



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Inhalte des Mathematik-Oberstufenlehrplans:
Eine Analyse hinsichtlich Sinnhaftigkeitsaspekten und
Aufnahmekriterien nach Roland Fischer

verfasst von / submitted by

Christoph Breuer

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2018

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 456

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

UF Mathematik und UF Geographie und Wirtschaftskunde

Betreut von / Supervisor:

Privatdoz. Mag. Dr. Bernhard Krön

„What is mathematics? What knowledge of mathematics does tomorrow's society demand? What mathematics should this pupil learn so as to be a wise and humane citizen of that society? “

(Kilpatrick und Davis 1993: 204)

Plagiatserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorgelegte Arbeit selbständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Alle wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommenen Textpassagen und Gedankengänge sind durch genaue Angabe der Quelle ausgewiesen. Dies gilt auch für Quellen aus dem Internet, bei denen zusätzlich URL und Zugriffsdatum angeführt sind. Ferner versichere ich, diese Arbeit nicht bereits andernorts, weder im In- noch im Ausland, zur Beurteilung vorgelegt zu haben. Diese Arbeit stimmt mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit vollständig überein.

Wien, April 2018, Christoph Breuer

Danksagung

An dieser Stelle ist es mir wichtig, mich bei allen Menschen zu bedanken, die mich während meines Studiums und meiner Diplomarbeit begleitet und unterstützt haben.

Als erstes bedanke ich mich bei Herrn Krön für die Möglichkeit, meine Abschlussarbeit unter seiner Betreuung zu schreiben, sowie für die Hilfe während der Erstellung. Dies betrifft vor allem die Eingrenzung des Themas, sowie das Auflösen von „Schreibblockaden“ durch neue Inputs.

Unschätzbarer Dank gilt meinen Eltern. Nicht nur für die materielle Unterstützung während meines gesamten Studiums, sondern vor allem für die uneingeschränkte und aufopfernde Hilfsbereitschaft in jeglicher Lebens- und Gefühlslage. Ohne diesen Rückhalt wäre mein ganzes Leben, besonders aber die letzten 5 Jahre nicht mit einer solchen Unbeschwertheit möglich gewesen.

Zudem gebühren meinem Bruder ein Eintrag in dieser Arbeit, sowie der damit verbundene Ausdruck ehrlicher Dankbarkeit. Die vielen korrigierten Seminararbeiten und Hilfestellungen vor allem am Beginn meines Umzugs nach Wien, sowie die menschliche Hilfe in den letzten Jahren habe ich und werde ich nicht vergessen.

Abschließend möchte ich auch meinen Freunden, den, während des Studiums neu gewonnenen, sowie denjenigen, die ich schon fast mein ganzes Leben kenne, großen Dank aussprechen. Ich bedanke mich für unvergessliche Zeiten, Ausflüge, Feiern, Urlaube und sportliche Highlights.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	13
1.1	Ziele und Grenzen dieser Diplomarbeit	14
2	Populäre Meinungen zur Sinnhaftigkeit der Inhalte in der Schule.....	16
2.1	Öffentliche Medien und Personen.....	16
2.2	Studien zur öffentlichen Meinung mathematischer Inhalte	19
2.2.1	Studie: Lernquadrat	19
2.2.2	Studie: Rechnen in Deutschland	21
2.2.3	Studie: Maths Images & Identities: Education Entertainment, Social Justice	22
2.3	Fachanalyse	22
3	Sinn mathematischer Inhalte	26
3.1	Sinn mathematischer Inhalte anhand ausgewählter Merkmale und Beispiele	27
3.1.1	Innermathematische Analysen	29
3.1.2	Durch wissenschaftstheoretische Überlegungen	34
3.1.3	Die Frage nach Anwendungsmöglichkeiten	35
3.1.4	Die Betrachtung der Geschichte eines Begriffs oder einer Theorie.....	42
3.2	Legitimation der Sinnaspekte von Fischer	49
3.3	Weitere Sinnaspekte in der Mathematikdidaktik	52
3.3.1	Drei Grunderfahrungen	52
3.3.2	Drei Grundvorstellungen.....	53
3.3.4	Fundamentale Ideen	53
4	Aufnahmekriterien von Inhalten in den Oberstufenlehrplan	55
4.1	Exkurs: Mit Mathematik wird kommuniziert.....	57
4.2	Kommunikationsfähigkeit mit Experten als Orientierungsansatz für Inhalte der Sekundarstufe II	60

4.3 Aushandeln von Inhalten.....	63
4.4 Diskussion über mathematische Inhalte der Oberstufenlehrplans	69
4.4.1 Zentrale Inhalte	69
4.4.2 Beitrag Eins	70
4.4.3 Beitrag Zwei.....	70
4.4.4 Beitrag Drei	72
4.4.5 Beitrag Vier	73
4.4.6 Beitrag Fünf.....	74
4.4.7 Fazit der Diskurse.....	77
5 Resümee.....	78
6 Zusammenfassung	79
7 Literaturverzeichnis	80

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Umfrage: Wie viel der Mathematik Schulinhalte benötigen SchülerInnen für das spätere Leben.	20
Abbildung 2: Entwicklung Nutzungswert vs. Bedeutungswert.	24
Abbildung 3: Angabe Tankbeispiel.....	37
Abbildung 4: Streudiagramm ohne (links) und mit (rechts) Linienzug.	37
Abbildung 5: Treibstoff durch angepasste Gerade $f(x) = 0.094x$ (oben). Residuendiagramm Polyom 8. Grades (unten).	38
Abbildung 6: Modellierungsprozess nach Blum 1986.	39
Abbildung 7: Lösungsansatz von Descartes.....	43
Abbildung 8: Skizze Pyramidenstumpf.....	45
Abbildung 9: Laie und Experte Kompetenzzuteilung.	62
Abbildung 10: Aushandlungsorte von Inhalten nach Fischer.	66
Abbildung 11: Strukturierung der Inhalte nach Fischer.....	68
Abbildung 12: Additionstabelle hyperreelle Zahlen	76

1 Einleitung

Weltweit wird Mathematik an allgemeinbildenden Schulen als Kern- und Pflichtfach unterrichtet. Dies setzt sich von der Volksschule, über die Unterstufe, bis in die Oberstufe fort. Die Mathematik als aktives und aktuelles Forschungsgebiet mit einer komplexen Entwicklungsgeschichte steht oft im Widerspruch zu dem Bild, das in den Medien vermittelt wird. Die Meinung, die SchülerInnen über mathematische Inhalte in der Schule mitnehmen, entspricht der von Mathematiker gewünschten Darstellung ebenso wenig. Die stereotypischen Aussagen: „Für was brauch ich dieses und jenes?“, „Was hat das für einen Sinn, wenn ich das Lerne?“ sind sowohl für angehende, als auch arrivierte LehrerInnen nicht zu unterschätzende Fragen. Für SchülerInnen sind dies zwar banale, oft Desinteresse geschuldete, bei näherer Betrachtung aber berechtigte Fragen. Ein Großteil der Lehrinhalte stammt im Wesentlichen aus Teilen der Mathematik des 15. bis 18. Jahrhunderts, ergänzt um Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung aus dem 19. Jahrhundert (vgl. Loos und Ziegler 2015: 364-365).

Im Laufe meiner universitären Ausbildung und dem darin enthaltenen Kontakt mit SchülerInnen, wurde ich mehrere Male mit eben dieser Frage/Aussage konfrontiert. Eine für beide Seiten befriedigende Antwort ist schwer zu finden, obwohl speziell die Mathematik auf fast alles Antworten geben sollte. Dies brachte mich auf die Idee, selbst nach Antworten zu suchen. Warum lernen SchülerInnen und lehren LehrerInnen diese und nicht jene Inhalte der Mathematik? Die Themen sind dem Lehrplan geschuldet. Doch wie sieht die Diskussion hinsichtlich der Inhalte hinter dem fertigen Produkt aus? Wird dahingehend überhaupt eine geführt, oder wird der Status Quo akzeptiert und für passend empfunden?

Die Diplomarbeit ist in drei Teile gegliedert. Im Ersten Teil wird ein kurzer Überblick über Meinungen zu den Inhalten des Mathematik-Oberstufenlehrplans wiedergegeben. Dazu führe ich Recherchen in Dokumentationen der öffentlichen Medien und von Umfragen in Österreich, Deutschland und England durch. Darauf beziehend, erstelle ich eine erste fachliche Analyse.

Im zweiten Teil der Arbeit werden verschiedene Sinnkriterien nach Roland *Fischer* analysiert. Ich selektiere bestimmte Inhalte des AHS Oberstufenlehrplans und bringe diese mit den ausgewählten Sinnhaftigkeitsaspekten in Verbindung. Dies untermauere ich fallweise durch Beispiele, um die Thematik besser zu veranschaulichen.

Der dritte Teil beschäftigt sich mit einem möglichen Auswahlkriterium für mathematische Inhalte des Lehrplans einer allgemeinbildenden höheren Schule. Dabei wird speziell auf die Entscheidungsverantwortung der Gesellschaft hingewiesen, welche sich laut dem behandelten Ansatz sehr wohl daran beteiligen soll. Diese von mir ausgewählten Inhalte, analysiere ich an Hand von aktuellen und vergangenen Diskussionen verschiedener FachexpertInnen zu mathematischen Inhalten in einer Oberstufe.

Wenn ich in dieser Arbeit von einem Lehrplan spreche, ist der Oberstufenlehrplan der AHS gemeint. Wenn ich im Kontext die Inhalte des Unterstufenlehrplans anspreche, wird dies explizit erwähnt. Das gleiche gilt für die Schulformen der Sekundarstufe I und Sekundarstufe II. In diesem Zusammenhang sind stets allgemeinbildende höhere Schulen (AHS) und die Unterteilung in Unterstufe und Oberstufe gemeint.

1.1 Ziele und Grenzen dieser Diplomarbeit

Ziel dieser Diplomarbeit ist es, einen Überblick über mögliche Sinnkriterien für aktuelle Inhalte sowie für die Auswahl der Themen des Oberstufenlehrplans einer AHS anhand von *Fischers* gewählten Aspekten zu geben. *Fischers* Sinnhaftigkeits-Aspekte, sowie das Auswahlkriterium Kommunikationsfähigkeit mit Experten, entsprechen den Anforderungen und Zielen der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik (vgl. Aue et al. 2018: 4).

In meiner Arbeit versuche ich die Inhalte des AHS Oberstufenlehrplans hinsichtlich dieser zu analysieren. Den Begriff „Kompetenz“ verwende ich in dieser Arbeit nur eingeschränkt. Formale Bildung, wie mathematische Kompetenzen, logisches Denken, sprachliche Kompetenzen, Selbstständigkeit, Informationsbeschaffungskompetenzen usw., zusammengefasst Schlüsselqualifikationen, sind wichtige Bestandteile einer

Allgemeinbildung, die in der Unter- und Oberstufe gelehrt werden sollten. Die Frage, die dabei teilweise vergessen wird zu stellen, ist, ob Inhalte einfach austauschbar sind? Ein Teil meiner Arbeit ist die Beantwortung dieser Frage gewidmet.

Aufgrund einer theoretischen Untersuchung der Sinnhaftigkeitskriterien von *Fischer*, wird in diesem Kapitel großteils auf Aspekte hinsichtlich Einsatzes neuer Technologien verzichtet. Dies ist keinesfalls als Aufruf gegen Computereinsatz bei mathematischen Inhalten zu verstehen, welche im Unterricht einen unterstützenden Charakter einnehmen. Bei dieser Arbeit stehen rein die Inhalte im Mittelpunkt. Aufgrund besserer Anschaulichkeit einiger Überlegungen, wurden manche Aspekte mit Beispielen zu den vorher erwähnten Inhalten untermauert. Diese wurden aus verschiedener Fachliteratur gewählt.

Es wird von mir nicht der Versuch unternommen einen einzig richtigen und sinnhaften Einsatz der Inhalte zu propagieren. Die Einzigartigkeit von didaktischen Situationen, sowie die subjektive Anschauung von Sinn macht eine objektive Sinnkonstruktion von Inhalten unmöglich. Weitere Sinnaspekte werden am Ende des Kapitels *Sinn mathematischer Inhalte* genannt und mit Literatur unterlegt. Zum Abschluss ist es mir wichtig anzumerken, dass sämtliche Sinn-Argumente und Erfahrungen meiner Meinung nach nicht als unabhängig existierende oder konträr zueinander laufende Aspekte zu verstehen sind, sondern die Summe dieser Bausteine das Vermitteln sinnhafter Inhalte und als Ergebnis eines wirkungsvollen Unterrichts gewährleisten kann. Dies haben viele AutorInnen gleichermaßen bei Ihren Überlegungen erwähnt.

2 Populäre Meinungen zur Sinnhaftigkeit der Inhalte in der Schule

2.1 Öffentliche Medien und Personen

Im folgenden Kapitel wird eine Reihe von subjektiven Meinungen aus unterschiedlichen Medien zu den Inhalten des Mathematik-Oberstufenlehrplans bzw. zu den Inhalten des Mathematikunterrichts wiedergegeben. Es soll ein allgemeiner Überblick der öffentlichen Meinung wiedergegeben werden. Dabei kommt es zwangsläufig zu sehr differenzierten Äußerungen hinsichtlich positiver sowie negativer Ansichten, da nicht auf alters- oder bildungsspezifische Differenzierung eingegangen worden ist.

Im zweiten Teil folgt die Analyse dreier Studien zu Meinungen über die Sinnhaftigkeit der schulischen Inhalte. Gewonnene Erkenntnisse und Aussagen lassen sich trotz der Vielseitigkeit in weiterer Folge mit aktuellen Studien vergleichen. Ein Teil der Recherche stellt sich wie folgt sinnhomogen dar:

„[...]sollte Mathematik als Pflichtfach in der Oberstufe sowieso endlich abgeschafft werden. Wahrscheinlichkeits- und Prozentrechnung sollte man bis dahin absolviert haben, das ist das einzige was man im Leben vielleicht irgendwie brauchen kann.[...]“

Kommentar von User *AlekskannderBellen* zum Artikel: „Warum wir über die Mathe-Zentralmatura reden sollten“ (Grater 2017)

„[...] Grundrechenarten und die wichtigsten math., Anforderungen, die man im täglichen Leben nun mal braucht sollten unbedingt unterrichtet werden. Kurvendiskussionen, Integral, Funktionen sollten nur in jenen Zweigen unterrichtet werden, die eine weitere technische Ausbildung anstreben [...]“

Kommentar von User *AlekskannderBellen* zum Artikel: „Warum wir über die Mathe-Zentralmatura reden sollten“ (Grater 2017)

[...] Gewisse Basics an Mathematik sind sicher für das Alltagsleben ganz praktikabel und auch Allgemeinbildung. Integrationsrechnungen und Kurvendiskussionen und, und, und haben mich persönlich aber nur belastet und mir Albträume beschert und spielten in meinem späteren Leben auch überhaupt keine Rolle [...]

Kommentar von User *Speranza* zum Artikel: „Warum nicht eine freiwillige Mathematik-Matura“ (Sepp 2016)

„Mathematik hat für die gesamte Gesellschaft keine große Bedeutung, da nur die elementarsten mathematischen Dinge von Nutzen sind. Zum Beispiel um den Zahlungsverkehr mit Geld zu gewährleisten, und dazu braucht man nun keine exponentiellen Gleichungen.“

(StudentIn, 1. Semester, 2017)

Während dem mathematischen Inhalt der Pflichtschule durchaus eine Nützlichkeit im Leben und somit eine Sinnhaftigkeit attestiert wird, wird bei diesen, wie anderen hier nicht zitierten Aussagen, der geringe praktische Nutzen aus den Inhalten des Oberstufenlehrplans kritisiert. Der allgemeine Tenor scheint nur den Basics wie den Grundrechenarten sowie Prozentrechnung eine Legitimation im Schulunterricht zuzusprechen.

Der höheren Schulmathematik, beispielsweise den Integral- sowie den Differenzialrechnungen, wird keine Sinnhaftigkeit zugeschrieben. Viele Personen sind der Meinung, dass die Inhalte der Mathematik, eine rein fachliche in sich geschlossene Wissenschaft sind, im Leben aber keine Rolle spielen.

Dabei wird in den Populärmedien die Anwendbarkeit in Alltagssituationen immer wieder aufgezeigt. So schrieb der Standard in dem Artikel „*Der Alltag in Formeln gefasst*“ über die weitreichende Verwendung in der Medizin, der Wirtschaft oder bei Alltagsproblemen. Wirklich greifbare Beispiele für SchülerInnen oder den/der DurchschnittsbürgerIn fehlen jedoch in der Analyse. Dies wird mit der Aussage von *Bruno Buchberger* in diesem Artikel unterstrichen (vgl. Feiertag 2008):

„Oft ergebe sich erst nach vielen Jahren ein "Sinn", und auch ohne "Anwendung" sollte der Denkprozess selbst Sinn und Zweck sein.“

Den Versuch einer Erklärung für die Sinnhaftigkeit versuchte der NDR in dem Artikel *„Mathematik im Alltag“*. Während der Artikel zu Beginn die „Unliebe“ der SchülerInnen zur Mathematik anspricht, will er die Nützlichkeit der Mathematik im weiteren Verlauf mit alltagsbezogenen Beispielen verdeutlichen. Diese reichen von meteorologischen Berechnungen, über die Hintergrundberechnungen bei einem Navigationsgerät, bis zur Mathematik im Fußball (vgl. NDR 2017). Ein expliziter Zusammenhang zu Inhalten des Lehrplans der Schule wird nicht hergestellt. Selbst Lehrpersonen sind nicht immer mit den Inhalten zufrieden. Kurt Söser kritisiert in seinem Artikel *„Was ist sinnvoller Mathematikunterricht“* neben den zu geringen Technologieeinsatz, vor allem die Inhalte des Lehrplans.

„Bei kritischer Betrachtung des Mathematik-Lehrplans sind darin so viele brauchbare Dinge für einen 18jährigen, wie der Buchstabe Ü auf alten Römischen Inschriften“

(Söser 2013)

Wie viele oben angeführte Kommentare, kritisiert er vor allem die wenige Lebens- bzw. Praxisrelevanz. Als Begründung gibt Söser die Komplexität und das hohe Niveau der Forschung an. Dies in die Schule zu übertragen scheint für ihn nicht möglich. Speziell in der Oberstufe scheinen die Anwendungsbeispiele, wie eine Kurvendiskussion in der Kosten- und Preistheorie, nicht mit der komplexen Realität mithalten zu können (vgl. Söser 2013).

„Es ist alles schon sehr komplex in der Realität. Einem Schüler zu zeigen (und bei der Prüfung dann ausrechnen zu lassen), wie man Gewinnschwellen und Betriebsoptimum ausrechnet, hat glaube ich überhaupt keinen Realitätsbezug und fällt in die Kategorie „Pseudoanwendung.“

(Söser 2013)

Laut seinen Äußerungen wird die Diskrepanz zwischen Lebenswelt und Schulwelt in Zukunft größer werden. Der geschützte Bereich in der Schule lehrt Inhalte und Fertigkeiten mit welchen sich reale Probleme des 21. Jahrhunderts nicht lösen lassen. Dies sei die Sinnkrise, welche in der Mathematik herrsche.

Zusammenfassend ist die öffentliche Populärmeinung durchwegs kritisch gegenüber den Inhalten des Lehrplans. Das ausschlaggebende Kriterium für deren Meinung zur Sinnhaftigkeit scheint die Praxisrelevanz im Alltag zu sein. Speziell dem Oberstufenlehrplan wird diese häufig abgesprochen. Die Begründungen unterscheiden sich dabei stark. Kritisieren die einen eine zu große Komplexität bzw. Abstraktheit um für die Lebenswelt relevant zu sein, bemängeln andere die Vereinfachungen die in der Schule vorgenommen werden, um komplexe Themen auf ein schülergerechtes Niveau zu bringen.

Die negative Stimmung hinsichtlich der Sinnhaftigkeit von Inhalten betrifft einen Großteil der Lehrinhalte der Oberstufe. Die Mathematik aus der Pflichtschule scheint dabei eine größere öffentliche Akzeptanz zu haben. Dabei wird nicht an die Aufgabenverteilung eines Mathematikunterrichts und deren Inhalte gedacht. Eine höhere mathematische Ausbildung in der Sekundarstufe II hat andere Aufgaben zu erfüllen, als die einer Pflichtschule (vgl. Fischer 2003: 559). (Siehe Kapitel *Aufnahmekriterien für die Inhalte des Oberstufenlehrplans*)

2.2 Studien zur öffentlichen Meinung mathematischer Inhalte

Während die erste Studie sich direkt auf Österreich bezieht, sind die beiden anderen Studien in Deutschland bzw. England durchgeführt und publiziert worden.

2.2.1 Studie: Lernquadrat

Eine genauere Analyse der Empfindungen der SchülerInnen hat das Nachhilfeinstitut *Lernquadrat* durchgeführt. Laut einer Studie des *Lernquadrats* aus dem Jahr 2016, glaubt die Hälfte der 515 befragten österreichischen SchülerInnen, dass sie ca. 50 Prozent des Mathematiklernstoffs als Erwachsene Person benötigen würden.

Das Fach Mathematik ist bei dieser Umfrage in den vorderen Rängen vertreten. Andere Inhalte der naturwissenschaftlichen Schulfächer wie Chemie, Physik oder Geographie werden als weniger wichtig erachtet. Wie in Abbildung 1 zu sehen, glauben ca. 65 Prozent, dass sie weniger als die Hälfte des Gelernten für die Zukunft benötigen werden. Hingegen empfinden nur vier Prozent der Befragten „fast alles“ als bedeutsam.

Männliche Studienteilnehmer tendierten bei der Umfrage zu den deutlicheren Antworten, während die weiblichen Befragten vermehrt die mittleren Entscheidungsmöglichkeiten bevorzugten.

Ein Trend der sich zeigt ist, dass die empfundene Brauchbarkeit der Inhalte mit zunehmendem Alter abnimmt. Während bei den 11 bis 14 Jährigen noch mit ca. 50 Prozent mehr als die Hälfte der Schulinhalte als wichtig empfunden, sind es bei den 15 bis 19 Jährigen nur noch etwas mehr als 30 Prozent (vgl. Lernquadrat 2016). Dabei stellt sich die Frage, ob sich die Einstellung der SchülerInnen mit zunehmendem Alter verändert, oder die abstrakter werdenden Inhalte als weniger nützlich empfunden werden?

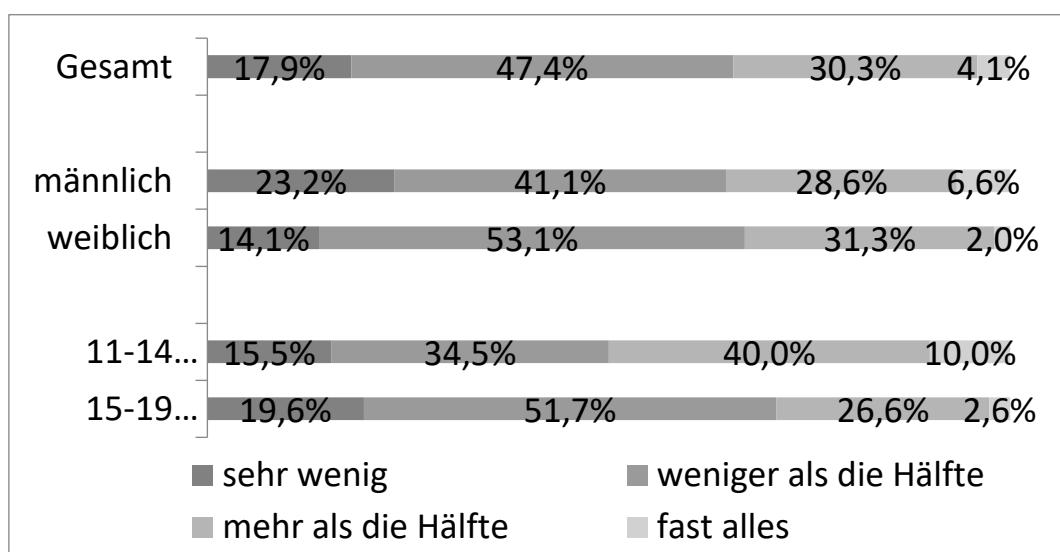


Abbildung 1: Umfrage: Wie viel der Mathematik Schulinhalte benötigen SchülerInnen für das spätere Leben.

(Lernquadrat 2016)

Dies gibt die Meinung der öffentlichen Wahrnehmung teilweise gut wieder, obwohl insgesamt die Akzeptanz der SchülerInnen hinsichtlich Brauchbarkeit und Sinnhaftigkeit der Inhalte mit mehr als 50 Prozent durchaus hoch scheint. Da in dieser Studie die mathematischen Inhalte des Unterstufenstoffs mit eingerechnet sind, werden die Aussagen der Oberstufe verschleiert. Die deutlichste Botschaft ist, wie bei der Analyse durch andere Medien, das unterschiedliche Empfinden der Sinnhaftigkeit zwischen den Inhalten der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II. Ob die Perspektive der Personen,

welche dazu Stellung genommen haben aussagekräftig hinsichtlich Sinnhaftigkeit der mathematischen Inhalte ist, wird im weiteren Verlauf der Arbeit diskutiert.

2.2.2 Studie: Rechnen in Deutschland

Die Studie „Rechnen in Deutschland“ wurde von dem Projekt „Stiftung Rechnen“ in Auftrag gegeben und im Sommer 2009 vom Sozialforschungsinstitut „forsa“ durchgeführt. Diese untersucht unter anderem die Einstellung der Deutschen zum Rechnen und zur Mathematik, die Förderung der mathematischen Bildung im Elternhaus, sowie die Bedeutung, welche der Rechenkompetenz von der Bevölkerung beigemessen wird. Die Stichprobe umfasst sowohl SchülerInnen aus verschiedenen Schulformen (Gymnasium, Hauptschule, Realschule...), wie Erwachsene vom 18. bis zum 65. Lebensjahr. Im Folgenden eine Liste mit ausgewählten Studienergebnissen:

- 25 Prozent der SchülerInnen rechnen sich auf Grund ihrer Note im Fach Mathematik schlechtere Chancen bei der Suche nach einem Ausbildungs- oder Studienplatz aus.
- 63 Prozent der Deutschen haben im Alltag bereits Situationen erlebt, bei denen sie mit ihren Rechenkompetenzen an ihre Grenzen gestoßen sind.
- 89 Prozent der SchülerInnen glauben, dass „Rechnen können“ wichtig für ihre Zukunft ist. 68 Prozent sind der Überzeugung, dass das Schulfach Mathematik entscheidend für ihr späteres Leben ist.
- 95 Prozent des erwachsenen Teils der Bevölkerung sind der Meinung, dass Rechenkompetenzen wichtig sind.
- 70 Prozent der erwachsenen Bevölkerung in Deutschland glaubt, dass das Fach Mathematik nur wenigen Menschen Spaß macht.
- Jede/r dritte SchülerIn und 40 Prozent der Erwachsenen geben an, dass das Schulfach Mathematik ihnen Freude bereitet bzw. bereitet hat.

Bereits bei diesen Punkten spiegelt sich die Wichtigkeit wieder, die SchülerInnen und Erwachsene der Mathematik beimessen. Da in der Studie die Fragen häufig den Begriff „Rechnen“ enthielten, sind die Aussagen nicht ohne weiteres auf die gesamten mathematischen Inhalte übertragbar, in denen Rechnen zweifelsfrei wichtig, aber doch nur ein Teilgebiet ist (Siehe Kapitel *Innermathematische Analysen*).

Wie bei der Studie des *Lernquadrats* nimmt auch in Deutschland die Anzahl der SchülerInnen, die Mathematikinhalte als wichtig und sinnvoll empfinden, mit zunehmendem Alter ab. Aufgrund des Unterstufen-/Oberstufen-Systems ist eine Erklärungsmöglichkeit, dass SchülerInnen des Gymnasiums die Mathematik für das spätere Leben als weniger wichtig empfinden als SchülerInnen der Haupt- oder Realschule. Eine weitere Möglichkeit ist, wie bereits mehrfach erwähnt, dass die Inhalte die in der Oberstufe komplexer sind als weniger relevant erachtet werden (vgl. forsa Deutschland 2010).

2.2.3 Studie: Maths Images & Identities: Education Entertainment, Social Justice

Eine negativere Meinung über mathematische Inhalte sowie die Mathematik allgemein gibt eine Studie aus dem Jahre 2010 wieder. Diese Umfrage, welche von drei Soziologinnen des *Institut for Policy and Studies in Education* verfasst wurde, basiert auf den Meinungen von jungen EngländerInnen unter anderem SchülerInnen und Studierenden. Nur ein Teil der Untersuchung nimmt Bezug auf mathematische Inhalte. Das nicht wirklich überraschende Ergebnis war, dass nach Ansicht der Befragten Mathematik sich nur auf Zahlen und elementares Rechnen beschränkt. Mathematiker allgemein werden als weiße Männer ohne Sozialkompetenz und Privatleben beschrieben (vgl. Epstein et al. 2010: 45-60). Dieser Glauben, dass sich die Mathematik nur auf elementare Rechnungen beschränkt, wäre ein möglicher Grund warum Inhalten in höheren Schulstufen weniger Sinn nachgesagt wird. Das elementare „Rechnen“ ist für einen Teil der Menschen die einzig sinnvolle Mathematik. Dass jedoch Inhalte aus einem Oberstufenlehrplan in der Realität vorkommen, scheint kein Allgemeinwissen zu sein.

2.3 Fachanalyse

Auch FachexpertInnen empfinden das Bild der Mathematik in der Gesellschaft als ein vordergründig widersprüchliches. Zu kritisieren ist das Bild, das ohne Rücksprache mit MathematikerInnen geschaffen wird und nur die eigene subjektive schulische Erfahrung als Grundlage nimmt (vgl. Fischer 2004: 5).

Eine banale aber durchaus zutreffende Begründung, weshalb die Gesellschaft die Mathematik trotz der angebrachten Kritik als wichtig empfindet, sind die vielen Stunden,

die dieser in jeder österreichischen Schulform gewidmet werden. Ansonsten würde die jährliche mediale Aufregung nach der Veröffentlichung der PISA Studie entfallen. Als wichtig wird die Mathematik angesehen, weil sie in verschiedenen Betätigungsfeldern gebraucht wird, wie z.B. in der Technik, der Wissenschaft, der Gestaltung des Sozialwesens und in vielen anderen Bereichen (vgl. Fischer 2004: 1).

Zur geäußerten Kritik der Öffentlichkeit an den Inhalten des Oberstufenlehrplans gibt es mehrere Erklärungsversuche. Eine davon kommt von *Fischer*. Dieser gibt die „Funktionstüchtigkeit“ der Mathematik als derart sicher und verlässlich an, dass man sich einer tieferen Auseinandersetzung entziehen kann. Sie funktioniert häufig durch reines Kalkül ohne den Sinn hinter verschiedenen Operationen zu verstehen. Eine persönliche emotionale Einstellung dazu wird nicht gefordert, da das Ergebnis auch ohne Verhandlungen im Grunde richtig sein kann. Anders ist dies in den geisteswissenschaftlichen Fächern.

Um beispielsweise ein Theaterstück zu analysieren und zu verstehen, muss man sich emotional mit diesem auseinandersetzen. Bei der Mathematik im schulischen Bereich ist es ausreichend, eine Art „Benutzeroberfläche“ bedienen zu können und die Sache funktioniert. Niemand muss davon persönlich überzeugt sein, dass bei der Ableitung einer Geschwindigkeitsfunktion die Beschleunigungsfunktion errechnet werden kann. Es lässt sich schlicht durch die Durchführung der entsprechenden Rechenoperationen berechnen (vgl. Fischer 2004: 2-3).

Während bei den elementaren Inhalten der Unterstufe, z.B. dem Prozentrechnen, leichter ein Verständnis und damit ein subjektives Sinngefühl erschaffen wird, ist dies bei komplexeren Themengebieten zunehmend schwieriger. Dabei ist nicht nur die Anwendung ein sinnstiftender Aspekt der Mathematik. Wohlgleich dies vom Großteil der Öffentlichkeit so gesehen wird. Innermathematisch (siehe Kapitel *Sinn mathematischer Inhalte*) ist ebenso das Potenzial gegeben, für die Gesellschaft und deren Meinung einen Sinn zu erzeugen (vgl. Winkler 2007: 2).

Söser deutet in seinem Artikel „Was ist sinnvoller Mathematikunterricht“ weiters auf die hohe Komplexität bestimmter Inhalte in der Praxis (siehe Kapitel: *Populäre Meinungen zur Sinnhaftigkeit der Inhalte in der Schule*) und die Schwierigkeiten diese auf den Lehrplan zu übertragen hin. Eine zu starke Vereinfachung lässt die Inhalte zu fern von

der Realität erscheinen, wohingegen eine zu hohe Komplexität der Inhalte im Allgemeinen nicht schüleradäquat sein wird (vgl. Söser 2013).

Diese Entwicklung spielt in der Mathematik eine große Rolle. Der Fortschritt der Wissenschaft im letzten Jahrhundert war ein enormer. Wobei mit dem Fortschritt ein Trivialisierungsprozess miteinhergeht. *Tenbruck* beschrieb dies mit der Änderung von Bedeutungs- und Nutzungswert. Während der Bedeutungsgehalt einer Erkenntnis zunehmend an Boden verliert, wird der Nutzungswert, also die instrumentelle Verwendung der Erkenntnis, in der Gesellschaft immer größer (vgl. Tenbruck 1975: 23). Diese Entwicklung ist in grafischer Form in Abbildung 2 dargestellt.

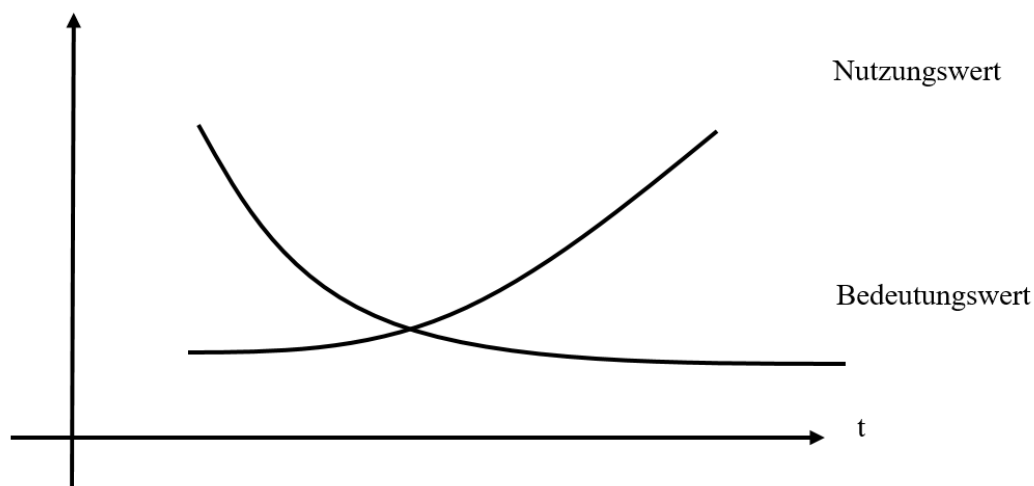


Abbildung 2: Entwicklung Nutzungswert vs. Bedeutungswert.

(Tenbruck 1975: 25)

„... Im Wissensfortschritt verlieren die Erkenntnisse zunehmend an Bedeutung. In der Ausgangslage des Prozesses besitzen sie einen hohen Bedeutungswert, in der Endlage umgekehrt keinen Bedeutungswert, gewöhnlich aber einen hohen Nutzungswert. Der Anstieg der Nutzungswerte ist eine häufige Begleiterscheinung des Trivialisierungsprozesses...“

(Tenbruck 1975: 23-24)

Dieser wissenssoziologische Kontext lässt sich auf die schulischen Inhalte und deren Bedeutung übertragen. Dass aktuelle, realitätsnahe Problemstellungen sich schwierig mit

vereinfachten Modellen in der Schule darstellen lassen, soll nicht den Nutzen der Mathematik untergraben. Das Eindringen der Mathematik in fast alle Lebens-, Arbeits- und Seinsbereiche stellt die Dringlichkeit dieser Ausbildung deutlich dar (vgl. Fischer 2004:16).

Wie bereits vorher erwähnt, sollen sich Inhalte als sinnvoll und nützlich erweisen. Wenn diese aber durch den hohen Nutzungswert nur mehr durch rezeptartiges, unreflektiertes „Rechnen“ erreicht werden, lässt sich ein Sinn für den Einzelnen schwer darstellen. Die Inhalte des Oberstufenlehrplans müssen keine Allheilsbringer für die großen Probleme des Lebens sein, eine Sinnstiftung kann durch viele Ansätze erreicht werden. Dieses Thema wird im nächsten Kapitel behandelt.

Mit dem Stellenwert der Mathematik allgemein kann man in der Gesellschaft durchaus zufrieden sein. So schlecht ist dieser nämlich gar nicht. Wie es mit dem konkreten Diskurs zu den Inhalten des Mathematik-Oberstufenlehrplans aussieht, wird im Kapitel *Kommunikationsfähigkeit mit Experten* beschrieben.

3 Sinn mathematischer Inhalte

Um auf die Kritik der Inhalte des Oberstufenlehrplans sowie der scheinbaren öffentlichen Akzeptanz der Inhalte des Unterstufenlehrplans einzugehen, ist es nötig, sich der Aufgaben jener Schulstufen bewusst zu sein. Logisch scheint es, dass ein/e MaturantIn anderes Wissens aufzuweisen hat als ein/e PflichtschulabsolventIn.

Die Aufgabe der Pflichtschule ist es, das nötige Rüstzeug zu liefern, das jede/r im Privatleben, im Beruf sowie im öffentlichen Leben benötigt. Dazu gehören außermathematisch das Lesen, das Schreiben, Englisch als Fremdsprache, informatische Grundbildung und ein Grundwissen über die Natur, die Welt sowie der Geschichte. Innermathematisch ist das Rechnen die Grundlage. Die Kriterien für die Aufnahme der Inhalte ergeben sich aus der Notwendigkeit für das Leben, die für die meisten Menschen angenommen werden (vgl. Fischer 2003: 559).

Die mathematischen Inhalte können uns dabei als „Inventar der Lebenswelt“ in Form von mathematischen Begriffen und Symbolen im Alltag begegnen. Die Mathematik kann als „Werkzeug“ um zwei Rechnungsbeträge zu addieren, oder als „Kommunikationsmedium“, durch zunutze machen der darstellenden Möglichkeiten der Mathematik, verwendet werden (vgl. Peschek 2000:2).

Dass die Inhalte des Mathematik-Unterstufenlehrplans auf die des Oberstufenlehrplans vorbereiten sollen, ist nicht in Abrede zu stellen. Als eigenständige Legitimation soll dies aber nicht gesehen werden. Vielmehr soll der Unterricht eigenständige Aufgaben und Bedeutungen haben (vgl. Peschek 2000: 1). Dies wird im weiteren Verlauf bei den Inhalten der Oberstufe näher erläutert.

Wie sieht dies in der Sekundarstufe II aus? Welche Kriterien werden für die Aufnahme der Inhalte ins Curriculum festgelegt und wozu wird Mathematik an einer allgemeinbildenden höheren Schule unterrichtet? *Embacher* zählte in seinem Vortrag „Wie (gut) bereitet der schulische Mathematikunterricht auf die Hochschule/Universität vor?“ drei Gründe auf:

- Höhere mathematische Alltagskompetenz

Zu diesem Punkt zählen beispielsweise die Kritikfähigkeit beim Interpretieren von Statistiken oder Diagrammen, eine allgemeinbildende Wirkung und die Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen, welche im weiteren Verlauf der Arbeit noch einen wichtigen Aspekt einnimmt.

- Vorbereitung auf Studien/Berufe mit geringer Affinität zur Mathematik

Hier nennt *Embacher* Tätigkeiten, die mit Logik von Computerprogrammen und elektronischen Datenverarbeitungssystemen zu tun haben.

- Vorbereitung auf Studien/Berufe mit höherer Affinität zur Mathematik

Der letzte Punkt beinhaltet folglich die technischen und naturwissenschaftlichen Fächer innerhalb eines weiterführenden Studiums, welche von technischen Anwendungen der Mathematik, mathematischen Beschreibungen bzw. Theoriebildungen geprägt sind (vgl. Embacher 2014).

Die Studierfähigkeit wird häufig als Kriterium für die Auswahl der Inhalte einer AHS genannt. Dies liegt den Schulfächern zugrunde, welche Wissenschaftsdisziplinen entsprechen. Doch nicht alle Wissenschaften haben ein Fach im Allgemeinbildungsteil der AHS. Diese kleine Auswahl an Grundlagenfächern hat damit ein weiteres Problem bei der Auswahl adäquater Inhalte. Soll eine mathematische „Mini-Einführung“ in die Wissenschaft behandelt werden, oder ausgewählte Schwerpunkte? Im folgenden Kapitel wird diesen Fragen aus verschiedenen Perspektiven nachgegangen.

3.1. Sinn mathematischer Inhalte anhand ausgewählter Merkmale und Beispiele

Der Ausgangspunkt der Arbeit war die Frage nach dem Sinn mathematischer Inhalte des Lehrplans der AHS Oberstufe. Dies ist eine Frage, die für die schulische Ausbildung sowie das weitere Leben bedeutsam ist. Auf Grund dessen, dass Sinn sich für Individuen und Kollektive situationsspezifisch konstituiert, ist diese Frage objektiv nicht beantwortbar. Sie kann bloß Antwortangebote geben.

Fischer unterscheidet zwischen der Bedeutung der Mathematik für jemanden, der Mathematik aktiv betreibt, dies reicht von dem/der rechnenden VolksschülerIn über eine/n problemlösende/n GymnasiastIn bis zum/zur mathematischen ForscherIn, und jemanden, der von Mathematik und ihrer Anwendung passiv betroffen ist. AbsolventInnen einer AHS Oberstufe sind dabei ersteren zuzuordnen, wobei sich im Laufe des weiteren Lebens durchaus eine Änderung ergeben kann. Laut *Fischer* ist eine Unterscheidung bereits ab der Sekundarstufe II durchzuführen (vgl. *Fischer* 2006: 9-11).

In dieser Arbeit ist diese Unterscheidung eher sekundär(siehe Kapitel: *Kommunikationsfähigkeit mit Experten*). Fürs erste liegt der Fokus auf der erstgenannten Zielgruppe.

Welchen Sinn soll ein mathematischer Inhalt für eine/n SchülerIn ergeben? Häufig wird die Sinnfrage in der Mathematikdidaktik unter der Überschrift Motivation abgehandelt. Ein weiteres Synonym dazu: „Wie motiviert man lernfaule SchülerInnen zur Mathematik?“. Dies ist zwar ein berechtigter Punkt, genügt aber der Sache selbst nicht. Auch SchülerInnen, die nicht motiviert werden müssen, sollen sinnhafte Inhalte erleben. Die Lehrperson selbst will im besten Fall einen Sinn hinter ihren zu unterrichtenden Themen sehen.

Wie kann nun ein Sinn konstruiert werden? In der mathematisch didaktischen Arbeit wird dies von verschiedenen Seiten her ermöglicht. *Fischer* unterteilt dies in vier Kriterien:

1. Durch innermathematische Analysen.
2. Durch die Frage nach Anwendungsmöglichkeiten.
3. Durch die Betrachtung der Entwicklung, sprich die Geschichte eines Begriffs oder einer Theorie.
4. Durch wissenschaftstheoretische Überlegungen.

(vgl. *Fischer* 1982: 266).

Zu beachten ist, dass der Sinn einer Sache nicht nur von dieser selbst abhängt. Es ist ebenso zu bedenken, für wen bzw. wofür die Sache einen Sinn haben soll. Diese Arbeit beschränkt sich auf den/die SchülerIn innerhalb der Mathematik. Weitere subjektive Faktoren, die die Situation mitbestimmen und wie bereits erwähnt, eine objektive Beantwortung nicht zulassen, sind im Fall des Unterrichts das Vorwissen, das Interesse,

die institutionelle Umgebung und die Verfassung der SchülerInnen (vgl. Fischer 1982: 267).

Ein endgültiges Resultat wird bei den folgenden Analysen nicht erwartet. Vielmehr werden bedingte lokale Sinn-Argumentationen zu bestimmten Theorien, Begriffen und Inhalten abgegeben. Fertige Rahmenbedingungen, wie mit diesen ein Unterricht zu gestalten ist, werden auf Grund der Einzigartigkeit und hohen Komplexität jeder Unterrichtssituation nicht dargestellt. Auch ohne objektive Antworten kann die Bedeutung hinter diesen Überlegungen zu einer Sinn-Konstituierung von Inhalten im Unterricht führen.

3.1.1 Innermathematische Analysen

Bei dieser Art der Sinn-Konstruktion geht man der Frage nach, welchen Stellenwert eine Theorie innerhalb der Mathematik hat. Dies beinhaltet insbesondere Rechentechniken. Nicht immer werden diese als sinnvoll eingestuft, da zu leicht in ein Kalkül verfallen werden kann. Die Frage nach Ziel, Sinn, Methode und theoretischem Hintergrund stellt sich in fast allen Inhaltsgebieten des Mathematikunterrichts. Ein typisches Beispiel wäre folgendes, das dem Lehrplan im Inhaltsbereich Algebraische Gleichungen zuzuordnen ist:

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3 - ab^2} =$$

Ein/e SchülerIn würde mit hoher Wahrscheinlichkeit diese Angabe in eine nächste Zeile folgendermaßen umformen:

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3 - ab^2} = \frac{(a - b) * (a^2 + ab + b^2)}{a * (a + b) * (a - b)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a * (a + b)}$$

Nach dem Unterstreichen des letzten Ausdrucks scheint die mathematische Arbeit erledigt. Ein dazu passender Dialog zwischen der Lehrperson und der/dem SchülerIn könnte jener sein.

Lehrer: „Was hast Du da gemacht?“

SchülerIn: „Na das!“ (Zeigt auf das Geschriebene und liest Teile davon vor. Vielleicht murmelt er etwas von Formel und in der Schule gemacht.)

Frage: „Warum hast Du das gemacht?“

SchülerIn: „In Mathematik machen wir das immer so.“

Frage: „Wie lautet die Aufgabenstellung?“

SchülerIn: „Na wir sollen zum Beispiel ...“ (Wiederholt seine Ausführungen zur ersten Frage.)

Frage: „Welche Art von Aufgaben ist auf diese Weise zu behandeln?“

SchülerIn: „Na, wenn man zum Beispiel rechnen muss ...“. (Bringt eine leicht veränderte Variante des schon zweimal Gesagten.)

Frage: „Und wozu macht Ihr das?“

SchülerIn: (Zuckt die Achseln, sodann verschmitzt) „Ich mach' es, damit ich in Mathematik durchkomme.“

Frage: „Und warum hast Du unterstrichen?“

SchülerIn: „Wenn man das Ergebnis nicht unterstreicht, gibt es Punkteabzug.“

(vgl. Winkler 2007: 1)

Man kann schwer behaupten, dass der/die SchülerIn einen Sinn in seinem Tun erkennt. Und Tun ohne Einsicht hinter dem Sinn des Inhalts nennt man Unsinn. Als Hauptgrund nennt *Winkler* unsinniges Rechnen, ohne die Bedeutung von Symbolen in der Mathematik zu verstehen. Als Lösung kann man jene Inhalte, die solch ein Rechnen erfordern, minimieren oder einen Sinn sichtbar machen. Ersteres halte ich für nicht angebracht, denn Mathematik ohne Rechnen wäre ebenso wenig zielführend.

Betrachten wir ein weiteres Rechenbeispiel aus dem Inhaltsbereich Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1) * (x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Innermathematisch stellen sich nun, analog zum ersten Beispiel, folgende Fragen:

1. Was für mathematische Objekte werden durch die Terme in x bezeichnet?
2. Was bedeutet die Gleichheit zwischen ihnen?
3. Inwiefern ist der letzte Ausdruck eine befriedigendere Darstellung, die sich als Ergebnis der Umformung ansehen lässt?

Als erstes steht die Überlegung, die Ausdrücke als Funktion in x aufzufassen, wobei für x z.B. reelle Werte zugelassen werden. Da bei der linken Seite im Definitionsbereich die

Werte 1 und -1, rechts aber nur 1 ausgeschlossen werden muss, ist eine genauere Interpretation der Terme durchzuführen (vgl. Winkler 2007: 5).

Die zweite Frage wird durch eine Analogie zu Brüchen ganzer Zahlen beantwortet. Definitionsgemäß gilt in einem Quotientenkörper

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \text{ genau dann, wenn } a_1 b_2 = a_2 b_1 \text{ gilt.}$$

Damit ist alles auf das Rechnen mit Polynomen zurückgeführt. Die dritte Frage löst sich durch Überlegungen zum Bruchrechnen auf. Division mit Rest funktioniert ebenso für Polynome. Beim „Kürzen“ greifen wir auf den euklidischen Algorithmus zurück, bei dem die Tatsache wichtig ist, dass sich in jedem Schritt der Grad der Polynome verringert. Dadurch kommt man nach einer von vornherein feststehenden Anzahl von Schritten sicher am Ende an. Zum Schluss erhält man die eindeutige Faktorisierung von Polynomen und somit die Existenz einer gekürzten Darstellung wie im Beispiel zu Beginn (vgl. Winkler 2007: 5-6).

Die Beantwortung des ersten Beispiels ist folglich, dem vorgegebenen Bruch ganzzahlige Polynome in zwei Variablen einer gekürzten Darstellung zu ermitteln. Um dies zu erreichen, wird durch alle gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner dividiert. Im letzten Ausdruck sind die beiden Faktoren a und $a + b$ im Nenner irreduzibel und keine Teiler des Zählers. Damit handelt es sich um die eindeutig gekürzte Darstellung.

Weitere Fragen, die anhand dieser Inhalte dem/der SchülerIn gestellt werden können, sind: „Bist du nach einer systematischen Methode vorgegangen? Wenn ja, kannst du diese beschreiben? Für welche Aufgaben funktioniert deine Vorgehensweise (vgl. Winkler 2007: 7)?“

Durch diese Fragen, die teilweise relativ anspruchsvoll scheinen, stellt sich solch eine Rechenaufgabe in einem sinnvollen Kontext innerhalb der mathematischen Bildung dar. Dies ist keine allgemeingültige Antwort, da dies stark von Vorbildung und Begabung der SchülerInnen abhängt (vgl. Fischer 1982: 267).

Nun zu einer weiteren innermathematischen Sinnstiftung, beispielsweise an den Inhalten der Analysis. Die Differential- und die Integralrechnung bilden zwei wesentliche Themenschwerpunkte der Oberstufe. Neben den unzähligen

Anwendungsmöglichkeiten dieses Gebiets stehen im Hintergrund mathematische Begriffe und Prozesse, ohne die ein Sinn für die praktische Anwendungen schwer zu begreifen ist. Aus diesem Grund wird die Analysis in der gesamten Oberstufe nach und nach aufgebaut.

Widmen wir uns zuerst dem Begriff der Ableitung. Die im heutigen Mathematikunterricht wahrscheinlich am stärksten betonte Bedeutung der Ableitung ist die Untersuchung von Funktionen. Monotoniebereiche und Extremstellen können damit meist relativ einfach bestimmt werden. Zu betonen ist, warum dieser rechnerische Aspekt funktioniert. Der eigentliche mathematische Vorteil dieser Methode ist die Variablenreduktion. Um etwa die Monotonie einer Funktion f direkt zu untersuchen, müsste man mit der Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ ein Problem mit zwei Variablen lösen. Mit der Ableitung reduziert sich die Ungleichung auf $f'(x) > 0$ in einer Variable (vgl. Kroll 1981:7-9).

Dass dieser Aspekt der Ableitung von *Fischer* als nicht überaus wichtig angesehen wird, ist der Tatsache der Anwendungszusammenhänge geschuldet. Sinnvolle Deutungen neben der Tangentensteigung von „Geschwindigkeit“, „Beschleunigung“, „Grenzkosten“ über „Spitzensteuersatz“ sind Sinn-Argumente in der Frage nach Anwendungsmöglichkeiten. Innerhalb einer innermathematischen Herangehensweise ist dies durchaus bedeutsam (vgl. Fischer 1982: 274).

Allgemein ist es sinnvoll, die lokale Änderungsrate (Ableitung) als Approximation der mittleren Änderungsrate $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ einer Funktion f im Intervall $[a, b]$ zu deuten. Diese gibt das Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente oder die mittlere Änderung der Funktionswerte pro Einheit der Argumente wieder. Durch Formulierungen wie „pro Einheit“ und Verhältnis kann man die in der Oberstufe bereits bekannte Linearität ins Spiel bringen. Der Sinn hinter diesen Überlegungen ist der Gedanke, dass man Funktionswerte durch Aufsummieren konstanter Zuwächse (pro Arguments Einheit) näherungsweise erhalten kann (vgl. Fischer 1982: 276). Dies baut auf das Vorwissen der SchülerInnen bei linearen Funktionen auf und nimmt der Ableitung eine möglicherweise rein kalkülhafte Herangehensweise.

In der 6. Schulstufe beim Inhaltsbereich Reihen und speziell in der 7. Klasse bei der Differentialrechnung werden im Lehrplan die Begriffe der Stetigkeit sowie des Grenzwertes angegeben. Speziell der Grenzwert wird als Inhalt des Oberstufenlehrplans kritisiert. 2017 argumentierten *Baumann* und *Kirski* das Weglassen des Grenzwertes folgendermaßen:

„Zum Beispiel sah der frühere Berliner Lehrplan[. . .] ein Vierteljahr allein für das Thema „Folgen und Grenzwerte“ vor [. . .]. Trotzdem haben viele Schülerinnen und Schüler das Wesen des Grenzwertes nicht verstanden, was sich aber kaum als nachteilig erwies, da man Grenzwerte beim praktischen Rechnen gar nicht mehr brauchte [. . .].“

(Baumann und Kirski 2017: 15)

Die Passage „dass man Grenzwerte beim praktischen Rechnen gar nicht mehr brauche“ ist für andere Autoren kein Grund, diesen nicht mehr zu behandeln. Denn ein solches Argument würden viele nicht kalkülhafte Unterrichtsinhalte obsolet werden lassen (vgl. u.a. Hirscher 2017: 103).

Obwohl Stetigkeit und Grenzwert abstrakte Begriffe sein mögen, kann innermathematisch schon in der Schule Sinn geschaffen werden. Laut *Fischer* sind die Begriffe Grenzwert und Stetigkeit *Werkzeuge auf höherer Ebene*. So dienen sie nicht dem unmittelbaren Einsatz bei der Lösung von Anwendungsproblemen in der Realität. Jedoch werden sie zum Formulieren von Theorien und zum Beweisen benötigt. Als innermathematische Werkzeuge können Argumente für deren Sinn in der Schule durchaus gefunden werden (vgl. Fischer 1982: 281).

Die Stetigkeit, welche praktisch wenig bis gar nicht mehr behandelt wird, hat im Rahmen der Schul-Analysis eine Abgrenzungseigenschaft. Durch die Allgemeinheit des Funktionsbegriffes ist es vorteilhaft, ein Hilfsmittel zu haben, die für die Methoden „zugelassenen“ Funktionen von den anderen abzugrenzen (vgl. Fischer 1982: 279). Da bestimmte Methoden eben nur angewendet werden können, wenn die betrachteten Funktionen stetig sind..

Im Gegensatz zu diesen theoretischen Begriffen kann der Integralbegriff zusätzlich als Werkzeug außermathematischer Situationen und Probleme herangezogen werden.

Hinsichtlich der Bedeutung des bestimmten Integrals unterscheidet *Fischer* 3 Punkte (vgl. Fischer 1982: 281):

- Integral als Grenzwert gewisser Summen von Produkten
- Integral als Flächen- bzw. Rauminhalt
- Integral als mechanische Arbeit oder Weglänge etc.

Ist der letzte Punkt eher außermathematisch zu verstehen, so sind die beiden ersteren als innermathematische Definition bzw. Deutung gegeben. Wie der Integralbegriff sinnvoll als Inhalt behandelt werden soll, ist dementsprechend vielseitig möglich, sowohl innermathematisch als auch anwendungsorientiert.

Winkler hingegen sieht das Integrieren an sich etwas kritischer. Speziell die Standardmethoden wie partielles Integrieren und Substitution, welche bei einfachen Aufgaben erstaunlich gut funktionieren, bei schwierigen aber eher weniger. Je komplizierter der Integrand wird, desto wahrscheinlicher gibt es gar keine in geschlossener Form angebbare Stammfunktionen. Beispiele wären e^{-x^2} und $\frac{\sin(x)}{x}$, welche subjektiv als keine schwierigen Funktionen gelten. Neben dem Vorschlag, die zwar weniger elegante aber allgemeinere numerische Integration als Standardmethode zu verwenden, spricht *Winkler* sich aus, allgemein das Integrieren in der Schule, welches Großteils nur das Verfeinern von Integrationstricks ist, in Frage zu stellen. (vgl. Winkler: 2007: 8).

3.1.2 Durch wissenschaftstheoretische Überlegungen

Dieser Aspekt ist stark an das Kapitel *innermathematischen Analysen* angelehnt und daher nur ergänzend. Durch wissenschaftstheoretische Überlegungen sollen sich grundlegende Vorgehensweisen der Mathematik in bestimmten Inhalten widerspiegeln (vgl. Fischer 1982: 266). Dahingehend wurden schon mehrere Beispiele erläutert. Konkret kann beispielsweise die Abstraktion als typische mathematische Handlung herangezogen werden. Sie besteht im Wesentlichen aus dem „Weglassen von Irrelevanten“ und hilft den Kern des Problems herauszuarbeiten. Sie wird im Schulunterricht bei nahezu allen Themen und Inhalten mitbehandelt. Die Abstraktion hilft Begriffe und Resultate in einer breiten Vielfalt von Situationen anwendbar zu machen (vgl. Cap 2017: 5).

Als Kern der Mathematik wird das Beweisen angesehen. Dies spiegelt am besten den disziplinären Charakter der mathematischen Wissenschaft wider. In der Schule meist eher unbeliebt, sieht es der Lehrplan konkret nur beim Beweisen von Rechenregeln vor.

Im Lehrplan der 6. Klasse wird der Begriff explizit beim Inhaltsbereich Potenzen, Wurzeln und Logarithmen erwähnt. Zusätzlich aufgelistet ist er bei den Bildungs- und Lehraufgaben im Unterpunkt mathematische Kompetenzen (vgl. BGBl 277 2004: 44):

„... das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs.“ (BGBl 277 2004)

Trotz dieser marginalen Erwähnungen kann das Beweisen mehr als nur eine wahre Aussage liefern. Es liefert die Aussage, dass wenn einmal bewiesen, ein mathematischer Satz immer richtig ist und bleibt. Diese Tatsache ist in der Mathematik von grundlegender Bedeutung, da neues mathematisches Wissen meist auf bereits vorhandenes aufbaut. So sind z.B. Rechengesetze für Potenzen nicht nur in der 6. Klasse relevant, sondern bei vielen darauf folgenden Inhalten. Durch den aufbauenden Charakter der Mathematik werden Inhalte seit der Unterstufe mit grundlegenden mathematischen Vorgehensweisen auf wachsendem Niveau dargestellt (vgl. Cap 2017: 5-7).

Dadurch ergeben sich wie im vorherigen Kapitel erwähnt innermathematische wie auch anwendungsorientierte Sinngebungs-Möglichkeiten, die im folgenden Kapitel behandelt werden.

3.1.3 Die Frage nach Anwendungsmöglichkeiten

Es gibt ein schier unüberblickbares Pensum an Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik. Vom CD-Spieler über Inflationsraten bis zu sämtlichen High-Tech Produkten. Diese Liste weiterzuführen würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen. Denn viele Anwendungsmöglichkeiten sind auf den ersten Blick nicht erkennbar, wie ein berühmtes mathematisches Zitat aussagt:

„Mathematik ist verborgen und dennoch allgegenwärtig“

Die Anwendung ist womöglich der häufigste angewendete Legitimationsgrund für mathematische Inhalte. Diese bietet sich als Sinngebung im Mathematikunterricht naturgemäß an (vgl. Winkler 2007: 2). Im AHS Lehrplan wird dies zudem in den didaktischen Grundsätzen als Voraussetzung des Unterrichts erwähnt.

„Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.“

(BGBI 277 2004: 45)

Praktische Anwendungen der Inhalte des Oberstufenlehrplans sind in der realen Welt fortlaufend zu finden, teilweise nur in kleinerer Form, abgewandelt oder auf einem schulfremden Niveau. Zwischen der Welt, das heißt dem innerweltlichen Problem und seiner mathematische Repräsentation, ist häufig ein Unterschied. Über diese Lektion sollen SchülerInnen aufgeklärt werden, wenn man die Mathematik auf Probleme und Prozesse dieser Welt loslässt (vgl. Engel und Sproesser 2013: 146).

„Dies kommt so in der Welt nie vor, warum machen wir das dann?“. Da die Realität teils so komplex ist, entzieht sie sich einer exakten mathematischen Beschreibung. Sonderfälle können mit unzähligen Besonderheiten auftreten, mathematische Beschreibungen zielen hingegen auf eine allgemeine Gültigkeit ab. Die Modellbildung hinsichtlich Anwendungsmöglichkeiten von Inhalten opfert Details, um im Idealfall den Blick für das Wesentliche freizuhalten. Bei der Betrachtung realer, in der Welt gemessener Daten, wird man immer Abweichungen feststellen können.

Die Mathematik hat im schulischen Bereich eine Doppelnatur inne. Zum einen durch durchlaufen des Modellbildungskreislaufs mit Problembeschreibung, mathematischer Modellierung, Durchführung der Modellrechnungen, Interpretation und Validierung der

Ergebnisse sowie Erkennen und Aufzeigen der Grenzen der Modellbildung, zum anderen der Aspekt der innermathematischen Modellierung. (vgl Borneleit et al. 2001: 42). Dies sollen SchülerInnen an konkreten Inhalten erleben. Im Folgenden wird dies an einem Beispiel näher betrachtet.

Beispiel: Beim Tanken des Autos wurde einige Male die getankte Gasmenge und die gefahrenen Kilometer notiert (vgl. Engel 2009: 32).

Strecke (km)	202	480	361	220	249	348	512	187	471
Gas (Liter)	22,9	45,9	31,5	23,9	26,0	33,9	44,9	17,9	43,5

Abbildung 3: Angabe Tankbeispiel.

(Engel 2009: 32)

In Abbildung 4 sind die Daten in der linken Darstellung in einem Streudiagramm wiedergegeben. Was ist ein geeignetes mathematisches Modell für den Zusammenhang zwischen gefahrenen Kilometern und verbrauchtem Treibstoff? In der rechten Darstellung von Abbildung 4 sind die Daten als Linienzug interpoliert. Nehmen wir für einen Moment den Linienzug als Modellfunktion, dann stimmen hier Modell und Daten exakt überein. Ist dies somit ein brauchbares Modell?

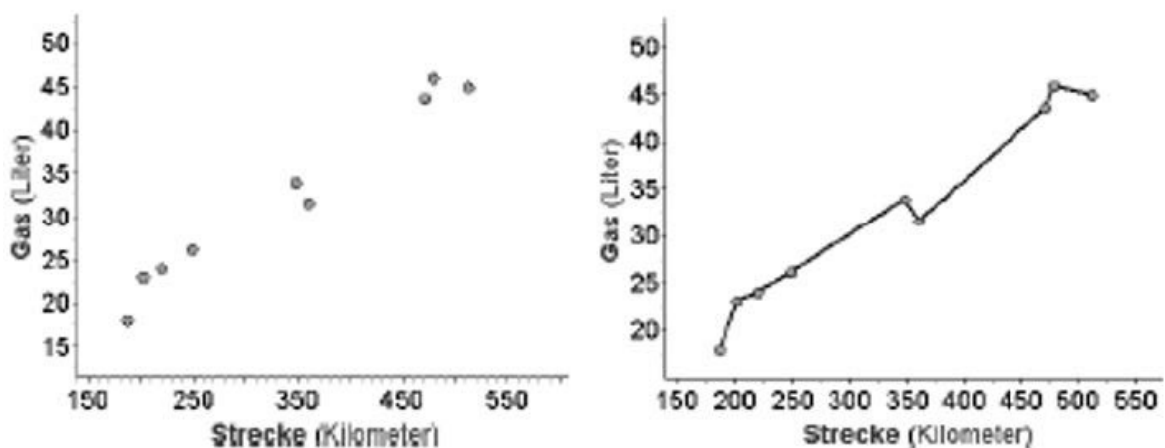


Abbildung 4: Streudiagramm ohne (links) und mit (rechts) Linienzug.

(Engel und Sproesser 2013: 147)

Diese Aufgabe aus dem Inhaltsbereich Analysis und lineare Funktionen ist als realitätsnaher und angewandter Inhalt zu bezeichnen. Es zeigt ein Modell, welches mit Sachverstand als ein proportionaler Zusammenhang zwischen Kilometer und Treibstoffverbrauch eines Autos eingeordnet wird. Der Quotient aus verbrauchtem Treibstoff und gefahrenen Kilometern sollte annähernd konstant sein. Bei genauerer Betrachtung der real vorliegenden Daten wird diese Proportionalität nicht erfüllt. Ein gesunder Menschenverstand erkennt die Einflüsse, unterschiedliche Verkehrsbedingungen oder Fahrbahnverhältnisse, Fahrverhalten, Klimaanlage, Heizung usw. für die Abweichungen. Ist solch ein Inhalt in der exakten Mathematik nun sinnlos, weil nicht 100%ige Übereinstimmung zwischen Realität und Modell herrscht? Nein keineswegs. Für das Aufstellen eines nützlichen Modells auf das Fahrverhalten sind diese Abweichungen zwischen Fahrleistung und Spritverbrauch bedeutungslos (vgl. Engel und Sproesser 2013: 150-152).

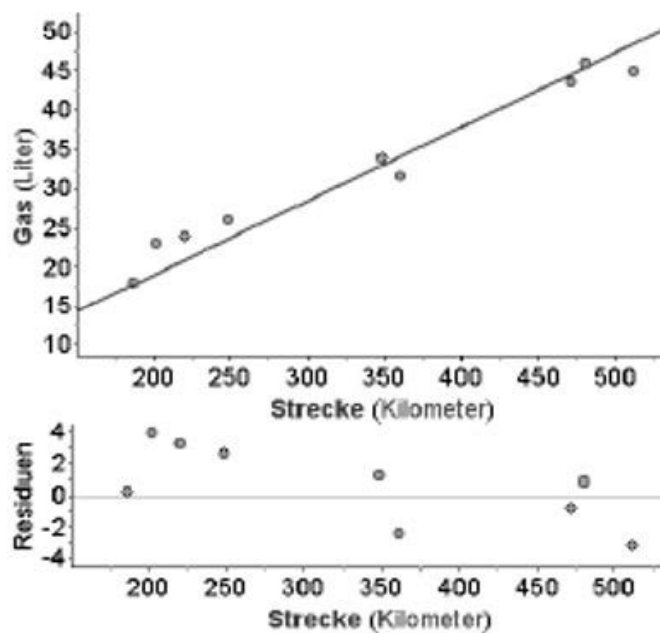


Abbildung 5: Treibstoff durch angepasste Gerade $f(x) = 0.094x$ (oben). Residuendiagramm Polyom 8. Grades (unten).

(Engel und Sproesser 2013: 148)

Ein Modell, das die Daten exakt interpoliert, wird nur selten ein brauchbares Modell sein. Wie in Abbildung 5 zu sehen, ist das exakte ein absurdes Modell. Das proportionale hingegen ist im Sachkontext sinnvoller und besser für Vorhersagen geeignet (vgl. Engel

und Sproesser 2013: 146-148). Nach dem von *William von Ockham* (1285 – 1349) in die Welt gerufenen Prinzip „*Ockhamschen Rasiermesser*“ sollte ein Modell so einfach wie möglich und nur so komplex wie unbedingt nötig sein. Dies entspricht *Blums* Modellbildungskreislauf. Wie in Abbildung 6 übersichtlich dargestellt, sollen reale Inhalte/Probleme vereinfacht werden, um ein reales Modell zu bilden. Dazu müssen bestimmte Annahmen getroffen und zentrale Faktoren festgelegt werden. Anschließend wird das reale Modell in die Mathematik übersetzt. Dies ist ein schwieriger Schritt und hängt vom mathematischen Wissen des/der Erstellers/in ab. Mit Hilfe des mathematischen Modells können mathematische Resultate errechnet werden. Die Interpretierung dieser mathematischen Ergebnisse bringt die reale Lösung. Das der Modellierungsprozess nicht lehrbuchmäßig abläuft, sondern ein Wechsel zwischen verschiedene Stadien vollzogen wird, spielt keine große Rolle (vgl. Kaiser et al. 2015: 364-365).

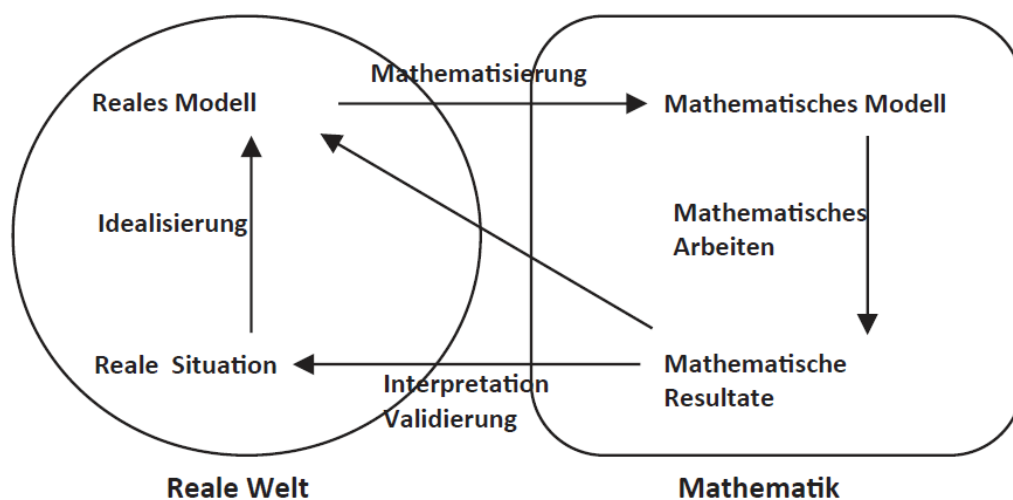


Abbildung 6: Modellierungsprozess nach Blum 1986.

(Kaiser et al. 2015: 365)

Eine Kritik hinsichtlich vollkommener Realitätsnähe von Inhalten im Lehrplan ist damit zu widerlegen, da Modelle und Annäherungen bei Anwendungsbeispielen ebenso dem Zweck einer Sinngebung genügen. Wie vorhin erwähnt, wird beim Bloomschen

Modellbildungskreislauf in mehreren Phasen eine didaktische Reduktion der Komplexität durchgeführt.

Im Alltag des Mathematikunterrichts dominieren Präzisionsaufgaben. Es werden „Schöne Zahlen“ (ganze oder natürliche Zahlen) bei gleichzeitiger Realitätsübereinstimmung erwartet. Es wird eine Art Scheinwelt aufgebaut, bei der SchülerInnen glauben, richtig gerechnet zu haben, wenn ganze Zahlen als Ergebnisse entstehen. Dies sollte beim Umgang mit anwendungsorientierten Inhalten nicht erwartet werden. Das Image der exakten Wissenschaft ist nicht blind auf alle Teilbereiche der Mathematik zu übernehmen. Der Sinn bei anwendungsorientierten Inhalten soll die Erkenntnis sein, dass man auf unterschiedlichen Wegen zu Näherungen/Ergebnissen gelangt, die alle im „richtigen“ Bereich liegen (vgl. Engel und Sproesser 2013: 146-148).

Sinnvolle anwendungsorientierte Inhalte sollen sich folglich nicht durch zu exaktes Rechnen bzw. leicht handhabbares erfundenes Zahlenmaterial, sondern vielmehr durch reale Daten und reale Phänomene kennzeichnen. Viele Schulbücher verwenden Beispiele, die mit Methoden zu behandeln sind, die auf den vorherigen Seiten eingeführt werden. Dadurch wird eine mathematische Anwendung verzerrt (vgl. Engel und Sproesser 2013 150).

„Wenn man im traditionellen Mathematikunterricht schon die Anwendungsmöglichkeiten berührt, so geschieht das immer nach dem Muster der antdidaktischen Umkehrung. Statt auszugehen von der konkreten Fragestellung, um sie mathematisch zu erforschen, fängt man mit der Mathematik an, um das konkrete Problem als ‚Anwendung‘ zu behandeln“.

(Freudenthal, 1974:126)

Andernfalls kann dies, wie so oft in der Schule, zu einer starken Konzentration auf Kalküle und Routine führen. Dabei sind laut einer Studie von Grigutsch, Raatz und Törner nicht die Vorstellungen der LehrerInnen, welche meist ein differenziertes Bild der Mathematik besitzen und diese für nützlich und anwendbar in der Wirklichkeit halten, Grund für dieses Dilemma. Das durchschnittliche Bild der LehrerInnen steht dem Aspekt des Schematischen eher gering bis ablehnend gegenüber. Die starke Konzentration auf die Beherrschung von Kalkülen und Routinen bei der Bearbeitung verschiedener Inhalte wurde schon öfters kritisiert (u.a. Andelfinger 1990). Gründe gibt es dafür mehrere. Die

Konzentration auf Kalküle und Routinen bei anwendungsorientierten Inhalten wird als eine Strategie gesehen, um trotz Schwierigkeiten und teils geringer Anstrengungsbereitschaft bei Lernenden Sicherheit für mathematische Methoden zu erreichen (vgl. Borneleit et al. 2001: 79-80). Dieses Verhalten scheint verständlich, doch ist zu bezweifeln, dass solch eine Unterrichtsweise eine aktive Sinnkonstruktion mathematischer Inhalte durch die Lernenden erreicht.

Nur eine Anwendungsorientierung macht Mathematische Inhalte nicht zwangsläufig sinnhafter. Dazu müssen einige fachdidaktische Überlegungen mit eingebracht werden (vgl. Blum 1985: 228-229):

- Auswahl geeigneter Anwendungsbeispiele und Einpassung in den Lehrplan.
- Aktualisierung von vorgefunden Beispielen mit aktuellen Daten unter möglichst großem Realitätsbezug.
- Geeignete Präsentation der Inhalte (außermathematische Information richtig dosieren bzw. von SchülerInnen beschaffen lassen).
- ...

Kritik an vollkommener Anwendungsgier übt *Fischer*. Es ist nicht zu bestreiten, dass viele Begriffe der Mathematik ihre Bedeutung durch inner- bzw. außermathematische Anwendung oder Deutung erhalten. Mit Anwendung lässt sich nicht alles rechtfertigen.

„Theoretische Begriffe sind häufig auf einer anderen Ebene angesiedelt als jener der unmittelbaren praktischen Anwendung, etwa als Werkzeuge zum Beweisen“

(Fischer 1982: 287)

Beispielsweise sind die Inhalte der Integralrechnung für Techniker von großer Bedeutung. Dieser Inhalt kann folglich sinnhaft auf Anwendungsorientierung aufgebaut werden. Daraus lässt sich aber nicht schließen, dass Techniker möglichst viele Funktionen integrieren können müssen. Ein weiteres Beispiel wäre die Momentangeschwindigkeit, zu der es keine unmittelbare Interpretation in der Realität gibt. Anwendungsorientierte Inhalte können aus vielen Gesichtspunkten Sinn erzeugend wirken und sein, dasselbe gilt aus anderen Blickwinkeln für theorieorientierte Inhalte. Werden jedoch theorieorientierte Inhalte, aus bestimmten Gründen, mit Gewalt auf eine

Ebene der Anwendung gebracht, besteht die Gefahr der Sinnverfälschung (vgl. Fischer 1982: 286-287).

3.1.4 Die Betrachtung der Geschichte eines Begriffs oder einer Theorie

Die historische Entwicklung mancher Theorien sowie die Geschichte der Mathematik wird selten im Mathematikunterricht miteinbezogen. Im Lehrplan der Sekundarstufe 2 wird dieses Thema im Abschnitt Bildungs- und Lehraufgaben unter Aspekten der Mathematik erwähnt, dies jedoch lediglich unter Verweis auf die Allgemeinbildung:

„Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung.“

(BGBI 277 2004: 44)

Der Lehrplan spricht von Lehr- und Lernzielen, die durch die vorgeschriebenen Inhalte den SchülerInnen vermittelt werden sollen. Konkrete Themengebiete zur Entwicklung der mathematischen Inhalte kommen darin nicht vor. Wie erfolgt demnach die durch Fischer erwähnte mögliche Sinnkonstruktion?

Mayer erwähnt 4 Aspekte, die sich dazu eignen könnten (vgl. Mayer 2011: 23- 31). Wobei vor allem die ersten 2 Aspekte inhaltliche Komponenten des Oberstufen Lehrplans bedienen.

1. Historische Entwicklung von mathematischen Inhalten ermöglichen das Nachdenken über die Bedeutung der mathematischen Inhalte und Symbole auf einer Metaebene.
2. Historische Betrachtungen können dazu beitragen, sich die Leistungen der mathematischen Errungenschaften bewusst zu machen.
3. Historische Betrachtungen von mathematischen Inhalten können Verbindungen der Mathematik mit anderen Disziplinen menschlicher Aktivitäten aufzeigen.
4. Historische Betrachtungen von mathematischen Inhalten können helfen, emotionale positive Verbindungen zur Mathematik aufzubauen.

Aspekt 1

Sehen wir uns ein Beispiel aus der analytischen Geometrie für die erste Aussage an. Nach einer abgeschlossenen mathematischen Oberstufenausbildung ist einem die Formel $ax^2 + bx + c = 0$ bestimmt oft untergekommen. Dass diese Gleichung und die damit verbundene Behandlung von geometrischen Fragestellungen durch Gleichungen einen Bezug zum Siegeszug der Algebra hatte, ist weniger bekannt. *Rene Descartes* (1637) beschäftigte sich in seinem Werk „La Geometrie“ mit der Verbindung von Geometrie und Algebra. Dabei stand er vor philosophischen Schwierigkeiten. Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ stand der Interpretation des Produkts zweier Größen als Fläche im Weg. Diese Formel kann so angesehen werden, dass die Summen von Flächen und Längen Null sein könnte. Der Ausweg aus diesem Dilemma zeigte *Descartes* dadurch auf, dass das Produkt zweier als Längen interpretierter Größen ebenso wieder als Länge interpretiert werden kann.

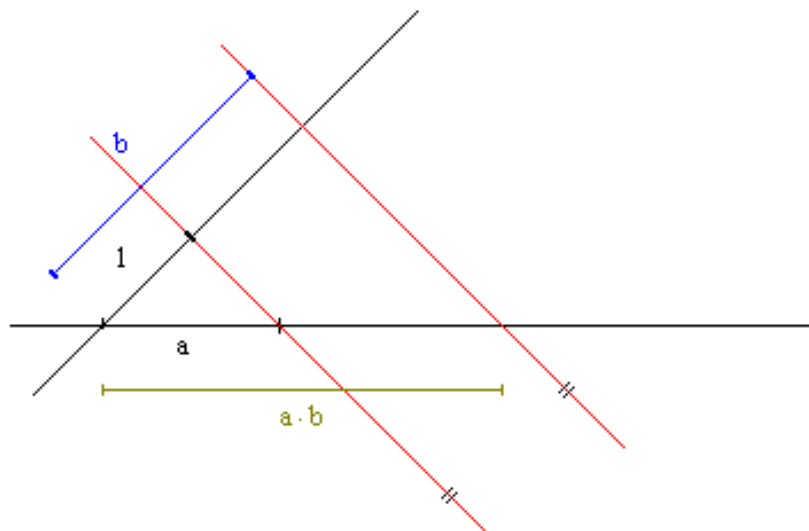


Abbildung 7: Lösungsansatz von Descartes.

(Descartes 1673)

In Abbildung 7 sind a und b Strecken. Nach dem Strahlensatz gilt $a : 1 = x : b$. Daraus folgt $x = a \cdot b$. Diese Überlegung von *Descartes* zeigt exemplarisch, dass sich Mathematiker Gedanken über die Bedeutung von Symbolen und deren Zusammenhänge machen. SchülerInnen sollen in abstrakteren Inhalten nicht nur Buchstaben und

Rechenzeichen sehen, sondern sich Fragen stellen, z.B. „Was bedeutet dieses abstrakte Ergebnis inhaltlich?“ oder „Was tun wir hier eigentlich?“. Die Reflexion von mathematischem Handeln führt zu einer tieferen Beschäftigung und somit zum Verständnis der mathematischen Gedankenwelt. Historische Betrachtungen können beim Erlernen neuer Inhalte den kalkülhaften Methodendrang vermindern (vgl. Mayer: 2011: 22). Dazu ist es nicht nötig jede Umformung geometrisch zu interpretieren. Nach der Verwendung mathematischer Regeln reicht eine Interpretation der Angabe sowie des Ergebnisses aus um Sinn hinter scheinbar reiner Abstraktheit zu bringen.

Aspekt 2

Das Gleiche gilt für den Inhalt Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen aus der 7. Klasse Oberstufe. Das Thema zu komplexen Zahlen wird unter anderem durch eine Art Problemmusterbeispiel wie dieses eingeführt.

„Teile eine Strecke der Länge 10 cm so in zwei Teilstrecken, dass das Produkt der beiden Teillängen 40 cm² ergibt“.

Nach dem mathematischen Ansatz

$$40 = x(10 - x) = -x^2 + 10x$$

Nach dem Umformen unter Verwendung der großen Lösungsformel, ergibt sich:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-1)(-40)}}{2(-1)} = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Da aber keine reelle Zahl y existiert, sodass $y^2 = -15$, hat das Beispiel keine reelle Lösung. Anschließend wird die Zahl i eingeführt. Ein problemzentrierter Ansatz ist durchaus legitim. Eine Zuhilfenahme der historischen Entwicklungen würde eine weitere sinnhafte Alternative sein.

Durch die Demonstration der Schwierigkeiten von großen Mathematikern der Vergangenheit diese Zahl als mathematisches Symbol anzuerkennen, wird den SchülerInnen nicht nur ein neues mathematisches Symbol vor den Kopf gesetzt, sondern dieses mit der langen Geschichte der Deutung in der Realität verbunden.

Ein mögliches problemzentriertes Deutungsbeispiel wäre ein Beispiel des Mathematikers *Heron* (62. n. Chr.). Seine erste Beschäftigung mit komplexen Zahlen ging folgendem Zusammenhang nach (vgl. Kaiser 1998: 125):

„Man bestimme die Höhe eines quadratischen Pyramidenstumpfes, dessen Grundfläche die Seite 28 Fuß, dessen Deckfläche die Seite 4 Fuß und dessen Kanten je 15 Fuß lang sind“

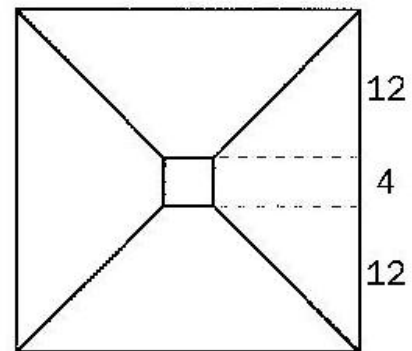


Abbildung 8: Skizze Pyramidenstumpf.

(Kaiser 1998: 125)

Wie man nach zweimaligem Verwenden des Satzes von Pythagoras erkennt, kann so eine Pyramidenstumpf nicht existieren. Die Projektion der Kante auf die Grundfläche müsste die Länge $12 * \sqrt{2}$ haben. Dies wäre länger als 15 Fuß. Dadurch ergibt sich die Höhe durch folgende Gleichung:

$$h = \sqrt{81 - 144}.$$

Folglich ist

$$h = \sqrt{-63}.$$

Heron rechnet anstatt mit der zuerst gegebenen Gleichung mit dem Ausdruck

$$h = \sqrt{144 - 81}$$

weiter, das

$$h = \sqrt{63}$$

entspricht. Ob er dies aus Versehen oder auf Grund der „Unmöglichkeit“ des Ausdrucks zu dieser Zeit tat, ist nicht bekannt. Auch andere Mathematiker (u.a. *Diophant* (3. bis 4. Jhdt. n. Chr.)) stießen auf dasselbe Problem, ignorierten es aber willen- oder unwillentlich. Erst 500 Jahre später erkennt der indische Mathematiker *Mahavira* (580 n. Chr.) bei seiner Untersuchung der negativen Zahlen die Schwierigkeit und stellt fest:

„Es liegt in der Natur der Dinge, dass eine negative Größe nicht eine quadratische Größe ist und deshalb keine Quadratwurzel besitzt.“

Danach vergingen weiter 200 Jahre mit vielen kleineren sowie größeren mathematischen Entdeckungen, bis im 17. Jahrhundert mit der imaginären Zahl gerechnet wurde (vgl. Kaiser 1998: 125-127).

Durch die Geschichte dieser Zahl, welche vom griechischen Altertum über *Cadano*, *Bombelli* bis zur *Euler* und *Gauß* reicht, wird der langwierige und beschwerliche Weg von Dingen, die einem heute selbstverständlich erscheinen, aufgezeigt. Dazu zählt das Entdecken und Ausformulieren grundlegendster mathematischer Sachverhalte oder das Auffinden einer geeigneten Symbolik an sich. Dies ist eine der wesentlichsten Entwicklungen der Mathematik (vgl. Kaiser 1998: 3-4).

Ein weiterer Inhalt, der sich eignen würde, wäre aus dem Inhaltsbereich der Stochastik. Diese soll laut Lehrplan sowohl in der 6. wie auch 8. Klasse einer AHS Oberstufe unterrichtet werden (vgl. *BGBI* 277 2004: 48-49). Dass bei einigen Inhalten die Methodik der eigentlichen Mathematik in der Schule den Rang abzulaufen versucht, wurde bereits mehrfach in dieser Arbeit erwähnt. Zudem gibt es den Gedanken des einen richtigen Weges. Durch diesen Fehlglauben möge man denken, dass dieser mathematische Inhalt sich immer nur auf ein Beispiel bezieht und keinen Sinn in anderen Bereichen hat.

Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit begannen im Mittelalter, wo Glücksspiele und deren mögliche Ausgänge viele Mathematiker interessierten. Ihre Beantwortung stellt eine der Grundlagen für den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff dar. Eine Situation die *Czuber* (1898) in seinem Werk erwähnt hat, ist folgende (vgl. *Czuber* 1898: 17):

Zwei Spieler A und B einigen sich auf eine Anzahl von Spielen, wobei jedes einzelne nur durch den Gewinn des einen oder des anderen beendet werden kann. Ein Unentschieden ist nicht möglich. Der Spieler, der als erster k Spiele gewinnt, bekommt den Einsatz E, der von beiden Spielern zu gleichen Anteilen gestellt wurde. Aufgrund äußerer Umstände müssen die beiden das Spiel abbrechen, als es $x : y$ für den Spieler A steht (d.h. Spieler A hat x Spiele gewonnen, Spieler B y). Wie kann man den Einsatz E gerecht aufteilen?

Für die Mathematiker der damaligen Zeit gab es noch keine Rezepte für derartige Probleme, einige gaben deshalb unabhängige Lösungsvorschläge:

$x:y$	<i>Luca Paciolo</i> (1494)
$[1 + 2 + 3 + \dots + (k - y)]: [1 + 2 + 3 + \dots + (k - y)]$	<i>Geronimo Cardano</i> (1539)
$(k + x - y): (k + y - x)$	<i>Niccola Tartaglia</i> (1556)

Fermat's Antwort (1652) war, dass es nach Spielabbruch höchstens noch

$$n = (k - x) + (k - y) - 1$$

Spiele gibt. Der Einsatz soll demnach, betrachtet man alle möglichen Spielgänge, im Verhältnis der Anzahl der gewinnbringenden Spielgänge aufgeteilt werden. Sei $k=5$ und das Spiel beim Abbruch 4:3 zu Gunsten von Spieler A, gibt es maximal noch drei Spielverläufe. Diese könnten zweimal Spieler A und einmal Spieler B gewinnen. Der Einsatz müsste also im Verhältnis 2:1 für A aufgeteilt werden.

„Aus der Behandlung zahlreicher, mitunter sehr verwickelter Probleme, entwickelten sich allmählich Regeln, dazu bestimmt, gewisse häufig wiederkehrende Schlüsse [...] in korrekter schematischer Weise darzustellen. Diese Regeln, anfangs zahlreich, reduzierten sich schließlich auf einige wenige Sätze, welchen Laplace in Form von Prinzipien strenge Fassung gab.“

(Czuber, 1898, S. 14)

Diese „verwickelten“ Probleme, wie Czuber sie bezeichnet, gipfeln in Überlegungen von La Place, die heute im Schulunterricht essentieller Bestandteil sind. Die Geschichte für eine gesamte geschlossene Theorie bei der Behandlung von Wahrscheinlichkeiten einzelner Erkenntnisse von einigen Mathematikern dauerte noch viele Jahrzehnte bis Jahrhunderte an. Da sämtliche mathematische Inhalte eine Entstehungsgeschichte vorzuzeigen haben, ist dieser Aspekt für eine Sinngebung allgemein gut anwendbar.

Aspekt 3 & 4

Während Aspekt 3 vor allem die historische Geschichte der Mathematik und deren Wert im Zuge der Entwicklung der Menschheit behandelt, widmet sich der vierte Aspekt der

emotionalen Seite der Mathematik. Obwohl für geistige Leistung positive, gefühlsmäßige Voraussetzungen geschaffen werden sollen und die historische mathematische Menschheitsgeschichte ein nicht genügend zu würdigendes Kapitel ist, würde es den Rahmen dieser Arbeit weit übertreffen, sich ehrlich und intensiv mit diesen Themen zu befassen.

SchülerInnen bekommen die Inhalte meist so präsentiert, dass diese unverrückbar sind und sich keiner Diskussion mehr zu stellen brauchen. Der Findungsprozess, bis man zu diesen Punkt gelangt, sieht wahrhaftig anders aus. Durch die historische Betrachtung bekommt man einen Einblick, dass mathematische Erkenntnisse über viele Irrwege, durch Probieren und Abschätzen, sowie Großteils über eine Vision des Forschenden abläuft. Bis die Verbindungen schlussendlich zu einem logischen Ganzen zusammengesetzt werden, bedarf es ein hohes Maß an Kreativität und Originalität. Laut Scholz grenzt dies an die Künste der Malerei oder der Musik (vgl. Scholz 1996: 280). Wie bei einigen Aspekten oben angeführt, kann die Integration von historischen Betrachtungsweisen von Inhalten, sowie allgemein von historischen Inhalten, die Sinnhaftigkeit dieser auch für vergangene Taten darstellen. Dieser Blickpunkt ist nicht direkt zu übernehmen, da die Probleme und Forschungen, aus denen die aktuellen Inhalte hervorgehen, zumeist schon gelöst und oft weit über Schulniveau liegen. Doch kann historische Betrachtung, zum Beispiel in Verbindung mit Anwendungsorientierung oder innermathematischen Sichtweisen, Sinn in verschiedensten Bereichen geben, um den Allgemeinbildungsauftrag einer AHS Oberstufe zu erfüllen.

3.2 Legitimation der Sinnaspekte von Fischer

Die behandelten Aspekte entsprechen den didaktischen Grundsätzen, die im Lehrplan für den Mathematikunterricht vorgeschrieben sind. Gesamt gesehen spiegelt der Grundsatz *Lernen unter vielfältigen Aspekten Fischers* Vorschläge wie folgt wieder:

„Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten. Vielfältige Sichtweisen sichern eine große Flexibilität bei der Anwendung des Gelernten. Die minimale Realisierung besteht in der gelegentlichen Verdeutlichung verschiedener Sichtweisen bei der Behandlung neuer Inhalte, die maximale Realisierung im konsequenten Herausarbeiten der Vor- und Nachteile verschiedener Zugänge. Damit wird ein vielschichtiges und ausgewogenes Bild der Mathematik gewonnen.“

(BGBI 277/2004: 46)

Die mathematischen Inhalte der Oberstufe sollen sich an der Bedeutungs- und Beziehungshaltigkeit dieser Aspekte orientieren. Dadurch können den Lernenden zusätzlich die vertikale sowie die horizontale Vernetzung der einzelnen Gebiete sichtbar gemacht werden. Bei der vertikalen Vernetzung werden die Inhalte innerhalb eines mathematischen Gebiets und die „roten Fäden“, die sich beim Aufbau zeigen, verdeutlicht. Bei der horizontalen Vernetzung stehen der Anwendungsbezug und damit der Realitätsbezug der Mathematik sowie die Vernetzung der Teilgebiete im Vordergrund (vgl. Borneleit et al. 2001: 14).

Ein typisches Beispiel eines „roten Fadens“ wäre, ausgehend von der Unterstufe, die Prozentrechnung. Diese reicht von propädeutischen Erfahrungen in der Primarstufe über absolute und relative Anteile in der unteren Schulstufe bis hin zu mittleren und lokalen Änderungsraten als – im Übrigen auch anwendungsrelevantes – Fundament der Analysis. Weitere Inhalte wären Begriffe wie Zahlen, Gleichungen, Funktionen, Abbildungen usw. (vgl. Bornleit et al. 2001: 14).

Für die horizontale Vernetzung eignet sich der Inhaltsbereich der Stochastik. Neben der anwendungsorientierten Datenanalyse kann in der Sekundarstufe II der Bereich der Verteilungen eingesetzt werden, um die Gebiete der Analysis mit jener der Stochastik zu verzahnen. Der Funktionsbegriff hat, wie so oft, eine der häufigsten Verwendungen,

sowohl innermathematisch wie auch anwendungsorientiert, inne. Er erfährt gebietstypische Ausprägungen als Funktion in einer oder mehreren Variablen, geometrische Abbildung, Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung. Im Sinne der Anwendungsorientierung, insbesondere für das Verständnis von (naturwissenschaftlichen) Modellbildungen sollten Funktionen mit mehreren Variablen nicht nur versteckt und kalkülorientiert behandelt werden (vgl. Bornleit et al. 2001: 14).

Speziell diese Kalkülorientierung und die damit erscheinende Sinnlosigkeit soll mit den Sinn-Aspekten *Fischers* vermieden werden. Aufgrund von Computern und komplexen Taschenrechnern hat die Bedeutung von durchzuführenden kalkülhaften Rechnungen abgenommen. Dies soll durch die Präsentation der Inhalte weitergegeben werden (vgl. Bornleit et al. 2001: 14-16).

Die nachfolgende Liste kann, wie die Beispiele in den vorherigen Kapiteln, mit weiteren mathematischen Inhalten erweitert und mit verschiedensten Sinn-Argumentationen zu den mathematischen Inhalten ergänzt werden. Die Aufzählungen erfüllen jedoch den Zweck indem sie Beispiele und Überlegungen für eine Sinn-Konstruktion zu aktuellen Inhalten des AHS Oberstufenlehrplans laut *Fischer* wiedergeben.

Kalkülhaftes Arbeiten	Idee und Bedeutung	Sinnaspekt nach <i>Fischer</i>
Bestimmen von Tangentensteigung und Ableitungsfunktionen nach syntaktischen Regeln	Ableitung als Idee des Übergangs von der mittleren zur lokalen Änderungsrate	Innermathematische Analyse
„Kurvendiskussion“ als Anwendung von Kalkülen auf Funktionen und deren Ableitungen	„Kurvendiskussion“ als kompetente Analyse der Eigenschaften von Funktionen	Innermathematische Analyse

Formales Lösen von Gleichungssystemen	Darstellung geometrischer Gebilde (Geraden, Ebenen, Kreise, Ellipsen...) mit Hilfe der analytischen Methoden	Innermathematische Analyse
Algorithmische Behandlung von Aufgaben in Urnenmodellen	Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffe auf Alltagssituationen	Frage nach Anwendungsmöglichkeiten
Integrieren zum konkreten Bestimmen von Flächeninhalten und von Stammfunktionen nach syntaktischen Regeln	Integral als Idee der Rekonstruktion einer Funktion aus ihren Änderungsraten	Innermathematische Analyse
Ausführen des Newtonverfahrens mit einem Taschenrechner oder mit Hilfe eines Computers und entsprechende Abbruchbedingungen „wenn sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert“	Idee der Approximation von Nullstellen durch das Newtonverfahren (oder ein anderes Iterationsverfahren) sowie die Analyse des Konvergenzverhaltens	Innermathematische Analyse

(vgl. Borneleit et al. 2001: 15)

Aufzählungen von Sinnkriterien, sind meist subjektiv und dementsprechend differenziert.

Bei diesem Kapitel habe ich mich ausschließlich auf die vier von *Fischer* festgelegten Kriterien fokussiert und diese durch weitere Fachliteratur ergänzt.

3.3. Weitere Sinnaspekte in der Mathematikdidaktik

Weitere Sinnkriterien für mathematische Inhalte und Unterricht werden hier ergänzend und überblicksmäßig erläutert. Eine genauere und intensivere Beschäftigung mit der Thematik kann der angeführten Literatur im *Literaturverzeichnis* entnommen werden. Wie bereits in der *Einleitung* erwähnt, sind diese mit den Aspekten *Fischers* verzahnt und als nicht konträr zu beachten. Gemeinsam zielen sie auf sinnvollen Mathematikunterricht und sinnhafte mathematische Inhalte in einer AHS ab.

3.3.1 Drei Grunderfahrungen

Der Mathematikunterricht in allgemeinbildenden Schulen und die damit verbundenen Inhalte sollen die drei Grunderfahrungen nach *Heinrich Winter* ansprechen. Diese sind vielfältig miteinander verknüpft (vgl. Winter 1995):

- GE 1 Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen sollten, aus Natur Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- GE 2 mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktive geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen
- GE 3 in Auseinandersetzung mit Aufgaben und Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben

(Winter 1995: 17)

Die erste Grunderfahrung wird der Notwendigkeit der Berufsbildung gewidmet. Hier nennt *Winter* Themenkreise wie Grundfragen der Bevölkerungskunde, das Versicherungs- und Steuerwesen als aufklärerische Arithmetik, aber auch Fallgesetze als Bindeglied für mathematische Methoden der Physik. Die zweite Grunderfahrung soll SchülerInnen die innere Welt der von den Menschen geschaffenen Mathematik zeigen. Dabei nennt er unter anderem Inhalte wie die Zahlen- und algebraischen Themenbereiche

und die Geometrie. Die dritte Grunderfahrung spricht die Fähigkeiten an, die innerhalb und außerhalb der Mathematik durch Reflexion der eigenen Tätigkeiten und Denkprozesse erlernt werden können. Direkte Inhalte werden bei dieser Grunderfahrung nicht genannt (vgl. Neubrand 2010: 68-69).

3.3.2 Drei Grundvorstellungen

Das von *Rudolf vom Hofe* entwickelte Konzept, beschreibt die Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomenen der individuellen Begriffsbildung. Drei Aspekte werden insbesondere charakterisiert (vgl. Hofe 1995: 97):

- GV 1 die Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfen an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen
- GV 2 der Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen“ die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen.
- GV 3 Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur

(Hofe 1995: 97-98)

Grundvorstellungen erscheinen als Elemente der Vermittlung zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffsbildung. Ihre didaktische Hauptaufgabe ist, Sachzusammenhänge mathematischer Begriffe und Inhalte so zu beschreiben, dass es für den Lernenden auf eine verständliche Art repräsentiert wird. Sie haben einen dynamischen Charakter und entwickeln sich mit dem Lernenden und der Komplexität der Mathematik mit. Grundvorstellungen charakterisieren somit fundamentale mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen -kurz - Beziehungen zwischen Mathematik, dem Individuum und der Realität (vgl. Hofe 1995: 98).

3.3.4 Fundamentale Ideen

Der Begriff der fundamentalen Ideen von *J.S. Bruner* ist aus Antwort auf die Überflutung mit unverbundenem Detailwissen und das Problem der Stofffülle und Stoffisolation zu

sehen. Diese Ideen dienen zum Ordnen des Unterrichts nach fachlichen Kriterien und sollen in jeder Altersstufe in „intellektuell redlicher Form“ lehrbar sein. Dies bedeutet, dass mathematische Inhalte je nach Schulstufe auf höherem Niveau im Sinn des Spiralprinzips gelehrt werden sollen (vgl. Tietze et al. 1997: 37). Einige Vorschläge für fundamentale Ideen sind:

- Funktion: Das Wissen über eine eindeutige Abbildung, die mit Hilfe einer Tabelle über einen Graphen bis mittels eines Funktionsterms angegeben werden soll. Dieser Wechsel der Darstellungen ist ein wesentliches Element des Mathematikunterrichts.
- Modellbildung: Vereinfachen ohne verfälschen ist bei diesem Punkt das wesentliche Kredo. (Siehe Kapitel: *Die Frage nach Anwendungsmöglichkeiten*)
- Optimieren: Diese Idee kann bei einer linearen Interpolation durch die Methode der linearen Regression (Siehe Kapitel: *Die Frage nach Anwendungsmöglichkeiten*) realisiert werden. Dabei wird eine sogenannte Ausgleichsgerade durch die Daten, bei denen ein linearer Zusammenhang vermutet wird, gelegt, bei der die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände zu den einzelnen Daten ein Minimum ist. Diese Methode findet unter anderem Anwendung in der Wirtschaft, Soziologie oder Psychologie.

(vgl. Tietze et al. 1997: 37f)

Die Entwicklung fundamentaler Ideen ist Aufgabe der Fachdidaktik. Kennzeichnend sind folgende Eigenschaften:

1. Weite: Damit ist eine logische Allgemeinheit gemeint, welche Spielraum für Interpretationen und Anpassungsfähigkeit lässt.
2. Fülle: Damit ist eine Vielfältigkeit der Anwendbarkeit gefordert. Dies initiiert ein Variantenreichtum fundamentaler Ideen.
3. Sinn: Dies spielt auf eine Verankerung im Alltagsdenken ab.

(vgl. Schwill 1993: 6f)

4 Aufnahmekriterien von Inhalten in den Oberstufenlehrplan

„Lehre nichts, was dem Schüler dann, wenn er es lernt, noch nichts ist, und lehre nichts, was dem Schüler später nichts mehr ist!“

(Diesterweg 1962, S. 131)

Sinn-Argumentationen, wie im letzten Kapitel beschrieben, setzten Inhalte voraus. Die Aufgabe der mathematischen Fachdidaktik ist es zusätzlich, Inhalte auf deren „Existenzberechtigung“ im Unterricht in Frage zu stellen. Im Verlauf dieses Kapitels werden Ansätze zur Begründung von Inhalten anhand der Lehrplantheorie beschrieben. Dabei gibt es mehrere Argumentationen, wobei in dieser Arbeit speziell auf die mathematische Kommunikationsfähigkeit Wert gelegt wird.

Es gibt, je nach subjektivem Empfinden, viele Ziele die im Mathematikunterricht erreicht werden sollen. Die Vorlieben sind von Person zu Person sehr unterschiedlich. Wie folgt dementsprechend eine Auswahl von Inhalten? *Kaiser* kristallisierte fünf Punkte, für den Wechsel von Inhalten im Lehrplan heraus (vgl. Kaiser 1998: 298):

- Die Tradition
- Den Zeitgeist
- Den technischen Fortschritt
- Die Weiterentwicklung der Mathematik als Wissenschaft
- Die Fachdidaktik

Davon schreibt er der Tradition die größte Bedeutung zu. Für zukünftige Lehrpläne sieht er gesellschaftliche sowie soziale Veränderungen als größten Faktor. Dies wird im Laufe dieser Arbeit noch nähere Betrachtung finden.

Im Kapitel *Sinn mathematischer Inhalte* bereits erwähnt, legte *Embacher* die Auswahl durch 3 Punkte fest:

- Höhere mathematische Alltagskompetenz
- Vorbereitung auf Studien/Berufe mit geringer Affinität zur Mathematik
- Vorbereitung auf Studien/Berufe mit höherer Affinität zur Mathematik

(vgl. Embacher 2014)

Oberguggenberger wiederum wählt drei Aufgaben, die ein Mathematikunterricht mit Hilfe der gegebenen Inhalte erreichen soll:

- Grundausbildung („was alle im Alltag brauchen“)
- Allgemeinbildung („Verständnis für die Bedeutung der Mathematik“)
- Spezialbildung („Grundlage späterer Hochschulstudien“)

(vgl. Oberguggenberger 2002: 2)

Die Richtigkeit und Wichtigkeit dieser Punkte für die Auswahl von Inhalten ist nicht zu bestreiten. Wobei die Grundausbildung, wenn auch in der Oberstufe zu vertiefen und zu festigen, eher in der Sekundarstufe I anzusiedeln ist. Allgemeinbildung sowie höhere mathematische Alltagskompetenzen sind hier als sinnhomogen anzusehen. Die derzeitigen Inhalte der Sekundarstufe II (Analysis, Lineare Algebra/Lineare Geometrie und Stochastik) genügen laut *Baptist und Winter* nur bedingt den Vorstellungen einer tieferen Allgemeinbildung. Zwar beruhen die beiden Hauptthemen, Analysis und Lineare Algebra/Lineare Geometrie, auf grundlegenden Ideen, die als Bestandteile vertiefender Allgemeinbildung angesehen werden können. Deren Aufbau und Akzentuierung entsprechen aber weitgehend einer Orientierung an das universitäre Mathematikstudium (vgl. Baptist und Winter 2001: 17).

Fischer kritisiert die Argumentation, dass Inhalte der Sekundarstufe II speziell auf das Studium vorbereiten sollen. Die Höhere Schule hat seiner Ansicht nach einen eigenen Bildungsauftrag, der sich nicht darin erschöpfen soll, nur auf die Universität vorzubereiten. Er schlägt das Orientierungskonzept Kommunikationsfähigkeit mit Experten für die Aufnahme von Inhalten in den höheren Allgemeinbildungskanon vor (vgl. Fischer 2003: 559). Dieses Ziel verbunden mit der geforderten höheren

Allgemeinbildung verfolgt die ab dem Schuljahr 2014/15 eingeführte standardisierte schriftliche Reifeprüfung.

Allgemein wird Mathematik wohl mehr mit „Rechnen“ als mit Kommunikation in Verbindung gebracht. Deshalb wird, bevor wir sich die Arbeit mit dem Orientierungskonzept *Fischers* näher beschäftigt, ein kurzer Exkurs zur mathematischen Kommunikation eingebracht.

4.1 Exkurs: Mit Mathematik wird kommuniziert

Der Gedanke, dass Kommunikation sowie Sprache die Gegenteile zur Mathematik sind, ist als nicht korrekt einzustufen. In der Mathematik wird in vielen gesellschaftlichen und sozialen Zusammenhängen argumentiert und kommuniziert. Sei es in der Politik, in der Werbung, in Zeitungen oder im Sozialwesen. Dies sollte im Unterricht regelmäßig zum Thema gemacht werden, Die Verwendungen der mathematischen Kommunikationsmittel in diesen Medien lassen sich in vier verschiedenen Typen einteilen:

- Kommunizieren mit Zahlen- und Zahlentabellen
- Kommunizieren mit mathematischen Symbolen und Formeln
- Kommunizieren mit mathematischen Graphiken
- Kommunizieren unter Rückgriff auf mathematische Begründungsmuster

Allgemein lässt sich der Einsatz von mathematischen Kommunikationsmitteln auf das Streben nach Sicherheit, Belegbarkeit und Transparenz zurückführen. Darin ruht die Stärke der Mathematik. Mit Zahlen und Grafiken werden Aspekte komplexer Sachzusammenhänge erfasst und kommunizierbar gemacht (vgl. Lengnink 2002: 122).

„Die mathematische Darstellung durch Vergegenständlichung (Materialisierung) ermöglicht eine Fokussierung der Aufmerksamkeit und damit Massenkommunikation, die für kollektive Entscheidungsprozesse benötigt wird.“

(Fischer 1996: 43)

Kommunikationsmittel können in unterschiedlichsten Sachzusammenhängen erfolgreich angewendet werden. Im Mathematikunterricht sollte die Verwendung mathematischer Kommunikationsmittel gelehrt, kritisch hinterfragt und auf die Angemessenheit geprüft werden. Eine Übersichtsliste die keinen Anspruch auf Vollständigkeit aufweist, kommt von *Lengnink*:

Zahlen und Zahlentabellen:

- Zum Quantifizieren und Vergleichen
- Als Indikatoren zur Beschreibung von Sachzusammenhängen
- Zum Verdeutlichen von und als Prognosemittel für Trends
- Zahlentabellen zum Darstellen von relationalen Beziehungen

Mathematische Symbole und Formeln:

- Zum präzisen Erfassen von Zusammenhängen
- Zum Festlegen und Normieren von Situationen
- Zum Aufstellen und Durchsetzen von allgemeinen Regeln
- Zum Automatisieren von Teilaspekten in größeren Sachzusammenhängen

Mathematische Graphiken:

- Zum Visualisieren von Zusammenhängen
- Zum Verdeutlichen von Effekten
- Zum Aufzeigen von Trends bei zeitlichen Entwicklungen
- Als visuelle Kommunikationsgrundlage in Entscheidungssituationen

Mathematische Begründungsmuster:

- Als allgemein anerkannte Überzeugungsprinzipien
- Als formale Denkweisen, die unabhängig vom konkreten Sachzusammenhang aktivierbar sind

(vgl. Lengnink 2002: 123)

Die breiten Anwendungen von mathematischer Sprache gibt die große Bedeutung von Kommunikationsprozessen in unserer Gesellschaft wieder. Dieser Tatsache soll im Unterricht Geltung getragen werden. *Skovsmose* gibt vier Ebenen an, welche im Mathematikunterricht zu einem kritischen Umgang mit Mathematik beitragen können.

1. Mathematik als „language of power“ einem kritischen Diskurs zugänglich zu machen
2. Mathematik in lebensweltlichen Zusammenhängen zu erkennen und offenzulegen
3. Mathematik zu reflektieren in Bezug auf die Richtigkeit der mathematischen Operationen, auf die Angemessenheit der Mathematisierung realer Situationen und auf den Zweck des Einsatzes mathematischer Mittel
4. Mathematik in einer Kultur von Dialog und Widerspruch zu erleben

(vgl. Skovsmose 1998: 198f)

An diesen vier Elementen lässt sich für den Fokus der mathematischen Kommunikationsfähigkeit viel lernen. Mathematik als „language of power“ verlangt, dass Mathematik als Kommunikationsmittel eingesetzt werden soll. Abstrakte Sachverhalte sollen durch ihre Hilfe leichter für Entscheidungsprozesse zugänglich gemacht werden. Der zweite Punkt beschreibt die passive Variante. Sprich die Suche nach relevanten Situationen und Sachzusammenhängen, in denen mathematische Kommunikation eingesetzt wird. Zudem soll erkannt werden, welche mathematischen Kommunikationsmittel eingesetzt und welche Begründung es dafür geben könnte (vgl. Lengenink 2002: 124).

Die letzten zwei Ebenen sieht *Lengenink* als die wichtigen für eine Auseinandersetzung mit mathematischer Kommunikation. Folgende Fragen sollten sich in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht gestellt werden:

- Sind die zur Kommunikation eingesetzten mathematischen Mittel der Sachfrage angemessen?
- Sind die durchgeführten mathematischen Operationen für diesen Typ von Frage- und Problemstellung bedeutsam?
- Zu welchem Zweck und mit welchem Geltungsanspruch werden mathematische Kommunikationsmittel eingesetzt?

- Was an der Situation wird durch den Einsatz mathematischer Kommunikationsmittel geklärt und, was nicht?
- Wird die Kommunikation durch den Einsatz dieser Mittel sinnvoll unterstützt?

Bei diesen Fragen, geht es nicht um Entscheidungen ob richtig oder falsch, sondern um eine Argumentation hinsichtlich Verwendung von mathematischer Kommunikation. Diese Fragen könnten einen Unterricht leitend unterstützen (vgl. Lengnink 2002: 125).

4.2 Kommunikationsfähigkeit mit Experten als Orientierungsansatz für Inhalte der Sekundarstufe II

„Das Problem der Verständigung zwischen Experten und Laien lässt sich als eines der Schlüsselprobleme einer hochdifferenzierten und arbeitsteilig strukturierten Demokratie identifizieren“

(Heymann 1996: 113)

„Der Dialog zwischen Experten und Laien setzt, wenn er gelingen soll, allgemeingebildete Experten voraus, die über den Zaun ihres Spezialgebiets hinüberzuschauen vermögen und allgemeingebildete Laien, die zu mindestens so viel von den Fragen verstehen, für deren Lösung sie Experten brauchen, dass sie ihnen nicht blind vertrauen müssen.“

(Heymann 1996: 114)

Wir alle sind nur in wenigen Sachzusammenhängen ExpertInnen, auf allen anderen Gebieten müssen wir als Laien Rat von ExpertInnen einholen. Was Heymann aus pädagogischer Perspektive als Allgemeinbildungsauftrag der Schule beschreibt, entfaltet Fischer als Konzept für einen Orientierungsrahmen der Auswahl von Inhalten der Sekundarstufe II (vgl. Lengnink 2002: 125, Fischer 2000 und Fischer 2001).

Um dies besser zu verstehen, ist es hilfreich, sich die Rolle eines Richters vorzustellen. Ein Richter hat die verschiedensten Themen zu welchen er sich in Folge ein Urteil bilden muss. Dazu bestellt er Ökonomen, Psychologen, Chemiker, Sozialwissenschaftler usw. Die Fragen, die sich ein Richter dabei stellen sollte sind u.a.: „Was kann ich von dem/der

ExpertInnen in dem jeweiligen Gebiet erwarten? Welche Relevanz hat seine Aussage für die gegenständliche Sache? Wie beziehe ich die Expertise des Sachverständigen in das jeweilige Urteil ein?“ All diese Fragen hat der/die RichterIn ohne selbst ExpertIn zu sein, zu beantworten (vgl. Fischer 2003: 560 und Fischer 2012a: 5-6).

Dieselbe Rolle haben mündige Personen inne. In vielen Fragen des öffentlichen, beruflichen und privaten Lebens wird man bei Entscheidungsfindungen mit Expertenaussagen konfrontiert und muss sich ein Urteil bilden. Während man im beruflichen Alltag selbst als ExpertIn gilt, hat man bei „kleineren Fragen“ unter anderem, gesunder Lebensgestaltung, Hausbau, Jobsuche Expertenmeinungen vorliegen, die einem die eigene Positionierung nicht ersparen. In der Regel wird man die fachliche Richtigkeit nicht in Zweifel stellen. Damit wird deutlich, wie eng die Verständigung zwischen ExpertInnen und Laien mit der Fähigkeit zum kritischen Vernunftgebrauch und dem verantwortlichen Umgang mit Wissen zusammenhängt (vgl. Heymann 1996: 113-114).

Bei der Antwort, für wie wichtig bzw. bedeutsam man ein professionelles Urteil hält, ist man auf seine eigene Urteilsfähigkeit angewiesen. Diese Kompetenz, ist natürlich für alle Menschen wünschenswert. *Fischer* fügt deshalb eine spezifische Aufgabe hinzu. Personen, die eine höhere allgemeinbildende Schule abgeschlossen haben, sollen zusätzlich zwischen ExpertInnen und der Allgemeinheit vermitteln. Das Orientierungsprinzip „Kommunikationsfähigkeit mit Experten“ soll auf „Kommunikationsfähigkeit mit Experten und mit der Allgemeinheit erweitert werden“ (vgl. Fischer 2003: 560-561 und Fischer 2012a 5-6).

ExpertInnen und allgemeinbildende Laien haben nicht dieselbe Funktion. Der/die ExpertIn soll Probleme in seinem Fach lösen können. Der/die Laie hingegen muss über keine fachlichen Problemlösungsansätze verfügen. Er muss wissen was Stärken und Schwächen des Faches sind und was er von dem/der ExpertIn erwarten kann. Eine Übersicht ist in Abbildung 9 zu sehen.

Bei Grundkenntnissen handelt es sich vor allem um Konzepte, Begriffe und Darstellungsformen, wie dem mathematischen Funktionsbegriff. Auf Basis von Grundkenntnissen sollen beim Operieren komplexere Handlungen durchgeführt werden. Ein Beispiel wäre „aufwändiges“ Rechnen. Bei der Reflexion geht es folglich um Interpretieren von Wissen, von Operationen und von Ergebnissen. Daraus lassen sich

Zusammenhänge ziehen um diese schließlich zu bewerten. Natürlich hat der/die ExperteIn beim Grundwissen ein höheres Ausmaß an Wissen vorzulegen. Der/die Laie muss trotzdem über ein bestimmtes Maß an Grundkenntnis verfügen. Operieren hingegen, sprich neues Wissen erzeugen muss nur der/die ExperteIn. In gewissen Gebieten, kann auch der/die Laie operative tätig sein. Seine Hauptaufgabe ist aber die Reflexion. Der/die entscheidungsfähige Laie hat zu beurteilen. Die Grenzen zwischen diesen Bereichen sind fließend und hängen logischerweise von den jeweiligen Vorkenntnissen der beteiligten Personen ab (vgl. Fischer 2012a: 8).

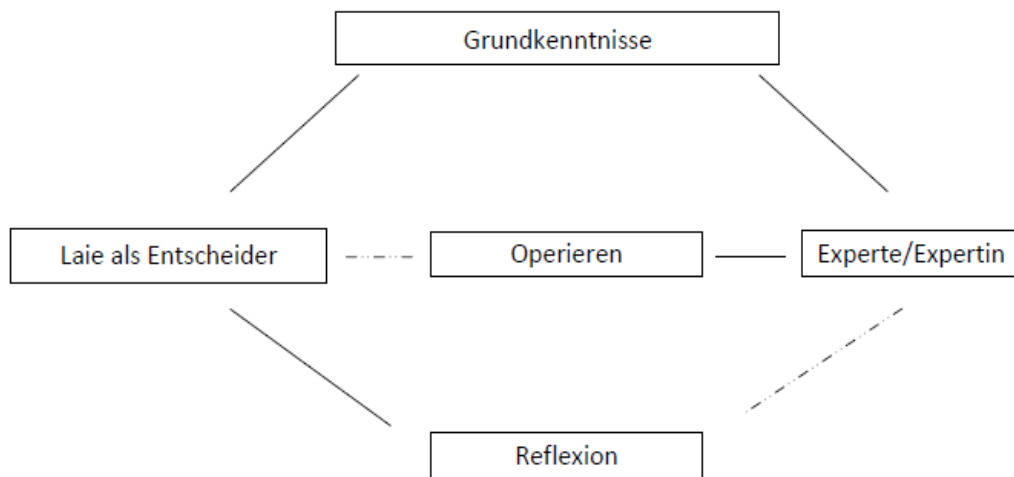


Abbildung 9: Laie und Experte Kompetenzzuteilung.

(Fischer 2012a: 6)

Um mit diesem Konzept zu Unterrichtsinhalten zu kommen wird im Folgenden durch ein mathematisch-physikalisches Beispiel erklärt.

$$S = v_0 * t - \frac{a}{2} * t^2$$

v_0 ... Geschwindigkeit am Beginn des Bremsvorgangs

t ... Zeit

Aus dieser Formel, für den Weg eines gleichmäßig beschleunigten (in diesem Fall gebremsten) Körpers, kann man die Formel für den Bremsweg ableiten. Dabei würde man noch den Wert für a benötigen, welcher von vielen Faktoren, wie den Zustand der Reifen

und Bremsen, der Straßenbeschaffenheit usw. abhängt. Dieses physikalische Wissen ist sehr speziell und muss zuerst beschafft werden. In diesem Fall möglicherweise von einem Gerichtssachverständigen für Verkehrsunfälle. Also eine/n ExpertIn. Diese/r hat mit Sicherheit mit dieser Formel bereits mehrmals angewendet und weitere zusätzliche Faktoren miteinbezogen. Daraus entstand folglich eine Antwort. Ist die Formel und der Inhalt deswegen sinnlos? Nein. Auch ExpertInnen können immer wieder widersprüchliche Antwortangebote vorlegen, dabei ist es wichtig Begriffe wie Bremsverzögerung, Reibung, oder allgemein einen Bremsvorgang zu verstehen um dem/der ExpertIn folgen zu können und sich selbst ein Bild zu machen. Zudem lernt man die prinzipielle Berechenbarkeit der Welt bzw. die Grenzen der Berechenbarkeit zu verstehen (vgl. Fischer 2012a: 1-3).

Wenn man also ExpertInnen befragt muss man über Reflexionswissen und ein gewisses Grundwissen verfügen. An diesen beiden Arten von Wissen kann man Entscheidungen treffen. Für die Inhalte des Unterrichts sagt *Fischer* folgendes:

„Die wichtigste Handlung und damit der wichtigste Beitrag zum Problemlösen des allgemein gebildeten Individuums ist: Entscheiden. Gerade dies wird aber in schulischen Lernprozessen kaum geübt, im Gegenteil: Die wichtigsten Entscheidungen in der Schule, nämlich darüber, was gelernt werden soll, werden den Lernenden abgenommen.“

(Fischer 2012a: 5)

4.3 Aushandeln von Inhalten

Das Orientierungsprinzip „Kommunikationsfähigkeit mit Experten und mit der Allgemeinheit“ stellt nicht zwingend Inhalte des Mathematik-Oberstufenlehrplans an Höheren Schulen dar. Eine objektive Antwort auf die Frage, was man wissen und verstehen muss, um mit ExpertInnen verschiedenster Fachrichtungen kommunizieren zu können, ist nicht eindeutig und dauerhaft aus diesem Prinzip ableitbar. Die Gesellschaft muss dies von Zeit zu Zeit normativ festlegen (vgl. Fischer 2003: 563).

Inhalte sollen das Ergebnis eines Prozesses des Aushandelns sein und so einen möglichst großen Sinn für die Gesellschaft ergeben. Dies ist unter anderem der Fall wenn ExpertInnen und Laien diesen Diskurs abhalten. ExpertInnen haben die Aufgabe Vorschläge zu machen und zusammen mit GeneralistInnen sind diese Vorschläge zu besprechen sowie Entscheidungen hinsichtlich Auswahl zu treffen.

Dabei liegt ein Zirkularitätsproblem vor. Wie sollen Menschen, in unserem Fall SchülerInnen mitreden, obwohl sie die Inhalte, die für sie sinnvoll erscheinen sollen, noch nicht kennen. Der/die ExpertIn hat zweifelslos einen Vorteil bei der Verhandlung. Dies ist keine Besonderheit, welche nur bei Verhandlungen mit Bildungsinhalten vorkommt. Bei jeder Verhandlung hat ein/e ExpertIn einen Vorteil gegenüber Laien. Einzig die eigenen Bedürfnisse kennt der/die Laie wahrscheinlich besser (vgl. Fischer 2012b: 1-2).

Ein weiteres Problem des Aushandlungsprozesses ist die mangelnde Öffentlichkeit. Die Diskussionen handeln meistens von der Relevanz bestimmter Fächer. Dies ist eine zu oberflächliche Betrachtungsweise, die keine großen Umschwünge bringt. Eine Diskussion über konkrete Inhalte wird meist unter Ausschluss der Öffentlichkeit geführt. Im Kapitel *Öffentliche Meinung zur Sinnhaftigkeit* von Inhalten in der Schule sind einige Beispiele genannt, wo öffentliche Meinungen zu mathematischen Inhalten wiedergegeben werden. Diese sind häufig keine Expertenmeinungen und erreichen nicht die benötigte Resonanz. Durch diesen Verschluss der Diskussion klappt eine Kluft zwischen Themen der Schule und den Themen der Menschen auf. Die Mathematik als naturwissenschaftliches Fach erreicht bestenfalls ein schuldbewusstes Eingeständnis, dass sie wichtig ist, ohne dass die Inhalte für viele Menschen wirklich sinnvoll erscheinen (vgl. Fischer 2003: 564).

In den 60er und 70er Jahren wurden Versuche unternommen, die bildungswissenschaftliche Forschungs- und Entwicklungsarbeit hinsichtlich Schulcurricula in die breite Öffentlichkeit und in den Fokus der FachexpertInnen zu bringen (vgl. Fischer 2012a: 16).

Jerome S. Bruner vertrat die Ansicht, dass die fundamentalen Ideen der jeweiligen Disziplin die Orientierungsmarken der Lehrpläne sein sollten (vgl. Bruner 1973). Die New Math-Bewegung vertrat diesen Ansatz. Der erhoffte Erfolg blieb aus, da die Ideen

zu abstrakt und die, für die Schule aufbereitete Form der Inhalte, ihres mathematisch theoretischen Charakters beraubt wurde (vgl. Fischer et al. 2004).

Ein weiterer Ansatz wurde von dem deutschen Bildungsforscher *Saul Robinsohn* vertreten. Er war der Meinung, dass die zukünftige erwartende Lebenssituation der SchülerInnen als Orientierung für die Inhalte herangezogen werden soll (vgl. Robinsohn 1975).

Dazu wurden umfangreiche Forschungen über private sowie berufliche Lebenssituationen der SchülerInnen angestellt. Diese wurden mit dem Beitrag der Schulfächer zu deren Bewältigung abgeglichen. Das Ergebnis war ernüchternd. Die Ergebnisse wären speziell in der heutigen Zeit schnell veraltet, womit die Gestaltung der Lehrpläne nicht mithalten kann. Dazu wären immer wieder sehr umfangreiche Untersuchungen nötig. Zusätzlich hat sich herausgestellt, dass die benötigten Qualifikationen oftmals auf einen allgemeinen Level liegen und die Aussage über die Sinnhaftigkeit konkreter Inhalte dementsprechend gering ist (vgl. Fischer 2012a: 17).

Wie sieht ein Aushandeln von mathematischen sowie allgemeinen Inhalten heute aus? Dazu werden Lehrplankommissionen bzw. Bildungsstandards-Projektgruppen eingesetzt. In der Regel sind FachexpertInnen bei diesen Diskussionen unter sich. Es fehlen höher allgemeingebildete Intellektuelle bzw. Laien. Diesen Zustand ist die Tatsache geschuldet, dass sich das Bestreben in Richtung mehr Inhalte, sprich in quantitative Erweiterung anstatt bewusst ausgewählte Inhalte entfaltet. Grundsätzlich Einigkeit herrscht im Punkt: Mehr ist besser. Inhalte werden unter anderem auf diese Art ausgewählt: Planetenbahnen sind Kegelschnitte, daher müssen diese gelernt werden (vgl. Fischer 2012b: 2).

Fischer führt dazu einige Verbesserungsvorschläge an, welche eine Verbesserung der Qualität herbeiführen könnte. Zum einen sollen die „Entscheidungs-Gruppen“ interdisziplinär zusammengesetzt sein. Zum andern soll ein Nicht-Einmischungspakt vermieden werden. Sprich der/die MathematikerIn muss der/den HistorikerIn erklären, warum die Vielfältigen Betrachtungsweisen des Funktionsbegriffes so wichtig sind und sich nicht nur vor MathematikerInnen über die Inhalte rechtfertigen müssen. Eine weitere wichtigere Änderung würde ein tieferer öffentlicher Diskurs zu mathematischen Inhalten bringen. Wie bereits mehrfach angesprochen und in Kapitel *Populäre Meinungen zur*

Sinnhaftigkeit der Inhalte in der Schule wiedergegeben, ist dieser laut *Fischer* eher oberflächlich gehalten (vgl. Fischer 2012b 2-4).

Es wird nicht verlangt, dass jede Tageszeitung seitenweise Berichte über mathematische Inhalte und deren Sinn bringt. Zielführend wäre es, eine allgemeine Diskussion anzuregen, sowohl mit BildungsexpertInnen, als auch mit Laien aus dem Alltagsleben. Die Aushandlung soll einen gesamtgesellschaftlichen Prozess darstellen, in dem es in erster Linie um Bewertung von Bildungszielen und Bildungsinhalten geht (vgl. Fischer 2012b: 10). Dies kann an mehreren Orten geschehen. *Fischer* teilt diese in Abbildung 10 ein

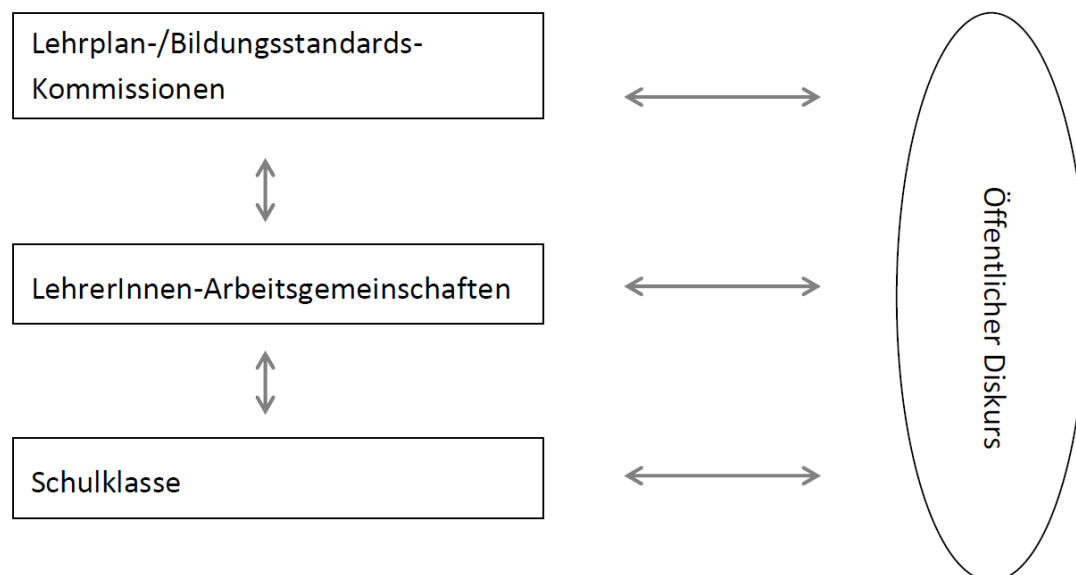


Abbildung 10: Aushandlungsorte von Inhalten nach Fischer.

(Fischer 2012b: 10)

Jede der Aushandlungsebene soll einen bestimmten Spielraum haben, in der sie Entscheidungen zu treffen hat. Die Schulklassen und die Lehrplankommissionen nehmen die Extrempositionen des gesellschaftlichen Aushandlungsprozesses ein. Der öffentliche Diskurs darüber, sorgt für eine ausgeglichene Information (vgl. Fischer 2003: 564).

Auf ein Aushandeln im Unterricht wurde in dieser Arbeit bisher noch nicht hingewiesen. Dabei sollen laut *Fischer* die Schulklassen ein wichtiger Ort für Aushandlungs- sowie Diskussionsprozesse sein. SchülerInnen sollen über die Bedeutung und Gewichtung von Unterrichtsinhalten mitentscheiden. Damit ist nicht gemeint, dass im Vorhinein mit den

SchülerInnen ausverhandelt wird, was gelernt werden soll. Vielmehr soll im Nachhinein über Stellenwert, Bedeutung, Nutzung und Gewichtung des Gelernten diskutiert werden. Die SchülerInnen sollen selbständig entscheiden, ob es sich gelohnt hat diese und jene Inhalte zu lernen und wie man es verwenden kann (vgl. Fischer 2012b: 6-7). Beispiele solcher Diskussionen sind im Kapitel *Sinnhaftigkeit von Inhalten anhand ausgewählter Kriterien und Beispiele* zu finden.

Zusammenfassend wäre für eine sinnvolle Auswahl an mathematischen Inhalten des Mathematik-Oberstufenlehrplans eine Diskussion über die Inhalte als gesamt gesellschaftlicher Prozess von Vorteil.

„Das Ziel kann selbstverständlich nicht sein, einen öffentlichen Diskurs zu führen um dann darüber abzustimmen, was in der Schule gelernt werden soll. Schule braucht Freiheit. Sie braucht aber auch Orientierung, und dafür sollte der öffentliche Diskurs hilfreich sein. Umgekehrt sollte der öffentliche Diskurs auch Impulse aus dem Bildungssystem bekommen. Was es zu vermeiden gilt, ist, dass Schule und Öffentlichkeit unzusammenhängende Parallelwelten sind.“

(Fischer 2012b: 5)

Beim Aushandeln geht es in erster Linie um den sogenannten Ziel-Stoff. Eine Strukturierung der Inhalte kann wie in Abbildung 11 erfolgen. Die jeweiligen Begriffe, der immer kleinere werdenden Unterteilung, erfüllen verschiedene Funktionen.

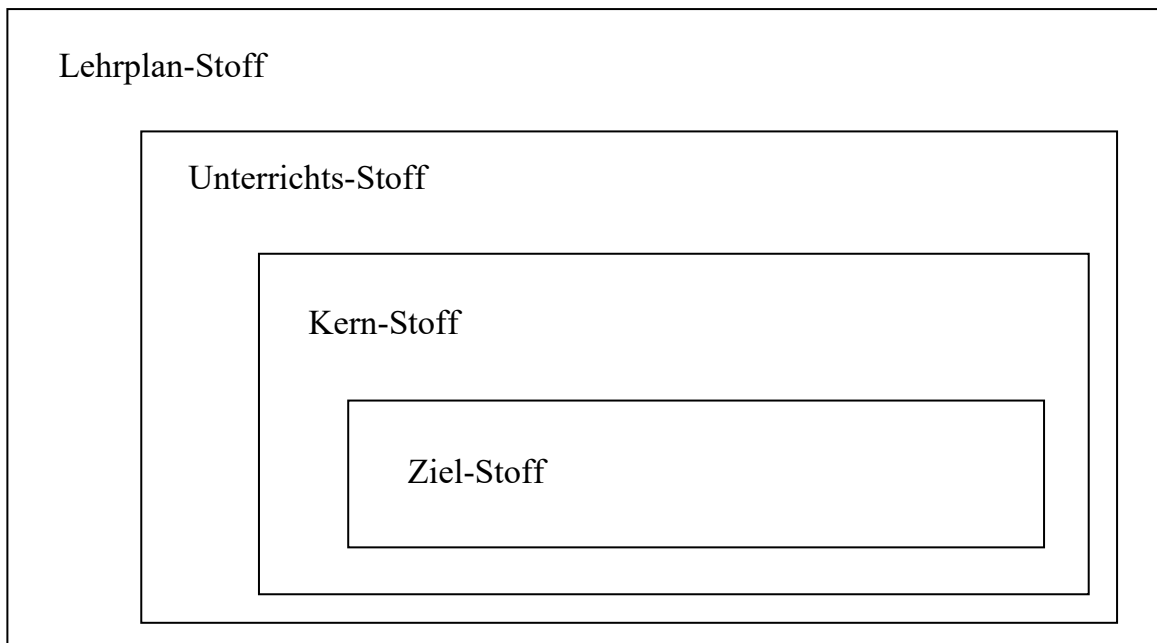


Abbildung 11: Strukturierung der Inhalte nach Fischer

(Fischer 2012b: 7)

- **Lehrplan-Stoff:** Inhalte, welche unterrichtet werden dürfen.
- **Unterrichts-Stoff:** Inhalte, weitgehende durch Tradition und den Lehrbücher bestimmt, die tatsächlich unterrichtet werden.
- **Kern-Stoff:** Inhalte, welche von den SchülerInnen ausreichend beherrscht werden müssen, um in der Schule zu bestehen.
- **Ziel-Stoff:** Inhalte, welche langfristig behalten werden sollen.

Bei öffentlichen Diskussionen sowie beim Verhandeln in Lehrplankommissionen sollte vor allem der Ziel-Stoff im Auge behalten werden. Dies entspricht ungefähr 20 Prozent des gesamten Lehrplans (vgl. Fischer 2012b: 7).

Das eben Gesagte, gilt insbesondere für die Wissenschaftskommunikation. WissenschaftlerInnen klagen häufig über mangelndes Interesse. Jedoch muss die Wissenschaft selbst zu diesem Thema Stellung nehmen und somit Fragen an den öffentlichen Diskurs richten (vgl. Fischer 2012b: 5). Im weiteren wird anhand von Meinungen einiger BildungsexpertInnen eine genauere Analyse zum Status Quo der

mathematischen Inhalte wiedergegeben. Gibt es Diskussionen über mathematische Inhalte? Wie sehen diese aus? Welche Argumente sprechen für oder gegen die aktuellen Inhalte?

4.4 Diskussion über mathematische Inhalte der Oberstufenlehrpläne

4.4.1 Zentrale Inhalte

Es ist in keinem Schulfach selbstverständlich, welche Inhalte als unverzichtbar angesehen werden und in den Lehrplan Einzug finden. Dem Unterricht sind auf Grund der zeitlichen Ressourcen natürliche Grenzen gesetzt. Im Schulfach Mathematik stellen sich neben der von *Fischer* geforderten Kommunikationsfähigkeit mit Experten, Fragen wie:

- An welchen Inhalten können und sollen SchülerInnen im Mathematikunterricht Allgemeinbildung erwerben?
- Über welche Inhalte müssen sie das erforderliche Wissen und Können erwerben, um sich damit zu qualifizieren?
- An welchen Inhalten können sie zuverlässige Erfahrungen mit Mathematik sammeln?

(vgl. Vollrath und Roth 2011: 33)

Über Jahrhunderte war das mathematische Wissen gut repräsentiert. Werke wie *Elemente* von Euklid oder die Bücher von Archimedes stellten beinahe eine Gesamtübersicht des mathematischen Wissens dar. Diese Situation hat sich grundlegend geändert. Immer neue Gebiete entstanden: Algebra, analytische Geometrie, Analysis, Funktionentheorie, Differentialgeometrie, numerische Mathematik, Stochastik und viele weitere bilden heute den Wissensstand. Neben den teilweise grundlegenden Änderungen der klassischen mathematischen Gebiete, gibt die Datenbank der *American Mathematical Society* jährlich knapp 120000 wissenschaftliche Arbeiten mit mathematischen Bezug heraus. Das mathematische Wissen unserer Zeit ist unüberschaubar (vgl. Vollrath und Roth 2011: 34).

Zusammenfassen lassen sich trotz enormer Vielfalt die wichtigsten mathematischen Gebiete, welche sich in der Sekundarstufe II einer AHS, als Inhaltsbereiche in etwas abgewandelter Form wiedergeben. Diese sind wie erwähnt:

1. Algebra und Geometrie

2. Funktionale Abhängigkeiten
3. Analysis
4. Wahrscheinlichkeit und Statistik.

Durch Lehrplanreformen, Stundenumstellungen oder durch den Einsatz von Computern sind die Inhalte des Mathematikunterrichts immer wieder leicht verändert worden. Die Kritik ist dabei in vielerlei Hinsicht gleich geblieben. Diese Punkte beziehen sich aber weniger auf die mathematischen Inhalte, welche vermittelt werden, sondern die Art und Weise, wie sie vermittelt werden. *Vogel et al.* haben einige Punkte zusammengefasst (Vogel et al. 2006, S. 29). Ein Diskurs über die Vermittlung ist viel häufiger vorzufinden als ein konkreter Diskurs über die Inhalte.

4.4.2 Beitrag Eins

Bornleit et al. sind in deren Artikel *Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe* überzeugt, dass die drei klassischen Stoffgebiete

- Analysis und darin enthaltene Inhalte wie Funktionen, Grenzwerte und Änderungsraten als Grundlage fundamentaler mathematischer Ideen
- Analytische Geometrie und deren Inhalte wie Kreise, Kegelschnitte oder komplexe Zahlen
- Stochastik, insbesondere deskriptive Statistik und Wahrscheinlichkeitsaussagen

die zentrale Bedeutung in der gymnasialen Oberstufe beibehalten. Bei einer möglichen Auswahl neuer Inhalte sollen die drei Grunderfahrungen und Grundvorstellungen bedient werden sowie eine Orientierung an den fundamentalen Ideen geschehen (vgl. Bornleit et al. 2001: 13-14). (Siehe Kapitel: *Weitere Sinnaspekte in der Mathematik Didaktik*)

4.4.3 Beitrag Zwei

Konkreter wird *Oberguggenberger* in seinem Artikel *Inhalte des Mathematikunterrichts in der Oberstufe*. Das Grundprinzip seiner Stoffauswahl folgt dem Ansatz: „Was ist der minimale Kern an mathematischen Wissen, den die betreffenden SchülerInnen erlernen müssen?“ Diese Minimalforderung hat auch *Fischer* durch die Überlegungen zum „Ziel-Stoff“ miteinbezogen. (Siehe Kapitel: *Aushandeln von Inhalten*). *Oberguggenberger* legt

folgende Aufgaben hinsichtlich eines Mathematikunterrichts in der Oberstufe fest: (Siehe Kapitel: *Aufnahmekriterien für Inhalte in den Oberstufenlehrplan*)

- a) Grundausbildung
- b) Allgemeinbildung
- c) Spezialbildung

Aus dem Gesagten folgt, dass die mathematischen Inhalte nicht beliebig gewählt werden dürfen, sondern die Fähigkeiten, die in den Punkten a) bis c) enthalten sind, vermitteln müssen. Die folgenden Aufzählungen an Inhalten sind als Minimalforderung zu verstehen (vgl. Oberguggenberger 2002: 1-3).

Beim Punkt a) werden Grundfertigkeiten verlangt, deren Lehre bereits in der Volksschule begonnen und bis zur Matura fortgesetzt werden sollte. Inhaltlich wählt *Oberguggenberger* folgende Punkte:

Grundrechnungsarten, Bruchrechnen, Dezimalzahlen Prozentrechnen, Schlussrechnen, Gleichungen in einer Unbekannten aufstellen und lösen, elementare Geometrie: Fläche von Rechteck, Dreieck und Kreis, Volumen, Winkel, Modellbildung.

In Punkt b) wird hingewiesen, dass der Bezug zur Außenwelt, miteinbegriffen sind darin *Schlussrechnungen, Textaufgaben, Gleichungen und elementare Geometrie*, bereits in der Unterstufe herzustellen ist. In der Oberstufe sind Bezüge zur Physik, Wirtschaft und Wissenschaft herzustellen. Daraus ergeben sich beliebig viele Inhalte, die häufig integriert behandelt werden können. Eine Auswahl ist:

Fallgesetze, Ballistik, Flüssigkeitsvolumen im liegende Zylinder, radioaktiver Zerfall, Luftdruck, elementare Akustik, Graphentheorie, Input-Output Analyse, Optimierung, Bevölkerungswachstum, statistische Analysen.

Unter Spezialbildung, Punkt c), fasst *Oberguggenberger* Fertigkeiten zusammen, die für einen Einstieg in ein natur-, wirtschaftswissenschaftliches und technisches Studium notwendig sind. Er unterteilt Algorithmische Fertigkeiten, wie

Bruchrechnen, Kürzen, Rechnen mit Termen, Rechenregeln mit Wurzeln und Potenzen und inhaltliches Wissen wie:

1. Mengenlehre: Sprache der Mengenlehre (Mengenklammern, Durchschnitt, Vereinigung, Teilmengen)
2. Algebra: Lineare Gleichungssysteme in 2 bis 3 Variablen, Gaußsches Eliminationsverfahren.
3. Geometrie: Volumen und Oberfläche von Kugel, Kegel, Zylinder, Pyramide. Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Geraden- und Ebenengleichung, Anstieg, Achsenabschitte, Parameterdarstellung.
4. Analysis: Funktionsbegriff, Graph, kartesische Koordinaten. Alle elementare Funktionen und ihre Eigenschaften: Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmen, Wurzeln; Winkelfunktionen, zyklometrische Funktionen und ihre Anwendungen. Idee des Grenzwertes (bei Folgen und Funktionen). Begriff der Ableitung. Kenntnis der Ableitung der elementaren Funktionen und der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel. Bestimmtes und unbestimmtes Integral. Integral der elementaren Funktionen.
5. Statistik: Elementare Begriffe der beschreibenden Statistik, wie Histogramm, Mittelwert, Median, Idee der Wahrscheinlichkeit in ihrer frequentistischen Interpretation. Gaußsche Glockenkurve und ihre Bedeutung.

Für nicht notwendige mathematische Inhalte der Oberstufe hält *Oberguggenberger* Matrizen, endliche Gruppen und Restklassen sowie die kombinatorische (diskrete) Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl. *Oberguggenberger 2002: 3-6*). Allgemein ist dieser Ansatz der mathematischen Inhalte stark auf eine Vor-Universitäre Ausbildung gerichtet.

4.4.4 Beitrag Drei

Baptist und Winter hingegen fordern mathematische Inhalte, die eine vertiefende Allgemeinbildung fördern. Sie kritisieren die beiden Hauptblöcke, Analysis und Lineare Algebra Geometrie, die sich zu sehr an Veranstaltungen des universitären Mathematikstudiums orientieren. Laut deren Meinung liegt ein Missverständnis im Sinne der Wissenschaftsorientierung und allgemeiner Hochschulreife vor (siehe Kapitel *Aufnahmekriterien für Inhalte in den Oberstufenlehrplan*). SchülerInnen, die Mathematik oder ein mathematik-intensives Fach studieren, lernen die Analysis und die Lineare Algebra in der Hochschule von Grund auf und müssen den „Unterbau“ in der Schule nicht so dringlich beherrschen. Vielmehr ist eine breite Grundausbildung, die das Beherrschen

grundlegender Techniken und eine hohe Lernbereitschaft einschließt, nach *Baptist und Winter* eine bessere Studienvoraussetzung als Kenntnisse spezieller Gegenstände der Linearen Algebra und der Analysis (vgl. Baptist und Winter 2001: 16-17).

Sie fordern vor allem der Geometrie mehr Platz im Lehrplan der Oberstufe zukommen zu lassen. Die formale Lineare Algebra/Lineare Geometrie soll wieder zu einer Analytischen Geometrie werden. Die SchülerInnen sollen sehen, was sie denken. Zudem sollen auf Grund ihrer heuristischen Bedeutung Grundtechniken der Darstellenden Geometrie unterrichtet werden. Zusätzlich dazu soll diese im Hinblick auf Allgemeinbildung Fähigkeiten wie Sehen, Abbilden und Gestalten fördern.

Auf Grund Erfahrungen hinsichtlich Interesse von SchülerInnen können sich *Baptist und Winter* auch Elemente der Zahlentheorie, wie beispielsweise der Fermat-Eulersche Satz und seine Anwendung in der Kryptologie, in der Gymnasialen Oberstufe vorstellen (vgl. Baptist und Winter 2001: 17).

4.4.5 Beitrag Vier

Von *Winkler* stammen verschiedene Beiträge zu Inhalten des Oberstufenlehrplans. In seinem Beitrag *Auf welche mathematische Schulbildung möchte die Universität aufbauen können?* wird hauptsächlich auf Inhalte hingewiesen, die auf ein mathematisches oder technisches Studium vorbereiten sollen. Eine Revolutionierung neuer Inhalte fordert er in diesem Artikel nicht. Großteils wird auf die bereits etablierten verwiesen.

Der Funktionsbegriff und damit verbunden die elementaren funktionalen Zusammenhänge (linear, quadratisch, polynomial, exponentiell, logarithmisch, periodisch) sind eine der wichtigsten voruniversitären Inhalte. Das gleiche gilt für den Grenzwertbegriff und seinen wichtigen Erscheinungsformen (Konvergenz von Folgen und Reihen, Stetigkeit von Funktionen, Differential- und Integralrechnung). Grundsätzlich fordert er einen möglichst reichhaltigen innermathematischen wie auch außermathematischen Kontext bei der Beschäftigung mit schulischen Inhalten. Kritisch sieht er in diesem Sinne das Thema komplexe Zahlen. Dies erschöpft sich zu sehr in einem formalen Umgang mit der imaginären Größe. Vielmehr sollten mittels Polarkoordinaten, Drehstreckungen usw. Beziehungen zu Exponential- und

Winkelfunktion mitgeliefert werden. Nur so ist ein Inhalt ehrlich in die den Lehrplan einzubauen (vgl. Winkler 2010 2-3).

In seinem Artikel *Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht durch Förderung der Phantasie* werden nicht direkt Inhalte angesprochen, sondern die Vernetzung dieser hervorgehoben. *Winkler* weist auf die Aufgaben hin, die Inhalte zu erfüllen haben. Mathematische Inhalte des Oberstufenlehrplans sollen starke Verankerung in verschiedensten Wissensgebieten wie Naturwissenschaft, Ökonomie, Jurisprudenz, Informatik, Philosophie usw. haben. Für zukünftige mathematische ForscherInnen oder LehrerInnen sieht er im Regelunterricht keine anderen mathematischen Inhalte als für andere Personengruppen. Lediglich zusätzliche Arten von Förderunterricht. Ansonsten sieht *Winkler* konkret elementare Phänomene der Finanzmathematik sowie Grundprinzipien der Statistik als wichtige Bausteine für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Nachhaltigkeit und klare Denkmuster stehen dabei vor inhaltlicher Quantität. (vgl. Winkler 2009: 7-11)

4.4.6 Beitrag Fünf

Eine neue und, mit anderer Literatur verglichen, außergewöhnliche Idee stammt von *Baumann und Kirski*. Während der Grenzwertbegriff für viele ein unantastbarer Inhalt der Sekundarstufe II ist, stellen sie diesen in ihrem Artikel *Analysis ohne Grenzwert* nicht nur in Frage sondern liefern ein Konzept, mit dem er in der Schule ersetzt werden kann (vgl. Baumann und Kirski 2016 und 2017). Ausgangspunkt der Überlegungen war die empfundene Mühe der MathematiklehrerInnen, das Wesen des Grenzwertbegriffs jungen Menschen näher zu bringen. Dazu geben *Baumann und Kirski* wieder, dass der Grenzwert beim praktischen Rechnen nicht einmal benötigt wird (vgl. Baumann und Kirski 2017: 15). Wie sieht deren Lösung für eine Analysis ohne Grenzwert nun aus?

Anstatt eines, wie im Oberstufen Lehrplan aufgelistetes „intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert“ (vgl. BGBl 277/2004: 47), soll die Analysis mit hyperreellen Zahlen Einzug in den Lehrplan finden. Der wesentliche Unterschied zur Standartvorgehensweise liegt in den Begründungen. Anstelle des Prozesses der Grenzwertbildung wird hier stets mit konkreten Zahlen gearbeitet. Mit einbegriffen sind hier infinitesimale und infinite Zahlen, die betragsmäßig unendlich klein bzw. unendlich groß sind (vgl. Baumann und Kirski 2016: 6). Eine intensive Beschäftigung mit

hyperreeller Zahlen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Deshalb wird im Folgenden nur ein kurzer Überblick über wichtige Aussagen und Eigenschaft gegeben.

Bereits *Abraham Robinson* (1966) hat in seinem Buch *Nonstandard Analysis* gezeigt, dass der Körper, der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$, zu einem geordneten Körper erweitert werden kann. Darin enthalten sind insbesondere infinite und infinitesimale Zahlen. Insgesamt lassen sich dabei drei verschiedene Zahlentypen unterscheiden:

1. Die infinitesimalen Zahlen: Sie sind dem Betrag nach kleiner als jede positive reelle Zahl. Die Zahl Null ist mit die einzige reelle Zahl, die auch eine infinitesimale Zahl ist. Die übrigen sind von Null verschieden und nicht reell.
2. Die infiniten Zahlen: Sie sind dem Betrag nach größer als jede positive reelle Zahl. Eine hyperreelle Zahl x ist genau dann infinit, wenn x^{-1} infinitesimal und ungleich 0 ist.
3. Finite Zahlen: Jede nicht infinite hyperreelle Zahl wird finit genannt. Zu jeder finiten hyperreellen Zahl h existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl r , die zu x infinitesimal benachbart ist. Kurz gesagt. $h = r + \alpha$. Dabei ist r der reelle Teil und α der infinitesimale Teil von x .

(vgl. Baumann und Kirski 2016: 2)

Diese Unterscheidung ist wichtig, da bei hyperreellen Termen der numerische Wert des Ergebnisses häufig nicht von Bedeutung ist, sondern lediglich welche der 3 erwähnten Zahlentypen das Ergebnis ist. Aus dieser Einsicht entstehen die Rechenregeln. Als Beispiel dient Abbildung 12, welche für die Addition jeweils den Typ des Ergebnisterms angibt. Dieselben Tabellen gibt es für die anderen Grundrechenarten. Somit ist $\alpha + \beta = \gamma$, was bedeutet, dass, wenn eine infinitesimale Zahl mit einer infinitesimalen Zahl addiert wird, eine infinitesimale Zahl das Ergebnis ist.

+	β	γ	g	B
α	γ	h	h	Γ
x	h	z	h	Γ
f	h	h	h	Γ
A	Γ	Γ	Γ	?

- A, B und Γ stehen für den infiniten Zahlentyp.
- f, g und h bezeichnen den finiten Zahlentyp mit den Spezialfällen α, β, γ für den infinitesimalen Zahlentyp

Abbildung 12: Additionstabelle hyperreelle Zahlen

und x, y und z für den reellen Zahlentyp

(Baumann und Kirski 2016: 8)

Im Artikel von *Baumann* und *Kirsiki* wird weiters gezeigt, wie man durch Vergrößerung mit einem „infinitesimalen Faktor“ lokale Tangentensteigerungen (und damit Ableitungen) ohne Grenzwertprozess errechnen kann. Ohne genauer darauf einzugehen, ist dies deren Hauptargument:

„Im Gegensatz zur Grenzwertanalyse kann man wirklich Regeln errechnen. Man braucht sie nicht mehr zu vermuten, um sie danach mit einem Grenzprozess zu bestätigen. „

(Baumann und Kirski 2017: 15)

Kritik hinsichtlich dem von *Baumann* und *Kirski* vorgestellten Konzept kommt von *Horst Hirscher*. Das Argument, dass der Grenzwert zu schwierig ist, widerspricht er mit dem von *J.S. Bruner* (siehe Kapitel *Weitere Sinnesaspekte in der Mathematikdidaktik*) entworfenen Konzept der fundamentalen Ideen und des Spiralprinzips. Der Grenzwertbegriff ist historisch und ideengeschichtlich unmittelbar mit der Entstehung der Analysis verbunden und somit eine fundamentale Idee dieses Gebietes (vgl. *Hirscher* 2017: 34-35). *Hirscher* lehnt die Idee, hyperreelle Zahlen als Inhalt des Mathematik-Oberstufenlehrplans einzuführen, nicht grundsätzlich ab. Für ihn scheint die Nonstandard-Analysis aber bislang kein geeigneter Ersatz für die Standard-Analysis zu sein. Gleichwohl sieht er den Grenzwertbegriff als zu wichtig und fest verortet an, um diesen aus der Analysis im Lehrplan zu entfernen (vgl. *Hischer* 2017: 35-36).

4.4.7 Fazit der Diskurse

Fischer sagt, dass inhaltliche Diskussionen häufig zu oberflächlich behandelt werden (vgl. *Fischer* 2012b 2-4). Dies ist bei den eben genannten Beiträgen nicht immer zu verneinen. Zu betonen ist, dass ein Diskurs über mathematische Inhalte stattfindet. Wenngleich dieser eher gering ausfällt. Der Großteil der Forderungen bezieht sich auf Schwerpunktsetzung der bisher bereits enthaltenen mathematischen Inhalte des Oberstufenlehrplans. Vielmehr wird über die dahinterliegenden Eigenschaften, die die Inhalte erfüllen und leisten sollen, diskutiert. Dies ist in Zeiten der Kompetenzorientierung nicht verwunderlich. Radikalen Ideen hinsichtlich der Umgestaltung von Lehrinhalten wird in der Mathematikdidaktik kritisch gegenüber gestanden. Wie bereits *Kaiser* erwähnt, ist die Tradition ein zu starker Faktor für die Auswahl. Zudem ist der aufbauende Charakter der Mathematik ein Mitgrund, warum man Themen wie die Differential- und Integralrechnung im Schulunterricht nicht einfach weglassen und stattdessen aktuellere Themen behandeln kann. Diese sind die Fundamente für große Teile der Mathematik (vgl. *Cap* 2017: 8). Daraus lässt sich schließen, dass bei den mathematischen Inhalten des Oberstufenlehrplans in Zukunft weiter nur kleine Änderungen vorgenommen werden

5 Resümee

Sinn-Aspekte sind eine subjektive Auswahl von Eigenschaften, die verschiedene Personen wiedergeben. Letztlich ist es schwierig vorherzusagen, wann und ob eine bestimmte Person einen Sinn hinter den gelernten Inhalten der Mathematik sieht. *Fischer* erwähnt diese Situation explizit und sagt, dass dies jede/r für sich selbst entscheiden muss. Durch die von *Fischer* erwähnten Aspekte, sind vielseitige Betrachtungsweisen der Inhalte möglich. Sie ermöglichen eine differenzierte Anschauung, wodurch mehrere Empfindungen der Lernenden angesprochen und somit ein Sinngefühl geschaffen werden kann. Dass nicht jeder Mensch alle Inhalte für gleich wichtig empfindet, ist kein Drama sondern nur logisch. Trotzdem sollen sich die Inhalte des Mathematik-Oberstufenlehrplans, in gewissen Maße, an den Menschen und dessen Leben orientieren. Auf Grund der scheinbar unendlichen Heterogenität in Bezug auf das Leben einzelner, wird ein Lehrplan immer mit Kritik betrachtet werden. Das Kriterium Kommunikationsfähigkeit mit Experten und der Allgemeinheit stellt trotz alledem eine Basis, um anhand diesem, mögliche Neuerungen einzuführen. Wie diese auszusehen haben und wann eine Neuerung nötig ist, darüber haben Bildungsexperten zu entscheiden. Diese Experten sollten eine noch tiefere und offenere Diskussion führen um die Öffentlichkeit miteinzubinden. Eine breite öffentliche Diskussion über Inhalte, könnte positiven Druck erzeugen, um eine transparente Auswahl zu treffen. Selbst auf den ersten Blick, radikale Vorschläge, sollten nicht gleich verneint und mit vernichtender Kritik abgelehnt werden. Die Welt unterliegt einen ständigen Wandel und die Schule sollte mithierzien. Das Wesen und der grundlegende Gedanke der Mathematik dürfen dabei nicht verloren gehen.

6 Zusammenfassung

Diese Arbeit geht der Frage des Sinns mathematischer Inhalte in der Oberstufe nach. Immer wieder hört man von Personen, dies und jenes macht keinen Sinn, bzw. für was braucht man jene Inhalte. Um die Meinung der Öffentlichkeit besser zu erfassen, beschäftigt sich der erste Teil der Arbeit mit eben dieser. Dabei zeigte sich, dass die mathematischen Schulinhalte nicht einen so schlechten Ruf besitzen, wie ursprünglich angenommen. Speziell die Themen der Unterstufe werden als nützlich erachtet. Trotzdem ist eine klare Tendenz ersichtlich. Je älter die Personen und somit je komplexer die Inhalte werden, desto weniger anerkannt wird ein Sinn hinter eben jenen. Eine mögliche Erklärung kommt von *Tenbruck*, der dies mit der Änderung von Bedeutungs- und Nutzungswert der Mathematik beschreibt.

Anschließend behandelt die Arbeit bestimmte Sinnaspekte, welche von *Roland Fischer* ausgewählt wurden. Bei diesen Aspekten wird beispielhaft aufgezeigt, welchen Sinn man mathematischen Inhalten aus verschiedenen Sichtweisen geben kann. Diese werden von verschiedenen Personen als unterschiedlich wichtig empfinden. Deshalb wird ein Mix aus jenen und, am Ende des Kapitels überblicksmäßig ergänzten, anderen Sinnaspekten der Fachdidaktik empfohlen.

Der letzte Teil behandelt Aufnahmekriterien für sinnhafte mathematische Inhalte des Oberstufenlehrplans. *Fischer* empfiehlt Kommunikationsfähigkeit mit Experten und der Allgemeinheit als ein Hauptkriterium. Dies impliziert nicht direkt die Inhalte, sondern fordert einen öffentlichen Diskurs über diese. Dieser Diskurs wird in der Mathematik zwar geführt, aus verschiedenen Gründen, wird die Forderung für den Austausch von Inhalten im Lehrplan nur marginal gebracht. Vorgeschlagene große Umbrüche werden von anderen Mathematikern meist nur als Ergänzung zu den aktuellen Inhalten gesehen und nicht als Ersatz. Dies wird sich wohl auch in Zukunft nicht ändern.

7 Literaturverzeichnis

- Andelfinger, B. (1990): LehrerInnen- und LernerInnenkonzepte im Analysisunterricht. Ansätze zu ihrer Beschreibung und Interpretation. In: Deschauer, S., Körner, H., Meyer, J., König G. (Hrsg.): Der Mathematikunterricht. 36(3). 29-44. Berlin.
- Baptist, P., Winter, H. (2001): Überlegungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Oberstufe des Gymnasiums. In: Tenorth, H-E. (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe. Mathematik–Deutsch–Englisch. 54-77. Weinheim.
- Baumann, P., Kirski, T. (2017): Analysis ohne Grenzwert!. In: Vohns, A. (Hrsg.): Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. 102. 15-16. Berlin.
- Baumann, P., Kirski, T. (2016): Analysis mit hyperreellen Zahlen. In: Vohns, A. (Hrsg.): Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. 100. 6-16. Berlin.
- Blum, W. (1985): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Kahle (Hrsg.): Mathematische Semesterbericht. Zur Pflege des Zusammenhangs zwischen Schule und Universität. 195-232. Göttingen.
- Borneleit, P., Henn, H. W., Danckwerts, R., Weigand, H. G. (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Verkürzte Fassung. In: Brunner, E., Gasteiger, H., Hußmann, S. (Hrsg.): Journal für Mathematik-Didaktik. 22(1). 73-90. Berlin.
- Borneleit, P., Henn, H. W., Danckwerts, R., Weigand, H. G. (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Tenorth, H.E. (Hrsg.): Kerncurriculum Oberstufe. 26-53. Weinheim.
- Bruner, J. S. (1973): Der Prozess der Erziehung. Düsseldorf.
- Cap, A. (2017): Skriptum. Vorlesung Aspekte der Mathematik. Wien.
- Czuber, E. (1898): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Leipzig.
- Diesterweg, A. (1962): Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer und andere didaktische Schriften. Berlin.

Embacher, R. (2014): Wie gut bereitet der schulische Mathematikunterricht auf Hochschule/Universität vor?. Vortrag gehalten am 30. April 2014. Universität Wien. Wien.

Engel, J. (2009): Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. In: Engel, J. (Hrsg.): Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende. Heidelberg.

Engel, J., Sproesser, U. (2013): Mathematik und der Rest der Welt. In: Sprenger, J., Wagner, A., Zimmermann, M. (Hrsg.): Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweise vom Kindergarten bis zur Hochschule. 145-159. Wiesbaden.

Epstein, D., Mendick, H., Moreau, M. P. (2010): Imagining the mathematician: Young people talking about popular representations of maths. In: Studies in the Cultural Politics of Education. 31(1). 45-60.

Feiertag, A. (2008): Der Alltag, in Formeln gefasst. In: Der Standard. 18.03.2008. online einsehbar unter: <http://derstandard.at/3269937/Der-Alltag-in-Formeln-gefasst> (15.03.2018)

Fischer, R. (1982): Sinn mathematischer Inhalte und Begriffsentwicklungen im Analysis Unterricht. In: Brunner, E., Gasteiger, H., Hußmann, S. (Hrsg.): Journal für Mathematik-Didaktik. 3(4). 265-294. Berlin.

Fischer, R. (1996): Perspektiven des Mathematikunterrichts. In: Zentralblatt Didaktik für Mathematik. 2. 42-46.

Fischer, R. (2003): Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft. In: Erziehung und Unterricht. 5(6). 559-566.

Fischer, R. (2004): Bedeutungs- und Nutzungswert der Mathematik. In: Lengnink, K., Prediger, S., Siebel, F. (Hrsg.): Mathematik für Menschen. Festschrift für Rudolf Wille. Bremen/Darmstadt.

Fischer, R. (2006): Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung der Mathematik. München.

- Fischer, R. (2012a): Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen. In: Fischer, R., Greiner, U., Bastel, H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. 9-17. Linz.
- Fischer, R. (2012b): Bildung als Aushandlung von Bildung. In: Fischer, R., Greiner, U., Bastel, H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Bildung. 1-18. Linz.
- Fischer, R., Malle, G., Bürger H. (1985): Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim.
- Forsa Deutschland (2010): „Rechnen in Deutschland“. Stiftung Rechnen (Hrsg.). Berlin.
- Freudenthal, H. (1974): Mathematik als pädagogische Aufgabe. 2. Stuttgart.
- Grater, D. (2017): Warum wir über die Mathe-Zentralmatura reden sollten. In: Der Standard. 6.09.2017. Online einsehbar unter: <https://derstandard.at/2000063588988/Warum-wir-ueber-die-Mathe-Zentralmatura-reden-sollten> (15.03.2018)
- Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. (1998): Einstellung gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: Brunner, E., Gasteiger, H., Hußmann, S. (Hrsg.): Journal für Mathematik-Didaktik. 19-45. Berlin.
- Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim.
- Hirsch, H. (2017): „Grenzwertfreie Analysis“ in der Schule via „Nonstandard Analysis“. In: Vohns, A. (Hrsg.): Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. 103. 31-36. Berlin.
- Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. In: Knoche, N., Scheid, H. (Hrsg.): Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg.
- Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B., Greefrath, G. (2015): Anwendungen und Modellieren. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H. (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. 357-383. Berlin/Heidelberg.
- Kaiser, H. (1998): Geschichte der Mathematik für Schule und Unterricht. Wien.

- Kilpatrick, J., Davis, R.B. (1993): Computers and curriculum change in mathematics. In: Keitel, C., Ruthven, K. (Hrsg.): Learning from computers: Mathematics education and Technology. 203-221. Berlin.
- Kroll, W. (1981): Der Mittelwertsatz und die sogenannten Anwendungen der Differentialrechnung. Eine fachdidaktische Analyse mit Vorschlägen der Behandlung im Unterricht. Hessen.
- Lengnink, K. (2002): Mathematisches in der Kommunikation. In: Prediger, S., Lengnink, K., Siebel, F. (Hrsg.): Mathematik und Kommunikation.. 121-137. Mühlthal.
- Lernquadrat (2016): „Die Meinung der Schüler“ – So beurteilen Österreichs Jugendliche das Lernen und die Schule. Lernquadrat (Hrsg.). Wien.
- Loos, A., Ziegler, G. (2015): Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H., (Hrsg.): Handbuch der Mathematik. 3-19. Berlin.
- Mayer, F. (2011): Spezifische Methoden für historische Aspekte im Mathematikunterricht Mögliche Ziele und Beispiele. Diplomarbeit. Universität Wien. Wien.
- NDR (2017): Mathematik im Alltag. 19.04.2017. Online einsehbar unter: <http://www.ndr.de/ratgeber/verbraucher/Mathematik-im-Alltag,zahlen150.html> (15.03.2018)
- Neubrand, M. (2010): Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H. (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. 51-77. Heidelberg.
- Oberguggenberger, M. (2002): Inhalte des Mathematikunterrichts in der Oberstufe. Rudiment einer Diskussionsgrundlage. Innsbruck.
- Peschek, W. (2000): Der Bildungsauftrag des Mathematikunterrichts in der Unterstufe und in der Oberstufe. Klagenfurt.
- Scholz, E. (1996): The Doublesided Nature of Mathematics. In: Jahnke, H.N. (Hrsg.): History of Mathematics and Education. Ideas and Experiences. 275-287. Göttingen.

Schwill, A. (1993): Fundamentale Ideen der Informatik. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 25(1). 20-31.

Sepp, R. (2016): Warum nicht eine freiwillige Mathematik-Matura. In: Der Standard. 07.06.2016. Online einsehbar unter: <https://derstandard.at/2000038342667/Warum-nicht-eine-freiwillige-Mathematik-Matura> (15.03.2018)

Skovsmose, O. (1998): Linking mathematics education and democracy: Citizenship, mathematical archaeology, mathemacy and deliberative interaction. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 30(6). 195-203.

Söser, K. (2013): Was ist sinnvoller Mathematik-Unterricht. 13.03.2013. Online einsehbar unter <http://www.kurtsoeser.at/2013/03/13/was-ist-sinnvoller-mathematik-unterricht/> (15.03.2018)

Tenbruck, F. H. (1975): Der Fortschritt der Wissenschaft als Trivialisierungsprozess. In: Stehr, N., König, R. (Hrsg.): Wissenschaftssoziologie. Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie. Sonderheft 18. 14-47. Köln.

Tietze, U. (1997): Fundamentale Ideen. In: Tietze, U., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen der Didaktik der Analysis. 37-42. Braunschweig/Wiesbaden.

Aue, V., Frebort, M., Hohenwarter, M., Liebscher, M., Sattlberger, E., Schirmer, I., Siller, H. S., Vormayr, G., Weiß, M., Willau, M. (2018): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen – gültig für alle Schüler/innen die ab dem Haupttermin 2018 maturieren (Stand: Oktober 2015). Redaktionelle Änderungen für die Neuauflage: Gurtner, G., Kramer, S., Steinlechner-Wallpach, G.. Online einsehbar unter: <https://www.srdp.at/downloads/dl/gueltig-ab-maturatermin-2018-die-standardisierte-schriftliche-reifepruefung-in-mathematik>. (15.03.2018)

Winkler, R. (2007): Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht. Wien.

Winkler, R. (2009): Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht durch Förderung der Phantasie. Wien.

Winkler, R. (2010): Auf welche mathematische Schulbildung möchte die Universität aufbauen können? Stellungnahme der TU Wien. Wien.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Vohns, A. (Hrsg.): Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. 21(61). 37-46. Berlin.

Lehrplan:

Verordnung der Bundesministerin für Bildung, Wissenschaft und Kultur, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen geändert wird; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht, veröffentlicht durch Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich Jahrgang 2004, ausgegeben am 8. Juli 2004 (**BGBl 277/2004**).