁹

Gegeben ist zum Beispiel eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $x \in \mathbb{R}$. Durch sukzessives Anwenden der Funktion f auf den Punkt x und f auf $f(x)$ werden die

⁷⁸vgl. Barnsley 1995, S.49

⁷⁹vgl. Barnsley 1995, S.57

Iterierten ($f(f(x))$) der Funktion f an einem Punkt erzeugt und werden auch als Orbit $O_f(x)$ von f im Punkt x bezeichnet.

$$O_f(x) = x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots$$

Der Orbit kann auch als Liste von sukzessive iterierten Punkten oder Zahlen gesehen werden. Als Beispiel ist $S(x) = \sin x$ mit ausgewähltem Wert $x = 123$. Es ergibt sich folgende Liste:

$$S(123) = -0,459\dots$$

$$S^2(123) = -0,443\dots$$

$$S^3(123) = -0,429\dots$$

$$S^4(123) = -0,416\dots$$

.

.

.

$$S^{17}(123) = -0,312\dots$$

$$S^{18}(123) = -0,307\dots$$

$$S^{19}(123) = -0,302\dots$$

$$S^{20}(123) = -0,298\dots$$

Langsam nähern sich die Iterierten der Sinus-Funktion dem Wert 0 an.

$$S^{73}(123) = -0,185\dots$$

$$S^{74}(123) = -0,184\dots$$

$$S^{75}(123) = -0,183\dots$$

.

.

.

$$S^{298}(123) = -0,098049...$$

$$S^{299}(123) = -0,097892...$$

$$S^{300}(123) = -0,097580...$$

Somit ist der Orbit von $x = 123$ eine Folge von Zahlen

$123, -0,459, \dots, -0,443, \dots - 0,183, \dots$

$$S^n(123) \rightarrow 0 \text{ mit } n \rightarrow \infty \text{ }^{80}$$

Zur genaueren Beschreibung eines Orbits wird ein topologischer Raum I , wie zum Beispiel ein metrischer Raum verwendet.

Definition 7. Sei f eine Funktion mit $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, dann ist sein dynamisches Verhalten charakterisiert durch die Eigenschaften der Iterierten und durch die Orbits eines Punktes.

Die Iterierte $f \circ f$ ist definiert als

$$f \circ f(x) = f(f(x)).$$

sie kann auch als $f^{\circ 2}$ beschrieben und allgemeiner als

$$f^{\circ 1} = f, \quad f^{\circ(n+1)}.$$

bezeichnet werden.

Orbits können sowohl konvergent als auch divergent sein, jedoch wird hier nur auf konvergierende Orbits Bezug genommen.

Ein Fixpunkt von f ist ein Punkt x^* , sodass

$$x^* = f(x).$$

Falls x^* ein Fixpunkt ist, dann wird der Orbit, der von x^* startet auf sich selbst reduziert. Falls f stetig ist, dann ist der Limes des Orbits der Fixpunkt.

⁸⁰vgl. Peitgen 1988, S.143f

Die zuerst angeführte Aussage lässt sich wie folgt beweisen. Wenn (x_n) gegen den Fixpunkt x^* konvergiert, dann konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x^*)$ (stetig). Wenn aber $f(x_n) = x_{n+1}$ ist, dann konvergiert $f(x_n)$ gegen x^* . Da der Limes einer konvergenten Folge eindeutig ist, folgt daraus, dass $x^* = f(x^*)$. Somit ist x^* ein Fixpunkt.⁸¹

Im nächsten Abschnitt werden verschiedene Arten von Fixpunkten beschrieben:

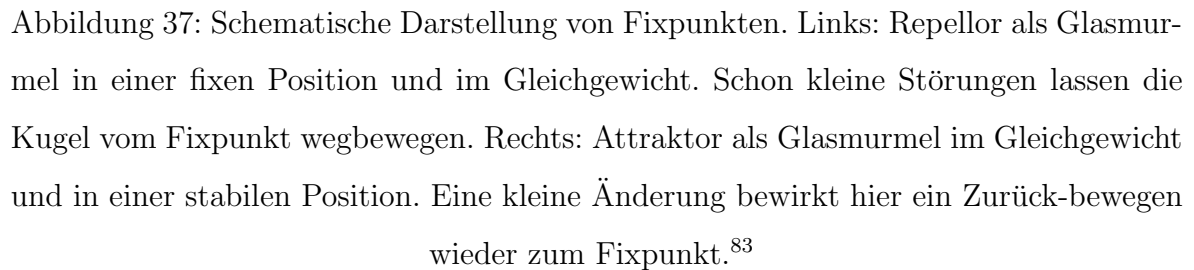
Sei $f(x) : x^2$. Dann besitzt diese Funktion zwei Fixpunkte 0 und 1. Die Funktion ändert sich beim Einsetzen der Punkte nicht. Dennoch handelt es sich um verschiedene Arten von Fixpunkten. Zahlen nahe bei 0 werden von 0 angezogen, während Zahlen in der Nähe von 1 abgestoßen werden. In Abbildung (37) werden beide Fälle schematisch dargestellt.

Der Orbit von 1 ist fest, somit bleibt der Wert nach dem Iterieren wieder 1. Fluktuiert jedoch der Wert durch einen kleinen äußeren Einfluss, so können minimale Änderungen von 1 den Orbit verändern. Dieser konvergiert dann entweder gegen 0 oder er divergiert gegen ∞ . Dies lässt sich mit einer Glasmurmelt vergleichen, die auf einer umgedrehten Schüssel balanciert. Schon kleine Vibrationen oder Windstöße können die Murmel nach links oder rechts fallen lassen. Fixpunkte wie $x = 1$ sind instabil und werden Repellor genannt.

Das Verhalten der Orbits um den Fixpunkt 0 ist grundverschieden. Bei Änderungen rund um 0 wandert der Orbit zum ursprünglichen Fixpunkt zurück. Dieser Punkt wird stabiler Fixpunkt oder Attraktor genannt. Diesmal befindet sich die Glasmurmelt in der Schüssel und kleine Änderungen im System lassen die Murmel wieder zu ihrer ursprünglichen Position zurück wandern.⁸²

⁸¹vgl. Tricot 2008, S.4

⁸²Feldman 2012, S.30f



Als Beispiel für ein diskretes dynamisches System wird die Quadratwurzel der Zahl 625 genommen ($\sqrt{625}$) und als Funktion definiert:

Einsetzen und Berechnen ergibt: $f(625) = \sqrt{625} = 25$. Wird der Prozess weitergeführt, wird die Quadratwurzel der Zahl 25 genommen. Dies entspricht aber genauso dem Berechnen von $f(f(625)) = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5$ und $\sqrt{\sqrt{\sqrt{625}}}$ bei Fortführen des Prozesses.

*„Le fractal... input qui devient output qui devient input qui devient output qui devient input qui devient output qui devient input qui devient output qui devient input qui devient output qui devient input qui devient output qui devient input qui devient output qui devient [...] qui devient input qui devient output qui devient input ... à l'infini.“*⁸⁴

⁸⁴Condé 1993, S.48f

Der sich immer wiederholende Prozess des Quadratwurzelziehens erzeugt eine immer kleiner werdende Zahl, und konvergiert schließlich gegen 1. Diesem Prozess können nur alle Zahlen, größer Null unterzogen werden, da das Wurzelziehen negativer Zahlen auf $\mathbb{R}$ nicht möglich ist. Der Orbit nähert sich immer mehr 1 an, als ob 1 ein Attraktor wäre.

Durch sukzessives Iterieren konvergiert die Zahl gegen 1. Tatsächlich ändert der Startwert nichts an der Konvergenz, bei 200 konvergiert der Punkt somit auch gegen 1.⁸⁵

Jedoch lässt sich das endgültige Verhalten vom Orbit $O_f^+(x)$ und dessen Limes bei gegebenen Punkt x und Funktion f nicht immer vorhersagen. Es handelt sich um Orbits aller Art, manche nähern sich schneller, manche langsamer an einen Punkt an, manche oszillieren, andere sind periodisch, dann gibt es noch Orbits, die ein chaotisches Verhalten aufweisen.⁸⁶

6.1.1 Arten der Konvergenz von Orbits

Im Falle der Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, die als $f(x) = \sqrt{x}$ definiert wurde, findet sich ein „braves“ Verhalten. Die Orbits nähern sich der Zahl 1 an, außer der Startwert a ist Null. Die Iteration der Funktion $f(x) = x^2$ erzeugt jedoch zwei verschiedene Orbits, die einerseits konvergieren und andererseits gegen Unendlich streben. Dies verlangt eine Fallunterscheidung

Falls $a > 1$ oder $a < 1$, folgt daraus, dass $O_f(a) \rightarrow \infty$. Nach jedem Iterationsschritt werden immer größere Werte angenommen.

Falls $-1 < a < 1$, dann $O_f(a) \rightarrow 0$.

Falls $a = 1$ oder $a = -1$, ist der Orbit konstant mit $O_f(a) \rightarrow 1$.

⁸⁵vgl. Peitgen 1988, S.142

⁸⁶vgl. Rubiano 2009, S.30ff

Keiner der Orbits konvergiert gegen unterschiedliche Werte, sodass es sich um ein „braves“ Verhalten handelt, welches auch gleichzeitig gut vorhersagbar ist. Wie in Abbildung (38) ersichtlich wandern alle Punkte vor 1 gegen 0 und alle nach 1 gegen ∞ , als ob 1 sie abstoßen würde. Somit wird in diesem Zusammenhang 1 als Repellor und 0 als Attraktor bezeichnet.

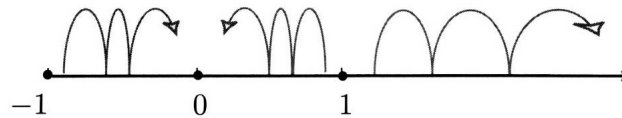


Abbildung 38: Orbits von $f(x) = x^2$ im Intervall von $(-1, \infty)$.⁸⁷

Die Orbits der Funktion $g(x) = x^3$ zeigen ein periodisches Verhalten auf:

$$x, -x^3, x^9, -x^{27}, x^{81}, \dots, (-1)^n x^{3^n}, \dots$$

Falls $x = 0$ ist, so bleibt die Umlaufbahn konstant bei 0, ist jedoch $-1 < x < 1$, so wechselt der Orbit zwischen positiven und negativen Werten. Diese werden immer kleiner und nähern sich 0 an, 0 ist ein Attraktor. Falls $|x| > 1$ ist, dann alternieren die Orbits genauso, jedoch werden sie immer größer. In diesem Fall wird 1 Repellor genannt, dies ist in Abbildung (39) ersichtlich. Für $a = 1$ oder $a = -1$ zeigt sich ein interessantes Verhalten, denn der Orbit konvergiert nicht, jedoch lässt sich beschreiben, dass dieser Werte der Periode 2 annimmt, denn jede zweite Zahl wiederholt sich.

$f(x) = 3,5x(1 - x)$ mit Periode 4 und $f(x) = 3,2x(1 - x)$ mit Periode 2 sind weitere Beispiele für periodische Orbits. Die Orbits der Funktion $f(x) = 4x(1 - x)$ zeigt jedoch keinerlei periodisches Verhalten auf, sie werden auch als chaotische Systeme bezeichnet.⁸⁸

⁸⁷Rubiano 2009, S.33

⁸⁸vgl. Rubiano 2009, S.33ff

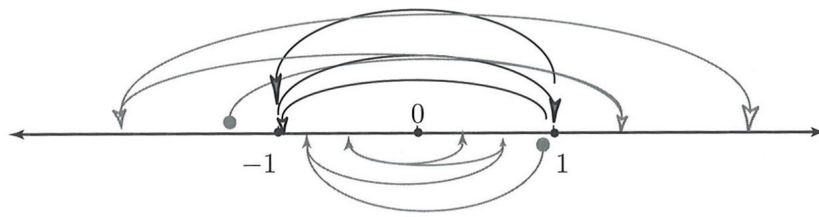


Abbildung 39: Orbits der Funktion $g(x) = x^3$.⁸⁹

6.1.2 Das Chaos-Spiel

Die Spielidee ist es, dem Pfad eines Punktes zu folgen, der zufällig verläuft. Dafür wird irgendein Punkt auf der Fläche genommen und eine zufällige Richtung gewählt. Danach werden in diese Richtung ein paar Schritte gegangen und der neu entstandene Punkt wird markiert. Von dieser Markierung aus wird eine andere Richtung ausgewählt und wieder ein paar Schritte gegangen. Wiederum entsteht ein neuer Punkt, von dem, nachdem die Richtung entschieden wurde, wieder ein paar Schritte gegangen wird, dies wird unendlich fortgesetzt.

Interessant ist nun, welcher Weg von Punkt zu Punkt zurückgelegt wird und wie die Punkte nach diesem langen Weg in der Ebene verteilt sein werden.

Auf den ersten Blick scheint das Spiel, welches aus zufälligen Spielzügen besteht, keine Verbindung mit Fraktalen oder Chaos zu haben.⁹⁰

Um dem Vorgang einen spielerischen Charakter zu geben, werden auf einen Zettel willkürlich drei Punkte mit den Namen „Kopf“, „Zahl“ und „Kante“ markiert. Der Spieler zeichnet nun einen beliebigen vierten Punkt auf das Papier und nennt ihn z_1 .

Angenommen der Spieler wirft eine Münze, welche nach dem Wurf entweder mit dem „Kopf“ nach oben, auf die „Kante“, oder mit der „Zahl“ nach oben zu liegen kommt. Er wirft die Münze und sie landet mit der „Kopf“ nach oben. Ein neuer Punkt z_2 wird markiert, der sich am halben Weg von z_1 zum Punkt „Kopf“ befindet.

⁸⁹Rubiano 2009, S.34

⁹⁰vgl. Rubiano 2009, S.42

Die Münze wird nochmals geworfen und sie landet auf der „Kante“. Ein neuer Punkt z_3 wird markiert, dieser befindet sich nun auf halber Strecke zwischen z_2 und dem Punkt „Kante“. Beim n -ten Schritt wird die Münze geworfen, und je nachdem ob „Kopf“, „Zahl“, oder „Kante“ geworfen wird, wird ein neuer Punkt z_{n+1} markiert, der sich auf halben Weg zwischen z_n und dem Punkt befindet. Diese Schritte werden für sehr lange Zeit durchgeführt, bis sich 1.000.000 Punkte $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{999.999}, z_{1.000.000}$ auf dem Papier befinden. Die ersten Punkte $z_1, z_2, z_3, \dots, z_8$ werden vom Papier gelöscht.

Wenn der Stift, mit dem die Punkte markiert wurden gut genug gespitzt wurde, und auch die Abmessungen exakt gemacht wurden, entsteht ein völlig unerwartetes Bild, welches in Abbildung (40) ersichtlich ist.

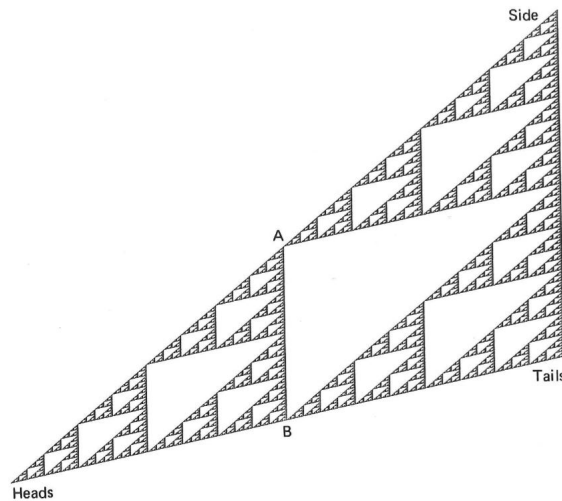


Abbildung 40: Das Ergebnis von einer Million Münzwürfe im Chaos-Spiel. Ein Sierpiński-Dreieck mit Kopf, Zahl und Kante als Eckpunkte.⁹¹

Sei P das nach $z_{1.000.000}$ eingezeichneten Punkten entstandene Bild. Dann ist P die Vereinigung von drei halbierten Kopien seiner selbst.

$$P = \omega_1(P) \cup \omega_2(P) \cup \omega_3(P)$$

⁹¹Barnsley u.a. 1988, S.224

Hier ist ω_1 zum Beispiel eine affine Abbildung, welche das Dreieck „Kopf“, „Zahl“ und „Kante“, auf ein Dreieck „Kopf“, A und B abbildet.⁹²

Definition 8. Eine Transformation $\omega(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f)$, wobei a, b, c, d, e und $f \in \mathbb{R}$, heißt affine Transformation. Dieser Zusammenhang kann auch in Matrixform beschrieben werden.

$$\omega(x) = \omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t.$$

Hierbei ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine zweidimensionale 2×2 -Matrix in $\mathbb{R}$ und t ist ein Vektor im $\mathbb{R}^2$.

Die Matrix kann auch in Form von

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

Hierbei sind (r_1, θ_1) die Polarkoordinaten des Punktes (a, c) und $(r_2, (\theta_2 + \frac{\pi}{2}))$.

Wie in Abbildung (41) ersichtlich handelt es sich um eine lineare Transformation der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

⁹²vgl. Barnsley u.a. 1988, S.223f

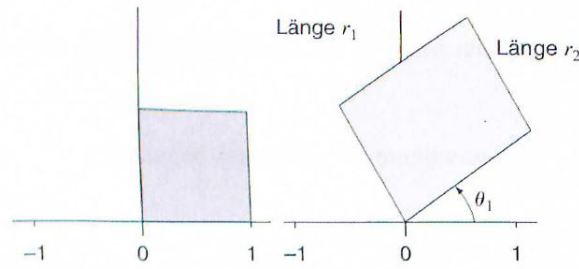


Abbildung 41: Eine affine Transformation, die Parallelegramme in Parallelegramme abbildet.⁹³

Sie bildet jedes Parallelogramm in $\mathbb{R}^2$, dessen Eckpunkt sich im Ursprung befindet, in ein anderes Parallelogramm mit Eckpunkt im Ursprung ab.

Die Transformation in Abbildung (42) bewirkt ein Umwenden, welches durch eine lineare Transformation A und die Verschiebung durch den Vektor t verursacht wird.⁹⁴

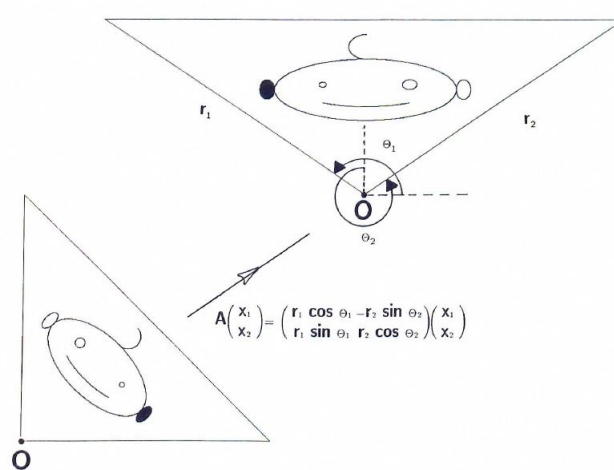


Abbildung 42: Beispiel für eine affine Transformation.⁹⁵

⁹³Barnsley 1995, S.58

⁹⁴vgl. Barnsley 1995, S.57ff

⁹⁵vgl. Barnsley 1995, S.59

Zur Verallgemeinerung des Chaos-Spiels wird die Definition der Kontraktion benötigt.⁹⁶

Definition 9. Eine Transformation $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ auf einen metrischen Raum (X, d) heißt Kontraktion, falls es eine Konstante $0 \leq k \leq 1$ gibt, sodass

$$d(\omega_j(z_1), \omega_j(z_2)) \leq k \cdot d(z_1, z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{X}.$$

Die Konstante k heißt auch Kontraktionsfaktor für ω .

Die Abbildung (43) ist ein Beispiel für eine Kontraktion, wobei $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist, welche auf den Punkt $z = (x, y)$, nach

$$\omega(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 1, \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 0,5 \right)$$

wirkt dargestellt.

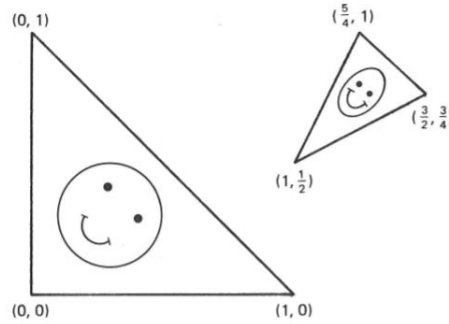


Abbildung 43: Beispiel einer affinen Transformation: Kontraktion⁹⁷

Dies kann auch in Matrixform beschrieben werden

$$\omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Für die Verallgemeinerung seien $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ Kontraktionen auf $\mathbb{R}$. Nach Wählen irgendeines Punktes z_0 wird zufällig ein Transformation gewählt und angewandt um eine Folge von Punkten $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{999.999}, z_{1.000.000}, \dots$ zu erhalten. Um zum Beispiel z_{73} zu generieren, wird zufällig $\omega_1(z_{72}), \omega_2(z_{72}), \dots, \omega_N(z_{72})$ gewählt.

⁹⁶vgl. Barnsley u.a. 1988, S.225

⁹⁷Barnsley 1995, S.225

$$P = \omega_1(P) \cup \omega_2(P) \cup \dots \cup \omega_N(P).^{98}$$

6.1.3 Chaotische Mengen in der Ebene

Viele Phänomene in der Natur hängen nicht nur von einer Variable ab, sondern von mehreren. Es handelt sich hierbei um höher dimensionale dynamische Systeme. In folgendem Beispiel wird ein zweidimensionales dynamisches System vorgestellt. Im Jahr 1974 stieß der französische Astronom M. Hénon auf die nach ihm benannte Hénon-Abbildung. Dieses dynamische System beinhaltet zwei Variablen (x_n, y_n) , welche wie folgt gegeben sind:

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

Bei A und B handelt es sich um Parameter, für die $a = 1,4$ und $b = 0,3$ gewählt wird.

Somit ergibt sich für das dynamische System:

$$x_{n+1} = 1 + y_n - 1,4x_n^2$$

$$y_{n+1} = 0,3x_n$$

Beim Attraktor der Hénon-Abbildung handelt es sich um einen seltsamen Attraktor. Nun wird mit den Startwerten (x_0, y_0) die Iteration der Hénon-Abbildung gestartet und 1.000.000 Iterationen mit dem Startpunkt $(0,0)$ aufgezeichnet. Das Ergebnis ist in Abbildung (44) links ersichtlich. In der rechten Abbildung handelt es sich um die selbe Iteration, nur wurde hier eine andere Anfangsbedingung $(-1,0)$ verwendet. Bei unterschiedlichen Startpunkten zeigen sich zwei verschiedene Verhalten auf. Entweder verhält sich der Orbit wie in Abbildung (44), oder die Orbits streben gegen ∞ . Dies wurde von Hénon selbst in einer seiner Arbeiten gezeigt.⁹⁹

⁹⁸vgl. Barnsley u.a. 1988, S.223f

⁹⁹vgl. Peitgen 1988, S.147

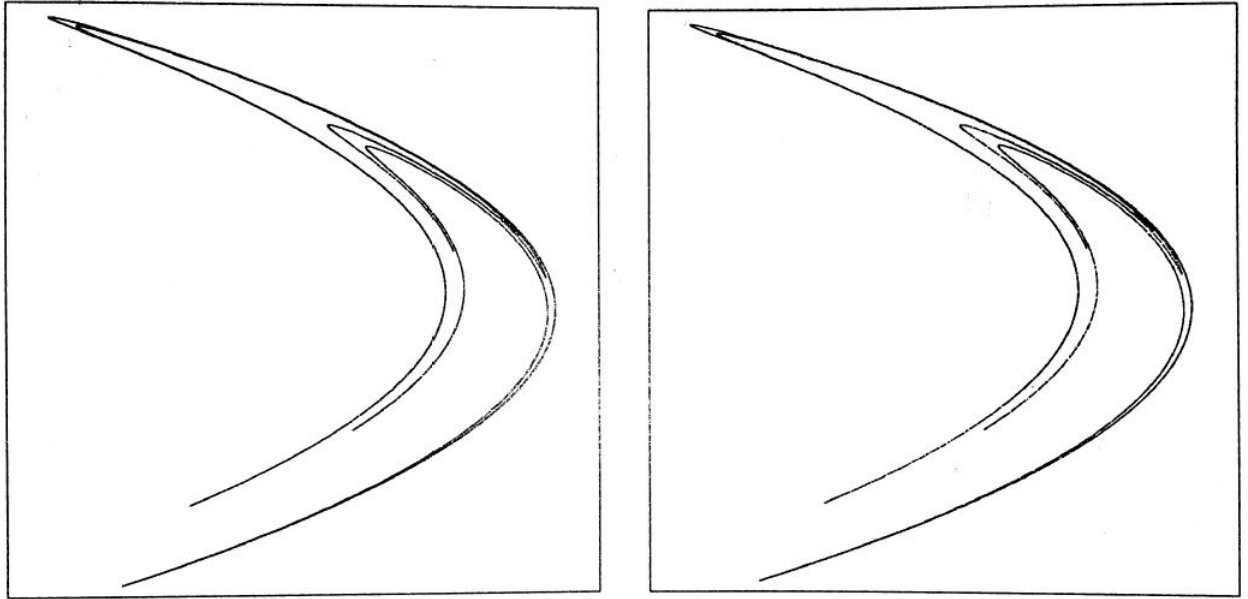


Abbildung 44: Zwei Grafiken mit der Hénon-Abbildung. Links befindet sich der Orbit mit Startwert $(0,0)$ und rechts der Orbit mit Startwert $(-1,0)$. Der x-Wert variiert horizontal zwischen -1.5 und $1,5$ und vertikal zwischen $-0,4$ und $0,4$.¹⁰⁰

„Depending on the initial point (x_0, y_0) the sequence of points obtained by iteration of the mapping either diverges to infinity or tends to a strange attractor, which appears to be the product of a one-dimensional manifold by a Cantor set.“¹⁰¹

Interessant ist, dass viele Orbits bei einer Reihe von Startwerten das selbe Verhalten zeigen. Der Attraktor wird ϵ genannt. Attraktor deshalb, weil alle Orbits gegen ϵ konvergieren. ϵ ist ein seltsamer Attraktor, weil es sich nicht wie zuvor um ein „einfaches“ Objekt wie einen Punkt, oder um einen Orbit mit periodischen Verhalten handelt. Tatsächlich erfüllt ϵ alle Eigenschaften eines Fraktals wie in Abbildung (45) ersichtlich. Die Grafik stellt die Hénon-Abbildung mehrmals vergrößert dar, welches verschiedene Bänder von ϵ auflöst und das Auftreten von Cantor-Mengen sichtbar macht.

¹⁰⁰Peitgen 1988, S.247

¹⁰¹Hénon 1976, S.69

Wo ist das Chaos? Das chaotische System entsteht in dem zwei ähnliche Startbedingungen verwendet werden, dessen Orbits gegen ϵ konvergieren. In der Liste der ersten 100 Iterationen, lässt sich erkennen, dass sich schon nach einigen Iterationen die Punkte des Orbits nicht mehr ähneln. Die Orbits sind unterschiedlich, dennoch ergibt sich beim Plotten dieser das gleiche Ergebnis, die Konvergenz gegen ϵ . Einmal in der Nähe von ϵ angekommen, sind die Orbits durcheinander und ergeben eine Menge chaotischer Orbits.¹⁰²

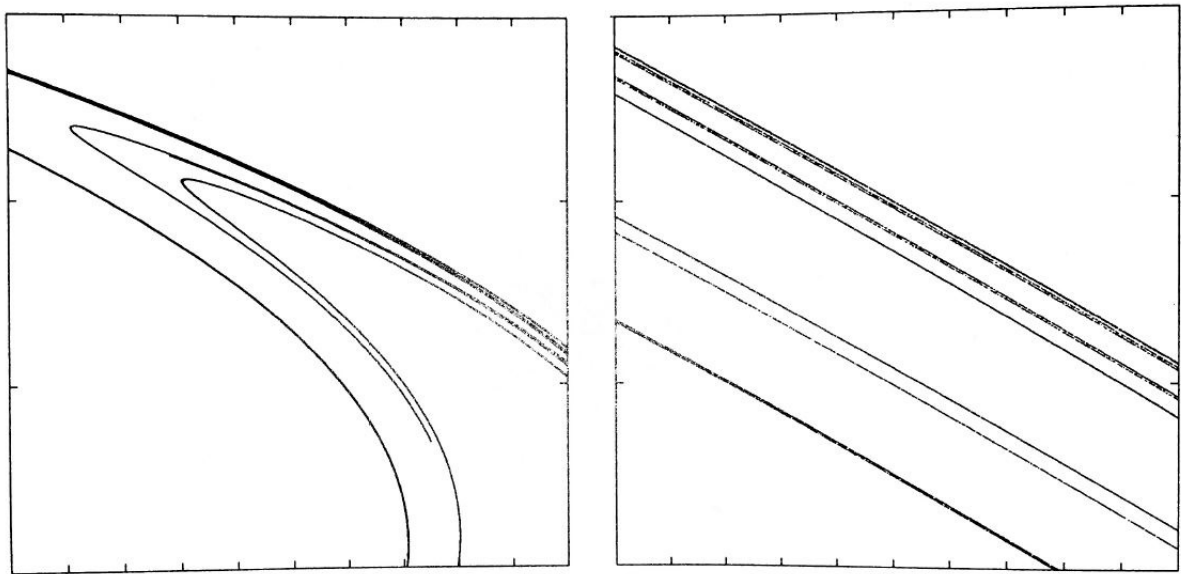


Abbildung 45: Vergrößerung des Hénon-Attraktors mit $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 0,3$ ¹⁰³

6.1.4 Der Lebkuchenmann

Dies ist ein weiteres Beispiel für ein chaotisches System in der Ebene. Es ist von der Form:

$$x_{n+1} = 1 - y_n + \bar{x}_n$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

¹⁰²vgl. Peitgen 1988, S.148

¹⁰³Peitgen 1988, S.248

Dieses in der Ebene stückweise lineare Modell ist in bestimmten Regionen stabil, in anderen instabil, viele Eigenschaften lassen sich jedoch explizit berechnen. Die chaotischen Bereiche werden von stabilen Inseln unterbrochen.

Diese Abbildung $F(x, y)$ ist stückweise linear und stetig. Die Abbildung hat einen einzigen Fixpunkt $(1, 1)$. Dieser Fixpunkt ist von unendlich vielen invarianten Polygonen von willkürlichem Radius umgeben. Der Bereich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Polygonen ist eine chaotische Zone. Hoffnungen einen ähnlichen seltsamen Attraktor wie bei Hénon-Abbildung zu finden sind vergebens.

Der Punkt $(1, 1)$ ist Fixpunkt von F . Durch die Einschränkung von F auf die positive x-Achse, ist F eine affine Abbildung und das Verhalten von F ist in der Nähe des Fixpunktes linear.

$$x_{n+1} = 1 - y_n + x_n$$

$$y_{n+1} = x_n$$

Diese Abbildung kann mit folgender Matrix A beschrieben.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $A^6 = Id$, folgt damit auch $F^6 = Id$. Sei H der maximale Bereich rund um den Fixpunkt, in welchen $F^6 = Id$, dann lässt sich leicht ableiten, dass h ein Sechseck mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$ und $(0, 1)$ ist. Alle Punkte außer dem Fixpunkt selbst, haben Periode 6. Alle Punkte in H liegen somit auf invarianten Sechsecken, die zum Fixpunkt konvergieren.

Die Orbits der Punkte in H liegen im positiven x-Bereich, alle anderen Orbits befinden sich während der Iteration von F auf negativen, als auch positiven x-Bereichen. Dieses Phänomen führt schließlich zum Chaos im dynamischen System. Alle Punkte in H außer dem Fixpunkt, bestehen aus einer endlichen Menge von 6 Punkten. Alle Punkte außerhalb der Region von H scheinen gezwungen in einer ringförmigen Umgebung zwischen zwei Sechsecken zu liegen. Jeder Orbit versucht jedoch diese hexagonalen Regionen zu meiden. Hier ergibt sich das Bild der stabilen Inseln und der chaotischen Zonen.¹⁰⁴

¹⁰⁴vgl. Devaney 1983, S.387f

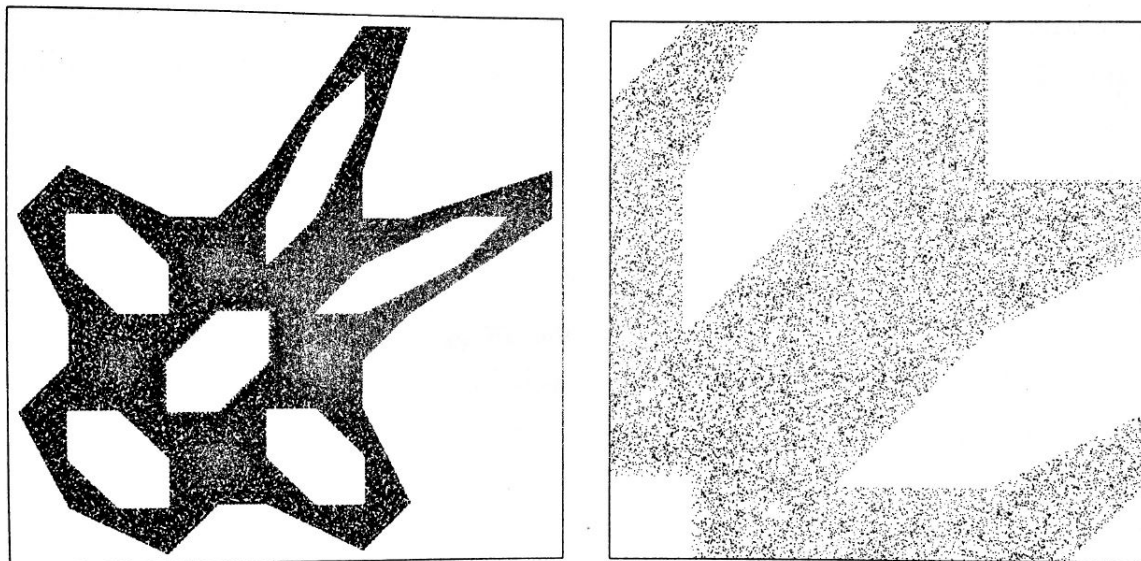


Abbildung 46: Der Lebkuchenmann und Vergrößerung¹⁰⁵

In Abbildung (46) werden 100.000 Iterationen des Punktes $(-0, 1; 0)$ dargestellt. Dieser Punkt befindet sich außerhalb der Region H . Der Orbit füllt H so, dass dies der Form eines Lebkuchenmanns ähnelt. Die sich im Zentrum befindende Mandel ist die stabile Region H . Die anderen fünf Regionen bilden den Kopf, die Arme und Beine des Lebkuchenmanns. Diese fünf Regionen beinhalten jeweils einen einzigen Orbit der Periode fünf. Alle anderen Punkte besitzen Periode $5 \cdot 6 = 30$. Alle diese Punkte sind Punkte stabiler Orbits.

Diejenigen Punkte, die die schattigen Regionen des Lebkuchenmanns füllen, treten in allen kleinen Regionen außer H und dem fünf-periodische Sechseck auf. Es stellt sich heraus, dass alle Punkte an der Grenze periodisch sind. In diesem Beispiel wird sichtbar, dass chaotische Systeme den Raum auffüllen, aber auch Fraktale bilden können.¹⁰⁶

¹⁰⁵Peitgen 1988, S.249

¹⁰⁶vgl. Peitgen 1988, S.149

6.1.5 Das Collage-Theorem

Das Chaos-Spiel für das Sierpiński-Dreieck mag wie ein Trick wirken, aber so ist es nicht. Für den Sierpiński-Teppich gilt das Gleiche. Werden zum Beispiel mit vier Punkten, statt dreien gespielt, so entsteht der quadratische Teppich. Im Allgemeinen können andere Fraktale Muster mit dem Chaos-Spiel entstehen. Deshalb kann das Chaos-Spiel auch verallgemeinert werden. Folglich besteht jeder Schritt darin, einen Punkt an einen anderen Ort zu bringen. Wohin der Punkt kommt, hängt von den Spielregeln ab. Diese können beliebig kompliziert sein.

Einfacher ist es sich vorzustellen, dass diese Spielregeln nicht auf einzelne Punkte, sonder auf Formen wirken. So können diese nicht nur bewegt werden, sonder auch gedehnt, geschrumpft, geschert oder gedreht werden. Bei dem schon im Kapitel 58 beschriebenen Begriff der affinen Transformation, handelt es sich um eine geometrische Transformation, welche Parallelität aufrecht erhält und zum Beispiel ein Quadrat verkleinert, es um 20° dreht und es nach rechts oder links verschiebt. Wie schon im Chaos-Spiel beschrieben, wird jeder Schritt zufällig gewählt.

Jeder dieser Schritte ist in der Verallgemeinerung des Chaos-Spiels eine andere affine Transformation. Zum Beispiel kann das Chaos-Spiel aus vier verschiedenen affinen Transformationen bestehen. Zuerst wird mit einem Anfangspunkt gestartet um schließlich mit einem vier-seitigen Würfel zu bestimmen, welche Transformation gewählt wird. Diese wird dann ausgeführt, um im nächsten neuerlich den Würfel zu rollen um eine weitere Transformation zu bestimmen.

Das Anwenden affiner Transformationen im Chaos-Spiel führt zu bemerkenswerten Ergebnissen. Der in Abbildung (47) dargestellte Farn wurde mit dem Chaos-Spiel mit affinen Transformationen erzeugt. Nur kleine Veränderungen der Transformationen lassen eine Reihe von verschiedenen Farnen erzeugen.¹⁰⁷

¹⁰⁷vgl. Feldman 2012, S.181ff



Abbildung 47: Ein mit dem Chaos-Spiel erzeugter Farn.¹⁰⁸

6.2 Die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$

Die komplexe Zahlenebene bietet im Gegensatz zu linearen Funktionen ein größeres Spektrum an geometrischen Fällen. Mit komplexen Zahlen lassen sich nun auch poröse Oberflächen beschreiben.¹⁰⁹

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist ein Zahlenpaar $z = a + ib$, wobei a, b in $\mathbb{R}$ liegen. Bei a handelt es sich um den Realteil und bei b den Imaginärteil von z . Die Zahl $\sqrt{-1}$ wird mit i bezeichnet.

Das Rechnen im komplexen Zahlenraum wird wie folgt definiert:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Insbesondere wird $i = 0 + i1$ durch den Punkt auf der y-Achse dargestellt. Es handelt sich um eine bijektive Abbildung, die es erlaubt, die oben beschriebenen Eigenschaften von Addition und Multiplikation zu interpretieren.

¹⁰⁸Feldman 2012, S.183

¹⁰⁹vgl. Tricot 2008, S.140

Sei $\bar{z} := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von $z = (x + iy)$, dann ist der Betrag von z die Länge $r = \bar{z}$. Dies ist der Abstand vom Ursprung $(0, 0)$ zum Punkt $P = (x, y)$. Bei z handelt es sich auch um einen Vektor, welcher vom Ursprung in Richtung Punkt P zeigt.

Die komplexen Zahlen lassen sich auch mit Hilfe von Polarkoordinaten (r, θ) , beschreiben, wobei r der Abstand zwischen Ursprung und Punkt ist und $\theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x}$ der Winkel zwischen x-Achse und Vektor r ist.

Graphisch lässt sich die Summe zweier komplexer Zahlen $w + z$ als Vektoraddition im Parallelogramm interpretieren. Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen lässt sich mit der Summe der Argumente und dem Produkt der Winkel berechnen. Die n -te Potenz einer komplexer Zahl $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ lässt sich schreiben als

$$z^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Der Abstand von z^n ist eine Potenz des ursprünglichen Abstands z und der Winkel θ ist ein Produkt des ursprünglichen Winkels.

Um zum Beispiel die Lösungen des Polynoms $z^3 - 1 = 0$ zu finden, wird das Polynom zuerst in allgemeiner Form geschrieben.

$$z^n - 1 = 0$$

Die n -ten Wurzeln (Lösungen) des Polynoms sind um den Einheitskreis S^1 verstreut. Es ergeben sich folgende Winkel für n Punkte:

$$0^\circ, \frac{360^\circ}{n}, 2\frac{360^\circ}{n}, \dots, (n-1)\frac{360^\circ}{n}.$$

Der k -te Winkel lässt sich als $k\frac{360^\circ}{n}$ schreiben. und die Koordinaten lassen sich durch die Sinus-und Kosinusfunktionen bestimmen.

$$\cos\left(k\frac{360^\circ}{n}\right) + i \sin\left(k\frac{360^\circ}{n}\right)$$

Somit ergeben die dritten Wurzeln von 1:

$$1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$$

Es lässt sich genauso die Lösung der Gleichung $z^n - c = 0$, mit $c \in \mathbb{C}$ ermitteln.

Die Relation zwischen trigonometrischen Funktionen, komplexen Zahlen und Exponentialfunktionen äußert sich in der Eulerformel:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Für $\theta = \pi$ entsteht einer der schönsten Formeln der Mathematik.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Mit diesem Wissen, lassen sich Iterationsprozesse besser verstehen, da die komplexen Zahlen eine entscheidende Bedeutung in der Theorie der Fraktale haben.¹¹⁰

6.3 Iterationen auf $\mathbb{C}$

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und z eine komplexe Zahl. Ähnlich wie bei der reellen Geraden, stellt sich die Frage nach dem Orbit $O_f(z)$ dieses einen Punktes. Wie schon beschrieben, wird eine Abfolge von Punkten auf der Ebene erzeugt, indem eine Funktion iterativ auf einen Anfangspunkt angewendet wird. Alle diese Punkte befinden sich in einer Ebene von $\mathbb{R}^2$.

Globaler betrachtet ist jeder Punkt dieser Ebene eine komplexe Zahl. Bei der Darstellung auf dem Computerbildschirm handelt es sich um eine endliche Zahl an Punkten. In diesem Fall wäre die Anzahl der Punkte an der Auflösung oder der Anzahl von Pixel gebunden. Eine bessere grafischen Qualität und eine größere Auflösung bedarf einer größeren Anzahl an Punkten. Sie erhöht aber die Rechenzeit und den Speicherbedarf.

Wie auch schon in den Kapiteln zuvor, wird eine quadratische Funktion $f(z) = z^2$ betrachtet. Es handelt sich aber um eine komplexe Zahl, die hier quadriert wird. Wie schon im Kapitel 6.2 erwähnt, kann dies mit Hilfe von Polarkoordinaten beschrieben und berechnet werden. Der Abstand r wird quadriert und der Winkel θ wird

¹¹⁰vgl. Rubiano 2009, S.46-50

verdoppelt. Beispielsweise, sei $z_0 = (r_0 = 2, \theta_0 = 45)$, dann ist der Orbit dieser quadratischen Funktion

$$(r = 2, \theta = 15) \longrightarrow (r = 4, \theta = 30) \longrightarrow (r = 16, \theta = 60) \\ \longrightarrow (r = 256, \theta = 120) \longrightarrow \dots$$

Die Frage ist nun, was mit dem Orbit nach vielen Iterationen geschieht. Im Reellen kann ein Orbit gegen $\pm\infty$ divergieren. Für komplexe Zahlen, die sich auf der komplexen Zahlenebene darstellen lassen existieren viele Richtungen (Punkte), gegen welche die Zahl konvergieren kann.

Der Orbit divergiert gegen unendlich, wenn der Wert von r größer wird. Geometrisch bedeutet dies, dass sich der Orbit immer weiter vom Ursprung entfernt. Der Orbit kann sich spiralförmig, oder auch auf einer geraden Linie vom Ursprung entfernen. In beiden Fällen divergieren sie gegen Unendlich.

Im Beispiel von z_0 lässt sich beobachten, dass r größer wird und der Orbit gegen Unendlich divergiert. Alle Orbits mit Anfangsbedingung $r > 1$ streben gegen ∞ . Da die komplexe Zahl quadriert wird, geschieht dies auch mit r .

Gegensätzlich dazu divergiert der Orbit mit Anfangsbedingung $r \leq 1$ nicht gegen unendlich. Die Menge aller Punkte mit $r \leq 1$ werden in Abbildung (48) dargestellt. ¹¹¹

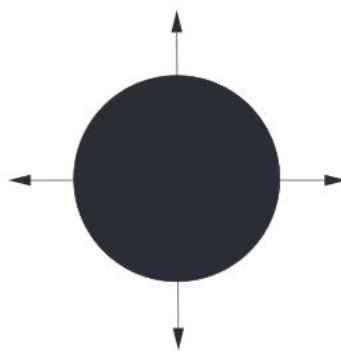


Abbildung 48: Menge aller Punkte mit $r \leq 1$ ¹¹²

¹¹¹Feldman 2012, S.249f

¹¹²Feldman 2012, S.250

In der Tat lässt sich zeigen, dass jede Funktion $f(z) = z^2$ mit $|z| < 1$ gegen 0 strebt. Wie schon erwähnt divergieren dazu alle Punkte außerhalb des Einheitskreises gegen Unendlich.

Der Umfang des Kreises S^1 mit Radius 1 wird also zur Grenze zwischen jenen Punkten die konvergieren und jenen Punkten die nach Unendlich laufen. Dies ist in Abbildung (49) ersichtlich.¹¹³

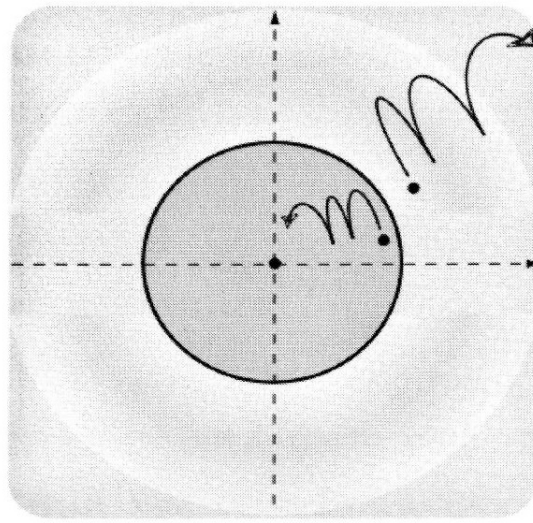


Abbildung 49: Verhalten der Punkte innerhalb und außerhalb des Kreises S^1 .¹¹⁴

Die Funktion f verhält sich in der Nähe von 0 und 1 anders. Im Allgemeinen ist das Verhalten von f an einem Punkt z_0 durch die Ableitung von f bestimmt. Dies wird deutlich, wenn ein kleines komplexes Teilstück h zu z_0 hinzugefügt wird.

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h \cdot f'(z_0) + r(h)$$

mit $h \rightarrow 0$

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| = |h| \cdot \left| f'(z_0) + \frac{r(h)}{h} \right| \begin{cases} < |h| & \text{für } |f'(z_0)| < 1 \\ > |h| & \text{für } |f'(z_0)| > 1. \end{cases}$$

¹¹³vgl. Rubiano 2009, S.54

¹¹⁴Rubiano 2009, S.54

Da $f'(z) = 2z$, ist $f'(0) = 0$ und $f'(1) = 2$. Somit ist $z_f = 0$ ein Attraktor und $z_f = 1$ ein Repellor. Eine Verallgemeinerung des Fixpunktes wäre ein Punkt z_0 , welchen der Orbit $\{f^{(k)}(z_0)\}_{k=1}^{\infty}$ öfters durchläuft. Somit ist $f^{(p)}(z_0) = z_0$. Solch ein Punkt wird periodisch genannt und die Zahl p wird die Periode von z_0 genannt.

Werden die periodischen Punkte von f betrachtet, wird deutlich, dass $f^{(2)}(z) = z^4$, $f^{(3)}(z) = z^8$ und $f^{(2^k)}(z) = z^{2^k}$,

Neben $z_0 = 0$ müssen die Punkte z_0 betrachtet werden, die folgendes erfüllen

$$z_0^{2^p} = z_0, \quad z_0^{2^p-1} = 1$$

.

Hierbei ist $|z_0| = 1$ und $z_0 = e^{2\pi i \theta_0 (2^p-1)} = 1$.

Nun wird mit $p \in \mathbb{N}$ nach θ_0 gesucht, welche die Gleichung erfüllen.

In diesem Fall muss $\theta_0(2^p - 1)$ eine ganze Zahl n sein. Die Frage die sich stellt ist für welche n unterschiedliche periodische Punkte $z_n = e^{2\pi i \frac{n}{2^p-1}}$ generiert werden können. Es stellt sich heraus, dass dies für $n \in \{0, \dots, 2^p - 2\}$ möglich ist. All diese Punkte liegen auf dem Einheitskreis S^1 und da die Punkte $\frac{n}{2^p-1}$, mit $p \in \mathbb{N}, 0 \leq n < 2^p - 1$, eine dichte Teilmenge von $[0, 1]$ bilden, sind die nicht-null periodischen Punkte eine dichte Teilmenge des Einheitskreises.

Das Verhalten von f in der Nähe eines periodischen Punktes z_0 kann folgendermaßen beschrieben werden:

Angenommen f hat die Periode p und $z_j := f^{(j)}(z_0)$ ($0 \leq j < p$). Dann

$$\begin{aligned} [f^{(p)}]'(z) &= [f(f^{(p-1)})]'(z) = f'(f^{(p-1)}(z)) \cdot [f^{(p-1)}]'(z) \\ &= \prod_{j=0}^{p-1} f'(f^{(j)}(z)) \end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned} [f^{(p)}]'(z_0) &= \prod_{j=0}^{p-1} f'(z_j) = [f^{(p)}]'(z_j) \quad (0 \leq j < p) \\ \prod_{j=0}^{p-1} (2z_j) &= 2^p \prod_{j=0}^{p-1} z_j, \\ |[f^{(p)}]'(z_j)| &= 2^p > 1. \end{aligned}$$

Auch hier wurde gezeigt, dass alle periodischen Punkte mit Periode p auf dem Einheitskreis in Bezug auf $f^{(p)}$ abstoßend sind. Wie bereits erwähnt bleibt der Orbit für $|z| = 1$ auf dem Einheitskreis und für $|z| < 1$ konvergieren sie gegen den Fixpunkt Null, außerhalb des Einheitskreises S^1 divergieren sie gegen Unendlich.¹¹⁵

Die Dynamik von f in der Ebene repräsentiert also eine Dichotomie.

Für einen Punkt $z \in S^1$, bleibt dessen Orbit immer innerhalb des Umfangs. S^1 ist auch als Julia-Menge bekannt.

Als Beispiel ist der Punkt $\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$ gegeben. Der Orbit von z^2 bleibt auf S^1 und wird in Abbildung (50) dargestellt.¹¹⁶

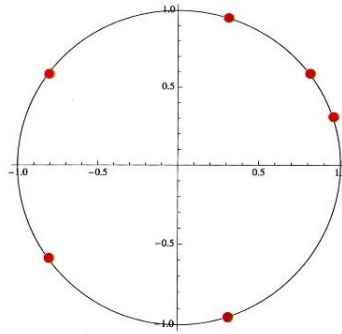


Abbildung 50: Orbit von z^2 im Punkt $\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$ ¹¹⁷

Definition 10. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom mit einem Grad > 1 . Es sei F_f diejenige Menge von Punkten in $\mathbb{C}$, deren Orbits nicht gegen einen unendlich entfernten Punkt konvergieren, das heißt

$$F_f = \{z \in \mathbb{C} \mid \{f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}\}$$

ist beschränkt.

¹¹⁵Helmberg 2007, S.109f

¹¹⁶vgl. Rubiano 2009, S.54

¹¹⁷Rubiano 2009, S.54

Die Menge, die zum Polynom f gehört wird als gefüllte Julia-Menge bezeichnet. J_f bezeichnet den Rand von F_f und wird als Julia-Menge des Polynoms bezeichnet.¹¹⁸

6.4 Das Newton-Verfahren

Die Summation, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division werden vom Computer auf dieselbe Art und Weise berechnet wie mit Stift und Papier. Die Berechnung einer Quadratwurzel oder Kubikwurzel macht die Angelegenheit deutlich schwerer.

Es existiert jedoch eine erstaunlich effiziente Technik um jede Art von Wurzel zu berechnen. Sie stammt aus der Zeit von Isaac Newton der zwischen 1642 und 1727 lebte.

Es handelt sich wahrscheinlich um eines der ältesten iterativen Prozesse in der Geschichte der Mathematik, der seine Wurzeln in Babylon, heute Irak hat.

Das Newton-Verfahren versucht Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, dasselbe ist auch im komplexen Zahlenraum möglich.

Die Quadratwurzel von c einer Funktion $f(x) = x^2 - c$ soll gefunden werden. Bei Anwendung des Newton-Verfahrens werden die Lösungen von $x^2 - c = 0$ gesucht und es folgt:

$$x^2 - c = 0$$

$$x^2 = c$$

$$x = \pm\sqrt{c}$$

Das Gleiche gilt für das Auffinden von $\sqrt[n]{c}$ mit der Funktion $f(x) = x^n - c$.

Beim Newton-Verfahren handelt es sich um einen einfachen Algorithmus. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dessen Wurzel, ein Wert a aufgefunden werden soll, sodass $f(a) = 0$ gilt. Dafür wird von einem Anfangspunkt x_0 nicht weit von a ausgegangen. Nun werden eine Folge von Punkten $\{x_n\}_n$ generiert, die gegen a konvergieren.

¹¹⁸vgl. Barnsley 1995, S.291

Die zu iterierende Gleichung ist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit

$$n = 1, 2, \dots$$

daraus folgt das

$$N_f(x) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_n \in \mathbb{R}$$

und wird auch Newton-Iteration genannt.

Nun wird das Newton-Verfahren an die Funktion $f(x) = x^2 - c$ angewandt. Die Newton-Iteration ergibt

$$N_f = \frac{x^2 + c}{2x}.$$

Falls $c = 2$, werden folgende Punktfolgen für $\sqrt{2}$ mit dem Computer generiert:

$$[2; 1, 5; 1, 41667; 1, 41422; 1, 41421; 1, 41421; 1, 41421]$$

Auch die Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ in Tabelle 6 für die Funktion $f(x) = x^3 - 2$ erfolgt mit außerordentlicher Genauigkeit.

n	x_n	x_n^3
0	1	1
1	1, 3333333333333333	2, 370370370370370370
2	1, 263888888888889	2, 018955225480109739368
3	1, 2599334934500	2, 000059259322654250079
4	1, 2599210500178	2, 000000000585258619106
5	1, 2599210498949	2, 000000000000000000057

Tabelle 6: Berechnung von $\sqrt[3]{2}$ mit dem Newton-Verfahren

In Abbildung (51) wird das Newton-Verfahren anhand der Funktion $f(x) = x^3 - 2$ dargestellt. ¹¹⁹

¹¹⁹vgl. Rubiano 2009, S.55f

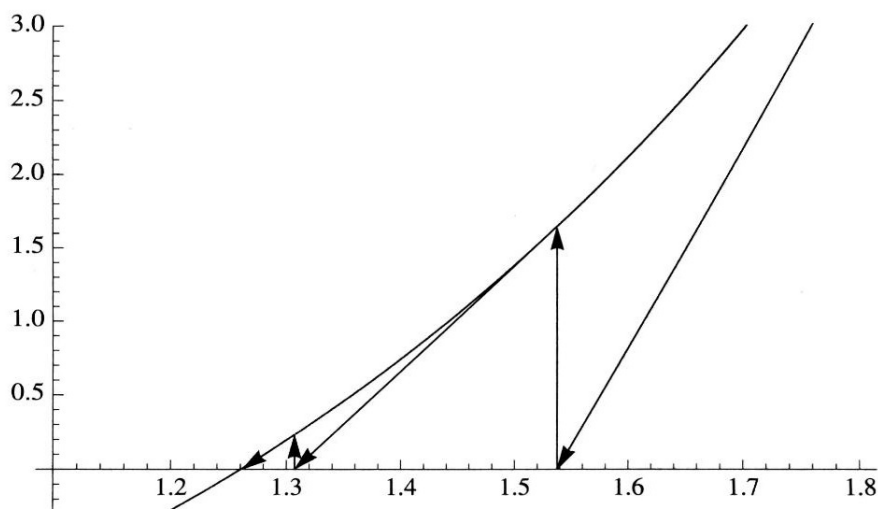


Abbildung 51: Newton-Iteration anhand der Funktion $f(x) = x^3 - 2$ ¹²⁰

6.4.1 Newton-Verfahren für $z^2 - 1$

Im 17. Jahrhundert stellte Newton eine iterative Methode vor, um die Nullstellen einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aufzuspüren. Im Jahre 1879 übertrug Arthur Cayley diese Methode auf komplexe Polynome $p(z)$. Das Verhalten der Folgen ist gegeben durch

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'}(z_n), \quad z_n \in \mathbb{C}.$$

Arthur Cayley stieß aber bei der Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens auf Probleme. Quadratische Polynome stellten keine Schwierigkeit dar, denn die Zahlenfolgen konvergierten tatsächlich gegen die Wurzel. Er konnte sogar zeigen, dass die komplexe Ebene in zwei Hälften geteilt werden konnte.¹²¹

A. Cayley schlug folgende Erweiterung einer komplexen Wurzel in einem Polynom vor, die er Newton-Fourier Methode nannte.

$$N(\varepsilon_k) := \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \frac{p(\varepsilon_k)}{p'(\varepsilon_k)}.$$

¹²⁰Rubiano 2009, S.32

¹²¹vgl. Jacobson 2007, S.163

Er versuchte das Problem global zu betrachten. Die Schwierigkeit dabei war die Regionen der Ebene zu bestimmen, sodass P der Anfangspunkt, welcher überall in der Region gewählt werden konnte zu einem Endpunkt A führt. In diesem Fall ist A die Wurzel des Polynoms.

Somit widmete er sich dem Lösen der Gleichung $p(z) = z^2 - 1 = 0$ in $\mathbb{C}$. Allgemeiner formuliert, wenn $p(z) = a(z - z_1) \dots (z - z_n)$, dann ist jede Wurzel z_i ein anziehender Fixpunkt (Attraktor) des dynamischen Systems N . In der Nähe von z_i handelt es sich um eine quadratische Konvergenz, wenn z_i eine einfache Wurzel ist ($p'(z_i) \neq 0$).

Sei

$$A(z_i) = \{z \in \mathbb{C} : N^n(z) \rightarrow z_i, n \rightarrow \infty\}$$

ein i -ter Attraktionsbereich ($N^n = n \circ \dots \circ N$, n -Mal). Cayley fragte nun nach den Mengen $A(z_k)$ und den Grenzen $\partial A(z_k)$.¹²²

Das einfachen Modell von $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2 - 1$ wird verwendet. Um die Wurzel zu Berechnen, wurde die Anfangsbedingung z_0 gesetzt und die aufeinanderfolgenden Iterationen berechnet.

$$N_{z^2-1}(z) = z - \frac{z^2 - 1}{(z^2 - 1)'} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1 + z^2}{2z}.$$

Die Wahl der Anfangsbedingung entscheidet, ob sich der Orbit 1 oder -1 annähert. Es handelt sich hierbei um zwei voneinander getrennte Attraktionsbereiche.

Jene Menge $A(1)$, die von 1 angezogen werden, ist in Abbildung (52) rechts dargestellt.

$$A(1) = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$$

Jene Menge $A(-1)$, die von -1 angezogen werden, ist in Abbildung (52) rechts dargestellt.

$$A(-1) = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}^{123}$$

¹²²vgl. Peitgen 1978, S.12

¹²³vgl. Rubiano 2009, S.58f

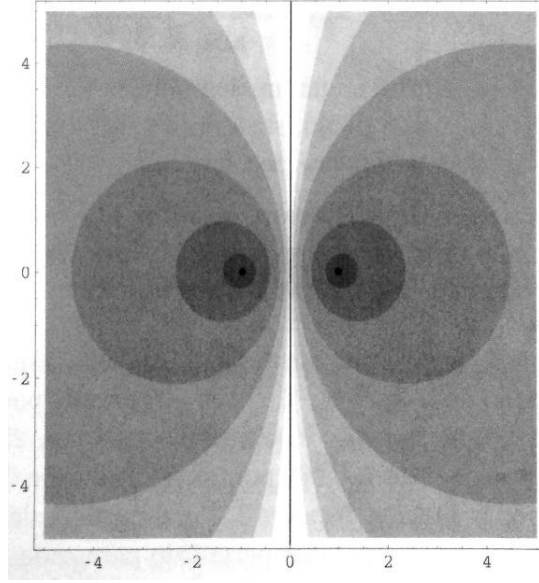


Abbildung 52: Die Dynamik in der komplexen Ebene durch z^2 ¹²⁴

Es ergibt sich auch, dass die Grenzen

$$\partial A(+1) = \partial A(-1) =: J$$

mit J als imaginärer Achse und

$$N(J) = J = N^{-1}(J)$$

$N^{-1}(J)$ ist das Urbild von J . Die Einschränkung von N auf J reduziert es auf ein eindimensional dynamisches System

$$\alpha i \rightarrow \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{\alpha})i, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dieses Verhalten hat nichts mit p an sich zu tun. Sei p ein beliebiges Polynom von Grad 2, dann kann es erst bei einem Koordinatenwechsel zu $p_\lambda(z) = z^2 - \lambda$ reduziert werden. Somit wird es leichter ersichtlich, dass für $J_\lambda := \{\alpha i \sqrt{\lambda} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ gilt, dass $N_\lambda(J_\lambda) = J_\lambda = N_\lambda^{-1}(J_\lambda)$.

¹²⁴Rubiano 2009, S.59

N_λ ist p_λ auf dem die Newton-Methode angewandt wurde.

Es lässt sich leicht erkennen, dass J_λ die beiden Attraktionsbereiche verbindet.

Im Fall von $\lambda = 1$ wird eine Substitution durchgeführt. Sei T eine lineare Transformation.

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

mit

$$T^{-1}(u) = \frac{1+u}{1-u}$$

in

$$\sum = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Daraus folgt, dass

$$R(u) = u^2,$$

mit

$$R(u) := T \circ N \circ T^{-1}(u).$$

In folgender Tabelle befindet sich eine Liste interessanter Punkte:

z	$+1$	-1	∞	0
$T(z)$	0	∞	1	-1

Tabelle 7: Liste interessanter Punkte

Nun konnte Cayleys Fragestellung beantwortet werden. 0 und ∞ sind Attraktoren von R , das heißt, dass die $|R'(0) < 1|$ und ihre Attraktionsbereiche von S^1 getrennt werden.

Während Cayley den quadratischen Fall löste, beschreibt er bei der Bearbeitung des kubischen Falls folgendes: „*J’espère appliquer cette théorie au cas d’une équation cubique, mais les calculs sont beaucoup plus difficiles.*“¹²⁵

¹²⁵Peitgen 1978, S.11

Vielleicht war ihm damals schon bewusst, dass sich das Problem auf keine elegante Art und Weise lösen lässt. Die Lösung konnte erst fast 30 Jahre später gefunden werden. Julia und Fatou entwickelten eine Theorie, welche für Aufklärung sorgte und auch erklärte, warum Cayley's Problem solch eine Hürde darstellte.¹²⁶

„My work has always tried to unite the true with the beautiful and when I had to choose one or the other I usually chose the beautiful.“¹²⁷

In den Augen vieler Mathematiker wird die experimentelle Mathematik nicht als „wahre“ Mathematik angesehen. Jedoch ist es für viele zur Passion geworden die mathematische Schönheit von Julia-Mengen zu ergründen.

Im Jahr 1983 wurden erstmals grafischen Darstellung der Julia-Mengen entdeckt. Dies ermöglichte es den Wissenschaftlern zu neuen Ergebnissen zu kommen und die Mathematik von ihrer höchst ästhetischen Seite zu zeigen.¹²⁸

6.4.2 Newton-Verfahren für $z^3 - 1$

Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^3 - 1$ besitzt durch die kubische Wurzel drei Lösungen, die mit dem Newton-Verfahren berechnet werden können.

$$L = \{1; -0,5 - 0.866025i; -0,5 + 0.866025i\}$$

Mit dem Polynom $f(z) = z^3 - 1$ ist es möglich die Funktion nach dem, Newton-Verfahren zu iterieren.

$$N_f(z) = z - \frac{z^3 - 1}{(z^3 - 1)'} = \frac{1 + 2z^3}{3z^2}$$

Wird ein beliebiger Punkt in der Ebene betrachtet, so konvergiert dieser nicht notwendigerweise gegen eine der drei Lösungen. Es handelt sich in diesem Fall um Attraktionsbereiche von 1.

¹²⁶vgl. Peitgen 1978, S.11

¹²⁷*H.Weyl

¹²⁸vgl. Peitgen 1978, S.11

Die komplexe Ebene, auf welcher die Fraktale gezeichnet werden besteht aus Pixel. Hier wird zum Beispiel eine Größe von $[-2, 2] \times [-2, 2]$ gewählt. Es stehen nun 500 Pixel auf jeder Seite und 250.000 für den ganzen Bildschirm zur Verfügung. Für jeden dieser 250.000 Punkte wird berechnet, zu welchem Attraktionspunkt er konvergiert. Weiters muss für jeden dieser Punkte eine maximale Anzahl an Iterationen festgelegt werden. Je mehr Iterationen vom Computer durchgeführt werden, desto länger braucht das Programm zur Erstellung des Fraktals.

Jeder Punkt auf dem Bildschirm wird nun mit einem der drei korrespondierenden Lösungen assoziiert, sodass jedes der 250.000 Pixel das Kennzeichen 1; $-0,5 - 0,866025i$ oder $-0,5 + 0,866025i$ trägt.

Im Vorhinein lassen sich die einzelnen Punkte auf dem Bildschirm nicht mit diesen Zahlen kennzeichnen. Es besteht jedoch die Möglichkeit, ihnen einen bestimmten Grauton oder Farbe zu geben.

Jene Punkte die gegen 1 konvergieren erhalten die Farbe blau. Die Punkte $-0,5 - 0,866025i$ und $-0,5 + 0,866025i$ erhalten die Farbe rot und grün.

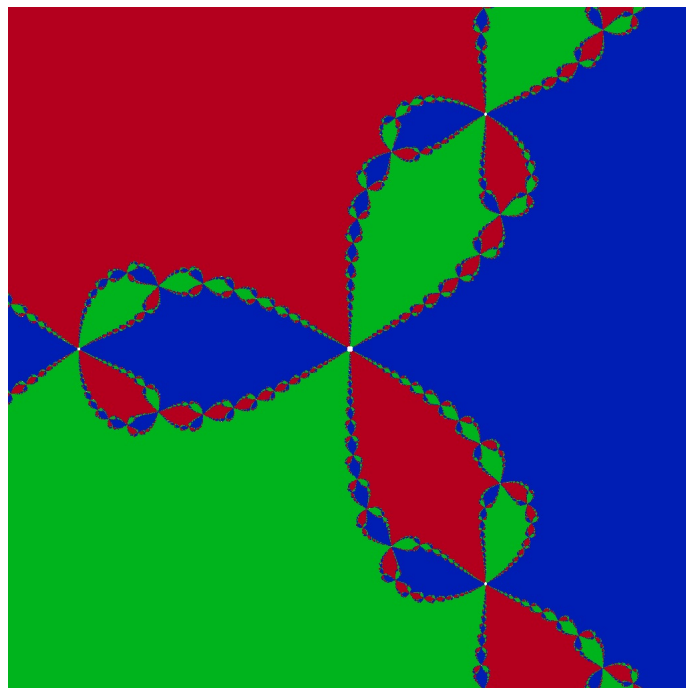


Abbildung 53: Dynamik von z^3 in der komplexen Ebene. ¹²⁹

¹²⁹Erstellt mit Python

In diesem Fall entscheidet das Argument (Größe des Winkels in Bogenmaß), wo sich der iterierte Punkt befindet und welche Farbe ihm zugeordnet wird.

Eine Alternative, die schönere Grafiken erzeugt, ist jene der Farbzuzuordnung von Konvergenzgeschwindigkeiten. In diesem Fall wird der Abstand des Punktes zum Attraktionspunkt gemessen und ihm wird eine Farbe zugeordnet.

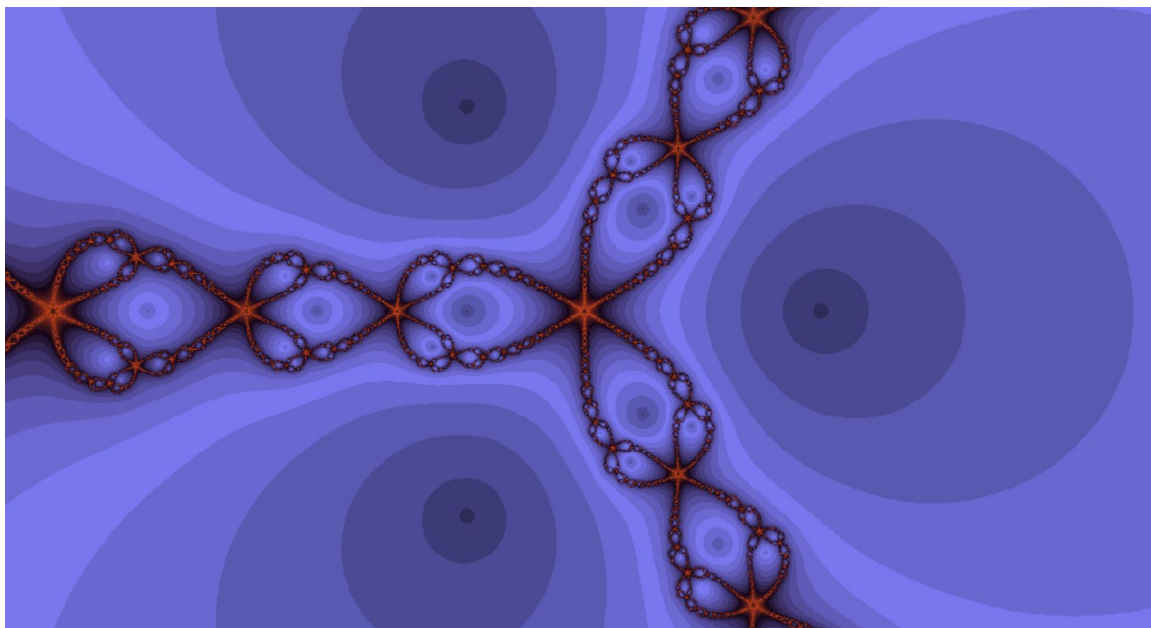


Abbildung 54: Dynamik von z^3 in der komplexen Ebene. ¹³⁰

In weiterer Folge lässt sich eine kleinere Region betrachten, die der ersten und ursprünglichen ähnelt. Die roten Punkte, die sich zwischen den Attraktionsbereichen befinden, bilden dessen Grenzen. Dies ist in Abbildung (55) ersichtlich.

¹³⁰Erstellt mit Xaos

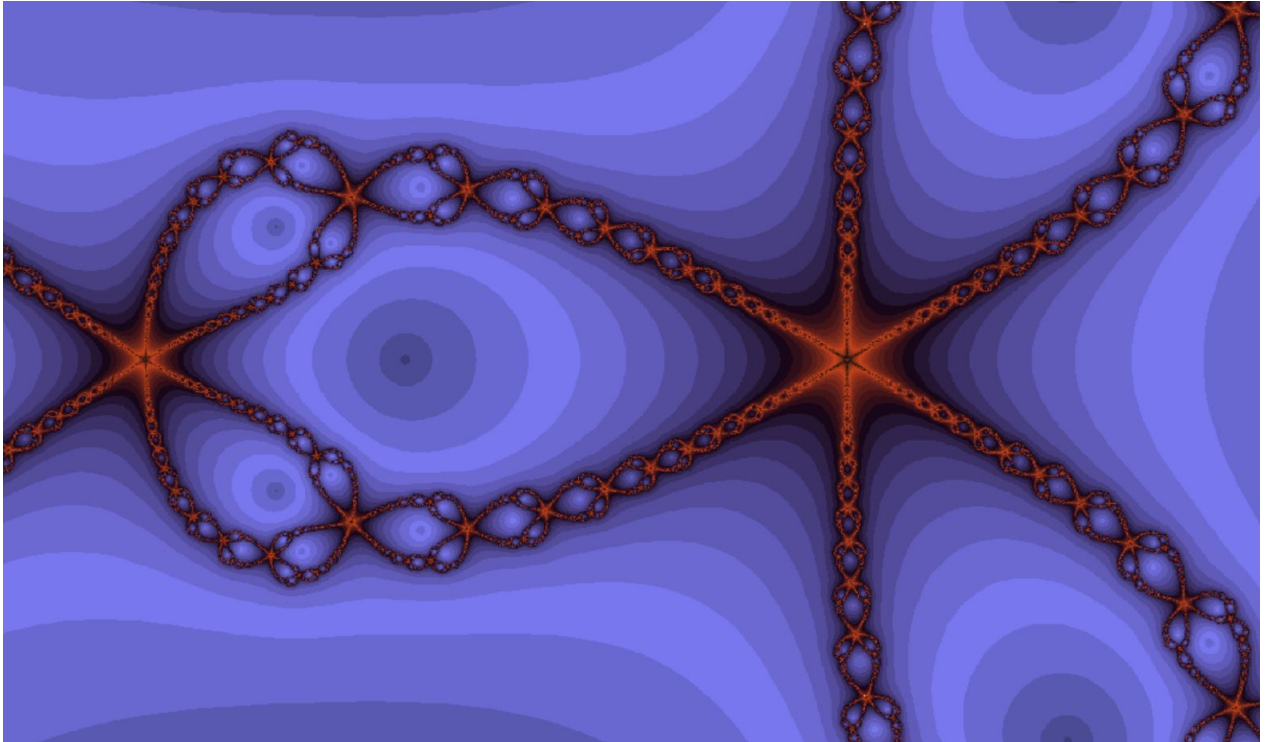


Abbildung 55: Zoom der Abbildung 54. ¹³¹

Durch das Hinein-Vergrößern in das Bild wird immer wieder eine Kopie der ursprünglichen Figur erstellt. Somit ist sich die Menge selbstähnlich und der Zoom ist theoretisch überall bis ins Unendliche durchführbar.

¹³¹Erstellt mit Xaos

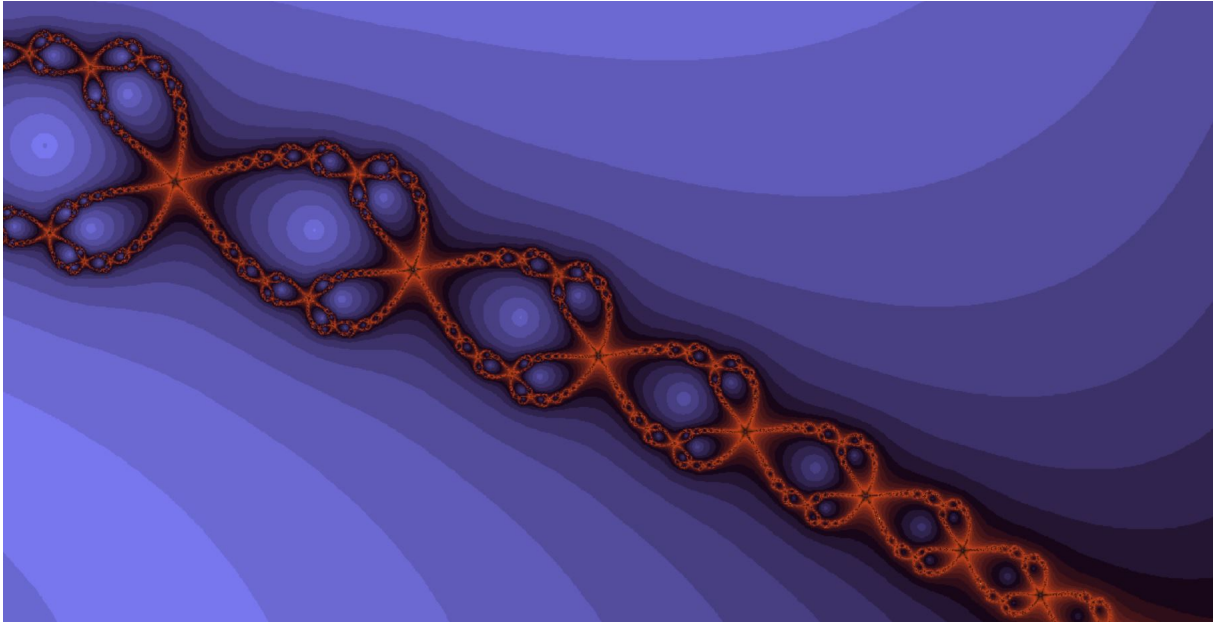


Abbildung 56: Zoom der Abbildung 55. ¹³²

In der Grafik (56) entspricht die Grenze der Mengen jenem Verhalten der Funktion im Grenzfalle, somit lässt sich hier auch von einer Fraktalen Struktur sprechen. Es handelt sich hierbei auch um eine Julia-Menge. ¹³³

6.5 Die Mandelbrotmenge

Im Kapitel 6.4.1 wurden Julia-Mengen für die Funktionen $f(z) = z^2 + c$ behandelt. Hierbei ist z eine komplexe Zahl und c ein Parameter. Variationen des Parameters c ergeben verschiedene Julia-Mengen. In Abbildung (57) werden acht unterschiedliche Julia-Mengen dargestellt.

¹³²Erstellt mit Xaos

¹³³Rubiano 2009, S.60-67

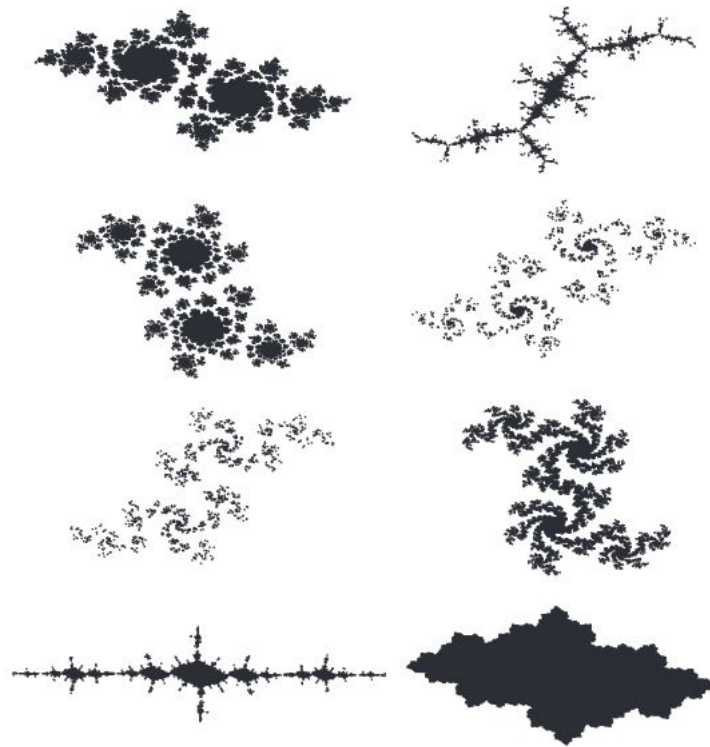


Abbildung 57: Acht verschiedene Julia-Mengen. ¹³⁴

Diese Julia-Mengen lassen sich in zusammenhängenden und unzusammenhängenden Mengen kategorisieren.

Ein Beispiel für eine zusammenhängende Julia-Menge ist in Abbildung (58) links abgebildet. Dazu wurde für c die komplexe Zahl $-0,6 + 0,2i$ gewählt. In der rechten Abbildung handelt es sich um eine unzusammenhängende Julia-Menge und für den Parameter c wurde die komplexe Zahl $0,0 - 0,72i$ gewählt.

Julia-Mengen solcher Art werden auch als Staub bezeichnet und erinnert an den im Kapitel 2.2 beschriebenen Cantor-Staub.

¹³⁴Feldman 2012, S.256



Abbildung 58: Zusammenhängende und unzusammenhängende Julia-Mengen. ¹³⁵

Beim Erhöhen der Auflösung des Bildes würde sich eine unendliche, aber vollständig losgelöste Menge von Punkten ergeben. Die zuerst scheinbar zusammenhängende Menge wird bei genauerer Betrachtung unzusammenhängend. In Tabelle 8 wurden Julia-Mengen mit verschiedenen c -Werten untersucht.

Um aus den verschiedenen Werten Informationen zu generieren, wird ein Grafik erstellt, welche alle c -Werte aufzeichnet. Zusammenhänge Julia-Mengen werden mit einer vollen Box gekennzeichnet, unzusammenhängende Julia-Mengen werden mit leeren Boxen dargestellt.

¹³⁵Feldman 2012, S.258

c -Wert	Zusammenhängend?
$-0,60 + 0,20i$	ja
$-0,00 + 0,72i$	nein
$-0,37 + 0,37i$	ja
$-0,20 + 0,57i$	nein
$-0,10 + 0,88i$	ja
$-1,35 + 0,02i$	ja
$-0,60 + 0,45i$	nein

Tabelle 8: Klassifizierung von Julia-Mengen. Welche sind zusammenhängend, welche nicht?

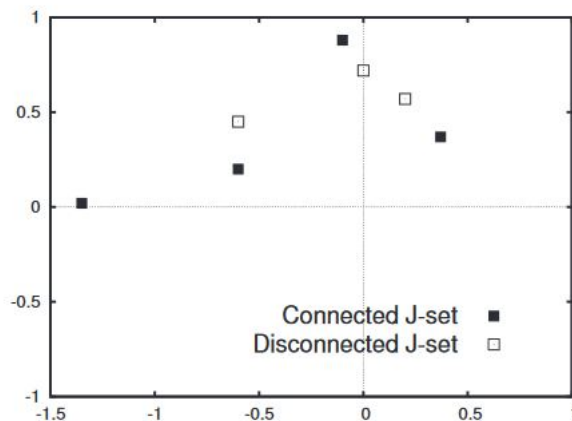


Abbildung 59: Grafik die mit Hilfe der Datentabelle 8 erstellt wurde. Die c -Werte wurden auf der komplexen Ebene dargestellt. Der reelle Teil ist auf der x -Achse aufgetragen und der komplexe Teil auf der y -Achse.¹³⁶

Die Julia-Mengen mit schwarzen Boxen gehören der Mandelbrot-Menge an. Somit besteht die Mandelbrot-Menge aus der Menge aller Parameter c , für welche die Julia-Menge $f(z) = z^2 + c$ zusammenhängend ist.¹³⁷

In Abbildung (60) befindet sich eine farbig dargestellte Mandelbrot-Menge. Sie wird

¹³⁶Feldman 2012, S.258

¹³⁷vgl. Feldman 2012, S.257ff

auch Apfelmännchen genannt. Sie wurde 1980 von B.B. Mandelbrot entdeckt. Die Mandelbrot-Menge wird als eine der komplexesten mathematischen Objekte betrachtet und beinhaltet Aspekte der Selbstähnlichkeit.¹³⁸

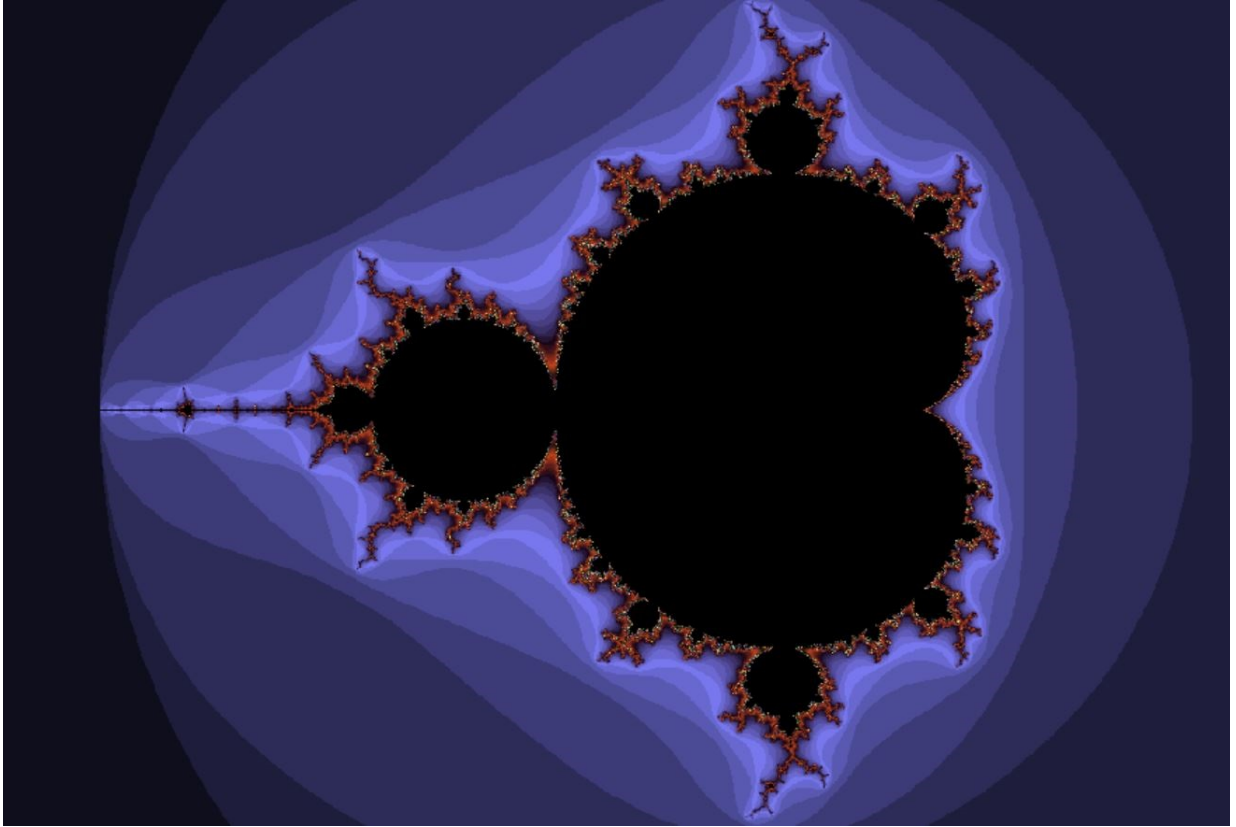


Abbildung 60: Mandelbrot-Menge. ¹³⁹

¹³⁸vgl. Barnsley u.a. 1988, S.177

¹³⁹Erstellt mit Xaos.

7 Schlussworte

7.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der mathematischen Behandlung von Fraktalen Strukturen.

Zu Beginn werden grundlegende Konzepte von Fraktalen behandelt und dargestellt. Unter anderem werden die geometrische Reihe und Cantor-Menge als älteste Fraktale vorgestellt und aus mathematischer Sicht beschrieben. Es wird auch auf Konstruktionen verschiedener Koch-Kurven eingegangen und mathematisch analysiert. Des Weiteren wird das Sierpiński-Dreieck vorgestellt und dessen Konzept auf den dreidimensionalen Menger-Schwamm übertragen.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Berechnung und Darstellung Fraktaler Bäume in der Programmiersprache Python. Zu Beginn wird die Konstruktion eines Fraktalen Baumes erläutert und anschließend wird seine Höhe mit Hilfe einer geometrischen Reihe berechnet. Des Weiteren wird das Programm vorgestellt und die Ergebnisse präsentiert.

Das vierte Kapitel handelt von der Einführung des Begriffs der Fraktalen Dimension. In den darauffolgenden Unterkapiteln wird Felix Hausdorff vorgestellt, der mit seinen Werken den Dimensionsbegriff vollständig erneuert hat. Es werden Konzepte der Fraktalen Dimension behandelt, welche die Selbstähnlichkeitsdimension, die Boxdimension, die Hausdorff-Dimension und die topologische Dimension miteinschließt.

Im fünften Kapitel dieser Arbeit geht es um Fraktale in der Architektur. Hier wird insbesondere auf das architektonische Werk von Lloyd Wright eingegangen. Seine Gebäude wie das Robie-Haus eignen sich hervorragend zur Berechnung Fraktaler Dimensionen. Mit Hilfe der Box-Methode wird die Fraktale Dimension des Robie-Hauses und die Fraktale Dimension der Flügel Fenster des Gebäudes bestimmt.

Das letzte und größte Kapitel beschäftigt sich mit Iterationen. Diese werden vor allem aus mathematischer Sicht behandelt. Anfangs werden Iterationen an reellen Geraden und euklidischen Ebenen vorgestellt und auf das Verhalten verschiedener

Orbits eingegangen. Des Weiteren wird das Chaos-Spiel erklärt und schließlich verallgemeinert. Die Hénon-Abbildung und der Lebkuchenmann werden als Beispiel einer chaotischen Menge in der Ebene vorgestellt. Anschließend wird auf ihre Eigenschaften näher eingegangen. Im Anschluss wird die komplexe Zahlenebene eingeführt um Iterationen auf $\mathbb{C}$ durchführen zu können. Die dabei entstandenen wunderschönen Dynamiken werden mit dem Newton-Verfahren für $z^3 - 1$ möglich und mit Hilfe des Computerprogramms Xaos dargestellt. Zuletzt werden Eigenschaften der Mandelbrotmenge genannt und diese Menge wird in Xaos betrachtet.

7.2 Abstract

This diploma thesis deals with the mathematical approach to fractal structures.

At the beginning fundamental concepts of fractals are examined and presented. Amongst other things the geometric series and the Cantor set will be introduced as oldest fractals and are described from a mathematical point of view. The thesis will deal with constructions of various Koch-curves and those will be mathematically analyzed. Furthermore the Sierpiński triangle will be introduced and its concept will be transposed to the three-dimensional Menger sponge.

The third chapter focuses on the calculation and graphic representation of fractal trees in the programming language Python. At the beginning the construction of fractal trees is described and afterwards its height is calculated using the geometric series. Additionally the program itself and its results are presented.

The fourth chapter introduces the terminology of the fractal dimension. In the following subsections Felix Hausdorff will be introduced, who has completely rebuilt the definition of dimension. Concepts of the fractal dimension will be discussed, which include the self-similarity dimension, the box-Dimension, the Hausdorff dimension and the topological dimension.

In the fifth chapter of this diploma thesis fractals in architecture are described. Particular attention is given to the architectural work of Lloyd Wright. His buildings like the Robie-House are excellently suited for the calculation of the fractal dimension of its shapes and its window casements.

The last and longest chapter deals with iterations from a mathematical perspective. First of all, iteration on real straights and Euclidean planes and the behavior of different orbits are discussed. Furthermore the chaos-game is explained and finally generalized. The Hénon map and the Gingerbreadman are given as example for chaotic sets. Then their properties are clarified. In addition the complex plane is introduced in order to carry out iterations on $\mathbb{C}$. Beautiful graphics for $z^3 - 1$ are created with Newton's method and are plotted with the computer program Xaos. Finally properties of the Mandelbrot set are named and plotted the set in Xaos.

Literaturverzeichnis

ALSINA, Claudi/NELDEN, Roger (2015): *Perlen der Mathematik. 20 geometrische Figuren als Ausgangspunkte für mathematische Erkundungsreisen.*- Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

ADDISON, Paul (1997): *Fractals and Chaos: An illustrated course.*- Bristol; Philadelphia: Institute of Physics.

ARGYRIS, John H./FAUST, Gunter/ HAASE, Maria (1995): *Die Erforschung des Chaos. Studienbuch für Naturwissenschaftler und Ingenieure.*- Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg Verlag.

BARNSELY, Michael F. u.a. (1988): *The Science of Fractal Images.*- New York; Heidelberg; Berlin; London; Paris; Tokyo: Springer-Verlag.

BARNSELY, Michael F. (1995): *Fraktale. Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie.*- Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum, Akademischer Verlag.

BENNETT, Doraine (2013): *Frank Lloyd Wright.*- Rourke Educational Media Verlag.

BOVILL, Carl (1996): *Fractal Geometrie in Architecture and Design.*- New York: Springer Science und Business Media Verlag.

BRIESKORN, Egbert (1996): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Band 1. Aspekte seines Werkes.*- Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg Verlag.

CONDÉ, Susan (1993): *Fraktalis. La complexité fractale dans l'art.*-Paris: La Différence-Verlag.

DEPAULI-SCHIMANOVICH, Werner (2007): *Kultur, Politik, Musik, Revolutionäres, Historisches, Literarisches. Band 4. Kunst und Technik in Europa.*- Novum Verlag.

DEVANEY, L. Robert (1983): *A piecewise linear model for the zones of instability of an area-preserving map*. In: Physica D10, S.387-393, Elsevier-Verlag.

FELDMAN, David (2012): *Chaos and Fractals: An Elementary Introduction*.-Oxford: University Press-Verlag.

GULICK, Denny (2010): *The beauty of fractals. Six different views*.- Washington, D.C: Mathematical Association of America.

HALLING, Horst/ MÖLLER, Rolf (1995): *Mathematik fürs Auge. Eine Einführung in die Welt der Fraktale*.- Heidelberg; Berlin; Oxford: Spektrum, Akademischer-Verlag.

HAUSDORFF, Felix (1919): *Dimension und äußeres Maß*. In: Mathematische Annalen 79, S.157-159, Leipzig.

HELMBERG, Gilbert (2007): *Getting Acquainted with Fractals*.-Berlin; New York: Walter de Gruyter- Verlag.

HÉNON, M.(1976): *A two-dimensional mapping with a strange attractor*. In: Commun. Math. Phys. 50, S.69-77, Nice.

JACOBSEN, Jon/ LEWIS, Owen/ TENNIS, Bradley (2007): *Approximation of continuous Newton's method. An extension of Cayley's problem*. In: Electronic Journal of Differential Equations, Issue 15, S.163-173.

KRANTZ, Steven (2009): *A Guide to TOPOLOGY*.- Mathematical Association of America.

LOGOFATU, Doina (2008): *Grundlegende Algorithmen mit Java*.- Wiesbaden: Vieweg-Verlag.

MANDELBROT, Benoît (1987): *Die Fraktale Geometrie der Natur.*-Basel; Boston: Birkhäuser-Verlag.

PEITGEN, Heinz-Otto/ JÜRGENS, Hartmut/ SAUPE, Dietmar (2004): *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.*-New York: Springer-Verlag, 2.Auflage.

PEITGEN, Heinz-Otto/SAUPE, Dietmar (1988): *The Science of FRAKTAL IMAGES.* New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag

PEITGEN, Heinz-Otto/SAUPE, Dietmar/Haeseler (1984): *Cayley's problem and Julia sets.* In: The Mathematical Intelligencer, Vol.6(2), S.11-20 Mathematische Annalen 79, S.157-159.

RUBIANO, Gustavo N. (2009): *Iteración y fractales. Con Mathematica.*- Universidad Nacional de Colombia: Facultad de Ciencias.

SANDEFUR, James (1996): *Using Self-Similarity to Find Length, Area, and Dimension.*- In: The American Mathematical Monthly Vol.103, No.2, S.107-120, Mathematical Association of America.

SEELEMANN, Max/ Grehl, Sascha (2005): *Erstellung eines Programms zur dreidimensionalen Darstellung ausgewählter Fraktale.*

Online im Internet:

URL: [https://www.informatik.uni-](https://www.informatik.uni-leipzig.de/meiler/Schuelerseiten.dir/MSeelemann_SGrehl/Anhang.pdf)

[leipzig.de/meiler/Schuelerseiten.dir/MSeelemann_SGrehl/Anhang.pdf](https://www.informatik.uni-leipzig.de/meiler/Schuelerseiten.dir/MSeelemann_SGrehl/Anhang.pdf) [Stand 2018-04-18]

STADLER, Friedrich (2001): *Der Wiener Kreis. Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus.*- Springer-Verlag, 2. Auflage.

TRICOT, Claude (2008): *Géometries et mesures fractales. Une introduction.*- Paris: Ellipses-Verlag.

VYZANTIADOUA, M.A/ AVDELASA, S./ ZAFIROPOULOSB (2007): *The application of fractal geometry to the design of grid or reticulated shell structures.*- In: Computer-Aided Design Vol.39, pp.51-59, Elsevier-Verlag.

WRIGHT, Frank Lloyd, (1909): *Chicago: Robie House general view, 1909.*

Online im Internet: URL:

http://library-artstor-org.uaccess.univie.ac.at/asset/ARTSTOR_103_41822000226926.

[Stand:2018-04-18].

ZEITLER, Herbert/ PAGON Dušan (2000): *Fraktale Geometrie. Eine Einführung für Studienanfänger, Studierende des Lehramts, Lehrer und Schüler.* -Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg-Verlag.

Internetquellen

(letzte Überprüfung aller Internetquellen am 18.04.2018)

<https://www.python.org/>

<http://matek.hu/xaos/doku.php>

Abbildungsverzeichnis

1	Die geometrische Reihe	2
2	Cantor-Menge	4
3	Die Konstruktion einer Koch-Kurve	7
4	Betrachtung eines allgemeinen Dreiecks	8
5	Die Selbstähnlichkeit der Koch-Kurve	11
6	Generieren einer zufälligen Koch-Kurve.	12

7	Darstellung verschiedener zufälliger Kochkurven.	12
8	Die Konstruktion der Koch-Schneeflocke	13
9	Die Konstruktion der Kochkurve mit gleichseitigem initialen Dreieck. .	14
10	Kochkurve mit Dreieck und Kochkurve vergrößert.	15
11	Variation der Koch-Schneeflocke.	16
12	Höher dimensionale Koch-Schneeflocke.	18
13	Die Konstruktion des Sierpiński-Dreiecks	20
14	Die Selbstähnlichkeit des Sierpiński-Dreiecks	21
15	Der quadratische Sierpiński-Teppich	22
16	Der dreidimensionale Menger-Schwamm	23
17	Konstruktion mit gleichseitigem rechtwinkligem Dreieck	26
18	Konstruktion mit gleichseitigem Dreieck	27
19	Zuwachs der Höhe nach jeder Etappe	28
20	Zuwachs der Höhe nach jeder Etappe	29
21	Darstellung eines Fraktalen Baumes mit gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreiecken in Python	33
22	Darstellung Fraktaler Bäume mit gleichschenkeligen Dreiecken in Python	34
23	Darstellung Fraktaler Bäume mit gleichschenkeligen Dreiecken in Py- thon mit Basiswinkel von 30° , 25° , 20° , 15°	35
24	4, 16, 64 Unterfiguren	37
25	Boxdimension mit Koch-Kurve	40
26	Bestimmung der Boxdimension einer Küstenlinie	42
27	Wright und Studenten in der Architektenschule	46
28	Frank Lloyds Robie-Haus	47
29	Diagramm der Häufigkeit von Stäbchen und Zapfen-Zellen im mensch- lichen Auge	48
30	Tabelle mit Abstand des Betrachters in Fuß, Winkel und Maßeinheit .	49
31	Zeichung Robie-Haus mit verschiedenen Gittern	50
32	Zeichung Robie-Haus mit schraffierten Boxen	52
33	Fenster im Robie-Haus.	53
34	Zeichung des Flügelfensters im Robie-Haus	54
35	Zeichung des Flügelfensters im Robie-Haus	55

36	Foto vom Robie-Haus	57
37	Schematische Darstellung von Fixpunkten.	62
38	Orbits von $f(x) = x^2$ im Intervall von $(-1, \infty)$	64
39	Orbits der Funktion $g(x) = x^3$	65
40	Das Ergebnis von einer Million Münzwürfe im Chaos-Spiel.	66
41	Eine affine Transformation	68
42	Beispiel für eine affine Transformation.	68
43	Beispiel einer affinen Transformation: Kontraktion	69
44	Zwei Grafiken mit Hénon-Abbildung.	71
45	Vergrößerung des Hénon-Attraktors mit $0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 0,3$	72
46	Der Lebkuchenmann und Vergrößerung	74
47	Ein mit dem Chaos-Spiel erzeugter Farn.	76
48	Kreis mit Radius 1.	79
49	Punkte innerhalb und außerhalb des Kreises S^1	80
50	Orbit von z^2	82
51	Newton-Verfahren	85
52	Die Dynamik in der komplexen Ebene durch z^2	87
53	Dynamik von z^3 in der komplexen Ebene.	90
54	Dynamik von z^3 in der komplexen Ebene.	91
55	Zoom der Abbildung 54	92
56	Zoom der Abbildung 55	93
57	Acht verschiedene Julia-Mengen	94
58	Zusammenhängende und unzusammenhängende Julia-Mengen	95
59	Grafik mit unterschiedlichen c -Werten der Julia-Menge.	96
60	Mandelbrot-Menge.	97

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.